

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

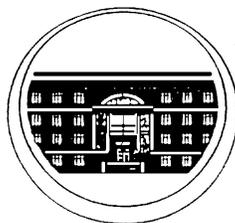
ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

ТОМ 15

№ 4

2009



ЕКАТЕРИНБУРГ

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 15, № 4.** Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. 304 с.

ISSN 0134-4889

**Главный редактор** чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

**Зам. гл. редактора** В. В. Кабанов

**Редакционная коллегия**

Н. В. Величко, Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин,  
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов,  
О. Н. Ульянов (*отв. секретарь*)

**Редакционный совет**

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,  
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,  
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,  
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,  
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

**Отв. редактор выпуска** М. И. Гусев



## СОДЕРЖАНИЕ

АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ КУРЖАНСКИЙ ( <i>К семидесятилетнему юбилею</i> ) . . . . .	5
<b>М. Э. Аббасов, В. Ф. Демьянов.</b> Условия экстремума негладкой функции в терминах экзостеров икоэкзостеров . . . . .	10
<b>Б. И. Ананьев.</b> Коррекция движения статистически неопределенной системы при коммуникационных ограничениях . . . . .	20
<b>В. И. Бахтин, В. В. Гороховик.</b> Условия оптимальности первого и второго порядка в задачах векторной оптимизации на метрических пространствах . . . . .	32
<b>В. И. Бердышев.</b> Видимость объекта для группы наблюдателей с неточно заданными координатами . . . . .	44
<b>Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова.</b> Оптимальное наблюдение при постоянно действующих возмущениях . . . . .	52
<b>С. А. Ганебный, А. И. Красов, В. С. Пацко, М. А. Смольникова.</b> Преодоление самолетом препятствий по высоте в условиях ветрового возмущения . . . . .	69
<b>М. И. Гусев.</b> Оценки множеств достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями . . . . .	82
<b>А. Р. Данилин, А. П. Зорин.</b> Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления . . . . .	95
<b>Д. С. Завалицин, Г. А. Тимофеева.</b> Исследование математической модели регулируемого перекрестка . . . . .	108
<b>А. Ф. Клейменов, Д. Р. Кувшинов, С. И. Осипов.</b> Численное построение решений Нэша и Штакельберга в линейной неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц . . . . .	120
<b>Е. К. Костоусова.</b> Об ограниченности и неограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных дифференциальных систем . . . . .	134
<b>Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова.</b> Дифференциальная игра сближения-уклонения. Стохастический поводырь . . . . .	146
<b>Н. А. Красовский, А. М. Тарасьев.</b> Поиск точек максимума векторного критерия с декомпозиционными свойствами . . . . .	167
<b>Н. Ю. Лукоянов.</b> Минимаксные и вязкостные решения в задачах оптимизации наследственных систем . . . . .	183
<b>В. И. Максимов.</b> Об одной задаче отслеживания заданной траектории . . . . .	195
<b>О. И. Никонов.</b> О нетрадиционных задачах портфельного управления . . . . .	204
<b>Е. С. Половинкин.</b> О построении тел постоянной ширины, содержащих заданное множество . . . . .	215

---

<b>А. Н. Сесекин, Ю. В. Фетисова.</b> Функционально-дифференциальные уравнения в пространстве функций ограниченной вариации .....	226
<b>В. Д. Скарин.</b> Аппроксимационные и регуляризирующие свойства расширенных штрафных функций в выпуклом программировании .....	234
<b>В. Н. Ушаков, Д. К. Михалев, И. В. Байдосов.</b> К вопросу о решении игровой задачи о сближении в фиксированный момент времени .....	251
<b>Т. Ф. Филиппова.</b> Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением .....	262
<b>А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов.</b> Метод итераций в задаче маршрутизации с внутренними потерями .....	270
<b>А. А. Чикрий, А. А. Белоусов.</b> О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями .....	290

**АЛЕКСАНДР БОРИСОВИЧ КУРЖАНСКИЙ**  
(*К семидесятилетнему юбилею*)

19 октября 2009 г. исполнилось 70 лет выдающемуся российскому математику и механику, специалисту в области процессов управления, действительному члену Российской академии наук Александру Борисовичу Куржанскому.

Становление А. Б. Куржанского как ученого и педагога, большая часть его научной биографии связаны со Свердловском. В 1957 г. после окончания с медалью средней школы № 1 он поступил на энергетический факультет Уральского политехнического института (УПИ). В УПИ в эти годы на кафедре высшей математики под руководством Е. А. Барбашина сформировался сильный коллектив специалистов. Профессор Н. Н. Красовский, возглавивший эту кафедру в 1958 г., читал лекции студентам энергофака и вел упражнения в группе, где учился Куржанский. Именно с этого времени началось увлечение Александра Борисовича математикой. Будучи студентом УПИ, он одновременно посещает лекции на заочном отделении физико-математического факультета Уральского госуниверситета им А. М. Горького, где сдает экзамены по всем основным курсам. Защитив в 1962 г. в УПИ диплом с отличием, А. Б. Куржанский продолжил обучение в аспирантуре математико-механического факультета университета под руководством Н. Н. Красовского. После защиты в 1965 г. кандидатской диссертации работал на кафедре прикладной математики УрГУ.

С 1967 г. А. Б. Куржанский — сотрудник Свердловского отделения Математического института имени В. А. Стеклова АН СССР (ныне Институт математики и механики Уральского отделения РАН). В 1971 г. он успешно защищает докторскую диссертацию “Управление экстремально связанным движением и позиционное наблюдение”. Все это время он продолжает читать лекции и вести семинары в университете, активно работает с дипломниками и аспирантами. В 1973 г. он возглавляет созданную в институте лабораторию (позднее отдел) оптимального управления, состоящую из его учеников, выпускников УрГУ. А. Б. Куржанский и его ученики успешно развивают ряд актуальных направлений теории управления и наблюдения в условиях неопределенности. В 1977 г. А. Б. Куржанский был назначен директором института, сменив на этом посту академика Н. Н. Красовского. Директором ИММ он проработал до 1983 г., много сил и времени отдав укреплению авторитета ведущих научных направлений института, развитию его международных контактов, оснащению современной вычислительной техникой. В 1981 г. А. Б. Куржанский избран членом-корреспондентом, а в 1990 г. — действительным членом АН СССР по Отделению механики и процессов управления.

Работы А. Б. Куржанского получили широкое международное признание. Одним из свидетельств этого стало полученное им по результатам международного конкурса приглашение возглавить методологическую программу “Системы и принятие решений” в Международном институте прикладного системного анализа (Лаксенбург, Австрия). В этом институте А. Б. Куржанский проработал с 1984 по 1992 г., возглавляя программу и созданный в ее рамках проект “Динамические системы”. Пребывание Александра Борисовича на этом посту способствовало значительному укреплению авторитета программы и института в целом. К работе в проектах программы он сумел привлечь ведущих ученых Австрии, СССР, США, Франции, Японии и других стран. В этот период при его непосредственном участии было организовано несколько десятков научных конференций, издано большое количество научных статей и ряд

монографий. В течение нескольких лет А. Б. Куржанский был одновременно заместителем директора института. В 1992 г. он был удостоен звания Почетного ученого (Honorary Scholar) института.

С 1992 г. А. Б. Куржанский — профессор Московского государственного университета, организатор и заведующий кафедрой системного анализа на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ.

А. Б. Куржанский — автор более 200 научных работ<sup>1</sup>, в том числе ряда монографий, опубликованных в ведущих отечественных и зарубежных изданиях. Он лауреат Ленинской премии 1976 г. за цикл работ по математической теории управления (совместно с Н. Н. Красовским, Ю. С. Осиповым, А. И. Субботиным).

Широк и разнообразен круг научных интересов А. Б. Куржанского. Ему принадлежат фундаментальные результаты в области теории дифференциальных уравнений и их приложений, теории оптимизации, теории управления и оценивания параметров движения, обратных задач динамики, методов математического моделирования и системного анализа.

Большой цикл работ Александра Борисовича посвящен развитию методов решения задач управления при наличии функциональных ограничений в классах обычных и импульсных управлений. В этих исследованиях широко применялся аппарат выпуклого анализа. Впервые в его работах были поставлены и решены задачи управления импульсными системами в классе распределений высокого порядка сингулярности. Им был установлен принцип двойственности для дифференциально-игровых задач управления и задач позиционного наблюдения, распространявшийся на указанные классы задач развитую Н. Н. Красовским теорию двойственности задач программного управления и наблюдения.

Появившаяся в работах А. Б. Куржанского по теории двойственности концепция позиционного наблюдения привела его в дальнейшем к созданию и развитию теории гарантированного апостериорного наблюдения состояний и параметров динамических систем по результатам наблюдений. В рамках данной теории оценки состояний динамических систем с неопределенными возмущениями по данным наблюдений формируются апостериори по ходу процесса наблюдения в виде функций (вообще говоря, многозначных) от наблюдаемого сигнала. Характеризующие оценки уравнения минимаксной фильтрации возникают как альтернатива классическим соотношениям стохастической фильтрации, полученным в работах А. Н. Колмогорова, Н. Винера, Р. Калмана. Они находят все большее применение в задачах навигации, управления движением механических систем, в инженерии, биомедицине, в решении проблем, связанных с изучением окружающей среды.

Исследование свойств и описание динамики минимаксных оценок, разработка вычислительных процедур для их построения, применение в процедурах позиционного управления по неполным данным в условиях противодействия и помех составили основу монографии А. Б. Куржанского “Управление и наблюдение в условиях неопределенности”, изданной в 1977 г. в издательстве “Наука”. Эта монография стала первой книгой на русском языке, посвященной систематическому изложению теории гарантированного апостериорного оценивания и ее приложений в задачах управления при неполной информации. Она вызвала большой интерес у теоретиков и специалистов в области приложений теории управления и в значительной степени определила направления дальнейших исследований по теории гарантированного оценивания и идентификации — активно развиваемого раздела современной теории управления.

В дальнейшем А. Б. Куржанским и его учениками методы гарантированного оценивания были распространены на системы со случайными возмущениями, имеющими не точно известные характеристики (например, первые и вторые моменты случайных величин или функции распределения). Такие системы принято называть статистически неопределенными. Теория гарантированного оценивания была развита также для систем с запаздыванием и систем, описываемых уравнениями в частных производных. В последнем случае особенно важное значение

---

<sup>1</sup>Список основных публикаций А. Б. Куржанского опубликован в журнале “Дифференциальные уравнения” (1999. Т. 35, № 11; Т. 45, № 11).

приобретает проблема регуляризации задач наблюдения в связи с неустойчивостью решений относительно помех. Для указанных систем была предложена конструкция вспомогательной задачи гарантированного оценивания, динамическая оценка в которой в форме уравнений минимаксного фильтра служит регуляризованным решением обратной задачи. Было показано, что данное решение включает в себя ряд методов регуляризации, известных в теории некорректных задач (метод квазиобращения Ж.-Л. Латтеса и Р. Лионса, метод регуляризации А. Н. Тихонова и др.).

Известный цикл работ А. Б. Куржанского и его учеников посвящен разработке конструктивных методов описания траекторных трубок динамических систем с неопределенными параметрами. Задачи описания траекторных трубок возникают во многих разделах теории управления и дифференциальных игр. В серии работ Александра Борисовича, посвященной проблемам многозначного анализа, были предложены некоторые аналоги дифференциальных уравнений в пространствах множеств и развита теория таких уравнений. Были созданы конструктивные методы описания семейств траекторий дифференциальных включений, сохраняющихся (выживающих) в течение предписанного времени в пределах заданного множества фазового пространства. Получены эволюционные уравнения (уравнения интегральной воронки), описывающие динамику во времени областей достижимости дифференциальных включений с фазовыми ограничениями. Введен и исследован новый класс эволюционных уравнений, в терминах решений которых дано описание конфликтно-достижимых областей управляемой системы, множеств разрешимости задачи об управлении при наличии фазовых ограничений и противодействия, семейств сильно и слабо инвариантных отображений.

Важное место в трудах А. Б. Куржанского занимает разработка вычислительных алгоритмов решения задач гарантированного оценивания и управления. Им созданы методы получения оценок (внешних и внутренних) для решений многозначных эволюционных уравнений (многозначных интегралов), возникающих в задачах гарантированного управления и оценивания при помощи множеств, зависящих от конечного (фиксированного) числа параметров — эллипсоидов. Была развита техника эллипсоидальных аппроксимаций выпуклых множеств и на ее базе получены эволюционные уравнения для внешних и внутренних эллипсоидальных оценок для различных многозначных интегралов, представляющих, в частности, прямые и попятные области (трубки) достижимости для систем высокой размерности. Эволюция эллипсоидальных оценок описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений, в начальные условия и правые части которых входят свободные (управляющие) параметры. Принципиальной особенностью развиваемых А. Б. Куржанским методов (в отличие от других известных результатов по эллипсоидальным оценкам в теории управления) является возможность получения сколь угодно точных двусторонних приближений решений путем пересечения внешних и объединения внутренних эллипсоидальных оценок по множествам управляющих параметров. Поскольку отдельные оценки вычисляются независимо, процедуры аппроксимации допускают эффективное распараллеливание вычислений. Подобные идеи были заложены в схему построения оценок при помощи другого конечно-параметрического класса множеств — параллелотопов. На основе предложенных алгоритмов были разработаны эффективные вычислительные процедуры и созданы пакеты прикладных программ для решения задач оценивания и синтеза управлений в линейных системах с неопределенными возмущениями.

Задачам синтеза управлений для систем с не полностью доступной или неточной информацией всегда уделялось особое место в работах А. Б. Куржанского и его научной школы. Значительным достижением последних лет стал сформулированный им принцип оптимальности для таких задач. Задачу синтеза оказалось возможным разделить на конечномерную задачу оценивания и бесконечномерную (в классе траекторных трубок) задачу управления. Решение каждой из подзадач, получаемое посредством применения соответствующего варианта гамильтонова формализма, в линейном случае сводится к построениям в конечномерных пространствах.

Существенное продвижение в работах А. Б. Куржанского и его учеников из МГУ получе-

но в решении трудной проблемы синтеза управлений для импульсных систем. Разработанная теория синтеза опирается на обобщения вариационных неравенств Гамильтона — Якоби — Беллмана. В рамках созданной теории допускается использование “быстрых управлений”, содержащих импульсы высших порядков. Программный вариант подобных управлений изучался еще в ранних работах Александра Борисовича. Разработка теории синтеза импульсных управлений позволила в рамках единой формализации изучать и задачи управления для гибридных систем, содержащих скачкообразные перестройки состояний.

Многогранна и обширна научно-организационная деятельность А. Б. Куржанского. Он входит в состав редколлегии ряда ведущих отечественных и международных научных журналов и серий монографий издательств “Springer” и “Birkhäuser”. В качестве председателя и члена оргкомитетов и программных комитетов он принимал активное участие в организации и проведении многих международных конференций высокого уровня. Он выступал с пленарными и приглашенными докладами на конференциях, с лекциями и докладами во многих ведущих университетах и научных центрах в России и за рубежом.

А. Б. Куржанский возглавляет Национальный комитет России по автоматическому управлению, он член бюро Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления РАН, член национальных комитетов России по теоретической и прикладной механике и по системному анализу при Президиуме РАН. На протяжении ряда лет он был председателем экспертного совета ВАК России по математике и механике.

Высокий авторитет А. Б. Куржанского в международных научных кругах позволяет ему достойно представлять интересы нашей страны в международных организациях. Он давно и плодотворно работает в ИФАК (Международная федерация автоматического управления), входит в руководящий совет ИФАК. Александр Борисович удостоен знака Почетного деятеля этой федерации. Во многом благодаря его авторитету и энергии удалось провести в России в последние годы несколько крупных международных конференций ИФАК, привлечь ведущих мировых специалистов к участию в этих конференциях.

Работа со студентами и аспирантами всегда входила для А. Б. Куржанского в число основных приоритетов. С 1965 по 1984 г. он работал на математико-механическом факультете Уральского государственного университета им. А. М. Горького ассистентом, доцентом, профессором кафедры прикладной математики. Именно здесь раскрылся его талант педагога. Им было прочитано большое количество общих и специальных курсов по современным разделам математики. Увлеченность и эрудиция, глубина и оригинальность изложения материала всегда привлекали на его лекции и семинары сильных студентов. Среди его учеников более 30 докторов и кандидатов наук (в их числе несколько заведующих кафедрами и профессоров ведущих вузов), успешно занимающихся математическими исследованиями и преподавательской деятельностью в России и за рубежом.

Возглавив в 1992 г. созданную им кафедру системного анализа на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ, А. Б. Куржанский за короткий промежуток времени сумел собрать команду высококлассных специалистов, разработать программы и организовать обучение студентов по ряду новых перспективных направлений теории управления и системного анализа. На кафедре уделялось и уделяется много внимания не только теоретическим вопросам, но и приложениям системного анализа в механике, биологии, экологии, экономике и финансах. Кафедра стала одной из ведущих и популярных среди студентов на факультете. Все более заметную роль в жизни кафедры системного анализа играют молодые доценты и ассистенты, ее выпускники. Несмотря на большую занятость административной и научной работой в университете и в Академии наук, сам А. Б. Куржанский по сей день несет значительную лекционную нагрузку, читает для студентов кафедры несколько спецкурсов.

А. Б. Куржанский возглавляет известную научную школу по теории управления, в работе которой принимают участие сотрудники и аспиранты кафедры, а также его ученики из Екатеринбурга. В 1999 г. ему присвоено звание “Заслуженный профессор Московского государственного университета”.

Все прошедшие годы А. Б. Куржанский поддерживает тесные контакты с Институтом математики и механики УрО РАН, городом Екатеринбург и Свердловской областью. Он руководит научной тематикой отдела оптимального управления, состоящего из его учеников (среди которых 6 докторов наук), возглавляет ряд проектов, реализуемых в отделе. Ученики Александра Борисовича и руководство института всегда ощущали его искреннюю заинтересованность и деятельное участие в делах, постоянную поддержку и помощь при решении многих научных и организационных вопросов.

А. Б. Куржанский всегда был и остается настоящим патриотом России, глубоко и искренне переживает за судьбу страны. Он, человек широкой культуры и незаурядной эрудиции, прекрасно знаком с зарубежной и отечественной литературой, историей, классической музыкой.

Александр Борисович встречает свой юбилей полным творческой энергии, новых идей и планов, активно продолжает плодотворную научную и педагогическую работу.

Коллектив Института математики и механики, редколлегия журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”, ученики, коллеги и друзья сердечно поздравляют Александра Борисовича с юбилеем и желают крепкого здоровья, новых творческих открытий, успехов и благополучия ему и его близким.

*В.И.Бердышев, М.И.Гусев, Н.Н.Красовский, Ю.С.Осипов, В.Н.Ушаков, А.Г.Ченцов*

УДК 519.3+519.7

**УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА НЕГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ  
В ТЕРМИНАХ ЭКЗОСТЕРОВ И КОЭКЗОСТЕРОВ<sup>1</sup>****М. Э. Аббасов, В. Ф. Демьянов**

В настоящей статье обсуждаются понятия верхнего и нижнего экзостеров и коэкзостеров, выводятся необходимые условия безусловного экстремума негладкой функции. Необходимые условия минимума формулируются в терминах верхнего экзостера (коэкзостера), а необходимые условия максимума — в терминах нижнего экзостера (коэкзостера). При этом возникает задача преобразования верхнего экзостера (коэкзостера) в нижний и обратно. Это делается с помощью операции конвертирования (конвертора). Рассматриваются аппроксимации второго порядка, полученные с помощью коэкзостеров (верхнего и нижнего) второго порядка. Показывается, как можно конвертировать верхний коэкзостер второго порядка в нижний и обратно. Эта задача сводится к использованию оператора конвертирования первого порядка, но в пространстве более высокой размерности. Полученный результат позволяет строить методы второго порядка для оптимизации негладких функций (методы типа Ньютона).

Ключевые слова: негладкий анализ, недифференцируемая оптимизация, экзостер, коэкзостер, конвертор.

M. E. Abbasov, V. F. Demyanov. Extremum conditions for a nonsmooth function in terms of exhausters and coexhausters.

The notions of upper and lower exhausters and coexhausters are discussed and necessary conditions for an unconstrained extremum of a nonsmooth function are derived. The necessary minimum conditions are formulated in terms of an upper exhauster (coexhauster) and the necessary maximum conditions are formulated in terms of a lower exhauster (coexhauster). This involves the problem of transforming an upper exhauster (coexhauster) into a lower exhauster (coexhauster) and vice versa. The transformation is carried out by means of a conversion operation (converter). Second-order approximations obtained with the help of second-order (upper and lower) coexhausters are considered. It is shown how a second-order upper coexhauster can be converted to a lower coexhauster and vice versa. This problem is reduced to using a first-order conversion operator but in a space of a higher dimension. The obtained result allows one to construct second-order methods for the optimization of nonsmooth functions (Newton-type methods).

Keywords: nonsmooth analysis, nondifferentiable optimization, exhauster, coexhauster, converter.

**1. Введение**

Негладкий анализ сформировался как самостоятельный раздел и непосредственное продолжение классического (“гладкого”) анализа в 60–70-х годах XX столетия, хотя впервые негладкие задачи были поставлены и изящно решены еще П. Л. Чебышевым.

Исторически первыми глубоко изученными классами негладких функций (вначале в конечномерных пространствах) были классы выпуклых функций и функций максимума. Исследование этих функций привело к развитию *выпуклого анализа* и *теории минимакса* (см., например, [1, 2]). При этом оказалось, что основным инструментом исследования указанных классов функций является субдифференциал (представляющий собой выпуклое множество в сопряженном пространстве), с помощью которого можно, в частности, вычислить производные по направлениям (и тем самым получить аппроксимацию первого порядка функции в окрестности заданной точки), сформулировать условия минимума, найти направления наискорейшего спуска и построить численные методы.

Упомянутые свойства субдифференциалов выпуклых функций и функций максимума обусловили многочисленные попытки найти подобный выпуклый объект и в невыпуклом случае.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00360).

Различные обобщения понятия субдифференциала были предложены и исследованы. Среди наиболее удачных и популярных следует отметить, в первую очередь, субдифференциал Кларка (см. [3]), который представляет собой выпуклую оболочку субдифференциала Шора (см. [4]). Общая теория субдифференциалов в абстрактных пространствах построена в [5].

Идея сведения задачи минимизации произвольной функции к последовательности выпуклых задач была воплощена Б. Н. Пшеничным [6], который ввел понятия верхней выпуклой и нижней вогнутой аппроксимаций (в.в.а. и н.в.а.). А. М. Рубинов в [7] предложил рассматривать исчерпывающие семейства в.в.а. и н.в.а. Впоследствии (см. [8–10]) были введены понятия верхнего и нижнего экзостеров, представляющие двойственные объекты и позволяющие свести исходную оптимизационную задачу к последовательности выпуклых задач минимизации.

С помощью экзостеров описываются условия экстремума [11, 12].

В настоящей статье в разд. 2 обсуждаются понятия верхнего и нижнего экзостеров, с помощью которых строятся положительно однородные аппроксимация (первого порядка) приращения негладкой функции в окрестности данной точки. В разд. 3 вводятся понятия верхнего и нижнего коэкзостеров, позволяющие получить аппроксимации приращения, непрерывные относительно самой точки, выводятся необходимые условия экстремума. Необходимые условия минимума формулируются в терминах верхнего коэкзостера, а необходимые условия максимума — в терминах нижнего коэкзостера. При этом возникает задача преобразования верхнего коэкзостера в нижний и обратно. Это делается с помощью операции конвертирования (конвертора). В разд. 4 рассматриваются аппроксимации второго порядка, полученные с помощью коэкзостеров (верхнего и нижнего) второго порядка. Показывается, как можно конвертировать верхний коэкзостер второго порядка в нижний и обратно. Эта задача сводится к использованию оператора конвертирования первого порядка, но в пространстве более высокой размерности. Полученный результат позволяет строить методы второго порядка для оптимизации негладких функций (методы типа Ньютона).

## 2. Экзостеры

### 2.1. Экзостеры положительно однородной функции

Пусть  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $X \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество. Функция  $f$  называется *дифференцируемой по направлениям по Дину* ( $D$ -д.п.н.) в точке  $x \in X$ , если для всех  $g \in \mathbb{R}^n$  существует конечный предел

$$f'_D(x, g) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g) - f(x)].$$

В этом случае имеет место разложение

$$f(x + \Delta) = f(x) + f'_D(x, \Delta) + o_x(\Delta),$$

где

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{o_x(\alpha \Delta)}{\alpha} = 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^n.$$

Функция  $f$  называется *дифференцируемой по направлениям по Адамару* ( $H$ -д.п.н.) в точке  $x \in X$ , если для всех  $g \in \mathbb{R}^n$  существует конечный предел

$$f'_H(x, g) = \lim_{[\alpha, g'] \rightarrow [0, g]} \frac{1}{\alpha} [f(x + \alpha g') - f(x)].$$

В этом случае имеет место разложение

$$f(x + \Delta) = f(x) + f'_H(x, \Delta) + o_x(\Delta),$$

где

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \frac{o_x(\Delta)}{\|\Delta\|} = 0.$$

Производные Дини и Адамара являются положительно однородными (п.о.) функциями (как функции направления  $g$ ). Таким образом, производные Дини и Адамара представляют собой положительно однородную аппроксимацию приращения функции  $f$  в окрестности точки  $x$ . Напомним, что функция  $h$  называется положительно однородной (первого порядка), если  $h(\lambda g) = \lambda h(g) \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall g \in \mathbb{R}^n$ .

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — дифференцируемая по направлениям (в смысле Дини или Адамара) функция и  $h(g) = f'(x, g)$  — соответствующая производная функции  $f$  в точке  $x$  по направлению  $g$ . Зафиксируем  $x \in X$ . Если  $h$  — полунепрерывна сверху как функция  $g$ , то (см. [13])  $h(g)$  может быть выражена как

$$h(g) = \inf_{C \in E^*} \max_{v \in C} (v, g), \quad (2.1)$$

где  $E^* = E^*(x)$  — семейство выпуклых ограниченных замкнутых множеств пространства  $\mathbb{R}^n$ , а если  $h(g) = f'(x, g)$  — полунепрерывная снизу как функция  $g$ , то  $h(g)$  может быть представлена в форме

$$h(g) = \sup_{C \in E_*} \min_{w \in C} (w, g), \quad (2.2)$$

где  $E_* = E_*(x)$  — семейство выпуклых ограниченных замкнутых множеств пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Семейство множеств  $E^*$  называется верхним экзостером функции  $f$  в точке  $x$  (соответственно, в смысле Дини или Адамара), а семейство  $E_*$  называется нижним экзостером функции  $f$  в точке  $x$  (в смысле Дини или Адамара).

Для произвольной п.о. функции  $h$ , для которой имеет место (2.1), семейство  $E^*$  называется верхним экзостером (функции  $h$ ). Если же имеет место (2.2), то семейство  $E_*$  называется нижним экзостером функции  $h$ .

Если  $h$  непрерывна по  $g$ , то оба представления (2.1) и (2.2) верны.

В [14] М. Кастеллани показал, что если функция  $h$  — липшицева, то она может быть записана и в виде

$$h(g) = h_1(g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} (v, g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

и в виде

$$h(g) = h_2(g) = \max_{C \in E_*} \min_{w \in C} (w, g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

где семейства множеств  $E^*$  и  $E_*$  ограничены в совокупности. Напомним, что семейство множеств  $E$  ограничено в совокупности, если найдется такой шар  $B$  в  $\mathbb{R}^n$ , что  $C \subset B \quad \forall C \in E$ . Функции  $h_1$  и  $h_2$  положительно однородны (как функции направления  $g$ ) и потому представляют собой однородные аппроксимации приращения функции  $f$  в окрестности точки  $x$ .

Экзостеры были введены в [8–10]. Там было показано, что если функция  $f$  достигает минимума на  $\mathbb{R}^n$  в точке  $x^*$  и если известен верхний экзостер  $E^*$  функции  $f$  в точке  $x^*$ , то необходимое условие безусловного минимума имеет вид

$$0_n \in C \quad \forall C \in E^*.$$

Пусть  $h$  непрерывна. Если найдется такое  $\delta > 0$ , что

$$B_\delta \in C \quad \forall C \in E^*,$$

где  $B_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \delta\}$ , то  $x^*$  — точка строгого локального минимума функции  $f$ .

Если  $x^{**}$  — точка максимума функции  $f$  на  $\mathbb{R}^n$  и известен нижний экзостер  $E_*$  функции  $f$  в точке  $x^{**}$ , то необходимое условие максимума в случае отсутствия ограничений принимает вид

$$0_n \in C \quad \forall C \in E_*.$$

Пусть  $h$  непрерывна. Если найдется такое  $\delta > 0$ , что

$$B_\delta \in C \quad \forall C \in E_*,$$

то  $x^{**}$  — точка строгого локального максимума функции  $f$ .

Таким образом, условия минимума описываются в терминах верхних экзостеров, а условия максимума — в терминах нижних экзостеров. Если  $h$  — непрерывная функция, то у нее существуют и верхний, и нижний экзостеры. Верхний экзостер назовем собственным для задачи минимизации и несобственным для задачи максимизации. Аналогично нижний экзостер является несобственным для задачи минимизации и собственным для задачи максимизации.

Если мы рассматриваем задачу на минимум, а известен только нижний экзостер, то возникает задача построения верхнего экзостера. Эта задача решается с помощью оператора конвертации (конвертора). Этот оператор был описан в [10]. Он действует следующим образом. Пусть задан верхний экзостер  $E$  (семейство компактных выпуклых множеств в пространстве  $\mathbb{R}^n$ ) п.о. функции  $h$ :

$$h(g) = \min_{C \in E} \max_{v \in C} (v, g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

Для любого  $g \in \mathbb{R}^n$  построим множество

$$\tilde{C}(g) = \text{clco} \left\{ w(C) \in C \mid (w(C), g) = \min_{w \in C} (w, g), C \in E \right\}. \quad (2.5)$$

Тогда семейство множеств  $E^\diamond = \{C = \tilde{C}(g) \mid g \in \mathbb{R}^n\}$  будет нижним экзостером функции  $h$ :

$$h(g) = \max_{C \in E^\diamond} \min_{v \in C} (v, g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n.$$

Верхние и нижние экзостеры определяются неоднозначно.

Заметим, что В. Роцина в [11] показала, что необходимые условия можно выписать и в терминах несобственного экзостера. К сожалению, полученные таким образом условия не являются конструктивными (например, с их помощью нельзя найти направления спуска и подъема).

## 2.2. Квазидифференцируемые функции

Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется (см. [13]) квазидифференцируемой в смысле Дини (Адамара) в точке  $x \in \mathbb{R}^n$ , если она дифференцируема по направлениям в смысле Дини (Адамара) в точке  $x$  и ее производная по направлению (соответственно, в смысле Дини или Адамара)  $f'(x, g)$  представима в виде

$$f'(x; g) = \max_{v \in \underline{\partial}f(x)} (v, g) + \min_{w \in \bar{\partial}f(x)} (w, g) \quad \forall g \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

где  $\underline{\partial}f(x) \subset \mathbb{R}^n$ ;  $\bar{\partial}f(x) \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклые компактные множества. Пара множеств  $\mathcal{D}f(x) = [\underline{\partial}f(x), \bar{\partial}f(x)]$  называется квазидифференциалом функции  $f$  в точке  $x$ . Квазидифференциал (как и экзостеры) определяется неоднозначно.

Из (2.6) легко получить формулы для верхнего и нижнего экзостеров. Действительно,

$$h(g) = f'(x; g) = \min_{w \in \bar{\partial}f(x)} \max_{v \in \underline{\partial}f(x)} (v + w, g) = \min_{w \in \bar{\partial}f(x)} \max_{v \in [w + \underline{\partial}f(x)]} (v, g) = \min_{C \in E^*} \max_{v \in C} (v, g),$$

где

$$E^* = \{C = w + \underline{\partial}f(x) \mid w \in \bar{\partial}f(x)\}. \quad (2.7)$$

Таким образом, множество (2.7) представляет собой верхний экзостер функции  $f$  в точке  $x$ .

Аналогично

$$h(g) = f'(x; g) = \max_{v \in \underline{d}f(x)} \min_{w \in \overline{d}f(x)} (v + w, g) = \max_{v \in \underline{d}f(x)} \min_{w \in [v + \overline{d}f(x)]} (w, g) = \max_{C \in E_*} \min_{w \in C} (w, g),$$

где

$$E_*(h) = \{C = v + \overline{d}f(x) \mid v \in \underline{d}f(x)\}. \quad (2.8)$$

Отсюда заключаем, что множество (2.8) представляет собой нижний экзостер функции  $f$  в точке  $x$ .

Таким образом, для квазидифференцируемых функций верхние и нижние экзостеры легко строятся с помощью квазидифференциала.

### 3. Коэкзостеры

#### 3.1. Кодифференцируемые функции

Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — открытое множество. Будем говорить, что функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  кодифференцируема в точке  $x$  в смысле Дини, если существуют такие выпуклые компакты  $\underline{d}f(x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$  и  $\overline{d}f(x) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , что

$$f(x + \Delta) = f(x) + \max_{[a, v] \in \underline{d}f(x)} [a + (v, \Delta)] + \min_{[b, w] \in \overline{d}f(x)} [b + (w, \Delta)] + o_x(\Delta), \quad (3.1)$$

где

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{o_x(\alpha \Delta)}{\alpha} = 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Здесь  $a, b \in \mathbb{R}$ ;  $v, w \in \mathbb{R}^n$ . Если в (3.2)

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \frac{o_x(\Delta)}{\|\Delta\|} = 0, \quad (3.3)$$

то функция  $f$  называется кодифференцируемой в смысле Адамара в точке  $x$ .

Пара  $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$  называется кодифференциалом функции  $f$  в точке  $x$ . Обратим внимание на то, что кодифференциал — это пара множеств в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Функция  $f$  называется непрерывно кодифференцируемой в точке  $x$ , если она кодифференцируема в некоторой окрестности точки  $x$  и если существует непрерывное по Хаусдорфу в этой точке кодифференциальное отображение  $Df(x) = [\underline{d}f(x), \overline{d}f(x)]$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Можно ввести понятие непрерывно квазидифференцируемой функции, однако класс непрерывно квазидифференцируемых функций совпадает с классом дифференцируемых функций и потому с точки зрения негладкого анализа интереса не представляет.

Из (3.1) имеем:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta) &= f(x) + \max_{[a, v] \in \underline{d}f(x)} \min_{[b, w] \in \overline{d}f(x)} [a + b + (v + w, \Delta)] + o_x(\Delta) \\ &= f(x) + \max_{C \in \underline{E}(x)} \min_{[b, w] \in C} [b + (w, \Delta)] + o_x(\Delta), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$\underline{E}(x) = \{C \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid C = [a, v] + \overline{d}f(x), [a, v] \in \underline{d}f(x)\}.$$

Аналогично получаем:

$$f(x + \Delta) = f(x) + \min_{[b, w] \in \overline{d}f(x)} \max_{[a, v] \in \underline{d}f(x)} [a + b + (v + w, \Delta)] + o_x(\Delta)$$

$$= f(x) + \min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a,v] \in C} [a + (v, \Delta)] + o_x(\Delta), \quad (3.5)$$

где

$$\overline{E}(x) = \{C \subset \mathbb{R}^{n+1} | C = [b, w] + \underline{d}f(x), [b, w] \in \underline{d}f(x)\}.$$

Функции

$$h_1(x, \Delta) = \max_{C \in \underline{E}(x)} \min_{[b,w] \in C} [b + (w, \Delta)] \text{ и } h_2(x, \Delta) = \min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a,v] \in C} [a + (v, \Delta)]$$

представляют собой аппроксимации приращения функции  $f$  в окрестности точки  $x$ . Однако, в отличие от функций  $h_1$  и  $h_2$  в (2.3) и (2.4), эти функции не являются положительно однородными (как функции  $\Delta$ ).

Но функции  $h_1(x, g)$  и  $h_2(x, g)$  в (2.3) и (2.4) являются разрывными, как функции  $x$ . Поэтому их применение для вычислительных целей затруднено. Выше были введены понятия непрерывно кодифференцируемых функций, и использование непрерывных кодифференциальных отображений позволяет обеспечить устойчивость и сходимость численных алгоритмов. Платой за это и становится потеря положительной однородности аппроксимации приращения.

Кодифференциалы были введены в [10]. Там же были получены необходимые условия минимума. Разложения (3.4) и (3.5) приводят к следующему обобщению понятия кодифференциала.

### 3.2. Верхние и нижние коэксостеры. Необходимое условие минимума

Пусть  $x \in X$  и функция  $f$  непрерывна в точке  $x$ . Будем говорить, что в точке  $x$  у функции  $f$  существует верхний коэксостер в смысле Дини, если имеет место разложение

$$f(x + \Delta) = f(x) + \min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a,v] \in C} [a + (v, \Delta)] + o_x(\Delta), \quad (3.6)$$

где  $\overline{E}(x)$  — семейство выпуклых компактов в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а  $o_x(\Delta)$  удовлетворяет (3.2). Если  $o_x(\Delta)$  в (3.6) удовлетворяет (3.3), то будем говорить, что в точке  $x$  у функции  $f$  существует верхний коэксостер в смысле Адамара.

Множество  $\overline{E}(x)$  называется верхним коэксостером функции  $f$  в точке  $x$ .

Будем говорить, что в точке  $x$  у функции  $f$  существует нижний коэксостер в смысле Дини (Адамара), если имеет место разложение

$$f(x + \Delta) = f(x) + \max_{C \in \underline{E}(x)} \min_{[b,w] \in C} [b + (w, \Delta)] + o_x(\Delta),$$

где  $\underline{E}(x)$  — семейство выпуклых компактов в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , а  $o_x(\Delta)$  удовлетворяет (3.2), (3.3). Множество  $\underline{E}(x)$  называется нижним коэксостером функции  $f$  в точке  $x$ . Понятие коэксостера было введено в [13].

**Теорема 1.** Пусть у функции  $f$  существует верхний коэксостер в точке  $x^*$ . Для того чтобы  $x^*$  была точкой минимума функции  $f$  на  $\mathbb{R}^n$ , необходимо, чтобы

$$0_{n+1} \in C \quad \forall C \in E^*(x^*),$$

где

$$E^*(x) = \{C \in \overline{E}(x) \mid \max_{[a,v] \in C} a = 0\}. \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Заметим, что множество  $E^*(x)$  непусто, так как из (3.6) (при  $\Delta = 0_n$ )

$$\min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a,v] \in C} a = 0.$$

Из (3.7) следует, что если  $C \in E^*(x)$ , то

$$a \leq 0 \quad \forall [a, v] \in C. \quad (3.8)$$

Доказательство будем вести от противного. Пусть  $x^*$  — точка минимума, но условие теоремы не имеет места, т. е. существует  $C_0 \in E^*(x^*)$ , такое что  $0_{n+1} \notin C_0$ . Тогда по теореме отделимости найдутся такие  $\gamma > 0$  и  $\bar{g} = [\delta, g] \in \mathbb{R}^{n+1}$  ( $\delta \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{R}^n$ ), что

$$(\bar{v}, \bar{g}) \leq -\gamma \quad \forall \bar{v} \in C_0. \quad (3.9)$$

При этом можно выбрать такое  $\bar{g}$ , что  $\delta \geq 0$ . Действительно, так как из (3.8)  $a \leq 0$ , то, взяв  $\bar{g} = -\bar{z}/\|\bar{z}\|$ , где  $\|\bar{z}\| = \min_{z \in C_0} \|z\|$ , получаем, что  $\delta \geq 0$ , поскольку первые компоненты для всех векторов из  $C_0$  неположительны. Из (3.9) имеем:

$$a\delta + (v, g) \leq -\gamma \quad \forall [a, v] \in C_0,$$

откуда

$$(v, g) \leq -\gamma - a\delta \quad \forall [a, v] \in C_0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(x^* + \alpha g) &= f(x^*) + \min_{C \in \bar{E}(x^*)} \max_{[a, v] \in C} [a + \alpha(v, g)] + o(\alpha) \leq f(x^*) + \max_{[a, v] \in C_0} [a + \alpha(-\gamma - a\delta)] + o(\alpha) \\ &= f(x^*) - \alpha\gamma + \max_{[a, v] \in C_0} [a(1 - \alpha\delta)] + o(\alpha). \end{aligned}$$

При достаточно малых  $\alpha > 0$  будет  $1 - \alpha\delta > 0$ , поэтому

$$\max_{[a, v] \in C_0} [a(1 - \alpha\delta)] = (1 - \alpha\delta) \max_{[a, v] \in C_0} a = 0.$$

Получаем

$$f(x^* + \alpha\delta) \leq f(x^*) - \alpha\gamma + o(\alpha).$$

Это неравенство противоречит тому, что  $x^*$  — точка минимума. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. Итак, для проверки точки  $x^*$  на минимум нужно проверить условие (3.7). Точка  $x^*$ , для которой выполняется условие (3.7), называется inf-стационарной точкой функции  $f$ .

Аналогично формулируется и доказывается необходимое условие максимума.

**Теорема 2.** Пусть у функции  $f$  существует нижний коэжзостер в точке  $x^{**}$ . Для того чтобы  $x^{**}$  была точкой максимума функции  $f$  на  $\mathbb{R}^n$ , необходимо, чтобы

$$0_{n+1} \in C \quad \forall C \in E_*(x^{**}),$$

где

$$E_*(x) = \{C \in \underline{E}(x) \mid \min_{[b, w] \in C} b = 0\}.$$

**З а м е ч а н и е 2.** Отметим, что всякая кодифференцируемая функция имеет верхний и нижний коэжзостеры (см. формулы (3.4) и (3.5)), но обратное не обязательно имеет место.

Будем говорить, что в точке  $x$  функция  $f$  имеет верхний коэжзостер второго порядка в смысле Дини, если справедливо представление

$$f(x + \Delta) = f(x) + \min_{C \in \bar{E}(x)} \max_{[a, v, A] \in C} \left[ a + (v, \Delta) + \frac{1}{2}(\Delta, A\Delta) \right] + o(\Delta^2), \quad (3.10)$$

где

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{o((\alpha\Delta)^2)}{\alpha^2} = 0 \quad \forall \Delta \in \mathbb{R}^n;$$

$\overline{E}(x)$  — семейство выпуклых компактов в  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$ . Если в (3.10)

$$\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \frac{o(\|\Delta\|^2)}{\|\Delta\|^2} = 0,$$

то говорят, что в точке  $x$  функция  $f$  имеет верхний коэксостер второго порядка в смысле Адамара.

Множество  $\overline{E}(x)$  называется верхним коэксостером (в смысле Дини или Адамара) второго порядка функции  $f$  в точке  $x$ . Аналогично можно утверждать, что в точке  $x$  функция  $f$  имеет нижний коэксостер второго порядка в смысле Дини, если справедливо представление

$$f(x + \Delta) = f(x) + \max_{C \in \underline{E}(x)} \min_{[a, v, A] \in C} \left[ a + (v, \Delta) + \frac{1}{2}(\Delta, A\Delta) \right] + o(\Delta^2), \quad (3.11)$$

где  $\lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{o((\alpha\Delta)^2)}{\alpha^2} = 0$ , для всех  $\Delta \in \mathbb{R}^n$ ;  $\underline{E}(x)$  — семейство выпуклых компактов в  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Если в (3.11)  $\lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \frac{o(\|\Delta\|^2)}{\|\Delta\|^2} = 0$ , то говорят, что в точке  $x$  функция  $f$  имеет нижний коэксостер второго порядка в смысле Адамара. Множество  $\underline{E}(x)$  называется нижним коэксостером второго порядка (в смысле Дини или Адамара) функции  $f$  в точке  $x$ . Без ограничения общности матрицы  $A$  можно считать симметричными.

Как и в случае эксостеров и коэксостеров первого порядка, приведенные выше разложения можно использовать для описания условий экстремума второго порядка. Существует хорошо разработанное исчисление эксостеров и коэксостеров первого и второго порядков (см. [10]).

При этом для задачи минимизации привлекается верхний коэксостер второго порядка (который является собственным для задач на минимум), а для задачи максимизации применяется нижний коэксостер второго порядка (являющийся собственным для задач на максимум). Естественно возникает задача конвертирования верхнего коэксостера второго порядка в нижний и обратно.

Обсудим, например, задачу конвертирования нижнего коэксостера в верхний.

### 3.3. Конвертор второго порядка

Введем (см. (3.11)) функцию

$$h(\Delta) = \max_{C \in \underline{E}} \min_{[a, v, A] \in C} \left[ a + (v, \Delta) + \frac{1}{2}(\Delta, A\Delta) \right]. \quad (3.12)$$

Здесь  $a \in \mathbb{R}$ ;  $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ ;  $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n) \in \mathbb{R}^n$ ;  $A = [a_{ij}]_{i,j=1:n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $a_{ij} = a_{ji} \forall i, j = 1 : n$ . Разложение (3.12) позволяет исследовать условия максимума второго порядка. Для того чтобы исследовать условия минимума, нам следует построить верхний коэксостер второго порядка. Для этого положим  $N = (n^2 + 3n + 2)/2$ ,  $g \in \mathbb{R}^N$ ,  $b \in \mathbb{R}^N$ ,

$$g(\Delta) = \left( 1, \Delta_1, \dots, \Delta_n, \Delta_1^2, \Delta_1\Delta_2, \dots, \Delta_1\Delta_n, \Delta_2\Delta_1, \Delta_2^2, \dots, \Delta_2\Delta_n, \dots, \Delta_{n-1}\Delta_n, \Delta_n^2 \right) \in \mathbb{R}^N, \quad (3.13)$$

$$(a, v, A) = \left( a, v_1, \dots, v_n, \frac{1}{2}a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, \frac{1}{2}a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2n}, \frac{1}{2}a_{33}, a_{34}, \dots, \right. \\ \left. \frac{1}{2}a_{n-1, n-1}, a_{n-1, n}, \frac{1}{2}a_{nn} \right) \in \mathbb{R}^N. \quad (3.14)$$

Для каждого  $C \in \underline{E}$  построим множество

$$C'(C) = \{b \in \mathbb{R}^N \mid b = b(a, v, A), [a, v, A] \in C\}$$

и введем семейство множеств  $\underline{E}' = \{C' \in \mathbb{R}^N \mid C' = C'(C), C \in \underline{E}\}$ . Рассмотрим функцию  $h_1 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$h_1(g) = \max_{C' \in \underline{E}'} \min_{b \in C'}(b, g).$$

Для функции  $h_1(g)$  множество  $\underline{E}'$  является нижним экзостером первого порядка. Применяя операцию конвертирования, построим верхний экзостер для этой функции: Для любого  $g \in \mathbb{R}^N$  положим (см.(2.5))

$$\widetilde{C}'(g) = \text{cl co} \left\{ w(C', g) \in C' \mid (w(C', g), g) = \min_{w \in C'}(w, g), C' \in \underline{E}' \right\}. \quad (3.15)$$

Тогда семейство множеств  $\overline{E}^{\diamond'} = \{C' = \widetilde{C}'(g) \mid g \in \mathbb{R}^N\}$  будет верхним экзостером для функции  $h_1(g)$ . Любой  $w(C', g)$  (см. (3.15)) можно представить в виде (см. (3.14))

$$w(C', g) = \left( a', v'_1, \dots, v'_n, \frac{1}{2}a'_{11}, a'_{12}, \dots, a'_{1n}, \frac{1}{2}a'_{22}, a'_{23}, \dots, a'_{2n}, \frac{1}{2}a'_{33}, a'_{34}, \dots, \right. \\ \left. \frac{1}{2}a'_{n-1, n-1}, a'_{n-1, n}, \frac{1}{2}a'_{nn} \right) \in \mathbb{R}^N. \quad (3.16)$$

Обозначим  $v' = (v'_1, \dots, v'_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A' = [a'_{ij}]_{i,j=1:n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $a'_{ij} = a'_{ji} \forall i, j = 1 : n$ ,  $w'(C', g) = [a', v', A'] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$ . Для любого  $g \in \mathbb{R}^N$  положим

$$\widetilde{C}(g) = \text{cl co} \left\{ w'(C', g) \in C' \mid w'(C', g) = [a', v', A'], C' \in \underline{E}' \right\}.$$

Поскольку  $h(\Delta) = h_1(g(\Delta))$ , то семейство множеств  $\overline{E} = \{C = \widetilde{C}(g(\Delta)) \mid \Delta \in \mathbb{R}^n\}$  будет верхним коэкзостером второго порядка для функции  $h(\Delta)$ :

$$h(\Delta) = \min_{C \in \overline{E}(x)} \max_{[a, v, A] \in C} \left[ a + (v, \Delta) + \frac{1}{2}(\Delta, A\Delta) \right].$$

Это разложение позволяет исследовать условия минимума.

Заметим, что при построении множества  $\overline{E}$  использовались не все  $g \in \mathbb{R}^N$ , а только  $g$  вида  $g = g(\Delta)$  (см. (3.13)).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
2. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
3. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Шор Н.З. О классе почти-дифференцируемых функций и одном методе минимизации функций этого класса // Кибернетика. 1972. № 4. С. 65–70.
5. Кусраев А.Г., Кутутеладзе С.С. Субдифференциалы. Теория и приложения. Новосибирск: Наука, 1992. 270 с.
6. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
7. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Элементы квазидифференциального исчисления // Негладкие задачи теории оптимизации и управления / ред. В.Ф. Демьянов. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. С. 5–127.
8. Demjanov V.F. Exhausters of a positively homogeneous function // Optimization. 1999. Vol. 45. P. 13–29.
9. Demjanov V.F. and Rubinov A.M. Exhaustive families of approximations revisited // From Convexity to Nonconvexity. Nonconvex Optim. Appl. / eds. R.P. Gilbert, P.D. Panagiotopoulos, P.M. Pardalos. Vol. 55. Dordrecht: Kluwer Scient. Publ., 2001. P. 43–50.

10. **Demyanov V.F.** Exhausters and convexifiers — new tools in nonsmooth Analysis // Quasidifferentiability and Related Topics / eds. V. Demyanov, A. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 85–137.
11. **Demyanov V.F., Roschina V.A.** Optimality conditions in terms of upper and lower exhausters // Optimization. 2006. Vol. 55, no. 5/6. P. 525–540.
12. **Демьянов В.Ф., Рощина В.А.** Обобщенные субдифференциалы и экзостеры в негладком анализе // Докл. РАН. 2007. Т. 416, № 1. С. 18–21.
13. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление М.: Наука, 1990. 432 с.
14. **Castellani M.** A dual representation for proper positively homogeneous functions // J. Global Optim. 2000. Vol. 16, no. 4. P. 393–400.

Аббасов Меджид Эльхан оглы  
студент  
С.-Петерб. гос. ун-т  
e-mail: abbasov.majid@gmail.com

Поступила 18.04.2009

Демьянов Владимир Федорович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. кафедрой  
С.-Петерб. гос. ун-т  
e-mail: vfd@ad9503.spb.edu

УДК 519.856.2

**КОРРЕКЦИЯ ДВИЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ ПРИ КОММУНИКАЦИОННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ<sup>1</sup>****Б. И. Ананьев**

Рассматривается задача коррекции движения управляемой системы, состоящая в минимизации терминального функционала в условиях статистической неопределенности помех и при неполной информации о состоянии системы. Используются множества достижимости уравнений фильтрации и прогнозирования, которые для данного момента времени однозначно определяются реализациями наблюдаемого сигнала и выбранного управления. Рассмотрена модификация задачи коррекции при коммуникационных ограничениях, в которой принимается во внимание ограниченная мощность цифрового канала передачи данных. Предполагается, что на объекте имеется вычислительный комплекс, позволяющий запоминать измеряемую информацию, обрабатывать ее с высокой степенью точности, передавать и принимать закодированные сигналы по каналам связи. Сигналы в центр управления и обработки информации (ЦУпОИ) поступают в дискретные моменты времени в виде слов ограниченной длины, состоящих из целых чисел. Для простоты канал связи предполагается бесшумным и не имеющим запаздывания. Кодированное устройство в канале связи используется для передачи информации об измеряемых параметрах объекта в ЦУпОИ и управляющего воздействия из ЦУпОИ на объект. В ЦУпОИ информация о параметрах декодируется и используется для расчета моментов коррекции и оптимального управления. Получены соотношения между точностью восстановления измеряемых параметров, оптимальным значением функционала, а также длиной передаваемого слова и частотой передачи. Ряд результатов проиллюстрирован на примере.

Ключевые слова: коррекция движения, программное управление, канал связи.

*B. I. Anan'ev. Motion correction of a statistically uncertain system under communication constraints.*

The problem of motion correction of a controlled system is considered. It is required to minimize a terminal functional under statistical uncertainty of the disturbance and incomplete information about the state of the system. Reachable sets of filtering and prediction equations are used; these sets are uniquely determined for a given time moment by the realizations of the observed signal and the chosen control. A modification of the correction problem under communication constraints is considered, in which the bounded capacity of the digital data transfer channel is taken into account. It is assumed that the object is equipped with a computation facility that can remember the measured information, process it with a high level of accuracy, transmit it, and receive coded signals via communication channels. Signals in the form of words of bounded length consisting of integers come to the control and information processing center (CIPC) at discrete time moments. For simplicity, the communication channel is assumed to be noise- and delay-free. The coding device in the communication channel is used for transmitting information about the measured parameters of the object to the CIPC and the control action from the CIPC to the object. In the CIPC, the information about the parameters is decoded and used for calculating the correction moments and optimal control. Relations between the reconstruction accuracy of the measured parameters and the optimal value of the functional are obtained as well as between the length of the transmitted word and the transmitting frequency. Several results are exemplified.

Keywords: motion correction, program control, communication channel.

**Введение**

Для модели управляемого возмущенного движения рассматривается минимаксная задача коррекции с терминальным функционалом при наличии как случайных, так и детерминированных помех в системе и канале измерения. Первоначальная цель управления в указанной задаче заключается в выборе такого воздействия, которое бы обеспечило минимакс величины математического ожидания отклонения объекта от номинального состояния в конечный момент времени. Не ограничивая общности, номинальным состоянием считаем нуль. Предполагается, что фазовый вектор объекта недоступен для непосредственного измерения, но по ходу процесса поступает некоторая дополнительная измерительная информация, позволяющая

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00341) и программы Президиума РАН "Математическая теория управления".

уменьшить степень неопределенности фазового вектора. Излагаемые ниже постановки при-  
мыкают к исследованиям [1–3]. Задачи коррекции движения в разных аспектах рассмат-  
ривались в работах [4–7]. В данной работе предлагается еще одна модификация задачи коррекции,  
которая возникла в связи с возрастанием за последнее время интереса к проблемам оценива-  
ния и управления при коммуникационных ограничениях. Это является следствием развития  
распределенных сетей управления с единым центром обработки информации, возможно на-  
ходящимся на значительном удалении от объектов наблюдения и управления. Поэтому огра-  
ниченная мощность канала передачи данных должна приниматься во внимание. Подобные  
задачи могут возникнуть при исследовании различных режимов поведения удаленных лета-  
тельных объектов, при корректировке их движения, в частности при управлении процессом  
выставки навигационных приборов в момент старта одного летательного аппарата с другого.  
Предполагается, что на объекте имеется вычислительный комплекс, позволяющий запоминать  
измеряемую информацию, обрабатывать ее с высокой степенью точности, передавать и при-  
нимать закодированные сигналы по каналам связи. В зависимости от вычислительных возмож-  
ностей комплекса возникают варианты изучаемой ниже задачи. Для замкнутости изложения  
вначале приведены основные результаты решения задачи многократной коррекции без учета  
коммуникационных ограничений. В последующих разделах эти ограничения принимаются во  
внимание. В заключение рассмотрен пример.

## 1. Предварительные сведения

### 1.1. Оценивание и прогноз в условно-гауссовском случае

Рассмотрим специальный случай уравнений движения и измерения. Пусть символ  $z_t =$   
 $[\theta_t; \xi_t]$  обозначает  $(k + l)$ -мерный случайный процесс с дифференциалом

$$dz_t = (a + Az_t + Cu_t)dt + Bdw_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

где  $a = [a_0; A_0]$ ;  $A = [a_1, a_2; A_1, A_2]$ ;  $C = [c; 0]$  — векторные и матричные параметры, воз-  
можно зависящие от  $t$  измеримым образом. Матрица  $B = [b_1, b_2; B_1, B_2]$  — неупреждающая  
по  $(t, \xi)$ ;  $w_t = [w_t^1; w_t^2]$  — стандартный винеровский процесс соответствующей размерности;  
 $u_t$  — управление. Предполагается, что функции  $a$ ,  $B$  являются неопределенными и лежат в  
заданных множествах. Величина  $\theta_t$  интерпретируется как ненаблюдаемый фазовый вектор,  
которым необходимо управлять, а величина  $\xi_t$  служит измерением в момент  $t$ . Выполняются  
условия (I)–(VII) из [8], обеспечивающие существование и единственность решения уравнения  
Ито (1.1). Векторы трактуем как векторы-столбцы. Если  $a \in \mathbb{R}^k$ ,  $b \in \mathbb{R}^l$ , то  $[a; b]$  — вектор  
из  $\mathbb{R}^{k+l}$ . Для матриц символ  $[A; B]$  означает матрицу в  $\mathbb{R}^{(m+k) \times n}$ , если  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$ .  
Аналогично,  $[A, B]$  — это матрица из  $\mathbb{R}^{m \times (n+l)}$ , если  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times l}$ .

Предположим, что  $P(\theta_0 \leq x \mid \xi_0) \sim N(m_0, \gamma_0)$ , где  $m_0 = E(\theta_0 \mid \xi_0)$ ;  $\gamma_0 = \text{cov}(\theta_0, \theta_0 \mid \xi_0)$ ;  
 $N(m, \gamma)$  — гауссовское распределение с соответствующими параметрами. Тогда распределение  
 $P(\theta_{t_0} \leq x_0, \dots, \theta_{t_n} \leq x_n \mid \xi_0^t)$  будет гауссовским ( $P$ -п.н.). Здесь и далее  $y_0^t = \{y(\tau) : 0 \leq \tau \leq t\}$ .  
При дополнительных условиях [8] на коэффициенты и заданном управлении получаем, что  
величины  $m_t = E(\theta_t \mid \xi_0^t)$ ,  $\gamma_t = \text{cov}(\theta_t, \theta_t \mid \xi_0^t)$  суть единственные решения системы

$$\begin{aligned} dm_t &= (a_0 + a_1 m_t + a_2 \xi_t + cu_t)dt + \mathcal{K}(d\xi_t - (A_0 + A_1 m_t + A_2 \xi_t)dt), \\ \mathcal{K} &= (b \circ B + \gamma_t A_1')(B \circ B)^{-1}, \quad \dot{\gamma}_t = a_1 \gamma_t + \gamma_t a_1' + b \circ b - \mathcal{K}(B \circ B)\mathcal{K}'. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь  $b \circ b = b_1 b_1' + b_2 b_2'$ ,  $b \circ B = b_1 B_1' + b_2 B_2'$ . Символ  $'$  означает транспонирование. Мат-  
рица  $B \circ B = B_1 B_1' + B_2 B_2'$  предполагается невырожденной равномерно по неопределенным  
параметрам. Поскольку параметры  $a$ ,  $B$  неизвестны, они могут не совпадать с истинными  
значениями  $a^*$ ,  $B^*$ , при которых в действительности реализуется сигнал  $\xi_t$ .

Пусть программное управление  $u_t^T$  фиксировано. Тогда прогноз  $z(s, t) = [m(s, t); n(s, t)] = E(z_s | \xi_0^t, u)$  — это решение уравнения

$$\partial z(s, t)/\partial s = a + Az(s, t) + Cu_s \quad (1.3)$$

с начальными условиями  $z(t, t) = [m_t; \xi_t]$ . Распределение  $P(\theta_s \leq x | \xi_0^t, u) \sim N(m(s, t), \gamma(s, t))$ , где  $\gamma(s, t) = \text{cov}(\theta_s, \theta_s | \xi_0^t, u)$ . Вследствие неопределенности функций  $a, B$  за оценку фазового вектора и его прогноз примем области достижимости уравнений (1.2) и (1.3) соответственно. Область достижимости может быть невыпуклой из-за неопределенности матрицы  $B$ .

## 1.2. Минимаксное программное управление

Пусть отклонение системы от нуля оценивается терминальным функционалом  $F(D\theta_T)$ , где  $F$  — непрерывная функция,  $D$  — матрица. Для данной позиции  $\{t, \xi_0^t, u_0^t\}$  находим оптимальное программное управление  $u_t^T$ , решающее задачу

$$\sup_{\xi_0^T} E(F(D\theta_T) | \xi_0^t, u_0^t) \rightarrow \min_{u_t^T} = r_t(\xi, u), \quad (1.4)$$

где  $E(\cdot | \cdot)$  — знак условного математического ожидания;  $\xi_0^T = \{a, B\}$  — набор неопределенных параметров вероятностного распределения. Если  $\varphi(x, \gamma)$  — плотность нормального распределения  $N(0, \gamma)$ , то определим функцию  $\widehat{F}(t, y) = \int_{\text{im}\gamma(T, t)} F(Dx + y)\varphi(x, \gamma(T, t))dx$ , где  $\text{im}\gamma$  — образ матрицы  $\gamma$  в пространстве  $\mathbb{R}^k$ . Задача (1.4) эквивалентна следующей:

$$\sup_{\xi_0^T} \widehat{F}(t, Dm(T, t)) \rightarrow \min_{u_t^T} = r_t(\xi, u). \quad (1.5)$$

В случае  $F = \|\cdot\|^2$ , где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма, имеем  $\widehat{F}(t, Dm) = \|Dm\|^2 + \text{tr}D\gamma(T, t)D'$ , где  $\text{tr}$  — операция взятия следа матрицы. Но при этом в дальнейшем будет удобнее решать задачу (1.5), когда

$$\widehat{F}(t, Dm) = \sqrt{\|Dm\|^2 + \text{tr}D\gamma(T, t)D'}. \quad (1.6)$$

Опишем решение задачи (1.5) при условии, что матрица  $B$  известна и справедливо равенство (1.6). Пусть выполнены включения  $a(t) \in \mathcal{P}$ , где  $\mathcal{P}$  — выпуклый компакт,  $0 \in \mathcal{P}$ . Для управления выполняется включение  $u_t \in U$ , где  $U$  — выпуклый компакт. Матрица  $\gamma(s, t)$  составляет левый верхний угол (размерность  $k \times k$ ) матрицы  $P(s, t)$ , для которой

$$\partial P(s, t)/\partial s = AP(s, t) + P(s, t)A' + BB'$$

с начальными условиями  $P(t, t) = [\gamma_t, 0; 0, 0]$ . В силу (1.2), (1.3) можем записать

$$m_t = m_{1,t}(\zeta) + m_{2,t}(u) + m_{3,t}, \quad m(T, t) = m_1(T, t, \zeta) + m_2(T, t, u) + m_3(T, t),$$

где  $m_1(t, t, \zeta) = m_{1,t}(\zeta)$  и слагаемые с индексом 1 отвечают решениям уравнений с  $\xi_0^T \equiv 0$ ,  $u_0^T \equiv 0$  при начальном условии  $m_{1,0} = 0$ ; соответственно, слагаемые с индексом 2 — это компоненты выхода системы

$$\dot{z}_{2,t} = Az_{2,t} + Cu_t, \quad z_{2,0} = 0;$$

наконец, слагаемые с индексом 3 соответствуют  $\xi_0^T \equiv 0$ ,  $u_0^T \equiv 0$  при начальном условии  $m_{3,0} = m_0$ . Пусть  $\mathcal{M}_1(T, t) = \{m_1(T, t, \zeta)\}$  — область достижимости по всем  $\xi_0^T$ . Следовательно, при условии (1.6) получаем

$$r_t(\xi, u) = \left( \text{tr}D\gamma(T, t)D' + \left( \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \text{conc}\{\rho(y | D\mathcal{M}_1(T, t))\} + y'Dm_3(T, t) + \min_{u_t^T} y'Dm_2(T, t, u) \right\} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

Здесь  $\rho(l | \mathcal{M})$  — опорная функция множества  $\mathcal{M}$ , а  $\text{conc } f(y)$  — вогнутая оболочка функции  $f(y)$ , т. е. наименьшая вогнутая функция, мажорирующая  $f(y)$  [3]. Для оптимального управления справедлив стандартный принцип максимума в выпукло-вогнутых задачах для линейных управляемых систем.

Отметим еще один частный случай, когда уже неизвестны матрицы  $B$ . Пусть  $B_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$ ,  $a = 0$ ,  $a_2 = 0$ ,  $A_2 = 0$ ,  $b_1 b'_1 = (1 - \alpha)Q_1 + \alpha Q_2$ ,  $B_2 B'_2 = (1 - \beta)R_1 + \beta R_2$ , где  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ,  $R_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$ , и  $\alpha, \beta$  — неизвестные параметры. Тогда

$$\begin{aligned} dm_t &= (a_1 m_t + c u_t) dt + \gamma_t A'_1 (B_2 B'_2)^{-1} (d\xi_t - A_1 m_t dt), \\ \dot{\gamma}_t &= a_1 \gamma_t + \gamma_t a'_1 + b_1 b'_1 - \gamma_t A'_1 (B_2 B'_2)^{-1} A_1 \gamma_t, \\ \partial m(s, t) / \partial s &= a_1 m(s, t) + c u_t, \quad \partial \gamma(s, t) / \partial s = a_1 \gamma(s, t) + \gamma(s, t) a'_1 + b_1 b'_1. \end{aligned}$$

При условии  $F = \|\cdot\|^2$  полагаем  $\zeta = \{\alpha, \beta\}$  и

$$m_t = m_{1,t}(\zeta) + m_{2,t}(u), \quad m(T, t) = m_1(T, t, \zeta) + m_2(T, t, u).$$

Используя введенные обозначения, получаем аналогично (1.7):

$$r_t(\xi, u) = \sup_y \left\{ \text{conc} \left\{ \sup_{\zeta} \left\{ \text{tr} D\gamma(T, t) D' + 2y' D m_1(T, t, \zeta) \right\} - \|y\|^2 \right\} + 2 \min_{u_t^T} y' D m_2(T, t, u) \right\}.$$

В общем случае подсчет оптимального управления непрост ввиду наличия операции  $\sup_{\zeta_0^T}$  в (1.4), (1.5).

## 2. Постановка задачи и алгоритм ее решения

Для каждого  $s \in (t, T)$  полагаем  $\xi_t^s = n(\cdot, t)$ , где  $z(\cdot, t) = [m(\cdot, t); n(\cdot, t)]$  — решение уравнения (1.3), и считаем прогноз результата  $r_t(s, \xi, u)$ . Он вычисляется аналогично (1.4), (1.5) но на отрезке  $[s, T]$  и при указанном специальном сигнале  $\xi_t^s = n(\cdot, t)$ . Пусть  $r_t^*(\xi, u) = \min_{t \leq s \leq T} r_t(s, \xi, u)$ .

Если

$$r_t^*(\xi, u) = r_t(\xi, u), \tag{2.1}$$

то далее используем оптимальное управление  $u_t^{T0}$ . Если

$$r_t^*(\xi, u) < r_t(\xi, u), \tag{2.2}$$

то сохраняем ранее найденное управление вплоть до момента, когда вновь будет выполняться равенство (2.1). Таким образом, по ходу процесса необходимо непрерывно проверять соотношения (2.1), (2.2), корректируя при необходимости оптимальное управление. Практически указанный алгоритм можно реализовать в виде дискретной пошаговой процедуры.

### *Дискретная пошаговая процедура*

Пусть  $\lambda : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  — разбиение отрезка  $[0, T]$ , и  $|\lambda| = \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq N\}$ . Тогда:

(а) Управление корректируем только в те моменты  $t = t_i$ , когда выполняется равенство (2.1).

(б) На начальном отрезке  $[0, t_1]$  полагаем  $u_0^{t_1} = 0$ .

За  $N$  шагов достигается конечный момент  $t_N = T$  и определяется результат управления  $r_T(\xi, u_0^{T0})$ . Гарантированный усредненный результат управления равен

$$r_T^* = \overline{\lim}_{|\lambda| \rightarrow 0} \sup_{\zeta_0^T} E r_T(\xi, u_0^{T0}), \tag{2.3}$$

где  $E$  — математическое ожидание. Здесь управление  $u_0^{T0}$  построено согласно приведенной процедуре. Как видно из построения, управление на отрезке  $[t_i, t_{i+1}]$  вычисляется позиционно, на основе информации  $\{t_i, \xi_0^{t_i}, u_0^{t_i}\}$ . Наличие операции  $\sup_{\zeta_0^T}$  в (2.3) обусловлено тем обстоятельством, что знание сигнала  $\xi_0^T$ , вообще говоря, никак не влияет на неопределенную информацию о параметрах  $\zeta_0^T$ .

### 3. Общий нелинейный случай

Пусть диффузионный марковский процесс  $z_t = [\theta_t; \xi_t]$  подчинен уравнению Ито

$$dz_t = a(t, z_t, u_t, v_t)dt + B(t, \xi_t, v_t)dw_t$$

с управлением  $u_t$ , где  $a = [a_1; a_2]$  и неопределенные параметры стеснены включением  $v(t) \in \mathcal{P}$ . Не ограничивая общности считаем, что  $B = [b_1, b_2; 0, B_2]$ , где  $b'_1 = b_1 \geq 0$ ,  $B'_2 = B_2 > 0$ . Обозначим  $G = 2^{-1}BB'$ ,  $g = 2^{-1}b \circ b$ ,  $h = B_2^{-1}a_2 \in \mathbb{R}^l$ . Введем величину

$$\delta_t^s = \exp \left\{ \int_t^s h(\tau, z_\tau)dw_\tau + 2^{-1} \int_t^s \|h\|^2 d\tau \right\}$$

и новую меру на исходном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$ :  $\tilde{P}(\Gamma) = \int_\Gamma (\delta_0^T)^{-1} dP$ . Тогда

$$d\theta_t = (a_1 - b_2 h)dt + b_1 d\tilde{w}_t + b_2 d\tilde{w}_t, \quad d\xi_t = B_2 d\tilde{w}_t.$$

Пусть распределение  $P(\theta_0 \leq x \mid \xi_0)$  имеет плотность  $\pi_0(x)$ . Рассмотрим уравнение относительно ненормализованной плотности  $p(t, x)$ :

$$\begin{cases} dp(t, x) = (g^{ij} \partial^2 p / \partial x_i \partial x_j - \partial(a_1^i p) / \partial x_i)dt + (-\partial(b_2^{ij} p) / \partial x_i + h^j p(t, x))d\tilde{w}_t^j, \\ p(0, x) = \pi_0(x), \end{cases}$$

где принято суммирование по повторяющимся индексам. Для всякой функции  $f \in L_\infty$  имеем  $\tilde{E}[f(\theta_t)\delta_0^t \mid \xi_0^t] = \int f(x)p(t, x)dx$ . Величина  $\pi(t, x) = p(t, x) / \int p(t, x)dx$  есть плотность распределения величины  $\theta_t$  относительно  $\xi_0^t$ . Для прогноза имеем  $E[F(D\theta_T) \mid \xi_0^t] = E[E(F(D\theta_T) \mid z_0^t) \mid \xi_0^t] = E[E(F(D\theta_T) \mid z_t) \mid \xi_0^t]$ . Величина  $E(F(D\theta_T) \mid z_t) = q(t, z_t)$ , где  $q(t, z_t)$  — решение обратного уравнения Колмогорова

$$-\partial q(t, z) / \partial t = G^{ij} \partial^2 q / \partial z_i \partial z_j + a^i \partial q / \partial z_i, \quad q(T, z) = F(D\theta).$$

Постановка задачи остается прежней, так же как и пошаговая процедура ее решения. Конечно, трудность вспомогательных задач оценивания и программного управления в нелинейном случае существенно возрастает. Поскольку далее нелинейный случай не рассматриваем, обозначения данного пункта считаем локальными.

### 4. Моделирование

Для численного моделирования можно использовать явное построение винеровского процесса по функциям Хаара, беря конечное число слагаемых в разложении. Другой подход состоит в использовании численных методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений [9].

## 5. Учет коммуникационных ограничений

Рассмотрим линейный случай, когда выполняются формулы (1.6), (1.7). В ЦУПОИ, куда передается информация и где определяется момент коррекции управления, известны основные параметры объекта. Поэтому для приближенного решения задачи необходимо по возможности точнее передавать величину  $[\xi_t; m_{3,t}]$ . Поскольку управление может вычисляться в ЦУПОИ, достаточно передавать величину  $[\tilde{\xi}_t; m_{3,t}]$ , где  $\tilde{\xi}_t$  — это компонента вектора  $\tilde{z}_t = z_t - z_{2,t}$ . Считаем, что на объекте вычислительный комплекс позволяет интегрировать дифференциальные системы типа (1.2).

Если истинное значение параметров равно  $a^*$ ,  $B$ , то, как известно из теории Калмана — Бьюси [8, 10], величина  $dW_t = d\tilde{z}_t - (A_0^* + A_1\tilde{m}_t + A_2\tilde{\xi}_t)dt$  представляет собой дифференциал гауссовского обновляющего процесса с  $\text{cov}(dW_t, dW_t) = (B \circ B)dt$ . Выражая наблюдаемый процесс через обновляющий и используя (1.1), а также уравнение

$$dm_{3,t} = ((a_1 - \mathcal{K}A_1)m_{3,t} + a_2\tilde{\xi}_t)dt + \mathcal{K}(d\tilde{z}_t - A_2\tilde{\xi}_tdt), \quad m_{3,0} = m_0, \quad (5.1)$$

получаем утверждение.

**Лемма.** *Передаваемые величины  $\tilde{\xi}_t = T_1Z_t$ ,  $m_{3,t} = T_2Z_t$ , где  $T_1 = [0_{l \times k}, I_l, 0_{l \times k}]$ ,  $T_2 = [0_{k \times (k+l)}, I_k]$ , и вектор  $Z_t = [\tilde{m}_t; \tilde{\xi}_t; m_{3,t}]$  формируются стохастическим уравнением*

$$dZ_t = (\mathcal{A}Z_t + \mathcal{D}a^*)dt + \mathcal{B}dW_t.$$

Здесь  $\mathcal{A} = [A, 0_{(k+l) \times k}; \mathcal{K}A_1, a_2, a_1 - \mathcal{K}A_1]$ ;  $\mathcal{B} = [\mathcal{K}; I_l; \mathcal{K}]$ ;  $\mathcal{D} = [I_{k+l}; 0_k, \mathcal{K}]$ . Символы  $0_{k \times l}$  и  $I_k$  обозначают соответственно нулевую матрицу размера  $k \times l$  и единичную  $k \times k$ -матрицу,  $0_k = 0_{k \times k}$ . Компонента  $M_t = [\tilde{m}_t; \tilde{\xi}_t]$  вектора  $Z_t$  удовлетворяет стохастическому уравнению

$$dM_t = (a^* + \mathcal{A}M_t)dt + \tilde{\mathcal{K}}dW_t, \quad M_0 = [m_0; \xi_0]; \quad \tilde{\mathcal{K}} = [\mathcal{K}; I_l]. \quad (5.2)$$

Отметим, что  $Z_t = f_t + g_t$ , где  $f_t$  — детерминированный вектор, а  $g_t$  — гауссовский вектор с нулевым средним и ковариацией  $G_t$ . Для последних величин выполняются дифференциальные уравнения

$$\dot{f}_t = \mathcal{A}f_t + \mathcal{D}a^*, \quad \dot{f}_0 = [m_0; \xi_0; m_0]; \quad \dot{G}_t = \mathcal{A}G_t + G_t\mathcal{A}' + \mathcal{B}(B \circ B)\mathcal{B}', \quad G_0 = 0.$$

Для вектора  $x \in \mathbb{R}^n$  будем рассматривать  $\text{sup}$ -норму  $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ , где  $x_i$  — координаты вектора  $x$ . Для матрицы  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  полагаем

$$\|A\|_\infty = \max_{\|x\|_\infty \leq 1} \|Ax\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Наряду с этими нормами будем использовать и евклидовы нормы, которые по-прежнему будут обозначаться  $\|\cdot\|$ .

Пусть  $B_\delta = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\|_\infty \leq \delta\}$  — шар с центром в нуле радиуса  $\delta$  в  $\text{sup}$ -норме. Для построения кодирующего устройства выберем натуральное число  $N$  и положим  $\Delta = T/N$ . Информация в ЦУПОИ будет передаваться с шагом  $\Delta$  в моменты  $\Delta, 2\Delta, \dots, N\Delta$ . Зададимся еще одним натуральным числом  $q$  и разобьем шар  $B_\delta$  на  $q^n$  подшаров вида  $I_{j_1}^1 \times \dots \times I_{j_n}^n$ , где индексы  $j_i$  независимо пробегают множество  $\{1, \dots, q\}$  и

$$I_j^i = \{x_i : -a + 2(j-1)a/q \leq x_i < -a + 2ja/q\}, \\ i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, q-1; \quad I_q^i = \{x_i : a - 2a/q \leq x_i \leq a\}.$$

Вектор  $z \in B_\delta$  будет кодироваться последовательностью  $\eta(z) = (j_1, \dots, j_n)$ , если  $z \in I_{j_1}^1 \times \dots \times I_{j_n}^n$ . Наоборот, каждому набору  $(j_1, \dots, j_n)$  натуральных чисел, независимо пробегающих множество  $\{1, \dots, q\}$ , ставится в соответствие вектор  $\gamma(j_1, \dots, j_n)$  с координатами

$$\gamma_i = -a + (2j_i - 1)a/q, \quad i = 1, \dots, n.$$

Этот вектор представляет собой геометрический центр множества  $I_{j_1}^1 \times \dots \times I_{j_n}^n$ . Для заданного  $\varepsilon > 0$  построим последовательность  $\psi_i, i = 0, \dots, N$ , так чтобы

$$\|m_{3,i\Delta} - \psi_i\|_\infty \leq \varepsilon, \quad i = 0, \dots, N. \quad (5.3)$$

Наряду с уравнением (5.1) рассмотрим вспомогательное однородное уравнение

$$\dot{m} = (a_1 - \mathcal{K}A_1)m. \quad (5.4)$$

Полагаем  $\psi_0 = m_0$ . На полуинтервале  $[(i-1)\Delta, i\Delta), i > 0$ , решаем уравнение (5.4) с начальным условием  $m((i-1)\Delta) = \psi_{i-1}$ . В момент  $i\Delta$  кодирование-декодирование зададим формулами

$$(j_1, \dots, j_k) = \eta(m_{3,i\Delta} - m(i\Delta-)), \quad \text{если } m_{3,i\Delta} - m(i\Delta-) \in B_\delta;$$

$$\psi_i = \gamma(j_1, \dots, j_k) + m(i\Delta-),$$

где  $m(i\Delta-)$  — предел слева соответствующей функции в точке  $i\Delta$ . По параметру  $\varepsilon > 0$  ниже указываются числа  $N, q$  и  $\delta$  такие, что  $m_{3,i\Delta} - m(i\Delta-) \in B_\delta$  для всех  $i = 0, \dots, N$  и одновременно выполняются неравенства (5.3).

Пусть имеют место неравенства

$$\|\mathcal{A}\|_\infty \leq \alpha, \quad \|a^*\|_\infty \leq \alpha_1, \quad \|B \circ B\|_\infty \leq \beta^2, \quad \|\mathcal{B}\|_\infty \leq \beta_1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.5)$$

Неравенства (5.5) будут использованы для оценки множества достижимости передаваемых величин. Отметим следующее. Пусть  $\xi \in \mathbb{R}^n$  с распределением  $P(\xi \leq x) \sim N(0, G)$ . Рассмотрим эллипсоид рассеивания  $\mathcal{E}_\xi(d) = \{x \in \text{im}G : x'G^-x \leq d^2\}$ , где  $G^-$  — обозначение для псевдообратной матрицы [8]. Тогда, как известно,  $P(\xi \in \mathcal{E}_\xi(d)) = \int_{\|x\| \leq d_j} \varphi(x, I_j) dz$ , где  $j = \text{rank } G$ . Если параметр  $d_j$  выбрать так, чтобы значение интеграла было больше 0.99, то практически достоверно выполняется включение  $\xi \in \mathcal{E}_\xi(d_j)$ . Поскольку опорная функция эллипсоида  $\rho(p | \mathcal{E}_\xi(d)) = d(p'Gp)^{1/2}$ , то отсюда находим, что  $\xi \in \{x \in \text{im}G : \|x\| \leq d_j \|G\|^{1/2}\}$ . В одномерном случае можно взять  $d_1 = 3$ , и последнее включение известно как “правило трех сигм”. Поскольку вектор  $M_t$  наблюдаем лишь частично, нам еще потребуется оценка компоненты  $\tilde{m}_t$  этого вектора исходя из уравнения (5.2). Используя неравенства (5.5), находим:

$$\|\tilde{m}_t\|_\infty \leq (e^{\alpha t} - 1)\alpha_1/\alpha + \sqrt{k}d_k\beta\beta_1 l^{1/4} \sqrt{(e^{2\alpha t} - 1)/(2\alpha)} + e^{\alpha t} \|M_0\|_\infty. \quad (5.6)$$

При выводе соотношения (5.6) использованы также элементарные неравенства между суп-нормой и евклидовой нормой, а также неравенство Гронуолла — Беллмана. Отметим, что для суп-нормы наблюдаемого сигнала неравенство (5.6) верно при замене величины  $\sqrt{k}d_k$  на  $\sqrt{l}d_l$ . Правая часть неравенства (5.6) далее будет обозначаться  $\delta_k(t)$ .

**Теорема 1.** Для всякого числа  $\varepsilon > 0$  найдем параметры  $N, q$  и  $\delta$  из условий

$$\bar{\delta}/(q - e^{\alpha\Delta}) \leq \varepsilon, \quad q > e^{\alpha\Delta}, \quad \delta = e^{\alpha\Delta}\varepsilon + \bar{\delta},$$

$$\bar{\delta} = e^{\alpha\Delta}\Delta\alpha\delta_k(T) + \beta_1\alpha_1(e^{\alpha\Delta} - 1)/\alpha + \sqrt{k}d_k\beta\beta_1 l^{1/4} \sqrt{(e^{2\alpha\Delta} - 1)/(2\alpha)},$$

где  $\Delta = T/N$ . Тогда  $\delta/q \leq \varepsilon$ , выполняются неравенства (5.3) и практически достоверно выполняется включение  $m_{3,i\Delta} - m(i\Delta-) \in B_\delta$  для всех  $i = 0, \dots, N$ .

Доказательство теоремы 1 проводится по тому же плану, что и в статье [11]. Для кодирования величины  $\tilde{\xi}_t$  рассмотрим оценку  $B_\delta \in \mathbb{R}^l$  области достижимости, где  $\delta = \delta_l(T)$ . Полагаем

$$(j_1, \dots, j_l) = \eta(\tilde{\xi}_{i\Delta}), \quad \text{если } \tilde{\xi}_{i\Delta} \in B_\delta;$$

$$\tilde{\psi}_i = \gamma(j_1, \dots, j_l),$$

где  $\tilde{\psi}_i$  — декодированное значение для  $\tilde{\xi}_t$ , а функции  $\eta(\cdot)$  и  $\gamma(\cdot)$  определяются так же, как и выше, но только в пространстве  $\mathbb{R}^l$ .

**Теорема 2.** Для всякого числа  $\varepsilon > 0$  найдем параметр  $q$  из условий

$$\delta/q \leq \varepsilon, \quad \delta = \delta_l(T).$$

Тогда выполняются неравенства  $\|\tilde{\xi}_{i\Delta} - \tilde{\psi}_i\|_\infty \leq \varepsilon$  и практически достоверно выполняется включение  $\tilde{\xi}_{i\Delta} \in B_\delta$  для всех  $i = 0, \dots, N$ .

Теоремы 1, 2 позволяют оценить точность  $\varepsilon$  декодируемых величин в зависимости от длины передаваемого слова (определяется параметром  $q$ ) и частоты передачи (определяется параметром  $N$ ). Так, например, при  $p - 1 \leq \log_2 q < p$  требуется  $p^l$  бит информации о величине  $\tilde{\xi}$  за один такт передачи.

Будем решать задачу коррекции по декодированным данным  $\psi_i$  и  $\tilde{\psi}_i$ . Подставим эти данные в формулу (1.7) и аналогичную формулу для  $r_{i\Delta}(s, \xi, u)$  вместо  $m_{3,i\Delta}$  и  $\tilde{\xi}_{i\Delta}$  соответственно. Новые значения формулы (1.7) и формулы для  $r_{i\Delta}(s, \xi, u)$  обозначим через  $\bar{r}_i(u)$  и  $\bar{r}_i(s, u)$  соответственно. Используя элементарное неравенство  $|\sqrt{a^2 + x^2} - \sqrt{a^2 + y^2}| \leq |x - y|$ , приходим к утверждению.

**Теорема 3.** Пусть выполнены оценки (5.5) и условия теорем 1, 2. Тогда для всех  $i = 0, \dots, N$  будем иметь

$$|\bar{r}_i(u) - r_{i\Delta}(\xi, u)| \leq \varepsilon k^{1/2} \|D\| e^{\alpha(T-i\Delta)};$$

$$|\bar{r}_i(s, u) - r_{i\Delta}(s, \xi, u)| \leq \varepsilon k^{1/2} \|D\| e^{\alpha(T-i\Delta)} \quad \forall s \geq i\Delta. \quad (5.7)$$

Неравенства (5.7) выполняются равномерно для всех сигналов.

## 6. Влияние коммуникационных ограничений на формирование управления

Пусть  $\bar{t}_1 = i_1\Delta$  — момент времени, когда выполняется равенство

$$\bar{r}_{i_1}(u) = \min_{\bar{t}_1 \leq s \leq T} \bar{r}_{i_1}(s, u).$$

В этот момент на объект передается сигнал о корректировке управления. Если вычислитель на объекте позволяет решать программную задачу управления (1.5), то функция ЦУПОИ завершена. Если же не позволяет, то управление должно вычисляться в ЦУПОИ и передаваться на объект.

В последнем случае мы предполагаем, что управление постоянно на полуинтервалах  $[(i-1)\Delta, i\Delta)$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Следует решать задачу, аналогичную (1.5). А именно,

$$\sup_{\zeta_0^T} \hat{F}(i\Delta, Dm(T, i\Delta)) \rightarrow \min_{u_{i+1}^N} = \bar{r}_i^*(\xi, u). \quad (6.1)$$

Здесь и далее символ  $u_i^N$  означает набор векторов  $u_i, \dots, u_N$ . Для оптимального значения (6.1) получаем формулу, аналогичную (1.7):

$$\bar{r}_i^*(\xi, u) = \left( \text{tr } D\gamma(T, i\Delta)D' + \left( \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \text{conc}\{\rho(y | D\mathcal{M}_1(T, i\Delta))\} + y'DT_3X(T, i\Delta)[\psi_i; \tilde{\psi}_i] \right\} \right) \right)$$

$$+ \min_{u_{i+1}^N} y' D m_2(T, i\Delta, u) \Big)^2 \Big)^{1/2}. \quad (6.2)$$

Здесь  $X(s, t)$  — фундаментальная матрица однородного уравнения (1.3);  $T_3 = [I_k, 0_{k \times l}]$ .

Пусть  $B_b = \{u : \|u\|_\infty \leq b\} \in \mathbb{R}^p$  — минимальный шар, содержащий множество управлений  $U$ . Разобьем шар на  $q^p$  подшаров вида  $I_{j_1}^1 \times \dots \times I_{j_p}^p$ , где индексы  $j_i$  независимо пробегает множество  $\{1, \dots, q\}$  и

$$I_j^i = \{u_i : -b + 2(j-1)b/q \leq u_i < -b + 2jb/q\}, \\ i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q-1; \quad I_q^i = \{u_i : b - 2b/q \leq u_i \leq b\}.$$

Вектор  $u \in B_b$  будет кодироваться последовательностью  $\eta(u) = (j_1, \dots, j_p)$ , если  $u \in I_{j_1}^1 \times \dots \times I_{j_p}^p$ . Наоборот, каждому набору  $(j_1, \dots, j_p)$  натуральных чисел, независимо пробегающих множество  $\{1, \dots, q\}$ , ставится в соответствие вектор  $\gamma(j_1, \dots, j_p)$  с координатами  $\gamma_i = -b + (2j_i - 1)b/q$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Этот вектор представляет собой геометрический центр множества  $I_{j_1}^1 \times \dots \times I_{j_p}^p$ .

Для всякого  $\varepsilon > 0$  неравенство  $\|u - \bar{u}\|_\infty \leq \varepsilon$ , где  $\bar{u} = \gamma(\eta(u))$ , выполняется при условии

$$b/q \leq \varepsilon. \quad (6.3)$$

Поскольку величины  $m_{3,i\Delta}$  и  $\tilde{\xi}_{i\Delta}$  на объекте известны, после передачи и декодирования оптимального управления в задаче (6.1) значение критерия на объекте будет вычисляться как

$$\tilde{r}_i^*(\xi, u) = \left( \text{tr} D \gamma(T, i\Delta) D' + \left( \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \text{conc}\{\rho(y \mid DM_1(T, i\Delta))\} + y' DT_3 X(T, i\Delta) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left( [m_{3,i\Delta}; \tilde{\xi}_{i\Delta}] + z_{2,i\Delta} + \sum_{j=i+1}^N \int_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} X(i\Delta, s) C ds \bar{u}_j^0 \right) \right\} \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (6.4)$$

Сравним значения критерия (6.2) в ЦУПОИ и (6.4). Для этого введем величину

$$\tilde{r}_i(u) = \left( \text{tr} D \gamma(T, i\Delta) D' + \left( \sup_{\|y\| \leq 1} \left\{ \text{conc}\{\rho(y \mid DM_1(T, i\Delta))\} + y' DT_3 X(T, i\Delta) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left( [\psi_i; \tilde{\psi}_i] + z_{2,i\Delta} + \sum_{j=i+1}^N \int_{(j-1)\Delta}^{j\Delta} X(i\Delta, s) C ds \bar{u}_j^0 \right) \right\} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} & |\tilde{r}_i^*(\xi, u) - \bar{r}_i^*(\xi, u)| \leq |\bar{r}_i^*(\xi, u) - \tilde{r}_i(u)| + |\tilde{r}_i(u) - \tilde{r}_i^*(\xi, u)| \\ & \leq \varepsilon k^{1/2} \|D\| \|C\|_\infty (e^{\alpha(T-i\Delta)} - 1)/\alpha + \varepsilon k^{1/2} \|D\| e^{\alpha(T-i\Delta)} \\ & \leq \varepsilon k^{1/2} \|D\| \left( (\|C\|_\infty + \alpha) e^{\alpha(T-i\Delta)} - \|C\|_\infty \right) / \alpha. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Сформулируем итог.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия теорем 1–3 и справедливо неравенство (6.3). Тогда критерии управления на объекте и в ЦУПОИ при использовании кусочно-постоянного управления связаны неравенством (6.5).

Отметим, что в приведенных теоремах не учитываются возможные случайные и иные ошибки при передаче данных, а также запаздывание.

## 7. Пример

Даны линейная двумерная система и уравнение наблюдения:

$$\dot{\theta}^1 = \theta^2, \quad \dot{\theta}^2 = v_t + u_t + b w_t^1, \quad d\xi_t = \theta^1 dt + B d w_t^2,$$

где  $|v_t| \leq \nu$ ,  $w_t$  — стандартный винеровский двумерный процесс. Управление стеснено ограничением  $|u_t| \leq \mu$ . Функционал  $F(D\theta_T) = (\theta_T^2)^2$ . Начальное состояние имеет распределение  $N(0, \gamma_0)$ , где  $\gamma_0 = [\sqrt{2}, 1; 1, \sqrt{2}]$ . Здесь в случае  $b = B = 1$  имеем  $\gamma_t \equiv \gamma_0$ , т. е. матрица  $\gamma_t$  постоянна. Следовательно,  $\gamma(T, t) = [1, T-t; 0, 1]\gamma[1, T-t; 0, 1]' + (T-t)[(T-t)^2/3, (T-t)/2; (T-t)/2, 1]$ . Уравнения фильтра имеют вид

$$d m_t^1 = m_t^2 dt + \gamma^{11}[d\xi_t - m_t^1 dt]/B^2, \quad d m_t^2 = (u_t + v_t)dt + \gamma^{12}[d\xi_t - m_t^1 dt]/B^2,$$

с начальными условиями  $m_0^i = 0$ . Прогноз состояния и сигнала осуществляется согласно уравнениям

$$\partial m^1(s, t)/\partial s = m^2(s, t), \quad \partial m^2(s, t)/\partial s = v_s + u_s, \quad \partial n(s, t)/\partial s = m^1(s, t),$$

с начальными условиями  $m(t, t) = m_t$ ,  $n(t, t) = \xi_t$ . Величина (1.7) здесь имеет вид

$$r_t(\xi, u) = \left( \gamma^{22} + T - t + \left( \varkappa_t + \max \left\{ 0, \left| m_{3,t}^2 + \int_0^t u_s ds \right| - \mu(T-t) \right\} \right)^2 \right)^{1/2},$$

где  $\varkappa_t = \nu \left( T - t + \int_0^t |\mathcal{X}^{22}(t, s)| ds \right)$ . Функция  $\mathcal{X}^{22}(t, s)$  здесь совпадает с правым нижним элементом фундаментальной матрицы  $\mathcal{X}(t, s)$  для системы (5.4). Нетрудно проверить, что  $\mathcal{X}^{22}(t, s) \equiv 1$ . Поэтому  $\varkappa_t \equiv \varkappa = \nu T$ . Оптимальное управление

$$u_s^0 \equiv - \left( m_{3,t}^2 + \int_0^t u_s ds \right) / (T - t),$$

если

$$\left| m_{3,t}^2 + \int_0^t u_s ds \right| \leq \mu(T - t).$$

В противном случае оно равно  $-\mu \operatorname{sign} \left( m_{3,t}^2 + \int_0^t u_s ds \right)$ . Аналогичным образом находим величину прогноза

$$r_t(s, \xi, u) = \left( \gamma^{22} + T - t + \left( \varkappa_t + \max \left\{ 0, \left| m_{3,t}^2 + \int_0^s u_\tau d\tau \right| - \mu(T-s) \right\} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть  $T = 15$ ,  $\mu = 2$ ,  $\nu = 0.5$ ,  $v_t^* = \sin t$ , и частота передачи кодированных сигналов определяется параметром  $\Delta = 0.1$ . Тогда в нашем примере  $N = 150$ ,  $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ ,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\beta_1 = \sqrt{2}$ . Типичный вид скорректированного управления показан на рис. 1. Отметим, что коррекцию управления приходится делать практически на каждом шаге. В этом существенное отличие статистических задач от детерминированных [3]. Изменение величины  $r_t(\xi, u)$  изображено на рис. 2. Зависимость точности  $\varepsilon$  в теореме 1 от длины  $q$  передаваемого слова при

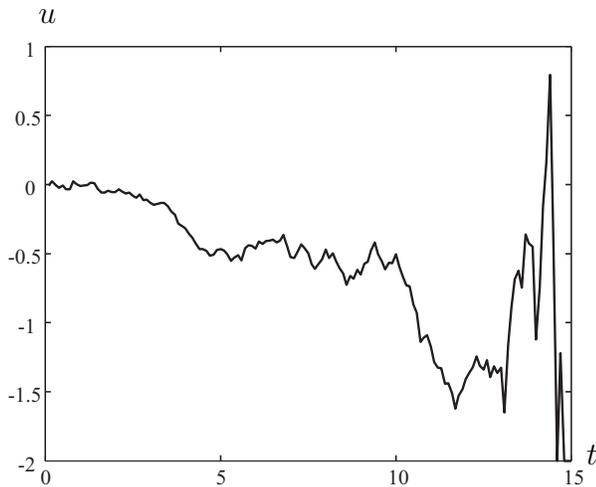


Рис. 1.

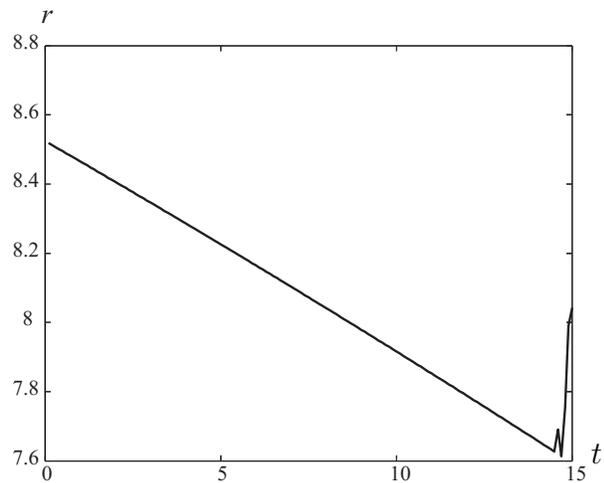


Рис. 2.

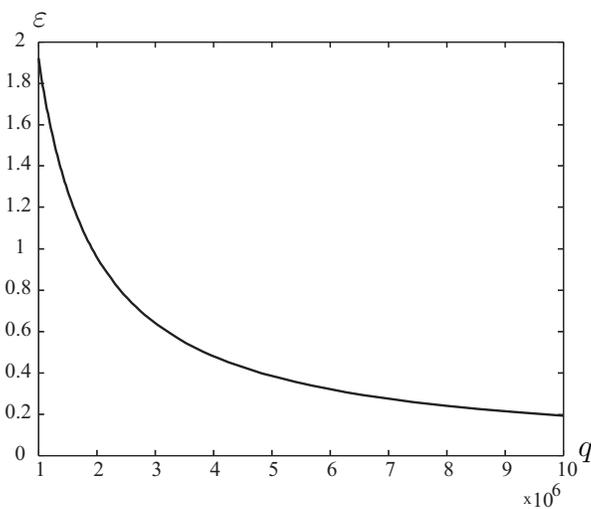


Рис. 3.

$\Delta = 0.001$  в данном примере показана на рис. 3. Путем статистических испытаний устанавливается неравенство  $|m_{3,t}^2| \leq 12$ . Поэтому априорные оценки теорем на самом деле завышены. Следовательно, порядок величин  $q$  можно брать равным  $10^3$  при частоте передачи  $\Delta = 0.1$  вместо  $10^6, 10^7$  и  $\Delta = 0.001$ , как на рис. 3.

В заключение подчеркнем, что нерегулярный вид скорректированного управления и величины критерия объясняется их случайным характером, поскольку они зависят от реализаций наблюдаемого сигнала.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровая задача о коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 3. С. 386–396.
2. Ананьев Б.И., Куржанский А.Б., Шелементьев Г.С. Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 1. С. 3–13.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

4. **Черноусько Ф.Л.** Минимаксная задача одноразовой коррекции при погрешности измерений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 4. С. 587–595.
5. **Ананьев Б.И.** Минимаксная квадратичная задача коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 3. С. 436–445.
6. **Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.** Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Наука, 1978. 351 с.
7. **Ананьев Б.И., Гредасова Н.В.** Многократная коррекция движения управляемой системы в условиях неопределенности // Сб. Урал. гос. техн. ун-та – УПИ. 2005. С. 1–5.
8. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
9. **Milstein G.N., Tretyakov M.V.** Stochastic numerics for mathematical physics. New York: Springer-Verlag, 2004. 596 p.
10. **Острём К.** Введение в стохастическую теорию управления. М.: Мир, 1973. 321 с.
11. **Ананьев Б.И., Аникин С.А.** Задача восстановления входных воздействий при коммуникационных ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 73–84.

Ананьев Борис Иванович  
д-р физ.-мат. наук  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: abi@imm.uran.ru

Поступила 25.05.2009

УДК 517.972.8

## УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ<sup>1</sup>

В. И. Бахтин, В. В. Гороховик

Для отображений, определенных на метрических пространствах и принимающих значения в банаховых пространствах, вводятся понятия производных векторов первого и второго порядков и с их помощью устанавливаются необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального  $\prec$ -минимума таких отображений, где  $\prec$  — отношение строгого предпорядка, определенное на пространстве значений минимизируемого отображения. В качестве следствий получены условия минимальности для случая, когда минимизируемое отображение определено на подмножестве нормированного пространства.

Ключевые слова: векторная оптимизация, метрические пространства, конические локальные аппроксимации множеств, производные отображений.

V. I. Bakhtin, V. V. Gorokhovik. Optimality conditions of first and second order in vector optimization problems on metric spaces.

For mappings defined on metric spaces with values in Banach spaces, the notions of derivative vectors of first and second order are introduced. These notions are used to establish necessary conditions and sufficient conditions of first and second order for points of local  $\prec$ -minimum of such mappings, where  $\prec$  is the strict preorder relation defined on the space of values of the mapping that is minimized. Minimality conditions are obtained as corollaries for the case when the mapping is defined on a subset of a normed space.

Keywords: vector optimization, metric spaces, conical local approximations of sets, derivatives of mappings.

### 1. Введение

В статье исследуются необходимые, а также достаточные условия оптимальности в задаче векторной оптимизации на метрическом пространстве, формулировка которой приводится ниже.

Пусть  $Q$  — метрическое пространство с функцией расстояния  $d_Q(\cdot, \cdot) : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  и пусть  $F : Q \rightarrow Y$  — отображение из  $Q$  в банахово пространство  $Y$ , упорядоченное отношением строгого предпорядка  $\prec$  таким, что

$$y_1 \prec y_2 \iff y_2 - y_1 \in P,$$

где  $P \subset Y$  — асимметричный выпуклый конус с непустой внутренностью.

Напомним [20, 25], что отношениями строгого предпорядка называют бинарные отношения, удовлетворяющие свойствам асимметричности и транзитивности. Ниже мы будем использовать иногда символ  $(Y, \prec)$ , специально отмечая этим символом то, что банахово пространство  $Y$  упорядочено отношением  $\prec$ . Символом  $\not\prec$  будем обозначать отрицание отношения  $\prec$ , т. е.  $y_1 \not\prec y_2 \iff y_2 - y_1 \notin P$ .

Говорят, что точка  $x^0 \in Q$  является *точкой локального  $\prec$ -минимума* отображения  $F : Q \rightarrow (Y, \prec)$ , если для некоторого вещественного числа  $\varepsilon > 0$  соотношение  $F(x) \not\prec F(x^0)$  выполняется при всех  $x \in B_Q(x^0, \varepsilon)$ , где  $B_Q(x^0, \varepsilon) := \{x \in Q \mid d_Q(x, x^0) \leq \varepsilon\}$  — шар (в метрическом пространстве  $Q$ ) радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $x^0$ .

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф08Р-014).

Наряду с отношением  $\prec$  введем на банаховом пространстве  $Y$  производные отношения  $\llcorner$  и  $\preceq$ , определив их следующим образом:

$$y_1 \llcorner y_2 \iff y_2 - y_1 \in \text{int}P$$

и

$$y_1 \preceq y_2 \iff y_2 - y_1 \in \text{cl}P.$$

Здесь  $\text{int}P$  и  $\text{cl}P$  — внутренность и замыкание конуса  $P$  соответственно.

Заметим, что отношение  $\llcorner$  также является отношением строгого предпорядка на  $Y$ , тогда как отношение  $\preceq$  рефлексивно и транзитивно и, следовательно, является отношением предпорядка.

Говорят, что точка  $x^0 \in Q$  является *точкой локального слабого  $\prec$ -минимума* отображения  $F : Q \rightarrow (Y, \prec)$ , если для некоторого вещественного числа  $\varepsilon > 0$  соотношение  $F(x) \not\llcorner F(x^0)$  выполняется при всех  $x \in B_Q(x^0, \varepsilon)$ .

Будем говорить, что точка  $x^0 \in Q$  есть *точка локального сильного  $\prec$ -минимума* отображения  $F : Q \rightarrow (Y, \prec)$ , если найдется вещественное число  $\varepsilon > 0$  такое, что  $F(x) \not\preceq F(x^0)$  для всех  $x \in B_Q(x^0, \varepsilon)$ ,  $F(x) \neq F(x^0)$ .

В данных определениях символы  $\not\llcorner$  и  $\not\preceq$  обозначают соответственно отрицания отношений  $\llcorner$  и  $\preceq$ .

Заметим, что в случае, когда  $P = \text{int}P$ , введенные выше понятия локального  $\prec$ -минимума и локального слабого  $\prec$ -минимума совпадают. Если же  $P = \text{cl}P \setminus \{0\}$ , то совпадают понятия локального  $\prec$ -минимума и локального сильного  $\prec$ -минимума. В частности, если  $Y = \mathbb{R}$ , а  $P$  есть множество положительных вещественных чисел, то все три понятия сводятся к понятию локального минимума вещественнозначной функции на множестве. Таким образом, понятия локального слабого  $\prec$ -минимума и локального сильного  $\prec$ -минимума можно рассматривать как своего рода регуляризации понятия локального  $\prec$ -минимума, при этом любая точка локального сильного  $\prec$ -минимума является точкой локального  $\prec$ -минимума, а любая точка локального  $\prec$ -минимума является точкой локального сильного  $\prec$ -минимума. Обратные импликации, вообще говоря, неверны.

Задачи минимизации (или максимизации) отображений, принимающих значения в упорядоченных векторных пространствах, принято называть задачами векторной оптимизации.

Основная цель настоящей статьи — получить необходимые, а также достаточные условия первого и второго порядков для точек локального (слабого, сильного)  $\prec$ -минимума в сформулированной выше задаче векторной оптимизации. Следуя методике, впервые предложенной в [2], мы сначала “скаляризуем” исходную задачу векторной оптимизации (см. теорему 1), заменяя теоретико-множественные по своему содержанию определения точек слабого и сильного  $\prec$ -минимума эквивалентными им скалярными функциональными неравенствами, из которых затем получаем с помощью вариационного анализа условия локального минимума.

Скаляризация задачи векторной оптимизации основана на том, что для всякого выпуклого конуса  $P \subset Y$  с непустой внутренностью можно указать ограниченную сублинейную функцию  $\sigma : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую равенствам

$$\text{int}P = \{y \in Y \mid \sigma(-y) < 0\} \text{ и } \text{cl}P = \{y \in Y \mid \sigma(-y) \leq 0\}. \quad (1)$$

Сублинейную функцию  $\sigma : Y \rightarrow \mathbb{R}$  называют ограниченной, если  $|\sigma(y)| \leq L\|y\|$  для всех  $y \in Y$ , где  $L$  — фиксированное положительное вещественное число.

В качестве функции  $\sigma : Y \rightarrow \mathbb{R}$  может быть выбрана, например, функция симметризованного расстояния до конуса  $-P$  [2]

$$\sigma : y \rightarrow \inf_{z \in -P} \|y - z\| - \inf_{z \in Y \setminus (-P)} \|y - z\|$$

или функция [11, 18]

$$\sigma : y \rightarrow \inf\{t \in \mathbb{R} \mid y \in ty^0 - P\},$$

где  $y^0$  — произвольный фиксированный вектор из  $\text{int}P$ .

Пусть  $Y^*$  — пространство, топологически сопряженное пространству  $Y$ , и пусть  $P^+ := \{y^* \in Y^* \mid y^*(y) \geq 0 \ \forall y \in P\}$  — конус, сопряженный конусу  $P$ .

Любая ограниченная сублинейная функция  $\sigma : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющая равенствам (1), может быть представлена в виде

$$\sigma(y) = \max_{b^* \in B^+} b^*(y),$$

где  $B^+$  —  $w^*$ -слабо компактная база конуса  $P^+$  (существование такой базы  $B^+$  следует из условия  $\text{int}P \neq \emptyset$  [20]).

Обратно, любая  $w^*$ -слабо компактная база  $B^+$  конуса  $P^+$  совпадает с субдифференциалом  $\partial\sigma := \{y^* \in Y^* \mid y^*(y) \leq \sigma(y) \ \forall y \in Y\}$  некоторой ограниченной сублинейной функции  $\sigma$ , которая удовлетворяет равенствам (1).

Напомним [20], что выпуклое подмножество  $D$  выпуклого конуса  $K$  из нормированного пространства  $Z$  называется *базой*  $K$ , если  $0 \notin \text{cl}D$  и для любого  $z \in K$ ,  $z \neq 0$ , существуют единственным образом определенные вектор  $d \in D$  и вещественное число  $\lambda > 0$  такие, что  $z = \lambda d$ .

Всюду ниже, не оговаривая специально, символом  $\sigma : Y \rightarrow \mathbb{R}$  будем обозначать некоторую ограниченную сублинейную функцию, удовлетворяющую равенствам (1). Отметим при этом, что все полученные ниже условия  $\prec$ -минимальности (см. теоремы 1–6 и следствия из них) не зависят от конкретного выбора функции  $\sigma : Y \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Теорема 1** (теорема о скаляризации). (а) *Точка  $x^0 \in Q$  доставляет локальный слабый  $\prec$ -минимум отображению  $F : Q \rightarrow Y$  в том и только том случае, когда существует вещественное число  $\varepsilon > 0$  такое, что*

$$\sigma(F(x) - F(x^0)) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in B_Q(x^0, \varepsilon). \quad (2)$$

(б) *Точка  $x^0 \in Q$  доставляет локальный сильный  $\prec$ -минимум отображению  $F : Q \rightarrow Y$  в том и только том случае, когда существует вещественное число  $\varepsilon > 0$  такое, что*

$$\sigma(F(x) - F(x^0)) > 0 \quad \text{для всех } x \in B_Q(x^0, \varepsilon), \quad F(x) \neq F(x^0). \quad (3)$$

Очевидно, что условие (2) является необходимым, а условие (3) — достаточным условием для точек локального  $\prec$ -минимума отображения  $F : Q \rightarrow Y$ .

Эти условия, однако, не слишком далеки от определений и, следовательно, не очень упрощают исследования точек с целью выяснения, являются ли они точками локального слабого или сильного минимума или нет. Как уже отмечалось выше, истинное значение условий (2) и (3) заключается в том, что они переформулируют исходные теоретико-множественные определения в виде функциональных неравенств, вариационный анализ которых проще.

## 2. Локальные аппроксимации множеств и отображений в нормированных пространствах

Поскольку в сформулированной выше задаче векторной оптимизации минимизируемое отображение определено на метрическом пространстве, то для вывода условий локального минимума не могут быть использованы традиционные средства классического и современного вариационного анализа [1–6, 9, 12–17, 19, 21–23, 26], пригодные для исследования отображений, определенных на нормированных или топологических векторных пространствах. Поэтому в данной статье мы вводим для отображений, определенных на метрических пространствах, новые понятия производных векторов первого и второго порядков, которые базируются в свою очередь на понятиях конических локальных аппроксимаций множеств первого и второго порядков. Кратко напомним (более детально см. [9, 12, 26]) определения конических локальных

аппроксимаций множеств из нормированных пространств, а также производных по направлениям отображений, действующих между нормированными пространствами, и их основные свойства.

Пусть  $Z$  — вещественное нормированное пространство,  $M$  — подмножество из  $Z$ .

Символ  $S(0)$  будет обозначать ниже семейство последовательностей положительных вещественных чисел  $(t_n)$ ,  $t_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходящихся к нулю. Через  $U_M$  будем обозначать семейство всех последовательностей  $(z_n)$  таких, что  $z_n \in M$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $U_M(z)$  — подсемейство из  $U_M$ , состоящее из последовательностей  $(z_n)$ , сходящихся (в смысле нормы, заданной на  $Z$ ) к  $z$ .

Говорят, что вектор  $z \in Z$  является *касательным вектором первого порядка* к множеству  $M$  в точке  $z^0 \in \text{cl}M$ , если существуют последовательности  $(t_n) \in S(0)$  и  $(z_n) \in U_M(z)$  такие, что  $z^0 + t_n z_n \in M$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ .

Совокупность всех векторов из  $Z$ , касательных (первого порядка) к множеству  $M$  в точке  $z^0 \in \text{cl}M$ , образует замкнутый конус, который мы будем обозначать символом  $T(z^0 | M)$ .

В литературе конус  $T(z^0 | M)$  встречается под различными названиями: *конус направлений*, *допустимых по ограничениям* [7], *конус допустимых в широком смысле направлений* [8], *конус возможных направлений* [9], *контингентный конус* [12, 16, 23]. Следуя [1, 26], мы будем называть конус  $T(z^0 | M)$  *касательным конусом первого порядка* к множеству  $M$  в точке  $z^0 \in \text{cl}M$ .

Наиболее естественный путь распространения идей, лежащих в основе понятия касательных векторов первого порядка, на случай касательных векторов второго порядка представлен в следующем определении.

**О п р е д е л е н и е 1** (см., например, [1, 3, 6, 12, 15, 16, 26]). Вектор  $w \in Z$  назовем *истинно касательным вектором второго порядка* к множеству  $M \subset Z$  в точке  $z^0 \in \text{cl}M$  по направлению  $z \in Z$  (или просто в  $(z^0, z) \in \text{cl}M \times Z$ ), если существуют последовательности  $(t_n) \in S(0)$  и  $(w_n) \in U_Z(w)$  такие, что  $z^0 + t_n z + t_n^2 w_n \in M$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ .

Множество всех истинно касательных векторов второго порядка к множеству  $M \subset Z$  в точке  $z^0 \in \text{cl}M$  по направлению  $z \in Z$  будем обозначать символом  $M^2(z^0, z)$ .

Известно [3, 6, 12, 16]), что  $M^2(z^0, z)$  является замкнутым (возможно, пустым) подмножеством в  $Z$ , удовлетворяющим следующим свойствам:

- (i)  $M^2(z^0, 0) = T(z^0 | M)$ .
- (ii) Если  $M^2(z^0, z) \neq \emptyset$ , то  $z \in T(z^0 | M)$ .
- (iii)  $M^2(z^0, \alpha z) = \alpha^2 M^2(z^0, z)$  для всех  $\alpha > 0$ .
- (iv) Если  $w \in M^2(z^0, z)$ , то  $w + \beta z \in M^2(z^0, z)$  для всех  $\beta \in \mathbb{R}$ .

**П р и м е р 1.** Пусть  $M = z^0 + K$ , где  $K$  — замкнутый конус из  $Z$ . Тогда  $T(z^0 | M) = K$  и  $M^2(z^0, z) = T(z | K)$  для всех  $z \in K$ .

**П р и м е р 2.** Пусть  $Z = \mathbb{R}^2$ ,  $M := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2 = z_1^2\}$ . Для точки  $z^0 = (0, 0)$ , принадлежащей данному множеству,  $T(0 | M) = \{(z_1, z_2) \mid z_2 = 0\}$ , а  $M^2(0, z) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \mid w_2 = z_1^2\}$  для всех  $z \in T(0 | M)$ ,  $z \neq 0$ .

**П р и м е р 3.** Пусть  $Z = \mathbb{R}^2$ ,  $M := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 \geq 0, z_1^2 = z_2^3\}$  и пусть  $z^0 = (0, 0)$ . Непосредственно из определений касательных векторов первого и второго порядков можно получить, что  $T(0 | M) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 = 0, z_2 \geq 0\}$ , а  $M^2(0, z) = \emptyset$  для любого  $z \in T(0 | M)$ ,  $z \neq 0$ .

Пример 3 показывает, что даже в конечномерных пространствах конус истинно касательных векторов второго порядка к некоторым множествам может оказаться пустым и, следовательно, не давать никакой дополнительной информации о локальном строении таких множеств в окрестности исследуемой точки. Более того, даже в тех случаях, когда конус истинно касательных векторов второго порядка непуст, он может не содержать в себе информацию о

некоторых последовательностях, сходящихся к исследуемой точке, и, следовательно, неположно характеризовать локальное строение множества. Это обстоятельство стимулирует введение для множеств в качестве их локальной аппроксимации второго порядка несколько более широкого множества векторов, нежели конус истинно касательных векторов второго порядка.

**О п р е д е л е н и е 2** [6, 17]. Вектор  $w \in X$  назовем *касательным вектором второго порядка* к множеству  $M \subset Z$  в точке  $z^0 \in \text{cl}M$  по направлению  $z \in Z$ , если существуют последовательности  $(t_n)$ ,  $(\tau_n) \in S(0)$  и  $(w_n) \in U_X(w)$  такие, что  $z^0 + t_n z + t_n \tau_n w_n \in M$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ .

Множество всех касательных векторов второго порядка к множеству  $M \subset Z$  в точке  $z^0 \in \text{cl}M$  по направлению  $z \in Z$  является замкнутым конусом, который будем обозначать символом  $T^2(z^0, z | M)$  и называть *касательным конусом второго порядка* к множеству  $M$  в точке  $z^0 \in \text{cl}M$  по направлению  $z$ .

Отметим, что близким к данному определению является понятие проективного касательного конуса второго порядка, введенное в [24].

Нетрудно видеть, что  $T^2(z^0, 0 | M) = T(z^0 | M)$  и  $M^2(z^0, z) \subset T^2(z^0, z | M) \forall z^0 \in \text{cl}M, z \in Z$ . Кроме того,

$$T^2(z^0, z | M) \neq \emptyset \implies z \in T(z^0 | M).$$

В конечномерных пространствах справедлива и обратная импликация, т. е. если  $\dim Z < \infty$ , то  $T^2(z^0, z | M) \neq \emptyset$  для любого  $z^0 \in \text{cl}M$  и любого  $z \in T(z^0 | M)$ .

Непосредственно проверяется также, что если  $w \in T^2(z^0, z | M)$ , то  $w + \mu z \in T^2(z^0, z | M)$  для всех  $\mu \in \mathbb{R}$ .

Для множества  $M := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2 \mid z_1 \geq 0, z_1^2 = z_2^3\}$ , точки  $z^0 = (0, 0) \in M$  и любого вектора  $z \in T(0 | M)$ ,  $z \neq 0$ , как было указано в примере 3, множество истинно касательных векторов  $M^2(0, z)$  пусто, в то же время  $T^2(0, z | M) = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \mid w_1 \geq 0\}$ .

Перейдем сейчас к понятиям производных по направлениям отображений.

Отображение  $F : X \rightarrow Y$  из нормированного пространства  $X$  в другое нормированное пространство  $Y$  называется [9] *дифференцируемым в точке  $x^0 \in X$  по направлению  $h \in X$* , если существует предел

$$F'(x^0 | h) := \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{F(x^0 + th) - F(x^0)}{t}.$$

Если  $F'(x^0 | h)$  существует для любого  $h \in X$ , то отображение  $F'(x^0 | \cdot) : h \rightarrow F'(x^0 | h)$  называется *производной по направлениям отображения  $F$  в точке  $x^0$* .

Говорят, что отображение  $F : X \rightarrow Y$  *H-дифференцируемо по направлениям в точке  $x^0 \in X$* , если  $F'(x^0 | h)$  существует для всех  $h \in X$  и при этом справедливо равенство

$$F'(x^0 | h) = \lim_{\substack{z \rightarrow h, \\ t \rightarrow 0, t > 0}} \frac{F(x^0 + tz) - F(x^0)}{t}.$$

Если отображение  $F : X \rightarrow Y$  *H-дифференцируемо по направлениям в точке  $x^0 \in X$* , то производная по направлениям  $F'(x^0 | \cdot) : X \rightarrow Y$  непрерывна на всем пространстве  $X$ .

Следуя [13, 14] (см. также [2, 16]), отображение  $F : X \rightarrow Y$  будем называть *дважды (параболически) дифференцируемым в точке  $x^0$  по направлению  $h \in X$  с отклонением  $w \in X$* , если  $F$  дифференцируемо в точке  $x^0$  по направлению  $h$  и, кроме того, существует предел

$$F''(x^0 | h, w) := \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{F(x^0 + th + 1/2 t^2 w) - F(x^0) - t F'(x^0 | h)}{1/2 t^2}.$$

Если предел  $F''(x^0 | h, w)$  существует и, кроме того,

$$F''(x^0 | h, w) = \lim_{\substack{z \rightarrow w, \\ t \rightarrow 0, t > 0}} \frac{F(x^0 + th + \frac{1}{2} t^2 z) - F(x^0) - t F'(x^0 | h)}{1/2 t^2}, \quad (4)$$

то говорят, что отображение  $F$  дважды (параболически)  $H$ -дифференцируемо в точке  $x^0$  по направлению  $h$  с отклонением  $w$ .

В том случае, когда  $F''(x^0 | h, w)$  существует для всех  $h \in X$  и  $w \in X$ , отображение  $F''(x^0 | \cdot, \cdot) : (h, w) \rightarrow F''(x^0 | h, w)$  называется *второй параболической производной* (или, если выполняется (4), *второй параболической  $H$ -производной*) отображения  $F$  в точке  $x^0$ .

Нетрудно убедиться, что сужение второй параболической производной  $F''(x^0 | \cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow Y$  на  $\{0\} \times X$  совпадает с первой производной по направлениям, т. е. имеет место равенство  $F''(x^0 | 0, w) = F'(x^0 | w)$  для всех  $w \in X$ .

Сужение второй параболической производной  $F''(x^0 | \cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow Y$  на  $X \times \{0\}$  называется *второй (обычной) производной по направлениям* отображения  $F$  в точке  $x^0$  по направлению  $h \in X$  и обозначается символом  $F''(x^0 | \cdot) : X \rightarrow Y$ . (Отметим, что вторая (обычная) производная по направлениям была введена задолго (см. например, [8]) до появления второй параболической производной.) Разумеется, в общем случае из существования  $F''(x^0 | h)$  не следует существование  $F''(x^0 | h, w)$  при  $w \neq 0$ . Вместе с тем, если отображение  $F : X \rightarrow Y$  строго дифференцируемо [10] в точке  $x^0$  и, кроме того, существует  $F''(x^0 | h)$ , то для всех  $w \in X$  существует и  $F''(x^0 | h, w)$ , причем

$$F''(x^0 | h, w) = F'(x^0)h + F''(x^0 | h)w,$$

где  $F'(x^0)$  — строгая производная отображения  $F$  в точке  $x^0$ .

Нетрудно убедиться также, что вторая параболическая производная  $F''(x^0 | \cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow Y$  удовлетворяет следующему условию положительной однородности:

$$F''(x^0 | \tau h, \tau^2 w) = \tau^2 F''(x^0 | h, w) \quad \text{для всех } h, w \in X \text{ и всех } \tau > 0.$$

### 3. Условия первого порядка для точек локального $\prec$ -минимума векторного отображения

Как и выше, символ  $S(0)$  будет обозначать семейство последовательностей положительных вещественных чисел  $(t_n)$ ,  $t_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , сходящихся к нулю. Через  $U_Q$  будем обозначать семейство всех последовательностей  $(x_n)$  таких, что  $x_n \in Q$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $U_Q(x)$  — подсемейство из  $U_Q$ , состоящее из последовательностей  $(x_n)$ , сходящихся (в смысле метрики, заданной на  $Q$ ) к  $x$ .

**О п р е д е л е н и е 3.** Вектор  $y \in Y$  назовем *производным вектором* (первого порядка) отображения  $F : Q \rightarrow Y$  в точке  $x^0 \in Q$ , если существуют последовательности  $(x_n) \in U_Q(x^0)$  и  $(t_n) \in S(0)$  такие, что  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{-1}(F(x_n) - F(x^0))$ .

Множество всех производных векторов отображения  $F : Q \rightarrow Y$  в точке  $x^0 \in Q$  будем обозначать символом  $DF(x^0)$ .

Нетрудно убедиться, что  $DF(x^0)$  есть конус. Кроме того, так как из равенств  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{-1}(F(x_n) - F(x^0))$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 0$  следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x^0)$ , то  $DF(x^0) \subset T(F(x^0) | F(Q))$ , где  $T(F(x^0) | F(Q))$  — касательный (контингентный) конус (см. определение 1) к множеству  $F(Q)$  в точке  $F(x^0)$ .

**Теорема 2** (необходимое условие минимальности первого порядка). Пусть  $F : Q \rightarrow Y$  — отображение, определенное на метрическом пространстве  $Q$  и принимающее значение в упорядоченном банаховом пространстве  $(Y, \prec)$ . Если точка  $x^0 \in Q$  доставляет локальный слабый  $\prec$ -минимум отображению  $F$ , то

$$\sigma(y) \geq 0 \quad \text{для всех } y \in DF(x^0). \quad (5)$$

**Доказательство.** Пусть  $y \in DF(x^0)$  и пусть последовательности  $(x_n) \in U_Q(x^0)$  и  $(t_n) \in S(0)$  таковы, что  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{-1}(F(x_n) - F(x^0))$ . Если точка  $x^0 \in Q$  доставляет локальный слабый  $\prec$ -минимум отображению  $F$  (на  $Q$ ), то в силу утверждения (а) теоремы 1  $\sigma(F(x_n) - F(x^0)) \geq 0$  для достаточно больших номеров  $n$ . Умножая последнее неравенство на  $t_n^{-1}$  и устремляя  $n$  к бесконечности, получим вследствие непрерывности функции  $\sigma(\cdot)$  неравенство  $\sigma(y) \geq 0$ . Теорема доказана.

**Следствие 1** [2, 3]. Пусть  $X$  — нормированное пространство,  $Q$  — подмножество из  $X$ ,  $F : X \rightarrow (Y, \prec)$  — отображение из  $X$  в упорядоченное банахово пространство  $(Y, \prec)$ . Если  $F$   $H$ -дифференцируемо по направлениям в точке  $x^0$ , то для того, чтобы точка  $x^0 \in Q$  доставляла локальный слабый  $\prec$ -минимум отображению  $F$  на множестве  $Q$ , необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\sigma(F'(x^0 | h)) \geq 0 \quad \text{для всех } h \in T(x^0 | Q), \quad (6)$$

где  $T(x^0 | Q)$  — касательный конус первого порядка к множеству  $Q$  в точке  $x^0$ .

Для того чтобы убедиться в справедливости неравенства (6), заметим, что если  $Q$  является подмножеством нормированного пространства  $X$ , а отображение  $F$  определено в некоторой открытой области пространства  $X$ , содержащей  $Q$ , и является  $H$ -дифференцируемым по направлениям в точке  $x^0$ , то  $F'(x^0 | h) \in DF(x^0)$  для любого  $h \in T(x^0 | Q)$ , где  $F'(x^0 | \cdot) : X \rightarrow Y$  —  $H$ -производная по направлениям отображения  $F$  в точке  $x^0$ ,  $T(x^0 | Q)$  — касательный (контингентный) конус первого порядка к множеству  $Q$  в точке  $x^0$ .

**Теорема 3** (достаточное условие минимальности первого порядка). Пусть  $F : Q \rightarrow Y$  — отображение, определенное на метрическом пространстве  $Q$  и принимающее значение в упорядоченном банаховом пространстве  $(Y, \prec)$ . Если пространство  $Y$  конечномерно, а отображение  $F : Q \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $x^0 \in Q$ , то условие

$$\sigma(y) > 0 \quad \text{для всех } y \in DF(x^0), \quad y \neq 0, \quad (7)$$

является достаточным для того, чтобы точка  $x^0 \in Q$  доставляла локальный сильный  $\prec$ -минимум отображению  $F$  на метрическом пространстве  $Q$ .

**Доказательство.** Будем рассуждать от противного. Предположим, что условие (7) выполнено, а точка  $x^0 \in Q$  не является локально сильно  $\prec$ -минимальной точкой отображения  $F : Q \rightarrow X$ . Тогда существует последовательность  $(x_n) \in U_Q(x^0)$ ,  $F(x_n) \neq F(x^0)$ , такая, что  $\sigma(F(x_n) - F(x^0)) \leq 0$  для всех  $n$ . Положим  $t_n := \|F(x_n) - F(x^0)\|$ . Так как  $F(x_n) \neq F(x^0)$  и  $F$  непрерывна в точке  $x^0$ , то  $t_n > 0$  и  $t_n \rightarrow 0$ . Без ограничения общности можем считать, что последовательность  $y_n := t_n^{-1}(F(x_n) - F(x^0))$  сходится к некоторому вектору  $y \in Y$ ,  $\|y\| = 1$ . Из определения  $DF(x^0)$  следует, что  $y \in DF(x^0)$ ,  $y \neq 0$ . Кроме того,  $\sigma(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n^{-1} \sigma(F(x_n) - F(x^0)) \leq 0$ . Пришли к противоречию с неравенством (7), которое и доказывает теорему.

#### 4. Условия второго порядка для точек локального $\prec$ -минимума векторного отображения

**Определение 4.** Вектор  $z \in Y$  назовем производным вектором второго порядка отображения  $F : Q \rightarrow Y$  в точке  $x^0 \in Q$  по направлению  $y \in Y$ , если существуют последовательности  $(x_n) \in U_Q(x^0)$  и  $(t_n) \in S(0)$ ,  $(\tau_n) \in S(0)$  такие, что  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(x^0) - t_n y}{1/2 t_n \tau_n}$ .

Множество всех производных векторов второго порядка отображения  $F : Q \rightarrow Y$  в точке  $x^0 \in Q$  по направлению  $y \in Y$  будем обозначать символом  $D^2F(x^0, y)$ .

Если  $D^2F(x^0, y) \neq \emptyset$ , то  $y \in DF(x^0)$ . Нетрудно видеть также, что  $D^2F(x^0, y)$  есть конус в  $Y$ , причем  $D^2F(x^0, y) \subset T^2(y^0, y | F(Q))$ , где  $T^2(y^0, y | F(Q))$  — касательный конус второго порядка к множеству  $F(Q)$  в точке  $y^0$  по направлению  $y$  [6].

**Теорема 4** (необходимое условие минимальности второго порядка). Пусть  $F : Q \rightarrow Y$  — отображение, определенное на метрическом пространстве  $Q$  и принимающее значение в упорядоченном банаховом пространстве  $(Y, \prec)$ . Если точка  $x^0 \in Q$  доставляет локальный слабый  $\prec$ -минимум отображению  $F$ , то для любого  $y \in DF(x^0)$  такого, что  $\sigma(y) = 0$ , выполняется неравенство

$$\max_{y^* \in \partial\sigma(y)} y^*(z) \geq 0 \quad z \in D^2F(x^0, y), \quad (8)$$

где  $\partial\sigma(y) := \{y^* \in \partial\sigma \mid y^*(y) = 0\}$  — субдифференциал функции  $\sigma$  в точке  $y$ .

**Доказательство.** Пусть  $y \in DF(x^0)$  удовлетворяет условию  $\sigma(y) = 0$  и пусть  $z \in D^2F(x^0, y)$ . Тогда существуют последовательности  $(x_n) \in U_Q(x^0)$  и  $(t_n) \in S(0)$ ,  $(\tau_n) \in S(0)$  такие, что  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(x_n) - F(x^0) - t_n y}{1/2 t_n \tau_n}$ . Так как  $x^0 \in Q$  локально слабо  $\prec$ -минимальная точка для отображения  $F$  на множестве  $Q$ , то  $\sigma(F(x_n) - F(x^0)) \geq 0$  для достаточно больших  $n$ . Положим  $z_n := \frac{F(x_n) - F(x^0) - t_n y}{1/2 t_n \tau_n}$ . Тогда  $F(x_n) - F(x^0) = t_n y + 1/2 t_n \tau_n z_n$ . Следовательно,  $\sigma(y + 1/2 \tau_n z_n) \geq 0$  для достаточно больших  $n$ . Разделив последнее неравенство на  $1/2 \tau_n$  и устремив  $n$  к  $+\infty$ , получим  $\sigma'(y | z) \geq 0$ , где  $\sigma'(y | \cdot) : Y \rightarrow \mathbb{R}$  — производная по направлениям функции  $\sigma$  в точке  $y$ . Воспользовавшись равенством  $\sigma'(y | z) = \max_{y^* \in \partial\sigma(y)} y^*(z)$ , придем к неравенству (8). Теорема доказана.

**Следствие 2** [3]. Пусть  $X$  — нормированное пространство,  $Q$  — множество из  $X$ ,  $F : X \rightarrow (Y, \prec)$  — отображение из  $X$  в упорядоченное банахово пространство  $(Y, \prec)$ . Если отображение  $F : X \rightarrow Y$  дважды параболически  $H$ -дифференцируемо в точке  $x^0 \in Q$ , то для того чтобы точка  $x^0 \in Q$  доставляла локальный слабый  $\prec$ -минимум отображению  $F$  на множестве  $Q$ , необходимо, чтобы для любого  $h \in T(x^0 | Q)$  такого, что  $\sigma(F'(x^0 | h)) = 0$  выполнялось неравенство

$$\max_{y^* \in \partial\sigma(F'(x^0 | h))} y^*(F''(x^0 | h, w)) \geq 0 \quad \text{для всех } w \in Q^2(x^0, h),$$

где  $Q^2(x^0, h)$  — совокупность истинно касательных векторов второго порядка к множеству  $Q$  в точке  $x^0$  по направлению  $h$ .

Если  $Q$  является подмножеством нормированного пространства  $X$ , а отображение  $F$  определено в некоторой открытой области пространства  $X$ , содержащей  $Q$ , и дважды параболически  $H$ -дифференцируемо в точке  $x^0 \in Q$ , то для любого  $h \in T(x^0 | Q)$

$$F''(x^0 | h, w) \in D^2F(x^0, F'(x^0 | h)) \quad \text{для всех } w \in Q^2(x^0, h),$$

где  $Q^2(x^0, h)$  — множество истинно касательных векторов второго порядка к множеству  $Q$  в точке  $x^0 \in Q$  по направлению  $h \in Y$ .

Это замечание доказывает справедливость следствия 2.

**О п р е д е л е н и е 5.** Вектор  $y \in Y$  назовем *радиальным производным вектором* отображения  $F : Q \rightarrow X$  в точке  $x^0 \in Q$ , если существуют последовательности  $(x_n) \in U_Q(x^0)$  и  $(t_n) \in S(0)$  такие, что  $F(x_n) = F(x^0) + t_n y$  для всех  $n$ .

Множество всех радиальных производных векторов отображения  $F : Q \rightarrow X$  в точке  $x^0 \in Q$  обозначим через  $RF(x^0)$ . Очевидно, что  $RF(x^0) \subset DF(x^0)$ .

**Теорема 5** (достаточное условие минимальности второго порядка). Пусть  $F : Q \rightarrow Y$  — отображение, определенное на метрическом пространстве  $Q$  и принимающее значение в упорядоченном банаховом пространстве  $(Y, \prec)$ . Если пространство  $Y$  конечномерно, а отображение  $F : Q \rightarrow Y$  непрерывно в точке  $x^0 \in Q$ , то для того чтобы точка  $x^0 \in Q$  доставляла локальный сильный  $\prec$ -минимум отображению  $F : Q \rightarrow Y$  достаточно, чтобы было справедливо условие (5) и для каждого вектора  $y \in DF(x^0)$ ,  $y \neq 0$ , удовлетворяющего равенству  $\sigma(y) = 0$ , имело место включение  $y \in DF(x^0) \setminus RF(x^0)$  и выполнялось неравенство

$$\max_{y^* \in \partial\sigma(y)} y^*(z) > 0 \quad \text{для всех } z \in D^2F(x^0, y) \cap L_y^\perp, \quad z \neq 0, \quad (9)$$

где  $L_y^\perp$  — произвольное прямое дополнение одномерного подпространства  $L_y := \{\beta y \mid \beta \in \mathbb{R}\}$ .

**Доказательство.** Будем рассуждать от противного. Предположим, что условие (9) выполнено, а  $x^0$  не является локально сильно  $\prec$ -минимальной точкой отображения  $F$ . Тогда найдется последовательность  $(x_n) \in U_Q(x^0)$ ,  $F(x_n) \neq F(x^0)$ , такая, что  $\sigma(F(x_n) - F(x^0)) \leq 0$  для всех  $n$ , и такая, что соответствующая ей последовательность  $y_n = \frac{F(x_n) - F(x^0)}{\|F(x_n) - F(x^0)\|}$  сходится к некоторому вектору  $y$ ,  $\|y\| = 1$ . Так как  $\sigma(y_n) \leq 0$ , то  $\sigma(y) \leq 0$ . С другой стороны, поскольку  $y \in DF(x^0)$ , то  $\sigma(y) \geq 0$ . Значит,  $\sigma(y) = 0$  и  $y \in DF(x^0)$ .

Если  $y_n = y$  для бесконечного числа номеров  $n$ , то из последовательности  $(y_n)$  можно выделить подпоследовательность  $(y_{n_k})$  такую, что  $y_{n_k} = y$  для всех  $k$ . Не ограничивая общности, можно считать, что исходная последовательность  $(x_n)$  такова, что  $y_n = y$  для всех  $n$ . В этом случае  $F(x_n) = F(x^0) + t_n y$ , где  $t_n = \|F(x_n) - F(x^0)\|$ , для всех  $n$  и, значит,  $y \in RF(x^0)$ , что невозможно в силу условий теоремы.

Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что  $y_n \neq y$  для всех  $n$ . Рассмотрим последовательность  $z_n := \frac{y_n - y}{\|y_n - y\|}$  и предположим, что  $z_n \rightarrow z$  при  $n \rightarrow \infty$  (при необходимости перейдем к подпоследовательности, для которой это условие выполняется). Из определений векторов  $y_n$  и  $z_n$  имеем, что  $F(x_n) = F(x^0) + t_n y + 1/2 t_n \tau_n z_n$ , где  $t_n := \|F(x_n) - F(x^0)\|$ ,  $\tau_n := \|y_n - y\|$ . Следовательно,  $z \in D^2F(x^0, y)$ , причем  $z \neq 0$ . Так как пространство  $Y$  конечномерно, то без ограничения общности можем считать, что на  $Y$  задано скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  и  $\|y\| = (\langle y, y \rangle)^{\frac{1}{2}}$ . При любом  $n$  справедлива следующая цепочка равенств  $1 = \langle y_n, y_n \rangle = \|y_n - y\|^2 + 2\langle y_n - y, y \rangle + \|y\|^2$ , а поскольку  $\|y\| = 1$ , то  $\|y_n - y\| + \langle \|y_n - y\|^{-1}(y_n - y), y \rangle = 0$ . Устремляя  $n \rightarrow \infty$ , получаем  $\langle z, y \rangle = 0$ . Следовательно,  $z$  принадлежит ортогональному дополнению  $L_y$ .

Так как последовательность  $(x_n)$  удовлетворяет неравенству  $\sigma(F(x_n) - F(x^0)) \leq 0$  при всех  $n$ , то  $\sigma(y + 1/2 \tau_n z_n) \leq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Поскольку, кроме того,  $\sigma(y) = 0$ , то

$$\frac{\sigma(y + 1/2 \tau_n z_n) - \sigma(y)}{1/2 \tau_n} \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

и, следовательно,  $\sigma'(y|z) = \max_{y^* \in \partial\sigma(y)} y^*(z) \leq 0$ . Пришли к противоречию, которое и доказывает теорему.

**О п р е д е л е н и е 6.** Говорят [15, 16], что подмножество  $Q$  нормированного пространства  $X$  удовлетворяет в точке  $x^0 \in Q$  условию регулярности второго порядка, если для любой последовательности  $(x_n) \in Q$  вида  $x_n = x^0 + t_n h + \frac{1}{2} t_n^2 w_n$ , где  $h \in X$ ,  $(t_n) \in S(0)$  и  $(w_n) \in U_X$  таковы, что  $t_n w_n \rightarrow 0$ , справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(w_n, Q^2(x^0, h)) = 0,$$

где  $\text{dist}(w, Q^2(x^0, h)) := \inf_{u \in Q^2(x^0, h)} \|w - u\|$  — расстояние от точки  $w$  до множества  $Q^2(x^0, h)$ .

**Теорема 6** (достаточное условие минимальности второго порядка в регулярном случае).

Пусть  $Q$  — подмножество нормированного пространства  $X$ , удовлетворяющее в точке  $x^0 \in Q$  условию регулярности второго порядка, и пусть отображение  $F : X \rightarrow Y$  дважды дифференцируемо по Фреше в точке  $x^0$ . Если нормированные пространства  $X$  и  $Y$  конечномерны, то для того чтобы точка  $x^0 \in Q$  доставляла локальный сильный  $\prec$ -минимум отображению  $F : X \rightarrow Y$  на множестве  $Q$ , достаточно, чтобы было справедливо условие (6) и для любого  $h \in T(x^0 | Q)$  такого, что  $\sigma(F'(x^0)h) = 0$ , выполнялось неравенство

$$\inf_{w \in Q^2(x^0, h)} \max_{y^* \in \partial\sigma(F'(x^0)h)} y^*(F'(x^0)w + F''(x^0)[h, h]) > 0, \quad (10)$$

где  $Q^2(x^0, h)$  — совокупность истинно касательных векторов второго порядка к множеству  $Q$  в точке  $x^0$  по направлению  $h$ ;  $F'(x^0) : X \rightarrow Y$  и  $F''(x^0)[\cdot, \cdot] : X \times X \rightarrow Y$  — соответственно первая и вторая производные Фреше отображения  $F$  в точке  $x^0$ .

**Доказательство.** Так же, как и при доказательстве предыдущей теоремы, будем рассуждать от противного. Предположим, что условия теоремы выполнены, а  $x^0 \in Q$  не является локально сильно  $\prec$ -минимальной точкой отображения  $F : X \rightarrow Y$ . Тогда найдется последовательность  $(x_n) \in U_Q(x^0)$ ,  $F(x_n) \neq F(x^0)$ , такая, что  $\sigma(F(x_n) - F(x^0)) \leq 0$  для всех  $n$ , и такая, что соответствующая ей последовательность  $h_n = \frac{x_n - x^0}{\|x_n - x^0\|}$  сходится к некоторому вектору  $h$ ,  $\|h\| = 1$ . Из дифференцируемости по Фреше отображения  $F$  в точке  $x^0$  и условия  $\frac{\sigma(F(x_n) - F(x^0))}{\|x_n - x^0\|} \leq 0$  получаем, что  $\sigma(F'(x^0)h) \leq 0$ . С другой стороны, поскольку  $h \in T(x^0 | Q)$ , то в силу условия (6) имеем  $\sigma(F'(x^0)h) \geq 0$ . Значит,  $\sigma(F'(x^0)h) = 0$  и, следовательно,  $-F'(x^0)h \in \text{bd}P$ , где  $\text{bd}P$  — граница конуса  $P$ .

Положим  $w_n = 2(h_n - h)/t_n$ , где  $t_n = \|x_n - x^0\|$ . Тогда  $x_n = x^0 + t_n h + 1/2 t_n^2 w_n$ , причем  $(t_n) \in S(0)$ ,  $(w_n) \in U_X$  и  $t_n w_n = 2(h_n - h) \rightarrow 0$ . Поскольку множество  $Q$  удовлетворяет условию регулярности второго порядка, то существует последовательность  $(u_n) \in Q^2(x^0, h)$  такая, что  $w_n - u_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Выберем из множества  $\partial\sigma(F'(x^0)h) := \{y^* \in \partial\sigma \mid y^*(F'(x^0)h) = 0\}$  последовательность  $(y_n^*)$  такую, что

$$\max_{y^* \in \partial\sigma(F'(x^0)h)} y^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h, h]) = y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h, h]).$$

Существование таких  $y_n^*$  следует из компактности множества  $\partial\sigma(F'(x^0)h)$  и непрерывности линейной функции  $y^* \rightarrow y^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h, h])$ . Заметим, что в силу условия (10) для всех  $n$  выполняется неравенство

$$y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h, h]) \geq \gamma, \quad (11)$$

где  $\gamma := \inf_{w \in Q^2(x^0, h)} \max_{y^* \in \partial\sigma(F'(x^0)h)} y^*(F'(x^0)w + F''(x^0)[h, h]) > 0$ .

Так как  $\partial\sigma(F'(x^0)h)$  — компакт, то из последовательности  $(y_n^*)$  можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому  $y^* \in \partial\sigma(F'(x^0)h)$ . Не ограничивая общности, будем считать, что сама последовательность  $(y_n^*)$  сходится к  $y^* \in \partial\sigma(F'(x^0)h)$ . Воспользуемся далее тем, что отображение  $F : X \rightarrow Y$  дважды дифференцируемо по Фреше в точке  $x^0$ . По формуле Тэйлора имеем

$$\begin{aligned} F(x_n) - F(x^0) &= t_n F'(x^0)h + \frac{1}{2} t_n^2 (F'(x^0)w_n + F''(x^0)[h, h]) + o(t_n^2) \\ &= t_n F'(x^0)h + \frac{1}{2} t_n^2 (F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h, h]) + \frac{1}{2} t_n^2 F'(x^0)(w_n - u_n) + o(t_n^2). \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что из  $y_n^* \in \partial\sigma(F'(x^0)h)$  следует, что  $y_n^*(F'(x^0)h) = 0$ . В силу этого из равенства (12) и условия (11) получаем неравенство

$$\begin{aligned} y_n^*(F(x_n) - F(x^0)) &= \frac{1}{2}t_n^2 y_n^*(F'(x^0)u_n + F''(x^0)[h, h]) + y_n^* \left( \frac{1}{2}t_n^2 F'(x^0)(w_n - u_n) + o(t_n^2) \right) \\ &\geq \frac{1}{2}\|x_n - x^0\|^2 \left( \gamma + y_n^*(F'(x^0)(w_n - u_n)) + \frac{y_n^*(o(\|x_n - x^0\|^2))}{\|x_n - x^0\|^2} \right), \end{aligned}$$

из которого следует, что  $y_n^*(F(x_n) - F(x^0)) > 0$  при достаточно больших  $n$ .

С другой стороны, так как  $-(F(x_n) - F(x^0)) \in \text{cl}P$ , а  $y_n^* \in \partial\sigma$ , то  $y_n^*(F(x_n) - F(x^0)) \leq 0$  для всех  $n$ .

Получили противоречие, которое доказывает теорему.

В случае скалярной задачи оптимизации, т. е. в случае, когда пространство  $Y$  совпадает с вещественной прямой  $\mathbb{R}$ , на которой задано естественное упорядочение, теорема 6 принимает следующий вид.

**Следствие 3** [27]. Пусть  $Q$  — подмножество нормированного пространства  $X$ , удовлетворяющее в точке  $x^0 \in Q$  условию регулярности второго порядка, и пусть вещественнозначная функция  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  дважды дифференцируема по Фреше в точке  $x^0$ . Если нормированное пространство  $X$  конечномерно, то для того чтобы точка  $x^0 \in Q$  доставляла локальный минимум функции  $f : X \rightarrow Y$  на множестве  $Q$ , достаточно, чтобы было справедливо условие

$$f'(x^0)h \geq 0 \quad \text{для всех } h \in T(x^0 | Q)$$

и для любого  $h \in T(x^0 | Q)$  такого, что  $f'(x^0)h = 0$ , выполнялось неравенство

$$\inf_{w \in Q^2(x^0, h)} (f'(x^0)w + f''(x^0)[h, h]) > 0. \quad (13)$$

Авторы искренне благодарны рецензенту статьи за сделанные замечания, которые позволили устранить некоторые неточности и улучшить изложение материала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 256 с.
2. Гороховик В.В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. 239 с.
3. Гороховик В.В., Рачковский Н.Н. Условия первого и второго порядка локальной собственной минимальности в задачах векторной оптимизации: препринт № 50(450) / Ин-т математики АН БССР. Минск, 1990. 27 с.
4. Гороховик В.В. К условиям локального минимума второго порядка в гладких задачах оптимизации с абстрактными ограничениями // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2005. № 3. С. 5–12.
5. Гороховик В.В. Асимптотически касательный конус второго порядка к множествам и условия локального минимума в задаче оптимизации с ограничениями // Вестн. С.-Петерб. ун-та. 2006. Вып. 1. С. 34–41. (Информатика и теория управления.)
6. Гороховик В.В. Касательные векторы второго порядка к множествам и условия минимальности для точек подмножеств упорядоченных нормированных пространств // Тр. Ин-та математики. Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2006. Т. 14, № 2. С. 35–47.
7. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.
8. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1968. 180 с.

9. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1974. 479 с.
10. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1990. 432 с.
11. Красносельский М.А., Бурд В.Ш., Колесов Ю.С. Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970. 351 с.
12. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston: Birkhauser, 1990. 461 p.
13. Ben-Tal A. Second order and related extremality conditions in nonlinear programming // J. Optim. Theory Appl. 1980. Vol. 31, no. 2. P. 143–165.
14. Ben-Tal A., Zowe J. A unified theory of first and second order conditions for extremum problems in topological vector spaces // Math. Programming Stud. 1982. Vol. 19. P. 39–76.
15. Bonnans J.F., Cominetti R., Shapiro A. Second order optimality conditions based on parabolic second order tangent sets // SIAM J. Optim. 1999. Vol. 9, no. 2. P. 466–492.
16. Bonnans J. F., Shapiro A. Perturbation analysis of optimization problems. Berlin: Springer, 2000. 601 p.
17. Cambini R., Martein L., Vlach M. Second order tangent sets and optimality conditions // Math. Japon. 1999. Vol. 49, no. 3. P. 451–461.
18. Göpfert A., Riahi H., Tammer Chr. and Zălinescu C. Variational methods in partially ordered spaces. New York: Springer, 2003. 365 p.
19. Ioffe A.D. Necessary and sufficient conditions for a local minimum. III: Second order conditions and augmented duality // SIAM J. Control Optim. 1979. Vol. 17, no. 2. P. 266–288.
20. Jameson G. Ordered linear spaces. Berlin: Springer, 1970. 194 p.
21. Jiménez B., Novo V. Second order necessary conditions in set constrained differentiable vector optimization // Math. Methods Oper. Res. 2003. Vol. 58, no. 2. P. 299–317.
22. Jiménez B., Novo V. Optimality conditions in differentiable vector optimization via second-order tangent sets // Appl. Math. Optim. 2004. Vol. 49, no. 2. P. 123–144.
23. Mordukhovich B.S. Variational analysis and generalized differentiation. V. I: Basic theory. Berlin et al.: Springer, 2005. 1057 p.
24. Penot J.P. Second order conditions for optimization problems with constraints // SIAM J. Control Optim. 1999. Vol. 37, no. 1. P. 303–318.
25. Peressini A.L. Ordered topological vector spaces. New York: Harper and Row, 1967. 228 p.
26. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 734 p.
27. Shapiro A. Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality conditions // Optimization. 2009. Vol. 58, no. 2. P. 133–161.

Бахтин Виктор Иванович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики НАН Беларуси  
e-mail: bakhtin@mail.ru

Поступила 16.05.2009

Гороховик Валентин Викентьевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
чл.-корр. НАН Беларуси  
зав. отд.  
Ин-т математики НАН Беларуси  
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

УДК 519.62

## ВИДИМОСТЬ ОБЪЕКТА ДЛЯ ГРУППЫ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ С НЕТОЧНО ЗАДАНЫМИ КООРДИНАТАМИ<sup>1</sup>

В. И. Бердышев

Введена функция, характеризующая относительную видимость движущегося объекта для наблюдателя с неточно заданными координатами. Доказана ее дифференцируемость по направлениям, приведена формула дифференцирования в случае подвижного наблюдателя. Определена характеристика видимости объекта для группы наблюдателей, рассмотрена задача минимизации этой характеристики.

Ключевые слова: характеристика видимости движущегося объекта, дифференцируемость по направлениям.

V. I. Berdyshev. Object visibility for a group of observers with inaccurately given coordinates.

A function is introduced that characterizes the relative visibility of a moving object for an observer with inaccurately given coordinates. The directional differentiability of this function is established and, for the case of a moving observer, a differentiation formula is given. The visibility characteristic of an object for a group of observers is defined and the problem of minimizing this characteristic is considered.

Keywords: visibility characterization of a moving object, directional differentiability.

### 1. Введение

Пусть объект  $t$  движется в пространстве  $\mathbb{R}^3$ , в котором зафиксировано телесное ограниченно компактное множество  $G$ , препятствующее видимости, например подграфик функции, определяющей поле высот земного рельефа. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  имеется компактное множество  $F = \{f\}$  точек (наблюдателей)  $f$  такое, что в заданный момент времени объект виден из каждой точки  $f$ , т. е. интервал  $(t, f)$  с концами  $t$  и  $f$  не пересекается с множеством  $G$ . Местоположение каждого наблюдателя  $f$  известно с погрешностью  $h = h(f) \geq 0$ ; фактически известно лишь, что наблюдатель находится в шаре:

$$V_h(f) = \{v \in \mathbb{R}^3: |v - f| \leq h\},$$

через  $|\cdot|$  здесь обозначается евклидова норма.

Предположим, что точка  $t$  не содержится ни в одном из шаров  $V_h(f)$ ,  $f \in F$ , и любой шар  $V_h(f)$  виден из точки  $t$ , т. е. для любой точки  $v \in V_h(f)$  полуинтервал  $[t, v] \setminus V_h(f)$  не пересекается с множеством  $G$ .

Для наблюдателя  $f \in F$  предпочтительна ситуация, когда из точек шара  $V_h(f)$  видна не только точка  $t$ , но и любая точка шара  $V_r(t)$  при некотором  $r > 0$ . Точнее, пусть выполняется соотношение

$$(\text{conv}(V_r(t) \cup V_h(f)) \setminus V_h(f)) \cap G = \emptyset,$$

где  $\text{conv}$  — выпуклая оболочка множества. Обозначим

$$K_{r,h} = K_{r,h}(t, f) = \text{conv}(V_r(t) \cup V_h(f)) \setminus V_h(f),$$

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления” и при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00325).

здесь  $h = h(f)$ , и введем функцию

$$\begin{aligned} r_h(t) &= r(t, f, G) = r(t, f, h, G) = \sup \{r : K_{r,h}(t, f) \cap G = \emptyset\} \\ &= \min \{r : K_{r,h}(t, f) \cap G \neq \emptyset\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

характеризующую уровень видимости объекта  $t$  для наблюдателя  $f$ . Поскольку величина  $h$  зависит от  $f$ , то в обозначениях (1.1) переменную  $h$  иногда будем опускать. Определим еще функции

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(t) = \max_{f \in F} r(t, f, G), \quad \underline{\mathcal{R}}(t) = \min_{f \in F} r(t, f, G). \quad (1.2)$$

Для того чтобы выйти из поля видимости наблюдателя  $f$ , объект  $t$  должен покрыть расстояние, не меньшее чем  $r_h(t)$ . Наблюдателю  $f$ , если он подвижный, для сохранения видимости объекта  $t$ , скорее всего, придется пройти расстояние, не меньшее чем  $\rho = |t - f|$ . Введем величину

$$A(t, f) = A(t, f, G) = \frac{r(t, f, G)}{|t - f|}, \quad (1.3)$$

которая в определенном смысле характеризует относительную видимость (доступность) объекта  $t$  для наблюдателя  $f$ . Заметим, что в качестве знаменателя в определении (1.3) можно взять произвольную дифференцируемую функцию от  $|f - t|$ , например  $|f - t|^2$ . Положим

$$\mathcal{A}(t) = \max_{f \in F} A(t, f, G), \quad \underline{\mathcal{A}}(t) = \min_{f \in F} A(t, f, G). \quad (1.4)$$

В зависимости от задачи, решаемой объектом  $t$ , ему предстоит из конуса возможных направлений выбрать такое направление движения  $\tilde{t}$ ,  $|\tilde{t}| = 1$ , которое позволит либо уменьшить величины  $\mathcal{R}(t)$ ,  $\mathcal{A}(t)$ , либо увеличить величины  $\underline{\mathcal{R}}(t)$ ,  $\underline{\mathcal{A}}(t)$ . В связи с этим представляет интерес задача дифференцирования функций  $r(t, f, G)$ ,  $A(t, f, G)$ . Данная работа является продолжением работ [1, 2].

## 2. Модель системы “наблюдаемый — наблюдатель”

Пусть выбрано направление  $\tilde{t}$  движения точки  $t$ ,  $|\tilde{t}| = 1$ . В простейшем случае наблюдатель  $f$  остается неподвижным. Предположим, что наблюдатель  $f$  подвижен. В этом случае естественно предположить, что, когда наблюдаемый объект окажется в точке  $t_\lambda = t + \lambda \tilde{t}$ , наблюдатель, стремясь сохранить наблюдаемого в зоне видимости, переместится в точку  $f_\lambda = f + c(\lambda) \frac{t_\lambda - f}{|t_\lambda - f|}$ ,  $c(0) = 0$ , при этом погрешность  $h$  определения местоположения наблюдателя в общем случае тоже изменится, приняв значение  $h(f_\lambda)$ . Будем считать функции  $c_\lambda = c(\lambda) = c(\lambda, f)$  и  $h_\lambda = h(f_\lambda)$  дифференцируемыми.

## 3. Дифференцирование функций $r(t, f, G)$ , $A(t, f, G)$ по направлениям

Сперва рассмотрим вопрос о существовании производной по направлению  $\tilde{t}$  функции  $r$  (см. (1.1)):

$$\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial r(t, f, h, G)}{\partial \tilde{t}} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{r(t_\lambda, f_\lambda, h_\lambda, G) - r(t, f, h, G)}{\lambda}.$$

В дальнейшем понадобится следующая

**Теорема** (В. Ф. Демьянов [3]). Пусть  $\mathcal{T}$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^n$ ,  $G$  — ограниченное замкнутое множество в  $\mathbb{R}^m$ ,  $R(t, g)$  — непрерывная и непрерывно дифференцируемая по  $t$  на  $\mathcal{T} \times G$  функция,

$$r(t) = \max \{R(t, g) : g \in G\},$$

$$G(t) = \{g \in G: R(t, g) = r(t)\}.$$

Функция  $r(t)$  имеет в каждой точке  $t \in \mathcal{T}$  производную по любому направлению  $\tilde{t}$ ,  $|\tilde{t}| = 1$ , причем

$$\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}} = \max \left\{ \frac{\partial R(t, g)}{\partial \tilde{t}} : g \in G(t) \right\}.$$

Пусть  $g \in V_{|t-f|}(t) \setminus \text{conv}(V_h(f) \cup t)$ . Введем функцию

$$R(t, f, h, g) = \min \{r: g \in K_{r,h}(t, f)\}.$$

Тогда

$$r(t, f, h, G) = \min \{R(t, f, h, g): g \in G\}.$$

Граница  $\text{bd } K_{r,h}$  множества  $K_{r,h}$  есть объединение трех поверхностей: конической (цилиндрической при  $r = h$ )  $k_{r,h} = k_{r,h}(t, f)$  и двух сферических  $s_r = s_r(t) \subset S_r(t)$ ,  $s_h = s_h(f) \subset S_h(f)$ , где  $S_r(t) = \{v \in \mathbb{R}^3: |t - v| = r\}$  — сфера радиуса  $r$  с центром  $t$ . Так что

$$k_{r,h} = k_{r,h}(t, f) = \text{bd } K_{r,h} \setminus \left\{ S_r(t) \cup S_h(f) \right\}.$$

Легко видеть, что относительная граница  $\text{bd } k_{R,h}$  множества  $k_{R,h}$  состоит из двух окружностей. Пусть

$$R = R(t, f, h, g), \quad R_\lambda = R(t_\lambda, f_\lambda, h_\lambda, g).$$

Если  $g \in s_R(t) \setminus \text{bd } k_{R,h}$ , то для достаточно малых  $\lambda > 0$  выполняется включение  $g \in s_{R_\lambda}(t_\lambda)$  и, значит,

$$R = |t - g|, \quad R_\lambda = |t_\lambda - g|. \quad (3.1)$$

Пусть  $g \in k_{R,h}$  и  $L_g$  — образующая (прямая) конической поверхности  $k_{R,h}$ , содержащая точку  $g$ . Нетрудно видеть, что для достаточно малых  $\lambda > 0$  справедливо включение  $g \in k_{R_\lambda, h_\lambda}$  и, следовательно,

$$R = d(t, L_g), \quad R_\lambda = d(t_\lambda, L_{\lambda, g}), \quad (3.2)$$

где  $L_{\lambda, g}$  — образующая конической поверхности  $k_{R_\lambda, h_\lambda}$ ;  $d$  — расстояние от точки  $t$  до прямой. В случае, когда  $g \in s_R(t) \cap \text{bd } k_{R,h}$ , введем плоскость  $H$ , ортогональную прямой  $L_g$  и содержащую точку  $t$ . Если  $t_\lambda$  лежит в замкнутом полупространстве, образованном плоскостью  $H$  и содержащем  $f$ , то имеют место равенства (3.1). Если же точка  $t_\lambda$  не принадлежит этому полупространству, то выполняются равенства (3.2).

В случае равенств (3.1), используя теорему косинусов, устанавливаем равенство

$$\frac{\partial R(t, f, h, g)}{\partial \tilde{t}} = -\cos \xi,$$

где  $\xi$  — угол между векторами  $g - t$  и  $\tilde{t}$ .

Перейдем к случаю равенств (3.2). Итак, пусть  $g \in k_{R,h}(t, f) \cap L_g$ ,  $g \in k_{R_\lambda, h_\lambda}(t_\lambda, f_\lambda) \cap L_{\lambda, g}$ . Обозначим  $\rho = |t - f|$ ,  $\rho_\lambda = |t_\lambda - f_\lambda|$ , а через  $t_g$ ,  $t_{\lambda, g}$  точки  $t_g \in [t, f]$ ,  $t_{\lambda, g} \in [t_\lambda, f_\lambda]$  такие, что отрезок  $[t_g, g]$  ортогонален прямой  $L_g$ , а  $[t_{\lambda, g}, g]$  ортогонален прямой  $L_{\lambda, g}$ . Пусть  $R \neq h$ ,  $R_\lambda \neq h_\lambda$ . Через  $v$ ,  $v_\lambda$  обозначим вершины конусов, поверхности которых содержат  $k_{R,h}$ ,  $k_{R_\lambda, h_\lambda}$  соответственно. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{|t_\lambda - g|}{R} &= \frac{|t_g - v|}{|t - v|}, & \frac{|t_{\lambda, g} - g|}{R_\lambda} &= \frac{|t_{\lambda, g} - v_\lambda|}{|t_\lambda - v_\lambda|}, \\ \frac{|t_{\lambda, g} - t_g|}{\lambda} &= \frac{|t_g - f|}{\rho}, & \frac{|t_{\lambda, g} - f|}{|t_g - f|} &= \frac{\rho_\lambda + |f - f_\lambda|}{\rho}, \\ |f - v| &= \frac{\rho h}{R - h}, & |f_\lambda - v_\lambda| &= \frac{\rho_\lambda h_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda}. \end{aligned}$$

Используя эти соотношения, получаем:

$$\begin{aligned}
|t_{\lambda,g} - g| - |t_g - g| &= R_\lambda \left( \frac{|t_{\lambda,g} - v_\lambda|}{|t_\lambda - v_\lambda|} - \frac{|t_g - v|}{|t - v|} \right) + (R_\lambda - R) \frac{|t_g - v|}{|t - v|}, \\
|t_{\lambda,g} - v_\lambda| |t - v| - |t_g - v| |t_\lambda - v_\lambda| &= (|t_{\lambda,g} - f_\lambda| + |f_\lambda - v_\lambda|) (\rho + |f - v|) \\
- (|t_g - f| + |f - v|) (\rho_\lambda + |f_\lambda - v_\lambda|) &= (\rho + |f - v|) |t_{\lambda,g} - f_\lambda| + \rho |f_\lambda - v_\lambda| \\
&\quad - (\rho_\lambda + |f_\lambda - v_\lambda|) |t_g - f| - \rho_\lambda |f - v| \\
&= \frac{\rho R}{R - h} |t_{\lambda,g} - f_\lambda| - \frac{\rho_\lambda R_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} |t_g - f| + \rho \rho_\lambda \left( \frac{h_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} - \frac{h}{R - h} \right) \\
&= \frac{\rho R}{R - h} \left[ \frac{\rho_\lambda}{\rho} |t_g - f| - |f - f_\lambda| (\rho - |t_g - f|) \right] \\
&\quad - \frac{\rho_\lambda R_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} |t_g - f| + \rho \rho_\lambda \left( \frac{h_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} - \frac{h}{R - h} \right) \\
&= \rho_\lambda |t_g - f| \left( \frac{R}{R - h} - \frac{R_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} \right) - \rho \frac{R}{R - h} |f - f_\lambda| (\rho - |t_g - f|) \\
&\quad + \rho \rho_\lambda \left( \frac{h_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} - \frac{h}{R - h} \right) \stackrel{def}{=} D_\lambda.
\end{aligned}$$

Используя последнее выражение, обозначенное через  $D_\lambda$ , и применяя теорему косинусов, будем иметь

$$\begin{aligned}
|t_{\lambda,g} - g|^2 - |t_g - g|^2 &= (|t_{\lambda,g} - g| - |t_g - g|) (|t_{\lambda,g} - g| + |t_g - g|) \\
&= \left( R_\lambda \frac{D_\lambda}{|t_\lambda - v_\lambda| |t - v|} + (R_\lambda - R) \frac{|t_g - v|}{|t - v|} \right) (|t_{\lambda,g} - g| + |t_g - g|) \\
&= |t_{\lambda,g} - t_g|^2 - 2|t_g - g| |t_{\lambda,g} - t_g| \cos \xi = O(\lambda^2) + 2\lambda \frac{|t_g - g| |t_g - f|}{\rho} \cos \xi,
\end{aligned}$$

где  $\xi$  — угол между векторами  $p(g) - t$  и  $\tilde{t}$ ,  $p(g) = S_R(t) \cap L_g$ .

Отсюда после деления на  $\lambda > 0$  и перехода к пределу при  $\lambda \rightarrow +0$  получаем

$$\frac{R}{|t - v|^2} \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{D_\lambda}{\lambda} + R'_{\lambda=0} \frac{|t_g - v|}{|t - v|} = -\frac{|t_g - f|}{\rho} \cos \xi, \quad (3.3)$$

$$R \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{D_\lambda}{\lambda} + R'_{\lambda=0} \left( |t_g - f| + \frac{\rho h}{R - h} \right) \frac{\rho h}{R - h} = -\rho \left( \frac{R}{R - h} \right)^2 |t_g - f| \cos \xi.$$

Поскольку

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{D_\lambda}{\lambda} = -\rho |t_g - f| \left( \frac{R_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} \right)'_{\lambda=0} - \rho \frac{R}{R - h} \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{|f - f_\lambda|}{\lambda} + \rho^2 \left( \frac{h_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} \right)'_{\lambda=0},$$

$$\left( \frac{R_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} \right)'_{\lambda=0} = \left( \frac{h_\lambda}{R_\lambda - h_\lambda} \right)'_{\lambda=0} = \frac{R h'_{\lambda=0} - R'_{\lambda=0} h}{(R - h)^2},$$

то

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{D_\lambda}{\lambda} = \rho (\rho - |t_g - f|) \frac{R h'_{\lambda=0} - R'_{\lambda=0} h}{(R - h)^2} - \frac{\rho R}{R - h} (\rho - |t_g - f|) c'_{\lambda=0}$$

и равенство (3.3) принимает вид

$$R'_{\lambda=0} |t_g - f| + (\rho - |t_g - f|) (h'_{\lambda=0} - c'_{\lambda=0}) = -|t_g - f| \cos \xi.$$

Таким образом, установлена

**Теорема 1.** Пусть  $\tilde{t}$ ,  $|\tilde{t}| = 1$ , — заданное направление,  $t_\lambda = t + \lambda\tilde{t}$ ,  $\lambda \geq 0$ ,

$$f_\lambda = f + c(\lambda) \frac{t_\lambda - f}{|t_\lambda - f|},$$

$h(\lambda) = h(f_\lambda)$  — погрешность определения местоположения точки  $f_\lambda$ , функции  $c(\lambda)$ ,  $h(\lambda)$  дифференцируемы по  $\lambda$ ,  $g \notin \text{conv}(V_h(f) \cup t)$ ,  $\rho = |t - f|$ ,  $R = R(t, f, h, g)$ ,  $R_\lambda = R(t_\lambda, f_\lambda, h(\lambda), g)$ .

Если  $g \in s_R(t)$ , то

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{R_\lambda - R}{\lambda} = -\cos \xi, \quad (3.4)$$

где  $\xi$  — угол между векторами  $g - t$ ,  $\tilde{t}$ .

Если  $g \in k_{R,h}(t, f)$ ,  $L_g$  — образующая конической поверхности  $k_{R,h}(t, f)$ ,  $g \in L_g$ , точка  $t_g \in [t, f]$  такова, что вектор  $t_g - g$  ортогонален прямой  $L_g$ ,  $p(g) = S_R(t) \cap L_g$ , то

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{R_\lambda - R}{\lambda} = -\cos \xi + \frac{|t_g - t|}{|t_g - f|} \frac{d}{d\lambda} (c - h)_{\lambda=0}, \quad (3.5)$$

где  $\xi$  — угол между векторами  $p(g) - t$  и  $\tilde{t}$ .

**Следствие 1.** Производная по направлению

$$\frac{\partial R}{\partial \tilde{t}} = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{R_\lambda - R}{\lambda}$$

непрерывна по  $t$  и  $g$ .

Применяя приведенную выше теорему В.Ф. Демьянова о дифференцировании функции максимума и теорему 1, убеждаемся, что справедлива

**Теорема 2.** Функция  $r(t) = r(t, f, h, G)$  дифференцируема по любому направлению  $\tilde{t}$ ,  $|\tilde{t}| = 1$ , и

$$\frac{\partial r(t)}{\partial \tilde{t}} = \min \left\{ \frac{\partial R(t, f, h, g)}{\partial \tilde{t}} : g \in G(t) \right\},$$

где

$$G(t) = G(t, f) = \{g \in G : R(t, f, h, g) = r(t, f, h, G)\},$$

а производная  $\partial R(t, f, h, g)/\partial \tilde{t}$  вычисляется по формулам (3.4) и (3.5) в соответствии с теоремой 1.

Найдем производную по направлению функции  $A(t, f, h, G)$ . По теореме косинусов

$$|t_\lambda - f| = \frac{\lambda^2 - 2\lambda\rho \cos \gamma}{|t_\lambda - f| + \rho} + \rho,$$

где  $\gamma = \gamma(t, f, \tilde{t})$  — угол между векторами  $f - t$  и  $\tilde{t}$ . Далее,

$$\frac{|t_\lambda - f| - \rho}{\lambda} = \frac{|t_\lambda - f| - |f_\lambda - f| - \rho}{\lambda} = \frac{\lambda - 2\rho \cos \gamma}{|t_\lambda - f| \rho} - \frac{c(\lambda)}{\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} -\cos \gamma - c'_{\lambda=0}.$$

Имея в виду (1.3) и теорему 2, устанавливаем справедливость следующей теоремы.

**Теорема 3.** Функция  $A(t, f, G)$  дифференцируема по любому направлению  $\tilde{t}$ ,  $|\tilde{t}| = 1$ , и

$$\frac{\partial A(t, f, G)}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{|t - f|} \frac{\partial r(t, f, h, G)}{\partial \tilde{t}} + \frac{r(t, f, h, G)}{|t - f|^2} \left( \frac{dc(0)}{d\lambda} + \cos \gamma \right),$$

$\gamma = \gamma(t, f, \tilde{t})$  — угол между векторами  $f - t$  и  $\tilde{t}$ .

Следующий пример показывает, что функции  $\partial r/\partial \tilde{t}$ , а значит, и  $\partial A/\partial \tilde{t}$  могут быть разрывными по  $t$ .

**Пример 1.** Пусть

$$t = (0, 0, 0), \quad t(\alpha) = (0, \alpha, 0), \quad \alpha \leq 0, \quad f = (0, -2, 0),$$

$$G = \{(x, y, z): x \geq 1\} \cup \{(x, y, z): y \geq 1\}, \quad \tilde{t} = (0, 1, 0), \quad h = 0,$$

тогда

$$G(t(\alpha)) = (1, \alpha, 0), \quad G(t) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$$

и, в соответствии с теоремой 1,

$$\frac{\partial r(t(\alpha), f, 0)}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad (\alpha < 0), \quad \frac{\partial r(t, f, 0)}{\partial \tilde{t}} = -1.$$

#### 4. О минимизации функций $\mathcal{R}(t)$ , $\mathcal{A}(t)$

Поиск производной по направлению от функций  $\mathcal{R}(t)$ ,  $\mathcal{A}(t)$  (см. (1.2), (1.4)) в произвольном случае не может быть осуществлен с помощью приведенной в разд. 3 теоремы В. Ф. Демьянова, так как не гарантируется непрерывность производной  $\partial r/\partial \tilde{t}$  по  $t$  и  $f$  (см. пример 1). Однако, используя теоремы 1–3, нетрудно решить вопрос о существовании направлений  $\tilde{t}$ , по которым функции (1.2), (1.4) убывают или возрастают в окрестности точки  $t$  (кратко, направлений спуска или подъема). Не ограничивая общности, положим  $t = (0, 0, 0)$ .

Рассмотрим задачу минимизации функций  $\mathcal{R}(t)$ ,  $\mathcal{A}(t)$ . Через  $(\cdot, \cdot)$  будем обозначать скалярное произведение. Пусть

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(t) = \{f \in F : \mathcal{R}(t) = r(t, f, G)\}.$$

Требуется найти направление  $\tilde{t}$  такое, что

$$\frac{\partial r(t, f, G)}{\partial \tilde{t}} < 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(t).$$

Важную роль при этом играет расположение точек множества

$$\mathcal{G}(t) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} G(t, f),$$

где

$$G(t, f) = \{g \in G : r(t, f, G) = R(t, f, g)\}.$$

Так, если

$$s = s(t) \stackrel{def}{=} S_{\mathcal{R}}(t) \cap \mathcal{G}(t) \neq \emptyset,$$

то для любого направления  $\tilde{t}$  из множества

$$\bigcup_{g \in s} \{\tilde{t} : (g - t, \tilde{t}) > 0\} \tag{4.1}$$

и всех  $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(t)$  по теореме 2 и с учетом компактности множества  $F$  будет

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{R}(t)}{\partial \tilde{t}} &= \frac{\partial r(t, f, G)}{\partial \tilde{t}} = \min_{g \in G(t, f)} \frac{\partial R(t, f, G)}{\partial \tilde{t}} \\ &\leq \min_{g \in G(t, f) \cap S_{\mathcal{R}}(t)} \frac{\partial R(t, f, G)}{\partial \tilde{t}} = -\left(\frac{g - t}{|g - t|}, \tilde{t}\right) < 0, \end{aligned}$$

и, значит, любое направление  $\tilde{t}$  из множества (4.1) есть направление спуска для  $\mathcal{R}(t)$ . В частности, для направления  $\tilde{t} = g - t$  при  $g \in s(t)$  этот факт очевиден.

В случае, когда множество  $s(t)$  пусто, направление  $\tilde{t}$  является направлением спуска для функции  $\mathcal{R}(t)$  тогда и только тогда, когда для любой точки  $f \in \mathcal{F}$  найдется элемент  $g \in k_{\mathcal{R},h}(t, f)$  такой, что

$$\left( \frac{p(g) - t}{|p(g) - t|}, \tilde{t} \right) > \frac{|t_g - t|}{|t_g - f|} \frac{d}{d\lambda} (c - h)_{\lambda=0}.$$

Приведем пример точек  $t, f_1, f_2, F = \{f_1, f_2\}$  и множества  $G$  в  $\mathbb{R}^2$ , для которых направления спуска не существует.

**Пример 2.** Пусть  $t = (0, 0)$ ,  $f_1 = (1, 1)$ ,  $f_2 = (-1, -1)$ ,

$$G = \left\{ \left( \frac{1}{2}, \alpha \right) : 1 \leq \alpha \leq 2 \right\} \cup \left\{ \left( -\frac{1}{2}, \alpha \right) : -2 \leq \alpha \leq -1 \right\},$$

$$h(f_1) = h(f_2) = 0, \quad c(\lambda, f_1) = c(\lambda, f_2) \equiv 0,$$

тогда

$$\mathcal{R}(t) = r(t, f_1, h_1, G) = r(t, f_2, h_2, G) = 1, \quad G(t, f_1) = \left( \frac{1}{2}, 1 \right) = g_1,$$

$$G(t, f_2) = \left( -\frac{1}{2}, -1 \right) = g_2, \quad p(g_1) = (0, 1), \quad p(g_2) = (0, -1)$$

и, значит,

$$\{\tilde{t} : (p(g_1) - t, \tilde{t}) > 0\} \cap \{\tilde{t} : (p(g_2) - t, \tilde{t}) > 0\} = \emptyset.$$

Напомним, что через  $p(g)$  обозначается пересечение образующей  $L_g$ ,  $g \in L_g$ , со сферой  $S_{\mathcal{R}(t)}$ . Используя компактность множеств  $F$  и  $G$ , нетрудно установить, что имеет место

**Теорема 4.** *Направление  $\tilde{t}$ ,  $|\tilde{t}| = 1$ , является направлением спуска для функции  $\mathcal{R}(t)$  тогда и только тогда, когда для любого  $f \in \mathcal{F}$  существует точка  $q \in s \cup \{p(g) : g \in G \cap k_{\mathcal{R},h}(t, f)\}$  такая, что*

$$\frac{\partial \mathcal{R}(t, f, h, q)}{\partial \tilde{t}} < 0.$$

Для формулировки условий на направление спуска функции  $\mathcal{A}(t)$  введем следующие обозначения:

$$\mathcal{F}_{\mathcal{A}}(t) = \{f \in \mathcal{F} : \mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t, f, G)\},$$

для  $g \in G(t, f)$  и вектора  $\tilde{t}$  через  $\xi = \xi(t, f, g, \tilde{t})$  обозначим угол между векторами  $g - t$ ,  $\tilde{t}$  при  $g \in s_{\mathcal{R}(t)}$  и угол между векторами  $p(g) - t$ ,  $\tilde{t}$ , если  $g \in k_{\mathcal{R},h}(t, f)$ , и, кроме того,

$$b(t, f, g) = \begin{cases} 0 & \text{при } g \in s_{\mathcal{R}(t)}, \\ \frac{|t_g - t|}{|t_g - f|} \frac{d}{d\lambda} (c - h)_{\lambda=0} & \text{при } g \in k_{\mathcal{R},h}(t, f). \end{cases}$$

Требуется найти направление  $\tilde{t}$ ,  $|\tilde{t}| = 1$ , такое, что

$$\frac{\partial \mathcal{A}(t, f, G)}{\partial \tilde{t}} < 0 \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(t).$$

**Теорема 5.** *Направление  $\tilde{t}$  является направлением спуска для функции  $\mathcal{A}(t)$  тогда и только тогда, когда для любой точки  $f \in \mathcal{F}_{\mathcal{A}}(t)$  найдется точка  $g \in G(t, f)$  такая, что*

$$\cos \xi(t, f, g, \tilde{t}) > b(t, f, g) + \frac{r(t, f, G)}{|t - f|} \left( \frac{d}{d\lambda} c(0) + \cos \gamma \right),$$

где  $\gamma$  — угол между векторами  $f - t$ ,  $\tilde{t}$ .

Пусть  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{R}}(t) = \{f \in F : \mathcal{R}(t) = r(t, f, G)\}$ .

Легко убедиться, что справедлива следующая

**Теорема 6.** *Направление  $\tilde{t}$  является направлением подъема для функции  $\mathcal{R}(t)$  тогда и только тогда, когда для любых  $f \in \mathcal{F}$ ,  $g \in k_{\mathcal{R}}(t, f)$  выполняется неравенство*

$$\left( \frac{p(g) - t}{|p(g) - t|}, \tilde{t} \right) < \frac{|t_g - t|}{|t_g - f|} \frac{d}{d\lambda} (c - h)_{\lambda=0}.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В. И.** Два способа характеристики видимости движущейся точки // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 67–81.
2. **Бердышев В. И.** Видимость объекта для наблюдателя с неточно заданными координатами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 21–28.
3. **Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.** Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

Бердышев Виталий Иванович

чл.-корр. РАН

директор

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: bvi@imm.uran.ru

Поступила 21.05.2009

УДК 517.977

## ОПТИМАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ<sup>1</sup>

Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова

Рассматривается возникающая при управлении в условиях множественной неопределенности задача оптимального наблюдения, в которой при не полностью определенном начальном состоянии динамической системы, подверженной действию неизвестных возмущений, требуется путем обработки неполных и неточных измерений текущих состояний получить информацию о ее состояниях. Описываются методы построения апостериорных распределений и реализаций позиционных решений. Результаты иллюстрируются на примерах.

Ключевые слова: линейные системы, множественная неопределенность, измерения, оптимальное наблюдение, алгоритм.

R. Gabasov, N. M. Dmitruk, F. M. Kirillova. Optimal control under permanent disturbances.

For a dynamical system under unknown disturbances, an optimal observation problem arising from control problems under set-membership uncertainty is considered in the case when the initial state is not determined completely. It is required to obtain information on the states of the system by means of processing incomplete and inaccurate measurements of its current states. Methods of constructing a posteriori distributions and realizations of positional solutions are described. The results are illustrated by examples.

Keywords: linear systems, set-membership uncertainty, measurements, optimal observation, algorithm.

### Введение

Теория оптимального наблюдения представляет важный раздел современной теории управления. Ее результаты используются при решении задач оптимального управления динамическими системами в условиях множественной неопределенности для получения гарантированных результатов.

Первые задачи оптимального наблюдения были поставлены и решены Н. Н. Красовским [1]. Дальнейшее развитие теория получила в работах [2, 3].

В настоящей статье развивается подход, предложенный в [4–6]. В [5] исследована задача оптимального наблюдения с использованием детерминированной модели объекта наблюдения, в [6] — задача оптимального наблюдения на базе математической модели с конечно-параметрическими (регулярными) возмущениями.

Цель работы — опираясь на математическую модель с нерегулярными возмущениями, перенести подход [5, 6] на новую задачу оптимального наблюдения.

В разд. 1 дается постановка задачи оптимального наблюдения для линейной нестационарной системы, подверженной действию неизвестных возмущений. Вводятся определения апостериорного и позиционного решений задачи оптимального наблюдения, определяются понятия реализации и квазиреализации позиционного решения. В разд. 2 предложены два метода вычисления апостериорной оценки терминального состояния. Первый метод ориентирован на решение задачи в случае малых возмущений, второй использует специальный переход к агрегированным переменным, что позволяет свести динамическую задачу к задаче математического программирования. На базе предложенных методов в разд. 3 обосновывается алгоритм

<sup>1</sup>Работа финансируется Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований.

построения реализаций позиционных решений задачи оптимального наблюдения. Работа завершается (разд. 4) иллюстрацией результатов на примерах задачи оптимального наблюдения за системами второго и четвертого порядков.

## 1. Постановка задачи

Пусть на промежутке времени  $T = [t_*, t^*]$ ,  $-\infty < t_* < t^* < \infty$ , поведение динамической системы описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + D(t)w, \quad (1.1)$$

где  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  — состояние системы в момент времени  $t$ ,  $w = w(t) \in \mathbb{R}^m$  — значение возмущения,  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $D(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $t \in T$ , — кусочно-непрерывные функции.

Примем, что начальное состояние  $x(t_*) = x_*$  системы (1.1) известно с точностью до ограниченного множества (прямоугольного параллелепипеда в  $\mathbb{R}^n$ )

$$X_* = \{x \in \mathbb{R}^n : d_* \leq x \leq d^*\},$$

которое называется априорным распределением начального состояния.

Будем считать, что возмущение  $w(\cdot) = (w(t), t \in T)$  представляет кусочно-непрерывную функцию, принимающую значения из ограниченного множества. Возможны следующие три типа возмущений:

(1) Регулярные возмущения вида

$$w(t) = M(t)v, \quad t \in T, \quad v \in V,$$

где  $M(t) \in \mathbb{R}^{m \times k}$  — кусочно-непрерывная матричная функция,  $v \in \mathbb{R}^k$  — вектор неизвестных параметров,  $V = \{v \in \mathbb{R}^k : v_* \leq v \leq v^*\}$  — множество возможных значений параметров.

(2) Нерегулярные возмущения — кусочно-непрерывные функции

$$w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R}^r : w_* \leq w \leq w^*\}, \quad t \in T.$$

(3) Возмущения смешанного типа

$$w(t) = M(t)v + w_0(t), \quad v \in V, \quad w_0(t) \in W, \quad t \in T.$$

Здесь  $d_*$ ,  $d^*$ ,  $v_*$ ,  $v^*$ ,  $w_*$ ,  $w^*$  — заданные векторы. Задача оптимального наблюдения систем с регулярными возмущениями была рассмотрена в работе [6] в рамках исследования задач оптимального управления по неполным и неточным измерениям состояний линейных динамических систем. Для систем с возмущениями смешанного типа можно использовать комбинацию методов, предложенных в [6] и разработанных в данном сообщении. Поэтому далее задачу оптимального наблюдения будем исследовать только для случая нерегулярных возмущений (2).

Множества  $X_*$ ,  $W$  вызывают априорную неопределенность в поведении системы (1.1) и порождают априорную неопределенность терминального состояния  $x(t^*)$  системы (1.1), которая описывается множеством

$$X^* = \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = x(t^* | t_*, x_*, w(\cdot)), x_* \in X_*, w(t) \in W, t \in T \right\}. \quad (1.2)$$

Здесь  $x(t | t_*, x_*, w(\cdot)) = F(t)x_* + \int_{t_*}^t F(t)F^{-1}(\vartheta)D(\vartheta)w(\vartheta)d\vartheta$  — состояние системы (1.1) в момент  $t$ ;  $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $t \in T$ , — фундаментальная матрица решений уравнения (1.1):  $\dot{F} = A(t)F$ ,  $F(t_*) = E$ ,  $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — единичная диагональная матрица.

Для уменьшения априорной неопределенности терминального состояния будем вести наблюдение за поведением объекта, обрабатывая записываемые в дискретные моменты  $s \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^*\}$  ( $h = (t^* - t_*)/N$ ,  $N$  — натуральное число) сигналы  $y^*(s)$ ,  $s \in T_h$ , измерительного устройства

$$y = C(s)x + \xi, \quad (1.3)$$

где  $C(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $t \in T$ , — известная непрерывная функция;  $\xi = \xi(s) \in \mathbb{R}^m$ ,  $s \in T_h$ , — ошибки измерения со значениями из множества

$$\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^m : \xi_* \leq \xi \leq \xi^*\}.$$

Задача наблюдения состоит в получении оценок терминального состояния  $x(t^*)$  на основе априорной информации  $X_*$ ,  $W$ ,  $\Xi$  о неопределенностях системы и результатов измерений  $y^*(s)$ ,  $s \in T_h$ . Будем различать апостериорное и позиционное решения задачи оптимального наблюдения. Апостериорное решение строится после проведения всех измерений. Время, потраченное на его построение, не имеет существенного значения. Позиционное решение строится в процессе наблюдения по априорной информации  $X_*$ ,  $W$ ,  $\Xi$  и результатам измерений  $y^*(t_*)$ ,  $y^*(t_* + h), \dots, y^*(\tau)$ , полученным до текущего момента  $\tau \in T_h$ . При построении позиционного решения задачи наблюдения время вычисления текущих оценок терминального состояния  $x(t^*)$  играет решающую роль. Понятия апостериорного и позиционного решений задач наблюдения представляют собой двойственные аналоги программного и позиционного решений задач оптимального управления.

Приведем сначала определение *апостериорного решения* задачи оптимального наблюдения. Пусть  $y^*(\cdot) = (y^*(s), s \in T_h)$  — совокупность всех результатов измерений, проведенных в некотором процессе наблюдения к терминальному моменту времени  $t^*$ .

**О п р е д е л е н и е.** Множество  $\hat{X}^* = \hat{X}^*(t^*, y^*(\cdot))$  назовем *апостериорным распределением терминального состояния*  $x(t^*)$ , соответствующим терминальной позиции  $(t^*, y^*(\cdot))$ , если оно состоит из тех и только тех состояний  $x^*$ , для которых найдутся такие начальное состояние  $x_* \in X_*$ , возмущение  $w(t) \in W, t \in T$ , и ошибки измерения  $\xi(s) \in \Xi, s \in T_h$ , которые способны породить терминальное состояние  $x^* = x(t^* | t_*, x_*, w(\cdot))$  и записанные сигналы  $y^*(s), s \in T_h$ . Элементы  $x^* \in \hat{X}^*$  будем называть *возможными апостериорными терминальными состояниями*.

Для некоторых задач оптимального управления с гарантией [6] интерес представляет не все множество  $\hat{X}^*$ , а только некоторые его числовые характеристики (оценки). В связи с этим, следуя [4], *задачей оптимального апостериорного наблюдения* назовем экстремальную задачу

$$\hat{\alpha}(t^*, y^*(\cdot)) = p' \hat{x}^*(t^*, y^*(\cdot)) = \max p'x, \quad x \in \hat{X}^*. \quad (1.4)$$

Здесь  $p \in \mathbb{R}^n$  — заданный вектор, штрих обозначает операцию транспонирования матрицы.

Оценку  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(t^*, y^*(\cdot))$  будем называть *апостериорным решением* задачи оптимального наблюдения (1.4).

Перейдем к формулировке *позиционного решения* задачи оптимального наблюдения. Пусть  $\tau \in T_h$  — произвольный момент времени,  $Y_\tau$  — множество всех возможных (в силу неопределенности в начальном состоянии и поведении системы, а также ошибок измерения) сигналов  $y_\tau(\cdot) = (y(t_*), y(t_* + h), \dots, y(\tau))$ .

Множество  $\hat{X}^*(\tau) = \hat{X}^*(\tau, y_\tau(\cdot))$  назовем *текущим распределением* терминального состояния, соответствующим позиции  $(\tau, y_\tau(\cdot))$ .

Функционал

$$\hat{\alpha}(\tau, y_\tau(\cdot)), y_\tau(\cdot) \in Y_\tau, \quad \tau \in T_h, \quad (1.5)$$

будем называть *позиционным решением* задачи оптимального наблюдения.

Понятно, что позиционное решение состоит из заранее (до начала процесса наблюдения) заготовленных отображений всех возможных позиций  $(\tau, y_\tau(\cdot))$  в интересующие оценки терминального состояния. Оно является аналогом позиционного решения задачи оптимального

управления и позволяет вести наблюдение (получать оценки) по ходу произвольного процесса наблюдения. Для этого достаточно в каждый текущий момент времени  $\tau \in T_h$ , получив очередное измерение  $y^*(\tau)$ , составить вектор  $y_\tau^*(\cdot)$  и подставить его в (1.5), что даст текущую оценку  $\hat{\alpha}(\tau, y_\tau^*(\cdot))$  терминального состояния.

Как и в случае оптимального управления типа обратной связи, построение позиционного решения (1.5) в замкнутой форме невозможно для нетривиальных случаев. В связи с этим для реализации позиционного решения задачи оптимального наблюдения перейдем к принципу оптимального наблюдения в реальном времени, который является аналогом принципа оптимального управления в реальном времени, описанного в [7].

При оптимальном наблюдении в реальном времени функционал (1.5) не составляется, а его текущие значения вычисляются в процессе наблюдения по мере поступления измерений. Оптимальное наблюдение в реальном времени основано на следующем анализе. Предположим, что позиционное решение (1.5) построено. Рассмотрим конкретный процесс наблюдения, в котором реализуются неизвестные наблюдателю начальное состояние  $x(t_*) = x_*$ , возмущение  $w^*(t)$ ,  $t \in T$ , и ошибки измерения  $\xi^*(t)$ ,  $t \in T_h$ . Этот процесс породит неизвестную траекторию  $x^*(t|t_*, x_*, w^*(\cdot))$ ,  $t \in T$ , и известные сигналы  $y^*(s) = C(s)x^*(s|t_*, x_*, w^*(\cdot)) + \xi^*(s)$ ,  $s \in T_h$ , измерительного устройства.

Текущие оценки  $\hat{\alpha}^*(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ , терминального состояния удовлетворяют вдоль  $y_\tau^*(\cdot)$ ,  $\tau \in T_h$ , тождеству

$$\hat{\alpha}^*(\tau) \equiv \hat{\alpha}(\tau, y_\tau^*(\cdot)) \equiv p' \hat{x}^*(\tau, y_\tau^*(\cdot)), \quad \tau \in T_h.$$

Отсюда видно, что в конкретном процессе наблюдения позиционное решение (1.5) не используется полностью (для всех  $y_\tau(\cdot) \in Y(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ ), нужны лишь его значения вдоль реализующихся сигналов  $y_\tau^*(\cdot)$ ,  $\tau \in T_h$ , измерительного устройства.

Функцию  $\hat{\alpha}^*(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ , назовем *реализацией позиционного решения* задачи оптимального наблюдения в конкретном процессе наблюдения.

Предположим, что существует вычислительное устройство, способное при  $\tau \in T_h$  вычислять значения  $\hat{\alpha}^*(\tau)$  для каждой текущей позиции  $(\tau, y_\tau^*(\cdot))$  за время  $s(\tau)$ , не превосходящее  $h$ .

Функцию

$$\hat{\alpha}^{**}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}^*(t_* - 0), & t \in [t_*, t_* + s(t_*)[, \\ \hat{\alpha}^*(\tau), & t \in [\tau + s(\tau), \tau + h + s(\tau + h)[, \quad \tau \in T_h \setminus t_*, \end{cases}$$

$$\hat{\alpha}^*(t_* - 0) = \max p'x, \quad x \in X^*,$$

будем называть *квазиреализацией позиционного решения* задачи оптимального наблюдения, а соответствующее вычислительное устройство — квазиоптимальным эстиматором, реализующим позиционное наблюдение в реальном времени [5]. Таким образом, проблема оптимального позиционного наблюдения свелась к построению алгоритма работы оптимального эстиматора.

## 2. Построение апостериорного решения

Для аналитической формулировки задачи (1.4) опишем множество  $\hat{X}^*$ . Сигналы измерительного устройства (1.3) для начального состояния  $x(t_*) = x_* \in X_*$ , возмущения  $w(t) \in W$ ,  $t \in T$ , и функции ошибок  $\xi(s) \in \Xi$ ,  $s \in T_h$ , имеют вид

$$y(s) = C(s)x(s|t_*, x_*, w(\cdot)) + \xi(s), \quad s \in T_h.$$

Исходя из аналитического описания (1.2) априорного распределения терминального состояния  $X^*$  и с учетом дополнительной информации, представленной сигналами измерительного устройства, получим

$$\hat{X}^* = \left\{ x^* : x^* = x(t^*|t_*, x_*, w(\cdot)); \quad \xi_* \leq y^*(s) - C(s)x(s|t_*, x_*, w(\cdot)) \leq \xi^*, \quad s \in T_h; \right.$$

$$x_* \in X_*; w(t) \in W, t \in T \}.$$

Тогда задача (1.4) принимает вид

$$\hat{\alpha} = \max_{x_*, w(\cdot)} p'x(t^*), \quad \dot{x} = A(t)x + D(t)w, \quad x(t_*) = x_*, \quad (2.1)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) - C(s)x(s) \leq \xi^*, \quad s \in T_h, \quad d_* \leq x_* \leq d^*, \quad w_* \leq w(t) \leq w^*, \quad t \in T,$$

и эквивалентна задаче оптимального управления (с  $w(\cdot)$  в качестве управляющего воздействия) с промежуточными фазовыми ограничениями, подвижным левым концом траектории и терминальным критерием качества. Для решения задачи (2.1) можно использовать известные методы [8, 9], которые, однако, не будут учитывать особенности задачи. Известно, что методы, разработанные с учетом конкретных особенностей задач, как правило, более эффективны, нежели применяемые для решения широких классов. Такие методы, в частности, позволяют затрачивать меньше времени для получения результата, что крайне важно при реализации алгоритмов работы оптимальных эстиматоров. Ниже будет предложено два подхода к решению задачи (2.1). Однако прежде чем переходить к изложению методов решения задачи (2.1), рассмотрим задачу оптимального наблюдения детерминированной системы, решение которой понадобится в дальнейшем.

## 2.1. Задача оптимального наблюдения детерминированной системы

Рассмотрим задачу оптимального наблюдения детерминированной системы:

$$\hat{\alpha}^0 = \max_{x_*} p'x(t^*), \quad \dot{x} = A(t)x, \quad x(t_*) = x_*; \quad (2.2)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) - C(s)x(s) \leq \xi^*, \quad s \in T_h; \quad d_* \leq x_* \leq d^*.$$

Обозначим через  $\hat{x}^0 = \hat{x}^0(t^*, y^*(\cdot))$  ее экстремальное терминальное состояние, через  $\hat{\alpha}^0$  — соответствующую оценку.

Задачи наблюдения за поведением линейных детерминированных систем вида (2.2) были исследованы в работе [5], где для них разработан быстрый алгоритм решения, основанный на динамической модификации одного метода линейного программирования [10]. Приведем сведения из [5], необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $S = \{\{i, s\} : i \in I, s \in T_h\}$ ,  $J = \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $Q(s) = (q_{ij}(s), i \in I, j \in J) = -C(s)F(s)$ ,  $s \in T_h$ ;  $q' = p'F(t^*)$ .

Основным инструментом метода решения задачи (2.2) является специальная конструкция, называемая опорой. Введем  $S_{on} \subset S$ ,  $J_{on} \subset J$ ,  $|S_{on}| = |J_{on}|$ ;  $S_n = S \setminus S_{on}$ ,  $J_n = J \setminus J_{on}$ . Пару  $K_{on} = \{S_{on}, J_{on}\}$  назовем опорой задачи (2.2), если невырождена матрица

$$Q_{on} = \begin{pmatrix} q_{ij}(s), & j \in J_{on} \\ \{i, s\} \in S_{on} \end{pmatrix}.$$

При построении опорной матрицы  $Q_{on}$  столбцы выбираются из множества  $J_{on}$ , а строки соответствуют парам  $i, s$  из множества  $S_{on}$ . При этом правила упорядочивания пар в множестве  $S_{on}$  произвольны. В случае пустых множеств  $S_{on} = J_{on} = \emptyset$  пара  $K_{on}$  является (пустой) опорой по определению.

В методе [5] наряду с опорой важную роль играют сопровождающие ее элементы:

(1) Функция потенциалов  $\nu(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $t \in T_h$ :  $\nu_i(t) = 0$ ,  $\{i, t\} \in S_n$ ;  $\nu_{on} = (\nu_i(t), \{i, t\} \in S_{on})$  — решение уравнения

$$\nu'_{on} Q_{on} = q'_{on}, \quad q_{on} = (q_j, j \in J_{on}).$$

Если  $K_{on} = \emptyset$ , то полагаем  $\nu(t) = 0$ ,  $t \in T_h$ .

(2) Вектор оценок

$$\Delta' = q' - \sum_{s \in T_h} \nu'(s)Q(s) = q' + \sum_{s \in T_h} \nu'(s)C(s)F(s).$$

В случае пустой опоры полагаем  $\Delta = q$ .

(3) Начальное псевдосостояние  $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\mathfrak{a}_j = d_{*j}, \quad \text{если } \Delta_j < 0; \quad \mathfrak{a}_j = d_j^*, \quad \text{если } \Delta_j > 0; \quad \mathfrak{a}_j \in [d_{*j}, d_j^*], \quad \text{если } \Delta_j = 0; \quad j \in J_n;$$

опорные компоненты  $\mathfrak{a}_{on} = (\mathfrak{a}_j, j \in J_{on})$  находятся из уравнения

$$Q_{on}\mathfrak{a}_{on} = y_{0on} - y_{on}^*,$$

где  $y_{on}^* = (y_i^*(s), \{i, s\} \in S_{on})$ ,  $y_{0on} = (y_{0i}(s), \{i, s\} \in S_{on})$  ( $y_{on}^*$ ,  $y_{0on}$  формируются на основе так же упорядоченных пар  $\{i, s\}$ , как и  $Q_{on}$ ),  $y_{0i}(s) = C(s)\mathfrak{a}_0(s) + \zeta(s)$ ,  $s \in T_h$ ;  $\mathfrak{a}_0(t)$ ,  $t \in T$ , — траектория детерминированной системы  $\dot{x} = A(t)x$  с начальным условием  $x(t_*) = (x_j = 0, j \in J_{on}; x_j = \mathfrak{a}_j, j \in J_n)$ ;

$$\zeta_i(s) = \xi_{*i}, \quad \text{если } \nu_i(s) < 0; \quad \zeta_i(s) = \xi_i^*, \quad \text{если } \nu_i(s) > 0;$$

$$\zeta_i(s) \in [\xi_{*i}, \xi_i^*], \quad \text{если } \nu_i(s) = 0; \quad \{i, s\} \in S_{on}.$$

(4) Функция псевдоошибки  $\zeta(s) \in \mathbb{R}^m$ ,  $s \in T_h$ ,

$$\zeta(s) = y^*(s) - C(s)\mathfrak{a}(s), \quad s \in T_h,$$

где  $\mathfrak{a}(t)$ ,  $t \in T$ , — траектория системы  $\dot{x} = A(t)x$  с начальным условием  $x(t_*) = \mathfrak{a}$ .

(5) Оценка субоптимальности (для прямого метода, когда наряду с опорой  $K_{on}$  используется возможное терминальное состояние  $x^* \in \hat{X}^*$ )

$$\beta(x^*, K_{on}) = q' \mathfrak{a} - p' x^* = \sum_{s \in T_h} \nu'(s)(\zeta(s) - \xi(s)) + \Delta(\mathfrak{a} - F^{-1}(t^*)x^*),$$

где  $\xi(s) = y^*(s) - C(s)F(s)F^{-1}(t^*)x^*$ ,  $s \in T_h$ .

Опора, сопровождающее псевдосостояние которой решает задачу (2.2), называется оптимальной [5].

**Критерий оптимальности опоры.** Для оптимальности опоры  $K_{on}^0$  необходимо и достаточно, чтобы для некоторых сопровождающих ее начальное псевдосостояние  $\mathfrak{a}^0$  и выходной псевдосигнал  $\zeta^0(s)$ ,  $s \in T_h$ , выполнялись соотношения

$$d_* \leq \mathfrak{a}^0 \leq d^*; \quad \xi_* \leq \zeta^0(s) \leq \xi^*, \quad s \in T_h.$$

При этом  $\hat{x}^0 = F(t^*)\mathfrak{a}^0$  — экстремальное терминальное состояние,  $\hat{\mathfrak{a}}^0 = q'\mathfrak{a}^0$  — соответствующая оценка.

Заметим, что из критерия оптимальности опоры следует, что для  $\hat{x}^0$  и оптимальной опоры  $K_{on}^0$  оценка субоптимальности равна нулю:  $\beta(\hat{x}^0, K_{on}^0) = 0$ .

В результате применения прямого или двойственного алгоритма решения задачи (2.2) из [5] будут построены экстремальное терминальное состояние  $\hat{x}^0$  и соответствующая ему оценка  $\hat{\mathfrak{a}}^0$ , оптимальная опора  $K_{on}^0$  и сопровождающие ее элементы.

В дальнейшем будем считать, что решение таково, что на оптимальных сопровождающих элементах выполняются неравенства

$$d_{*j} < \mathfrak{a}_j^0 < d_j^*, \quad j \in J_{on}; \quad \xi_{*i} < \xi_i^0(s) < \xi_i^*, \quad \{i, s\} \in S_n. \quad (2.3)$$

## 2.2. Наблюдение при малых возмущениях

Приведем метод решения задачи (2.1) с малыми возмущениями  $w(\cdot)$ . Будем считать, что множество  $W$  возможных значений возмущения  $w(\cdot)$  имеет вид

$$W = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\|_\infty \leq \delta\}, \quad (2.4)$$

где  $\delta > 0$  — малое число. Для решения задачи (2.1) используем асимптотический метод.

Задача (2.1) после замены переменных  $w = \delta v$  принимает форму

$$\hat{\alpha} = \max_{x_*, v} p'x(t^*), \quad \dot{x} = A(t)x + \delta D(t)v, \quad x(t_*) = z, \quad (2.5)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) - C(s)x(s) \leq \xi^*, \quad s \in T_h, \quad d_* \leq x_* \leq d^*, \quad \|v(t)\|_\infty \leq 1, \quad t \in T.$$

Для решения задачи (2.5) погрузим ее в семейство, зависящее от малого параметра  $\mu \geq 0$ :

$$\hat{\alpha}(\mu) = \max_{x_*, v} p'x(t^*), \quad \dot{x} = A(t)x + \mu D(t)v, \quad x(t_*) = x_*, \quad (2.6)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) - C(s)x(s) \leq \xi^*, \quad s \in T_h, \quad d_* \leq x_* \leq d^*, \quad \|v(t)\|_\infty \leq 1, \quad t \in T.$$

Здесь  $\mu$  играет роль переменной, а не параметра. Задача (2.6) при  $\mu = \delta$  включает (2.1).

При малых  $\delta$  оценка  $\hat{\alpha}^0$ , построенная в детерминированной задаче (2.2), будет давать удовлетворительное приближение решения исходной задачи (2.5).

С целью более точного описания множества  $\hat{X}^*$ , для которого строится решение задачи (2.1), воспользуемся методом возмущений [11], корректируя апостериорное решение задачи оптимального наблюдения детерминированной системы (2.2).

Процесс решения задачи (2.6) составим из двух процедур: 1) решения задачи оптимального наблюдения детерминированной системы ( $\mu = 0$ ); 2) коррекции решения задачи п. 1).

Для проведения первой процедуры предположим, что задача (2.2) имеет решение при записанном сигнале измерительного устройства  $y^*(\cdot)$ . Это условие будет гарантированно соблюдено при выполнении следующего предположения.

**Предположение.** Возмущение и ошибки измерения  $(\xi_*, \xi^*, \delta)$  в задаче оптимального наблюдения (2.1) таковы, что  $\xi_* < 0 < \xi^*$  и траектория  $x(t|t_*, 0, w(\cdot))$ ,  $t \in T$ , системы (1.1) с начальным условием  $x(t_*) = 0$  и ограниченным возмущением  $w(t) \in W$ ,  $t \in T$ , удовлетворяет условию  $C(s)x(s|t_*, 0, w(\cdot)) \in \Xi$ ,  $s \in T_h$ .

В результате решения задачи (2.2) станут известными:

- 1) оптимальная опора  $K_{on}^0 = \{S_{on}, J_{on}\}$ ;
- 2) экстремальное начальное состояние  $\hat{x}^0$ ;
- 3) оценка  $\hat{\alpha}^0$ ;
- 4) функция потенциалов  $\nu^0(s)$ ,  $s \in S$ ;
- 5) вектор оценок  $\Delta^0$ .

Для построения второй процедуры с использованием метода возмущений [11] запишем формулу приращения критерия качества и оценку субоптимальности в задаче (2.6). Приращение критерия качества на допустимых парах  $\{x_*, v(\cdot)\}$ ,  $\{\bar{x}_*, \bar{v}(\cdot)\}$  построим, следуя [11]. Оно имеет вид

$$\Delta \hat{\alpha}(\mu) = \Delta'(\mu) \Delta x_* + \sum_{s \in T_h} \nu'(s; \mu) \Delta \xi(s) + \mu \int_{t_*}^{t^*} \delta'(t; \mu) \Delta v(t) dt, \quad (2.7)$$

где  $\Delta x_* = \bar{x}_* - x_*$ ,  $\Delta v(\cdot) = \bar{v}(\cdot) - v(\cdot)$ ,  $\Delta \xi(s) = -C(s)F(s)\Delta x_*$ ; вектор оценок  $\Delta(\mu)$  и ковозмущение  $\delta(t; \mu)$ ,  $t \in T$ , имеют вид

$$\Delta'(\mu) = \psi'(t_* - 0) = q' + \sum_{s \in T_h} \nu'(s; \mu) C(s) F(s), \quad \delta'(t; \mu) = \psi'(t) D(t), \quad t \in T. \quad (2.8)$$

Здесь  $\psi(t)$ ,  $t \in T$ , — кусочно-непрерывная функция, на интервалах непрерывности удовлетворяющая сопряженному уравнению

$$\dot{\psi}' = -\psi' A(t), \quad \psi'(t^*) = p, \quad (2.9)$$

и в моменты  $s \in \{s : v(s) \neq 0\}$  терпящая разрывы

$$\psi'(s-0) - \psi'(s+0) = \nu'(s)C(s), \quad s \in \{s : v(s) \neq 0\}.$$

Оценку субоптимальности  $\beta(\mu)$  в задаче (2.6) введем как максимальное значение приращения критерия качества (2.7), полученное в результате решения следующей задачи [11]:

$$\beta(\mu) = \max \Delta \hat{\alpha}(\mu),$$

$$\begin{aligned} d_* - x_* \leq \Delta x_* \leq d^* - x_*, \quad \xi_* - \xi(s) \leq \Delta \xi(s) \leq \xi^* - \xi(s), \\ s \in T_h, \quad -e - v(t) \leq \Delta v(t) \leq e - v(t), \quad t \in T, \end{aligned}$$

где  $e = (1, 1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^r$ .

Таким образом, оценка субоптимальности в задаче (2.6) равна

$$\begin{aligned} \beta(\mu) = \sum_{\substack{j \in J \\ \Delta_j(\mu) > 0}} \Delta_j(\mu)(d_j^* - x_{0j}) + \sum_{\substack{j \in J \\ \Delta_j(\mu) < 0}} \Delta_j(\mu)(d_{*j} - x_{0j}) \\ + \sum_{\substack{\{i, s\} \in S_h \\ \nu_i(s; \mu) > 0}} \nu_i(s; \mu)(\xi_i^* - \xi_i(s)) + \sum_{\substack{\{i, s\} \in S_h \\ \nu_i(s; \mu) < 0}} \nu_i(s; \mu)(\xi_{*i} - \xi_i(s)) + \mu \int_{t_*}^{t^*} \delta'(t; \mu)(\omega(t; \mu) - v(t)) dt, \end{aligned}$$

где  $\omega_i(t; \mu) = \text{sign } \delta_i(t; \mu)$ ,  $t \in T$ ,  $i = \overline{1, r}$ .

Функцию потенциалов, вектор оценок и ковозмущение задачи (2.1) будем искать в виде асимптотических разложений по степеням  $\mu$ :

$$\Delta(\mu) = \Delta^0 + \mu \Delta^1 + \mu^2 \Delta^2 + \dots; \quad (2.10)$$

$$\nu(s; \mu) = \nu^0(s) + \mu \nu^1(s) + \mu^2 \nu^2(s) + \dots, \quad s \in T_h;$$

$$\delta(t; \mu) = \delta^0(t) + \mu \delta^1(t) + \mu^2 \delta^2(t) + \dots, \quad t \in T,$$

где  $\nu^0(s)$ ,  $s \in T_h$ ;  $\Delta^0$  — известные элементы задачи (2.2). Кроме того  $\delta^{0'}(t) = \psi^{0'}(t)D(t)$ ,  $t \in T$ , где  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , — решение сопряженной системы (2.9) со скачками  $\psi'(s-0) = \psi'(s+0) + \nu^{0'}(s)C(s)$ ,  $s \in \{s : \{i, s\} \in S_{on}^0\}$ .

Подставив выражения (2.10) в (2.8) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , получим

$$\Delta^{0'} = q' + \sum_{s \in T_h} \nu^{0'}(s)C(s)F(s), \quad \Delta^{\kappa'} = \sum_{s \in T_h} \nu^{\kappa'}(s)C(s)F(s), \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

При достаточно малых  $\mu \geq 0$  оптимальная опора задачи (2.1) будет совпадать с оптимальной опорой  $K_{on}^0$  базовой задачи (2.2). Поэтому  $\nu_i^\kappa(s) = 0$ ,  $\{i, s\} \in S_h$ ,  $\Delta_j^\kappa = 0$ ,  $j \in J_{on}$ , для всех  $\kappa$ , что влечет

$$\nu^\kappa(s) = 0, \quad s \in T_h; \quad \Delta^\kappa = 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Оценку субоптимальности можно представить в виде

$$\beta(\mu) = \beta^0 + \mu \beta^1; \quad \beta^0 = \beta(\hat{x}^0, K_{on}^0) = 0, \quad \beta^1 = \int_{t_*}^{t^*} \delta^{0'}(t)(\omega(t) - v(t)) dt.$$

По решению базовой задачи (2.2) построим функцию  $v^1(t)$ ,  $t \in T$ ,

$$v_i^1(t) = \text{sign } \delta_i^0(t), \quad i = \overline{1, k}, \quad (2.11)$$

и вектор

$$\hat{x}^*(\mu) = \hat{x}^0 + \mu \hat{x}^1, \quad (2.12)$$

где  $\hat{x}^1 = x(t^*|t_*, \hat{x}_*^1, v^1(\cdot))$  — терминальное состояние системы (1.1) с  $v(\cdot)$  из (2.11) и начальным состоянием  $x(t_*) = \hat{x}_*^1$ , которое находится из условий

$$Q_{on}^0 \hat{x}_*^1 = -\left(c'_i(s)x(s|t_*, 0, v^1(\cdot)), \quad \{i, s\} \in S_{on}^0\right), \quad \hat{x}_{*j}^1 = 0, \quad j \in J_n. \quad (2.13)$$

Вектор  $\hat{x}^*(\mu)$  при достаточно малых  $\mu \geq 0$  в силу условий (2.3) принадлежит апостериорному распределению терминального состояния  $\hat{X}^*$ . Нетрудно видеть, что для пары терминального состояния  $\hat{x}^*(\mu)$  и оптимальной опоры базовой задачи  $K_{on}^0$  оценка субоптимальности  $\beta(\mu) = 0$ , т. е. (2.11), (2.12) дают точное решение задачи (2.6).

Таким образом, алгоритм апостериорного решения задачи оптимального наблюдения системы (1.1) с малыми возмущениями (2.4) состоит из следующих шагов:

1. Для записанного сигнала измерительного устройства  $y^*(\cdot)$  двойственным методом [5] решить задачу оптимального наблюдения детерминированной системы

$$\hat{\alpha}^0 = \max_{x_*} p'x(t^*), \quad \dot{x} = A(t)x, \quad x(t_*) = x_*;$$

$$\xi_* \leq y^*(s) - C(s)x(s) \leq \xi^*, \quad s \in T_h; \quad d_* \leq x_* \leq d^*.$$

2. Проинтегрировав сопряженную систему

$$\dot{\psi}' = -\psi' A(t), \quad \psi(t^*) = p, \quad \psi'(s-0) = \psi'(s+0) + \nu^{0'}(s)C(s), \quad s \in \{s : \{i, s\} \in S_{on}^0\},$$

построить  $\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ .

3. Параллельно с выполнением шага 2 вычислить ковозмущение  $\delta^0(t) = D'(t)\psi^0(t)$ ,  $t \in T$ , и  $v_i^1(t) = \text{sign } \delta_i^0(t)$ ,  $t \in T$ ,  $i = \overline{1, r}$  (в виде интервалов знакопостоянства).

4. Подсчитать начальное состояние  $\hat{x}_*^1$  по формулам (2.13).

5. Проинтегрировать прямую систему (1.1) с  $x(t_*) = \hat{x}_*^1$  и  $v^1(\cdot)$ , найти  $\hat{x}^1$ .

6. Найти экстремальное терминальное состояние  $\hat{x}^*(t^*, y^*(\cdot))$  и апостериорную оценку  $\hat{\alpha}$  задачи (2.1) по формуле

$$\hat{x}^*(t^*, y^*(\cdot)) = \hat{x}^0 + \delta \hat{x}^1, \quad \hat{\alpha} = \hat{\alpha}(t^*, y^*(\cdot)) = p' \hat{x}^*(\delta).$$

### 2.3. Метод агрегированных переменных

Предложенный в подразд. 2.2 метод решения задачи (2.1) с малыми возмущениями позволяет эффективно находить решение задач оптимального наблюдения, а также корректировать решение в случае небольших изменений величины  $\delta$ . Возможности метода, однако, ограничены, поскольку точное решение может быть получено только в малой правосторонней окрестности  $\{0 \leq \mu \leq \mu^0\}$  точки  $\mu = 0$ .

В данном пункте предлагается метод решения задачи (2.1), который можно использовать и для “больших” множеств  $W$ .

С помощью формулы Коши для состояния  $x(t^*|t_*, x_*, w(\cdot))$  задачу (2.1) запишем в эквивалентной функциональной форме

$$\hat{\alpha} = \max_{x_*, w(\cdot)} q'x_* + q' \int_{t_*}^{t^*} F^{-1}(t)D(t)w(t)dt, \quad (2.14)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) + Q(s)x_* + Q(s) \int_{t_*}^s F^{-1}(t)D(t)w(t)dt \leq \xi^*, \quad s \in T_h,$$

$$d_* \leq x_* \leq d^*, \quad w_* \leq w(t) \leq w^*, \quad t \in T,$$

где согласно подразд. 2.1  $Q(s) = -C(s)F(s)$ ,  $q' = p'F(t^*)$ .

Введем агрегированные переменные

$$\omega(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+h} F^{-1}(t)D(t)w(t)dt, \quad \theta \in T_h,$$

и множество  $\Omega(\theta)$  возможных значений  $\omega(\theta)$

$$\omega(\theta) \in \Omega(\theta), \quad \theta \in T_h. \quad (2.15)$$

Заметим, что  $\Omega(\theta)$  — выпуклый компакт.

Поскольку в задаче (2.1) нет необходимости в поиске функции  $w(\cdot)$ , а терминальное состояние системы (1.1) вычисляется по формуле  $x(t^*) = F(t^*)(x_* + \sum_{\theta \in T_h} \omega(\theta))$ , то переход к агрегированным переменным оправдан.

С помощью  $\omega(\cdot) = (\omega(\theta), \theta \in T_h)$  функциональная форма (2.14) принимает вид

$$\hat{\alpha} = \max_{x_*, \omega(\cdot)} q'x_* + \sum_{\theta \in T_h} q'\omega(\theta), \quad (2.16)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) + Q(s)x_* + \sum_{\theta \in T_h(s)} Q(s)\omega(\theta) \leq \xi^*, \quad s \in T_h,$$

$$d_* \leq x_* \leq d^*, \quad \omega(\theta) \in \Omega(\theta), \quad \theta \in T_h,$$

где  $T_h(s) = \{t_*, t_* + h, \dots, s - h, s\}$ .

Решение задачи (2.16) построим с помощью итерационной процедуры, в ходе которой решается серия аппроксимационных задач с полиэдральными ограничениями на агрегированные переменные (2.15). В результате будет получено субоптимальное решение, обеспечивающее выполнение включения  $\omega(\theta) \in \Omega(\theta)$ ,  $\theta \in T_h$ , с заданной точностью.

Для формирования начальной аппроксимационной задачи выберем совокупность  $n$ -векторов  $h_{(i)}$ ,  $\|h_{(i)}\| = 1$ ,  $i \in I^1 = \{1, 2, \dots, l\}$ , в которой каждые  $n$  векторов линейно независимы. Подсчитаем числа

$$g_i(\theta) = \max_{\omega(\theta) \in \Omega(\theta)} h'_{(i)}\omega(\theta) = \max_{w(\cdot)} h'_{(i)} \int_{\theta}^{\theta+h} F^{-1}(t)D(t)w(t)dt, \quad \theta \in T_h, \quad i = \overline{1, l}.$$

В результате получим совокупность векторов и чисел, определяющих первую линейную аппроксимацию множеств  $\Omega(\theta)$ ,  $\theta \in T_h$ :  $\Omega^{(1)}(\theta) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : h'_{(i)}\omega \leq g_i(\theta), i \in I^1\}$ .

Положим  $k = 1$ . Множество  $\Omega^{(k)}(\theta) = \{\omega \in \mathbb{R}^n : h'_{(i)}(\theta)\omega \leq g_i(\theta), i \in I^k(\theta)\}$  назовем  $k$ -й линейной аппроксимацией множества  $\Omega(\theta)$ ,  $\theta \in T_h$ . Сформируем  $k$ -ю аппроксимационную задачу

$$\hat{\alpha} = \max_{x_*, \omega(\cdot)} q'x_* + \sum_{\theta \in T_h} q'\omega(\theta), \quad (2.17)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) + Q(s)x_* + \sum_{\theta \in T_h(s)} Q(s)\omega(\theta) \leq \xi^*, \quad s \in T_h,$$

$$d_* \leq x_* \leq d^*, \quad \omega(\theta) \in \Omega^{(k)}(\theta), \quad \theta \in T_h.$$

Задача (2.17) представляет собой задачу линейного программирования. Для ее решения будем использовать двойственный метод, предложенный в [10]. Для повышения эффективности метода [10] можно обобщить разработанные с учетом специфики ограничений процедуры решения задач оптимального наблюдения за линейными детерминированными системами из [5]. Такая работа запланирована и будет выполнена в отдельной статье.

Задача (2.17) всегда имеет решение, поскольку апостериорное распределение терминального состояния в исходной задаче наблюдения (2.16) не пусто.

Обозначим через  $\{x_*^k; \omega^k(\theta), \theta \in T_h\}$  оптимальные начальное состояние и агрегированные переменные,  $\hat{\alpha}^k$  — оптимальное значение оценки в  $k$ -й аппроксимационной задаче (2.17).

Для каждого момента  $\theta \in T_h$  подсчитаем невязки  $r(\theta)$  ограничений (2.15). Пусть  $\rho_\theta(h) = \max_{\omega \in \Omega(\theta)} h' \omega$ ,  $\|h\| = 1$ , — опорная функция множества  $\Omega(\theta)$ . Тогда  $r(\theta) = \max_{\|h\|=1} \{h' \omega^k(\theta) - \rho_\theta(h), 0\}$ . На практике  $r(\theta)$  будем вычислять по совокупности векторов  $\bar{h}_j$ ,  $\|\bar{h}_j\| = 1$ ,  $j = \overline{1, j^*}$ , т.е.  $\bar{r}(\theta) = \max_{\bar{h}_j, j = \overline{1, j^*}} \{h' \omega^k(\theta) - \rho_\theta(h), 0\}$ .

Если  $r = \max_{\theta \in T_h} r(\theta) \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  — заданная точность, то процедуру решения задачи (2.16) заканчиваем, оценку  $\hat{\alpha}^k$  принимаем за решение задачи (2.16):  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}^k$ . В противном случае формируем следующую аппроксимационную задачу.

Для этого необходимо модифицировать множества  $\Omega(\theta)$ ,  $t \in T_h$ , для которых  $r(\theta) > \varepsilon$ . Для этого введем  $I_a^k(\theta)$  — множество индексов активных ограничений задачи (2.15) на решении

$$I_a^k(\theta) = \{j \in I^k(\theta) : h'_{(j)} \omega^k(\theta) = g_j(\theta)\},$$

$I_n^k(\theta) = I^k(\theta) \setminus I_a^k(\theta)$  — множество индексов пассивных ограничений;  $\nu_i^k(\theta)$ ,  $i \in I^k(\theta)$ , — оптимальные множители Лагранжа, найденные в результате решения задачи (2.17);  $\nu_i^k(\theta) = 0$ ,  $i \in I_n^k(\theta)$ .

Построим новую систему нормальных векторов  $h_{(i)}(\theta)$ ,  $i \in I^{k+1}(\theta) = \{1, \dots, l^{k+1}(\theta)\}$ , по следующим правилам:

(1) Если  $|J_a^k| > 1$ , построим один новый вектор

$$h_{l^{k+1}}(\theta) = - \frac{\sum_{i \in I_a^k(\theta)} \nu_i^k(\theta) h_{(i)}(\theta)}{\left\| \sum_{i \in I_a^k(\theta)} \nu_i^k(\theta) h_{(i)}(\theta) \right\|}.$$

(2) Если  $I_a^k(\theta) = \{i_0\}$ , найдем точку  $\omega_{i_0}^0$  касания аппроксимирующего многогранника  $\Omega^k(\theta)$  и множества  $\Omega(\theta)$ . Положим  $l^{k+1}(\theta) = l^k(\theta) + s$ ; построим  $s_1$  новых векторов

$$h_{l^k(\theta)+l_1} = \frac{h_{(i_0)}(\theta) + l_1/s_1 (\omega_{i_0}^0 - \omega^k(\theta))}{\|h_{(i_0)}(\theta) + l_1/s_1 (\omega_{i_0}^0 - \omega^k(\theta))\|}, \quad l_1 = \overline{1, s_1}.$$

(3) Если  $I_a^k(\theta) = \emptyset$ , добавим  $s_2$  новых векторов  $h_{l^k(\theta)+l_2}$ ,  $l_2 = \overline{1, s_2}$ , из совокупности  $\bar{h}_j$ ,  $j = \overline{1, j^*}$ , для которых выполняется неравенство  $\bar{h}' \omega^k(\theta) - \rho_\theta(\bar{h}) > \varepsilon$ .

**З а м е ч а н и е.** В ходе итераций целесообразно не только добавлять новые нормальные векторы, но и избавляться от некоторых старых. Например, можно удалить из системы  $h_{(i)}(\theta)$ ,  $i \in I^{k+1}$ , те векторы, которые остаются пассивными на протяжении нескольких итераций, т.е.  $i \in I_n^{k_1}$ ,  $k_1 = \overline{k_0, k}$ . Это приведет к уменьшению количества ограничений в задаче (2.17).

### 3. Квазиреализация позиционного решения

Согласно разд. 1, квазиреализация позиционного решения осуществляется с помощью квазиоптимального эстиматора. Предположим, что квазиоптимальный эстиматор проработал на отрезке  $[t_*, \tau]$ , вычислив по реализовавшемуся сигналу  $y_\tau^*(\cdot)$  оценки  $\hat{\alpha}^*(s)$ ,  $s \in T_h(\tau)$ . В момент

$\tau + h$  эстиматор по поступившему измерению  $y^*(\tau + h)$  должен быстро подсчитать значение  $\hat{\alpha}^*(\tau + h)$ .

По предположению, на промежутке  $[\tau, \tau + s(\tau)]$  оптимальный эстиматор решил задачу

$$\hat{\alpha} = \max_{x_*, w(\cdot)} p'x(t^*), \quad \dot{x} = A(t)x + D(t)w, \quad x(t_*) = x_*, \quad (3.1)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) - C(s)x(s) \leq \xi^*, \quad s \in T_h(\tau), \quad d_* \leq x_* \leq d^*, \quad w_* \leq w(t) \leq w^*, \quad t \in [t_*, \tau].$$

На промежутке  $[\tau + h, \tau + h + s(\tau + h)]$  оптимальный эстиматор решает задачу

$$\hat{\alpha} = \max_{x_*, w(\cdot)} p'x(t^*), \quad \dot{x} = A(t)x + D(t)w, \quad x(t_*) = x_*, \quad (3.2)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) - C(s)x(s) \leq \xi^*, \quad s \in T_h(\tau + h), \quad d_* \leq x_* \leq d^*, \quad w_* \leq w(t) \leq w^*, \quad t \in [t_*, \tau + h].$$

которая отличается от (3.1) дополнительным ограничением

$$\xi_* \leq y^*(\tau + h) - C(\tau + h)x(\tau + h) \leq \xi^*.$$

Для решения задачи (3.2) квазиоптимальный эстиматор использует элементы решения задачи (3.1). Далее описаны детали алгоритма работы квазиоптимального эстиматора при малых возмущениях (на основе метода из подразд. 2.2) и при произвольных возмущениях (на основе метода агрегированных переменных из подразд. 2.3).

### 3.1. Позиционное решение при малых возмущениях

До начала процесса наблюдения квазиоптимальный эстиматор вычисляет оценку

$$\hat{\alpha}^*(t_* - 0) = p'x \rightarrow \max, \quad x \in X^*. \quad (3.3)$$

Оптимальная опора  $K_{on}^0(t_* - 0)$  выбирается пустой.

Согласно подразд. 2.2 в процессе решения задачи (3.1) было найдено экстремальное терминальное состояние  $x^0(\tau, y_\tau^*(\cdot))$  и оптимальная опора  $K_{on}^0(\tau)$  задачи оптимального наблюдения за детерминированной системой — базовой задачи (2.2), в которой  $T_h$  заменено на  $T_h(\tau)$ . По этим данным были построены следующие сопровождающие элементы:

- 1)  $\nu(s|K_{on}^0(\tau)), s \in T_h(\tau)$ ;
- 2)  $\Delta(K_{on}^0(\tau)); \delta^0(t|K_{on}^0(\tau)) = \psi^{0'}(t|K_{on}^0(\tau))D(t), t \in [t_*, \tau]$ ;
- 3)  $\varkappa(K_{on}^0(\tau))$ ;
- 4)  $\zeta(s|K_{on}^0(\tau)), s \in T_h(\tau)$ .

Процедурой коррекции также получено возмущение  $v_i^0(t|K_{on}^0(\tau)) = \text{sign } \delta_i^0(t|K_{on}^0(\tau)), t \in [t_*, \tau]$ .

Для решения задачи (3.2) квазиоптимальный эстиматор снова использует метод из подразд. 2.2. При этом в качестве начальной опоры  $K_{on}(\tau + h)$  для решения детерминированной задачи он берет оптимальную опору  $K_{on}^0(\tau)$  задачи, решенной на промежутке  $[\tau, \tau + s(\tau)]$ . В момент  $t_*$  используется пустая опора  $K_{on}^0(t_* - 0)$ . Тогда

$$\varkappa(K_{on}(\tau + h)) = \varkappa(K_{on}^0(\tau)); \quad \zeta(s|K_{on}(\tau + h)) = \zeta(s|K_{on}^0(\tau)), \quad s \in T_h(\tau),$$

$$\zeta(\tau + h|K_{on}(\tau + h)) = y^*(\tau + h) - C(\tau + h)\varkappa(\tau + h|K_{on}^0(\tau)),$$

причем  $\xi_* \leq \zeta(s|K_{on}(\tau + h)) \leq \xi^*, s \in T_h(\tau)$ .

Если выполняются неравенства

$$\xi_* \leq \zeta(\tau + h|K_{on}(\tau + h)) \leq \xi^*, \quad (3.4)$$

то  $K_{on}^0(\tau + h) = K_{on}^0(\tau)$  — оптимальная опора задачи оптимального наблюдения за детерминированной системой (2.2), сформированной для сигнала  $y_{\tau+h}^*(\cdot)$ . Тогда

$$\hat{x}^0(K_{on}^0(\tau + h)) = \hat{x}^0(K_{on}^0(\tau));$$

$$\delta^0(t|K_{on}^0(\tau + h)) = \delta^0(t|K_{on}^0(\tau)), \quad t \in [t_*, \tau]; \quad \delta^0(t|K_{on}^0(\tau + h)) = 0, \quad t \in [\tau, \tau + h];$$

$$v_i^0(t|K_{on}^0(\tau + h)) = v_i^0(t|K_{on}^0(\tau)), \quad t \in [t_*, \tau],$$

откуда  $\hat{\alpha}^*(\tau + h) = \hat{\alpha}^*(\tau)$ .

Таким образом, в этом случае проверка неравенства (3.4) — единственная операция, которую выполняет квазиоптимальный регулятор.

В случае, когда неравенство (3.4) нарушается, для получения оптимальной опоры  $K_{on}^0(\tau + h)$  достаточно небольшого числа итераций метода [5], общая трудоемкость которых невелика.

### 3.2. Позиционное решение методом агрегированных переменных

До начала процесса наблюдения квазиоптимальный эстиматор вычисляет оценку (3.3), однако для этого решает более сложную задачу

$$\hat{\alpha}^*(t_* - 0) = \max_{x_*, \omega(\cdot)} q'x_* + \sum_{\theta \in T_h} q'\omega(\theta), \quad (3.5)$$

$$d_* \leq x_* \leq d^*, \quad \omega(\theta) \in \Omega(\theta), \quad \theta \in T_h.$$

Цель решения задачи (3.5) состоит не столько в нахождении значения  $\hat{\alpha}^*(t_* - 0)$ , сколько в построении хороших аппроксимирующих множеств  $\Omega^{k^0}(\theta|t_* - 0)$ ,  $\theta \in T_h$ , которые будут уточняться в процессе наблюдения.

Для решения задачи (3.2) квазиоптимальный эстиматор использует метод из подразд. 2.3. При этом в качестве первой аппроксимационной задачи для момента  $\tau + h$  он берет последнюю аппроксимационную задачу, решенную на промежутке  $[\tau, \tau + s(\tau)]$ :

$$\hat{\alpha} = \max_{x_*, \omega(\cdot)} q'x_* + \sum_{\theta \in T_h} q'\omega(\theta), \quad (3.6)$$

$$\xi_* \leq y^*(s) + Q(s)x_* + \sum_{\theta \in T_h(s)} Q(s)\omega(\theta) \leq \xi^*, \quad s \in T_h(\tau + h),$$

$$d_* \leq x_* \leq d^*, \quad \omega(\theta) \in \Omega^{(1)}(\theta|\tau + h), \quad \theta \in T_h,$$

где  $\Omega^{(1)}(\theta|\tau + h) = \Omega^{(k^0)}(\theta|\tau)$ ,  $\theta \in T_h$ , а также использует другие элементы решения, в частности, оптимальную опору.

При выполнении неравенства

$$\xi_* \leq y^*(\tau + h) + Q(\tau + h)\hat{x}_*(\tau) + \sum_{\theta \in T_h(\tau + h)} Q(\tau + h)\hat{\omega}(\theta|\tau) \leq \xi^*$$

решение задачи (3.6) с заданной точностью  $\varepsilon$  достигнуто:  $\hat{x}_*(\tau + h) = \hat{x}_*(\tau)$ ,  $\hat{\omega}(\cdot|\tau + h) = \hat{\omega}(\cdot|\tau)$ .

В противном случае решение задачи (3.6) продолжается методом из подразд. 2.3.

В [5] приведены оценки трудоемкости метода, позволяющие сформулировать требования к быстродействию микропроцессоров, вычисляющих квазиреализацию позиционного решения задач оптимального наблюдения, для того чтобы время вычисления текущих оценок не превосходило  $h$  единиц реального времени.

### 4. Примеры

**Пример 1.** Рассмотрим на промежутке времени  $T = [0, 6]$  колебательную систему с возмущением

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + w, \tag{4.1}$$

начальное состояние которой может реализоваться в любой точке априорного распределения

$$x_* \in \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_j| \leq 0.5, \quad j = 1, 2\}.$$

Действующее на систему (4.1) возмущение  $w(t)$ ,  $t \in T$ , — неизвестная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая ограничению  $|w(t)| \leq \delta$ .

За системой (4.1) в дискретные моменты времени  $s \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, 10-h, 10\}$ ,  $h = 0.01$ , ведется наблюдение с помощью измерительного устройства

$$y(s) = x_1(s) + \xi(s), \quad |\xi(s)| \leq 0.2, \quad s \in T_h.$$

Будем считать, что в процессе наблюдения реализовались (не известные нам) начальное состояние  $x_*^* = 0$ , возмущение  $w^*(t) = 0.01 \sin 2t$ ,  $t \in T$ , и функция ошибок  $\xi^*(s) = 0.1 \cos 4t$ ,  $s \in T_h$ . Время  $s(\tau)$  вычисления значений  $\hat{\alpha}^*(\tau)$  в приведенных примерах не учитывается.

Результаты решения задачи оптимального апостериорного наблюдения системы (4.1) для направления  $p = (0, 1)$  методом возмущений (см. подразд. 2.2) при различных значениях параметра  $\delta$  приведены в таблице. Заметим, что  $\hat{\alpha} = x_2$ .

$\delta$	$\hat{x}^0$	$\hat{x}^*(\delta)$	$\hat{x}^*$
0.01		0.04427589	0.04427589
		0.13080711	0.13080711
0.02	0.00509127	0.08346052	0.08346052
	0.11232681	0.14928742	0.14928742
0.03		0.12264514	0.11220113
		0.16776773	0.16365629
0.04		0.16182976	0.13002153
		0.18624804	0.17515278
0.1		0.39693751	0.20562755
		0.29712989	0.23873036

На рис. 1 представлено поведение оценок  $\hat{\alpha}^0(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$  (пунктирная),  $\hat{\alpha}^*(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$  (сплошная), при решении задачи позиционного наблюдения с  $\delta = 0.01$ .

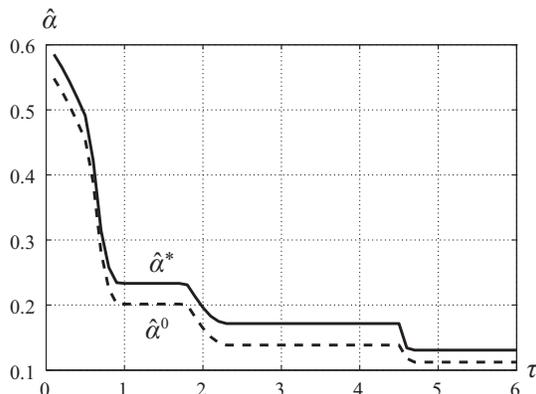


Рис. 1.

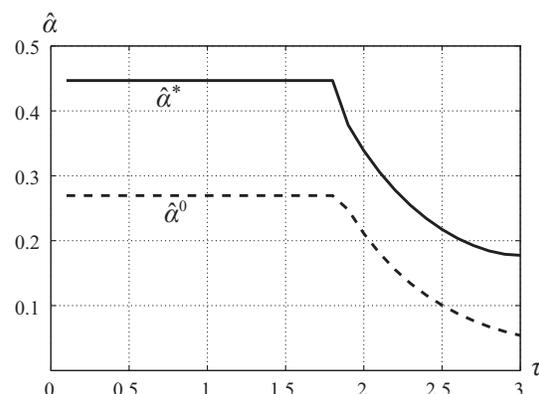


Рис. 2.

**Пример 2.** На промежутке времени  $T = [0, 3]$  рассмотрим задачу наблюдения колебательной двухмассовой системы (четвертной модели автомобиля) под действием возмущения

$$\dot{x}_1 = x_3, \quad \dot{x}_2 = x_4, \quad \dot{x}_3 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_4 = 0.1x_1 - x_2 + w. \quad (4.2)$$

Пусть начальное состояние системы (4.2) имеет вид

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = z_1, \quad x_4(0) = z_2,$$

т. е. в начальный момент  $t = 0$  по покоящимся массам нанесены удары ограниченной интенсивности:  $|z_i| \leq 0.2, i = 1, 2$ . Априорное распределение начального состояния имеет вид

$$x_* \in \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : x_j = 0, j = 1, 2; |x_j| \leq 0.2, j = 3, 4 \right\}.$$

Будем считать, что возмущение  $w(t), t \in T$ , удовлетворяет ограничению  $|w(t)| \leq 0.1$ .

Предположим, что измерительное устройство измеряет положение первой массы  $x_1(t)$  с ошибкой  $|\xi(t)| \leq 0.2, t \in T_h = \{0, h, 2h, \dots, 3 - h, 3\}, h = 0.1$ , т. е. измерительное устройство в дискретные моменты  $t \in T_h$  поставляет значения сигнала  $y(t) = x_1(t) + \xi(t)$ . Нас интересует скорость второй массы при  $t = 3$ , т. е. искомая оценка имеет вид  $\hat{\alpha} = x_4(3)$ .

Считаем, что в процессе наблюдения реализовались начальное состояние  $x_3^*(0) = 0, x_4^*(0) = 0.1$ , возмущение  $w^*(t) = 0.1 \cos 4t, t \in T$ , и функция ошибок  $\xi^*(t) = 0.2 \sin t, t \in [0, 3]$ . Апостериорное решение рассматриваемой задачи оптимального наблюдения было построено методом из подразд. 2.2. При этом  $\hat{\alpha}^0 = 0.05410867$  — оценка терминального состояния в задаче для линейной детерминированной системы,  $\hat{\alpha}(\delta) = 0.17756305$  — оценка, полученная методом возмущений,  $|\hat{\alpha}(\delta) - \hat{\alpha}| = 8 \cdot 10^{-8}$ .

На рис. 2 изображено поведение оценок  $\hat{\alpha}^0(\tau), \tau \in T_h$  (пунктирная),  $\hat{\alpha}^*(\tau), \tau \in T_h$  (сплошная), при решении задачи позиционного наблюдения.

**Пример 3.** Рассмотрим задачу примера 1 при условии, что действующее на систему (4.1) возмущение  $w(\cdot)$  удовлетворяет ограничению  $|w(t)| \leq 0.1, t \in T$ . В этом случае первое приближение асимптотического метода дает слишком грубую оценку. Для решения используем метод из подразд. 2.3.

На рис. 3 представлены текущие распределения терминального состояния, построенные для  $\tau = 0, 3, 6$ . Сплошная линия ограничивает точные множества  $X^*, \hat{X}^*(3)$  и  $\hat{X}^*(6)$ , пунктирная — их аппроксимации, полученные при замене  $\Omega(\theta), \theta \in T_h$ , на параллелепипеды, т. е. при прямых ограничениях на агрегированные переменные  $\omega(\theta), \theta \in T_h$ , в задаче (2.17).

Отметим, что в данном случае точность полученной аппроксимации значительно зависит от направления  $p$ , по которому вычисляется оценка  $\hat{\alpha}$ . Так, при  $p = (1, 0)$  апостериорная оценка равна  $\hat{\alpha} = 0.20562754$ , а первая аппроксимация дает  $\hat{\alpha}^1 = 0.22120166$ . При  $p = (-1, 0)$  метод из подразд. 2.3 дает точное апостериорное решение  $\hat{\alpha}^1 = \hat{\alpha} = 0.15765629$ .

При вычислении апостериорной оценки  $\hat{\alpha}$  для  $p = (0, 1)$  методом из подразд. 2.3 оценка терминального состояния в первой аппроксимационной задаче равна  $\hat{\alpha}^1 = 0.24007442$ . При этом невязка ограничений на агрегированные переменные  $r = 0.00505345$ . Для достижения значения  $\hat{\alpha} = 0.23873036$  с  $\varepsilon = 10^{-8}$  оказалось достаточно четырех итераций уточнения аппроксимаций множеств  $\Omega(\theta), \theta \in T_h$ . Аналогично, для  $p = (0, -1)$  ( $\hat{\alpha}^1 = 0.27813618$ ) понадобилось четыре итерации для получения  $\hat{\alpha} = 0.25091586$ .

На рис. 4 представлено поведение оценок  $\hat{\alpha}^*(\tau), \tau \in T_h$ , для направления  $p = (0, 1)$  (кривая 1) и  $-\hat{\alpha}^*(\tau), \tau \in T_h$ , для направления  $p = (0, -1)$  (кривая 2) при решении задачи позиционного наблюдения методом из подразд. 2.3. Рис. 4 дает представление о том, как в процессе вычисления квазиреализаций изменяется интервал, в котором гарантированно находится значение  $x_2(\tau), \tau \in T_h$ .

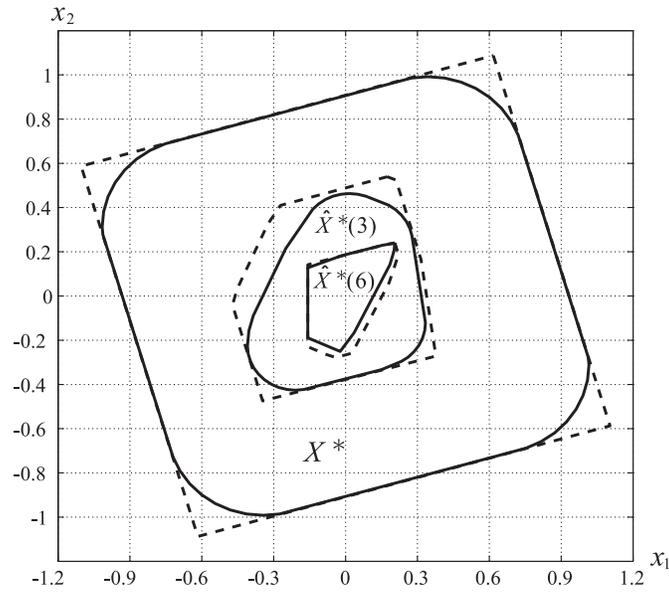


Рис. 3.

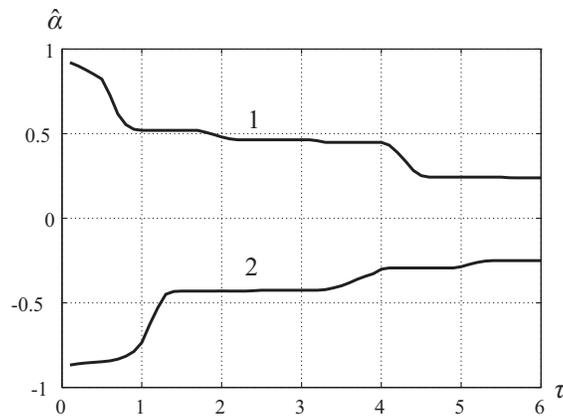


Рис. 4.

### Заключение

В работе исследована задача оптимального наблюдения линейной динамической системы с возмущениями при неполностью определенном начальном состоянии. Описываются методы вычисления апостериорных оценок терминального состояния системы и основанные на них процедуры квазиреализации позиционного решения задачи оптимального наблюдения для случая нерегулярных возмущений, реализующихся в виде кусочно-непрерывных ограниченных функций. Для малых возмущений обоснован метод, базирующийся на асимптотических разложениях и коррекции решения задачи оптимального наблюдения для детерминированной системы. Для больших возмущений предложен метод агрегированных переменных, позволяющий перейти к конечномерным возмущениям. Изложенные результаты в сочетании с разработанными ранее методами оптимального управления могут быть применены для оптимального управления динамическими системами в условиях множественной неопределенности.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** К теории управляемости и наблюдаемости линейных динамических систем // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 1. С. 3–14.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Черноушко Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
4. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Союзные задачи управления, наблюдения и идентификации // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 9. С. 777–780.
5. **Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.** Оптимальное наблюдение за нестационарными динамическими системами // Изв. РАН. 2002. № 2. С. 35–46. (Теория и системы управления.)
6. **Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М.** Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. Т. 10, № 2. С. 33–57.
7. **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычис. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 838–859.
8. **Федоренко Р.П.** Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
9. **Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Алгоритмы программной и позиционной оптимизации систем управления с промежуточными фазовыми ограничениями // Журн. вычис. математики и мат. физики. 2001. Т. 41, № 10. С. 1485–1504.
10. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.** Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. Минск: Изд-во БГУ, 1984. 214 с.
11. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Методы линейного программирования. Ч. 3. Специальные задачи. Минск: Изд-во БГУ, 1980. 368 с.

Габасов Рафаил  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
Белорусский гос. ун-т  
e-mail: kirill@nsys.by

Поступила 14.04.2009

Дмитрук Наталия Михайловна  
канд. физ.-мат. наук, доцент  
Ин-т математики НАН Беларуси  
e-mail: dmitruk@im.bas-net.by

Кириллова Фаина Михайловна  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
чл.-корр. НАН Беларуси  
главный науч. сотрудник  
Ин-т математики НАН Беларуси  
e-mail: kirill@nsys.by

УДК 517.97, 62–50

**ПРЕОДОЛЕНИЕ САМОЛЕТОМ ПРЕПЯТСТВИЙ ПО ВЫСОТЕ  
В УСЛОВИЯХ ВЕТРОВОГО ВОЗМУЩЕНИЯ<sup>1</sup>****С. А. Ганебный, А. И. Красов, В. С. Пацко, М. А. Смольникова**

Метод адаптивного управления применен к задаче преодоления самолетом препятствий по высоте в условиях действия ветровых помех. Используются конструкции теории дифференциальных игр.

Ключевые слова: адаптивное управление, дифференциальные игры, управление самолетом, ветровое возмущение, численные построения.

S. A. Ganebnyi, A. I. Krasov, V. S. Patsko, M. A. Smol'nikova. Vertical passage of obstacles by an aircraft under wind disturbance.

The adaptive control method is applied to the problem of the vertical passage of obstacles by an aircraft under wind disturbance. Constructions of the theory of differential games are used.

Keywords: adaptive control, differential games, aircraft control, wind disturbance, numerical methods.

**Введение**

Работа посвящена построению управления в задаче о преодолении самолетом препятствий по высоте при действии неизвестной ограниченной ветровой помехи. Рассматривается случай гарантированного обхода двух препятствий. Рассуждения легко переносятся на случай нескольких препятствий. Предложенный способ опирается на идеи теории дифференциальных игр [1, 2] и метод адаптивного управления, изложенный в [3, 4].

Предполагается, что до обнаружения препятствия самолет движется горизонтально в установившемся режиме. Зафиксировано некоторое расстояние, на котором происходит обнаружение находящихся впереди препятствий. После обнаружения начинается маневр преодоления препятствий по высоте. Управление, обеспечивающее гарантированное преодоление первого препятствия, строится с использованием вспомогательной дифференциальной игры. При обнаружении следующего препятствия рассматривается вторая игра. Предложен способ выбора управления, который гарантирует выполнение цели (т. е. обход двух препятствий) в обеих играх.

Построение управления в каждой отдельной игре происходит следующим образом. В вертикальной плоскости строится прямолинейное опорное движение и производится линеаризация нелинейной динамики относительно этого движения. Рассматривается вспомогательная линейная дифференциальная игра с фиксированным моментом окончания, в качестве которого берется момент номинального пролета препятствия. Векторное полезное управление имеет две компоненты: одна регулирует отклонение силы тяги от номинала, вторая представляет собой фиктивное управление, обрабатываемое рулем высоты и имеющее смысл целевого угла тангажа. Мешающее воздействие — две компоненты (продольная и вертикальная) скорости ветра. Накладываются геометрические ограничения на полезное управление и мешающее воздействие.

Вспомогательная игра приводится к виду, в котором фазовая переменная является одномерной. Она просчитывается на основе текущего состояния при помощи фундаментальной

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления” и при поддержке РФФИ (проекты 07-01-96085, 09-01-00436).

матрицы Коши линеаризованной системы и характеризует прогноз отклонения по высоте от номинала на момент пролета препятствия. Свойство одномерности позволяет легко построить в пространстве игры две линии, между которыми полезное управление гарантирует нахождение фазовой переменной, как бы ни действовала в оговоренных пределах ветровая помеха. При этом, если реализуется помеха меньшего уровня, чем заложено при описании вспомогательной игры, то и компенсация ее осуществляется полезным управлением малого уровня. Вспомогательные дифференциальные игры используются для выбора управления, моделирование движения проводится в рамках исходной нелинейной системы.

Задача о преодолении самолетом препятствий по высоте в условиях непредсказуемых порывов ветра близка к задачам взлета и прекращения посадки при наличии ветровых возмущений. Применение современных методов математической теории управления и теории дифференциальных игр к таким задачам рассматривалось в работах [5–12].

Первый раздел статьи посвящен постановке задачи и описанию динамики самолета. Во втором разделе рассмотрено применение адаптивного управления в случае одного препятствия. В третьем — расширение способа управления для случая нескольких препятствий. В четвертом разделе приведены результаты моделирования.

## 1. Постановка задачи и описание нелинейной динамики

Рассматривается задача о предотвращении столкновения самолета с двумя наземными препятствиями (рис. 1). Уклонение производится по высоте, соответственно движение самолета рассматривается в вертикальной плоскости. Допускаются внезапные ветровые возмущения.

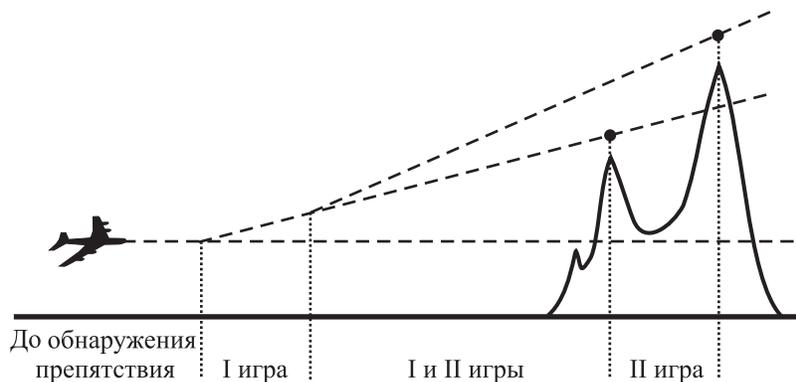


Рис. 1. Задача о преодолении двух препятствий.

Задаются положения и высоты двух препятствий. Считаем, что изначально самолет движется по горизонтальной траектории, которую можно считать первоначальной опорной траекторией. Оговаривается расстояние  $D$  по горизонтали, на котором происходит обнаружение препятствия. После обнаружения первого препятствия проводим опорную траекторию из текущей точки в некоторую точку, расположенную над препятствием. Задача управления — оказаться выше этой точки в момент пролета препятствия. При обнаружении второго препятствия проводим вторую опорную траекторию. Цель управления состоит в том, чтобы обеспечить гарантированный обход обоих препятствий.

Моделирование движения будем осуществлять в рамках восьмимерной нелинейной систе-

мы [13–16], описывающей вертикальный канал движения самолета:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_g &= V_{xg}, \\
 \dot{V}_{xg} &= [(P \cos \sigma - qSc_x) \cos \vartheta - (P \sin \sigma + qSc_y) \sin \vartheta]/m, \\
 \dot{y}_g &= V_{yg}, \\
 \dot{V}_{yg} &= [(P \cos \sigma - qSc_x) \sin \vartheta + (P \sin \sigma + qSc_y) \cos \vartheta]/m - g, \\
 \dot{\vartheta} &= \omega_z, \\
 \dot{\omega}_z &= M_z/I_z, \\
 \dot{P} &= k_p(\delta_{ps} - P), \\
 \dot{\delta}_e &= k_e(\delta_{es} - \delta_e).
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь  $x_g$  — продольная координата центра масс самолета, м;  $y_g$  — высота, м;  $V_{xg}$ ,  $V_{yg}$  — продольная и вертикальная составляющие вектора скорости, м/с;  $\vartheta$  — угол тангажа, рад;  $\omega_z$  — угловая скорость, рад/с;  $P$  — сила тяги, Н;  $\delta_e$  — отклонение руля высоты, рад;  $\delta_{ps}$  — командное положение силы тяги;  $\delta_{es}$  — командное положение руля высоты.

В систему входят также следующие величины:

$q = \rho \widehat{V}^2 / 2$  — скоростной напор;

$\widehat{V} = (\widehat{V}_{xg}^2 + \widehat{V}_{yg}^2)^{1/2}$  — модуль воздушной скорости, м/с;

$\widehat{V}_{xg} = V_{xg} - W_{xg}$ ,  $\widehat{V}_{yg} = V_{yg} - W_{yg}$  — составляющие вектора воздушной скорости, м/с;

$W_{xg}$ ,  $W_{yg}$  — составляющие скорости ветра, м/с;

$\rho = 1.207$  — плотность воздуха, кг/м<sup>3</sup>;

$g = 9.81$  — ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$c_x = \tilde{c}_x \cos \alpha - \tilde{c}_y \sin \alpha$ ,  $c_y = \tilde{c}_y \cos \alpha + \tilde{c}_x \sin \alpha$  — аэродинамические коэффициенты силы сопротивления в связанной [15, 17] системе координат;

$\alpha = \arcsin\{(-\widehat{V}_{xg} \sin \vartheta - \widehat{V}_{yg} \cos \vartheta) / \widehat{V}\}$  — угол атаки;

$M_z = qSbm_z$  — момент силы, Нм.

Оставшиеся величины выпишем в числовых выражениях, соответствующих самолету Ту-154:

$\tilde{c}_x = 0.21 + 0.004\alpha + 0.47 \cdot 10^{-3}\alpha^2$ ,  $\tilde{c}_y = 0.65 + 0.09\alpha + 0.003\delta_e$  — коэффициенты силы сопротивления в полусвязанной [15, 17] системе координат;

$m_z = 0.033 - 0.017\alpha - 0.013\delta_e + 0.047\delta_{st} - 1.29\omega_z / \widehat{V}$  — аэродинамический коэффициент момента в связанной системе координат;  $S = 201$  — площадь крыла, м<sup>2</sup>;

$b = 5.285$  — средняя аэродинамическая хорда, м;

$m = 75 \times 10^3$  — масса самолета, кг;

$\sigma = 1.72$  — угол установки двигателей, град;

$I_z = 6.5 \times 10^6$  — момент инерции, кг м<sup>2</sup>;

$\delta_{st}$  — угол установки стабилизатора, град;

$k_p = 1$ ,  $k_e = 4$  — коэффициенты инерции силы тяги и руля высоты, с<sup>-1</sup>.

В формулах для  $\tilde{c}_x$ ,  $\tilde{c}_y$  и  $m_z$  все угловые величины берутся в градусах. Стабилизатор является органом управления, эквивалентным рулю высоты, его отклонение используется для зануления номинального значения руля высоты. Стабилизатор выставляется в свое номинальное положение согласно выбранной опорной траектории.

Управление осуществляется за счет командных положений силы тяги и руля высоты. Возмущения, действующие на систему, — продольная и вертикальная компоненты скорости ветра.

Управление рулем высоты зададим линейным законом:

$$\delta_{es} = -k_1(u_\vartheta - \vartheta - k_2(\widehat{V} - \widehat{V}^0)) + k_3\omega_z. \quad (1.2)$$

Здесь  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0.0075$ ,  $k_3 = 0.2$  — коэффициенты;  $\widehat{V}$  и  $\widehat{V}^0$  — текущая и номинальная (на соответствующей опорной траектории) воздушные скорости;  $u_\vartheta$  — фиктивное управление, имеющее смысл целевого угла тангажа. Новое управление вводится по следующим соображениям. Возможности руля высоты достаточно велики, и гораздо более важным является сохранение угла тангажа в заданных пределах. Но так как угол тангажа является фазовой переменной в исходной системе и непосредственный контроль над ним невозможен во вводимой далее одномерной дифференциальной игре, рассматривается целевой угол тангажа (на который накладываются ограничения) и строится закон управления рулем высоты, приближающий реальный угол тангажа к целевому.

Управление по силе тяги ограничим неравенствами

$$P^0 \leq \delta_{ps} \leq P^0 + 1.2m, \quad (1.3)$$

где  $P^0$  — номинальная сила тяги, соответствующая выбранной опорной траектории. Левое крайнее значение для  $\delta_{ps}$  говорит о том, что тягу нельзя сбрасывать ниже номинальной во время маневра преодоления препятствия. Правое крайнее значение соответствует запасу по тяге, который можно использовать при маневре преодоления. Естественно, величина справа не должна превышать некоторого глобального ограничения на силу тяги.

Для управления по целевому углу тангажа зададим ограничения

$$0^\circ \frac{\pi}{180^\circ} \leq u_\vartheta \leq 20^\circ \frac{\pi}{180^\circ}. \quad (1.4)$$

Номинальное значение ветровой помехи на всем промежутке движения считаем нулевым. Возможные отклонения компонент скорости ветра примем в виде

$$|W_{xg}| \leq 10 \text{ м/с}, \quad |W_{yg}| \leq 5 \text{ м/с}. \quad (1.5)$$

Предположение о нулевом номинальном ветре не является принципиальным. Ограничения (1.5) на отклонения от номинала выбираются из “здоровых” соображений и используются при построении адаптивного управления в рамках линеаризованных задач и расчете гарантии, им обеспечиваемой.

## 2. Управление в случае одного препятствия

Рассмотрим случай одного препятствия и опишем построение управления в рамках вспомогательной дифференциальной игры (от момента обнаружения препятствия до его прохождения).

**Линеаризация относительно опорной прямой.** При начале маневра уклонения в геометрических координатах  $x$ ,  $y$  строится опорная прямая, проходящая от точки  $(x_{g0}, y_{g0})$  положения самолета в момент обнаружения препятствия до точки  $(x_M, y_M)$ , расположенной на заданной высоте над препятствием. Запас по высоте определяется техническими условиями. С математической точки зрения значение  $y_M$  можно считать высотой препятствия.

Производится расчет параметров номинального движения по опорной прямой. Пусть  $V_{xg}^0$  — номинальная скорость вдоль оси  $x_g$ . задается вектор  $z$  разностных координат — отклонение текущего положения от соответствующего данному моменту времени вектора номинальных координат на опорной прямой. Третья координата  $z_3$  вектора  $z$  — отклонение от номинала по высоте.

Относительно опорной прямой проводится линеаризация нелинейной системы (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathbf{A}z + \mathbf{B}u + \mathbf{C}v, \\ u &\in \Omega_u, \quad v \in \Omega_v. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В линейной системе вектор управления  $u$  состоит из двух компонент:  $u_p$  — отклонения командного положения силы тяги от номинала ( $u_p = \delta_{ps} - P^0$ ) и  $u^*$  — отклонения целевого угла тангажа от номинального угла тангажа ( $u^* = u_\vartheta - \vartheta^0$ ). Ограничивающее множество, следующее из (1.3) и (1.4), обозначим  $\Omega_u$ . Соотношения (1.5) определяют множество  $\Omega_v$  — ограничение для помехи. Имеем  $0 \in \Omega_u$ ,  $0 \in \Omega_v$ .

Рассмотрим вспомогательную игру с фиксированным моментом окончания  $T = (x_M - x_{g0})/V_{xg}^0$ . Первый игрок, распоряжающийся управлением  $u$ , старается обеспечить в момент  $T$  неравенство  $z_3(T) \geq y_M$ . Какого-либо четкого ограничения сверху на величину  $z_3(T)$  нет, однако нежелательно допускать излишне большие значения разности  $z_3(T) - y_M$ . Второй игрок, в ведении которого находится воздействие  $v$ , применяет некоторое заранее неизвестное управление со значениями в множестве  $\Omega_v$ .

**Одномерная дифференциальная игра.** Используя стандартный прием перехода к динамике без фазовой переменной в правой части [1, 2], получим

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= B(\tau)u + C(\tau)v, \quad u \in \Omega_u, \quad v \in \Omega_v, \\ \xi &= Z_3(\tau)z, \quad B(\tau) = Z_3(\tau)\mathbf{B}, \quad C(\tau) = Z_3(\tau)\mathbf{C}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь  $Z_3(\tau)$  — третья строка фундаментальной матрицы Коши системы  $\dot{z} = \mathbf{A}z$ ;  $\tau = T - t$  — обратное время. Фазовая переменная  $\xi$  имеет смысл прогноза по высоте положения системы (2.6) в момент  $t$  на момент  $T$  при  $u = v \equiv 0$ . Первый игрок заинтересован в обеспечении неравенства  $\xi(0) \geq 0$ .

**Построение управления.** В пространстве  $\xi \times \tau$  дифференциальной игры (2.7) строятся два семейства полупроницаемых линий (рис. 2). Полупроницаемая линия [18] — кривая, для каждой точки которой можно подобрать действие первого игрока так, что при любом действии второго движение системы не пересечет эту кривую с + на -. Аналогично для второго игрока, но только с - на +. Линии одного семейства отличаются друг от друга лишь вертикальным переносом. Для линий семейства I (II) знак + находится сверху (снизу).

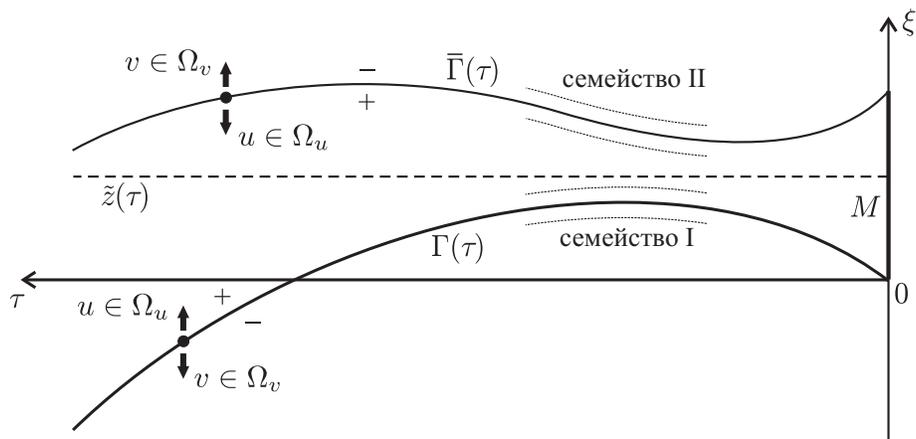


Рис. 2. Два семейства полупроницаемых линий и главный стабильный мост.

Любые две непересекающиеся полупроницаемые линии (одна из семейства I и одна из семейства II) порождают максимальный стабильный мост [1, 2]: линия семейства I образует его нижнюю границу, линия семейства II — верхнюю.

Определим главный стабильный мост. В качестве нижней границы возьмем полупроницаемую линию семейства  $\Gamma$ , проходящую через точку  $\tau = 0, \xi = 0$ . Обозначим эту линию  $\Gamma(\tau)$ . На некотором расстоянии  $\varepsilon$  от нижней границы возьмем горизонтальную прямую  $\tilde{z}(\tau)$  (см. рис. 2). Полупроницаемую линию семейства  $\Pi$ , расположенную на расстоянии  $\varepsilon$  выше прямой  $\tilde{z}(\tau)$ , примем за верхнюю границу главного моста и обозначим  $\bar{\Gamma}(\tau)$ .

Сечение главного моста в момент  $\tau = 0$  назовем терминальным отрезком  $M$ . Отрезок  $M$  определяется динамикой игры (2.7) и выбранным значением параметра  $\varepsilon$ . Величина отрезка характеризует отклонение вверх от точки  $\xi = 0$ , которое допускает первый игрок в момент  $\tau = 0$ .

Из теории дифференциальных игр применительно к задачам с одномерной фазовой переменной следует, что для текущей позиции на нижней границе моста надо выбирать управление в системе (2.7), дающее вектор скорости, направленный максимально вверх. Соответственно, для текущей позиции, расположенной на верхней границе, следует брать управление, направляющее вектор скорости максимально вниз. Это дает гарантию, что если начальная позиция находится в пределах главного моста и ветровое возмущение не превосходит заданных ограничений, то движение останется внутри и придет на отрезок  $M$ , оказавшись тем самым в момент окончания  $\tau = 0$  не ниже точки  $\xi = 0$ , но и не слишком высоко.

В целом управление будем строить на основе идеологии адаптивного управления [3, 4]. Если главный мост, образованный двумя полупроницаемыми линиями, пропорционально уменьшить умножением на коэффициент  $0 < k < 1$  относительно  $\tilde{z}(\tau)$  в каждом сечении по времени, то получившееся множество также будет максимальным стабильным мостом. Новый мост (рис. 3) соответствует ограничениям  $k\Omega_u, k\Omega_v$  на управление и помеху, а также терминальному множеству  $M_k$ , полученному сжатием с коэффициентом  $k$  множества  $M$  относительно точки  $\tilde{z}(0)$ . При этом прямая  $\tilde{z}(\tau)$  становится вырожденным мостом для нулевых ограничений. На граничных линиях главного моста и вне его пределов выбираем экстремальное (крайнее) управление, на линии  $\tilde{z}(\tau)$  — нулевое. Поэтому назовем  $\tilde{z}(\tau)$  линией переключения. В пределах главного моста ниже и выше линии переключения применяем пропорционально измененное управление.

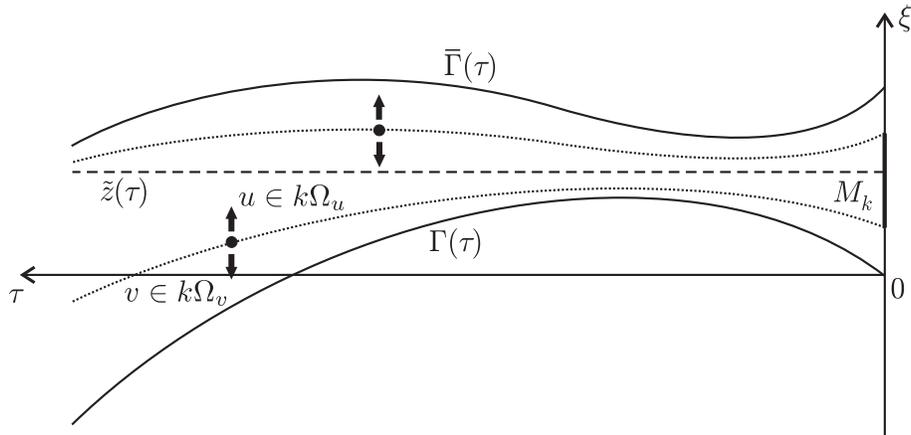


Рис. 3. Идея адаптивного управления: пропорциональное изменение  $t$ -сечений мостов.

В вычислениях в качестве обратного времени  $\tau$  берем прогнозируемое обратное время  $\tau = (x_M - x_g(t))/V_{xg}(t)$ .

### 3. Управление при наличии двух препятствий

В случае последовательного обнаружения нескольких препятствий требуется построить управление, которое гарантировало бы уклонение от каждого из них. Рассмотрим, как это делается для случая двух препятствий, зоны действия которых накладываются друг на друга.

Считаем, что в процессе движения проведены опорные прямые, получены линеаризованные системы (2.6) и одномерные дифференциальные игры (2.7). Каждая индивидуальная игра дает свой вектор управления. Требуется выбрать из двух управлений такое, которое гарантировало бы выполнение цели в обеих играх. Это можно сделать достаточно просто, учитывая одномерность дифференциальных игр и тот факт, что основная цель в игре — не пересечь с + на – нижнюю границу главного моста; пересечение верхней границы по смыслу задачи, вообще говоря, допустимо.

Введем операции сравнения между мостами, получаемыми в двух играх умножением главного моста на скалярный коэффициент  $k$ . Из двух мостов меньшим будем называть тот, который получен умножением на меньший коэффициент. Второй мост будем называть большим.

Рассмотрим варианты расположения текущих позиций в двух играх (рис. 4). Подчеркнем, что речь идет именно о двух позициях, соответствующих одному и тому же состоянию нелинейной системы (1.1) в рассматриваемый момент времени.

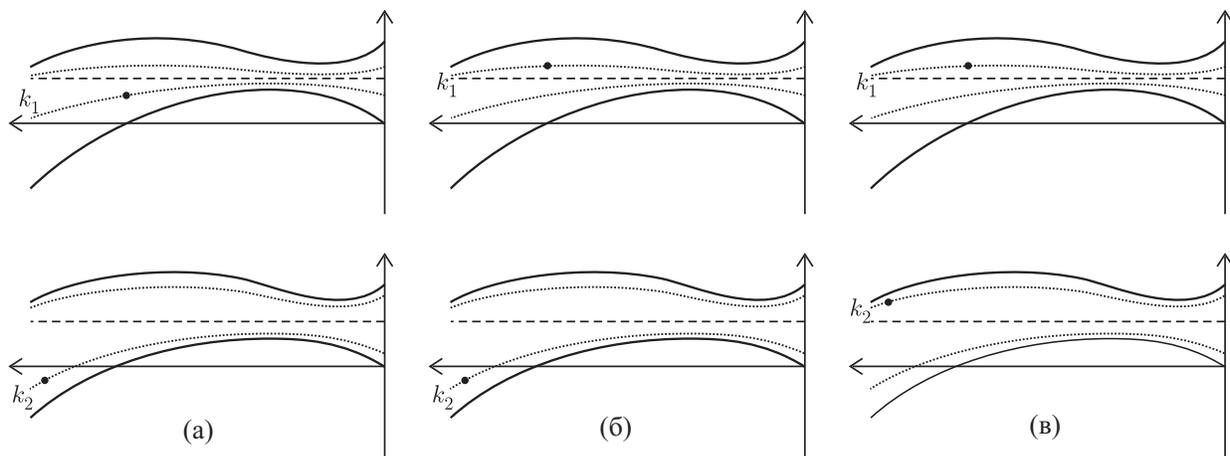


Рис. 4. Различные варианты положения текущих позиций в двух играх.

(а) Текущие позиции в обеих играх находятся ниже линий переключения. Следовательно, вектор  $B(\tau)u$  в правой части системы (2.7) в каждой игре направлен вверх, но модули различны: для первой игры управление берется с границы множества  $k_1\Omega_u$ , для второй — с границы  $k_2\Omega_u$ . Если из этих двух управлений выберем максимальное, т. е. соответствующее большему мосту, то сохраним гарантированный результат в обеих играх, так как лишь увеличим модуль действующего вектора в одной из них.

(б) Одна позиция находится выше линии переключения, другая — ниже. В этом случае выберем управление из игры, позиция которой находится ниже линии переключения. Таким образом, сохраняем результат в этой игре. Однако появляется возможность пересечения верхней границы моста во второй игре.

(в) Обе позиции находятся сверху. Будем брать управление, соответствующее меньшему мосту. Сделано это из следующих соображений. Вариант (в) может появиться из варианта (б) при переходе нижней точки через линию переключения. Если взять управление, отвечающее большему мосту, это вызовет резкое изменение управляющего сигнала. В нашем случае происходит смена знака управления, но его уровень остается небольшим.

Резюмируя три рассмотренных случая, получаем, что всегда выбирается управление, которое сильнее направляет движение системы вверх. Это управление соответствует большему мосту, если текущие точки расположены ниже линий переключения, и меньшему, если выше.

#### 4. Результаты моделирования

При моделировании движения нелинейной системы (1.1) в качестве ветровой помехи будем брать возмущение, обусловленное микровзрывом ветра [19]. Опишем используемую модель микровзрыва [20, 21]. В трехмерном пространстве  $x_g, y_g, z_g$  задается тор (рис. 5). Вне тора создается турбулентность, внутри же происходит пропорциональное уменьшение скорости ветра при приближении к основному кольцу тора. Параметры микровзрыва:  $\mathcal{V}$  — скорость ветра в центральной точке (эта скорость не является максимальной, у края тора скорость ветра может быть до двух раз больше);  $h$  — высота центральной точки;  $R$  — радиус основного кольца тора;  $R_C = 0.8h$  — радиус кольца тора;  $\tilde{x}_0, \tilde{z}_0$  — положение центра тора в плоскости земли.

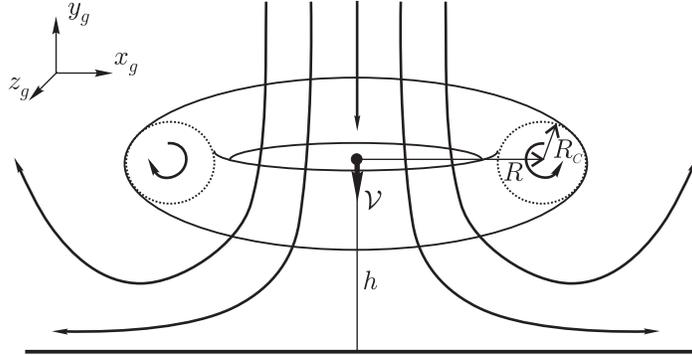


Рис. 5. Модель микровзрыва ветра.

При проходе зоны микровзрыва самолет сначала попадает в поток встречного ветра, который в течение достаточно быстрого времени изменяется на нисходящий, затем на попутный. Встречный поток увеличивает воздушную скорость и, соответственно, подъемную силу, попутный и нисходящий — наоборот.

Моделирование проведено с двумя вариантами микровзрыва. Параметры первого:  $\mathcal{V} = 5$  м/с;  $h = 600$  м;  $R = 1200$  м;  $R_C = 480$  м. Центр микровзрыва (в проекции на плоскость земли) расположен на расстоянии 500 м от точки начала движения:  $\tilde{x}_0 = 500$  м,  $\tilde{z}_0 = 0$ . Вторым микровзрывом отличается большей силой — скорость ветра в центральной точке  $\mathcal{V} = 8$  м/с.

Предполагаем, что препятствие обнаруживается на расстоянии  $D = 1400$  м.

Параметр  $\varepsilon$  в играх с динамикой (2.7) подбираем так, чтобы величина терминального отрезка  $M$  равнялась примерно 30 м.

Сначала представим результаты моделирования для первого варианта микровзрыва.

На рис. 6 приведены графики движений в координатах двух дифференциальных игр (2.7) и график изменения высоты. На графиках движений по горизонтальной оси откладывается обратное время  $\tau$  в соответствующей игре, по вертикальной — координата  $\xi$  (обозначения:  $\tau_1, \xi_1$  для первой игры и  $\tau_2, \xi_2$  для второй). Графики сдвинуты по времени так, чтобы был виден момент начала действия игры и момент ее окончания. Тонкими линиями показаны границы главного моста и линия переключения. График высоты приведен в координатах  $x_g, y_g$ . Показаны линия земли, препятствия (в виде вертикальных отрезков), три опорные прямые.

Видно, что в первой игре движение пересекает верхнюю границу главного моста и идет на некотором промежутке выше. Это говорит о том, что управление берется из второй игры и, следовательно, ключевую роль здесь играет второе препятствие.

На рис. 7 представлены графики силы тяги, руля высоты, целевого угла тангажа, угла тангажа, реализации ветрового возмущения. По горизонтальной оси отложено время в секундах. На графике силы тяги тонким пунктиром показаны три номинальные значения силы тяги, соответствующие трем опорным прямым, и три максимальные значения силы тяги, отстоящие от номинальных на  $1.2m$ . На графике отклонения руля высоты пунктиром изображены

нулевое значение и максимальные допустимые отклонения руля (они достаточно широкие и не учитываются в алгоритме построения управления). На графике целевого угла тангажа даны максимальные допустимые значения и три номинальных. Три номинальные значения показаны на графике угла тангажа.

На начальном участке до обнаружения первого препятствия значение силы тяги  $P$  было постоянным и равным расчетному номинальному. Постоянным был также целевой угол тангажа  $u_\vartheta$ . Его значение совпадало с номинальным значением угла тангажа. Влияние ветрового возмущения компенсировалось управлением по рулю высоты согласно формуле (1.2).

Поскольку реализации скорости ветра укладываются в ограничения  $10 \text{ м/с}$  для  $W_{xg}$  и  $5 \text{ м/с}$  для  $W_{zg}$ , то одномерная фазовая переменная идет выше нижней линии  $\Gamma(\tau)$  главного моста в каждой из вспомогательных дифференциальных игр. При этом значение  $P$  силы тяги и величина  $u_\vartheta$  целевого угла тангажа не выходят на свои максимально допустимые значения.

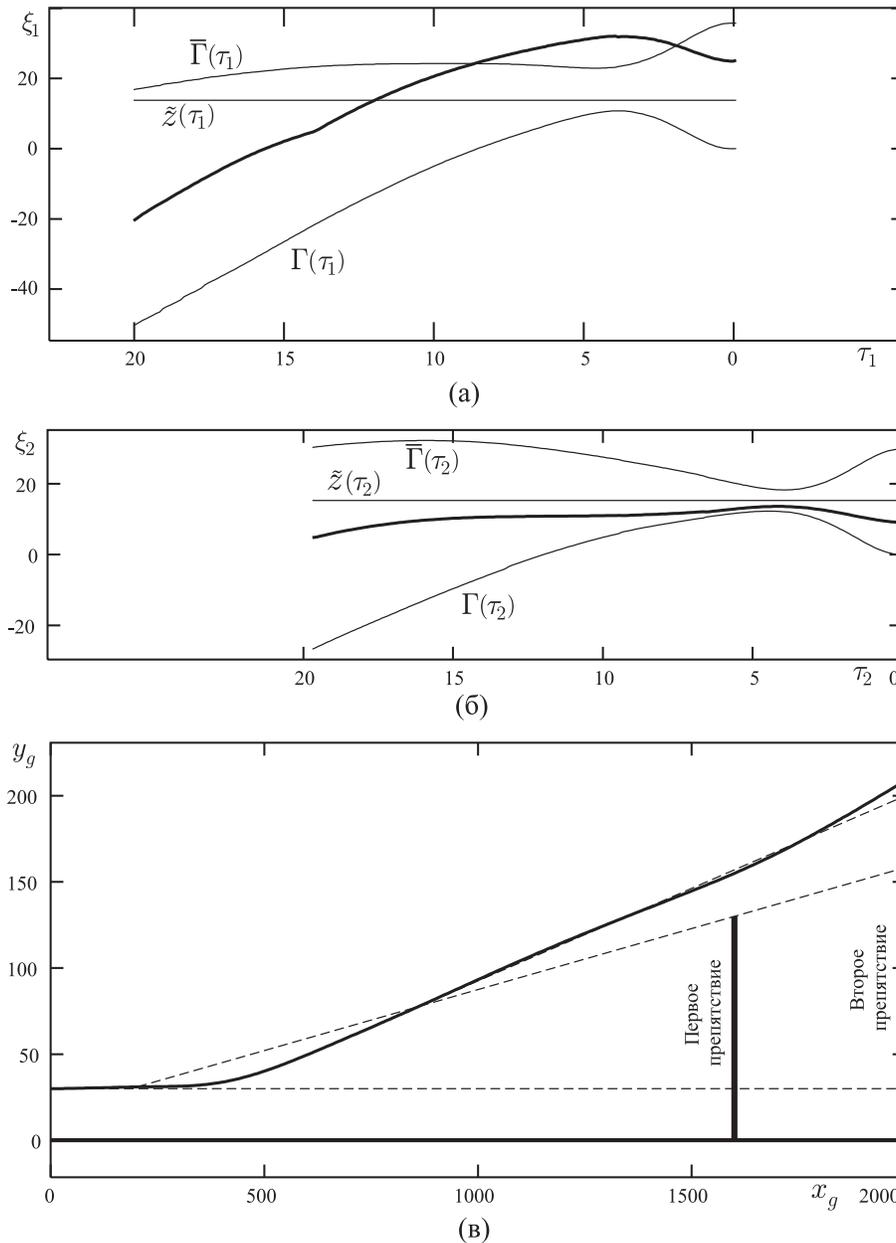


Рис. 6. Микровзрыв 1: (а), (б) — графики движений в двух дифференциальных играх, (в) — график высоты. Время — в секундах, расстояния — в метрах.

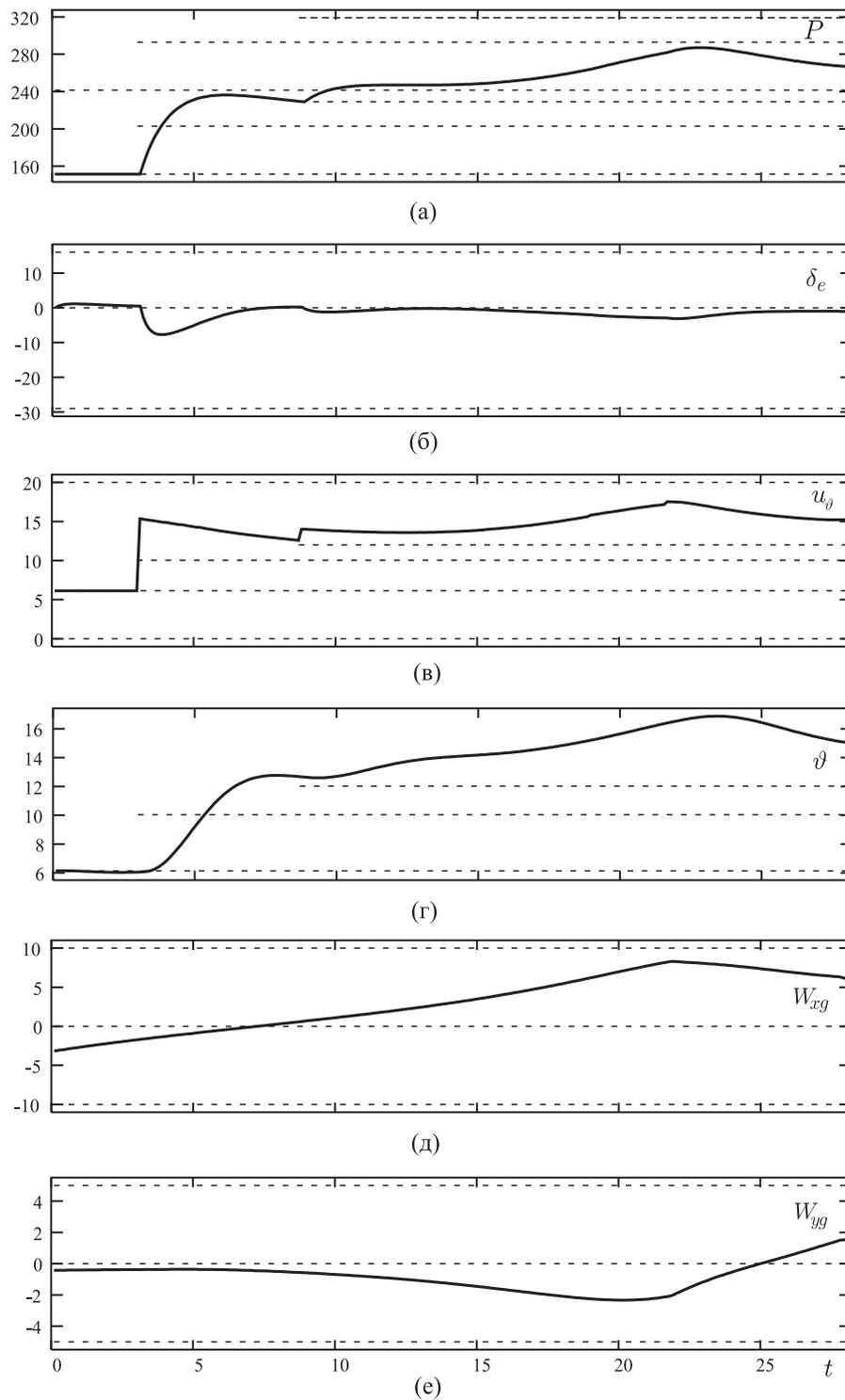


Рис. 7. Микровзрыв 1. Графики: (а) силы тяги  $P$ ,  $\times 1000$  Н; (б) изменения руля высоты  $\delta_e$ , град; (в) целевого угла тангажа  $u_\vartheta$ , град; (г) угла тангажа  $\vartheta$ , град; (д), (е) продольной  $W_{xg}$  и вертикальной  $W_{yg}$  компонент скорости ветра, м/с.

Результаты моделирования для более сильного микровзрыва представлены на рис. 8 и 9. Здесь максимальная скорость ветра по координате  $x$  на некотором участке выходит за пределы предварительно заданных ограничений. Именно на этом участке текущая позиция во второй игре выходит за нижнюю границу главного моста, соответственно управления по силе тяги и целевому углу тангажа становятся максимальными. Далее, когда скорость ветра возвращается в заданные пределы, движение возвращается внутрь моста, цель игры успешно достигается.

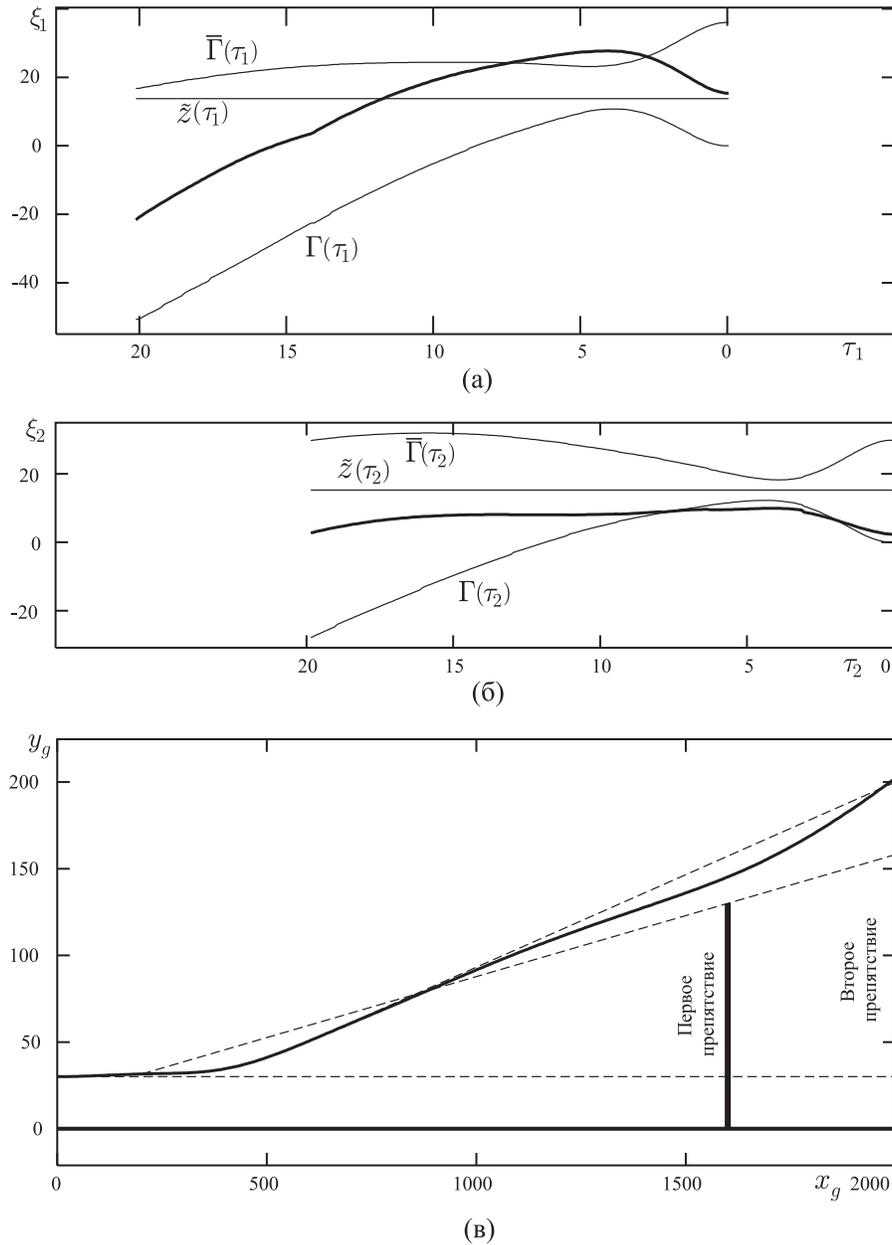


Рис. 8. Микровзрыв 2: (а), (б) — графики движений в двух дифференциальных играх, (в) — график высоты. Время — в секундах, расстояния — в метрах.

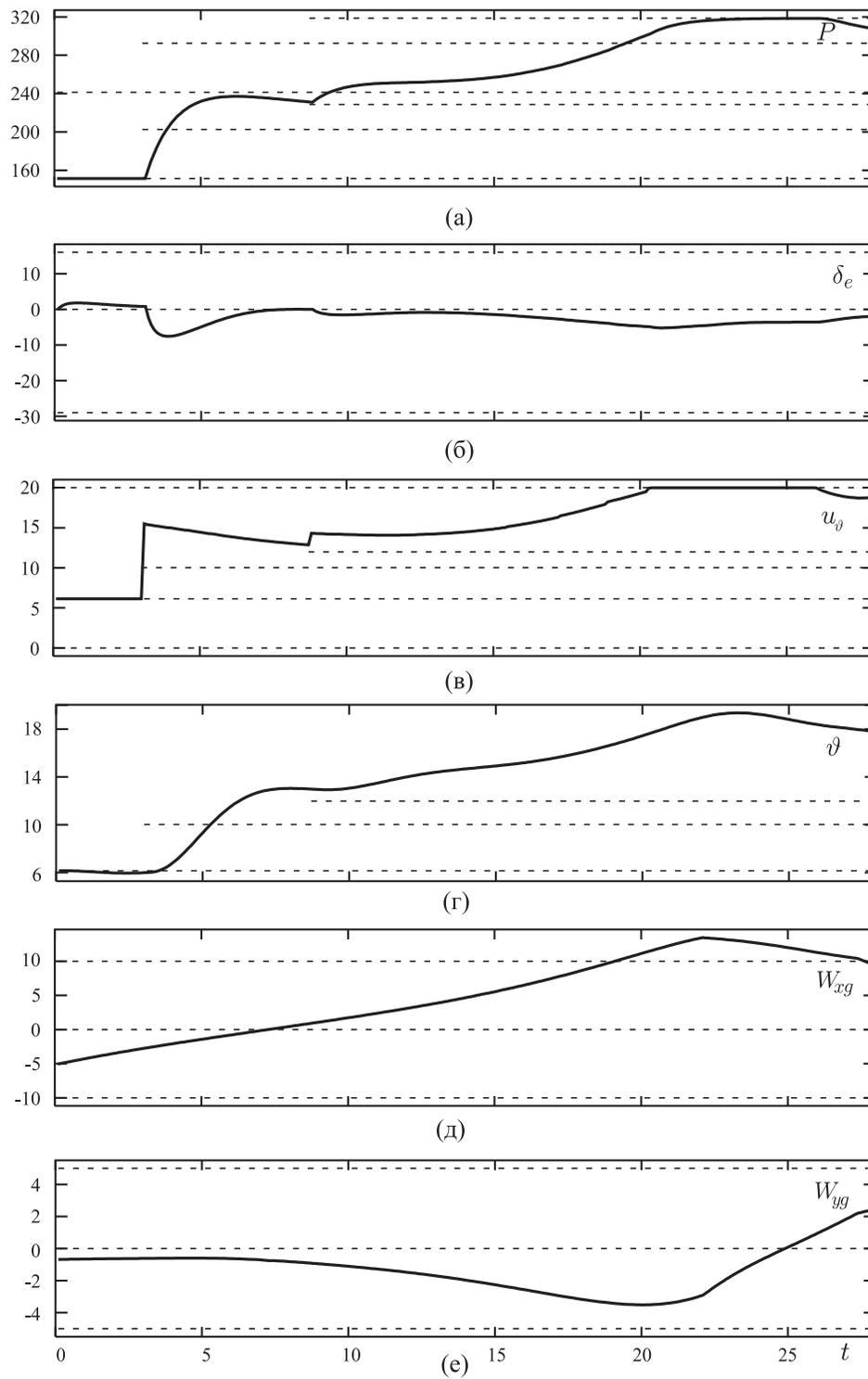


Рис. 9. Микровзрыв 2. Графики: (а) силы тяги  $P$ ,  $\times 1000$  Н; (б) изменения руля высоты  $\delta_e$ , град; (в) целевого угла тангажа  $u_\vartheta$ , град; (г) угла тангажа  $\vartheta$ , град; (д), (е) продольной  $W_{xg}$  и вертикальной  $W_{yg}$  компонент скорости ветра, м/с.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer, 1988. 518 p.
3. **Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С.** Построение управления в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. 2006. Т. 70, вып. 5. С. 753–770.
4. **Ганебный С.А., Кумков С.С., Пацко В.С.** Метод экстремального прицеливания в задачах с неизвестным уровнем динамической помехи // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 4. С. 573–586.
5. **Кейн В.М.** Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. М.: Наука, 1985. 248 с.
6. **Miele A., Wang T., Melvin W.W.** Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // J. Optim. Theory Appl. 1986. Vol. 49, no. 1. P. 1–45.
7. **Miele A., Wang T., Tzeng C.Y., Melvin W.W.** Optimal abort landing trajectories in the presence of windshear // J. Optim. Theory Appl. 1987. Vol. 55, no. 2. P. 165–202.
8. **Chen Y.H., Pandey S.** Robust control strategy for take-off performance in windshear // Optim. Control Appl. Methods. 1989. Vol. 10, no. 1. P. 65–79.
9. **Leitmann G., Pandey S.** Aircraft control for flight in an uncertain environment: Take-off in windshear // J. Optim. Theory Appl. 1991. Vol. 70, no. 1. P. 25–55.
10. **Bulirsch R., Montrone F., Pesch H.J.** Abort landing in the presence of windshear as a minimax control problem // J. Optim. Theory Appl. 1991. Vol. 70, no. 1. P. 1–23.
11. **Турова В.Л.** Применение численных методов теории дифференциальных игр к задачам о взлете и прекращении посадки самолета // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 2. С. 188–201.
12. **Suebe N., Moitie R., Leitmann G.** Aircraft taking-off in windshear: a viability approach // Set-Valued Analysis. 2000. Vol. 8. P. 163–180.
13. Control of an aircraft landing in windshear / V.S. Patsko, N.D. Botkin, V.M. Kein, V.L. Turova, M.A. Zarkh // J. Optim. Theory Appl. 1994. Vol. 83, no. 2. P. 237–267.
14. **Боткин Н.Д., Пацко В.С.** Анализ применения методов теории дифференциальных игр для имитации ветровых возмущений: отчет. Рег. в ВИНТИ, № 01880003467, инв. № 02880044271. Свердловск, 1987. 46 с.
15. Системы цифрового управления самолетом / под ред. А.Д. Александрова, С.М. Федорова. М.: Машиностроение, 1983. 223 с.
16. Дифференциальные игры и задачи управления самолетом при ветровых помехах / Н.Д. Боткин, М.А. Зарх, В.Н. Кейн, В.С. Пацко, В.Л. Турова // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 68–76.
17. **Остославский И.В., Стражева И.В.** Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 499 с.
18. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
19. **Dole С.Е.** Flight Theory and Aerodynamics. New York: John Wiley and Sons, 1981. 320 p.
20. **Ivan M.** A ring-vortex downburst model for real-time flight simulation of severe windshear // AIAA Flight Simulation Technologies Conf. St. Louis, Miss. 1985. P. 57–61.
21. **Боткин Н.Д., Пацко В.С., Турова В.Л.** Разработка алгоритмов построения экстремальных ветровых возмущений: отчет. Рег. в ВИНТИ, № 01880003467, инв. № 02880054701. Свердловск, 1987. 58 с.

Поступила 01.06.2009

Ганебный Сергей Александрович  
канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ganebny@imm.uran.ru

Пацко Валерий Семенович  
канд. физ.-мат. наук, зав. сектором  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: patsko@imm.uran.ru

Красов Анатолий Иванович  
канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник  
фирма “НИТА”, С.-Петербург  
e-mail: sma@nita.ru

Смольникова Мария Анатольевна  
ассистент  
Ун-т гражданской авиации, С.-Петербург  
e-mail: mariasmol@inbox.ru

УДК 517.977.1

## ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ МНОГОМЕРНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ПЕРЕКРЕСТНЫМИ СВЯЗЯМИ<sup>1</sup>

М. И. Гусев

Статья посвящена задаче построения внешних оценок множества достижимости многомерной управляемой системы при помощи векторных оценочных функций. Рассматривается система, допускающая разбиение на несколько независимых подсистем простой структуры (например, линейных), связанных между собой нелинейными перекрестными связями. Для каждой из подсистем считается известной внешняя оценка области достижимости, представляемая в виде множества уровня некоторой функции, удовлетворяющей дифференциальному неравенству. На основе оценок для подсистем строится оценка для области достижимости объединенной системы. Метод получения оценок основан на построении систем сравнения для аналогов векторных функций Ляпунова (функций цены).

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, принцип сравнения, векторная функция Ляпунова.

M. I. Gusev. Estimates of reachable sets of multidimensional control systems with nonlinear interconnections.

The paper is devoted to the problem of constructing external estimates for the reachable set of a multidimensional control system by means of vector estimators. A system is considered that permits a decomposition into several independent subsystems with simple structure (for example, linear subsystems), which are connected to each other by means of nonlinear interconnections. For each of the subsystems, an external estimate of the reachable set is assumed to be known; this estimate is representable in the form of a level set of some function satisfying a differential inequality. An estimate for the reachable set of the united system is constructed with the use of estimates for subsystems. The method of deriving the estimates is based on constructing comparison systems for analogs of vector Lyapunov functions (cost functions).

Keywords: control system, reachable set, comparison principle, vector Lyapunov function.

### 1. Введение

Решение многих задач управления и оценивания в условиях неопределенности и дифференциальных игр связано с построением множеств достижимости и их аналогов [1–3]. Для приближенного построения множеств достижимости широко используются дискретные аппроксимации [4, 5], методы эллипсоидальных [6–8] и полиэдральных [9] аппроксимаций. Множество достижимости может быть также представлено в виде множества уровня обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана [10–12]. Трудоемкость построения точных решений уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана заставляет прибегать вместо них к соответствующим дифференциальным неравенствам и использованию теорем сравнения [13], что позволяет получить приближенные оценки множеств достижимости. Для линейных систем с эллипсоидальными ограничениями использование теорем сравнения для квадратичных функций приводит к эллипсоидальным аппроксимациям множеств достижимости [13]. В данной работе рассматривается многомерная управляемая система, допускающая разбиение на несколько подсистем. Составляющие подсистемы имеют достаточно простую структуру, позволяющую построить “оценочные функции”  $V^i$  такие, что множества уровня  $\{x^i : V^i(t, x^i) \leq 0\}$  содержат области достижимости системы в момент времени  $t$ . Если бы подсистемы не были связаны между собой, для оценки области достижимости объединенной системы можно было бы использовать векторное неравенство  $V(t, x) \leq 0$ , где  $V(t, x) = (V^1(t, x^1), \dots, V^k(t, x^k))$ .

<sup>1</sup>Работа поддержана грантом РФФИ (проект 09-01-00589) и программой Президиума РАН “Математическая теория управления”.

Однако наличие нелинейных перекрестных связей между подсистемами не позволяет напрямую использовать подобные оценки. В данной статье предлагается схема получения внешних оценок областей достижимости, основанная на методе сравнения для аналогов векторных функций Ляпунова [14].

## 2. Основные определения. Предварительные сведения

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (2.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния,  $u \in \mathbb{R}^r$  — управляющий параметр. Считаем, что ограничение на управление и начальный вектор  $x^0$  имеют вид

$$u(t) \in \mathbf{P}, \quad x^0 \in X^0, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{P}$  — компакт в  $\mathbb{R}^r$ ,  $X^0$  — компакт в  $\mathbb{R}^n$ . Функция  $f(t, x, u)$  предполагается непрерывной по совокупности переменных и имеющей непрерывные частные производные по  $x$ . Также считаем выполненными условия, обеспечивающие продолжаемость решений на промежутке  $[t_0, t_1]$ . Множество (область) достижимости в момент времени  $\theta$  будем обозначать через  $G(\theta)$ . Таким образом,  $G(\theta)$  — это множество всех точек в  $\mathbb{R}^n$ , в которые можно перевести систему (2.1) в момент времени  $\theta$  при помощи измеримых управлений, удовлетворяющих ограничению (2.2), из начальных точек  $x^0 \in X^0$ .

Назовем непрерывно дифференцируемую функцию  $V(t, x)$  оценочной функцией для множества достижимости  $G(\theta)$ , если существует суммируемая на  $[t_0, \theta]$  функция  $\mu(t)$  такая, что

$$V_t(t, x) + V_x' f(t, x, u) \leq \mu(t) \quad (2.3)$$

для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbf{P}$ ,  $t \in [t_0, \theta]$ . Здесь  $V_t$  и  $V_x$  обозначают производные по  $t$  и  $x$  функции  $V$ , штрих обозначает операцию транспонирования матрицы. Последнее неравенство можно записать в эквивалентном виде

$$V_t(t, x) + \max_{u \in \mathbf{P}} V_x' f(t, x, u) \leq \mu(t). \quad (2.4)$$

По функциям  $V(t, x)$  и  $\mu(t)$  можно получить следующую внешнюю оценку множества достижимости [13].

**Теорема 1.** Пусть функции  $V(t, x)$  и  $\mu(t)$  удовлетворяют неравенству (2.4). Тогда справедливо включение

$$G(\theta) \subset \left\{ x : V(\theta, x) \leq \int_{t_0}^{\theta} \mu(t) dt + \max_{x^0 \in X^0} V(t_0, x^0) \right\}.$$

Заметим, что если положить

$$W(t, x) = V(t, x) + \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau,$$

то  $W(t, x)$  будет удовлетворять соотношениям

$$W_t(t, x) + \max_{u \in \mathbf{P}} W_x' f(t, x, u) \leq 0, \quad \max_{x^0 \in X^0} V(t_0, x^0) = \max_{x^0 \in X^0} W(t_0, x^0).$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно в (2.3), (2.4) полагать  $\mu(t)$  равной нулю.

Вместо (2.4) можно рассматривать неравенство более общего вида, где правая часть зависит от  $t$  и  $V$

$$V_t(t, x) + V'_x f(t, x, u) \leq g(t, V(t, x)). \quad (2.5)$$

Здесь  $g(t, x)$  — суммируемая по  $t$  и непрерывно дифференцируемая по  $x$  функция. Наряду с неравенством (2.5) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dU}{dt} = g(t, U), \quad U(t_0) = U^0, \quad (2.6)$$

которое назовем системой сравнения для (2.5).

**Теорема 2.** Пусть функции  $V(t, x)$ ,  $U(t)$  удовлетворяют неравенству (2.5), уравнению (2.6) и  $\max_{x^0 \in X^0} V(t_0, x^0) \leq U^0$ . Тогда справедливо включение

$$G(\theta) \subset \{x : V(\theta, x) \leq U(\theta)\}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и теоремы 1 с привлечением на последнем этапе теоремы Важевского [15].

Рассмотрим далее управляемую систему, динамика которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^{(i)} = f^i(t, x^{(i)}, u) + \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x) x^{(j)}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.7)$$

где  $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u \in \mathbf{P}$ ,  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$ ,  $x^{(i)}(t_0) = x^{i0} \in X^{i0}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Систему (2.7) можно считать состоящей из  $k$  подсистем. Уравнение  $i$ -й подсистемы имеет вид

$$\dot{x}^{(i)} = f^i(t, x^{(i)}, u),$$

где вектор  $f^i$  имеет соответствующую размерность. Подсистемы связаны друг с другом через управления  $u$  и через слагаемые  $\sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x) x^{(j)}$ , задающие влияние на  $i$ -ю подсистему остальных подсистем.

Здесь матричные функции  $H_{ij}(t, x)$  предполагаются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными при всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [t_0, \theta]$ . Обозначим  $h_{ij} = \sup_{t, x} \|H_{ij}(t, x)\|$ , где  $\|\cdot\|$  — норма матрицы, подчиненная евклидовой норме векторов, обозначаемой тем же символом. Считаем, что все  $h_{ij} < \infty$ . Если  $\mathbf{P} = P_1 \times \dots \times P_k$  и  $B$  — блочно-диагональная матрица с блоками соответствующих размеров, то подсистемы связаны между собой только через слагаемые  $\sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x) x^{(j)}$  в правой части системы.

Предположим, что для каждой системы

$$\dot{x}^{(i)} = f^i(t, x^{(i)}, u), \quad x^{(i)}(t_0) = x^{i0}, \quad u(t) \in \mathbf{P}$$

можно построить оценочную функцию  $V^i(t, x^{(i)})$ , производная которой в силу системы удовлетворяет неравенству

$$\frac{dV^i}{dt} \leq V^i_t(t, x^{(i)}) + \max_{u \in P} V^i_{x^{(i)}} f^i(t, x^{(i)}, u) \leq \mu^i(t).$$

Если перекрестные связи между подсистемами отсутствуют ( $h_{ij} = 0$ ,  $i \neq j$ ), то, очевидно, справедлива следующая оценка для множества достижимости  $G(\theta)$  системы (2.7):

$$G(\theta) \subset \bigcap_{i=1}^k \left\{ x : V^i(\theta, x^{(i)}) \leq \int_{t_0}^{\theta} \mu^i(\tau) d\tau + m_i \right\},$$

или, что эквивалентно,

$$G(\theta) \subset \left\{ x : V(\theta, x) \leq \int_{t_0}^{\theta} \mu(\tau) d\tau + m \right\},$$

где  $V(t, x) = (V^1(t, x^{(1)}), \dots, V^k(t, x^{(k)}))$ ,  $m_i = \max_{x^{i0} \in X^{i0}} V^i(t_0, x^{i0})$ ,  $m = (m_1, \dots, m_k)$ ,  $\mu(t) = (\mu^1(t), \dots, \mu^k(t))$ . Если  $f^i(t, x^{(i)}, u) = A^i x^{(i)} + B^i u$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и множество  $\mathbf{P}$  — эллипсоид (прямая сумма эллипсоидов), то в качестве функций  $V^i$  можно рассматривать квадратичные по  $x^{(i)}$  функции. В этом случае соответствующие включения превращаются в эллипсоидальные оценки (аппроксимации) множеств достижимости [13].

Нашей целью является получение оценок для  $G(\theta)$  для системы (2.7) по имеющимся оценочным функциям для подсистем. Далее будем предполагать, что выполняется следующее

**Предположение 1.** *Существуют непрерывные функции  $\alpha_i(t) > 0$ ,  $c_{1i}(t) > 0$ ,  $c_{2i}(t) > 0$ ,  $c_{3i}(t) > 0$ ,  $\mu^i(t)$  на  $[t_0, \theta]$  такие, что*

$$\frac{dV^i}{dt} \leq V_t^i(t, x^{(i)}) + \max_{u \in \mathbf{P}} V_{x^{(i)}}^{i'} f^i(t, x^{(i)}, u) \leq -\alpha_i(t) V^i(t, x^{(i)}) + \mu^i(t),$$

и выполнены неравенства

$$c_{1i}(t) \|x^{(i)}\|^2 \leq V^i(t, x^{(i)}) \leq c_{2i}(t) \|x^{(i)}\|^2, \quad \|V_{x^{(i)}}^i(t, x^{(i)})\|^2 \leq c_{3i}(t) V^i(t, x^{(i)}). \quad (2.8)$$

Здесь  $dV^i/dt$  — производная в силу  $i$ -й системы,  $\|\cdot\|$  — евклидова норма. Последние неравенства выполняются, в частности, если функции  $V^i(t, x^{(i)})$  по  $x^{(i)}$  — положительно определенные квадратичные формы.

Определим  $k \times k$  матрицу  $A(t)$ :

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha_1(t)}{2} & \beta_{12}(t) & \beta_{13}(t) & \cdots & \beta_{1k}(t) \\ \beta_{21}(t) & -\frac{\alpha_2(t)}{2} & \beta_{23}(t) & \cdots & \beta_{2k}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1}(t) & \beta_{k2}(t) & \beta_{k3}(t) & \cdots & -\frac{\alpha_k(t)}{2} \end{pmatrix},$$

где функции  $\beta_{ij}(t) > 0$  определены равенствами

$$\beta_{ij}(t) = \frac{c_{3i}(t) \sum_{j \neq i} h_{ij}^2}{2\alpha_i(t) c_{1j}(t)}.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (систему сравнения)

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U + \mu(t), \quad U(t_0) = U^0. \quad (2.9)$$

**Теорема 3.** *Пусть функции  $V^i(t, x^{(i)})$  удовлетворяют предположению 1,  $U(t)$  — решение уравнения (2.6) и  $\max_{x^{i0} \in X^{i0}} V^i(t_0, x^{i0}) \leq U^i(t_0)$ . Тогда справедливо включение*

$$G(\theta) \subset \{x : V(\theta, x) \leq U(\theta)\}. \quad (2.10)$$

**Доказательство.** Пусть  $x \in G(\theta)$ . Следовательно, существуют управление  $u(t)$ , удовлетворяющее ограничениям (2.2), и отвечающая этому управлению траектория  $x(t)$  системы (2.7) такая, что  $x(\theta) = x$ . Найдем производную от  $V^i$  вдоль траектории

$$\frac{V^i(t, x(t))}{dt} = V_t^i(t, x^{(i)}(t)) + V_{x^{(i)}}^{i'}(t, x^{(i)}(t)) \left( f^i(t, x^{(i)}, u(t)) + \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x) x^{(j)} \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq -\alpha_i(t)V^i(t, x^{(i)}(t)) + \mu^i(t) + V_{x^{(i)}}^{i'}(t, x^{(i)}(t)) \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x)x^{(j)} \\ &\leq -\alpha_i(t)V^i(t, x^{(i)}(t)) + \mu^i(t) + (c_{3i}(t)V^i(t, x^{(i)}(t)))^{1/2} \left\| \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x)x^{(j)} \right\|. \end{aligned}$$

Далее следуем стандартной схеме получения системы сравнения для векторных функций Ляпунова (см., например, [14]). Используя неравенство

$$-az^2 + bz \leq -\frac{az^2}{2} + \frac{b^2}{2a}, \quad a, b > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{V^i(t, x(t))}{dt} &\leq -\frac{\alpha_i(t)}{2}V^i(t, x^{(i)}(t)) + \mu^i(t) + \frac{c_{3i}(t)}{2\alpha_i(t)} \left\| \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x)x^{(j)} \right\|^2 \\ &\leq -\frac{\alpha_i(t)}{2}V^i(t, x^{(i)}(t)) + \mu^i(t) + \frac{c_{3i}(t)}{2\alpha_i(t)} \sum_{j \neq i} h_{ij}^2 \sum_{j \neq i} \|x^{(j)}\|^2 \\ &\leq -\frac{\alpha_i(t)}{2}V^i(t, x^{(i)}(t)) + \mu^i(t) + \sum_{j \neq i} \beta_{ij}V^j, \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Таким образом, вектор-функция  $V(t, x(t))$  удовлетворяет векторному дифференциальному неравенству

$$\frac{dV}{dt} \leq A(t)V + \mu(t). \quad (2.11)$$

Вектор-функция  $F(t, V) = A(t)V + \mu(t)$  является квазимоноотонной неубывающей по  $V$ . Это означает, что для любых  $V^1, V^2$  таких, что  $V_j^1 \leq V_j^2, j \neq i; F_i(V^1) \leq F_i(V^2), i = 1, \dots, k$ . В этих условиях к уравнению и неравенству применима теорема Важевского, из которой следует, что  $V(\theta, x) = V(\theta, x(\theta)) \leq U(\theta)$ . Теорема доказана.

Приведенный метод сравнения с векторной оценочной функцией опирается на специальный вид дифференциальных уравнений сравнения. Вывод неравенства (2.11) основан на наличии слагаемого  $-\alpha_i(t)V^i$  в формуле для производной  $dV^i/dt$ . Используя другой способ оценки производных  $V^i$  вдоль траектории управляемой системы, приходим к нелинейной системе сравнения. Будем далее предполагать, что функции  $V^i$  удовлетворяют дифференциальным неравенствам

$$V_t^i(t, x) + V_x^{i'} f(t, x, u) \leq g^i(t, V^i(t, x)).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{V^i(t, x(t))}{dt} &\leq g^i(t, V^i(t, x)) + V_{x^{(i)}}^{i'}(t, x^{(i)}(t)) \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x)x^{(j)} \\ &\leq g^i(t, V^i(t, x)) + \left\| V_{x^{(i)}}^{i'}(t, x^{(i)}(t)) \right\| \left\| \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x)x^{(j)} \right\| \\ &\leq g^i(t, V^i(t, x)) + \sqrt{c_{3i}(t)V^i(t, x)} \left\| \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x)x^{(j)} \right\| \\ &\leq g^i(t, V^i(t, x)) + \sqrt{c_{3i}(t)V^i(t, x)} \sum_{j \neq i} h_{ij} \sqrt{\frac{1}{c_{1j}}V^i(t, x)}. \end{aligned}$$

В векторной форме последнее неравенство запишется в виде

$$\frac{dV}{dt} \leq G(t, V),$$

где

$$G(t, V) = (G^1(t, V), \dots, G^k(t, V)), \quad G^i(t, V) = g^i(t, V^i) + \sum_{j \neq i} \beta_{ij} \sqrt{V^i V^j}, \quad \beta_{ij} = h_{ij} \sqrt{\frac{c_{3i}}{c_{1j}}}.$$

Соответствующая система сравнения примет вид

$$\frac{dU}{dt} = G(t, U),$$

при выполнении неравенств

$$\max_{x^{i0} \in X^{i0}} V^i(t_0, x^{i0}) \leq U^i(t_0), \quad i = 1, \dots, k$$

будет справедливо включение (2.10).

### 3. Эллипсоидальные аппроксимации

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u. \quad (3.1)$$

Пусть ограничения на  $u(t)$  заданы при помощи невырожденного эллипсоида  $U$ , а начальный вектор принадлежит эллипсоиду  $X^0$

$$u(t) \in U = \mathcal{E}(p, P), \quad x^0 \in X^0 = \mathcal{E}(x^*, Q_0),$$

где  $P = P'$ ,  $Q_0 = Q_0'$  — положительно определенные матрицы. Эллипсоид  $\mathcal{E}(r, R)$  определяется равенством

$$\mathcal{E}(r, R) = \{v : (v - r, R^{-1}(v - r)) \leq 1\}.$$

Определим квадратичную по  $x$  функцию  $V(t, x)$  следующим образом:

$$V(t, x) = (x - x^*(t))' Q^{-1}(t) (x - x^*(t)),$$

где матричная функция  $Q(t)$  и вектор-функция  $x^*(t)$  — решения дифференциальных уравнений (здесь и далее  $A = A(t)$ ,  $B = B(t)$ )

$$\dot{Q} = AQ + QA' + \pi(t)Q' + \pi^{-1}(t)BPB', \quad Q(t_0) = Q_0,$$

$$\dot{x}^* = Ax^* + Bp, \quad x^*(t_0) = x^*,$$

$\pi(t)$  — любая положительная непрерывная функция. Как известно [6], для области достижимости системы (3.1) имеет место включение

$$G(\theta) \subset \{x : V(\theta, x) \leq 1\}. \quad (3.2)$$

Множества уровня функции  $V(t, x)$  — эллипсоиды, таким образом (3.2) дает внешнюю эллипсоидальную оценку множества достижимости.

Найдем полную производную  $V(t, x)$  в силу системы

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= V_t + V_x'(Ax + Bu) = -\dot{x}^*(t)' Q^{-1}(t) (x - x^*(t)) + (x - x^*(t))' \frac{Q^{-1}(t)}{dt} (x - x^*(t)) \\ &\quad - (x - x^*(t))' Q^{-1}(t) \dot{x}^*(t) + 2[Q^{-1}(t)(x - x^*(t))]'(Ax + Bu) \\ &= 2(x - x^*(t))' A' Q^{-1}(t) (x - x^*(t)) + 2(u - p)' B' Q^{-1}(t) (x - x^*(t)) \end{aligned}$$

$$+ (x - x^*(t))' \left[ -Q^{-1}(t)A - A'Q^{-1}(t) - \pi(t)Q^{-1}(t) - \pi^{-1}(t)Q^{-1}(t)BPB'Q^{-1}(t) \right] (x - x^*(t)).$$

При выводе последнего равенства используется соотношение

$$\dot{Q}^{-1}(t) = -Q^{-1}(t)A - A'Q^{-1}(t) - \pi(t)Q^{-1}(t) - \pi^{-1}(t)Q^{-1}(t)BPB'Q^{-1}(t).$$

После преобразований приходим к равенству

$$\frac{dV}{dt} = 2(u - p)'B'Q^{-1}(t)(x - x^*(t)) - \pi(t)V(t, x) - \pi^{-1}(t)V_1(t, x),$$

где обозначено

$$V_1(t, x) = (x - x^*(t))'Q^{-1}(t)BPB'Q^{-1}(t)(x - x^*(t)).$$

Учитывая, что

$$\max_{u \in \mathcal{E}(p, P)} (u - p)'B'Q^{-1}(t)(x - x^*(t)) = \sqrt{(x - x^*(t))'Q^{-1}(t)BPB'Q^{-1}(t)(x - x^*(t))} = \sqrt{V_1(t, x)},$$

приходим к неравенству

$$\frac{dV}{dt} \leq -\pi(t)V(t, x) - \pi^{-1}(t)V_1(t, x) + 2\sqrt{V_1(t, x)}. \quad (3.3)$$

Так как

$$\max_{v \geq 0} \{-\pi^{-1}(t)v + 2\sqrt{v}\} = \pi(t),$$

из (3.3) получаем

$$\frac{dV}{dt} \leq -\pi(t)V(t, x) + \pi(t).$$

Система сравнения для (3.1) приобретает вид

$$\frac{dU}{dt} = -\pi(t)U + \pi(t), \quad U(t_0) = U^0. \quad (3.4)$$

Следовательно, справедлива

**Теорема 4.** Пусть  $U(t)$  — решение уравнения (3.4) с начальным условием, удовлетворяющим неравенству  $\max_{x^0 \in X^0} V(t_0, x^0) \leq U^0$ . Тогда справедливо включение

$$G(\theta) \subset \{x : V(\theta, x) \leq U(\theta)\}.$$

Рассмотрим далее многомерную управляемую систему вида

$$\dot{x}^{(i)} = A^i(t)x^{(i)} + B^i(t)u^i + \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x)x^{(j)}, \quad i = 1, \dots, k, \quad (3.5)$$

где  $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $u \in \mathcal{E}(0, P^i)$ ,  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(k)})$ ,  $x^{(i)}(t_0) = x^{i0} \in \mathcal{E}(0, Q_{i0})$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Система (3.5) состоит из  $k$  линейных подсистем, связанных друг с другом посредством нелинейных слагаемых в правой части (3.5). Ограничения на начальный вектор и управление заданы прямыми суммами эллипсоидов с центрами в нуле. В этом случае для линейных подсистем мы можем построить квадратичные оценочные функции

$$V^i(t, x^{(i)}) = x^{(i)'}Q^{i-1}(t)x^{(i)}, \quad (3.6)$$

где  $Q^i(t)$  — решение уравнения

$$\dot{Q}^i = A^i(t)Q^i + Q^iA^{i'}(t) + \pi^i(t)Q^{i'} + \frac{1}{\pi^i(t)}B^i(t)P^i(B^i(t))', \quad Q^i(t_0) = Q_{i0},$$

$\pi^i(t)$  — произвольные непрерывные положительные функции. Из доказательства теоремы (4) следует, что производная от  $V^i$  в силу линейной системы удовлетворяет неравенству

$$\frac{dV^i}{dt} \leq G^i(t, V^i(t, x^{(i)})),$$

где  $G^i(t, V^i) = -\pi^i(t)V^i + \pi^i(t)$ . Потребуем, чтобы выполнялись неравенства  $\|H_{ij}(t, x)\| \leq h_{ij}$ . Пусть матрица  $A(t)$  определена равенством

$$A(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^1(t)}{2} & \beta_{12}(t) & \beta_{13}(t) & \cdots & \beta_{1k}(t) \\ \beta_{21}(t) & -\frac{\pi^2(t)}{2} & \beta_{23}(t) & \cdots & \beta_{2k}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1}(t) & \beta_{k2}(t) & \beta_{k3}(t) & \cdots & -\frac{\pi^k(t)}{2} \end{pmatrix},$$

где

$$\beta_{ij}(t) = \frac{c_{3i}(t) \sum_{j \neq i} h_{ij}^2}{2\pi^i(t)c_{1j}(t)},$$

$c_{3i}(t), c_{1i}(t)$  — константы из оценок для  $V^i(t, x^{(i)})$  и ее производных по  $x^{(i)}$ . Возьмем систему сравнения в виде

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U + \pi(t), \quad U(t_0) = U^0. \tag{3.7}$$

Из теоремы 3 следует

**Теорема 5.** Пусть функции  $V^i(t, x^{(i)})$  определены равенствами (3.6),  $U(t)$  — решение системы сравнения (3.7) с начальным вектором, удовлетворяющим неравенству  $\max_{x^0 \in X^0} V(t_0, x^0) \leq U^0$ , где  $X^0 = \mathcal{E}(0, Q^{10}) \times \dots \times \mathcal{E}(0, Q^{k0})$ . Тогда для множества достижимости системы (3.5) справедливо включение

$$G(\theta) \subset \{x : V(\theta, x) \leq U(\theta)\}.$$

#### 4. Оценки множеств достижимости при помощи линейных оценочных функций

Пусть задана линейная управляемая система на промежутке  $[t_0, t_1]$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + q(t), \quad x(t_0) \in X^0, \quad u(t) \in P. \tag{4.1}$$

Рассмотрим в качестве оценочной линейную функцию  $V(t, x) = a'(t)x + \alpha(t)$ , где вектор-функция  $a(t)$  и функция  $\alpha(t)$  непрерывно дифференцируемы,  $\|a(t)\| \neq 0 \forall t \in [t_0, t_1]$ . Производная по  $t$  в силу системы (4.1) имеет оценку

$$\frac{dV}{dt} = \dot{a}'(t)x + a'(t)(A(t)x + B(t)u + q(t)) + \dot{\alpha}(t) \leq (\dot{a}'(t) + a'(t)A(t))x + \mu(t),$$

где

$$\mu(t) = \max_{u \in P} a'(t)B(t)u + a'(t)q(t) + \dot{\alpha}(t).$$

Выберем в качестве  $a(t)$  нетривиальное решение сопряженной системы

$$\dot{a} = -A'(t)a,$$

тогда

$$\frac{dV}{dt} \leq \mu(t),$$

и для множества достижимости  $G(\theta)$  выполняется включение [13]

$$G(\theta) \subset \left\{ x : V(\theta, x) \leq \max_{x^0 \in X^0} V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^{\theta} \mu(t) dt \right\}.$$

Пусть  $V^i(t, x) = (a^i(t), x) + \alpha^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , — система линейных оценочных функций для системы (4.1). Систему будем называть полной, если существуют непрерывные функции  $\beta_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $c_1(t) > 0$  такие, что для всех  $t \in [t_0, \theta]$  выполняется неравенство

$$c_1(t) \|x\|_\infty \leq \max_i \left\{ V^1(t, x) - \beta_1(t), \dots, V^k(t, x) - \beta_k(t) \right\} \quad (4.2)$$

для  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Лемма.** Если система  $V^i(t, x)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , полная, то для любых чисел  $\beta_i$  множество  $\{x : V^i(t, x) \leq \beta_i, i = 1, \dots, k\}$  ограничено.

**Доказательство.** Допустим, что при некотором  $t^*$  и числах  $\beta_i^*$  множество

$$M := \{x : V^i(t^*, x) \leq \beta_i^*, i = 1, \dots, k\}$$

непусто и не ограничено. Тогда найдутся  $\bar{x} \in M$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \neq 0$  такие, что  $\bar{x} + \xi y \in M \forall \xi \geq 0$  [16]. Следовательно,  $(a^i(t^*), \bar{x} + \xi y) + \alpha^i(t^*) \leq \beta_i^* \forall \xi \geq 0$ . Отсюда следует, что  $(a^i(t^*), y) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, k$ , и, значит,  $V(t^*, \bar{x} + \xi y) \leq V(t^*, \bar{x})$ . Таким образом,

$$c_1(t^*) \|\bar{x} + \xi y\|_\infty \leq \max_i \left\{ V^1(t^*, \bar{x}) - \beta_1(t), \dots, V^k(t^*, \bar{x}) - \beta_k(t) \right\} \quad \forall \xi \geq 0,$$

что невозможно в силу того, что  $y \neq 0$ .

Построить полную систему линейных оценочных функций можно, например, следующим образом. Положим  $k = 2n$ . Выберем линейно независимую систему векторов  $a^{i0}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и добавим к этой системе векторы  $a^{i0} = -a^{(i-n)0}$ ,  $i = n+1, \dots, 2n$ . Рассмотрим решения сопряженной системы  $a^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ , с начальными условиями  $a^i(t_0) = a^{i0}$ . Нетрудно проверить, что для любых  $t \in [t_0, t_1]$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , найдется номер  $i$  такой, что  $(a^i(t), x) > 0$ . Следовательно,

$$\gamma(t, x) := \max_i (a^i(t), x) > 0 \quad \forall x \neq 0.$$

Функция  $\gamma(t, x)$  — выпуклая, положительно однородная, неотрицательная функция  $x$ , причем  $\gamma(t, x) = 0$  только при  $x = 0$ . Таким образом  $\gamma(t, x)$  — норма  $x$ . Кроме того, функция  $\gamma(t, x)$  непрерывна по совокупности аргументов. Обозначим

$$c_1(t) = \min_{\|x\| \leq 1} \gamma(t, x).$$

Функция  $c_1(t)$  — непрерывная положительная функция и, очевидно,

$$\gamma(t, x) \geq c_1(t) \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Выберем непрерывно дифференцируемые функции  $\alpha_i(t)$  произвольным образом и положим  $\beta_i(t) = -\alpha_i(t)$ . Тогда функции  $V^i(t, x) = (a^i(t), x) - \alpha_i(t)$  удовлетворяют неравенствам (4.2).

Рассмотрим далее систему (3.5) с ограничениями  $x^{0i} \in X^{0i}$ ,  $u^i(t) \in P^i$ , где  $X^{0i}$ ,  $P^i$  — компакты, при тех же условиях на нелинейные слагаемые, что и раньше. Для каждой из систем

$$\dot{x}^{(i)} = A^i(t)x^{(i)} + B^i(t)u^i$$

считаем известной некоторую систему линейных оценочных функций

$$V^{ij}(t, x^{(i)}) = (a^{ij}(t), x^{(i)}) + \alpha^{ij}(t), \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, k_i,$$

где  $a^{ij}(t)$  — решения сопряженной системы. Будем предполагать, что каждая из систем  $V^{ij}$  является полной, следовательно, выполняются неравенства

$$c_{i1}(t)\|x^{(i)}\|_\infty \leq \max_i \left\{ V^{i1}(t, x^{(i)}) - \beta_{i1}(t), \dots, V^{ik_i}(t, x^{(i)}) - \beta_{ik_i}(t) \right\}.$$

Для производной  $dV^{ij}/dt$  в силу линейной системы имеем оценку  $dV^{ij}/dt \leq \mu^{ij}(t)$ , где

$$\mu^{ij}(t) = \max_{u^i \in P^i} a^{ij'}(t)B^i(t)u^i + \dot{\alpha}^{ij}(t).$$

Оценим производную  $V^{ij}$  в силу полной системы (3.5)

$$\begin{aligned} \frac{V^{ij}(t, x^{(i)}(t))}{dt} &\leq \mu^{ij}(t) + V_{x^{(i)}}^{ij'}(t, x^{(i)}(t)) \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x) x^{(j)} \leq \mu^{ij}(t) + \|a^{ij}(t)\| \left\| \sum_{j \neq i} H_{ij}(t, x) x^{(j)} \right\| \\ &\leq \mu^{ij}(t) + \|a^{ij}(t)\| \sum_{j \neq i} h_{ij} \frac{1}{c_{j1}(t)} \max \left\{ V^{j1}(t, x^{(j)}) - \beta_{j1}(t), \dots, V^{jk_j}(t, x^{(j)}) - \beta_{jk_j}(t) \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Определим функции  $g_i : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}$  равенством

$$g_i(t, v) = \frac{1}{c_{i1}(t)} \max\{v_1, \dots, v_{k_i}\}, \quad v = (v_1, \dots, v_{k_i}).$$

Введем обозначения  $U_i = (U^{i1}, \dots, U^{ik_i})$ ,  $U = (U_1, \dots, U_k)'$ , таким образом,  $U$  — вектор-столбец, между координатами которого и функциями  $V^{ij}$  можно установить взаимно-однозначное соответствие. Определим вектор-функцию  $F(t, U)$ , занумеровав координаты вектора-столбца  $F$  так же, как координаты  $U$ , и положив

$$F^{ij}(t, U) = \mu^{ij}(t) + \|a^{ij}(t)\| \sum_{j \neq i} h_{ij} g_j(t, U_j - \beta_j(t)),$$

где  $\beta_j(t) = (\beta_{j1}(t), \dots, \beta_{jk_j}(t))$ . Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (систему сравнения)

$$\frac{dU}{dt} = F(t, U), \quad (4.4)$$

на  $[t_0, t_1]$ . Правая часть системы монотонно не убывает по недиагональным переменным. Это следует из неубывания функций  $g_i(t, v)$  по каждой из переменных. С учетом данного факта из приведенных выше оценок следует

**Теорема 6.** Пусть для функций  $V^{ij}(t, x)$  и решения системы (4.4)  $U(t)$  выполнены неравенства  $\max_{x^{0i} \in X^{0i}} V^{ij}(t_0, x^{0i}) \leq U_0^{ij}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, k_i$ . Тогда справедливо включение

$$G(\theta) \subset \bigcap_{i=1, \dots, k} \bigcap_{j=1, \dots, k_i} \{x : V^{ij}(\theta, x^{(i)}) \leq U^{ij}(\theta)\}.$$

**З а м е ч а н и е.** В неравенствах (2.8), (4.3) фигурирует евклидова норма векторов. В последнем случае в качестве  $h_{ij}$  должна фигурировать оценка для нормы  $H(t, x)$ , подчиненной евклидовой и чебышевской нормам в соответствующих пространствах. Приводимые оценки для областей достижимости могут быть улучшены, если использовать другие виды норм. В случае квадратичных оценочных функций это, например, нормы, порождаемые матрицами  $Q(t)$ . Для линейных оценочных функций естественно рассматривать чебышевские или  $l_1$  нормы и их аналоги.

**П р и м е р.** Рассмотрим управляемую систему на отрезке  $[0, T]$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_1 \sin x_2 + u_2,\end{aligned}$$

$x_1(0) = 0$ ,  $x_2(0) = 0$ . Ограничения на управление заданы неравенствами  $|u_1| \leq 1$ ,  $|u_2| \leq 1$ . Линейные подсистемы имеют здесь вид

$$\dot{x}_i = -x_i + u_i, \quad i = 1, 2.$$

Линейные оценочные функции легко строятся и выглядят следующим образом:

$$V^{i1}(t, x_i) = e^t x_i - \alpha(t), \quad V^{i2}(t, x_i) = -e^t x_i - \alpha(t), \quad i = 1, 2,$$

где  $\alpha(t) = e^t - 1$ . Для производных  $V^{ij}(t, x_i)$  в силу линейных подсистем имеем неравенства

$$\frac{dV^{i1}}{dt} = e^t x_i - e^t \dot{x}_i - \dot{\alpha}(t) = e^t x_i - e^t(-x_i + u_i) - e^t \leq 0,$$

$$\frac{dV^{i2}}{dt} = -e^t x_i - e^t \dot{x}_i - \dot{\alpha}(t) = -e^t x_i - e^t(-x_i + u_i) - e^t \leq 0.$$

Легко проверяется равенство

$$e^t |x_i| = \max \left\{ V^{i1}(t, x_i) + \alpha(t), V^{i2}(t, x_i) + \alpha(t) \right\}, \quad i = 1, 2,$$

откуда следует, что можно положить  $c_{i1}(t) = e^t$ ,  $\beta_{ij}(t) = -\alpha(t)$ . Таким образом, система сравнения приобретает здесь вид

$$\begin{aligned}\dot{U}^{1j} &= 0, \\ \dot{U}^{2j} &= \max \left\{ U^{11} + \alpha(t), U^{12} + \alpha(t) \right\}, \quad j = 1, 2.\end{aligned}$$

Положим  $U^{ij}(0) = 0$ ,  $i, j = 1, 2$ , тогда  $U^{1j}(t) = 0$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $j = 1, 2$ ,

$$U^{2j}(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau = e^t - t, \quad t \in [0, T], \quad j = 1, 2.$$

Из теоремы 6 следует, что для точек  $(x_1, x_2)$ , принадлежащих множеству достижимости  $G(\theta)$ , выполняются следующие оценки:

$$|x_1| \leq 1 - e^{-\theta}, \quad |x_2| \leq 2 - e^{-\theta} - \theta e^{-\theta}.$$

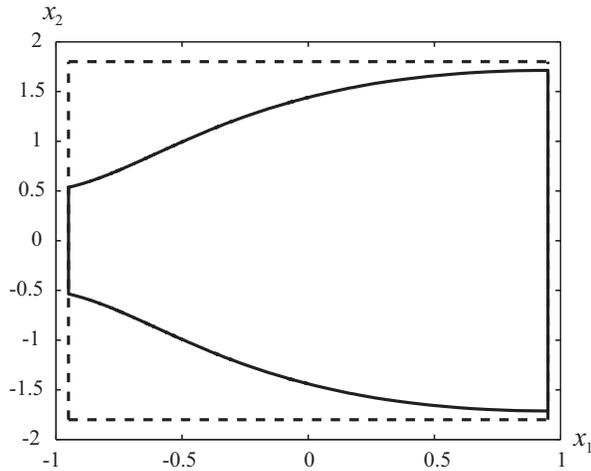


Рис. 1.

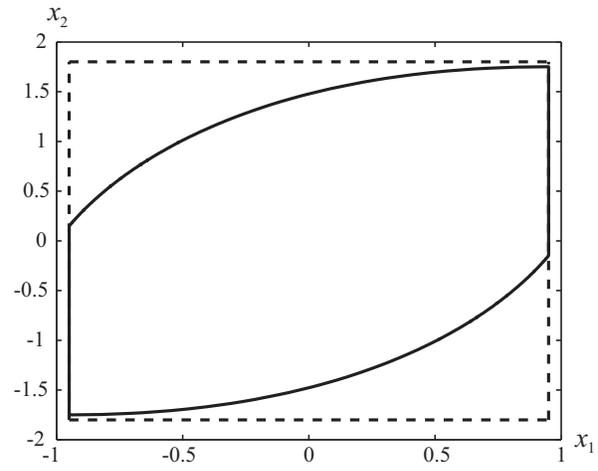


Рис. 2.

На рис. 1 показано множество достижимости в момент  $\theta = 3$  (граница — сплошная линия) и его оценка (прямоугольник, выделенный пунктирной линией). Заметим, что по координате  $x_1$  оценка точна, так как уравнение для  $x_1$  не зависит от координаты  $x_2$ , а множество уровня оценочных функций  $V^{1i}$  совпадает с множеством достижимости первой подсистемы. Оценка же по координате  $x_2$  является завышенной, что естественно, так как она зависит только от константы  $h_{21} = 1$  и не учитывает специальный вид нелинейного слагаемого. Если в рассматриваемом примере взять во втором уравнении вместо  $\sin x_2$  единицу, то оценка останется прежней; оценка и множество достижимости приведены на рис. 2.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. Krasovski N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
4. Lempio F., Veliov V.M. Discrete approximations to differential inclusions // GAMM Mitt. 1998. Vol. 21, no. 2. P. 101–135.
5. Гусейнов Х.И., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н. Об аппроксимации областей достижимости систем управления // Прикл. математика и механика. 1998. № 2. С. 179–186.
6. Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. SCFA. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
7. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Reachability analysis for uncertain systems—the ellipsoidal technique // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B. 2002. No. 3. P. 347–367.
8. Варайя П., Куржанский А.Б. Эллипсоидальные методы для задач динамики и управления. Ч. 1 // Современная математика и ее приложения. Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005. Т. 23. С. 34–72.
9. Костроусова Е.К. Внешнее и внутреннее оценивание областей достижимости при помощи параллелограммов // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 2. С. 11–20.
10. Sethian J. A. Level set methods and fast marching methods. New York: Cambridge Univ. Press, 1999. 378 p.
11. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamic optimization for reachability problems // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 108, no. 2. P. 227–251.
12. Mitchell I.M., Tomlin C.J. Overapproximating reachable sets by Hamilton–Jacobi projections // J. Sci. Comput. 2003. Vol. 19, no. 1–3. P. 323–346.
13. Куржанский А.Б. Принцип сравнения для уравнений Гамильтона — Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.

14. **Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.** Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 479 с.
15. **Walter W.** Differential and integral inequalities. Berlin: Springer, 1970. 352 p.
16. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.

Гусев Михаил Иванович

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: [gmi@imm.uran.ru](mailto:gmi@imm.uran.ru).

Поступила 24.05.2009

УДК 517.977

## АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

А. Р. Данилин, А. П. Зорин

Рассматривается задача оптимального граничного управления решениями уравнения эллиптического типа с малым коэффициентом при старшей производной и интегральными ограничениями на управление. Получены асимптотические оценки для решений задачи, аппроксимирующей исходную.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin, A. P. Zorin. Asymptotics of a solution to an optimal boundary control problem.

A problem of optimal boundary control of solutions of an elliptic-type equation with a small coefficient at the highest derivative and integral restrictions on the control is considered. Asymptotic estimates for solutions of a problem that approximates the original problem are obtained.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary-value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

### 1. Постановка задачи

В ограниченной выпуклой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$  с гладкой границей  $\Gamma := \partial\Omega$  рассматривается следующая задача граничного оптимального управления [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z - a(x)z = f(x), & x \in \Omega, \quad z \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$J(u) := \int_{\Omega} z^2(x) dx + \nu^{-1} \int_{\Gamma} u^2(x) dl \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}, \quad (1.2)$$

где  $\nu > 0$ ,  $H^1(\Omega)$  — соболевское пространство функций,  $\partial z/\partial n$  — производная по внешней нормали к  $\Gamma$ ,

$$\begin{aligned} a(\cdot), f(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma) \quad \forall x \in \bar{\Omega} \quad a(x) \geq \alpha^2 > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) : |||u||| \leq 1\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь через  $||| \cdot |||$  обозначена норма в пространстве  $L_2(\Gamma)$ . Скалярное произведение в этом пространстве будем обозначать через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . В пространстве  $L_2(\Omega)$  для нормы и скалярного произведения используются обозначения  $\| \cdot \|$  и  $(\cdot, \cdot)$  соответственно.

Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [2–4].

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00260) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2215.2008.1).

## 2. Определяющие соотношения

В этом случае единственное оптимальное управление  $u_\varepsilon(\cdot)$  и соответствующее ему  $z_\varepsilon(\cdot)$  находятся как решение следующей задачи [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.36), (2.49)]:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon - a(x)z_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_\varepsilon - a(x)p_\varepsilon - z_\varepsilon = 0, & z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g(x) + u_\varepsilon(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

$$\forall v(\cdot) \in \mathcal{U} \quad \langle p_\varepsilon + \nu^{-1}u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle \geq 0. \quad (2.1)$$

Рассмотрим подробнее условие оптимальности (2.1).

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{U}_r := \{v(\cdot) \in L_2(\Gamma) : \|u\| \leq r\}$ ,  $u(\cdot) \in \mathcal{U}_r$ . Условие

$$\forall v(\cdot) \in \mathcal{U}_r \quad \langle p + \nu^{-1}u, v - u \rangle \geq 0 \quad (2.2)$$

равносильно следующему

$$\exists \lambda \in (0; \nu] : \left( u(\cdot) = -\lambda p(\cdot) \right) \wedge \left( \lambda \|p\| \leq r \right) \wedge \left( (\nu - \lambda)(r - \lambda \|p\|) = 0 \right). \quad (2.3)$$

**Доказательство.** Пусть  $\|u\| \leq r$ . Тогда условие (2.2) при  $p + \nu^{-1}u \neq 0$  равносильно тому, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{\|v\| \leq r} (\langle p + \nu^{-1}u, v \rangle - \langle p + \nu^{-1}u, u \rangle) = -\langle p + \nu^{-1}u, u \rangle - \|p + \nu^{-1}u\| r \\ &\Leftrightarrow \|p + \nu^{-1}u\| r \leq -\langle p + \nu^{-1}u, u \rangle \leq \|p + \nu^{-1}u\| \cdot \|u\| \leq \|p + \nu^{-1}u\| r \\ &\Leftrightarrow -\langle p + \nu^{-1}u, u \rangle = \|p + \nu^{-1}u\| r \end{aligned} \quad (2.4)$$

и при этом

$$u = -\frac{p + \nu^{-1}u}{\|p + \nu^{-1}u\|} r.$$

Отметим, что равенство (2.4), очевидно, справедливо и при  $p + \nu^{-1}u = 0$ .

Пусть  $\mu := \|p + \nu^{-1}u\| r^{-1}$ , тогда  $p + \nu^{-1}u = -\mu u$  или  $p = -(\mu + \nu^{-1})u$ . Обозначим  $\lambda := (\mu + \nu^{-1})^{-1}$ . Тогда  $\lambda \in (0; \nu]$ ,  $u = -\lambda p$  и  $\|u\| = \lambda \|p\| \leq r$ . При этом, если  $\mu \neq 0$ , то  $\lambda \|p\| = r$ , а в случае  $\mu = 0$  имеем  $\lambda = \nu$ .

Обратно, если выполнено условие (2.3), то

$$\begin{aligned} -\langle p + \nu^{-1}u, u \rangle &= -\langle p - \nu^{-1}\lambda p, -\lambda p \rangle = (1 - \nu^{-1}\lambda)\lambda \|p\|^2, \\ \|p + \nu^{-1}u\| r &= |1 - \nu^{-1}\lambda| \cdot \|p\| r = (1 - \nu^{-1}\lambda)r \|p\|. \end{aligned}$$

Если  $\nu = \lambda$ , то  $1 - \nu^{-1}\lambda = 0$  и равенство (2.4) выполнено тривиально. В противном случае  $\lambda \|p\| = r$  и равенство (2.4) вновь выполнено.  $\square$

Итак, в силу леммы 1 оптимальное управление  $u_\varepsilon(\cdot)$  определяется равенством  $u_\varepsilon(\cdot) = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon(\cdot) \Big|_\Gamma$ , где  $z_\varepsilon(\cdot)$ ,  $p_\varepsilon(\cdot)$  и  $\lambda_\varepsilon$  есть единственное решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon - a(x)z_\varepsilon = f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_\varepsilon - a(x)p_\varepsilon - z_\varepsilon = 0, & z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) = g(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\lambda_\varepsilon \in (0; \nu) : \quad \left( \lambda_\varepsilon \| \| p_\varepsilon \| \| \leq 1 \right) \wedge \left( (\nu - \lambda_\varepsilon)(1 - \lambda_\varepsilon \| \| p_\varepsilon \| \|) = 0 \right). \quad (2.6)$$

Отметим, что в силу свойств эллиптических операторов имеют место соотношения  $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .

Цель работы — изучить поведение  $z_\varepsilon, p_\varepsilon$  и  $\lambda_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Непосредственно из определения решения системы (2.5) в пространстве  $H^1(\Omega)$  следует, что эта система эквивалентна соотношениям

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega) \quad \varepsilon^2(\nabla z_\varepsilon, \nabla v) + (az_\varepsilon, v) + \langle \lambda_\varepsilon p_\varepsilon - g, v \rangle &= (-f, v), \\ \forall w \in H^1(\Omega) \quad \varepsilon^2(\nabla p_\varepsilon, \nabla w) + (ap_\varepsilon, w) + (z_\varepsilon, w) &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим, что если взять в (2.7)  $v = p_\varepsilon$ , а  $w = z_\varepsilon$ , после чего вычесть из первого равенства второе, то получим следующее соотношение:

$$\| z_\varepsilon \|^2 = \lambda_\varepsilon \| \| p_\varepsilon \| \|^2 - \langle g, p_\varepsilon \rangle + (f, p_\varepsilon). \quad (2.8)$$

### 3. Априорные оценки

Получим априорные оценки для  $z_\varepsilon$  и  $p_\varepsilon$ , воспользовавшись, в частности, вариантом одного из неравенств Эрлинга, а именно, формулой (3.3) [5, с. 315] при наборе параметров  $\nu = 0$ ,  $m = 1$ ,  $j = n - 1$ ,  $n$  — размерность пространства:

$$\forall y(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega}) \quad \| \| y \| \|^2 = O(t^{-1/2}) (t \| \| y \| \|^2 + \| \nabla y \|^2), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Взяв  $t = \varepsilon^{-2} \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , получим следующее соотношение:

$$\exists K > 0 \quad \forall y(\cdot) \in C^1(\bar{\Omega}) \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0) \quad \| \| y \| \|^2 \leq K \left( \varepsilon^{-1} \| \| y \| \|^2 + \varepsilon \| \nabla y \|^2 \right). \quad (3.1)$$

В дальнейшем различные положительные константы, зависящие только от области  $\Omega$  и коэффициента  $a(\cdot)$  часто будем обозначать одной и той же буквой  $K$ .

**Лемма 2.** Пусть  $a(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  удовлетворяют условиям (1.3).

Если  $y_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  есть решение задачи

$$\varepsilon^2 \Delta y - a(x)y = f(x), \quad x \in \Omega, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial y}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma,$$

то найдется  $K > 0$  такое, что

$$\max \{ \varepsilon^{1/2} \| \| y_\varepsilon \| \|, \varepsilon \| \| y_\varepsilon \| \|, \varepsilon^{3/2} \| \nabla y_\varepsilon \| \| \} \leq K (\| \| g \| \| + \varepsilon^{1/2} \| \| f \| \|). \quad (3.2)$$

**Доказательство.** Пусть  $y_\varepsilon = y_f + y_g$ , где  $y_f$  удовлетворяет неоднородному уравнению с однородными краевыми условиями, а  $y_g$  — однородному уравнению с неоднородными краевыми условиями. Тогда  $y_f$  и  $y_g$  в силу (2.7) удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \| \nabla y_f \|^2 + (a(x) y_f, y_f) &= (-f, y_f), \\ \varepsilon^2 \| \nabla y_g \|^2 + (a(x) y_g, y_g) &= \langle g, y_g \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из первого равенства в (3.3) получим, что

$$\| \nabla y_f \|^2 \leq \varepsilon^{-2} \| \| f \| \| \cdot \| \| y_f \| \|, \quad \text{а} \quad \| \| y_f \| \|^2 \leq \alpha^{-2} \| \| f \| \| \cdot \| \| y_f \| \|$$

и тем самым

$$\| \| y_f \| \| \leq \alpha^{-2} \| \| f \| \|, \quad \| \nabla y_f \| \| \leq \varepsilon^{-1} \alpha^{-1} \| \| f \| \|. \quad (3.4)$$

Из (3.4) в силу неравенства (3.1) получим, что  $|||y_f|||^2 \leq K(\varepsilon^{-1}\alpha^{-4}\|f\|^2 + \varepsilon^{-1}\alpha^{-2}\|f\|^2)$  или

$$|||y_f||| \leq K_1\varepsilon^{-1/2}\|f\|. \quad (3.5)$$

Из второго равенства в (3.3) получим

$$\|y_g\|^2 \leq \alpha^{-2}|||g||| \cdot |||y_g||| \text{ и } \|\nabla y_g\|^2 \leq \varepsilon^{-2}|||g||| \cdot |||y_g|||. \quad (3.6)$$

Из (3.6) в силу неравенства (3.1) получим, что  $|||y_g|||^2 \leq K\varepsilon^{-1}|||g||| \cdot |||y_g|||(\alpha^{-2} + 1)$  или

$$|||y_g||| \leq K_2\varepsilon^{-1}|||g|||. \quad (3.7)$$

Подставив эту оценку в (3.6), получим

$$\|y_g\| \leq K_3\varepsilon^{-1/2}|||g||| \text{ и } \|\nabla y_g\| \leq K_4\varepsilon^{-3/2}|||g|||. \quad (3.8)$$

Теперь для получения оценок (3.2) осталось применить неравенство треугольника для норм и оценки (3.4), (3.5) и (3.7), (3.8).  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $a(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  удовлетворяют условиям (1.3) и  $\lambda_\varepsilon \in (0; \nu]$ .

Если  $z_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  есть решение задачи (2.5), то найдется  $K > 0$  такое, что

$$\begin{aligned} \max \{ \varepsilon^{1/2}\|z_\varepsilon\|, \varepsilon^{1/2}\|p_\varepsilon\|, \varepsilon|||p_\varepsilon|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_\varepsilon\| \} &\leq K(|||g||| + \varepsilon^{1/2}\|f\|), \\ \max \{ \varepsilon|||z_\varepsilon|||, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_\varepsilon\| \} &\leq K(|||g||| + \lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| + \varepsilon^{1/2}\|f\|). \end{aligned} \quad (3.9)$$

**Доказательство.** В силу леммы 1 функции  $z_\varepsilon$  и  $u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon p_\varepsilon|_\Gamma$  есть решение задачи оптимального управления (1.1) – (1.2) с,  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_R$ , где  $R = \lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon|||$ .

Поскольку  $u_0(x) = 0 \in \mathcal{U}_R$ , то

$$J(u_\varepsilon) = \|z_\varepsilon\|^2 + \nu^{-1}\lambda_\varepsilon^2|||p_\varepsilon|||^2 \leq J(u_0) = \|\tilde{z}\|^2,$$

где  $\tilde{z}$  – решение задачи

$$\varepsilon^2\Delta\tilde{z} - a(x)\tilde{z} = f(x), \quad x \in \Omega, \quad \varepsilon^2\frac{\partial\tilde{z}}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma.$$

Таким образом в силу (3.2)

$$\|z_\varepsilon\| \leq \|\tilde{z}\| \leq K\varepsilon^{-1/2}(\|g\| + \varepsilon^{1/2}\|f\|). \quad (3.10)$$

Поскольку  $p_\varepsilon$  удовлетворяет краевой задаче

$$\varepsilon^2\Delta p_\varepsilon - a(x)p_\varepsilon = z_\varepsilon(x), \quad x \in \Omega, \quad \varepsilon^2\frac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma,$$

то в силу того же неравенства с учетом (3.10) получим, что

$$\begin{aligned} \|p_\varepsilon\| &\leq K\|z_\varepsilon\| \leq K_1\varepsilon^{-1/2}(\|g\| + \varepsilon^{1/2}\|f\|), \\ |||p_\varepsilon||| &\leq K_1\varepsilon^{-1}(\|g\| + \varepsilon^{1/2}\|f\|), \quad \|\nabla p_\varepsilon\| \leq K_1\varepsilon^{-3/2}(\|g\| + \varepsilon^{1/2}\|f\|). \end{aligned}$$

Наконец, поскольку  $z_\varepsilon$  удовлетворяет краевой задаче

$$\varepsilon^2\Delta z_\varepsilon - a(x)z_\varepsilon = f(x), \quad x \in \Omega, \quad \varepsilon^2\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} = g(x) - \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma,$$

то в силу (3.2)

$$\begin{aligned} |||z_\varepsilon||| &\leq K\varepsilon^{-1}(\|g - \lambda_\varepsilon p_\varepsilon\| + \varepsilon^{1/2}\|f\|) \leq K\varepsilon^{-1}(\|g\| + \lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| + \varepsilon^{1/2}\|f\|), \text{ а} \\ |||\nabla z_\varepsilon||| &\leq K\varepsilon^{-3/2}(\|g\| + \lambda_\varepsilon|||p_\varepsilon||| + \varepsilon^{1/2}\|f\|). \end{aligned}$$

$\square$

**Следствие 1.** Пусть  $a(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$ , и  $g(\cdot)$  удовлетворяют условиям (1.3).

Если  $z_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  есть решение задачи (2.5), (2.6), то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливы следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} \|z_\varepsilon\| &= O(\varepsilon^{-1/2}), & \|z_\varepsilon\| &= O(\varepsilon^{-1}), & \|\nabla z_\varepsilon\| &= O(\varepsilon^{-3/2}), \\ \|p_\varepsilon\| &= O(\varepsilon^{-1/2}), & \|p_\varepsilon\| &= O(\varepsilon^{-1}), & \|\nabla p_\varepsilon\| &= O(\varepsilon^{-3/2}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Теорема 1.** Пусть функции  $f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ,  $g_1(\cdot), g_2(\cdot) \in C^\infty(\bar{\Gamma})$ , функция  $a(\cdot)$  удовлетворяет условию (1.3), а  $\lambda > 0$ . Тогда краевая задача

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z - a(x)z = f_1(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p - a(x)p - z = f_2(x), & z, p \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \lambda p(x) = g_1(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p}{\partial n} = g_2(x), \quad x \in \Gamma \end{cases} \quad (3.12)$$

разрешима, ее решение единственно и при некотором  $K$  справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \max \{ \varepsilon^{3/2} \|z\|, \varepsilon^{3/2} \|p\|, \varepsilon^2 \| |p| \|, \varepsilon^{5/2} \|\nabla p\| \} \\ & \leq K(\varepsilon \| |g_1| \| + (\varepsilon + \lambda) \| |g_2| \| + \varepsilon^{3/2} \|f_1\| + (\varepsilon + \lambda)\varepsilon^{1/2} \|f_2\|), \\ & \max \{ \varepsilon^3 \| |z| \|, \varepsilon^{7/2} \|\nabla z\| \} \\ & \leq K(\varepsilon + \lambda)(\varepsilon \| |g_1| \| + (\varepsilon + \lambda) \| |g_2| \| + \varepsilon^{3/2} \|f_1\| + (\varepsilon + \lambda)\varepsilon^{1/2} \|f_2\|). \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Доказательство.** Разрешимость и единственность следуют из фредгольмовости задачи (3.12) и априорных оценок (3.9) из леммы 3 (при этом надо взять  $\nu > \lambda$ ).

Теперь оценим решение.

Сначала возьмем  $p_1$  — решение краевой задачи

$$\varepsilon^2 \Delta p_1 - a(x)p_1 = f_2(x), \quad x \in \Omega, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_1}{\partial n} = g_2(x), \quad x \in \Gamma.$$

Тогда в силу (3.2) получим, что при некотором  $K_1$

$$\max \{ \varepsilon^{1/2} \|p_1\|, \varepsilon \| |p_1| \|, \varepsilon^{3/2} \|\nabla p_1\| \} \leq K_1(\| |g_2| \| + \varepsilon^{1/2} \|f_2\|). \quad (3.14)$$

Теперь пара функций  $z$  и  $p_2 = p - p_1$  удовлетворяет новой краевой задаче

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z - a(x)z = f_1(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_2 - a(x)p_2 - z = 0, & z, p_2 \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \lambda p_2(x) = g_1(x) + \lambda p_1(x), & \varepsilon^2 \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma, \end{cases}$$

к которой применима лемма 3 (если взять  $\nu > \lambda$ ). Поэтому в силу соотношений (3.9) и (3.14) получим

$$\begin{aligned} & \max \{ \varepsilon^{1/2} \|z\|, \varepsilon^{1/2} \|p_2\|, \varepsilon \| |p_2| \|, \varepsilon^{3/2} \|\nabla p_2\| \} \leq K(\| |g_1 + \lambda p_1| \| + \varepsilon^{1/2} \|f_1\|) \\ & \leq K_2 \varepsilon^{-1} (\varepsilon \| |g_1| \| + \lambda \| |g_2| \| + \varepsilon^{3/2} \|f_1\| + \lambda \varepsilon^{1/2} \|f_2\|). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Теперь для  $p = p_1 + p_2$ , воспользовавшись неравенством треугольника для норм и полученными оценками (3.14), (3.15), получим

$$\max \{ \varepsilon^{1/2} \|p\|, \varepsilon \| |p| \|, \varepsilon^{3/2} \|\nabla p\| \}$$

$$\leq K_3 \varepsilon^{-1} (\varepsilon \|g_1\| + (\varepsilon + \lambda) \|g_2\| + \varepsilon^{3/2} \|f_1\| + (\varepsilon + \lambda) \varepsilon^{1/2} \|f_2\|). \quad (3.16)$$

Наконец, для  $\|z\|$  и  $\|\nabla z\|$  из (3.9) с учетом (3.16) вытекает справедливость соотношения

$$\begin{aligned} & \max \{ \varepsilon \|z\|, \varepsilon^{3/2} \|\nabla z\| \} \\ & \leq K_4 \varepsilon^{-2} (\varepsilon + \lambda) (\varepsilon \|g_1\| + (\varepsilon + \lambda) \|g_2\| + \varepsilon^{3/2} \|f_1\| + (\varepsilon + \lambda) \varepsilon^{1/2} \|f_2\|). \end{aligned}$$

□

**Предложение 1.** Пусть  $a(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  и удовлетворяют условиям (1.3).

Если  $z_\varepsilon(\cdot), p_\varepsilon(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$  и  $\lambda_\varepsilon$  есть решение задачи (2.5), (2.6), то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливы следующие асимптотические представления:

$$\sqrt{\lambda_\varepsilon} \|z_\varepsilon\| = O(1), \quad \sqrt{\lambda_\varepsilon} \|p_\varepsilon\| = O(1). \quad (3.17)$$

**Доказательство.** Взяв в (2.7)  $w = p_\varepsilon$ , получим

$$\varepsilon^2 \|\nabla p_\varepsilon\|^2 + \alpha^2 \|p_\varepsilon\| \leq \|z_\varepsilon\| \cdot \|p_\varepsilon\|,$$

что дает неравенство

$$\|p_\varepsilon\| \leq \alpha^{-2} \|z_\varepsilon\|. \quad (3.18)$$

Умножив равенство (2.8) на  $\lambda_\varepsilon$ , получим

$$\lambda_\varepsilon \|z_\varepsilon\|^2 \leq 1 + \|g\| + \lambda_\varepsilon \|f\| \cdot \|p_\varepsilon\|,$$

что с учетом (3.18) и ограниченности  $\lambda_\varepsilon$  дает

$$\lambda_\varepsilon \|z_\varepsilon\|^2 \leq 1 + \|g\| + \sqrt{\lambda_\varepsilon} \alpha^{-2} \|f\| \sqrt{\lambda_\varepsilon} \|z_\varepsilon\| \leq K_1 + K_2 \sqrt{\lambda_\varepsilon} \|z_\varepsilon\|.$$

Решая последнее квадратичное относительно  $\sqrt{\lambda_\varepsilon} \|z_\varepsilon\|$  неравенство, получим первое из соотношений (3.17). Второе соотношение следует из первого и неравенства (3.18). □

**Предложение 2.** Пусть  $a(\cdot)$ ,  $f(\cdot)$  и удовлетворяют условиям (1.3), а  $z_\varepsilon(\cdot)$ ,  $p_\varepsilon(\cdot)$  и  $\lambda_\varepsilon$  есть решение задачи (2.5) – (2.6). Если

$$\|g\| > 1, \quad (3.19)$$

то  $\lambda_\varepsilon \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Если это не так, то для некоторой последовательности  $\{\varepsilon_k\}$ :  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  будет справедливо неравенство  $\lambda_k := \lambda_{\varepsilon_k} \geq c > 0$ , что в силу (3.17) дает ограниченность в  $L_2(\Omega)$  последовательности  $\{z_k\}$ :  $z_k := z_{\varepsilon_k}$ .

Но в силу первого из соотношений в (2.7)

$$\forall v \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega) \quad \varepsilon_k^2 (\nabla z_k, \nabla v) + (az_k, v) = (-f, v).$$

Из оценки (3.11) получим, что  $\varepsilon_k^2 (\nabla z_k, \nabla v) \rightarrow 0$  и тем самым  $(az_k + f, v) \rightarrow 0$ , что в силу ограниченности  $\{z_k\}$  и плотности [6, гл. 1, 8.1]  $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$  в  $L_2(\Omega)$  по теореме Банаха – Штейнгауза дает

$$az_k + f \xrightarrow[L_2(\Omega)]{\text{сл.}} 0.$$

Но теперь, перейдя в первом из соотношений в (2.7) для  $z_k$  к пределу, при  $k \rightarrow \infty$ , получим

$$\forall v \in H^1(\Omega) \quad \langle \lambda_k p_k - g, v \rangle \rightarrow 0$$

(здесь  $p_k = p_{\varepsilon_k}$ ). Это в силу ограниченности последовательности  $\{\lambda_k p_k\}$  в  $L_2(\Gamma)$  и плотности вложения  $H^1(\Omega)$  в  $L_2(\Gamma)$  [6, гл. 1, 7.3] в свою очередь дает соотношение  $\lambda_k p_k \xrightarrow{с.л.} g$  в  $L_2(\Omega)$ . Тогда в силу свойств слабого предела получим

$$\|g\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k \|p_k\| = 1,$$

что противоречит условию (3.19).  $\square$

В дальнейшем будем считать, что условие (3.19) выполнено, тем самым при всех малых  $\varepsilon > 0$  выполнено равенство

$$\lambda_\varepsilon \|p_\varepsilon\| = 1. \quad (3.20)$$

**Теорема 2.** Пусть функции  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  и  $a(\cdot)$  удовлетворяют условиям (1.3), а при  $r \in (r_1; r_2)$  и  $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$  для  $u_{\varepsilon, r}(\cdot)$  — оптимальных решений задачи (1.1), (1.2) с  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$  справедливо равенство  $\|u_{\varepsilon, r}\| = r$ . Тогда

$$\exists K > 0 \quad \forall r, r' \in (r_1; r_2) \quad \forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0) \quad \|u_{\varepsilon, r} - u_{\varepsilon, r'}\|^2 \leq K \varepsilon^{-3} |r - r'|.$$

**Доказательство.** Пусть  $z_0$  — решение задачи (1.1) с  $u \equiv 0$ , а оператор  $\mathcal{A} : L_2(\Gamma) \rightarrow L_2(\Omega)$  ставит в соответствие функции  $u \in L_2(\Gamma)$  решение задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z - a(x)z = 0, & x \in \Omega, z \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z}{\partial n} = u(x), & x \in \Gamma, \end{cases}$$

как функции из  $L_2(\Omega)$ . Тогда

$$J(u) = \langle \mathcal{A}^* \mathcal{A} u, u \rangle + 2 \langle \mathcal{A}^* z_0, u \rangle + \nu^{-1} \langle u, u \rangle + \|z_0\|^2.$$

Поэтому в силу теоремы об условном экстремуме и множителях Лагранжа существует  $\lambda_{\varepsilon, r} \geq 0$  такое, что

$$u_{\varepsilon, r} = -(\mathcal{A}^* \mathcal{A} + (\nu^{-1} + \lambda_{\varepsilon, r})I)^{-1} \mathcal{A}^* z_0.$$

Равенство  $\|u_{\varepsilon, r}\| = r$  запишем с использованием спектрального представления самосопряженного оператора  $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$  (см., например, [5, гл. 4, § 4]):  $\|u_{\varepsilon, r}\| = F(\lambda_{\varepsilon, r})$ , где

$$F(\lambda) := \int_0^{\|\mathcal{A}\|^2 + 0} (\mu + \nu^{-1} + \lambda)^{-2} d\|I_\mu \mathcal{A}^* z_0\|^2.$$

Очевидно, что  $F'(\lambda) < 0$  и при  $\lambda \in [0; \lambda_0]$

$$(\|\mathcal{A}\|^2 + \nu^{-1} + \lambda_0)^{-3} \|\mathcal{A}^* z_0\|^2 \leq |F'(\lambda)| \leq 2\nu^3 \|\mathcal{A}^* z_0\|^2, \quad (3.21)$$

где

$$(\nu^{-1} + \lambda_0)^{-2} \|\mathcal{A}^* z_0\|^2 = r_1^2. \quad (3.22)$$

Таким образом  $F(\lambda)$  обратима, и для  $(F^{-1}(r))'$  справедливо неравенство

$$|(F^{-1}(r))'| \leq (\|\mathcal{A}\|^2 + \nu^{-1} + \lambda_0)^3 \|\mathcal{A}^* z_0\|^{-2}. \quad (3.23)$$

Поэтому в силу формулы конечных приращений Лагранжа из (3.21) и (3.23) получим, что

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon, r} - u_{\varepsilon, r'}\|^2 &= |F(\lambda_{\varepsilon, r}) - F(\lambda_{\varepsilon, r'})| \leq 2\nu^3 \|\mathcal{A}^* z_0\| \cdot |F(\lambda_{\varepsilon, r}) - F(\lambda_{\varepsilon, r'})| \\ &\leq 2\nu^3 (\|\mathcal{A}\|^2 + \nu^{-1} + \lambda_0)^3 \cdot |r - r'|. \end{aligned}$$

Теперь осталось только оценить величину  $\|\mathcal{A}\|^2 + \nu^{-1} + \lambda_0$ .

Поскольку  $\|\mathcal{A}\| = \sup\{\|\mathcal{A}u\| : \|u\| = 1\}$ , то в силу оценок (3.2) из леммы 2 получим, что  $\|\mathcal{A}\| \leq K\varepsilon^{-1/2}$ . Равенство (3.22) и оценки (3.2) дают следующее неравенство:

$$\nu^{-1} + \lambda_0 = r_1^{-1}\|\mathcal{A}^*z_0\| \leq r_1^{-1}\|\mathcal{A}^*\| \cdot \|z_0\| \leq K_1\varepsilon^{-1}.$$

Таким образом  $\|\mathcal{A}\|^2 + \nu^{-1} + \lambda_0 \leq K_2\varepsilon^{-1}$ .  $\square$

Следующая теорема является основой для обоснования асимптотических разложений решения задачи (2.5), (2.6).

**Теорема 3.** Пусть функции  $f_{1,\varepsilon,m}(\cdot), f_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $g_{1,m}(\cdot), g_{2,m}(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Gamma})$ , функция  $a(\cdot)$  удовлетворяет условию (1.3), а  $\lambda_m(\varepsilon)$  и  $h_m(\varepsilon)$  — некоторые функции от  $\varepsilon$  и  $\lambda_m \in (0; \nu]$  при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Если

$$\max\{\|f_{i,\varepsilon,m}\|, \|\nabla f_{i,\varepsilon,m}\|, \|g_{i,\varepsilon,m}\|, |h_m(\varepsilon)| : i = 1, 2\} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.24)$$

а  $z_m, p_m$  — решение задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z_m - a(x)z_m = f(x) + f_{1,\varepsilon,m}(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_m - a(x)p_m - z_m = f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_m, p_m \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_m}{\partial n} + \lambda_m p_m(x) = g(x) + g_{1,\varepsilon,m}(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_m}{\partial n} = g_{2,\varepsilon,m}(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\lambda_m \|p_m\| = 1 + h_m, \quad (3.26)$$

то для  $z_{\varepsilon,m} := z_\varepsilon - z_m$ ,  $p_{\varepsilon,m} := p_\varepsilon - p_m$ ,  $\lambda_{\varepsilon,m} := \lambda_\varepsilon - \lambda_m$ , где  $z_\varepsilon, p_\varepsilon, \lambda_\varepsilon$  — решение задачи (2.5), (2.6), справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\begin{aligned} & \max\{\varepsilon^{1/2}\|z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon\|z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{1/2}\|p_{\varepsilon,m}\|, \\ & \varepsilon\|p_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_{\varepsilon,m}\|, \lambda_{\varepsilon,m}\} = O(\varepsilon^{(m-7)/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

**Доказательство.** Отметим, что для  $z_m$  и  $p_m$  справедливы оценки (3.13) и, в частности,  $\|p_m\| = O(\varepsilon^{-2})$ .

Теперь возьмем  $z_{1,m}$  и  $p_{1,m}$  — решение краевой задачи

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z_{1,m} - a(x)z_{1,m} = f_{1,\varepsilon,m}(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_{1,m} - a(x)p_{1,m} - z_{1,m} = f_{2,\varepsilon,m}(x), & z_{1,m}, p_{1,m} \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_{1,m}}{\partial n} + \lambda_m p_{1,m}(x) = g_{1,\varepsilon,m}(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_{1,m}}{\partial n} = g_{2,\varepsilon,m}(x), & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Тогда в силу оценок (3.13) и условия (3.24) получим, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \max\{\varepsilon^{1/2}\|z_{1,m}\|, \varepsilon^{1/2}\|p_{1,m}\|, \varepsilon\|p_{1,m}\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla p_{1,m}\|\} = O(\varepsilon^{m-1}), \\ & \max\{\varepsilon\|z_{1,m}\|, \varepsilon^{3/2}\|\nabla z_{1,m}\|\} = O(\varepsilon^{m-2}). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Теперь пара функций  $z_{2,m} := z_m - z_{1,m}$  и  $p_{2,m} := p_m - p_{1,m}$  удовлетворяет новой краевой задаче

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z_{2,m} - a(x)z_{2,m} = f(x), & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_{2,m} - a(x)p_{2,m} - z_{2,m} = 0, & z_{2,m}, p_{2,m} \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_{2,m}}{\partial n} + \lambda_m p_{2,m}(x) = g(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_{2,m}}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma. \end{cases}$$

Это в силу леммы 1 означает, что функция  $z_{2,m}(\cdot)$  есть решение задачи оптимального управления (1.1), (1.2) с  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_r$ , где  $r = \lambda_m \| \|p_{2,m}\| \|$ . Поскольку в силу (3.26) и (3.28)

$$\begin{aligned} \lambda_m^2 \| \|p_{2,m}\| \|^2 &= \lambda_m^2 \| \|p_m - p_{1,m}\| \|^2 = \lambda_m^2 (\| \|p_m\| \|^2 - 2\langle p_m, p_{1,m} \rangle + \| \|p_{1,m}\| \|^2) \\ &= 1 + O(\varepsilon^{-2})O(\varepsilon^{m-2}) + O(\varepsilon^{2m-4}) = 1 + O(\varepsilon^{m-4}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

то и  $\lambda_m \| \|p_{2,m}\| \| = 1 + O(\varepsilon^{m-4})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

По теореме 2 для  $u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon|_\Gamma$  и  $u_m = -\lambda_m p_{2,m}|_\Gamma$  с учетом равенства  $\| \|u_\varepsilon\| \| = 1$  получим

$$\| \|u_\varepsilon - u_m\| \|^2 = \varepsilon^{-3} O(\varepsilon^{m-4}) = O(\varepsilon^{m-7}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.29)$$

Но  $z_{2,\varepsilon,m} := z_\varepsilon - z_{2,m}$ ,  $p_{2,\varepsilon,m} := p_\varepsilon - p_{2,m}$  удовлетворяет соотношениям

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta z_{2,\varepsilon,m} - a(x) z_{2,\varepsilon,m} = 0, & x \in \Omega, \\ \varepsilon^2 \Delta p_{2,\varepsilon,m} - a(x) p_{2,\varepsilon,m} - z_{2,\varepsilon,m} = 0, & z_{2,\varepsilon,m}, p_{2,\varepsilon,m} \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial z_{2,\varepsilon,m}}{\partial n} = u_\varepsilon(x) - u_m(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial p_{2,\varepsilon,m}}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma, \end{cases}$$

что в силу оценок (3.2) из леммы 2 и (3.28) дает

$$\max \{ \varepsilon^{1/2} \| \|z_{2,\varepsilon,m}\| \|, \varepsilon \| \|z_{2,\varepsilon,m}\| \|, \varepsilon^{3/2} \| \nabla z_{2,\varepsilon,m} \| \| \} = O(\varepsilon^{(m-7)/2}). \quad (3.30)$$

Эти же оценки, примененные к  $p_{2,\varepsilon,m}$ , дают соотношение

$$\max \{ \varepsilon^{1/2} \| \|p_{2,\varepsilon,m}\| \|, \varepsilon \| \|p_{2,\varepsilon,m}\| \|, \varepsilon^{3/2} \| \nabla p_{2,\varepsilon,m} \| \| \} \leq K \varepsilon^{1/2} \| \|z_{2,\varepsilon,m}\| \| = O(\varepsilon^{(m-6)/2}). \quad (3.31)$$

Поскольку  $z_{\varepsilon,m} = z_\varepsilon - z_m = z_\varepsilon - (z_{1,m} + z_{2,m}) = z_{2,\varepsilon,m} - z_{1,\varepsilon}$  и  $p_{\varepsilon,m} = p_{2,\varepsilon,m} - p_{1,\varepsilon}$ , то для получения окончательных оценок (3.27) осталось применить неравенство треугольника для соответствующих норм и уже полученные оценки (3.28), (3.30) и (3.31).

#### 4. Построение асимптотики

Асимптотику задачи для простоты изложения построим при следующих упрощающих предположениях:

$$\Omega := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1 \}, \quad a(x_1, x_2) \equiv \alpha^2. \quad (4.1)$$

В общем случае возникают лишь дополнительные технические сложности, не носящие принципиального характера.

В силу теоремы 3 для построения асимптотического разложения рассматриваемой задачи надо построить ее *формальное асимптотическое решение* (ф. а. р.) (см., например, [7, введение]). Его построение осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения [7, 8].

Начнем с так называемого *внешнего разложения*, которое ищем в стандартном виде

$$z_{out}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x), \quad p_{out}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Подставляя эти ряды в уравнения системы (2.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим, что

$$\begin{cases} z_0(x) = -\alpha^{-2} f(x), & p_0(x) = \alpha^{-4} f(x), \\ z_k(x) = \alpha^{-2} \Delta z_{k-1}(x), & p_k(x) = \alpha^{-2} (\Delta p_{k-1}(x) - z_k(x)), \quad k \geq 1. \end{cases} \quad (4.2)$$

Тем самым внешнее разложение однозначно определено, его коэффициенты — гладкие функции, однако, вообще говоря, ни граничные условия, ни условие (3.20) не выполнены. Для возникающих невязок в этих условиях надо построить новое, так называемое *внутреннее разложение* в окрестности границы  $\Gamma$ .

В силу линейности системы (2.5) по  $z(\cdot)$  и  $p(\cdot)$  внутреннее разложение будем строить как ф. а. р. следующей задачи (записанной в полярных координатах):

$$x_1 = \rho \cos \varphi, \quad x_2 = \rho \sin \varphi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} : \quad (4.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \tilde{z} - \alpha^2 \tilde{z} = 0, \quad \rho \in (0; 1), \\ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \tilde{p} - \alpha^2 \tilde{p} - \tilde{z} = 0, \quad \rho \in (0; 1), \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \rho}(1, \varphi) + \lambda_\varepsilon (\tilde{p}(1, \varphi) + \tilde{p}_{out}(1, \varphi)) = \tilde{g}(\varphi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{z}_{out}}{\partial \rho}(1, \varphi), \quad \varphi \in [0; 2\pi], \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \rho}(1, \varphi) = -\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}_{out}}{\partial \rho}(1, \varphi), \quad \varphi \in [0; 2\pi], \end{array} \right. \quad (4.4)$$

где  $\tilde{g}(\varphi) = g(\cos \varphi, \sin \varphi)$ ,  $\tilde{z}_{out}(\rho, \varphi) = z_{out}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  и  $\tilde{p}_{out}(\rho, \varphi) = p_{out}(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ . Перейдем в системе (4.4) к внутренней *растянутой* переменной  $\xi := (1 - \rho)\varepsilon^{-1}$ . Тогда для функций  $Z(\xi, \varphi) := \tilde{z}(1 - \varepsilon\xi, \varphi)$ ,  $P(\xi, \varphi) := \tilde{p}(1 - \varepsilon\xi, \varphi)$  получим следующую краевую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 Z}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\xi} \frac{\partial Z}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon\xi)^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial \varphi^2} - \alpha^2 Z = 0, \quad \xi > 0 \\ \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\xi} \frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon\xi)^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} - \alpha^2 P - Z = 0, \quad \xi > 0, \\ -\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial \xi}(0, \varphi) + \lambda_\varepsilon (P(0, \varphi) + \tilde{p}_{out}(1, \varphi)) = \tilde{g}(\varphi) - \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{z}_{out}}{\partial \rho}(1, \varphi), \quad \varphi \in [0; 2\pi], \\ -\varepsilon \frac{\partial P}{\partial \xi}(0, \varphi) = -\varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{p}_{out}}{\partial \rho}(1, \varphi), \quad \varphi \in [0; 2\pi], \end{array} \right. \quad (4.5)$$

с дополнительным условием

$$\lambda_\varepsilon \| \|P(0, \cdot) + \tilde{p}_{out}(1, \cdot)\| \| = 1. \quad (4.6)$$

Будем искать ф. а. р. этой задачи при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в виде

$$Z(\xi, \varphi) \sim \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m Z_m(\xi, \varphi), \quad P(\xi, \varphi) \sim \sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m P_m(\xi, \varphi), \quad \lambda_\varepsilon \sim \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_m. \quad (4.7)$$

Разложив в (4.5) коэффициенты при  $\partial/\partial \xi$  и  $\partial^2/\partial \varphi^2$  в ряды по степеням  $\varepsilon$ , подставив вместо  $Z$ ,  $P$  и  $\lambda_\varepsilon$  их представления (4.7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим для  $Z_m$ ,  $P_m$  следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 Z_{-1}}{\partial \xi^2} - \alpha^2 Z_{-1} = 0, \quad \frac{\partial^2 P_{-1}}{\partial \xi^2} - \alpha^2 P_{-1} - Z_{-1} = 0, \\ \frac{\partial^2 Z_m}{\partial \xi^2} - \alpha^2 Z_m = F_m(\xi, \varphi), \quad m \geq 0, \\ \frac{\partial^2 P_m}{\partial \xi^2} - \alpha^2 P_m - Z_m = G_m(\xi, \varphi), \quad m \geq 0, \end{array} \right. \quad (4.8)$$

где  $F_m$  и  $G_m$  есть линейные комбинации производных по  $\xi$  и по  $\varphi$  от  $Z_k, P_k$  при  $k < m$  с коэффициентами, являющимися известными многочленами переменной  $\xi$ . Дополнительные условия

на  $Z_m$ ,  $P_m$  и  $\lambda_m$  проистекают из граничных условий и дополнительного соотношения (4.6)

$$\begin{cases} -\frac{\partial Z_{-1}}{\partial \xi}(0, \varphi) + \lambda_1 P_{-1}(0, \varphi) = \tilde{g}(\varphi), & -\frac{\partial P_{-1}}{\partial \xi}(0, \varphi) = 0, \\ -\frac{\partial Z_m}{\partial \xi}(0, \varphi) + \lambda_1 P_m(0, \varphi) + \lambda_{m+2} P_{-1}(0, \varphi) = g_m(\varphi), & m \geq 0, \\ -\frac{\partial P_m}{\partial \xi}(0, \varphi) = q_m(\varphi), & m \geq 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

где функции  $g_m(\cdot)$  и  $q_m(\cdot)$  определяются внешним разложением,  $Z_k$ ,  $P_k$  и  $\lambda_k$  при  $k < m$ , при этом  $Z_m$  и  $P_m$  должны экспоненциально убывать при  $\xi \rightarrow +\infty$ .

Условие (4.6) принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 |||P_{-1}(0, \cdot)||| = 1, \\ \lambda_m + \frac{\lambda_1}{|||P_{-1}(0, \cdot)|||} \langle P_{m-2}(0, \cdot), P_{-1}(0, \cdot) \rangle = h_m, & m > 1, \end{cases} \quad (4.10)$$

где константы  $h_m$  определяются внешним разложением,  $Z_k$ ,  $P_k$  и  $\lambda_k$  при  $k < m$  с помощью операций сложения, умножения и взятия скалярного произведения в пространстве  $L_2(\Gamma)$ .

Найдем сначала  $Z_{-1}$ ,  $P_{-1}$  и  $\lambda_1$ . Из (4.8) с учетом условия экспоненциального убывания  $Z_{-1}$  и  $P_{-1}$  при  $\xi \rightarrow +\infty$  получим

$$Z_{-1}(\xi, \varphi) = C_{-1}(\varphi)e^{-\alpha\xi}, \quad P_{-1}(\xi, \varphi) = D_{-1}(\varphi)e^{-\alpha\xi} - \frac{1}{2\alpha}C_{-1}(\varphi)\xi e^{-\alpha\xi}.$$

Используя начальные условия (4.9), получим

$$D_{-1}(\varphi) = \frac{\tilde{g}(\varphi)}{\lambda_1 - 2\alpha^3}, \quad C_{-1}(\varphi) = -\frac{2\alpha^2\tilde{g}(\varphi)}{\lambda_1 - 2\alpha^3}.$$

Теперь условие  $\lambda_1 |||P_{-1}(0, \cdot)||| = 1$  принимает вид  $\frac{\lambda_1 |||g|||}{|2\alpha^3 - \lambda_1|} = 1$ . Отсюда

$$\lambda_1 = \frac{2\alpha^3}{|||g||| + 1}.$$

Тем самым построение  $Z_{-1}$ ,  $P_{-1}$  и  $\lambda_1$  завершено.

Далее процесс построения  $Z_m$ ,  $P_m$  и  $\lambda_m$  продолжается индукционно. При этом  $Z_m$  и  $P_m$  имеют вид

$$\begin{aligned} Z_m(\xi, \varphi) &= C_m(\varphi)e^{-\alpha\xi} + \xi e^{-\alpha\xi} Q_m(\xi; \varphi), \\ P_m(\xi, \varphi) &= D_m(\varphi)e^{-\alpha\xi} - \frac{1}{2\alpha}C_m(\varphi)\xi e^{-\alpha\xi} + \xi e^{-\alpha\xi} R_m(\xi; \varphi), \end{aligned}$$

где  $Q_m(\xi; \varphi)$  и  $R_m(\xi; \varphi)$  — известные на момент рассмотрения многочлены по переменной  $\xi$ , коэффициентами которых являются гладкие по  $\varphi$  функции. Начальные условия приводят к равенствам

$$\begin{cases} \alpha C_m + \lambda_1 D_m + \lambda_{m+2} D_{-1} = g_m, \\ \alpha D_m + \frac{1}{2\alpha} C_m = q_m, \end{cases}$$

откуда

$$C_m(\varphi) = 2\alpha q_m - 2\alpha^2 D_m(\varphi), \quad D_m(\varphi) = \lambda_{m+2} \frac{D_{-1}(\varphi)}{2\alpha^3 - \lambda_1} + g_{m,1}.$$

Поэтому уравнение (4.10) для  $\lambda_m$  принимает вид

$$h_m = \lambda_m + \frac{\lambda_1}{|||P_{-1}(0, \cdot)|||} \left\langle \lambda_m \frac{D_{-1}(\varphi)}{2\alpha^3 - \lambda_1} + g_{m,1}, D_{-1}(\varphi) \right\rangle$$

$$= \lambda_m + \frac{\lambda_1 \lambda_m \|||P_{-1}(0, \cdot)\|||^2}{\|||P_{-1}(0, \cdot)\||| (2\alpha^3 - \lambda_1)} + h_{m,1} = \lambda_m + \frac{\lambda_m}{2\alpha^3 - \lambda_1} + h_{m,1}$$

и разрешимо единственным образом при всех  $m > 1$ . Тем самым все  $Z_m$ ,  $P_m$  и  $\lambda_m$  строятся однозначно.

**Теорема 4.** Пусть функции  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  удовлетворяют условиям (1.3) и (3.19), а функция  $a(\cdot)$  и область  $\Omega$  — условиям (4.1). Пусть  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x)$  и  $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x)$  — это ряды с коэффициентами, определяемыми по формулам (4.2), а коэффициенты рядов  $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_m$ ,  $\sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m Z_m(\xi, \varphi)$  и  $\sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m P_m(\xi, \varphi)$  есть единственное решение задач (4.8)–(4.10).

Тогда ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \lambda_m$  есть асимптотическое при  $\varepsilon \rightarrow 0$  разложение величины  $\lambda_\varepsilon$ , а ряды  $\sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m Z_m((1-\rho)/\varepsilon, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x)$  и  $\sum_{m=-1}^{\infty} \varepsilon^m P_m((1-\rho)/\varepsilon, \varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x)$ , где  $x = (x_1, x_2)$  и  $\rho, \varphi$  связаны соотношениями (4.3), есть равномерные, как в смысле пространства  $H^1(\Omega)$ , так и в смысле пространства  $C(\bar{\Omega})$ , асимптотические разложения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функций  $z_\varepsilon(x)$  и  $p_\varepsilon(x)$ .

Здесь  $\lambda_\varepsilon$ ,  $z_\varepsilon(x)$  и  $p_\varepsilon(x)$  — решение задачи (2.5), (3.20).

**Доказательство.** Отметим прежде всего, что при всех  $m \geq -1$  справедливы асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  оценки

$$\|Z_m\|_{C(\bar{\Omega})} = O(1), \quad \|Z_m\|_{C^1(\bar{\Omega})} = O(\varepsilon^{-1}), \quad \|P_m\|_{C(\bar{\Omega})} = O(1), \quad \|P_m\|_{C^1(\bar{\Omega})} = O(\varepsilon^{-1}). \quad (4.11)$$

Введем следующие обозначения:

$$\hat{z}_N := \sum_{m=-1}^N \varepsilon^m Z_m((1-\rho)/\varepsilon, \varphi) + \sum_{0 \leq 2k \leq N} \varepsilon^{2k} z_k(x),$$

$$\hat{p}_N := \sum_{m=-1}^N \varepsilon^m P_m((1-\rho)/\varepsilon, \varphi) + \sum_{0 \leq 2k \leq N} \varepsilon^{2k} p_k(x), \quad \hat{\lambda}_N := \sum_{m=1}^N \varepsilon^m \lambda_m.$$

Тогда в силу построения  $\hat{z}_N$ ,  $\hat{p}_N$  и  $\hat{\lambda}_N$  удовлетворяют системе (3.25) с  $m = N$ . Поэтому в силу теоремы 3 при всех  $N \geq -1$  для  $z_{\varepsilon, N} := z_\varepsilon - \hat{z}_N$ ,  $p_{\varepsilon, N} := p_\varepsilon - \hat{p}_N$  справедливы асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  оценки  $\|z_{\varepsilon, N}\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{(N-10)/2})$ ,  $\|p_{\varepsilon, N}\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{(N-10)/2})$ , что в силу оценок (4.11) эквивалентно [7] оценкам

$$\|z_{\varepsilon, N}\|_{H^1(\Omega)}^1 = O(\varepsilon^N), \quad \|p_{\varepsilon, N}\|_{H^1(\Omega)}^1 = O(\varepsilon^N).$$

Аналогичные оценки для  $\|z_{\varepsilon, N}\|_{C(\bar{\Omega})}$  и  $\|p_{\varepsilon, N}\|_{C(\bar{\Omega})}$  справедливы в силу теоремы вложения  $H^2(\Omega)$  в  $C(\bar{\Omega})$  и априорных оценок для решений эллиптических краевых задач [6, гл. 2, 5.1].

Отметим также, что в силу оценок (3.29) и (4.11)

$$\|||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \hat{\lambda}_N \hat{p}_N\||| = O(\varepsilon^N). \quad (4.12)$$

Докажем теперь оставшееся утверждение про асимптотическое разложение величины  $\lambda_\varepsilon$ . Поскольку при  $\varepsilon \rightarrow 0$  справедливо соотношение

$$\|||p_\varepsilon\||| = \varepsilon^{-1} \|||P_{-1}\||| + O(1) = (\lambda_1 \varepsilon)^{-1} + O(1),$$

то  $\|||p_\varepsilon\|||^{-1} = \lambda_1 \varepsilon + O(1)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Но в силу (4.12)

$$|\lambda_\varepsilon - \hat{\lambda}_N| \cdot \|||p_\varepsilon\||| \leq \|||\lambda_\varepsilon p_\varepsilon - \hat{\lambda}_N \hat{p}_N\||| + |\hat{\lambda}_N| \cdot \|||p_\varepsilon - \hat{p}_N\||| = O(\varepsilon^N),$$

поэтому  $|\lambda_\varepsilon - \hat{\lambda}_N| = O(\varepsilon^{N+1})$ . □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Данилин А.Р.** Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
3. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
4. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. 1992. № 2. С. 70–74. (Математика. Естественные науки. Технические науки.)
5. **Морен К.** Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.
6. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
7. **Ильин А.М.** Пограничный слой // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34. М.: ВИНТИ, 1988. С. 175–214. (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР.)
8. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.

Данилин Алексей Руфимович  
д-р физ.-мат. наук, доцент  
зав. отделом  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 08.05.2009

Зорин Александр Павлович  
ассистент кафедры алгебры  
Уральский гос. пед. университет

УДК 519.21

## ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕГУЛИРУЕМОГО ПЕРЕКРЕСТКА

Д. С. Завалищин, Г. А. Тимофеева

Эффективная организация движения автотранспорта является одной из актуальнейших проблем современного общества. Одна из составляющих этой проблемы — выбор оптимальных режимов управления пересекающимися транспортными потоками. В настоящее время детально разработано описание движения отдельного автомобиля, а также движения потока автотранспорта. Подробное описание динамики позволило создать сложные имитационные программы, которые с достаточной степенью точности моделируют пересечение транспортом регулируемого перекрестка. Однако разработка компактной математической модели движения автотранспорта на перекрестке остается актуальной. В данной работе предлагается модель проезда транспортным потоком регулируемого перекрестка, базирующаяся на использовании теории систем массового обслуживания.

Ключевые слова: управление, марковские случайные процессы, транспортные потоки.

D. S. Zavalishchin, G. A. Timofeeva. Investigation of a mathematical model of a signal-controlled junction.

Efficient traffic organization is one of the most urgent problems of the modern society. The choice of optimal control regimes for intersecting traffic flows is a component of this problem. At present, a detailed description of the motion of an individual car and of a traffic flow is developed, which made it possible to create simulation programs that model traffic flows at a signal-controlled junction accurately enough. However, the the problem of developing a compact mathematical description of traffic motion at a junction is still important. We propose a model describing traffic flows through a signal-controlled junction; the model is based on the theory of queuing systems.

Keywords: control, Markov stochastic processes, traffic flows.

### Введение

Термин *транспортный поток* (traffic flow) используется западными учеными и исследователями по аналогии с *потоками* в сплошных средах. Базовой моделью транспортного потока считается гидродинамическая модель Лайтхилла — Уизема [1]. Сам по себе транспортный поток характеризуется средними (т. е. макроскопическими) параметрами: средняя скорость потока, плотность — число автомобилей на единицу длины дороги, интенсивность — число автомобилей, проходящих через любую данную точку дороги в единицу времени. Два параметра — интенсивность и скорость либо плотность и скорость — изображаются в виде графика и называются фундаментальной диаграммой, изучению особенностей которой посвящено значительное число работ [2–5]. Некоторые исследователи предлагают отказаться от рассмотрения фундаментальной диаграммы и ввести другие параметры — длину очереди, время проезда и т. д. Обзоры основных подходов к моделированию транспортных потоков можно найти в [6, 7].

Другое направление развития математического моделирования движения автотранспорта — это микроскопические модели, в которых в деталях исследуется движение отдельного автомобиля. Среди наиболее известных моделей — модель следования за лидером, клеточные автоматы, модель интеллектуального водителя [8–10]. К настоящему времени создана достаточно точная микроскопическая модель движения отдельного автомобиля: описаны динамика разгона и торможения, зависимость безопасного расстояния между ближайшими транспортными единицами от скорости движения, модель обгона и т. д. [7], что позволило разработать имитационные модели, которые с достаточно высокой точностью отражают движение автотранспорта. Эти модели легли в основу имитационных комплексов, часть из которых доступна в сети [11, 12].

Однако имитационное моделирование не дает возможностей для рассмотрения перекрестка как единой управляемой системы и для аналитического исследования режимов работы.

Вопросы управления регулируемым перекрестком рассматривались различными учеными [13–15]; одно из возможных направлений математического моделирования движения транспорта на регулируемом перекрестке — использование моделей марковских цепей [16].

Настоящая статья продолжает исследования [17, 18], в которых движение автотранспорта по перекрестку моделируется с помощью марковских цепей с непрерывным временем в отличие от подхода, применяемого в работе [16], где используется модель управляемых марковских цепей с дискретным временем.

В статье предполагается, что выбору подлежит лишь режим переключения светофора, который считается постоянным на достаточно большом промежутке времени.

## 1. Постановка задачи

Перекресток будем рассматривать как совокупность 4 систем массового обслуживания. В соответствии с подходом, рассмотренным в [17, 18], движение в каждом направлении описывается системой массового обслуживания с переменной интенсивностью. А именно, в период, когда проезд запрещен, т.е. горит красный сигнал светофора, интенсивность обслуживания равна нулю.

Рассмотрим подробно движение в  $i$ -м направлении ( $i = 1, \dots, 4$ ). В случае, когда включен разрешающий сигнал светофора, обслуживанием заявки (автомобиля) будем считать проезд им стоп-линии и освобождение места для следующей машины. Числом обслуживающих каналов  $m^{(i)}$  будет количество полос для проезда перекрестка в одну сторону,  $m^{(i)} \in \{1, 2, 3\}$ .

В качестве модели будем использовать системы с ограниченной очередью. Количество мест в очереди  $n^{(i)}$  в каждом направлении будет равно количеству автомобилей, которые могут поместиться в предшествующем квартале на всех полосах:  $n^{(i)} = (L^{(i)} m^{(i)})/l$ , где  $L^{(i)}$  — длина квартала,  $l$  — длина автомашины вместе с дистанцией (в среднем). Обычные значения количества мест в очереди в городских условиях 20–80 автомобилей. При таком подходе предполагается, что машина, подъехавшая в момент, когда весь квартал занят, покидает систему.

Были проведены статистические исследования свойств входного потока [19], которые показали, что поток подъезжающих к перекрестку машин можно считать пуассоновским [20] при выполнении двух условий:

(1) относительно малой интенсивности входного потока  $\lambda \leq 0,5$  автомашин/с;

(2) расстояние от ближайшего регулируемого перекрестка достаточно большое, а следовательно, количество мест в очереди значительно, например, для одноканальной системы  $n \geq 30$ .

При высокой интенсивности входного потока он начинает приближаться к регулярному потоку, так как расстояние между следующими друг за другом автомашинами приближается к минимально возможному, и коэффициент вариации стремится к нулю. В случае, когда расстояние до предыдущего регулируемого перекрестка мало, поток теряет свойства простейшего, так как автомобили двигаются “пакетами”, и здесь можно применить модель следования за лидером.

Далее будем считать, что поступающие потоки автомашин являются простейшими с интенсивностями  $\lambda^{(i)}$  автомобилей в секунду, обозначим через  $\mu^{(i)}$  интенсивности обслуживания при разрешающем сигнале светофора.

Будем рассматривать случай, когда количество полос движения попарно совпадает, т.е.  $m^{(1)} = m^{(3)}$ ,  $m^{(2)} = m^{(4)}$ .

Отметим, что параметры системы разделяются на три группы — постоянные характеристики перекрестка:  $m^{(i)}$  — количество полос движения;  $n^{(i)}$  — максимальная длина очереди; переменные:  $\lambda^{(i)}$  — интенсивность входного потока;  $\mu^{(i)}$  — интенсивность  $i$ -го потока обслуживания в зеленой фазе; управляемые: продолжительность цикла светофора и его зеленой фазы (в нечетном направлении) —  $T$  и  $\tau$ .

В качестве выходных характеристик работы системы можно рассматривать: средние потери времени, приходящиеся на 1 автомобиль при пересечении данного перекрестка; вероятность того, что хотя бы в одном направлении образуется затор; общее количество автотранспорта на перекрестке и в прилегающих кварталах в среднем и т.д.

Основная цель работы — разработка математической модели регулируемого перекрестка, исследование режимов ее функционирования, анализ методов оптимизации характеристик работы системы путем оптимального выбора длительности зеленого сигнала  $\tau$  и продолжительности цикла светофора  $T$ .

## 2. Описание модели

Рассмотрим более подробно  $\mathcal{S}^{(i)}$  — систему массового обслуживания (СМО), описывающую проезд в одну сторону. В качестве обслуживания будем рассматривать проезд автомобилем перекрестка, более точно — проезд стоп-линии и освобождение места для проезда следующей автомашины. В рамках обычной технологии применения СМО интенсивность обслуживания определяется на основе статистических данных о среднем времени обслуживания  $\theta^{(i)}$ . Здесь в качестве среднего времени обслуживания  $\theta^{(i)}$  было выбрано среднее количество машин, пересекающих перекресток в данном направлении за единицу времени для случая, когда машины следуют одна за другой. Тогда интенсивность обслуживания равна  $\mu^{(i)} = (\theta^{(i)})^{-1}$ .

В статье рассмотрены два варианта моделирования интенсивности обслуживания: кусочно-постоянная и переменная. Сначала рассмотрим случай кусочно-постоянной интенсивности обслуживания.

Построим математическую модель движения по перекрестку, считая, что он образован пересечением двух однополосных дорог. Рассмотрим подробно, как происходит изменение состояния системы в одном ( $i$ -м) направлении.

Состояниями рассматриваемой СМО (см. рис. 1) являются:

- $S_0^{(i)}$  — отсутствие автомашин в данном направлении непосредственно перед стоп-линией,
- $S_1^{(i)}$  — одна автомашина совершает проезд,
- $S_2^{(i)}$  — одна автомашина совершает проезд перекрестка и одна находится перед ним и т.д.,
- $S_n^{(i)}$  — все места в очереди заняты, т. е. весь квартал заполнен автомашинами.

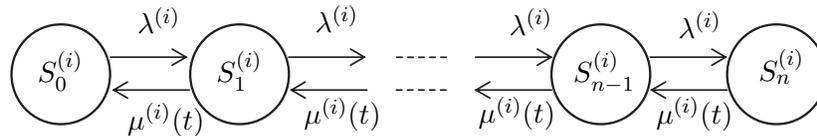


Рис. 1. Граф состояний системы.

Обозначим  $p_k^{(i)}(t)$  вероятность  $k$ -го состояния системы  $\mathcal{S}^{(i)}$  в момент времени  $t$ . В соответствии с теорией марковских цепей с непрерывным временем вероятности состояний удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова:

$$\begin{cases} \dot{p}_0^{(i)} = -\lambda^{(i)} p_0^{(i)} + \mu^{(i)}(t) p_1^{(i)}, \\ \dot{p}_1^{(i)} = -\lambda^{(i)} p_1^{(i)} - \mu^{(i)}(t) p_1^{(i)} + \lambda^{(i)} p_0^{(i)} + \mu^{(i)}(t) p_2^{(i)}, \\ \dots \\ \dot{p}_{n-1}^{(i)} = -\lambda^{(i)} p_{n-1}^{(i)} - \mu^{(i)}(t) p_{n-1}^{(i)} + \lambda^{(i)} p_{n-2}^{(i)} + \mu^{(i)}(t) p_n^{(i)}, \\ \dot{p}_n^{(i)} = \lambda^{(i)} p_{n-1}^{(i)} - \mu^{(i)}(t) p_n^{(i)}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь  $\mu^{(i)}(t)$  — кусочно-постоянная функция интенсивности проезда. Для нечетных направлений

$$\mu^{(i)}(t) = \begin{cases} \bar{\mu}^{(i)}, & kT \leq t < kT + \tau, \\ 0, & kT + \tau \leq t < kT + T, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $k = k(t) = [t/T]$  — количество циклов светофора, прошедших от начала отсчета до момента  $t$ ,  $[z]$  — целая часть числа  $z$ ,  $\tau$  — продолжительность "зеленой" фазы светофора для нечетных направлений.

Введем в рассмотрение функцию переключения светофора

$$u(t) = u(t; T, \tau) = \begin{cases} 1, & kT \leq t < kT + \tau, \\ 0, & kT + \tau \leq t < kT + T, \end{cases} \quad (2.3)$$

Тогда интенсивности проезда равны

$$\mu^{(i)}(t) = \begin{cases} u(t)\bar{\mu}^{(i)}, & i = 1, 3, \\ (1 - u(t))\bar{\mu}^{(i)}, & i = 2, 4. \end{cases}$$

Через  $q^{(i)}(t)$  обозначим  $(n + 1)$ -мерный вектор вероятностей состояний системы  $\mathcal{S}^{(i)}$  в момент времени  $t$ :  $q^{(i)}(t) = \{p_0^{(i)}(t), p_1^{(i)}(t), \dots, p_n^{(i)}(t)\}^T$ , который должен удовлетворять условию нормировки

$$l^T q^{(i)}(t) \equiv 1, \quad (2.4)$$

где  $T$  — знак транспонирования,  $l = \{1, 1, \dots, 1\}^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Систему уравнений (2.1) можно кратко записать в матричном виде

$$\dot{q}^{(i)} = (\lambda^{(i)} A + \mu^{(i)}(t) B) q^{(i)}, \quad (2.5)$$

где  $A$  и  $B$  — матрицы размера  $(n + 1) \times (n + 1)$ ,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Случай, когда движение по перекрестку осуществляется одновременно по двум или более полосам, рассматривается аналогично и моделируется с помощью двух- или трехканальной системы. При этом можно считать, что очередь перед светофором общая для всех автомобилей, а количество мест в очереди увеличивается пропорционально числу полос движения. При дальнейшей разработке модели возможно учитывать лево- и право-поворотное движение, а также сложные циклы светофора.

### 3. Математическая модель всего перекрестка

Рассмотрим модель движения по перекрестку с однополосным движением по каждому направлению. Объединяя 4 системы вида (2.5) в одну систему, получаем систему  $4(n + 1)$  дифференциальных уравнений, которую можно представить в виде блоков:

$$\begin{cases} \dot{q}^{(1)} = (\lambda^{(1)} A + u\bar{\mu}^{(1)} B) q^{(1)}, \\ \dot{q}^{(2)} = (\lambda^{(2)} A + (1 - u)\bar{\mu}^{(2)} B) q^{(2)}, \\ \dot{q}^{(3)} = (\lambda^{(3)} A + u\bar{\mu}^{(1)} B) q^{(3)}, \\ \dot{q}^{(4)} = (\lambda^{(4)} A + (1 - u)\bar{\mu}^{(2)} B) q^{(4)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

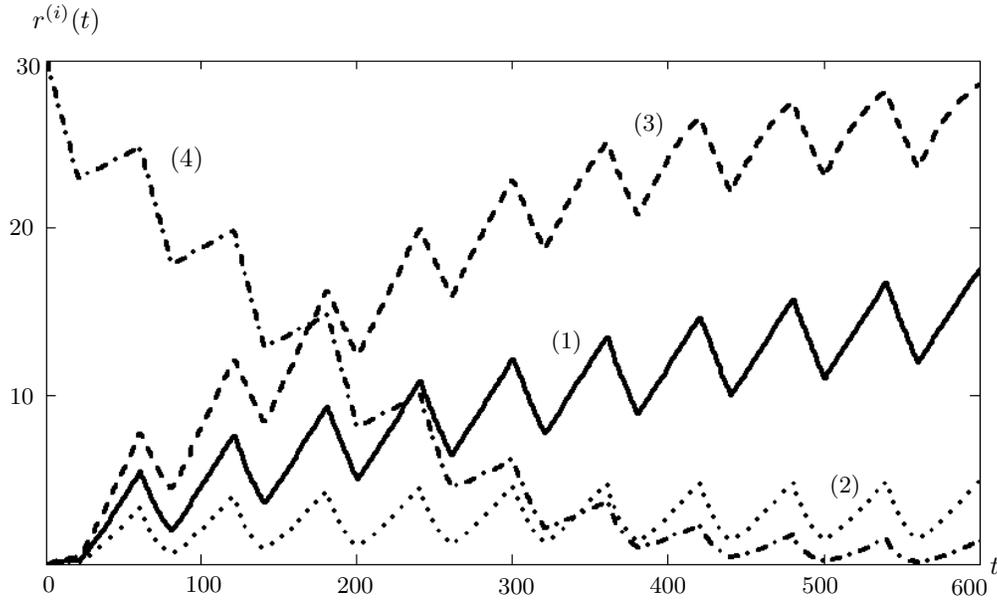


Рис. 2. Среднее число стоящих автомашин по направлениям:  $(i)$  — номер направления.

Управление  $u = u(t; T, \tau)$  выбирается в виде кусочно-постоянной периодической функции вида (2.3). Начальные условия описывают распределение вероятностей состояний систем и должны удовлетворять условиям нормировки

$$l^T q^{(i)}(0) = 1, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.2)$$

Основные характеристики работы системы можно найти, зная динамику вероятностей системы. Среднее суммарное количество автомашин, ожидающих проезда на прилегающих к перекрестку кварталах, равно

$$r(t) = r^{(1)}(t) + \dots + r^{(4)}(t), \quad (3.3)$$

где  $r^{(i)}(t)$  — средняя длина очереди по  $i$ -му направлению

$$r^{(i)}(t) = \sum_{k=1}^n (k-1) p_k^{(i)}(t), \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3.4)$$

Вероятность того, что хотя бы по одному из направлений образуется затор, находится по формуле  $P(t) = 1 - p_n^{(1)}(t) \times \dots \times p_n^{(4)}(t)$ . Система дифференциальных уравнений (3.1) может быть решена, например, с помощью пакета Mathcad.

На рис. 2 представлены результаты расчетов для следующих параметров: интенсивности входных потоков по направлениям составляют соответственно  $\lambda^{(1)} = 0.15$  автомобилей в секунду (а/с),  $\lambda^{(2)} = 0.1$  а/с,  $\lambda^{(3)} = 0.2$  а/с,  $\lambda^{(4)} = 0.05$  а/с, среднее время пересечения перекрестка взято одинаковым для всех направлений  $\theta^{(i)} = (\mu^{(i)})^{-1} = 2.5$  с, длина полного цикла светофора  $T = 60$  с, зеленая фаза  $\tau = 30$  с, допустимая длина очереди для каждого направления  $m^{(i)} = 30$  автомашин. Изображены зависимости от времени средней длины очереди  $r^{(i)}(t)$  по каждому из 4 направлений, номера направлений указаны на графиках. По горизонтальной оси отложено время в секундах. В начальный момент времени по 4-му направлению весь квартал был занят:  $q^{(4)}(0) = \{0, 0, \dots, 0, 1\}^T$ , по остальным направлениям машин на перекрестке не было:  $q^{(i)}(0) = \{1, 0, \dots, 0\}^T$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Исследование решений системы (3.1) позволяет определить, при каких значениях входных параметров перекресток работает нормально, какое время требуется для ликвидации пробки,

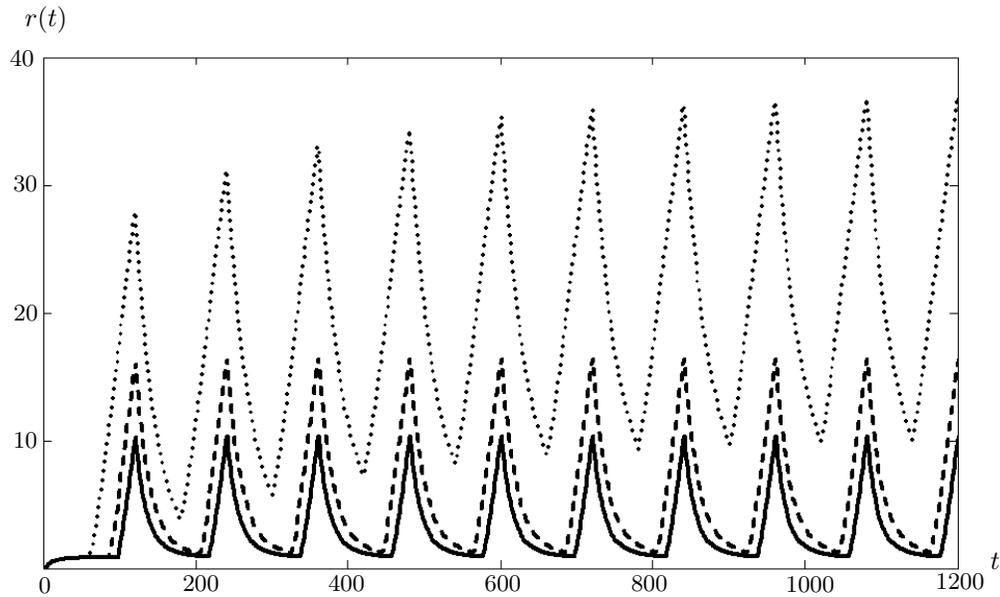


Рис. 3. Зависимость среднего числа стоящих автомобилей на перекрестке  $r(t)$  от продолжительности зеленой фазы.

возникшей в каком-нибудь из направлений (например, на рис. 2 — около 5 полных циклов светофора) и т. д.

Обозначим долю входного потока по нечетным направлениям в суммарной интенсивности входного потока

$$k_\tau = \frac{\lambda^{(1)} + \lambda^{(3)}}{\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} + \lambda^{(4)}}.$$

Исследование зависимости среднего числа автомобилей на перекрестке  $r(t)$  от продолжительности зеленого сигнала  $\tau$  для нечетных направлений не подтверждает в рассматриваемой модели гипотезу о том, что оптимальная продолжительность зеленого сигнала  $\tau^*$  пропорциональна суммарной интенсивности потоков в нечетном направлении, т. е. значение  $\tau_k = k_\tau T$  не является, вообще говоря, оптимальным по критерию минимального ожидаемого числа автомобилей перед светофором.

На рис. 3 интенсивности всех потоков такие же, как и на предыдущем, продолжительность полного цикла  $T = 120$  с, в начальный момент машин на перекрестке нет. Выбирались различные значения длины зеленой фазы:  $\tau_1 = 0.5T$  — точечная линия,  $\tau_2 = \tau_k = 0.7T$  — штриховая линия,  $\tau_3 = 0.8T$  — сплошная линия. Нетрудно заметить, что в последнем случае среднее количество ожидающих автомобилей меньше, т. е.  $\tau^* \neq \tau_k$ .

#### 4. Стационарный режим работы

Численное решение системы (3.1) не позволяет провести аналитические исследования с целью оптимизации работы системы, поэтому исследовались стационарные режимы работы СМО.

Далее через  $Q(t) \in \mathbb{R}^{4(n+1)}$  будем обозначать объединенный вектор вероятностей состояний  $Q(t) = \{q^{(1)}(t), \dots, q^{(4)}(t)\}^T$ . Так как система дифференциальных уравнений (3.1) имеет периодическую правую часть, то с увеличением  $t$  ее решение может приближаться к некоторой периодической функции  $Z(t)$ , которую назовем *периодическим стационарным режимом работы системы*.

**О п р е д е л е н и е 1.** Если для любых начальных условий, удовлетворяющих при  $t = 0$  равенству (2.4), соответствующее решение системы дифференциальных уравнений (3.1) приближается к вектор-функции  $Z(t) = \{z^{(1)}(t), \dots, z^{(4)}(t)\}^T$ , периодической с периодом  $T$ , т.е. выполняется условие

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Z(t) - Q(t)\| = 0,$$

где  $\|Z\|$  — норма вектора, то  $Z(t)$  называется периодическим стационарным режимом работы системы.

Из определения следует, что стационарный режим работы может быть только один, и он совпадает с асимптотически устойчивым периодическим решением системы (2.5), (2.4).

Перепишем систему дифференциальных уравнений (2.5) и условие (2.4), описывающие движение в  $i$ -м направлении, в эквивалентном виде, исключив одну из переменных, например  $p_0^{(i)}$ , из системы. Учитывая равенство  $p_0^{(i)} = 1 - (p_1^{(i)} + \dots + p_n^{(i)})$ , получаем неоднородную систему дифференциальных уравнений для  $n$ -мерного вектора  $x^{(i)}(t) = \{p_1^{(i)}(t), \dots, p_n^{(i)}(t)\}^T$ ,

$$\dot{x}^{(i)} = (\lambda^{(i)} A_0 + \mu^{(i)}(t) B_0) x^{(i)} + \lambda^{(i)} e_1, \quad (4.1)$$

где вектор  $e_1 = \{1, 0, \dots, 0\}^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $n \times n$  матрицы  $A_0$  и  $B_0$  равны

$$A_0 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим однородную систему

$$\dot{x}^{(i)} = (\lambda^{(i)} A_0 + \mu B_0) x^{(i)} \quad (4.2)$$

при произвольном фиксированном  $\mu \geq 0$ .

**Утверждение 1.** Для любых  $\lambda^{(i)} > 0$ ,  $\mu \geq 0$  однородная система дифференциальных уравнений (4.2) асимптотически устойчива.

При  $\mu = 0$  асимптотическая устойчивость системы (4.2) при  $\lambda^{(i)} > 0$  проверяется непосредственно. Асимптотическая устойчивость системы при любых  $\mu > 0$ ,  $\lambda^{(i)} > 0$  доказана в теории СМО [20], так как система (4.2) является однородной частью системы, описывающей динамику вероятностей состояний для СМО с ограниченным числом мест в очереди.

Через  $\Phi_\mu^{(i)}(t)$  обозначим фундаментальную матрицу системы (4.2) при значении параметра  $\mu = \mu^{(i)}$ , при  $\mu = 0$  соответствующую матрицу обозначим через  $\Phi_0^{(i)}(t)$ . Введем обозначения

$$q_0 = A_0^{-1} e_1, \quad q_1^{(i)} = \lambda^{(i)} (C_1^{(i)})^{-1} e_1, \quad C_1^{(i)} = \lambda^{(i)} A_0 + \mu^{(i)} B_0. \quad (4.3)$$

Отметим, что матрица  $A_0$  невырождена, а матрица  $C_1^{(i)}$  невырождена при любых положительных  $\lambda^{(i)}$  и  $\mu^{(i)}$ .

**Теорема 1.** Для системы дифференциальных уравнений (4.1), (2.2) всегда существует периодическое с периодом  $T$  решение  $z^{(i)}(t)$ , значения которого в моменты  $kT$  удовлетворяют равенству  $z^{(i)}(kT) = z^{(i)}(0) = z_0^{(i)}$ , причем  $z_0^{(i)}$  находится по формуле

$$z_0^{(i)} = [I - \Phi_0^{(i)}(T - \tau) \Phi_\mu^{(i)}(\tau)]^{-1} \left\{ [\Phi_0^{(i)}(T - \tau) (\Phi_\mu^{(i)}(\tau) - I) q_1^{(i)} + q_0] - q_0 \right\}, \quad (4.4)$$

где векторы  $q_0$  и  $q_1^{(i)}$  удовлетворяют равенствам (4.3),  $I$  — единичная матрица.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $z^{(i)}(t)$  — произвольное решение системы (4.1). Из вида системы и функции  $\mu^{(i)}(t)$  следует, что вектор-функция  $y(t) = z^{(i)}(t) + q_1^{(i)}$ , где  $q_1^{(i)}$  и  $C_1^{(i)}$  определяются равенствами (4.3), на интервале  $[0; \tau]$  удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению (4.2) при  $\mu = \mu^{(i)}$ . Следовательно, выполняется равенство  $y(\tau) = \Phi_\mu^{(i)}(\tau)y(0)$ , где  $\Phi_\mu^{(i)}(t)$  — фундаментальная матрица системы (4.2). Отсюда получаем, что

$$z^{(i)}(\tau) = \Phi_\mu^{(i)}(\tau)[z^{(i)}(0) + q_1^{(i)}] - q_1^{(i)}. \quad (4.5)$$

На интервале  $[\tau, T]$  функция  $\mu^{(i)}(t) \equiv 0$ , и уравнение (4.1) принимает вид  $\dot{z}^{(i)} = \lambda^{(i)}A_0z^{(i)} + \lambda^{(i)}e_1$ . Следовательно,

$$z^{(i)}(T) = \Phi_0^{(i)}(T - \tau)[z^{(i)}(\tau) + q_0] - q_0, \quad (4.6)$$

где  $q_0 = A_0^{-1}e_1$ . Подставляя равенство (4.5) в (4.6) получим

$$z^{(i)}(T) = \Phi_0^{(i)}(T - \tau)\left[\Phi_\mu^{(i)}(\tau)[z^{(i)}(0) + q_1^{(i)}] - q_1^{(i)} + q_0\right] - q_0.$$

В силу периодичности системы (4.1) необходимым и достаточным условием периодичности с периодом  $T$  решения  $z^{(i)}(t)$  является равенство  $z^{(i)}(0) = z^{(i)}(T)$ . Отсюда для вектора  $z_0^{(i)} = z^{(i)}(0)$  получаем  $z_0^{(i)} = \Phi_0^{(i)}(T - \tau)\left[\Phi_\mu^{(i)}(\tau)[z_0 + q_1^{(i)}] - q_1^{(i)} + q_0\right] - q_0$ . Сгруппируем подобные:

$$z_0^{(i)} - \Phi_0^{(i)}(T - \tau)\Phi_\mu^{(i)}(\tau)z_0^{(i)} = \Phi_0^{(i)}(T - \tau)\Phi_\mu^{(i)}(\tau)q_1^{(i)} - \Phi_0^{(i)}(T - \tau)q_1^{(i)} + \Phi_0^{(i)}(T - \tau)q_0 - q_0.$$

Так как однородная система (4.2) асимптотически устойчива при любых  $\lambda^{(i)} > 0$ ,  $\mu \geq 0$ , то для любого  $t > 0$  матрицы  $\Phi_\mu^{(i)}(t)$  и  $\Phi_0^{(i)}(t)$  описывают сжимающие отображения [21], т. е.  $\|\Phi_\mu^{(i)}(t)x\| < \|x\|$  для  $x \neq \mathbf{0}$ . Следовательно, матрица  $I - \Phi_0^{(i)}(T - \tau)\Phi_\mu^{(i)}(\tau)$  обратима, и получено равенство (4.4). Выберем решение  $z^{(i)}(t)$  системы (4.1), удовлетворяющее начальному условию  $z^{(i)}(0) = z_0^{(i)}$ . Такое решение существует и единственно. Из проведенных рассуждений следует, что это решение является периодическим с периодом  $T$ .

**Теорема 2.** *Периодическое решение  $z^{(i)}(t)$ , удовлетворяющее начальному условию  $z^{(i)}(0) = z_0^{(i)}$ , где  $z_0^{(i)}$  находится из равенства (4.4), является асимптотически устойчивым периодическим решением системы (4.1).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $x^{(i)}(t)$  — произвольное решение неоднородной системы (4.1), тогда разность  $y(t) = x^{(i)}(t) - z^{(i)}(t)$  является решением однородной системы (4.2) с кусочно-постоянной периодической правой частью. Получаем, что

$$y(kT + t) = [\Phi_0^{(i)}(T - \tau)\Phi_\mu^{(i)}(\tau)]^k y(t).$$

Так как при  $\mu = 0$  и  $\mu = \mu^{(i)}$  соответствующие системы (4.2) дифференциальных уравнений асимптотически устойчивы, то решение  $y(t)$  сходится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

На основании теорем 1 и 2 могут быть найдены стационарные режимы работы для различных входных параметров системы, определены основные характеристики движения (средняя длина очереди по каждому направлению, вероятность возникновения заторов и т. п.) при заданном режиме работы светофора.

## 5. Задача оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления взаимосвязанными СМО. В соответствии с подходом задача управления для марковских цепей с непрерывным временем и конечным числом состояний сводится к задаче управления для системы дифференциальных уравнений (2.4),

описывающих вероятности состояний. По смыслу задачи управление  $u(t)$  принимает только два значения 0 или 1 при любом  $t$ :  $u(t) \in U_0 = \{0\} \cup \{1\}$ .

В качестве критерия оптимальности будем рассматривать критерий

$$r_T = \frac{1}{T} \int_0^T r(t) dt \rightarrow \min, \quad (5.1)$$

где  $r(t)$  — суммарное среднее число автомашин, ожидающих проезда на перекрестке, определяемое соотношениями (3.3), (3.4). Поскольку система описывает динамику вероятностей состояний марковской цепи с дискретным временем, то управление  $u(\cdot)$  не может зависеть от значений вероятностей состояний, т.е. от вектора  $Q(t) = \{q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)}, q^{(4)}\}^T$ .

В соответствии с современной теорией управляемых марковских цепей возможны два принципиально различных способа формирования управлений:

(1) управление не зависит от текущего состояния системы, т.е. выбирается программным в виде  $u(t)$ ;

(2) управление определяется в зависимости от состояния, в котором находится система.

Рассмотрим более подробно второй подход, базирующийся на теории управляемых марковских процессов [22, 23]. Будем предполагать, что рассматриваемые случайные процессы определены на вероятностном пространстве  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}\}$ .

Обозначим  $X^{(i)}(t)$  управляемый марковский случайный процесс с кусочно-непрерывными справа траекториями, описывающий динамику  $i$ -й подсистемы,  $i = 1, \dots, 4$ . Процессы  $X^{(i)}(t)$  принимают значения из конечного множества  $\mathbf{E}_{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , состоящего из  $n+1$  базисного вектора пространства  $\mathbb{R}^{n+1}$ :  $\mathbf{E}_{n+1} = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ . Если в момент времени  $t$  система  $\mathcal{S}^{(i)}$  находится в состоянии  $S_k^{(i)}$ , т.е. очередь по  $i$ -му направлению состоит из  $k$  автомобилей, то  $X^{(i)}(t) = e_k$ . Вероятности состояний  $i$ -й системы в момент времени  $t$  будут равны:  $p_k^{(i)}(t) = P\{X^{(i)}(t) = e_k\}$ .

Обозначим через  $X_t$  совокупность четырех марковских процессов  $X_t = \{X^{(1)}(s), \dots, X^{(4)}(s) \mid s \in [0, t]\}$ . Пусть  $\mathcal{F}_t^X$  —  $\sigma$ -алгебра, порожденная процессом  $X_t$ . Допустимые управления принадлежат классу марковских управлений, т.е.  $\mathcal{F}_t^X$ -измеримых функций  $u(t, X_t)$  со значениями во множестве  $U_0$ . Управление марковского типа в случае одного процесса  $X_t^{(i)}$  записывается в виде [23]

$$v(t, X^{(i)}) = \sum_{k=0}^{k=n^{(i)}+1} v_k(t) I\{X^{(i)} = e_k\}, \quad (5.2)$$

где  $v_k(\cdot)$  — измеримые детерминированные функции, определенные на  $[0, +\infty)$ , со значениями в  $U_0$ ,  $I\{X^{(i)} = e_k\}$  — индикатор случайного события.

Примером такого управления является управление, при котором разрешающий сигнал включается в том и только том случае, когда в очереди по данному направлению более  $K$  автомобилей, т.е.  $v_k = 1$  для  $k > K$ .

Количество возможных состояний рассматриваемой системы  $\mathcal{S}$ , состоящей из 4 независимых и связанных только через управление подсистем, равно  $N = (n^{(1)} + 1) \times \dots \times (n^{(4)} + 1)$ . Учитывая, что возможные значения  $n^{(i)} > 20$ , получаем, что число дифференциальных уравнений для описания динамики значительно, хотя эта система дифференциальных уравнений допускает существенные упрощения.

Реализация марковского управления предполагает установку датчиков длины очереди по каждому из направлений. В связи с объемностью получаемой задачи и отсутствием датчиков на большинстве российских перекрестков модель позиционного управления системой в статье далее не рассматривается.

Рассмотрим задачу программного управления стационарным периодическим режимом работы системы (3.1), (3.2), где управление  $u(t)$  удовлетворяет ограничению  $u(t) \in U_0$  и определяется равенством (2.3). Параметры длины цикла  $T > 0$  и длины зеленой фазы  $\tau$ ,  $0 < \tau < T$ , в нечетном направлении подлежат определению на основе критерия минимума средней длины очереди  $r_T$ , определяемой соотношениями (3.3), (3.4), (5.1). Такая задача сводится к задаче оптимизации функции двух переменных  $\tau$  и  $T$ .

Для решения поставленной задачи программного управления на основе теоремы 1 запишем решение системы (3.1) с управлением (2.3) и ограничениями (3.2) при заданном количестве полос движения, заданном числе мест  $n^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , в очереди по каждому направлению и произвольных значениях интенсивностей потоков и режима работы светофора. Средняя длина очереди  $r_T$  в установившемся режиме выражается аналитически через параметры системы. После чего получаем задачу оптимизации функции двух переменных  $T$  и  $\tau$ , которую можно решить численно для фиксированных значений интенсивностей входных потоков  $\lambda^{(i)}$  и интенсивностей обслуживания  $\mu^{(i)}$ .

Для тестирования задачи управления был рассмотрен случай равных интенсивностей входных потоков по всем направлениям [17]. В этом случае очевидно, что оптимальная продолжительность зеленого сигнала составит половину цикла  $\tau = T/2$ , и единственным параметром оптимизации остается продолжительность всего цикла  $T$ . Оптимальная продолжительность цикла находилась численно с использованием пакета MathCad. Однако расчеты оптимального цикла на основе критерия (5.1) показали, что при некоторых значениях интенсивностей входных потоков значение критерия  $r_T$  достигается при слишком малых с практической точки зрения значениях  $T$ . Следовательно, рассмотренная выше модель нуждается в уточнении.

## 6. Переменная интенсивность обслуживания

Анализ результатов моделирования статистических данных показал, что при включении зеленого сигнала среднее время обслуживания (проезда перекрестка)  $\theta(t)$  не является постоянным и уменьшается по мере увеличения времени  $t$  от начала включения зеленого сигнала из-за увеличения скорости подъезжающих к стоп-линии автомобилей. Для более точного описания интенсивности использовалась модель интеллектуального водителя [7], в которой описывается изменение скорости автомобиля при разгоне с места до максимально дозированной скорости, в нашем случае  $V_{max} = 60$  км/ч = 16.67 м/с, и изменение среднего расстояния между автомашинами при увеличении скорости. Для относительно малых скоростей в промежутке от 0 до 60 км/ч изменение расстояния аппроксимируется прямой  $s(v) = l_0 + vA$ , где  $l_0$  — расстояние между стоящими автомашинами,  $A$  — безопасное время для реагирования. Получаем, что среднее время проезда  $\theta(t) = v^{-1}(s(v(t)) + l_1) = v^{-1}l + A$ , здесь  $l_1$  — средняя длина автомашины,  $l = l_0 + l_1$  — средняя длина автомашины с дистанцией (для стоящих машин).

Дополнительно учитывались статистические наблюдения за временем проезда автомашинами перекрестка [17], в результате сделан вывод о том, что зависимость среднего времени проезда от времени, прошедшего от включения зеленого сигнала, достаточно хорошо аппроксимируется функцией  $\theta(t) = a + be^{-kt}$ . Решения системы (2.5) при переменной интенсивности проезда

$$\mu(t) = \begin{cases} (a + be^{-kt})^{-1}, & kT \leq t < kT + \tau, \\ 0, & kT + \tau \leq t < kT + T, \end{cases} \quad (6.1)$$

близки к решениям системы при кусочно-постоянной интенсивности проезда (2.2)  $\mu_0(t)$ , где  $\mu_0$  равно среднему значению  $\mu(t)$  на интервале  $[0; \tau]$ .

Для модели с изменяющейся интенсивностью проезда (6.1) зависимость средней длины очереди  $r_T$  от продолжительности цикла  $T$  исследовалась в случае, когда по всем направлениям интенсивность входящих потоков одинакова:  $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda^{(4)} = \lambda$  и зеленый

сигнал составляет половину цикла:  $\tau = T/2$ . Оптимальные продолжительности циклов для различных входных потоков  $\lambda$  представлены в таблице.

Оптимальная продолжительность цикла  $T$

$\lambda$ — интенсивность входных потоков (автомашин/с)	0,2	0,25	0,3	0,35
$T$ — оптимальная продолжительность цикла (с)	46	68	86	104

## 7. Заключение

В статье исследуется математическая модель, описывающая проезд автотранспорта через регулируемый перекресток. Получены соотношения для нахождения стационарного периодического режима работы системы, что позволяет вычислять основные показатели (среднюю длину очереди, вероятность того, что весь квартал будет занят, вероятность свободного проезда) по входным параметрам. Предлагается модель, описывающая изменение интенсивности проезда в зависимости от времени с момента включения зеленого сигнала, проведены численные расчеты оптимальной продолжительности цикла для случая равных входящих потоков.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lighthill M.J., Whitham G.B.** On kinematic waves. II. A theory of traffic on long crowded roads // Proc. Royal Soc. of London. Ser. A. 1955. Vol. 229. P. 317–345.
2. **Nagel K., Wagner P., Woessler R.** Still flowing: approaches to traffic flow and traffic jam modeling // Operations Research. 2003. Vol. 51, № 5. P. 681–710.
3. **Kerner B.S.** Three-phase traffic theory and highway capacity // Physica. Ser. A. 2004. Vol. 333. P. 379–440.
4. **Куржанский А.Б.** Задача управления потоками транспорта на автостраде // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: сб. тез. докл. X Междунар. семинара им. Е. С. Пятицкого. М.: ИПУ РАН, 2008. С. 168–169.
5. Моделирование транспортных потоков в крупном городе с применением к московской агломерации / А.С. Алиев, А.И. Стрельников, В.И. Швецов, Ю.З. Шершевский // Автоматика и телемеханика. 2005. № 11. С. 113–125.
6. **Швецов В.И.** Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11. С. 3–46.
7. **Treiber M., Hennecke A., Helbing D.** Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations // Phys. Rev. Ser. E. 2000. Vol. 62. P. 1805–1824.
8. **Jiang R., Wu Q., Zhu Z.** Full velocity difference model for a car-following theory // Phys. Rev. Ser. E. 2001. Vol. 64. P. 17–101.
9. **Nagel K., Schreckenberg M.** A cellular automaton model for freeway traffic // J. Phys. France. Ser. I. 1992. Vol. 2. P. 2221–2229.
10. **Gipps P.G.** A behavioural car-following model for computer simulation // Transp. Research. Part B: Methodological. 1981. Vol. 5. P. 105–111.
11. SUMO (Simulation of Urban MObility). URL: <http://sumo.sourceforge.net>. (Open source traffic simulator.)
12. **Treiber M.** The Website <http://www.traffic-simulation.de> provides an interactive simulation of the Intelligent Driver Model in several scenarios including open-source access (accessed May 2007.)
13. **Allsop R.B.** SINSET: A computer program for traffic capacity of signal-controlled road junction // Traffic Eng. Control. 1971. Vol. 12. P. 58–60.
14. **Importa G., Cantarella G.E.** Control systems design for an individual signalised junction // Transp. Res. Ser. B. 1984. Vol. 18. P. 147–167.
15. **Sen S., Head L.** Controlled optimization of phases and intersection // Transp. Sci. 1997. Vol. 31. P. 5–17.

16. **Alvarez I., Poznyak A., Malo A.** Urban traffic control problem via game theory application // Proc. 46th IEEE conf. on decision and control. New-Orleans, 2007. P. 957–2961.
17. **Завалищин Д.С., Тимофеева Г.А.** Математическая модель регулируемого перекрестка // Транспорт Урала. 2008. № 2(17). С. 92–97.
18. **Zavalishchin D. S., Timofeeva G. A.** Mathematical modelling of vehicle flow on a crossroads // Proc. 18th IEEE international conf. on control applications. Part of 2009 IEEE Multi-conference on systems and control. Saint Petersburg, 2009. P. 849–852.
19. **Ахмадинуров М.М.** Определение оптимального цикла светофора при заданном входящем потоке автомобилей // Политранспортные системы: материалы VI Всерос. науч.-техн. конф. Ч. 1. Новосибирск, 2009. С. 45–49.
20. **Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.** Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1991. 384 с.
21. **Якубович В.А., Старжинский В.М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
22. **Miller Bruce L.** Finite state continuous time Markov decision process with a finite planning horizon // SIAM J. Control. 1968. Vol. 6, № 2. P. 266–279.
23. **Miller В.М., Miller G. В., Siemenikhin К.У.** Control of Markov chains with constraints // Идентификация систем и задачи управления: тр. VIII Междунар. конф. М.: ИПУ РАН, 2009. С. 737–760.

Завалищин Дмитрий Станиславович

Поступила 4.05.2009

канд. физ.-мат. наук, доцент

ст. научн. сотрудник

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: zav@imm.uran.ru

Тимофеева Галина Адольфовна

д-р физ.-мат. наук

зав. каф.

Уральский гос. ун-т путей сообщения

e-mail: Gtimofeeva@mail.ru

УДК 517.977.8

## ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЭША И ШТАКЕЛЬБЕРГА В ЛИНЕЙНОЙ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ<sup>1</sup>

А. Ф. Клейменов, Д. Р. Кувшинов, С. И. Осипов

В статье предлагаются численные методы построения решений Нэша и Штакельберга в линейной неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц с терминальными показателями качества и геометрическими ограничениями на управления игроков. Формализация стратегий игроков и порождаемых ими движений основывается на формализации и результатах теории позиционных антагонистических дифференциальных игр, разработанной Н. Н. Красовским и его научной школой. Предполагается, что игра сводится к игре на плоскости, а ограничения на управления игроков задаются в виде выпуклых многоугольников. Задача нахождения решений игры сводится к решению нестандартных задач оптимального управления. Для построения приближенных траекторий в этих задачах используется ряд алгоритмов вычислительной геометрии, в частности, алгоритмы построения выпуклой оболочки, объединения и пересечения многоугольников и алгебраической суммы многоугольников.

Ключевые слова: неантагонистическая позиционная дифференциальная игра, решение Нэша, решение Штакельберга, численный алгоритм.

A. F. Kleimenov, D. R. Kuvshinov, S. I. Osipov. Numerical construction of Nash and Stackelberg solutions in a two-player linear nonantagonistic positional differential game.

Numerical methods are proposed for constructing Nash and Stackelberg solutions in a two-player linear nonantagonistic positional differential game with terminal quality indices and geometric constraints on the players' controls. The formalization of the players' strategies and of the motions generated by them is based on the formalization and results from the theory of positional antagonistic differential games developed by N.N. Krasovskii and his school. It is assumed that the game is reduced to a plane game and the constraints on the players' controls are given in the form of convex polygons. The problem of finding solutions of the game is reduced to solving nonstandard optimal control problems. For the construction of approximate trajectories in these problems, several computational geometry algorithms are used, in particular, the algorithms for constructing the convex hull, the union and intersection of polygons, and the algebraic sum of polygons.

Keywords: nonantagonistic positional differential game, Nash solution, Stackelberg solution, numerical algorithm.

### Введение

Важность задач построения решений в антагонистических и неантагонистических дифференциальных играх продемонстрирована в работах [1–4]. Отметим работы [5, 6], в которых предложены алгоритмы построения решений в антагонистических позиционных дифференциальных играх. Существенно меньшее число работ посвящено построению решений в неантагонистических дифференциальных играх; как правило, в этих работах рассматриваются линейно-квадратичные игры. В данной работе представлены алгоритмы построения равновесных по Нэшу решений и решений Штакельберга в линейной позиционной дифференциальной игре с геометрическими ограничениями на управления игроков и цилиндрическими терминальными показателями качества.

Изложение построено следующим образом. Разд. 1 содержит формализацию игры и необходимые определения. Разд. 2 описывает общий метод построения решений Нэша и Штакельберга, основанный на сведении исходной задачи к нестандартным задачам (оптимального) управления. Разд. 3 описывает алгоритм построения решений Штакельберга, основанный на аппроксимации допустимых траекторий с помощью последовательности пересечений стабильных мостов и локальных множеств достижимости. Разд. 4 содержит описание алгоритма

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00313).

построения решений Нэша, который является обобщением алгоритма из разд. 3 и позволяет строить аппроксимацию множества концов нэшевских траекторий. Разд. 5 описывает алгоритм построения решений Нэша, использующий некоторые вспомогательные биматричные игры. Отметим, что алгоритмы из разд. 4 и 5 позволяют также выделять решения Нэша, которые являются неулучшаемыми по Парето. Краткая характеристика программной реализации алгоритмов дана в разд. 6. Результаты численного эксперимента для задачи движения материальной точки в плоскости представлены в разд. 7. Некоторые возможные направления дальнейших исследований в данной области даны в заключении.

## 1. Формализация неантагонистической позиционной дифференциальной игры двух лиц

Пусть динамика неантагонистической позиционной дифференциальной игры (НПДИ) задана уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{C}(t)\mathbf{v}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vartheta$  — фиксированный момент окончания игры. Игроки 1 и 2 распоряжаются выбором управлений  $\mathbf{u} \in P \subset \mathbb{R}^k$  и  $\mathbf{v} \in Q \subset \mathbb{R}^l$  соответственно, где множества  $P$  и  $Q$  — выпуклые многогранники. Матрицы-функции  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$  и  $\mathbf{C}(t)$  непрерывны и имеют размеры  $n \times n$ ,  $n \times k$  и  $n \times l$  соответственно. Пусть компактное множество  $G \ni (t_0, \mathbf{x}_0)$  при  $t \in [t_0, \vartheta]$  содержит все траектории системы (1.1), в нем начинающиеся.

Цель игрока  $i$  состоит в максимизации терминального показателя качества

$$I_i = \sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta)), \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

где  $\sigma_i: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$  — непрерывные и вогнутые функции.

Полагаем, что оба игрока имеют полную информацию о текущей позиции игры  $(t, \mathbf{x}(t))$ . При формализации стратегий игроков и порождаемых ими движений в игре будем опираться на формализацию, введенную для антагонистических позиционных дифференциальных игр (АПДИ) в [1, 2]. Формализация НПДИ подробно изложена в [4]. Чистая стратегия (далее — *стратегия*) игрока 1 определяется как пара  $U \div \{\mathbf{u}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$ , где  $\mathbf{u}(\cdot)$  — произвольная функция позиции  $(t, \mathbf{x})$  и положительного параметра точности  $\varepsilon$ , принимающая значения из  $P$ . Функция  $\beta_1: (0, \infty) \mapsto (0, \infty)$  является непрерывной, монотонной и удовлетворяет условию  $\beta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Она имеет следующий смысл: при фиксированном  $\varepsilon$  величина  $\beta_1(\varepsilon)$  служит ограничением сверху на шаг разбиения отрезка  $[t_0, \vartheta]$ , используемого игроком 1 при построении ломаных Эйлера. Стратегия  $V \div \{\mathbf{v}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$  игрока 2 вводится аналогично.

Рассматриваем движения двух типов, порождаемые парой стратегий игроков: аппроксимационные (ломаные Эйлера) и идеальные (предельные). Аппроксимационное движение  $\mathbf{x}[\cdot, t_0, \mathbf{x}_0, U, \varepsilon_1, \Delta_1, V, \varepsilon_2, \Delta_2]$  вводится для фиксированных значений параметров точности игроков  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и для фиксированных разбиений  $\Delta_2 = \{t_j^{(2)}\}$  отрезка  $[t_0, \vartheta]$   $\Delta_1 = \{t_k^{(1)}\}$ , выбираемых игроком 1 и игроком 2 соответственно, с соблюдением следующих условий, наложенных на шаги разбиений:  $\delta(\Delta_i) \leq \beta_i(\varepsilon_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Здесь  $\delta(\Delta_i) = \max_j (t_{j+1}^{(i)} - t_j^{(i)})$ . Предельное движение, порожденное парой стратегий  $(U, V)$  из начальной позиции  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ , определяется как непрерывная функция  $\mathbf{x}[t] = \mathbf{x}[t, t_0, \mathbf{x}_0, U, V]$ , для которой существует последовательность аппроксимационных движений

$$\{\mathbf{x}[t, t_0^k, \mathbf{x}_0^k, U, \varepsilon_1^k, \Delta_1^k, V, \varepsilon_2^k, \Delta_2^k]\},$$

равномерно сходящаяся к  $\mathbf{x}[t]$  на  $[t_0, \vartheta]$  при

$$k \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_1^k \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2^k \rightarrow 0, \quad t_0^k \rightarrow t_0, \quad \mathbf{x}_0^k \rightarrow \mathbf{x}_0, \quad \delta(\Delta_i^k) \leq \beta_i(\varepsilon_i^k).$$

Пара стратегий  $(U, V)$  порождает непустое компактное (в метрике пространства  $C[t_0, \vartheta]$ ) множество  $X(t_0, \mathbf{x}_0, U, V)$  предельных движений.

Введем следующие определения (см. [4]).

**О п р е д е л е н и е 1.** Пара стратегий  $(U^N, V^N)$  называется *равновесным по Нэшу решением* (*NE-решением*) *игры*, если для любого движения  $\mathbf{x}^*[\cdot] \in X(t_0, \mathbf{x}_0, U^N, V^N)$ , любого  $\tau \in [t_0, \vartheta]$  и любых стратегий  $U$  и  $V$  выполнены следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{x}[\cdot]} \sigma_1(\mathbf{x}[\vartheta], \tau, \mathbf{x}^*[\tau], U, V^N) &\leq \min_{\mathbf{x}[\cdot]} \sigma_1(\mathbf{x}[\vartheta], \tau, \mathbf{x}^*[\tau], U^N, V^N), \\ \max_{\mathbf{x}[\cdot]} \sigma_2(\mathbf{x}[\vartheta], \tau, \mathbf{x}^*[\tau], U^N, V) &\leq \min_{\mathbf{x}[\cdot]} \sigma_2(\mathbf{x}[\vartheta], \tau, \mathbf{x}^*[\tau], U^N, V^N), \end{aligned}$$

где максимумы вычисляются по соответствующим множествам предельных движений.

**О п р е д е л е н и е 2.** *NE-решение*  $(U^P, V^P)$ , являющееся неулучшаемым по Парето относительно величин  $I_1, I_2$  (1.2), называется *P-решением*.

Допустим, что выполнены следующие предположения.

1<sup>0</sup>. Игрок 1, называемый *лидером*, объявляет свою стратегию  $U^* \div \{\mathbf{u}^*(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \beta_1^*(\varepsilon)\}$  игроку 2 до игры.

2<sup>0</sup>. Игрок 2, называемый *ведомым*, зная стратегию лидера  $U^*$ , выбирает рациональную стратегию  $V^*$  из условия

$$\min \sigma_2(\mathbf{x}[\vartheta], t_0, \mathbf{x}_0, U^*, V) \longrightarrow \max_V,$$

где минимум функции  $\sigma_2$  вычисляется на множестве  $X(t_0, \mathbf{x}_0, U^*, V)$ .

Задача игрока 1 состоит в нахождении стратегии  $U^{S1}$ , обеспечивающей ему максимальное значение показателя  $\sigma_1(\mathbf{x}[\vartheta])$  (1.2) при условии рациональности игрока 2. Детальная постановка этой задачи, включающая рассмотрение различных вариантов выбора игроком 2 стратегии из множества рациональных стратегий, имеется в [4].

**О п р е д е л е н и е 3.** Пара стратегий  $(U^{S1}, V^{S1})$ , где  $V^{S1}$  — рациональная стратегия игрока 2, соответствующая объявленной стратегии  $U^{S1}$ , называется *S<sub>1</sub>-решением* или решением Штакельберга с лидером — первым игроком.

Пара стратегий  $(U^{S2}, V^{S2})$ , образующая *S<sub>2</sub>-решение*, определяется аналогично.

## 2. Вспомогательные антагонистические игры. Теоремы о структуре решений игры

Введем вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Динамика обеих игр описывается уравнением (1.1). В игре  $\Gamma_i$  игрок  $i$  максимизирует свой выигрыш  $\sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta))$  (1.2), в то время как игрок 3 —  $i$  противодействует ему.

Известно (см. [2]), что в обеих играх  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  существуют универсальные седловые точки

$$\{\mathbf{u}^{(i)}(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \mathbf{v}^{(i)}(t, \mathbf{x}, \varepsilon)\}, \quad i = 1, 2, \quad (2.1)$$

и непрерывные функции цены

$$\gamma_1(t, \mathbf{x}), \quad \gamma_2(t, \mathbf{x}). \quad (2.2)$$

Свойство универсальности стратегий (2.1) означает, что они оптимальны не только для заданной начальной позиции  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in G$ , но и для любой другой позиции  $(t_*, \mathbf{x}_*) \in G$ , рассматриваемой в качестве начальной.

**Теорема 1** (см. [4, с. 25]). Пусть пара стратегий  $(U^N, V^N)$  есть *N-решение*. Тогда для любой позиции  $(t_*, \mathbf{x}_*) \in \{(t, \mathbf{x}) \in G \mid t \in [t_0, \vartheta], \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(\cdot) \in X(t_0, \mathbf{x}_0, U^N, V^N)\}$ , любого движения  $\mathbf{x}(\cdot) \in X(t_*, \mathbf{x}_*, U^N, V^N)$  имеют место неравенства

$$\gamma_i(t, \mathbf{x}(t)) \leq \gamma_i(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) = \sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta)), \quad t \in [t_*, \vartheta], \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Сформулируем следующие задачи.

**Задача 1.** Найти измеримые управления  $\mathbf{u}(\cdot) = \{\mathbf{u}(t), t_0 \leq t \leq \vartheta\}$ ,  $\mathbf{u}(t) \in P$  п. в. и  $\mathbf{v}(\cdot) = \{\mathbf{v}(t), t_0 \leq t \leq \vartheta\}$ ,  $\mathbf{v}(t) \in Q$  п. в. такие, что порождаемая ими траектория  $\mathbf{x}(t)$   $t_0 \leq t \leq \vartheta$ , удовлетворяет неравенствам (2.3) с  $t_* = t_0$ .

**Задача 2.i** ( $i = 1, 2$ ). Найти измеримые управления  $\mathbf{u}(\cdot) = \{\mathbf{u}(t), t_0 \leq t \leq \vartheta\}$ ,  $\mathbf{u}(t) \in P$  п. в. и  $\mathbf{v}(\cdot) = \{\mathbf{v}(t), t_0 \leq t \leq \vartheta\}$ ,  $\mathbf{v}(t) \in Q$  п. в. такие, что порождаемая ими траектория  $\mathbf{x}(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ , удовлетворяет неравенствам

$$\gamma_{3-i}(t, \mathbf{x}(t)) \leq \gamma_{3-i}(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) = \sigma_{3-i}(\mathbf{x}(\vartheta)), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad (2.4)$$

и доставляет максимум показателю  $\sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta))$ .

Пусть измеримые управления  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{v}^*(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ , порождают траекторию  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ , системы (1.1). Рассмотрим стратегии игрока 1 и игрока 2

$$U^0 \div \{\mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \beta_1^0(\varepsilon)\}, \quad V^0 \div \{\mathbf{v}^0(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \beta_2^0(\varepsilon)\}, \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^0(t, \mathbf{x}, \varepsilon) &= \begin{cases} \mathbf{u}^*(t) & \text{при } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon\varphi(t), \\ \mathbf{u}^{(2)}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) & \text{при } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t)\| \geq \varepsilon\varphi(t), \end{cases} \\ \mathbf{v}^0(t, \mathbf{x}, \varepsilon) &= \begin{cases} \mathbf{v}^*(t) & \text{при } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon\varphi(t), \\ \mathbf{v}^{(1)}(t, \mathbf{x}, \varepsilon) & \text{при } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*(t)\| \geq \varepsilon\varphi(t), \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6)$$

для всех  $t \in [t_0, \vartheta]$ . Функции  $\beta_i(\cdot)$  и положительная непрерывная неубывающая функция  $\varphi(\cdot)$  выбираются так, что неравенство

$$\|\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, U^0, \varepsilon, \Delta_1, V^0, \varepsilon, \Delta_2) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon\varphi(t) \quad (2.7)$$

выполняется при  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta(\Delta_i) \leq \beta_i(\varepsilon)$ . Стратегии  $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot, \cdot, \cdot)$  и  $\mathbf{v}^{(1)}(\cdot, \cdot, \cdot)$  определены в (2.1). Они могут быть интерпретированы как универсальные “стратегии наказания”, используемые одним игроком в случае, когда другой игрок отказывается в некоторый момент времени  $t \in [t_0, \vartheta]$  отслеживать траекторию  $\mathbf{x}^*(\cdot)$ .

В [4] получены следующие результаты.

**Теорема 2.** Пусть управления  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  и  $\mathbf{v}^*(\cdot)$  являются решением задачи 1. Тогда пара стратегий  $(U^0, V^0)$  (2.6), (2.7) доставляет *NE*-решение. Обратно, для любого *NE*-решения найдется эквивалентное (т. е. доставляющее каждому игроку те же выигрыши) *NE*-решение в форме  $(U^0, V^0)$ , где  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  и  $\mathbf{v}^*(\cdot)$  есть решение задачи 1.

**Теорема 3.** Пусть выполнены предположения 1<sup>0</sup> и 2<sup>0</sup>. Пусть управления  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  и  $\mathbf{v}^*(\cdot)$  являются решением задачи 2.i. Тогда пара стратегий  $(U^0, V^0)$  (2.6), (2.7) является  $S_i$ -решением. Обратно, для любого  $S_i$ -решения найдется эквивалентное  $S_i$ -решение в форме  $(U^0, V^0)$ , где  $\mathbf{u}^*(\cdot)$  и  $\mathbf{v}^*(\cdot)$  есть решение задачи 2.i.

Таким образом, теоремы 2 и 3 устанавливают связь между множествами решений задач 1 и 2.i и множествами *NE*- и  $S_i$ -решений соответственно. Эти теоремы определяют структуру решений игры. Теоремы существования *NE*- и  $S_i$ -решений являются следствиями теорем 2 и 3. *P*-решения определяются как *NE*-решения, неуплощаемые по Парето относительно показателей (1.2).

В дальнейшем траектории системы (1.1), порожденные *NE*-решениями,  $S_i$ -решениями и *P*-решениями, будем называть *NE*-траекториями,  $S_i$ -траекториями и *P*-траекториями соответственно.

### 3. Алгоритм построения $S_i$ -решений

**О п р е д е л е н и е 4.** Траекторию системы (1.1), порожденную измеримыми управлениями  $\mathbf{u}(t)$  и  $\mathbf{v}(t)$ , назовем  $S_i$ -допустимой траекторией, если для нее выполнено условие (2.4).

Множество концов  $S_i$ -допустимых траекторий обозначим через  $D_i$ .

Задача построения  $S_i$ -решения сводится к нахождению максимума функции  $\sigma_i$  (1.2) на множестве  $D_i$ .

В предлагаемом алгоритме для нахождения множества  $D_i$  вводятся вспомогательные позиционные дифференциальные игры сближения-уклонения [1, 2]  $\Gamma_i^c$ , динамика которых описывается уравнением (1.1). В качестве целевых множеств в этих играх берутся множества  $M_i^c = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_{3-i}(\mathbf{x}) \geq c \}$ . Цель игрока  $3-i$  в игре  $\Gamma_i^c$  состоит в приведении фазового вектора  $\mathbf{x}(\vartheta)$  на множество  $M_i^c$ .

Обозначим через  $W_i^c$  максимальное стабильное множество (мост) [1, 2] в задаче сближения с множеством  $M_i^c$ . Из определения игр  $\Gamma_i$  и  $\Gamma_i^c$  и теоремы об альтернативе [1] немедленно вытекает, что

$$W_i^c = \{ (t, \mathbf{x}) \in G \mid \gamma_{3-i}(t, \mathbf{x}) \geq c \}. \quad (3.1)$$

Из теоремы об альтернативе [1] и теоремы 3 выводится следующий результат (см. [7]):

**Утверждение 1.** Траектория  $\mathbf{x}(\cdot)$  является  $S_i$ -допустимой тогда и только тогда, когда существует  $c \in \mathbb{R}$  такое, что  $(t, \mathbf{x}(t)) \notin \text{int}W_i^c$  при  $t_0 \leq t \leq \vartheta$  и  $(\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \partial W_i^c$ .

Система (1.1) известной заменой переменной [1] приводится к виду (для удобства изложения новую переменную мы обозначим снова буквой  $\mathbf{x}$ )

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{B}^*(t)\mathbf{u} + \mathbf{C}^*(t)\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.2)$$

Далее предполагаем, что показатели качества игроков  $\sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta))$  (1.2) зависят от значений только двух координат фазового вектора  $\mathbf{x}(\vartheta)$ . Тогда упомянутые показатели качества игроков сохраняют прежний вид.

Сформулированное утверждение 1 является базовым в предлагаемом алгоритме. Система (3.2) заменяется конечно-разностным уравнением с разбиением  $\Delta = \{t_j\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $t_1 = t_0$ ,  $t_N = \vartheta$ . Обозначим  $\delta_j = t_{j+1} - t_j$ .

Аппроксимация множества  $D_i$ , обозначаемая далее через  $\tilde{D}_i$ , вычисляется с помощью процедуры, строящей последовательности множеств достижимости (пошагово во времени). При этом на каждом шаге выбрасываются позиции, не удовлетворяющие (2.4), которые не учитываются при построении множества достижимости на следующем шаге. Отметим, что любая позиция внутри и на границе моста  $W_i^c$  удовлетворяет неравенству (2.4), в то время как позиции вне моста не удовлетворяют ему. Поэтому мост используется для нахождения позиций, удовлетворяющих неравенству  $\gamma_{3-i}(t, \mathbf{x}) \leq c$ . Назовем такие позиции *незапрещенными*. Для фиксированного моста  $W_i^c$  множество запрещенных позиций обозначим  $G_i^c$ .

Далее приводится краткое описание алгоритма (подробное описание имеется в [7]).

Обозначим аппроксимации сечений множеств  $W_i^c$  и  $G_i^c$  плоскостью  $t = \text{const}$  через  $\tilde{W}_{i,t}^c$  и  $\tilde{G}_{i,t}^c$ . Для их построения используется следующая пошаговая процедура:

$$\tilde{G}_{i,t_{j+1}}^c = \left[ \tilde{G}_{i,t_j}^c \oplus \delta_j(\mathbf{B}^*(t_j)P \oplus \mathbf{C}^*(t_j)Q) \right] \setminus \tilde{W}_{i,t_{j+1}}^c, \quad (3.3)$$

где  $\tilde{G}_{i,t_0}^c = \{ \mathbf{x}_0 \}$ . Операция  $A \oplus B = \{ a + b \mid a \in A, b \in B \}$  обозначает алгебраическую сумму двух множеств  $A$  и  $B$ .

Процедура повторяется для последовательности величин  $c$ , чтобы построить  $\tilde{D}_i$  из соответствующей последовательности  $\tilde{D}_i^c = \tilde{G}_{i,\vartheta}^c \cap \tilde{W}_{i,\vartheta}^c$ , используя (3.3). В целом алгоритм можно представить в виде последовательности следующих шагов:

1. Пусть задано начальное значение шага  $\delta c > 0$  и ограничение на шаг снизу  $\delta c_{\min} \leq \delta c$ .
2. Пусть  $\tilde{D}_i = \emptyset$ , можно выбрать  $c = c^{\max} = \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \sigma_{3-i}(\mathbf{x})$ .
3. Построим трубку  $\tilde{G}_i^c$  и множество  $\tilde{D}_i^c$  из процедуры (3.3).
4. Пополним  $\tilde{D}_i := \tilde{D}_i \cup \tilde{D}_i^c$ .
5. Если  $\delta c \geq \delta c_{\min}$ , то выберем следующее значение  $c$ :
  - если  $\mathbf{x}_0 \in \tilde{W}_{i,t_0}^c$ , то
    - вернемся к предыдущему значению  $c := c + \delta c$ ,
    - уменьшим шаг  $\delta c$ ;
  - выберем следующее значение  $c := c - \delta c$ ;
  - повтор с п. 3.
6. Выход.

На рис. 1 показаны основные конструкции, описанные в алгоритме, для одной итерации с фиксированным значением  $c$ .

На выходе алгоритма получается аппроксимация множества концов  $S_i$ -допустимых траекторий  $\tilde{D}_i$ . Попутно на каждом множестве  $\tilde{D}_i^c$  получаем сетку равноотстоящих узлов. Максимум показателя  $\max_{\alpha} \sigma_i(\mathbf{x}_{\alpha}[\vartheta])$  находится простым перебором значений в этих узлах. Точка  $\mathbf{x}_{\alpha}[\vartheta]$  берется в качестве конечной точки  $S_i$ -траектории, которая затем строится попятной процедурой, при этом на каждом шаге обеспечивается ее нахождение внутри соответствующего множества  $\tilde{G}_i^c$ . Одновременно с этим находят порождая эту траекторию управления  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$ . Соответствующее  $S_i$ -решение получается подстановкой этих управлений в формулы (2.5)–(2.7) вместо  $\mathbf{u}^*(t)$  и  $\mathbf{v}^*(t)$ .

Программа, используемая для вычисления функций цены, основывается на результатах [5, 6]. Один пример численного построения траекторий Штакельберга представлен в [8].

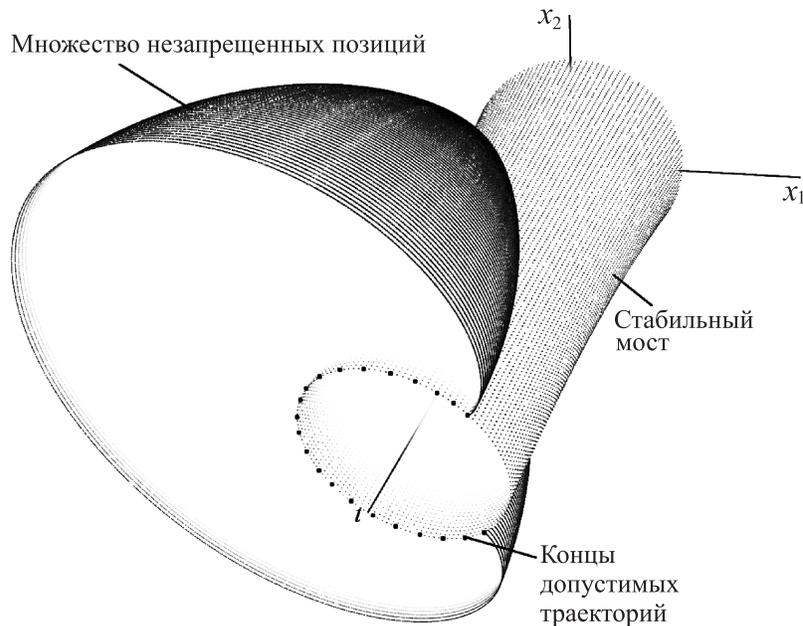


Рис. 1. Стабильный мост  $\tilde{W}_i^c$  и множество незапрещенных позиций  $\tilde{G}_i^c$ .

#### 4. Построение решений Нэша ( $N$ -алгоритм)

Описываемый в данном разделе алгоритм построения  $NE$ -решений и  $P$ -решений ( $N$ -алгоритм) идейно близок алгоритму построения решений Штакельберга, изложенному в предыдущем разделе. Он использует введенные там вспомогательные игры сближения-уклонения  $\Gamma_i^c$ . Напомним, что  $W_i^c$  обозначает стабильный мост в игре  $\Gamma_i^c$ .

**Утверждение 2.** *Траектория  $\mathbf{x}(\cdot)$  является  $NE$ -траекторией тогда и только тогда, когда существуют числа  $c_1, c_2$  такие, что  $(t, \mathbf{x}(t)) \notin \text{int}W_1^{c_1} \cup \text{int}W_2^{c_2}$  для  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ , а  $\mathbf{x}(\vartheta) \in \partial M_1^{c_1} \cap \partial M_2^{c_2}$ .*

**Доказательство.** *Необходимость.* Пусть  $NE$ -траектории  $\mathbf{x}(\cdot) = \{(t, \mathbf{x}(t)) \mid t \in [t_0, \vartheta]\}$  соответствует пара чисел  $c_i = \sigma_{3-i}(\mathbf{x}(\vartheta))$ ,  $i = 1, 2$ , тогда согласно теореме 1 выполнены условия  $\gamma_{3-i}(t, \mathbf{x}(t)) \leq c_i$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$ , что можно переписать как  $\nexists t \in [t_0, \vartheta]: \gamma_{3-i}(t, \mathbf{x}(t)) > c_i$ ,  $i = 1, 2$ . Но тогда из (3.1) следует, что  $(t, \mathbf{x}(t)) \notin \text{int}W_1^{c_1} \cup \text{int}W_2^{c_2}$ .

*Достаточность.* Пусть траектория системы (1.1)  $\mathbf{x}(\cdot) = \{(t, \mathbf{x}(t)) \mid t \in [t_0, \vartheta]\}$  такова, что для всех позиций  $(t, \mathbf{x}(t))$  вдоль нее справедливо условие  $(t, \mathbf{x}(t)) \notin \text{int}W_1^{c_1} \cup \text{int}W_2^{c_2}$ , где  $c_i = \sigma_{3-i}(\mathbf{x}(\vartheta))$ ,  $i = 1, 2$  (т. е.  $\mathbf{x}(\vartheta) \in \partial M_1^{c_1} \cap \partial M_2^{c_2}$ ). Тогда из (3.1) следует выполнение неравенств (2.3) (с  $t_* = t_0$ ). Следовательно, управления игроков, порождающие рассматриваемую траекторию, составляют решение задачи 1, откуда по теореме 2 получаем, что существует  $NE$ -решение, порождающее траекторию  $\mathbf{x}(\cdot)$ . Таким образом,  $\mathbf{x}(\cdot)$  является  $NE$ -траекторией.

В рамках  $N$ -алгоритма будем называть *незапрещенными* позиции, для которых выполняются неравенства  $\gamma_i(t, \mathbf{x}) \leq c_{3-i}$ ,  $i = 1, 2$ . Множество запрещенных позиций, соответствующее фиксированным выигрышам игроков  $c_1, c_2$ , будем обозначать через  $G^{c_1, c_2}$ . Аппроксимации сечений  $W_i^{c_i}$  и  $G_i^{c_1, c_2}$  плоскостью  $t = \text{const}$  будем обозначать через  $\widetilde{W}_{i,t}^{c_i}$  и  $\widetilde{G}_{i,t}^{c_1, c_2}$ .

Система (3.2) по-прежнему заменяется конечно-разностным уравнением с разбиением  $\Delta = \{t_j\}$ ,  $j = 1, \dots, N$ ,  $t_1 = t_0$ ,  $t_N = \vartheta$ ;  $\delta_j = t_{j+1} - t_j$ . Для заданных  $c_1$  и  $c_2$  построим аппроксимацию множества запрещенных позиций  $\widetilde{G}^{c_1, c_2}$  в виде набора полигональных сечений в моменты времени, заданные разбиением  $\Delta$ , используя следующую дискретную схему:

$$\widetilde{G}_{t_{j+1}}^{c_1, c_2} = \left[ \widetilde{G}_{t_j}^{c_1, c_2} \oplus \delta_j (\mathbf{B}^*(t_j)P \oplus \mathbf{C}^*(t_j)Q) \right] \setminus \left( \widetilde{W}_{1, t_{j+1}}^{c_1} \cup \widetilde{W}_{2, t_{j+1}}^{c_2} \right). \quad (4.1)$$

Нетрудно заключить, что, если найдется точка  $\mathbf{p} \in \widetilde{G}_{i, \vartheta}^{c_1, c_2} \cap \widetilde{W}_{1, \vartheta}^{c_1} \cap \widetilde{W}_{2, \vartheta}^{c_2}$ , то можно построить аппроксимацию  $NE$ -траектории, находящуюся внутри  $\widetilde{G}^{c_1, c_2}$  и приводящую в точку  $\mathbf{p}$  при  $t = \vartheta$ . При этом точке  $\mathbf{p}$  будет соответствовать  $NE$ -решение вида (2.5)-(2.7), доставляющее игроку 1 и игроку 2 выигрыши  $c_1$  и  $c_2$  соответственно.

Задача  $N$ -алгоритма состоит в переборе пар значений  $c_1$  и  $c_2$  с тем, чтобы аппроксимировать множество концов всех  $NE$ -траекторий и, в частности, множество концов  $P$ -траекторий.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение.

**О п р е д е л е н и е 5.** Назовем  $P$ -допустимой траекторией такую  $NE$ -траекторию  $\mathbf{x}^*(\cdot)$  системы (3.2), для которой выполнено следующее условие: найдется  $i \in \{1, 2\}$  такое, что для любой другой  $NE$ -траектории  $\mathbf{x}(\cdot)$  верна импликация

$$\sigma_i(\mathbf{x}^*(\vartheta)) = \sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta)) \Rightarrow \sigma_{3-i}(\mathbf{x}^*(\vartheta)) \geq \sigma_{3-i}(\mathbf{x}(\vartheta)).$$

Очевидно, что  $P$ -траектории являются  $P$ -допустимыми. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, поскольку  $P$ -допустимая траектория доставляет максимальный выигрыш игроку  $i$  при фиксированном выигрыше игрока  $3 - i$ , но этот выигрыш может быть меньше, чем минимальный выигрыш игрока  $3 - i$ , доставляемый  $P$ -траекториями.

Перед тем как переходить к описанию собственно алгоритма, необходимо отметить, что выигрыш игрока  $i$  на  $NE$ -решении не может быть меньше  $\gamma_i(t_0, \mathbf{x}_0)$ . Далее, если выигрыш  $c_i$  игрока  $3 - i$  зафиксирован, то на множестве  $\partial M_i^{c_i} \neq \emptyset$  всегда найдутся точки минимума и максимума показателя  $\sigma_i(\cdot)$  игрока  $i$ .

Во *внешнем цикле*  $N$ -алгоритма происходит поочередный выбор выигрышей  $g_s^2$  игрока 1 и  $g_s^1$  игрока 2 так, что  $g_s^i = \gamma_{3-i}(t_0, \mathbf{x}_0) + s\delta g^i$ , где  $s \in \mathbb{N}$ , а  $\delta g^i$  — параметры точности. Тело этого цикла может состоять из одной (если находятся концы только  $P$ -траекторий) или двух частей (если находятся концы всех  $NE$ -траекторий). Положим  $c_i = g_s^i$ . Идея *первой части* цикла состоит в том, что в качестве начальной итерации берется  $\max_{\mathbf{x} \in \partial M_i^{c_i}} \sigma_{3-i}(\mathbf{x})$ , а при поиске очередного приближения используется (4.1). Одновременно находится конец соответствующей  $NE$ -траектории, которая будет аппроксимацией  $P$ -допустимой траектории.

*Вторая часть* цикла представляет собой перебор значений (уменьшение)  $c_{3-i}$  с шагом  $\delta g^{3-i}$ , начиная с найденного в первой части максимального значения и до значения  $g_s^{3-i}$ . Для каждой пары выигрышей  $c_1, c_2$  с помощью (4.1) находится конец соответствующей  $NE$ -траектории.

1. Положим, что известны  $c_1^*$  и  $c_2^*$  такие, что  $\mathbf{x}_0 \in \partial W_{1,t_0}^{c_1^*} \cap \partial W_{2,t_0}^{c_2^*}$ , заданы положительные шаги  $\delta g^1, \delta g^2$  и параметр точности  $\epsilon_{\mathbf{p}} > 0$ .

2. Обозначим через  $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2$  участки строящегося множества  $\tilde{K}$ , где  $\tilde{K}_i$  наполняется при переборе значений выигрыша игрока  $3-i$ , и пусть  $g^1 = c_1^* + \epsilon_1, g^2 = c_2^* + \epsilon_2$ , где  $\epsilon_i$  — некие малые положительные величины (например, можно взять  $\epsilon_i = \delta g^i$ ).

3. Для  $i = 1, 2$  найдем  $\mathbf{p}_i$  (аппроксимация конца  $P$ -допустимой траектории) для фиксированного выигрыша  $g^i$  игрока  $3-i$  (“первая часть”):

(a) Обозначим  $c_i = g^i$ .

(b) Пусть  $c_{3-i} = \max_{\mathbf{x} \in \partial M_i^{c_i}} \sigma_i(\mathbf{x})$ .

(c) Строим  $\tilde{G}^{c_1, c_2}$ , используя (4.1).

(d) Если существует  $\mathbf{p}^* = \arg \max_{\mathbf{x} \in D} \sigma_i(\mathbf{x})$ , где  $D = \tilde{G}_{\vartheta}^{c_1, c_2} \cap \tilde{W}_{i, \vartheta}^{c_i}$  (можно считать  $D$  набором вершин из последнего сечения трубки допустимых траекторий, попавших на мост  $\tilde{W}_{i, \vartheta}^{c_i}$ ), то

– если это не первая итерация и  $\|\mathbf{p} - \mathbf{p}^*\| \leq \epsilon_{\mathbf{p}}$ , тогда  $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}^*$ ;

– иначе  $\mathbf{p} := \mathbf{p}^*, c_{3-i} := \sigma_i(\mathbf{p}^*)$ , повтор с п. 3(c).

(e) Иначе переходим к п. 7.

4. Если  $(\sigma_1(\mathbf{p}_2) \leq g^2) \wedge (\sigma_2(\mathbf{p}_1) \leq g^1)$ , то переходим к п. 7.

5. Пополним  $\tilde{K}_1 \leftarrow \mathbf{p}_1, \tilde{K}_2 \leftarrow \mathbf{p}_2$ .

6. Изменим  $g^1 := g^1 + \delta g^1$  и  $g^2 := g^2 + \delta g^2$ , повтор с п. 3.

7. Искомое множество концов  $P$ -допустимых траекторий  $\tilde{K} = \tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$  (в случае цилиндрических показателей качества  $K$  является линией, и правильный порядок точек аппроксимации можно получить, определив  $\tilde{K}$  как конкатенацию  $\tilde{K}_1$  и  $\tilde{K}_2$ , взятую в обратном порядке).

С помощью попарного перебора элементов  $\tilde{K}$  можно удалить из него все точки  $\mathbf{p}$ , для которых найдется  $\mathbf{p}^* \in \tilde{K}$  такое, что либо  $(\sigma_1(\mathbf{p}) < \sigma_1(\mathbf{p}^*)) \wedge (\sigma_2(\mathbf{p}) \leq \sigma_2(\mathbf{p}^*))$ , либо  $(\sigma_1(\mathbf{p}) \leq \sigma_1(\mathbf{p}^*)) \wedge (\sigma_2(\mathbf{p}) < \sigma_2(\mathbf{p}^*))$ . Результирующее множество будет представлять собой аппроксимацию множества концов  $P$ -траекторий и является результатом работы  $N$ -алгоритма.

В случае построения аппроксимации множества концов всех  $NE$ -траекторий п. 5 дополняется двумя циклами:

Для  $i = 1, 2$ , для  $1 \leq s < (\sigma_i(\mathbf{p}_i) - g^{3-i})/\delta g^{3-i}$  найти  $\mathbf{p}_s^i$  — конец  $NE$ -траектории, доставляющей выигрыш  $c_i$  игроку  $3-i$  и выигрыш  $c_{3-i} = \sigma_i(\mathbf{p}_i) - s\delta g^{3-i}$  игроку  $i$ , используя (4.1), пополнить  $\tilde{K}_i$  найденной точкой  $\mathbf{p}_s^i$ .

Полученный таким образом набор точек  $\tilde{K}$  на выходе алгоритма представляет аппроксимацию множества концов всех  $NE$ -траекторий.

## 5. Построение решений Нэша (*BM*-алгоритм)

В *BM*-алгоритме используется подход [9], основанный на применении принципа неухудшения гарантированных выигрышей игроков вдоль траекторий, порождаемых решениями, и на применении правила максимального сдвига в направлениях, определяемых равновесными решениями в некоторых вспомогательных биматричных играх.

С помощью *BM*-алгоритма возможно аппроксимировать *NE*-решения, являющиеся, в частности, *P*-решениями. Необходимо отметить, что траектории, получающиеся в результате работы *BM*-алгоритма, удовлетворяют более жесткому, нежели (2.3), ограничению

$$\gamma_i(t_*, \mathbf{x}(t_*)) \leq \gamma_i(t^*, \mathbf{x}(t^*)), \quad t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta, \quad i = 1, 2, \quad (5.1)$$

которое соответствует так называемой *игре с осторожными игроками* [4, с. 45].

Суть подхода состоит в следующем. Пусть зафиксирована позиция  $(t_*, \mathbf{x}_*)$ . Опишем следующую процедуру перевода системы из позиции  $(t_*, \mathbf{x}_*)$  в позицию  $(t^*, \mathbf{x}^*)$ , где  $t^* = t_* + h$  и  $h$  фиксировано, с помощью постоянных управлений  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}^*$  и  $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}^*$ ,  $t_* \leq t \leq t^*$ .

Введем множество

$$G(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) = \{ \mathbf{x}[t^*; t_*, \mathbf{x}_*, \mathbf{u}, \mathbf{v}] \mid \mathbf{u} \in P, \mathbf{v} \in Q \},$$

являющееся аппроксимацией множества достижимости системы (3.2) в момент  $t^*$  для позиции  $(t_*, \mathbf{x}_*)$ , взятой в качестве начальной.

Введем также множества

$$V_i(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \gamma_i(t^*, \mathbf{x}) \geq \gamma_i(t_*, \mathbf{x}_*) \}, \quad i = 1, 2,$$

которые могут быть найдены приближенно с использованием алгоритмов построения максимальных стабильных мостов в соответствующих играх преследования-уклонения (см. [1, 6]), и множество

$$H(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) = G(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) \cap V_1(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) \cap V_2(t^*; t_*, \mathbf{x}_*).$$

Обозначим через  $w^k(t^*; t_*, \mathbf{x}_*)$  ( $k = 1, 2$ ) точку максимума функции  $\gamma_k(t^*, \cdot)$  на множестве  $H(t^*; t_*, \mathbf{x}_*)$ . Рассмотрим векторы

$$\mathbf{s}^k(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) = w^k(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) - \mathbf{x}_*, \quad k = 1, 2.$$

Найдем векторы  $\mathbf{u}_{10}$ ,  $\mathbf{u}_{20}$ ,  $\mathbf{v}_{10}$ , и  $\mathbf{v}_{20}$  из условий

$$\max_{\mathbf{u} \in P, \mathbf{v} \in Q} \mathbf{s}^{k\top} [\mathbf{B}(t^*)\mathbf{u} + \mathbf{C}(t^*)\mathbf{v}] = \mathbf{s}^{k\top} [\mathbf{B}(t^*)\mathbf{u}_{k0} + \mathbf{C}(t^*)\mathbf{v}_{k0}], \quad k = 1, 2, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{x}[t^*; t_*, \mathbf{x}_*, \mathbf{u}_{i0}, \mathbf{v}_{i0}] \in H(t^*; t_*, \mathbf{x}_*).$$

Введем вспомогательную биматричную  $2 \times 2$  игру  $(A, B)$ . В этой игре игрок 1 имеет две стратегии: “выбрать  $\mathbf{u}_{10}$ ” и “выбрать  $\mathbf{u}_{20}$ ”. Игрок 2 также имеет две стратегии: “выбрать  $\mathbf{v}_{10}$ ” и “выбрать  $\mathbf{v}_{20}$ ”. Элементы матриц  $A$  и  $B$  определяются так:

$$a_{ij} = \gamma_1(t^*, \mathbf{x}[t^*; t_*, \mathbf{x}_*, \mathbf{u}_{i0}, \mathbf{v}_{j0}]), \quad b_{ij} = \gamma_2(t^*, \mathbf{x}[t^*; t_*, \mathbf{x}_*, \mathbf{u}_{i0}, \mathbf{v}_{j0}]), \quad i, j = 1, 2.$$

Нетрудно показать, что биматричная игра  $(A, B)$  имеет по крайней мере одно равновесное по Нэшу решение в чистых стратегиях. Нэшевское равновесие задает направление, в котором игроки осуществляют максимальный сдвиг. В результате получаем постоянные управления  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}^*$  и  $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}^*$  на отрезке  $[t_*, t^*]$ . Описанная процедура позволяет найти аппроксимацию движения, порожденного *NE*-решением, которое является одним из *P*-решений.

Чтобы получить аппроксимации остальных *P*-решений, осуществим модификацию упомянутой процедуры, которая предполагает введение семейства вспомогательных биматричных игр.

Введем множества  $V_1^{m_1}(t^*; t_*, \mathbf{x}_*)$  и  $V_2^{m_2}(t^*; t_*, \mathbf{x}_*)$ :

$$V_i^{m_i}(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma_i(t_*, \mathbf{x}_*) \leq \gamma_i(t^*, \mathbf{x}) \leq \gamma_i(t_*, \mathbf{x}_*) + m_i \delta_i, \right. \\ \left. \gamma_{3-i}(t_*, \mathbf{x}_*) \leq \gamma_{3-i}(t_*, \mathbf{x}) \right\}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — заданные положительные числа;  $m_1, m_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , причем

$$m_i \leq \frac{1}{\delta_i} \max_{\mathbf{x} \in G(\vartheta; t_0, \mathbf{x}_0)} (\gamma_i(\vartheta, \mathbf{x}) - \gamma_i(t_0, \mathbf{x}_0)) = M_i.$$

Пусть индекс  $i \in \{1, 2\}$  и число  $m_i \in \{0, 1, \dots, M_i\}$  фиксированы. Введем множество

$$H(t^*; t_*, \mathbf{x}_k | i, m_i) = G(t^*; t_*, \mathbf{x}_*) \cap V_i^{m_i}(t^*; t_*, \mathbf{x}_*).$$

Заметим, что множества  $V_i^{m_i}$  могут быть найдены приближенно с использованием алгоритмов построения максимальных стабильных мостов в специальных играх сближения-уклонения. Обозначим через  $w^k(t^*; t_*, \mathbf{x}_k | i, m_i)$  точку максимума функции  $\gamma_k(t^*, \cdot)$  на множестве  $H(t^*; t_*, \mathbf{x}_k | i, m_i)$ ,  $k = 1, 2$ . Рассмотрим векторы  $s^k(t^*; t_*, \mathbf{x}_k | i, m_i) = w^k(t^*; t_*, \mathbf{x}_k | i, m_i) - \mathbf{x}_*$ . Далее найдем векторы  $\bar{\mathbf{u}}_{10}, \bar{\mathbf{u}}_{20}, \bar{\mathbf{v}}_{10}$ , и  $\bar{\mathbf{v}}_{20}$  из условий (5.2), в которых векторы  $s^l$  следует заменить на векторы  $s^l(t^*; t_*, \mathbf{x}_k | i, m_i)$ ,  $l = 1, 2$ .

Введем биматричную  $2 \times 2$  игру  $(A^{i, m_i}, B^{i, m_i})$ , в которой игрок 1 имеет две стратегии: “выбрать  $\bar{\mathbf{u}}_{10}$ ” и “выбрать  $\bar{\mathbf{u}}_{20}$ ”. Игрок 2 также имеет две стратегии: “выбрать  $\bar{\mathbf{v}}_{10}$ ” и “выбрать  $\bar{\mathbf{v}}_{20}$ ”. Элементы матриц  $A$  и  $B$  определяются так:

$$a_{ij} = \gamma_1(t^*, \mathbf{x}[t^*; t_*, \mathbf{x}_*, \bar{\mathbf{u}}_{i0}, \bar{\mathbf{v}}_{j0}]), \quad b_{ij} = \gamma_2(t^*, \mathbf{x}[t^*; t_*, \mathbf{x}_*, \bar{\mathbf{u}}_{i0}, \bar{\mathbf{v}}_{j0}]), \quad i, j = 1, 2.$$

Аналогично тому, как делалось выше, на основе нэшевского равновесия в игре  $(A^{i, m_i}, B^{i, m_i})$  получаем вектор, в направлении которого игроки осуществляют максимальный сдвиг. Таким образом, имеем постоянные управления  $\mathbf{u}(t) \equiv \mathbf{u}^*$  и  $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{v}^*$  на отрезке  $[t_*, t^*]$ . Описанная процедура при фиксированных  $i \in \{1, 2\}$  и  $m_i \in \{0, 1, \dots, M_i\}$  позволяет найти аппроксимацию движения, порожденного  $NE$ -решением.

Перебирая различные  $i \in \{1, 2\}$ ,  $m_i \in \{0, 1, \dots, M_i\}$ , получаем множество приближенных траекторий, порожденных  $NE$ -решениями. Это множество содержит аппроксимации  $P$ -траекторий, которые находятся простым перебором.

## 6. Программная реализация

Ввиду сложности поддержки и развития библиотеки процедур вычислительной геометрии, разработанной С. И. Осиповым на Фортране в 1980-х, было принято решение временно заместить ее написанной на Си++ библиотекой-оберткой библиотеки *OpenGL Utility Library* (*GLU*).

Текущая реализация рассмотренных алгоритмов широко использует функции и структуры *GLU* для работы с многоугольниками (в частности, примеры из следующего раздела были вычислены с помощью *GLU*). Преимущества *GLU* включают последовательный и достаточно простой программный интерфейс на языке Си, который можно использовать практически в любом программном окружении. Существует несколько реализаций (обычно поставляемых вместе с операционной системой) библиотеки *GLU*, как коммерческих, так и открытых.

Несмотря на положительные результаты, полученные с помощью текущей реализации, в качестве возможной основы для описанных алгоритмов в будущем рассматривается другая библиотека (являющаяся открытым ПО) — *Computational Geometry Algorithms Library* (*CGAL*), цель которой ее авторы сформулировали так: “предоставить легко доступные эффективные и надежные геометрические алгоритмы в форме библиотеки Си++” (см. [10]). В

то время как GLU является удобным внешним компонентом, CGAL представляет собой мощную среду для развития. В частности, она не ограничена машинной арифметикой двойной точности (как GLU).

В случае построения  $S_i$ -решений была успешно применена система многопоточного программирования OpenMP (дискретная схема (3.3) вычисляется параллельно для разных значений  $c$ ). Проведенные испытания на ЭВМ с двухъядерным центральным процессором Intel Core 2 Duo показали двукратное уменьшение времени, ушедшего на вычисления, по сравнению с однопоточным вариантом программы.

## 7. Пример

Пусть уравнение

$$\ddot{\xi} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad \dot{\xi}(t_0) = \dot{\xi}_0, \quad \xi, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \quad \|\mathbf{u}\| \leq \mu, \quad \|\mathbf{v}\| \leq \nu, \quad (7.1)$$

описывает движение материальной точки единичной массы на плоскости  $(\xi_1, \xi_2)$  под действием силы  $\mathbf{F} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ . Игрок 1 (игрок 2), выбирающий управление  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{v}$ ), стремится привести материальную точку как можно ближе к заданной целевой точке  $a^{(1)}$  ( $a^{(2)}$ ) в момент времени  $\vartheta$  (момент окончания игры). Итак, имеем следующие показатели качества игроков:

$$\sigma_i(\xi(\vartheta)) = -\|\xi(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}), \quad i = 1, 2. \quad (7.2)$$

Обозначив  $y_1 = \xi_1$ ,  $y_2 = \dot{\xi}_1$ ,  $y_3 = \xi_2$ ,  $y_4 = \dot{\xi}_2$  и выполнив замену переменных  $x_1 = y_1 + (\vartheta - t)y_2$ ,  $x_2 = y_2 + (\vartheta - t)y_4$ ,  $x_3 = y_3$ ,  $x_4 = y_4$ , мы получаем систему со следующими двумя первыми уравнениями:

$$\dot{x}_1 = (\vartheta - t)(u_1 + v_1), \quad \dot{x}_2 = (\vartheta - t)(u_2 + v_2). \quad (7.3)$$

Далее, (7.2) может быть записано как

$$\sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta)) = -\|\mathbf{x}(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad i = 1, 2. \quad (7.4)$$

Так как показатели (7.4) зависят только от переменных  $x_1$  и  $x_2$ , а правая часть (7.3) не зависит от других переменных, то можно заключить, что достаточно рассматривать только приведенную систему (7.3) с показателями качества (7.4).

Тогда начальные условия для (7.3) задаются формулами

$$x_i(t_0) = x_{0i} = \xi_{0i} + (\vartheta - t_0)\dot{\xi}_{0i}, \quad i = 1, 2.$$

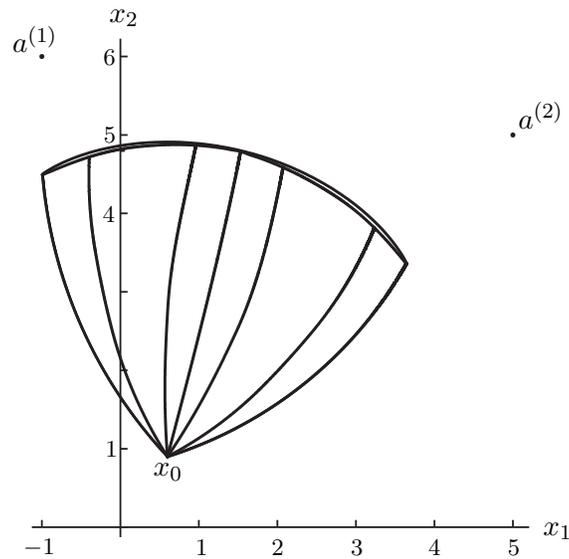
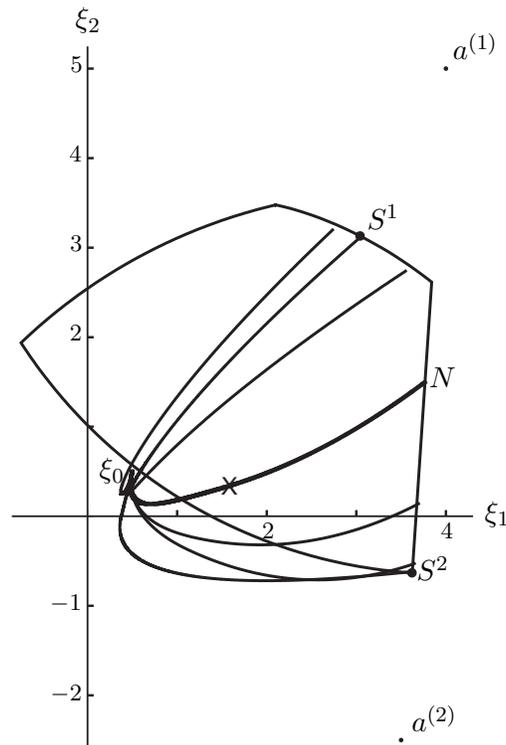
Легко показать, что функции цены в антагонистических дифференциальных играх  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  представимы в виде (при  $\mu \geq \nu$ )

$$\begin{aligned} \gamma_1(t, \mathbf{x}) &= -\|\mathbf{x} - a^{(1)}\| - \frac{(\vartheta - t)^2}{2}(\mu - \nu), \\ \gamma_2(t, \mathbf{x}) &= \min \left\{ -\|\mathbf{x} - a^{(2)}\| + \frac{(\vartheta - t)^2}{2}(\mu - \nu), 0 \right\}, \end{aligned}$$

а универсальные оптимальные стратегии (2.1) задаются как

$$\mathbf{u}^{(i)}(t, \mathbf{x}, \epsilon) = (-1)^i \mu \frac{\mathbf{x} - a^{(i)}}{\|\mathbf{x} - a^{(i)}\|}, \quad \mathbf{v}^{(i)}(t, \mathbf{x}, \epsilon) = (-1)^{i+1} \nu \frac{\mathbf{x} - a^{(i)}}{\|\mathbf{x} - a^{(i)}\|}.$$

На рис. 2 показан результат работы модифицированной *BM*-процедуры (с несколькими *NE*-траекториями) для следующих параметров задачи  $\mu = \nu = 1$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\vartheta = 2$ ,  $\mathbf{x}_0 = \xi_0 = (0.6, 0.9)$  (начальная скорость равна нулю),  $a^{(1)} = (-1, 6)$ ,  $a^{(2)} = (5, 5)$ ,  $\epsilon_c(t^*; t, \mathbf{x}) = c(t^* - t)(\mu + \nu)(\vartheta - t)$ . Случай, когда  $\mu = \nu$ , был исследован аналитически в [4, разд. 1.13]. Можно отметить хорошее совпадение рис. 2 и рис. 1.6 [4, с. 53].

Рис. 2. Модифицированные  $VM$ -траектории (случай  $\mu = \nu$ ).Рис. 3. (B1):  $NE$ -траектории и  $S_i$ -траектории.

На рис. 3 и 4 показаны  $S_i$ - и  $VM$ -траектории для другого набора параметров:  $\mu = 1.4$ ,  $\nu = 0.6$ ,  $t_0 = 0$ ,  $\xi_0 = (0.5, 0.5)$ ,  $a^{(1)} = (4, 5)$  и  $a^{(2)} = (3.5, -2.5)$ . Шаг по времени для  $NE$ -траекторий был выбран 0,001, а для  $S_i$ -траекторий — 0,005. Представлены два варианта положения целевых точек:

(B1)  $\vartheta = 2.5$ ,  $\dot{\xi}_0 = (-0.25, -1)$ , тогда  $\mathbf{x}_0 = (-0.125, -2)$ , см. рис. 3 и 5;

(B2)  $\vartheta = 2.1$ ,  $\xi_0 = (-1, -1)$ , тогда  $\mathbf{x}_0 = (-1.6, -1.6)$ , см. рис. 4.

На рис. 3 символом “ $\times$ ” обозначена точка траектории для момента  $t = 1,347$ , в которой  $VM$ -процедура переключается с неантагонистической игры на антагонистическую (траектория в варианте 2 не содержит антагонистической части). Точками  $S^1$  и  $S^2$  на рис. 3 и 4 обозначены концы  $S_1$ - и  $S_2$ -траекторий соответственно, в то время как точкой  $N$  обозначен конец

$NE$ -траектории, порожденной  $BM$ -процедурой. Также показаны по четыре модифицированных  $BM$ -траектории и граница соответствующих множеств  $D = (D_1 \cap D_2) \setminus L$ , где символом  $L$  обозначена полуплоскость, ограниченная прямой, проходящей через точки  $a^{(1)}$  и  $a^{(2)}$ , и не содержащая точку  $\xi_0$ . Множество  $D$  содержит концы всех  $NE$ -траекторий, но в общем случае там также могут быть точки, не являющиеся концами каких-либо  $NE$ -траекторий. Множества  $D_i$  были построены для шага по времени 0,005. На рис. 5 показана каждая 25-я пара управлений игроков  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ , порождающих  $BM$ -траекторию в варианте 1.

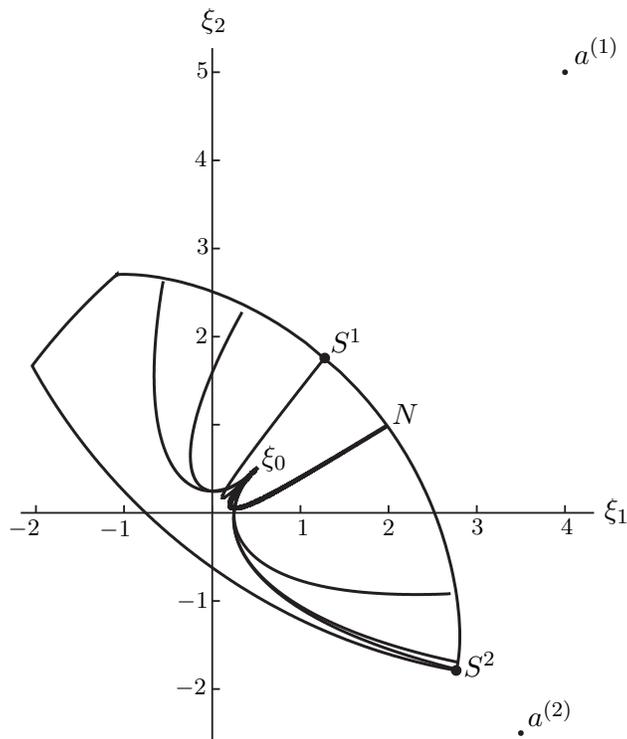


Рис. 4. (B2):  $NE$ -траектории и  $S_i$ -траектории.

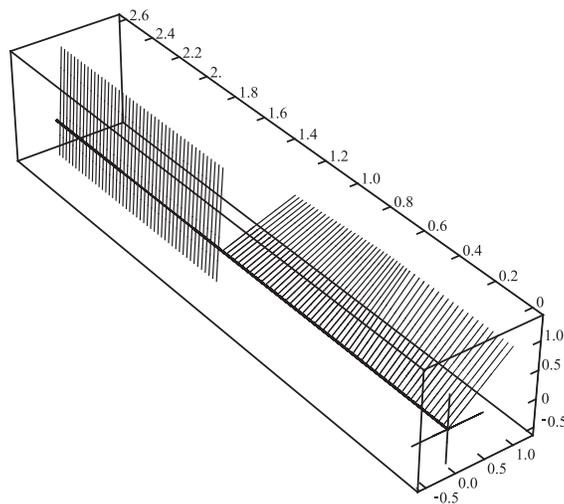


Рис. 5. (B1): Управления игроков, порождающие  $NE$ -траекторию.

## 8. Заключение

Три рассмотренные в работе численные алгоритма позволяют находить приближенные решения Штакельберга, Нэша и неулучшаемые решения Нэша для линейной дифференциальной игры с цилиндрическими терминальными показателями качества (что позволяет свести игру к игре в плоскости). В настоящее время представляются возможными по крайней мере два пути развития представленных результатов.

Во-первых, это обобщение алгоритмов построения  $NE$ - и  $S_i$ -решений на системы с нелинейной динамикой (см. также [5])

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_1(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{F}_2(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)).$$

Во-вторых, дальнейшее развитие ПО, возможно, позволит создать достаточно мощную и гибкую библиотеку, упрощающую вычисление решений для класса дифференциальных игр. Последняя программная реализация развивается в рамках принципов обобщенного программирования, что является характерным для современных библиотек на языке Си++ (например, CGAL). Таким образом обеспечивается гибкость структуры и упрощается модернизация в будущем. В частности, представляется возможным, не изменяя программную реализацию алгоритма, использовать при вычислениях различную арифметику, а также перейти от плоских многоугольников к трехмерным многогранникам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Başar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. New York: Acad. Press, 1999. 519 p.
4. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.
5. **Вахрушев В.А., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** Алгоритмы построения пересечения и объединения множеств на плоскости // Управление с гарантированным результатом. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1987. С. 28–36.
6. **Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.** Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр (материалы по математическому обеспечению ЭВМ). Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.
7. **Осипов С.И.** О реализации алгоритма построения решений для класса иерархических игр Штакельберга // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 195–208.
8. Численное решение одной иерархической дифференциальной игры двух лиц. / А.Ф. Клейменов [и др.] // Изв. Урал. гос. ун-та. 2006. № 46. С. 160–170. (Математика и механика. Вып. 10.)
9. **Клейменов А.Ф.** О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 717–723.
10. Computational Geometry Algorithms Library. URL: <http://www.cgal.org/>.

Клейменов Анатолий Федорович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
ведущий научн. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

Поступила 20.05.2009

Осипов Сергей Иванович  
канд. физ.-мат. наук, доцент  
Урал. гос. ун-т  
e-mail: sergei.osipov@usu.ru

Кувшинов Дмитрий Рустамович  
аспирант  
Урал. гос. ун-т  
e-mail: evetro@2-u.ru

УДК 517.977

**ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ И НЕОГРАНИЧЕННОСТИ ВНЕШНИХ  
ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ ОЦЕНОК МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ  
ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>****Е. К. Костоусова**

Исследованы свойства ограниченности и неограниченности внешних полиэдральных (параллелепипедо-значных) оценок для множеств достижимости линейных дифференциальных систем с устойчивой матрицей. Приведены критерии ограниченности и неограниченности на бесконечном промежутке времени двух типов оценок (введенных ранее “касающихся” оценок и оценок с постоянной матрицей ориентации). Приведены условия на матрицу системы и ограничивающие множества, при которых среди оценок упомянутых типов имеются ограниченные, условия, при которых имеются неограниченные, и условия, при которых все оценки ограничены или все не ограничены. В терминах показателей оценок описана возможная степень их возрастания. Для двумерных систем даны описание, классификация и сравнение возможных ситуаций ограниченности или неограниченности оценок обоих типов; найдены критерии ограниченности оценок со специальными (ортогональными и “квазиортогональными”) постоянными матрицами ориентации. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: множества достижимости, линейные системы, полиэдральные оценки, параллелепипеды, интервальный анализ.

E. K. Kostousova. On the boundedness and unboundedness of external polyhedral estimates for reachable sets of linear differential systems.

The boundedness and unboundedness properties of external polyhedral (parallelepiped-valued) estimates are investigated for reachable sets of linear differential systems with a stable matrix. Boundedness and unboundedness criteria on an infinite time interval are presented for two types of estimates (“touching” estimates, which were introduced earlier, and estimates with constant orientation matrix). Conditions for the system matrix and bounding sets are given under which there are bounded estimates among the mentioned estimates, under which there are unbounded estimates, and under which all the estimates are bounded or all the estimates are unbounded. In terms of the exponents of the estimates, the possible degree of their growth is described. For two-dimensional systems, the classification and comparison of possible situations of the boundedness or unboundedness for estimates of both types are given and boundedness criteria for estimates with special (orthogonal and “quasi-orthogonal”) constant orientation matrices are found. Results of numerical modeling are presented.

Keywords: reachable sets, linear systems, polyhedral estimates, parallelepipeds, interval analysis.

**Введение**

Проблема построения трубок достижимости является одной из ключевых в математической теории управления (см., например, [1, 2]). Известно много численных методов аппроксимации этих трубок. Один из них состоит в оценивании множеств более простыми областями фиксированной формы (например, эллипсоидами, параллелепипедами). В частности, покоординатные оценки можно получить с помощью интервальных операций, но они могут оказаться слишком грубыми в силу известного в интервальном анализе “эффекта обертывания” (wrapping effect) [3, с.177], [4]. В настоящее время достаточно хорошо развит метод эллипсоидов [2, 5]. А.Б.Куржанский внес принципиальные изменения в схему аппроксимаций такого рода. Им предложено аппроксимировать искомую трубку целыми семействами внешних и внутренних трубок, образованных областями фиксированной формы [2, 6]. Семейства вводятся таким образом, чтобы, с одной стороны, обеспечить точные представления решений

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00223) и программы Президиума РАН №29 “Математическая теория управления”.

(путем пересечения внешних или объединения внутренних оценок), причем желательно, чтобы оценки были тугими [7], а с другой стороны, чтобы каждая конкретная трубка находилась с помощью эволюционных уравнений независимо от остальных (что открывает возможности для параллельных вычислений). Первоначально этот подход был развит для эллипсоидального оценивания — сначала для трубок траекторий в системах с эллипсоидальными ограничениями (см., например, [2, 7]), а затем — и с параллелепипедозначными ограничениями [7, 8]. Позднее этот подход был развит для полиэдрального (параллелепипедозначного) оценивания. В частности, в [9, 10] введено параметризованное семейство  $\mathfrak{P}$  внешних оценок и выделено подсемейство  $\mathfrak{P}^1 \in \mathfrak{P}$  касающихся оценок, обеспечивающих точные представления множеств достижимости (МД) линейных дифференциальных систем.

В [11] для систем с устойчивой матрицей были исследованы свойства ограниченности на бесконечном промежутке времени оценок из  $\mathfrak{P}^1$  и  $\mathfrak{P}^2$ , где  $\mathfrak{P}^2 \in \mathfrak{P}$  состоит из трубок оценок с постоянной матрицей ориентации. Данная работа дополняет [11]. Приведены критерии ограниченности и неограниченности оценок из  $\mathfrak{P}^i \in \mathfrak{P}$ ,  $i = 1, 2$ . Приведены условия на матрицу системы и множества, ограничивающие начальные условия и управления, при которых в семействах  $\mathfrak{P}^1$  и  $\mathfrak{P}^2$  имеются ограниченные (или неограниченные) оценки, и условия, при которых все оценки ограничены (или не ограничены). Установлена возможная степень возрастания оценок. Для двумерных систем даны описание, классификация и сравнение возможных ситуаций ограниченности или неограниченности двух упомянутых типов оценок; найдены критерии ограниченности оценок со специальными (ортогональными и “квазиортогональными”) постоянными матрицами ориентации; приведены результаты численного моделирования.

## 1. Постановка задачи

Пусть состояние  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  объекта описывается системой

$$\dot{x} = A(t)x + w(t), \quad t \in \mathcal{T} = [0, \theta], \quad (1.1)$$

где  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — известная непрерывная матрица ( $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство;  $\mathbb{R}^{n \times n}$  — линейное пространство вещественных  $n \times n$ -матриц). Начальное состояние  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  и входное воздействие  $w(\cdot)$ , являющееся измеримой (по Лебегу)  $n$ -мерной функцией времени  $t$ , стеснены ограничениями

$$x_0 \in \mathcal{X}_0, \quad w(t) \in \mathcal{R}(t) \quad \text{при п.в. } t \in \mathcal{T}, \quad (1.2)$$

где  $\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(t)$  — заданные выпуклые компактные множества в  $\mathbb{R}^n$ , причем  $\mathcal{R}(\cdot)$  непрерывно.

Напомним несколько определений, которые используются далее.

*Множеством достижимости* (МД)  $\mathcal{X}(t) = \mathcal{X}(t, 0, \mathcal{X}_0)$  системы (1.1), (1.2) при  $t > 0$  называется множество таких точек  $x \in \mathbb{R}^n$ , для каждой из которых существуют  $x(0) = x_0$  и  $w(\cdot)$ , удовлетворяющие (1.2) и порождающие решение  $x(\cdot)$  системы (1.1) такое, что  $x(t) = x$ . Многозначная функция  $\mathcal{X}(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , известна как *трубка достижимости*  $\mathcal{X}(\cdot)$ .

*Параллелепипедом*  $\mathcal{P}(p, P, \pi)$  в  $\mathbb{R}^n$  называем множество  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, |\xi_i| \leq 1\}$ , где  $p \in \mathbb{R}^n$ ; матрица  $P = \{p_j^i\} = \{p^1 \cdots p^n\} \in \mathcal{M}_*^{n \times n}$ ,  $\mathcal{M}_*^{n \times n}$  — множество всех неособых  $n \times n$ -матриц со столбцами единичной длины<sup>2</sup>;  $\pi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\pi \geq 0$  (векторные и матричные неравенства понимаем покомпонентно). Можно сказать, что  $p$  — центр параллелепипеда,  $P$  — матрица ориентации,  $p^i$  — направления, а  $\pi_i$  — величины его “полуосей”.

Называем параллелепипед  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi)$  *внешней оценкой* множества  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ , если  $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{Q}$ . Оценку называем *тугой* (в направлении  $l$ ) [7], если  $\rho(\pm l | \mathcal{P}) = \rho(\pm l | \mathcal{Q})$ , где  $\rho(l | \mathcal{Q}) = \sup\{l^\top x \mid x \in \mathcal{Q}\}$  — опорная функция множества  $\mathcal{Q}$  ( $\top$  — знак транспонирования).

<sup>2</sup>Условие  $\|p^i\|_2 = 1$  несущественно и может быть опущено с целью упрощения формул; оно, в частности, обеспечивает единственность представления параллелепипеда с ненулевыми величинами полуосей.

Внешнюю параллелепипедозначную оценку называем *касающейся* для  $\mathcal{Q}$ , если она является тугой в направлении  $n$  векторов, биортогональных к столбцам ее матрицы ориентации:  $\rho(\pm(P^{-1})^\top e^i | \mathcal{P}) = \rho(\pm(P^{-1})^\top e^i | \mathcal{Q})$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где  $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$  —  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^n$  (единица стоит на  $i$ -м месте).

Как известно, оценки можно сравнивать между собой, используя выбранный критерий — функционал  $\mu(\mathcal{P}) = \mu(\mathcal{P}(p, P, \pi))$ , удовлетворяющий известным условиям [2, с.101]. Введем вектор  $q = \text{Abs } P \pi$ , где  $\text{Abs } A$  означает матрицу абсолютных величин элементов  $A = \{a_{ij}^j\}$ :  $\text{Abs } A = \{|a_{ij}^j|\}$  (имеем  $q_i = \rho(\pm e^i | \mathcal{P} - p)$ ). Тогда возможным критерием является [11] функционал  $\mu(\mathcal{P}) = \|q\|$ , где в качестве  $\|q\|$  использована любая из двух стандартных норм  $\|q\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |q_i|$  или  $\|q\|_1 = \sum_{i=1}^n |q_i|$ . Его удобно, в частности, использовать при исследовании свойств ограниченности функций  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(p(t), P(t), \pi(t))$ , поскольку при условии ограниченности  $p(\cdot)$  ограниченность (неограниченность)  $\mathcal{P}(\cdot)$  эквивалентна ограниченности (неограниченности)  $\mu(\mathcal{P}(\cdot))$ . Напомним, что многозначное отображение  $\mathcal{Z}(t)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , называют [1, с.370] *ограниченным*, если  $\mathcal{Z}(t) \subseteq \tilde{\mathcal{Z}}$  для всех  $t \in \mathcal{T}$ , где  $\tilde{\mathcal{Z}}$  — ограниченное множество.

По аналогии с [12] называем *показателем*  $\chi = \chi(\mathcal{P})$  *трубки (оценки)*  $\mathcal{P}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , характеристический показатель  $\chi[\mu]$  [12, с.125] функции  $\mu(\mathcal{P}(\cdot))$ , где  $\mu$  — любой из двух упомянутых выше функционалов, а именно число  $\chi = \chi(\mathcal{P}) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \ln \mu(\mathcal{P}(t))$  (оно не зависит от выбранной нами при определении  $\mu$  нормы  $\|q\|$ ).

Далее будем предполагать, что множества  $\mathcal{X}_0$  и  $\mathcal{R}(t)$  являются параллелепипедами:

$$\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(p_0, P_0, \pi_0), \quad \mathcal{R}(t) = \mathcal{P}(r(t), R(t), \rho(t)), \quad (1.3)$$

где функции  $r$ ,  $R$ ,  $\rho$  непрерывны по  $t$ . При этом множества  $\mathcal{X}(t)$  параллелепипедами, вообще говоря, не будут. Мы исследуем возможности полиэдрального оценивания трубок  $\mathcal{X}(\cdot)$ .

В [9] описано параметризованное семейство  $\mathfrak{F}$  внешних для МД  $\mathcal{X}(t)$  параллелепипедозначных оценок  $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}(p(t), P(t), \pi(t))$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , обладающих “*верхним*” *полугрупповым свойством* [2] и *свойством супердостижимости* [5], которые являются аналогами *полугруппового свойства* [2, 7], присущего множествам достижимости. Параметром семейства служит произвольная непрерывно-дифференцируемая функция  $P(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\det P(t) \neq 0$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , задающая динамику матриц ориентации, а функции  $p(\cdot)$  и  $\pi(\cdot)$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{p} &= A(t)p + r(t), \quad t \in \mathcal{T}; \quad p(0) = p_0; \\ \dot{\pi} &= \text{Ab} \left( P(t)^{-1} (A(t)P(t) - \dot{P}(t)) \right) \pi + \text{Abs} \left( P(t)^{-1} R(t) \right) \rho(t), \quad \pi(0) = \text{Abs} \left( P(0)^{-1} P_0 \right) \pi_0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где символами  $\text{Abs } B$  и  $\text{Ab } B$  обозначены операции замены абсолютными величинами всех и, соответственно, всех, кроме диагональных, элементов матрицы  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Обозначим через  $\mathfrak{F}^1$  подсемейство оценок  $\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{F}$ , у которых функция  $P(\cdot)$  удовлетворяет системе ОДУ  $\dot{P} = A(t)P$ ,  $t \in \mathcal{T}$ ,  $P(0) = V \in \mathcal{M}_0^{n \times n}$ , где  $V$  — произвольная матрица из  $\mathcal{M}_0^{n \times n} = \{P \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det P \neq 0\}$ . В подсемейство  $\mathfrak{F}^2 \in \mathfrak{F}$  отнесем все оценки  $P(\cdot) \in \mathfrak{F}$  с постоянными матрицами ориентации:  $P(t) \equiv P = V$ . Параметром  $\mathfrak{F}^1$  и  $\mathfrak{F}^2$  выступает матрица ориентации  $V$  в начальный момент времени. Напомним, что если  $P(\cdot) \in \mathfrak{F}^1$ , то  $\mathcal{P}(t)$  являются касающимися оценками для  $\mathcal{X}(t)$  и  $\mathcal{X}(t) = \bigcap \{ \mathcal{P}(t) \mid V \in \mathcal{V}^0 \}$ ,  $t \in \mathcal{T}$ , где  $\mathcal{V}^0$  — некоторое бесконечное множество матриц [10]. Подсемейство же  $\mathfrak{F}^2$  включает в себя, в частности, *покоординатные оценки* МД, получающиеся при  $P(t) \equiv I$ , где  $I$  — единичная матрица, и используемые в качестве оценивающих множеств в классическом интервальном анализе [3].

В настоящей работе исследуются вопросы, связанные с ограниченностью или неограниченностью на промежутке  $\mathcal{T} = [0, \infty)$  оценок из  $\mathfrak{F}^i \in \mathfrak{F}$ ,  $i = 1, 2$ , при выполнении следующего предположения 1, обеспечивающего ограниченность самих множеств достижимости  $\mathcal{X}(t)$ .

**Предположение 1.** *Матрица  $A(t) \equiv A$  устойчива (т. е. все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части) и отображение  $\mathcal{R}(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , ограничено.*

Выясняется, при каких матрицах  $V$  оценки  $\mathcal{P}(\cdot)$  оказываются ограниченными или неограниченными; при каких условиях на  $A$ ,  $\mathcal{P}_0$  и  $\mathcal{R}(\cdot)$  в семействах  $\mathfrak{P}^1$  и  $\mathfrak{P}^2$  имеются ограниченные оценки, при каких — имеются неограниченные оценки, и при каких — все оценки ограничены или все не ограничены; каковы возможные значения показателей оценок, т. е. какова возможная степень возрастания оценок.

## 2. Обозначения и известные факты

В работе используются следующие обозначения:  $\square$  — знак окончания доказательств;  $\|x\|$  — любая из норм  $\|x\|_\infty$  и  $\|x\|_1$ ;  $\|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$ ;  $e = (1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ ;  $A = \{a_i^j\} = \{a^1 \dots a^n\}$  — матрица с элементами  $a_i^j$  и со столбцами  $a^j$  (верхним индексом нумеруются столбцы, нижним — компоненты векторов);  $0$  — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности;  $I$  — единичная матрица;  $\text{diag } \pi$ ,  $\text{diag } \{\pi_i\}$  — диагональная матрица, элементы диагонали которой совпадают с компонентами  $\pi_i$  вектора  $\pi$ ;  $\text{diag } \{J_1, \dots, J_m\}$  — блочно-диагональная матрица с квадратными клетками (блоками)  $J_k$  на главной диагонали;  $\det A$  — определитель матрицы  $A$ ;  $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_i^i$  — след матрицы  $A$ ;  $\lambda_k = \text{Re } \lambda_k + \text{Im } \lambda_k \cdot \sqrt{-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , — собственные значения матрицы  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $\|A\|$  — матричная норма, индуцированная [13, §6.3] выбранной (для  $\mu$ ) нормой  $\|q\|$ ;  $\mathcal{O}^{n \times n} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^\top A = I\}$  — множество всех ортогональных матриц из  $\mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $\text{int } \mathcal{X}$  — внутренность множества  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ ;  $\text{sign } z$  — функция знака числа: равна  $-1, 0, 1$  соответственно при  $z < 0, z = 0, z > 0$ ; пишем  $k = 1, \dots, n$  вместо  $k = 1, 2, \dots, n$  (для краткости).

Если матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и  $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k \sqrt{-1}$ ,  $k = 1, \dots, m$ , — все ее собственные значения (среди которых могут быть и одинаковые), то ее можно представить в виде

$$A = T^{-1} J T, \text{ где } J = \text{diag } \{J_1, \dots, J_m\}, \quad J_k \in \mathbb{R}^{(\nu_k \gamma_k) \times (\nu_k \gamma_k)}, \quad \nu_k = 1 \text{ или } 2, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.1)$$

причем блоки  $J_k$  имеют специальную структуру [12, с.465], [14, §6.6], а их элементами служат числа  $\alpha_k, \beta_k, 0, 1$ . Матрицу  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  называют [13] *простой*, если  $\gamma_k = 1$ ,  $k = 1, \dots, m$ , (иначе говоря, если она имеет  $n$  линейно-независимых комплексных собственных векторов) и *дефектной* в противном случае. Матрицу  $J$  называют [14] *вещественной жордановой матрицей*.

При  $n = 2$  имеются три различные структуры  $J$ , соответствующие следующим случаям:

случай А:  $\text{Im } \lambda_1 = \text{Im } \lambda_2 = 0$  и  $A$  — простая (тогда  $J = \text{diag } \{\lambda_1, \lambda_2\}$ );

случай В:  $\text{Im } \lambda_1 = \text{Im } \lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$  и  $A$  — дефектная (тогда  $J = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ );

случай С:  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \sqrt{-1}$ ,  $\beta \neq 0$  (тогда  $J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ ,  $A$  — простая).

Пусть  $\Phi(t, \tau) = \Phi(t) \Phi^{-1}(\tau)$  — матрица Коши, а  $\Phi(t)$  — фундаментальная матрица системы  $\dot{x} = A(t)x$ , удовлетворяющая  $\dot{\Phi} = A(t)\Phi$ . В случае  $A(t) \equiv A$  имеем  $\Phi(t) = e^{At}$ , причем для устойчивой  $A$  при любом  $\varepsilon > 0$  справедливы [12, с.57] оценки  $\|e^{At}\| \leq C e^{(-m+\varepsilon)t}$ ,  $\|e^{-At}\| \leq C e^{(M+\varepsilon)t}$ ,  $t \in [0, \infty)$ , где  $C = \text{Const}(\varepsilon) > 0$  и использованы обозначения  $m = \min |\text{Re } \lambda_k|$ ,  $M = \max |\text{Re } \lambda_k|$  (для простой  $A$  оценки можно улучшить, положив  $\varepsilon = 0$ ).

Для матриц типа  $\text{Abs } B$  имеем:  $\|\text{Abs } B\| = \|B\|$ ;  $\text{Abs}(AB) \leq \text{Abs } A \cdot \text{Abs } B$ ,  $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

## 3. Свойства оценок из $\mathfrak{P}^1$

Обозначим  $C(V) = \|\text{Abs } V \text{ Abs}(V^{-1})\| \leq \|V\| \cdot \|V^{-1}\|$ ,  $C_{\mathcal{X}_0} = \|\text{Abs } P_0 \pi_0\|$ ,  $C_{\mathcal{R}} = \sup\{\|\text{Abs } R(t) \rho(t)\| \mid t \geq 0\}$ . С использованием фактов из разд. 2 и свойств [12, §1, гл. III] характеристических показателей функций несложно получить

**Утверждение 1.** Пусть выполнено предположение 1. Если трубка  $\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}^1$ , то  $\mu(\mathcal{P}(t)) \leq C(V) e^{(-m+\varepsilon)t} (c_1 C_{\mathcal{X}_0} + c_2 C_{\mathcal{R}} e^{(M+\varepsilon)t})$ ,  $t \geq 0$ , где  $c_i = c_i(\varepsilon) > 0$  — некоторые константы, и, значит, показатель  $\chi(\mathcal{P}) \leq M - m$ .

**Утверждение 2** [11]. Если  $A$  устойчива и множества  $\mathcal{R}(t)$  — одноточечные ( $\mathcal{R}(t) \equiv r(t)$ ), то оценки  $\mathcal{P}(t)$  из  $\mathfrak{P}^1$  стягиваются к своему центру  $p(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  при любой  $P(0) = V$ .

Как показывает следующая теорема, вытекающая из выкладок [11], в общем случае оценки могут оказаться неограниченными, в частности если  $\mathcal{R}(\cdot)$  удовлетворяет условию невырожденности

$$\mathcal{R}(t) \supseteq \mathcal{P}(r(t), I, \varepsilon_0 e), \quad t \in [0, \infty), \quad \text{где } \varepsilon_0 > 0, \quad e = (1, 1, \dots, 1)^\top. \quad (3.1)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{X}(t)$  — множества достижимости системы (1.1)-(1.3), для которой выполнено предположение 1, и рассматриваются оценки  $\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}^1$ . Тогда:

(1) Если матрица  $A$  — простая и  $M = m$ , то оценки  $\mathcal{P}(\cdot)$  ограничены при любой  $P(0) = V$ .

(2) Пусть  $A$  — простая,  $M \neq m$ ,  $T$  — матрица из (2.1) и матрицы  $\tilde{V} = TV$  и  $\tilde{W} = V^{-1}T^{-1}$  разбиты на соответствующие блоки  $\tilde{V}_i^j \in \mathbb{R}^{\nu_i \times \nu_j}$  и  $\tilde{W}_j^i \in \mathbb{R}^{\nu_j \times \nu_i}$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ). Если  $V$  такова, что для любой пары собственных значений  $\lambda_i$  и  $\lambda_j$ , удовлетворяющей  $|\operatorname{Re} \lambda_i| < |\operatorname{Re} \lambda_j|$ , выполняется  $Z_i^j = 0 \in \mathbb{R}^{\nu_i \times \nu_j}$ , где  $Z_i^j = \sum_{k=1}^m \operatorname{Abs} \tilde{V}_i^k \operatorname{Abs} \tilde{W}_k^j$ , то соответствующая трубка  $\mathcal{P}(\cdot)$  ограничена на  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ . Если же  $V$  такова, что для некоторой пары  $\lambda_i, \lambda_j$  с  $|\operatorname{Re} \lambda_i| < |\operatorname{Re} \lambda_j|$  имеем  $Z_i^j \neq 0 \in \mathbb{R}^{\nu_i \times \nu_j}$ , то при условии невырожденности (3.1) трубка  $\mathcal{P}(\cdot)$  не ограничена на  $\mathcal{T}$  и для нее  $\mu(\mathcal{P}(t)) \geq \operatorname{Const} \cdot \varepsilon_0 \cdot e^{(|\operatorname{Re} \lambda_j| - |\operatorname{Re} \lambda_i|)t}$ ,  $\operatorname{Const} = \operatorname{Const}(V) > 0$ , т. е. показатель  $\chi(\mathcal{P}) \geq |\operatorname{Re} \lambda_j| - |\operatorname{Re} \lambda_i|$ . Существуют матрицы  $V$ , порождающие как ограниченные оценки (в частности,  $V = T^{-1}$ ), так и неограниченные.

(3) Если матрица  $A$  — дефектная (так что у  $J$  имеется клетка с  $\gamma \geq 2$ ) и  $\mathcal{R}(\cdot)$  удовлетворяет (3.1), то при любой  $V$  для соответствующей оценки  $\mathcal{P}(\cdot)$  имеем  $\mu(\mathcal{P}(t)) \geq \operatorname{Const}(V) \varepsilon_0 t^{\gamma-1}$ , т. е.  $\mathcal{P}(\cdot)$  неограниченна с ростом не ниже полиномиального (степени  $\gamma-1$ ).

#### 4. Свойства оценок из $\mathfrak{P}^2$

Для оценок из  $\mathfrak{P}^2$  уравнения (1.4) для  $\pi$  превращаются в линейную систему с постоянной матрицей  $A_P = \operatorname{Ab}(P^{-1}AP)$ . Будем обозначать собственные значения  $A_P$  через  $\omega_k$ . И пусть аналогично (2.1) числа  $\gamma_k(\omega_k)$  определяют порядок клетки Жордана, соответствующей  $\omega_k$ . Из теории устойчивости линейных систем с постоянными матрицами [12] вытекают следующие достаточные условия ограниченности и неограниченности оценок на  $\mathcal{T} = [0, \infty)$ .

**Утверждение 3.** Пусть выполнено предположение 1. Трубка  $\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}^2$  ограничена, если либо матрица  $A_P = \operatorname{Ab}(P^{-1}AP)$  устойчива, либо все  $\omega_k \leq 0$ , причем для всех  $\omega_k$  с  $\operatorname{Re} \omega_k = 0$  имеем  $\gamma_k(\omega_k) = 1$  и к тому же отображение  $\mathcal{R}(\cdot)$  одноточечно ( $\mathcal{R}(t) \equiv r(t)$ ).

Оценка  $\mathcal{P}(\cdot)$  неограниченна, если выполнена одна из следующих двух групп условий:

(1) условие невырожденности для  $\mathcal{P}_0$ :

$$\mathcal{P}_0 \supseteq \mathcal{P}(p_0, I, \varepsilon_0 e), \quad \text{где } \varepsilon_0 > 0, \quad (4.1)$$

и либо имеется  $\omega_k$  с  $\operatorname{Re} \omega_k > 0$ , либо найдется  $\omega_k$  с  $\operatorname{Re} \omega_k = 0$  и  $\gamma_k(\omega_k) \geq 2$ ;

(2) условие невырожденности (3.1) для  $\mathcal{R}(\cdot)$  и найдется  $\omega_k$  с  $\operatorname{Re} \omega_k \geq 0$ .

Из выкладок [11] можно усмотреть, что справедлива

**Лемма 1.** Пусть  $n = 2$  и  $A$  — устойчивая матрица с собственными значениями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Тогда при любой  $P$  собственные значения  $A_P$  имеют вид

$$\omega_{1,2} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2/4 + |\varphi_1 \varphi_2| - \varphi_1 \varphi_2}, \quad \varphi_1 = (P^{-1}AP)_1^2, \quad \varphi_2 = (P^{-1}AP)_2^2, \quad (4.2)$$

причем оба  $\omega_k$  вещественны и, по крайней мере, одно отрицательно:  $\omega_2 < 0$ .

**Теорема 2.** Пусть матрица  $A$  устойчива. Тогда возможны следующие ситуации:

- (1) Если  $A = \alpha I$ , где  $\alpha$  — число, то  $A_P$  совпадает с  $A$  и является устойчивой при любой  $P$ .
- (2) В любом другом случае существуют такие  $P$ , что  $A_P$  имеет собственное значение  $\omega_1 > 0$ , которое может быть как угодно большим за счет выбора  $P$ .
- (3) Если все собственные значения  $\lambda_k$  матрицы  $A$  таковы, что  $|\operatorname{Im} \lambda_k| < |\operatorname{Re} \lambda_k|$ , то существуют  $P$ , обеспечивающие устойчивость матрицы  $A_P$ , причем в качестве  $P$  можно взять  $P = T^{-1}$ , где  $T$  приводит  $A$  к вещественной жордановой форме  $J = TAT^{-1}$ .

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно, поскольку  $A_P = \operatorname{Ab}(\alpha P^{-1}P) = \operatorname{Ab}(\alpha I) = A$ . Третье утверждение доказано в [11].

Докажем второе утверждение, и сначала — при  $n = 2$ . В силу рассуждений из [11] без ограничения общности достаточно рассмотреть случай, когда  $A$  и  $P$  таковы, что  $A = J$ ,  $p_1^1 = p_2^2 = 1$ ,  $p_2^1 = y_1$ ,  $p_1^2 = y_2$ , где  $y_1, y_2$  — числа, варьирование которых обеспечивает варьирование  $P$ . Покажем, что при любой возможной структуре  $J$  (см. случаи А, В и С в разд. 2), за исключением  $J = \alpha I$ , число  $\omega_1$  можно сделать как угодно большим.

Из леммы 1 несложно получить, что в случае А имеем  $\omega_{1,2} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 \pm |\lambda_1 - \lambda_2| \sqrt{F(y_1 y_2)}$ , где  $F(z) = 1 + 4(|z| + z)/(1 - z)^2$ . При  $\operatorname{sign} y_1 = -\operatorname{sign} y_2$  имеем  $\omega_1 = (\lambda_1 + \lambda_2 + |\lambda_1 - \lambda_2|)/2 < 0$ . С другой стороны, рассматривая такие  $y_1, y_2$ , что  $\operatorname{sign} y_1 = \operatorname{sign} y_2$  и  $y_1 \cdot y_2 \rightarrow 1$ , получаем при  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , что  $\omega_1 \rightarrow +\infty$ . В случае В  $\omega_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{2}|y_1|/|1 - y_1 y_2|$  и выбором  $y_1, y_2$  можно добиться как равенства  $\omega_1 = \alpha < 0$ , так и неограниченного роста  $\omega_1$ . В случае С  $\omega_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{-\beta^2 + 2\Psi(y_1, y_2)}$ , где  $\Psi(y_1, y_2) = \beta^2(1 + (y_1)^2)(1 + (y_2)^2)/(1 - y_1 y_2)^2$ . Имеем  $\min \omega_1 = \alpha + |\beta|$  [11], а  $\sup \omega_1 = +\infty$  (достаточно рассмотреть  $y_1 = 1 + \varepsilon$ ,  $y_2 = 1 - \varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

При  $n \geq 2$ , без ограничения общности,  $J$  — это блочная верхняя квазитреугольная матрица, состоящая из четырех блоков, причем нижний диагональный блок  $J_2^2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  — один из трех типов, рассмотренных выше. При  $A \neq \alpha I$  можно найти  $P_2^2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  такую, что  $\operatorname{Ab}((P_2^2)^{-1} J_2^2 P_2^2)$  имеет сколь угодно большое собственное значение  $\omega_1 > 0$ . Беря  $P = \operatorname{diag}\{P_1^1, P_2^2\}$ , получаем, что  $\operatorname{Ab}(P^{-1}JP)$  — это верхняя квазитреугольная матрица с нижним блоком  $\operatorname{Ab}((P_2^2)^{-1} J_2^2 P_2^2)$  и в силу свойств квазитреугольных матриц [15] имеет  $\omega_1$  своим собственным значением.  $\square$

**Следствие 1.** Пусть  $\mathcal{X}(t)$  — множества достижимости системы (1.1), (1.2), (1.3), для которой выполнено предположение 1 и рассматриваются оценки  $\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}^2$ . Тогда:

- (1) Если матрица  $A = \alpha I$ , то оценки  $\mathcal{P}(\cdot)$  ограничены при любой  $P$ .
- (2) Если  $A \neq \alpha I$  и либо  $\mathcal{P}_0$ , либо  $\mathcal{R}(\cdot)$  удовлетворяют условию невырожденности ((4.1) либо (3.1)), то в  $\mathfrak{P}^2$  имеются неограниченные оценки  $\mathcal{P}(\cdot)$  с как угодно большим показателем  $\chi(\mathcal{P})$ .
- (3) Если все собственные значения  $\lambda_k$  матрицы  $A$  таковы, что  $|\operatorname{Im} \lambda_k| < |\operatorname{Re} \lambda_k|$ , то в  $\mathfrak{P}^2$  существуют ограниченные оценки.
- (4) Если  $n = 2$ , имеем случай С с  $|\beta| > |\alpha|$  и либо  $\mathcal{P}_0$ , либо  $\mathcal{R}(\cdot)$  удовлетворяет условию невырожденности, то все трубки  $\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}^2$  неограниченны.

Рассмотрим теперь оценки со специальными матрицами ориентации  $P$  вида  $P = T^{-1}\tilde{P}$ , где  $T$  — матрица из (2.1), а  $\tilde{P} \in \mathcal{O}^{n \times n}$  — произвольная ортогональная матрица. Условимся для краткости называть такую матрицу *квазиортогональной*<sup>3</sup>.

**Лемма 2.** Пусть  $n = 2$  и  $P = T^{-1}\tilde{P}$ , где  $\tilde{P} \in \mathcal{O}^{2 \times 2}$  — произвольная ортогональная матрица и, значит, представима в виде  $\tilde{P} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sigma \sin \varphi & \sigma \cos \varphi \end{bmatrix}$ , где  $\sigma = \pm 1$  и  $\varphi \in [0, 2\pi)$ . Тогда имеется следующая связь между собственными значениями матриц  $A_P$  и  $A$ :  $\omega_{1,2} = (\lambda_1 + \lambda_2 \pm |\lambda_1 - \lambda_2|)/2$  в случае А;  $\omega_{1,2} = \alpha \pm |\sin 2\varphi|/\sqrt{2}$  в случае В;  $\omega_{1,2} = \alpha \pm |\beta|$  в случае С.

<sup>3</sup>Если в системе сделать замену переменных  $y = Tx$ , то соответствующие оценки будут образованы ортогональными параллелепипедами с матрицей ориентации  $\tilde{P}$ .

Возможности ограниченности и неограниченности оценок из  $\mathfrak{P}^1$  и  $\mathfrak{P}^2$  ( $n = 2$ )

$\mathfrak{P}^i$	Дополнит. условия на $A, P(\cdot), \mathcal{P}_0, \mathcal{R}(\cdot)$	$\text{Im } \lambda_1 = \text{Im } \lambda_2 = 0$		$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}, \beta \neq 0$			
		$A$ — простая: $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$		$A$ — дефектная: $J = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$		$A$ — простая: $J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$	
		$\lambda_1 = \lambda_2$	$ \lambda_1  <  \lambda_2 $	$\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$		$ \alpha  >  \beta $	$ \alpha  =  \beta $
$\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}^1, \mathcal{P}(0) = V$		$\forall V$ $\mathcal{P} \in \text{BT}$	$\exists V$ $\mathcal{P} \in \text{BT}$		$\forall V \mathcal{P} \in \text{BT}$		
	$\mathcal{R}(t) \equiv r(t)$	$\forall V \mathcal{P} \in \text{BT}$ . Более того, $\forall V \mathcal{P}(t) \rightarrow p(t)$ при $t \rightarrow \infty$					
$\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}^2, \mathcal{P}(t) \equiv P$	$\text{int } \mathcal{R}(t) \neq \emptyset$	$\forall V$ $\mathcal{P} \in \text{BT}$	$\exists V$ $\mathcal{P} \in \text{UTE}$ . $\exists V$ $\mathcal{P} \in \text{UTE}$ . $\chi_{\max} =  \lambda_2  -  \lambda_1 $	$\forall V \mathcal{P} \in \text{UTL}$		$\forall V \mathcal{P} \in \text{BT}$	
		$\forall P A_P$ имеет вещ. собств. знач. $\omega_2 < 0$ и $\omega_1$ . Если $\omega_1 < 0$ , то $\mathcal{P} \in \text{BT}$					
$\mathcal{P}(\cdot) \in \mathfrak{P}^2, \mathcal{P}(t) \equiv P$		$\forall P$ $\omega_1 < 0$	$\exists P \omega_1 < 0$ . $\exists P \omega_1 > 0$		$\forall P \omega_1 \geq 0$ $\exists P \omega_1 = 0$   $\forall P \omega_1 \geq  \beta  -  \alpha $		
		$\omega_1 > 0$ может быть сколь угодно большим за счет $P$					
	$\mathcal{R}(t) \equiv r(t), \text{int } \mathcal{P}_0 \neq \emptyset$	$\forall P$ $\mathcal{P} \in \text{BT}$	$\exists P \mathcal{P} \in \text{UTE}$ . $\chi_{\text{sup}} = \infty$		$\exists P \mathcal{P} \in \text{BT}$   $\forall P \mathcal{P} \in \text{UTE}$		
	$\text{int } \mathcal{R}(t) \neq \emptyset$	$\forall P$ $\mathcal{P} \in \text{BT}$	$\exists P \mathcal{P} \in \text{UTE}$ . $\chi_{\text{sup}} = \infty$		$\forall P \mathcal{P} \in \text{UT}$ $\exists P \mathcal{P} \in \text{UTL}$   $\forall P \mathcal{P} \in \text{UTE}$ . $\chi_{\text{min}} =  \beta  -  \alpha $		
	$P = T^{-1}\tilde{P}, \tilde{P} \in \mathcal{O}^{2 \times 2}$	$\forall \tilde{P} \omega_1 < 0$	Зависимость от соотнош. $A$ и $\tilde{P}$ : $ \sin 2\varphi  < \sqrt{2} \alpha  \Rightarrow \omega_1 < 0$ ; если $\exists \tilde{P}$ : $ \sin 2\varphi  > \sqrt{2} \alpha  \Rightarrow \omega_1 > 0$		$\forall \tilde{P} \omega_1 < 0$	$\forall \tilde{P} \omega_1 = 0$	$\forall \tilde{P} \omega_1 > 0$
	$A$ — симм., $P \in \mathcal{O}^{2 \times 2}$	$\forall P \omega_1 < 0$	Случаи невозможны				

Доказательство проводится конкретизацией формул (4.2) с учетом известных тригонометрических тождеств.

**Следствие 2.** Пусть выполнены условия леммы 2 и матрица  $A$  устойчива. Тогда в случае  $A$  при любой  $\tilde{P} \in \mathcal{O}^{2 \times 2}$  имеем  $\omega_1 < 0$ . В случае  $B$ , если  $\tilde{P}$  такова, что  $|\sin 2\varphi| < \sqrt{2}|\alpha|$ , имеем  $\omega_1 < 0$ , а для всех  $\tilde{P}$  таких, что  $|\sin 2\varphi| > \sqrt{2}|\alpha|$  (если такие  $\tilde{P}$  существуют для данной матрицы  $A$ ) имеем  $\omega_1 > 0$ . В случае  $C$  при любой  $\tilde{P} \in \mathcal{O}^{2 \times 2}$  имеем  $\omega_1 < 0$ ,  $\omega_1 = 0$  или  $\omega_1 > 0$ , соответственно, при  $|\alpha| > |\beta|$ ,  $|\alpha| = |\beta|$  или  $|\alpha| < |\beta|$ .

**З а м е ч а н и е.** Если матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — отрицательно определенная (это эквивалентно [13] тому, что  $A$  — симметричная, простая и имеет только вещественные собственные значения, причем все  $\lambda_k < 0$ ), то в силу [15, с.242] матрицу  $T$  из (2.1) можно взять ортогональной. Поэтому при любой  $P \in \mathcal{O}^{n \times n}$  имеем  $A_P = \text{Ab}(\tilde{P}^{-1} \text{diag } \lambda \tilde{P})$ , где матрица  $\tilde{P} = TP$  оказывается ортогональной. Тогда из первого утверждения следствия 2 вытекает

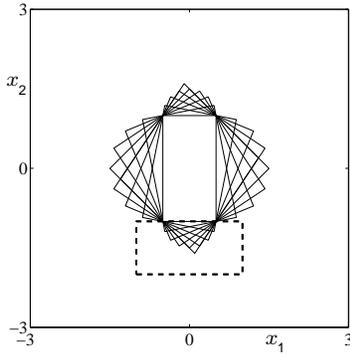


Рис. 1.

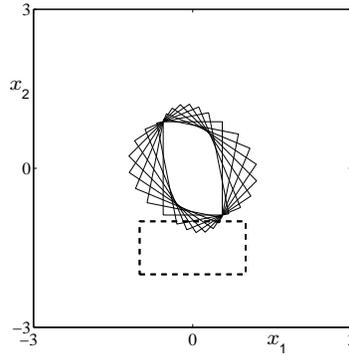


Рис. 2.

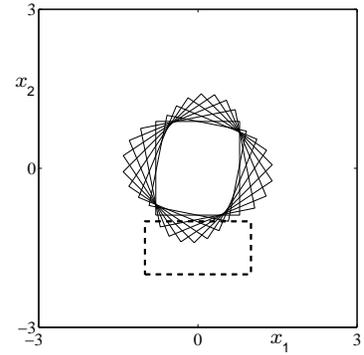


Рис. 3.

**Следствие 3.** Если  $n = 2$  и матрица  $A$  — отрицательно определенная, то  $A_P$  устойчива при любой ортогональной матрице  $P \in \mathcal{O}^{2 \times 2}$ .

Для всех  $n \geq 2$  несложными рассуждениями можно получить следующее достаточное условие устойчивости  $A_P$  при  $P \in \mathcal{O}^{n \times n}$  (в случае  $n = 2$  оно слабее, чем следствие 3).

**Утверждение 4.** Пусть матрица  $A$  — отрицательно определенная и такая, что  $m > M(n - 1)(n + 1)^{-1}$ , где  $m = \min |\lambda_k|$ ,  $M = \max |\lambda_k|$ . Тогда  $A_P$  устойчива при любой  $P \in \mathcal{O}^{n \times n}$ .

**Доказательство.** Ввиду замечания без ограничения общности считаем  $A = \text{diag } \lambda < 0$ . Тогда элементы  $A_P$  имеют вид  $(A_P)_i^i = \sum_{k=1}^n \lambda_k (p_k^i)^2$ ;  $(A_P)_i^j = |\sum_{k=1}^n \lambda_k p_k^i p_k^j|$ ,  $j \neq i$ . В силу [13, § 7.2] достаточно показать, что  $A_P$  имеет доминирующую диагональ, т. е.  $f_i > \phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , где использованы обозначения  $f_i = |(A_P)_i^i|$ ,  $\phi_i = \sum_{j \neq i} |(A_P)_i^j|$ . Из ортогональности  $P$  получаем  $f_i = \sum_{k=1}^n |\lambda_k| (p_k^i)^2 \geq m \sum_{k=1}^n (p_k^i)^2 = m (\|p^i\|_2)^2 = m$ . Оценим теперь  $\phi_i$  сверху. Предварительно обозначим  $S'_{ij} = \Sigma'_{ij} = \sum_{k: p_k^i p_k^j \geq 0} p_k^i p_k^j$ ,  $S''_{ij} = -\Sigma''_{ij} = \sum_{k: p_k^i p_k^j < 0} p_k^i p_k^j$ . Заметим, что при  $i \neq j$  в силу ортогональности  $P$  имеем  $S''_{ij} = -S'_{ij}$ ,  $\Sigma''_{ij} = \Sigma'_{ij}$ , а с учетом неравенства Коши — Буняковского получаем  $2\Sigma'_{ij} = \Sigma'_{ij} + \Sigma''_{ij} = \sum_{k=1}^n |p_k^i| |p_k^j| \leq \|p^i\|_2 \|p^j\|_2 = 1$ . Учитывая, что все  $\lambda_k < 0$ , имеем:  $|(A_P)_i^j| = |\sum_{k=1}^n \lambda_k p_k^i p_k^j|$ . Группируя слагаемые в зависимости от знака  $p_k^i p_k^j$ , получаем при  $i \neq j$ , что  $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| p_k^i p_k^j \leq M S'_{ij} + m S''_{ij} = (M - m) \Sigma'_{ij}$  и  $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| p_k^i p_k^j \geq m S'_{ij} + M S''_{ij} = (m - M) \Sigma'_{ij}$ , откуда  $|(A_P)_i^j| \leq (M - m)/2$ . Следовательно,  $\phi_i \leq (n - 1)(M - m)/2$  и при наложенных на  $m$  и  $M$  условиях  $f_i \geq m > (n - 1)(M - m)/2 \geq \phi_i$ .  $\square$

### 5. Оценки из $\mathfrak{F}^1$ и $\mathfrak{F}^2$ для двумерных систем

Для наглядности и удобства сравнения свойств оценок из  $\mathfrak{F}^1$  и  $\mathfrak{F}^2$  для двумерных систем в условиях предположения 1 в таблице дана сводка результатов для  $n = 2$ . С целью компактности записи использованы логические кванторы  $\exists$  и  $\forall$  (существования и всеобщности), а запись типа  $\mathcal{P} \in \text{BT}$ ,  $\mathcal{P} \in \text{UT}$ ,  $\mathcal{P} \in \text{UTE}$ ,  $\mathcal{P} \in \text{UTL}$  означает, соответственно, что трубка  $\mathcal{P}$  ограничена, не ограничена, имеет экспоненциальный рост ( $\chi(\mathcal{P}) > 0$ ), имеет линейный рост. Случаи, когда оценки ограничены, выделены жирным шрифтом.

Приведем примеры построения оценок из  $\mathfrak{F}^1$  и  $\mathfrak{F}^2$  для систем пяти типов. На рис. 4–7 справа будут показаны по несколько  $\mathcal{P}(\theta)$  из семейств  $\mathfrak{F}^1$  (в верхней части рисунка) и  $\mathfrak{F}^2$  (в нижней части), слева — какие-то из трубок соответствующего семейства, штриховой линией — начальное множество. Хотя в примерах 2–4 в  $\mathfrak{F}^2$  имеются (в силу следствия 1) неограниченные оценки со сколь угодно большими показателями, на рис. 4–6 показаны только оценки, которые оказываются ограниченными на  $[0, \infty)$  (проверено с помощью утверждения 3).

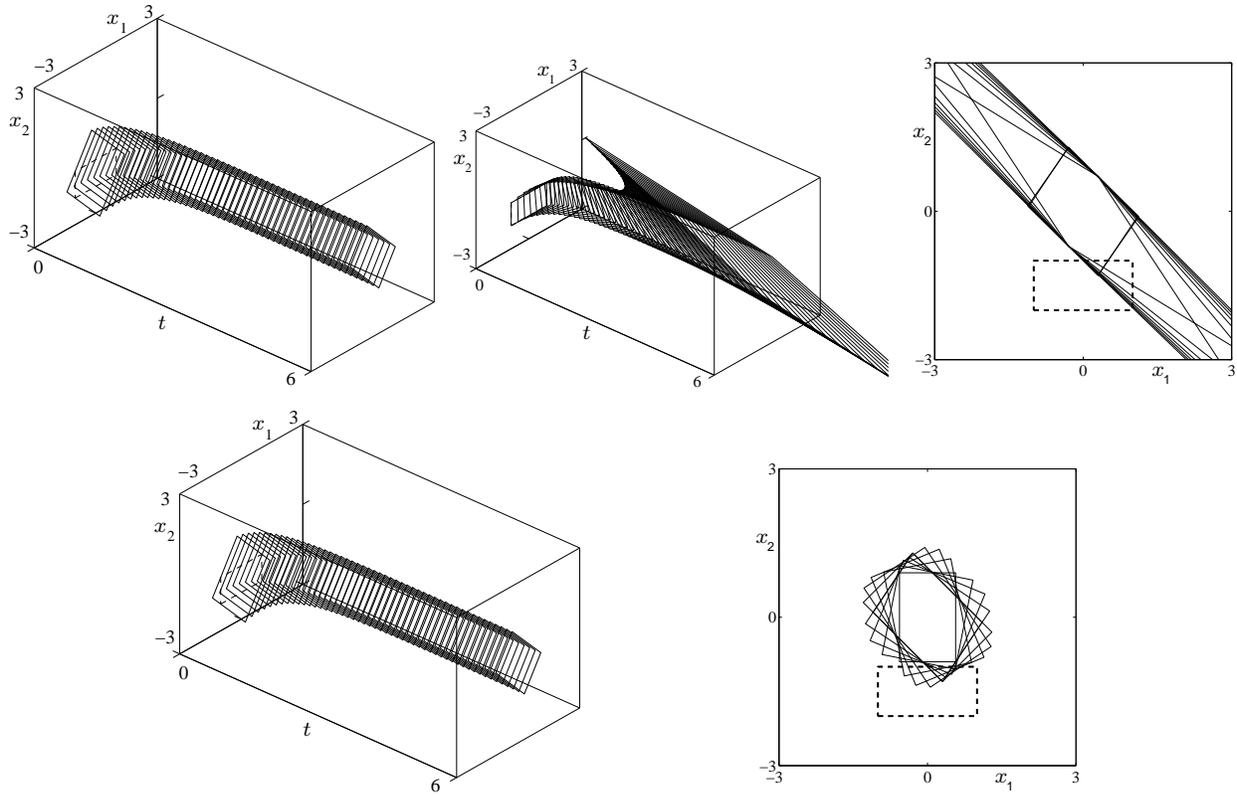


Рис. 4. Оценки из  $\mathfrak{P}^1$  (вверху) и  $\mathfrak{P}^2$  (внизу) в примере 2.

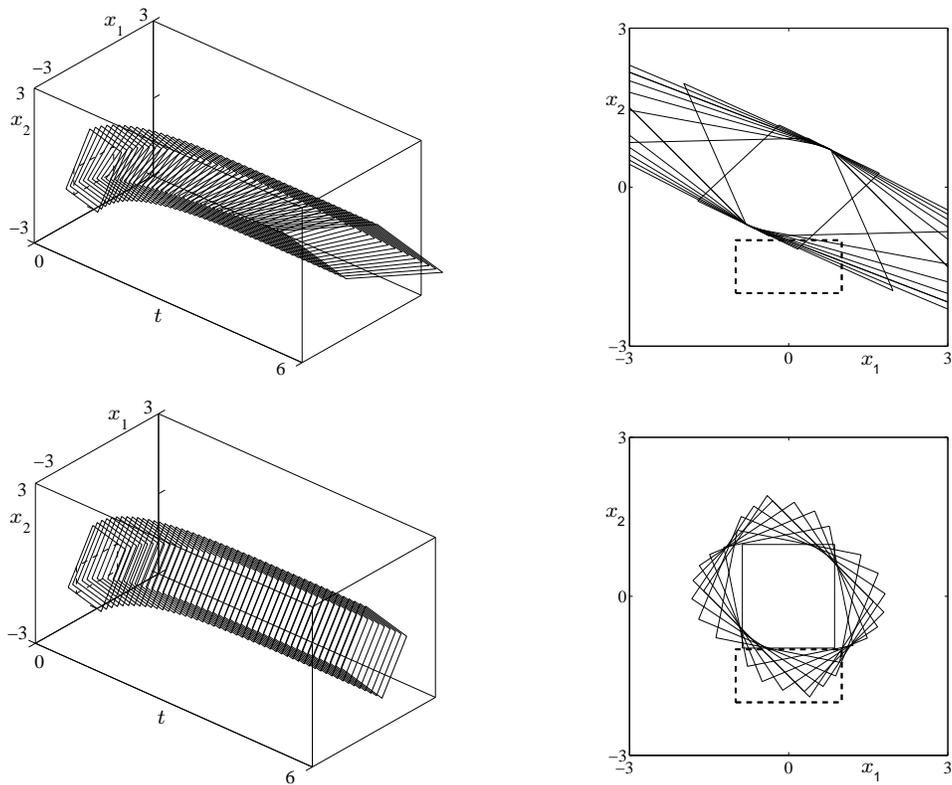


Рис. 5. Оценки из  $\mathfrak{P}^1$  (вверху) и  $\mathfrak{P}^2$  (внизу) в примере 3.

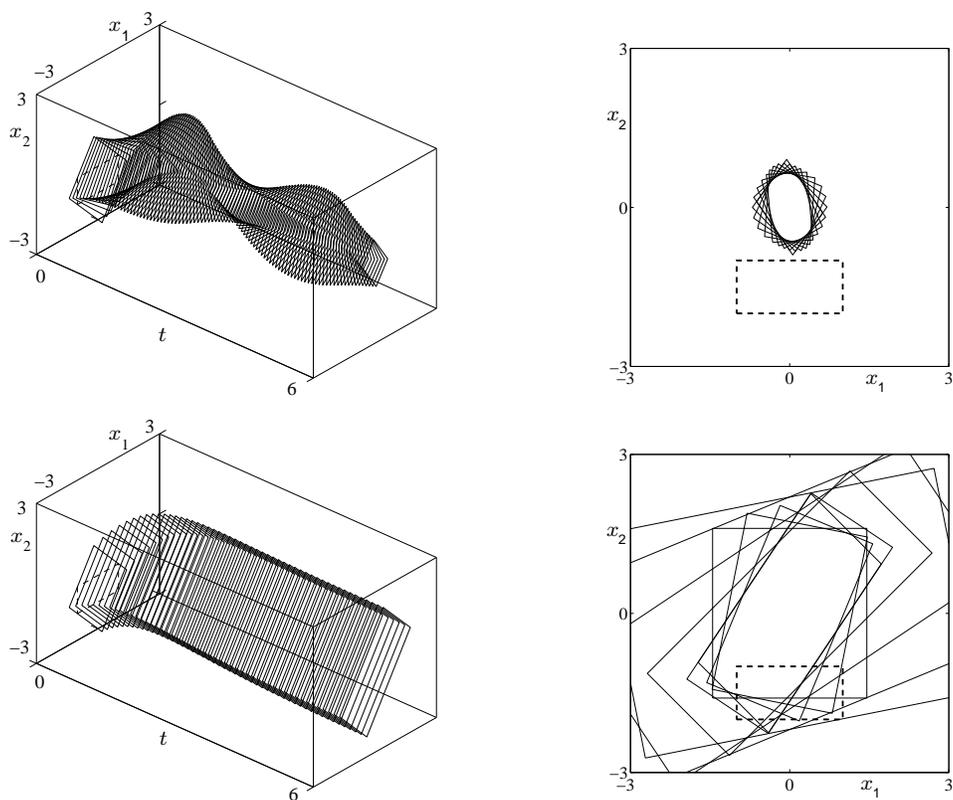


Рис. 6. Оценки из  $\mathfrak{P}^1$  (вверху) и  $\mathfrak{P}^2$  (внизу) в примере 4.

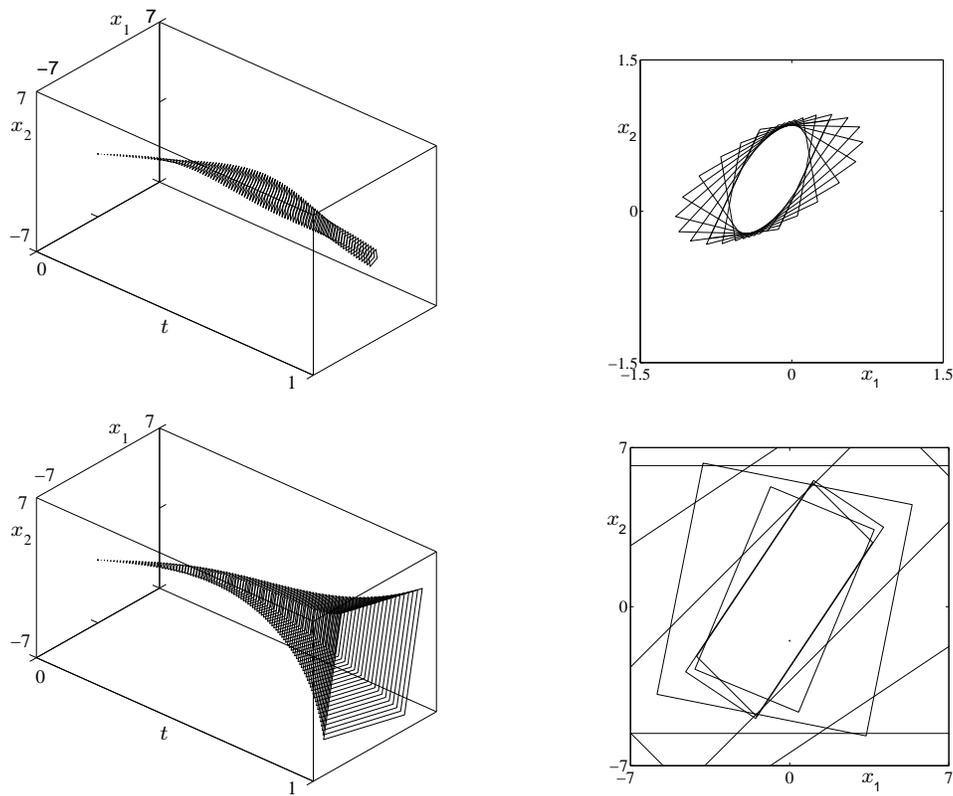


Рис. 7. Оценки из  $\mathfrak{P}^1$  (вверху) и  $\mathfrak{P}^2$  (внизу) в примере 5.

В примерах 1–3 для контроля посчитано также по несколько трубок из описанного в [11] семейства  $\mathfrak{P}^3$  оценок с постоянными матрицами ориентации. Такие оценки не обладают обобщенным полугрупповым свойством, но являются касающимися (на рис. 1–3 они как бы “обрисовывают” МД).

В примерах 1–3 полагаем  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}((0, -1.5)^\top, I, (1, 0.5)^\top)$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{P}(0, I, (0.5, 1)^\top)$ ,  $\theta = 6$ .

**Пример 1.** Пусть  $A = -I$  (имеем случай А с  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ ). Оценки из всех трех семейств  $\mathfrak{P}^i$  совпали; несколько оценок для МД  $\mathcal{X}(\theta)$  в момент  $t = \theta$  показаны на рис. 1.

**Пример 2.** Пусть  $A = \begin{bmatrix} -1.2 & -0.2 \\ -0.3 & -1.3 \end{bmatrix}$  (имеем случай А с  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1.5$ ). На рис. 2 показаны оценки из  $\mathfrak{P}^3$ , на рис. 4 — оценки из  $\mathfrak{P}^1$  и  $\mathfrak{P}^2$ , причем слева показаны ограниченная и неограниченная трубки из  $\mathfrak{P}^1$ .

**Пример 3.** Пусть  $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ -0.2 & -0.3 \end{bmatrix}$  (имеем случай В с  $\lambda_1 = \lambda_2 = -0.1$ ). На рис. 3 показаны оценки из  $\mathfrak{P}^3$ , на рис. 5 — оценки из  $\mathfrak{P}^1$  и  $\mathfrak{P}^2$ . Все трубки из  $\mathfrak{P}^1$  оказываются неограниченными, но скорость возрастания здесь линейная в отличие от примера 2, где неограниченные оценки растут по экспоненте.

**Пример 4.** Пусть  $A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 1 & -1.5 \end{bmatrix}$  (имеем случай С с  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $|\beta| < |\alpha|$ ),  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}((0, -1.5)^\top, I, (1, 0.5)^\top)$ ,  $\mathcal{R} = \mathcal{P}(0, I, (0, 1)^\top)$ ,  $\theta = 6$ . На рис. 6 изображены оценки из  $\mathfrak{P}^1$  и  $\mathfrak{P}^2$ . Хотя показанные оценки из  $\mathfrak{P}^2$  ограничены на  $[0, \infty)$ , они очень грубо оценивают трубку достижимости (сравните с оценками из  $\mathfrak{P}^1$ , которые “обрисовывают” МД).

**Пример 5.** Пусть  $A \equiv \begin{bmatrix} 2.5 & -3.5 \\ 7 & -4.5 \end{bmatrix}$  (имеем случай С с  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 3.5$ ,  $|\beta| > |\alpha|$ ),  $\mathcal{X}_0 = \mathcal{P}((0, -1.5)^\top, I, 0)$  — одноточечное множество,  $\mathcal{R} = \mathcal{P}(0, I, (0, 1)^\top)$ ,  $\theta = 1$ . Оценки из  $\mathfrak{P}^1$  и  $\mathfrak{P}^2$  показаны на рис. 7: оценки из  $\mathfrak{P}^1$  “обрисовывают” МД, оценки из  $\mathfrak{P}^2$  растут по экспоненте.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. **Kurzhanski A.B., Vályi I.** Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
3. **Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х.** Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 222 с.
4. **Gorban A.N., Shokin Yu.I., Verbitskii V.I.** Simultaneously dissipative operators and the infinitesimal wrapping effect in interval spaces // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, № 4. С. 16–48.
5. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
6. **Костоусова Е.К., Куржанский А.Б.** Гарантированные оценки точности вычислений в задачах управления и оценивания // Вычисл. технологии. 1997. Т. 2, № 1. С. 19–27.
7. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** On ellipsoidal techniques for reachability analysis. Part I: External approximations. Part II: Internal approximations. Box-valued constraints // Optimiz. Methods & Software. I. 2002. Vol. 17, № 2. P. 177–206. II. 2002. Vol. 17, № 2. P. 207–237.
8. **Kirilin M.N., Kurzhanski A.B.** Ellipsoidal techniques for reachability problems under nonellipsoidal constraints // Kurzhanski A.B., Fradkov A.L. (eds.). Nonlinear Control Systems 2001: (Nolcos 2001): A Proceedings Volume from the 5th IFAC Symposium, St. Petersburg, Russia, 4-6 July 2001. Elsevier Science Ltd, 2002. P. 735–740.
9. **Костоусова Е.К.** О внешних полиэдральных оценках для множеств достижимости систем с линейной неопределенностью // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 4. С. 559–571.
10. **Kostousova E.K.** State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 1998. Vol. 9, № 4. P. 269–306.
11. **Костоусова Е.К.** Об ограниченности внешних полиэдральных оценок множеств достижимости линейных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 6. С. 974–989.

12. **Демидович Б.П.** Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
13. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
14. **Шилов Г.Е.** Математический анализ. Конечномерные линейные пространства. М.: Наука, 1969. 432 с.
15. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988. 552 с.

Костоусова Елена Кирилловна  
д-р физ.-мат. наук  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: kek@imm.uran.ru.

Поступила 14.04.2009

УДК 517.977

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ.  
СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПОВОДЫРЬ<sup>1</sup>****Н. Н. Красовский, А. Н. Котельникова**

Рассматривается позиционная дифференциальная игра сближения-уклонения конфликтно управляемого движения с целевым множеством в пределах заданного множества. Используется решение присоединенной краевой задачи для параболического уравнения, вырождающегося при стремлении диффузионного члена к нулю в уравнение типа Гамильтона — Якоби, характерное для аппарата дифференциальных игр. На этой основе развивается схема управления со стохастическим поводырём.

Ключевые слова: альтернатива сближения-уклонения, стратегия, вероятностный процесс, уравнение Ито, функция Ляпунова.

N. N. Krasovskii, A. N. Kotel'nikova. An approach–evasion differential game: Stochastic guide.

A positional differential game of the approach–evasion of a conflict-controlled motion and a goal set within a given set is considered. Use is made of a solution of the associated boundary-value problem for a parabolic equation degenerating as the diffusion term vanishes to a Hamilton–Jacobi type equation, which is typical for techniques in the theory of differential games. Based on this, a control scheme with a stochastic guide is developed.

Keywords: approach–evasion alternative, strategy, probabilistic process, Ito equation, Lyapunov function.

**Введение**

В основополагающих работах Р. Айзекса [1] и Р. Беллмана [2] по теории антагонистических дифференциальных игр, где конфликтующие управления формируются по принципу обратной связи по информации о текущем состоянии системы, основным инструментом исследования было дифференциальное уравнение в частных производных — уравнение типа Гамильтона — Якоби и, соответственно, постановка и решение подходящих краевых задач для такого уравнения. В игре на минимакс-максимин заданного показателя качества процесса гладкое решение краевой задачи для этого уравнения, если такое решение существует, определяет цену игры как функцию от текущей позиции системы. Допустимый при заданных ограничениях на параметры системы наискорейший спуск по поверхностям уровня этой функции-цены определяет воздействия, которые формирует минимизирующая (минимаксная) стратегия. Напротив, допустимый при заданных ограничениях на параметры системы наискорейший подъем по поверхностям уровня функции-цены определяет воздействия, которые формирует максимизирующая (максиминная) стратегия. Но известно, что названное уравнение Гамильтона — Якоби при условиях, типичных для дифференциальных игр, как правило, не имеет гладкого классического решения. Поэтому обращение к аппарату, который базируется на подобных уравнениях, требует специального подхода. Например, гладкие в отдельных областях фазового пространства позиций фрагменты решения рассматриваемого уравнения склеиваются в подходящее, хотя бы кусочно-гладкое решение, но зато уже во всей области возможных в данной игре текущих позиций. При этом в более или менее нетривиальных случаях требуется непростое исследование поведения системы на поверхностях и линиях склейки, а также и вблизи таких особых элементов решения [1].

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, а также при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00313) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1).

На фоне отмеченных особенностей уравнений типа Гамильтона — Якоби было естественным такое развитие дифференциальных игр, которое шло в обход прямого использования классических или квазиклассических решений краевых задач для названных уравнений.

В работах Л. С. Понтрягина и его сотрудников [3, 4] развитие дифференциальных игр, и прежде всего, в форме игры преследования-убегания для двух управляемых объектов — преследователя и преследуемого, явилось закономерным продолжением исследований, которые привели к открытию и обоснованию принципа максимума — краеугольного камня теории оптимальных процессов [3]. Серьезное обсуждение работ по дифференциальным играм в школе Л. С. Понтрягина, которые содержат важные и глубокие результаты исследований, выходит за рамки предлагаемой статьи. Акцентируем внимание только на двух обстоятельствах:

(1) Задачи, которые надлежит решать двум конфликтующим игрокам, ставятся отдельно для каждого из игроков. Возможность объединения разрешающих эти задачи управлений в едином процессе, вообще говоря, не имеется в виду как непереносимое условие.

(2) Во многих случаях для предлагаемых и обосновываемых способов управления, допустимых для игрока, за которого решается авторами его задача, разрешается использовать в текущий момент времени  $t$  не только информацию о текущем фазовом состоянии системы, но и информацию о действиях игрока-противника на будущем малом интервале времени или хотя бы информацию об управляющем воздействии противника в тот же момент  $t$ .

Один из распространенных подходов в развитии дифференциальных игр, который направлен на преодоление трудностей, возникающих при прямом обращении к уравнениям типа Гамильтона — Якоби, восходит к работам по математической физике, где возможность сгладить проблему достигалась добавлением в уравнение малого диффузионного члена. Затем дело сводилось к исследованию предельных значений для решений получающихся параболических уравнений при стремлении добавленного диффузионного члена к нулю. Такие исследования имеют большую историю. Однако здесь сошлемся лишь на работы С. Н. Кружкова [5, 6], которого, пожалуй, можно считать одним из первых авторов исследований в том направлении, с которым так или иначе связана предлагаемая статья.

Существенным шагом в развитии аппарата уравнений типа Гамильтона — Якоби явилось предложенное и обоснованное П. Л. Лионсом и М. Ж. Кренделом понятие вязкостного решения для таких уравнений [7]. В этом понятии по сути дела отслеживается связь с идеями аппарата математической физики для задач с исчезающей вязкостью.

В предлагаемой статье рассматривается позиционная дифференциальная игра сближения к моменту  $\vartheta$  движения  $x[t]$ ,  $t_* \leq t \leq \vartheta$  с множеством  $M$  внутри множества  $N$  — уклонения вплоть до момента  $\vartheta$  движения  $x[t]$ ,  $t_* \leq t \leq \vartheta$  от множества  $M$  внутри множества  $N$ . Здесь  $M$  и  $N$  — замкнутые множества в пространстве  $\{t, x\}$ ,  $M \subset N$ . В формализации стратегий и движений, которая используется в книге [8], была доказана теорема об альтернативе: для всякой возможной исходной позиции  $\{t_*, x_*\} \in N$  верно одно и только одно из двух: либо (1) существует стратегия  $u^0(t, x)$ , которая гарантирует сближение, либо (2) существует стратегия  $v^0(t, x)$ , которая гарантирует уклонение. Из этой альтернативы выводятся теоремы о цене игры  $\gamma^0(t_*, x_*)$  и седловой точке  $\{u^0(t, x), v^0(t, x)\}$  для многих типичных дифференциальных игр на минимакс-максимин того или иного показателя процесса [8]. Доказательство альтернативы опирается дескриптивно на общие закономерности качественной теории дифференциальных уравнений. Оно не содержит конструктивной процедуры, которая позволяла бы для той или иной позиции  $\{t_*, x_*\}$  ответить на вопрос, что верно для позиции  $\{t_*, x_*\}$  — (1) или (2). Дескриптивная альтернатива устанавливается независимо от формализма уравнений типа Гамильтона — Якоби. В соответствии с этим и теоремы о цене игры и седловой точке, которые для той или иной игры вытекают из альтернативы, устанавливаются вне связи с гамильтоновым формализмом. Но известно, что на самом деле здесь имеет место тесная связь. Поясним это в общих чертах для полноты изложения. Такую связь удобно проследить на основе теоремы об унификации игры [9–11], которая, кратко говоря, означает следующее. Решение игры

сближения-уклонения (с  $M$  внутри  $N$ ; от  $M$  внутри  $N$ ) для типичного уравнения движения

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (0.1)$$

при типичных условиях на  $f(\cdot)$ ,  $P$  и  $Q$  (включая условие Айзекса — Беллмана) (см. разд. 1) эквивалентно решению такой же игры сближения-уклонения в унифицированной форме, где сближающий игрок управляет системой

$$\dot{y}^{(1)} = \xi^{(1)}(t, y^{(1)}, q^{(1)})q^{(1)} + p^{(1)} \quad (0.2)$$

на основе контрстратегии  $p^{(1)}(t, y^{(1)}, q^{(1)})$ , а уклоняющийся игрок управляет системой

$$\dot{y}^{(2)} = \xi^{(2)}(t, y^{(2)}, q^{(2)})q^{(2)} + p^{(2)} \quad (0.3)$$

на основе контрстратегии  $p^{(2)}(t, y^{(2)}, q^{(2)})$ .

Здесь

$$\xi^{(1)}(t, y, q) = \min_u \max_v q' f(t, y, u, v), \quad (0.4)$$

$$\xi^{(2)}(t, y, q) = \min_v \max_u q' f(t, y, u, v). \quad (0.5)$$

Управления игроков  $p$  и  $q$  — векторы-столбцы:

$$|q| = 1, \quad q'p \geq 0, \quad |p| \leq \lambda. \quad (0.6)$$

В (0.4)–(0.6) и всюду ниже индекс-штрих — знак транспонирования,  $\lambda$  — достаточно большое число такое, что справедливо условие: для любого вектора  $s$ ,  $|s| = 1$  имеем

$$\begin{aligned} \max_q \min_p s' [\xi^{(i)}(t, y, q)q + p] &= \min_p s' [\xi^{(i)}(t, y, s)s + p] = \xi^{(i)}(t, y, s), \\ \min_p s' [\xi^{(i)}(t, y, q)q + p] &< \xi^{(i)}(t, y, s), \quad q \neq s, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (0.7)$$

в той достаточно большой ограниченной области фазового пространства  $\{t, y\}$ , в которой по нашему предположению рассматриваются интересующие нас движения системы. Простейший пример — игра на минимакс-максимин терминальной платы:  $\sigma(x[\vartheta]) = \sigma(y[\vartheta])$ . Здесь

$$\begin{aligned} i = 1, \quad \{p^{(1)}(t, y, q^{(1)}), q^{(1)}(t, y)\}, \quad \gamma^{(1)}(t_*, y_*) &= \min_{p^{(\cdot)}} \sup_{y^{[\cdot]}} \sigma(y[\vartheta]); \\ i = 2, \quad \{p^{(2)}(t, y, q^{(2)}), q^{(2)}(t, y)\}, \quad \gamma^{(2)}(t_*, y_*) &= \max_{p^{(\cdot)}} \inf_{y^{[\cdot]}} \sigma(y[\vartheta]); \\ \gamma^{(1)}(t, y) &= \gamma^{(2)}(t, y) = \gamma^0(t, y), \end{aligned} \quad (0.8)$$

$\gamma^{(i)}$  —  $p$ -стабильна [8–10]. Из (0.2)–(0.8) вытекает, что непрерывная, липшицевая по  $y$  функция  $\gamma^0(t, y)$  удовлетворяет условию: пусть дано  $\{t_*, y_*\}$ ,  $t_* < \vartheta$ ,  $|s_*| = 1$ ,  $z_* = \gamma^0(t_*, y_*)$ , тогда существуют  $\tau_* > 0$ ,  $y[t; t_*, y_*, s_*]$  такие, что справедливы равенства

$$\dot{y}[t] = \xi^{(1)}(t, y[t], s_*)s_* + p[t], \quad |p[t]| \leq \lambda, \quad t_* \leq t \leq t_* + \tau_*, \quad (0.9)$$

$$z[t] = z_* + \int_{t_*}^t [(s_*' \dot{y}[\zeta]) - \xi^{(1)}(\zeta, y[\zeta], s_*)] d\zeta = \gamma^0(t, y[t]). \quad (0.10)$$

Имеем равенство  $\xi^{(1)}(t, y, s) = H(t, x, \gamma_x)$  при  $y = x$ ,  $s = \gamma_x$ , где  $H(t, x, \gamma_x)$  — тот самый гамильтониан, который определяет уравнение Гамильтона — Якоби

$$\gamma_t(t, x) + H(t, x, \gamma_x) = 0 \quad (0.11)$$

при краевом условии

$$\gamma(\vartheta, x) = \sigma(x) \quad (0.12)$$

для цены игры  $\gamma(t, x)$  в системе (0.1) с платой  $\sigma(x[\vartheta])$ .

Отсюда получается, что если цена игры  $\gamma^0(t_*, x_*)$ , существование и свойства которой устанавливаются дескриптивно из общих соображений, есть функция гладкая, то она является классическим решением уравнения Гамильтона — Якоби (0.11). При краевом условии (0.12) это решение единственно.

Если же такой гладкой цены у данной игры нет, то согласно предыдущему получается, что установленная на основе унификации игры цена игры  $\gamma^0$  является обобщенным минимаксным решением А.И. Субботина, так как условия (0.9), (0.10), которые следуют здесь из (0.2)–(0.8), есть условия из определения названного минимаксного решения [12].

Наоборот, задаче Коши (0.11), (0.12) для уравнения (0.11) как такового соответствует игра (0.2)–(0.8). Ее цена  $\gamma^0(t, y)$  есть минимаксное решение для (0.11), (0.12).

Однако для игры на минимакс-максимин времени  $\vartheta$  до встречи с множеством  $M$  для унифицированной системы (0.2)–(0.7) цена  $\vartheta^0(t, y) = \vartheta^{(1)}(t, y)$  есть функция, вообще говоря, лишь полунепрерывная снизу. Но при этом она  $p$ -стабильна [8–10]. Таким образом, из (0.2)–(0.7) получается следующий вывод. Если дано  $\{t_*, y_*\} \notin M$ ,  $|s_*| = 1$ ,  $z_* \geq \vartheta^0(t_*, y_*)$ , то существуют  $\tau_* > 0$ ,  $y[t; t_*, t_*, y_*, s_*]$  (0.2), (0.4) такие, что при  $t_* \leq t \leq t_* + \tau_*$  справедливо неравенство

$$z[t] \geq z_* + \int_{t_*}^t [s'_* \dot{y}[\zeta] - \xi^{(1)}(\zeta, y[\zeta], s_*)] d\zeta \geq \vartheta^0(t, y[t]). \quad (0.13)$$

При обозначении  $\xi^{(1)}(\cdot) = H(\cdot)$ , где  $H(\cdot)$  — гамильтониан, условие (0.13) есть определение верхнего минимаксного решения  $\vartheta(\cdot)$  для соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби (вместе с условием полунепрерывности  $\vartheta(\cdot)$  снизу).

Минимаксная стратегия  $u^0(t, x)$ , которая строится по цене  $\vartheta^0(t, x) = \vartheta^0(t, y)$ ,  $y = x$ , то есть в данном случае по верхнему минимаксному решению  $\vartheta^0(\cdot)$  (здесь еще и минимальному!), гарантирует минимакс  $\vartheta^0(\cdot)$  времени до встречи с множеством  $M$  внутри множества  $N$ . Но для задачи об уклонении от множества  $M$  внутри множества  $N$  величина  $\vartheta^0(\cdot)$  является лишь асимптотической ценой игры. Стратегию  $v^{[\alpha]}(t, x)$ , которая гарантирует уклонение от множества  $M$  внутри множества  $N$  вплоть до момента  $\vartheta^{[\alpha]} = \vartheta^0(t_*, x_*) - \alpha$ ,  $\alpha > 0$ , можно строить по цене  $\gamma^{[\alpha]}(t, x)$  подходящей вспомогательной игры [8, 12, 13]. Например, в простейшем случае, когда  $M = \{\{t, x\}, t_0 \leq t, |x| = 0\}$ ,  $N = \{\{t, x\}, t_0 \leq t, |x| < \infty\}$ , это может быть игра на минимакс-максимин функционала

$$\varphi(x[\tau], \quad t_0 \leq \tau \leq \vartheta) = \min_{t_0 \leq \tau \leq \vartheta} |x[\tau]|. \quad (0.14)$$

Однако эта игра для (0.1), (0.14) имеет особенность. Уравнение (0.1) является обыкновенным и функционал (0.14) позиционным. Это означает, что выбор оптимальных воздействий  $u$  и  $v$  возможен по информации о текущей позиции  $\{t, x[t]\}$ . Поэтому данная игра имеет седловую точку — пару позиционных стратегий  $\{u^0(t, x), v^0(t, x)\}$ . Однако цена игры уже позиционной не получается. Она является функционалом от текущей истории  $x_t(\tau)$ . Поэтому при унификации этой игры и тем более при переходе от ее решения к обобщенным решениям уравнений Гамильтона — Якоби или к обобщениям самих подобных уравнений, игру (0.1), (0.14) удобно включить в класс наследственных игр, где согласно общей концепции роль фазовой переменной играет уже история движения [14–18]. В данном случае это будет история, сложившаяся к текущему моменту  $t \in [t_0, \vartheta]$

$$x_t(\tau) = \{x[\tau], t_0 \leq \tau \leq t\}. \quad (0.15)$$

Таким образом, при унификации игры (0.1), (0.14) формально включаем ее в класс игр, движения в которых представляются в форме элементов  $x_t(\tau)$  (0.15) и подчиняются уравнению

$$\dot{x}[t] = \int_{t_0}^t f(t, x[\tau], u, v) d\tau(t, \tau), \quad (0.16)$$

и функционал (0.14) имеет вид

$$\varphi(x_{\vartheta}(\tau)) = \min_{t_0 \leq \tau \leq \vartheta} |x[\tau]|. \quad (0.17)$$

При этом предполагаем, что в (0.16) зависимость правой части от  $t$  стеснена известными условиями, при которых гарантировано выполнение стандартных требований существования, единственности, продолжимости абсолютно непрерывных по  $t$  решений  $x[t]$  (здесь решений  $x[t]$ , удовлетворяющих условиям Липшица по  $t$ ) на отрезке  $[t_0, \vartheta]$  и условию интегральной непрерывности по исходной истории  $x_{t_*}(\tau)$ , какими бы ни реализовались кусочно-непрерывные допустимые управляющие воздействия  $u[t]$  и  $v[t]$ ,  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ . (В случае (0.1), (0.14) уравнение (0.16) вырождается в (0.1) при  $d_{\tau}(t, \tau) = \delta(\tau - t)d\tau$ ). Теперь при унификации повторяются соотношения (0.2)–(0.8), где, однако, фазовый вектор  $y$  замещается на элемент  $y_t(\tau)$ , терминальная плата  $\sigma(y[\vartheta])$  — на терминальную плату  $\varphi(y_{\vartheta}(\tau))$ .

В силу наследственных аналогов для (0.2)–(0.8) получается, что цена  $\gamma^0(y_{t_*}(\tau))$  наследственной игры, стало быть, и цена  $\gamma^0(x_{t_*}(\tau))$  исходной игры (0.1), (0.4) удовлетворяют наследственному аналогу условий (0.9), (0.10). Таким образом, из редукции игры (0.16), (0.17) к унифицированной форме следует, что справедливо утверждение: для данных  $z_* = \gamma^0(y_{t_*}(\tau))$ ,  $t_* < \vartheta$  и  $s, |s| = 1$  найдутся  $\tau^* > 0$  и  $p[t]$ ,  $t_* \leq \tau \leq t^* + \tau^*$  такие, что будет выполнено условие

$$z[t] = z_* + \int_{t_0}^t [s' \dot{y}(\zeta) - \xi(\zeta, y_{\zeta}(\tau), s)] d\zeta = \gamma^0(y_t(\tau)).$$

Это условие есть определение минимаксного решения А.И. Субботина для уравнения Гамильтона — Якоби, переписанное здесь для системы (0.16) при краевом условии

$$\gamma(y_{\vartheta}(\tau)) = \varphi(y_{\vartheta}(\tau)). \quad (0.18)$$

Таким образом, естественно называть  $\gamma^0(x_t(\cdot))$  обобщенным минимаксным решением уравнения Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \gamma(y_t(\vartheta))}{\partial t} + \xi\left(t, y_t(\tau), \frac{\partial \gamma(y_t(\vartheta))}{\partial y_t(\vartheta)}\right) = 0 \quad (0.19)$$

при краевом условии (0.18). (Запись (0.19) имеет символический смысл!)

Отметим, что унификация дифференциальной игры в формализации из [8] смыкает эту формализацию с концепцией дифференциальной игры, введенной Л. С. Понтрягиным (см. выше ссылку [3, 4]).

Основной материал предлагаемой статьи посвящен выяснению связи между дескриптивной альтернативой [8] для игры сближения с множеством  $M$  — уклонения от множеств  $M$  внутри множества  $N$  и предельными значениями решения подходящей краевой задачи для аппроксимирующего параболического уравнения, вырождающегося при стремлении диффузионного члена к нулю в уравнение типа Гамильтона — Якоби, характерное для теории дифференциальных игр. На этой основе для рассматриваемой дифференциальной игры сближения-уклонения развивается и обосновывается схема конфликтного управления со стохастическим поведением, предложенная и описанная в общих чертах ранее в заметке [19]. Исследование опирается на теорию дифференциальных игр в аспекте уральских исследований [15, 16, 20–26], теорию параболических уравнений [27], теорию стохастических дифференциальных уравнений [28], теорию устойчивости движения [29–31], в том числе на теорию устойчивости решений стохастических уравнений [32–34].

### 1. Исходная игра сближения-уклонения

Дано уравнение движения конфликтно управляемого  $x$ -объекта

$$\dot{x} = f(t, x, u, v); \quad t_0 \leq t \leq \vartheta; \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1.1)$$

Здесь  $x = \{x_i, i = \overline{1, n}\}$  — вектор-столбец;  $P, Q$  — компакты; функция  $f(\cdot)$  непрерывна, по  $x$  липшицева. Стратегии  $u(t, x), v(t, x)$  и движения  $x[t] = x[t; t_*, x_*; u(\cdot)]$  и  $x[t] = x[t; t_*, x_*; v(\cdot)]$  формализуются в соответствии с определениями из работы [8]. В пространстве  $\{t, x\}$  заданы замкнутые множества

$$M_{[t_0, \vartheta]} = \{t_0 \leq t \leq \vartheta, x \in M_t\}; \quad N_{[t_0, \vartheta]} = \{t_0 \leq t \leq \vartheta, x \in N_t\}, \quad M_{[t_0, \vartheta]} \subset N_{[t_0, \vartheta]},$$

где некоторые  $M_t$  могут быть пустыми. Если не будет оговорки, предполагаем, что множество  $N_{[t_0, \vartheta]}$  ограниченное.

*Задача I о встрече с множеством  $M_{[t_0, \vartheta]}$  внутри множества  $N_{[t_0, \vartheta]}$  [8].*

Дана исходная позиция  $\{t_*, x_*\} \in N_{[t_0, \vartheta]}$ . Найти стратегию  $u^0(t, x)$ , которая для каждого движения  $x[t] = x[t; t_*, x_*, u^0(\cdot)]$  гарантирует встречу

$$\exists \tau \in [t_*, \vartheta] : [\{\tau, x[\tau]\} \in M_{[t_0, \vartheta]}] \wedge [\{t, x[t]\} \in N_{[t_0, \vartheta]}, t_0 \leq t \leq \tau].$$

Обозначим через  $M_t^{(\varepsilon)}, N_t^{(\varepsilon)}; M_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}, N_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}$  ( $\varepsilon > 0$ )  $\varepsilon$ -окрестности данных множеств в пространствах  $\{x\}$  и  $\{t, x\}$  соответственно.

*Задача II об уклонении от множества  $M_{[t_0, \vartheta]}$  внутри множества  $N_{[t_0, \vartheta]}$  [8].*

Дана исходная позиция  $\{t_*, x_*\} \in N_{[t_0, \vartheta]}$ . Найти стратегию  $v^0(t, x)$ , которая при некотором  $\varepsilon > 0$  гарантирует для каждого движения  $x[t] = x[t; t_*, x_*, v^0(\cdot)]$  уклонение

$$[\{t, x[t]\} \notin M_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \vartheta]$$

$$\vee [\exists \tau \in [t_*, \vartheta) : (\{\tau, x[\tau]\} \notin N_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}) \wedge (\{t, x[t]\} \notin M_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \tau)].$$

Ограничимся случаем, когда множество  $N_{[t_0, \vartheta]}$  связное и множества  $N_{t_0}, N_{\vartheta}, M_{\vartheta}$  не пустые. По смыслу задач I и II это по сути дела не сужает проблему.

Принимаем условие седловой точки для маленькой игры — условие Айзекса — Беллмана [1, 2, 8] —  $\forall t, x, l$ :

$$\min_u \max_v l' f(\cdot) = \max_v \min_u l' f(\cdot) = \xi(t, x; l), \quad (1.2)$$

$l$ —вектор-столбец.

Альтернатива [8]: Для всякой позиции  $\{t_*, x_*\} \in N_{[t_0, \vartheta]}$  верно одно и только одно из двух: (1) разрешима задача I о встрече; (2) разрешима задача II об уклонении.

### 2. Присоединенная краевая задача

Обратимся к пополненному пространству  $\{\{t, x^*\} = \{t, x, x_{n+1}^*\}\}$ . Полагаем, что в таком  $(n + 2)$ -мерном пространстве зафиксирована область

$$H_{[t_{\sim}, \tilde{t}]}^* = \{\{t, w^*\} : t_{\sim} \leq t \leq \tilde{t}; \quad t_{\sim} < t_0, \quad \vartheta < \tilde{t}; \quad |w^*| \leq C^*\},$$

достаточно большая, чтобы в ней содержались все последующие построения. Используем величину

$$\xi^*(t, w^*; l^*) = \xi(t, w, l) + l_{n+1}^*, \quad l^* = \{l, l_{n+1}^*\},$$

которую аппроксимируем с выполнением неравенства

$$|\xi_\delta^*(t, w^*; l^*) - \xi^*(t, w^*; l^*)| < \delta, \quad \delta > 0, \quad \{t, w^*\} \in H_{[t, \bar{t}]}^*, \quad l^* \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (2.1)$$

где функция  $\xi_\delta^*(\cdot)$  непрерывно дифференцируемая. Используем пополненные множества:

$$\begin{aligned} M_{\{t, w_{n+1}^*\}} &= \{w : w \in M_{w_{n+1}^*}\}, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta; \\ M_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}} &= \left\{ w^* = \{w, w_{n+1}^*\} : w \in M_{\{t, w_{n+1}^*\}}, \quad t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta \right\}, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta; \\ M_{\{t_0 \leq t \leq \vartheta, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}} &= \left\{ \{t, w, w_{n+1}^*\} : \{w, w_{n+1}^*\} \in M_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta \right\}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} N_{\{t, w_{n+1}^*\}} &= \{w : w \in N_{w_{n+1}^*}\}, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta; \\ N_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}} &= \left\{ w^* = \{w, w_{n+1}^*\} : w \in N_{\{t, w_{n+1}^*\}}, \quad t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta \right\}, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta; \\ N_{\{t_0 \leq t \leq \vartheta, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}} &= \left\{ \{t, w, w_{n+1}^*\} : \{w, w_{n+1}^*\} \in N_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta \right\}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Символами  $M_{\dots}^{(\varepsilon)}$ ,  $N_{\dots}^{(\varepsilon)}$  будем обозначать  $\varepsilon$ -окрестность множеств  $M_{\dots}$ ,  $N_{\dots}$  (2.2),(2.3) в соответствующих подпространствах:  $\{w\}$ ,  $\{w^* = \{w, w_{n+1}^*\}\}$  и  $\{t, w^* = \{w, w_{n+1}^*\}\}$ . Множества  $M_{\{t_0 \leq t \leq \vartheta, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}$  и  $N_{\{t_0 \leq t \leq \vartheta, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}$  — цилиндрические вдоль оси  $t$ .

Исходной позиции  $\{t_*, x_*\} \in N_{[t_0, \vartheta]}$  в исходной игре сближения-уклонения поставим в соответствие позицию  $\{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\}$ ,  $w_* = x_*$ ,  $w_{*n+1}^* = t_*$  и присоединим краевую задачу для параболического уравнения

$$\frac{\alpha}{2} \lambda_{w^* w^*}(t, w^*) + \lambda_t(t, w^*) + \xi_\delta^*(t, w^*, \lambda_{w^*}(t, w^*)) = 0 \quad (2.4)$$

в области

$$H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*} = \left\{ \{t, w^*\} = \{t; w, w_{n+1}^*\} : t_0 \leq t < \vartheta, \quad w^* \in [N_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(4\nu)} \setminus M_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{[\nu]}] \right\}, \quad \nu > 0, \quad (2.5)$$

при краевых условиях:

$$\begin{aligned} \lambda(t, w^*) &= B > 0, \quad \text{если } \{t, w^*\} \in \Gamma_\nu^{[N]}, \\ \Gamma_\nu^{[N]} &= \left\{ \{t, w^*\} : t_0 \leq t < \vartheta; \quad w^* \in [N_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{[4\nu]} \setminus N_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(4\nu)}] \right\}; \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \lambda(t, w^*) &= 0, \quad \text{если } \{t, w^*\} \in \Gamma_\nu^{[M]}, \\ \Gamma_\nu^{[M]} &= \left\{ \{t, w^*\} : t_0 \leq t < \vartheta; \quad w^* \in [M_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{[\nu]} \setminus M_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\nu)}] \right\}; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \lambda(\vartheta, w^*) &= B \text{dist}(w^*, M_{\{\vartheta, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{[\nu]}) / \nu, \quad \text{если } \{\vartheta, w^*\} \in \Gamma_\nu^{[\vartheta]}, \\ \Gamma_\nu^{[\vartheta]} &= \left\{ w^* = \{w, w_{n+1}^*\} \in N_{\{\vartheta, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{[4\nu]} : \text{dist}(w^*, M_{\{\vartheta, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{[\nu]}) \leq \nu \right\}; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \lambda(\vartheta, w^*) &= B, \quad \text{если } \{\vartheta, w^*\} \in \Gamma^{[\vartheta]*}, \\ \Gamma^{[\vartheta]*} &= \left\{ w^* = \{w, w_{n+1}^*\} \in N_{\{\vartheta, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{[4\nu]} : \text{dist}(w^*, M_{\{\vartheta, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{[\nu]}) > \nu \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Символ  $M_{\dots}^{[\varepsilon]}$ ,  $N_{\dots}^{[\varepsilon]}$  обозначает замыкание  $\varepsilon$ -окрестности  $M_{\dots}^{(\varepsilon)}$ ,  $N_{\dots}^{(\varepsilon)}$ .

Краевую задачу (2.4)–(2.9) будем использовать при достаточно малых значениях параметра  $\nu > 0$ . Полагаем, что при таких  $\nu$  граница  $\Gamma_\nu(H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}) = \Gamma_\nu^{[N]} \cup \Gamma_\nu^{[M]} \cup \Gamma_\nu^{[\vartheta]} \cup \Gamma_\nu^{[\vartheta]*}$  области  $H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$ , цилиндрической вдоль оси  $t$ , связной по сечениям  $t = \text{const}$ , удовлетворяет известным условиям регулярности [27], при которых справедливы теоремы существования и единственности классического решения  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$  задачи (2.4)–(2.9). Стало быть, функция  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$

при малом  $\nu > 0$  и при  $\delta > 0$ ,  $\alpha > 0$  имеет в связной области  $H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$  непрерывные вторые производные по  $w_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n+1$  и непрерывную производную по  $t$  [27]. Учитываем еще, что выполняется следующее условие. Существует такое значение  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , что при всяком значении  $\nu \in (0, \tilde{\varepsilon}]$  для всякой исходной позиции  $\{t_*, w_*^*\} \notin M_{\{t_*, t_0 \leq w_{*n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\nu)}$ ,  $\{t_*, w_*^*\} \in H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$  всякая непрерывная кривая  $w^*(\tau)$ ,  $t_* \leq \tau \leq \tau_{\nu_*}^{[M]} \leq \vartheta$ ,  $w^*(t_*) = w_*^*$ ,  $w^*(\tau_{\nu_*}^{[M]}) \in M_{\{\tau_{\nu_*}^{[m]}, t_0 \leq t \leq \vartheta\}}^{(\nu_*)}$ ,  $\nu_* < \nu$  непременно пересечется с границей  $\Gamma_{\nu_*}^{[M]}$ , так что в некоторый момент  $\tilde{\tau} \in (t_*, \tau_{\nu_*}^{[M]})$  будет выполнено условие

$$\{\tilde{\tau}, w^*(\tilde{\tau})\} \in \Gamma_{\nu_*}^{[M]}. \quad (2.10)$$

Обратимся к вопросу о том, как связано решение  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$  задачи (2.4)–(2.9) в позиции  $\{t_*, w_*^*\} = \{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\} = \{t_*, x_*, t_*\}$ , отвечающей позиции  $\{t_*, x_*\} \in N_{[t_0, \vartheta]}$  с решениями задач I и II, которые составляют исходную игру сближения-уклонения с множеством  $M_{[t_0, \vartheta]}$  внутри множества  $N_{[t_0, \vartheta]}$ .

### 3. Оценка функции $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$ , когда для исходной позиции $\{t_*, x_*\}$ разрешима задача I о встрече

Обратимся к пополненным уравнениям движения

$$x^*[t] = x^*[t; t_*, x_*^*], \quad w^*[t] = w^*[t; t_*, w_*^*], \quad w_{*i}^* = x_{*i}^* = w_{*i} = x_{*i}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$w_{*n+1}^* = x_{*n+1}^* = t_*; \quad t_* \leq t \leq \vartheta.$$

$$\dot{x}^* = f^*(t, x^*, u, v) = \begin{pmatrix} f(t, x, u, v) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u \in P, \quad v \in Q; \quad (3.1)$$

$$dw^* = f^*(t, w^*, u, v)dt + \alpha dW_t^* = \begin{pmatrix} f(t, x, u, v) \\ 1 \end{pmatrix} dt + \alpha \begin{pmatrix} dW_t \\ dW_{t, n+1}^* \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $W_t^* = \{W_t, W_{t, n+1}^*\}$  —  $(n+1)$ -мерный стандартный винеровский процесс с независимыми компонентами  $W_{t, i}^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ ;  $W_{t, n+1}^*$ ,  $\alpha > 0$ . Выяснение вопроса о связи предельных значений величины  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*)$  при  $\nu \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  и  $\alpha \rightarrow 0$  с условием разрешимости задачи I о встрече для исходной позиции  $\{t_*, x_*\}$  при  $w_*^* = \{w_*, w_{*n+1}^*\} = \{x_*, t_*\}$  базируется на свойствах решения  $\{x^*[t] = x^*[t; t_*, x_*^*]$ ,  $w^*[t] = w^*[t; t_*, w_*^*]$ ,  $x_*^* = \{x_*, x_{*n+1}^*\} = \{w_*, w_{*n+1}^*\}$ ,  $x_{*n+1}^* = w_{*n+1}^* = t_*$ ,  $t_* \leq t \leq \vartheta\}$  следующих объединенных тестовых уравнений:

$$\dot{x}^* = f^*(t, x^*, u^0(\cdot), v^{[x, l^*]}); \quad v^{[x, l^*]} \in \arg \min_v \{ \max_u l'^* f^*(t, x^*, u, v) \}; \quad (3.3)$$

$$dw^* = f^*(t, w^*, u^{[w, l^*]}, v^{[w, \lambda]})dt + \alpha dW_t^*; \quad u^{[w, l^*]} \in \arg \max_u \{ \min_v l'^* f^*(t, w^*, u, v) \},$$

$$v^{[w, \lambda]} \in \arg \max_v \{ \min_u \lambda_{w^*} f^*(t, w^*, u, v) \}, \quad l^* = x^* - w^*. \quad (3.4)$$

Здесь  $\lambda_{w^*}$  — вектор–строка. Содержательно вероятностный процесс  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ , который изображен здесь в условной форме как пара уравнений — обыкновенного дифференциального уравнения (3.3) и стохастического дифференциального уравнения Ито (3.4), на самом деле объединяет понимание движения  $x[t]$  как обобщенного конструктивного решения  $x[t]$  (здесь — решения  $x^*[t]$ ) из [8] с канонической трактовкой решения стохастического уравнения Ито [28]. Это объединение определяется связью движений  $x^*[t]$  и  $w^*[t]$  через влияние вектора-рассогласования  $l^* = x^* - w^*$  на управляющие воздействия  $u$  и  $v$  для  $x$ -объекта и для  $w$ -модели, как это следует из условий в (3.3) и (3.4). Формализация такого объединения возможна по схеме, подобной схеме построения случайного процесса — решения того интегрального уравнения, которое представляет решение для дифференциального уравнения Ито [28]. Только здесь в

соответствующие построения включает еще компонента  $x^*[t]$ , ведомая при этом, как и компонента  $w^*[t]$ , процессом  $W_t^*$ . Но влияние  $W_t^*$  на  $x^*[t]$  осуществляется уже не непосредственно, а через величину  $w^*[t]$ . Следует заметить, что условия (3.3), (3.4) для  $u$  и  $v$  позволяют осуществить подходящий измеримый выбор, нужный для формального построения вероятностного процесса  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ . Аккуратности ради в обозначении процесса  $\{x^*[t], w^*[t]\}$  следовало бы употреблять индекс  $\omega$  — знак элементарного события и писать  $\{x_\omega^*[t], w_\omega^*[t]\}$ , особенно в тех случаях, когда речь идет о реализациях тех или иных случайных величин и функций. Однако это очень осложняет запись и в то же время мало что добавляет по существу, так как от подробного описания процесса  $\{x_\omega^*[t], w_\omega^*[t]\}$  все равно приходится в этой статье отказаться. Поэтому позволим себе индекс  $\omega$  опустить, как приходится опустить и многие другие детали, которые должны обосновывать выкладки, где используется та или иная дифференциальная или интегральная запись уже в готовой предельной форме.

Следует добавить, что все основные соотношения, которые получаются в статье и выводятся на основании записи операций уже в готовой наглядной форме дифференцирования или интегрирования, можно при наших условиях получить эквивалентно на каждом шаге непосредственным предельным переходом от дискретных по времени моделей для уравнения (3.3) и уравнения (3.4), причем процесс  $dW_t^*$  моделируется последовательностью из очень большого числа импульсов  $p_j = \Delta t^{\frac{1}{2}} \delta(\tau - \tau_j)$ . Такой путь вывода нужных соотношений избавляет от необходимости учета многих тех или иных тонкостей, однако получается неосуществимо громоздким.

Подчеркнем, что в формализованном процессе  $\{x^*[t], w^*[t]\}$  составляющие  $x^*[t]$  и  $w^*[t]$  наследуют те свойства решений  $x^*[t]$  и  $w^*[t]$  исходных уравнений (3.1), (3.2), которые определяются соотношениями для управлений  $u$  и  $v$  в данных записях (3.1), (3.2). Однако чтобы не загромождать изложение при использовании того или иного из таких свойств для составляющей  $x^*[t]$  или  $w^*[t]$ , позволим себе неаккуратность, ссылаясь прямо на наследуемое этой составляющей свойство решения соответствующего уравнения из содержательной модели (3.1), (3.2), не акцентируя на этом каждый раз внимание.

Процесс  $\{x^*[t], w^*[t]\}$  оцениваем на базе функций Ляпунова

$$\rho(t, l^*) = \rho(t, x^* - w^*) = \frac{1}{2} |l^*|^2 e^{-\zeta(t-t_*)}, \quad \zeta = \text{const} > 0, \quad (3.5)$$

$$\lambda(t, w^*) = \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*). \quad (3.6)$$

Для функции  $\rho(t, l^*)$  (3.5) имеем дифференциальную оценку в силу уравнений (3.3), (3.4)

$$\frac{dM\{\rho(\tau, l^*[\tau]) | t, x^*[t], w^*[t]\}}{d(\tau - t)_+} \leq \left[ \left( L_f - \frac{1}{2} \zeta \right) |l^*[t]|^2 + \frac{\alpha}{2} \right] e^{-\zeta(t-t_*)} \leq \frac{\alpha}{2} e^{-\zeta(t-t_*)}, \quad (3.7)$$

при  $\zeta > 2L_f$  и при условии

$$|l^*[t]| = |x^*[t] - w^*[t]| < \frac{\nu}{2}. \quad (3.8)$$

Здесь и ниже символ  $M\{\dots\}$  обозначает условное математическое ожидание. В (3.7) число  $L_f$  — постоянная Липшица функции  $f^*(t, x^*, u, v)$  по  $x^*$ . Условие (3.8) объясняется следующим правилом обрыва реализаций  $x^*[t]$  и  $w^*[t]$  в составе реализации  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ .

В начальный момент  $l^*[t_*] = x^*[t_*] - w^*[t_*] = \bar{0}$ . Если для некоторой реализации  $\{x^*[t], w^*[t]\}$  неравенство (3.8) не нарушается вплоть до момента  $\tau^{[\Gamma]}$ , когда впервые случается включение

$$\{\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]\} \in \Gamma_\nu(H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}), \quad (3.9)$$

то в момент  $\tau^{[\Gamma]}$  составляющая  $w^*[t]$  в реализации  $\{x^*[t], w^*[t]\}$  обрывается, а составляющая  $x^*[t]$  продолжается под действием подходящей допустимой реализации управления  $v^{[x]}[t]$ . Если же для некоторой реализации  $\{x^*[t], w^*[t]\}$  впервые случается в некоторый момент  $\tau^{[\rho]}$ , предшествующий моменту  $\tau^{[\Gamma]}$ , равенство

$$|l^*[\tau^{[\rho]}]| = |x^*[\tau^{[\rho]}] - w^*[\tau^{[\rho]}]| = \frac{\nu}{2}, \quad (3.10)$$

то в момент  $\tau^{[\rho]}$  обрывается составляющая  $x^*[t]$  в реализации  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ , а составляющая  $w^*[t]$  продолжается до момента  $\tau^{[\Gamma]}$ , когда случается (3.9). Изменение  $w^*[t]$  при  $t \geq \tau^{[\rho]}$  определяется тогда уравнением

$$dw^* = f^*(t, w^*, u^{[w]}[t], v^{[w, \lambda]})dt + \alpha dW_t^*, \quad \tau^{[\rho]} \leq t < \tau^{[\Gamma]}, \quad (3.11)$$

где  $u^{[w]}[t]$  — какая-либо допустимая реализация, измеримая должным образом по  $t \in [\tau^{[\rho]}, \tau^{[\Gamma]})$  ( $u$  — выбираемая измеримо в основном вероятностном пространстве  $\{\Omega, F, P\}$ , на котором базируется процесс  $\{x_\omega^*[t], w_\omega^*[t]\}$ ).

Пусть  $P(t)$  — вероятность реализаций  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ , для которых сохраняется неравенство

$$|l^*[\tau]| = |x^*[\tau] - w^*[\tau]| < \frac{\nu}{2}, \quad t_* \leq \tau \leq t \quad (3.12)$$

и для которых момент  $\tau^{[\Gamma]}$  не предшествует моменту  $t$ . Поэтому полагаем

$$P(t) = P\left(\left[|x^*[\tau] - w^*[\tau]| < \frac{\nu}{2}, t_* \leq \tau \leq t\right] \wedge \left[\tau, w^*[\tau]\right] \notin \Gamma_\nu(H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}), t_* \leq \tau < t\right). \quad (3.13)$$

Тогда, интегрируя (3.7), получаем неравенство

$$M\{\rho(t, l^*[t])\} = M\{\rho(t, x^*[t] - w^*[t])\} \leq \frac{\alpha}{2} \int_{t_*}^t P(\tau) e^{-\zeta(\tau - t_*)} d\tau. \quad (3.14)$$

Тем более для (3.12), (3.13) при  $t = \tau^{[\Gamma]}$  справедлива оценка

$$M\{\rho(\tau^{[\Gamma]}, l^*[\tau^{[\Gamma]}])\} = M\{\rho(\tau^{[\Gamma]}, x^*[\tau^{[\Gamma]}] - w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \leq \frac{\alpha}{2} \int_{t_*}^{\vartheta} e^{-\zeta(\tau - t_*)} d\tau. \quad (3.15)$$

Из (3.15) согласно неравенству Чебышева [28] вытекает оценка

$$P\left(|x^*[\tau^{[\Gamma]}] - w^*[\tau^{[\Gamma]}]| \leq \frac{\nu}{2}\right) \geq 1 - \frac{\alpha}{2} \int_{t_*}^{\vartheta} e^{-\zeta(\tau - t_*)} d\tau / \frac{1}{2} \frac{\nu^2}{4} e^{-\zeta(\vartheta - t_*)} \geq 1 - \frac{4\alpha}{\nu^2 \zeta} e^{\zeta(\vartheta - t_*)}. \quad (3.16)$$

Оценка (3.16) означает, что вероятность тех реализаций  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ , у которых составляющие  $x^*[t]$  обрываются при  $\tau^{[\rho]} < \tau^{[\Gamma]}$ , удовлетворяет неравенству

$$P(w[\tau^{[\Gamma]}] | \tau^{[\rho]} < \tau^{[\Gamma]}) \leq \frac{4\alpha}{\nu^2 \zeta} e^{\zeta(\vartheta - t_*)}. \quad (3.17)$$

С другой стороны, по свойствам стратегии сближения  $u^0(\cdot)$ , воздействия которой согласно (3.3) управляют движением  $x^*[t] = x^*[t; t_*, x_*, x_{*n+1}^*, u^0(\cdot)]$ ,  $x_{*n+1}^* = t_*$ , должно выполняться условие

$$\begin{aligned} & \exists \tau^{[M]} \in [t_*, \vartheta] : \left\{ \left( [x[t] \in N_t] \wedge [x[t] \notin M_t], t_* \leq t < \tau^{[M]} \right) \right. \\ & \left. \wedge \left( x[\tau^{[M]}] \in M_{\tau^{[M]}} \right) \wedge \left( x_{n+1}^*[t] = t, t_* \leq t \leq \tau^{[M]} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

каким бы ни реализовалось в (3.3) другое управляющее воздействие  $v^{[x, l]}[t]$ ,  $t \geq t_*$ . Но по построению множеств  $M_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}$  (2.2) и  $N_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}$  (2.3) условие (3.18) означает, что для каждой составляющей  $x^*[t]$ , которая не обрывается в момент  $\tau^{[\rho]} < \tau^{[\Gamma]}$ , должно выполняться условие

$$\exists \tau^{[M]} \in [t_*, \vartheta] : \left\{ \left[ \{t, x^*[t]\} \in N_{\{t_0 \leq t \leq \vartheta; t_0 \leq x_{n+1}^* \leq \vartheta\}}, t_0 \leq t \leq \tau^{[M]} \right] \right\}$$

$$\wedge \left[ \left\{ \tau^{[M]}, x^*[\tau^{[M]}] \right\} \in M_{\{t_0 \leq t \leq \vartheta; t_0 \leq x_{n+1}^* \leq \vartheta\}} \right\}.$$

А это по построению области  $H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$ , с учетом условия (2.10) и вследствие неравенства

$$|x^*[\tau^{[\Gamma]}] - w^*[\tau^{[\Gamma]}]| \leq \frac{\nu}{2},$$

означает, что для рассматриваемых реализаций  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ , у которых нет обрыва  $x^*[t]$  до момента  $\tau^{[\Gamma]}$ , должно выполняться условие

$$\{\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]\} \in \Gamma_{\nu}^{[M]}(H_{[t_*, \vartheta]}^{(\nu)*}). \quad (3.19)$$

Согласно крайевым условиям (2.5)–(2.9) для  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w)$  условие (3.19) означает, что для рассматриваемых реализаций  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ ,  $t_* \leq t \leq \tau^{[\Gamma]}$  справедливо равенство

$$\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(\tau^{[\Gamma]}, w[\tau^{[\Gamma]}]) = 0. \quad (3.20)$$

Теперь из (3.16), (3.17) и (3.20) получается неравенство

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \leq 0 \cdot \left(1 - \frac{4\alpha}{\nu^2\zeta}\right) e^{\zeta(\vartheta - t_*)} + B \frac{4\alpha}{\nu^2\zeta} e^{\zeta(\vartheta - t_*)} = B \frac{4\alpha}{\nu^2\zeta} e^{\zeta(\vartheta - t_*)}. \quad (3.21)$$

В то же время, для изменения функции Ляпунова  $\lambda(t, w^*)$  (3.6) в силу уравнения (3.4) и с учетом того, что  $\lambda(t, w^*)$  есть решение параболического уравнения (2.4), получаем согласно формуле Ито [28] дифференциальную оценку

$$\begin{aligned} \frac{dM\{\lambda(\tau, w^*[\tau])|t, w^*[t]\}}{d(\tau - t)_+} &= \frac{\alpha}{2} \lambda_{w^*w^*}(t, w^*[t]) + \lambda_t(t, w^*[t]) + \lambda_{w^*}(t, w^*[t]) f^*(t, w^*[t]; u^{[w, l]}, v^{[w, \lambda]}) \\ &= \frac{\alpha}{2} \lambda_{w^*w^*} + \lambda_t + \xi_{\delta}^*(t, w^*[t]; \lambda_{w^*}) + \lambda_{w^*} f^*(t, w^*[t]; u^{[u, l]}, v^{[w, \lambda]}) \\ &\quad - \xi_{\delta}^*(t, w^*[t]; \lambda_{w^*}) + \xi^*(t, w^*[t]; \lambda_{w^*}) - \xi^*(t, w^*[t]; \lambda_{w^*}) \geq -\delta. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Интегрируя (3.22), получаем неравенство

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \geq \lambda(t_*, w_*^*) - \delta(\vartheta - t_*). \quad (3.23)$$

Таким образом, из (3.21), (3.23) имеем оценку

$$\lambda(t_*, w_*^*) \leq B \frac{4\alpha}{\nu^2\zeta} e^{\zeta(\vartheta - t_*)} + \delta(\vartheta - t_*). \quad (3.24)$$

Неравенство (3.24), справедливое при достаточно малом  $\nu > 0$  и соответственно при достаточно малых  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ , означает, что справедливо следующее утверждение:

**Лемма 1.** Пусть для исходной позиции  $\{t_*, x_*\}$  в игре сближения-уклонения с множеством  $M_{[t_0, \vartheta]}$  внутри множества  $N_{[t_0, \vartheta]}$  разрешима задача I о встрече. Тогда в позиции  $\{t_*, w_*^*\} = \{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\}$ ,  $w_* = x_*$ ,  $w_{*n+1}^* = t_*$  решение  $\lambda^{[\nu, \delta, \gamma]}(t, w_*^*)$  присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9) удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) = 0. \quad (3.25)$$

Это означает, что для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\nu^* > 0$  такое, что для этого  $\nu = \nu^*$  найдутся достаточно малые  $\delta(\nu^*) > 0$  и  $\alpha(\nu^*) > 0$  такие, что будет справедливо неравенство

$$\lambda^{[\nu^*, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) < \varepsilon$$

при условиях

$$0 < \delta \leq \delta(\nu^*), \quad 0 < \alpha \leq \alpha(\nu^*).$$

Само по себе неравенство (3.24) означает лишь, что выполняется предельное соотношение

$$\limsup_{\nu \rightarrow 0} \limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*) \leq 0.$$

Однако из (2.4)–(2.9) следуют оценки

$$\begin{aligned} \frac{dM\{\lambda(\tau, w^*[\tau])|t, w^*[t]\}}{d(\tau - t)_+} &= \frac{\alpha}{2} \lambda_{w^*w^*} + \lambda_t + \lambda_{w^*} f^*(t, w^*[t], u^0(\cdot), v^0(\cdot)) \\ &= \frac{\alpha}{2} \lambda_{w^*w^*} + \lambda_t + \xi_\delta^*(t, w^*[t], \lambda_{w^*}) - \xi_\delta^*(t, w^*[t], \lambda_w) + \lambda_{w^*} f^*(t, w^*[t], u^0(\cdot), v^0(t)). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Согласно формуле Ито [28], (3.26) есть усредненная производная функции  $\lambda(t, w^*[t])$  в силу уравнения Ито

$$dw^* = f^*(t, w^*, u^0(\cdot), v^0(\cdot))dt + \alpha dW_t^*.$$

Учитываем, что функция  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*)$  есть решение краевой задачи (2.4)–(2.9) и учитываем аппроксимацию (2.1). Поэтому, интегрируя равенство (3.26), получаем неравенство

$$\lambda(t_*, w_*) \geq M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w[\tau^{[\Gamma]}])\} - \delta(\vartheta - t_*),$$

которое согласно краевым условиям (2.5)–(2.9) означает, что справедливо неравенство

$$-\delta(\vartheta - t_*) \leq \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*). \quad (3.27)$$

Неравенства (3.24) и (3.27) и доказывают (3.25).

#### 4. Оценка функции $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$ , когда для исходной позиции $\{t_*, x_*\}$ разрешима задача II об уклонении

Выяснение вопроса о связи предельных значений величины  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*)$  при  $\nu \rightarrow 0$  и  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$  с условием разрешимости задачи II об уклонении для исходной позиции  $\{t_*, x_*\}$  при  $\{t_*, w_*\} = \{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\} = \{t_*, x_*, t_*\}$  базируется на свойствах решения  $\{x^*[t] = x^*[t; t_*, x_*], w^*[t] = w^*[t; t_*, w_*]\}$ ,  $x_* = \{x_*, x_{*n+1}^*\}$ ,  $w_* = \{w_*, w_{*n+1}^*\}$ ,  $w_* = x_*$ ,  $w_{*n+1}^* = x_{*n+1}^* = t_*$  уравнений

$$\dot{x}^* = f^*(t, x^*; u^{[x, l]}, v^0(\cdot)), \quad u^{[x, l]} \in \arg \min_u \{ \max_v l^* f^*(t, x^*, u, v) \}; \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} dw^* &= f^*(t, w^*, u^{[w, \lambda]}, v^{[w, l]})dt + \alpha dW_t^*, \quad u^{[w, \lambda]} \in \arg \min_u \{ \max_v \lambda_{w^*} f^*(t, w^*, u, v) \}, \\ v^{[w, l]} &\in \arg \max_v \{ \min_u l^* f^*(t, w^*, u, v) \}, \quad l^* = x^* - w^*, \quad \{t_*, w_*\} = \{t_*, x_*\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь для функции Ляпунова  $\rho(t, l^*) = 0.5|l^*|^2 e^{-\zeta(t-t_*)}$  (3.5), но теперь уже в силу уравнений (4.1), (4.2) получаются снова такие же оценки (3.7)–(3.17). С другой стороны, по свойствам стратегии  $v^0(\cdot)$  уклонения, воздействия которой согласно (4.1) управляют движением  $x^*[t] = x^*[t; t_*, x_*]$ ,  $x_{*n+1}^* = t_*$ , существует такое  $\varepsilon^* > 0$ , что для составляющей  $x[t]$  в решении  $\{x^*[t], w^*[t]\}$  должно выполняться условие

$$\left[ x[t] \notin M_t^{(\varepsilon^*)}, t_* \leq t \leq \vartheta \right] \vee \left[ \exists \tau \in (t_*, \vartheta) : \left[ (x[\tau] \notin N_\tau^{(\varepsilon^*)}) \wedge (x[t] \notin M_t^{(\varepsilon^*)}, t_* \leq t \leq \tau) \right] \right], \quad (4.3)$$

каким бы ни реализовалось в (4.1) другое управляющее воздействие  $u^{[x, l]}[t]$ ,  $t > t_*$ . По построению множеств  $M_{\{t, t_* \leq w_{*n+1}^* \leq \vartheta\}}$  (2.2) и  $N_{\{t, t_* \leq w_{*n+1}^* \leq \vartheta\}}$  (2.3) условие (4.3) означает, что найдется такое достаточно малое  $\nu^* > 0$ , что при всяком фиксированном  $\nu < \nu^*$ ,  $\nu > 0$  найдутся столь малые  $\delta(\nu) > 0$  и  $\alpha(\nu) > 0$ , что для каждой составляющей  $x^*[t]$ , которая не обрывается в момент  $\tau^{[\rho]} < \tau^{[\Gamma]}$ , должно выполняться условие

$$\left[ \{t, x^*[t]\} \notin M_{\{t, t_* \leq w_{*n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon^*)}, t_* \leq t \leq \vartheta \right] \vee \left[ \exists \tau \in (t_*, \vartheta) : \left[ (\{t, x^*[\tau]\} \notin N_{\{t, t_* \leq w_{*n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon^*)}) \right] \right]$$

$$\wedge \left( \{t, x^*[t]\} \notin M_{\{t, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon^*)}, t_* \leq t \leq \tau \right) \Big].$$

А это по построению области  $H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)^*}$ , вследствие краевых условий (2.6)–(2.9) для  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$  и вследствие неравенства

$$|x^*[\tau^{[\Gamma]}] - w^*[\tau^{[\Gamma]}]| \leq \frac{\nu}{2},$$

означает, что для рассматриваемых реализаций  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ , у которых нет обрыва составляющей  $x^*[t]$  до момента  $\tau^{[\Gamma]} : \{\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]\} \in \Gamma_\nu(H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)^*})$ , должно выполняться условие

$$\{\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]\} \notin \left\{ \left[ M_{\{t, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon^* - \nu)}; t_* \leq t \leq \vartheta \right] \cup \left[ M_{\{\vartheta, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon^* - 2\nu)} \right] \right\}$$

при достаточно малом фиксированном  $\nu < \nu^*$ ,  $\nu > 0$  и при достаточно малых  $\delta \leq \delta(\nu)$  и  $\alpha \leq \alpha(\nu)$ . Таким образом, для рассматриваемых реализаций будет выполнено условие

$$\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]) = B.$$

Но тогда из всех предыдущих оценок получается неравенство

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \geq B \left( 1 - \frac{4\alpha}{\nu^2 \zeta} e^{\zeta(\vartheta - t_*)} \right). \quad (4.4)$$

В то же время для изменения функции Ляпунова  $\lambda(t, w^*)$  (3.6) в силу уравнения (4.2) получаем согласно формуле Ито [28] дифференциальную оценку

$$\begin{aligned} \frac{dM\{\lambda(\tau, w^*[\tau]) | t, w[t]\}}{d(\tau - t)_+} &= \frac{\alpha}{2} \lambda_{w^* w^*} + \lambda_t + \lambda_{w^*} f^*(t, w^*[t]; u^{[w, \lambda]}, v^{[w, l]}) \\ &= \frac{\alpha}{2} \lambda_{w^* w^*} + \lambda_t + \xi_\delta^*(t, w^*[t]; \lambda_w^*) - \xi_\delta^*(t, w^*[t]; \lambda_w^*) + \xi^*(t, w^*[t]; \lambda_w^*) \\ &\quad - \xi^*(t, w^*[t]; \lambda_w^*) + \lambda_{w^*} f^*(t, w^*[t], u^{[w, \lambda]}, v^{[w, l]}) \\ &\leq 0 + \delta - \min_u \max_v \lambda_{w^*} f^*(t, w^*[t], u, v) + \min_u \lambda_{w^*} f^*(t, w^*[t], u, v^{[w, l]}) \leq \delta. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Интегрируя (4.5), получаем неравенство

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \leq \lambda(t_*, w_*^*) + \delta(\vartheta - t_*). \quad (4.6)$$

Таким образом, из (4.4) и (4.6) имеем оценку

$$\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) \geq B \left( 1 - \frac{4\alpha}{\nu^2 \zeta} e^{\zeta(\vartheta - t_*)} \right) + \delta(\vartheta - t_*), \quad (4.7)$$

которая имеет тот смысл, что найдется такое достаточно малое  $\nu^* > 0$ , что при всяком фиксированном  $\nu > 0$ ,  $\nu \leq \nu^*$  найдутся такие достаточно малые  $\delta(\nu) > 0$  и  $\alpha(\nu) > 0$ , что при условиях

$$0 < \delta < \delta(\nu), \quad 0 < \alpha < \alpha(\nu) \quad (4.8)$$

будет справедливо неравенство (4.6). Вместе с неравенством (3.27) это означает, что справедливо следующее утверждение:

**Лемма 2.** Пусть для исходной позиции  $\{t_*, x_*\}$  в игре сближения-уклонения с множеством  $M_{[t_0, \vartheta]}$  внутри множества  $N_{[t_0, \vartheta]}$  разрешима задача П об уклонении. Тогда в позиции  $\{t_*, w_*^*\} = \{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\} = \{t_*, x_*^*\} = \{t_*, x_*, x_{*n+1}^*\} = \{t_*, x_*, t_*\}$  решение  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$  присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9) удовлетворяет предельному соотношению

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) = B > 0. \quad (4.9)$$

Это предельное соотношение надлежит понимать в том смысле, что для любого наперед заданного  $\varepsilon_* > 0$  найдется некоторое достаточно малое  $\nu^* > 0$  такое, что для всякого фиксированного  $\nu > 0$ ,  $\nu \leq \nu^*$  найдутся такие достаточно малые  $\delta(\nu) > 0$  и  $\alpha(\nu) > 0$ , что при условиях (4.8) будет выполнено неравенство

$$\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) \geq B - \varepsilon_*. \quad (4.10)$$

### 5. Альтернатива для решения $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*)$ присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9)

Эта альтернатива соответствует альтернативе для дифференциальной игры сближения-уклонения с множеством  $M$  внутри множества  $N$  к моменту  $\vartheta$  [8]. Справедливо следующее утверждение:

**Теорема 1.** *Для каждой возможной позиции  $\{t_*, w_*^*\} = \{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\} = \{t_*, w_*, t_*\} = \{t_*, x_*, x_{*n+1}\} \in H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$ ,  $t_* \geq t_0$  возможно одно и только одно из двух заключений:*

(1) *Выполняется предельное условие (3.25), которое означает, что для любого  $\varepsilon^* > 0$  найдется достаточно малое  $\nu > 0$  и затем достаточно малые  $\delta(\nu) > 0$  и  $\alpha(\nu) > 0$ , так что будет выполнено неравенство*

$$\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) < \varepsilon^*$$

*при условиях*

$$0 < \delta \leq \delta(\nu), \quad 0 < \alpha \leq \alpha(\nu). \quad (5.1)$$

*В этом случае для позиции  $\{t_*, x_*\}$  разрешима задача I о встрече с множеством  $M_{[t_0, \vartheta]}$  внутри множества  $N_{[t_0, \vartheta]}$ .*

(2) *Выполняется предельное условие (4.9), которое означает, что для любого  $\varepsilon^* > 0$  найдется достаточно малое  $\nu^* > 0$  такое, что для всякого  $\nu > 0$ ,  $\nu \leq \nu^*$  найдутся достаточно малые  $\delta(\nu) > 0$  и  $\alpha(\nu) > 0$ , что будет выполнено неравенство*

$$\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) > B - \varepsilon_*$$

*при условиях (5.1). В этом случае для позиции  $\{t_*, x_*\}$  разрешима задача II об уклонении от множества  $M_{[t_0, \vartheta]}$  внутри множества  $N_{[t_0, \vartheta]}$ .*

**Доказательство.** Согласно альтернативе для игры сближения-уклонения с замкнутым множеством  $M$  внутри замкнутого множества  $N$  к моменту  $\vartheta$  для составляющей  $\{t_*, x_*\}$  позиции  $\{t_*, w_*^*\} = \{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\} = \{t_*, x_*; t_*\} \in H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$ ,  $t_* \geq t_0$  как для исходной позиции в игре возможно одно и только одно из двух: (1) разрешима задача I о встрече — тогда согласно лемме 1 справедливо предельное условие (3.25); (2) разрешима задача II об уклонении — тогда согласно лемме 2 справедливо предельное условие (4.9). Таким образом, для рассматриваемой позиции  $\{t_*, w_*^*\} \in H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta)$  действительно должно выполняться по крайней мере одно из условий (3.25) или (4.9). Но предположение, что в случае (3.25) разрешима задача II об уклонении, противоречит лемме 2, так как условия (3.25) и (4.9) несовместимы. Также предположение, что в случае (4.9) разрешима задача I о встрече, противоречит лемме 1, опять же вследствие несовместимости условий (3.25) и (4.9). Это завершает доказательство теоремы 1.

### 6. Управление движением $x[t]$ в схеме со стохастическим поводырем $w^*[t]$ в случае, когда для исходной позиции $\{t_*, w_*\}$ разрешима задача I о встрече с множеством $M_{[t_0, \vartheta]}$ внутри множества $N_{[t_0, \vartheta]}$

Это управление базируется на свойствах решения  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$  присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9). Согласно теореме 1 полагаем, что для исходной позиции  $\{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\} = \{t_*, w_*, t_*\} \in H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$ ,  $t_* \in [t_0, \vartheta)$  поводыря  $w^*[t]$ ,  $t_* \leq t$  выполнено условие (3.25). Стало быть, для любого  $\varepsilon^* > 0$  можно указать достаточно малое  $\nu > 0$ , а затем достаточно малые  $\delta(\nu) > 0$  и  $\alpha(\nu) > 0$  такие, что будет справедливо неравенство

$$\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) \leq \varepsilon^* \quad (6.1)$$

при условиях (4.8).

В соответствии со сказанным управление осуществляется в рамках вероятностного процесса  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ , который порождается уравнениями:

$$\dot{x}^* = f^*(t, x^*, u^{[x,l]}, v[t]), \quad u^{[x,l]} \in \arg \max_u \left\{ \min_v l^{*'} f^*(t, x^*, u, v) \right\}; \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} dw &= f^*(t, w^*, u^{[w,\lambda]}, v^{[w,l]})dt + \alpha dW_t^*, \quad u^{[w,\lambda]} \in \arg \min_u \left\{ \max_v \lambda_{w^*} f^*(t, w^*, u, v) \right\}, \\ v^{[w,l]} &\in \arg \min_v \left\{ \max_u l^{*'} f^*(t, w^*, u, v) \right\}, \quad l^* = w^* - x^*, \quad \{t_*, w_*^*\} = \{t_*, x_*, t_*\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь для функции Ляпунова  $\rho(t, l^*) = 0.5|l^*|^2 e^{-\zeta(t-t_*)}$ , как и выше, устанавливаются оценки (3.7)–(3.17), теперь, однако, уже в силу уравнений (6.2), (6.3) при достаточно малых  $\nu > 0$  и соответственно достаточно малых  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ . Таким образом, для любого числа  $\eta > 0$  существуют такие достаточно малые  $\nu > 0$ ,  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ , что для сохранившихся к моменту  $\tau^{[\Gamma]}$  реализаций-пар  $\{x^*[t], w^*[t]\}$  будет справедливо неравенство

$$P\left(|x^*[\tau^{[\Gamma]}] - w^*[\tau^{[\Gamma]}]| \leq \frac{\nu}{2}\right) \geq 1 - \eta. \quad (6.4)$$

С другой стороны, для функции Ляпунова  $\lambda(t, w^*)$  при ее изменении в силу уравнения (6.3) получается подобно предыдущему оценка

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \leq \lambda(t_*, w_*^*) + \delta(\vartheta - t_*). \quad (6.5)$$

Теперь из (6.1) и (6.5) получается неравенство

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \leq \varepsilon^* + \delta(\vartheta - t_*).$$

И в соответствии с неравенством Чебышева [28] из (6.3) получаем неравенство

$$P\left(\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]) \leq \frac{B}{2}\right) \geq 1 - 2\frac{\varepsilon^* + \delta(\vartheta - t_*)}{B}. \quad (6.6)$$

Но согласно краевым условиям (2.5)–(2.9) для функции  $\lambda(t, w^*)$  из неравенства (6.6) следует неравенство

$$P\left(\{\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]\} \in M_{\{\tau^{[\Gamma]}, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(2\nu)}\right) \geq P\left(\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]) \leq \frac{B}{2}\right) \geq 1 - 2\frac{\varepsilon^* + \delta(\vartheta - t_*)}{B}. \quad (6.7)$$

Теперь из (6.4) и (6.7) следует неравенство

$$P\left(\{\tau^{[\Gamma]}, x^*[\tau^{[\Gamma]}]\} \in M_{\{\tau^{[\Gamma]}, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(3\nu)}\right) \geq 1 - 2\frac{\varepsilon^* + \delta(\vartheta - t_*)}{B} - \eta. \quad (6.8)$$

Так как в предыдущих выкладках можно выбрать числа  $\eta > 0$  и  $\varepsilon^* > 0$  наперед сколь угодно малыми, а затем выбрать соответственно  $\nu > 0$  сколь угодно малым и затем еще выбрать и числа  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$  достаточно малыми так, чтобы выполнялись все условия, при которых эти выкладки оправданы, то вывод неравенства (6.8) означает, что справедливо следующее утверждение:

**Лемма 3.** Пусть решение  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w)$  присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9) в позиции  $\{t_*, w_*^*\} = \{t_*, x_*, t_*\}$ , отвечающей исходной позиции  $\{t_*, x_*\}$  для исходной дифференциальной игры сближения-уклонения с множеством  $M$  внутри множества  $N$  к моменту  $\vartheta$ , удовлетворяет условию (3.25), то есть условию

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) = 0.$$

Тогда для любых наперед выбранных  $\varepsilon > 0$  и  $\beta < 1$  найдутся такие достаточно малые  $\nu > 0$ ,  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ , что описанное управление движением  $x[t]$  в схеме с поводырем  $w^*[t]$  гарантирует вероятность

$$P\left(\left[\{\tau^{[\Gamma]}, x^*[\tau^{[\Gamma]}]\} \in M_{\{\tau^{[\Gamma]}, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}\right] \wedge \left[\{t, x^*[t]\} \in N_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \tau^{[\Gamma]}\right]\right) \geq \beta. \quad (6.9)$$

Остается только обсудить, как условие (6.9) попадания пополненного движения  $x^*[t]$  в момент времени  $t = \tau^{[\Gamma]}$  в  $\varepsilon$ -окрестность  $M_{\{\tau^{[\Gamma]}, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}$  множества  $M_{\{\tau^{[\Gamma]}, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}$  из пополненного пространства  $\{t, w^*\}$  связано с условием встречи  $x[t]$  с множеством  $M_{[t_0, \vartheta]}$  в задаче I из исходной игры сближения-уклонения. Из условия (6.4) вследствие равенства  $\{t, x^*[t]\} = \{t, x[t], x_{n+1}^*[t]\} = \{t, x[t], t\}$  вытекает, что расстояние составляющей  $x[\tau^{[\Gamma]}]$  в  $(x^*[\tau^{[\Gamma]}] = x[\tau^{[\Gamma]}], x_{n+1}^*[\tau^{[\Gamma]}])$  в (6.9) от ближайшего непустого множества  $M_{\tau^*}$  оказывается малой величиной вместе с  $\varepsilon$  из (6.9). А это вследствие ограниченности производной  $\dot{x}[t]$  означает, что рассматриваемая составляющая  $x[t]$  в момент  $t = \tau^*$  оказывается в  $\tilde{\varepsilon}$ -окрестности  $M_{\tau^*}^{(\tilde{\varepsilon})}$ , где величина  $\tilde{\varepsilon} > 0$  мала вместе с  $\varepsilon$  из (6.9). Таким образом, из леммы 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для любых наперед выбранных  $\tilde{\varepsilon} > 0$  и  $\beta < 1$  найдутся такие достаточно малые  $\nu > 0$ ,  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ , что описанное управление движением  $x[t]$  в схеме со стохастическим поводырем  $w^*[t]$  гарантирует вероятность

$$P\left(\exists \tilde{\tau} \in (t_*, \vartheta) : \left[x[\tilde{\tau}] \in M_{\tilde{\tau}}^{(\tilde{\varepsilon})}\right] \wedge \left[x[t] \in N_t^{(\tilde{\varepsilon})}, t_* \leq t \leq \tilde{\tau}\right]\right) \geq \beta.$$

### 7. Управление движением $x[t]$ в схеме со стохастическим поводырем $w^*[t]$ в случае, когда для исходной позиции $\{t_*, w_*\}$ разрешима задача II об уклонении от множества $M_{[t_0, \vartheta]}$ внутри множества $N_{[t_0, \vartheta]}$

Как и в случае из разд. 6, управление базируется на свойствах решения  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$  присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9). Согласно теореме 1 полагаем, что для исходной позиции  $\{t_*, w_*, w_{n+1}^*\} = \{t_*, x_*, t_*\} \in H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)^*}$ ,  $t_0 \leq t_*$  поводыря  $w^*[t]$ ,  $t_* \leq t$  выполняется условие (4.9). Стало быть, как это видно из вывода условия (4.9), найдется такое  $\nu = \nu^* > 0$ , что при этом фиксированном значении  $\nu^*$  при любом выбранном значении  $\varepsilon_* > 0$  будет справедливо неравенство

$$\lambda^{[\nu^*, \delta, \alpha]}(t_*, w_*) \geq B - \varepsilon_* \quad (7.1)$$

при достаточно малых значениях  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ , удовлетворяющих условиям (4.8) при  $\nu = \nu^*$ .

Управление осуществляется в рамках вероятностного процесса  $\{x^*[t], w^*[t]\}$ , который порождается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= f^*(t, x^*, u[t], v^{[x, l]}), \quad v^{[x, l]} \in \arg \max_v \left\{ \min_u l^* f^*(t, x^*, u, v) \right\}; \\ dw^* &= f^*(t, w^*, u^{[w, l]}, v^{[w, \lambda]}) dt + \alpha dW_t^*, \quad u^{[w, l]} \in \arg \min_u \left\{ \max_v l^* f^*(t, w^*, u, v) \right\}, \\ v^{[w, \lambda]} &\in \arg \max_v \left\{ \min_u \lambda_{w^*} f^*(t, w^*, u, v) \right\}, \quad l^* = w^* - x^*, \quad \{t_*, w_*\} = \{t_*, x_*, t_*\}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Для функции Ляпунова  $\rho(t, l^*) = 0.5|l^*|^2 e^{-\zeta(t-t_*)}$  здесь справедливы оценки (4.7)–(4.10) при фиксированном значении  $\nu = \nu^* > 0$  и при достаточно малых  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ . С другой стороны, для функции Ляпунова  $\lambda(t, w^*)$  теперь в силу уравнения (7.2) устанавливается оценка

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \geq \lambda(t_*, w_*) - \delta(\vartheta - t_*). \quad (7.3)$$

Из (7.1) и (7.3) получается неравенство

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \geq B - \varepsilon_* - \delta(\vartheta - t_*). \quad (7.4)$$

Предположим, что справедливо равенство

$$P\left(\{\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]\} \in \Gamma_{\nu^*}^{[M]}\right) = \mu > 0. \quad (7.5)$$

Согласно краевому условию (2.6) для  $\lambda(t, w^*)$  равенство (7.5) означает, что справедлива оценка

$$P\left(\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}]) = 0\right) = \mu. \quad (7.6)$$

Но (7.6) означает, что справедливо неравенство

$$M\{\lambda(\tau^{[\Gamma]}, w^*[\tau^{[\Gamma]}])\} \leq B - \mu. \quad (7.7)$$

А тогда из (7.4) и (7.7) получается оценка

$$\mu \leq \varepsilon_* - \delta(\vartheta - t_*).$$

Следствием этой оценки и оценок для функции  $\rho(t, l^*)$  является теперь неравенство

$$P\left(\{t, x^*[t]\} \notin M_{\{t, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\nu^*/2)}, t_* \leq t \leq \vartheta\right) \geq 1 - \varepsilon_* - \frac{4\alpha}{\nu^* 2\zeta} e^{\zeta(\vartheta - t_*)} - 2\delta(\vartheta - t_*). \quad (7.8)$$

Вследствие произвольной малости  $\varepsilon_* > 0$  неравенство (7.8) означает, что справедливо следующее утверждение:

**Лемма 4.** Пусть решение  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$  присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9) в позиции  $\{t_*, w^*\} = \{t_*, x_*, t_*\}$ , отвечающей исходной позиции  $\{t_*, x_*\}$  для исходной дифференциальной игры сближения-уклонения с множеством  $M$  внутри множества  $N$  к моменту  $\vartheta$ , удовлетворяет условию (4.9), то есть — условию

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) = B.$$

Тогда найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что найдется значение  $\nu^* > 0$  такое, что для любого наперед выбранного  $\beta < 1$  найдутся такие достаточно малые  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ , что описанное управление движением  $x[t]$  в схеме с поводырем  $w^*[t]$  гарантирует вероятность

$$\begin{aligned} & P\left(\left[\{t, x^*[t]\} \notin M_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \vartheta\right] \right. \\ & \vee \left[\exists \tau \in (t_*, \vartheta) : \left[\left(\{t, x^*[t]\} \notin M_{\{t, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \tau\right) \right. \right. \\ & \left. \left. \wedge \left(\{\tau, x^*[\tau]\} \notin N_{\{\tau, t_0 \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}\right)\right]\right] \geq \beta. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Из построения множеств  $M_{\{\dots\}}$ ,  $N_{\{\dots\}}$  и их окрестностей  $M_{\{\dots\}}^{(\varepsilon)}$ ,  $N_{\{\dots\}}^{(\varepsilon)}$  (2.2), (2.3) вытекает, что следствием леммы 4 является утверждение:

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что найдется  $\nu^* > 0$  такое, что для любого наперед выбранного  $\beta < 1$  найдутся такие достаточно малые  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ , что описанное управление движением  $x[t]$  в схеме с поводырем  $w^*[t]$  гарантирует вероятность

$$\begin{aligned} & P\left(\left[\{t, x[t]\} \notin M_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \vartheta\right] \right. \\ & \left. \vee \left[\exists \tau \in (t_*, \vartheta) : \left(\{t, x[t]\} \notin M_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \tau\right) \wedge \left(\{\tau, x[\tau]\} \notin N_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}\right)\right]\right] \geq \beta. \end{aligned} \quad (7.10)$$

В самом деле, при выполнении (7.9) выполняется и условие (7.10), так как по построению  $M_{\{t, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}$  и  $N_{\{t, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}$  из условий

$$\{t, x^*[t]\} \notin M_{\{t, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}, \quad \{\tau, x^*[\tau]\} \notin N_{\{\tau, t_* \leq w_{n+1}^* \leq \vartheta\}}^{(\varepsilon)}$$

следует выполнение условий

$$\{t, x[t]\} \notin M_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}, \quad \{\tau, x[\tau]\} \notin N_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}.$$

## 8. Следствие из теоремы 1 об альтернативе для присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9) для игры на минимакс-максимин времени до встречи движения $x[t]$ с множеством $M$ внутри множества $N$

Прямым следствием результатов предыдущих разделов является справедливость следующего утверждения:

**Теорема 4.** Пусть дана исходная позиция  $\{t_*, x_*\}$ . Полагаем, что уравнение движения  $x$ -объекта удовлетворяет условиям (1.1), (1.2) и заданы замкнутые в пространстве  $\{t, x\}$  множества  $M$  и  $N$ ,  $M \subset N$ . Тогда цена  $\vartheta^0(t_*, x_*)$  дифференциальной игры на минимакс-максимин времени  $\vartheta$  до встречи с  $M$  внутри  $N$  есть наименьшее значение  $\vartheta^0 > t_*$  среди тех значений  $\vartheta > t_*$ , для которых решение  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w^*)$  присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9) удовлетворяет в позиции  $\{t_*, w_*^*\} = \{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\} = \{t_*, x_*, t_*\} \in H_{[t_0, \vartheta]}^{(\nu)*}$  условию

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) = 0.$$

Тогда при  $\vartheta = \vartheta^0(t_*, x_*)$  в исходной игре разрешима задача I о встрече с множеством  $M_{[t_0, \vartheta^0]}$  внутри  $N_{[t_0, \vartheta^0]}$  на базе минимаксной стратегии  $u^0(t, x)$ . В то же время в данном случае управление в схеме со стохастическим поводырем  $w^*[t]$ , описанное в разд. 6, при любых наперед заданных  $\varepsilon > 0$  и  $\beta < 1$  гарантирует неравенство

$$P\left(\exists \tau \in (t_*, \vartheta^0) : \left[\{\tau, x[\tau]\} \in M_{[t_0, \vartheta^0]}^{(\varepsilon)}\right] \wedge \left[\{t, x[t]\} \in N_{[t_0, \vartheta^0]}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \tau\right]\right) \geq \beta$$

при достаточно малом  $\nu > 0$  и соответственно малых  $\delta > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

При этом при всяком значении  $\vartheta > t_*$ ,  $\vartheta < \vartheta^0$  решение  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w^*)$  присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9) удовлетворяет в позиции  $\{t_*, w_*^*\} = \{t_*, w_*, w_{*n+1}^*\} = \{t_*, x_*, t_*\} \in H_{[t, \vartheta]}^{(\nu)*}$  условию

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t_*, w_*^*) = B.$$

Тогда при каждом  $\vartheta \in (t_*, \vartheta^0)$  в исходной игре разрешима задача II об уклонении от множества  $M_{[t_0, \vartheta]}$  внутри  $N_{[t_0, \vartheta]}$  максимальной стратегией  $v^{[\vartheta]}(t, x)$ . В то же время при каждом фиксированном  $\vartheta \in (t_*, \vartheta^0)$  управление в схеме со стохастическим поводырем  $w^*[t]$ , описанное в разд. 7, таково, что найдется число  $\varepsilon(\vartheta) > 0$  такое, что найдется  $\nu^* > 0$  такое, что при любом наперед заданном значении  $\beta < 1$  будет гарантировано неравенство

$$P\left(\left[\{t, x[t]\} \notin M_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}\right] \vee \left[\exists \tau \in (t_*, \tau) : \left(\{t, x[t]\} \notin M_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}, t_* \leq t \leq \tau\right) \wedge \left(\{\tau, x[\tau]\} \notin N_{[t_0, \vartheta]}^{(\varepsilon)}\right)\right]\right) \geq \beta$$

при  $\nu = \nu^*$  и при соответственно достаточно малых значениях  $\delta > 0$  и  $\alpha > 0$ . При этом движение поводыря  $w^*[t]$  направляется функцией Ляпунова  $\lambda^{[\nu^*, \delta, \alpha]}(t, w^*)$ .

## 9. К решению присоединенной краевой задачи (2.4)–(2.9)

Отвлекаясь от конкретного описания задачи (2.4)–(2.9), обратимся к некоторой задаче, имеющей соответствующую общую форму. Полагаем, что в некотором пространстве  $\{t, \tilde{w}\}$  задана ограниченная цилиндрическая вдоль оси  $t$  область

$$\tilde{H}_{[t_0, \vartheta]} = \{\{t, \tilde{w}\} : t_0 \leq t < \vartheta, \tilde{w} \in \tilde{H}\}, \quad (9.1)$$

где  $\tilde{H}$  — некоторая открытая ограниченная, связная область в пространстве  $\{\tilde{w}\}$ . В области  $\tilde{H}_{[t_0, \vartheta]}$  задано параболическое уравнение

$$\frac{\alpha}{2} \lambda_{\tilde{w}\tilde{w}} + \lambda_t + \tilde{\xi}(t, \tilde{w}; \lambda_{\tilde{w}}) = 0 \quad (9.2)$$

и на границе  $\Gamma$  при  $t_0 < t \leq \vartheta$  области  $\tilde{H}_{[t_0, \vartheta]}$  заданы краевые условия

$$\lambda(t, \tilde{w}) = \psi(t, \tilde{w}), \quad \{t, \tilde{w}\} \in \Gamma. \quad (9.3)$$

В уравнении (9.2) функция  $\tilde{\xi}(t, \tilde{w}; \lambda_{\tilde{w}})$  непрерывно дифференцируема в области  $\tilde{w} \in \tilde{H}$  при любых возможных  $\lambda_{\tilde{w}}$  и с ростом  $|\lambda_{\tilde{w}}|$  растет не быстрее, чем  $|\lambda_{\tilde{w}}|$ . Функция  $\psi(\cdot)$  в (9.3) непрерывна. Предполагаем, что граница  $\Gamma$  является достаточно регулярной, как этого требуют известные теоремы [27] существования и единственности классического решения для подобных краевых задач. Тогда при перечисленных условиях рассматриваемая здесь краевая задача (9.1)–(9.3) будет иметь единственное классическое решение  $\lambda(t, \tilde{w})$ ; функция  $\lambda(t, \tilde{w})$  будет иметь в области  $\tilde{H}_{[t_0, \vartheta]}$  непрерывные вторые частные производные по  $\tilde{w}$  и непрерывную первую производную по  $t$  [27]. Это решение  $\lambda(t, \tilde{w})$  можно искать известным способом, деформируя задачу введением параметра  $\mu \in [0, 1]$ , например, следующим образом.

Рассмотрим краевую задачу при той же области  $\tilde{H}_{[t_0, \vartheta]}$ , но уже для уравнения с параметром  $\mu$

$$\frac{\alpha}{2} \lambda_{\tilde{w}\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu) + \lambda_t(t, \tilde{w}; \mu) + \mu \xi(t, \tilde{w}; \lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu)) = 0 \quad (9.4)$$

и при краевых условиях

$$\lambda(t, \tilde{w}; \mu) = \psi(t, \tilde{w}), \quad \{t, \tilde{w}\} \in \Gamma(\tilde{H}_{[t_0, \vartheta]}). \quad (9.5)$$

Дифференцируя (9.4) формально по  $\mu$ , получим следующие задачи для линейных уравнений при  $\mu \in [0, 1]$

$$\frac{\alpha}{2} \lambda_{\mu\tilde{w}\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu) + \lambda_t(t, \tilde{w}; \mu) + \mu \xi_{\lambda_{\tilde{w}}}(t, \tilde{w}; \lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu)) \lambda_{\mu\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu) = -\xi(t, \tilde{w}; \lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}, \mu))$$

при краевом условии

$$\lambda_{\mu}(t, \tilde{w}; \mu) = 0, \quad \{t, \tilde{w}\} \in \Gamma(H_{[t_0, \vartheta]}).$$

При  $\mu_0 = 0$  имеем согласно (9.4) уравнение

$$\frac{\alpha}{2} \lambda_{\tilde{w}\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu_0) + \lambda_t(t, \tilde{w}, \mu_0) = 0 \quad (9.6)$$

при краевом условии

$$\lambda(t, \tilde{w}, \mu_0) = \psi(t, \tilde{w}), \quad \{t, \tilde{w}\} \in \Gamma. \quad (9.7)$$

Такая задача имеет известное классическое решение  $\lambda(t, \tilde{w}; \mu_0)$ , причем эффективно известна и величина  $\lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}, \mu_0)$ .

Пусть выбрана последовательность чисел  $\{\mu_k, k = 1, \dots, m; \mu_0 = 0, \mu_m = 1\}$ . По базовому решению  $\lambda(t, \tilde{w}; \mu_0)$ ,  $\lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}, \mu_0)$  краевой задачи (9.6), (9.7) и по решениям  $\lambda(t, \tilde{w}; \mu_k)$ ,  $\lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}, \mu_k)$  для последовательности задач

$$\frac{\alpha}{2} \lambda_{\mu\tilde{w}\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu_k) + \lambda_{\mu}(t, \tilde{w}; \mu_k) + \mu_k \xi_{\lambda_{\tilde{w}}}(t, \tilde{w}; \lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu_{k-1})) \lambda_{\mu\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu_k) = -\xi(t, \tilde{w}; \lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}; \mu_{k-1})) \quad (9.8)$$

при краевых условиях

$$\lambda_{\mu}(t, \tilde{w}, \mu_k) = 0, \quad \{t, \tilde{w}\} \in \Gamma, \quad (9.9)$$

причем полагаем

$$\begin{aligned} \lambda(t, \tilde{w}, \mu_k) &= \lambda(t, \tilde{w}, \mu_{k-1}) + \lambda_{\mu}(t, \tilde{w}, \mu_k)(\mu_k - \mu_{k-1}), \\ \lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}, \mu_k) &= \lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}, \mu_{k-1}) + \lambda_{\mu\tilde{w}}(t, \tilde{w}, \mu_k)(\mu_k - \mu_{k-1}), \end{aligned}$$

где  $k = 1, \dots, m$ , приходим к величине

$$\tilde{\lambda}(t, \tilde{w}) = \lambda(t, \tilde{w}, \mu_m), \quad (9.10)$$

которую и принимаем за приближенное решение  $\lambda(t, \tilde{w})$  для исходной краевой задачи (9.4), (9.5). Решение  $\lambda_\mu(t, \tilde{w}, \mu_k)$  краевых задач (9.8), (9.9) для линейного параболического уравнения (9.8) при краевом условии (9.9) и при известных  $\lambda_{\tilde{w}}(t, \tilde{w}, \mu_{k-1})$  можно строить известным образом на базе соответствующего фундаментального решения для краевой задачи (9.8), (9.9). Известно [27], что процедура сводится к определенному набору фундаментальных формул, квадратур и к решению, например, последовательными приближениями, некоторых интегральных уравнений Вольтерра.

При тех условиях, которые предполагались в разд. 1–8 этой статьи, рассматриваемые присоединенные краевые задачи, соответствующие общей форме задачи (9.2), (9.3), обсуждаемой здесь, были таковы, что для таких краевых задач были гарантированы существование и единственность решения  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$ . Но тогда при обсуждаемых условиях из разд. 1–8 получается, что описанная выше рекурсивная процедура вычисления величины  $\tilde{\lambda}(t, \tilde{w}) = \lambda(t, \tilde{w}, \mu_m)$  (9.10) действительно при условии

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq m} (\mu_k - \mu_{k-1}) = 0$$

сходится к искомому решению  $\lambda^{[\nu, \delta, \alpha]}(t, w^*)$ ,  $\nu > 0$ ,  $\delta > 0$ ,  $\alpha > 0$ . Однако, это теоретическое утешение с практической точки зрения мало что значит. Хотя описанный выше алгоритм складывается из множества операций, каждая из которых более или менее стандартна, количество этих операций столь громадно, что говорить всерьез об осуществлении всего алгоритма вряд ли следует.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Isaacs R.** Differential Games. New York: John Wiles, 1965. 384 p.
2. **Bellman R.** Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes. New York: Academic Press, 1967. Vol. 1; 1971, Vol. 2.
3. **Понтрягин Л.С.** Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // М.: Труды МИАН, 1985. Т. 169. С. 119–158.
4. **Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф.** Задача об убегании одного управляемого объекта от другого // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, № 4. С. 721–723.
5. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // Мат. сборник (новая серия). 1966. Т. 70(112), № 3. С. 394–415.
6. **Кружков С.Н.** Нелинейные уравнения первого порядка и связанные с ними дифференциальные игры // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, вып. 2(146). С. 227–228.
7. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solution of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.
8. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр. // Докл. АН СССР, 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
10. **Красовский Н.Н.** Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики УНЦ АН СССР. Свердловск, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.
11. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения. // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
12. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы аналитической оптимизации. М.; Ижевск.: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.
13. **Красовский Н.Н.** Дифференциальные игры. Аппроксимационные и формальные модели // Мат. сборник. 1978. Т. 107, № 4. С. 541–571.
14. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи об устойчивости движения. М.: Наука, 1959. 211 с.
15. **Осипов Ю.С.** Альтернатива в дифференциально-разностной игре // Докл. АН СССР. 1971. Т. 197, № 5. С. 619–624.
16. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр в системах с распределенными параметрами // Докл. АН СССР. 1975. Т. 223, № 6. С. 1314–1317.

17. **Алексейчик М.И.** Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // Математический анализ и его приложения: сб. ст. Ростов на Дону, 1975. Т. 7. С. 191–199.
18. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Уравнения типа Гамильтона — Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 1–2. С. 110–130.
19. **Красовский Н.Н.** Игра сближения-уклонения со стохастическим поводырем // Докл. АН СССР, 1977. Т. 237, № 5. С. 1020–1023.
20. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
21. **Барабанова Н.Н., Субботин А.И.** О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 3. С. 385–392.
22. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантий в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
23. **Кряжимский А.В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
24. **Красовский Н.Н., Субботин А.И., Ушаков В.Н.** Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 277–280.
25. **Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.** Стохастический программный синтез в позиционной дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 1. С. 24–27.
26. **Альбрехт Э.Г.** Об оптимальной стабилизации нелинейных систем // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 25, № 5. С. 836–844.
27. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
28. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
29. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
30. **Малкин И.Г.** Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
31. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, № 3. С. 450–458.
32. **Кац И.Я., Красовский Н.Н.** Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 809–823.
33. **Хасьминский Р.З.** Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.
34. **Кушнер Г.Д.** Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. 199 с.

Красовский Николай Николаевич  
д-р физ.-мат. наук  
академик РАН  
главный науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: nnkras@imm.uran.ru

Поступила 15.05.2009

Котельникова Анна Николаевна  
канд. физ.-мат. наук  
старший науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: annk222@rambler.ru

УДК 517.977

## ПОИСК ТОЧЕК МАКСИМУМА ВЕКТОРНОГО КРИТЕРИЯ С ДЕКОМПОЗИЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ<sup>1</sup>

Н. А. Красовский, А. М. Тарасьев

В работе рассматривается динамическая некооперативная игра нескольких участников, в которой игроки принимают решения на основе максимизации индивидуальных функций полезности. В каждом раунде игры производится обмен информацией через механизм, аналогичный вальрасовскому аукциону. Вводится определение рыночного равновесия, комбинирующего свойства равновесия по Нэшу и максимума Парето. Доказывается теорема существования такого равновесия. Предлагается алгоритм поиска рыночного равновесия, который сдвигает конкурентное равновесие по Нэшу к кооперативному максимуму Парето. Алгоритм интерпретирован в форме повторяющегося аукциона, в котором аукционер не имеет информации о функциях полезности игроков. В свою очередь, игроки не имеют информации о функциях полезности других участников. В каждом раунде пошагового аукциона участникам предлагаются индивидуальные ставки, на основании которых они производят максимизацию своих функций полезности. Далее игроки передают аукционеру свои наилучшие ответы. Рассматриваются стратегии аукционера по формированию ставок, которые создают условия достижения рыночного равновесия. С точки зрения теории игр повторяющийся аукцион описывает процесс обучения в некооперативной повторяющейся игре в условиях неопределенности.

Ключевые слова: динамическая некооперативная игра, равновесие Нэша, максимум Парето, алгоритмы поиска равновесия.

N. A. Krasovskii, A. M. Tarasyev. Search of maximum points for a vector criterion based on decomposition properties.

A dynamic noncooperative game with several players is considered, in which the players make decision by maximizing individual utility functions. In each round of the game, an information exchange is performed by means of a mechanism similar to the Walras auction. The notion of a market equilibrium is introduced, which combines the properties of the Nash equilibrium and Pareto maximum. A theorem on the existence of such an equilibrium is proved. An algorithm of searching for a market equilibrium is proposed, which shifts the Nash competitive equilibrium to the Pareto cooperative maximum. The algorithm is interpreted in the form of a repeated auction, in which the auctioneer has no information about the utility functions of the players. In their turn, the players have no information about the utility functions of other participants. In each round of the stepwise auction, individual interest rates are proposed to the players, based on which they maximize their utility functions. Then, the players give their best replies to the auctioneer. The auctioneer's strategies of forming interest rates that provide conditions for reaching a market equilibrium are considered. From the game-theoretical point of view, the repeated auction describes the learning process in a noncooperative repeated game under uncertainty.

Keywords: dynamic noncooperative game, Nash equilibrium, Pareto maximum, equilibrium search algorithms.

### Введение

В работе представлена комбинация математической модели некооперативных игр и экономической модели, в которой страны осуществляют торговлю квотами по снижению эмиссий парниковых газов. Основная идея заключается в том, что страна  $i$  желает снизить эмиссии на своей территории лишь в случае, если в обмен на это она получает достаточное снижение загрязнений, “импортированных” из соседних стран,  $i = 1, \dots, n$ . Каждая страна стремится максимизировать свою функцию полезности, в которой затраты на снижение эмиссий соотносятся с экологическим эффектом.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587а), Российского гуманитарного научного фонда (проект 08-02-00315а), гранта Президента РФ (НШ-2640.2008.1), программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, Международного института прикладного системного анализа (IIASA).

Основная проблема состоит в доказательстве теоремы существования состояния равновесия в некооперативной игре по многостороннему снижению эмиссий. Назовем такое состояние рыночным равновесием. Если такое равновесие существует, то следующий вопрос заключается в том, при каких условиях такое решение оптимально согласно определению максимума Парето. Третьим вопросом является задача построения декомпозиционного алгоритма поиска рыночного равновесия.

В работе конструируются алгоритмы поиска рыночного равновесия, которые сформулированы в виде элементов аукциона. Аукционер предлагает конкретные обменные курсы для каждой страны. Обменный курс определяет количественное снижение эмиссий, которое страна  $i$  получит на ее территории за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Страны-участники формируют наилучшие ответы по предложенному обменному курсу, указывая снижение эмиссий, которые они могут произвести за предлагаемую цену. Аукционер имеет информацию о коэффициентах трансграничного переноса эмиссий между странами-участниками. Он использует их, чтобы сформировать суммарное снижение загрязнений для каждой страны по индивидуальным наилучшим ответам участников. Аукционер не имеет точной информации о функциях полезности стран-участников, которые складываются из функций затрат и функций экологического эффекта от снижения эмиссий. У него могут быть лишь грубые оценки темпов их изменения. Аукционер производит сравнение текущих наилучших ответов с их предыдущими ответами или эталонными значениями. В случае большого отклонения между “предложением” и “спросом” он предлагает новые обменные курсы. Со своей стороны участники отвечают снижением эмиссий, опираясь лишь на свои функции полезности. Аукционный процесс можно представить в виде декомпозиционного алгоритма поиска равновесия при дефиците информации (см. [6, 13, 18]). С точки зрения теории игр алгоритм интерпретируется как некооперативная игра между странами (см., например, [1–4, 7, 8]). Ситуация рыночного равновесия рассматривается как одна из приемлемых в игре, и представляет из себя комбинацию классических понятий равновесия по Нэшу и максимума Парето (см. [14, 15]).

Алгоритм поиска равновесия основывается на подходах теории эволюционных игр, которые предполагают, что игроки обучаются в повторяющихся игровых раундах (см., например, [5, 10–12, 14, 16]). Предложенный аукцион определяет схему обучения для стран-участников. При этом неопределенность в информированности игроков частично компенсируется обменом информацией в повторяющемся процессе, в котором косвенно регулируются индивидуальные решения.

## 1. Рыночное равновесие, равновесие по Нэшу и максимум Парето

Рассматривается игровая модель, целью которой является сдвиг игроков от некооперативного равновесия к кооперативному максимуму. Прототипом такой задачи является модель торговли снижениями эмиссий (см. [15]). В модели задействовано  $n$  игроков, которыми могут являться страны – участники соглашения, решающие проблему по снижению эмиссий парниковых газов. Предполагается, что соглашение достигается в процессе пошагового аукциона, которым управляет аукционер. Каждая страна  $i$  контролирует собственную величину снижения эмиссий  $x_i \geq 0$ . Страна  $i$  заинтересована в максимизации собственной функции полезности  $w_i$ , которая задана формулой

$$w_i(x) = -C_i(x_i) + B_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j\right). \quad (1.1)$$

Здесь символ  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – полный вектор снижения эмиссий;  $C_i(x_i)$  – функция затрат страны  $i$  на снижение эмиссий  $x_i$ ;  $B_i(\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j)$  – функция экологического эффекта, который получает страна  $i$  благодаря общему снижению загрязнения  $\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j$  на ее территории, и  $a_{ji}$  – коэффициент трансграничного переноса, т. е. часть промышленных выбросов

страны  $j$ , перенесенных на территорию страну  $i$ . Предполагается, что  $a_{ji} > 0$  и  $\sum_{j=1}^n a_{ji}x_j \leq 1$ . Считается, что функции затрат  $C_i$  выпуклы и монотонно возрастают. Кроме того, предполагается, что функции экологического эффекта  $B_i$  строго вогнуты и монотонно возрастают, а также имеют уровень насыщения  $\bar{y}_i$ , который остается постоянным в интервале  $[\bar{y}_i, \infty)$ . Считается, что функции  $C_i$  и  $B_i$  дважды дифференцируемы, и выполняются следующие условия:

$$C_i'(x_i) > 0, \quad C_i''(x_i) \geq 0 \quad (x_i \geq 0), \quad (1.2)$$

$$B_i'(y_i) > 0, \quad B_i''(y_i) < 0 \quad (0 \leq y_i < \bar{y}_i), \quad B_i'(y_i) = 0, \quad (y_i \geq \bar{y}_i).$$

В силу этих условий функции полезности  $w_i$  являются строго вогнутыми функциями.

Процесс нахождения вектора снижения эмиссий  $x$  представляется как некооперативная игра с участием  $n$ -игроков (см. [1, 7, 8]). Допустимые стратегии игрока  $i$  идентифицируются снижением эмиссий  $x_i \geq 0$ . Предполагается, что при торговле снижениями эмиссий (на международных переговорах) делегат от страны  $i$  полностью информирован о матрице коэффициентов трансграничного переноса

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а также о функции полезности  $w_i$  страны, которую он представляет. Можно полагать, что он не имеет информации о функциях полезности других стран. Участники начинают игру с начальным вектором снижения эмиссий  $x^0 = 0$ . Полагаем, что вектор снижения эмиссий  $x = (x_1, \dots, x_n)$  положителен, если все его координаты  $x_1, \dots, x_n$  положительны.

Будем считать, что рыночное равновесие является искомым решением игры.

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Назовем *рыночным равновесием* вектор положительного снижения эмиссий  $x^M = (x_1^M, \dots, x_n^M)$ , если для каждого игрока  $i$  функция  $w_i(\lambda x^M)$  ( $\lambda > 0$ ) достигает максимума при  $\lambda = 1$ ,

$$x_i^M = \operatorname{argmax}\{w_i(\lambda x^M) : \lambda > 0\},$$

что эквивалентно соотношению

$$\frac{dw_i(\lambda x^M)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.3)$$

Отметим, что аналогичное определение дано в работе [8].

Отношение (1.3) показывает, что точка  $x^M$  является решением уравнений

$$\langle \nabla w_i(x), x \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.4)$$

где символ  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  означает скалярное произведение в  $n$ -мерном векторном пространстве.

Учитывая определение функции полезности  $w_i$ , (1.1), систему уравнений (1.4) можно представить как

$$-x_i C_i'(x_i) + \left( \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \right) B_i' \left( \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) описывают множество  $n$  кривых. Они показывают количество снижения эмиссий  $x_i$ , которое желает осуществить игрок  $i$  взамен на ответное снижение  $\sum_{j=1}^n a_{ji} x_j$ , которое он получает благодаря снижению эмиссий всеми другими игроками. Параметр

$$p_i = p_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ji} x_j}{x_i} \quad (1.6)$$

определяет *обменный курс*, вычисленный по вектору снижения эмиссий  $x$ . Он показывает количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна  $i$  получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Используя понятие обменного курса, представим систему уравнений (1.5) в следующем виде:

$$-C'_i(x_i) + p_i B'_i(p_i x_i) = 0. \quad (1.7)$$

Таким образом, делается переход к следующей характеристике рыночного равновесия: вектор положительных снижений эмиссий  $x$  называется рыночным равновесием тогда и только тогда, когда он является решением системы алгебраических уравнений (1.7), в которой параметр обменного курса  $p_i$  задан формулой (1.6).

Напомним определение равновесия по Нэшу.

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Вектор снижения эмиссий  $x^N = (x_1^N, \dots, x_n^N)$  является *равновесием по Нэшу*, если для него выполняется система равновесных условий

$$\max_{x_i \geq 0} w_i(x_1^N, \dots, x_i, \dots, x_n^N) = w_i(x_1^N, \dots, x_i^N, \dots, x_n^N) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.8)$$

Так как функции  $w_i$  строго вогнуты, отношения (1.8) эквивалентны тому, что все частные производные  $\partial w_i(x^N)/\partial x_i$  в равновесии должны быть равны 0:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i}(x^N) = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Более точно, точка  $x^N$  является решением системы уравнений

$$-C'_i(x_i) + a_{ii} B'_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ji} x_j\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.9)$$

Без ограничения общности будем в дальнейшем полагать, что нулевая начальная точка игры является равновесием по Нэшу:  $x^0 = x^N = 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Используя обменные курсы  $p_i$  (см. (1.6)), представим систему уравнений равновесия по Нэшу (1.9) в виде соотношений

$$-C'_i(x_i) + a_{ii} B'_i(p_i x_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.10)$$

которые выглядят достаточно похожими на условия рыночного равновесия (1.7). Сходство состоит в том, что уравнения показывают, как страна  $i$  уменьшает свои эмиссии до уровня  $x_i$ , при котором *предельная величина затрат*  $C'_i(x_i)$  равна *предельной выгоде*  $B'_i(\sum_{j=1}^n a_{ji} x_j)$ . Уравнения различаются в понимании функций предельной выгоды. Отличие состоит в том, что в уравнениях равновесия по Нэшу (1.10) “собственные” коэффициенты трансграничного переноса  $a_{ii}$  заменяют параметры обменных курсов  $p_i$  в условиях рыночного равновесия (1.7). Поэтому в случае равновесия по Нэшу для нахождения величины снижения эмиссий  $x_i^N$  страна  $i$  при расчете функции предельной выгоды учитывает снижение лишь собственных эмиссий. В случае же рыночного равновесия для нахождения величины снижения эмиссий  $x_i^M$  страна  $i$  при расчете функции предельной выгоды принимает во внимание снижение эмиссий всех стран, которое заложено в параметре обменного курса  $p_i = p_i(x^M)$ .

Таким образом, подразумевается, что рыночное равновесие  $x^M$  доминирует равновесие по Нэшу  $x^N$  по всем координатам на величину  $s_i = x_i^M - x_i^N$ ,  $s_i > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Другими словами, для каждой из стран рыночное равновесие экологически “чище”, чем начальное равновесие по Нэшу.

Сравним рыночное равновесие с точками максимума Парето для векторного критерия со строго вогнутыми компонентами.

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Вектор  $x^P = (x_1^P, \dots, x_n^P)$  называется *максимумом Парето*, если для любого другого вектора  $x \neq x^P$  найдется компонента  $j$ , для которой  $w_j(x) < w_j(x^P)$ .

По теореме Гермейера (см. [2]) для строго вогнутых функций  $w_i$  множество точек Парето совпадает с множеством всех решений параметрического семейства задач максимизации

$$\text{maximize } w(x, \gamma), \quad x_i \geq 0, \quad (1.11)$$

где символ  $w(x, \gamma)$  обозначает функцию свертки:

$$w(x, \gamma) = w(x_1, \dots, x_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n) = \sum_{k=1}^n \gamma_k w_k(x).$$

Коэффициенты свертки  $\gamma$  должны быть неотрицательными, т. е.

$$\gamma_k \geq 0 \quad (k = 1, \dots, n). \quad (1.12)$$

Можно также считать, что для коэффициентов свертки выполнено следующее условие:

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k = 1. \quad (1.13)$$

Согласно строгой вогнутости  $w_i$  максимизатор в (1.11) описывается уравнением

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k \frac{\partial w_k}{\partial x_i}(x) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1.14)$$

Таким образом, точки Парето являются решениями серии систем уравнений (1.14) с произвольными коэффициентами свертки  $\gamma_k$ , удовлетворяющими условиям (1.12), (1.13). Заметим, что условие (1.14) выражает тот факт, что строки матрицы Якоби

$$DW(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial w_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial w_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial w_2(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial w_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial w_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

линейно зависимы с коэффициентами  $\gamma_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Напомним, что рыночное равновесие  $x^M$  является решением уравнения (1.4). Последнее условие показывает, что столбцы матрицы Якоби  $DW(x^M)$  должны быть линейно зависимы с коэффициентами  $x_i^M > 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Следовательно, при рыночном равновесии  $x^M$  строки матрицы  $DW(x^M)$  также должны быть линейно зависимы с некоторыми коэффициентами  $\gamma_k^*$ , не все из которых равны нулю. Если при этом все коэффициенты  $\gamma_k^*$  неотрицательны, тогда без потери общности можно считать, что  $\sum_{k=1}^n \gamma_k^* = 1$ . Следовательно, в этом случае рыночное равновесие  $x^M$  совпадает с одной из точек максимума Парето.

Сформулируем такое наблюдение в лемму.

**Лемма 1.** Пусть рыночное равновесие  $x^M$  таково, что строки матрицы Якоби  $DW(x^M)$  линейно зависимы с неотрицательными коэффициентами  $\gamma_k^*$  ( $k = 1, \dots, n$ ), не все из которых равны нулю. Тогда рыночное равновесие  $x^M$  является одной из точек максимума Парето.

В разд. 3 мы зададим простые условия, которые гарантируют, что коэффициенты  $\gamma_k^*$  неотрицательны.

## 2. Существование рыночного равновесия

В этом разделе предлагаются достаточные условия существования рыночного равновесия. Во-первых, предполагается, что вторые производные от функций затрат и функций экологического эффекта находятся в пределах

$$\infty > \sigma_i \geq C_i''(x_i) \geq 0 \quad (x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n), \quad (2.1)$$

$$\infty > b_i \geq -B_i''(y_i) > 0 \quad (y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n). \quad (2.2)$$

Заметим, что функции  $y_i B_i'(y_i)$  лежат в пределах

$$0 \leq y_i B_i'(y_i) \leq \xi_i^0 < \infty \quad (y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n). \quad (2.3)$$

Это вытекает из предположения о том, что функция  $B_i(y_i)$  постоянна на отрезке  $[\bar{y}_i, \infty)$ , и, следовательно, на этом отрезке ее производная равна нулю. Кроме того, на отрезке  $[0, \bar{y}_i]$  производная непрерывна и ограничена.

Будем использовать обозначение

$$d_i = B_i'(0). \quad (2.4)$$

Предполагаем, что для всех  $i = 1, \dots, n$  выполняются неравенства

$$d_i > b_i \alpha_i, \quad (2.5)$$

$$d_i \beta_i > \sigma_i + b_i a_{ii}^2, \quad (2.6)$$

где параметры  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  определяются формулами

$$\alpha_i = \sum_{j \neq i} \frac{a_{ji} \xi_j^0}{a_{jj} d_j},$$

$$\beta_i = \frac{a_{ii} d_i}{\xi_i^0} \sum_{j \neq i} a_{ji}.$$

Здесь параметры  $\sigma_i$ ,  $b_i$ ,  $\xi_i^0$  и  $d_i$  определены в (2.1)–(2.4).

Отметим, что условия (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) гарантируют существование рыночного равновесия. Подчеркнем, что эти условия не включают в себя функции предельных затрат  $C_i'(x_i)$ , которые являются исключительно личной информацией игроков. Чтобы проверить выполнение условий (2.5), (2.6), нужно лишь только знать пределы для вторых производных функций затрат и функций экологического эффекта, коэффициенты трансграничного переноса и производные функций экологического эффекта в нуле. В действительности производные  $d_i$  могут быть заменены информационно-доступными нижними оценками.

Чтобы задать строгую формулировку существующего результата, нам необходимо ввести несколько дополнительных обозначений. Полагаем

$$x_i^0 = \frac{\xi_i^0}{a_{ii} d_i} \quad (2.7)$$

и выберем положительный параметр  $\varepsilon$ , меньший, чем  $x_i^0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), и удовлетворяющий неравенствам

$$\varepsilon \leq \frac{-a_{ii} b_i \alpha_i + (a_{ii}^2 b_i^2 \alpha_i^2 + \alpha_i (d_i - b_i \alpha_i) (\sigma_i + b_i a_{ii}^2))^{1/2}}{\sigma_i + b_i a_{ii}^2}, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon \leq \frac{1}{\beta_i} \left[ \left( \frac{d_i \beta_i - \sigma_i}{b_i} \right)^{1/2} - a_{ii} \right]. \quad (2.9)$$

Заметим, что предположения (2.5) и (2.6) означают, что правые части в неравенствах (2.8) и (2.9) положительны, и, следовательно, требуемые положительные значения параметра  $\varepsilon$  существуют. Введем обозначение для параллелепипеда

$$\Pi_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon \leq x_i \leq x_i^0, \quad i = 1, \dots, n\}, \quad (2.10)$$

который не является пустым в связи с выбором параметра  $\varepsilon$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Условия (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) являются непротиворечивыми в том смысле, что имеются примеры моделей, параметры которых удовлетворяют этим условиям. Таким примером является модель, приводимая в настоящей работе в разд. 5.

**Теорема.** Пусть выполняются условия (2.1), (2.2), (2.5), (2.6). Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) существует непрерывный оператор  $z$ , который отображает параллелепипед  $\Pi_\varepsilon$  в себя и ставит в соответствие каждой точке  $x \in \Pi_\varepsilon$  решение  $z(x)$  системы (1.6), (1.7);
- (2) существует рыночное равновесие, принадлежащее параллелепипеду  $\Pi_\varepsilon$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим произвольную точку  $x \in \Pi_\varepsilon$ . Пусть  $p_i = p_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) суть коэффициенты обменного курса (1.6). Используя соотношение (2.7), оценим коэффициенты  $p_i$  следующим образом

$$p_i \leq a_{ii} + \frac{\sum_{j \neq i} a_{ji} x_j^0}{\varepsilon} \leq a_{ii} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j \neq i} \frac{a_{ji} \xi_j^0}{a_{jj} d_j} = a_{ii} + \frac{\alpha_i}{\varepsilon}, \quad (2.11)$$

$$p_i \geq a_{ii} + \frac{\varepsilon \sum_{j \neq i} a_{ji}}{x_i^0} \geq a_{ii} + \varepsilon \frac{a_{ii} d_i \sum_{j \neq i} a_{ji}}{\xi_i^0} = a_{ii} + \beta_i \varepsilon. \quad (2.12)$$

Напомним, что вектор  $x$  удовлетворяет уравнению рыночного равновесия (1.7) тогда и только тогда, когда он является решением эквивалентной системы уравнений

$$r_i(z_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.13)$$

где

$$r_i(z_i) = C_i'(z_i) - p_i B_i'(p_i z_i).$$

Функция  $r_i$  строго монотонно возрастает, так как  $r_i'(z_i) = C_i''(z_i) - p_i^2 B_i''(p_i z_i) > 0$ . По предположению, точка  $x^N = 0$  удовлетворяет уравнению равновесия по Нэшу (1.9):

$$C_i'(0) = a_{ii} B_i'(0) = a_{ii} d_i. \quad (2.14)$$

Следовательно, согласно соотношению (2.12) выполняется неравенство

$$r_i(0) = C_i'(0) - p_i B_i'(0) = (a_{ii} - p_i) d_i < 0. \quad (2.15)$$

Для точки насыщения  $\bar{y}_i$  функции экологического эффекта  $B_i$  имеем  $B_i'(\bar{y}_i) = 0$ , что влечет выполнение соотношений

$$r_i\left(\frac{\bar{y}_i}{p_i}\right) = C_i'\left(\frac{\bar{y}_i}{p_i}\right) - p_i B_i'\left(\frac{\bar{y}_i}{p_i}\right) = C_i'\left(\frac{\bar{y}_i}{p_i}\right) > 0.$$

Поэтому интервал  $[0, \bar{y}_i/p_i]$  содержит единственный положительный корень  $z_i^0$  його уравнения в системе (2.13).

Докажем неравенство  $z_i^0 \leq x_i^0$ . Предположим противное. Тогда необходимо выполняется неравенство  $r(z_i) < 0$  для всех  $z_i \in [0, x_i^0]$ . Следовательно, согласно условию (2.3) имеет место неравенство

$$x_i^0 C_i'(x_i^0) < p_i x_i^0 B_i'(p_i x_i^0) \leq \xi_i^0.$$

Учитывая соотношение (2.7), имеем неравенство

$$x_i^0 C_i'(x_i^0) = \frac{\xi_i^0}{a_{ii} d_i} C_i' \left( \frac{\xi_i^0}{a_{ii} d_i} \right) < \xi_i^0.$$

В результате получаем оценку

$$C_i' \left( \frac{\xi_i^0}{a_{ii} d_i} \right) < a_{ii} d_i.$$

Так как производная  $C_i'$  возрастает согласно (1.2), то справедливо неравенство

$$C_i'(0) < a_{ii} d_i,$$

которое противоречит соотношению (2.14). Противоречие доказывает требуемое неравенство  $z_i^0 \leq x_i^0$ .

Покажем, что выполнено соотношение  $z_i^0 \geq \varepsilon$ . Из условия (2.15) и равенства  $r_i(z_i^0) = 0$  согласно теореме Лагранжа о среднем значении, получаем соотношения

$$r_i(z_i^0) - r_i(0) = (p_i - a_{ii}) d_i = r_i'(\eta_i) z_i^0 = \left( C_i''(\eta_i) - p_i^2 B_i''(p_i \eta_i) \right) z_i^0$$

для некоторой точки  $\eta_i \in (0, z_i^0)$ .

Опираясь на оценки (2.1) и (2.2), получаем соотношение

$$z_i^0 = \frac{d_i(p_i - a_{ii})}{C_i''(\eta_i) - p_i^2 B_i''(p_i \eta_i)} \geq \frac{d_i(p_i - a_{ii})}{\sigma_i + b_i p_i^2}.$$

Введем обозначение для правой части предыдущего неравенства

$$Q_i(p_i) = \frac{d_i(p_i - a_{ii})}{\sigma_i + b_i p_i^2}.$$

Теперь, используя условия (2.11), (2.12), имеем следующую оценку:

$$z_i^0 \geq \min \left\{ Q_i(s_i) : a_{ii} + \beta_i \varepsilon \leq s_i \leq a_{ii} + \frac{\alpha_i}{\varepsilon} \right\} = m_i(\varepsilon).$$

Производная

$$Q_i'(s_i) = \frac{d_i(-b_i s_i^2 + 2a_{ii} b_i s_i + \sigma_i)}{b_i s_i^3}$$

обращается в 0 на интервале  $[a_{ii}, \infty)$  в единственной точке  $a_{ii} + (a_{ii}^2 + \sigma_i/b_i)^{1/2}$ . Можно легко установить, что это единственная точка строгого глобального максимума функции  $Q_i(s_i)$  на интервале  $[a_{ii}, \infty)$ . Следовательно, минимумы функции  $Q_i(s_i)$  на интервале  $[a_{ii} + \beta_i \varepsilon, a_{ii} + \alpha_i/\varepsilon]$  находятся в крайних точках:

$$m_i(\varepsilon) = \min \left\{ Q_i(a_{ii} + \beta_i \varepsilon), Q_i\left(a_{ii} + \frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right) \right\}.$$

$$m_i(\varepsilon) = \varepsilon d_i \min \left\{ \frac{\alpha_i}{\sigma_i \varepsilon^2 + b_i (a_{ii} \varepsilon + \alpha_i)^2}, \frac{\beta_i}{\sigma_i + b_i (a_{ii} + \beta_i \varepsilon)^2} \right\}.$$

Для установления требуемой оценки  $z_i^0 \geq \varepsilon$  достаточно доказать, что выполняется соотношение  $m_i(\varepsilon) \geq \varepsilon$ , или, более точно, проверить выполнение двух неравенств:

$$\frac{d_i \alpha_i \varepsilon}{\sigma_i \varepsilon^2 + b_i (a_{ii} \varepsilon + \alpha_i)^2} \geq \varepsilon,$$

$$\frac{d_i \beta_i \varepsilon}{\sigma_i + b_i (a_{ii} + \beta_i \varepsilon)^2} \geq \varepsilon.$$

Более простой формой этих неравенств являются соотношения (2.8), (2.9), которые, по предположению, выполняются. Следовательно, имеет место соотношение  $m_i(\varepsilon) \geq \varepsilon$ , которое влечет требуемое неравенство  $z_i^0 \geq \varepsilon$ . Таким образом, единственный корень  $z_i^0$   $i$ -го уравнения в системе (2.13) находится в отрезке  $[\varepsilon, x_i^0]$ . Окончательно получаем, что существует оператор  $z$ , который каждой точке параллелепипеда  $x \in \Pi_\varepsilon$  ставит в соответствие решение  $z^0 = z(x)$  системы (2.13), (1.6), принадлежащее этому же параллелепипеду  $\Pi_\varepsilon$ . То есть утверждение (1) доказано.

Для доказательства утверждения (2) отметим, что оператор  $z$  является непрерывным и отображает параллелепипед  $\Pi_\varepsilon$  в себя. Согласно лемме Шаудера этот оператор имеет неподвижную точку. Обозначим ее  $x^M \in \Pi_\varepsilon$ . Очевидно, что точка  $x^M$  является решением системы уравнений (2.13), (1.6), которая эквивалентна системе уравнений рыночного равновесия (1.7), (1.6). Так как координаты точки  $x^M$  строго положительны в силу того, что она лежит в параллелепипеде  $\Pi_\varepsilon$ , то эта точка и является рыночным равновесием.

### 3. Рыночное равновесие со свойствами максимума Парето

Рассмотрим те точки рыночного равновесия, которые принадлежат множеству точек максимума по Парето. Условимся называть их *паретовскими точками рыночного равновесия*. В этом разделе дается характеристика таких точек. Рассуждения строятся на основе леммы 1.

Полагаем, что условия (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) выполнены, что согласно теореме гарантирует существование рыночного равновесия в параллелепипеде  $\Pi_\varepsilon$  (2.10). Как и в предыдущем разделе, параллелепипед  $\Pi_\varepsilon$  определяется значениями  $x_i^0$  (2.7) и положительным параметром  $\varepsilon$ . Напомним, что этот параметр должен быть меньше, чем минимум из значений  $x_i^0$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), и удовлетворять неравенствам (2.8) и (2.9).

Для каждого  $i = 1, \dots, n$  определим сумму коэффициентов трансграничного переноса

$$A_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}.$$

Пусть  $\Omega_i$  есть набор всех подмножеств  $K_i$  множества индексов  $\{k = 1, \dots, n : k \neq i\}$  таких, что  $|K_i| = [n/2] - 1$ . Здесь и далее символ  $|K_i|$  обозначает число элементов множества  $K_i$ , а символ  $[n/2]$  обозначает целую часть числа  $n/2$ .

Достаточное условие, обеспечивающее свойство максимума Парето для рыночного равновесия, имеет следующий вид:

$$C'_i(\varepsilon) - a_{ii} B'_i(A_i \varepsilon) \geq \max_{K_i \in \Omega_i} \sum_{k \in K_i} a_{ik} B'_k(A_k \varepsilon). \quad (3.1)$$

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) и (3.1). Тогда любая точка рыночного равновесия, принадлежащая параллелепипеду  $\Pi_\varepsilon$ , обладает свойствами точек максимума по Парето, т. е. является паретовской точкой рыночного равновесия.

**Доказательство.** В разд. 1 было отмечено, что в определении рыночного равновесия  $x^M$  строки матрицы Якоби  $DW(x^M)$  (1.15) линейно зависимы с коэффициентами  $\gamma_k^*$  ( $k = 1, \dots, n$ ), не все из которых равны нулю. Докажем, что для произвольного рыночного равновесия, лежащего в параллелепипеде  $x \in \Pi_\varepsilon$ , все коэффициенты  $\gamma_k^*$  неотрицательны (или имеют один знак). Это свойство завершит доказательство согласно лемме 1.

Пользуясь формой функции полезности  $w_i$  (1.1), специфицируем матрицу Якоби:

$$DW(x) = \begin{pmatrix} -C'_1(x_1) + a_{11}B'_1(y_1) & a_{21}B'_1(y_1) & \dots & a_{n1}B'_1(y_1) \\ a_{12}B'_2(y_2) & -C'_2(x_2) + a_{22}B'_2(y_2) & \dots & a_{n2}B'_2(y_2) \\ & & \dots & \\ a_{1n}B'_n(y_n) & a_{2n}B'_n(y_n) & \dots & -C'_n(x_n) + a_{nn}B'_n(y_n) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$y_k = \sum_{j=1}^n a_{jk}x_j \quad (k = 1, \dots, n).$$

Имеем

$$\sum_{j \neq i} \gamma_j^* a_{ij} B'_j(y_j) + \gamma_i^* \left( -C'_i(x_i) + a_{ii} B'_i(y_i) \right) = 0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.2)$$

Предположим, что среди значений коэффициентов  $\gamma_k^*$  имеются как положительные, так и отрицательные. Введем обозначение для множества положительных и отрицательных коэффициентов:

$$\Gamma^+ = \{k : \gamma_k^* > 0\}, \quad \Gamma^- = \{k : \gamma_k^* < 0\}.$$

Имеем  $\Gamma^+ \neq \emptyset$  and  $\Gamma^- \neq \emptyset$ . Без ограничения общности можно предполагать, что число положительных коэффициентов больше, чем число отрицательных,  $|\Gamma^+| \geq |\Gamma^-|$ . Следовательно,  $|\Gamma^-| \leq [n/2]$ . Найдем индекс отрицательного коэффициента с наибольшим по модулю значением:

$$l = \operatorname{argmax}\{|\gamma_k^*| : k \in \Gamma^-\}.$$

Выберем в соотношении (3.2) линейную комбинацию, соответствующую столбцу с номером  $i = l$ :

$$\sum_{j \neq l} \gamma_j^* a_{lj} B'_j(y_j(x)) + \gamma_l^* \left( -C'_l(x_l) + a_{ll} B'_l(y_l(x)) \right) = 0.$$

Условие  $a_{lj} B'_j(y_j(x)) > 0$  влечет неравенство

$$\sum_{k \in \Gamma^- \setminus \{l\}} \gamma_k^* a_{lk} B'_k(y_k) + \gamma_l^* \left( -C'_l(x_l) + a_{ll} B'_l(y_l) \right) < 0.$$

Следовательно,

$$C'_l(x_l) - a_{ll} B'_l(y_l) < \sum_{k \in \Gamma^- \setminus \{l\}} \frac{|\gamma_k^*|}{|\gamma_l^*|} a_{lk} B'_k(y_l) \leq \sum_{k \in \Gamma^- \setminus \{l\}} a_{lk} B'_k(y_l).$$

Учитывая неравенства  $\varepsilon \leq x_i$ ,  $A_i \varepsilon \leq y_i$  и тот факт, что функции  $C'_i$  возрастают, а функции  $B'_i$  убывают, имеем соотношение

$$C'_l(\varepsilon) - a_{ll} B'_l(A_l \varepsilon) < \sum_{k \in \Gamma^- \setminus \{l\}} a_{lk} B'_k(y_l). \quad (3.3)$$

Для индекса  $i = l$  правая часть этого неравенства не превосходит значение правой части в (3.1). Следовательно, соотношение (3.3) противоречит предположению (3.1). Противоречие показывает, что все коэффициенты  $\gamma_k^*$  имеют одинаковый знак, что завершает доказательство.

**З а м е ч а н и е 2.** Для  $n = 2, 3$  имеем  $([n/2] - 1) = 0$ , и условие (3.1) выполняется автоматически.

#### 4. Поиск рыночного равновесия по Парето: повторяемый аукцион

Обычно считается, что максимум по Парето является лучшим решением в кооперативной игре. Возникает естественный вопрос: как игроки могут достигнуть точки максимума Парето?

Представим, что существует международное агентство, способное собрать сведения, которые включают полную информацию о функциях затрат по снижению эмиссий, коэффициентах трансграничного переноса, а также о функциях экологического эффекта. В таком случае агентство способно вычислить все точки максимума по Парето и предоставить результаты расчетов лицам, принимающим решения, которые, в свою очередь, смогли бы кооперативно выбрать наиболее подходящую точку максимума векторного критерия. К сожалению, такой простой путь решения игры нереалистичен вследствие того, что полная информация никогда не доступна. Функции затрат по снижению эмиссий, как правило, представляют собой информацию исключительно конфиденциального характера. В этом разделе показывается, что при определенных условиях можно смоделировать реалистичный переговорный процесс, позволяющий найти паретовскую точку рыночного равновесия. Процесс представлен в виде повторяющихся шагов аукциона, в котором решения улучшаются при передаче информации о наилучших ответах игроков на предлагаемые обменные курсы. Отметим, что в этом процессе не происходит передачи информации о функциях затрат и функциях экологического эффекта.

В таком аукционе каждый участник в обмен на снижение собственных эмиссий ожидает снижение общего уровня загрязнений на своей территории. Решение по текущему снижению уровня эмиссий принимается каждым игроком на основе предлагаемого обменного курса  $p_i$  (1.6). В таком повторяющемся процессе функции аукционера может принимать на себя международное агентство или назначенный делегат. При этом принимаются следующие “правила игры”. В каждом раунде аукциона аукционер предлагает обменные курсы  $p_i$  для каждого игрока  $i$ . В свою очередь игроки максимизируют функции полезности при предложенных обменных курсах и отвечают снижением эмиссий. В этом процессе аукционер может иметь план по снижению эмиссий, который представляется некоторыми виртуальными значениями.

Каждый раунд аукциона протекает следующим образом. Аукционер выдвигает свой *виртуальный план* — положительный вектор снижения эмиссий  $x$ , — и вычисляет обменные курсы  $p_i = p_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) на основе соотношения (1.6). Каждый игрок  $i$  определяет снижение эмиссий  $z_i(p_i)$ , которое является его *наилучшим ответом* на предложенный обменный курс  $p_i$ . При этом максимизируется функция полезности

$$w_i(z_i, p_i) = -C_i(z_i) + B_i(p_i z_i)$$

по всем значениям  $z_i \geq 0$ . Аукционер анализирует все наилучшие ответы игроков  $z_i(p_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и корректирует план для следующего раунда. В этом процессе аукционер не использует какую-либо информацию о функциях затрат и функциях экологического эффекта. Цель повторяющегося аукциона состоит в том, чтобы привести вектор наилучших ответов  $(z_1(p_1), \dots, z_n(p_n))$  в *паретовскую точку рыночного равновесия* — возможно, за бесконечное число раундов.

Рассмотрим свойства наилучших ответов игроков. Очевидно, что наилучший ответ  $z_i(p_i)$  в силу строгой вогнутости функций полезности  $w_i$  является единственным и совпадает с неотрицательным корнем  $i$ -го уравнения в системе (1.7). Так как обменный курс  $p_i = p_i(x)$  (1.6) определяется планом  $x$ , то значение  $z_i(p_i)$  можно также называть *наилучшим ответом на план  $x$*  и обозначать его символом  $z_i(x)$ . Таким образом, рассматривается *оператор наилучших ответов*  $z$ , который каждому плану  $x$  ставит в соответствие вектор наилучших ответов  $(z_1(x), \dots, z_n(x))$ .

Опишем *стратегию поиска* рыночного равновесия. Формально под стратегией поиска понимается произвольная функция  $U$ , которая в раунде  $k$  положительному вектору  $x^k$  (плану аукционера) и неотрицательному вектору  $z^k$  (вектору наилучших ответов игроков) ставит в соответствие положительный вектор  $x^{k+1} = u(k, x^k, z^k)$  (план аукционера в следующем раунде  $k+1$ ).

Предположим, что выбрана некоторая стратегия поиска  $U$  ( $x^{k+1} = U(k, x^k, z^k)$ ). Тогда повторяющийся аукцион проходит следующим образом.

Р а у н д 0

Аукционер выбирает некоторый (положительный) план  $x^1$  для раунда 1.

Р а у н д  $k$ , ( $k \geq 1$ )

Ш а г 1

Для положительного плана  $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ , выработанного в предыдущем раунде, аукционер вычисляет обменные курсы:

$$p_i^k = p_i(x^k) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ji} x_j^k}{x_i^k} = \frac{y_i(x^k)}{x_i^k} \quad (i = 1, \dots, n)$$

и предлагает обменный курс  $p_i^k$  игроку  $i$ .

Ш а г 2

Игрок  $i$ , используя обменный курс  $p_i^k$ , максимизирует свою функцию полезности и вычисляет наилучший ответ  $z_i^k = z_i^k(p^k) = z_i^k(x^k)$ .

Ш а г 3

Игрок  $i$  сообщает аукционеру значение своего наилучшего ответа  $z_i^k$ .

Ш а г 4

Аукционер подставляет предыдущий план  $x^k$  и вектор наилучших ответов  $z^k = (z_1^k, \dots, z_n^k)$  в стратегию поиска  $U$  и получает скорректированный план  $x^{k+1}$  для следующего раунда  $x^{k+1} = U(k, x^k, z^k)$ .

Будем говорить, что стратегия поиска  $x^{k+1} = U(k, x^k, z^k)$  с начальным планом  $x^1$  *находит* паретовскую точку рыночного равновесия  $x^M$  в повторяющемся аукционе, если векторы наилучших ответов  $z^k$  сходятся к этой точке при числе раундов  $k$ , стремящемся к бесконечности:

$$z^k \rightarrow x^M \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

Отметим, что в таком процессе сходятся и планы аукционера:

$$x^k \rightarrow x^M \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty.$$

## 5. Модель снижения эмиссий в Европе

В работе рассматривается игровая ситуация между странами Восточной Европы и странами бывшего Советского Союза. Для них были идентифицированы квадратичные функции затрат ( $C_1, C_2$ ) и логарифмические функции экологического эффекта ( $B_1, B_2$ ). Пользуясь соотношением (1.1), представим полученные функции полезности для этих стран ( $w_1, w_2$ ) в виде

$$w_1(x_1, x_2) = -\frac{e_1}{2} x_1^2 - c_1 + d_1 \ln(a_{11} x_1 + a_{21} x_2),$$

$$w_2(x_1, x_2) = -\frac{e_2}{2} x_2^2 - c_2 + d_2 \ln(a_{12} x_1 + a_{22} x_2).$$

Для случая снижения эмиссий углекислого газа ( $\text{CO}_2$ ) транспортные коэффициенты можно

считать единичными:  $a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 1$ .

Согласно определению 1.2 конкурентное равновесие по Нэшу определяется соотношениями

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(x_1^N, x_2^N) = 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(x_1^N, x_2^N) = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Решая систему уравнений (5.1), найдем координаты точки равновесия по Нэшу

$$x_1^N = d_1 \left( \frac{e_2}{e_1(e_1 d_2 + e_2 d_1)} \right)^{1/2},$$

$$x_2^N = d_2 \left( \frac{e_1}{e_2(e_2 d_1 + e_1 d_2)} \right)^{1/2}.$$

Введем коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  такие, что  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ , и определим функцию свертки

$$w(x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1 w_1(x_1, x_2) + \alpha_2 w_2(x_1, x_2),$$

Согласно определению 1.3 множество точек максимума Парето можно представить в виде

$$\begin{cases} \alpha_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}(x_1^P, x_2^P) + \alpha_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_2}(x_1^P, x_2^P) = 0, \\ \alpha_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_1}(x_1^P, x_2^P) + \alpha_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(x_1^P, x_2^P) = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Пусть  $\alpha_1 = \alpha$ ,  $\alpha_2 = 1 - \alpha$ . Тогда решением системы уравнений (5.2) является множество точек

$$\begin{cases} x_1^P = \left( \frac{(1 - \alpha)e_2(d_2 + \alpha(d_1 - d_2))}{\alpha e_1(e_2 + \alpha(e_1 - e_2))} \right)^{1/2}, \\ x_2^P = \left( \frac{\alpha e_1(d_2 + \alpha(d_1 - d_2))}{(1 - \alpha)e_2(e_2 + \alpha(e_1 - e_2))} \right)^{1/2}, \end{cases}$$

параметризованное коэффициентом  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Доказывается, что при некоторых параметрах коэффициента  $\alpha$  из отрезка  $[0, 1]$  существует множество точек максимума Парето, которое доминирует равновесие Нэша по векторному критерию.

Согласно определению 1.1 соотношение, определяющее рыночное равновесие  $x^M$ , имеет вид

$$\frac{dw_i(x^N + \lambda(x^M - x^N))}{d\lambda} \Big|_{\lambda=1} = 0. \quad (5.3)$$

Введем новые переменные  $y_1$  и  $y_2$  для сдвига от конкурентного к кооперативному равновесию:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^N + y_1, \\ x_2 = x_2^N + y_2. \end{cases}$$

Соотношение (5.3) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} y_1 \frac{\partial w_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) + y_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_2}(y_1, y_2) = 0, \\ y_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_1}(y_1, y_2) + y_2 \frac{\partial w_2}{\partial x_2}(y_1, y_2) = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Решая систему (5.4) уравнений, найдем функции наилучших ответов игроков:

$$\begin{cases} y_2 = f(y_1) = y_1 \frac{e_1(x_2^N + x_1^N)(y_1 + x_1^N)}{(d_1 - e_1 y_1)(y_1 + x_1^N)} - y_1, \\ y_1 = g(y_2) = y_2 \frac{e_2(x_2^N + x_1^N)(y_2 + x_2^N)}{(d_2 - e_2 y_2)(y_2 + x_2^N)} - y_2. \end{cases}$$

Представим эту систему уравнений в виде

$$\begin{cases} F(y_1, y_2) = -f(y_1) + y_2 = 0, \\ G(y_1, y_2) = y_1 - g(y_2) = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является положение рыночного равновесия  $(y_1^M, y_2^M)$ .

Для определения локальной устойчивости рыночного равновесия составим матрицу Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y_1} & 1 \\ 1 & -\frac{\partial g}{\partial y_2} \end{pmatrix}.$$

Согласно критерию Сильвестра, если удовлетворяются условия

$$\begin{cases} \Delta_1 = -\frac{\partial f}{\partial y_1} < 0, \\ \Delta_2 = \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial g}{\partial y_2} - 1 > 0, \end{cases}$$

то матрица Якоби является отрицательно определенной матрицей, что свидетельствует о локальной устойчивости рыночного равновесия. Действительно, знаки производных определяются соотношениями

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{y_2}{y_1} + y_1 \frac{e_1(x_1^N + x_2^N)(d_1 + e_1 y_1(x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N(x_1^N + y_1))}{(d_1 - e_1 y_1)(y_1 + x_1^N)^2} > 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y_2} = \frac{y_1}{y_2} + y_2 \frac{e_2(x_1^N + x_2^N)(d_2 + e_2 y_2(x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N(x_2^N + y_2))}{(d_2 - e_2 y_2)(y_2 + x_2^N)^2} > 0.$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1} \frac{\partial g}{\partial y_2} - 1 &= \frac{y_2^2 e_2 (x_1^N + x_2^N) (d_2 + e_2 y_2 (x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N (x_2^N + y_2))}{y_1 (d_2 - e_2 y_2 (y_2 + x_2^N))^2} \\ &+ \frac{y_1^2 e_1 (x_1^N + x_2^N) (d_1 + e_1 y_1 (x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N (x_1^N + y_1))}{y_2 (d_1 - e_1 y_1 (y_1 + x_1^N))^2} + y_1 y_2 e_1 e_2 (x_1^N + x_2^N)^2 \\ &\times \frac{(d_1 + e_1 y_1 (x_1^N + y_1) + e_1 x_1^N (x_1^N + y_1)) (d_2 + e_2 y_2 (x_2^N + y_2) + e_2 x_2^N (x_2^N + y_2))}{(d_1 - e_1 y_1 (y_1 + x_1^N))^2 (d_2 - e_2 y_2 (y_2 + x_2^N))^2} > 0, \end{aligned}$$

которое завершает проверку критерия Сильвестра.

Для нахождения положения рыночного равновесия используется динамика наилучших ответов:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -f(y_1) + y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -g(y_2) + y_1. \end{cases} \quad (5.5)$$

Нахождение точки рыночного равновесия принимает декомпозиционный характер, когда в систему уравнений подставляются коэффициенты обменного курса  $p_i$  (см. (1.6)), которые аукционер пересчитывает на каждом шаге

$$\begin{cases} p_1 = \frac{y_1 + y_2}{y_1}, \\ p_2 = \frac{y_1 + y_2}{y_2}. \end{cases} \quad (5.6)$$

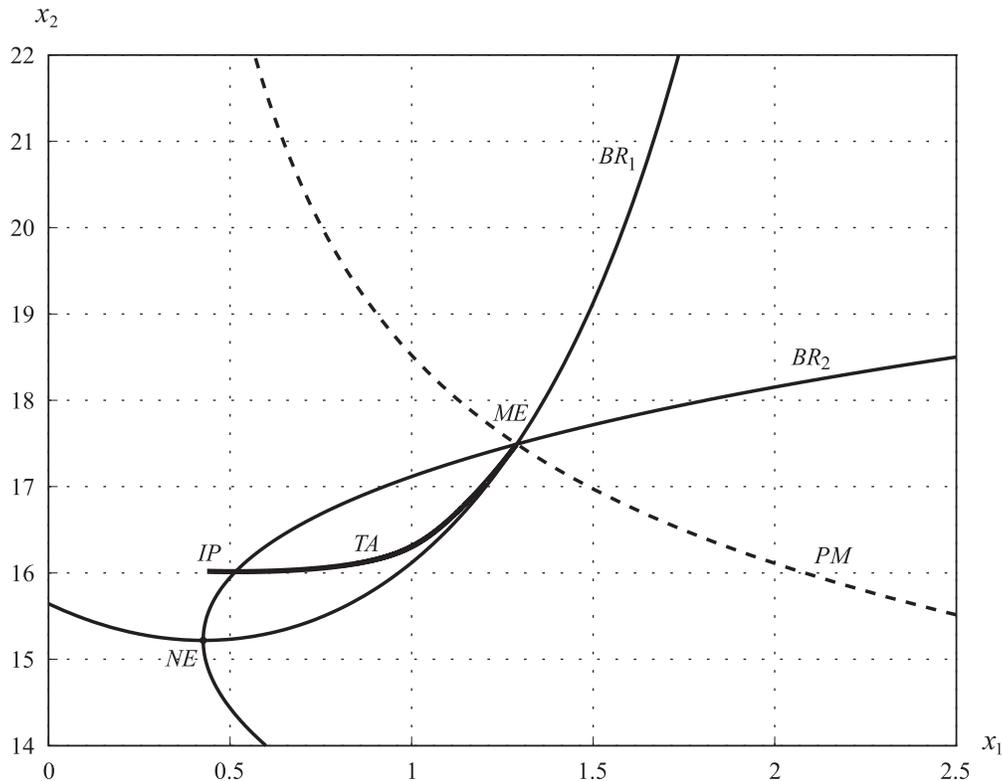
С введенными коэффициентами обменного курса система уравнений (5.5) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -f(y_1) - y_1 + p_1 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = -g(y_2) - y_2 + p_2 y_2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Системы уравнений аукциона (5.6) и (5.7) интегрируются совместно методом Эйлера, результаты расчета по которому представлены в следующем разделе.

## 6. Результаты численного моделирования

Разработанный алгоритм был реализован в программе, написанной в среде MATLAB. Для компьютерного эксперимента были получены коэффициенты для функции затрат и функций экологического эффекта, основанные на реальных данных [9, 17]:  $e_1 = 0.15$ ,  $e_2 = 0.0042$ ,  $d_1 = 1$ ,  $d_2 = 1$ . Полученные результаты представлены на рисунке, где показаны ситуация равновесия по Нэшу ( $NE$ ), множество точек максимума по Парето ( $PM$ ), линии реакции конкурентов ( $BR_1$  и  $BR_2$ ), точка рыночного равновесия в их пересечении ( $ME$ ), начальная точка ( $IP$ ) и траектория алгоритма ( $TA$ ), сходящаяся к рыночному равновесию.



Поиск рыночного равновесия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Воробьев Н.Н.** Теория игр. М.: Наука, 1985. 271 с.
2. **Гермейер Ю.Б.** Игры с противоположными интересами. М.: Наука, 1976. 328 с.
3. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 184 с.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О дифференциально-эволюционных играх // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
6. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 390 с.
7. **Basar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. London: Academic Press, 1982. 519 p.
8. **Ehtamo H., Hamalainen R.P.** A cooperative incentive equilibrium for a resource management problem // J. Econom. Dynam. Control. 1993. Vol. 17. P. 659–678.
9. **Ellerman A.D., Decaux A.** Analysis of post-Kyoto CO2 emissions trading using marginal abatement curves // Joint Program Report Series. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1998. Report No. 40. 32 p.
10. **Fudenberg D., Kreps D.M.** Learning mixed equilibria // Games and Econ. Behavior. 1993. Vol. 5. P. 320–367.
11. **Hoffbauer J., Sigmund K.** Evolutionary games and population dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. 323 p.
12. **Kaniovski Yu.M., Young H.P.** Learning dynamics in games with stochastic perturbations // Games and Econ. Behavior. 1995. Vol. 11. P. 330–363.
13. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston etc.: Birkhauser, 1994. 320 p.
14. **Kryazhimskii A.V., Tarasyev A.M.** Equilibrium and guaranteeing solutions in evolutionary nonzero sum games // IIASA Interim Report IR-98-003. Laxenburg: IIASA, 1998. 56 p.
15. **Nentjes A.** An economic model of transfrontier pollution abatement. In public finance, trade and development / Ed. V. Tanzi Detroit Mich.: Wayne State University Press, 1993. P. 243–261.
16. **Smale S.** The prisoner's dilemma and dynamical systems associated to non-cooperative games // Econometrica. 1980. Vol. 48, no. 7. P. 1617–1634.
17. **Tol R.** The benefits of greenhouse gas emission reduction: an application of FUND // Working Paper FNU-64. Hamburg: Hamburg University, 2005. 33 p.
18. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 p. (Inverse and Ill-Posed Probl. Ser.)

Красовский Николай Андреевич  
аспирант каф. Мультимедиа технологии, УГТУ-УПИ,  
математик  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: nkrasovskiy@gmail.com

Поступила 16.05.2009

Тарасьев Александр Михайлович  
д-р физ.-мат. наук  
зав. сектором  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: tam@imm.uran.ru

УДК 517.977

## МИНИМАКСНЫЕ И ВЯЗКОСТНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Н. Ю. Лукоянов

Для динамической системы с сосредоточенными и распределенными запаздываниями времени рассматривается задача об управлении при наличии помех или противодействия. Задача формализуется в рамках теоретико-игрового подхода в классе стратегий управления с памятью. Задаче сопоставляется функциональное уравнение типа Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными. Обсуждаются минимаксный и вязкостный подходы к обобщенному решению этого уравнения. Показано, что при одинаковом условии на правом конце минимаксное и вязкостное решения совпадают, однозначно определяя функционал оптимального гарантированного результата в рассматриваемой задаче управления.

Ключевые слова: оптимальное управление, дифференциальные игры, системы с последействием, уравнения Гамильтона — Якоби, минимаксное решение, вязкостное решение.

N. Yu. Lukoyanov. Minimax and viscosity solutions in optimization problems for hereditary systems.

For a dynamical system with discrete and distributed time delays, a control problem under disturbance or counteraction is considered. The problem is formalized in the context of the game-theoretical approach in the class of control strategies with memory. The problem is associated with a functional Hamilton–Jacobi type equation with coinvariant derivatives. The minimax and viscosity approaches to a generalized solution of this equation are discussed. It is shown that, under the same condition at the right endpoint, the minimax and viscosity solutions coincide, thereby uniquely defining the functional of optimal guaranteed result in the control problem.

Keywords: optimal control, differential games, time-delay systems, Hamilton–Jacobi equations, minimax solution, viscosity solution.

### Введение

Для динамической системы, движение которой описывается при помощи дифференциальных уравнений с сосредоточенными и распределенными запаздываниями времени, рассматривается задача об управлении в условиях неконтролируемых помех или противодействия. Постановка задачи выполнена в рамках теоретико-игрового подхода [1–6], основанного на принципе гарантированного результата и минимаксно-максиминных оценках и операциях. Оптимальный гарантированный результат управления определяется в классе стратегий с памятью — неупреждающих отображений реализации движения. Величина этого результата зависит от начальной истории движения и, таким образом, задает неупреждающий функционал реализации движения — функционал цены. Данная функциональная постановка задачи близка подходу, предложенному в [7, 8] для исследования задач об устойчивости движения наследственных систем и развитому в [9, 10] для задач управления такими системами.

Статья посвящена изучению свойств, характеризующих функционал цены в терминах гамильтонова формализма. При выводе соответствующего уравнения типа Гамильтона — Якоби используются элементы инвариантного дифференциального исчисления функционалов [11]. Анализ корректных решений полученного уравнения опирается на конструкции унификации дифференциальных игр [12]. При этом рассматриваются минимаксный [13, 14] и вязкостный [15, 16] подходы к обобщенному решению этого уравнения.

<sup>1</sup>Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математическая теория управления”, а также при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00313) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2640.2008.1).

Для динамических систем, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, теория Гамильтона — Якоби, опирающаяся на вязкостные решения, развита, например, в [17]. В [13, 14] такая теория построена на основе конструкций из теории позиционных дифференциальных игр (см., например, [2, 12]), понятия минимаксного решения и неравенств [18] для производных функции цены по направлениям. Для задач оптимального управления техника, основанная на производных по направлениям, развита также, например, в [19, 20].

Для наследственных динамических систем некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [21, 22], посвященных вязкостным решениям функциональных уравнений Гамильтона — Якоби с производными Фреше в приложении к задачам оптимального управления системами с распределенным запаздыванием. В [23] для систем как с распределенными, так и сосредоточенными запаздываниями получено уравнение, описывающее величину оптимального результата в терминах производных по направлениям.

Настоящая статья посвящена задачам управления в условиях помех или противодействия. В ней рассматривается уравнение Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными, которое описывает величину оптимального гарантированного результата как неупреждающий функционал реализации движения. Для систем с распределенным запаздыванием минимаксные решения такого уравнения исследовались, например, в [24, 25], вязкостные — в [26]. Данная работа продолжает эти исследования автора в случае, охватывающем также и сосредоточенные запаздывания времени.

## 1. Наследственная динамическая система

Пусть  $\tau$  — переменное время, и фазовое состояние системы в текущий момент времени  $\tau$  описывается  $n$ -мерным вектором  $y(\tau) \in \mathbb{R}^n$ . Пусть зафиксированы моменты времени  $t_* < t_0 < T$ . Под движением системы понимаем функцию  $y(\cdot) = \{y(\tau) \in \mathbb{R}^n, t_* \leq \tau \leq T\}$ , определенную на временном промежутке  $[t_*, T]$ . Символом  $C$  обозначаем пространство непрерывных  $n$ -мерных функций  $x(\cdot) = \{x(\tau) \in \mathbb{R}^n, t_* \leq \tau \leq T\}$  с равномерной метрикой. Полагаем, что движение системы описывается функционально-дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(\tau) = f(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)), \quad t \leq \tau < T, \quad u(\tau) \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v(\tau) \in Q \subset \mathbb{R}^q \quad (1.1)$$

и начальным условием

$$y(\tau) = x(\tau) \text{ при } t_* \leq \tau \leq t. \quad (1.2)$$

Здесь  $\dot{y}(\tau) = dy(\tau)/d\tau$ ,  $u(\tau)$  — текущее воздействие управления,  $v(\tau)$  — воздействие неконтролируемой помехи,  $P$  и  $Q$  — известные компакты соответствующих конечномерных пространств,  $t \in [t_0, T)$  — момент начала процесса управления. Отрезок  $[t_*, t]$  трактуется как промежуток априорного накопления начальной истории. Предполагается, что начальная история непрерывна. Согласно равенству (1.2) она определяется начальной функцией  $x(\cdot) \in C$ . Допустимыми реализациями управления и помехи соответственно считаются измеримые по Борелю функции  $u(\cdot) = \{u(\tau) \in P, t \leq \tau < T\}$  и  $v(\cdot) = \{v(\tau) \in Q, t \leq \tau < T\}$ . Таким образом, функция  $y(\cdot)$  должна быть непрерывна, т. е.  $y(\cdot) \in C$ , должна удовлетворять начальному условию (1.2), быть абсолютно непрерывной на отрезке  $[t, T]$  и почти всюду на этом отрезке удовлетворять уравнению (1.1) вместе с  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ .

Тройку  $\{y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\}$  называем реализацией процесса управления. Пусть задан показатель  $\gamma$  качества возможных реализаций

$$\gamma = \gamma(\{y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\}) = \sigma(y(\cdot)) - \int_t^T h(\tau, y(\cdot), u(\tau), v(\tau)) d\tau. \quad (1.3)$$

Цель управления состоит в минимизации показателя (1.3). Подчеркнем, что действия помехи непредсказуемы и, вообще говоря, могут быть самыми неблагоприятными.

Полагаем, что в соотношениях (1.1), (1.3) отображения

$$\begin{aligned} [t_0, T] \times C \ni (\tau, y(\cdot)) &\mapsto f = f(\tau, y(\cdot), u, v) \in \mathbb{R}^n, \\ [t_0, T] \times C \ni (\tau, y(\cdot)) &\mapsto h = h(\tau, y(\cdot), u, v) \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.4)$$

являются неупреждающими. По определению *неупреждаемости* это означает, что для любого  $\tau \in [t_0, T]$  и всех  $y(\cdot) \in C$ ,  $z(\cdot) \in C$ , удовлетворяющих условию  $z(\xi) = y(\xi)$  при  $\xi \in [t_*, \tau]$ , имеют место равенства

$$f(\tau, z(\cdot), u, v) = f(\tau, y(\cdot), u, v), \quad h(\tau, z(\cdot), u, v) = h(\tau, y(\cdot), u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Именно неупреждаемость отображений (1.4) определяет наследственный характер рассматриваемой динамической системы. В дополнение к этому всюду ниже считаем выполненными следующие условия:

(S1) Отображения  $f : [t_0, T] \times C \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $h : [t_0, T] \times C \times P \times Q \mapsto \mathbb{R}$  и  $\sigma : C \mapsto \mathbb{R}$  непрерывны.

(S2) Существует такая константа  $c > 1$ , что для всех  $\tau \in [t_0, T]$ ,  $y(\cdot) \in C$ ,  $u \in P$  и  $v \in Q$  справедлива оценка

$$\|f(\tau, y(\cdot), u, v)\| + |h(\tau, y(\cdot), u, v)| \leq \rho_c(\tau, y(\cdot)) = c \left(1 + \max_{t_* \leq \xi \leq \tau} \|y(\xi)\|\right).$$

(S3) Существуют запаздывания  $\vartheta_j \in (0, t_0 - t_*]$ ,  $j = 1, \dots, J$ , такие, что для всякого компакта  $D \subset C$  найдется число  $\lambda = \lambda(D) > 1$ , для которого при всех  $\tau \in [t_0, T]$ ,  $y(\cdot) \in D$  и  $z(\cdot) \in D$  будет справедлива оценка

$$\|f(\tau, y(\cdot), u, v) - f(\tau, z(\cdot), u, v)\| + |h(\tau, y(\cdot), u, v) - h(\tau, z(\cdot), u, v)| \leq \lambda \mu(\tau, y(\cdot) - z(\cdot)),$$

где

$$\mu(\tau, w(\cdot)) = \|w(\tau)\| + \sum_{j=1}^J \|w(\tau - \vartheta_j)\| + \sqrt{\int_{t_*}^{\tau} \|w(\xi)\|^2 d\xi}.$$

Здесь и всюду ниже символ  $\|\cdot\|$  означает евклидову норму вектора.

Отметим (см., например, [27]), что при условиях (S1)–(S3) движение  $y(\cdot)$  системы (1.1), (1.2), а стало быть, и реализующееся значение  $\gamma$  показателя (1.3) однозначно определяются начальной позицией  $(t, x(\cdot)) \in [t_0, T] \times C$  и реализациями управления  $u(\cdot)$  и помехи  $v(\cdot)$ .

Заметим еще, что условие Липшица (S3) охватывает как случай сосредоточенных запаздываний времени, так и случай распределенного последдействия.

## 2. Функционал цены

Оптимальный гарантированный результат управления в задаче (1.1)–(1.3) определяем, следуя теоретико-игровому подходу [2, 5]. При этом, подобно [9, 10], учитываем выявленный в [7, 8] функциональный характер наследственных динамических систем.

Под стратегией управления понимаем неупреждающее отображение

$$[t, T] \times C \ni (\tau, y(\cdot)) \mapsto U = U(\tau, y(\cdot)) \in P.$$

Полагаем, что процесс управления на базе выбранной стратегии  $U$  осуществляется в дискретной по времени схеме с некоторым разбиением промежутка времени управления  $[t, T]$

$$\Delta_\delta = \{\tau_i : \tau_1 = t, 0 < \tau_{i+1} - \tau_i \leq \delta, i = 1, \dots, I, \tau_{I+1} = T\}.$$

Соответствующая реализация управления формируется по шагам этого разбиения по принципу обратной связи как кусочно постоянная функция следующего вида:

$$u(\tau) = U(\tau_i, y(\cdot)), \quad \tau_i \leq \tau < \tau_{i+1}, \quad i = 1, \dots, I. \quad (2.1)$$

Таким образом, стратегия  $U$  и разбиение  $\Delta_\delta$  вместе с какой-либо допустимой реализацией  $v(\cdot)$  помехи порождают из начальной позиции  $(t, x(\cdot))$  реализацию процесса управления, которую будем обозначать  $\{y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot) | t, x(\cdot), U, \Delta_\delta, v(\cdot)\}$ .

Величину  $\Gamma$  гарантированного результата управления на базе стратегии  $U$  определяем исходя из самых неблагоприятных с точки зрения цели управления обстоятельств:

$$\Gamma = \Gamma(t, x(\cdot), U) = \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta, v(\cdot)} \gamma(\{y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot) | t, x(\cdot), U, \Delta_\delta, v(\cdot)\}).$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом управления будет следующая величина:

$$\varphi = \varphi(t, x(\cdot)) = \inf_U \Gamma(t, x(\cdot), U). \quad (2.2)$$

Эта величина определена для всех  $(t, x(\cdot)) \in [t_0, T] \times C$ . При  $t = T$  естественно положить

$$\varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in C. \quad (2.3)$$

Соотношения (2.2) и (2.3) определяют неупреждающий функционал

$$[t_0, T] \times C \ni (t, x(\cdot)) \mapsto \varphi = \varphi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R},$$

который, следуя терминологии теории дифференциальных игр, будем называть *функционалом цены*. Ниже изучаются свойства этого функционала в свете гамильтонова формализма.

### 3. Уравнение типа Гамильтона — Якоби с коинвариантными производными

Возможны различные подходы к гамильтонову формализму в наследственных системах (см., например, [21–23, 25]). Подход, развиваемый в настоящей статье, является, на взгляд автора, наиболее естественным для изложенной выше теоретико-игровой постановки задачи. В частности, этот подход использует понятие коинвариантной дифференцируемости неупреждающих функционалов.

Пусть  $(t, x(\cdot)) \in [t_0, T] \times C$ . Обозначим через  $\text{Lip}(t, x(\cdot))$  множество всех таких функций  $y(\cdot) \in C$ , каждая из которых удовлетворяет условию (1.2) и является липшицевой на  $[t, T]$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Неупреждающий функционал  $\psi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  называем *коинвариантно дифференцируемым* (*си-дифференцируемым*) в точке  $(t, x(\cdot)) \in [t_0, T] \times C$ , если существует такое число  $\partial_t \psi(t, x(\cdot))$  и такой  $n$ -вектор  $\nabla_{x(\cdot)} \psi(t, x(\cdot))$ , что для всех  $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$  и  $\tau \in (t, T]$  будет выполняться следующее соотношение:

$$\psi(\tau, y(\cdot)) - \psi(t, x(\cdot)) = \partial_t \psi(t, x(\cdot))(\tau - t) + \langle \nabla_{x(\cdot)} \psi(t, x(\cdot)), y(\tau) - x(t) \rangle + o_{y(\cdot)}(\tau - t). \quad (3.1)$$

Здесь символ  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение векторов.

Характеризуемое соотношением (3.1) свойство дифференцируемости было выявлено для функционалов Ляпунова в задачах об устойчивости движений наследственных динамических систем. Подчеркнем, что в (3.1) бесконечно малая  $o_{y(\cdot)}(\cdot)$  ( $o_{y(\cdot)}(\delta)/\delta \rightarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$ ) зависит от выбора  $y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot))$ , в то время как величины  $\partial_t \psi(t, x(\cdot))$  и  $\nabla_{x(\cdot)} \psi(t, x(\cdot))$  от этого выбора не зависят. Термины “инвариантные производные”, “коинвариантные производные” для подобных величин были предложены в [28]. Техника инвариантного дифференциального исчисления функционалов развита в [11]. В терминологии [29] величины  $\partial_t \psi(t, x(\cdot))$

и  $\nabla_{x(\cdot)}\psi(t, x(\cdot))$  можно назвать Слю-производными. Ниже, как и в [24–26], используем термин *ковариантные производные (си-производные)*. Если соотношение (3.1) имеет место при всех  $(t, x(\cdot)) \in [t_*, T) \times C$ , то функционал  $\psi$  называем *си-дифференцируемым*. Неупреждающий функционал  $\psi : [t_*, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  называем *си-гладким*, если он непрерывен, си-дифференцируем и непрерывны следующие отображения:

$$[t_0, T) \times C \ni (t, x(\cdot)) \mapsto \partial_t \psi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}, \quad [t_0, T) \times C \ni (t, x(\cdot)) \mapsto \nabla_{x(\cdot)} \psi(t, x(\cdot)) \in \mathbb{R}^n.$$

Для си-гладкого функционала его полная производная по времени вдоль движений системы (1.1) записывается в привычной для обыкновенных дифференциальных систем форме

$$\frac{d\psi(t, x(\cdot))}{dt} = \partial_t \psi(t, x(\cdot)) + \left\langle \nabla_{x(\cdot)} \psi(t, x(\cdot)), f(t, x(\cdot), u(t), v(t)) \right\rangle.$$

Опираясь на эту формулу, стандартным образом (см., например, [5, с. 132] для задач управления движением обыкновенных дифференциальных систем, а также [25] для случая наследственных динамических систем) строятся стратегии экстремального сдвига в направлении си-градиентов и выводится уравнение для функционала цены в задаче (1.1)–(1.3).

**Теорема 1.** Пусть выполняются условия (S1)–(S3) и неупреждающий си-гладкий функционал  $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  удовлетворяет условию (2.3) и следующему уравнению типа Гамильтона – Якоби с си-производными:

$$\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) + H\left(t, x(\cdot), \nabla_{x(\cdot)} \varphi(t, x(\cdot))\right) = 0, \quad t \in [t_0, T), \quad x(\cdot) \in C, \quad (3.2)$$

в котором гамильтониан  $H$  определяется согласно равенству

$$H(t, x(\cdot), s) = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \left[ \langle s, f(t, x(\cdot), u, v) \rangle - h(t, x(\cdot), u, v) \right], \quad t \in [t_0, T], \quad x(\cdot) \in C, \quad s \in \mathbb{R}^n. \quad (3.3)$$

Тогда этот функционал является функционалом цены в задаче управления (1.1)–(1.3), т. е. выполняется равенство (2.2). При этом стратегия управления  $U^0$ , определяемая исходя из соотношения

$$U^0 = U^0(\tau, y(\cdot)) \in \arg \min_{u \in P} \left\{ \max_{v \in Q} \left[ \langle \nabla_{y(\cdot)} \varphi(\tau, y(\cdot)), f(\tau, y(\cdot), u, v) \rangle - h(\tau, y(\cdot), u, v) \right] \right\},$$

будет оптимальной, т. е.  $\Gamma(t, x(\cdot), U^0) = \varphi(t, x(\cdot))$ .

Заметим, что отображение  $[t_0, T] \times C \ni (t, x(\cdot)) \mapsto H(t, x(\cdot), s) \in \mathbb{R}$  является неупреждающим при любом фиксированном  $s \in \mathbb{R}^n$ . Кроме того, при предположениях (S1)–(S3) гамильтониан  $H$  системы (1.1)–(1.3) будет удовлетворять следующим свойствам:

(H1) Отображение  $H : [t_0, T] \times C \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  непрерывно.

(H2) Существует константа  $c > 1$  такая, что

$$|H(t, x(\cdot), 0)| \leq \rho_c(t, x(\cdot)), \quad |H(t, x(\cdot), r) - H(t, x(\cdot), s)| \leq \rho_c(t, x(\cdot)) \|r - s\|$$

для всех  $(t, x(\cdot)) \in [t_0, T] \times C$  и  $r, s \in \mathbb{R}^n$ .

(H3) Для всякого компактного подмножества  $D \subset C$  найдется такая константа  $\lambda = \lambda(D) > 1$ , что

$$|H(t, x(\cdot), s) - H(t, y(\cdot), s)| \leq \lambda(1 + \|s\|) \mu(t, x(\cdot) - y(\cdot))$$

для всех  $s \in \mathbb{R}^n$  и  $x(\cdot), y(\cdot) \in D$ .

К сожалению, воспользоваться теоремой 1 для оптимизации наследственных систем удастся лишь в исключительных случаях. Как правило, функционал цены не обладает подходящими свойствами гладкости, а уравнение (3.2), (3.3) не имеет классического решения, удовлетворяющего условию (2.3). Таким образом, требуется рассматривать обобщенные решения задачи (2.3), (3.2). При этом один из заведомо содержательных подходов к корректному определению обобщенного решения этой задачи непосредственно вытекает из анализа свойств стабильности функционала цены, сформулированных с использованием унифицированных конструкций теории позиционных дифференциальных игр.

#### 4. Стабильность функционала цены

В согласии с результатами теории позиционных дифференциальных игр (см., например, [2, 5, 9]) при условиях (S1)–(S3) функционал цены непрерывен и обладает следующими характеристическими свойствами, вытекающими из определения (2.2) величины оптимального гарантированного результата.

**Свойство  $u$ -стабильности.** Для любых  $t \in [t_0, T)$ ,  $x(\cdot) \in C$ ,  $t^* \in (t, T]$  при любом выборе измеримой по Борелю функции  $v[\cdot] : P \mapsto Q$  функционально-дифференциальное включение

$$(\dot{y}(\tau), \dot{\eta}(\tau)) \in E_{v[\cdot]}(\tau, y(\cdot)) = \overline{\text{co}} \left\{ \left( f(\tau, y(\cdot), u, v[u]), h(\tau, y(\cdot), u, v[u]) \right) \Big| u \in P \right\}, \quad t \leq \tau < T \quad (4.1)$$

имеет решение  $(y(\cdot), \eta(\cdot))$ , которое удовлетворяет начальному условию

$$y(\tau) = x(\tau) \text{ при } \tau \in [t_*, t], \quad \eta(t) = \varphi(t, x(\cdot)) \quad (4.2)$$

и следующему неравенству:

$$\eta(t^*) \geq \varphi(t^*, y(\cdot)).$$

**Свойство  $v$ -стабильности.** При любых  $t \in [t_0, T)$ ,  $x(\cdot) \in C$ ,  $t^* \in (t, T]$  и  $u \in P$  функционально-дифференциальное включение

$$(\dot{y}(\tau), \dot{\eta}(\tau)) \in E^u(\tau, y(\cdot)) = \overline{\text{co}} \left\{ \left( f(\tau, y(\cdot), u, v), h(\tau, y(\cdot), u, v) \right) \Big| v \in Q \right\}$$

имеет решение  $(y(\cdot), \eta(\cdot))$ , удовлетворяющее условию (4.2) и неравенству

$$\eta(t^*) \leq \varphi(t^*, y(\cdot)).$$

Здесь символ  $\overline{\text{co}}$  — знак выпуклой замкнутой оболочки множества в  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Применяя конструкции унификации дифференциальных игр (см. [12], а также [14]), характеристические свойства функционала цены можно выразить в терминах гамильтониана.

Пусть  $t \in [t_0, T)$ ,  $x(\cdot) \in C$ . Возьмем константу  $c > 1$  из условия (S2) (см. также (H2)) и рассмотрим множество

$$Y(t, x(\cdot)) = \left\{ y(\cdot) \in \text{Lip}(t, x(\cdot)) : \|\dot{y}(\tau)\| \leq \rho_c(\tau, y(\cdot)) \text{ при п.в. } \tau \in [t, T] \right\}.$$

**Условие (M\*).** Для любых  $t \in [t_0, T)$ ,  $x(\cdot) \in C$  и  $s \in \mathbb{R}^n$  найдется такая функция  $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ , что будет выполнено следующее неравенство:

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) \leq \langle s, y(\tau) \rangle - \langle s, x(t) \rangle - \int_t^\tau H(\xi, y(\cdot), s) d\xi, \quad \tau \in [t, T].$$

Условие (M<sub>\*</sub>). Для любых  $t \in [t_0, T)$ ,  $x(\cdot) \in C$  и  $s \in \mathbb{R}^n$  можно указать такую функцию  $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ , для которой справедливо неравенство

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) \geq \langle s, y(\tau) \rangle - \langle s, x(t) \rangle - \int_t^\tau H(\xi, y(\cdot), s) d\xi, \quad \tau \in [t, T].$$

**Утверждение 1.** *Предположим, что некоторый неупреждающий полунепрерывный снизу функционал  $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  обладает свойством и-стабильности. Тогда он удовлетворяет условию (M<sup>\*</sup>).*

**Доказательство.** Полагая

$$\Psi(\tau, y(\cdot)) = \varphi(\tau, y(\cdot)) - \langle s, y(\tau) \rangle + \int_t^\tau H(\xi, y(\cdot), s) d\xi,$$

от противного предположим, что нашлись такие  $t \in [t_0, T)$ ,  $x(\cdot) \in C$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$ , а также  $\tau^* \in (t, T]$  и  $\alpha > 0$ , для которых имеет место неравенство

$$\Psi(\tau^*, y(\cdot)) \geq \varphi(t, x(\cdot)) - \langle s, x(t) \rangle + 2\alpha, \quad y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot)). \quad (4.3)$$

Обозначим

$$\beta(\tau) = \varphi(t, x(\cdot)) - \langle s, x(t) \rangle + \alpha \frac{\tau - t}{\tau^* - t},$$

$$\tau^\circ = \sup \left\{ \tau \in [t, \tau^*] \mid \inf_{y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))} \Psi(\tau, y(\cdot)) \leq \beta(\tau) \right\}. \quad (4.4)$$

Отметим, что множество, супремум которого ищется в соотношении (4.4), непусто, поскольку  $\Psi(t, y(\cdot)) = \beta(t)$ . В силу предположения (4.3) имеем  $\tau^\circ < \tau^*$ . Кроме того, так как отображение  $[t_0, T] \times C \ni (\tau, y(\cdot)) \mapsto \Psi(\tau, y(\cdot)) \in \mathbb{R}$  полунепрерывно снизу, а множество  $Y(t, x(\cdot))$  компактно в  $C$ , существует такая функция  $y^\circ(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ , что

$$\Psi(\tau^\circ, y^\circ(\cdot)) \leq \beta(\tau^\circ). \quad (4.5)$$

Через  $\Xi(t, x(\cdot))$  обозначим множество всех удовлетворяющих начальному условию (4.2) решений  $(y(\cdot), \eta(\cdot))$  функционально-дифференциального включения (4.1). В силу известных теорем об измеримом выборе (см., например, [30, п. I.7]) найдется такая измеримая по Борелю функция  $v^\circ[\cdot] : P \mapsto Q$ , что

$$\langle s, f(\tau^\circ, y^\circ(\cdot), u, v^\circ[u]) \rangle - h(\tau^\circ, y^\circ(\cdot), u, v^\circ[u]) = \max_{v \in Q} \left[ \langle s, f(\tau^\circ, y^\circ(\cdot), u, v) \rangle - h(\tau^\circ, y^\circ(\cdot), u, v) \right]$$

для любого  $u \in P$ , и, следовательно, в соответствии с равенствами (3.3), (4.1) имеем

$$H(\tau^\circ, y^\circ(\cdot), s) = \min_{u \in P} \left[ \langle s, f(\tau^\circ, y^\circ(\cdot), u, v^\circ[u]) \rangle - h(\tau^\circ, y^\circ(\cdot), u, v^\circ[u]) \right]$$

$$= \min_{(f, h) \in E_{v^\circ[\cdot]}(\tau^\circ, y^\circ(\cdot))} [\langle s, f \rangle - h]. \quad (4.6)$$

Отображение  $[t_0, T] \times C \ni (\tau, y(\cdot)) \mapsto E_{v^\circ[\cdot]}(\tau, y(\cdot)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  по крайней мере полунепрерывно сверху по включению, множество  $\Xi(\tau^\circ, y^\circ(\cdot))$  компактно в пространстве непрерывных функций, а гамильтониан  $H$  непрерывен. Поэтому, исходя из соотношений (4.1), (4.6), заключаем, что найдется такое число  $0 < \delta < \tau^* - \tau^\circ$ , что при любом выборе решения  $(y(\cdot), \eta(\cdot)) \in \Xi(\tau^\circ, y^\circ(\cdot))$  будет справедливо неравенство

$$\langle s, \dot{y}(\xi) \rangle - \dot{\eta}(\xi) \geq H(\xi, y(\cdot), s) - \frac{\alpha}{\tau^* - t} \quad \text{при п.в. } \xi \in [\tau^\circ, \tau^\circ + \delta],$$

из которого, интегрируя, получаем

$$\langle s, y(\tau^\circ + \delta) \rangle - \eta(\tau^\circ + \delta) - \langle s, y^\circ(\tau^\circ) \rangle + \varphi(\tau^\circ, y^\circ(\cdot)) \geq \int_{\tau^\circ}^{\tau^\circ + \delta} H(\xi, y(\cdot), s) d\xi - \frac{\alpha\delta}{\tau^* - t}. \quad (4.7)$$

Здесь также учтены равенства  $y(\tau) = y^\circ(\tau)$  при  $\tau \in [t_*, \tau^\circ]$ ,  $\eta(\tau^\circ) = \varphi(\tau^\circ, y^\circ(\cdot))$ .

По свойству  $u$ -стабильности функционала  $\varphi$  решение  $(y(\cdot), \eta(\cdot)) \in \Xi(\tau^\circ, y^\circ(\cdot))$  можно выбрать так, чтобы наряду с неравенством (4.7) выполнялось следующее неравенство:

$$\eta(\tau^\circ + \delta) \geq \varphi(\tau^\circ + \delta, y(\cdot)). \quad (4.8)$$

Опираясь на неравенства (4.7), (4.8) и затем (4.5), выводим

$$\Psi(\tau^\circ + \delta, y(\cdot)) \leq \Psi(\tau^\circ, y^\circ(\cdot)) + \frac{\alpha\delta}{\tau^* - t} \leq \beta(\tau^\circ) + \frac{\alpha\delta}{\tau^* - t} = \beta(\tau^\circ + \delta).$$

Из включений  $y^\circ(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ ,  $(y(\cdot), \eta(\cdot)) \in \Xi(\tau^\circ, y^\circ(\cdot))$  в силу условия (S2) вытекает включение  $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ . Таким образом, полученное соотношение противоречит определению (4.4) числа  $\tau^\circ$ . Доказательство завершено.

Следующее утверждение доказывается аналогичным образом с понятными изменениями.

**Утверждение 2.** Если некоторый неупреждающий функционал  $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  является полунепрерывным сверху и обладает свойством  $v$ -стабильности, то он удовлетворяет условию  $(M_*)$ .

Как показано в [24] для непрерывного неупреждающего функционала  $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  пара условий  $(M^*)$ ,  $(M_*)$  эквивалентна следующему условию.

У с л о в и е (M). Для любых  $t \in [t_0, T)$ ,  $x(\cdot) \in C$  и  $s \in \mathbb{R}^n$  можно указать такую функцию  $y(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))$ , для которой будет справедливо равенство

$$\varphi(\tau, y(\cdot)) - \varphi(t, x(\cdot)) = \langle s, y(\tau) \rangle - \langle s, x(t) \rangle - \int_t^\tau H(\xi, y(\cdot), s) d\xi, \quad \tau \in [t, T].$$

Зафиксируем  $(t, x(\cdot)) \in [t_0, T) \times C$ . Полагая в условии (H3)  $D = Y(t, x(\cdot))$ , определим константу  $\lambda > 1$  и для  $0 < \varepsilon < e^{(J+3)\lambda(t_*-T)}$  рассмотрим следующий неупреждающий функционал  $[t_0, T] \times C \ni (\tau, w(\cdot)) \mapsto \nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon(\tau, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \nu_\varepsilon(\tau, w(\cdot)) &= \frac{e^{(J+3)\lambda(t_*-\tau)}}{\varepsilon} \left( \varepsilon^4 + 2\lambda \sum_{j=1}^J \int_{\tau-\vartheta_j}^\tau \|w(\xi)\|^2 d\xi + \|w(\tau)\|^2 \right)^{1/2} \\ &+ \frac{e^{(J+3)\lambda(t_*-\tau)} - \varepsilon}{\varepsilon} \left( \varepsilon^4 + 2\lambda \int_{t_*}^\tau \|w(\xi)\|^2 d\xi + \|w(\tau)\|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Благодаря свойствам (H1)–(H3) гамильтониана (3.3) этот функционал будет удовлетворять условиям а)–г) работы [31]. Определим стратегию  $U_\varepsilon^e$  экстремального сдвига в направлении сi-градиентов этого функционала:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon^e &= U_\varepsilon^e(\tau, y(\cdot)) \in \arg \min_{u \in P} \left\{ \max_{v \in Q} \left[ \langle s^u, f(\tau, y(\cdot), u, v) \rangle - h(\tau, y(\cdot), u, v) \right] \right\}, \\ s^u &= \nabla \nu_\varepsilon(\tau, y(\cdot) - z^u(\cdot)), \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$z^u(\cdot) \in \arg \min_{z(\cdot) \in Y(t, x(\cdot))} [\varphi(\tau, z(\cdot)) + \nu_\varepsilon(\tau, y(\cdot) - z(\cdot))].$$

Из вышеизложенного и результатов [31] вытекает следующая теорема.

**Теорема 2.** При условиях (S1)–(S3) неупреждающий функционал  $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  является функционалом цены в задаче управления (1.1)–(1.3) тогда и только тогда, когда он непрерывен и удовлетворяет условию (M) вместе с условием (2.3). При этом стратегия управления  $U_\varepsilon^e$ , построенная исходя из соотношений (4.10), будет оптимальной в том смысле, что

$$\limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \Gamma(t, x(\cdot), U_\varepsilon^e) = \varphi(t, x(\cdot)).$$

Итак, в гладком случае функционал цены (2.2) описывается уравнением (3.2), (3.3) с  $\dot{c}$ -производными, в общем же случае — условием стабильности (M). Можно показать (см., например, [24]), что для  $\dot{c}$ -гладких неупреждающих функционалов уравнение (3.2) эквивалентно условию (M). В отличие от уравнения, это условие корректно рассматривать не только для  $\dot{c}$ -дифференцируемых, но и для лишь непрерывных функционалов. Поэтому его можно положить в основу определения обобщенного решения задачи (2.3), (3.2). В теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби такое решение называют минимаксным (см. [13, 14]).

## 5. Минимаксное решение

Абстрагируясь от задачи управления (1.1)–(1.3), рассмотрим следующую задачу Коши для функционального уравнения типа Гамильтона — Якоби с  $\dot{c}$ -производными:

$$\partial_t \varphi(t, x(\cdot)) + H\left(t, x(\cdot), \nabla_{x(\cdot)} \varphi(t, x(\cdot))\right) = 0, \quad t \in [t_0, T), \quad x(\cdot) \in C, \quad (5.1)$$

$$\varphi(T, x(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)), \quad x(\cdot) \in C. \quad (5.2)$$

Напомним, что здесь для каждого  $s \in \mathbb{R}^n$  отображение  $[t_0, T] \times C \ni (t, x(\cdot)) \mapsto H(t, x(\cdot), s) \in \mathbb{R}$  подразумевается неупреждающим.

**О п р е д е л е н и е 2.** Минимаксным решением задачи (5.1), (5.2) назовем непрерывный неупреждающий функционал  $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ , удовлетворяющий условию (M) и равенству (5.2).

В теории минимаксных решений уравнений с частными производными первого порядка (см. [13, 14]) вводятся еще понятия верхних и нижних решений. При этом минимаксное решение одновременно является как верхним, так и нижним решением. Более того, оно совпадает с минимальным верхним и максимальным нижним решениями. Применительно к функциональному уравнению (5.1) верхнее решение может быть определено как полунепрерывный снизу неупреждающий функционал  $\varphi$ , который удовлетворяет условию (M<sup>\*</sup>). Соответственно нижнее решение определяется как полунепрерывный сверху неупреждающий функционал  $\varphi$ , который удовлетворяет условию (M<sub>\*</sub>).

**Теорема 3.** Пусть гамильтониан  $H$  уравнения (5.1) обладает свойствами (H1)–(H3), а функционал  $\sigma : C \mapsto \mathbb{R}$  из условия (5.2) непрерывен. Тогда задача (5.1), (5.2) имеет одно и только одно минимаксное решение.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В [24] приведено доказательство этой теоремы в случае более сильного, чем (H3) условия липшицевости гамильтониана  $H$ :

(H3)<sup>\*</sup> Для всякого компактного подмножества  $D \subset C$  найдется такая константа  $\lambda = \lambda(D) > 1$ , что

$$|H(t, x(\cdot), s) - H(t, y(\cdot), s)| \leq \lambda(1 + \|s\|) \left( \|x(t) - y(t)\| + \sqrt{\int_{t_*}^t \|x(\xi) - y(\xi)\|^2 d\xi} \right)$$

для всех  $s \in \mathbb{R}^n$  и  $x(\cdot), y(\cdot) \in D$ .

Доказательство теоремы при условии (Н3) проводится аналогичным образом. Понятные изменения связаны с тем, что в случае условия (Н3) вместо вспомогательного функционала  $\nu_\varepsilon$ , используемого в построениях из [24], следует использовать функционал, определяемый равенством (4.9).

## 6. Вязкостное решение

В теории уравнений Гамильтона — Якоби и более общих уравнений с частными производными первого и второго порядка также широко известен вязкостный подход к их обобщенному решению. Этот подход восходит к методу “исчезающей вязкости” из математической физики, последовательно применявшемуся для изучения уравнений Гамильтона — Якоби, например, в [32]. Поэтому получаемые в рамках этого подхода решения стали называть вязкостными. Самостоятельный характер теория вязкостных решений приобрела после работ [15, 16]. Важно отметить, что для широкого класса уравнений, включая уравнения Гамильтона — Якоби, понятия минимаксного и вязкостного решений являются эквивалентными (см., например, [13, 14]).

Рассматриваемое ниже вязкостное решение задачи (5.1), (5.2) исходит, в основном, из конструкций работ [21, 33], посвященных функциональным уравнениям Гамильтона — Якоби с производными Фреше. Особенность функционального уравнения (5.1) с  $c_1$ -производными состоит в том, что оно описывает именно неупреждающий функционал  $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ .

Пусть  $AC$  — множество абсолютно непрерывных функций  $x(\cdot) = \{x(\tau) \in \mathbb{R}^n, t_* \leq \tau \leq T\}$ . Полагаем выполненными условия (Н1)–(Н3). Зафиксировав константу  $c > 1$  из условия (Н2), для  $k = 1, 2, \dots$  определим множества

$$D_k = \left\{ x(\cdot) \in AC : \|x(t_*)\| \leq k, \|\dot{x}(\tau)\| \leq k \rho_c(\tau, x(\cdot)) \text{ при п.в. } \tau \in [t_*, T] \right\}.$$

Заметим, что множества  $D_k$  компактны в  $C$ , при этом множество  $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$  всюду плотно в  $C$ .

**О п р е д е л е н и е 3.** *Вязкостным решением задачи (5.1), (5.2) назовем непрерывный неупреждающий функционал  $\varphi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$ , который удовлетворяет равенству (5.2) и следующим двум условиям:*

**У с л о в и е (V\*).** Для любого неупреждающего  $c_1$ -гладкого функционала  $\psi : [t_0, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  всякий раз, когда при некотором  $k = 1, 2, \dots$  в точке  $(t, x(\cdot)) \in [t_0, T] \times D_k$  разность  $\varphi - \psi$  достигает своего минимума на  $[t_0, T] \times D_k$ , имеет место неравенство

$$\partial_t \psi(t, x(\cdot)) + H\left(t, x(\cdot), \nabla_{x(\cdot)} \psi(t, x(\cdot))\right) \leq 0.$$

**У с л о в и е (V\*<sub>\*</sub>).** Для любого неупреждающего  $c_1$ -гладкого функционала  $\psi : [t_*, T] \times C \mapsto \mathbb{R}$  всякий раз, когда при некотором  $k = 1, 2, \dots$  в точке  $(t, x(\cdot)) \in [t_0, T] \times D_k$  разность  $\varphi - \psi$  достигает своего максимума на  $[t_0, T] \times D_k$ , имеет место неравенство

$$\partial_t \psi(t, x(\cdot)) + H\left(t, x(\cdot), \nabla_{x(\cdot)} \psi(t, x(\cdot))\right) \geq 0.$$

Непосредственно проверяется (см., например, [26]), что для  $c_1$ -гладких функционалов  $\varphi$  пара условий (V\*), (V\*<sub>\*</sub>) эквивалентна уравнению (5.1), так что определение 3 согласуется с понятием решения в классическом смысле. Из результатов [26] также следует, что всякий непрерывный функционал  $\varphi$ , удовлетворяющий условию (M), будет удовлетворять условиям (V\*), (V\*<sub>\*</sub>). С учетом теоремы 3 отсюда в частности следует, что при рассматриваемых условиях вязкостное решение задачи (5.1), (5.2) существует. Состоятельность данного определения вязкостного решения подтверждается также следующей теоремой о единственности этого решения.

**Теорема 4.** Пусть выполняются условия (Н1)–(Н3) и функционал  $\sigma : C \mapsto \mathbb{R}$  является непрерывным. Тогда вязкостное решение задачи (5.1), (5.2) единственно.

**Доказательство.** В случае выполнения условия (Н3)\* доказательство этой теоремы проведено в [26]. Доказательство с опорой на условие (Н3) будет отличаться лишь техническими деталями, если в рассуждениях из [26] в качестве вспомогательного функционала

$$[t_0, T] \times C \times [t_0, T] \times C \ni (t, x(\cdot), \tau, y(\cdot)) \mapsto \nu = \nu(t, x(\cdot), \tau, y(\cdot)) \in \mathbb{R}$$

взять следующий функционал:

$$\begin{aligned} \nu(t, x(\cdot), \tau, y(\cdot)) &= (t - \tau)^2 + \|x(t) - y(\tau)\|^2 \\ &+ \sum_{j=1}^J \int_{t-\vartheta_j}^T \|\omega_{t,x(\cdot)}(\xi) - \omega_{\tau,y(\cdot)}(\xi)\|^2 d\xi + \int_{t_*}^T \|\omega_{t,x(\cdot)}(\xi) - \omega_{\tau,y(\cdot)}(\xi)\|^2 d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\omega_{t,x(\cdot)}(\xi) = \begin{cases} x(\xi), & \text{при } \xi \in [t_*, t), \\ x(t), & \text{при } \xi \in [t, T]. \end{cases}$$

Возвращаясь к задаче управления (1.1)–(1.3), в соответствии с теоремами 2–4 получаем, что минимаксное и вязкостное решения уравнения (3.2), (3.3) при условии (2.3), совпадая между собой, однозначно определяют функционал цены (2.2). Таким образом, условия (M\*), (M\*), (M) и (V\*), (V\*) представляют собой различные формы выражения характерных свойств функционала цены в задачах динамической оптимизации наследственных систем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
6. Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V. Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions. Amsterdam: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
7. Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 315–327.
8. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
9. Осипов Ю.С. Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
10. Куржанский А.Б. Дифференциальные игры сближения в системах с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 8. С. 1398–1409.
11. Kim A.V. Functional differential equations. application of  $i$ -smooth calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999. 165 p.
12. Красовский Н.Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
13. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
14. Subbotin A.I. Generalized solutions of first-order PDEs: The dynamical optimization perspective. Boston etc.: Birkhäuser, 1995. 312 p.
15. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, no. 1. P. 1–42.

16. **Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L.** Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282. P. 487–502.
17. **Lions P.L., Souganidis P.E.** Differential games, optimal control and directional derivatives of viscosity solutions of Bellman’s and Isaacs’s equations // SIAM J. Contr. Optim. 1985. Vol. 23, no. 4. P. 566–583.
18. **Субботин А.И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.
19. **Berkovitz L.D.** Optimal feedback control // SIAM J. Contr. Optim. 1989. Vol. 27. P. 991–1006.
20. **Vinter R.B., Wolenski P.R.** Hamilton–Jacobi theory for control problems with data measurable in time // SIAM J. Contr. Optim. 1990. Vol. 28. P. 1404–1419.
21. **Soner H.M.** On the Hamilton–Jacobi–Bellman equations in Banach spaces // J. Optim. Theory Appl. 1988. Vol. 57, no. 3. P. 429–437.
22. **Barron E.N.** Application of viscosity solutions of infinite-dimensional Hamilton–Jacobi–Bellman equations to some problems in distributed optimal control // J. Optim. Theory Appl. 1990. Vol. 64, no. 2. P. 245–268.
23. **Wolenski P.R.** Hamilton–Jacobi theory for hereditary control problems // Nonlinear Anal. 1994. Vol. 22, no. 7. P. 875–894.
24. **Lukoyanov N.Yu.** Functional Hamilton–Jacobi type equations in *ci*-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, no. 3. P. 365–397.
25. **Lukoyanov N.Yu.** Functional Hamilton–Jacobi type equations with *ci*-derivatives in control problems with hereditary information // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, no. 4. P. 535–555.
26. **Лукоянов Н.Ю.** О вязкостном решении функциональных уравнений типа Гамильтона — Якоби для наследственных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 2. С. 135–144.
27. **Куржанский А.Б.** О существовании решений уравнений с последствием // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 10. С. 1800–1809.
28. **Ким А.В.** Ко второму методу Ляпунова для систем с последствием // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 3. С. 385–391.
29. **Aubin J.P., Haddad G.** History path dependent optimal control and portfolio valuation and management // Positivity. 2002. Vol. 6, no. 3. P. 331–358.
30. **Warga J.** Optimal Control of Differential and Functional Equations. New York: Academic Press, 1972. 531 p.
31. **Лукоянов Н.Ю.** Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 4. С. 629–643.
32. **Кружков С. Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала // Мат. сб. 1975. Т. 98, № 3. С. 450–493.
33. **Crandall M.G., Lions P.-L.** Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions, Part IV: Hamiltonians with unbounded linear terms // J. Funct. Anal. 1990. Vol. 90. P. 237–283.

Лукоянов Николай Юрьевич  
д-р физ.-мат. наук  
зав. сектором  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Поступила 14.04.2009

УДК 517.977

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ<sup>1</sup>****В. И. Максимов**

Рассматривается нелинейная по фазовым переменным управляемая система. В предположении, что на систему действует неконтролируемое возмущение, указывается алгоритм формирования управления, обеспечивающего отслеживание заданной траектории.

Ключевые слова: управляемая система, возмущение.

V. I. Maksimov. On one problem of tracking a given trajectory.

A controlled system nonlinear in phase variables is considered. Under the assumption that the system is subject to an uncontrollable disturbance, an algorithm of forming the control is specified such that a given trajectory is tracked.

Keywords: controlled system, disturbance.

**1. Введение. Постановка задачи**

Рассматривается нелинейная динамическая система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) + B(v(t) - u(t)), \quad t \in T = [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

Здесь  $x \in \mathbb{R}^n$  — фазовый вектор системы;  $f : Z = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — нелинейная липшицевая вектор-функция;  $B$  — матрица размерности  $n \times r$ ;  $u$  — управление;  $v$  является внешним (неизвестным) возмущением. Предполагается, что функция  $v(\cdot)$  ограничена по существу, т. е.

$$v(\cdot) \in L_\infty(T; \mathbb{R}^r). \quad (1.2)$$

Другая какая-либо информация относительно свойств функции  $v(\cdot)$  отсутствует. В достаточно частые моменты времени измеряются (с ошибкой) фазовые состояния  $x(t)$  системы (1.1). Для простоты изложения предполагается, что измерения производятся “равномерно” — в моменты  $\tau_k = t_0 + k\delta$ ,  $\delta = (\vartheta - t_0)/m$ . Результатами измерений в моменты  $\tau_k$  являются векторы  $\xi_k^h \in \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющие неравенствам

$$\|x(\tau_k) - \xi_k^h\| \leq h. \quad (1.3)$$

Здесь  $h \in (0, 1)$  — величина погрешности измерения; символ  $\|\cdot\|$  означает норму в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Необходимо организовать процесс управления системой (1.1) по принципу обратной связи таким образом, чтобы реализующаяся траектория  $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u, v)$  была “близка” (в смысле “малости” соответствующего критерия качества  $I$ ) к предписанной траектории  $y(\cdot)$ , описываемой уравнением

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad t \in T, \quad y(t_0) = x_0. \quad (1.4)$$

Сформулированная выше задача исследовалась многими авторами (см. монографии [1–3] и, в частности, библиографию в них). Один из методов ее решения, когда *a priori* задано

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проекты 09-01-00378 и 07-01-00008), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5443.2008.1) и программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

ограниченное и замкнутое множество  $Q$  такое, что  $v(t) \in Q$  при почти всех  $t \in T$ , а критерий “близости”  $I$  имеет вид

$$I = I_0(x(\cdot), y(\cdot)) = \sup_{t \in T} \|x(t; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) - y(t)\|, \quad (1.5)$$

основан на принципе экстремального сдвига и вытекает из результатов работ [1, 2]. Действительно, пусть наряду с множеством  $Q$  задано ограниченное и замкнутое множество  $P \subset \mathbb{R}^r$  такое, что  $P \subset Q$ . Суть метода экстремального сдвига применительно к рассматриваемому случаю состоит в выборе управления  $u$  в следующем виде:

$$u(t) = u(\tau_k, \xi_k^h) = \arg \max \{(\xi_k^h - y(\tau_k), Bu) : u \in P\} \text{ при } t \in [\tau_k, \tau_{k+1}).$$

Тогда, как следует из [1, 2],  $\forall \varepsilon > 0 \exists h_1 > 0$  и  $\delta_1 > 0$  такие, что если  $h \in (0, h_1)$ ,  $\delta \in (0, \delta_1)$ , то справедливо неравенство  $\sup_{t \in T} \|x(t; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) - y(t)\| \leq \varepsilon$  (для любой помехи  $v(t) \in Q$ ). В случае, когда критерий качества имеет вид  $I = I_0 + I_1$ , где

$$I_1(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_{t_0}^{\vartheta} \|\dot{x}(t; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) - \dot{y}(t)\|^2 dt,$$

один из методов решения описанной задачи при наличии множеств  $P$  и  $Q$  был предложен в работе [4]. В случае, когда функции  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$  стеснены интегральными ограничениями, аналогичная задача решалась в [5]. В данной статье, продолжающей работу [5] и развивающей методику работ [6–8], в случае, когда критерий качества  $I$  имеет вид  $I = I_0 + I_1$ , указывается алгоритм формирования управления  $u(t)$ , основанный на принципе вспомогательных моделей. При этом по ходу реализации алгоритма сначала строится “оценка”  $v^h(\cdot)$  входа  $v(\cdot)$ , а затем с ее помощью формируется управление  $u(\cdot) = u^h(\cdot)$  в системе (1.1), позволяющее компенсировать воздействие  $v(\cdot)$ . Обратим внимание на тот факт, что оценка  $v^h(\cdot)$  строится “в реальном времени”, т. е. в каждый момент времени  $t$  величина  $v^h(t)$  вычисляется лишь на основе измерений, полученных до этого момента. Заметим также, что процесс построения оценки  $v^h(\cdot)$  возмущения  $v(\cdot)$ , а также стабилизирующего управления  $u^h(\cdot)$  является устойчивым по отношению к погрешности измерений  $h$  и временному шагу  $\delta$ . Заметим, что условие (1.2) позволяет сконструировать более простой (по сравнению с [5]) алгоритм решения рассматриваемой задачи.

## 2. Алгоритм решения

Ниже предполагается липшицевость функции  $f(\cdot, \cdot)$  по аргументам  $(t, x)$ , т. е. предполагается существование числа  $L > 0$  такого, что для любых  $(t'', x'') \in Z$  и  $(t', x') \in Z$

$$\|f(t'', x'') - f(t', x')\| \leq L \{\|x'' - x'\| + |t'' - t'|\}. \quad (2.1)$$

Для решения рассматриваемой задачи выбираются функция  $\alpha(h): \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, 1)$ ,  $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}: r > 0\}$ , и семейство равномерных разбиений  $\Delta_h$  временного промежутка  $T$  (с шагами  $\delta(h)$ )

$$\Delta_h = \{\tau_{h,k}\}_{k=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = t_0, \quad \tau_{h,m_h} = \vartheta, \quad \tau_{h,k+1} = \tau_{h,k} + \delta(h),$$

со свойствами

$$\alpha(h) \rightarrow 0, \quad \delta(h)\alpha^{-2}(h) \leq 1, \quad h\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

До начала работы алгоритма фиксируются величины  $h$  и  $\alpha = \alpha(h)$ , а также разбиение  $\Delta_h$ . Затем вводится вспомогательная система, называемая моделью. В данной статье модель описывается уравнением вида

$$\dot{z}^h(t) = f(\tau_{h,k}, \xi_k^h) + B(v^h(t) - \tilde{v}^h(t)), \quad t \in \delta_{h,k} = [\tau_{h,k}, \tau_{h,k+1}), \quad k \in [0 : m_h - 1]. \quad (2.3)$$

Здесь  $v^h(\cdot)$  и  $\tilde{v}^h(\cdot)$  — вспомогательные управления. Начальное состояние модели задаем следующим образом:  $z^h(t_0) = x_0$ . Заметим, что модель является линейной системой, в то время как реальная система нелинейна по фазовым переменным. Для простоты выкладок считаем начальное состояние  $x_0$  известным.

Работа алгоритма разбивается на  $m_h - 1$  однотипных шагов. На  $k$ -м шаге ( $k = 0, \dots, m_h - 1$ ), осуществляемом на временном отрезке  $\delta_{h,k}$ , выполняются следующие действия. Сначала задается функция

$$w_k^h(t) = -\frac{1}{\alpha(h)} B^\top (z^h(t) - \xi_k^h), \quad t \in \delta_{h,k}. \quad (2.4)$$

Затем в течение промежутка  $\delta_{h,k}$  на вход модели подаются управления

$$v^h(t) = w_k^h(t), \quad \tilde{v}^h(t) = w_{k-1}^h(t - \delta),$$

а на вход реальной системы (системы (1.1)) — управление

$$u(t) = u^h(t) = w_{k-1}^h(t - \delta).$$

Здесь и ниже символ  $^\top$  означает транспонирование. При  $k = 0$  полагаем  $w_{-1}^h(t) = 0$ . Работа алгоритма заканчивается в момент времени  $\vartheta$ .

Ниже считаем, что матрица  $BB^\top$  является положительно определенной. Это условие позволяет использовать некоторые элементы техники работы [9] для доказательства нижеприведенной теоремы.

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие согласования параметров (2.2). Тогда при  $h \rightarrow 0$  имеют место сходимости

$$x^h(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u^h(\cdot), v^h(\cdot)) \rightarrow y(\cdot) \text{ в } C(T; \mathbb{R}^n), \quad \dot{x}^h(\cdot) \rightarrow \dot{y}(\cdot) \text{ в } L_2(T; \mathbb{R}^n).$$

Доказательство теоремы опирается на вспомогательные утверждения, которые приведены ниже.

**Лемма 1.** Пусть  $h\alpha^{-1}(h) \leq 1$ ,  $\delta(h)\alpha^{-2}(h) \leq 1$  при всех  $h \in (0, 1)$ . Тогда найдутся положительные числа  $M_1$  и  $M_2$  такие, что

$$\|z^h(t) - x^h(t)\| \leq M_1 (h + \delta(h) + \alpha(h)), \quad \|v^h(t)\| \leq M_2, \quad t \in T.$$

**Доказательство.** В основе доказательства лежит процедура стабилизации функционала типа Ляпунова

$$\varepsilon^h(t) = \frac{1}{2} \|z^h(t) - x^h(t)\|^2 + \alpha \int_{t_0}^t \{\|v^h(s)\|^2 - \|v_*(s)\|^2\} ds, \quad t \in T, \quad (2.5)$$

где  $v_*(t)$  — проекция входа  $v(t)$  на ортогональное дополнение к ядру матрицы  $B$ . Рассмотрим изменение разности  $z^h(t) - x^h(t)$ . Учитывая правило формирования управления в модели (2.4), на интервале  $\delta_{h,k}$  имеем при п. в.  $t \in \delta_{h,k}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [z^h(t) - x^h(t)] &= f(\tau_{h,k}, \xi_k^h) - f(t, x^h(t)) \\ &+ B(w_k^h(t) - w_{k-1}^h(t - \delta)) - B(v_*(t) - w_{k-1}^h(t - \delta)) \\ &= f(\tau_{h,k}, \xi_k^h) - f(t, x^h(t)) - Bv_*(t) - \frac{BB^\top}{\alpha} (z^h(t) - x^h(t)) - \frac{BB^\top}{\alpha} (x^h(t) - \xi_k^h). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}[z^h(t) - x^h(t)] = \frac{-BB^\top}{\alpha}[z^h(t) - x^h(t)] + \Psi^h(t), \quad \text{при п. в. } t \in \delta_{h,k}, \quad (2.6)$$

где

$$\Psi^h(t) = f(\tau_{h,k}, \xi_k^h) - f(t, x^h(t)) - Bv_*(t) - \frac{BB^\top}{\alpha}(x^h(t) - \xi_k^h), \quad t \in \delta_{h,k}.$$

В силу липшицевости функции  $f(\cdot, \cdot)$  (см.(2.1)) можно указать число  $M > 0$  такое, что

$$\|f(\tau_{h,k}, \xi_k^h) - f(t, x^h(t))\| \leq M(\delta + h), \quad t \in \delta_{h,k}. \quad (2.7)$$

Внешнее возмущение удовлетворяет включению (1.2), поэтому при п. в.  $t \in T$  справедлива оценка

$$\|\Psi^h(t)\| \leq M(\delta + h) + C_1 + \frac{\|B\|^2}{\alpha}[h + \rho_h(t)], \quad (2.8)$$

где  $\|B\|$  — евклидова норма матрицы  $B$ ,

$$\rho_h(t) = \max \left\{ \max_{0 \leq i \leq k-1} \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} \|\dot{x}^h(s)\| ds, \int_{\tau_{h,k}}^t \|\dot{x}^h(s)\| ds \right\}, \quad t \in \delta_{h,k}.$$

Пусть  $\lambda$  — наименьшее характеристическое число матрицы  $BB^\top$ . Так как матрица является положительно определенной, то все характеристические числа действительные положительные. Таким образом, из (2.6) получаем при  $t \in T$

$$\|z^h(t) - x^h(t)\| \leq \int_{t_0}^t C_* \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}(t-s)\right) \|\Psi^h(s)\| ds. \quad (2.9)$$

Поскольку

$$\int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}(t-s)\right) ds = \frac{\alpha}{\lambda} \left(1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}(t-t_0)\right)\right) \leq C_2\alpha,$$

то из неравенств (2.8) и (2.9) вытекает оценка

$$\|z^h(t) - x^h(t)\| \leq C_3(\alpha + h + \rho_h(t)), \quad t \in \delta_{h,k}. \quad (2.10)$$

Справедливо представление

$$z^h(t) - x^h(t) = (z^h(t) - \xi_k^h) + (\xi_k^h - x^h(\tau_{h,k})) - \int_{\tau_{h,k}}^t \dot{x}(s) ds, \quad t \in \delta_{h,k}.$$

В таком случае в силу (2.4), (2.10) при  $t \in \delta_{h,k}$  верно неравенство

$$\|v^h(t)\| = \frac{\|B^\top\|}{\alpha} \|z^h(t) - \xi_k^h\| \leq \frac{C_4}{\alpha}(\alpha + h + \rho_h(t)).$$

Следовательно, при  $t \in T$

$$\|u^h(t)\|^2 \leq C_5 \left(1 + \frac{h^2}{\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha^2} \int_{t_0}^t \|\dot{x}^h(s)\|^2 ds\right). \quad (2.11)$$

Далее в силу неравенства  $h\alpha^{-1}(h) \leq 1$ ,  $h \in (0, 1)$ , а также включения (1.2) имеем

$$\begin{aligned} \|\dot{x}^h(t)\|^2 &\leq C \left( 1 + (t - t_0) \int_{t_0}^t \|\dot{x}^h(s)\|^2 ds \right) + C_6 + C_7 \left( 1 + \frac{h^2}{\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha^2} \int_{t_0}^t \|\dot{x}^h(s)\|^2 ds \right) \\ &\leq C_8 + C_9 \left( 1 + \frac{\delta}{\alpha^2} \right) \int_{t_0}^t \|\dot{x}^h(s)\|^2 ds, \quad \text{при п. в. } t \in T. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая неравенство  $\delta\alpha^{-2}(h) \leq 1$ ,  $h \in (0, 1)$ , а также лемму Гронуолла [10], получаем: семейство функций  $\{\dot{x}^h(\cdot)\}$ ,  $h \in (0, 1)$ , равномерно ограничено:

$$\|\dot{x}^h(t)\|^2 \leq C_8 \exp \left( C_9 \left( 1 + \frac{\delta}{\alpha^2} \right) (t - t_0) \right) \leq C_9, \quad \text{при п. в. } t \in T. \quad (2.12)$$

Из (2.10)–(2.12) следует утверждение леммы.

**Лемма 2.** Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда найдется положительное число  $M_3$  такое, что равномерно по всем  $t \in T$ ,  $h \in (0, 1)$  справедливы неравенства

$$\int_{t_0}^t \|v^h(s)\|^2 ds - \int_{t_0}^t \|v_*(s)\|^2 ds \leq M_3 \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)}.$$

**Доказательство.** Рассмотрим изменение величины  $\dot{\varepsilon}^h(t)$  на промежутке  $T$ . Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^h(t) &= \left( z^h(t) - x^h(t), f(\tau_{h,k}, \xi_k^h) - f(t, x^h(t)) \right) + \left( \xi_k^h - x^h(t), B(v^h(t) - v_*(t)) \right) \\ &+ \left[ (z^h(t) - \xi_k^h, Bv^h(t)) + \alpha \|v^h(t)\|^2 - (z^h(t) - \xi_k^h, Bv_*(t)) - \alpha \|v_*(t)\|^2 \right], \quad t \in \delta_{h,k}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

По определению  $v^h(t) = w_k^h(t)$ , где

$$w_k^h(t) = \arg \min \left\{ (z^h(t) - \xi_k^h, Bw) + \alpha \|w\|^2 \mid w \in \mathbb{R}^r \right\}, \quad t \in \delta_{h,k}.$$

Поэтому величина в квадратных скобках равенства (2.13) неположительна. Таким образом, в силу (1.3), (2.7), (2.12) и леммы 1 для п. в.  $t \in T$  получаем

$$\dot{\varepsilon}^h(t) \leq M(h + \delta) \|z^h(t) - x^h(t)\| + \|B\| \|v^h(t) - v_*(t)\| \|\xi_k^h - x^h(t)\| \leq C_7 (h + \delta(h))$$

и, следовательно,

$$\sup_{t \in T} \varepsilon^h(t) \leq M(h + \delta(h)). \quad (2.14)$$

Из (2.14) вытекает справедливость леммы.

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия согласования параметров (2.2). Тогда имеет место сходимость

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|v^h(\cdot) - v_*(\cdot)\|_{L_2(T, \mathbb{R}^r)} = 0.$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную последовательность чисел  $\{h_n\}$ ,  $h_n \rightarrow 0+$  при  $n \rightarrow \infty$ , для которой выполняется условие

$$\alpha(h_n) \rightarrow 0, \quad \delta(h_n)\alpha^{-2}(h_n) \leq 1, \quad h_n\alpha^{-1}(h_n) \rightarrow 0.$$

Пусть последовательности функция  $\{v^{h_n}(\cdot)\}$ ,  $\{x^{h_n}(\cdot)\}$ ,  $\{z^{h_n}(\cdot)\}$  определены согласно описанным выше правилам, т. е. функции  $x^{h_n}(\cdot)$  и  $z^{h_n}(\cdot)$  являются решениями уравнений

$$\dot{x}^{h_n}(t) = f(t, x^{h_n}(t)) + B(v^{h_n}(t) - v_*(t)), \quad t \in T,$$

и

$$\dot{z}^{h_n}(t) = f(\tau_{h_n,k}, \xi_k^{h_n}) + B(v^{h_n}(t) - u^{h_n}(t)), \quad t \in \delta_{h_n,k}, \quad k \in [0 : m_{h_n} - 1],$$

соответственно. Здесь

$$u^{h_n}(t) = v^{h_n}(t - \delta(h_n)) \quad \text{при } t \in T. \quad (2.15)$$

Поскольку последовательность  $\{v^{h_n}(\cdot)\}$  ограничена в пространстве  $L_2(T, \mathbb{R}^r)$ , то найдется подпоследовательность  $\{v^{h_{n_l}}(\cdot)\}$  этой последовательности, которая слабо (в  $L_2(T, \mathbb{R}^r)$ ) сходится к некоторой функции  $\tilde{w}(\cdot)$ . В таком случае последовательность  $\{u^{h_{n_l}}(\cdot)\}$  также слабо в  $L_2(T, \mathbb{R}^r)$  сходится к функции  $\tilde{w}(\cdot)$ . Последовательность движений  $\{x^{h_{n_l}}(\cdot)\}$  сходится к функции  $\tilde{x}(\cdot)$  — решению уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}(t) &= f(t, \tilde{x}(t)) + B(v(t) - \tilde{w}(t)), \quad t \in T, \\ \tilde{x}(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

В свою очередь, последовательность движений  $\{z^{h_{n_l}}(\cdot)\}$  модели (2.3) сходится к функции  $\tilde{z}(\cdot)$  — решению уравнения

$$\dot{\tilde{z}}(t) = f(t, x(t)), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0.$$

Причем обе эти сходимости являются равномерными на промежутке  $T$ . Из леммы 1 следует равенство  $\tilde{z}(t) = \tilde{x}(t)$ ,  $t \in T$ . Поэтому

$$Bv_*(t) = B\tilde{w}(t) \quad \text{при п. в. } t \in T.$$

Далее, учитывая правило определения функции  $v_*(\cdot)$ , получаем

$$\|v_*(t)\| \leq \|\tilde{w}(t)\| \quad \text{при п. в. } t \in T.$$

В таком случае

$$\|v_*(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)} \leq \|\tilde{w}(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}.$$

В силу леммы 2 и известного свойства слабого предела имеем

$$\|\tilde{w}(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left\| v^{h_n}(\cdot) \right\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)} \leq \|v_*(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}.$$

Последние два неравенства означают

$$\|v^{h_n}(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)} \rightarrow \|v_*(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)} \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.16)$$

Из слабой сходимости  $\{v^{h_n}(\cdot)\}$  к функции  $v_*(\cdot)$  и сходимости норм (2.16) вытекает сильная сходимость  $\{v^{h_n}(\cdot)\}$  к той же функции  $v_*(\cdot)$  (в метрике пространстве  $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ ). Лемма 3 доказана.

Утверждение теоремы 1 является следствием леммы 3 и равенства (2.15).

При реализации алгоритма на вычислительной машине в качестве управлений  $v^h(\cdot)$ ,  $\tilde{v}^h(\cdot)$  в модели и управления  $u^h(\cdot)$  в системе (1.1) удобнее брать кусочно-постоянные функции

$$v^h(t) = w_k^h(t), \quad \tilde{v}^h(t) = u^h(t) = w_{k-1}^h(t - \delta), \quad t \in \delta_{h,k},$$

где

$$w_k^h(t) = w_k^{h,\delta} = -\frac{B^\top}{\alpha(h)} \left( z^h(\tau_{h,k}) - \xi_k^h \right), \quad t \in \delta_{h,k}. \quad (2.17)$$

Имеет место

**Теорема 2.** Утверждение теоремы 1 остается справедливым, если в описанном выше алгоритме функции  $w_k^h(t)$  на отрезках  $\delta_{h,k}$  находятся по формулам (2.17).

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1. В его основе лежит приведенная ниже

**Лемма 4.** Пусть выполнены условия (2.2), тогда найдутся числа  $M_1, M_2 > 0$ , такие что для всех  $t \in T$

$$\begin{aligned} \|z^h(t) - x^h(t)\| &\leq M_1 (h + \alpha(h) + \delta(h)), \\ \int_{t_0}^t \|v^h(s)\|^2 ds - \int_{t_0}^t \|v_*(s)\|^2 ds &\leq M_2 \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Повторяя соответствующие рассуждения из доказательства леммы 1, получаем оценку

$$\|z^h(t) - x^h(t)\| \leq \int_{t_0}^t C_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{\alpha}(t-s)\right) \|\Psi_{(1)}^h(s)\| ds, \quad (2.18)$$

где  $\alpha = \alpha(h)$ ;

$$\Psi_{(1)}^h(s) = \Psi^h(s) + \frac{BB^\top}{\alpha} (z^h(s) - z^h(\tau_{h,k})), \quad s \in \delta_{h,k} = [\tau_{h,k}, \tau_{h,k+1}).$$

Введем функцию

$$\mu_h(t) = \max_{t_0 \leq \tau \leq t} \|z^h(\tau) - x^h(\tau)\|.$$

Тогда (см. (2.17)) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{h,k}}^{\tau_{h,k+1}} \|z^h(s)\| ds &\leq \delta \|f(\tau_{h,k}, \xi_k^h)\| + \delta \frac{\|B\|^2}{\alpha} \left( \|z^h(\tau_{h,k}) - \xi_k^h\| + \|z^h(\tau_{h,k-1}) - \xi_{k-1}^h\| \right) \\ &\leq C_1 \left( \delta + \frac{\delta}{\alpha} (\mu_h(\tau_{h,k}) + h) \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

В силу (2.8) из (2.19) получаем при  $t \in \delta_{h,k}$

$$\|\Psi_{(1)}^h(t)\| \leq C_2 + \frac{C_3}{\alpha} \left( h + \delta + \mu_h(\tau_{h,k}) \frac{\delta}{\alpha} + \rho_h(t) \right).$$

Из этого неравенства и (2.18) выводим

$$\mu_h(t) \leq C_4 \left( h + \delta + \alpha + \mu_h(\tau_{h,k}) \frac{\delta}{\alpha} + \rho_h(t) \right), \quad t \in \delta_{h,k}.$$

Следовательно, при малых  $h$  (например, таких, что  $C_4\delta/\alpha < 1$ ) имеем

$$\mu_h(\tau_{h,k}) \leq C_5 \left( h + \delta + \alpha + \max_{0 \leq i \leq k-1} \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} \|\dot{x}^h(s)\| ds \right). \quad (2.20)$$

Кроме того, ввиду (2.17) справедливо неравенство

$$\|v^h(t)\| = \|v^h(\tau_{h,k})\| \leq \frac{C_6}{\alpha} (h + \mu_h(\tau_{h,k})), \quad t \in \delta_{h,k}.$$

Следовательно, из (2.20) при  $t \in \delta_{h,k}$  вытекает оценка

$$\|v^h(t)\|^2 \leq \frac{C_7}{\alpha^2} \left( h^2 + \delta^2 + \alpha^2 + \delta \max_{0 \leq i \leq k-1} \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} \|\dot{x}^h(s)\|^2 ds \right). \quad (2.21)$$

Из (2.21) и липшицевости функции  $f(\cdot, \cdot)$  выводим:

$$\begin{aligned} \|\dot{x}^h(t)\|^2 &\leq C \left( 1 + (t - t_0) \int_{t_0}^t \|\dot{x}^h(s)\|^2 ds \right) + \|B\|^2 (\|v_*(t)\|^2 + \|v^h(t)\|^2) \\ &\leq C_8 + C_9 \left( 1 + \frac{\delta}{\alpha^2} \right) \int_{t_0}^t \|\dot{x}^h(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что семейство функций  $\{\dot{x}^h(\cdot)\}$ ,  $h \in (0, 1)$ , равномерно ограничено:

$$\|\dot{x}^h(t)\| \leq C_{10} \text{ при п. в. } t \in T.$$

Далее, из (2.19) и (2.20) получаем

$$\int_{\tau_{h,k}}^{\tau_{h,k+1}} \|\dot{z}^h(s)\| ds \leq C_{11} \left( 1 + \frac{h}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \right) \delta. \quad (2.22)$$

В таком случае, в силу (2.20) и (2.22) при  $t \in \delta_{h,k}$  имеем

$$\mu_h(t) \leq \mu_h(\tau_{h,k}) + \int_{\tau_{h,k}}^{\tau_{h,k+1}} \|\dot{z}^h(s)\| ds + C_{10}\delta \leq C_{12} (h + \delta + \alpha) + C_{13} \left( 1 + \frac{h}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} \right) \delta.$$

Отсюда, считая  $\delta(h)\alpha^{-1}(h) \leq 1$ ,  $h\alpha^{-1}(h) \leq 1$  при  $h \in (0, 1)$ , выводим

$$\mu_h(t) \leq C_{14} (\alpha + h + \delta), \quad t \in T. \quad (2.23)$$

В свою очередь из (2.21) получаем

$$\|v^h(t)\| \leq C_{15}, \quad t \in T. \quad (2.24)$$

Теперь оценим изменение величины  $\varepsilon(t)$ . Имеем при п. в.  $t \in \delta_{h,k}$

$$\begin{aligned} \varepsilon^h(t) &= \left( z^h(t) - x^h(t), f(\tau_{h,k}, \xi_k^h) - f(t, x^h(t)) \right) + \left( \xi_k^h - x^h(t) + \int_{\tau_{h,k}}^t \dot{z}^h(s) ds, B(v^h(t) - v_*(t)) \right) \\ &+ \left[ \left( z^h(\tau_{h,k}) - \xi_k^h, Bv^h(t) \right) + \alpha \|v^h(t)\|^2 - \left( z^h(\tau_{h,k}) - \xi_k^h, Bv_*(t) \right) - \alpha \|v_*(t)\|^2 \right]. \end{aligned}$$

Из (2.17) следует, что величина в квадратных скобках неположительна. Таким образом, учитывая (1.2), (1.3), (2.7), (2.22)–(2.24), получаем

$$\varepsilon^h(t) \leq (C_{16}\mu_h(t) + C_{17})(h + \delta) \leq C_{18}(h + \delta) \quad \text{при п. в. } t \in T.$$

Значит,

$$\sup_{t \in T} \varepsilon^h(t) \leq C_{19}(h + \delta). \quad (2.25)$$

Справедливость леммы следует из (2.23), (2.25).

### 3. Заключение

Для нелинейной системы исследована задача отслеживания заданной траектории. Для ее решения указаны два алгоритма, которые основаны на методе позиционно-управляемых вспомогательных моделей. Алгоритмы устойчивы к информационным помехам и погрешностям вычислений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин Н.Н.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 1989. 448 с.
4. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Обратные задачи динамики и управляемые модели // Механика и науч.-техн. прогресс. Т. 1: Общая и прикладная механика. М.: Наука, 1987. С. 196–211.
5. **Максимов В.И.** О компенсации возмущений в нелинейных управляемых системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 62–68.
6. **Максимов В.И.** Позиционное моделирование неограниченных управлений для нелинейных систем с диссипацией // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4. С. 22–30.
7. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
8. **Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solution. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
9. **Maksimov V., Pandolfi L.** On a dynamical identification of controls in nonlinear time-lag systems // IMA J. Math. Contr. Inform. 2002. Vol. 19, no. 1 & 2. P. 173–184.
10. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.

Максимов Вячеслав Иванович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. отделом  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 1.04.2009

УДК 519.862.5

О НЕТРАДИЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ ПОРТФЕЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

О. И. Никонов

В статье рассматриваются некоторые приложения теории портфельных инвестиций, восходящей к работам Г. Марковица и Дж. Тобина. Во-первых, рассматриваются проблемы динамического управления инвестиционным портфелем в условиях, когда динамика усредненных характеристик доходностей активов описывается не стохастическими дифференциальными уравнениями, а детерминированными дифференциальными включениями. Такое описание неопределенности позволяет применить методы теории гарантированного управления и теории позиционных дифференциальных игр. Во-вторых, показывается, как теория, развитая первоначально для портфелей рискованных финансовых инструментов (акций), может при должной модификации использоваться и при исследовании объектов иной природы. В частности рассматриваются задачи построения эффективного портфеля проектов и эффективных портфелей контрактов и клиентов предприятия.

Ключевые слова: портфельные инвестиции, гарантированное управление, дифференциальные включения, эффективный портфель проектов и контрагентов предприятия.

O. I. Nikonov. On nontraditional problems of portfolio management.

Some applications of portfolio investment theory, which goes back to papers by H. Markowitz and J. Tobin, are considered. First, problems of the dynamic control of an investment portfolio are considered in the case when the behavior of the average characteristics of returns on assets is described not by stochastic differential equations but by deterministic differential inclusions. Such a description of the uncertainty allows one to apply methods of the theory of guaranteed control and the theory of positional differential games. Second, it is shown how the theory developed initially for portfolios of risk financial instruments (shares) can be used, after an appropriate modification, for studying objects of different nature as well. In particular, problems of constructing an effective project portfolio and effective portfolios of contractors and clients of a firm are considered.

Keywords: portfolio investments, guaranteed control, differential inclusions, effective project and contractor portfolio of a firm.

## Введение

В настоящей работе рассматриваются два направления развития теории портфельных инвестиций, восходящей к работе Г. Марковица [1] и разработанной первоначально для статических задач формирования портфелей финансовых инструментов рынка ценных бумаг. Хорошо известная постановка классической задачи о формировании портфеля предполагает, что инвестор имеет возможность распределить свой капитал между  $N$  рискованными активами, доходность каждого из которых может трактоваться как случайная величина в математическом смысле данного термина. Портфель ассоциируется с вектором  $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)^T$  долей капитала, которым располагает инвестор,  $\sum_{i=1}^N y_i = 1$ . Доходность портфеля  $r_y = \sum_{i=1}^N y_i r_i$  — также случайная величина, ее ожидаемое значение (математическое ожидание)  $\mu = E\left[\sum_{i=1}^N y_i r_i\right]$  инвестору надлежит максимизировать. Риск портфеля определяется как среднее квадратичное (стандартное) отклонение случайной величины  $r_y$ ,  $\sigma = \sqrt{D\left[\sum_{i=1}^N y_i r_i\right]}$ . После преобразований для ожидаемого значения доходности портфеля и риска получаем соответственно  $\mu = x^T y$  и  $\sigma^2(y) = y^T V y$ , где  $x = (x_1, \dots, x_N)^T$  — вектор ожидаемых доходностей отдельных активов;  $V$  — матрица ковариаций. В простейшей форме задача имеет вид

$$y^T V y \rightarrow \min_y$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00223а) и Российского гуманитарного научного фонда (проект 08-02-00315а).

$$e^T y = 1,$$

$$x^T y = \mu.$$

Здесь  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ ,  $T$  означает транспонирование. В последнем равенстве  $\mu$  — параметр, множеству всевозможных значений параметра соответствует кривая, описываемая для данного случая явным уравнением. Часть этой кривой отвечает так называемым эффективным или неуплачиваемым портфелям, для которых не существует иных портфелей, более предпочтительных в смысле критериев риска и доходности. Явным образом находятся и сами портфели. Добавление детерминированной безрисковой составляющей  $r_0$  только упрощает задачу. При дополнительных ограничениях на доли вложений, например в виде неравенств  $y_i^{\min} \leq y_i \leq y_i^{\max}$ , эффективные или, по-иному, оптимальные по Парето портфели находятся с помощью численных процедур.

Со времени появления первой работы Г. Марковица развитие теории портфельных инвестиций шло в нескольких направлениях. Укажем здесь два из них. Первое направление связано с работой Дж. Тобина [2] и развитием модели ценообразования на рынке капитала (Capital Asset Pricing Model). Другое направление — динамические постановки задачи. Здесь отметим работы Р. Мертона [3] и Дж. Моссина [4], относящиеся, соответственно, к моделированию непрерывных и многошаговых стохастических процессов. Полученные в указанных работах результаты, ставшие классическими, послужили основой многочисленных исследований.

В настоящей статье рассматриваются проблемы динамического управления инвестиционным портфелем в условиях, когда динамика усредненных характеристик доходностей активов описывается не стохастическими дифференциальными уравнениями, а детерминированными дифференциальными включениями. Такое описание неопределенности позволяет применить методы теории гарантированного управления [5] и теории позиционных дифференциальных игр [6].

Еще одно направление, обсуждаемое в настоящей работе, соответствует применению портфельной теории к объектам, отличным по своей природе от ценных бумаг. Здесь нельзя не упомянуть работы, относящиеся к аренде нефтяных производств и формированию энергетической стратегии Европейского Союза [7]. Ряд работ автора настоящей статьи и его коллег посвящен микроэкономическим аспектам приложений теории портфельных инвестиций, укажем, в частности, статью [8]. В работе рассматривается задача построения эффективного портфеля проектов и эффективных портфелей контрактов и клиентов предприятия. Указанные разделы отражают участие автора в решении реальных прикладных задач.

## 1. Динамическая реструктуризация инвестиционного портфеля на основе методов математической теории управления

В рамках указанного в заголовке направления развивался подход, основанный на сочетании теоретико-вероятностных идей и методов с применением методологии и результатов математической теории гарантированного управления.

Опишем постановку одной из задач. В рамках данной постановки предполагается, что эволюция стохастических рыночных характеристик, определяющих множество эффективных портфелей, описывается дифференциальными включениями. Цель управления состоит в поддержании эффективности портфеля в смысле критериев риск-доходность на заданном промежутке времени. В случае, когда названные характеристики устойчивы (постоянны), нет необходимости менять структуру портфеля. В условиях неустойчивого рынка следует осуществлять постоянную реструктуризацию портфеля для обеспечения его эффективности.

Инвестиционный портфель мы ассоциируем с  $N + 1$ -мерным вектором  $\hat{y} = (y_0, y)^T$ ,  $i$ -я компонента которого соответствует доле капитала, вкладываемой инвестором в  $i$ -й актив. Также как в описанной во введении классической постановке, доступные рискованные активы характеризуются своими доходностями  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , трактуемыми как случайные величины с

математическими ожиданиями  $x_i$  и среднеквадратичными отклонениями  $\sigma_i$ . Первая компонента  $r_0 = x_0$  представляет собой детерминированную доходность безрисковых вложений.

Обозначим через  $\mu(x, \hat{y}) = \sum_{i=0}^N x_i y_i$  ожидаемую доходность портфеля, при этом для его риска сохранится прежнее представление  $\sigma(y) = \sqrt{y^T V y}$ . Матрица ковариаций  $V$  в рассматриваемой модели предполагается постоянной.

В этом случае решение двухкритериальной задачи  $\mu(x, \hat{y}) \rightarrow \max_y$ , и  $\sigma(y) \rightarrow \min_y$ ,  $\sum_{i=0}^N y_i = 1$ , понимаемое как множество Парето оптимальных векторов, может быть построено явным образом.

Следуя Р. Мертону [3], мы предполагаем, что величины  $x_i$  меняются во времени (см. также [4, 9]). Однако в отличие от постановок классической финансовой математики предполагается, что динамика указанных величин описывается не стохастическими дифференциальными уравнениями, а дифференциальным включением (уравнением с неопределенной правой частью):

$$\frac{dx}{dt} \in Q(t, x), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.1)$$

где  $Q(t, x)$  — многозначная функция, описывающая неопределенность в изменении данных параметров.

В наиболее простом случае система (1.1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} \in A(t)x + Q(t), \quad (1.2)$$

где  $Q(t)$  — множество, отвечающее неопределенности в системе;  $A(t)$  — заданная непрерывная матричная функция. Результаты формулируются для этого случая. Многозначное отображение  $Q(t)$  предполагается непрерывным по  $t$  с выпуклыми компактными значениями.

Предполагается также, что интенсивность (скорость) реструктуризации портфеля  $d\hat{y}/dt = u$  также ограничена в каждый момент времени:

$$\frac{d\hat{y}}{dt} = u \in P(t). \quad (1.3)$$

Множество  $P(t)$  определяет возможности инвестора по реструктуризации портфеля. Вектор  $u$  трактуется как управляющее воздействие, подчиненное инвестору. Одна из возможных постановок задачи предполагает, что в начальный момент времени портфель инвестора является эффективным в смысле Марковица — Тобина. Цель управления в этом случае — обеспечить дальнейшую эффективность портфеля в условиях переменных и неизвестных заранее ожидаемых доходностей активов.

Учитывая равенство  $y_0 = 1 - \sum_{i=1}^N y_i$ , соотношение (1.3) можем заменить условием

$$\frac{dy}{dt} = u, \quad u \in P(t), \quad (1.4)$$

где за новым управляющим воздействием и ограничениями на него сохранены прежние обозначения.

Накладывая некоторые технические условия на параметры систем (1.2) и (1.4) и формализуя стратегию управления инвестиционным портфелем как функцию  $U = U(t, x, y) \subseteq P(t)$ , приходим к замкнутой системе соотношений (1.2) и

$$\frac{dy}{dt} \in U(t, x, y), \quad y(t_0) = y^0, \quad (1.5)$$

описывающей процесс реструктуризации портфеля в условиях изменяющихся характеристик  $x_i$ .

А именно, допустимая стратегия управления определяется как многозначное отображение  $U = U(t, x, y)$ , измеримое по  $t$ , полунепрерывное сверху по  $x, y$  с выпуклыми компактными значениями  $U(t, x, y) \subseteq P(t)$ .

Для допустимой стратегии система включений (1.2) и (1.5) имеет абсолютно непрерывное решение  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq \Theta$  для любых начальных условий. Это решение в общем случае не единственно, т. е. стратегии порождает пучок  $X(U, x^0, y^0)$  траекторий системы. Указанным траекториям, в свою очередь, соответствуют изменяющиеся во времени характеристики риска и доходности портфеля:  $\mu[t] = y_0(t)r_0 + (y(t), x(t))$ ,  $\sigma[t] = (y^T(t)Vy(t))^{1/2}$ .

В рамках описанной формализации, отвечающей теории гарантированного управления, может быть рассмотрено семейство задач динамической реструктуризации инвестиционного портфеля. В частности, предполагая, что в начальный момент времени  $t = t_0$  портфель  $y^0$  является эффективным для заданного начального значения  $x^0$ , можно поставить задачу о построении допустимой стратегии  $U^e$ , поддерживающей свойство эффективности и обеспечивающей заданный уровень доходности  $\mu[t] \geq \mu^0 = \mu[t_0]$  либо заданный уровень риска  $\sigma[t] \geq \sigma^0 = \sigma[t_0]$  для любой траектории  $x(\cdot) \in X(U^e, x^0, y^0)$ . Если рынок стабилен, т. е. параметры  $x_i$  не меняются ( $Q(t, x) \equiv \{0\}$ ), то стратегия тривиальна  $U \equiv 0$ , портфель в реструктуризации не нуждается.

В общем случае условия существования таких, обеспечивающих эффективность портфеля, стратегий могут быть выражены через векторные функции:

$$\Psi_1(x, \nu) = \frac{\sigma^0}{\|\tilde{x}\|_{V^{-1}}} \left( V^{-1}\nu - \frac{V^{-1}\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_{V^{-1}}} \left( \nu, \frac{V^{-1}\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_{V^{-1}}} \right) \right),$$

$$\Psi_2(x, \nu) = \frac{\mu^0 - r^0}{\|\tilde{x}\|_{V^{-1}}} \left( V^{-1}\nu - \frac{V^{-1}\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_{V^{-1}}} \left( \nu, \frac{V^{-1}\tilde{x}}{\|\tilde{x}\|_{V^{-1}}} \right) \right),$$

где  $\tilde{x} = x - r_0e$ ,  $\|\tilde{x}\|_{V^{-1}} = (\tilde{x}, V^{-1}\tilde{x})^{1/2}$ ,  $e = (1, \dots, 1)^T$ .

По схеме работы [10] доказываемся, что при некоторых достаточно естественных предположениях условие  $\Psi_1(x(t), x'(t)) \in P(t)$  гарантирует эффективность портфеля и неравенство  $\sigma[t] \leq \sigma^0$ , а условие  $\Psi_2(x(t), x'(t)) \in P(t)$  обеспечивает аналогичное свойство для доходности. Здесь  $x(t)$  — произвольное решение системы (1.2), отвечающее заданным начальным условиям,  $x'(t)$  — производная  $x(t)$ . Таким образом, подставляя вместо  $x(t)$  действительные реализации ожидаемых доходностей (построенные путем соответствующей обработки реальных данных о котировках цен), приходим к индексам, характеризующим устойчивость рассматриваемой группы финансовых инструментов. Устойчивость понимается здесь не в традиционном смысле, но имеет ясную содержательную интерпретацию. Полагая множество  $P(t)$ , например, равным шару  $S(\rho)$  радиуса  $\rho$ , с центром в нуле, мы можем определить минимальное значение  $\rho$ , для которого выполнено включение  $\Psi_1(x(t), x'(t)) \in P(t)$  (или  $\Psi_2(x(t), x'(t)) \in P(t)$ , или оба вместе). Введенная таким образом величина и есть характеристика устойчивости рассматриваемой группы финансовых инструментов. Введенный индекс характеризует интенсивность реструктуризации, необходимую для поддержания эффективности портфеля (в частности, если рынок стабилен и необходимость реструктуризации отсутствует, то значение индекса равно нулю). Вариант достаточных условий разрешимости задачи и формулы для расчетов индекса устойчивости в явной форме приведены в [10].

На рис. 1 отражена динамика одного из подобных индексов в период перед августовским кризисом 1998 г. для шести ведущих российских компаний того времени. Вспоминая, что для стабильного рынка значение индекса близко к нулю, мы видим, что начиная с мая значения индекса начинают быстро возрастать, что свидетельствует о наступающих негативных изменениях ситуации. Аналогичную ситуацию роста индекса мы видим и на рис. 2, отражающем поведение индекса в 2008 г.

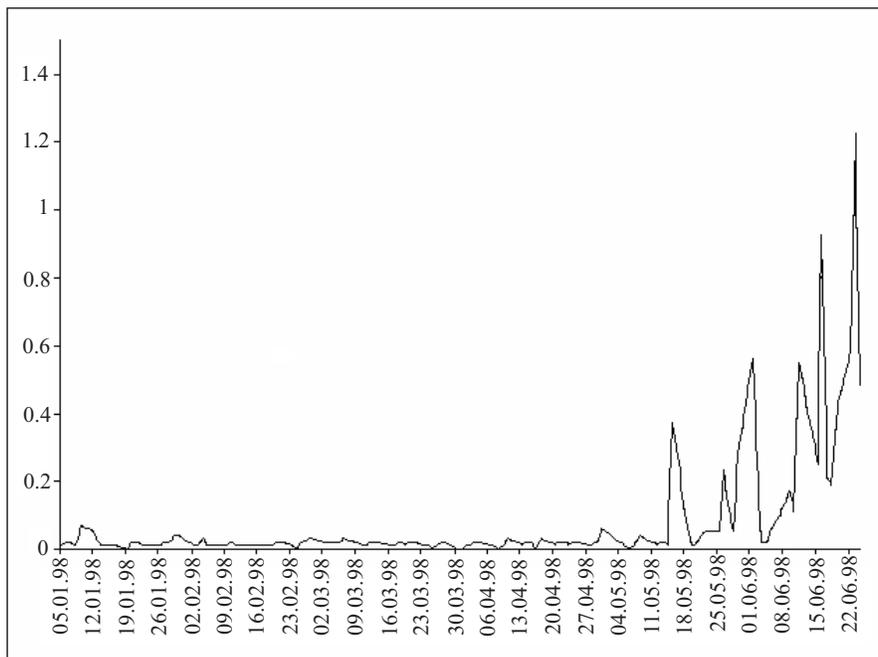


Рис. 1. График значений индекса устойчивости перед августовским кризисом 1998 г.

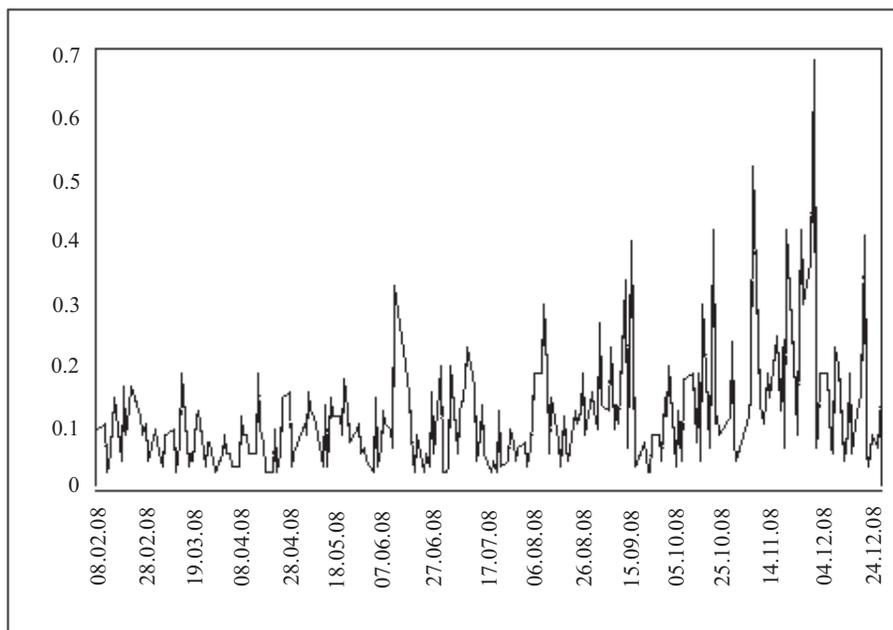


Рис. 2. Динамика индекса устойчивости в 2008 г.

## 2. Эффективный портфель проектов

В настоящем разделе рассматривается ситуация, когда формируется портфель проектов, у каждого из которых есть минимальный бюджет, невыполнение данного бюджета влечет неосуществимость проекта и, как следствие, нулевой доход.

Допустим, что инвестор, располагая некоторой суммой денежных средств, предполагает распределить их между  $N$  проектами. Пусть  $I = \{1, \dots, N\}$ .

Введем следующие обозначения ( $i \in I$ ):

$W_i$  — обязательные минимальные платежи по проекту;

$B$  — бюджет инвестора;

$W_i R_i$  — предполагаемая доходность при минимальных платежах.

Предположим, что увеличение вложений приводит к добавочной доходности, т. е. если в проект вкладывается не  $W_i$ , а  $W_i + w_i$ , то компания получит доход  $W_i R_i + w_i r_i$ , где  $r_i$  — добавочная доходность (случайная величина).

Таким образом, доходность проекта следующим образом зависит от вложений. Если  $b_i$  — вложения в проект  $i$ , то для дохода  $D_i$  получаем:

$$D_i = \begin{cases} W_i R_i + r_i(b_i - W_i), & b_i \geq W_i \\ 0, & b_i < W_i \end{cases}$$

или

$$D_i = \{W_i R_i + r_i(b_i - W_i)\} \chi(b_i - W_i),$$

где  $\chi$  — функция Хэвисайда:

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Портфель проектов будем ассоциировать с вектором  $y = (y_1, \dots, y_N)^T$ , где  $y_i \geq 0$  — доля вложений бюджета  $B$  в проект  $i$ , т. е.  $b_i = y_i B$  — сумма, вкладываемая в проект.

Доход портфеля  $y$

$$D(y) = \sum_{i=1}^N D_i(y_i), \quad (2.1)$$

где

$$D_i(y_i) = [W_i R_i + r_i(y_i B - W_i)] \chi(y_i B - W_i). \quad (2.2)$$

Математическое ожидание дохода портфеля представимо следующим образом:

$$\overline{D(y)} = E[D(y)] = \sum_{i=1}^N [W_i R_i + \bar{r}_i(y_i B - W_i)] \chi(y_i B - W_i).$$

Риск портфеля

$$\sigma(y) = \sqrt{Var D(y)}.$$

Аналог задачи Марковица может быть сформулирован следующим образом.

Найти

$$\min \sigma(y) \quad (2.3)$$

при ограничениях:

$$\overline{D(y)} = \mu; \quad (2.4)$$

$$e^T y = 1, \quad y_i \geq 0, \quad (2.5)$$

где  $\mu$  — фиксированный уровень ожидаемого дохода.

Особенность задачи заключается в том, что  $D(y)$  и  $\overline{D(y)}$  уже не являются линейными функциями от  $y$ , и, соответственно,  $\sigma^2(y)$  не есть квадратичная форма от  $y$ . Кроме того, система (2.4), (2.5) может быть несовместной.

Сформулированную задачу будем решать в два этапа. На первом этапе выделяем классы проектов  $J_k \subseteq I$ , для которых существует по крайней мере один портфель  $y$  со свойством  $y_i B_i \geq W_i$  для  $\forall i \in J_k$ ,  $y_j = 0$  для  $j \notin J_k$  и ограничения (2.4), (2.5) выполнены.

Для таких портфелей по-прежнему доход определяется соотношениями (2.1), (2.2), но  $D_i(y_i)$  можно рассматривать лишь для тех  $y$ , при которых  $y_i B_i \geq W_i$ . При последнем условии имеем:

$$D_i(y) = W_i R_i + r_i(y_i B - W_i),$$

$$\overline{D_i(y)} = W_i R_i + \bar{r}_i(y_i B - W_i).$$

Матрица ковариаций доходов определяется равенствами

$$\begin{aligned} \text{cov}(D_i(y_i), D_j(y_j)) &= k_i y_i + k_j y_j + B^2 p_{ij} y_i y_j + q_{ij}, \\ \text{Var} D(y) &= \sum_{i,j \in I} \text{cov}(D_i(y), D_j(y)) = (k, y) + B^2 y^T P y + c, \end{aligned}$$

где  $P = \{\text{cov}(r_i, r_j)\}$ ;  $k$  и  $c$  — заданные величины.

Задача минимизации риска на  $J_k$  имеет вид (2.3)–(2.5) с дополнительным ограничением

$$y \in \Pi(J_k), \quad (2.6)$$

где  $\Pi(J_k)$  — портфели проектов  $y$ , у которых все компоненты с индексами, не принадлежащими множеству  $J_k$ , — нули.

Таким образом, приходим к задаче линейно-квадратичной оптимизации с неотрицательно определенной матрицей.

На втором этапе решения задачи перебираем возможные варианты  $J_k$ , ищем наилучший вариант.

Формально, решение задачи (2.3)–(2.5), (2.6) требует перебора вариантов, число которых совпадает с числом множества всех подмножеств множества  $I$ . Однако нетрудно видеть, что на деле достаточно перебирать лишь некоторые “максимальные по включению” подмножества множества  $I$ . А именно справедливо следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть  $J_{k_1} \subseteq J_{k_2} \subseteq I$ , при данных  $J_k = J_{k_i}$  задача (2.3)–(2.5), (2.6) имеет решение, и символом  $\sigma[J_{k_i}]$  обозначено значение задачи на соответствующем множестве. Тогда  $\sigma[J_{k_2}] \leq \sigma[J_{k_1}]$ .

Сформулированное утверждение позволяет предложить следующий алгоритм направленного перебора:

1. На первом шаге полагаем  $J_0 = I$ . Если оказывается, что существует по крайней мере один портфель  $y$  со свойством  $y_i B_i \geq W_i$  для  $\forall i \in J_0$  и для этого портфеля выполнены ограничения (2.4), (2.5), то  $\sigma[J_0]$  является значением задачи (2.3)–(2.5), а соответствующий портфель — ее решением. Если система (2.4), (2.5) оказывается несовместной, то при выбранном значении  $\mu$  задача не имеет решений. Если не выполнено ни первое, ни второе условие, переходим к следующему шагу.

2. Рассматриваем множества  $J_{1_k}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , которые строятся последовательным исключением одного из проектов (с номером  $k$ ) из всего множества проектов. Для каждого набора проектов  $J_{1_k}$  проверяем существование вектора  $y$ :  $y_i B_i \geq W_i$  для  $\forall i \in J_{1_k}$ ,  $y_j = 0$  для  $j \notin J_{1_k}$ , для которого выполнены ограничения (2.4), (2.5). Если такой вектор находится, то значение  $\sigma[J_{1_k}]$  и соответствующий портфель запоминаем и в дальнейшем все подмножества множества  $J_{1_k}$  исключаем из рассмотрений. В противном случае сохраняем набор  $J_{1_k}$  для использования на следующем шаге.

3. Для каждого из сохраненных на шаге 2 наборов  $J_{1_k}$  применяем аналогичную процедуру. А именно, рассматриваем множества  $J_{2_m}$ , которые строятся последовательным исключением одного из проектов (с номером  $m$ ) из множества проектов  $J_{1_k}$ . Для каждого набора проектов  $J_{2_m}$  проверяем наличие вектора  $y$ :  $y_i B_i \geq W_i$  для  $\forall i \in J_{2_m}$ ,  $y_j = 0$  для  $j \notin J_{2_m}$  с соответствующим свойством. Если вектор находится, то значение  $\sigma[J_{2_m}]$  и соответствующий портфель запоминаем и в дальнейшем все подмножества множества  $J_{2_m}$  исключаем из рассмотрений. В противном случае сохраняем набор  $J_{2_m}$  для использования на следующем шаге.

Далее повторяем шаги 2 и 3 до тех пор, пока не исключим все подмножества множества  $I$  из рассмотрения. В результате за конечное число шагов построим множество  $\{\sigma[J_{n_m}]\}$  значений задачи (2.3)–(2.5), (2.6) с соответствующими оптимальными портфелями. Если на каждом шаге алгоритма множества  $[J_{n_m}]$ , для которых выполнено нужное свойство, оказались

пустыми, то исходная задача решений не имеет. В ином варианте, когда бюджета инвестора  $B$  достаточно для совместного осуществления нескольких проектов с возможностью обеспечить заданный уровень доходности, среди полученных значений  $\{\sigma[J_{nm}]\}$  выбираем наименьшее. Это значение вместе с соответствующим портфелем  $y^0$  и дает решение исходной задачи. Заметим, что, вообще говоря, решение может быть не единственным и определяться разными наборами проектов.

### 3. Задачи о выборе контрагентов предприятия

Ниже рассматриваются задачи рационального выбора предприятием своих контрагентов: поставщиков сырья и потребителей (покупателей) готовой продукции.

Названные контрагенты имеют, как правило, различные характеристики, определяющие для предприятия-производителя степень эффективности взаимодействия с ними. При большом числе контрагентов правильная организация поставок, связанная с распределением заказов и объемов поставляемой продукции между контрагентами, может существенно влиять на результаты деятельности предприятия-производителя.

Приводимые рассуждения ориентированы и на учет рисков работы с покупателями готовой продукции, причем тех рисков, которые связаны с задержкой оплаты произведенных поставок. Нерегулярность выплат может носить объективно случайный характер, определяться спросом на продукцию, колебаниями цен и иными причинами, влияющими на доходность операций случайным образом.

В указанных ситуациях целесообразно трактовать доходность операций с конкретным контрагентом как случайную величину. Применяя далее экономико-математический инструментарий, теорию портфельных инвестиций, можно построить эффективный портфель контрагентов, обладающий подходящими характеристиками риска и доходности.

**Задача о выборе поставщиков сырья.** Рассмотрим простейший вариант задачи, когда в процессе производства предприятие использует лишь один вид сырья.

Предположим, что предприятие работает с  $L$  поставщиками, которые поставляют указанное сырье. Количество сырья, которое, в принципе может обеспечить поставщик с номером  $j$  полагаем равным  $\bar{x}_j$  (если сырья у данного поставщика нет, полагаем  $\bar{x}_j = 0$ ). Цена единицы сырья у поставщика  $j$  предполагается равной  $\mu_j$ .

Считаем, что для обеспечения производства при фиксированных производственных мощностях необходимо в единицу времени иметь  $k$  единиц сырья.

Если все поставщики вовремя и в нужном объеме осуществляют запланированные поставки, то рациональный выбор поставщиков состоит в том, чтобы обеспечивать необходимое количество при минимальных затратах. В этом случае затраченная на поставки сумма будет иметь вид

$$S(X) = \sum_{j=1}^L \mu_j x_j,$$

где  $X = (x_1, \dots, x_L)$  — вектор, элементами которого являются объемы поставок сырья от поставщиков с соответствующими номерами.

Задача состоит в минимизации величины  $S(X)$ :

$$S(X) \rightarrow \min \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$0 \leq x_j \leq \bar{x}_j, \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^L x_j \geq k. \tag{3.3}$$

Задача (3.1)–(3.3) представляет собой стандартную задачу линейного программирования, методы решения которой хорошо известны. Заметим, что если сырье отсутствует у поставщика  $j$ , то в решении будем иметь  $x_j = 0$ .

Модифицируем модель таким образом, чтобы учесть риски нарушения поставщиками своих обязательств. Мы будем далее предполагать, что риски носят случайный характер и характеризуются случайной величиной ущерба, который наносится производству несвоевременной или неполной поставкой необходимого сырья. При этом полагаем, что величина ущерба пропорциональна необходимому (заказанному) количеству сырья. Формализуем сказанное следующим образом.

Исходя из условия, что предприятию-поставщику  $j$  заказано  $x_j$  единиц сырья, будем предполагать, что к затратам  $\mu_j x_j$  на оплату заказанного товара добавляется сумма  $\lambda_j x_j$ , где  $\lambda_j$  — случайная величина, характеризующая возможность (вероятность) невыполнения поставщиком своих обязательств. Если  $\lambda_j$  принимает значение, равное нулю — поставки осуществляются своевременно и в полном объеме; при других (положительных) значениях  $\lambda_j$  имеем дополнительные затраты, связанные с невыполнением контрагентом своих обязательств.

Таким образом, модифицированная функция затрат становится случайной величиной

$$\Psi(X, \Lambda) = S(X) + \sum_j \lambda_j x_j. \quad (3.4)$$

Символом  $\Lambda$  в данном соотношении обозначен вектор, аналогичный вектору  $X$ , состоящий из элементов  $\lambda_j$ .

Ожидаемая величина затрат определяется соотношением

$$E[\Psi(\Lambda, X)] = S(X) + \sum_j \bar{\lambda}_j x_j,$$

где  $\bar{\lambda}_j$  — ожидаемое значение случайной величины  $\lambda_j$ .

В качестве меры риска выберем среднеквадратичное отклонение случайной величины затрат от своего среднего (ожидаемого) значения:

$$\sigma(\Lambda, X) = \sqrt{D(\Psi(\Lambda, X))},$$

где символом  $D(\Psi(\Lambda, X))$  обозначена дисперсия случайной величины  $\Psi(\Lambda, X)$ . Используя представление (3.4), для среднеквадратичного отклонения, получим следующее выражение:

$$\sigma^2(\Lambda, X) = E\left[\left(\sum_j x_j (\lambda_j - \bar{\lambda}_j)\right)^2\right] = \sum_{j,m} x_j x_m E[(\lambda_j - \bar{\lambda}_j)(\lambda_m - \bar{\lambda}_m)]. \quad (3.5)$$

В последнем выражении суммирование осуществляется по всем возможным значениям индексов  $j, m = 1, \dots, L$ .

Таким образом, приходим к следующей постановке задачи. Требуется минимизировать две величины:

$$\Phi(X) = S(X) + \sum_j \bar{\lambda}_j x_j \rightarrow \min \quad (3.6)$$

и

$$\sigma^2(\Lambda, X) \rightarrow \min \quad (3.7)$$

при линейных ограничениях

$$0 \leq x_j \leq \bar{x}_j, \quad (3.8)$$

$$\sum_{j=1}^L x_j \geq k. \quad (3.9)$$

Соотношения (3.6)–(3.9) представляют собой не что иное, как двухкритериальную линейно-квадратичную задачу математического программирования. При достаточно общих предположениях существуют оптимальные по Парето решения задачи, которые могут быть найдены известными методами.

**Задача оптимизации состава потребителей готовой продукции.** Обозначим через  $r_j$  доходность единичной операции по поставке партии товара предприятию-потребителю с номером  $j$  ( $j = 1, \dots, N$ ;  $N$  — общее количество потребителей). Эту характеристику потребителя, трактуемую как случайную величину, мы будем использовать в дальнейших построениях.

Как и выше, дисперсию  $D(r_j)$  или среднее квадратическое отклонение  $\sigma(r_j)$  будем ассоциировать с риском, связанным с инвестициями в финансовый инструмент со случайной доходностью  $r_j$ . Следуя такому подходу, будем характеризовать предприятия-потребителей двумя скалярными характеристиками: математическим ожиданием  $M(r_j)$  доходности операций с ним и связанным с данным предприятием риском  $\sigma(r_j)$ .

Следует иметь в виду, что величина  $\sigma(r_j)$  отражает далеко не все риски контрагента, здесь учитывается лишь статистический риск отклонения доходности от своего среднего значения. Представляется, однако, что  $\sigma(r_j)$  вполне может рассматриваться как мера надежности партнера. Вычисление конкретных значений для оценок величин  $M(r_j)$  и  $\sigma(r_j)$  производится по стандартным формулам и правилам на основании имеющейся статистики работы с предприятием.

Предположим, что получен следующий набор данных: семейство выборок случайных доходностей  $r_j$ , оценки математических ожиданий  $M(r_j)$  и среднеквадратичных отклонений  $\sigma(r_j)$ . Для того чтобы определить усредненное (ожидаемое) значение доходности предприятия-поставщика при работе со всеми контрагентами за выбранный временной промежуток, надлежит определить доли  $y_j$  всего капитала, сосредоточенного в отгруженной продукции, приходящиеся на каждого потребителя. Заметим, что для фиксированного временного промежутка это уже менее тривиальная задача, чем расчет выборочных значений доходностей, и прямая аналогия с инвестиционным портфелем на фондовом рынке здесь нарушается. Либо речь может идти об усредненных долях, рассчитанных на достаточно большой промежуток времени, либо следует скорректировать правила для вычисления доходностей от работы с одним контрагентом.

Если предположить, что доли капитала в виде отгруженного товара, приходящиеся на каждого контрагента, могут быть так или иначе рассчитаны, то дальнейшие построения, направленные на рациональный выбор структуры поставок, осуществляется по стандартной схеме [1].

Учитывая специфику области применения, можно утверждать, что явное решение задачи едва ли может быть практически использовано ввиду наличия ряда специфических ограничений на доли капитала, приходящегося на каждого потребителя. Таким образом, целесообразно определять соответствующую реальной ситуации систему ограничений и непосредственно находить эффективные решения экстремальной задачи для критериальных функций  $M(r)$  и  $\sigma(r)$ , где  $r = \sum_{i=1}^N y_i r_i$ . При этом, хотя формально оба критерия — ожидаемая доходность и риск — равноправны, второй в данном случае целесообразно считать подчиненным, и задачу формулировать следующим образом:

$$M(r) = \sum_{i=1}^N M(r_i) y_i \rightarrow \max,$$

при ограничениях

$$\sigma(r) = \left( \sum_{i,j=1}^N y_i \sigma_{ij} y_j \right)^{1/2} = \sigma^*,$$

$$y \in Y.$$

В последнем условии  $y = (y_1, \dots, y_N)^T$  множество  $Y$  определяется неравенствами  $y_i \geq 0$ , соотношением  $\sum_{i=1}^N y_i = 1$  и дополнительными условиями, формализующими специфику конкретной ситуации. Символом  $\sigma^*$  обозначен фиксированный уровень статистического риска. Решение поставленной задачи осуществляется стандартными численными методами.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Markowitz H.** Portfolio selection // J. Finance. 1952. Vol. 7. P. 77–91.
2. **Tobin J.** Liquidity preference as behavior towards risk // Rev. Economic Stud. 1958. Vol. 26. P. 65–86.
3. **Merton R.C.** Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case // Rev. Econ. Stat. 1969. Vol. 51. P. 247–257.
4. **Mossin J.** Optimal multiperiod portfolio policies // J. Business. 1968. Vol. 41. P. 215–229.
5. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М. : Наука, 1977. 392 с.
6. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. Berlin : Springer, 1988. 517 p.
7. **Awerbuch S.** Portfolio-based electricity generation planning: policy implications for renewables and energy security // Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change. 2006. Vol. 11, no. 3. P. 693–710.
8. **Никонов О.И., Медведева М.А., Египцев Д.С.** Повышение эффективности системы сбыта продукции: математическое моделирование // Вестн. УГТУ–УПИ. 2004. Вып. 4. С. 96–103. (Экономика и управление.)
9. **Nikonov O.** On a set-valued dynamic model of investment portfolio reconstruction // Modeling and Control of Economic Systems: Proc. IFAC Sympos. (2001; Klagenfurt). New York etc.: Elsevier, 2002. P. 181–186.
10. **Никонов О.И., Тимофеева Г.А.** Методы теории гарантированного управления в задаче динамической реструктуризации инвестиционного портфеля // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 2. С. 460–476.

Никонов Олег Игоревич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
декан  
Урал. гос. техн. ун-т – УПИ  
e-mail: aspr@mail.ustu.ru

Поступила 24.05.2009

УДК 517.977

## О ПОСТРОЕНИИ ТЕЛ ПОСТОЯННОЙ ШИРИНЫ, СОДЕРЖАЩИХ ЗАДАННОЕ МНОЖЕСТВО<sup>1</sup>

Е. С. Половинкин

В данной работе дан обзор результатов автора и продолжены исследования известной задачи дифференциальной геометрии о построении тел постоянной ширины, содержащих в себе произвольное заданное ограниченное множество того же диаметра, что и ширина тел. Задача рассмотрена для множеств из рефлексивных банаховых пространств, в которых единичный шар является порождающим множеством. На основе полученных ранее результатов по сильно выпуклому анализу и явной формулы построения одного из таких тел постоянной ширины, автором установлен критерий единственности дополнения произвольного множества до тела постоянной ширины и предложены некоторые алгоритмы построения всех тел постоянной ширины, содержащих исходное множество.

Ключевые слова: выпуклые тела постоянной ширины, сильно выпуклый анализ.

E. S. Polovinkin. On construction of bodies of constant width containing a given set.

A survey of the author's results is presented, and the research is continued of the known differential geometry problem on the construction of bodies of constant width containing an arbitrary given bounded set of the same diameter as the width of the bodies. The problem is considered for sets from reflexive Banach spaces in which the unit ball is a generating set. Using earlier results in strongly convex analysis and an explicit formula for constructing one of such bodies of constant width, we establish a criteria for the uniqueness of the complement of an arbitrary set to a body of constant width and propose some algorithms for constructing all bodies of constant width that contain a given set.

Keywords: convex bodies of constant width, strongly convex analysis.

### Введение

Проблема построения тел постоянной ширины, отличных от шаров, возникла в математике около двух веков назад.

Задачи, связанные с исследованием тел постоянной ширины, описаны в работах многих известных математиков (см., например, [1, 2, 4, 9–15]). До недавнего времени (см. [4, 14, 15]) было доказано существование по крайней мере одного тела постоянной ширины  $d > 0$ , содержащего заданное ограниченное замкнутое множество (диаметра  $d$ ) из  $\mathbb{R}^n$  (а также из гильбертова пространства и некоторых других банаховых пространств). Однако в указанных работах теоремы существования не давали способов описания этих тел постоянной ширины.

В данной статье на основе аппарата выпуклого и сильно выпуклого анализа (см., например, [5–7]) приведен анализ последних результатов автора и его учеников [7, 17–19] по изучению тел постоянной ширины. Опираясь на явную формулу построения одного из таких тел постоянной ширины, полученную в работе [17], для произвольного ограниченного множества автор приводит некоторые алгоритмы построения тел постоянной ширины, содержащих заданное множество, и критерий единственности возможного дополнения начального множества до тела постоянной ширины. В случае неединственности такого дополнения предложено некоторое описание всех тел постоянной ширины, содержащих исходное множество, диаметр которых равняется диаметру исходного множества.

В качестве приложения этих результатов получена в явном виде опорная функция тела постоянной ширины, содержащего правильный тетраэдр.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00156) и АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/500).

## 1. Основные понятия

В данной работе мы будем рассматривать замкнутые ограниченные множества из произвольного рефлексивного банахова пространства  $E$ , у которого единичный шар является порождающим множеством (см. [7, 16]). В частности, это может быть произвольное гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  или евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ .

Напомним некоторые обозначения и понятия выпуклого анализа. *Опорной функцией* множества  $A \subset E$  называется функция вида  $s(p, A) \doteq \sup \{\langle p, x \rangle \mid x \in A\}$ ,  $p \in E^*$ . *Шириной* ограниченного множества  $A \subset E$  в направлении вектора  $p \in E^*$ , где  $\|p\|_* = 1$ , называется величина  $\sup \{\langle p, x \rangle \mid x \in A\} - \inf \{\langle p, x \rangle \mid x \in A\} = s(p, A) + s(-p, A)$ , т. е. она равна расстоянию между двумя опорными гиперплоскостями ко множеству  $A$ , ортогональными вектору  $p$ . *Диаметром* множества  $A$  называется величина  $\text{diam } A \doteq \sup \{\|x - y\| \mid x, y \in A\}$ .

Следуя Г. Минковскому [1, 9] и Л. С. Понтрягину, напомним понятия алгебраической суммы и геометрической разности множеств. *Алгебраической суммой* двух множеств  $A$  и  $B$  из  $E$  называется множество вида  $A + B \doteq \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ . *Произведением* множества  $A \in E$  на число  $\lambda \in \mathbb{R}$  называется множество  $\lambda A \doteq \{\lambda a \mid a \in A\}$ . *Геометрической разностью* двух множеств  $A$  и  $B$  из  $E$  называется множество  $A \overset{*}{-} B \doteq \{x \in E \mid x + B \subset A\}$ .

Отметим, что между опорной функцией ограниченного множества и его диаметром существует следующее соотношение, которое нам понадобится в дальнейшем.

**Лемма 1.** *Для ограниченного множества  $A$  справедлива формула*

$$\text{diam } A = \sup \{s(p, A) + s(-p, A) \mid p \in E^*, \|p\|_* = 1\} \quad (1.1)$$

*и включение*

$$A + (-A) \subset B_d(0), \quad (1.2)$$

где  $d = \text{diam } A$ , а  $B_d(0) = \{x \in E \mid \|x\| \leq d\}$  обозначает замкнутый шар радиуса  $d$  с центром в точке  $0$ .

Замкнутое ограниченное выпуклое множество  $W \subset E$  называется *телом постоянной ширины*  $d > 0$ , если его ширина по всем направлениям  $p \in E^*$  постоянна и равна числу  $d$ , т. е. справедливо равенство  $s(p, W) + s(-p, W) = d\|p\| \forall p \neq 0$ .

Из определения тела постоянной ширины и леммы 1 очевидно следует

**Лемма 2.** *Ограниченное выпуклое замкнутое множество  $W \subset E$  является телом постоянной ширины  $d > 0$  тогда и только тогда, когда справедливо равенство  $W + (-W) = B_d(0)$ .*

Отметим, что в силу определения геометрической разности множеств отсюда следуют равенства  $W = B_d(0) \overset{*}{-} (-W)$ ,  $W = B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} W)$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Следуя работам [7, 16], отметим, что в рефлексивном банаховом пространстве  $E$  единичный шар  $B_1(0)$  является *порождающим множеством*, если для всякого непустого множества  $X$ , представимого в виде пересечения некоторого семейства единичных шаров с различными центрами, т. е.  $X = \bigcap \{B_1(y) \mid y \in Y\}$ , существует множество  $Z$  такое, что справедливо равенство  $X + Z = B_1(0)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В работах [7, 16] показано важное следствие того, что в данном банаховом пространстве  $E$  единичный шар  $B_1(0) \subset E$  является порождающим множеством. Оно состоит в том, что для любого ограниченного множества  $A \subset E$ , для которого существует число  $d > 0$  такое, что  $B_d(0) \overset{*}{-} A \neq \emptyset$ , справедливо равенство

$$(B_d(0) \overset{*}{-} A) + (B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} A)) = B_d(0). \quad (1.3)$$

## 2. Ограничения на тела постоянной ширины

Пусть задано некоторое ограниченное множество  $A \subset E$  диаметра  $d > 0$ . Семейство всех тел постоянной ширины, которые содержат данное множество  $A \subset E$  и ширина которых равняется тому же числу  $d > 0$ , будем обозначать через  $\mathcal{W}(A)$ .

Для исследования указанного семейства  $\mathcal{W}(A)$  определим два множества  $M_d(A)$  и  $m_d(A)$  вида

$$M_d(A) \doteq \bigcap \{B_d(x) \mid x \in A\}, \quad m_d(A) \doteq \bigcap \{B_d(x) \mid A \subset B_d(x)\}. \quad (2.1)$$

**Лемма 3.** Множества  $M_d(A)$  и  $m_d(A)$  удовлетворяют равенствам

$$M_d(A) = B_d(0) \overset{*}{-} (-A), \quad m_d(A) = B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} A), \quad (2.2)$$

а также справедливы включения

$$A \subset m_d(A) \subset M_d(A). \quad (2.3)$$

**Доказательство.** Равенства (2.2) легко следуют из определения геометрической разности.

Из этого же определения геометрической разности для  $B_d(0) \overset{*}{-} A$  следует включение  $A + (B_d(0) \overset{*}{-} A) \subset B_d(0)$ . Из последнего включения опять же по определению геометрической разности получаем включение  $A \subset B_d(0) \overset{*}{-} (B_d(0) \overset{*}{-} A)$ , т. е. справедливо левое включение в (2.3).

Из включения (1.2), формулы (2.1) и определения геометрической разности следует включение  $A \subset M_d(A)$ . Вычитая по очереди из шара  $B_d(0)$  множества  $-A$  и  $-M_d(A)$ , в силу последнего включения и формул (2.1) получаем правое включение в (2.3).

**Теорема 1** (см. [17]). Пусть даны тело  $W$  постоянной ширины и множество  $A$  одного и того же диаметра  $d$ . Для справедливости включения  $A \subset W$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялись включения

$$m_d(A) \subset W \subset M_d(A). \quad (2.4)$$

## 3. Регулярное дополнение

В работе [17] доказана следующая основная теорема, содержащая явную формулу для построения одного из тел постоянной ширины для заданного ограниченного множества  $A$  того же диаметра.

**Теорема 2** (см. [17]). Если рефлексивное банахово пространство  $E$  таково, что в нем единичный шар является порождающим множеством, то для любого ограниченного множества  $A \subset E$ , диаметр которого равен  $d > 0$ , множество

$$W^0(A) \doteq (M_d(A) + m_d(A))/2 \quad (3.1)$$

принадлежит совокупности множеств  $\mathcal{W}(A)$ .

В дальнейшем множество  $W^0(A)$  из формулы (3.1) будем называть *регулярным дополнением* множества  $A$  до тела постоянной ширины того же диаметра.

**Следствие 1.** Опорная функция тела  $W^0(A)$  имеет вид

$$s(p, W^0(A)) = (d\|p\| + \sigma(p) - \sigma(-p))/2, \quad (3.2)$$

где функция  $\sigma(p)$  есть опорная функция множества  $M_d(A)$ , причем  $\sigma(p) = \overline{\text{co}}(d\|p\| - s(-p, A))$ , где  $\overline{\text{co}} f$  означает замыкание выпуклой оболочки функции  $f$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Таким образом задача нахождения регулярного дополнения множества до тела постоянной ширины сведена к вычислению выпуклой оболочки разности опорных функций шара и данного множества.

Отметим, что в силу теоремы 2 в указанном выше классе банаховых пространств семейство  $\mathcal{W}(A)$  тел постоянной ширины, содержащих заданное ограниченное множество  $A$  диаметра  $d$ , непусто, причем любое тело  $W \in \mathcal{W}(A)$  содержит в себе множество  $m_d(A)$  и содержится во множестве  $M_d(A)$ . В следующей теореме покажем, что данные оценки улучшить нельзя, т. е.  $M_d(A)$  — наименьшее по включению множество, содержащее произвольное тело  $W \in \mathcal{W}(A)$ , а  $m_d(A)$  — наибольшее по включению множество, содержащееся в произвольном теле  $W \in \mathcal{W}(A)$ .

**Теорема 3.** *Справедливы следующие соотношения:*

$$M_d(A) = \bigcup \{W \mid W \in \mathcal{W}(A)\}, \quad m_d(A) = \bigcap \{W \mid W \in \mathcal{W}(A)\}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из правого соотношения в (2.1) для произвольной точки  $y \in M_d(A)$  и любой точки  $x \in A$  имеем  $\|x - y\| \leq d$ , т. е. диаметр множества  $A \cup \{y\}$  будет не больше, чем  $d$ . Поэтому множество  $W^0(A \cup \{y\})$  будет принадлежать семейству  $\mathcal{W}(A)$  и содержать произвольно выбранную точку из  $M_d(A)$ . Обратное включение следует из теоремы 1. Таким образом, первое соотношение доказано.

Пусть теперь точка  $y \notin m_d(A)$ . Тогда в силу левого соотношения в (2.1) существует точка  $z$  такая, что шар  $B_d(z)$  содержит множество  $A$ , но не содержит точку  $y$ . Тогда множество  $W^0(A \cup \{z\})$  принадлежит семейству  $\mathcal{W}(A)$ , но не содержит точку  $y$ . Обратное же включение следует из теоремы 1. Таким образом, второе соотношение доказано.

Анализируя доказательство последней теоремы, получаем, что если для каждой граничной точки  $y \in \partial M_d(A)$  определим множество  $A \cup \{y\}$ , то получим, что  $\text{diam}(A \cup \{y\}) = \text{diam} A = d$ . В силу этого, если определим множество  $W_y = W^0(A \cup \{y\})$ , то очевидно справедливо включение  $W_y \in \mathcal{W}(A)$ . В результате определим семейство тел постоянной ширины вида

$$\mathcal{V}(A) = \left\{ W \mid W = \sum_{i=1}^m \lambda_i W_{y_i}, \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, y_i \in \partial M_d(A), m \in \mathbb{N} \right\}. \quad (3.3)$$

Очевидно, что справедливо включение  $\mathcal{V}(A) \subset \mathcal{W}(A)$ , причем каждое тело  $W \in \mathcal{V}(A)$  с помощью формул (3.1) и (3.3) может быть описано конструктивно.

**Следствие 2.** *Семейство  $\mathcal{V}(A)$  тел постоянной ширины, содержащих множество  $A$ , является существенным подмножеством семейства  $\mathcal{W}(A)$  в том смысле, что справедливы равенства  $M_d(A) = \bigcup \{W \mid W \in \mathcal{V}(A)\}$ ,  $m_d(A) = \bigcap \{W \mid W \in \mathcal{V}(A)\}$ .*

#### 4. Единственность дополнения

Исходя из полученных результатов, приведем критерий единственности дополнения данного множества до тела постоянной ширины.

**Теорема 4.** *Дополнение множества  $A$  диаметра  $d$  до тела постоянной ширины единственно тогда и только тогда, когда справедливо равенство  $M_d(A) = m_d(A)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что множество  $M_d(A) \setminus m_d(A)$  непусто. Возьмем произвольную точку  $y \in M_d(A) \setminus W^0(A)$  (такая точка очевидно существует, так как в противном случае получили бы равенство  $M_d(A) = m_d(A)$ ). Тогда существуют два тела  $W_1 = W^0(A \cup \{y\})$  и  $W^0(A)$  семейства  $\mathcal{W}(A)$  такие, что  $y \in W_1$  и  $y \notin W^0(A)$ . Таким образом, в этом случае дополнение неединственно.

Так как для любого  $W \in \mathcal{W}(A)$  справедливо включение (2.4) из теоремы 1, то в случае равенства  $M_d(A) = m_d(A)$  получаем равенство  $m_d(A) = W = M_d(A)$ . Таким образом, дополнение единственно.

На практике, однако, проверка равенства двух множеств довольно затруднительна. Поэтому приведем равносильный критерий, более удобный для использования.

**Следствие 3.** *Дополнение множества  $A$  диаметра  $d$  до тела постоянной ширины единственно тогда и только тогда, когда  $\text{diam } M_d(A) = d$ .*

**Доказательство.** Пусть дополнение единственно. Тогда по теоремам 1 и 4 справедливо равенство  $m_d(A) = W^0(A) = M_d(A)$ , откуда  $\text{diam } M_d(A) = d$ .

Пусть теперь  $\text{diam } M_d(A) = d$ . Тогда по формуле (1.1) из леммы 1 получаем для любого  $p \in E^*$  неравенство  $s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) \leq d\|p\|$ . В свою очередь, как было показано в теореме 1, справедливо включение  $M_d(A) \supset W^0(A)$ , откуда для любого  $p \in E^*$  получаем обратное неравенство  $s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) \geq s(p, W^0(A)) + s(-p, W^0(A)) = d\|p\|$ . В итоге для любого  $p \in E^*$  получаем равенство

$$s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) = d\|p\|. \quad (4.1)$$

В свою очередь в силу формул (2.2) и равенства (1.3), переходя к опорным функциям, получаем равенство

$$s(p, m_d(A)) + s(-p, M_d(A)) = d\|p\|. \quad (4.2)$$

Вычитая равенство (4.1) из равенства (4.2), получаем равенство множеств  $m_d(A) = M_d(A)$ , из которого по теореме 4 следует, что дополнение данного множества до тела постоянной ширины единственно.

**З а м е ч а н и е 4.** Дополнение правильного треугольника в  $\mathbb{R}^2$  до тела постоянной ширины единственно, так как очевидно равенство  $M_d(A) = m_d(A)$ . Однако дополнение правильного тетраэдра в  $\mathbb{R}^3$  до тела постоянной ширины уже не единственно.

В самом деле, рассмотрим правильный тетраэдр  $A$  из  $\mathbb{R}^3$  с вершинами в точках  $v_1 = (1, 1, 1)$ ,  $v_2 = (-1, -1, 1)$ ,  $v_3 = (1, -1, -1)$  и  $v_4 = (-1, 1, -1)$ . Нетрудно убедиться в том, что диаметр  $d$  данного тетраэдра равен  $2\sqrt{2}$ , а две точки  $x_1 = (0, 0, \sqrt{6} - 1)$  и  $x_2 = (0, 0, 1 - \sqrt{6})$  принадлежат множеству  $M_d(A)$ , т. е. принадлежат каждому из шаров  $B_d(v_i)$ , где  $i = \overline{1, 4}$ . Однако  $\|x_1 - x_2\| = 2\sqrt{6} - 2 > d$ , т. е. критерий единственности (следствие 3) не выполнен. При этом тела постоянной ширины  $W^0(A \cup \{x_1\})$  и  $W^0(A \cup \{x_2\})$  содержат тетраэдр  $A$  и различны.

## 5. Общее описание тел постоянной ширины

Попробуем описать все множества семейства  $\mathcal{W}(A)$ .

Назовем вектор  $p \in E^*$  *вектором единственности* для множества  $A \subset E$ , если для него выполнено равенство

$$s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) = d\|p\|_*. \quad (5.1)$$

Конус  $\mathcal{R}(A)$ , составленный из всех таких векторов, будем называть *конусом единственности* для множества  $A$ . Конус  $\mathcal{R}^c(A)$ , дополнительный к конусу единственности, будем называть *конусом неединственности*. Конус  $\mathcal{R}^c(A)$  очевидно состоит из таких векторов  $p \in E^*$ , для которых справедливо неравенство  $s(p, M_d(A)) + s(-p, M_d(A)) > d\|p\|$ .

В силу следствия 3 семейство  $\mathcal{W}(A)$  состоит из более чем одного тела постоянной ширины тогда и только тогда, когда конус  $\mathcal{R}^c(A)$  непуст.

**Теорема 5** (см. [18]). *Любому телу  $W$  из семейства  $\mathcal{W}(A)$  можно сопоставить функцию  $\alpha : E^* \rightarrow [0, 1]$ , которая удовлетворяет выражению*

$$s(p, W) = \alpha(p) s(p, M_d(A)) + (1 - \alpha(p)) s(p, m_d(A)) \quad \forall p \in E^*. \quad (5.2)$$

При этом функция  $\alpha$  на  $\mathcal{R}^c(A)$  непрерывна, положительно однородна с показателем однородности 0, т. е.  $\alpha(\lambda p) = \alpha(p)$  для всех  $\lambda > 0$ , и для нее справедливо равенство

$$\alpha(p) + \alpha(-p) = 1 \quad \forall p \in \mathcal{R}^c(A). \quad (5.3)$$

Таким образом, каждому телу  $W$  из семейства  $\mathcal{W}(A)$  соответствует некая скалярная функция. Например, регулярному дополнению  $W^0(A)$  соответствует функция  $\alpha(p) \equiv 1/2$ .

Обратное соответствие, увы, совсем не очевидно. Условия непрерывности, постоянства суммы значений на противоположных аргументах и положительной однородности с показателем 0 произвольной функции не являются достаточными условиями того, что этой функции соответствует некоторое тело постоянной ширины. Придется воспользоваться еще одним условием.

**Следствие 4.** Пусть задано замкнутое ограниченное множество  $A \subset E$  диаметра  $d$ . Пусть дана функция  $\alpha : E^* \rightarrow [0, 1]$ , непрерывная и положительно однородная с показателем 0 на  $\mathcal{R}^c(A)$ , удовлетворяющая равенству (5.3) и такая, что функция

$$s(p) = \alpha(p) s(p, M_d(A)) + (1 - \alpha(p)) s(p, m_d(A)) \quad (5.4)$$

удовлетворяет неравенству  $s(p_1 + p_2) \leq s(p_1) + s(p_2)$  для всех  $p_1, p_2$ . Тогда  $s$  является опорной функцией некоторого тела постоянной ширины из семейства  $\mathcal{W}(A)$ .

Множество всех функций  $\alpha$ , удовлетворяющих условиям следствия 4, обозначим через  $\mathcal{A}(A)$ . Отметим очевидное свойство.

**Следствие 5.** Множество  $\mathcal{A}(A)$  выпукло.

В этой связи представляет интерес нахождение явных формул для вычисления конуса единственности  $\mathcal{R}(A)$  исходного множества  $A$  диаметра  $d$ .

Для этого для любой точки  $a$  через  $D_A(a)$  обозначим множество всех точек из  $A$ , удаленных от точки  $a$  на расстояние, равное диаметру  $d$  множества  $A$ , т. е.

$$D_A(a) = \{x \in A \mid \|x - a\| = \text{diam } A\} = A \cap \partial B_d(a).$$

Через  $\text{cone } X$  будем обозначать выпуклую коническую оболочку множества  $X$ , т. е.

$$\text{cone } X = \{\lambda a \mid a \in \text{co } X, \lambda \geq 0\},$$

где через  $\text{co } X$  обозначена выпуклая оболочка множества  $X$ .

**Лемма 4.** Справедливо включение

$$\mathcal{R}(A) \supset \bigcup \left\{ \text{cone}(D_A(a) - a) \cup \text{cone}(a - D_A(a)) \mid a \in A, D_A(a) \neq \emptyset \right\}. \quad (5.5)$$

**Доказательство.** Пусть для точки  $a \in A$  существует точка  $b(a) \in D_A(a)$ , т. е.  $b(a) \in A$  и  $\|a - b(a)\| = d$ . Рассмотрим вектор  $p_a = (b(a) - a)/\|b(a) - a\|$ . Тогда отсюда и в силу леммы 1 получаем

$$s(p_a, A) + s(-p_a, A) \geq \langle p_a, b_a - a \rangle = \|b(a) - a\| = d \geq s(p_a, A) + s(-p_a, A).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$s(p_a, A) + s(-p_a, A) = d. \quad (5.6)$$

Отсюда и в силу включения  $A \subset M_d(A)$  и формулы (2.1) (по лемме 3) получаем

$$s(p_a, A) \leq s(p_a, M_d(A)) = s(p_a, B_d(0) * (-A)) \leq d - s(-p_a, A),$$

откуда в силу равенства (5.6) получаем равенство  $s(p_a, A) = s(p_a, M_d(A))$ . Аналогично получаем равенство  $s(-p_a, A) = s(-p_a, M_d(A))$ . Из последних равенств и равенств (5.1), (5.6) получаем, что  $p_a \in \mathcal{R}(A)$ .

Таким образом все векторы из множеств  $D_A(a) - a$  и  $a - D_A(a)$  (если для выбранного  $a \in A$  они непусты) принадлежат конусу  $\mathcal{R}(A)$ . Кроме того, все векторы из выпуклых оболочек каждого из этих множеств также будут принадлежать конусу  $\mathcal{R}(A)$ , так как частью поверхности множества  $M_d(A)$ , принадлежащей конусу  $a + \text{cone}(D_A(a) - a)$ , будет часть сферы с центром в точке  $a$  и радиусом  $d$ , равным диаметру множества  $A$ .

### 6. Решение прямой и обратной проблемы Данцера

Для задачи дополнения множества из  $\mathbb{R}^n$  до тела постоянной ширины в работе [3] сформулирована следующая (прямая) проблема Л. Данцера.

*Пусть  $A \subset \mathbb{R}^n$  — выпуклое гладкое тело. Существует ли гладкое выпуклое тело постоянной ширины  $d = \text{diam } A$ , содержащее заданное тело  $A$ ?*

Покажем, что регулярное дополнение  $W^0(A)$  дает положительное решение этой проблемы не только в  $\mathbb{R}^n$ , но и в гильбертовом пространстве. Для этого нам еще потребуется следующий результат М. В. Балашова.

**Теорема 6** (см. [7, §4.5]). *Пусть дано замкнутое выпуклое гладкое тело  $A$  из гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  (состоящее из более чем одной точки), и пусть  $B_d(0) \overset{*}{\neq} A \neq \emptyset$ . Тогда множество  $m_d(A)$  является гладким телом.*

Кроме этого, очевидно, справедлива следующая лемма.

**Лемма 5** (см. [7, §4.5]). *Пусть даны число  $\lambda > 0$ , выпуклые замкнутые ограниченные множества  $A, B \subset \mathcal{H}$ , причем множество  $A$  является гладким телом. Тогда множества  $\lambda A$  и  $A + B$  также будут гладкими телами.*

Опираясь на теорему 2, а также на приведенные выше теорему 6 и лемму 5, легко увидеть, что регулярное дополнение  $W^0(A)$  как полусумма гладкого тела  $m_d(A)$  и выпуклого множества  $M_d(A)$  будет гладким телом, т. е. положительно решает (прямую) проблему Л. Данцера.

Но в связи с этим возникает и другая (в некотором смысле обратная) проблема.

*Влечет ли гладкость тела  $A$  гладкость любого тела из семейства  $\mathcal{W}(A)$ ?*

Покажем, что это не так. Для этого приведем пример в  $\mathbb{R}^2$ , дающий отрицательный ответ на последний вопрос.

Возьмем на плоскости  $\mathbb{R}^2$  множество вершин  $A, B, D, C, E$  правильного пятиугольника со стороной длины  $a$  и диаметром  $d = 2a \sin(2\pi/5) = a(\sqrt{5} - 1)/2$ . Пусть для простоты сторона  $AB$  параллельна оси  $Oy$ , а точка  $C$  находится справа от  $AB$ . Проведем через две его несмежные вершины  $D, E$  эллипс с длинами полуосей  $d/2$  и  $\varepsilon > 0$ , где число  $\varepsilon$  удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon + a < d. \tag{6.1}$$

Вместо пятиугольника будем рассматривать новое множество, состоящее из этого эллипса и точек  $A, B, C$ . Заметим, что диаметр нового множества увеличился, так как эллипс, очевидно, пересекает окружности радиуса  $d$  с центрами в точках  $A$  и  $B$ . Для исправления этого слегка сдвинем эллипс влево по оси  $Ox$  на некоторое расстояние  $\delta > 0$  так, чтобы эллипс оказался внутри окружностей радиуса  $d$  с центрами в точках  $A$  и  $B$  и касался их. Отметим, что величина  $\delta$  будет меньше, чем число  $\varepsilon$ , так как сдвиг эллипса влево по оси  $Ox$  на  $\varepsilon$  разместит этот эллипс целиком в одной с точками  $A$  и  $B$  полуплоскости относительно выброшенной диагонали пятиугольника  $DE$ , т.е. окажется строго внутри указанных ранее окружностей.

Покажем, что диаметр полученного множества, состоящего из эллипса и трех точек  $A, B, C$ , равен  $d$ . Действительно, с одной стороны,  $|AC| = |BC| = d$ , поэтому диаметр не меньше,

чем  $d$ . С другой стороны, эллипс лежит внутри окружностей радиуса  $d$  с центрами в вершинах  $A$  и  $B$ , поэтому максимум расстояния от точек  $A$  и  $B$  до точек эллипса в точности равно  $d$ . Наконец, точка  $C$  удалена от эллипса на расстояние, не превосходящее  $\varepsilon + a$ , что в силу (6.1) строго меньше  $d$ . Таким образом, диаметр полученного множества равен  $d$ .

Пусть  $A'$  и  $B'$  — точки касания эллипса и окружностей радиуса  $d$  с центрами в вершинах  $A$  и  $B$  соответственно. Тогда  $|AA'| = |BB'| = d$ . Кроме того,  $|AC| = |BC| = d$ . По лемме 4 получаем, что в конус единственности данного множества будут входить векторы из конусов  $\text{cone}\{A' - A, C - A\}$ ,  $\text{cone}\{B' - B, C - B\}$ ,  $\text{cone}\{A - C, B - C\}$ , а также векторы из конусов, противоположных этим трем конусам.

Это означает, что конус  $\text{cone}\{A' - A, B' - B\}$  является подмножеством конуса единственности. Таким образом на этом конусе опорные точки границы любого тела  $W$  постоянной ширины  $d$ , описанного вокруг эллипса и вершин  $A$ ,  $B$  и  $C$ , будут состоять из дуг окружностей  $A'C$  и  $B'C$ , т. е. есть граница  $W$  не будет гладкой.

Осталось заметить, что  $W$  содержит в себе эллипс — множество с гладкой границей и того же диаметра  $d$ . Итак, мы показали, что вокруг эллипса можно описать негладкое тело постоянной ширины того же диаметра, что и сам эллипс. Это и завершает построение примера.

## 7. Пример вычисления опорной функции регулярного дополнения правильного тетраэдра

Рассмотрим задачу построения опорной функции регулярного дополнения  $W^0(A)$  для произвольного правильного тетраэдра  $A$  из  $\mathbb{R}^3$  с вершинами в некоторых точках  $v_1, v_2, v_3, v_4$  и ребром длины  $d$ .

Для удобства его построения рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  куб с центром в начале координат, ребра которого параллельны осям координат и по длине равны 2, т.е. вершины этого куба будут иметь координаты  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ .

Без ограничения общности рассмотрим такой тетраэдр  $A_0$ , у которого в качестве вершин  $v_1, v_2, v_3, v_4$  выбраны точки  $(1, 1, 1)$ ,  $(-1, -1, 1)$ ,  $(1, -1, -1)$ ,  $(-1, 1, -1)$ . При этом длина его ребра  $d = 2\sqrt{2}$ .

В силу следствия 1 для вычисления опорной функции тела  $W^0(A_0)$  достаточно вычислить опорную функцию  $\sigma(p)$  множества  $M_d(A_0)$ .

Отметим, что в случае тетраэдра  $A_0 = \text{co}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  множество  $M_d(A_0)$  в силу формулы (2.1), очевидно, вычисляется по формуле

$$M_d(A_0) = \bigcap \{B_d(v_i) \mid i = \overline{1, 4}\}. \quad (7.1)$$

Таким образом поверхность множества  $M_d(A_0)$  представляет из себя четыре одинаковые части четырех сфер с центрами в вершинах тетраэдра, пересекающиеся по дугам окружностей, которые в свою очередь состыковываются в вершинах тетраэдра.

Поэтому для нахождения опорной функции  $\sigma(p)$  необходимо для каждого вектора  $p$  указать, к какому типу границы принадлежит его опорная точка: к внутренней части одной из сфер, к внутренней части дуги пересечения двух сфер, к вершине тетраэдра — общей точке трех сфер и трех дуг. Отметим, что опорной точкой некоторого множества  $X$  в направлении вектора  $p \neq 0$  называется точка  $x_p \in X$  такая, что справедливо равенство  $\langle p, x_p \rangle = s(p, X)$ .

Напомним, что опорная функция точки  $v$  находится по формуле  $s(p, \{v\}) = \langle p, v \rangle$ , а шара  $B_r(v)$  — по формуле

$$s(p, B_r(v)) = r\|p\| + \langle p, v \rangle. \quad (7.2)$$

В силу изложенного выше не хватает лишь опорной функции окружности. Получим ее.

**Лемма 6.** Пусть окружность  $C_{rn}(v)$  в  $\mathbb{R}^3$  задана ее центром точкой  $v$ , единичным вектором  $n$ , нормальным к плоскости окружности, и ее радиусом  $r > 0$ . Тогда справедлива формула

$$s(p, C_{rn}(v)) = r\|p \times n\| + \langle p, v \rangle, \quad (7.3)$$

где  $p \times n$  означает векторное произведение векторов  $p$  и  $n$ .

Вместо того чтобы по вектору  $p$  находить, к какой части поверхности множества  $M_d(A_0)$  принадлежит его опорная точка, мы для каждой граничной точки множества  $M_d(A_0)$  укажем соответствующие ей векторы  $p$ , в направлении которых эта точка будет опорной. Таким образом в каждой граничной точке множества  $M_d(A_0)$  будем строить нормальный конус, который для удобства будем описывать через его пересечение не со сферой единичного радиуса, как это обычно делается, а с поверхностью исходного куба (т. е. куба с вершинами в точках  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ ).

Для описания нормальных конусов в граничных точках множества  $M_d(A_0)$  воспользуемся следующим простым фактом.

**Предложение 1.** Пусть на поверхности выпуклого телесного компакта  $X_0 \subset \mathbb{R}^3$  выбраны два множества  $X_1$  и  $X_2$ , причем  $X_2 \subset X_1 \subset X_0$ . Обозначим через  $\mathcal{K}_i(x)$  конус опорных направлений в точке  $x \in X_2$  к множеству  $X_i$ , где  $i = \overline{1, 2}$ . Тогда конус  $\mathcal{K}_1(x) \cap \mathcal{K}_2(x)$  может быть получен из решений уравнения  $s(p, X_1) = s(p, X_2) = \langle p, x \rangle$ .

**Нормальные конусы на пересечении двух сфер.** Найдем границу множества нормальных векторов  $p$ , для которых опорные точки множества  $M_d(A_0)$  принадлежат как сфере  $\partial B_d(v_3)$  (конус  $\mathcal{K}_1$ ), так и окружности, являющейся пересечением сфер  $\partial B_d(v_3)$  и  $\partial B_d(v_4)$  (конус  $\mathcal{K}_2$ ). Эта окружность проходит через вершины  $v_1$  и  $v_2$  и лежит в плоскости  $x = y$ . Центр ее находится в точке  $(v_3 + v_4)/2$ , а нормальный вектор к ее плоскости, длина которого равняется радиусу этой окружности, есть  $\sqrt{3}(v_3 - v_4)/2$ .

Согласно предложению 1 и формулам (7.3), (7.2), нужно решить уравнение

$$\sqrt{3}\|p \times (v_3 - v_4)\|/2 + \langle p, v_3 + v_4 \rangle/2 = 2\sqrt{2}\|p\| + \langle p, v_3 \rangle. \quad (7.4)$$

**Лемма 7.** Уравнение (7.4) равносильно уравнению  $\langle p, (1, -1, 0) \rangle = \sqrt{2}\|p\|/2$ .

В координатной форме при  $p = (p_1, p_2, p_3)$  получаем

$$p_1 - p_2 = \sqrt{2}\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}/2. \quad (7.5)$$

Возводя последнее в квадрат, придем к равенству:  $p_1^2 + p_2^2 - 4p_1p_2 = p_3^2$ . Пересекая полученный конус с верхней гранью куба, на которой справедливо равенство  $p_3 = 1$ , получаем уравнение

$$p_1^2 + p_2^2 - 4p_1p_2 = 1. \quad (7.6)$$

Это уравнение гиперболы с центром в точке  $(0, 0, 1)$  и двумя ветвями, проходящими через точки  $(0, -1, 1)$  и  $(1, 0, 1)$  — первая ветвь,  $(0, 1, 1)$  и  $(-1, 0, 1)$  — вторая ветвь.

Уравнению (7.5) удовлетворяет лишь первая ветвь. Вторую ветвь этой гиперболы получим при аналогичном вычислении границы нормальных конусов, опорные точки которых принадлежат сфере  $\partial B_d(v_4)$  и дуге окружности  $\partial B_d(v_3) \cap \partial B_d(v_4)$ . Таким образом получили, что нормальные конусы ко множеству  $M_d(A_0)$ , найденные в точках поверхности, которые принадлежат дуге окружности  $\partial B_d(v_3) \cap \partial B_d(v_4)$ , при пересечении с верхней гранью куба дают точки, лежащие между двумя ветвями полученной гиперболы.

**Нормальные конусы на пересечении трех сфер.** Теперь рассмотрим границу нормальных конусов ко множеству  $M_d(A_0)$  (в пересечении с верхней гранью куба, где  $p_3 = 1$ )

в опорных точках, принадлежащих пересечению окружности  $\partial B_d(v_3) \cap \partial B_d(v_4)$  и вершины тетраэдра  $v_1$ .

В силу предложения 1 и формул (7.3) (7.1) приходим к необходимости решения уравнения

$$\sqrt{3}\|p \times (v_3 - v_4)\|/2 + \langle p, v_3 + v_4 \rangle / 2 = \langle p, v_1 \rangle. \quad (7.7)$$

**Лемма 8.** Уравнение (7.7) эквивалентно уравнению  $\langle p, v_2 \rangle = 0$ .

В силу аналогичных вычислений для вершины  $v_2$  и дуги окружности  $\partial B_d(v_3) \cap \partial B_d(v_4)$  получим другое уравнение  $\langle p, v_1 \rangle = 0$ .

Выражая в координатах вектора  $p = (p_1, p_2, p_3)$  последние два уравнения, получаем, что они эквивалентны уравнениям отрезков на верхней грани куба

$$p_1 + p_2 - 1 = 0 \iff \langle p, v_2 \rangle = 0, \quad p_1 + p_2 + 1 = 0 \iff \langle p, v_1 \rangle = 0. \quad (7.8)$$

**Разбиение множества нормалей на области.** Таким образом, получили, что нормальные конусы к точкам поверхности множества  $M_d(A_0)$  разбивают верхнюю грань  $|p_1| \leq 1$ ,  $|p_2| \leq 1$ ,  $p_3 = 1$  куба опорных направлений граничными кривыми (7.6), (7.8) на 5 областей. При этом принадлежность вектора  $p$  одной из пяти областей соответствует принадлежности опорной точки множества  $M_d(A_0)$  в данном направлении  $p$  одному типу его границы (внутренней точке на одной из сфер, внутренней точке дуги окружности, вершине тетраэдра). В результате такого разбиения легко выписать опорную функцию  $\sigma(p)$  множества  $M_d(A_0)$  для нормальных векторов из верхней грани куба. Сделаем это позже при описании опорной функции множества  $W^0(A_0)$ .

Аналогичным образом будет разбита на пять областей каждая из граней куба опорных направлений, причем заметим, что на противоположных гранях ветви гиперболы и прямые меняются местами. В силу этих разбиений также можно вычислить функцию  $\sigma(p)$  на остальных гранях куба.

**Значения опорной функции тела  $W^0(A_0)$ .** Теперь мы можем указать значения опорной функции тела  $W^0(A_0)$ , содержащего определенный выше правильный тетраэдр  $A_0$ . Сделаем это опять лишь для тех векторов  $p$ , у которых  $p_3 \geq 0$ ,  $\|p_1\| \leq p_3$ ,  $\|p_2\| \leq p_3$ , т. е. для векторов, которые пересекают верхнюю грань куба опорных направлений с вершинами  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ . Для остальных граней значения опорной функции находятся соответствующей заменой индексов.

В связи с тем, что в силу формулы (3.2) придется учитывать не только значения  $\sigma(p)$  на верхней грани, но и значения  $\sigma(-p)$ , т. е. значения на противоположной грани куба, верхнюю грань куба разделим на области, каждую из которых рассмотрим отдельно.

**Область 1** задается неравенством  $-p_1 - p_2 + p_3 < 0$ . В ней  $\sigma(p) = \langle p, v_1 \rangle$ ,  $\sigma(-p) = d\|p\| - \langle p, v_1 \rangle$ , откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = \langle p, v_1 \rangle$ . (Напомним, что  $d = 2\sqrt{2}$ .)

**Область 1'** задается неравенством  $p_1 + p_2 + p_3 < 0$ . В ней  $\sigma(p) = \langle p, v_2 \rangle$ ,  $\sigma(-p) = d\|p\| - \langle p, v_2 \rangle$ , откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = \langle p, v_2 \rangle$ .

**Область 2** задается неравенством  $p_1 - p_2 - p_3 > 0$ . В ней  $\sigma(p) = d\|p\| + \langle p, v_4 \rangle$ ,  $\sigma(-p) = -\langle p, v_4 \rangle$ , откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = d\|p\| + \langle p, v_4 \rangle$ .

**Область 2'** задается неравенством  $-p_1 + p_2 - p_3 > 0$ . В ней  $\sigma(p) = d\|p\| + \langle p, v_3 \rangle$ ,  $\sigma(-p) = -\langle p, v_3 \rangle$ , откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = d\|p\| + \langle p, v_3 \rangle$ .

**Область 3** задается системой неравенств  $p_1^2 + p_2^2 - 4p_1p_2 > p_3^2$  и  $p_1 - p_2 - p_3 < 0$ . В ней  $\sigma(p) = d\|p\| + \langle p, v_4 \rangle$ ,  $\sigma(-p) = \sqrt{3}\|p \times (v_1 - v_2)\|/2 - \langle p, v_1 + v_2 \rangle / 2$ , откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = d\|p\| - \sqrt{3}\|p \times (v_1 - v_2)\|/4 - \langle p, v_3 - v_4 \rangle / 4$ .

**Область 3'** задается системой неравенств  $p_1^2 + p_2^2 - 4p_1p_2 > p_3^2$  и  $-p_1 + p_2 - p_3 < 0$ . В ней  $\sigma(p) = d\|p\| + \langle p, v_3 \rangle$ ,  $\sigma(-p) = \sqrt{3}\|p \times (v_1 - v_2)\|/2 - \langle p, v_1 + v_2 \rangle / 2$ , откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = d\|p\| - \sqrt{3}\|p \times (v_1 - v_2)\|/4 + \langle p, v_3 - v_4 \rangle / 4$ .

Область 4 задается системой неравенств  $p_1^2 + p_2^2 + 4p_1p_2 > p_3^2$  и  $-p_1 - p_2 + p_3 > 0$ . В ней  $\sigma(p) = \sqrt{3}\|p \times (v_3 - v_4)\|/2 + \langle p, v_3 + v_4 \rangle / 2$ ,  $\sigma(-p) = d\|p\| - \langle p, v_1 \rangle$ , откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = \sqrt{3}\|p \times (v_3 - v_4)\|/4 + \langle p, v_1 - v_2 \rangle / 4$ .

Область 4' задается системой неравенств  $p_1^2 + p_2^2 + 4p_1p_2 > p_3^2$  и  $p_1 + p_2 + p_3 > 0$ . В ней  $\sigma(p) = \sqrt{3}\|p \times (v_3 - v_4)\|/2 + \langle p, v_3 + v_4 \rangle / 2$ ,  $\sigma(-p) = d\|p\| - \langle p, v_2 \rangle$  откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = \sqrt{3}\|p \times (v_3 - v_4)\|/4 - \langle p, v_1 - v_2 \rangle / 4$ .

Область 5 задается системой неравенств  $p_1^2 + p_2^2 \pm 4p_1p_2 < p_3^2$ . В ней  $\sigma(p) = \sqrt{3}\|p \times (v_3 - v_4)\|/2 + \langle p, v_3 + v_4 \rangle / 2$ ,  $\sigma(-p) = \sqrt{3}\|p \times (v_1 - v_2)\|/2 - \langle p, v_1 + v_2 \rangle / 2$ , откуда следует  $s(p, W^0(A_0)) = d\|p\|/2 + \sqrt{3}(\|p \times (v_3 - v_4)\|/4 - \|p \times (v_1 - v_2)\|)$ . Аналогичным образом может быть выписана опорная функция множества  $W^0(A_0)$  для других граней куба.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Minkowski H.** Geometrie der Zahlen. Leipzig; Berlin: Teubner, 1910. 256 p.
2. **Боннезен Т., Фенхель В.** Теория выпуклых тел. М.: ФАЗИС, 2002. 210 с.
3. **Данцер Л., Грюмбаум Б., Кли В.** Теорема Хелли и ее применения. М.: Мир, 1968. 159 с.
4. **Chakerian G.D., Groemer H.** Convex bodies of constant width // Convexity and its Applications / Eds. P.M. Gruber, J.M. Wills. Basel: Birkhäuser, 1983. P. 49–96.
5. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 470 с.
6. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974, 480 с.
7. **Половинкин Е.С., Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 436 с.
8. **Euler L.** De curvis triangularibus // Acta Acad. Petropol. 1778. Vol. 2. P. 3–30.
9. **Minkowski H.** Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs // Gesammelte Abhandlungen. Leipzig; Berlin: Teubner, 1911. Bd. 2. S. 131–229.
10. **Minkowski H.** О телах постоянной ширины // Mat. сб. 1905. Т. 25. С. 505–508; Gesammelte Abhandlungen. Bd. 2. Leipzig; Berlin: Teubner, 1911. Bd. 2. S. 277–279.
11. **Blaschke W., Hensberg G.** Lehrsätze über konvexe Körper // Jber. Deutsch. Math. Vereinig. 1917. Bd. 26. S. 215–220.
12. **Lebesgue H.** Sur quelques questions de minimum, relatives aux courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations // J. Math. Pures Appl. 1921. Vol. 4, iss. 8. P. 67–96.
13. **Jessen B.** Über konvexe Punktmengen konstanter Breite // Math. Z. 1928. Bd. 29. S. 378–380.
14. **Eggleston H.G.** Sets of constant width in finite dimensional Banach spaces // Israel J. Math. 1965. Vol. 3. P. 163–172.
15. **Карасев Р.Н.** О характеристике порождающих множеств // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль: ЯрГУ, 2001. Т. 8, № 2. С. 3–9.
16. **Половинкин Е.С.** О сильно выпуклых множествах и сильно выпуклых функциях // Итоги науки и техники. М.: Изд-во ВИНТИ, 1999. Т. 61. С. 66–138. (Современная математика и ее приложения.)
17. **Половинкин Е.С.** О телах постоянной ширины // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 3. С. 313–315.
18. **Половинкин Е.С., Сиденко С.В.** Дополнение множеств до тел постоянной ширины // Учен. записки Казанского гос. ун-та. 2006. Т. 148, № 2. С. 132–143. (Физ.-мат. науки.)
19. **Половинкин Е.С., Сиденко С.В.** Дополнение тетраэдра до тела постоянной ширины // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики и их приложения в задачах физики: междувед. сб. ст. М.: МФТИ, 2005. С. 184–198.

Половинкин Евгений Сергеевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. кафедрой  
Московский физ.-техн. ин-т (гос. ун-т)  
e-mail: polovinkin@mail.mipt.ru

Поступила 14.08.2009

УДК 517.977

## ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ<sup>1</sup>

А. Н. Сесекин, Ю. В. Фетисова

Для нелинейных систем функционально-дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в правой части формализовано понятие решения на основе замыкания гладких решений в пространстве функций ограниченной вариации. Получены достаточные условия существования и единственности решения. Для линейных систем с распределенным запаздыванием и обобщенным воздействием в матрице системы получены условия существования решения и формула Коши для его представления.

Ключевые слова: обобщенное воздействие, разрывное решение, функционально-дифференциальное уравнение, запаздывание.

A. N. Seseikin, Yu. V. Fetisova. Functional-differential equations in the space of functions of bounded variation.

For nonlinear systems of functional-differential equations with a generalized action on the right-hand side, the notion of a solution is formalized based on the closure of smooth solutions in the space of functions of bounded variation. Sufficient conditions are obtained for the existence and uniqueness of the solution. For linear systems with distributed delay and generalized action in the system matrix, conditions for the existence of a solution and the Cauchy formula for representing the solution are derived.

Keywords: generalized action, discontinuous solution, functional-differential equation, delay.

### Введение

В работе рассматривается задача формализации понятия решения и его описания для функционально-дифференциальных уравнений с обобщенным воздействием в правой части. Для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений этот вопрос изучался в [1–9].

В этих работах определение решения основывается на построении замыкания множества гладких решений в топологии поточечной сходимости. Решения в этом случае будут принадлежать пространству функций ограниченной вариации. В [10] отмечалось, что такой подход является естественным с точки зрения теории управления.

Для систем с дискретным запаздыванием данный подход реализован в [11]. В настоящей работе сделано развитие этого подхода на функционально-дифференциальные уравнения. Функционально-дифференциальные уравнения с импульсным воздействием также рассматривались в [12]. Особенностью работы [12] является то, что пространство, в котором определены решения, получается из пространства функций ограниченной вариации удалением сингулярных составляющих и величины скачков определяются с помощью алгебраических уравнений.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке программы интеграционных фундаментальных исследований УрО РАН и СО РАН “Качественный и численный анализ эволюционных уравнений и управляемых систем”.

# 1. Аппроксимируемые решения функционально-дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x_t(\cdot)) + B(t, x(t))\dot{v}(t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (1.1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (1.2)$$

где  $x(t)$ ,  $v(t)$  — соответственно  $n$ - и  $r$ -мерные вектор-функции времени;  $x_t(\cdot)$  — функция-предыстория

$$x_t(\cdot) = \{x(t+s), -\tau \leq s < 0\}.$$

Как и в [13], определим фазовое пространство  $H = \mathbb{R}^n \times Q[-\tau, 0]$ , элементами которого являются пары  $h = \{x, y(\cdot)\}$ , где  $Q[-\tau, 0]$  — пространство кусочно-непрерывных функций с нормой  $\|y(\cdot)\|_\tau = \sup_{-\tau \leq s < 0} \|y(s)\|$ . В последнем выражении супремум берется от евклидовой нормы вектор-функции  $y(s)$ . Норма в пространстве  $H$  определяется следующим образом:

$$\|h\|_H = \max \{\|x\|, \|y(\cdot)\|\}.$$

Будем полагать, что функционал  $f(t, x(t), x_t(\cdot))$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$  непрерывен на  $[t_0, \vartheta] \times H$ ,  $B(t, x)$  —  $n \times m$ -матрица-функция, непрерывная по совокупности переменных,  $\tau > 0$ ,  $\varphi(t)$  — кусочно-непрерывная начальная функция, заданная на  $[t_0 - \tau, t_0]$ . Кроме того, будем предполагать, что для всех  $t$  и  $h$  на  $[t_0, \vartheta] \times H$  выполняются условия

$$\|f(t, h)\| \leq \kappa(1 + \|h\|_H), \quad (1.3)$$

$$\|f(t, h_1) - f(t, h_2)\| \leq L\|h_1 - h_2\|_H$$

и для всех  $t$  и  $x$  на  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$  выполняются условия

$$\|B(t, x)\| \leq \kappa(1 + \|x\|), \quad (1.4)$$

$$\|B(t, x^*) - B(t, x_*)\| \leq L\|x^* - x_*\|,$$

где  $\kappa$ ,  $L$  — некоторые положительные постоянные.

Если  $v(t)$  — абсолютно непрерывная функция, то при сделанных выше предположениях согласно [13–15] на  $[t_0, \vartheta]$  существует единственное решение задачи Коши (1.1), (1.2).

Далее мы будем предполагать, что все рассматриваемые  $v(t)$  будут подчинены ограничению

$$\operatorname{var}_{[t_0, \vartheta]} v(\cdot) \leq a, \quad (1.5)$$

где  $\operatorname{var}_{[t_0, \vartheta]} v(\cdot)$  есть вариация вектор-функции  $v(t)$ , вычисленная на отрезке  $[t_0, \vartheta]$ . Заметим, что вариация вектор-функции, вообще говоря, определяется неоднозначно. В работе под вариацией вектор-функции  $y(t)$  будем понимать супремум суммы  $\sum_{i=0}^{n-1} \|y(t_{i+1}) - y(t_i)\|$ , где супремум вычисляется по всевозможным конечным разбиениям отрезка  $[t_0, \vartheta]$ , а в качестве нормы вектора берется евклидова норма.

В случае, когда  $v(t)$  — функция ограниченной вариации, производные в (1.1) необходимо понимать в обобщенном смысле [16]. Если функция  $v(t)$  разрывна в некоторый момент времени, то система подвергается импульсному воздействию в этот момент. В результате второй аргумент функции  $B(t, x(t))$  оказывается разрывным и в слагаемом  $B(t, x(t))\dot{v}(t)$  возникает некорректная операция умножения разрывной функции на обобщенную. Преодолеть отмеченную некорректность можно, сделав аналогично [6] следующее определение решения.

**О п р е д е л е н и е 1.** Аппроксимируемым решением системы (1.1) с начальным условием (1.2) назовем функцию ограниченной вариации  $x(t)$ , являющуюся поточечным пределом на  $[t_0, \vartheta]$  последовательности абсолютно непрерывных решений  $x_k(t)$  этой системы, порожденной последовательностью абсолютно непрерывных функций  $v_k(t)$ , поточечно сходящейся к вектор-функции ограниченной вариации  $v(t)$ , если этот предел не зависит от выбора последовательности.

Пусть  $v_k(t)$  — произвольная последовательность абсолютно непрерывных функций, поточечно сходящаяся к функции ограниченной вариации  $v(t)$ , а  $x_k(t)$  — соответствующая последовательность решений системы (1.1) с начальным условием (1.2). Каждый элемент этой последовательности при сделанных выше предположениях является решением интегрального уравнения

$$x_k(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\xi, h_k[\xi]) d\xi + \int_{t_0}^t B(\xi, x_k(\xi)) dv_k(\xi), \quad (1.6)$$

где  $h_k[\xi] = \{x_k(\xi), x_{k\xi}(\cdot)\}$ , а интегралы понимаются в смысле Римана — Стильбеса.

**Лемма.** При сделанных предположениях последовательности  $x_k(t)$  и  $\text{var}_{[t_0, \vartheta]} x_k(\cdot)$  равномерно ограничены.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Вычисляя нормы левой и правой частей в (1.6) и оценивая норму правой части с помощью (1.3), (1.4), получим

$$\|x_k(t)\| \leq \|\varphi(t_0)\| + \int_{t_0}^t \kappa(1 + \|h_k[\xi]\|_H) d\left(\xi + \text{var}_{[t_0, \xi]} v_k(\cdot)\right). \quad (1.7)$$

Вычислим значения максимума на отрезке  $[t - \tau, t]$  от левой и правой частей в (1.7). В силу того что интеграл в правой части в (1.7) — монотонно возрастающая функция, максимум правой части на  $[t - \tau, t]$  будет достигаться в точке  $t$ . Поэтому будет справедливо неравенство

$$\|h_k[t]\|_H \leq \|\varphi(t_0)\| + \int_{t_0}^t \kappa(1 + \|h_k[\xi]\|_H) d\left(\xi + \text{var}_{[t_0, \xi]} v_k(\cdot)\right).$$

Согласно лемме 3.2 из [6] для решения этого неравенства справедлива оценка

$$\|h_k[t]\|_H \leq \|\varphi(t_0)\| + \kappa(1 + \|\varphi(t_0)\|) e^{\kappa(\vartheta - t_0 + a)} (\vartheta - t_0 + a) = c_1. \quad (1.8)$$

Для вариации функции  $x_k(t)$ , учитывая (1.1), неравенство треугольника и оценку интеграла Стильбеса, имеем

$$\text{var}_{[t_0, t]} x_k(\cdot) = \int_{t_0}^t \|\dot{x}_k(s)\| ds \leq \int_{t_0}^t \|f(s, x(s), x_s(\cdot))\| ds + \int_{t_0}^t \|B(s, x(s))\| d \text{var}_{[t_0, s]} v(\cdot). \quad (1.9)$$

Из (1.9) с учетом (1.3)–(1.5) и (1.8) следует

$$\text{var}_{[t_0, t]} x_k(\cdot) \leq \kappa(1 + c_1)(\vartheta - t_0 + a),$$

что и завершает доказательство леммы.

**Теорема 1.** Пусть выполняются все оговоренные выше условия. Предположим также, что существуют непрерывные по  $x$  частные производные  $\partial b_{i,j}/\partial x_\nu$  элементов матрицы-функции  $B(t, x)$ , удовлетворяющие следующим равенствам:

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b_{ij}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu l}(t, x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial b_{il}(t, x)}{\partial x_\nu} b_{\nu j}(t, x), \quad (1.10)$$

$i = 1, 2, \dots, n; j, l = 1, 2, \dots, r$ . Тогда для всякой вектор-функции ограниченной вариации  $v(t)$  существует аппроксимируемое решение  $x(t)$  задачи Коши (1.1), (1.2), удовлетворяющее интегральному уравнению

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\xi, x(\xi), x_\xi(\cdot)) d\xi + \int_{t_0}^t B(\xi, x(\xi)) dv^c(\xi) + \sum_{t_i \leq t, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) + \sum_{t_i < t, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)), \quad (1.11)$$

где  $v^c(t)$  — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации  $v(t)$ ;  $W_- (W_+)$  — множество точек левых(правых) разрывов функции  $v(t)$ ;

$$\Delta v(t - 0) = v(t) - v(t - 0), \quad \Delta v(t + 0) = v(t + 0) - v(t),$$

а функции скачков определяются уравнениями:

$$S(t, x, \Delta v) = z(1) - z(0),$$

$$\dot{z}(\xi) = B(t, z(\xi))\Delta v, \quad z(0) = x;$$

здесь  $t, \Delta v$  могут принимать значения  $t - 0, \Delta v(t - 0)$  и  $t + 0, \Delta v(t + 0)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Последовательность  $v_k(t)$  абсолютно непрерывных функций поточечно сходится к функции  $v(t) \in BV[t_0, \vartheta]$ . Из леммы следует, что элементы последовательности  $x_k(t)$  равномерно ограничены и равномерно ограничены их вариации. Тогда согласно теореме Хелли [17] из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность  $x_{k_m}(t)$ , поточечно сходящуюся к некоторой вектор-функции ограниченной вариации  $x(t)$  (далее второй индекс у подпоследовательности  $x_{k_m}(t)$  будем опускать).

Рассмотрим предельный переход в интегральном уравнении (1.6). При сделанных предположениях в силу теоремы Лебега предельный переход в первом интеграле не вызывает проблем. Предельный переход во втором интеграле можно провести аналогично [9] с использованием замены времени

$$\xi = t + \operatorname{var}_{[t_0, t]} v_k(\cdot).$$

В результате получим, что предельная функция  $x(t)$  должна удовлетворять интегральному уравнению (1.11).

Теперь докажем, что решение уравнения (1.11) единственно. Предположим противное. Пусть  $\bar{x}(t)$  и  $\bar{\bar{x}}(t)$  — различные решения уравнения (1.11), удовлетворяющие начальному условию (1.2). С помощью (1.3), (1.4) и оценок на величину скачков траектории из [9] нетрудно получить следующее неравенство ( $\bar{h}(t) = \{\bar{x}(t), \bar{x}_t(\cdot)\}$ ,  $\bar{\bar{h}}(t) = \{\bar{\bar{x}}(t), \bar{\bar{x}}_t(\cdot)\}$ ):

$$\begin{aligned} \|\bar{h}[t] - \bar{\bar{h}}[t]\|_H &\leq \int_{t_0}^t L \|\bar{h}[\xi] - \bar{\bar{h}}[\xi]\|_H d(\xi + \operatorname{var}_{[t_0, \xi]} v(\cdot)) \\ &+ \sum_{t_i \leq t, t_i \in W_-} (e^{L|\Delta v(t_i - 0)|} - 1) \|\bar{h}[t_i - 0] - \bar{\bar{h}}[t_i - 0]\|_H \\ &+ \sum_{t_i < t, t_i \in W_+} (e^{L|\Delta v(t_i + 0)|} - 1) \|\bar{h}[t_i] - \bar{\bar{h}}[t_i]\|_H. \end{aligned}$$

Применяя к этому неравенству лемму 3.4 из [9], получим

$$\|\bar{h}[t] - \bar{\bar{h}}[t]\|_H \leq 0,$$

что и доказывает единственность решения уравнения (1.11). В свою очередь факт единственности решения уравнения (1.11) обеспечивает независимость решения от способа аппроксимации обобщенного воздействия.

**З а м е ч а н и е 1.** Если матрица  $B(t, x)$  линейна по  $x$ , т.е. выражение  $B(t, x)\dot{v}(t)$  имеет вид  $\left(\sum_{i=1}^r B_i(t)\dot{v}_i(t)\right)x$ , где  $v_i$  — координаты вектора  $v$ , то условие (1.10) превращается в условие взаимной коммутативности матриц  $B_i$  ( $i \in \overline{1, m}$ ) для каждого  $t \in [t_0, \vartheta]$ .

## 2. Формула Коши для разрывных решений линейных дифференциальных уравнений с последствием

Рассмотрим следующую линейную неоднородную систему:

$$\dot{x}(t) = \bar{A}(t)x(t) + A_\tau(t)x(t - \tau) + \int_{-\tau}^0 C(t, s)x(t + s)ds + h(t), \quad (2.1)$$

где  $\bar{A}(t) = A(t) + \sum_{i=1}^r D_i(t)\dot{v}_i(t)$ ,  $A(t)$ ,  $A_\tau(t)$  и  $C(t, s)$  — непрерывные  $n \times n$ -матрицы-функции;  $h(t)$  — вектор-функция размерности  $n$  с суммируемыми элементами;  $D_i(t)$  ( $i \in \overline{1, r}$ ) — непрерывные  $n \times n$ -матрицы-функции;  $v_i(t)$  — компоненты  $r$ -мерного вектора  $v(t)$  — функции ограниченной вариации;  $\tau > 0$ ,  $\varphi(t)$  — начальная функция, заданная на отрезке  $[t_0 - \tau, t_0]$ .

**Теорема 2.** Пусть в системе (2.1) матрицы  $D_i(t)$  ( $i \in \overline{1, r}$ ) для каждого  $t \in [t_0, \vartheta]$  взаимно коммутативны, тогда аппроксимированное решение этой системы существует и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} x(t) = & \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t A(\xi)x(\xi) d\xi + \sum_{i=1}^r \int_{t_0}^t D_i(\xi)x(\xi) d v_i^c(\xi) \\ & + \int_{t_0}^t A_\tau(\xi)x(\xi - \tau) d\xi + \int_{t_0}^t \int_{-\tau}^0 C(\xi, s)x(\xi + s) d\xi \\ & + \int_{t_0}^t h(\xi) d\xi + \sum_{t_i \leq t, t_i \in W_-} S(t_i, x(t_i - 0), \Delta v(t_i - 0)) \\ & + \sum_{t_i < t, t_i \in W_+} S(t_i, x(t_i), \Delta v(t_i + 0)), \end{aligned}$$

где  $v^c(t)$  — непрерывная составляющая функции ограниченной вариации  $v(t)$ ;  $W_-$  ( $W_+$ ) — множество точек левых(правых) разрывов функции  $v(t)$ ;

$$\Delta v(t - 0) = v(t) - v(t - 0), \quad \Delta v(t + 0) = v(t + 0) - v(t);$$

$$S(t, x, \Delta v) = z(1) - z(0),$$

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{i=1}^r D_i(t)x(\xi) \Delta v_i(t), \quad z(0) = x.$$

Справедливость теоремы нетрудно установить, воспользовавшись результатом теоремы 1.

**Теорема 3.** При предположениях теоремы 2 аппроксимируемое решение системы (2.1) представимо в виде

$$x(t) = x^{hom}(t) + \int_{t_0}^t U(t, \sigma)h(\sigma) d\sigma,$$

где  $x^{hom}(t)$  — решение соответствующей однородной системы;  $U(t, \sigma)$  — фундаментальная матрица системы (2.1), являющаяся решением интегрального уравнения

$$U(t, \sigma) = \begin{cases} E + \int_{\sigma}^t A(\xi)U(\xi, \sigma)d\xi + \sum_{i=1}^r \int_{\sigma}^t D_i(\xi)U(\xi, \sigma) dv_i^c(\xi) \\ + \int_{\sigma}^t A_{\tau}(\xi)U(\xi - \tau, \sigma)d\xi + \int_{\sigma}^t \int_{-\tau}^0 C(\xi, s)U(\xi + s, \sigma)dsd\xi \\ + \sum_{t_i \leq t, t_i \in W_-} S(t_i, U(t_i - 0, \sigma), \Delta v(t_i - 0)) \\ + \sum_{t_i < t, t_i \in W_+} S(t_i, U(t_i, \sigma), \Delta v(t_i + 0)), & t \geq \sigma, \\ 0, & \sigma - \tau \leq t < \sigma; \end{cases}$$

здесь функции скачков  $S(t, U(t, \sigma), \Delta v(t))$  определяются уравнениями

$$S(t, U(t, \sigma), \Delta v(t)) = z(1) - z(0),$$

$$\dot{z}(\xi) = \sum_{i=1}^r D_i(t)z(\xi)\Delta v_i(t), \quad z(0) = U(t, \sigma). \tag{2.2}$$

**Доказательство.** Пусть  $v_k(t)$  — последовательность абсолютно непрерывных функций, поточечно сходящаяся к функции ограниченной вариации  $v(t)$ . Каждый элемент соответствующей последовательности абсолютно непрерывных решений  $x_k(t)$  системы (2.2) согласно теореме о вариации произвольных постоянных [18] удовлетворяет следующему уравнению:

$$x_k(t) = x_k^{hom}(t) + \int_{t_0}^t U_k(t, \sigma)h(\sigma) d\sigma, \tag{2.3}$$

где  $x_k^{hom}(t)$  — решение соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений;  $U_k(t, \sigma)$  — решение интегрального уравнения

$$U_k(t, \sigma) = \begin{cases} E + \int_{\sigma}^t A(\xi)U_k(\xi, \sigma) d\xi + \sum_{i=1}^r \int_{\sigma}^t D_i(\xi)U_k(\xi, \sigma) dv_{i_k}(\xi) \\ + \int_{\sigma}^t A_{\tau}(\xi)U_k(\xi - \tau, \sigma)d\xi + \int_{\sigma}^t \int_{-\tau}^0 C(\xi, s)U_k(\xi + s, \sigma)ds d\xi, & t \geq \sigma, \\ 0, & \sigma - \tau \leq t < \sigma. \end{cases}$$

Несложно показать, что последовательность  $x_k(t)$  ограничена, и последовательность вариаций вектор-функций  $x_k(t)$  на  $[t_0, \vartheta]$  также ограничена. Пусть последовательность  $x_k(t)$  на  $[t_0, \vartheta]$  поточечно сходится к  $x(t)$ . В противном случае согласно теореме Хелли [17] мы можем выбрать сходящуюся подпоследовательность из последовательности  $x_k(t)$ . Аналогичным

образом можно показать, что последовательность  $U_k(t, \sigma)$  поточечно сходится к некоторой матрице-функции  $U(t, \sigma)$  такой, что  $U(t, \sigma)$  является функцией ограниченной вариации как по переменной  $t$ , так и по переменной  $\sigma$ .

Тогда согласно теореме Лебега [17] в равенстве (2.3) возможно перейти к пределу при  $k \rightarrow \infty$ . В результате получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{hom}(t) + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t U_k(t, \sigma) h(\sigma) d\sigma \\ &= x^{hom}(t) + \int_{t_0}^t \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(t, \sigma) h(\sigma) d\sigma = x^{hom}(t) + \int_{t_0}^t U(t, \sigma) h(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

где  $U(t, \sigma)$  по теореме (4) является решением интегрального уравнения (2.2).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kurzweil J.** Generalised Ordinary Differential Equations // Czechosl. Math. J. 1958. Vol. 8, no. 1. P. 360–388.
2. **Левин А.Ю.** Вопросы теории обыкновенного линейного уравнения // Вестн. Ярослав. ун-та: Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. 1974. Вып. 8. С. 122–144.
3. **Дмитриев М.Г.** Дифференциальные соотношения для начального скачка в одной сингулярно-возмущенной задаче и их приложения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264, № 4. С. 804–806.
4. **Миллер Б.М.** Оптимизация динамических систем с обобщенными управлениями // Автоматика и телемеханика. 1989. № 6. С. 23–34.
5. **Persson J.** Regularization of nonlinear measure differential equations // Matematiche. 1989. Vol. 44, no. 1. P. 113–130.
6. **Завалишчин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
7. **Bressan A., Rampazzo F.** Impulsive control systems with commutative vector fields // J. Optim. Theory Appl. 1991. Vol. 71, no. 1. P. 67–83.
8. **Bressan A., Rampazzo F.** Impulsive control systems without commutativity assumptions // J. Optim. Theory Appl. 1994. Vol. 81, no. 3. P. 435–457.
9. **Zavalishchin S.T., Seseikin A.N.** Dynamic impulse systems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 268 p.
10. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
11. **Fetisova Y.V., Seseikin A.N.** Discontinuous solutions of differential equations with time delay // WSEAS Transactions on Systems. 2005. Vol. 4, no. 5. P. 487–492.
12. **Анохин А.В.** О линейных функционально-дифференциальных уравнениях с обобщенными возмущениями. // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 5. С. 1037–1040.
13. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 256 с.
14. **Куржанский А.Б.** О существовании решений уравнений с последствием // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 10. С. 1800–1809.
15. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения типа Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией: автореф. дис. . . д-ра физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2004. 32 с.

16. **Владимиров В.С.** Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
17. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 750 с.
18. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.

Сесекин Александр Николаевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики  
e-mail: sesekin@imm.uran.ru

Поступила 26.05.2009

Фетисова Юлия Валерьевна  
ведущий математик  
Ин-т математики и механики  
e-mail: j.v.fetisova@imm.uran.ru

УДК 519.853

## АППРОКСИМАЦИОННЫЕ И РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА РАСШИРЕННЫХ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ В ВЫПУКЛОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ<sup>1</sup>

В. Д. Скарин

Исследуются возможности применения расширенных штрафных функций для регуляризации и оптимальной коррекции задач выпуклого программирования. Формулируются условия сходимости соответствующих методов, предлагается итерационный алгоритм для задачи линейной оптимизации.

Ключевые слова: выпуклое программирование, расширенные штрафные функции, несобственная задача, некорректная задача, оптимальная коррекция, метод регуляризации.

V. D. Skarin. Approximation and regularization properties of augmented penalty functions in convex programming.

The possibilities of using augmented penalty functions for the regularization and optimal correction of convex programming problems are investigated. Convergence conditions are formulated for the corresponding methods and an iteration algorithm for a linear optimization problem is proposed.

Keywords: convex programming, augmented penalty functions, improper problem, ill-posed problem, optimal correction, regularization method.

## Введение

Общеизвестны (см., например, [1–4]) преимущества методов модифицированной функции Лагранжа для решения задач выпуклой оптимизации по сравнению с классическими вариантами метода штрафных функций. В работе [5] для задачи

$$\min \{f_0(x) : x \in X\}, \quad (1)$$

где  $X = \{x : f(x) \leq 0\}$ ,  $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$ ,  $f_i(x)$  — выпуклые дифференцируемые функции, определенные на  $\mathbb{R}^n$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), исследовалась модифицированная функция Лагранжа

$$F(x, \lambda, r) = L(x, \lambda) + \varphi(x, r),$$

где  $L(x, \lambda)$  — стандартная функция Лагранжа для задачи (1):  $L(x, \lambda) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x)$ ,  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \geq 0$ ,  $\varphi(x, r)$  — функция штрафа за нарушение ограничений, определяющих множество  $X$ ,  $r = [r_1, \dots, r_m] > 0$ . Благодаря наличию слагаемого  $\varphi(x, r)$  функцию  $F(x, \lambda, r)$  можно трактовать и как некоторое расширение штрафной функции.

Пусть  $\varphi(x, r)$  — функция квадратичного штрафа

$$\varphi(x, r) = \sum_{i=1}^m r_i f_i^{+2}(x), \quad f_i^{+}(x) = \max\{0, f_i(x)\}.$$

Предположим, что существует  $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$  — седловая точка функции  $L(x, \lambda)$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ . Тогда связь между  $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$  и решением задачи

$$\inf_x \{\Phi(x, r) = f_0(x) + \varphi(x, r)\} \quad (= \bar{\Phi}_r) \quad (2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00399) и программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-2081.2008.1).

выражается хорошо известным [6] соотношением

$$f_0(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \frac{\bar{\lambda}_i^2}{4r_i} \leq \bar{\Phi}_r \leq f_0(\bar{x}), \quad (3)$$

справедливым для любого  $r > 0$ .

Из неравенств (3) следует, что  $\bar{\Phi}_r \rightarrow f_0(\bar{x})$  при  $\min_{1 \leq i \leq m} r_i \rightarrow +\infty$ . При этом с ростом  $r$  ухудшается обусловленность [2] функции  $\Phi(x, r)$ , что требует значительных вычислительных затрат при ее численной минимизации. Если же теперь в (2) вместо  $\Phi(x, r)$  применить функцию  $F(x, \lambda, r)$ , то при тех же условиях на задачу (1) нетрудно [5] получить оценки

$$f_0(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \frac{(\lambda_i - \bar{\lambda}_i)^2}{4r_i} \leq \bar{F}_{\lambda, r} \leq f_0(\bar{x}), \quad (4)$$

справедливые для любых  $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ ,  $r > 0$  (здесь  $\bar{F}_{\lambda, r} = \inf_x F(x, \lambda, r)$ ). Из соотношений (4) вытекает, что сходимость  $\bar{F}_{\lambda, r} \rightarrow f_0(\bar{x})$  может быть достигнута не только за счет неограниченного роста штрафного коэффициента  $r$ , но и путем надлежащего управления параметром  $\lambda$ .

В работе ниже показано, что отмеченные преимущества функции  $F(x, \lambda, r)$  сохраняются и при построении на ее основе метода оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования (ВП). Анализ сходимости этого метода привел к рассмотрению новой модификации расширенной штрафной функции  $F_1(x, \lambda, r)$ , сочетающей свойства классических точной и квадратичной штрафных функций и обладающей всеми атрибутами модифицированных лагранжианов. Далее исследована возможность использования функций  $F(x, \lambda, r)$  и  $F_1(x, \lambda, r)$  для регуляризации некорректных задач ВП. В заключение предлагается основанный на  $F(x, \lambda, r)$  конструктивно реализуемый итерационный алгоритм отыскания нормального решения задачи линейного программирования и соответствующих двойственных оценок.

## 1. Аппроксимационные свойства расширенной штрафной функции

Вначале рассмотрим особенности применения функции  $F(x, \lambda, r)$  для коррекции несобственных задач ВП. Предположим, что задача (1) — несобственная задача ВП 1-го рода [7]. По определению для таких задач  $X = \emptyset$ ,  $\Lambda \neq \emptyset$ , где  $\Lambda = \{\lambda : \inf_x L(x, \lambda) > -\infty, \lambda \geq 0\}$ .

Сформулируем для (1) аппроксимирующую задачу

$$\min \{f_0(x) : x \in X_{\bar{\xi}}\}, \quad (5)$$

где  $X_{\bar{\xi}} = \{x : f(x) \leq \bar{\xi}\}$ ,  $\bar{\xi} = \arg \min \{\|\xi\| : \xi \in \mathbb{R}_+^m, X_{\xi} \neq \emptyset\}$ . При этом вектор  $\bar{\xi}$  может быть получен как  $\bar{\xi} = f^+(x^*)$ , где  $x^* = \arg \min_x \|f^+(x)\|$ ,  $f^+(x) = [f_1^+(x), \dots, f_m^+(x)]$ . Будем считать, что функция Лагранжа для задачи (5)  $L_{\bar{\xi}}(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x) - \bar{\xi})$  имеет седловую точку  $[\tilde{x}, \tilde{\lambda}]$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ .

Наряду с (1) рассмотрим задачу

$$\min_x F(x, \lambda, r). \quad (6)$$

Обозначим  $p = [\lambda, r]$ ,  $I = \{\overline{1, m}\}$ ,  $I_0 = \{i \in I : \tilde{\lambda}_i = 0\}$ . В дальнейшем для простоты будем считать параметр  $r$  в (6) скалярным, т. е.  $r_i = r$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $F(x, \lambda, r) = L(x, \lambda) + r \|f^+(x)\|^2$ .

**Теорема 1.** Пусть задача (6) разрешима в точке  $x_p^*$ ,  $0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}$ ,  $\lambda_i < \tilde{\lambda}_i$  ( $i \in I \setminus I_0$ ). Справедливы оценки

$$\|(f(x_p^*) - \bar{\xi})^+\| \leq \frac{\|\tilde{\lambda} - \lambda\|}{r}; \quad (7)$$

$$f_0(\tilde{x}) - f_0(x_p^*) \leq \frac{\|\tilde{\lambda}\| \|\tilde{\lambda} - \lambda\|}{r}; \quad (8)$$

$$f_0(x_p^*) - f_0(\tilde{x}) \leq \frac{\gamma(\lambda) \|\tilde{\lambda} - \lambda\|^2}{r}, \quad (9)$$

где

$$\gamma(\lambda) = 1 + m \max_{i \in I \setminus I_0} \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_i - \lambda_i}.$$

**Доказательство.** Из определения седловой точки  $[\tilde{x}, \tilde{\lambda}]$  следует

$$f_0(\tilde{x}) \leq f_0(x_p^*) + (\tilde{\lambda}, f(x_p^*) - \bar{\xi}), \quad (10)$$

отсюда

$$f_0(\tilde{x}) - f_0(x_p^*) \leq \|\tilde{\lambda}\| \|(f(x_p^*) - \bar{\xi})^+\|. \quad (11)$$

Так как  $\tilde{x} \in X_{\bar{\xi}}$ , то  $\bar{\xi} = f^+(\tilde{x})$ . Справедливо неравенство

$$f_0(x_p^*) + (\lambda, f(x_p^*)) + r \|f^+(x_p^*)\|^2 \leq f_0(\tilde{x}) + (\lambda, f(\tilde{x})) + r \|\bar{\xi}\|^2 \leq f_0(\tilde{x}) + (\lambda, \bar{\xi}) + r \|\bar{\xi}\|^2.$$

Поэтому

$$r [\|f^+(x_p^*)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2] \leq f_0(\tilde{x}) - f_0(x_p^*) + (\tilde{\lambda} - \lambda, f(x_p^*) - \bar{\xi}) - (\tilde{\lambda}, f(x_p^*) - \bar{\xi}). \quad (12)$$

Из определения  $\bar{\xi}$  и  $\tilde{x}$  следует

$$G^T(\tilde{x})\bar{\xi} = 0, \quad (13)$$

где  $G(\tilde{x})$  — матрица размера  $m \times n$ , строками которой являются векторы  $\nabla f_i(\tilde{x})$ . Из выпуклости функций  $f_i(x)$  следует

$$\|\bar{\xi}\|^2 = \bar{\xi}^T f(\tilde{x}) \leq \bar{\xi}^T f(x) - \bar{\xi}^T G(\tilde{x})(x - \tilde{x}),$$

откуда с учетом (13)

$$\|\bar{\xi}\|^2 \leq (f(x), \bar{\xi}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \quad (14)$$

Далее воспользуемся неравенством

$$(s - q)^+{}^2 \leq (s^+ - q)^2,$$

справедливым для любых действительных чисел  $s$  и  $q$ . С учетом (14) получим

$$\begin{aligned} \|(f(x) - \bar{\xi})^+\|^2 &\leq \|f^+(x) - \bar{\xi}\|^2 \\ &= \|f^+(x)\|^2 - 2(f^+(x), \bar{\xi}) + \|\bar{\xi}\|^2 \leq \|f^+(x)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (15)$$

Принимая во внимание неравенства (15), (12) и (10), имеем

$$r \|(f(x_p^*) - \bar{\xi})^+\|^2 \leq \|\tilde{\lambda} - \lambda\| \|(f(x_p^*) - \bar{\xi})^+\|.$$

Отсюда непосредственно следует оценка (7), а также (после учета (11) и (7)) и (8).

Оценим теперь разность  $f_0(x_p^*) - f_0(\tilde{x})$ . Из неравенства (12) имеем

$$f_0(x_p^*) - f_0(\tilde{x}) \leq (\tilde{\lambda} - \lambda, f(x_p^*) - \bar{\xi}) - (\tilde{\lambda}, f(x_p^*) - \bar{\xi}). \quad (16)$$

Учитывая (10), отсюда получим

$$(\tilde{\lambda} - \lambda, f(x_p^*) - \bar{\xi}) \geq 0.$$

Обозначим

$$I^-(x_p^*) = \{i \in I \setminus I_0 : f_i(x_p^*) < \bar{\xi}_i\}.$$

Тогда

$$\sum_{i \in I^-(x_p^*)} (\tilde{\lambda}_i - \lambda_i) |f_i(x_p^*) - \bar{\xi}_i| \leq \|\tilde{\lambda} - \lambda\| \|(f(x_p^*) - \bar{\xi})^+\| \leq \frac{\|\tilde{\lambda} - \lambda\|^2}{r}$$

и, следовательно,

$$|f_i(x_p^*) - \bar{\xi}_i| \leq \frac{\|\tilde{\lambda} - \lambda\|^2}{r(\tilde{\lambda}_i - \lambda_i)}, \quad i \in I^-(x_p^*).$$

Применяя это неравенство в (16), получим

$$f_0(x_p^*) - f_0(\tilde{x}) \leq \left(1 + m \max_{i \in I \setminus I_0} \frac{\tilde{\lambda}_i}{\tilde{\lambda}_i - \lambda_i}\right) \frac{\|\tilde{\lambda} - \lambda\|^2}{r},$$

т. е. оценку (9).

Теорема доказана.

Обозначим

$$d(x) = \max \{(f_i(x) - \bar{\xi}_i)^+, i = \overline{1, m}; (f_0(x) - f_0(\tilde{x}))^+\}.$$

Очевидно,  $d(x)$  — выпуклая функция,  $d(x) \geq 0$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ),  $\tilde{X} = \{x : d(x) = 0\}$ , где  $\tilde{X} = \text{Arg}(5)$ .

**Следствие 1.** Пусть  $0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}$ ,  $\lambda_i < \tilde{\lambda}_i$  ( $i \in I \setminus I_0$ ),  $r \rightarrow \infty$ . Тогда  $d(x_p^*) \rightarrow 0$ .

**Следствие 2.** Пусть  $r > 0$ ,  $0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}$ ,  $\lambda_i < \tilde{\lambda}_i$  ( $i \in I \setminus I_0$ ),  $\lambda_i \rightarrow \tilde{\lambda}_i$  ( $i \in I \setminus I_0$ ), причем  $\|\lambda - \tilde{\lambda}\| \leq k \min_{i \in I \setminus I_0} (\tilde{\lambda}_i - \lambda_i)$ ,  $k = \text{const}$ . Тогда  $d(x_p^*) \rightarrow 0$ .

**Следствие 3.** Пусть множество  $\tilde{X}$  ограничено и выполнены условия следствия 1 или следствия 2. Тогда

$$\rho(x_p^*, \tilde{X}) \equiv \inf_{x \in \tilde{X}} \|x_p^* - x\| \rightarrow 0.$$

Если при этом  $\tilde{X} = \{\tilde{x}\}$ , то  $x_p^* \rightarrow \tilde{x}$ .

В самом деле, если  $\tilde{X}$  ограничено, то ограниченным будет и множество  $\tilde{X}_\sigma = \{x : f(x) \leq \bar{\xi} + \sigma, f_0(x) \leq f_0(\tilde{x}) + \sigma\}$  для любого  $\sigma > 0$ . Поскольку  $X(\sigma) \subset \tilde{X}_\sigma$ , где  $X(\sigma) = \{x : d(x) \leq \sigma\}$ , то ограничение  $d(x) \leq 0$  будет [8] корректным, что, в свою очередь, обеспечивает справедливость следствия 3.

## 2. Комбинирование точной и квадратичной штрафных функций

Практическое применение функции  $F(x, \lambda, r)$  для аппроксимации задач ВП связано с необходимостью реализации условия  $0 \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$ . Покажем, что от этого требования можно отказаться, используя близкую к  $F(x, \lambda, r)$  модификацию функции Лагранжа

$$F_1(x, \lambda, r) = f_0(x) + (\lambda, f^+(x)) + r \|f^+(x)\|^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^m, \quad r > 0.$$

На  $F_1(x, \lambda, r)$  можно смотреть и как на определенную модификацию штрафной функции, представляющей собой комбинацию точной штрафной функции Еремина — Зангвилла (за счет слагаемого  $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i^+(x)$  при  $\lambda_i > 0$ ) и функции квадратичного штрафа  $\sum_{i=1}^m r f_i^{+2}(x)$ .

Сформулируем задачу

$$\inf_x F_1(x, \lambda, r) \quad (= \tilde{F}_{\lambda, r}^1). \quad (17)$$

Обозначим через  $\bar{X} \times \bar{\Lambda}$  множество седловых точек функции  $L(x, \lambda)$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ ,  $\tilde{X}(\lambda, r) = \text{Arg} \min_x F_1(x, \lambda, r)$ .

**Теорема 2.** Пусть в задаче (1)  $\bar{X} \times \bar{\Lambda} \neq \emptyset$ ,  $\bar{x} \in \bar{X}$ ,  $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ ,  $f_0(\bar{x}) = f^*$ . Справедливы соотношения:

$$(1) \quad f^* - \frac{\|\bar{\lambda} - \lambda\|^2}{4r} \leq \tilde{F}_{\lambda,r}^1 \leq f^* \quad (\forall \lambda \geq 0, r > 0); \quad (18)$$

$$(2) \quad \tilde{F}_{\lambda,r}^1 = f^* \quad (\forall \lambda \geq \bar{\lambda}, r > 0);$$

$$(3) \quad \tilde{X}(\lambda, r) = \bar{X} \quad (\forall \lambda > \bar{\lambda}, r > 0).$$

Если  $\tilde{X}(\lambda, r) \neq \emptyset$  и  $\tilde{x}_{\lambda,r} \in \tilde{X}(\lambda, r)$ , то

$$(4) \quad \|f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})\| \leq \frac{\|\lambda - \bar{\lambda}\|}{r} \quad (\forall \lambda \geq 0, r > 0);$$

$$(5) \quad 0 \leq f^* - f_0(\tilde{x}_{\lambda,r}) \leq \|\bar{\lambda}\| \frac{\|\lambda - \bar{\lambda}\|}{r} \quad (\forall \lambda \geq 0, r > 0).$$

**Доказательство.** Правое неравенство в оценке (18) очевидно, поскольку  $\tilde{F}_{\lambda,r}^1 \leq F_1(\bar{x}, \lambda, r) = f^*$ .

Далее, из определения множества  $\bar{X} \times \bar{\Lambda}$  следует неравенство

$$f_0(x) \geq f^* - (\bar{\lambda}, f^+(x)) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n). \quad (19)$$

Поэтому для произвольных  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $r > 0$  выполняется

$$F_1(x, \lambda, r) \geq f^* + (\lambda - \bar{\lambda}, f^+(x)) + r \|f^+(x)\|^2. \quad (20)$$

Отсюда

$$F_1(x, \lambda, r) \geq f^* - \frac{\|\lambda - \bar{\lambda}\|^2}{4r}$$

и тем самым доказана справедливость (18).

Если  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ , то из (20) следует  $F_1(x, \lambda, r) \geq f^*$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ ), что вместе с (18) влечет утверждение (2) теоремы.

Так как  $F_1(\bar{x}, \lambda, r) = f^* = \tilde{F}_{\lambda,r}^1$  для любых  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  и  $r > 0$ , то  $\bar{X} \subset \tilde{X}_{\lambda,r}$ , и таким образом задача (17) разрешима при  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  и  $r > 0$ . Тогда для любой точки  $\tilde{x}_{\lambda,r} \in \tilde{X}_{\lambda,r}$  согласно (20) имеем  $(\lambda - \bar{\lambda}, f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})) \leq 0$ . Если  $\lambda > \bar{\lambda}$ , то отсюда  $f^+(\tilde{x}_{\lambda,r}) = 0$ , т. е.  $\tilde{x}_{\lambda,r} \in \bar{X}$ . Поскольку

$$f_0(\tilde{x}_{\lambda,r}) = F_1(\tilde{x}_{\lambda,r}, \lambda, r) - (\lambda, f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})) - r \|f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})\|^2 = \tilde{F}_{\lambda,r}^1 = f^*,$$

то  $\tilde{x}_{\lambda,r} \in \bar{X}$  и, следовательно,  $\tilde{X}(\lambda, r) \subset \bar{X}$  при  $\lambda > \bar{\lambda}$ ,  $r > 0$ . Этим доказано утверждение (3).

Пусть  $\tilde{X}(\lambda, r) \neq \emptyset$  и  $\tilde{x}_{\lambda,r} \in \tilde{X}(\lambda, r)$ . Из неравенства  $F_1(\tilde{x}_{\lambda,r}, \lambda, r) \leq f^*$  ( $\forall \lambda \geq 0, r > 0$ ) с учетом (19) получим

$$(\lambda, f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})) + r \|f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})\|^2 \leq f^* - f_0(\tilde{x}_{\lambda,r}) \leq (\bar{\lambda}, f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})).$$

Отсюда

$$r \|f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})\|^2 \leq (\bar{\lambda} - \lambda, f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})), \quad 0 \leq f^* - f_0(\tilde{x}_{\lambda,r}) \leq \|\bar{\lambda}\| \|f^+(\tilde{x}_{\lambda,r})\|,$$

что влечет справедливость утверждений (4) и (5).

Теорема доказана.

Заметим, что с учетом (3) утверждения (4) и (5) теоремы 2 можно уточнить: если  $\lambda > \bar{\lambda}$  и  $r > 0$ , то

$$f^+(\tilde{x}_{\lambda,r}) = 0 \quad \text{и} \quad f_0(\tilde{x}_{\lambda,r}) = f^*.$$

Следующее утверждение касается структуры множества седловых точек модифицированной функции Лагранжа  $F_1(x, \lambda, r)$ .

**Теорема 3.** Для каждого фиксированного значения  $r > 0$  множество седловых точек функции  $F_1(x, \lambda, r)$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$  имеет вид  $\bar{X} \times (\bar{\Lambda} + \mathbb{R}_+^m)$ .

**Доказательство.** Пусть  $[\tilde{x}_r, \tilde{\lambda}_r] \in \bar{X} \times (\bar{\Lambda} + \mathbb{R}_+^m)$ , т. е.  $\tilde{x}_r \in \bar{X}$ ,  $\tilde{\lambda}_r \geq \bar{\lambda}$ ,  $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ . Очевидно, что

$$\sup_{\lambda \geq 0} F_1(x, \lambda, r) = \begin{cases} f_0(x), & \text{если } x \in X; \\ +\infty, & \text{если } x \notin X. \end{cases}$$

Поэтому

$$\min_x \sup_{\lambda \geq 0} F_1(x, \lambda, r) = F_1(\tilde{x}_r, \tilde{\lambda}_r, r) = f^*.$$

С другой стороны, учитывая утверждение (2) теоремы 2, при  $\tilde{\lambda}_r \geq \bar{\lambda}$  получим

$$F_1(\tilde{x}_r, \tilde{\lambda}_r, r) \geq \sup_{\lambda \geq 0} \inf_x F_1(x, \lambda, r) \geq \inf_x F_1(x, \tilde{\lambda}_r, r) = f^*.$$

Итак, для любого  $r > 0$  выполняется

$$\min_x \max_{\lambda \geq 0} F_1(x, \lambda, r) = \max_{\lambda \geq 0} \min_x F_1(x, \lambda, r) = F_1(\tilde{x}_r, \tilde{\lambda}_r, r) = f^*.$$

Пусть теперь  $[x_r^*, \lambda_r^*]$  — произвольная седловая точка функции  $F_1(x, \lambda, r)$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ . Покажем, что  $[x_r^*, \lambda_r^*] \in \bar{X} \times (\bar{\Lambda} + \mathbb{R}_+^m)$ .

По определению седловой точки

$$F_1(x_r^*, \lambda, r) \leq F_1(x_r^*, \lambda_r^*, r) \leq F_1(x, \lambda_r^*, r) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^m). \quad (21)$$

Из левого неравенства в (21) непосредственно вытекает:  $f_i^+(x_r^*) = 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ , т. е.  $x_r^* \in X$ . Правое же неравенство при  $x \in X$  превращается в соотношение  $f_0(x_r^*) \leq f_0(x)$ . Поэтому  $x_r^*$  — решение задачи (1),  $x_r^* \in \bar{X}$  и  $F_1(x_r^*, \lambda_r^*, r) = f^*$ .

Пусть  $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ . Тогда из неравенства (20) при  $\lambda = \lambda_r^*$  имеем

$$F_1(x, \lambda_r^*, r) \geq f^* + (\lambda_r^* - \bar{\lambda}, f^+(x)) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Отсюда видно, что правое неравенство в (21) будет выполняться, лишь когда  $\lambda_r^* \geq \bar{\lambda}$ . Таким образом,  $[x_r^*, \lambda_r^*] \in \bar{X} \times (\bar{\Lambda} + \mathbb{R}_+^m)$ .

Теорема доказана.

Рассмотрим далее вопрос о разрешимости задачи (17).

**Теорема 4.** Задача (17) при фиксированных  $\lambda > 0$  и  $r > 0$  разрешима в следующих случаях:

- (а) множество  $\bar{X}$  ограничено и  $f_0(x) \geq \tilde{f} > -\infty$  для всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
- (б)  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  для некоторого  $\bar{\lambda} \in \bar{\Lambda}$ ;
- (в) хотя бы одна из функций  $f_i(x)$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ , сильно выпукла на  $\mathbb{R}^n$ .

**Доказательство.** Пусть выполнено условие (а). Из ограниченности

$$\bar{X} = \{x : f_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}; f_0(x) \leq f^*\}$$

следует ограниченность множества  $\tilde{X}_{\lambda, r} = \{x : g(x) \leq D(\lambda, r)\}$  для любых фиксированных  $\lambda > 0$  и  $r > 0$ , где

$$g(x) = \max\{f_i(x), i = \overline{1, m}; f_0(x) - f^*\}, \quad D(\lambda, r) = \frac{4r(f^* - \tilde{f}) + \|\lambda\|^2}{4\lambda_0 r}, \quad \lambda_0 = \min_{1 \leq i \leq m} \lambda_i.$$

Пусть  $x \in X_{\lambda,r}^1 = \{x : F_1(x, \lambda, r) \leq f^*\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_i f_i(x) &< \frac{1}{4r} (\lambda_i + 2r f_i^+(x))^2 \leq \frac{1}{4r} \|\lambda + 2r f^+(x)\|^2 \\ &= F_1(x, \lambda, r) - f_0(x) + \frac{\|\lambda\|^2}{4r} \leq f^* - \tilde{f} + \frac{\|\lambda\|^2}{4r}. \end{aligned}$$

С учетом очевидного неравенства  $f_0(x) \leq f^*$  для  $x \in X_{\lambda,r}^1$  отсюда следует  $x \in \tilde{X}_{\lambda,r}$ . Таким образом, множество  $X_{\lambda,r}^1$  ограничено, а задача (17) разрешима.

В случае (b) разрешимость задачи (17) имеет место в силу теоремы 2.

Если для случая (c) сильно выпукла на  $\mathbb{R}^n$  функция  $f_0(x)$ , то сильно выпуклой по  $x$  тогда будет и  $F_1(x, \lambda, r)$ , и разрешимость (17) следует из свойств сильно выпуклых функций. Если же сильно выпукла одна из функций  $f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то сильно выпуклой по  $x$  при  $\lambda_i > 0$  будет функция  $F(x, \lambda, r)$ , и тем самым будет ограничено множество  $X_{\lambda,r} = \{x : F(x, \lambda, r) \leq f^*\}$ . Но  $X_{\lambda,r}^1 \subset X_{\lambda,r}$ , и, следовательно, задача (17) разрешима.

Теорема доказана.

В разд. 1 исследовались возможности расширенной штрафной функции  $F(x, \lambda, r)$  для оптимальной коррекции несобственных задач выпуклого программирования. Рассмотрим теперь, как изменится теорема 1, если вместо  $F(x, \lambda, r)$  применить функцию  $F_1(x, \lambda, r)$ .

Пусть (1) — несобственная задача выпуклого программирования 1-го рода, для которой построена аппроксимирующая задача (5),  $[\tilde{x}, \tilde{\lambda}]$  — седловая точка функции  $L_{\tilde{\xi}}(x, \lambda)$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ .

**Теорема 5.** Пусть задача (17) разрешима в точке  $\tilde{x}_p$ ,  $p = [\lambda, r] \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^1$ . Справедливы оценки

$$\|f^+(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}\| \leq \frac{\|\lambda - \tilde{\lambda}\|}{r}; \quad (22)$$

$$|f_0(\tilde{x}_p) - f_0(\tilde{x})| \leq C(\lambda) \frac{\|\lambda - \tilde{\lambda}\|}{r}, \quad (23)$$

где  $C(\lambda) = \max\{\|\lambda\|, \|\tilde{\lambda}\|\}$ .

**Доказательство.** Используя неравенство (10), получим

$$f_0(\tilde{x}) - f_0(\tilde{x}_p) \leq (\tilde{\lambda}, f(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}) \leq (\tilde{\lambda}, f^+(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}) \leq \|\tilde{\lambda}\| \|f^+(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}\|. \quad (24)$$

Для задачи (17) выпишем аналог соотношения (12)

$$r (\|f^+(\tilde{x}_p)\|^2 - \|\bar{\xi}\|^2) \leq f_0(\tilde{x}) - f_0(\tilde{x}_p) + (\tilde{\lambda} - \lambda, f^+(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}) - (\tilde{\lambda}, f^+(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}). \quad (25)$$

Отсюда с учетом соотношений (15) и (24) получим

$$r \|f^+(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}\|^2 \leq \|\tilde{\lambda} - \lambda\| \|f^+(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}\|$$

и, тем самым, оценку (22).

Далее, из (15) и (25) следует

$$f_0(\tilde{x}_p) - f_0(\tilde{x}) \leq \|\lambda\| \|f^+(\tilde{x}_p) - \bar{\xi}\|.$$

Отсюда с учетом (24) и (22) вытекает оценка (23).

Теорема доказана.

Выше уже отмечались преимущества методов модифицированной функции Лагранжа по сравнению с методами штрафных функций. Прежде всего достоинства этих модификаций

выражаются в возможности построения серии высокоэффективных итерационных алгоритмов для решения задачи (1) и задачи, двойственной к ней. Покажем, что подобные процедуры могут конструироваться и на основе применения функции  $F_1(x, \lambda, r)$ . Приведем вариант метода множителей [1–4, 9], который в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= \arg \min_x F_1(x, \lambda^k, r), \quad \lambda^0 = 0, \quad r = \text{const}, \quad r > 0; \\ \lambda^{k+1} &= \lambda^k + \alpha_k f^+(x^{k+1}), \quad \alpha_k > 0. \end{aligned} \quad (26)$$

**Теорема 6.** Пусть  $\bar{X} \times \bar{\Lambda} \neq \emptyset$ , множество  $\bar{X}$  ограничено, задача (17) разрешима для любых  $\lambda$  и  $r$ , шаговой коэффициент  $\alpha_k$  выбран так, чтобы

$$\alpha_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty), \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\alpha_k} = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k < \infty. \quad (27)$$

Тогда в методе (26)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = \lambda' \in \bar{\Lambda}$ , и любая предельная точка последовательности  $\{x^k\}$  решает задачу (1).

**Доказательство.** Применяя теорему 2, получим

$$\|\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}\| \leq \|\lambda^k - \bar{\lambda}\| + \alpha_k \|f^+(x^{k+1})\| \leq \|\lambda^k - \bar{\lambda}\| \left(1 + \frac{\alpha_k}{r}\right) \leq \|\lambda^0 - \bar{\lambda}\| \prod_{i=0}^k \left(1 + \frac{\alpha_i}{r}\right).$$

Так как ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$  сходится, то сходится и произведение  $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + \alpha_k/r)$ . Поэтому последовательность  $\{\lambda^k\}$  ограничена, и в силу монотонности  $\lambda^{k+1} \geq \lambda^k$  она сходится:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = \lambda'$ .

Далее имеем

$$\|\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}\|^2 \leq \|\lambda^k - \bar{\lambda}\|^2 \left(1 + \frac{\alpha_k^2}{r^2}\right) + 2\alpha_k (f^+(x^{k+1}), \lambda^k - \bar{\lambda}). \quad (28)$$

Предположим, существуют числа  $\bar{\varepsilon} > 0$  и  $K \subset \mathbb{N}$  такие, что

$$\sqrt{\alpha_k} (f^+(x^{k+1}), \lambda^k - \bar{\lambda}) \leq -\bar{\varepsilon} \quad (\forall k \geq K).$$

Тогда из (28) получим

$$\begin{aligned} \|\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}\|^2 &\leq \left(1 + \frac{\alpha_k^2}{r^2}\right) \left[\left(1 + \frac{\alpha_{k-1}^2}{r^2}\right) \|\lambda^{k-1} - \bar{\lambda}\|^2 - 2\bar{\varepsilon} \sqrt{\alpha_{k-1}}\right] - 2\bar{\varepsilon} \sqrt{\alpha_k} \\ &\leq \|\lambda^0 - \bar{\lambda}\|^2 \prod_{i=0}^k \left(1 + \frac{\alpha_i^2}{r^2}\right) - 2\bar{\varepsilon} \sum_{i=0}^k \sqrt{\alpha_i}. \end{aligned}$$

В силу условий (27) это неравенство противоречиво при достаточно больших  $k$ . Поэтому из  $[x^k, \lambda^k]$  можно выделить подпоследовательность  $[x^{k_i}, \lambda^{k_i}]$ , для которой

$$(f^+(x^{k_i+1}), \bar{\lambda} - \lambda^{k_i}) < \varepsilon_{k_i},$$

где  $\varepsilon_{k_i} > 0$ ,  $\lim_{k_i \rightarrow \infty} \varepsilon_{k_i} = 0$ .

По теореме 3 точка  $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$  будет седловой для функции  $F_1(x, \lambda, r)$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ , т. е.  $\bar{\lambda} = \arg \max_{\lambda \geq 0} \psi(\lambda)$ , где  $\psi(\lambda) = \min_x F_1(x, \lambda, r)$ . Так как

$$F_1(x^{k+1}, \bar{\lambda}, r) - F_1(x^{k+1}, \lambda^k, r) = (f^+(x^{k+1}), \bar{\lambda} - \lambda^k),$$

то в силу (19)

$$\psi(\bar{\lambda}) - \psi(\lambda^k) = f_0(\bar{x}) - F_1(x^{k+1}, \bar{\lambda}, r) + F_1(x^{k+1}, \bar{\lambda}, r) - \psi(\lambda^k)$$

$$= f_0(\bar{x}) - F_1(x^{k+1}, \bar{\lambda}, r) + (f^+(x^{k+1}), \bar{\lambda} - \lambda^k) \leq (f^+(x^{k+1}), \bar{\lambda} - \lambda^k).$$

Тогда для последовательности  $\{\lambda^{k_i}\}$  получим

$$\psi(\bar{\lambda}) \leq \psi(\lambda^{k_i}) + \varepsilon_{k_i}.$$

Отсюда  $\psi(\bar{\lambda}) = \psi(\lambda')$  и, следовательно,  $\lambda' \in \bar{\Lambda}$ .

Из теоремы 2 при  $\lambda = \lambda^k$  и  $\bar{\lambda} = \lambda'$  следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_i^+(x^k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_0(x^k) = f_0(\bar{x}).$$

Поскольку множество  $\bar{X}$  непусто и ограничено, то ограничения  $f_i(x) \leq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ ;  $f_0(x) \leq f_0(\bar{x})$  корректны. Поэтому  $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(x^k, \bar{X}) = 0$ .

Теорема доказана.

### 3. Регуляризирующие свойства расширенных штрафных функций

Пусть в задаче (1) целевая функция  $f_0(x)$  — сильно выпуклая с модулем сильной выпуклости  $\mu > 0$ . Поставим в соответствие (1) с  $X \neq \emptyset$  задачу (6). Поскольку  $F(x, \lambda, r)$  также будет сильно выпуклой функцией с тем же модулем  $\mu$ , то задача (6) разрешима в единственной точке  $x(\lambda, r)$  для любых  $\lambda \geq 0$  и  $r > 0$ .

Обозначим через  $\bar{x}$  (единственное) решение задачи (1) и предположим, что в задаче (1) выполнено условие Слейтера:  $\exists x^0 \in X$ , для которого  $f(x^0) < 0$ . Это условие гарантирует существование для  $\bar{x}$  соответствующего вектора множителей Лагранжа  $\bar{\lambda}$ . Тогда из свойств сильной выпуклости функции  $F(x, \lambda, r)$  и оценки (4) вытекает неравенство

$$\|x(\lambda, r) - \bar{x}\| \leq \frac{\|\lambda - \bar{\lambda}\|^2}{2\sqrt{\mu r}}, \quad (29)$$

справедливое для всех  $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$  и  $r > 0$ .

Соотношение (29) может служить основанием для применения расширенной штрафной функции  $F(x, \lambda, r)$  в целях регуляризации задачи (1), необходимость которой возникает при численном анализе некорректных задач [10–12].

Вернемся к исходной постановке (1), в которой  $f_0(x)$  — выпуклая функция, заданная, возможно, с некоторой погрешностью. Тогда в методе регуляризации наряду с (1) рассматривается близкая постановка

$$\min \{f_0(x) + \alpha \|x\|^2 : x \in X\}, \quad (30)$$

где  $\alpha > 0$ . Задача (30) разрешима для любого  $\alpha > 0$  в единственной точке  $\bar{x}_\alpha$  и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \bar{x}_\alpha = \bar{x}_0 \quad (31)$$

(см., например, [13]), где  $\bar{x}_0$  — нормальное решение задачи (1).

Составим для задачи (30) расширенную штрафную функцию

$$\Phi(x, q) = F(x, \lambda, r) + \alpha \|x\|^2,$$

$$q \in Q \equiv \{q = [\lambda, r, \alpha] \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}_+^1 : r > 0, \alpha > 0\},$$

которая будет сильно выпуклой с модулем  $\alpha$ . Тогда оценка (29) примет вид

$$\|x^*(q) - \bar{x}_\alpha\| \leq \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^m \frac{(\lambda_i - \bar{\lambda}_i^\alpha)^2}{\alpha r} \right)^{1/2}, \quad (32)$$

где  $x^*(q) = \arg \min_x \Phi(x, q)$ ,  $\bar{\lambda}_i^\alpha$  — множители Лагранжа для задачи (30),  $i = 1, \dots, m$ ,  $\lambda \leq \bar{\lambda}^\alpha$ . Используя условие Слейтера, легко показать ограниченность  $\{\bar{\lambda}_i^\alpha\}$  при  $0 < \alpha \leq \alpha_0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Пусть  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $\alpha r \rightarrow \infty$ . Тогда из соотношений (31), (32) следует  $x^*(q) \rightarrow x_0^*$ .

Рассмотрим далее связи между (1) и проблемой нахождения

$$\inf_x \{ \Phi_1(x, q) = F_1(x, \lambda, r) + \alpha \|x\|^2 \}, \quad q \in Q. \quad (33)$$

Задача (33) разрешима для любого  $q$  в некоторой точке  $\tilde{x}_q$ . Утверждения теоремы 2 в этом случае трансформируются следующим образом.

**Теорема 7.** Пусть для задачи (1) выполнены условия теоремы 2. Для любых значений параметра  $q \in Q$  справедливы оценки

$$f^* - \frac{\|\lambda - \bar{\lambda}\|^2}{4r} \leq \Phi_1(\tilde{x}_q, q) \leq f^* + \alpha \|\bar{x}_0\|^2; \quad (34)$$

$$\|f^+(\tilde{x}_q)\| \leq \frac{1}{\sqrt{r}} D_1(q); \quad (35)$$

$$|f_0(\tilde{x}_q) - f^*| \leq \max \left\{ \alpha \|\bar{x}_0\|^2, \frac{\|\bar{\lambda}\|}{\sqrt{r}} D_1(q) \right\}, \quad (36)$$

где

$$\bar{x}_0 = \arg \min \{ \|x\| : x \in \bar{X} \}, \quad f^* = f_0(\bar{x}_0), \quad \bar{\lambda} \in \bar{\Lambda},$$

$$D_1(q) = \frac{\|\lambda - \bar{\lambda}\|}{2\sqrt{r}} + \left( \alpha \|\bar{x}_0\|^2 + \frac{\|\lambda - \bar{\lambda}\|^2}{4r} \right)^{1/2}.$$

Если в (33)  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ , то оценки (34)–(36) примут вид

$$0 \leq \Phi_1(\tilde{x}_q, q) - f^* \leq \alpha \|\bar{x}_0\|^2; \quad (37)$$

$$\|f^+(\tilde{x}_q)\| \leq \sqrt{\frac{\alpha}{r}} \|\bar{x}_0\|; \quad (38)$$

$$|f_0(\tilde{x}_q) - f^*| \leq \sqrt{\alpha} \|\bar{x}_0\| \max \left\{ \sqrt{\alpha} \|\bar{x}_0\|, \frac{1}{\sqrt{r}} \|\bar{\lambda}\| \right\}. \quad (39)$$

**Доказательство.** Правое неравенство в (34) очевидно. Далее с учетом (19) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_1(\tilde{x}_q, q) &\geq f^* + (\lambda - \bar{\lambda}, f^+(\tilde{x}_q)) + r \|f^+(\tilde{x}_q)\|^2 + \alpha \|\tilde{x}_q\|^2 \\ &= f^* + \left\| \sqrt{r} f^+(\tilde{x}_q) + \frac{1}{2\sqrt{r}} (\lambda - \bar{\lambda}) \right\|^2 - \frac{1}{4r} \|\lambda - \bar{\lambda}\|^2 + \alpha \|\tilde{x}_q\|^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом,

$$\Phi_1(\tilde{x}_q, q) \geq f^* - \frac{1}{4r} \|\lambda - \bar{\lambda}\|^2 + \alpha \|\tilde{x}_q\|^2, \quad (41)$$

откуда следует справедливость и левого неравенства в (34).

Из соотношений (34) и (19) вытекает

$$(\lambda - \bar{\lambda}, f^+(\tilde{x}_q)) + r \|f^+(\tilde{x}_q)\|^2 \leq \alpha \|\bar{x}_0\|^2 \quad (42)$$

или, в другой записи,

$$\left\| \sqrt{r} f^+(\tilde{x}_q) + \frac{1}{2\sqrt{r}} (\lambda - \bar{\lambda}) \right\|^2 \leq \alpha \|\bar{x}_0\|^2 + \frac{1}{4r} \|\lambda - \bar{\lambda}\|^2 = D_1^2(q).$$

Отсюда следует (35).

Кроме того, из (34) и (19) получаем

$$f_0(\tilde{x}_q) - f^* \leq \alpha \|\bar{x}_0\|^2, \quad f^* - f_0(\tilde{x}) \leq \|\bar{\lambda}\| \|f^+(\tilde{x}_q)\|, \quad (43)$$

что с учетом (35) и дает (36).

Пусть теперь  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ . Анализируя (40), видим, что в этом случае  $\Phi_1(\tilde{x}_q, q) \geq f^*$ , поэтому справедливо (37). Неравенство (42) превращается при этом сразу в (38). Учитывая (38), из (43) получим (39).

Теорема доказана.

**Следствие 4.** Пусть в задаче (33) параметр  $\lambda$  фиксирован,  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $\alpha r \rightarrow \infty$ . Тогда  $\tilde{x}_q \rightarrow \bar{x}_0$ .

В самом деле, из оценки (41) следует

$$\alpha \|\tilde{x}_q\|^2 \leq \alpha \|\bar{x}_0\|^2 + \frac{\|\lambda - \bar{\lambda}\|^2}{4r},$$

откуда с учетом условий на параметры  $\alpha$  и  $r$  вытекает ограниченность последовательности  $\{\tilde{x}_q\}$  и неравенство  $\|x'\| \leq \|\bar{x}_0\|$ , где  $x'$  — предельная точка  $\{\tilde{x}_q\}$ . В силу (35), (36)  $x' \in \bar{X}$ , и тогда из единственности нормального решения задачи (1) заключаем, что  $x' = \bar{x}_0$ , т. е.  $\lim \tilde{x}_q = \bar{x}_0$ .

**З а м е ч а н и е.** Если выполнено условие  $\lambda \geq \bar{\lambda}$ , то из (37) сразу получим  $\|\tilde{x}_q\| \leq \|\bar{x}_0\|$  ( $\forall r > 0, \alpha > 0$ ). Из (38)–(39) следует  $x' \in \bar{X}$  при  $\alpha \rightarrow 0$  и произвольном  $r$ . Таким образом, в этом случае  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \tilde{x}_q = \bar{x}_0$ .

Пусть далее (1) — несобственная задача ВП 1-го рода. Вначале поставим (1) в соответствие задачу

$$\inf_x \{ \Phi(x, q) = F(x, \lambda, r) + \alpha \|x\|^2 \} \quad (q = [\lambda, r, \alpha] \in Q). \quad (44)$$

Так как  $\Phi(x, q)$  — сильно выпуклая по  $x$  функция, то задача (44) имеет единственное решение  $x_q^*$  для любого  $q$ . Применяя схему доказательства теоремы 1, получим следующее утверждение.

**Теорема 8.** Пусть  $[\tilde{x}, \tilde{\lambda}]$  — седловая точка функции  $L_{\tilde{\xi}}(x, \lambda)$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$ ,  $0 \leq \lambda \leq \tilde{\lambda}$ ,  $\lambda_i < \tilde{\lambda}_i$ , если  $\tilde{\lambda}_i > 0$ . Справедливы оценки

$$\|(f(x_q^*) - \bar{\xi})^+\| \leq \frac{1}{\sqrt{r}} D_2(q); \quad (45)$$

$$f_0(\tilde{x}) - f_0(x_q^*) \leq \frac{\|\tilde{\lambda}\|}{\sqrt{r}} D_2(q); \quad (46)$$

$$f_0(x_q^*) - f_0(\tilde{x}) \leq D_3(q), \quad (47)$$

где

$$D_2(q) = \frac{\|\lambda - \tilde{\lambda}\|}{2\sqrt{r}} + \left( \alpha \|\tilde{x}\|^2 + \frac{\|\lambda - \tilde{\lambda}\|^2}{4r} \right)^{1/2}, \quad D_3(q) = \alpha \|\tilde{x}\|^2 + \frac{\|\lambda - \tilde{\lambda}\|}{\sqrt{r}} \gamma(\lambda) D_2(q),$$

$\gamma(\lambda)$  — из (9).

**Следствие 5.** Если  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow \infty$ ,  $\alpha r \rightarrow \infty$ , вектор  $\lambda$  фиксирован ( $\lambda \leq \tilde{\lambda}$ ), то  $x_q^* \rightarrow \tilde{x}_0$ , где  $\tilde{x}_0$  — нормальное решение задачи (5).

Доказательство. Из неравенства  $\Phi(x_q^*, q) \leq \Phi(\tilde{x}, q)$  получаем

$$\alpha \|x_q^*\|^2 \leq f_0^*(\tilde{x}) - f_0(x_q^*) + (\lambda, \bar{\xi} - f(x_q^*)) + r [\|\bar{\xi}\|^2 - \|f^+(x_q^*)\|^2] + \alpha \|\tilde{x}\|^2.$$

Используя оценку (10), отсюда имеем

$$\alpha \|x_q^*\|^2 \leq (\tilde{\lambda} - \lambda, f(x_q^*) - \bar{\xi}) + \alpha \|\tilde{x}\|^2 \leq \|\tilde{\lambda} - \lambda\| \|(f(x_q^*) - \bar{\xi})^+\| + \alpha \|\tilde{x}\|^2.$$

Считая  $\tilde{x} = \tilde{x}_0$ , оценим это неравенство с помощью (45)

$$\|x_q^*\|^2 \leq \frac{\|\lambda - \tilde{\lambda}\|}{\alpha \sqrt{r}} D_2(q) + \|\tilde{x}\|^2.$$

Из условий на параметры  $\lambda, r, \alpha$  следует, что последовательность  $\{x_q^*\}$  ограничена и ее предельная точка  $x'$  удовлетворяет неравенству  $\|x'\| \leq \|\tilde{x}_0\|$ . С другой стороны, из оценок (45)–(47) получаем  $x' \in \tilde{X} = \text{Arg}(5)$ . Следовательно,  $x' = \tilde{x}_0$ .

**З а м е ч а н и е.** Заключение следствия 5 останется справедливым, если  $r = r_0 > 0, \lambda \rightarrow \tilde{\lambda}, \alpha \rightarrow 0, \|\lambda - \tilde{\lambda}\| / \sqrt{\alpha} \rightarrow 0, \|\lambda - \tilde{\lambda}\| \leq k \min_{i \in I \setminus I_0} (\tilde{\lambda}_i - \lambda_i), k = \text{const}$ .

Сопоставим теперь несобственной задаче (1) задачу (33). Рассуждая в основном по аналогии с доказательством теоремы 7, можем проверить справедливость следующего утверждения.

**Теорема 9.** Пусть  $[\tilde{x}, \tilde{\lambda}]$  — седловая точка функции  $L_{\bar{\xi}}(x, \lambda)$  в области  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$  и  $\tilde{x}_q = \arg \inf_x \Phi_1(x, q)$ . Для любого  $q \in Q$  выполняются неравенства

$$\|f^+(\tilde{x}_q) - \bar{\xi}\| \leq \frac{1}{\sqrt{r}} D_2(q),$$

$$|f_0(\tilde{x}_q) - f_0(\tilde{x})| \leq \alpha \|\tilde{x}\|^2 + \max\{\|\lambda\|, \|\tilde{\lambda}\|\} D_2(q),$$

где  $D_2(q)$  — из (45).

**Следствие 6.** Пусть  $\alpha = \frac{\|\lambda - \tilde{\lambda}\|}{\sqrt{r}} \rightarrow 0$ . Тогда  $\tilde{x}_q \rightarrow \tilde{x}_0$ , где  $\tilde{x}_0$  — нормальное решение задачи (5).

#### 4. Метод расширенной штрафной функции и регуляризация задачи линейного программирования

На основе применения регуляризованных расширенных штрафных функций  $\Phi(x, q)$  и  $\Phi_1(x, q)$  можно строить конкретные итерационные процедуры для регуляризации задач математического программирования. В качестве примера рассмотрим один из возможных алгоритмов для задачи линейной оптимизации с использованием функции  $\Phi(x, q)$ . Предлагаемый алгоритм сочетает идеи метода множителей [4] и метода условного градиента [14].

Рассмотрим алгоритм решения задачи

$$\min \{(c, x) : x \in X \cap \Omega\}, \tag{48}$$

где  $X = \{x : Ax \leq b\}$ ,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega = \{x : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ ,  $\underline{x}, \bar{x}$  — фиксированные векторы из  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $X \cap \Omega \neq \emptyset$ ,  $X^* \times \Lambda^*$  — множество седловых точек функции Лагранжа  $L(x, \lambda) = (c, x) + (\lambda, Ax - b)$  в области  $\Omega \times \mathbb{R}_+^m$ . Функция  $\Phi(x, q)$  из (44) примет в этом случае вид

$$F_\alpha(x, \lambda) = L(x, \lambda) + r_0 \|(Ax - b)^+\|^2 + \alpha \|x\|^2,$$

где  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ ,  $r_0, \alpha \in \mathbb{R}^1$ ,  $r_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$ .

**А л г о р и т м А.** Пусть заданы  $x^0 \in \Omega$ ,  $\lambda^0 = 0$ ,  $r_0 > 1$ ,  $\alpha_0 = 1$ . Опишем  $(k+1)$ -й шаг, считая известными  $x^k \in \Omega$ ,  $\lambda^k \geq 0$ ,  $\alpha_k > 0$ .

Обозначим  $x^k = x^{k0}$ . Вычислим

$$x^{k(s+1)} = x^{ks} + \mu_{ks} l^{ks},$$

где

$$\mu_{ks} = \frac{|(\nabla_x F_k(x^{ks}), l^{ks})|}{2(r_0 \|Al^{ks}\|^2 + \alpha_k \|l^{ks}\|^2)}, \quad s = 0, 1, \dots, \bar{s}_k, \quad \bar{s}_k = [k^\nu] + 1, \quad \nu > 1;$$

$$F_k(x) = F_{\alpha_k}(x, \lambda^k), \quad l^{ks} = y^{ks} - x^{ks}, \quad y^{ks} = [y_1^{ks}, \dots, y_n^{ks}],$$

$$y_i^{ks} = (\bar{x}_i - \underline{x}_i) \operatorname{sign}\left(-\frac{\partial F_k(x^{ks})}{\partial x_i}\right)^+ + \underline{x}_i, \quad \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} x^{k+1} &= x^{k\bar{s}_k}, \quad \lambda^{k+1} = \min\{\tilde{\lambda}^{k+1}, \tilde{\lambda}\}, \\ \tilde{\lambda}^{k+1} &= [\lambda^k + k^{-1}(Ax^{k+1} - b)]^+, \quad \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}_+^m, \quad \tilde{\lambda} = \text{const}, \\ \tilde{\lambda} &\geq \arg \min\{\|\lambda\| : \lambda \in \Lambda^*\}, \quad \alpha_{k+1} = (k+1)^{-\tau}, \quad \tau > 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

**Теорема 10.** Пусть в методе (49)  $\tau < \nu$ . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x_0^*, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = \lambda' \in \Lambda^*,$$

где  $x_0^* = \arg \min\{\|x\| : x \in X^*\}$  — нормальное решение задачи (48).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $0 \leq s \leq \bar{s}_k$ , то

$$\begin{aligned} F_k(x^{k(s+1)}) &= F_k(x^{ks}) + \mu_{ks} (c + A^T \lambda^k + 2\alpha_k x^{ks}, l^{ks}) + r_0 [\|(Ax^{ks} - b + \mu_{ks} Al^{ks})^+\|^2 - \|(Ax^{ks} - b)^+\|^2] \\ &\quad + \alpha_k \mu_{ks}^2 \|l^{ks}\|^2 = F_k(x^{ks}) + \mu_{ks} (c + A^T \lambda^k + 2\alpha_k x^{ks}, l^{ks}) + \alpha_k \mu_{ks}^2 \|l^{ks}\|^2 \\ &\quad - r_0 [\|(Ax^{ks} - b)^+ + \mu_{ks} Al^{ks}\|^2 - \|(Ax^{ks} - b + \mu_{ks} Al^{ks})^+\|^2 - 2\mu_{ks} ((Ax^{ks} - b)^+, Al^{ks}) - \mu_{ks}^2 \|Al^{ks}\|^2]. \end{aligned}$$

Применяя неравенство  $(p^+ + q)^2 \geq (p + q)^2$  ( $\forall p, q \in \mathbb{R}^1$ ), получим

$$\begin{aligned} &F_k(x^{k(s+1)}) - F_k(x^{ks}) \\ &\leq \mu_{ks} \left[ (c + A^T \lambda^k + 2\alpha_k x^{ks}, l^{ks}) + 2r_0 (A^T (Ax^{ks} - b)^+, l^{ks}) + r_0 \mu_{ks} \|Al^{ks}\|^2 + \alpha_k \mu_{ks} \|l^{ks}\|^2 \right] \\ &= \mu_{ks} [(\nabla_x F_k(x^{ks}), l^{ks}) + \mu_{ks} (r_0 \|Al^{ks}\|^2 + \alpha_k \|l^{ks}\|^2)]. \end{aligned}$$

Определение вектора  $y^{ks}$  согласно (49) эквивалентно условию

$$y^{ks} = \arg \min_{x \in \Omega} (\nabla_x F_k(x^{ks}), x).$$

Поэтому

$$F_k(x^{k(s+1)}) - F_k(x^{ks}) \leq -\frac{\mu_{ks} |(\nabla_x F_k(x^{ks}), l^{ks})|}{2} = -\frac{|(\nabla_x F_k(x^{ks}), l^{ks})|^2}{4(r_0 \|Al^{ks}\|^2 + \alpha_k \|l^{ks}\|^2)}.$$

Отсюда

$$F_k(x^{ks}) - F_k(x^{k(s+1)}) \geq \frac{|(\nabla_x F_k(x^{ks}), l^{ks})|^2}{C_1}, \quad (50)$$

где  $C_1 = 4r_0(1 + \|A\|^2)d^2$ ,  $d = \|\underline{x} - \bar{x}\|$ ,  $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$ .

Обозначим  $\tilde{x}_k = \arg \min_{x \in \Omega} F_k(x)$ ,  $z_s = F_k(x^{ks}) - F_k(\tilde{x}_k)$ ,  $z_s > 0$ ,  $0 \leq s \leq \bar{s}_k$ . В силу выпуклости  $F_k(x)$  и определения  $l^{ks}$  имеем

$$(\nabla_x F_k(x^{ks}), l^{ks}) \leq (\nabla_x F_k(x^{ks}), \tilde{x}_k - x^{ks}) \leq F_k(\tilde{x}_k) - F_k(x^{ks}) = -z_s.$$

Поэтому из (50) вытекает

$$C_1(z_s - z_{s+1}) \geq z_s^2, \quad s = 0, 1, \dots, \bar{s}_k.$$

Тогда (см., например, [14, лемма 2.3.4])

$$z_s \leq \frac{C_1}{s}, \quad s = 1, \dots, \bar{s}_k.$$

Отсюда

$$z_{\bar{s}_k} = F_k(x^{k+1}) - F_k(\tilde{x}_k) < \frac{C_1}{k^\nu} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (51)$$

Последовательность  $\{[x^k, \lambda^k]\}$ , вырабатываемая алгоритмом А, ограничена. Обозначим ее предельную точку через  $[x', \lambda']$ . Пусть  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x'$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = \lambda'$ .

Возьмем  $\lambda^* \in \Lambda^*$  так, чтобы  $\lambda^* \leq \tilde{\lambda}$ . По определению  $\lambda^k$  всегда

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda^*\| \leq \|\tilde{\lambda}^{k+1} - \lambda^*\|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда и из свойств оператора проектирования на  $\mathbb{R}_+^m$  получим

$$\begin{aligned} \|\lambda^{k+1} - \lambda^*\|^2 &\leq \|\lambda^k - \lambda^* + k^{-1}(Ax^{k+1} - b)\|^2 \\ &= \|\lambda^k - \lambda^*\|^2 + 2k^{-1}(\lambda^k - \lambda^*, Ax^{k+1} - b) + k^{-2}\|Ax^{k+1} - b\|^2. \end{aligned} \quad (52)$$

Предположим, найдутся числа  $\bar{\varepsilon} > 0$  и  $K$  такие, что

$$(\lambda^* - \lambda^k, Ax^{k+1} - b) \geq \bar{\varepsilon} \quad \text{для всех } k \geq K.$$

Просуммируем неравенства (52) от  $k = K$  до  $k = K + t - 1$  ( $t$  — натуральное число):

$$\|\lambda^{K+t} - \lambda^*\|^2 \leq \|\lambda^K - \lambda^*\|^2 - 2\bar{\varepsilon} \sum_{k=K}^{K+t-1} k^{-1} + h^2 \sum_{k=K}^{K+t-1} k^{-2},$$

где  $h = \max_{x \in \Omega} \|Ax - b\|$ . Отсюда

$$2\bar{\varepsilon} \sum_{k=K}^{K+t-1} k^{-1} \leq \|\lambda^K - \lambda^*\|^2 + h^2 \sum_{k=K}^{\infty} k^{-2},$$

что противоречиво при достаточно большом  $t$ .

Поэтому для любых  $\varepsilon > 0$  и натуральных  $K$  найдется номер  $k \geq K$ , для которого

$$(\lambda^* - \lambda^k, Ax^{k+1} - b) < \varepsilon.$$

Таким образом, среди точек, вырабатываемых алгоритмом А, существует последовательность  $\{[x^l, \lambda^l]\}$  такая, что

$$(\lambda^* - \lambda^l, Ax^{l+1} - b) < \varepsilon_l, \quad \varepsilon_l > 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \varepsilon_l = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} [x^l, \lambda^l] = [x', \lambda']. \quad (53)$$

Легко видеть, что точка  $[x^*, \lambda^*] \in X^* \times \Lambda^*$  будет седловой в области  $\Omega \times \mathbb{R}_+^m$  не только для функции  $L(x, \lambda)$ , но и для  $F_0(x, \lambda) = L(x, \lambda) + r_0 \|(Ax - b)^+\|^2$ . Так что если обозначить  $\psi_0(\lambda) = \min_{x \in \Omega} F_0(x, \lambda)$ , то  $\lambda^* = \arg \max_{\lambda \geq 0} \psi_0(\lambda)$ . Пусть

$$\psi_\alpha(\lambda) = \min_{x \in \Omega} \{F_\alpha(x, \lambda) = F_0(x, \lambda) + \alpha \|x\|^2\} = F_\alpha(x(\lambda), \lambda).$$

Так как

$$F_\alpha(x, \lambda_1) - F_\alpha(x, \lambda_2) = (\lambda_1 - \lambda_2, Ax - b),$$

то

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2, Ax(\lambda_1) - b) &= F_\alpha(x(\lambda_1), \lambda_1) - F_\alpha(x(\lambda_1), \lambda_2) \\ &\leq F_\alpha(x(\lambda_1), \lambda_1) - F_\alpha(x(\lambda_2), \lambda_2) = \psi_\alpha(\lambda_1) - \psi_\alpha(\lambda_2) \end{aligned}$$

для всех  $\lambda_1, \lambda_2$  из  $\mathbb{R}_+^m$ . Следовательно,  $\psi_\alpha(\lambda)$  — вогнутая функция переменной  $\lambda$  и

$$Ax(\lambda) - b \in \partial \psi_\alpha(\lambda). \quad (54)$$

Очевидно,

$$\psi_0(\lambda) \leq \psi_\alpha(\lambda) \leq \psi_0(\lambda) + \alpha d^2 \quad (\forall \alpha > 0). \quad (55)$$

С учетом (54) и (55) получим

$$\begin{aligned} \psi_0(\lambda^*) - \psi_\alpha(\lambda^l) &\leq \psi_\alpha(\lambda^*) - \psi_\alpha(\lambda^l) \leq (\lambda^* - \lambda^l, Ax(\lambda^l) - b) \\ &= (\lambda^* - \lambda^l, Ax^{l+1} - b) + (A^T(\lambda^* - \lambda^l), x(\lambda^l) - x^{l+1}). \end{aligned} \quad (56)$$

Функция  $F_\alpha(x, \lambda)$  — сильно выпуклая по  $x$  с константой сильной выпуклости  $\alpha > 0$ . Поэтому

$$\alpha \|x - x(\lambda)\|^2 \leq F_\alpha(x, \lambda) - F_\alpha(x(\lambda), \lambda) \quad (\forall x \in \Omega). \quad (57)$$

Применяя к (56) последовательно оценки (53), (57) (при  $\lambda = \lambda^l$ ) и (51), получим

$$\psi_0(\lambda^*) \leq \psi_{\alpha_l}(\lambda^l) + \varepsilon_l + \frac{C_2}{l^{\frac{\nu-\tau}{2}}}, \quad (58)$$

где  $C_2 = 2\sqrt{C_1} \|\tilde{\lambda}\| \|A\|$ ,  $C_1$  — из (51). Отсюда, учитывая (53) и (55), имеем  $\psi_0(\lambda^l) \geq \psi_0(\lambda^*)$  и, следовательно,  $\lambda^l \in \Lambda^*$ .

Из неравенства (51) следует

$$F_{\alpha_k}(x^{k+1}, \lambda^k) - F_{\alpha_k}(x, \lambda^k) < \frac{C_1}{k^\nu} \quad (\forall x \in \Omega, k = 1, 2, \dots),$$

отсюда

$$F_0(x, \lambda^k) > F_0(x^{k+1}, \lambda^k) - \alpha_k d^2 - \frac{C_1}{k^\nu} \quad (\forall x \in \Omega).$$

Следовательно,

$$F_0(x, \lambda^l) \geq F_0(x', \lambda^l) \quad (\forall x \in \Omega),$$

т. е.

$$F_0(x', \lambda^l) = \min_{x \in \Omega} F_0(x, \lambda^l) = \psi_0(\lambda^l) = \psi_0(\lambda^*) = \max_{\lambda \geq 0} \min_{x \in \Omega} F_0(x, \lambda).$$

По известной теореме о минимаксе (см., например, [15])

$$F_0(x', \lambda^l) = \min_{x \in \Omega} \max_{\lambda \geq 0} F_0(x, \lambda) = \min_{x \in \Omega} (c, x) = (c, x').$$

Таким образом,  $[x', \lambda^l] \in X^* \times \Lambda^*$ .

Применяя для последовательности  $[x^l, \lambda^l]$  из (53) неравенство (51), получим

$$\begin{aligned} r_0 \|(Ax^{l+1} - b)^+\|^2 &= F_{\alpha_l}(x^{l+1}, \lambda^l) - (c, x^{l+1}) - (\lambda^l, Ax^{l+1} - b) - \alpha_l \|x^{l+1}\|^2 \\ &\leq F_{\alpha_l}(x_0^*, \lambda^l) + \frac{C_1}{l^\nu} - (c, x^{l+1}) - (\lambda^l, Ax^{l+1} - b) - \alpha_l \|x^{l+1}\|^2 \\ &\leq (c, x_0^* - x^{l+1}) + \frac{C_1}{l^\nu} - (\lambda^l, Ax^{l+1} - b) + \alpha_l (\|x_0^*\|^2 - \|x^{l+1}\|^2). \end{aligned}$$

Так как  $[x_0^*, \lambda^*]$  — седловая точка функции  $L(x, \lambda)$  в области  $\Omega \times \mathbb{R}_+^m$ , то

$$(c, x_0^* - x) \leq (\lambda^*, Ax - b) \quad (\forall x \in \Omega).$$

Поэтому

$$\|x^{l+1}\|^2 \leq \|x_0^*\|^2 + \frac{1}{\alpha_l} (\lambda^* - \lambda^l, Ax^{l+1} - b) + \frac{C_1}{l^\nu \alpha_l}.$$

Отсюда, считая в (53)  $\varepsilon_l = o(\alpha_l)$ , получим  $\|x^l\| \leq \|x_0^*\|^2$ . Из единственности нормального решения  $x_0^*$  и того, что  $x^l \in X^*$ , следует  $x^l = x_0^*$  и, следовательно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x_0^*$ .

Покажем, что  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^k = \lambda'$  (т. е.  $\lambda'$  — единственная предельная точка для  $\{\lambda^k\}$ ). По аналогии с выводом неравенства (58) получим

$$\begin{aligned} 0 &\leq \psi_0(\lambda') - \psi_0(\lambda^k) \leq \psi_{\alpha_k}(\lambda') - \psi_{\alpha_k}(\lambda^k) + \alpha_k d^2 \\ &\leq (\lambda' - \lambda^k, Ax(\lambda^k) - b) + \alpha_k d^2 = (\lambda' - \lambda^k, Ax^{k+1} - b) + (A^T(\lambda' - \lambda^k), x(\lambda^k) - x^{k+1}) + \alpha_k d^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$(\lambda^k - \lambda', Ax^{k+1} - b) \leq \frac{C_2}{k^{\frac{\nu-\tau}{2}}} + \alpha_k d^2,$$

где  $C_2$  — из (58). Применяя далее неравенство (52) при  $\lambda^* = \lambda'$ , получим

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda'\|^2 \leq \|\lambda^k - \lambda'\|^2 + \frac{2C_2}{k^{1+\frac{\nu-\tau}{2}}} + \frac{2d^2}{k^{1+\tau}} + \frac{h^2}{k^2}. \quad (59)$$

Для произвольного  $\varepsilon > 0$  можно указать номер  $K$  такой, что

$$\|\lambda^K - \lambda'\|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}, \quad \sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{\nu-\tau}{2}}} < \frac{\varepsilon^2}{8C_2}, \quad \sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\tau}} < \frac{\varepsilon^2}{8d^2}, \quad \sum_{k=K}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\varepsilon^2}{4h^2}.$$

Просуммировав неравенства (59) от  $k = K$  до  $k = t$ , для произвольного  $t \geq K$  будем иметь  $\|\lambda^t - \lambda'\| < \varepsilon$ , что и означает сходимость  $\lambda^k$  к  $\lambda'$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Теорема доказана.

Применим алгоритм А для оптимальной коррекции несобственной задачи линейного программирования.

Пусть исходная задача имеет вид

$$\min \{(c, x) : x \in X\}, \quad (60)$$

где множество  $X$  определяется, как в (48). Будем считать, что  $X = \emptyset$ ,  $U \neq \emptyset$ , где  $U$  — допустимое множество задачи, двойственной к (60):  $U = \{u \in \mathbb{R}_+^m : c + A^T u = 0\}$ , т. е. (60) — несобственная задача линейного программирования 1-го рода.

Аналогом задачи (5) здесь будет

$$\min \{(c, x) : Ax \leq b + \bar{\xi}\}, \quad (61)$$

в которой вектор  $\bar{\xi}$  определяется, как в (5) при  $f(x) = Ax - b$ .

Задача (61) всегда разрешима. Обозначим  $\tilde{X} = \text{Arg}(61)$ . Предположим, что известно множество  $\Omega$ , определенное по аналогии с (48) и такое, что  $\tilde{x}_0 \in \text{int}\Omega$ , где  $\tilde{x}_0 = \arg \min\{\|x\| : x \in \tilde{X}\}$ .

Видоизменим несколько метод (49). Положим

$$\left. \begin{aligned} x^{k+1} &= x^{k\bar{s}_k}, \quad \lambda^{k+1} = [\lambda^k + \beta_k (Ax^{k+1} - b)]^+, \quad \beta_k > 0, \\ \alpha_{k+1} &= (k+1)^{-\tau}, \quad r_{k+1} = (k+1)^\omega, \quad \tau > 0, \quad \omega > 0, \quad \nu > \tau + \omega, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

где  $x^{k\bar{s}}$ ,  $\bar{s}_k$ ,  $\nu$  определяются согласно (49).

**Теорема 11.** Пусть в методе (62)  $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k < \infty$ ,  $\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\beta_k} = +\infty$ . Тогда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (Ax^k - b)^+ = \bar{\xi}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^k = \tilde{x}_0.$$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
2. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
3. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. М.: Наука, 1989. 400 с.
4. **Антипин А.С.** Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа. М.: Изд-во ВНИИСИ, 1979. 74 с.
5. **Скарин В.Д.** Об одной модификации метода штрафных функций в выпуклом программировании // Нелинейная оптимизация и приложения в планировании. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1973. С. 51–62.
6. **Еремин И.И.** Метод штрафов в выпуклом программировании // ДАН СССР. 1967. Т. 173, № 4. С. 748–751.
7. **Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
8. **Левитин Е.С.** О корректности ограничений и устойчивости в экстремальных задачах // Вест. Моск. ун-та. 1968. № 1. С. 24–34. (Математика. Механика.)
9. **Bertsekas D.P.** Multiplier methods: a survey // Automatica. 1976. Vol. 12, no. 2. P. 133–145.
10. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
11. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 с.
12. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
13. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
14. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
15. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.

Скарин Владимир Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

зав. сектором

Ин-т математики и механики УрО РАН

e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 25.05.2009

УДК 517.977.8

## К ВОПРОСУ О РЕШЕНИИ ИГРОВОЙ ЗАДАЧИ О СБЛИЖЕНИИ В ФИКСИРОВАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ<sup>1</sup>

В. Н. Ушаков, Д. К. Михалев, И. В. Байдосов

Рассматривается игровая задача о сближении в фиксированный момент времени, стоящая перед первым игроком. Предлагается метод приближенного построения множества позиционного поглощения — множества разрешимости задачи о сближении. Выписаны рекуррентные соотношения, определяющие в фазовом пространстве конфликтно-управляемой системы систему множеств, аппроксимирующую множество позиционного поглощения. Предлагается разрешающая процедура управления с поводырем, использующая копирование управлений.

Ключевые слова: игровая задача, управление, дифференциальная игра, дифференциальное включение, поводырь.

V. N. Ushakov, D. K. Mikhalev, I. V. Baidosov. On solving a pursuit game problem with fixed termination time.

A pursuit game problem for the first player with fixed termination time is considered. An approximate method is suggested for constructing the positional absorption set, which is the solvability set for the pursuit problem. Recurrence relations are written that define a system of sets approximating the positional absorption set in the phase space of the conflict-controlled system. A resolving control procedure with a guide is described, which copies the controls.

Keywords: game problem, control, differential game, differential inclusion, guide.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad x[t_0] = x_0, \quad u \in P, \quad v \in Q \quad (1.1)$$

на промежутке  $[t_0, \vartheta]$  ( $t_0 < \vartheta < \infty$ ).

Здесь  $x$  —  $m$ -мерный фазовый вектор,  $u$  и  $v$  — управления первого и второго игроков соответственно,  $P$  и  $Q$  — компакты в  $\mathbb{R}^p$  и  $\mathbb{R}^q$ .

Относительно  $f(t, x, u, v)$  предполагаем, что

$$f(t, x, u, v) = f^{(1)}(t, x, u) + C(t, x)v, \quad (t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q, \quad (1.2)$$

где  $f^{(1)}(t, x, u)$  и  $C(t, x)$  удовлетворяют условиям:

- A.**  $f^{(1)}(t, x, u)$  и  $C(t, x)$  определены и непрерывны по совокупности переменных  $t, x, u$  и  $t, x$  соответственно на  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P$  и  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ , и для любой компактной области  $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  найдутся такие  $L_f$  и  $L_C$  в  $(0, \infty)$ , что

$$\begin{aligned} \|f^{(1)}(t, x_*, u) - f^{(1)}(t, x^*, u)\| &\leq L_f \|x_* - x^*\|, & (t, x_*, u), (t, x^*, u) \text{ из } D \times P, \\ \|C(t, x_*)v - C(t, x^*)v\| &\leq L_C \|x_* - x^*\|, & (t, x_*, v), (t, x^*, v) \text{ из } D \times Q. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00587а), федеральной программы Президиума РАН № 29 и гранта РФФИ-Урал (проект 07-01-96085).

**В.** Существует такое  $\gamma \in (0, \infty)$ , что

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \gamma(1 + \|x\|), \quad (t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q.$$

Здесь  $\|f\|$  — норма вектора  $f$  в соответствующем евклидовом пространстве.

Рассматривается игровая задача о сближении, которая стоит перед первым игроком и в которой ему требуется обеспечить попадание фазового вектора  $x[t]$  системы (1.1), (1.2) на компактное множество  $M \subset \mathbb{R}^m$  в момент  $\vartheta$ . Решение задачи нужно найти в классе позиционных процедур управления с поводырем первого игрока [1, 2].

В задаче о сближении важно уметь выделять в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  — пространстве позиций  $(t, x)$  — множество  $W^0$  позиционного поглощения.  $W^0$  представляет собой совокупность всех исходных позиций  $(t_*, x_*)$ , из которых разрешима эта задача.

Однако даже в относительно простых случаях отсутствует эффективное аналитическое описание множества  $W^0$ , позволяющее его вычислять. В связи с этим актуален вопрос о приближенном вычислении  $W^0$ . В работе рассматривается метод приближенного вычисления  $W^0$ , базирующийся на понятных пошаговых конструкциях и унификации, а также описана разрешающая процедура управления с поводырем первого игрока, построение управлений в которой базируется на информации о позициях системы (1.1), (1.2).

Работа примыкает к исследованиям [1–7].

## 2. Оператор стабильного поглощения и стабильные мосты в игровой задаче о сближении

Множество  $W^0$  есть максимальный  $u$ -стабильный мост, т.е. множество, обладающее свойством  $u$ -стабильности и оканчивающееся в момент времени  $\vartheta$  на  $M$  (см. [1]). Стабильность некоторого множества  $W \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  означает его слабую инвариантность относительно дифференциальных включений, связанных с системой (1.1), (1.2) [1, 3, 4]. Семейство этих включений определим здесь, следуя [6, 7], при помощи условий (аксиом) А.1–А.3. Для этого введем в рассмотрение функцию (гамильтониан системы)

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle, \quad (t, x, l) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m,$$

где  $\langle l, f \rangle$  — скалярное произведение векторов  $l$  и  $f$  из  $\mathbb{R}^m$ .

Определим при помощи условий А.1–А.3 оператор стабильного поглощения, задающий свойство  $u$ -стабильности множества  $W$  в рассматриваемой задаче.

Принимая во внимание условия А, В, выделим в  $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$  такую большую компактную область  $D$ , которая содержит все элементы разрешающей конструкции игровой задачи (движения системы (1.1), (1.2), приводящие на  $M$ ; движения поводыря;  $u$ -стабильные мосты  $W$ ).

Пусть  $(t, x) \mapsto G(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ ,  $(t, x) \in D$  — непрерывное в хаусдорфовой метрике отображение, где  $G(t, x)$  — выпуклые компакты в  $\mathbb{R}^m$ , удовлетворяющие соотношениям

$$F(t, x) = \text{co} \{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\} \subset G(t, x),$$

$$\max_{g \in G(t, x)} \|g\| \leq \gamma_*(1 + \|x\|), \quad (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m,$$

где  $\text{co}\{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\}$  — выпуклая оболочка множества  $\{f(t, x, u, v) : u \in P, v \in Q\}$ ,  $\gamma_* \in (0, \infty)$ .

Пусть также заданы некоторое множество  $\Psi = \{\psi\}$  и семейство  $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$  отображений  $F_\psi : (t, x) \mapsto F_\psi(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ , определенных на  $D$  и удовлетворяющих условиям:

**А.1.** Для любых  $(t, x, \psi) \in D \times \Psi$  множество  $F_\psi(t, x)$  выпукло, замкнуто в  $\mathbb{R}^m$  и  $F_\psi(t, x) \subset G(t, x)$ ;

**A.2.**  $\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t,x)}(l) = H(t, x, l), \quad (t, x, l) \in D \times S;$

**A.3.** Существует такая функция  $\omega^*(\delta) \downarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$ , что

$$d(F_\psi(t_*, x_*), F_\psi(t^*, x^*)) \leq \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \quad (t_*, x_*), (t^*, x^*) \text{ из } D, \quad \psi \in \Psi.$$

Здесь  $h_F(l) = \sup_{f \in F} \langle l, f \rangle$ ,  $F \subset \mathbb{R}^m$ ;  $S = \{l \in \mathbb{R}^m : \|l\| = 1\}$ ,  $d(F_*, F^*)$  — хаусдорфово расстояние между компактами  $F_*$  и  $F^*$  в  $\mathbb{R}^m$ .

Множество  $\Psi$  в условиях A.1–A.3 может иметь разнообразную природу. Это может быть, например, сфера  $S$  или некоторый набор натуральных чисел, или некоторое множество векторов  $v$  из  $Q$ .

Приведем пример множества  $\Psi$  и семейства  $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$  отображений  $F_\psi : (t, x) \mapsto F_\psi(t, x) \subset \mathbb{R}^m$ , удовлетворяющих условиям A.1–A.3.

Гамильтониан  $H(t, x, l)$  системы (1.1), (1.2) имеет вид

$$H(t, x, l) = \max_{u \in P} \langle l, f^{(1)}(t, x, u) \rangle + \min_{v \in Q} \langle l, C(t, x)v \rangle.$$

В качестве  $\Psi$  возьмем множество  $Q$  векторов  $v$  управления второго игрока. В качестве множеств  $F_\psi(t, x)$  возьмем множества  $F_v(t, x)$  вида

$$F_v(t, x) = F^{(1)}(t, x) + C(t, x)v; \quad v \in Q,$$

где  $F^{(1)}(t, x) = \text{co}\{f^{(1)}(t, x, u) : u \in P\}$ .

В рассматриваемом случае можно в качестве  $G(t, x)$  выбрать множество, определяемое равенством

$$G(t, x) = F^{(1)}(t, x) + \text{co } C(t, x)Q,$$

где  $C(t, x)Q = \{C(t, x)v : v \in Q\}$ .

Легко показать, что семейство  $\{F_v : v \in Q\}$  удовлетворяет условиям A.1, A.2.

Покажем, что  $\{F_v : v \in Q\}$  удовлетворяет условию A.3. Для этого введем на  $(0, \infty)$  функцию

$$\omega^*(\delta) = \sup \left\{ \|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\| : \right. \\ \left. (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } D, |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leq \delta, (u, v) \in P \times Q \right\}.$$

Имеем  $\omega^*(\delta) \downarrow 0$  при  $\delta \downarrow 0$  и, кроме того,

$$\sup_{(u,v) \in P \times Q} \|f(t_*, x_*, u, v) - f(t^*, x^*, u, v)\| \leq \omega^*(|t_* - t^*| + \|x_* - x^*\|), \quad (t_*, x_*) \text{ и } (t^*, x^*) \text{ из } D.$$

Здесь символ  $\omega^*(\delta) \downarrow 0$  означает монотонное стремление  $\omega^*(\delta)$  к нулю при  $\delta$ , убывающем к нулю.

Учитывая последнее неравенство, получаем, что множества  $F_v(t_*, x_*)$ ,  $F_v(t^*, x^*)$  ( $(t_*, x_*)$  и  $(t^*, x^*)$  из  $D$ ,  $v \in Q$ ) и функция  $\omega^*(\delta)$ ,  $\delta \in (0, \infty)$  удовлетворяют условию A.3.

Если выпуклый компакт  $Q \subset \mathbb{R}^q$  есть многогранник с конечным числом вершин  $v^\rho$ ,  $\rho = \overline{1, \rho^*}$ , то семейство отображений  $(t, x) \mapsto F_v(t, x)$ ,  $v \in Q$  можно сузить до семейства  $(t, x) \mapsto F_{v^{(\rho)}}(t, x)$ ,  $v^{(\rho)} \in \hat{Q}$ , где  $\hat{Q}$  — множество всех вершин многогранника  $Q$ .

Здесь имеется в виду, что можно перейти от семейства  $(t, x) \mapsto F_v(t, x)$ ,  $v \in Q$  к более узкому семейству  $(t, x) \mapsto F_{v^{(\rho)}}(t, x)$ ,  $v^{(\rho)} \in \hat{Q} \subset Q$ , также удовлетворяющему условиям A.1–A.3. Последнее семейство более удобно при разработке алгоритмов приближенного построения максимальных  $u$ -стабильных мостов тем, что оно конечно.

Введем в рассматриваемой задаче оператор стабильного поглощения в форме, выраженной в терминах отображений  $(t, x) \mapsto F_v(t, x)$ ,  $v \in Q$ , удовлетворяющих условиям А.1–А.3.

Полагаем  $X_v(t^*; t_*, x_*)$  — множество всех точек  $x^* \in \mathbb{R}^m$ , в которые приходят в момент времени  $t^* \in [t_*, \vartheta]$  решения  $x(\cdot) = (x(t) : t_* \leq t \leq t^*)$  дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_v(t, x), \quad x(t_*) = x_*.$$

Полагаем также  $X_v^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_v(t^*; t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\}$ ,  $X^* \subset \mathbb{R}^m$ .

**О п р е д е л е н и е 2.1** [6, 7]. Оператором стабильного поглощения  $\pi$  в задаче о сближении с  $M$  в момент времени  $\vartheta$  назовем отображение  $\pi : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^m} \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$ , заданное равенством

$$\pi(t_*; t^*, X^*) = \bigcap_{v \in Q} X_v^{-1}(t_*, t^*, X^*).$$

Здесь  $\Xi = \{(t_*, t^*) : (t_*, t^*) \in [t_0, \vartheta] \times [t_0, \vartheta], t_* \leq t^*\}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.2** [6, 7]. Замкнутое множество  $W \subset D$  назовем  $u$ -стабильным мостом в задаче о сближении с  $M$  в момент  $\vartheta$ , если

$$W(\vartheta) \subset M; \quad W(t_*) \subset \pi(t_*, t^*, W(t^*)), \quad (t_*, t^*) \in \Xi.$$

Здесь  $W(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in W\}$ .

Заметим, что множество  $W^0$  является максимальным  $u$ -стабильным мостом; при этом  $W^0(\vartheta) = M$ .

### 3. Аппроксимирующая система множеств $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ .

Приведем определение аппроксимирующей системы множеств из [6, 7], ориентированное на приближенное вычисление  $W^0$ .

Понятие аппроксимирующей системы множеств возникает при подмене непрерывной (по времени) схемы  $u$ -стабильности дискретной схемой. Промежуток  $[t_0, \vartheta]$  подменяется конечным разбиением  $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_N = \vartheta\}$ , и множества достижимости  $X_v(t^*; t_*, x_*)$ ,  $(t_*, x_*) \in D$ ,  $t^* \in [t_*, \vartheta]$ ,  $v \in Q$  подменяются выпуклыми множествами  $x_* + (t^* - t_*)F_v(t_*, x_*)$ , гомотетичными множествам  $F_v(t_*, x_*)$ .

Введя такую подмену, трансформируем определения 2.1, 2.2 в определения, предназначенные для работы с дискретным временем  $t_i \in \Gamma$ . В связи с такой трансформацией в новых определениях появятся различные  $\varepsilon$ -окрестности множеств. Их появление есть своеобразная плата за переход от непрерывной (по времени) схемы  $u$ -стабильности к дискретной (по времени) схеме.

Рассмотрим подробнее дискретную схему.

Пусть  $(t_*, t^*) \in \Xi$ ,  $x_* \in \mathbb{R}^m$ ,  $X^* \subset \mathbb{R}^m$ ,  $v \in Q$ .

Полагаем  $\tilde{X}_v(t^*; t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F_v(t_*, x_*)$ ,  $\tilde{X}_v^{-1}(t_*, t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : \tilde{X}_v(t^*; t_*, x_*) \cap X^* \neq \emptyset\}$ .

**О п р е д е л е н и е 3.1** [6, 7]. Аппроксимирующим оператором стабильного поглощения  $\tilde{\pi}$  в задаче о сближении с  $M$  в момент  $\vartheta$  назовем отображение  $\tilde{\pi} : \Xi \times 2^{\mathbb{R}^m} \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$ , задаваемое соотношением

$$\tilde{\pi}(t_*; t^*, X^*) = \bigcap_{v \in Q} \tilde{X}_v^{-1}(t_*, t^*, X^*).$$

Введя в рассмотрение функцию

$$\omega(\delta) = \delta \omega^*((1 + K)\delta) \text{ на } (0, \infty),$$

получаем, что она монотонно убывает к нулю при  $\delta \downarrow 0$  и при этом  $\lim_{\delta \downarrow 0} \delta^{-1} \omega(\delta) = 0$ ; здесь

$$K = \max_{(t,x) \in D} \|f(t, x, u, v)\|.$$

Зададим последовательность разбиений  $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{N(n)} = \vartheta\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  отрезка  $[t_0, \vartheta]$  с диаметрами  $\Delta^{(n)} = \max\{\Delta_i : i \in \overline{0, N(n)}\} \downarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Отметим, что моменты  $t_i$  свои для каждого  $\Gamma_n$ ; однако, эту зависимость моментов  $t_i$  от  $n$  явно отражать в обозначениях не будем.

Каждому  $\Gamma_n$  сопоставим последовательность  $\{\varepsilon_i\}$  чисел  $\varepsilon_i = \omega(\Delta_{i-1}) + (1 + L\Delta_{i-1})\varepsilon_{i-1}$ ,  $i = 1, N(n)$ ;  $\varepsilon_0 = 0$ ; здесь  $L = L_f + L_C$ .

Сопоставим также каждому  $\Gamma_n$  последовательность  $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i)\}$ ,  $\tilde{W}^{(n)}(t_i) \subset \mathbb{R}^m$ , заданную рекуррентно.

**О п р е д е л е н и е 3.2** [6, 7].  $\tilde{W}^{(n)}(\vartheta) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$ ,  $\tilde{W}^{(n)}(t_i) = \tilde{\pi}(t_i; t_{i+1}, \tilde{W}^{(n)}(t_{i+1}))$ ,  $i = N(n) - 1, \dots, 0$ .

Определим предел последовательности  $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\Delta^{(n)} \downarrow 0$ .

**О п р е д е л е н и е 3.3** [6, 7]. Полагаем  $\Omega^0 = \lim_{n \rightarrow \infty, \Delta^{(n)} \downarrow 0} \{\tilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$  — множество всех тех точек  $(t_*, x_*) \in D$ , для которых найдется такая последовательность

$$\{(\tau_n, x_n) : \tau_n = t_n(t_*), x_n \in \tilde{W}^{(n)}(\tau_n)\},$$

что  $(t_*, x_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, x_n)$ ; здесь  $t_n(t_*) = \min\{t_i : t_i \in \Gamma_n, t_i \geq t_*\}$ .

Справедливо равенство  $\Omega^0(\vartheta) = M$ , из которого следует  $\Omega^0 \neq \emptyset$ .

**Теорема 3.1.** [6, 7]  $\Omega^0 = W^0$ .

Теорема 3.1 дает основание вычислять  $W^0$  приближенно как систему  $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ .

#### 4. Процедура управления с поводырем, использующая копирование управлений

Опишем позиционную процедуру управления с поводырем первого игрока, обеспечивающую попадание движений системы (1.1), (1.2) в достаточно малую  $\varepsilon$ -окрестность  $M_\varepsilon$  целевого множества  $M$ . Процедуры управления с поводырем, введенные в теорию дифференциальных игр Н.Н. Красовским, А.И. Субботиным [1, 2], обладают рядом важных достоинств: они достаточно просты в реализации управлений и устойчивы по отношению к помехам, возникающим при вычислении движения  $x[t]$  управляемой системы и движения поводыря  $y[t]$  в моменты  $t_i \in \Gamma_n$  (см. [1, 2]). Одним из основных элементов в конструкциях управления с поводырем является ведущий к целевому множеству  $M$   $u$ -стабильный мост, например,  $W^0$ . При наличии  $u$ -стабильного моста формируются последовательно по шагам  $[t_i, t_{i+1}]$  разбиения  $\Gamma_n$  совместно движение  $x[t]$  конфликтно-управляемой системы и движение поводыря  $y[t]$ . Движение  $y[t]$  является вспомогательным в этой конструкции, и его формирование находится полностью в компетенции первого игрока. Движение  $y[t]$  формируется первым игроком так, что точки  $y[t_i]$  поводыря удовлетворяют включению  $(t_i, y[t_i]) \in W^0$ ,  $t_i \in \Gamma_n$ , а управление  $u(t) \equiv u(t_i)$ ,  $t \in [t_i, t_{i+1})$  в управляемой системе выбирается из условия “максимального” сдвига системы в направлении на поводыря

$$\min_{v \in Q} \langle s[t_i], f(t_i, x[t_i], u(t_i), v) \rangle = \max_{u \in P} \min_{v \in Q} \langle s[t_i], f(t_i, x[t_i], u, v) \rangle;$$

здесь  $s[t_i] = y[t_i] - x[t_i]$ .

В дополнение к этому способу управления с поводырем предложим способ формирования поводыря для системы (1.1), (1.2), основывающийся на копировании управлений.

Пусть задано разбиение  $\Gamma_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{N(n)-1}, t_{N(n)} = \vartheta\}$  промежутка  $[t_0, \vartheta]$ ,  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i = \Delta^{(n)}$ ,  $i = \overline{0, N(n) - 1}$ .

Предположим, что уже построена аппроксимирующая система  $\{\tilde{W}^{(n)}(t_i) : t_i \in \Gamma_n\}$ , отвечающая разбиению  $\Gamma_n$ .



Введем обозначения

$$f^{(1)}(t_0, x[t_0]) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i^0 f^{(1)}(t_0, x[t_0], u_i^0), \quad v^0 = \Delta_0^{-1} \int_{t_0}^{t_1} v(\tau) d\tau,$$

$$h^0 = \int_{t_0}^{t_1} \left( f(\tau, x[\tau], u^0(\tau), v(\tau)) - f(t_0, x[t_0], u^0(\tau), v(\tau)) \right) d\tau.$$

Получаем

$$\int_{t_0}^{t_1} f^{(1)}(t_0, x[t_0], u^0(\tau)) d\tau = \Delta_0 f^{(1)}(t_0, x[t_0]).$$

$$x[t_1] = x[t_0] + \Delta_0 f^{(1)}(t_0, x[t_0]) + \Delta_0 C(t_0, x[t_0])v^0 + h^0. \quad (4.1)$$

Оценим сверху величину вектора  $h^0$ . Поскольку

$$|\tau - t_0| + \|x[\tau] - x[t_0]\| \leq \Delta_0 + \int_{t_0}^{\tau} \|f(\tau, x[\tau], u^0(\tau), v(\tau))\| d\tau \leq (1 + K)\Delta_0,$$

то в силу определения функции  $\omega(\delta)$  справедливо неравенство

$$\|h^0\| \leq \omega(\Delta_0).$$

Далее определяем движения  $y[t]$  и  $x[t]$  поводыря и системы (1.1), (1.2) на  $[t_1, t_2]$ .

На  $[t_1, t_2]$  постоянное управление второго игрока в поводыре — вектор  $v_*^1 \in Q$  — находим из условия

$$\left\| x[t_1] - x[t_0] - \Delta_0 f^{(1)}(t_0, x[t_0]) - \Delta_0 C(t_0, x[t_0])v_*^1 \right\| \leq \omega(\Delta_0). \quad (4.2)$$

Неравенство (4.2) имеет простой геометрический смысл:

$$\Delta_0 C(t_0, x[t_0])v_*^1 \in B_{\omega(\Delta_0)}(z[t_1]), \quad (4.3)$$

где  $z[t_1] = x[t_1] - x[t_0] - \Delta_0 f^{(1)}(t_0, x[t_0])$ ,  $B_r(z) = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - z\| \leq r\}$  ( $r \in (0, \infty)$ ).

Отметим, что всегда существует  $v_*^1 \in Q$ , удовлетворяющий (4.3); включению (4.3) удовлетворяет, например, вектор  $v^0 \in Q$ .

Из (4.1), (4.2) получаем

$$\left\| \Delta_0 C(t_0, x[t_0])v^0 - \Delta_0 C(t_0, x[t_0])v_*^1 \right\| \leq 2\omega(\Delta_0). \quad (4.4)$$

Неравенство (4.4) означает, что  $v_*^1 \in Q$  в поводыре  $y[t]$  на шаге  $[t_1, t_2]$  разбиения  $\Gamma_n$  выбирается из условия достаточной близости к  $v^0 = \Delta_0^{-1} \int_{t_0}^{t_1} v(\tau) d\tau$  — среднему значению управления  $v(t)$  второго игрока в (1.1), (1.2) на предыдущем шаге  $[t_0, t_1]$  разбиения  $\Gamma_n$ .

Так как  $y[t_1] \in \tilde{W}^{(n)}(t_1)$ , то

$$\left( y[t_1] + \Delta_1(F^{(1)}(t_1, y[t_1]) + C(t_1, y[t_1])v_*^1) \right) \cap \tilde{W}^{(n)}(t_2) \neq \emptyset.$$

Из этого условия определяем вектор  $f_*^{(1)}(t_1, y[t_1]) \in F^{(1)}(t_1, y[t_1])$ , удовлетворяющий включению

$$y[t_1] + \Delta_1 \left( f_*^{(1)}(t_1, y[t_1]) + C(t_1, y[t_1])v_*^1 \right) \in \tilde{W}^{(n)}(t_2).$$





$$\begin{aligned}
& + \Delta^{(n)} \sum_{j=0}^{k-1} \left( C(t_{j+1}, y[t_{j+1}])v_*^{j+1} - C(t_j, x[t_j])v^j \right) \\
& + \Delta^{(n)} C(t_0, y[t_0])v_*^0 - \Delta^{(n)} C(t_k, x[t_k])v^k - \sum_{j=0}^k h^j, \quad k = \overline{0, N(n) - 1}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Оценим сверху слагаемые в правой части (4.5).

Для первой суммы, входящей в (4.5), имеем

$$\left\| \Delta^{(n)} \sum_{j=0}^k (f_*^{(1)}(t_j, y[t_j]) - f^{(1)}(t_j, x[t_j])) \right\| \leq \Delta^{(n)} L_f \|y[t_j] - x[t_j]\|. \tag{4.6}$$

Опуская промежуточные выкладки, выпишем оценку для второй суммы, входящей в (4.5),

$$\begin{aligned}
& \left\| \Delta^{(n)} \sum_{j=0}^{k-1} (C(t_{j+1}, y[t_{j+1}])v_*^{j+1} - C(t_j, x[t_j])v^j) \right\| \leq L_C \Delta^{(n)} \sum_{j=0}^{k-1} \|y[t_j] - x[t_j]\| \\
& + 2(\vartheta - t_0)\omega^*((1+K)\Delta^{(n)}) + (\vartheta - t_0)\omega^{**}((1+K)\Delta^{(n)}), \tag{4.7}
\end{aligned}$$

где

$$\omega^{**}(\delta) = \max \left\{ \|C(t_*, x_*)v - C(t^*, x^*)v\| : (t_*, x_*), (t^*, x^*) \text{ из } D, |t_* - t^*| + \|x_* - x^*\| \leq \delta, v \in Q \right\},$$

$\delta \in (0, \infty)$ .

Для слагаемых  $\Delta^{(n)} C(t_0, y[t_0])v_*^0$ ,  $\Delta^{(n)} C(t_k, x[t_k])v^k$ , входящих в (4.5), справедливы оценки

$$\|\Delta^{(n)} C(t_0, y[t_0])v_*^0\| \leq K \Delta^{(n)}, \quad \|\Delta^{(n)} C(t_k, x[t_k])v^k\| \leq K \Delta^{(n)}. \tag{4.8}$$

Для суммы  $\sum_{j=0}^k h^j$ , входящей в (4.5), имеем

$$\left\| \sum_{j=0}^k h^j \right\| \leq (\vartheta - t_0)\omega^*((1+K)\Delta^{(n)}). \tag{4.9}$$

Принимая во внимание (4.5)–(4.9), имеем

$$z_{k+1} \leq z_0 + L \Delta^{(n)} \sum_{j=0}^k z_j + \eta(\Delta^{(n)}), \quad k = \overline{0, N(n) - 1}. \tag{4.10}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
z_j &= \|y[t_j] - x[t_j]\|, \quad j = \overline{0, N(n)}; \quad L = L_f + L_C; \\
\eta(\delta) &= (\vartheta - t_0) \left( 3\omega^*((1+K)\delta) + \omega^{**}((1+K)\delta) \right) + 2K\delta. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Из (4.10) следует оценка

$$z_{k+1} \leq e^{L(\vartheta-t_0)} z_0 + e^{L(\vartheta-t_0)} \eta(\Delta^{(n)}), \quad k = \overline{0, N(n) - 1}.$$

В случае, когда  $z_0 = y[t_0] - x[t_0] = 0$ , получаем

$$z_{k+1} \leq e^{L(\vartheta-t_0)} \eta(\Delta^{(n)}), \quad k = \overline{0, N(n) - 1}.$$

Поскольку  $y[\vartheta] = y[t_{N(n)}] \in \tilde{W}^{(n)}(t_{N(n)}) = M_{\varepsilon_{N(n)}}$ , то для любого движения  $x[t]$  ( $x[t_0] = x_0 = y_0 \in \tilde{W}^{(n)}(t_0)$ ) системы (1.1), (1.2) на  $[t_0, \vartheta]$ , порожденного процедурой управления с поведением первого игрока, справедливо включение

$$x[\vartheta] \in M_{\varepsilon_{N(n)} + \delta_{N(n)}}, \quad \text{где } \delta_{N(n)} = e^{L(\vartheta-t_0)} \eta(\Delta^{(n)}).$$

Принимая во внимание предельное соотношение  $\lim_{n \rightarrow \infty, \Delta^{(n)} \downarrow 0} (\varepsilon_{N(n)} + \delta_{N(n)}) = 0$ , получаем, что справедлива

**Теорема 4.1.** Для любых  $\varepsilon > 0$  и разбиения  $\Gamma_n$  с диаметром  $\Delta^{(n)}$ ,  $e^{L(\vartheta-t_0)}\eta(\Delta^{(n)}) \leq \varepsilon$ , процедура управления с поведением первого игрока, базирующаяся на копировании управлений, обеспечивает при любых допустимых поемах  $v(t)$ ,  $t \in [t_0, \vartheta]$  второго игрока включение  $x[\vartheta] \in M_\varepsilon$  для движений  $x[t]$ ,  $x[t_0] \in \tilde{W}^{(n)}(t_0)$  системы (1.1), (1.2). Здесь функция  $\eta(\Delta^{(n)})$  определена равенством (4.11).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Аппроксимация в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 197–204.
3. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
4. **Красовский Н.Н.** Унификация дифференциальных игр // Игровые задачи управления. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. Вып. 24. С. 32–34.
5. **Куржанский А.Б.** Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. Математического ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 224. С. 234–248.
6. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.
7. **Ушаков В.Н.** Процедуры построения стабильных мостов в дифференциальных играх: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: Свердловск: ИММ УрО АН СССР, 1991. 308 с.

Ушаков Владимир Николаевич  
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН  
зав. отделом

Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила 26.05.2009

Михалев Дмитрий Константинович  
разработчик  
ООО “Yandex”  
e-mail: ushak@imm.uran.ru

Байдосов Игорь Вячеславович  
ст. математик  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ushak@imm.uran.ru

УДК 517.977

## ПОСТРОЕНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ОЦЕНОК МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ<sup>1</sup>

**Т. Ф. Филиппова**

Предлагается метод построения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической системы со скалярным импульсным управлением и неопределенностью по начальным данным. При помощи специальной разрывной замены времени рассматриваемая импульсная система преобразуется в обыкновенное дифференциальное включение, уже не содержащее импульсных составляющих. Для оценивания множеств достижимости полученного нелинейного дифференциального включения используются результаты теории эллипсоидального оценивания и теории эволюционных уравнений многозначных состояний динамических систем в условиях неопределенности.

Ключевые слова: множество достижимости, импульсное управление, траекторные трубки, многозначные оценки, дифференциальные включения.

T. F. Filippova. Construction of set-valued estimates of reachable sets for some nonlinear dynamical systems with impulsive control.

A method of constructing ellipsoidal estimates of reachable sets is proposed for a nonlinear system with a scalar impulsive control and uncertainty in initial data. A special discontinuous change of time is used to transform the impulsive system under consideration into an ordinary differential inclusion without impulsive components. To estimate reachable sets of the obtained nonlinear differential inclusion, results from the theory of ellipsoidal estimation and theory of evolution equations of set-valued states of dynamical systems under uncertainty are used.

Keywords: reachable set, impulsive control, trajectory tubes, set-valued estimates, differential inclusions.

### Введение

Одним из центральных вопросов теории оптимального управления динамическими системами является построение и исследование множеств достижимости динамической системы, т. е. множеств тех состояний фазового пространства, куда фазовая точка может быть переведена из начального состояния (или множества начальных состояний) за заданное время при помощи допустимых управлений. К необходимости изучения множеств достижимости приводят многие задачи теории управления и оценивания [5–7], теории дифференциальных игр [5, 15], связанные с исследованием сложных реальных систем различной природы (механических, экономических, экологических и др.), в описании которых присутствует неопределенность.

Для управляемых систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с классическими (измеримыми) управлениями, в настоящее время разработана полная теория построения оценок (внешних и внутренних) множеств достижимости таких систем, основанная на технике эллипсоидального исчисления [6, 10, 16]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости.

В работах [13, 14] техника эллипсоидального исчисления была использована для решения задач оценивания трубок траекторий некоторых нелинейных управляемых динамических систем с неопределенностью по начальным данным. При этом предполагалось, что динамическая

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00223) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4576.2008.1).

система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены являются квадратичными по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями.

В работах [1, 2, 11, 12] также рассматривались схемы построения многозначных оценок множеств достижимости линейных управляемых импульсных систем [3, 4, 8], основанные на идеях и методах эллипсоидального исчисления. В этом случае ограничение на управляющие импульсные функции задавалось в виде специального обобщенного “эллипсоида” в пространстве функций ограниченной вариации.

В данной работе техника эллипсоидального исчисления развивается для трубок траекторий нелинейных управляемых импульсных динамических систем с неопределенностью по начальным данным. Предполагается, что импульсные управления в рассматриваемой системе задаются скалярными функциями ограниченной вариации. Неопределенность по начальным данным здесь состоит в том, что начальное состояние не известно точно, дано лишь, что начальный фазовый вектор системы принадлежит заданному эллипсоиду соответствующего фазового пространства. При помощи специальной разрывной замены времени [18, 19] рассматриваемая импульсная система преобразуется в обыкновенное дифференциальное включение, уже не содержащее обобщенных функций. Для оценивания множеств достижимости полученного нелинейного дифференциального включения используются результаты [13, 14].

### 1. Постановка задачи

Введем предварительно следующие обозначения. Пусть  $\mathbb{R}^n$  обозначает  $n$ -мерное евклидово пространство,  $\text{comp}^n$  — множество всех компактных подмножеств из  $\mathbb{R}^n$ ,  $\text{conv} \mathbb{R}^n$  — множество всех компактных выпуклых подмножеств из  $\mathbb{R}^n$ . Символ  $(x, y)$  обозначает скалярное произведение векторов  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , символ  $\|x\| = (x, x)^{1/2}$  — евклидова норма вектора  $x$ ,  $'$  — знак транспонирования,  $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ , символ  $E(y, Y) = \{x \in \mathbb{R}^n : (Y^{-1}(x - y), (x - y)) \leq 1\}$  обозначает эллипсоид в  $\mathbb{R}^n$  с центром  $y$  и симметрической положительно определенной  $n \times n$ -матрицей  $Y$ ,  $I$  — единичная  $n \times n$ -матрица. Обозначим символом  $h(X, Y)$  хаусдорфово расстояние между множествами  $X, Y \subset \text{comp} \mathbb{R}^n$ :  $h(X, Y) = \inf \{\epsilon \geq 0 \mid X \subseteq Y + \epsilon B(0, 1), Y \subseteq X + \epsilon B(0, 1)\}$ .

Рассмотрим управляемую систему с обобщенным управлением

$$dx(t) = (Ax + f(x)d + u(t))dt + Gdv(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \tag{1.1}$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0 - 0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 \in \text{comp} \mathbb{R}^n. \tag{1.2}$$

Здесь  $A$  — постоянная  $n \times n$ -матрица; векторы  $d, G \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t)$  — классическое (измеримое) управление, стесненное геометрическим ограничением

$$u(t) \in U, \quad U \in \text{comp} \mathbb{R}^m,$$

$v(t)$  — скалярная функция ограниченной вариации, возрастающая, непрерывная справа на отрезке  $[t_0, T]$  и удовлетворяющая ограничению (параметр  $\mu > 0$  задан)

$$\text{Var}_{t \in [t_0, T]} v(t) \leq \mu.$$

В работе предполагается, что нелинейная функция  $f(x)$  является положительно определенной квадратичной формой

$$f(x) = x' B x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

где  $B$  — симметрическая положительно определенная  $n \times n$ -матрица.

Обозначим символом  $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$  решение [7] системы (1.1) на промежутке  $[t_0, T]$  для допустимого  $x_0 \in X_0$  и управлений  $u(\cdot), v(\cdot)$ . Будем предполагать, что все решения  $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$  определены на всем промежутке  $[t_0, T]$  для любых  $x_0$  и  $u(\cdot), v(\cdot)$  (условия, при которых данное требование выполняется, аналогичны условиям работы [14], где рассмотрены задачи оценивания множеств достижимости нелинейных управляемых систем без импульсных составляющих).

Обозначим символом  $\mathcal{U}$  класс допустимых измеримых управлений  $u(\cdot)$  и символом  $\mathcal{V}$  класс допустимых управлений-мер  $v(\cdot)$ . Трубку траекторий [17] системы (1.1) из начального состояния  $\{t_0, X_0\}$  обозначим

$$X(\cdot) = X(\cdot; t_0, X_0) = \bigcup \{x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) \mid x_0 \in X_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, v(\cdot) \in \mathcal{V}\}.$$

Отметим, что сечение  $X(t) = X(t; t_0, X_0)$  трубки траекторий  $X(\cdot)$  в момент времени  $t \in [t_0, T]$  совпадает со множеством достижимости системы (1.1) в момент  $t$  из начального состояния  $\{t_0, X_0\}$ .

В работе рассмотрены схемы построения оценок трубок траекторий  $X(\cdot)$  и множеств достижимости  $X(t)$  системы (1.1)–(1.3), основанные на идеях и методах эллипсоидального исчисления.

## 2. Вспомогательные построения и результаты

### 2.1. Дифференциальное включение в расширенном пространстве

В работе [12] для исследования чувствительности трубки траекторий импульсной системы по параметрам было введено в рассмотрение вспомогательное дифференциальное включение, не содержащее импульсных составляющих. Это дифференциальное включение было получено в [12] с использованием специальной разрывной замены времени [18, 19], в нашем случае указанное дифференциальное включение имеет вид

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} z \\ \tau \end{pmatrix} \in H(\tau, z), \quad (2.1)$$

$$z(t_0) = x_0, \quad \tau(t_0) = t_0, \quad t_0 \leq \eta \leq T + \mu.$$

Здесь

$$H(\tau, z) = \bigcup_{0 \leq \nu \leq 1} \left\{ (1 - \nu) \begin{pmatrix} Az + f(z)d + U \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (2.2)$$

Приведем два результата из работы [12], касающиеся введенного дифференциального включения (2.1), (2.2).

**Лемма 1** [12]. *Многозначная функция  $H$ , определенная в (2.2), удовлетворяет условию Липшица по  $\{\tau, z\}$  и имеет выпуклые и компактные значения*

$$H : [t_0, T + \mu] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{conv } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Отметим, что из леммы 1, в частности, вытекает существование решений включения (2.1), (2.2).

Обозначим  $w = \{z, \tau\}$  расширенный фазовый вектор системы (2.1) и рассмотрим траекторную трубку включения (2.1) в расширенном фазовом пространстве:

$$W(\eta) = W(\eta; t_0, X_0 \times \{t_0\}) = \bigcup \{w(\eta; t_0, w_0) \mid w_0 \in X_0 \times \{t_0\}\}, \quad t_0 \leq \eta \leq T + \mu.$$

**Лемма 2** [12]. Множество достижимости  $X[T]$  управляемой системы (1.1) совпадает с проекцией множества достижимости  $W[T + \mu]$  дифференциального включения (2.1) на подпространство переменных  $z$ :

$$X[T] = \pi_z W[T + \mu].$$

**З а м е ч а н и е.** Отметим, что дифференциальное включение (2.1) не содержит импульсных составляющих и для оценки его траекторных трубок и соответствующих множеств достижимости можно применить результаты, полученные для динамических систем с классическими (измеримыми) управляющими воздействиями.

## 2.2. Внешние оценки множеств достижимости дифференциального включения

Рассмотрим вспомогательное дифференциальное включение

$$\dot{x} \in Ax + f(x)d + E(\hat{a}, \hat{Q}), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 = E(a, k^2 B^{-1}), \quad (2.4)$$

где  $k \in \mathbb{R}$  ( $k \neq 0$ );  $a, \hat{a} \in \mathbb{R}^n$ , матрица  $B$  определена в (1.3), симметрическая матрица  $\hat{Q}$  является положительно определенной.

**Теорема 1** [14]. Для всех  $\sigma > 0$  справедлива внешняя оценка множества достижимости  $X(t_0 + \sigma) = X(t_0 + \sigma; t_0, X_0)$  включения (2.3), (2.4)

$$X(t_0 + \sigma) \subseteq E(a^+(\sigma), Q^+(\sigma)) + o(\sigma)B(0, 1), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1} o(\sigma) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь параметры эллипсоида  $E(a^+(\sigma), Q^+(\sigma))$  определяются равенствами

$$a^+(\sigma) = a(\sigma) + \sigma \hat{a},$$

$$Q^+(\sigma) = (p^{-1} + 1)Q(\sigma) + (p + 1)\sigma^2 \hat{Q},$$

где  $p$  — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p + \lambda_i} = \frac{n}{p(p + 1)},$$

а  $\lambda_i \geq 0$  — корни уравнения  $|Q(\sigma) - \lambda \sigma^2 \hat{Q}| = 0$  и

$$a(\sigma) = a + \sigma(Aa + a'Ba \cdot d + k^2 d),$$

$$Q(\sigma) = k^2(I + \sigma R)B^{-1}(I + \sigma R)', \quad R = A + 2da'B.$$

В работах [13, 14] были предложены алгоритмы, позволяющие найти внешние и внутренние (по включению множеств) эллипсоидальные оценки множеств  $X(t)$  системы (2.3). Приведем один из алгоритмов внешнего оценивания множеств достижимости  $X(t)$ , использующий в построении внешней многозначной оценки включение (2.5).

**А л г о р и т м 1** [14]. Рассмотрим разбиение  $\{[t_i, t_{i+1}]\}$  заданного отрезка  $[t_0, T]$ , где  $t_i = t_0 + ih$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $h = (T - t_0)/m$ ,  $t_m = T$ .

• Для заданного начального эллипсоида  $X_0 = E(a, k_0^2 B^{-1})$  ( $k_0 \neq 0$ ) построим эллипсоид  $X_1 = E(a_1, Q_1)$  по теореме 1 для  $a_1 = a^+(\sigma)$ ,  $Q_1 = Q^+(\sigma)$ ,  $\sigma = h$ .

- Найдем наименьшее  $k_1 > 0$  такое, что

$$E(a_1, Q_1) \subset \tilde{X}_1 = E(a_1, k_1^2 B^{-1})$$

(число  $k_1^2$  совпадает с максимальным собственным значением матрицы  $B^{1/2}Q_1B^{1/2}$ ).

- Рассмотрим динамическую систему на следующем промежутке  $[t_1, t_2]$  с эллипсоидом  $E(a_1, k_1^2 B^{-1})$ , взятым в качестве начального множества в момент  $t_1$ .

- Следующие шаги повторяют предыдущие итерации.

В результате итерационной процедуры мы приходим к внешней эллипсоидальной оценке  $E(a^+(T), Q^+(T))$  множества достижимости  $X(T)$  (с большей точностью при  $m \rightarrow \infty$ ).

**Пример.** Рассмотрим дифференциальное включение вида (2.3)

$$\dot{x} \in Ax + f(x)d + E(0, I), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad 0 \leq t \leq T = 0.15, \quad (2.6)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0 \in X_0 = B(0, 1) = E(0, I),$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2, \quad d = (0, 1).$$

На рис. 1 изображены множество достижимости  $X(t; 0, X_0)$  и его внешняя эллипсоидальная оценка  $E(a^+(t), Q^+(t))$ .

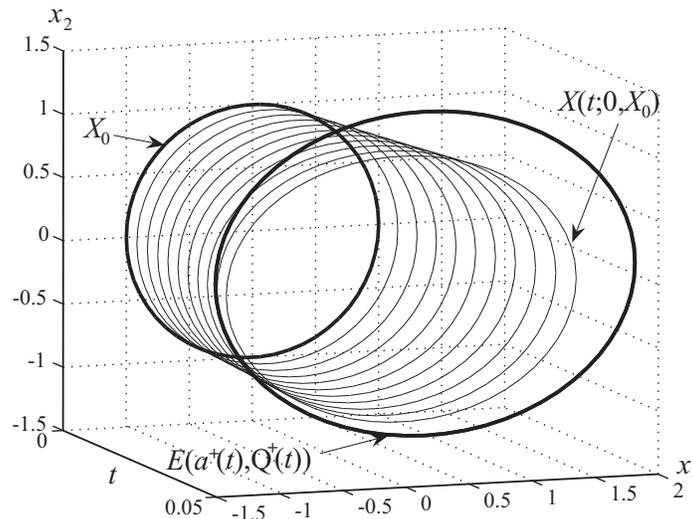


Рис. 1. Внешняя эллипсоидальная оценка  $E(a^+(t), Q^+(t))$  множества достижимости  $X(t; 0, X_0)$  дифференциального включения.

### 3. Оценки множеств достижимости импульсной системы с неопределенностью по начальным данным

Предположим далее, что начальное множество  $X_0$  динамической системы (1.1) и множество  $U$ , задающее ограничение на измеримые управления  $u(t)$  в системе (1.1), являются эллипсоидами

$$X_0 = E(a, k^2 B^{-1}) \quad (k \neq 0), \quad U = E(\hat{a}, \hat{Q}). \quad (3.1)$$

Рассмотрим вначале расширенное дифференциальное включение (2.1) при дополнительном предположении (3.1):

$$\frac{d}{d\eta} \begin{pmatrix} z \\ \tau \end{pmatrix} \in H(\tau, z), \quad (3.2)$$

$$z(t_0) = x_0 \in X_0 = E(a, k^2 B^{-1}), \quad \tau(t_0) = t_0, \quad t_0 \leq \eta \leq T + \mu,$$

где

$$H(\tau, z) = \bigcup_{0 \leq \nu \leq 1} \left\{ (1 - \nu) \begin{pmatrix} Az + f(z)d + E(\hat{a}, \hat{Q}) \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.3)$$

**Теорема 2.** Для всех  $\sigma > 0$  справедлива внешняя оценка множества достижимости  $W(t_0 + \sigma) = W(t_0 + \sigma; t_0, X_0 \times \{t_0\})$  включения (3.2), (3.3)

$$W(t_0 + \sigma) \subseteq \bigcup_{0 \leq \nu \leq 1} \begin{pmatrix} E(a^+(\sigma, \nu), Q^+(\sigma, \nu)) \\ t_0 + \sigma(1 - \nu) \end{pmatrix} + o(\sigma)B_*(0, 1), \quad \lim_{\sigma \rightarrow +0} \sigma^{-1}o(\sigma) = 0. \quad (3.4)$$

Здесь  $B_*(0, 1)$  — единичный шар в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  (с центром в начале координат и радиусом 1), параметры эллипсоида  $E(a^+(\sigma, \nu), Q^+(\sigma, \nu))$  определяются равенствами

$$a^+(\sigma, \nu) = a(\sigma, \nu) + \sigma(1 - \nu)\hat{a} + \sigma\nu G,$$

$$Q^+(\sigma, \nu) = (p^{-1} + 1)Q(\sigma, \nu) + (p + 1)\sigma^2(1 - \nu)^2\hat{Q},$$

где  $p = p(\sigma, \nu)$  — единственное положительное решение уравнения

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p + \lambda_i} = \frac{n}{p(p + 1)},$$

а  $\lambda_i = \lambda_i(\sigma, \nu) \geq 0$  — корни уравнения  $|Q(\sigma, \nu) - \lambda\sigma^2(1 - \nu)^2\hat{Q}| = 0$  и

$$a(\sigma, \nu) = a + \sigma(1 - \nu)(Aa + a'Ba \cdot d + k^2d),$$

$$Q(\sigma, \nu) = k^2(I + \sigma R)B^{-1}(I + \sigma R)', \quad R = (1 - \nu)(A + 2da'B).$$

Доказательство теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1 [14] с изменениями в подсчете параметров оценивающих эллипсоидов, вызванными наличием дополнительных множителей  $(1 - \nu)$  и  $\nu$  в правых частях дифференциального включения (3.2), (3.3).

**З а м е ч а н и е.** Отметим, что множество

$$W(\sigma, \nu) = \begin{pmatrix} E(a^+(\sigma, \nu), Q^+(\sigma, \nu)) \\ t_0 + \sigma(1 - \nu) \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

участвующее в оценке (3.4), является вырожденным эллипсоидом в расширенном пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  при каждом значении параметра  $\nu$ , однако множество

$$W(\sigma) = \bigcup_{0 \leq \nu \leq 1} W(\sigma, \nu),$$

вообще говоря, эллипсоидом уже не является. В работе [1] был предложен алгоритм внешнего оценивания объединения семейства эллипсоидов, однако для реализации этого алгоритма требуется невырожденность объединяемых эллипсоидов.

В связи со сделанным замечанием зафиксируем произвольное  $\epsilon > 0$  и “погрузим” вырожденный эллипсоид  $W(\sigma, \nu)$  в невырожденный эллипсоид  $\mathcal{E}_\epsilon(w_0(\sigma, \nu), O_\epsilon(\sigma, \nu))$  так, чтобы выполнялось включение

$$W(\sigma, \nu) \subseteq \mathcal{E}_\epsilon(w_0(\sigma, \nu), O_\epsilon(\sigma, \nu)),$$

где

$$w_0(\sigma, \nu) = \begin{pmatrix} a^+(\sigma, \nu) \\ t_0 + \sigma(1 - \nu) \end{pmatrix}, \quad O_\epsilon(\sigma, \nu) = \begin{pmatrix} Q^+(\sigma, \nu) & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для любого  $\epsilon > 0$  верно также включение

$$W(\sigma) = \bigcup_{0 \leq \nu \leq 1} W(\sigma, \nu) \subseteq W_\epsilon(\sigma) = \bigcup_{0 \leq \nu \leq 1} \mathcal{E}_\epsilon(w_0(\sigma, \nu), O_\epsilon(\sigma, \nu)).$$

Используя алгоритм внешнего оценивания объединения семейства эллипсоидов, приведенный в работе [1], найдем эллипсоид  $\mathcal{E}_\epsilon(w_1(\sigma), O_1(\sigma))$  такой, что справедливо включение

$$W_\epsilon(\sigma) \subseteq \mathcal{E}_\epsilon(w_1(\sigma), O_1(\sigma))$$

и, следовательно, верна оценка

$$W(\sigma) \subseteq \mathcal{E}_\epsilon(w_1(\sigma), O_1(\sigma)).$$

**З а м е ч а н и е.** Отметим, что  $h(W(\sigma), W_\epsilon(\sigma)) \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  в силу компактности множества  $W(\sigma)$  и непрерывности функций  $a^+(\sigma, \nu)$  и  $Q^+(\sigma, \nu)$ . Таким образом, при малых  $\epsilon > 0$  ошибка перехода от вырожденного эллипсоида к невырожденному мала.

Суммируя полученные результаты, мы можем сформулировать алгоритм, позволяющий найти внешние эллипсоидальные оценки множеств достижимости  $X(t)$  включения (1.1)–(1.3).

**А л г о р и т м 2.** Зафиксируем произвольное  $\epsilon > 0$  и рассмотрим разбиение  $\{[t_i, t_{i+1}]\}$  заданного отрезка  $[t_0, T + \mu]$ , где  $t_i = t_0 + ih$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $h = (T + \mu - t_0)/m$ ,  $t_m = T + \mu$ . Определим также разбиение  $\{[\nu_i, \nu_{i+1}]\}$  отрезка  $[0, 1]$ , где  $\nu_i = ih_*$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $h_* = 1/m$ ,  $\nu_m = 1$ .

• Для заданного начального эллипсоида  $X_0 = E(a, k_0^2 B^{-1})$  ( $k_0 \neq 0$ ) строим набор из  $m$  эллипсоидов  $E(a_1^i, Q_1^i)$  по теореме 2 для  $a_1^i = a^+(\sigma, \nu_i)$ ,  $Q_1^i = Q^+(\sigma, \nu_i)$ ,  $\sigma = h$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

• В расширенном фазовом пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  находим эллипсоид  $\mathcal{E}_\epsilon(w_1(\sigma), O_1(\sigma))$  такой, что

$$W(\sigma, \nu_i) \subseteq \mathcal{E}_\epsilon(w_1(\sigma), O_1(\sigma)), \quad i = 1, \dots, m,$$

где множества  $W(\sigma, \nu_i)$  определяются формулой (3.5). На этом этапе предлагается использовать алгоритм [1] внешнего эллипсоидального оценивания объединения конечного семейства эллипсоидов.

• По лемме 2 находим эллипсоид  $E(a_1, Q_1)$  — проекцию эллипсоида  $\mathcal{E}_\epsilon(w_1(\sigma), O_1(\sigma))$  на подпространство первых  $n$  переменных:

$$E(a_1, Q_1) = \pi_z \mathcal{E}_\epsilon(w_1(\sigma), O_1(\sigma)).$$

• Найдем наименьшее  $k_1 > 0$  такое, что

$$E(a_1, Q_1) \subset \tilde{X}_1 = E(a_1, k_1^2 B^{-1})$$

(число  $k_1^2$  совпадает с максимальным собственным значением матрицы  $B^{1/2} Q_1 B^{1/2}$ ).

• Рассмотрим динамическую систему на следующем промежутке  $[t_1, t_2]$  с эллипсоидом  $E(a_1, k_1^2 B^{-1})$ , взятым в качестве начального множества в момент  $t_1$ .

• Следующие шаги повторяют предыдущие итерации.

В итоге, проделав все шаги итерационной процедуры, мы построим внешние эллипсоидальные оценки  $E(a^+(t), Q^+(t))$  трубок траекторий  $X(t)$  и, соответственно, при  $t = T$ , множеств достижимости  $X(T)$  рассматриваемой импульсной системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вздорнова О.Г., Филиппова Т.Ф.** Внешние эллипсоидальные оценки множеств достижимости дифференциальных импульсных систем // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 38–47.
2. **Вздорнова О.Г., Филиппова Т.Ф.** Задачи импульсного управления при эллипсоидальных ограничениях: вопросы чувствительности по параметрам ограничений // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 135–149.
3. **Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.** Оптимальное импульсное управление с приложениями. М.: Физматгиз, 2000. 256 с.
4. **Завалищин С.Т., Сесекин А.Н.** Импульсные процессы: Модели и приложения. М.: Наука, 1991. 256 с.
5. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
6. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
7. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
8. **Миллер Б.М., Рубинович Е.Я.** Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями. М.: Наука, 2005. 429 с.
9. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука. 1985. 244 с.
10. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
11. **Filippova T.F.** Set-valued solutions to impulsive differential inclusions // Math. Comput. Model. Dyn. Syst. 2005. Vol. 11, no. 2. P. 149–158.
12. **Filippova T.F.** Sensitivity problems for impulsive differential inclusions // Proc. of the 6th WSEAS International Conference on Applied Mathematics. Corfu Island, 2004. P. 1–6.
13. **Filippova T.F.** State estimation in control problems under uncertainty and nonlinearity // Proc. of the 6th Vienna International Conference on Mathematical Modelling (MATHMOD-2009). Vienna, 2009. P. 1–7.
14. **Filippova T.F., Berezina E.V.** On state estimation approaches for uncertain dynamical systems with quadratic nonlinearity: theory and computer simulations // Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 2008. Vol. 4818. P. 326–333.
15. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Positional differential games. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 517 p.
16. **Kurzanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
17. **Kurzanski A.B., Filippova T.F.** On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in nonlinear dynamics and control: a report from Russia /ed. A.B. Kurzanski. Boston etc.: Birkhäuser, 1993. P. 122–188. (Progress in Systems and Control Theory. Vol. 17.)
18. **Rishel, R.** An Extended Pontryagin Principle for Control System whose Control Laws Contain Measures // SIAM J. Control. 1965. Vol. 3. P. 191–205.
19. **Vinter R.B., Pereira F.M.F.L.** A maximum principle for optimal processes with discontinuous trajectories // SIAM J. Control. Optim. 1988. Vol. 26, no. 1. P. 205–229.

Филиппова Татьяна Федоровна  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
ведущий науч. сотрудник  
Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: ftf@imm.uran.ru

Поступила 20.05.2009

УДК 519.6

**МЕТОД ИТЕРАЦИЙ В ЗАДАЧЕ МАРШРУТИЗАЦИИ  
С ВНУТРЕННИМИ ПОТЕРЯМИ<sup>1</sup>****А. А. Ченцов, А. Г. Ченцов, П. А. Ченцов**

Рассматривается задача последовательного обхода множеств, осложненная необходимостью выполнения (внутренних) работ на множествах и ограничений в виде условий предшествования; предполагается, что способ агрегирования затрат — аддитивный. Для возникающей экстремальной задачи с зависимыми переменными построено эквивалентное преобразование к задаче оптимизации на декартовом произведении; на этой основе конструируется метод итераций, использующий перестраиваемую модель задачи курьера (задача коммивояжера, осложненная условиями предшествования).

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования.

A. A. Chentsov, A. G. Chentsov, P. A. Chentsov. Iteration method in the routing problem with internal losses.

The problem of a sequential traversal of sets is considered, which is complicated by the necessity of fulfilling (internal) tasks on the sets as well as by restrictions in the form of precedence conditions. It is assumed that the method of aggregating the losses is additive. For the appearing extremal problem with dependent variables, an equivalent transformation is built for the optimization problem on a Cartesian product. Based on this, an iteration method is constructed that uses a reconstructible model of the courier problem (a traveling salesman problem complicated by precedence conditions).

Keywords: route, path, precedence conditions.

**1. Введение**

Одной из наиболее известных задач дискретной оптимизации является задача коммивояжера (ЗК) (см. [1–5] и, в частности, библиографию [1–3]). В [1] рассматривается целый ряд постановок, связанных с прикладными задачами, в которых реализуются аналоги ЗК, включающие те или иные особенности. Сейчас отметим упоминаемую в [1] ЗК с выбором (см. также [6–8]), а также задачу курьера. В рассматриваемой далее задаче присутствуют компоненты обоих вышеупомянутых направлений: исследуются процедуры последовательного обхода множеств с ограничениями, типичными для задачи курьера (условия предшествования). Кроме того, постановка включает этапы перемещения по (целевым) множествам, т. е. определенные внутренние работы на множествах. Конкретный характер этих работ может быть весьма различным. Сейчас ограничимся обсуждением варианта, идейно близкого к постановке [9], связанной с посещением и обходом городов (терминология ЗК) в составе заданных мегаполисов. Речь идет о последовательном посещении системы конечных множеств (мегаполисов), осложненном необходимостью перемещения по всем городам каждого мегаполиса, реализуемом по мере посещения последнего. Итак, возникает набор оперативно формируемых ЗК (в [9] они могут быть осложнены движением самих городов в мегаполисе), каждая из которых характеризует соответствующую внутреннюю работу. Отметим, что с точки зрения глобальной оптимизации достаточно рассматривать варианты оптимального решения каждой из вышеупомянутых внутренних ЗК, однозначно характеризующихся каждой точкой входа на множество (мегаполис) и точкой выхода. Соответствующий оптимум внутренних затрат можно включить тогда в аддитивно формируемый совокупный критерий наряду с затратами на внешние перемещения.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-00436) и программы фундаментальных исследований Президиума РАН “Математическая теория управления”.

В настоящей работе исследуется схема решения, подобная в идейном отношении [10], [11, гл. 4]. Для исходной экстремальной задачи с зависимыми (связанными) переменными конструируется эквивалентная оптимизационная задача с независимыми переменными. В исходной постановке объектом нашего выбора является пара маршрут-трасса, где маршрут есть перестановка индексов и соответствует аналогичному понятию в ЗК, а трасса есть кортеж точек посещения. Преобразованная задача имеет смысл некой задачи реконструкции (ЗР), понимаемой, впрочем, достаточно широко. После этого на основе естественного для данной ЗР варианта метода покоординатного спуска конструируется метод итераций для решения исходной задачи. Важно отметить, что (как и в [11, гл. 2], [12]) построения допускают условия предшествования, естественные для задачи курьера. Кроме того, новым в сравнении с [10–12] элементом является учет внутренних работ.

## 2. Общие обозначения и постановка задачи

В настоящем разделе приведена сводка основных обозначений, а также математическая постановка задачи и обсуждение возможных методов решения.

**Обозначения общего характера.** Через  $\triangleq$  обозначаем далее равенство по определению, def заменяет фразу «по определению». Через  $\emptyset$  обозначаем пустое множество. Если  $x$  — объект, то  $\{x\}$  есть def одноэлементное множество, содержащее  $x$ . Для любых двух объектов  $u$  и  $v$   $\{u; v\} \triangleq \{u\} \cup \{v\}$  (неупорядоченная пара). Кроме того, если  $f$  и  $g$  — объекты, то  $(f, g) \triangleq \{\{f\}; \{f; g\}\}$  — упорядоченная пара объектов  $f, g$ ; см. [13, с. 67]. Разумеется, для любых двух множеств  $F$  и  $G$   $F \times G = \{(f, g) : f \in F, g \in G\}$ . Через  $\text{Fin}(H)$  обозначаем семейство всех непустых конечных подмножеств (п/м) множества  $H$ ;  $(\text{FIN})[H] \triangleq \text{Fin}(H) \cup \{\emptyset\}$  (семейство всех конечных п/м  $H$ ).

Напомним традиционное соглашение: если  $A, B$  и  $C$  — множества,  $D$  — п/м  $A \times B$ ,

$$f : D \longrightarrow C,$$

$a \in A, b \in B$  и для упорядоченной пары  $z \triangleq (a, b)$  справедливо включение  $z \in D$ , то полагаем  $f(a, b) \triangleq f(z)$ ,  $f(a, b) \in C$ . Если же  $z$  — произвольная упорядоченная пара, т. е.  $z = (u, v)$  для некоторых (определяемых единственным образом) объектов  $u$  и  $v$ , то через  $\text{pr}_1(z)$  и  $\text{pr}_2(z)$  обозначаем соответственно первую и вторую компоненты  $z$ :  $\text{pr}_1(z) = u$ ,  $\text{pr}_2(z) = v$ . Если  $A$  и  $B$  — множества,  $z \in A \times B$ , то  $\text{pr}_1(z) \in A$  и  $\text{pr}_2(z) \in B$ . Пусть  $\mathbb{R}$  — вещественная прямая,  $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$ ,  $[0, \infty[ = \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$ ,  $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N}$ ;

$$\overline{k, l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 \mid (k \leq i) \& (i \leq l)\} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall l \in \mathbb{N}_0.$$

**Специальные понятия и обозначения.** Следуем символике [11, 14]. Фиксируем число  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ , непустое множество  $X$ , кортеж множеств

$$(M_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \longrightarrow \text{Fin}(X) \quad (2.1)$$

и точку  $x^0 \in X$ . Точка  $x^0$  рассматривается в качестве начальной; каждое из (целевых) множеств  $M_1, \dots, M_N$  подлежит посещению в той или иной очередности. Предполагается, что наряду с маршрутом, определенным в виде перестановки индексов из  $\overline{1, N}$ , можно выбрать точки посещения упомянутых множеств, включающие пункты прибытия и пункты отправления; предполагается также, что на множествах могут выполняться (внутренние) работы, затраты в которых зависят от пунктов прибытия и отправления. Постулируем, что

$$\left(x^0 \notin \bigcup_{i=1}^N M_i\right) \& (M_k \cap M_l = \emptyset \quad \forall k \in \overline{1, N} \quad \forall l \in \overline{1, N} \setminus \{k\}). \quad (2.2)$$

Через  $\mathbb{P}$  обозначаем множество всех перестановок маршрутов в  $\overline{1, N}$  (элементы  $\mathbb{P}$  — биекции  $\overline{1, N}$  на  $\overline{1, N}$  и только они); если  $\alpha \in \mathbb{P}$ , то  $\alpha^{-1}$  есть def перестановка, обратная к  $\alpha$ :  $\alpha^{-1} \in \mathbb{P}$  и

$$\alpha(\alpha^{-1}(k)) = \alpha^{-1}(\alpha(k)) = k \quad \forall k \in \overline{1, N}. \quad (2.3)$$

Полагаем заданными следующие функции:

$$\mathbf{c} : X \times X \longrightarrow [0, \infty[, \tilde{\mathbf{f}} : \bigcup_{i=1}^N M_i \longrightarrow [0, \infty[;$$

$$\tilde{c}_1 : M_1 \times M_1 \longrightarrow [0, \infty[, \dots, \tilde{c}_N : M_N \times M_N \longrightarrow [0, \infty[.$$

Эти функции используем для оценивания затрат ( $\mathbf{c}$  оценивает затраты на внешние перемещения,  $\tilde{\mathbf{f}}$  — терминальное состояние,  $\tilde{c}_j$  — затраты при перемещении по  $M_j$ , где  $j \in \overline{1, N}$ ). Оказывается удобным продолжить функции  $\tilde{\mathbf{f}}, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_N$ . Именно, доопределяем эти функции нулем: полагаем, что  $\mathbf{f} : X \longrightarrow [0, \infty[$  задается условиями

$$\left( \mathbf{f}(x) \triangleq \tilde{\mathbf{f}}(x) \quad \forall x \in \bigcup_{i=1}^N M_i \right) \& \left( \mathbf{f}(x) \triangleq 0 \quad \forall x \in X \setminus \left( \bigcup_{i=1}^N M_i \right) \right);$$

если  $j \in \overline{1, N}$ , то функция  $c_j : X \times X \longrightarrow [0, \infty[$  такова, что

$$(c_j(z) \triangleq \tilde{c}_j(z) \quad \forall z \in M_j \times M_j) \& (c_j(z) \triangleq 0 \quad \forall z \in (X \times X) \setminus (M_j \times M_j)).$$

Данные преобразования несущественны и используются лишь в методических целях. Итак, мы располагаем функциями  $\mathbf{c}, c_1, \dots, c_N$  с областью определения  $X \times X$  и функцией  $\mathbf{f}$ , определенной на  $X$ .

Фиксируем  $\mathbf{K} \in (\text{FIN})[\overline{1, N} \times \overline{1, N}]$ ; упорядоченные пары — элементы  $\mathbf{K}$  — используются при введении условий предшествования (случай  $\mathbf{K} = \emptyset$  не исключается и соответствует отсутствию ограничений в виде условий предшествования);

$$\mathbb{A} \triangleq \{ \alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\text{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\text{pr}_2(z)) \quad \forall z \in \mathbf{K} \}. \quad (2.4)$$

**Обсуждение.** Мы рассматриваем далее задачу оптимизации перемещений вида

$$x^0 \longrightarrow (z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (z_N \in M_{\alpha(N)} \times M_{\alpha(N)}), \quad (2.5)$$

распоряжаясь выбором маршрута  $\alpha$  и трассы  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} = (z_1, \dots, z_N)$ . Выбор  $\alpha$  должен быть таким, чтобы для любой пары  $z \in \mathbf{K}$  индексов  $p \in \overline{1, N}$  и  $q \in \overline{1, N}$  для моментов “времени”  $t_1 \in \overline{1, N}$  и  $t_2 \in \overline{1, N}$ , удовлетворяющих условиям

$$(\alpha(t_1) = p) \& (\alpha(t_2) = q),$$

было справедливым неравенство  $t_1 < t_2$  (множество-мегаполис  $M_p$  посещается раньше, чем  $M_q$ ). С учетом (2.3), (2.4) упомянутое требование о соблюдении условий предшествования означает, что должно выполняться включение  $\alpha \in \mathbb{A}$ . Узлы трассы должны (см. (2.5)) при этом находиться на занумерованных в соответствии с  $\alpha$  множествах. Перемещения (2.5) оцениваем суммой

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z_1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^N c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)) \\ & = \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z_1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^N \tilde{c}_{\alpha(i)}(z_i) + \tilde{\mathbf{f}}(\text{pr}_2(z_N)). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Минимизация (2.6) посредством рационального выбора пары  $(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}})$  составляет нашу основную цель.

**Постановка задачи.** Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее

У с л о в и е 2.1.  $\forall K \in \text{Fin}(\mathbf{K}) \exists h \in K : \text{pr}_1(h) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in K.$

Как следствие, имеем, что  $\text{pr}_1(z) \neq \text{pr}_2(z) \quad \forall z \in \mathbf{K}$ . Отметим, что (см. [11, § 2.2], [12])  $\mathbb{A} \neq \emptyset$ . Через  $\mathfrak{X}$  обозначаем далее множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{1, N}} : \overline{1, N} \longrightarrow X \times X. \quad (2.7)$$

Если  $\alpha \in \mathbb{P}$ , то отображение  $\mathfrak{C}_\alpha : \mathfrak{X} \rightarrow [0, \infty[$  определяем условием:  $\forall (z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{X}$

$$\mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i \in \overline{1, N}}) \triangleq \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z_1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^N c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)); \quad (2.8)$$

тем самым введено некоторое расширение правила (2.6). Пусть

$$\mathfrak{S} \triangleq \left\{ (\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathbb{A} \times \mathfrak{X} \mid (z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)}) \right\}; \quad (2.9)$$

разумеется,  $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ . Пусть  $W : \mathfrak{S} \rightarrow [0, \infty[$  определяется условием: если  $s \in \mathfrak{S}$ , то

$$W(s) \triangleq \mathfrak{C}_\alpha((z_i)_{i \in \overline{1, N}}), \quad (2.10)$$

где  $\alpha \triangleq \text{pr}_1(s)$  и  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \triangleq \text{pr}_2(s)$ . В терминах (2.8), (2.10) введем в качестве основной следующую задачу:

$$W(s) \longrightarrow \min, \quad s \in \mathfrak{S}. \quad (2.11)$$

### 3. Редукция экстремальной задачи

Из (2.9)–(2.11) видно, что основная задача есть задача на экстремум с зависимыми (связанными) переменными. По целому ряду причин представляется полезной ее преобразование к оптимизационной задаче с независимыми переменными; этому вопросу посвящается настоящий раздел. Пусть

$$\mathfrak{M} \triangleq \prod_{i=1}^N (M_i \times M_i); \quad (3.1)$$

разумеется,  $\mathfrak{M} \in \text{Fin}(\mathfrak{X})$ ; см. (2.1). Как следствие  $\mathfrak{M} \times \mathbb{A} \neq \emptyset$ . Пусть

$$w : \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \longrightarrow [0, \infty[$$

определяется следующим правилом: если  $h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ , то

$$w(h) \triangleq \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(y_{\alpha(1)})) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(y_{\alpha(i)}), \text{pr}_1(y_{\alpha(i+1)})) + \sum_{i=1}^N c_i(y_i) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(y_{\alpha(N)})), \quad (3.2)$$

где  $(y_i)_{i \in \overline{1, N}} \triangleq \text{pr}_1(h)$  и  $\alpha \triangleq \text{pr}_2(h)$ . Рассмотрим следующую вспомогательную экстремальную задачу:

$$w(h) \longrightarrow \min, \quad h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}. \quad (3.3)$$

Коль скоро  $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$  — непустое конечное множество, задача (3.3) обладает (конечным) значением:

$$\mathbb{V} \triangleq \min_{h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}} w(h) \in [0, \infty[ \quad (3.4)$$

и (непустым) множеством решений  $\mathbb{D}$  :

$$\mathbb{D} \triangleq \{h_0 \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \mid w(h_0) = \mathbb{V}\} \neq \emptyset. \quad (3.5)$$

В связи с (3.3)–(3.5) полезно ввести еще две экстремальные задачи. Одна из них такова: при  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}$

$$w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}; \quad (3.6)$$

данная задача (курьера) характеризуется значением

$$(\mathbf{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}] \triangleq \min_{\alpha \in \mathbb{A}} w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) \in [0, \infty[ \quad (3.7)$$

и непустым множеством (оптимальных) решений:

$$(\mathbf{sol})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}] \triangleq \{\alpha_0 \in \mathbb{A} \mid w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha_0) = (\mathbf{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}]\}. \quad (3.8)$$

В свою очередь, (3.7) порождает ЗР

$$(\mathbf{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}] \longrightarrow \min, \quad (z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}. \quad (3.9)$$

Впрочем, мы будем понимать ЗР расширительно, отождествляя ее с (3.3), поскольку (см. (3.4), (3.7))

$$\mathbb{V} = \min_{(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}} (\mathbf{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}]. \quad (3.10)$$

В связи с задачей (3.6) отметим полезное упрощающее обстоятельство, полагая, что  $\widehat{w} : \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \longrightarrow [0, \infty[$  определяется следующим правилом: если  $h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ , то

$$\widehat{w}(h) \triangleq \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(y_{\alpha(1)})) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(y_{\alpha(i)}), \text{pr}_1(y_{\alpha(i+1)})) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(y_{\alpha(N)})), \quad (3.11)$$

где  $(y_i)_{i \in \overline{1, N}} \triangleq \text{pr}_1(h)$  и  $\alpha \triangleq \text{pr}_2(h)$ . Тогда из (3.2) и (3.11) имеем:

$$w((y_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) = \widehat{w}((y_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) + \sum_{i=1}^N c_i(y_i). \quad (3.12)$$

Данное свойство (3.12) позволяет упростить задачу (3.6), “исключив” из ее постановки внутренние затраты. Итак, наряду с (3.6) рассматриваем при  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}$  задачу

$$\widehat{w}((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}, \quad (3.13)$$

для которой определяется значение (экстремум)

$$(\mathbf{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}] \triangleq \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \widehat{w}((z_i)_{i \in \overline{1, N}}); \quad (3.14)$$

для (3.14) в силу (3.12) имеем представление

$$(\mathbf{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}] = (\mathbf{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}] + \sum_{i=1}^N c_i(z_i); \quad (3.15)$$

кроме того, (3.8) определяет непустое экстремальное множество задачи (3.13):

$$(\mathbf{sol})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}] = \{\alpha_0 \in \mathbb{A} \mid \widehat{w}((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha_0) = (\mathbf{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}]\}. \quad (3.16)$$

Отметим, что (в силу (3.11)) (3.13) есть “обычная” задача курьера [1]. Перевод ее в традиционную матричную форму не составляет труда; мы его поэтому не рассматриваем. Важно, однако, что задача (3.13) определяется заданной системой городов (терминология ЗК).

Возвращаясь к задаче (2.1), выделяем в качестве обеспечивающей ее задачу оптимизации трассы: если  $\alpha \in \mathbb{A}$ , то задачу

$$W(\alpha, (s_i)_{i \in \overline{1, N}}) \longrightarrow \min, \quad (s_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)}) \quad (3.17)$$

характеризуют ее значение (экстремум)  $\mathcal{V}[\alpha]$  и непустое множество (оптимальных) решений (SOL)[ $\alpha$ ]. Мы связываем в дальнейшем (3.17) с задачей (3.9), извлекая, по сути дела, из конструкции (3.17) некоторый динамический вариант решения с точностью до несущественных преобразований. Сейчас отметим только в связи с (2.11), что в силу (2.9)

$$\mathbf{V} \triangleq \min_{s \in \mathfrak{S}} W(s) = \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \mathcal{V}[\alpha] \in [0, \infty[ \quad (3.18)$$

(значение задачи (2.11)) и, кроме того,

$$\mathbf{D} \triangleq \{s_0 \in \mathfrak{S} \mid W(s_0) = \mathbf{V}\} \neq \emptyset \quad (3.19)$$

есть множество решений задачи (2.11); (3.18) и (3.19) — естественные атрибуты (2.11).

Из (2.3) вытекает, что при всяком выборе

$$\alpha \in \mathbb{A}, \quad (z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)}) \quad (3.20)$$

справедливо включение  $(z_{\alpha^{-1}(i)})_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}$ . Это свойство позволяет ввести отображение  $\mathbf{t} : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{M}$ , подобное используемому в [10] и [11, § 4.2], по следующему правилу (см. (2.9)): если  $s \in \mathfrak{S}$ ,  $\alpha = \text{pr}_1(s)$  и  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} = \text{pr}_2(s)$ , то

$$\mathbf{t}(s) \triangleq (z_{\alpha^{-1}(i)})_{i \in \overline{1, N}}. \quad (3.21)$$

С учетом (2.9) и (3.21) мы получаем, что определены кортежи

$$\mathbf{t}(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}}) = (z_{\alpha^{-1}(i)})_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{A} \quad \forall (z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)}). \quad (3.22)$$

Используя подход [10], [11, § 4.2], введем на основе  $\mathbf{t}$  оператор

$$\mathbf{T} : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \quad (3.23)$$

по правилу: если  $s \in \mathfrak{S}$ , то  $\mathbf{T}(s) \triangleq (\mathbf{t}(s), \text{pr}_1(s))$ . Разумеется, действие  $\mathbf{T}$  (3.23) можно определить в виде, подобном (3.22): если  $\alpha$  и  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}}$  соответствуют (3.20), то (см. (2.9))

$$\mathbf{T}(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}}) = (\mathbf{t}(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}}), \alpha) = ((z_{\alpha^{-1}(i)})_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}. \quad (3.24)$$

Следующие свойства оператора  $\mathbf{T}$  (3.23), (3.24) устанавливаются подобно [11, § 4.2]:

1<sup>0</sup>) Оператор  $\mathbf{T}$  есть биекция  $\mathfrak{S}$  на  $\mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ ; биекция

$$\mathbf{T}^{-1} : \mathfrak{M} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathfrak{S},$$

обратная к  $\mathbf{T}$ , такова, что  $\forall (z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M} \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}$

$$\mathbf{T}^{-1}((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) = (\alpha, (z_{\alpha(i)})_{i \in \overline{1, N}}), \quad (3.25)$$

$\mathfrak{M} \times \mathbb{A} = \{\mathbf{T}(s) : s \in \mathfrak{S}\}$  и  $\mathfrak{S} = \{\mathbf{T}^{-1}(h) : h \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}\}$ ;

2<sup>0</sup>) справедливо равенство  $W = w \circ \mathbf{T}$ ;

3<sup>0</sup>) задачи (2.11) и (3.3) эквивалентны по результату, т. е.  $\mathbf{V} = \mathbb{V}$ ;

4<sup>0</sup>) экстремальные множества задач (2.11) и (3.3) отождествимы, т. е.

$$\mathbb{D} = \{\mathbf{T}(s) : s \in \mathbf{D}\}, \quad \mathbf{D} = \{\mathbf{T}^{-1}(h) : h \in \mathbb{D}\};$$

5<sup>0</sup>) если  $\alpha \in \mathbb{A}$ , то справедливо следующее равенство:

$$\min_{(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)})} W(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}}) = \min_{(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}} w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha).$$

Сейчас ограничимся проверкой 2<sup>0</sup>); в связи с обоснованием прочих свойств см. [11, § 4.2]. Свойство 2<sup>0</sup>) является базовым.

**Д о к а з а т е л ь с т в о 2<sup>0</sup>**). Фиксируем  $s \in \mathfrak{S}$  и полагаем  $\alpha \triangleq \text{pr}_1(s)$  и  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \triangleq \text{pr}_2(s)$ . Тогда (см. (2.8), (2.10))

$$W(s) = \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z_1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^N c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)). \quad (3.26)$$

С другой стороны, в силу (2.3), (3.2), (3.22)–(3.24) имеем цепочку равенств

$$\begin{aligned} (w \circ \mathbf{T})(s) &= w(\mathbf{T}(s)) = w((z_{\alpha^{-1}(i)})_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) \\ &= \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z_{\alpha^{-1}(\alpha(1))})) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_{\alpha^{-1}(\alpha(i))}), \text{pr}_1(z_{\alpha^{-1}(\alpha(i+1))})) + \sum_{i=1}^N c_i(z_{\alpha^{-1}(i)}) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_{\alpha^{-1}(\alpha(N))})) \\ &= \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z_1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^N c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_N)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

В (3.27) учтено свойство биективности  $\alpha^{-1} : \alpha^{-1} \in \mathbb{P}$ , а тогда (см. (2.3))

$$\sum_{i=1}^N c_i(z_{\alpha^{-1}(i)}) = \sum_{i=1}^N c_{\alpha(\alpha^{-1}(i))}(z_{\alpha^{-1}(i)}) = \sum_{i=1}^N c_{\alpha(i)}(z_i).$$

Из (3.26), (3.27) вытекает равенство  $W(s) = (w \circ \mathbf{T})(s)$ . Поскольку выбор  $s$  был произвольным, свойство 2<sup>0</sup>) установлено.  $\square$

#### 4. Метод итераций

Свойства 1<sup>0</sup>)–5<sup>0</sup>) служат основой для построения метода итераций, подобного в идейном отношении [10], [11, гл. 4]. Нам потребуется специальная минорантная задача курьера. В этой задаче игнорируются внутренние затраты, а ее конструкция (за счет этого) получается предельно простой. Итак, пусть  $M_0 \triangleq \{x^0\}$ . Введем матрицу

$$\mathbf{A} : \overline{0, N} \times \overline{1, N} \longrightarrow [0, \infty[ \quad (4.1)$$

по следующему правилу: если  $z \in \overline{0, N} \times \overline{1, N}$ ,  $i = \text{pr}_1(z)$  и  $j = \text{pr}_2(z)$ , то

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{A}(i, j) \triangleq \min_{h \in M_i \times M_j} \mathbf{c}(h) = \min_{x \in M_i} \min_{y \in M_j} \mathbf{c}(x, y) = \min_{y \in M_j} \min_{x \in M_i} \mathbf{c}(x, y); \quad (4.2)$$

кроме того, условимся о следующем соглашении:

$$\mathbf{f}^{(k)} \triangleq \min_{u \in M_k} \mathbf{f}(u) \quad \forall k \in \overline{1, N}. \quad (4.3)$$

В терминах (4.1)–(4.3) формулируется следующая минорантная задача курьера:

$$\mathbf{A}(0, \alpha(1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{A}(\alpha(i), \alpha(i+1)) + \mathbf{f}^{(\alpha(N))} \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbb{A}. \quad (4.4)$$

С задачей (4.4) связываем, учитывая свойство  $\mathbb{A} \neq \emptyset$ , экстремум (значение)  $\mathbf{v}_0$  и непустое экстремальное множество  $\mathbf{sol}$ .

**Предложение 4.1.** *Справедливо неравенство  $\mathbf{v}_0 \leq \mathbf{V}$ .*

Доказательство очевидно. Действительно, пусть  $\alpha \in \mathbb{A}$ . Тогда имеем неравенство

$$\mathbf{v}_0 \leq \mathbf{A}(0, \alpha(1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{A}(\alpha(i), \alpha(i+1)) + \mathbf{f}^{(\alpha(N))}. \quad (4.5)$$

Выберем теперь произвольную трассу, согласованную с  $\alpha$ :

$$(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)});$$

пусть, кроме того,  $x_j \triangleq \text{pr}_1(z_j)$  и  $y_j \triangleq \text{pr}_2(z_j)$  для всякого  $j \in \overline{1, N}$ ; тогда  $x_j \in M_{\alpha(j)}$  и  $y_j \in M_{\alpha(j)}$ . Коль скоро  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{X}$ , используем (2.8), (2.10), получая

$$\begin{aligned} W(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}}) &= \mathbf{c}(x^0, x_1) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{c}(y_i, x_{i+1}) + \sum_{i=1}^N c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(y_N) \\ &\geq \mathbf{A}(0, \alpha(1)) + \sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{A}(\alpha(i), \alpha(i+1)) + \mathbf{f}^{(\alpha(N))}; \end{aligned} \quad (4.6)$$

мы учли здесь, разумеется, (4.2) и (4.3):

$$\left( \mathbf{A}(0, \alpha(1)) \leq \mathbf{c}(x^0, x_1) \right) \& \left( \mathbf{A}(\alpha(j), \alpha(j+1)) \leq \mathbf{c}(y_j, x_{j+1}) \quad \forall j \in \overline{1, N-1} \right) \& \left( \mathbf{f}^{(\alpha(N))} \leq \mathbf{f}(y_N) \right)$$

(учитываем также неотрицательность функций  $c_1, \dots, c_N$ ). Из (4.5), (4.6) вытекает неравенство  $\mathbf{v}_0 \leq W(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}})$ . Поскольку кортеж  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}}$  выбирался произвольно, имеем оценку  $\mathbf{v}_0 \leq \mathcal{V}[\alpha]$ . Однако и выбор  $\alpha$  был произвольным, а потому (см. (3.18))  $\mathbf{v}_0 \leq \mathbf{V}$ .  $\square$

Рассмотрим итерационный алгоритм на функциональном уровне, уделяя основное внимание первым итерациям.

Итак, выбираем произвольно  $\omega_0 \in \mathbf{sol}$ . Тогда, в частности, имеем, что  $\omega_0 \in \mathbb{A}$  реализует в минорантной задаче курьера значение  $\mathbf{v}_0$ . Рассмотрим задачу (3.17) при  $\alpha = \omega_0$ , определяя экстремум  $\mathcal{V}[\omega_0]$  и некоторое решение (трассу)

$$(y_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}} \in (\text{SOL})[\omega_0] \quad (4.7)$$

(отметим, что конкретный способ решения упомянутой версии задачи (3.17) сейчас не обсуждаем; можно, в частности, использовать вариант МДП [11, § 4.7] с некоторой коррекцией уравнения Беллмана, отвечающей учету внутренних затрат). Из (4.7) получаем, что

$$(y_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\omega_0(i)} \times M_{\omega_0(i)}) \quad (4.8)$$

и при этом  $W(\omega_0, (y_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}) = \mathcal{V}[\omega_0]$ . С учетом (3.18) имеем неравенство  $\mathbf{V} \leq \mathcal{V}[\omega_0]$ , откуда в силу предложения 4.1 вытекает цепочка неравенств

$$\mathbf{v}_0 \leq \mathbf{V} \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \quad (4.9)$$

Из (2.9) и (4.8) следует, конечно, что

$$\lambda_0 \triangleq (\omega_0, (y_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathfrak{S} : W(\lambda_0) = \mathcal{V}[\omega_0]. \quad (4.10)$$

При этом согласно (3.22), (4.8) и (4.10) получаем, что

$$(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}} \triangleq \mathbf{t}(\lambda_0) = (y_{\omega_0^{-1}(i)}^{(0)})_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}. \quad (4.11)$$

Пользуясь терминологией ЗК, мы получили систему городов;  $\mathbf{T}(\lambda_0) = ((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_0) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ . С учетом  $2^0$ ) и (4.10) имеем, что

$$\mathcal{V}[\omega_0] = w(\mathbf{T}(\lambda_0)) = w((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_0). \quad (4.12)$$

Рассмотрим задачу (3.13) в условиях  $z_i = z_i^{(0)} \quad \forall i \in \overline{1, N}$ , см. (4.11); итак, имеем

$$(\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}] = \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \widehat{w}((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \alpha), \quad (4.13)$$

а также непустое множество  $(\mathbf{sol})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}]$ . При этом используем (3.16):

$$(\mathbf{sol})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}] = \{\alpha_0 \in \mathbb{A} \mid \widehat{w}((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \alpha_0) = (\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}]\}. \quad (4.14)$$

Еще раз отметим, что в задаче (3.13), (4.11) не учитываются внутренние потери. По вычисленному значению (4.13) определяем (см. (3.15)):

$$(\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}] = (\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}] + \sum_{i=1}^N c_i(z_i^{(0)}). \quad (4.15)$$

Используя (4.14), выберем  $\omega_1 \in (\mathbf{sol})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}] : \omega_1 \in \mathbb{A}$  определяем из условия

$$\widehat{w}((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_1) = (\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}],$$

игнорируя внутренние потери. Однако в силу (3.8) и (4.11) при этом оказывается, что

$$w((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_1) = (\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}]. \quad (4.16)$$

Тем самым (см. (4.15), (4.16)) мы по ходу дела решили задачу (3.6) при  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} = (z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}$ . При этом, конечно (см. (3.7)),

$$(\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}] \leq w((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_0), \quad (4.17)$$

где величина в левой части (4.17) определяется посредством (4.15). Из (4.12) и (4.17) имеем неравенство

$$(\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \quad (4.18)$$

Напомним, что (см. (4.11))  $((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_1) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$ , а тогда согласно (3.25)

$$\rho_0 \triangleq \mathbf{T}^{-1}((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_1) = (\omega_1, (z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathfrak{S}. \quad (4.19)$$

При этом согласно  $2^0$ ), (4.16), (4.18) и (4.19) имеем

$$W(\rho_0) = (w \circ \mathbf{T})(\rho_0) = w(\mathbf{T}(\rho_0)) = w((z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_1) = (\mathbf{val})[(z_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \quad (4.20)$$

Рассмотрим задачу (3.17) при  $\alpha = \omega_1$ , получая экстремум

$$\mathcal{V}[\omega_1] = \min_{(s_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\omega_1(i)} \times M_{\omega_1(i)})} W(\omega_1, (s_i)_{i \in \overline{1, N}}) \in [0, \infty[ \quad (4.21)$$

и непустое множество  $(\text{SOL})[\omega_1]$ . С учетом (4.19) имеем, что  $z_{\omega_1(j)}^{(0)} \in M_{\omega_1(j)} \times M_{\omega_1(j)} \quad \forall j \in \overline{1, N}$ . Из (4.21) имеем поэтому неравенство

$$\mathcal{V}[\omega_1] \leq W(\omega_1, (z_{\omega_1(i)}^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}) = W(\rho_0). \quad (4.22)$$

Кроме того, из (3.18) следует, что  $\mathbf{V} \leq \mathcal{V}[\omega_1]$ . С учетом (4.9), (4.20), (4.22) имеем, в частности, что

$$\mathbf{v}_0 \leq \mathbf{V} \leq \mathcal{V}[\omega_1] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \quad (4.23)$$

Выберем произвольный кортеж

$$(y_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}} \in (\text{SOL})[\omega_1]. \quad (4.24)$$

Тогда  $y_j^{(1)} \in M_{\omega_1(j)} \times M_{\omega_1(j)} \quad \forall j \in \overline{1, N}$ . Кроме того, справедливо равенство

$$W(\omega_1, (y_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}) = \mathcal{V}[\omega_1]. \quad (4.25)$$

Разумеется,  $\lambda_1 \triangleq (\omega_1, (y_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathfrak{S}$  и при этом  $W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1]$ . Напомним, что (см. (3.21))

$$(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}} \triangleq \mathbf{t}(\lambda_1) = (y_{\omega_1^{-1}(i)}^{(1)})_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M},$$

а  $\mathbf{T}(\lambda_1) = ((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_1) \in \mathfrak{M} \times \mathbf{A}$ . Рассматриваем далее задачу (3.13) при  $z_i = z_i^{(1)} \quad \forall i \in \overline{1, N}$ ; эта задача характеризуется значением

$$(\mathbf{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}] = \min_{\alpha \in \mathbb{A}} \widehat{w}((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) \quad (4.26)$$

и непустым экстремальным множеством  $(\text{sol})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}]$ . Напомним, что в (4.26) мы игнорируем внутренние затраты, т. к. решаем задачу курьера; при этом (см. (3.7), (3.15))

$$(\mathbf{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}] = (\mathbf{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}] + \sum_{i=1}^N c_i(z_i^{(1)}) = \min_{\alpha \in \mathbb{A}} w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}, \alpha). \quad (4.27)$$

Вместе с тем согласно (3.24) и  $2^0$ ) имеем цепочку равенств

$$w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_1) = w(\mathbf{T}(\lambda_1)) = W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1]. \quad (4.28)$$

С учетом (4.27) получаем неравенство

$$(\mathbf{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}] \leq \mathcal{V}[\omega_1].$$

Используя (3.16), выберем произвольно  $\omega_2 \in (\mathbf{sol})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}] : \omega_2 \in \mathbb{A}$  и при этом (см.(3.16))

$$\widehat{w}((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_2) = (\mathbf{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}].$$

С другой стороны, в силу (3.8), (3.10) оказывается справедливым равенство

$$w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_2) = (\mathbf{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}],$$

откуда с учетом (4.28) вытекает неравенство

$$w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_2) \leq \mathcal{V}[\omega_1]. \quad (4.29)$$

Теперь возвращаемся при  $\alpha = \omega_2$  к задаче (3.17), характеризуемой значением

$$\mathcal{V}[\omega_2] = \min_{(s_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\omega_2(i)} \times M_{\omega_2(i)})} W(\omega_2, (s_i)_{i \in \overline{1, N}}) = \min_{(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}} w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \omega_2) \quad (4.30)$$

(см. свойство 5<sup>0</sup>) в разд. 3) и непустым множеством  $(\mathbf{SOL})[\omega_2]$ . С учетом (4.30) имеем, конечно, неравенство

$$\mathcal{V}[\omega_2] \leq w((z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}, \omega_2) = (\mathbf{val})[(z_i^{(1)})_{i \in \overline{1, N}}].$$

Используя (3.18), (4.29) и (4.23), мы получаем также следующую цепочку неравенств:

$$\mathbf{v}_0 \leq \mathbf{V} \leq \mathcal{V}[\omega_2] \leq \mathcal{V}[\omega_1] \leq \mathcal{V}[\omega_0]. \quad (4.31)$$

Выберем произвольно  $(y_i^{(2)})_{i \in \overline{1, N}} \in (\mathbf{SOL})[\omega_2]$ . Тогда кортеж

$$(y_i^{(2)})_{i \in \overline{1, N}} \in \prod_{i=1}^N (M_{\omega_2(i)} \times M_{\omega_2(i)})$$

обладает свойством:  $W(\omega_2, (y_i^{(2)})_{i \in \overline{1, N}}) = \mathcal{V}[\omega_2]$ . Следовательно,

$$\lambda_2 \triangleq (\omega_2, (y_i^{(2)})_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathfrak{S}$$

обладает свойством  $W(\lambda_2) = \mathcal{V}[\omega_2]$ . В связи с (4.31) напомним, что (см. (4.10), (4.25))  $\lambda_0 \in \mathfrak{S}$ ,  $\lambda_1 \in \mathfrak{S}$ ,  $\lambda_2 \in \mathfrak{S}$  реализуют “продвижение” к  $\mathbf{V}$  сверху:

$$W(\lambda_0) = \mathcal{V}[\omega_0], \quad W(\lambda_1) = \mathcal{V}[\omega_1], \quad W(\lambda_2) = \mathcal{V}[\omega_2]. \quad (4.32)$$

Дальнейшее построение вполне очевидно. Тем не менее мы обсудим его более подробно в следующем разделе, где будет рассмотрен общий шаг процедуры. На самом же деле мы его уже в достаточной мере проиллюстрировали (см. (4.31), (4.32)).

## 5. Алгоритм на функциональном уровне: общий шаг процедуры и его обсуждение

В предыдущем разделе достаточно подробно проиллюстрирована логика преобразований  $\lambda_0 \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ , реализуемая в  $\mathfrak{S}$ . Сейчас мы рассмотрим общий вид такого преобразования, имея в виду свойства (4.32), определяющие сам объект применения данного преобразования. Пусть

$$\mathfrak{S}_0 \triangleq \{\lambda \in \mathfrak{S} \mid W(\lambda) = \mathcal{V}[\text{pr}_1(\lambda)]\}. \quad (5.1)$$

Из (4.32) и (5.1) следует, что  $\lambda_0 \in \mathfrak{S}_0$ ,  $\lambda_1 \in \mathfrak{S}_0$  и  $\lambda_2 \in \mathfrak{S}_0$ . Возвращаясь к общему случаю (см. (5.1)), отметим, что при  $\lambda \in \mathfrak{S}_0$  имеем в виде  $(\text{sol})[\mathbf{t}(\lambda)]$  непустое п/м  $\mathbb{A}$ , а, стало быть, для  $\alpha \in (\text{sol})[\mathbf{t}(\lambda)]$  определены значение  $\mathcal{V}[\alpha] \in [0, \infty[$  и непустое множество  $(\text{SOL})[\alpha]$ ,

$$(\text{SOL})[\alpha] \subset \prod_{i=1}^N (M_{\alpha(i)} \times M_{\alpha(i)}); \quad (5.2)$$

при  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in (\text{SOL})[\alpha]$  имеем в силу (2.9), (5.2) включение

$$(\alpha, (z_i)_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathfrak{S}.$$

Практически очевидно следующее

**Предложение 5.1.** *Если  $\lambda \in \mathfrak{S}_0$ ,  $\alpha \in (\text{sol})[\mathbf{t}(\lambda)]$  и  $(h_i)_{i \in \overline{1, N}} \in (\text{SOL})[\alpha]$ , то  $\Lambda \triangleq (\alpha, (h_i)_{i \in \overline{1, N}}) \in \mathfrak{S}_0$  и при этом  $W(\Lambda) \leq W(\lambda)$ .*

*Доказательство.* В силу (5.1) для  $\lambda \in \mathfrak{S}$  имеем равенство  $W(\lambda) = \mathcal{V}[\mu]$ , где  $\mu \triangleq \text{pr}_1(\lambda)$ . В свою очередь, для  $(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \triangleq \mathbf{t}(\lambda) \in \mathfrak{M}$   $w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) = (\text{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}]$ . Как следствие, согласно 5<sup>0</sup>)

$$\mathcal{V}[\alpha] = \min_{(u_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}} w((u_i)_{i \in \overline{1, N}}, \alpha) \leq (\text{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}]. \quad (5.3)$$

Напомним, что  $W(\Lambda) = W(\alpha, (h_i)_{i \in \overline{1, N}}) = \mathcal{V}[\alpha] = \mathcal{V}[\text{pr}_1(\Lambda)]$ . С учетом (5.1)  $\Lambda \in \mathfrak{S}_0$ . Отметим, что в силу (3.7) и 2<sup>0</sup>)

$$W(\lambda) = w(\mathbf{T}(\lambda)) = w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \mu) \geq (\text{val})[(z_i)_{i \in \overline{1, N}}].$$

С учетом (5.3) получаем неравенство  $W(\Lambda) = \mathcal{V}[\alpha] \leq W(\lambda)$ . □

С учетом предложения 5.1 имеем свойство: если  $\lambda \in \mathfrak{S}_0$ , то

$$S_\lambda^\downarrow \triangleq \bigcup_{\alpha \in (\text{sol})[\mathbf{t}(\lambda)]} \left\{ (\alpha, (h_i)_{i \in \overline{1, N}}) : (h_i)_{i \in \overline{1, N}} \in (\text{SOL})[\alpha] \right\} \quad (5.4)$$

есть непустое п/м  $\mathfrak{S}_0$ , причем  $W(\mathbf{s}) \leq W(\lambda) \quad \forall \mathbf{s} \in S_\lambda^\downarrow$ .

**З а м е ч а н и е 5.1.** В связи с (4.32) отметим, что  $\lambda_1 \in S_{\lambda_0}^\downarrow$  и  $\lambda_2 \in S_{\lambda_1}^\downarrow$ . Проверим первое свойство. В самом деле, с учетом (4.11) имеем по выбору  $\omega_1$ , что  $\omega_1 \in (\text{sol})[\mathbf{t}(\lambda_0)]$ . Кроме того, следует учесть (4.24), а тогда (см. (5.4))  $\lambda_1 \in S_{\lambda_0}^\downarrow$ . Далее,  $\omega_2 \in (\text{sol})[\mathbf{t}(\lambda_1)]$  и  $(y_i^{(2)})_{i \in \overline{1, N}} \in (\text{SOL})[\omega_2]$ , а потому (см. (5.4))  $\lambda_2 \in S_{\lambda_1}^\downarrow$ .

С учетом предложения 5.1 и замечания 5.1 можно определить итерационный процесс в следующем виде:  $\lambda_0 \in \mathfrak{S}_0$  определяется в виде  $\lambda_0 = (\omega_0, (y_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}})$ , где  $\omega_0 \in \mathbf{sol}$  и  $(y_i^{(0)})_{i \in \overline{1, N}}$  удовлетворяет (4.7); затем рекуррентно осуществляется выбор

$$\lambda_k \in S_{\lambda_{k-1}}^\downarrow \quad \forall k \in \mathbb{N}; \quad (5.5)$$

в итоге реализуется последовательность  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ . Как показывает вычислительный эксперимент, итерационная процедура (5.5) быстро стабилизируется. Это обстоятельство мотивирует специальное изучение множества соответствующих неподвижных точек отображения, задаваемого посредством (5.4).

**Предложение 5.2.** Пусть  $\lambda \in \mathfrak{S}_0$  обладает свойством  $\lambda \in S_\lambda^\downarrow$ . Тогда  $\rho \triangleq \mathbf{T}(\lambda) \in \mathfrak{M} \times \mathbb{A}$  обладает свойством

$$\text{pr}_2(\rho) \in (\text{sol})[\text{pr}_1(\rho)].$$

**Доказательство.** Пусть  $\lambda$  удовлетворяет условиям предложения,

$$((z_i)_{i \in \overline{1, N}} \triangleq \text{pr}_1(\rho)) \& (\eta \triangleq \text{pr}_2(\rho)).$$

В силу (5.4) можно указать  $\mu \in (\text{sol})[\mathbf{t}(\lambda)]$  и  $(h_i)_{i \in \overline{1, N}} \in (\text{SOL})[\mu]$ , для которых  $\lambda = (\mu, (h_i)_{i \in \overline{1, N}})$ . Полезно иметь в виду, что (см. (3.23), (3.24))  $\rho = (\mathbf{t}(\lambda), \text{pr}_1(\lambda)) = ((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \eta)$ . Это означает, что  $\mathbf{t}(\lambda) = (z_i)_{i \in \overline{1, N}} = \text{pr}_1(\rho)$  и  $\text{pr}_1(\lambda) = \mu = \eta$ . Тогда по определению  $\mu$  имеем  $\text{pr}_2(\rho) = \eta \in (\text{sol})[\text{pr}_1(\rho)]$ .  $\square$

**Следствие 5.1.** Пусть  $\lambda \in \mathfrak{S}_0$  обладает свойством  $\lambda \in S_\lambda^\downarrow$ . Тогда  $\rho \triangleq \mathbf{T}(\lambda)$  обладает следующим свойством экстремальности

$$\left( w(\rho) = \min_{\alpha \in \mathbb{A}} w(\text{pr}_1(\rho), \alpha) \right) \& \left( w(\rho) = \min_{(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}} w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \text{pr}_2(\rho)) \right). \quad (5.6)$$

**Доказательство.** Из (3.7), (3.8) и предложения 5.2 следует, что для кортежа  $\text{pr}_1(\rho) \in \mathfrak{M}$  выполнено

$$w(\rho) = w(\text{pr}_1(\rho), \text{pr}_2(\rho)) = (\text{val})[\text{pr}_1(\rho)] = \min_{\alpha \in \mathbb{A}} w(\text{pr}_1(\rho), \alpha). \quad (5.7)$$

С другой стороны,  $\lambda \in \mathfrak{S}_0$ , а тогда  $W(\lambda) = \mathcal{V}[\text{pr}_1(\lambda)]$ , где  $\text{pr}_1(\lambda) \in \mathbb{A}$ . При этом с учетом  $2^0$ )  $W(\lambda) = w(\mathbf{T}(\lambda)) = w(\rho)$ . Однако, в силу  $5^0$ )

$$\mathcal{V}[\text{pr}_1(\lambda)] = \min_{(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}} w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \text{pr}_2(\rho)).$$

Это означает, что второе положение в (5.6) также выполнено:

$$w(\rho) = \min_{(z_i)_{i \in \overline{1, N}} \in \mathfrak{M}} w((z_i)_{i \in \overline{1, N}}, \text{pr}_2(\rho));$$

с учетом (5.7) получаем окончательно оба свойства в (5.6).  $\square$

Итак, точки стабилизации итерационной процедуры (5.5) обладают экстремальным свойством в ЗР.

## 6. Метод динамического программирования в задаче оптимизации трассы

В настоящем разделе известная [15, 16] схема МДП для решения задачи управления с дискретным временем адаптируется к задаче оптимизации трассы (имеется в виду задача (3.17)). В этом построении следуем на идейном уровне [11, § 4.7], фиксируя маршрут  $\alpha \in \mathbb{A}$ .

Если  $m \in \overline{0, N-1}$  и  $x \in X$ , то через  $\mathbb{Z}_m^{(\alpha)}[x]$  обозначаем (непустое конечное) множество всех кортежей

$$(z_i)_{i \in \overline{0, N-m}} : \overline{0, N-m} \longrightarrow X \times X,$$

для каждого из которых  $z_0 = (x, x)$  и, кроме того,

$$z_j \in M_{\alpha(m+j)} \times M_{\alpha(m+j)} \quad \forall j \in \overline{1, N-m};$$

в терминах упомянутого множества формулируется следующая задача:

$$\sum_{i=0}^{N-(m+1)} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{N-m} c_{\alpha(m+i)}(z_i) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_{N-m})) \longrightarrow \min, \quad (z_i)_{i \in \overline{0, N-m}} \in \mathbb{Z}_m^{(\alpha)}[x]. \quad (6.1)$$

Сопоставляем задаче (6.1) (а, стало быть, и упорядоченной паре  $(m, x) \in \overline{0, N-1} \times X$ ) экстремум

$$\mathfrak{V}_m(x | \alpha) \triangleq \min_{(z_i)_{i \in \overline{0, N-m}} \in \mathbb{Z}_m^{(\alpha)}[x]} \left( \sum_{i=0}^{N-(m+1)} \mathbf{c}(\text{pr}_2(z_i), \text{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{N-m} c_{\alpha(m+i)}(z_i) + \mathbf{f}(\text{pr}_2(z_{N-m})) \right). \quad (6.2)$$

Посредством (6.2) при каждом  $m \in \overline{0, N-1}$  определяется функция

$$\mathfrak{V}_m(\cdot | \alpha) \triangleq (\mathfrak{V}_m(x | \alpha))_{x \in X},$$

действующая из  $X$  в  $[0, \infty[$ . Полагаем, кроме того, что  $\mathfrak{V}_N(\cdot | \alpha) \triangleq \mathbf{f}$ ; тогда  $\mathfrak{V}_N(x | \alpha) = \mathbf{f}(x) \quad \forall x \in X$ . По смыслу

$$\mathfrak{V}_0(\cdot | \alpha), \mathfrak{V}_1(\cdot | \alpha), \dots, \mathfrak{V}_N(\cdot | \alpha)$$

суть слои функции Беллмана. Справедливо следующее

**Предложение 6.1.** *Если  $m \in \overline{0, N-1}$  и  $x \in X$ , то*

$$\mathfrak{V}_m(x | \alpha) = \min_{z \in M_{\alpha(m+1)} \times M_{\alpha(m+1)}} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z)) + c_{\alpha(m+1)}(z) + \mathfrak{V}_{m+1}(\text{pr}_2(z) | \alpha)].$$

Доказательство подобно в логическом отношении обоснованиям [15, 16] для достаточно традиционных в теории МДП положений; по этой причине оно опущено в настоящем изложении.

Условимся о следующем соглашении: полагаем  $\forall m \in \overline{1, N}$

$$\mathfrak{V}_m^{(\alpha)} \triangleq (\mathfrak{V}_m(x | \alpha))_{x \in M_{\alpha(m)}}. \quad (6.3)$$

Тем самым переходим к рассмотрению сужений слоев функции Беллмана: при  $m \in \overline{1, N}$

$$\mathfrak{V}_m^{(\alpha)} : M_{\alpha(m)} \longrightarrow [0, \infty[,$$

причем  $\mathfrak{V}_m^{(\alpha)}(x) = \mathfrak{V}_m(x | \alpha) \quad \forall x \in M_{\alpha(m)}$ . Ясно, что  $\mathfrak{V}_N^{(\alpha)}$  есть сужение  $\mathbf{f}$  на  $M_{\alpha(N)}$ . В дополнение к (6.3) отметим очевидное следствие:

$$\mathcal{V}[\alpha] = \mathfrak{V}_0(x^0 | \alpha). \quad (6.4)$$

Из (6.3), (6.4) и предложения 6.1 вытекает равенство

$$\mathcal{V}[\alpha] = \min_{z \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}} [\mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(z)) + c_{\alpha(1)}(z) + \mathfrak{V}_1^{(\alpha)}(\text{pr}_2(z))]. \quad (6.5)$$

Далее, из (6.3) и предложения 6.1 следует, что  $\forall m \in \overline{1, N-1} \quad \forall x \in M_{\alpha(m)}$

$$\mathfrak{V}_m^{(\alpha)}(x) = \min_{z \in M_{\alpha(m+1)} \times M_{\alpha(m+1)}} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z)) + c_{\alpha(m+1)}(z) + \mathfrak{V}_{m+1}^{(\alpha)}(\text{pr}_2(z))]. \quad (6.6)$$

Посредством (6.5), (6.6) осуществляется начисывание нужного массива значений функции Беллмана. В самом деле, мы располагаем функцией  $\mathfrak{V}_N^{(\alpha)} = (\mathbf{f}(x))_{x \in M_{\alpha(N)}}$ . Пусть  $k \in \overline{1, N}$  и

функции  $\mathfrak{B}_j^{(\alpha)}$ ,  $j \in \overline{k, N}$ , уже построены. Если  $k = 1$ , то, в частности, нам известна функция  $\mathfrak{B}_1$  и с помощью (6.5) определяем значение  $\mathcal{V}[\alpha]$ , завершая тем самым вышеупомянутую процедуру насчитывания требуемого массива значений функции Беллмана. Если же  $k > 1$ , т. е.  $k \in \overline{2, N}$ , то  $k - 1 \in \overline{1, N - 1}$  и конструируем функцию  $\mathfrak{B}_{k-1}^{(\alpha)} : M_{\alpha(k-1)} \rightarrow [0, \infty[$  на основе (6.6): вычисляем  $\forall x \in M_{\alpha(k-1)}$

$$\mathfrak{B}_{k-1}^{(\alpha)}(x) = \min_{z \in M_{\alpha(k)} \times M_{\alpha(k)}} [\mathbf{c}(x, \text{pr}_1(z)) + c_{\alpha(k)}(z) + \mathfrak{B}_k^{(\alpha)}(\text{pr}_2(z))]. \quad (6.7)$$

После конечного числа таких (регулярных) шагов вида (6.7) будут определены все функции  $\mathfrak{B}_k^{(\alpha)}$ ,  $k \in \overline{1, N}$ , после чего по правилу (6.5) будет найдено значение  $\mathcal{V}[\alpha]$  (экстремум задачи (3.17)).

Наконец, приведем алгоритм формирования трассы, оптимальной при выбранном маршруте  $\alpha$ . Мы полагаем сейчас, что нам уже известны значение  $\mathcal{V}[\alpha]$  и все функции  $\mathfrak{B}_k^{(\alpha)}$ ,  $k \in \overline{1, N}$ .

С учетом (6.5) выбираем  $\eta_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}$  так, что

$$\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(\eta_1)) + c_{\alpha(1)}(\eta_1) + \mathfrak{B}_1^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_1)). \quad (6.8)$$

При этом  $\text{pr}_2(\eta_1) \in M_{\alpha(1)}$ , и согласно (6.6) имеем равенство

$$\mathfrak{B}_1^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_1)) = \min_{z \in M_{\alpha(2)} \times M_{\alpha(2)}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_1), \text{pr}_1(z)) + c_{\alpha(2)}(z) + \mathfrak{B}_2^{(\alpha)}(\text{pr}_2(z))]. \quad (6.9)$$

С учетом (6.9) выбираем  $\eta_2 \in M_{\alpha(2)} \times M_{\alpha(2)}$  так, что

$$\mathfrak{B}_1^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_1)) = \mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_1), \text{pr}_1(\eta_2)) + c_{\alpha(2)}(\eta_2) + \mathfrak{B}_2^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_2)). \quad (6.10)$$

Из (6.8), (6.10) вытекает, что справедливо равенство

$$\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(\eta_1)) + \mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_1), \text{pr}_1(\eta_2)) + c_{\alpha(1)}(\eta_1) + c_{\alpha(2)}(\eta_2) + \mathfrak{B}_2^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_2)). \quad (6.11)$$

Дальнейшее построение осуществляется по аналогичной схеме. В самом деле, пусть  $m \in \overline{2, N}$  и уже построен кортеж

$$(\eta_j)_{j \in \overline{1, m}} \in \prod_{j=1}^m (M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)}),$$

удовлетворяющий следующим трем условиям:

1') выполнено равенство (6.8);

2')  $\mathfrak{B}_k^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_k)) = \mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_k), \text{pr}_1(\eta_{k+1})) + c_{\alpha(k+1)}(\eta_{k+1}) + \mathfrak{B}_{k+1}^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_{k+1})) \quad \forall k \in \overline{1, m-1}$ ;

3')  $\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(\eta_1)) + \sum_{i=1}^{m-1} \mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_i), \text{pr}_1(\eta_{i+1})) + \sum_{i=1}^m c_{\alpha(i)}(\eta_i) + \mathfrak{B}_m^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_m))$ .

**З а м е ч а н и е 6.1.** Если  $m = 2$ , то 1') очевидным образом выполнено (см. (6.8)). Свойство 2') вытекает из (6.10), т. к.  $\overline{1, m-1} = \{1\}$  (при  $m = 2$ ). Свойство 3') следует в упомянутом случае из (6.11).

Возвращаясь к общему случаю  $m \in \overline{2, N}$ , отметим, что при  $m = N$  мы в виде  $(\eta_j)_{j \in \overline{1, N}} = (\eta_j)_{j \in \overline{1, m}}$  уже имеем требуемое решение:

$$(\eta_j)_{j \in \overline{1, N}} \in (\text{SOL})[\alpha]. \quad (6.12)$$

Это свойство непосредственно следует из 3'). Поэтому ограничимся рассмотрением случая  $m \in \overline{2, N-1}$ , когда  $m+1 \in \overline{3, N}$ . Поскольку  $\text{pr}_2(\eta_m) \in M_{\alpha(m)}$ , то в силу (6.6)

$$\mathfrak{B}_m^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_m)) = \min_{z \in M_{\alpha(m+1)} \times M_{\alpha(m+1)}} [\mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_m), \text{pr}_1(z)) + c_{\alpha(m+1)}(z) + \mathfrak{B}_{m+1}^{(\alpha)}(\text{pr}_2(z))].$$

С учетом данного равенства выбираем  $\eta_{m+1} \in M_{\alpha(m+1)} \times M_{\alpha(m+1)}$  так, что при этом справедливо равенство

$$\mathfrak{V}_m^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_m)) = \mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_m), \text{pr}_1(\eta_{m+1})) + c_{\alpha(m+1)}(\eta_{m+1}) + \mathfrak{V}_{m+1}^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_{m+1})). \quad (6.13)$$

Имеем теперь следующий кортеж:

$$(\eta_j)_{j \in \overline{1, m+1}} \in \prod_{j=1}^{m+1} (M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)}).$$

Основные свойства данного продолженного кортежа имеют вид:

1'') выполнено равенство (6.8) (действительно, мы не изменяли  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , а потому (6.8) сохраняется);

2'') с учетом 2') и (6.12) имеем с очевидностью, что

$$\mathfrak{V}_k^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_k)) = \mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_k), \text{pr}_1(\eta_{k+1})) + c_{\alpha(k+1)}(\eta_{k+1}) + \mathfrak{V}_{k+1}^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_{k+1})) \quad \forall k \in \overline{1, m};$$

3'') из 3') и (6.13) вытекает следующее равенство:

$$\mathcal{V}[\alpha] = \mathbf{c}(x^0, \text{pr}_1(\eta_1)) + \sum_{i=1}^m \mathbf{c}(\text{pr}_2(\eta_i), \text{pr}_1(\eta_{i+1})) + \sum_{i=1}^{m+1} c_{\alpha(i)}(\eta_i) + \mathfrak{V}_{m+1}^{(\alpha)}(\text{pr}_2(\eta_{m+1})).$$

Итак, мы смогли реализовать продолжение

$$(\eta_i)_{i \in \overline{1, m}} \longrightarrow (\eta_i)_{i \in \overline{1, m+1}} \quad (6.14)$$

исходного кортежа с сохранением всех его основных свойств: 1')–3') преобразуются в 1'')–3'').

Ясно, что после выполнения конечного числа продолжений типа (6.14) мы придем к построению решения (6.12).

## 7. Вычислительный эксперимент

Рассматривалось решение обобщенной задачи курьера на плоскости  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , используемой в качестве множества  $X$ . Предполагалось, что  $N = 27$ ,  $|\mathbf{K}| = 25$  (т. е.  $\mathbf{K}$  — множество, содержащее 25 элементов). Каждое из множеств  $M_1, \dots, M_{27}$  является двадцатиэлементным; точка  $x^0$  совпадает с началом координат, т. е.  $x^0 = (0, 0)$ . Значения функции  $\mathbf{c}$  определяются евклидовым расстоянием между точками плоскости. Внутренние работы состоят в последовательном посещении “городов”, т. е. точек каждого целевого множества; следовательно, внутренние работы сводятся к решению соответствующих ЗК; в последних матрицы затрат также определяются евклидовыми расстояниями. В качестве значений функций  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_N$  используют экстремумы вариантов ЗК, в которых фиксирована пара “городов”: точка входа на множество и точка выхода. Упомянутые “города” выступают в качестве параметров для каждой отдельно взятой внутренней ЗК. При изменении этих параметров реализуются зависимости  $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_N$ , т. е. экстремумы внутренних ЗК как функции точек входа и выхода. Полагаем, наконец, что значениями функции  $\tilde{\mathbf{f}}$  являются евклидовы нормы соответствующих векторов-аргументов; итак,  $\tilde{\mathbf{f}}$  есть сужение евклидовой нормы на множество, являющееся объединением всех множеств  $M_i$ ,  $i \in \overline{1, N}$ . Такое определение функции  $\tilde{\mathbf{f}}$  соответствует фактическому осуществлению возврата в точку  $x^0$  после посещения всех целевых множеств.

Итак, мы пришли к задаче о последовательном обходе “мегаполисов”  $M_1, \dots, M_{27}$  с посещением каждого из “городов”; имеющиеся ограничения в виде условий предшествования являются осложняющим элементом постановки. При этих ограничениях осуществляется минимизация расстояния, что во многих прикладных задачах отвечает интересам быстрогодействия.

Рассмотрим два варианта решения основной задачи: (1) решение с использованием точного алгоритма (оптимальное решение) на основе варианта метода динамического программирования, предложенного в [17]; (2) решение на основе метода итераций настоящей работы.

Приведенный выше приближенный итерационный алгоритм был реализован в виде программы на языке программирования C++ (Borland C++ Builder 6.0), работающей в операционной системе Windows. Вычислительная часть программы выполняется в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Вычислительный эксперимент проводился на компьютере с процессором Core2Duo T7700 (тактовая частота 2.4 ГГц) с объемом ОЗУ равным 3 ГБ с установленной операционной системой Windows Vista Business Sp1. В случае решения задачи на плоскости программа позволяет отображать в графическом виде траекторию движения по множествам; имеется возможность увеличения отдельных участков графика.

Пусть множества заданы в виде “сеток”, получаемых размещением на окружностях 20 точек на равных угловых расстояниях друг от друга, включая точку с нулевой угловой координатой. Таким образом, каждое множество  $M_i$ ,  $i \in \overline{1, 27}$ , однозначно представляется координатой центра  $O_i$  и радиусом  $R_i$  окружности,  $i \in \overline{1, 27}$ .

По соображениям объема статьи ниже мы не приводим описание маршрутов решения внутренних задач. Указываются всякий раз только точка входа в “мегаполис” и точка выхода, т. е. пара “городов”. Каждая такая пара полностью определяет внутреннюю ЗК, включая значение (экстремум) ЗК и оптимальный маршрут. Указанные маршруты иллюстрируются соответствующими рисунками.

Пусть заданы следующие координаты центров:

$$\begin{aligned} O_1 &= (20, 0); O_2 = (50, 0); O_3 = (85, 0); O_4 = (0, -25); O_5 = (0, -60); O_6 = (0, -85); \\ O_7 &= (-15, 0); O_8 = (-40, 0); O_9 = (-75, 0); O_{10} = (0, 22); O_{11} = (0, 50); O_{12} = (0, 80); \\ O_{13} &= (30, 40); O_{14} = (30, 80); O_{15} = (80, 80); O_{16} = (70, 40); O_{17} = (50, -40); \\ O_{18} &= (30, -60); O_{19} = (80, -40); O_{20} = (65, -80); O_{21} = (-30, -25); O_{22} = (-35, -70); \\ O_{23} &= (-70, -40); O_{24} = (-70, -80); O_{25} = (-30, 40); O_{26} = (-75, 50); O_{27} = (-50, 75) \end{aligned}$$

и радиусы окружностей:

$$\begin{aligned} R_1 &= R_6 = R_7 = R_{10} = R_{21} = 8; \\ R_3 &= R_{12} = R_{14} = R_{17} = R_{24} = R_{26} = 10; \\ R_5 &= R_8 = R_{11} = R_{15} = R_{18} = R_{19} = R_{23} = R_{27} = 12; \\ R_2 &= R_4 = R_9 = R_{13} = R_{16} = R_{20} = R_{22} = R_{25} = 15. \end{aligned}$$

Пусть пары индексов  $(p_i, q_i)$ ,  $i \in \overline{1, 25}$ , задающих условия предшествования, имеют вид (напомним, что для всякого  $i \in \overline{1, 25}$  множество с индексом  $p_i$  должно посещаться раньше множества с индексом  $q_i$ ):

$$\begin{aligned} p_1 &= 1, q_1 = 10; p_2 = 12, q_2 = 2; p_3 = 2, q_3 = 13; p_4 = 13, q_4 = 15; p_5 = 6, q_5 = 16; \\ p_6 &= 15, q_6 = 16; p_7 = 18, q_7 = 27; p_8 = 9, q_8 = 27; p_9 = 10, q_9 = 9; p_{10} = 11, q_{10} = 19; \\ p_{11} &= 20, q_{11} = 19; p_{12} = 25, q_{12} = 26; p_{13} = 23, q_{13} = 22; p_{14} = 21, q_{14} = 20; p_{15} = 24, q_{15} = 22; \\ p_{16} &= 14, q_{16} = 16; p_{17} = 7, q_{17} = 10; p_{18} = 8, q_{18} = 2; p_{19} = 1, q_{19} = 9; p_{20} = 14, q_{20} = 26; \\ p_{21} &= 2, q_{21} = 27; p_{22} = 3, q_{22} = 6; p_{23} = 3, q_{23} = 19; p_{24} = 18, q_{24} = 17; p_{25} = 14, q_{25} = 25. \end{aligned}$$

При этом  $\mathbf{K} = \{(p_i, q_i) : i \in \overline{1, 25}\}$ . В результате применения точного алгоритма получены следующие результаты:

(1) Величина совокупных затрат  $\mathbf{V}=2708.68$ .

(2) Маршрут и трасса обхода множеств:

$$\begin{aligned}
 x^0 &= (0, 0) \rightarrow ((-7, 0); (-7.39, -2.47)) \in M_7 \times M_7 \rightarrow ((-0, -10); (4.64, -10.73)) \in M_4 \times M_4 \\
 &\rightarrow ((20, -8); (22.47, -7.61)) \in M_1 \times M_1 \rightarrow ((75.49, 3.09); (76.91, 5.88)) \in M_3 \times M_3 \\
 &\rightarrow ((26.91, 70.49); (24.12, 71.91)) \in M_{14} \times M_{14} \rightarrow ((8.09, 74.12); (5.88, 71.91)) \in M_{12} \times M_{12} \\
 &\rightarrow ((3.71, 61.41); (-3.71, 38.59)) \in M_{11} \times M_{11} \rightarrow ((-6.47, 26.7); (-7.61, 24.47)) \in M_{10} \times M_{10} \\
 &\rightarrow ((-28.59, -3.71); (-30.29, -7.05)) \in M_8 \times M_8 \rightarrow ((-32.47, -17.39); (-34.70, -18.53)) \\
 &\in M_{21} \times M_{21} \rightarrow ((-62.86, -8.82); (-66.18, -12.14)) \in M_9 \times M_9 \rightarrow ((-66.29, -28.59); \\
 &\quad (-66.29, -51.41)) \in M_{23} \times M_{23} \rightarrow ((-64.12, -71.91); (-61.91, -74.12)) \in M_{24} \times M_{24} \\
 &\rightarrow ((-49.27, -74.64); (-22.86, -78.82)) \in M_{22} \times M_{22} \rightarrow ((-4.70, -78.53); (-2.47, -77.39)) \\
 &\in M_6 \times M_6 \rightarrow ((3.71, -71.41); (7.05, -69.71)) \in M_5 \times M_5 \rightarrow ((26.29, -71.41); (33.71, -71.41)) \\
 &\in M_{18} \times M_{18} \rightarrow ((52.86, -71.18); (56.18, -67.86)) \in M_{20} \times M_{20} \rightarrow ((58.09, -45.88); \\
 &\quad (59.51, -43.09)) \in M_{17} \times M_{17} \rightarrow ((68.59, -36.29); (70.29, -32.95)) \in M_{19} \times M_{19} \\
 &\rightarrow ((62.14, -8.82); (54.64, 14.27)) \in M_2 \times M_2 \rightarrow ((44.27, 35.36); (45, 40)) \in M_{13} \times M_{13} \\
 &\rightarrow ((72.95, 70.29); (76.29, 68.59)) \in M_{15} \times M_{15} \rightarrow ((65.36, 54.27); (61.18, 52.14)) \in M_{16} \times M_{16} \\
 &\rightarrow ((-25.36, 54.27); (-30, 55)) \in M_{25} \times M_{25} \rightarrow ((-46.29, 63.59); (-50, 63)) \in M_{27} \times M_{27} \\
 &\rightarrow ((-65.49, 53.09); (-65, 50)) \in M_{26} \times M_{26}.
 \end{aligned}$$

Время счета составило 4 ч 34 мин 39 с.

График маршрута и трассы приведен на рис. 1.

В результате применения итерационного алгоритма получены следующие результаты:

*Первая итерация:*

(1) Величина совокупных затрат  $\mathcal{V}[\omega_0]=2730.73$ .

(2) Величина затрат во вспомогательной задаче коммивояжера:  $\mathbf{v}^0=586.26$ .

(3) Маршрут и трасса обхода множеств:

$$\begin{aligned}
 x^0 &= (0, 0) \rightarrow ((-8.53, -4.70); (-10.30, -6.47)) \in M_7 \times M_7 \rightarrow ((-23.53, -20.30); \\
 &\quad (-22.39, -22.53)) \in M_{21} \times M_{21} \rightarrow ((-14.27, -20.36); (8.82, -12.86)) \in M_4 \times M_4 \\
 &\rightarrow ((20, -8); (22.47, -7.61)) \in M_1 \times M_1 \rightarrow ((75.49, 3.09); (76.91, 5.88)) \in M_3 \times M_3 \\
 &\rightarrow ((26.91, 70.49); (24.12, 71.91)) \in M_{14} \times M_{14} \rightarrow ((8.09, 74.12); (5.88, 71.91)) \in M_{12} \times M_{12} \\
 &\rightarrow ((3.71, 61.41); (-3.71, 38.59)) \in M_{11} \times M_{11} \rightarrow ((-6.47, 26.70); (-7.61, 24.47)) \in M_{10} \times M_{10} \\
 &\rightarrow ((-32.95, 9.71); (-52, -0)) \in M_8 \times M_8 \rightarrow ((-60.73, -4.64); (-62.86, -8.82)) \in M_9 \times M_9 \\
 &\rightarrow ((-62.95, -30.29); (-62.95, -49.71)) \in M_{23} \times M_{23} \rightarrow ((-64.12, -71.91); (-61.91, -74.12)) \\
 &\in M_{24} \times M_{24} \rightarrow ((-49.27, -74.64); (-22.86, -78.82)) \in M_{22} \times M_{22} \rightarrow ((-4.70, -78.53); \\
 &\quad (-2.47, -77.39)) \in M_6 \times M_6 \rightarrow ((3.71, -71.41); (7.05, -69.71)) \in M_5 \times M_5 \rightarrow ((22.95, -69.71); \\
 &\quad (37.05, -69.71)) \in M_{18} \times M_{18} \rightarrow ((56.18, -67.86); (60.36, -65.73)) \in M_{20} \times M_{20} \\
 &\rightarrow ((70.29, -47.05); (68.59, -43.71)) \in M_{19} \times M_{19} \rightarrow ((59.51, -36.91); (58.09, -34.12)) \\
 &\in M_{17} \times M_{17} \rightarrow ((54.64, -14.27); (50, 15)) \in M_2 \times M_2 \rightarrow ((44.27, 35.36); (45, 40)) \in M_{13} \times M_{13} \\
 &\rightarrow ((72.95, 70.29); (76.29, 68.59)) \in M_{15} \times M_{15} \rightarrow ((65.36, 54.27); (61.18, 52.14)) \in M_{16} \times M_{16} \\
 &\rightarrow ((-25.36, 54.27); (-30, 55)) \in M_{25} \times M_{25} \rightarrow ((-46.29, 63.59); (-50, 63)) \in M_{27} \times M_{27} \\
 &\rightarrow ((-65, 50); (-65.49, 53.09)) \in M_{26} \times M_{26}.
 \end{aligned}$$

Время счета составило 2 ч 57 мин 10 с.

График маршрута и трассы приведен на рис. 2.

На *второй итерации* наступила стабилизация результата.

Из сравнения результатов, полученных при использовании итерационного метода и точного алгоритма, видно, что при незначительном проигрыше в качестве итерационный алгоритм затрачивает на вычисления существенно меньшее время: 2 ч 57 мин 10 с против 4 ч 34 мин 39 с в случае применения точного метода. Кроме того, на каждой итерации (начиная со второй) можно использовать матрицы попарных сравнений “городов”, в составе “мегаполисов”, полученные на первой итерации, что делает их более простыми в вычислительном плане.

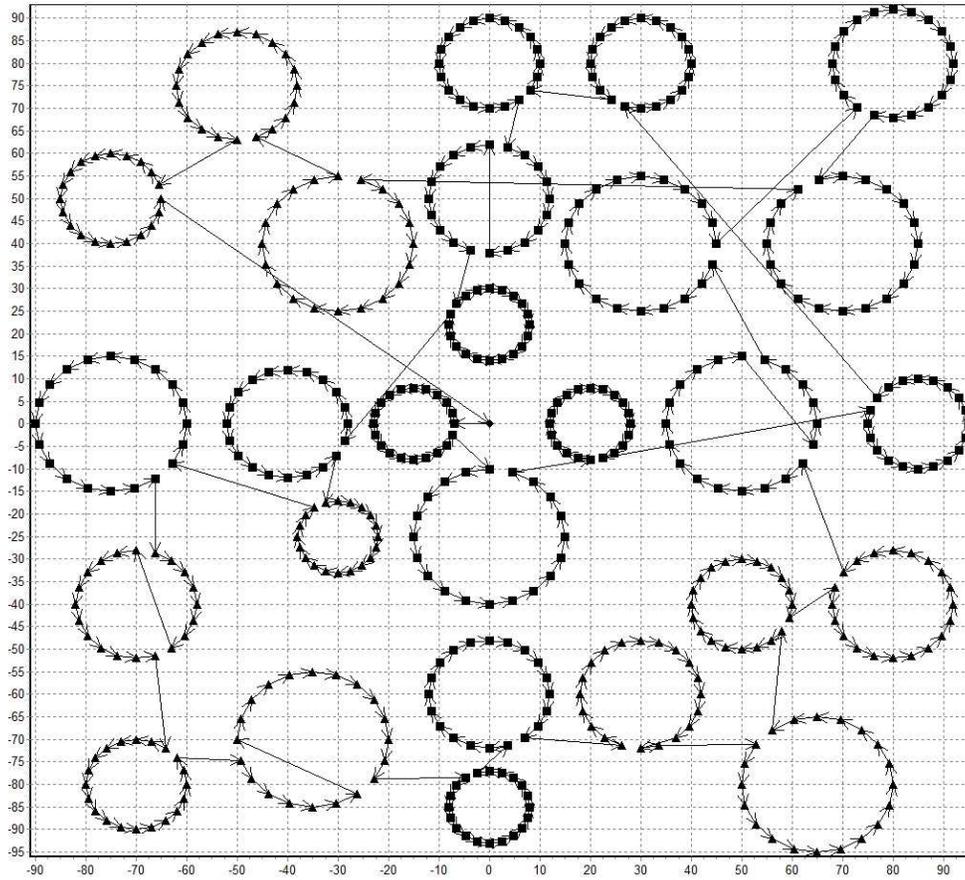


Рис. 1. Маршрут и трасса обхода множеств, реализуемые точным алгоритмом.

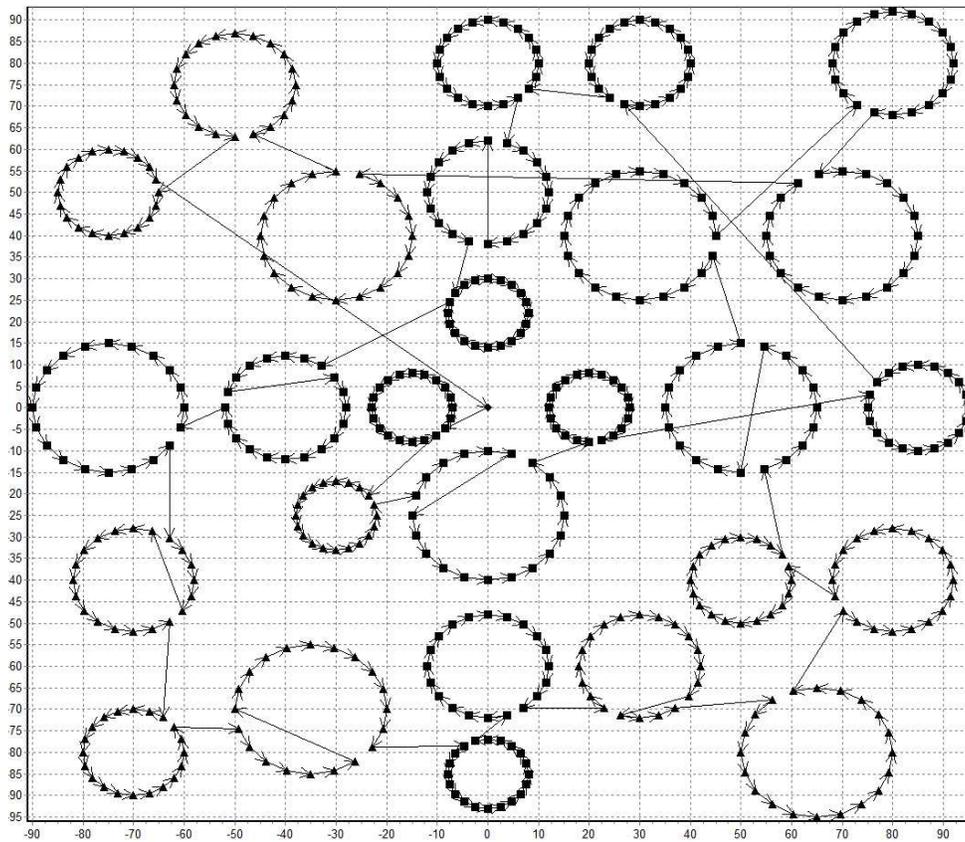


Рис. 2. Маршрут и трасса обхода множеств, реализуемые итерационным алгоритмом.

Один из авторов статьи в течении продолжительного времени имел возможность общения с А. Б. Куржанским, внесшим большой вклад в развитие теории экстремальных задач и теории управления. Это общение помогало всякий раз находить новые интересные направления исследований и способствовало лучшему пониманию подходов и методов решения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
2. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
3. Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
4. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернет. сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
5. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения. // Кибернет. сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
6. Henry-Labordere A.L. The record-balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized travelling salesman problem // R. I. R. O. 1969. Vol. 3, №. 2. P. 43–49.
7. Laporte G., Nobert Y. Generalized travelling salesman problem through n-sets of nodes: an integer programming approach // INFOR. 1983. Vol. 21, no. 1. P. 61–75.
8. Лейтен А.К. Некоторые модификации задачи коммивояжера // Тр. ВЦ Тарт. ун-та. 1973. Вып. 28. С. 44–58.
9. Сергеев С.И. Гибридные системы управления и динамическая задача коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2008. № 1. С. 45–54.
10. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. К вопросу о решении задачи последовательного обхода множеств с использованием “незамкнутой” задачи коммивояжера // Автоматика и телемеханика. 2002. № 11. С. 151–166.
11. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.:Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. 2008. 238 с.
12. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Обобщенная версия задачи курьера // Математический и прикладной анализ: сб. научн. тр. Тюмень: Изд-во Тюмен. гос. ун-та. 2005. Вып. 2. С. 238–280.
13. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
14. Ченцов А.А., Ченцов А.Г. О реализации метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 13, № 3. С. 136–160.
15. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1974. 432 с.
16. Беллман Р., Калаба Р. Динамическое программирование и основы современной теории управления. М.: Наука, 1969. 118 с.
17. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 183–201.

Ченцов Алексей Александрович  
канд. физ.-мат. наук  
гл. программист

Поступила 10.03.2009

Ченцов Александр Георгиевич  
чл.-корр. РАН  
зав. отд.

Ченцов Павел Александрович  
канд. физ.-мат. наук  
гл. программист

Ин-т математики и механики УрО РАН  
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

УДК 518.9

## О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. А. Чикрий, А. А. Белоусов

Изучаются игровые задачи преследования для линейных систем с интегральными ограничениями на управления. В предлагаемой схеме используются идеи метода разрешающих функций. При этом формулируется аналог условия Л.С. Понтрягина, позволяющий установить достаточные условия окончания дифференциальной игры за некоторое гарантированное время; для построения управления преследователя используется теорема измеримого выбора. Полученные результаты иллюстрируются на типичных примерах игровых ситуаций: простое движение и контрольный пример Понтрягина.

Ключевые слова: дифференциальная игра, игра преследования, интегральное ограничение, многозначное отображение, разрешающая функция.

A. A. Chikrii, A. A. Belousov. On linear differential games with integral constraints.

Pursuit game problems for linear systems with integral constraints for controls are studied. The proposed scheme uses the ideas of the method of resolving functions. An analog of the Pontryagin condition is formulated, which makes it possible to establish sufficient conditions for the termination of the differential game in some guaranteed time by using the measurable choice theorem for constructing the pursuer's control. The obtained results are illustrated by typical examples of game situations: simple motion and Pontryagin's test case.

Keywords: differential game, pursuit game, integral constraint, set-valued mapping, resolving function.

### Введение

В теории дифференциальных игр уже достаточно давно установилось правило, состоящее в том, что новые конструкции отрабатываются изначально в случае так называемых геометрических ограничений на управления [1, 2, 6, 7]. Возможно этот случай представляется более привычным для исследователей или даже более простым. Перенесение результатов на интегральные или смешанные ограничения на управления подчас встречает серьезные трудности математического характера. Этим и объясняется тот факт, что между основными результатами для геометрических ограничений и их аналогами для интегральных ограничений иногда проходит значительное время.

Так, первый прямой метод Л.С. Понтрягина [1] был развит в работах М.С. Никольского [8–10] в случае интегральных ограничений на управления. Впоследствии указанная задача в рамках упомянутой техники, но с использованием приема Д. Зонневенда [20], связанного с растягиванием времени, изучалась А.Я. Азимовым [11]. К этой же методике можно отнести исследования А.В. Мезенцева [13], Н.Л. Григоренко [14], А.Я. Азимова и Ф.В. Гусейнова [12].

Правило экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [2] нашло свое воплощение для случая интегральных ограничений в работах В.Н. Ушакова [15], Б.Н. Пшеничного и Ю.Н. Онопчука [16] и впоследствии И.С. Раппопорта [17]. Последний изучал также случай смешанных ограничений на управления.

Серию работ Б.Н. Соколова [18, 19], по-видимому, следует отнести к идеологии динамического программирования.

В работе первого автора этой статьи и В.В. Безмагорычного [21] предпринята попытка перенести метод разрешающих функций [6] на случай интегральных ограничений на управления. Этой же проблеме посвящена работа А.А. Белоусова [22]. Настоящая работа продолжает упомянутые исследования. При этом существенно используется техника нелинейного и выпуклого анализа (Б.Н. Пшеничный [5], А.Б. Куржанский [3, 4]).

Метод разрешающих функций, используемый в данной работе в качестве базового, тесно связан с функционалами Минковского, а точнее — с обратными к ним отображениями, введенными в [6]. Он состоит в оценке действий преследователя в каждый момент времени с помощью некоторой скалярной функции, суммирование значений которой дает интегральный критерий окончания игры сближения за соответствующее гарантированное время. Возможность вычислять разрешающие функции в аналитическом виде для достаточно широкого класса задач позволяет делать выводы об условиях завершения игры сближения из заданных начальных состояний за конечное время.

### 1. Постановка задачи

Динамика игры задается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu + Cv, \quad z(0) = z^0, \tag{1.1}$$

где  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $v \in \mathbb{R}^l$ ,  $A, B, C$  — постоянные матрицы размера  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $n \times l$  соответственно.

Управления игрока-преследователя  $u(\cdot)$  и убегающего игрока  $v(\cdot)$  являются измеримыми (по Лебегу) функциями, которые удовлетворяют интегральным ограничениям

$$\int_0^\infty \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq 1, \quad \int_0^\infty \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq 1. \tag{1.2}$$

Эти управления будем называть допустимыми.

Терминальное множество  $M$  является линейным подпространством  $\mathbb{R}^n$ .

**О п р е д е л е н и е.** Будем говорить, что игра может быть закончена в момент  $T = T(z^0)$ , если для любого допустимого управления убегающего игрока  $v(t)$  существует допустимое управление преследователя  $u(t)$ , которое гарантирует приведение решения уравнения (1.1)  $z(t)$ , соответствующего управлениям  $(u(t), v(t))$  и начальному положению  $z^0$ , на терминальное множество в момент  $T$ :  $z(T) \in M$ . Считаем, что при построении своего управления  $u(t)$  преследователь в момент  $t$  может использовать информацию о реализовавшемся до этого момента управлении противника  $v(t)$ ,  $\tau \in [0, t]$ .

Обозначим через  $\pi$  оператор проектирования из  $\mathbb{R}^n$  на подпространство  $L$ , где  $L$  — дополнение к  $M$  в  $\mathbb{R}^n$ .

Введем предположение на параметры игры, которое можно назвать аналогом условия Л. С. Понрягина [1] для дифференциальных игр с интегральными ограничениями.

**Предположение 1.** *Существует такое число  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda < 1$ , что для всех положительных  $t$  выполняется включение*

$$\pi e^{At} CV \subset \lambda \pi e^{At} BU, \tag{1.3}$$

где  $U = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\|^2 \leq 1\}$  и  $V = \{v \in \mathbb{R}^l : \|v\|^2 \leq 1\}$  — единичные шары в пространствах управлений.

Далее полагаем, что это предположение на параметры игры выполнено.

### 2. Вспомогательные утверждения

Зафиксируем начальную позицию  $z^0$ . Введем вспомогательное многозначное отображение

$$\Omega(t, \tau, v) = \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : \gamma \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} Cv \in \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} \pi e^{A\tau} BU \right\}, \tag{2.1}$$

где  $(t, \tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ . Рассмотрим вспомогательную функцию (так называемую разрешающую функцию [6]):

$$\gamma(t, \tau, v) = \sup \Omega(t, \tau, v). \quad (2.2)$$

Исследуем свойства вспомогательного отображения и этой функции.

**Лемма 1.** *Имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned} \gamma(t, \tau, v) &\geq 0 \text{ для всех } (t, \tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l; \\ \gamma(t, \tau, v) &= +\infty \text{ при } \pi e^{At} z^0 = 0 \text{ для всех } (\tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l; \\ \gamma(t, \tau, v) &< \infty \text{ при } \pi e^{At} z^0 \neq 0 \text{ для любых } (\tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l. \end{aligned}$$

**Доказательство.** Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что  $0 \in \Omega(t, \tau, v)$ , т. е.

$$\pi e^{A\tau} C v \in \sqrt{\lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} B U. \quad (2.3)$$

При  $v = 0$  это включение очевидно выполняется. При  $v \neq 0$ , учитывая (1.3) и включение  $0 \in U$ , имеем цепочку вложений

$$\pi e^{A\tau} C \frac{v}{\|v\|} \in \pi e^{A\tau} C v \subset \lambda \pi e^{A\tau} B U \subset \sqrt{\lambda} \pi e^{A\tau} B U,$$

что и означает  $\gamma(t, \tau, v) \geq 0$ .

С учетом (2.3) очевидно, что при  $\pi e^{At} z^0 = 0$  включение  $\gamma \in \Omega(t, \tau, v)$  выполняется для любого положительного числа  $\gamma$ .

Зафиксируем вектор  $(t, \tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$  такой, что  $\pi e^{At} z^0 \neq 0$ . Величина нормы вектора  $\|\gamma \pi e^{At} + \pi e^{A\tau} C v\|$  растет по  $\gamma$  линейно (при достаточно больших  $\gamma$ ), а норма векторов из правой части включения в (2.1) ограничена функцией

$$\sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} \max_{\|u\| \leq 1} \|\pi e^{A\tau} B u\|,$$

которая как функция от  $\gamma$  растет не быстрее корня квадратного. Поэтому для достаточно больших  $\gamma$  включение в (2.1) не выполняется, т. е.  $\gamma(t, \tau, v) < \infty$ .

**Лемма 2.** *Интервал  $[0, \gamma(t, \tau, v)) \subset \Omega(t, \tau, v)$  для всех  $(t, \tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$ .*

**Доказательство.** Полагаем, что для некоторого положительного числа  $\gamma$  выполнено включение  $\gamma \in \Omega(t, \tau, v)$ . Тогда для любого числа  $\beta$ ,  $0 < \beta < \gamma$ , выполняется включение

$$\beta \pi e^{At} z^0 + \frac{\beta}{\gamma} \pi e^{A\tau} C v \in \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} \pi e^{A\tau} B U.$$

А из включения (2.3) следует, что

$$\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \pi e^{A\tau} C v \in \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \sqrt{\lambda\|v\|^2} \pi e^{A\tau} B U.$$

Откуда, учитывая выпуклость множества  $\pi e^{A\tau} B U$ , получаем

$$\begin{aligned} \beta \pi e^{At} z^0 + \pi e^{A\tau} C v &\in \frac{\beta}{\gamma} \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} \pi e^{A\tau} B U + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \sqrt{\lambda\|v\|^2} \pi e^{A\tau} B U \\ &\subset \left(\frac{\beta}{\gamma} \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) \sqrt{\lambda\|v\|^2}\right) \pi e^{A\tau} B U. \end{aligned}$$

Функция  $f(\gamma) = \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2}$  является вогнутой, так как  $f''(\gamma) < 0$  при  $\gamma > 0$ . Поэтому для функции  $f$  выполняется неравенство [5]

$$\frac{f(\gamma) - f(0)}{\gamma} \leq \frac{f(\beta) - f(0)}{\beta} \quad \text{для } \gamma > \beta > 0,$$

откуда

$$\frac{\beta}{\gamma}f(\gamma) + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)f(0) \leq f(\beta)$$

или

$$\frac{\beta}{\gamma}\sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)\sqrt{\lambda\|v\|^2} \leq \sqrt{(1-\lambda)\beta + \lambda\|v\|^2}.$$

Поэтому, так как  $0 \in \pi e^{A\tau}BU$ , имеем

$$\beta\pi e^{At}z^0 + \pi e^{A\tau}Cv \in \sqrt{(1-\lambda)\beta + \lambda\|v\|^2} \pi e^{A\tau}BU,$$

значит,  $\beta \in \Omega(t, \tau, v)$  для любого числа  $\beta \in [0, \gamma]$ .

**Лемма 3.** При  $\pi e^{At}z^0 \neq 0$  верхняя грань в определении  $\gamma(t, \tau, v)$  (2.2) достигается. Функция  $\gamma(t, \tau, v)$  измерима по Борелю по совокупности переменных  $(t, \tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим функцию расстояния между вектором и компактом из определения  $\Omega(t, \tau, v)$  (2.1)

$$\delta(\gamma, t, \tau, v) = \min_{u \in U} \|\gamma\pi e^{At}z^0 + \pi e^{A\tau}Cv - \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} \pi e^{A\tau}Bu\|.$$

Эта функция является непрерывной на множестве  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$ . Включение  $\gamma \in \Omega(t, \tau, v)$  эквивалентно равенству  $\delta(\gamma, t, \tau, v) = 0$ . Следовательно, определение (2.2) означает, что существует последовательность чисел  $\gamma_i$  таких, что

$$\delta(\gamma_i, t, \tau, v) = 0 \quad \text{и} \quad \gamma_i \xrightarrow{i \rightarrow \infty} \gamma(t, \tau, v).$$

Отсюда, учитывая конечность  $\gamma(t, \tau, v)$  (при  $\pi e^{At}z^0 \neq 0$ ), вытекает, что  $\delta(\gamma(t, \tau, v), t, \tau, v) = 0$ , т. е. верхняя грань в определении функции (2.2) достигается.

Рассмотрим множество уровня функции  $\gamma(t, \tau, v)$

$$\Lambda_a = \left\{ (t, \tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l : \gamma(t, \tau, v) < a \right\}.$$

Покажем, что это множество является открытым, а значит, и борелевским, для любого положительного числа  $a$ . Это и будет означать, что функция  $\gamma(t, \tau, v)$  является измеримой по Борелю [23].

Зафиксируем положительное число  $a$  и возьмем произвольную точку  $(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v}) \in \Lambda_a$ . Значит,  $a \notin \Omega(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v})$ , т. е. для этой точки выполняется неравенство  $\delta(a, \bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v}) > 0$ . Непрерывность функции  $\delta(\cdot)$  гарантирует существование такой окрестности  $\Delta$  точки  $(\bar{t}, \bar{\tau}, \bar{v})$ , что для всех  $(t, \tau, v) \in \Delta$  выполняется неравенство  $\delta(a, t, \tau, v) > 0$ , т.е.  $\gamma(t, \tau, v) < a$  для всех  $(t, \tau, v) \in \Delta$ . Это и означает открытость множества  $\Lambda_a$ , что и завершает доказательство.

### 3. Основная теорема

Сформулируем теперь достаточные условия гарантированного приведения решения уравнения (1.1), (1.2) на терминальное множество  $M$  из начального положения  $z^0$ .

**Теорема.** *Полагаем, что выполнено предположение (1.3) на параметры игры (1.1), (1.2). Предположим, что существует момент  $T = T(z^0)$  такой, что либо  $\pi e^{AT} z^0 = 0$ , либо  $\pi e^{AT} z^0 \neq 0$  и для всех допустимых управлений  $v(\cdot)$  выполняется неравенство*

$$\int_0^T \gamma(T, T - \tau, v(\tau)) d\tau \geq 1. \quad (3.1)$$

Тогда дифференциальная игра может быть закончена в момент  $T$ .

**Доказательство.** Зафиксируем момент  $T$ , удовлетворяющий предположениям теоремы. Проанализируем сначала случай  $\pi e^{AT} z^0 \neq 0$ .

Согласно лемме 3, разрешающая функция  $\gamma(T, \tau, v)$  является измеримой по Борелю, и для всех  $(\tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$  выполняется включение

$$\gamma(T, \tau, v) \pi e^{AT} z^0 + \pi e^{A\tau} C v \in \sqrt{(1 - \lambda) \gamma(T, \tau, v) + \lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} B U.$$

Это включение измеримым по Борелю образом зависит от  $(\tau, v)$  и непрерывно от  $u \in U$ .

По теореме об измеримом селекторе Куратовского и Рыль — Нардзевского [24, 25] следует, что у этого включения существует измеримый по Борелю селектор, т. е. измеримое по Борелю отображение  $w(\tau, v) \in U$  такое, что

$$\gamma(T, \tau, v) \pi e^{AT} z^0 + \pi e^{A\tau} C v = \sqrt{(1 - \lambda) \gamma(T, \tau, v) + \lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} B w(\tau, v) \quad (3.2)$$

для всех  $(\tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$ . Из этой же теоремы можно сделать заключение, что существует измеримое по Борелю отображение  $\tilde{w}(\tau, v) \in U$ , для которого

$$\pi e^{A\tau} C v = \sqrt{\lambda \|v\|^2} \pi e^{A\tau} B \tilde{w}(\tau, v)$$

при всех  $(\tau, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^l$ .

Предположим, что убегающий игрок использует на интервале  $[0, T]$  произвольное измеримое по Лебегу управление  $v(\tau)$ , которое удовлетворяет интегральному ограничению

$$\int_0^T \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq 1.$$

По предположению (3.1) теоремы существует момент  $T^* = T^*(z^0, v(\cdot))$  такой, что

$$\int_0^{T^*} \gamma(T, T - \tau, v(\tau)) d\tau = 1. \quad (3.3)$$

Тогда управление игрока-преследователя на интервале  $[0, T]$

$$u(\tau) = \begin{cases} -\sqrt{(1 - \lambda) \gamma(T, T - \tau, v(\tau)) + \lambda \|v(\tau)\|^2} w(T - \tau, v(\tau)) & \text{при } \tau \in [0, T^*], \\ -\sqrt{\lambda \|v(\tau)\|^2} \tilde{w}(T - \tau, v(\tau)) & \text{при } \tau \in (T^*, T]. \end{cases} \quad (3.4)$$

Такой закон выбора управлений преследователя является (по существу) контруправлением с одним переключением.

Отметим, что суперпозиция борелевской и измеримой по Лебегу функций будет измеримой по Лебегу функцией [23]. Поэтому построенное таким образом (3.4) управление  $u(\tau)$  измеримо по Лебегу для произвольного измеримого управления  $v(\tau)$ .

Покажем, что при таком выборе управления преследователя решение (1.1) попадет на терминальное множество в момент  $T$ :

$$\begin{aligned}
 \pi z(T) &= \pi e^{AT} z^0 + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} [Bu(\tau) + Cv(\tau)] d\tau \\
 &= \pi e^{AT} z^0 + \int_0^{T^*} \pi e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_{T^*}^T \pi e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} Cv(\tau) d\tau \\
 &= \pi e^{AT} z^0 - \int_0^{T^*} \sqrt{(1-\lambda)\gamma(T, T-\tau, v(\tau)) + \lambda\|v(\tau)\|^2} \pi e^{A(T-\tau)} Bw(T-\tau, v(\tau)) d\tau \\
 &\quad - \int_{T^*}^T \sqrt{\lambda\|v(\tau)\|^2} \pi e^{A(T-\tau)} B\tilde{w}(T-\tau, v(\tau)) d\tau + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} Cv(\tau) d\tau \\
 &= \pi e^{AT} z^0 - \int_0^{T^*} [\gamma(T, T-\tau, v(\tau))\pi e^{AT} z^0 + \pi e^{A(T-\tau)} Cv(\tau)] d\tau \\
 &\quad - \int_{T^*}^T \pi e^{A(T-\tau)} Cv(\tau) d\tau + \int_0^T \pi e^{A(T-\tau)} Cv(\tau) d\tau = \pi e^{AT} z^0 - \int_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau)) d\tau \cdot \pi e^{AT} z^0 = 0.
 \end{aligned}$$

Это равенство и доказывает приведение решения на терминальное множество:  $z(T) \in M$ .

Проверим, что построенное таким образом (3.4) управление  $u(\tau)$  удовлетворяет интегральному ограничению (1.2)

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \|u(\tau)\|^2 d\tau &= \int_0^{T^*} [(1-\lambda)\gamma(T, T-\tau, v(\tau)) + \lambda\|v(\tau)\|^2] \|w(T-\tau, v(\tau))\|^2 d\tau \\
 &+ \int_{T^*}^T \lambda\|v(\tau)\|^2 \|\tilde{w}(T-\tau, v(\tau))\|^2 d\tau \leq (1-\lambda) \int_0^{T^*} \gamma(T, T-\tau, v(\tau)) d\tau + \lambda \int_0^T \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq 1.
 \end{aligned}$$

Аналогично рассматривается случай  $\pi e^{AT} z^0 = 0$ . В этом случае управление преследователя на интервале  $[0, T]$

$$u(\tau) = -\sqrt{\lambda\|v(\tau)\|^2} \tilde{w}(T-\tau, v(\tau)). \tag{3.5}$$

Так же, как ранее можно показать, что и в этом случае управление (3.5) гарантирует приведение решения (1.1) на терминальное множество  $M$  в момент  $T$  (для любого допустимого управления  $v(\tau)$ ) и  $u(\tau)$  удовлетворяет интегральному ограничению (1.2).

Таким образом, теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Теорема без труда переносится на случай более общих интегральных ограничений на управления:

$$\int_0^\infty u^T(\tau)Gu(\tau) d\tau \leq \mu^2, \quad \int_0^\infty v^T(\tau)Hv(\tau) d\tau \leq \nu^2, \tag{3.6}$$

где  $G$  и  $H$  — симметричные положительно определенные матрицы размера  $m \times m$  и  $l \times l$  соответственно,  $u(\tau)$  и  $v(\tau)$  — измеримые функции,  $\mu$  и  $\nu$  — положительные числа, а знак  $T$  обозначает транспонирование.

Замена

$$\tilde{u} = \frac{1}{\mu} G^{\frac{1}{2}} u, \quad \tilde{v} = \frac{1}{\nu} H^{\frac{1}{2}} v, \quad \tilde{B} = \mu B G^{-\frac{1}{2}}, \quad \tilde{C} = \nu C H^{-\frac{1}{2}}$$

переводит дифференциальную игру (1.1), (3.6) к первоначальному виду

$$\dot{z} = Az + \tilde{B}\tilde{u} + \tilde{C}\tilde{v}, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \tilde{u} \in \mathbb{R}^m, \quad \tilde{v} \in \mathbb{R}^l, \quad z(0) = z^0,$$

$$\int_0^{\infty} \|\tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau \leq 1, \quad \int_0^{\infty} \|\tilde{v}(\tau)\|^2 d\tau \leq 1.$$

В таком виде теорема полностью переносится на указанный общий случай.

#### 4. Примеры

**Пример 1** (Простое движение). Движение преследователя и убегающего описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, & x(0) &= x^0, & x &\in \mathbb{R}^n, & u &\in \mathbb{R}^n, \\ \dot{y} &= v, & y(0) &= y^0, & y &\in \mathbb{R}^n, & v &\in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ограничения имеют вид

$$\int_0^{\infty} \|u(\tau)\|^2 d\tau \leq \mu^2, \quad \int_0^{\infty} \|v(\tau)\|^2 d\tau \leq \nu^2, \quad \mu > \nu > 0. \quad (4.2)$$

Терминальное множество задается равенством  $x = y$ .

Сделав замену

$$z = x - y, \quad \tilde{u} = \frac{u}{\mu}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{\nu},$$

приведем игру к стандартному виду:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mu\tilde{u} - \nu\tilde{v}, & z^0 &= x^0 - y^0, \\ \int_0^{\infty} \|\tilde{u}(\tau)\|^2 d\tau &\leq 1, & \int_0^{\infty} \|\tilde{v}(\tau)\|^2 d\tau &\leq 1. \end{aligned}$$

Терминальное множество  $M = \{0\}$ , оператор  $\pi$  представляет собой тождественное преобразование.

Предположение (1.3) выполняется для параметра  $\lambda = \nu/\mu < 1$ :

$$-\nu D \subset \lambda \mu D, \quad D = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\|^2 \leq 1\}.$$

Разрешающая функция  $\gamma(\cdot)$  находится из многозначного отображения

$$\begin{aligned} \Omega(t, \tau, \tilde{v}) &= \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : \gamma z^0 - \nu \tilde{v} \in \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|\tilde{v}\|^2} \mu D \right\} \\ &= \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : (\gamma z^0 - \nu \tilde{v})^2 \leq [(1-\lambda)\gamma + \lambda\|\tilde{v}\|^2] \mu^2 \right\} \\ &= \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : F(\gamma, \tilde{v}) = \|z^0\|^2 \gamma^2 - 2\gamma \left[ \nu \langle z^0, \tilde{v} \rangle + \frac{\mu(\mu - \nu)}{2} \right] - \nu(\mu - \nu)\|\tilde{v}\|^2 \leq 0 \right\}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Функция  $F(\gamma, \tilde{v})$  представляет собой квадратный полином относительно  $\gamma$  с положительным коэффициентом при старшей степени, поэтому  $\gamma(\tilde{v})$  (2.2) будет являться большим корнем квадратного уравнения  $F(\gamma, \tilde{v}) = 0$ .

Отметим, что  $F(0, v) \leq 0$  для всех  $v \in \mathbb{R}^n$ , поэтому функция  $\gamma(v)$  определена для всех  $v$  и  $\gamma(v) \geq 0$ .

Найдем вектор  $v^*$ , на котором достигается минимум функции  $\gamma(v)$ . Для этого продифференцируем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial v} = -\frac{\partial F / \partial v}{\partial F / \partial \gamma} = \frac{2\gamma \nu z^0 + 2\nu(\mu - \nu)v^*}{\partial F / \partial \gamma} = 0,$$

откуда получаем единственный экстремум функции  $\gamma(\cdot)$

$$v^* = -\frac{\gamma}{\mu - \nu} z^0.$$

Соответствующее  $v^*$  значение функции  $\gamma(\cdot)$  получаем из квадратного уравнения  $F(\gamma, v^*) = 0$ :

$$\gamma(v^*) = \frac{(\mu - \nu)^2}{\|z^0\|^2},$$

а значит,

$$v^* = -\frac{\mu - \nu}{\|z^0\|^2} z^0.$$

Несложно показать, что (как больший корень квадратного уравнения) функция

$$\gamma(v) \geq \frac{\sqrt{\nu(\mu - \nu)}\|v\|}{\|z^0\|^2} \rightarrow \infty \quad \text{при } \|v\| \rightarrow \infty.$$

Поэтому единственный экстремум функции  $\gamma(v)$  является минимумом.

Согласно утверждению теоремы время завершения игры определяется соотношениями

$$\int_0^T \gamma(v(\tau)) d\tau \geq \int_0^T \gamma(v^*) d\tau = \frac{(\mu - \nu)^2}{\|z^0\|^2} T = 1,$$

откуда

$$T = \frac{\|z^0\|^2}{(\mu - \nu)^2}. \quad (4.4)$$

Следует отметить, что момент  $T$  совпадает со временем первого поглощения [1] для игры (4.1), т. е. с первым моментом, когда множество достижимости преследователя  $x$  поглотит множество достижимости убегающего  $y$ . Это время  $T$  является минимальным временем гарантированного завершения игры (4.1).

Укажем явный вид контруправления  $u(v)$  преследователя на интервале  $[0, T]$ , решающего задачу сближения. Стратегия преследователя определяется соотношениями (3.2) и (3.4):

$$\begin{aligned} \gamma z^0 - \nu \tilde{v} &= \sqrt{(1 - \lambda)\gamma + \lambda \tilde{v}^2} \mu w, & \|w\| &\leq 1, \\ \tilde{u}(\tilde{v}) &= -\sqrt{(1 - \lambda)\gamma + \lambda \tilde{v}^2} w. \end{aligned}$$

Откуда

$$\tilde{u}(\tilde{v}) = \frac{-\gamma z^0 + \nu \tilde{v}}{\mu}.$$

Учитывая замену  $u = \mu \tilde{u}$ ,  $v = \nu \tilde{v}$  и квадратное уравнение (4.3), получаем

$$u(v) = v - \gamma(v) z^0,$$

где

$$\gamma(v) = \frac{1}{\|z^0\|^2} \left\{ \langle z^0, v \rangle + \frac{\mu(\mu - \nu)}{2} + \sqrt{\left( \langle z^0, v \rangle + \frac{\mu(\mu - \nu)}{2} \right)^2 + \|z^0\|^2 \|v\|^2 \left( \frac{\mu - \nu}{\nu} \right)} \right\}.$$

Таким образом, это управление гарантирует решение задачи преследования (4.1),(4.2) не позже момента (4.4).

**Пример 2** (Контрольный пример Л.С. Понтрягина). Движение преследователя и убегающего задается уравнениями

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \alpha \dot{x} &= \rho u, & x \in \mathbb{R}^n, & \quad u \in \mathbb{R}^n, & \quad x(0) = x^0, & \quad \dot{x}(0) = \dot{x}^0, & \quad \alpha, \rho > 0, \\ \ddot{y} + \beta \dot{y} &= \sigma v, & y \in \mathbb{R}^n, & \quad v \in \mathbb{R}^n, & \quad y(0) = y^0, & \quad \dot{y}(0) = \dot{y}^0, & \quad \beta, \sigma > 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Интегральные ограничения имеют вид (1.2). Преследование считается завершённым, если  $x = y$ .

Введем новые переменные

$$z_1 = x - y, \quad z_2 = \dot{x}, \quad z_3 = \dot{y}, \quad z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^{3n}.$$

Система уравнений (4.5) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - z_3, & z_1^0 &= x^0 - y^0, \\ \dot{z}_2 &= -\alpha z_2 + \rho u, & z_2^0 &= \dot{x}^0, \\ \dot{z}_3 &= -\beta z_3 + \sigma v, & z_3^0 &= \dot{y}^0. \end{aligned}$$

Терминальное множество  $M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^{3n} : z_1 = 0\}$ . Оператор ортогонального проектирования  $\pi : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow L$  задается матрицей

$$\pi = \begin{pmatrix} E & 0_n & 0_n \end{pmatrix},$$

где  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ ,  $0_n$  — нулевая. Матрицы (1.1) примут вид

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & E & -E \\ 0_n & -\alpha E & 0_n \\ 0_n & 0_n & -\beta E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0_n \\ \rho E \\ 0_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0_n \\ \sigma E \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная матрица системы

$$e^{At} = \begin{pmatrix} E & \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} E & -\frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} E \\ 0_n & e^{-\alpha t} E & 0_n \\ 0_n & 0_n & e^{-\beta t} E \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a(t) &= \pi e^{At} z^0 = z_1^0 + \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} z_2^0 - \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} z_3^0, \\ \pi e^{At} B &= f(t) E, \quad \pi e^{At} C = g(t) E, \end{aligned}$$

где

$$f(t) = \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \rho, \quad g(t) = \frac{1 - e^{-\beta t}}{\beta} \sigma.$$

Согласно проведенному Л. С. Понтрягиным [1] исследованию, условие на параметры игры

$$\sigma < \rho, \quad \frac{\sigma}{\beta} < \frac{\rho}{\alpha} \quad (4.6)$$

обеспечивает выполнение неравенства  $g(t) \leq \lambda f(t)$  для всех  $t \geq 0$ , где

$$\lambda = \max \left\{ \frac{\sigma}{\rho}, \frac{\sigma \alpha}{\rho \beta} \right\} < 1.$$

Значит, при наличии неравенств (4.6) для этого значения  $\lambda$  выполняется предположение (1.3):

$$\pi e^{At} CV = -g(t)D \subset \lambda f(t)D = \lambda \pi e^{At} BU, \quad D = U = V = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|^2 \leq 1\}.$$

Тогда множество (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega(t, \tau, v) &= \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : \gamma a(t) - g(\tau)v \in \sqrt{(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2} f(\tau)D \right\} \\ &= \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : \|\gamma a(t) - g(\tau)v\|^2 \leq [(1-\lambda)\gamma + \lambda\|v\|^2] f^2(\tau) \right\} \\ &= \left\{ \gamma \in \mathbb{R} : F(\gamma, t, \tau, v) \leq 0 \right\}, \end{aligned}$$

где

$$F(\gamma, t, \tau, v) = \|a(t)\|^2 \gamma^2 - 2\gamma \left[ g(\tau) \langle a(t), v \rangle + \frac{(1-\lambda)}{2} f^2(\tau) \right] - \|v\|^2 (\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau)).$$

Функция  $F$  — полином второй степени по  $\gamma$  с положительным старшим коэффициентом, поэтому разрешающая функция  $\gamma(t, \tau, v) = \max \Omega(t, \tau, v)$  является большим корнем квадратного уравнения  $F(\gamma, t, \tau, v) = 0$ .

Оценим снизу разрешающую функцию  $\gamma(t, \tau, v)$ . Для этого воспользуемся свойствами градиента неявной функции. Найдем корень

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -2\gamma g(\tau) a(t) - 2v(\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau)) = 0,$$

откуда получаем единственный экстремум функции  $\gamma(t, \tau, v)$

$$v^*(t, \tau) = -\frac{\gamma g(\tau)}{\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau)} a(t)$$

и

$$F(\gamma, t, \tau, v) = \|a(t)\|^2 \gamma^2 \frac{\lambda f^2(\tau)}{\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau)} - \gamma(1-\lambda)f^2(\tau) = 0,$$

а значит,

$$\gamma(t, \tau, v^*(t, \tau)) = \frac{(1-\lambda)(\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau))}{\lambda \|a(t)\|^2} \quad \text{и} \quad v^*(t, \tau) = -\frac{(1-\lambda)g(\tau)}{\lambda \|a(t)\|^2} a(t).$$

Можно утверждать, что для любого  $v \in \mathbb{R}^n$  выполняется неравенство

$$\gamma(t, \tau, v) \geq \gamma(t, \tau, v^*(t, \tau)).$$

Тогда, используя неравенство  $g(\tau) \leq \lambda f(\tau)$ , получаем соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^T \gamma(T, T-\tau, v(\tau)) d\tau &\geq \int_0^T \frac{1-\lambda}{\lambda \|a(T)\|^2} (\lambda f^2(T-\tau) - g^2(T-\tau)) d\tau \\ &\geq \frac{(1-\lambda)^2}{\|a(T)\|^2} \int_0^T f^2(\tau) d\tau = \frac{(1-\lambda)^2 \rho^2}{\|a(T)\|^2 \alpha^2} \left[ T - 2\frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha} + \frac{1-e^{-2\alpha T}}{2\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Так как функция  $\|a(T)\|^2$  ограничена, то этот интеграл растет неограниченно с ростом  $T$ , а значит, и будет больше 1 для достаточно большого числа  $T$ .

Таким образом, если выполнены условия (4.6), то построенное в теореме управление гарантирует решение задачи преследования (4.5) из всех начальных положений  $(x^0, y^0, \dot{x}^0, \dot{y}^0)$  за некоторое конечное время  $T = T(z^0)$ .

Укажем явный вид управления  $u(\tau)$  преследователя на интервале  $[0, T]$ , решающего задачу сближения. Предположим, что убегающий игрок использует на интервале  $[0, T]$  допустимое управление  $v(\tau)$ . Момент переключения программ контруправления  $T^* = T^*(z^0, v(\tau))$  определяется соотношением (3.3)

$$\int_0^{T^*} \gamma(T, T - \tau, v(\tau)) d\tau = 1,$$

где

$$\gamma(T, \tau, v) = \frac{1}{\|a(T)\|^2} \left\{ g(\tau) \langle a(T), v \rangle + \frac{(1-\lambda)}{2} f^2(\tau) + \sqrt{\left( g(\tau) \langle a(T), v \rangle + \frac{(1-\lambda)}{2} f^2(\tau) \right)^2 + \|a(T)\|^2 \|v\|^2 (\lambda f^2(\tau) - g^2(\tau))} \right\}.$$

А управление имеет вид

$$u(\tau) = \begin{cases} \frac{-\gamma(T, T - \tau, v(\tau))a(T) + g(T - \tau)v(\tau)}{f(T - \tau)} & \text{при } \tau \in [0, T^*], \\ \frac{-g(T - \tau)v(\tau)}{f(T - \tau)} & \text{при } \tau \in (T^*, T]. \end{cases}$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. Т. 2. М.: Наука, 1988. 576 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 456 с.
4. **Kurzbaniski A., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 с.
5. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 330 с.
6. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
7. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. **Никольский М.С.** Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Управляемые системы. Вып. 2. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1969. С. 49–58.
9. **Никольский М.С.** Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 6. С. 964–971.
10. **Никольский М.С.** Линейные дифференциальные игры преследования с интегральными ограничениями // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 2. С. 219–223.
11. **Азимов А.Я.** Об одном способе преследования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1974. № 2. С. 31–35.
12. **Азимов А.Я., Гусейнов Ф.В.** О некоторых классах дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1972. № 3. С. 9–16.
13. **Мезенцев А.В.** Дифференциальные игры с интегральными ограничениями на управления. М.: Изд-во МГУ, 1988. 135 с.
14. **Григоренко Н.Л.** О структуре одного класса дифференциальных игр с общими интегральными ограничениями // Управляемые системы. Вып. 12. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1974. С. 23–31.
15. **Ушаков В.Н.** Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 1. С. 15–23.
16. **Пшеничный Б.Н., Онопчук Ю.Н.** Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1968. № 1. С. 13–22.

17. **Рапопорт И.С.** Об одной задаче преследования несколькими управляемыми объектами при наличии интегральных ограничений // Докл. АН УССР. Сер. А. 1979. № 3. С. 221–224.
18. **Соколов Б.Н.** Об одной дифференциальной игре с запаздыванием информации при наличии интегральных ограничений // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8, № 10. С. 1797–1804.
19. **Соколов Б.Н.** Дифференциальная игра наведения с интегральными ограничениями на управления противников // Дифференц. уравнения. 1974. Т. 10, № 3. С. 436–446.
20. **Зонневенд Д.** Об одном методе преследования // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 6. С. 1296–1299.
21. **Чикрий А.А., Безмагорычный В.В.** Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Автоматика. 1993. № 4. С. 26–36.
22. **Белоусов А.А.** О линейных дифференциальных играх преследования с интегральными ограничениями // Дифференциальные уравнения и топология: тез. докл. Междунар. конференции, посвящ. 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. М.: Ин-т математики им. В.А. Стеклова РАН; МГУ им. М.В. Ломоносова. 2008. С. 321–322.
23. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
24. **Куратовский К.** Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969. 624 с.
25. **Kisielewicz M.** Differential inclusions and optimal control // Mathematics and Its Applications. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1991. Vol. 44. 260 p.

Чикрий Аркадий Алексеевич  
д-р физ.-мат. наук  
чл.-корр. НАН Украины  
зав. отделом  
Ин-т кибернетики НАН Украины  
e-mail: chik@insyg.kiev.ua

Поступила 29.04.2009

Белоусов Александр Андреевич  
канд. физ.-мат. наук  
ст. науч. сотрудник  
Ин-т кибернетики НАН Украины  
e-mail: dept165@insyg.kiev.ua

**ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН**

**Том 15**

**№ 4**

**2009**

Учредитель  
Учреждение Российской академии наук  
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;  
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения  
в связи с переименованием учредителя.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Понизовкина  
Технический редактор Н. Н. Моргунова  
Отв. за выпуск О. Г. Матвийчук

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

---

Подписано в печать 25.11.09. Формат  $60 \times 84^{1/8}$ . Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 38,0. Уч.-изд. л. 32,5. Тираж 200 экз.

---

Адрес редакции: 620219, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16  
Институт математики и механики УрО РАН  
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”  
тел. (343) 375-34-58  
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии  
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д. 17, офис 226