РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 15, № 2 2009

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 15 № 2 2009

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 15, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. 228 с.

ISSN 0134–4889

Главный редактор чл.-корр. РАН В. И. Бердышев

Зам. гл. редактора В. В. Кабанов

Редакционная коллегия

Н. В. Величко, Л. П. Власов, М. И. Гусев, А. Р. Данилин,
А. Ф. Клейменов, А. С. Кондратьев, А. И. Короткий, В. И. Максимов,
О. Н. Ульянов (*отв. секретарь*)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН В. В. Васин, акад. РАН И. И. Еремин,
акад. РАН А. М. Ильин, акад. РАН Н. Н. Красовский,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин, чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков,
чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов

Отв. редактор выпуска А. С. Кондратьев

© Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики
Уральского отделения РАН, 2009

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 517.977

О ГРУППАХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГРУПП

Р. Ж. Алеев, В. В. Соколов

Основная цель данной работы — полное описание групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп в случае, когда группа центральных единиц имеет ранг 1. Результаты получены в два этапа. Сначала доказывается локальность порождающего группы центральных единиц, а затем находится его точное значение.

Ключевые слова: групповое кольцо, знакопеременная группа, центральная единица, локальная единица, минимальный центральный идемпотент, неприводимый характер, показатель группы.

R. Zh. Aleev, V. V. Sokolov. On groups of central units of integral group rings of alternating groups.

The basic aim of this paper is to completely describe groups of central units of integral group rings of alternating groups in the case when the group of central units has rank 1. The results are obtained in two stages. First, it is proved that the generator of the group of central units is local. Then, its exact value is found.

Keywords: group ring, alternating group, central unit, local unit, minimal central idempotent, irreducible character, exponent of group.

1. Введение

Группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп A_n для $n < 7$ были описаны в работе [1]. Дальнейшее продвижение было затруднительно без использования компьютера. Отметим также, что в работе [2] Ферраз доказал, что ранг r_n группы $\mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}A_n))$ центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы A_n равен 0 тогда и только тогда, когда $n \in \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 12\}$. В работе [3] доказано, что ранг r_n равен 1 тогда и только тогда, когда $n \in \{5, 6, 10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$. В данной работе мы полностью описываем группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп в случаях, когда $n \in \{10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$. Таким образом, в совокупности с [1] и [3] получено полное описание групп центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп, имеющих ранг 1.

2. Основные теоремы

Положим $d_{10} = d_{11} = d_{21} = 21$, $d_{13} = 13$, $d_{16} = d_{25} = 105$, $d_{17} = 17$.

Теорема 1. *Пусть u — произвольная центральная единица из $\mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}A_n))$, где $n \in \{10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$. Тогда*
$$u = \beta u(\lambda)$$
для $\beta \in \{1, -1\}$ и локальной единицы $u(\lambda)$, определяемой некоторой подходящей единицей λ из группы единиц кольца целых поля $\mathbf{Q}(\sqrt{d_n})$.

Положим $s_{10} = 384$, $s_{11} = 594$, $s_{13} = 462$, $s_{16} = 12012$, $s_{17} = 6435$, $s_{21} = 92378$, $s_{25} = 350574510$.

Теорема 2. *Для* $n \in \{10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$

$$U(Z(\mathbf{Z}A_n)) = \langle -1 \rangle \times \langle u_n(\lambda_n) \rangle,$$

где $u_n(\lambda_n)$ *— локальная единица, определяемая характером степени* s_n *группы* A_n *для единицы* λ_n *кольца целых квадратичного поля* $\mathbf{Q}(\sqrt{d_n})$*. Тогда*

$$\lambda_{10} = \left(2 + \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^{3780}, \quad \lambda_{11} = \left(2 + \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^{1680}, \quad \lambda_{13} = \left(1 + \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^{224640},$$

$$\lambda_{16} = \left(37 + 8\Big(\frac{1+\sqrt{105}}{2}\Big)\right)^{8064000}, \quad \lambda_{17} = \left(3 + 2\Big(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\Big)\right)^{13160448},$$

$$\lambda_{21} = \left(2 + \frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^{13826598912000}, \quad \lambda_{25} = \left(248669 + 53784\Big(\frac{1+\sqrt{105}}{2}\Big)\right)^{68279500800000}.$$

3. Доказательство теоремы 1

Ввиду громоздкости рассуждений приведем доказательство только при $n = 10$. В остальных случаях доказательства проводятся по той же схеме, хотя и с некоторыми нюансами. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ — представители всех классов сопряженности группы A_n, $\chi_1, \chi_2, \dots \chi_m$ — все неприводимые характеры этой группы. Далее, пусть $y_1, y_2, \dots, y_m$ — классовые суммы для классов с представителями $x_1, x_2, \dots, x_m$ соответственно, а $e_1, e_2, \dots, e_m$ — минимальные центральные идемпотенты, соответствующие характерам $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_m$.

С помощью GAP [4] получаем следующую таблицу, где $b = (1-\sqrt{21})/2$ и $*b = (1+\sqrt{21})/2$.

Таблица характеров группы A_{10}

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	x_{17}	x_{18}	x_{19}	x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	9	5	1	6	3	.	−1	3	1	4	−1	2	−1	1	2	−1	.	.	.	.	−1	1	−1	−1
χ_3	35	11	3	14	2	−1	3	3	−1	5	.	2	2	.	.	1	−1	−1	1	.	.	−1	.	.
χ_4	36	8	−4	15	3	.	−2	2	.	6	1	−1	−1	−1	1	.	.	.	−2	−1	1	.	1	1
χ_5	42	6	2	.	3	−3	−4	.	2	−3	2	.	3	−1	.	.	.	.	1	.	−1	.	.	.
χ_6	75	15	3	15	.	3	−3	1	−1	.	.	3	.	.	−2	−1	.	.	.	1	.	.	1	1
χ_7	84	.	−4	21	3	3	2	−2	.	4	−1	−3	3	−1	.	.	.	.	.	1	−1	1	.	.
χ_8	90	14	2	6	3	.	4	.	2	−5	.	2	−1	−1	−1	.	.	.	−1	.	1	1	−1	−1
χ_9	126	−14	6	21	6	.	.	−4	−2	1	1	1	−2	.	.	.	.	.	1	−1	.	1	.	.
χ_{10}	160	16	.	34	−2	−2	.	.	.	5	.	−2	−2	.	−1	.	1	1	1	.	.	−1	−1	−1
χ_{11}	210	6	−6	−21	.	3	.	−4	2	5	.	3	.	.	.	.	.	.	1	−1	.	−1	.	.
χ_{12}	224	−16	.	14	2	−1	.	.	.	−1	−1	2	2	.	.	.	2	−1	−1	.	.	−1	.	.
χ_{13}	224	−16	.	14	2	−1	.	.	.	−1	−1	2	2	.	.	.	−1	2	−1	.	.	−1	.	.
χ_{14}	225	5	9	15	−6	.	3	−1	1	.	.	−1	2	.	1	−1	.	.	.	−1	.	.	1	1
χ_{15}	252	8	4	−21	3	.	2	−2	.	2	2	−1	−1	1	.	.	.	.	−2	1	−1	−1	.	.
χ_{16}	288	16	.	−6	6	.	.	.	.	−7	−2	−2	−2	.	1	.	.	.	1	.	.	−1	1	1
χ_{17}	300	.	4	−15	3	3	−2	2	.	.	.	−3	3	1	−1	.	.	.	.	−1	1	.	−1	−1
χ_{18}	315	19	−5	21	−3	.	−1	−1	−1	−5	.	1	1	1	.	1	.	.	−1	−1	−1	1	.	.
χ_{19}	350	−10	−2	35	−1	−1	−2	−2	2	.	.	−1	−1	1	.	.	−1	−1	.	1	1	.	.	.
χ_{20}	384	.	.	−24	.	−3	.	.	.	4	−1	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	1	b	$*b$
χ_{21}	384	.	.	−24	.	−3	.	.	.	4	−1	.	.	.	−1	.	.	.	.	.	.	1	$*b$	b
χ_{22}	450	10	2	−15	−3	.	−2	−2	−2	.	.	1	1	−1	2	.	.	.	.	1	1	.	−1	−1
χ_{23}	525	−15	5	.	−3	3	−1	3	1	.	.	.	−3	−1	.	1	.	.	.	.	−1	.	.	.
χ_{24}	567	−9	−9	.	.	.	3	3	−1	−3	2	.	.	.	.	−1	.	.	1	.	.	.	.	.

Из таблицы легко получить матрицу M_{10} — матрицу перехода от базиса из минимальных центральных идемпотентов к базису из классовых сумм. Приведем лишь первые 4 строки этой матрицы:

$[1, 630, 4725, 240, 8400, 22400, 18900, 18900, 56700, 6048, 72576, 25200, 25200, 151200, 86400, 226800, 201600, 201600, 90720, 151200, 151200, 120960, 86400, 86400]$

$[1, 350, 525, 160, 2800, 0, -2100, 6300, 6300, 2688, -8064, 5600, -2800, 16800, 19200, -25200,\ 0,\ 0,\ 0, 0, -16800, 13440, -9600, -9600]$

$[1,\ 198, 405, 96, 480, -640, 1620, 1620, -1620, 864, 0, 1440, 1440, 0, 0, 6480, -5760, -5760,\ 2592,\ 0,\ 0, -\ 3456, 0, 0]$

$[1, 140, -525, 100, 700, 0, -1050, 1050, 0, 1008, 2016, -700, -700, -4200, 2400,\ 0,\ 0,\ 0, -5040, -4200, 4200, 0, 2400, 2400]$.

Из матрицы M_{10} удалим нецелочисленные строки и возьмем строки по модулю 3. Аналогично приведем только 4 первые строки:

$[1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$[1, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$[1, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$[1, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Мы получили всего два вида строк, соответствующих первой и второй строкам. Поэтому нужно рассмотреть только первую и вторую строки. Возьмем эти строки по модулю 4. В итоге имеем строки матрицы перехода от базиса из минимальных центральных идемпотентов к базису из классовых сумм, взятые по модулю 4:

$[1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

$[1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$.

Из этих рассуждений и подобных рассуждений для других n получаем следующий результат.

Лемма 1. *Каждая целочисленная строка матрицы M_n при $n \in \{10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$ сравнима с первой строкой по модулю 3 или по модулю 4.*

Согласно [1] обозначим через $u(\lambda)$ локальную единицу, определяемую характером χ_l и числом $\lambda \in \mathbf{Q}(\sqrt{d_n})$, так как в случае групп A_n для рассматриваемых n очевидно, что $\mathbf{Q}(\sqrt{d_n})$ — поле характера χ_l, где d_n — свободное от квадратов натуральное число. Более точно имеем

$$u(\lambda) = \textstyle\sum_{i=1,\ i \notin \{l, l+1\}}^{m} e_i + \lambda e_l + \lambda^* e_{l+1}, \quad \text{где } \lambda^* \text{— образ } \lambda \text{ при сопряжении } \sqrt{d_n} \mapsto -\sqrt{d_n}.$$

Пусть u — произвольная центральная единица из $\mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}A_{10}))$. Рассмотрим разложение этого элемента по базисам $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$:

$$u = \sum_{i=1}^{24} \beta_i e_i = \sum_{i=1}^{24} \gamma_i y_i.$$

Тогда $\gamma_1, \ldots, \gamma_{24}$ — целые числа и по [2] для каждого $i \in \{1, \ldots, 24\}$

$$\beta_i = \frac{1}{\deg \chi_i} \sum_{j=1}^{24} |x_j^G| \chi_i(x_j) \gamma_j.$$

Хорошо известно, что для любых $i, j \in \{1, \ldots, 24\}$ дроби $\dfrac{|x_j^G| \chi_i(x_j)}{\deg \chi_i}$ — целые алгебраические числа, а так как характеры χ_i при $i \notin \{20, 21\}$ целочисленны, то для таких i числа β_i —

обратимые целые, т. е. равны ± 1, а из леммы 1 следует, что они сравнимы между собой либо по модулю 3, либо по модулю 4. Поэтому

$$\beta_i = \beta_1 \text{ для всех } i \in \{1, \dots, 19, 22, 23, 24\}.$$

Отсюда получаем

$$u = \beta_1 \left(e_1 + \dots + e_{19} + e_{22} + e_{23} + e_{24} + \lambda e_{20} + \mu e_{21}\right)$$

для некоторых единиц λ и μ из кольца целых полей характеров $\mathbf{Q}(\chi_{20})$ и $\mathbf{Q}(\chi_{21})$ соответственно. Так как

$$\mathbf{Q}(\chi_{20}) = \mathbf{Q}(\chi_{21}) = \mathbf{Q}(\sqrt{21})$$

и значения характеров χ_{20} и χ_{21} алгебраически сопряжены относительно автоморфизма со свойством $\sqrt{21} \mapsto -\sqrt{21}$, то $\mu = \lambda^*$ и, значит, $u = \beta_1 u(\chi_l)$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Согласно теореме 1 мы имеем чисто локальный случай. Поэтому надо изучать локальные единицы $u(\lambda)$ только для характеров $\chi = \chi_l$, перечисленных ниже.
Положим $z = z(\chi) = |A_n| / \deg \chi$. Тогда

для группы A_{10} $\chi = \chi_{20}$ (степени 384) и $z = 4725$,
для группы A_{11} $\chi = \chi_{18}$ (степени 594) и $z = 33600$,
для группы A_{13} $\chi = \chi_{10}$ (степени 462) и $z = 6739200$,
для группы A_{16} $\chi = \chi_{22}$ (степени 12012) и $z = 870912000$,
для группы A_{17} $\chi = \chi_{17}$ (степени 6435) и $z = 27636940800$,
для группы A_{21} $\chi = \chi_{34}$ (степени 92378) и $z = 276531978240000$,
для группы A_{25} $\chi = \chi_{28}$ (степени 350574510) и $z = 22122558259200000$.

Лемма 2 [5]. *Для групп A_{10}, A_{11}, A_{21} поле $\mathbf{Q}(\chi)$ равно $\mathbf{Q}(\sqrt{21})$, кольцо целых поля $\mathbf{Q}(\sqrt{21})$ равно $\mathbf{Z}[\omega]$, где $\omega = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$, и*

$$\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]) = \langle -1 \rangle \times \langle 2 + \omega \rangle, \quad \lambda = \varepsilon (2+\omega)^k, \quad \text{где } \varepsilon \in \{1, -1\} \text{ и } k \in \mathbf{Z}.$$

Для группы A_{13} поле $\mathbf{Q}(\chi)$ равно $\mathbf{Q}(\sqrt{13})$, кольцо целых поля $\mathbf{Q}(\sqrt{13})$ равно $\mathbf{Z}[\omega]$, где $\omega = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, и

$$\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]) = \langle -1 \rangle \times \langle 1 + \omega \rangle, \quad \lambda = \varepsilon (1+\omega)^k, \quad \text{где } \varepsilon \in \{1, -1\} \text{ и } k \in \mathbf{Z}.$$

Для групп A_{16} и A_{25} поле $\mathbf{Q}(\chi)$ равно $\mathbf{Q}(\sqrt{105})$, кольцо целых поля $\mathbf{Q}(\sqrt{105})$ равно $\mathbf{Z}[\omega]$, где $\omega = \dfrac{1+\sqrt{105}}{2}$, и

$$\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]) = \langle -1 \rangle \times \langle 37 + 8\omega \rangle, \quad \lambda = \varepsilon (37+8\omega)^k, \quad \text{где } \varepsilon \in \{1, -1\} \text{ и } k \in \mathbf{Z}.$$

Для группы A_{17} поле $\mathbf{Q}(\chi)$ равно $\mathbf{Q}(\sqrt{17})$, кольцо целых поля $\mathbf{Q}(\sqrt{17})$ равно $\mathbf{Z}[\omega]$, где $\omega = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$, и

$$\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]) = \langle -1 \rangle \times \langle 3 + 2\omega \rangle, \quad \lambda = \varepsilon (3+2\omega)^k, \quad \text{где } \varepsilon \in \{1, -1\} \text{ и } k \in \mathbf{Z}.$$

Лемма 3 [1, лемма 2]. *Пусть* $u(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i y_i$. *Тогда*

$$\gamma_1 = 1 + \frac{\deg \chi \operatorname{tr}(\lambda - 1)}{z}, \quad \gamma_i = \frac{\operatorname{tr}(\chi(x_i)(\lambda - 1))}{z} \quad \text{для } i \in \{2, \ldots, m\}.$$

Здесь tr *— след в поле* $\mathbf{Q}(\chi) = \mathbf{Q}(\sqrt{d_n})$.

Лемма 4. *Для всех* ω *из леммы* 2 *выполняются следующие равенства*:

$$\omega^2 = \frac{d-1}{4} + \omega, \quad \omega^* = 1 - \omega, \quad \operatorname{tr}\omega = \operatorname{tr}\omega^* = 1,$$
$$\operatorname{tr}\omega^2 = \frac{d+1}{2}, \quad \omega\omega^* = \frac{1-d}{4}, \quad b = -\omega, \quad *b = \omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле,

$$\omega^2 = \frac{1 + d + 2\sqrt{d}}{4} = \frac{d-1}{4} + \omega, \quad \omega^* = \frac{1 - \sqrt{d}}{2} = 1 - \omega, \quad \operatorname{tr}\omega = \operatorname{tr}\omega^* = 1,$$

$$\operatorname{tr}\omega^2 = \operatorname{tr}\left(\frac{d-1}{4} + \omega\right) = \frac{d+1}{2}, \quad \omega\omega^* = \frac{1-d}{4}, \quad b = \frac{1-\sqrt{d}}{2} = \omega^* = 1 - \omega, \quad *b = \frac{1+\sqrt{d}}{2} = \omega.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $\lambda = \alpha + \beta\omega$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$. *Тогда*

$$\operatorname{tr}(\lambda - 1) = 2(\alpha - 1) + \beta, \quad \operatorname{tr}(*b(\lambda - 1)) = (\alpha - 1) + \left(\frac{d+1}{2}\right)\beta,$$

$$\operatorname{tr}(b(\lambda - 1)) = (\alpha - 1) + \left(\frac{1-d}{2}\right)\beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\operatorname{tr}(\lambda - 1) = 2(\alpha - 1) + \beta,$$
$$\operatorname{tr}(*b(\lambda - 1)) = \operatorname{tr}((\alpha - 1)\omega + \beta\omega^2) = (\alpha - 1) + \left(\frac{d+1}{2}\right)\beta,$$
$$\operatorname{tr}(b(\lambda - 1)) = \operatorname{tr}(\omega^*(\alpha - 1 + \beta\omega)) = \operatorname{tr}((\alpha - 1)\omega^* + \beta\omega\omega^*)$$
$$= \operatorname{tr}\left((\alpha - 1))\omega^* + \left(\frac{1-d}{4}\right)\beta\right) = (\alpha - 1) + \left(\frac{1-d}{2}\right)\beta.$$

Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть* $\lambda_n = \alpha + \beta\omega$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbf{Q}$ *и* $n \in \{10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$. *Локальная единица* $u(\lambda_n)$ *принадлежит* $\mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}A_n))$ *тогда и только тогда, когда* z *делит* $\alpha - 1$ *и* z *делит* β. *Другими словами,* $u(\lambda_n) \in \mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}A_n))$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda_n \in 1 + z\mathbf{Z}[\omega]$ *для соответствующих* ω *из леммы* 2 *(*z *определен в начале разд.* 4*)*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужно, чтобы числа γ_i из леммы 3 для всех i были целыми. Отсюда следует, что каждая строка следующей системы утверждений должна принадлежать $\mathbf{Z}$:

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(\lambda_n - 1)/z \in \mathbf{Z} \\ \operatorname{tr}(b(\lambda_n - 1))/z \in \mathbf{Z} \\ \operatorname{tr}(*b(\lambda_n - 1))/z \in \mathbf{Z} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z \mid 2(\alpha - 1) + \beta \\ z \mid (\alpha - 1) + ((d+1)/2)\,\beta \\ z \mid (\alpha - 1) + ((1-d)/2)\,\beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z \mid 2(\alpha - 1) + \beta \\ z \mid (\alpha - 1) + ((d+1)/2)\,\beta \\ z \mid (\alpha - 1) + ((1-d)/2)\,\beta \\ z \mid ((d+1)/2 + (1-d)/2)\,\beta \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} z \mid 2(\alpha - 1) + \beta \\ z \mid (\alpha - 1) + ((d+1)/2)\,\beta \\ z \mid (\alpha - 1) + ((1-d)/2)\,\beta \\ z \mid \beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z \mid 2(\alpha - 1) \\ z \mid \beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z \mid \alpha - 1 \\ z \mid \beta. \end{cases}$$

Лемма 7. *Пусть a и b — рациональные числа. Полагаем*

$$c = \operatorname{tr}(a+b\omega) = 2a+b \text{ и } f = a^2+ab-\left(\frac{d-1}{4}\right)b^2 = \operatorname{Norm}(a+b\omega).$$

Пусть $(a+b\omega)^n = \alpha_n + \beta_n\omega$, где $\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{Q}$ для неотрицательных целых чисел n. Тогда последовательности $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\alpha_{n+2} = c\alpha_{n+1} - f\alpha_n, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = a,$$
$$\beta_{n+2} = c\beta_{n+1} - f\beta_n, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = b.$$

Доказательство. Имеем

$$\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}\omega = (a+b\omega)^{n+1} = (\alpha_n+\beta_n\omega)(a+b\omega) = a\alpha_n + (b\alpha_n + a\beta_n)\omega + b\beta_n\omega^2$$

$$= a\alpha_n + (b\alpha_n + a\beta_n)\omega + b\beta_n\left(\frac{d-1}{4}+\omega\right) = \left(a\alpha_n + \left(\frac{d-1}{4}\right)b\beta_n\right) + (b\alpha_n + (a+b)\beta_n)\omega.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = a\alpha_n + \left(\dfrac{d-1}{4}\right)b\beta_n \\ \beta_{n+1} = b\alpha_n + (a+b)\beta_n \end{cases} \iff \begin{pmatrix}\alpha_{n+1}\\ \beta_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \dfrac{d-1}{4}b \\ b & a+b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}\alpha_{n+1}\\ \beta_{n+1}\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы M равен

$$x^2 - (2a+b)x + a^2 + ab - \left(\frac{d-1}{4}\right)b^2 = x^2 - cx + f.$$

Поэтому

$$M^2 = cM - fE_2.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix}\alpha_{n+2}\\ \beta_{n+2}\end{pmatrix} = M^2\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix} = (cM - fE_2)\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix} = cM\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

$$= c\begin{pmatrix}\alpha_{n+1}\\ \beta_{n+1}\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c\alpha_{n+1} - f\alpha_n\\ c\beta_{n+1} - f\beta_n\end{pmatrix},$$

и, следовательно, верны требуемые формулы.

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $l = \exp(\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]/z\mathbf{Z}[\omega]))$ — показатель группы единиц фактор–кольца $\mathbf{Z}[\omega]/z\mathbf{Z}[\omega]$. Тогда*

Для группы A_{10} $l = 3780$, $(2+\omega)^l \in 1 + z\mathbf{Z}[\omega]$, где $z = z(\chi_{20}) = 4725$ и $\omega = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Для группы A_{11} $l = 3360$, $(2+\omega)^l \in 1 + z\mathbf{Z}[\omega]$, где $z = z(\chi_{18}) = 33600$ и $\omega = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Для группы A_{13} $l = 224640$, $(1+\omega)^l \in 1 + z\mathbf{Z}[\omega]$, где $z = z(\chi_{10}) = 6739200$ и $\omega = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Для группы A_{16} $l = 72576000$, $(37+8\omega)^l \in 1 + z\mathbf{Z}[\omega]$, где $z = z(\chi_{22}) = 870912000$ и $\omega = \dfrac{1+\sqrt{105}}{2}$.

Для группы A_{17} $l = 65802240$, $(3+2\omega)^l \in 1 + z\mathbf{Z}[\omega]$, *где* $z = z(\chi_{17}) = 27636940800$ *и* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Для группы A_{21} $l = 27653197824000$, $(2+\omega)^l \in 1+z\mathbf{Z}[\omega]$, *где* $z = z(\chi_{22}) = 276531978240000$ *и* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Для группы A_{25} $l = 1843546521600000$, $(248669+53784\omega)^l \in 1+z\mathbf{Z}[\omega]$, *где* $z = z(\chi_{22}) = 22122558259200000$ *и* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{105}}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем подробное доказательство лишь при $n = 10$. Так как $z = 4725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$, то по [1, лемма 3] l — наименьшее общее кратное чисел

$$\exp(\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]/T^{3e_3}),\ \exp(\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]/F^{2e_5}) \text{ и } \exp(\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]/S^{e_7}),$$

где T — простой идеал из $\mathbf{Z}[\omega]$, содержащий 3, и e_3 — его индекс ветвления над $3\mathbf{Z}$, F — простой идеал из $\mathbf{Z}[\omega]$, содержащий 5, и e_5 — его индекс ветвления над $5\mathbf{Z}$, S — простой идеал из $\mathbf{Z}[\omega]$, содержащий 7, и e_7 — его индекс ветвления над $7\mathbf{Z}$.

Теперь по [6, предложение 5] имеем

$$\exp(\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]/T^{3e_3}) = 2\cdot 3^3 = 54,\ \exp(\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]/F^{2e_5}) = 4\cdot 5 = 20,\ \exp(\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\omega]/S^{e_7}) = 6\cdot 7 = 42.$$

Отсюда $l = HOK(54, 20, 42) = 3780$.

Лемма доказана.

Лемма 9. *Допустим, что* $u(\lambda_n) \in \mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}A_n))$ *для* $n \in \{10, 11, 13, 16, 17, 21, 25\}$. *Тогда*

$\lambda_{10} = (2+\omega)^{3780t}$, *где* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$;

$\lambda_{11} = (2+\omega)^{3360t}$, *где* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$;

$\lambda_{13} = (1+\omega)^{224640t}$, *где* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$;

$\lambda_{16} = (37+8\omega)^{72576000t}$, *где* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{105}}{2}$;

$\lambda_{17} = (3+2\omega)^{65802240t}$, *где* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$;

$\lambda_{21} = (2+\omega)^{27653197824000t}$, *где* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{21}}{2}$;

$\lambda_{25} = (248669+53784\omega)^{1843546521600000t}$, *где* $\omega = \dfrac{1+\sqrt{105}}{2}$,

для подходящих $t \in \mathbf{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2 для случая группы A_{10}

$$\lambda_{10} = \varepsilon(2+\omega)^k = \alpha + \beta\omega,$$

где $\varepsilon \in \{1, -1\}$, $k, \alpha, \beta \in \mathbf{Z}$.

Покажем, что достаточно рассматривать случай, когда $k \geqslant 0$. Заметим, что

$$\lambda_{10}^* = \alpha + \beta\omega^* = \varepsilon(2+\omega^*)^k = \varepsilon(2+\omega)^{-k}.$$

Тогда

$$u(\lambda_{10})u(\lambda_{10}^*) = 1.$$

Ввиду алгебраической сопряженности характеров χ_{20} и χ_{21} получаем, что одновременно $u(\lambda_{10})$ и $u(\lambda_{10}^*)$ принадлежат $\mathrm{U}(Z(\mathbf{Z}A_{10}))$. Достаточно рассмотреть случай, когда $k \geqslant 0$.

Итак, пусть $k \geqslant 0$. Для любого неотрицательного целого числа m

$$(2+\omega)^m = \alpha_m + \beta_m\omega, \quad \text{где } \alpha_m, \beta_m \in \mathbf{Q}.$$

По лемме 6

$$\alpha_k \equiv \varepsilon \pmod{4725} \quad \text{и} \quad \beta_k \equiv 0 \pmod{4725}. \tag{4.1}$$

По китайской теореме об остатках получим

$$\begin{cases} \alpha_k \equiv \varepsilon \pmod{27} \\ \beta_k \equiv 0 \pmod{27} \end{cases}, \quad \begin{cases} \alpha_k \equiv \varepsilon \pmod{25} \\ \beta_k \equiv 0 \pmod{25} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha_k \equiv \varepsilon \pmod{7} \\ \beta_k \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}. \tag{4.2}$$

Согласно лемме 7 имеем следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= 5\alpha_{n+1} - \alpha_n, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_1 = 2, \\ \beta_{n+2} &= 5\beta_{n+1} - \beta_n, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = 1, \end{aligned}$$

поскольку $\mathrm{tr}(2+\omega) = 5$ и $\mathrm{Norm}(2+\omega) = 1$. Возьмем последовательности $\{\alpha_m\}_{m=0}^{\infty}$ и $\{\beta_m\}_{m=0}^{\infty}$ по модулю 27, 25 и 7.

1. По модулю 27 имеем

$$\begin{aligned} \{\alpha_m\}_{m=0}^{\infty} = \{&1, 2, 9, 16, 17, 15, 4, 5, 21, 19, 20, 0, 7, 8, 6, 22, \\ &23, 12, 10, 11, 18, 25, 26, 24, 13, 14, 3, 1, 2, \dots\}, \\ \{\beta_m\}_{m=0}^{\infty} = \{&0, 1, 5, 24, 7, 11, 21, 13, 17, 18, 19, 23, 15, 25, 2, \\ &12, 4, 8, 9, 10, 14, 6, 16, 20, 3, 22, 26, 0, 1, \dots\}. \end{aligned}$$

Получаем, что эти последовательности периодичны с периодом 27, причем по соотношениям (4.2) нам подходят

$$\begin{cases} \alpha_{27p} \equiv 1 \pmod{27}, \\ \beta_{27p} \equiv 0 \pmod{27} \end{cases}$$

для любого целого числа $p \geqslant 0$. Отсюда по (4.1)

$$\varepsilon = 1.$$

2. По модулю 25 имеем

$$\begin{aligned} \{\alpha_m\}_{m=0}^{\infty} &= \{1, 2, 9, 18, 6, 12, 4, 8, 11, 22, 24, 23, 16, 7, 19, 13, 21, 17, 14, 3, 1, 2, \dots\}, \\ \{\beta_m\}_{m=0}^{\infty} &= \{0, 1, 5, 24, 15, 1, 15, 24, 5, 1, 0, 24, 20, 1, 10, 24, 10, 1, 20, 24, 0, 1 \dots\}. \end{aligned}$$

Получаем, что эти последовательности периодичны с периодом 20, причем, так как $\varepsilon = 1$, по соотношениям (4.2) нам подходят

$$\begin{cases} \alpha_{20r} \equiv 1 \pmod{25}, \\ \beta_{20r} \equiv 0 \pmod{25} \end{cases}$$

для любого целого числа $r \geqslant 0$.

3. По модулю 7 имеем

$$\begin{aligned} \{\alpha_m\}_{m=0}^{\infty} &= \{1, 2, 2, 1, 3, 0, 4, 6, 5, 5, 6, 4, 0, 3, 1, 2, \dots\}, \\ \{\beta_m\}_{m=0}^{\infty} &= \{0, 1, 5, 3, 3, 5, 1, 0, 6, 2, 4, 4, 2, 6, 0, 1, \dots\}. \end{aligned}$$

Получаем, что эти последовательности периодичны с периодом 14, причем, так как $\varepsilon = 1$, по соотношениям (4.2) нам подходят

$$\begin{cases} \alpha_{14s} \equiv 1 \pmod 7, \\ \beta_{14s} \equiv 0 \pmod 7) \end{cases}$$

для любого целого числа $s \geqslant 0$.

Таким образом, $k = 27p = 20r = 14s$. Наименьшее общее кратное чисел 27, 20 и 14 равно $27 \cdot 20 \cdot 7 = 3780$. Применение леммы 8 завершает доказательство леммы 9.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алеев Р.Ж.** Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Мат. труды. 2000. Т. 3, № 1. С. 3–37.
2. **Ferraz R.A.** Simple components and central units in group algebras // J. Algebra. 2004. Vol. 279, no. 1. P. 191–203.
3. **Алеев Р.Ж., Соколов В.В.** Группы центральных единиц целочисленных групповых колец знакопеременных групп // Теория групп: тез. сообщений VII Междунар. шк.-конф. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2008. С. 14–15.
4. The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4.2. 2004. URL: http://www.gap-system.org.
5. **Боревич З.И., Шафаревич И.Р.** Теория чисел. М.: Наука, 1985. 459 с.
6. **Алеев Р.Ж.** Числа Хигмана конечных групп // Мат. труды. 2000. Т. 3, № 2. С. 3–28.

Алеев Рифхат Жалялович
д-р физ-мат. наук, доцент
зав. кафедрой
Южно-Уральский гос. ун-т
e-mail: aleev@csu.ru

Поступила 15.02.2009

Соколов Виталий Владимирович
аспирант
Южно-Уральский гос. ун-т
e-mail: sokolov@vpkre.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 512.54

О НЕПРИВОДИМЫХ ХАРАКТЕРАХ ГРУППЫ S_n, ПОЛУПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ НА A_n ИЛИ НА $S_n \setminus A_n$. IV [1]

В. А. Белоногов

Продолжаются исследования, связанные с гипотезой об отсутствии пар полупропорциональных неприводимых характеров у знакопеременных групп A_n. С целью доказательства этой гипотезы индукцией по n автором была предложена новая гипотеза, которая формулируется в терминах пар χ^α и χ^β неприводимых характеров симметрической группы S_n, полупропорциональных на одном из множеств A_n и $S_n \setminus A_n$ (α и β — разбиения числа n, соответствующие этим характерам). Доказанная в статье теорема исключает из рассмотрения один из пунктов этой гипотезы, в котором 4-ядра разбиений α и β имеют тип $3^k.\Sigma_l$.

Ключевые слова: симметрические группы, знакопеременные группы, неприводимые характеры, полупропорциональность.

V. A. Belonogov. On irreducible characters of the group S_n that are semiproportional on A_n or $S_n \setminus A_n$. IV.

Investigations are continued concerning the conjecture that the alternating groups A_n have no pairs of semiproportional irreducible characters. In order to prove this conjecture by induction on n, the author proposed a new conjecture, formulated in terms of pairs χ^α and χ^β of irreducible characters of the symmetric group S_n that are semiproportional on one of the sets A_n or $S_n \setminus A_n$ (α and β are partitions of the number n corresponding to these characters). The theorem proved in this paper allows one to exclude from consideration the item of this conjecture in which the 4-kernels of the partitions α and β have type $3^k.\Sigma_l$.

Keywords: symmetric groups, alternating groups, irreducible characters, semiproportionality.

Введение

Функции φ и ψ из некоторого множества G в поле $\mathbb{C}$ называются *полупропорциональными*, если они непропорциональны и для некоторого подмножества M из G пропорциональны ограничения φ и ψ на M и их ограничения на $G \setminus M$; и они называются *полупропорциональными на* S, где $S \subseteq G$, если полупропорциональны их ограничения на S.

В статье [1] были описаны все пары полупропорциональных неприводимых характеров симметрических групп S_n и выдвинута следующая

Гипотеза 1. *Знакопеременная группа A_n при любом $n \in \mathbb{N}$ не имеет полупропорциональных неприводимых характеров.*

В статье [2] выдвинута следующая более общая гипотеза A, которая формулируется в терминах неприводимых характеров группы S_n и в отличие от гипотезы 1 максимально приспособлена для доказательства индукцией по числу n. Содержащиеся в ней обозначения объясняются после её формулировки. После доказательства гипотезы A доказанной становится и гипотеза 1.

Гипотеза A. *Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$ и χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε. Тогда с точностью до перемены мест α и β верно одно из следующих утверждений*:

(1) $\varepsilon = 1$ *и выполнено одно из условий*:

(1a) $\alpha =' 2^k.() + (3)$ *и* $\beta = 2^k.() + (0^k, 2, 1)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Белоруси.

(1б) $\alpha =' 2^k.(1) + (3)$ *и* $\beta = 2^k.(1) + (0^k, 1, 2)$, *где* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;

(2) $\varepsilon = -1$ *и выполнено одно из условий* (*везде* k *и* m *целые*):

(2а) $\alpha =' 3^k.\Delta_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 1$;

(2б) $\alpha =' 3^k.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$;

(2в) $\alpha =' 3^k.2.\Sigma_l + (4)$ *и* $\beta =' 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3)$, *где* $k \geq 0$ *и* $l \geq 0$.

Здесь $P(n)$ обозначает множество всех разбиений числа n, и χ^α — неприводимый характер группы S_n, соответствующий разбиению $\alpha \in P(n)$. Определения разбиений $2^k.()$, $2^k.(1)$, $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$ напоминаются в разд. 2. Через α' обозначается разбиение, ассоциированное с α. Запись $\alpha =' \beta$ означает, что $\alpha \in \{\beta, \beta'\}$. Встречающиеся далее обозначения и понятия, связанные с разбиениями, напоминаются в разд. 1. Для $\varepsilon \in \{1, -1\}$ положено

$$S_n^\varepsilon := \begin{cases} S_n^+ := A_n, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ S_n^- := S_n \setminus A_n, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Доказательство гипотезы А индукцией по числу n начато в [2] и продолжено в [3,4]. Ясно, что такое доказательство достаточно провести в предположении, что выполнено следующее

Условие А. Пусть n — натуральное число такое, что при любом $\widetilde{n} < n$ из того, что четвёрка $(\widetilde{n}, \widetilde{\varepsilon}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ удовлетворяет условию гипотезы А на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$, следует, что она удовлетворяет и заключению этой гипотезы на месте $(n, \varepsilon, \alpha, \beta)$.

Согласно теореме А из [5] доказательство гипотезы А можно разделить на две части, в которых выполнены соответственно условия $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$ и $h_{12}^\alpha = h_{11}^\beta$.

Итоговым результатом статей [2–4] является следующая теорема из [4].

Теорема А3. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α *полупропорционально* χ^β *на* S_n^ε *и выполнено условие А. Предположим, что* $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. *Тогда* $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}$ *и пара* $(\alpha^{11}, \beta^{11})$ *удовлетворяет одному из условий* (2б) *и* (2в) *заключения гипотезы А на месте* (α, β).

В настоящей статье доказывается (с опорой на теорему А3) следующая

Теорема А4. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$, $\varepsilon \in \{1, -1\}$, χ^α *полупропорционально* χ^β *на* S_n^ε *и выполнено условие А. Предположим, что* $h_{11}^\alpha = h_{11}^\beta$. *Тогда* $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^\alpha}$ *и пара* $(\alpha^{11}, \beta^{11})$ *удовлетворяет условию* (2в) *заключения гипотезы А на месте* (α, β).

Теорема А4 доказывается в разд. 4 и 5, где отдельно рассматриваются случаи $k = 0$ и $k \geq 1$. В разд. 2 напоминаются определения и свойства разбиений α и β, фигурирующих в заключении гипотезы А. Рабочие результаты о соотношениях между диаграммами $[\alpha]$ и $[\beta]$ в ситуации, когда χ^α и χ^β полупропорциональны на S_n^ε, собраны в разд. 3.

Используемые в статье обозначения в основном стандартны (см., например, [6] и [7]). В частности, запись $A := B$ (читается: A по определению равно B) означает, что A есть обозначение для B. Если $\alpha = (a_1, \ldots, a_k)$ и $\beta = (b_1, \ldots, b_l)$ — конечные последовательности, то $\alpha * \beta$ обозначает последовательность $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$; если $k \geq l$, то $\alpha + \beta := (a_1 + b_1, \ldots, a_l + b_l, a_{l+1}, \ldots, a_k)$.

Пусть φ и ψ — обобщённые характеры группы G и $S \subseteq G$. Если $|\varphi(s)| = |\psi(s)|$ для всех $s \in S$, то скажем, что φ и ψ *модульно равны на* S.

1. Разбиения и характеры групп S_n и A_n

Разбиение натурального числа n есть последовательность $\alpha = (a_1, \ldots, a_l)$ натуральных чисел такая, что $a_1 \geq \ldots \geq a_l$ и $n = a_1 + \ldots + a_l$. i-й член a_i $(1 \leq i \leq l)$ разбиения α обозначается через α_i. Разбиению $\alpha = (a_1, \ldots, a_l) \in P(n)$ сопоставляется его *диаграмма Юнга* (или просто *диаграмма*) $[\alpha] := \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq a_i\}$. Клетки (элементы) вида (i, i) диаграммы образуют её *главную диагональ*; её длина (мощность) обозначается через $d(\alpha)$. Говорят, что разбиения α и β *ассоциированы*, если диаграмма одного из них получается из диаграммы другого отражением относительно главной диагонали. Множество всех клеток (i,j) диаграммы $[\alpha]$ таких, что $[\alpha]$ не содержит клетки $(i+1,j+1)$, называется её *границей*.

Крюк диаграммы $[\alpha]$ (и разбиения α) с вершиной (i,j) есть множество $H^{\alpha}_{ij} := \{(i,j)\} \cup A \cup L$, где $A := \{(i,j+k) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*рука крюка*) и $L := \{(i+k,j) \in [\alpha] \mid k \geq 1\}$ (*нога крюка*). *Косой крюк* с вершиной (i,j) диаграммы $[\alpha]$ есть часть границы диаграммы $[\alpha]$, "вырезанная" крюком H^{α}_{ij}. Его обозначают через $R(H^{\alpha}_{ij})$. Положим $h^{\alpha}_{ij} := |H^{\alpha}_{ij}|$ $(= |R^{\alpha}_{ij}|)$.

Разбиением числа 0 называют пустую (длины 0) последовательность $()$. Далее под *разбиением* понимается разбиение некоторого целого неотрицательного числа.

Пусть $\alpha, \beta \in P(n)$ и H есть крюк разбиения α. Введём обозначения:

$\alpha - H$ есть разбиение с диаграммой $[\alpha] \setminus R(H)$; $\alpha^{ij} := \alpha - H^{\alpha}_{ij}$;

$\mathrm{H}^{\alpha}(m)$ — множество всех крюков длины m в $[\alpha]$; $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m) := \mathrm{H}^{\alpha}(m) \cup \mathrm{H}^{\beta}(m)$; подобно обозначается объединение большего числа таких множеств.

Предложение 1.1 ([7, теоремы 2.1.7, 2.1.8, 2.1.12] или [8, утверждения 2.3, 4.12, 6.7]).

(1) *Неприводимые характеры группы S_n принимают лишь целые значения.*

(2) $\chi^{(n)} = 1_{S_n}$ *(главный характер группы S_n), $\chi^{(1^n)} = \xi$ — знакопеременный характер группы S_n (линейный характер с ядром A_n).*

(3) $\chi^{\alpha'} = \chi^{\alpha}\xi$ *для всех $\alpha \in P(n)$ (характеры χ^{α} и $\chi^{\alpha'}$ называются ассоциированными).*

(4) χ^{α} *исчезает на $S_n \setminus A_n$ если и только если $\alpha = \alpha'$ $(\alpha \in P(n))$.*

2. Свойства разбиений α и β из заключения гипотезы A

При доказательстве теоремы A4 читатель должен ясно представлять себе вид диаграмм разбиений α и β из заключения гипотезы A, поскольку ему постоянно придётся сравнивать возникающие в доказательстве разбиения довольно общего вида с такими α и β. Здесь очень кратко мы напомним некоторые их свойства. Подробное изложение см. в [2, разд. 2].

Пусть $m \in \{2,3\}$. Согласно [2, определение 2.1] *m-накрытием* разбиения Θ длины $s \geq 0$ называется разбиение $m.\Theta := (\,\Theta_1+m+1,\ \Theta_1+1,\ \Theta_2+1,\ \ldots,\ \Theta_s+1,\ 1^m)$ $(m.() = (m+1, 1^m))$. Положим $m^0.\Theta := \Theta$ и $m^k.\Theta := m.(m^{k-1}.\Theta)$ для натуральных k. (См. левую часть рис. 2.1.)

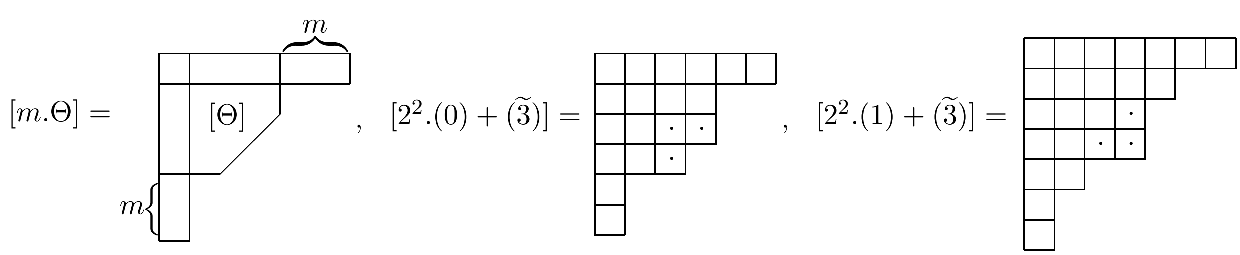

Рис. 2.1.

Легко представить себе вид диаграмм $2^k.()$, $2^k.(1)$ и соответствующих им диаграмм $[\alpha]$ и $[\beta]$ из заключения гипотезы A. При $\gamma \in \{2^k.(), 2^k.(1)\}$ положим:

$$\gamma + (\widetilde{3}) := 2^k.() + (0^k, 2, 1), \text{ если } \gamma = 2^k.(), \quad \text{и} \quad \gamma + (\widetilde{3}) := 2^k.(1) + (0^k, 1, 2), \text{ если } \gamma = 2^k.(1).$$

На рис. 2.1 изображены две диаграммы вида $[\beta] = [\gamma + (\tilde{3})]$. Точками помечены их единственные косые крюки длины 3.

Согласно [2, определение 2.2] положим

$$\Delta_l := (\,l,\ l-1, \ldots, 2, 1\,) \text{ при } l \in \mathbb{N}, \text{ и } \Sigma_l := (\,(2l)^2,\ (2l-2)^2, \ldots, 2^2\,) \text{ при } l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (\Sigma_0 = ()).$$

При γ, совпадающем с $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ или $3^k.2.\Sigma_l$, определим разбиения $\gamma + (\widetilde{4})$:

$$3^k.\Delta_l + (\widetilde{4}) := 3^k.\Delta_l + (0^k, 2, 2),\ \ 3^k.\Sigma_l + (\widetilde{4}) := 3^k.\Sigma_l + (0^k, 3, 1),\ \ 3^k.2.\Sigma_l + (\widetilde{4}) := 3^k.2.\Sigma_l + (0^k, 1, 3).$$

При $k = 0$ вид диаграмм разбиений $\beta = \gamma + (\widetilde{4})$ из условий (2а)–(2в) гипотезы А показан на рис. 2.2. Их единственные косые крюки длины 4 помечены точками. (После их удаления остаются диаграммы разбиений γ, а после их перемещения в первую строку — диаграммы разбиений $\alpha = \gamma + (4)$.)

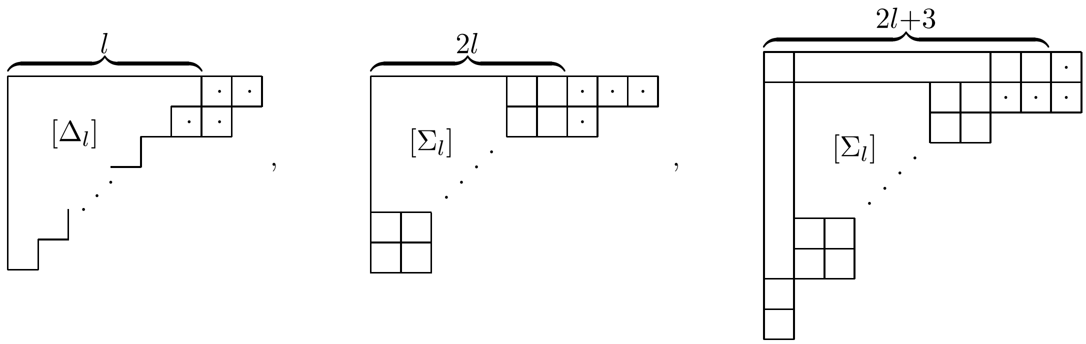

Рис. 2.2.

Легко представить себе вид диаграмм разбиений $\alpha = \gamma + (4)$ и $\beta = \gamma + (\widetilde{4})$ и при $k > 0$.

Предложение 2.1 [2, предложение 2.1]. *Равносильны условия*:
(1) γ — *самоассоциированное разбиение без крюков длины* 3;
(2) γ *есть одно из разбиений* $2^k.()$ *и* $2^k.(1)$ *при некотором* $k \geq 0$.

Предложение 2.2. *Равносильны условия*:
(1) *разбиения* α *и* β *удовлетворяют одному из условий* (1а) *и* (1б) *гипотезы* А;
(2) *диаграммы* $[\alpha]$ *и* $[\beta]$ *имеют точно по одному крюку длины* 3, *и после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма без крюков длины* 3.

Доказательство. Это следует из предложения 2.1 и легко проверяемого факта, что с точностью до ассоциированности к любому из разбиений $2^k.()$ и $2^k.(1)$ присоединить косой крюк длины 3 можно точно двумя способами. Предложение доказано.

Предложение 2.3 [2, предложение 2.4]. *Равносильны условия*:
(1) γ — *самоассоциированное разбиение без крюков длины* 4;
(2) γ *есть одно из разбиений* $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ *и* $3^k.2.\Sigma_l$ *при некоторых* k, l.

Предложение 2.4. *Равносильны условия*:
(1) *разбиения* α *и* β *удовлетворяют одному из условий* (2а)–(2в) *гипотезы* А;
(2) *диаграммы* $[\alpha]$ *и* $[\beta]$ *имеют точно по одному крюку длины* 4, *и после удаления из них этих крюков остаётся одна и та же самоассоциированная диаграмма без крюков длины* 4.

Доказательство. Это следует из предложения 2.3 и легко проверяемого факта, что с точностью до ассоциированности к любому из разбиений $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ и $3^k.2.\Sigma_l$ присоединить косой крюк длины 4 можно точно двумя способами. Предложение доказано.

3. Рабочие результаты

Предложение 3.1 [2, предложение 3.3]. *Пусть* $\alpha, \beta \in P(n)$ *и* $\varepsilon \in \{1, -1\}$. *Характеры* χ^α *и* χ^β *пропорциональны на* S_n^ε *если и только если либо* $\alpha =' \beta$, *либо* $\varepsilon = -1$, $\alpha = \alpha'$ *и* $\beta = \beta'$.

Предложение 3.2 [2, предложение 3.4]. *Пусть характеры χ^α и χ^β полупропорциональны на S_n^ε $(\alpha,\beta\in P(n),\ \varepsilon\in\{1,-1\})$ и m — длина некоторого крюка из $[\alpha]$ или $[\beta]$. Тогда*

$$\sum_{H\in \mathrm{H}^\alpha(m)}(-1)^{l_H}\chi^{\alpha-H}\quad \text{и}\quad \sum_{K\in \mathrm{H}^\beta(m)}(-1)^{l_K}\chi^{\beta-K}\ \ \text{модульно равны на}\ \ S^\delta_{n-m},\ \ \text{где}\ \ \delta:=(-1)^{m+1}\varepsilon.$$

Предложение 3.3 [13, теорема]. *Пусть характеры χ^α и χ^β полупропорциональны на S_n^ε $(\alpha,\beta\in P(n)$ и $\varepsilon\in\{1,-1\})$. Предположим, что $[\alpha]$ имеет хотя бы один крюк некоторой длины m, а $[\beta]$ не имеет крюков длины m. Тогда $\varepsilon=(-1)^m$, α имеет единственный крюк H длины m и $\alpha-H=(\alpha-H)'$.*

Предложение 3.4 [2, предложение 3.8]. *Пусть A и B — подмножества из $P(n)$, m — длина крюка некоторого разбиения из $A\cup B$ и $\varepsilon\in\{1,-1\}$. Тогда если $\sum\limits_{\alpha\in A}n_\alpha\chi^\alpha$ и $\sum\limits_{\beta\in B}n_\beta\chi^\beta$, где $n_\alpha,n_\beta\in\mathbb{Z}$, модульно равны на S_n^ε, то при $\delta=(-1)^{m+1}\varepsilon$*

$$\sum_{\alpha\in A}n_\alpha\sum_{H\in \mathrm{H}^\alpha(m)}(-1)^{l_H}\chi^{\alpha-H}\quad \text{и}\quad \sum_{\beta\in B}n_\beta\sum_{K\in \mathrm{H}^\beta(m)}(-1)^{l_K}\chi^{\beta-K}\ \text{модульно равны на}\ \ S^\delta_{n-m}.$$

Предложение 3.5 [4, предложение 3.7]. *Пусть χ^α и χ^β — неприводимые характеры группы S_n, полупропорциональные на S_n^ε $(\alpha,\beta\in P(n),\varepsilon=\pm1)$, и выполнено условие A. Предположим, что α и β имеют точно по одному крюку H^α и H^β соответственно некоторой длины m. Положим $\widetilde{\alpha}:=\alpha-H^\alpha$ и $\widetilde{\beta}:=\beta-H^\beta$. Тогда верно одно из следующих утверждений:*

(а) $\widetilde{\alpha}={}'\,\widetilde{\beta}$;

(б) $\varepsilon=(-1)^m$, $\widetilde{\alpha}=\widetilde{\alpha}'$ *и* $\widetilde{\beta}=\widetilde{\beta}'$;

(в) $\varepsilon=(-1)^{m+1}$ *и с точностью до перемены мест* $\widetilde{\alpha}$ *и* $\widetilde{\beta}$ *имеем* $\widetilde{\alpha}=\Gamma+(3)$ *и* $\widetilde{\beta}=\Gamma+(\tilde{3})$, *где* Γ *есть* $2^k.()$ *или* $2^k.(1)$ *при* $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$;

(г) $\varepsilon=(-1)^m$ *и с точностью до перемены мест* $\widetilde{\alpha}$ *и* $\widetilde{\beta}$ *имеем* $\widetilde{\alpha}=\Theta+(4)$ *и* $\widetilde{\beta}=\Theta+(\tilde{4})$, *где* Θ *есть* $3^k.\Delta_l$, $3^k.\Sigma_l$ *или* $3^k.2.\Sigma_l$ *при некоторых* k,l.

4. Доказательство теоремы A4. Случай $k=0$

По условию теоремы A4 χ^α полупропорционально χ^β на S_n^ε, где $\varepsilon=\pm1$, выполнено условие A и $h^\alpha_{11}=h^\beta_{11}$. Согласно теореме A3

$$\varepsilon=(-1)^{h^\alpha_{11}}\tag{4.1}$$

и пара (α^{11},β^{11}) удовлетворяет одному из условий (2б) и (2в) заключения гипотезы A на месте (α,β).

В противоречие с утверждением теоремы A4 предположим, что выполнено утверждение (2б) гипотезы A, и мы можем считать, что

$$\alpha^{11}=\gamma+(4)\ \text{и}\ \beta^{11}=\gamma+(\widetilde{4}),\ \text{где}\ \gamma=3^k.\Sigma_l\ \text{при некоторых}\ k,l.$$

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда

$$k=0,\ \ \text{т. е.}\ \ \gamma=\Sigma_l,\ \text{где}\ l\geq 0.$$

Диаграммы α и β имеют в этом случае вид, изображённый на рис. 4.1, где $\{a,b,c,d\}\subseteq\mathbb{N}\cup\{0\}$ (на рис. $l=3$).

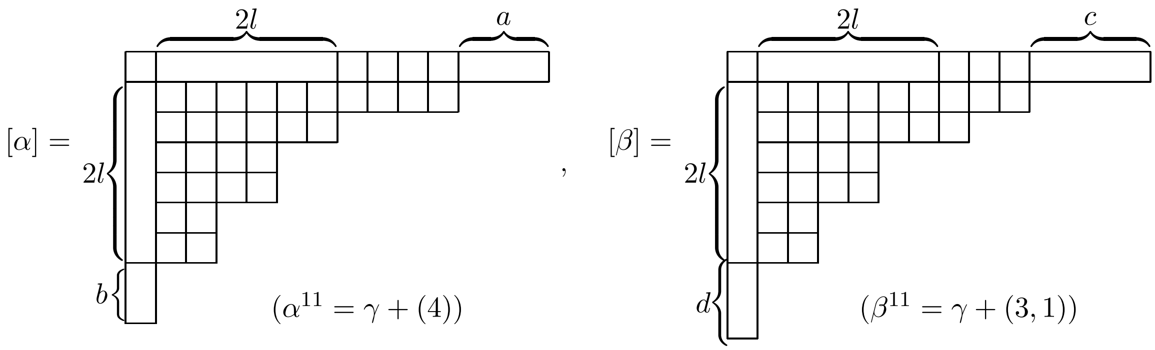

Рис. 4.1.

Так как $h_{11}^{\alpha} = h_{11}^{\beta}$, то $5 + 2l + a + b = 4 + 2l + c + d$, откуда

$$1 + a + b = c + d \tag{4.2}$$

и по (4.1)

$$\varepsilon = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{c+d}. \tag{4.3}$$

Из [2, предложения 4.2, 4.3] следует, что $d(\alpha) \geq 3$, и поэтому

$$l \geq 1. \tag{4.4}$$

Подсчитаем (учитывая (4.4)) длины некоторых крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$. Поскольку крайний случай $l = 1$ является исключительным как в этом подсчёте, так и в дальнейших рассуждениях, нам будет полезен следующий рисунок.

При $l = 1$

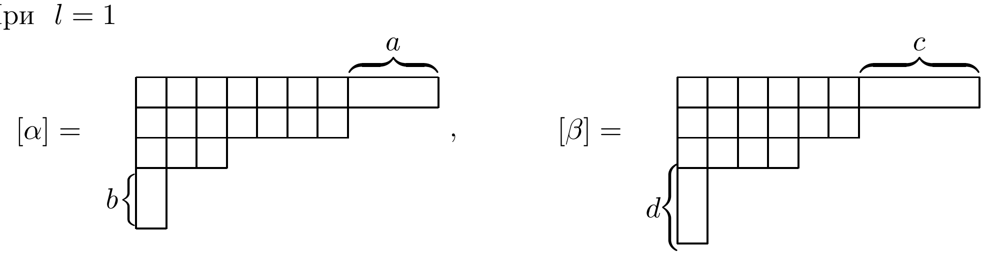

Рис. 4.2.

$$h_{12}^{\alpha} = 4l + a + 4, \qquad h_{12}^{\beta} = 4l + c + 3,$$

$$h_{13}^{\alpha} = 4l + a + 3, \qquad h_{13}^{\beta} = 4l + c + 2,$$

$$h_{14}^{\alpha} = \begin{cases} 4l + a & \text{при} \quad l \geq 2, \\ 4l + a + 1 & \text{при} \quad l = 1, \end{cases} \qquad h_{14}^{\beta} = \begin{cases} 4l + c - 1 & \text{при} \quad l \geq 2, \\ 4l + c + 1 & \text{при} \quad l = 1, \end{cases}$$

$$h_{21}^{\alpha} = 4l + b + 4, \qquad h_{21}^{\beta} = 4l + d + 3,$$

$$h_{31}^{\alpha} = 4l + b - 1, \qquad h_{31}^{\beta} = 4l + d,$$

$$h_{22}^{\alpha} = 4l + 3, \quad h_{23}^{\alpha} = 4l + 2, \qquad h_{22}^{\beta} = 4l + 2, \quad h_{23}^{\beta} = 4l + 1.$$

Эту таблицу нужно иметь в виду всякий раз, когда далее будут устанавливаться некоторые соотношения между длинами крюков.

Далее нам потребуются следующие диаграммы вида $[\alpha^{ij}]$ и $[\beta^{ij}]$ (см. рис. 4.3–4.5).

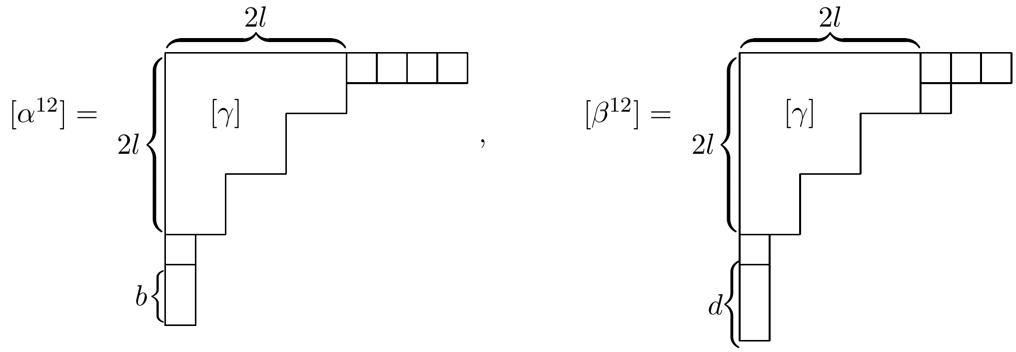

Рис. 4.3.

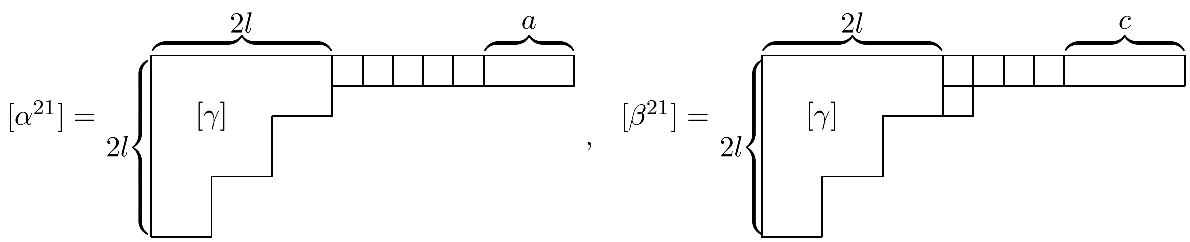

Рис. 4.4.

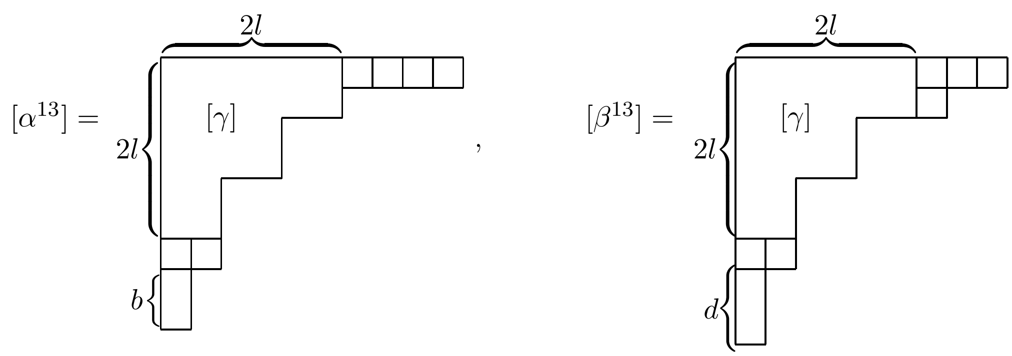

Рис. 4.5.

Как видно из рис. 4.3–4.5, разбиения α^{21}, α^{13}, β^{12}, β^{21} не самоассоциированы. Поэтому согласно предложению 3.3

$$[\alpha] \text{ имеет крюки длины } \ 4l+c+3\ (=h_{12}^{\beta}) \ \text{ и } \ 4l+d+3\ (=h_{21}^{\beta}), \tag{4.5}$$

$$[\beta] \text{ имеет крюки длины } \ 4l+b+4\ (=h_{21}^{\alpha}) \ \text{ и } \ 2l+a+3\ (=h_{13}^{\alpha}). \tag{4.6}$$

Покажем сначала, что случай $b > a$ невозможен. Действительно, в этом случае $\mathrm{H}^{\alpha}(2l+b+4) = \{H_{21}^{\alpha}\}$, а из (4.5) и (4.6) следует, что $b+1 = \max\{c,d\}$. При этом должно быть $c \neq d$, так как при $b+1 = c = d$ из (4.2) следует, что $b+1 = c = d = a$, в противоречие с тем, что $b > a$. Следовательно,

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2l+b+4) = \{H_{21}^{\alpha}, H_{ij}^{\beta}\}, \text{ где } (i,j) = \begin{cases} (1,2) & \text{при} \quad c > d, \\ (2,1) & \text{при} \quad d > c. \end{cases}$$

Тогда по предложению 3.5 для $\{\alpha^{21}, \beta^{ij}\}$ должно быть выполнено одно из условий (а)–(г) этого предложения на месте $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$. Однако, как видно из рис. 4.3, 4.4, это противоречиво: $\alpha^{21} \neq' \beta^{ij}$, разбиения α^{21}, β^{12} и β^{21} не самоассоциированы и ни одно из них не представляется в виде $\Gamma + (r)$, где $r \in \{3,4\}$ и $\Gamma = \Gamma'$. Поэтому

$$a \geq b. \tag{4.7}$$

Максимальная из длин крюков разбиений $[\alpha]$ и $[\beta]$ есть h_{11}^{α} $(= h_{11}^{\beta})$. Если вторая по величине из этих длин есть m, то, очевидно, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m) \subseteq \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}, H_{21}^{\beta}\}$. Далее разберём различные варианты для $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(m)$.

Пусть M — *подпоследовательность максимальных по величине элементов последовательности* $(a+1, b+1, c, d)$. Ввиду (4.2) $M \neq (a+1, b+1, c, d)$. По (4.7) M не может начинаться с $b+1$. Ввиду (4.2) и (4.7) $M \neq (a+1, c, d)$. Кроме того, ввиду предложения 3.3 M отлична от $(a+1, b+1)$, (c), (d) и (c, d) (в последних трёх случаях это следует также из (4.5)). Поэтому

$$M \in \{(a+1), (a+1, c), (a+1, d), (a+1, b+1, c), (a+1, b+1, d)\}. \tag{4.8}$$

Эти возможности для M рассматриваются в следующих пяти случаях.

Случай 4.1. Пусть $M = (a+1)$. Тогда $a > b$, $a \geq \max\{c, d\}$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}\}$, откуда по предложению 3.3 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$, т. е.

$$b = 3. \tag{4.9}$$

Так как $a \geq \max\{c, d\}$ и $[\beta]$ имеет крюк длины $4l + a + 3$ по (4.6), то

$$\max\{c, d\} = a. \tag{4.10}$$

Предположим, что $c = d$. Тогда по (4.10) $c = d = a$ и по (4.2) и (4.9) $4 + a = 2c$, откуда

$$a = c = d = 4.$$

В этом случае (см. список длин крюков) $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4l + 6) = \{H_{13}^{\beta}\}$ и по предложению 3.3 разбиение β^{13} должно быть самоассоциированным. Однако, как видно из рис 4.5, $[\beta^{13}]$ таковым не является, так как $d = 4$. Следовательно, $c \neq d$.

Пусть $c > d$. По (4.10) $c = a$ и по (4.2) $d = 4$. Тогда $a = c \geq 5$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4l + a + 3) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$. Следовательно, по предложению 3.5 для $\{\alpha^{13}, \beta^{12}\}$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$. Но, как как легко увидеть из рис. 4.4, 4.5 (а также из предложений 2.2 и 2.4), каждое из них противоречиво.

Пусть $d > c$. Подобно предыдущему случаю получаем $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2l + a + 2) = \{H_{13}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$, что так же противоречиво.

Случай 4.1 противоречив.

Случай 4.2. Пусть $M = (a+1, c)$. Тогда по (4.2) $d = b$ и, следовательно, $c - 1 = a > b = d$. Из списка длин крюков видно, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}$, и, следовательно, для $\widetilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\widetilde{\beta} = \beta^{12}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.5. Рассмотрим диаграммы этих разбиений (рис. 4.3). Очевидно, условия (а) и (б) неверны.

Условие (в) также не может быть выполнено, что следует, например, из предложения 2.2.

Если верно (г), то должно быть $\alpha^{12} = \Theta + (4)$, где $\Theta = \Theta'$, но это не так.

Случай 4.2 противоречив.

Случай 4.3. Пусть $M = (a+1, d)$. Тогда по (4.2) $c = b$ и, следовательно, $d - 1 = a > b = c$. Из списка длин крюков видно, что $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4l + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\beta}\}$, и, следовательно, для $\widetilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\widetilde{\beta} = \beta^{12}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.5. Однако из рис. 4.3, 4.4 видна их противоречивость (в частности, противоречивость условий (в), (г) следует из того, что $\min\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_1'\} \neq \min\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_1'\}$).

Случай 4.3 противоречив.

Случай 4.4. Пусть $M = (a+1, b+1, c)$. Тогда

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2l + a + 4) = \{H_{12}^{\alpha}, H_{21}^{\alpha}, H_{12}^{\beta}\}, \tag{4.11}$$

причём $a = b = c - 1$, по (4.2) $d = a$ и по (4.3)

$$\varepsilon = -1. \tag{4.12}$$

Согласно предложению 3.4 из (4.11) следует, что

$$\chi^{\alpha^{12}} \pm \chi^{\alpha^{21}} \text{ модульно равно } \chi^{\beta^{12}} \text{ на } S_q^{\delta}, \tag{4.13}$$

где $\delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = (-1)^a$ (по (4.12)) и $q = n - (2l + a + 4)$.

Прежде чем дальше анализировать соотношение (4.13), покажем, что должно быть $a > 3$. При этом мы будем использовать таблицу длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$.

Если $a = 3$, то $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и по предложению 1.1(4) $\chi^{\alpha^{12}}$ исчезает на S_q^-, а тогда утверждение (4.13) имеет вид

$$\chi^{\alpha^{21}} \text{ модульно равно } \chi^{\beta^{12}} \text{ на } S_q^-$$

($\delta = (-1)^a = -1$) и применение предложения 3.1 и условия А приводит к противоречию (см. рис. 4.3 и 4.4).

Если $a = 2$, то

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4l+3) = \begin{cases} \{H_{22}^{\alpha}\} & \text{при } \ l > 1, \\ \{H_{22}^{\alpha}, H_{14}^{\alpha}\} & \text{при } \ l = 1. \end{cases}$$

В обоих случаях к противоречию приводит предложение 3.3, так как $\alpha^{22} \neq (\alpha^{22})'$ (см. рис. 4.1 и 4.2).

Если $a = 1$, то

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4l+3) = \begin{cases} \{H_{22}^{\alpha}\} & \text{при } \ l > 1, \\ \{H_{22}^{\alpha}, H_{14}^{\beta}\} & \text{при } \ l = 1. \end{cases}$$

Оба случая противоречивы, что следует из предложений 3.3 и 3.5 соответственно.

Если $a = 0$, то

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4l+2) = \{H_{23}^{\alpha}, H_{22}^{\beta}\} \text{ при } \ l > 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4l+1) = \{H_{14}^{\alpha}, H_{23}^{\beta}\} \text{ при } \ l = 1.$$

Оба утверждения противоречивы, что легко следует из предложения 3.5 (следует учесть, что диаграмма $[\alpha^{14}]$ получается из диаграммы $[\alpha^{13}]$ удлинением третьего столбца на три клетки при $l > 1$ и на две клетки при $l = 1$).

Таким образом,

$$a \geq 4.$$

Мы хотим применить к (4.13) предложение 3.4. Для этого нам необходимо знать (некоторые) длины крюков в диаграммах $[\alpha^{12}]$, $[\alpha^{21}]$ и $[\beta^{12}]$. Мы запишем их в трёх столбцах, соответствующих этим диаграммам, опуская в обозначениях верхний индекс.

Предположим сначала, что $l > 1$. Имеем:

в $[\alpha^{12}]$:	в $[\alpha^{21}]$:	в $[\beta^{12}]$:
$h_{11} = 4l + a + 4,$	$h_{11} = 4l + a + 4,$	$h_{11} = 4l + a + 3,$
$h_{12} = 4l + 2,$	$h_{12} = 4l + a + 3,$	$h_{12} = 4l + 1,$
$h_{13} = 4l - 1,$	$h_{13} = 4l + a,$	$h_{13} = 4l - 2,$
	$\underline{h_{14} = 4l + a - 1}$,	
$\underline{h_{21} = 4l + a - 1}$,	$h_{21} = 4l - 2,$	$h_{21} = 4l + a,$
$h_{31} = 4l + a - 4,$	$h_{31} = 4l - 5,$	$h_{31} = 4l + a - 4,$
$h_{22} = 4l - 3;$	$h_{22} = 4l - 3;$	$h_{22} = 4l - 2.$

Так как $a \geq 4$, то, как видно из приведённого выше списка длин крюков, при $s := 4l + a - 1$ $\mathrm{H}^{\alpha^{12},\,\alpha^{21},\,\beta^{12}}(s) = \{H^{\alpha^{12}}_{21}, H^{\alpha^{21}}_{14}\}$. Отсюда и из (4.13) (где $\delta = (-1)^a$) согласно предложению 3.4 получаем

$$\chi^{(\alpha^{12})^{21}} \pm \chi^{(\alpha^{21})^{14}} \text{ равно 0 на } S^{\sigma}_{q-s}, \quad \text{где } \sigma = (-1)^{s+1}\delta = 1,$$

т. е. $\chi^{(\alpha^{12})^{21}}$ равно $\chi^{(\alpha^{21})^{14}}$ на A_{q-s}. Поэтому согласно предложению 3.1 должно быть либо $(\alpha^{12})^{21} =' (\alpha^{21})^{14}$, либо разбиения $(\alpha^{12})^{21}$ и $(\alpha^{21})^{14}$ оба самоассоциированы. Но это противоречиво, так как (см. рис. 4.3 и 4.4) ${(\alpha^{12})^{21}}_1 = 2l + 4, {((\alpha^{12})^{21})'}_1 = 2l - 1, {(\alpha^{21})^{14}}_1 = 2l - 1, {((\alpha^{21})^{14})'}_1 = 2l$. Итак, случай $l > 1$ противоречив.

Следовательно, $l = 1$. Тогда в приведённом выше списке изменятся лишь следующие величины (см. рис. 4.2–4.4): $h^{\alpha^{12}}_{13} = 4 = 4l$, $h^{\alpha^{12}}_{31} = 1 + a = 4l + a - 3$, $h^{\alpha^{21}}_{13} = 5 + a = 4l + a + 1$, $h^{\alpha^{21}}_{31} = 0$, $h^{\alpha^{21}}_{14} = 4l + a$ (увеличились на 1) и $h^{\beta^{12}}_{13} = 4 = 4l$ (увеличилась на 2). Кроме того, здесь $h^{\alpha^{21}}_{15} = 4l + a - 1 = s$. В этом случае (опять учитывая, что $a \geq 4$) имеем $\mathrm{H}^{\alpha^{12},\,\alpha^{21},\,\beta^{12}}(s) = \{H^{\alpha^{12}}_{21}, H^{\alpha^{21}}_{15}\}$. Отсюда и из (4.13) (где $\delta = (-1)^a$) согласно предложению 3.4 получаем

$$\chi^{(\alpha^{12})^{21}} \pm \chi^{(\alpha^{21})^{15}} \text{равно 0 на } S^{\sigma}_{q-s}, \quad \text{где } \sigma = (-1)^{s+1}\delta = 1,$$

и, значит, $\chi^{(\alpha^{12})^{21}}$ равно $\chi^{(\alpha^{21})^{15}}$ на A_{q-s}. Поэтому согласно предложению 3.1 должно быть $(\alpha^{12})^{21} =' (\alpha^{21})^{15}$, т. е. $(6) =' (4, 2)$, что противоречиво.

Таким образом, случай 4.4 противоречив.

Случай 4.5. Пусть $M = (a + 1, b + 1, d)$. Тогда выполняется равенство

$$\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(4l + a + 4) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{21}\}.$$

Отсюда и из (4.2) и (4.3) следует, что

$$a = b = c = d - 1 \text{ и } \varepsilon = -1.$$

Если $a \notin \{0, 1\}$, то, как видно из приведённого выше (после (4.4)) списка длин крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$,

$$\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(4l + a + 2) = \{H^{\beta}_{13}\},$$

и по предложению 3.3 $\beta^{13} = (\beta^{13})'$. Но тогда, как видно из рис. 4.5, должно быть $d = 2$, и, значит, $a = 1$ в противоречие с предположением.

Следовательно, $a \in \{0, 1\}$.

Если $a = 1$, то

$$\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(4l + a + 2) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}_{12}\}$$

и по предложению 3.5 для $\{\alpha^{13}, \beta^{12}\}$ должно выполняться одно из его утверждений (а)–(г) на месте $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$. Однако противоречивость этих утверждений видна из рис. 4.3 и 4.5.

Если $a = 0$, то

$$\mathrm{H}^{\alpha,\,\beta}(4l + 1) = \begin{cases} \{H^{\beta}_{31}\} & \text{при} \quad l > 1, \\ \{H^{\alpha}_{14}, H^{\beta}_{31}\} & \text{при} \quad l = 1. \end{cases} \tag{4.14}$$

Вид диаграмм $[\beta^{31}]$ и $[\alpha^{14}]$ можно себе представить из рис. 4.4 и 4.5, если учесть, что $[\beta^{31}]$ получается из $[\beta^{21}]$ добавлением трёх клеток ко второй строке, а $[\alpha^{14}]$ получается из $[\alpha^{13}]$ добавлением к третьему столбцу трёх клеток при $l > 1$ и двух клеток при $l = 1$. Из (4.14) и предложений 3.3 и 3.5 следует, что при $l > 1$ диаграмма $[\beta^{31}]$ самоассоциирована, а при $l = 1$ для $\{\alpha^{14}, \beta^{31}\}$ должно выполняться одно из утверждений (а)–(г) предложения 3.5 на месте $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$. Однако, уяснив вид диаграмм $[\beta^{31}]$ и $[\alpha^{14}]$, легко понять, что эти утверждения противоречивы (нужно заметить, что диаграмма $[\beta^{31}]$ получается из $[\beta^{21}]$ удлинением второй строки на три клетки, а $[\alpha^{14}]$ получается из $[\alpha^{13}]$ удлинением третьего столбца на три (при $l > 1$) или на две (при $l = 1$) клетки).

Случай 4.5 невозможен.

Таким образом (см. (4.8)), предположение $k = 0$ противоречиво.

5. Доказательство теоремы A4. Случай $k \geq 1$

По-прежнему считаем, что выполнено условие теоремы A4, но не выполнено её заключение. В частности,

$$h_{11}^{\alpha} = h_{11}^{\beta} \tag{5.1}$$

и ввиду теоремы A3 выполнено утверждение (2б) гипотезы A. Поскольку в разд. 4 доказана противоречивость случая $k = 0$, то здесь мы предполагаем, что $k > 0$. Итак, мы считаем, что (с точностью до перемены мест α и β или замены какого-либо из них ассоциированным ему разбиением)

$$\alpha^{11} = \gamma + (4) \ \text{ и } \ \beta^{11} = \gamma + (\widetilde{4}), \ \text{ где } \ \gamma = 3^k.\Sigma_l \ \text{ при } \ k \geq 1 \ \text{ и } \ l \geq 0.$$

Мы докажем, что этот случай также противоречив.

Диаграммы разбиений α и β изображены на рис. 5.1 ($\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$, $t = \gamma_1 = \tilde{\gamma}_1$); вид разбиений γ и $\tilde{\gamma}$ показан на рис. 5.2 (где взято $k = 2$ и $l = 2$ или $l = 0$).

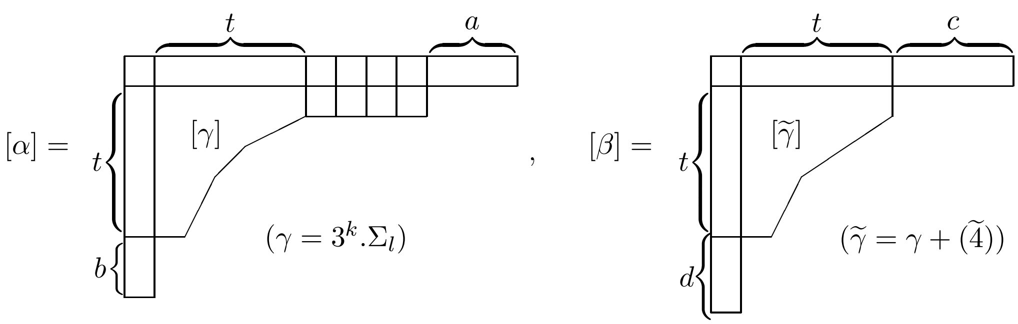

Рис. 5.1.

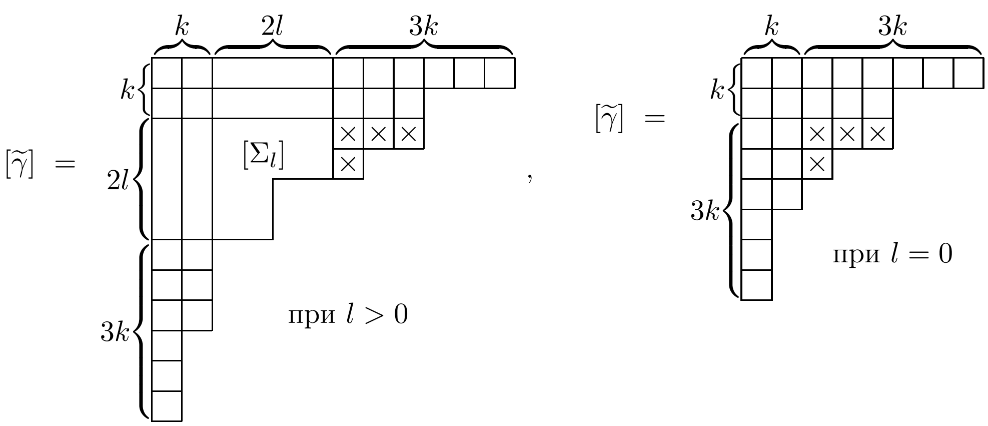

Рис. 5.2.

Диаграмма $[\gamma]$ получается из $[\widetilde{\gamma}]$ (см. рис. 5.2) удалением клеток, помеченных крестиками. Как видно из рис. 5.1 и 5.2,

$$t = 4k + 2l.$$

По (5.1)

$$4 + a + b = c + d \tag{5.2}$$

и по теореме A3 $\varepsilon = (-1)^{h_{11}^{\alpha}}$, т. е.

$$\varepsilon = (-1)^{1+a+b} = (-1)^{1+c+d}. \tag{5.3}$$

Так как $d(\alpha) \geq 3$ по [11, теорема Б] и [12, теорема 1] (см. утверждение (б) во введении), то

$$k + l \geq 2 \ \ (\text{т. е. } l > 0 \text{ при } k = 1). \tag{5.4}$$

В частности, на диаграмме в правой части рис. 5.2 $k \geq 2$. Используя рис. 5.1 и 5.2 и очевидные равенства $h_{11}^{\gamma} = 2t-1$ и $h_{12}^{\gamma} = h_{21}^{\gamma} = 2t-5$, подсчитаем длины некоторых крюков в $[\alpha]$ и $[\beta]$:

$$h_{12}^{\alpha} = 2t+a+4, \qquad h_{12}^{\beta} = 2t+c,$$

$$h_{13}^{\alpha} = 2t+a, \qquad h_{13}^{\beta} = 2t+c-4,$$

$$h_{14}^{\alpha} = \begin{cases} 2t+a-4 & \text{при} \quad k \geq 2, \\ 2t+a-1 & \text{при} \quad k = 1, \end{cases} \qquad h_{14}^{\beta} = \begin{cases} 2t+c-8 & \text{при} \quad k \geq 3 \text{ и} \\ & \text{при} \quad k = 2,\ l > 0, \\ 2t+c-6 & \text{при} \quad k = 2,\ l = 0, \\ 2t+c-5 & \text{при} \quad k = 1, \end{cases}$$

$$h_{21}^{\alpha} = 2t+b+4, \qquad h_{21}^{\beta} = 2t+d,$$

$$h_{31}^{\alpha} = 2t+b-4, \qquad h_{31}^{\beta} = \begin{cases} 2t+d-4 & \text{при} \quad k \geq 2, \\ 2t+d-1 & \text{при} \quad k = 1, \end{cases}$$

$$h_{41}^{\alpha} = \begin{cases} 2t+b-8 & \text{при} \quad k \geq 2, \\ 2t+b-5 & \text{при} \quad k = 1, \end{cases} \qquad h_{41}^{\beta} = \begin{cases} 2t+d-8 & \text{при} \quad k \geq 3, \\ 2t+d-5 & \text{при} \quad k = 2, \\ 2t+d-4 & \text{при} \quad k = 1, \end{cases}$$

$$h_{22}^{\alpha} = 2t+3, \qquad h_{22}^{\beta} = 2t-1.$$

Далее нам потребуются следующие диаграммы (см. рис. 5.3 и 5.4).

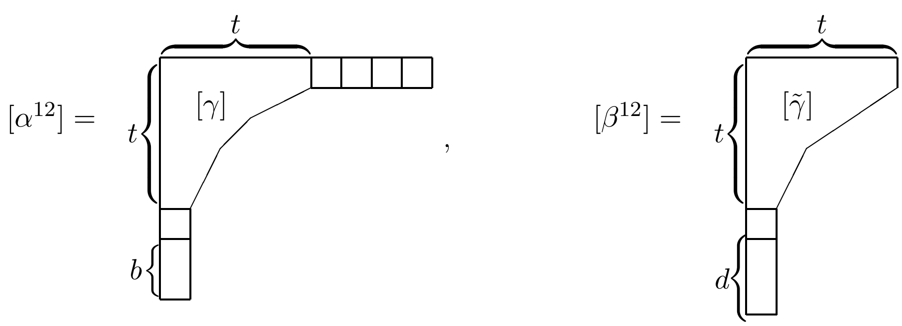

Рис. 5.3.

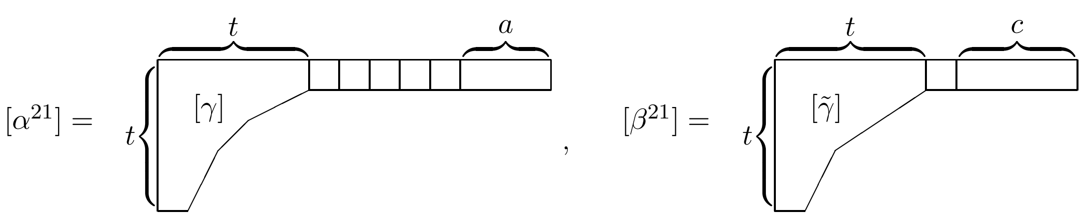

Рис. 5.4.

Как видно из рис. 5.3 и 5.4, разбиения α^{21}, β^{12}, β^{21} не самоассоциированы. Поэтому согласно предложению 3.3

$$[\alpha] \text{ имеет крюки длины } \ 2t+c\ (= h_{12}^{\beta}) \ \text{ и } \ 2t+d\ (= h_{21}^{\beta}), \tag{5.5}$$

$$[\beta] \text{ имеет крюк длины } \ 2t+b+4\ (= h_{21}^{\alpha}). \tag{5.6}$$

Легко представить себе вид диаграммы α^{13}: она получается из диаграммы α^{12} удлинением второго столбца до величины $t+1$. Поскольку она не самоассоциирована, то по предложению 3.3

$$[\beta] \text{ имеет крюк длины } \ 2t+a \ (= h^{\alpha}_{13}), \tag{5.7}$$

Предположим, что $b > a$. Тогда $\mathrm{H}^{\alpha}(2t+b+4) = \{H^{\alpha}_{21}\}$. Из (5.5) и (5.6) следует, что $b+4 = \max\{c,d\}$. Заметим, что должно быть $c \neq d$, так как при $b+4=c=d$ из (5.2) следует, что $b+4=c=d=a$, в противоречие с тем, что $b>a$. Следовательно,

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+b+4) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{ij}\}, \text{ где } (i,j) = \begin{cases} (1,2) & \text{при} \quad c>d, \\ (2,1) & \text{при} \quad d>c. \end{cases}$$

Тогда по предложению 3.5 для $\{\alpha^{21}, \beta^{ij}\}$ должно быть выполнено одно из условий (а)–(г) этого предложения на месте $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$. Однако, как видно из рис. 5.3 и 5.4, это противоречиво ($\alpha^{21} \neq' \beta^{ij}$, $\alpha^{21} \neq (\alpha^{21})'$ и ни одно из разбиений α^{21}, β^{12} и β^{21} не представляется в виде $\Gamma + (r)$, где $r \in \{3,4\}$ и $\Gamma = \Gamma'$).

Поэтому

$$a \geq b. \tag{5.8}$$

Пусть M — подпоследовательность максимальных по величине элементов последовательности $(a+4, b+4, c, d)$. По (5.2) $M \neq (a+4, b+4, c, d)$. По (5.8) M не может начинаться с $b+4$. Ввиду (5.2) и (5.8) $M \neq (a+4, c, d)$. Кроме того, ввиду предложения 3.5 M отлична от $(a+4, b+4)$, (c), (d) и (c,d). Поэтому

$$M \in \{\, (a+4),\ (a+4,c),\ (a+4,d),\ (a+4,b+4,c),\ (a+4,b+4,d)\,\}. \tag{5.9}$$

Случай 5.1. Пусть $M = (a+4)$. Тогда $a > b$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+a+4) = \{H^{\alpha}_{12}\}$, откуда по предложению 3.3 $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и, следовательно,

$$b = 3. \tag{5.10}$$

Так как $[\beta]$ имеет крюк длины $2t+a$ по (5.7), то $a \leq \max\{c,d\} \leq a+3$. Предположим, что $\max\{c,d\} = a+i$, где $1 \leq i \leq 3$, и, следовательно, $\max\{h^{\beta}_{12}, h^{\beta}_{21}\} = 2t+a+i$. Тогда существующий по (5.5) крюк длины $2t+a+i$ в $[\alpha]$ должен совпадать с H^{α}_{21} (см. список длин крюков). Поэтому $2t+a+i = 2t+b+4 = 2t+7$, $a = 7-i \in \{4,5,6\}$. Если $i \neq 2$, то a чётно и ввиду (5.2) $c \neq d$. Но тогда $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+a+i) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}\}$, где $H^{\beta} \in \{H^{\beta}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$, и для $\{\alpha^{21}, \beta - H^{\beta}\}$ должно быть верно одно из утверждений (а)–(г) предложения 3.5 на месте $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$. Но, как видно из рис. 5.3 и 5.4, каждое из них противоречиво. Поэтому

$$\max\{c,d\} \in \{a, a+2\}. \tag{5.11}$$

Случай 5.1а. Предположим, что $c \neq d$. Положим $\tilde{c} := \max\{c,d\}$, $\tilde{d} := \min\{c,d\}$ и H^{β} — крюк длины $2t+\tilde{c}$ в $[\beta]$ ($H^{\beta} \in \{H^{\beta}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$). По (5.5) $[\alpha]$ имеет крюк длины $2t+\tilde{c}$. Из (5.11), (5.2) и из списка длин крюков видно, что

либо $\tilde{c} = a > \tilde{d} = b+4$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+\tilde{c}) = \{H^{\alpha}_{13}, H^{\beta}\}$,

либо $\tilde{c} = a+2 > \tilde{d} = b+2$ и $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+\tilde{c}) = \{H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}\}$.

Тогда по предложению 3.5 существуют такие $\widetilde{\alpha} \in \{\alpha^{13}, \alpha^{21}\}$ и $\widetilde{\beta} \in \{\beta^{12}, \beta^{21}\}$, что для $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ выполняется одно из утверждений (а)–(г) этого предложения. Но, как как легко увидеть из рис. 5.3 и 5.4 (заметим, что $[\alpha^{13}]$ получается из $[\alpha^{12}]$ удлинением второго столбца), каждое из них противоречиво.

Случай 5.1б. Предположим, что $c = d$. Тогда по (5.2) и (5.10) $7+a = 2c$, откуда $c \neq a+2$ (иначе $a = 3 = b$) и ввиду (5.11) и (5.2)

$$a = c = d = 7.$$

Из строения диаграмм $[\alpha]$, $[\beta]$ (см. рис. 5.1, 5.2, а также следующий рис. 5.5, где взято $k = 2$ и $l = 2$) усматриваются следующие соотношения в случае, когда $l > 0$:

$$h^{\alpha}_{1,k+3} = 4k + 4l + 10,\ \ h^{\alpha}_{k+3,1} = 4k + 4l + 2, \text{ и } h^{\alpha}_{ij} \text{ нечётно при } i \le k+2 \text{ и } j \le k+2; \qquad (5.12)$$

$$h^{\beta}_{1,k+3} = 4k + 4l + 6,\ \ h^{\beta}_{k+2,1} = 4k + 4l + 10, \text{ и } h^{\beta}_{ij} \text{ нечётно при } i \le k+1 \text{ и } j \le k+2. \qquad (5.13)$$

В случае, когда $l = 0$, как легко увидеть (здесь нам поможет рис. 5.5a), соотношения (5.12) остаются в силе, а соотношения (5.13) заменяются следующими:

$$h^{\beta}_{1,k+4} = 4k + 4l + 6,\ \ h^{\beta}_{k+2,1} = 4k + 4l + 10, \text{ и } h^{\beta}_{ij} \text{ нечётно при } i \le k+1 \text{ и } j \le k+3. \qquad (5.14)$$

Из (5.12)–(5.14) следует, что $H^{\alpha}_{1,k+3}$ и $H^{\beta}_{k+2,1}$ — единственные крюки максимальной чётной длины (равной $4k + 4l + 10$) в $[\alpha]$ и $[\beta]$ соответственно.

39	35	31	27	26	23	22	19	18	17	15	14	13	12	11	10	9	7	⋯
31	27	23	19	18	15	14	11	10	9	7	6	5	4	3	2	1		
23	19	15	11	10	7	6	3	2	1									
19	15	11	7	6	3	2												
18	14	10	6	5	2	1												
15	11	7	3	2														
14	10	6	2	1														
11	7	3																
10	6	2																
9	5	1																
7	3																	
6	2																	
5	1																	
3																		
⋮																		

Длины крюков в $[\alpha]$ $(l > 0)$

39	31	27	23	22	19	18	17	15	14	11	10	9	7	⋯
31	23	19	15	14	11	10	9	7	6	3	2	1		
27	19	15	11	10	7	6	5	3	2					
26	18	14	10	9	6	5	4	2	1					
23	15	11	8	7	3	2	1							
19	11	7	3	2										
18	10	6	2	1										
15	7	3												
14	6	2												
13	5	1												
11	3													
10	2													
9	1													
7														
⋮														

Длины крюков в $[\beta]$ $(l > 0)$

Рис. 5.5.

31	27	23	19	18	17	15	14	13	12	11	10	9	7 ⋯
23	19	15	11	10	9	7	6	5	4	3	2	1	
15	11	7	3	2	1								
11	7	3											
10	6	2											
9	5	1											
7	3												
6	2												
5	1												
3													
⋮													

Длины крюков в $[\alpha]$ $(l = 0)$

31	23	19	17	15	14	11	10	9	7 ⋯
23	15	11	9	7	6	3	2	1	
19	11	7	5	3	2				
18	10	6	4	2	1				
15	7	3	1						
13	5	1							
11	3								
10	2								
9	1								
7									
⋮									

Длины крюков в $[\beta]$ $(l = 0)$

Рис. 5.5a.

Поэтому при любом $l \ge 0$

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(4k + 4l + 10) = \{H^{\alpha}_{1,k+3}, H^{\beta}_{k+2,1}\}.$$

Следовательно, по предложению 3.5 для $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$, где $\widetilde{\alpha} = \alpha^{1,k+3}$ и $\widetilde{\beta} = \beta^{k+2,1}$, должно выполняться одно из утверждений (а)–(г) этого предложения. Однако их противоречивость следует из следующих легко проверяемых равенств (см. рис. 5.1):

$$\widetilde{\alpha}_1 = t+4, \qquad \widetilde{\alpha}'_1 = t+4, \qquad \widetilde{\beta}_1 = t+8, \qquad \widetilde{\beta}'_1 = t$$

(противоречивость условий (а), (в) и (г) следует из того, что $\min\{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}'_1\} \neq \min\{\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}'_1\}$, а противоречивость условия (б) — из неравенства $\widetilde{\beta}_1 \neq \widetilde{\beta}'_1$).

Случай 5.1 противоречив.

Случай 5.2. Пусть $M = (a+4, c)$. Тогда по (5.2) $d = b$ и, как видно из списка длин крюков, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+a+4) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{12}\}$. Следовательно, при $\widetilde{\alpha} = \alpha^{12}$ и $\widetilde{\beta} = \beta^{12}$ для $\{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}\}$ выполнено одно из условий (а)–(г) предложения 3.5. Противоречивость этих условий видна из рис. 5.3.

Случай 5.2 противоречив.

Случай 5.3. Пусть $M = (a+4, d)$. Тогда по (5.2) $c = b$ и верно равенство $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+a+4) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\beta}_{21}\}$, противоречивость которого доказывается так же, как и в предыдущем случае.

Случай 5.3 противоречив.

Случай 5.4. Пусть $M = (a+4, b+4, c)$. Тогда

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+a+4) = \{H^{\alpha}_{12}, H^{\alpha}_{21}, H^{\beta}_{12}\}. \tag{5.15}$$

Отсюда и из (5.2) и (5.3) следует, что

$$a = b = d = c-4 \quad \text{и} \quad \varepsilon = -1 \tag{5.16}$$

Легко увидеть, что длины ног крюков H^{α}_{12} и H^{α}_{21} равны t и $t-1+a$ соответственно. Поэтому согласно предложению 3.2 из (5.15) следует, что

$$\chi^{\alpha^{12}} + (-1)^{a+1}\chi^{\alpha^{21}} \quad \text{и} \quad \chi^{\beta^{12}} \quad \text{модульно равны на} \quad S^{\delta}_q, \tag{5.17}$$

где $\delta = (-1)^{a+1}\varepsilon = (-1)^a$ (по (5.16)) и $q = n - (2t+a+4)$. К этому соотношению мы хотим применить предложение 3.4.

Если $a = 3$, то $\alpha^{12} = (\alpha^{12})'$ и по предложению 1.1(4) $\chi^{\alpha^{12}}$ исчезает на S^-_q, а тогда утверждение (5.17) имеет вид

$$\chi^{\alpha^{21}} \quad \text{и} \quad \chi^{\beta^{12}} \quad \text{модульно равны на} \quad S^-_q$$

($\delta = (-1)^a = -1$), и применение предложения 3.1 и условия A приводит к противоречию (см. рис. 5.3 и 5.4). Следовательно,

$$a \neq 3. \tag{5.18}$$

Случаи а) $k \geq 2$, б) $k = 1$, $l \geq 2$ и в) $k = 1$, $l = 1$ требуют отдельного рассмотрения.

Случай 5.4а. Предположим сначала, что $k \geq 2$.

Используя рис. 5.3 и 5.4, получим некоторую информацию о длинах крюков в диаграммах α^{12}, α^{21}, β^{12}; для наглядности диаграммы этих крюков при $k = 2$ и $l = 2$ изображены на рис. 5.6 и 5.7, где положено $x' := x + a$.

$28'$	23	19	18	15	14	11	10	9	7	6	5	4	3	2	1
$20'$	15	11	10	7	6	3	2	1							
$16'$	11	7	6	3	2										
$15'$	10	6	5	2	1										
$12'$	7	3	2												
$11'$	6	2	1												
$8'$	3														
$7'$	2														
$6'$	1														
$4'$															
$3'$															
$2'$															
$1'$															
a															

Длины крюков в $[\alpha^{12}]$
в случаях 5.4 и 5.5

$28'$	$24'$	$20'$	$19'$	$16'$	$15'$	$12'$	$11'$	$10'$	$8'$	$7'$	$6'$	$5'$	$4'$	$3'$	$2'$	$1'$	a
19	15	11	10	7	6	3	2	1									
15	11	7	6	3	2												
14	10	6	5	2	1												
11	7	3	2														
10	6	2	1														
7	3																
6	2																
5	1																
3																	
2																	
1																	

Длины крюков в $[\alpha^{21}]$
в случаях 5.4 и 5.5

Рис. 5.6.

$24'$	19	15	14	11	10	9	7	6	3	2	1
$20'$	15	11	10	7	6	5	3	2			
$19'$	14	10	9	6	5	4	2	1			
$16'$	11	7	6	3	2	1					
$12'$	7	3	2								
$11'$	6	2	1								
$8'$	3										
$7'$	2										
$6'$	1										
$4'$											
$3'$											
$2'$											
$1'$											
a											

Длины крюков в $[\beta^{12}]$
в случае 5.4

$24'$	$20'$	$16'$	$15'$	$12'$	$11'$	$10'$	$8'$	$7'$	$4'$	$3'$	$2'$	$1'$	a
19	15	11	10	7	6	5	3	2					
18	14	10	9	6	5	4	2	1					
15	11	7	6	3	2	1							
11	7	3	2										
10	6	2	1										
7	3												
6	2												
5	1												
3													
2													
1													

Длины крюков в $[\beta^{21}]$
в случае 5.5

Рис. 5.7.

Учитывая, что $h^\gamma_{11} = 2t-1$ и $h^\gamma_{12} = h^\gamma_{21} = 2t-5$, находим:

в $[\alpha^{12}]$:	в $[\alpha^{21}]$:	в $[\beta^{12}]$:
$h_{11} = 2t+a+4,$	$h_{11} = 2t+a+4,$	$h_{11} = 2t+a,$
$h_{12} = 2t-1,$	$h_{12} = 2t+a,$	$h_{12} = 2t-5,$
$h_{13} = 2t-5,$	$h_{13} = \underline{2t+a-4},$	
$h_{21} = \underline{2t+a-4},$	$h_{21} = 2t-5,$	$h_{21} = \underline{2t+a-4}.$

Так как $a \neq 3$ по (5.18), то из приведённых выше равенств видно, что

$$\mathrm{H}^{\alpha^{12},\alpha^{21},\beta^{12}}(2t+a-4) = \{H^{\alpha^{12}}_{21},\, H^{\alpha^{21}}_{13},\, H^{\beta^{12}}_{21}\}. \tag{5.19}$$

Положим

$$\widetilde{\alpha} := (\alpha^{12})^{21}, \quad \widehat{\alpha} := (\alpha^{21})^{13}, \quad \widetilde{\beta} := (\beta^{12})^{21}.$$

Легко увидеть, что длины ног крюков $H^{\alpha^{12}}_{21}$ и $H^{\alpha^{21}}_{13}$ равны соответственно $t+a-1$ и $t-7$. Отсюда и из (5.17) и (5.19) согласно предложению 3.4 получаем

$$\chi^{\widetilde{\alpha}} - \chi^{\widehat{\alpha}} \quad \text{и} \quad \chi^{\widetilde{\beta}} \quad \text{модульно равны на} \quad S^\sigma_r, \tag{5.20}$$

где $\sigma = (-1)^{a+1}\delta = -1$ и $r = q - (2t + a - 4)$. К этому соотношению мы опять применим предложение 3.4. Для этого нам нужно знать вид диаграмм $[\widetilde{\alpha}]$, $[\widehat{\alpha}]$ и $[\widetilde{\beta}]$ и длины некоторых их крюков. Из рис. 5.3 и 5.4 видно, что

$$\widetilde{\alpha} = 3^{k-1}.\Sigma_l + (8), \quad \widetilde{\beta} = (3^{k-1}.\Sigma_l + (\widetilde{4})) + (4), \quad \widehat{\alpha}' = 3^{k-1}.\Sigma_l + (4,4).$$

($[\widehat{\alpha}]$ получается из $[3^{k-1}.\Sigma_l]$ удлинением 1-го и 2-го столбцов на 4 клетки.) На рис. 5.8 изобразим диаграммы этих разбиений при $k = 2$ и $l = 2$ с указанием длин соответствующих крюков.

$$[\widetilde{\alpha}] = \begin{array}{llllllllll}
23 & 19 & \overset{\downarrow}{18} & 15 & 14 & 11 & 10 & 9 & 8 & \cdots \\
11 & 7 & 6 & 3 & 2 \\
10 & 6 & 5 & 2 & 1 \\
7 & 3 & 2 \\
6 & 2 & 1 \\
3 \\
2 \\
1
\end{array}, \quad
[\widehat{\alpha}] = \begin{array}{llllllll}
19 & 15 & 10 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 \\
15 & 11 & 6 & 3 & 2 \\
14 & 10 & 5 & 2 & 1 \\
11 & 7 & 2 \\
10 & 6 & 1 \\
8 & 4 \\
7 & 3 \\
6 & 2 \\
5 & 1 \\
3 \\
2 \\
1
\end{array}, \quad
[\widetilde{\beta}] = \begin{array}{llllllllllll}
19 & 15 & 14 & 11 & 10 & 9 & 7 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
14 & 10 & 9 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \\
11 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 \\
7 & 3 & 2 \\
6 & 2 & 1 \\
3 \\
2 \\
1
\end{array}$$

Рис. 5.8.

Мы избавились от неизвестного параметра a. Теперь легко проверить следующие свойства длин крюков рассматриваемых разбиений:

$$h_{ij}^{\widetilde{\alpha}} \text{ и } h_{ij}^{\widehat{\alpha}} \text{ нечётны при } 1 \le i \le k,\ 1 \le j \le k; \quad h_{ij}^{\widetilde{\beta}} \text{ нечётно при } 1 \le i \le k-1,\ 1 \le j \le k.$$

Следовательно, максимальная из чётных длин крюков этих разбиений находится среди чисел

$$h_{1,k+1}^{\widetilde{\alpha}} = 4k + 4l + 2, \qquad h_{k+1,1}^{\widetilde{\alpha}} = 4k + 4l - 6,$$
$$h_{1,k+1}^{\widehat{\alpha}} = 4k + 4l - 6, \qquad h_{k+1,1}^{\widehat{\alpha}} = 4k + 4l - 2,$$
$$h_{1,k+1}^{\widetilde{\beta}} = 4k + 4l - 2, \qquad h_{k,1}^{\widetilde{\beta}} = 4k + 4l - 2.$$

Поэтому

$$\mathrm{H}^{\widetilde{\alpha},\widehat{\alpha},\widetilde{\beta}}(4k + 4l + 2) = \{H_{1,k+1}^{\widetilde{\alpha}}\}.$$

По предложению 3.4 из этого равенства и (5.20) следует, что

$$\chi^{\widetilde{\alpha}^{1,k+1}} \text{ равно } 0 \text{ на } S_s^{\tau},$$

где $\tau = -\sigma = 1$ и $s = r - (4k + 4l + 2)$. Но это противоречиво, так как $\chi^{\widetilde{\alpha}^{1,k+1}}(1) \neq 0$.

Таким образом, случай 5.4а невозможен.

Случай 5.4б. Пусть $k = 1$ и $l \geq 2$.

Здесь подобно случаю 5.4а мы будем преобразовывать соотношение (5.17) с помощью предложения 3.4. Используя рис. 5.3 и 5.4, находим

в $[\alpha^{12}]$:	в $[\alpha^{21}]$:	в $[\beta^{12}]$:
$h_{11} = 4l + a + 12$,	$h_{11} = 4l + a + 12$,	$h_{11} = 4l + a + 8$,
$h_{12} = 4l + 7$,	$h_{12} = 4l + a + 8$,	$h_{12} = 4l + 3$,
$h_{13} = 4l + 6$,	$h_{13} = 4l + a + 7$,	
$h_{14} = 4l + 3$,	$\underline{h_{14} = 4l + a + 4}$,	

$$\underline{h_{21} = 4l + a + 4}, \qquad h_{21} = 4l + 3, \qquad h_{21} = 4l + a + 7.$$
$$h_{31} = 4l + a + 3, \qquad\qquad\qquad \underline{h_{31} = 4l + a + 4}.$$

Если $a = 2$, то из этих равенств видно, что

$$\mathrm{H}^{\alpha^{12},\alpha^{21},\beta^{12}}(4l+7) = \{H_{12}^{\alpha^{12}}\},$$

и тогда по предложению 3.4 из (5.17) следует, что $\chi^{(\alpha^{12})^{12}}$ равно 0 на S_r^σ, где $\sigma = (-1)^{4l+8}\delta = (-1)^a = 1$ и $r = q - (4l+7)$. Но это противоречиво, так как $\chi^{(\alpha^{12})^{12}}(1) \neq 0$.

Поэтому $a \neq 2$. Кроме того, по (5.18) $a \neq 3$. Теперь из приведённого выше списка длин крюков следует, что

$$\mathrm{H}^{\alpha^{12},\alpha^{21},\beta^{12}}(4l+a+4) = \{H_{21}^{\alpha^{12}}, H_{14}^{\alpha^{21}}, H_{31}^{\beta^{12}}\}. \tag{5.21}$$

Положим

$$\widetilde{\alpha} := (\alpha^{12})^{21}, \quad \widehat{\alpha} := (\alpha^{21})^{14}, \quad \widetilde{\beta} := (\beta^{12})^{31}.$$

Легко увидеть, что длины ног крюков $H_{21}^{\alpha^{12}}$ и $H_{14}^{\alpha^{21}}$ равны соответственно $2l + a + 3$ и $2l - 2$. Отсюда и из (5.17) и (5.21) согласно предложению 3.4 получаем, что

$$\chi^{\widetilde{\alpha}} + \chi^{\widehat{\alpha}} \quad \text{и} \quad \chi^{\widetilde{\beta}} \quad \text{модульно равны на} \quad S_r^\sigma, \tag{5.22}$$

где $\sigma = (-1)^{a+1}\delta = -1$ и $r = q - (4l + a + 4)$.

Используя рис. 5.3 и 5.4, нетрудно представить себе вид диаграмм $[\widetilde{\alpha}]$, $[\widehat{\alpha}]$ и $[\widetilde{\beta}]$ и получить некоторую информацию о длинах их крюков; для наглядности см. рис. 5.9, где взято $l = 2$ (как и раньше, числа — длины соответствующих крюков).

$$[\widetilde{\alpha}] = \begin{array}{cccc|ccc} & \downarrow & & & & & \\ 15 & 14 & 11 & 10 & 8 & 7 & \cdots \\ 6 & 5 & 2 & 1 & & & \\ 3 & 2 & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & \end{array}, \qquad [\widehat{\alpha}] = \begin{array}{c|c|cc} 11 & 7 & 6 & 2 \\ 10 & 6 & 5 & 1 \\ 8 & 4 & 3 & \\ 7 & 3 & 2 & \\ \hline 6 & 2 & 1 & \\ 3 & & & \\ 2 & & & \\ 1 & & & \end{array}, \qquad [\widetilde{\beta}] = \begin{array}{cccc|cccc} 11 & 10 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 10 & 9 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & \end{array}$$

Рис. 5.9.

Легко проверить, что $\mathrm{H}^{\widetilde{\alpha},\widehat{\alpha},\widetilde{\beta}}(4l+6) = \{H_{12}^{\widetilde{\alpha}}\}$. Поэтому согласно предложению 3.4 из (5.22) следует, что $\chi^{\widetilde{\alpha}^{12}}$ равно 0 на S_s^τ, где $\tau = (-1)^{4l+7}\sigma = 1$ и $s = r - (4l+6)$. Это условие противоречиво, так как $\chi^{\widetilde{\alpha}^{12}}(1) \neq 0$. (Оно противоречиво и при $\tau = -1$, так как $\widetilde{\alpha}^{12}$ не самоассоциировано.)

Случай 5.4б противоречив.

Случай 5.4в. Пусть $k = 1$ и $l = 1$. Разбиения $[\alpha]$ и $[\beta]$ изобразим на рис. 5.10, вписав в их клетки длины соответствующих крюков ($x' := x + a$).

$$[\alpha] = \begin{array}{|c|c|cc|ccc|cccc|c} \hline & 16' & 12' & 11' & 8' & 7' & 6' & 5' & 4' & 3' & 2' & a \cdots \\ \hline 16' & 15 & 11 & 10 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 8' & 7 & 3 & 2 & & & & & & & & \\ 7' & 6 & 2 & 1 & & & & & & & & \\ \hline 4' & 3 & & & & & & & & & & \\ 3' & 2 & & & & & & & & & & \\ 2 & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline a & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \end{array}, \qquad [\beta] = \begin{array}{|c|c|cc|ccc|cccc|c} \hline & 16' & 12' & 11' & 10' & 8' & 7' & 4' & 3' & 2' & 1' & a \cdots \\ \hline 12' & 11 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & & & & & \\ \hline 11' & 10 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & & & & & \\ 8' & 7 & 3 & 2 & 1 & & & & & & & \\ \hline 4' & 3 & & & & & & & & & & \\ 3' & 2 & & & & & & & & & & \\ 2' & 1 & & & & & & & & & & \\ \hline a & & & & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Рис. 5.10.

Если $a \notin \{1,5\}$, то, как видно из рис. 5.10, $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(a+10)=\{H^{\beta}_{15}\}$. Но тогда по предложению 3.3 должно быть $\beta^{15}=(\beta^{15})'$, что противоречиво.

Если $a=5$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(a+10)=\{H^{\alpha}_{22},H^{\beta}_{15}\}$ и по предложению 3.5 разбиения $\widetilde{\alpha}:=\alpha^{22}$ и $\widetilde{\beta}:=\beta^{15}$ должны удовлетворять заключению этого предложения. Но, как легко увидеть, это не так.

Если, наконец, $a=1$, то $\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(15)=\{H^{\alpha}_{22}\}$, откуда по предложению 3.3 должно быть $\alpha^{22}=(\alpha^{22})'$, что снова противоречиво.

Случай 5.4в противоречив. Ввиду (5.4) этим завершено доказательство противоречивости случая 5.4.

Случай 5.5. Пусть $M=(a+4,b+4,d)$. Тогда

$$\mathrm{H}^{\alpha,\beta}(2t+a+4)=\{H^{\alpha}_{12},H^{\alpha}_{21},H^{\beta}_{21}\},$$

откуда при помощи (5.2) и (5.3) получаем

$$a=b=c=d-4 \quad \text{и} \quad \varepsilon=-1, \tag{5.23}$$

и согласно предложению 3.4 (так как длины ног крюков H^{α}_{12} и H^{α}_{21} равны t и $t+a-1$)

$$\chi^{\alpha^{12}}+(-1)^{a+1}\chi^{\alpha^{21}} \quad \text{и} \quad \chi^{\beta^{21}} \quad \text{модульно равны на} \quad S^{\delta}_{q}, \tag{5.24}$$

где $\delta=(-1)^{a+1}\varepsilon=(-1)^{a}$ и $q=n-(2t+a+4)$.

Следующие рассуждения подобны проведённым в случае 5.4.

Если $a=3$, то $\alpha^{12}=(\alpha^{12})'$, $\chi^{\alpha^{12}}$ исчезает на S^{-}_{q} по предложению 1.1(4) и утверждение (5.17) имеет вид

$$\chi^{\alpha^{21}} \quad \text{и} \quad \chi^{\beta^{12}} \quad \text{модульно равны на} \quad S^{-}_{q}.$$

Теперь применение предложений 3.1 и 3.3 приводит к противоречию (см. рис. 5.3 и 5.4). Следовательно,

$$a \neq 3. \tag{5.25}$$

Случай 5.5а. Предположим сначала, что $k \geq 2$.

Используя рис. 5.1–5.4, а также рис. 5.6 и правую часть рис. 5.7, находим:

в $[\alpha^{12}]$:	в $[\alpha^{21}]$:	в $[\beta^{21}]$:
$h_{11}=2t+a+4$,	$h_{11}=2t+a+4$,	$h_{11}=2t+a$,
$h_{12}=2t-1$,	$h_{12}=2t+a$,	$h_{12}=\underline{2t+a-4}$,
$h_{13}=2t-5$,	$h_{13}=\underline{2t+a-4}$,	
$h_{21}=\underline{2t+a-4}$,	$h_{21}=2t-5$,	$h_{21}=2t-5$.

Так как $a \neq 3$ по (5.25), то, как видно из приведённых выше равенств,

$$\mathrm{H}^{\alpha^{12},\alpha^{21},\beta^{12}}(2t+a-4)=\{H^{\alpha^{12}}_{21},H^{\alpha^{21}}_{13},H^{\beta^{21}}_{12}\}. \tag{5.26}$$

Положим

$$\widetilde{\alpha}:=(\alpha^{12})^{21},\quad \widehat{\alpha}:=(\alpha^{21})^{13},\quad \widehat{\beta}:=(\beta^{21})^{12}.$$

Так как длины ног крюков $H^{\alpha^{12}}_{21}$ и $H^{\alpha^{21}}_{13}$ равны соответственно $t+a-1$ и $t-7$, то согласно предложению 3.4 из (5.24) и (5.26) следует, что

$$\chi^{\widetilde{\alpha}}-\chi^{\widehat{\alpha}} \quad \text{и} \quad \chi^{\widehat{\beta}} \quad \text{модульно равны на} \quad S^{\sigma}_{r}, \tag{5.27}$$

где $\sigma=(-1)^{a+1}\delta=-1$ и $r=q-(2t+a-4)$. К этому соотношению мы опять применим предложение 3.4. Диаграммы $[\widetilde{\alpha}]$ и $[\widehat{\alpha}]$ изображены на рис. 5.8 при $k=2$, $l=2$. Диаграмму $[\widehat{\beta}]$ при этих же k,l изобразим на рис. 5.11 слева.

$$[\widehat{\beta}] = \begin{array}{|c|ccccc|ccc|}
\hline
19 & 11 & 10 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 \\
\hline
18 & 10 & 9 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \\
15 & 7 & 6 & 3 & 2 & 1 & & \\
11 & 3 & 2 & & & & & \\
10 & 2 & 1 & & & & & \\
\hline
7 & & & & & & & \\
6 & & & & & & & \\
5 & & & & & & & \\
\hline
4 & & & & & & & \\
3 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & \\
\hline
\end{array} \quad \text{в случае 5.5а,} \qquad [\widehat{\beta}] = \begin{array}{|cccc|ccc|}
\hline
14 & 9 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \\
11 & 6 & 3 & 2 & 1 & & \\
7 & 2 & & & & & \\
6 & 1 & & & & & \\
\hline
4 & & & & & & \\
3 & & & & & & \\
2 & & & & & & \\
1 & & & & & & \\
\hline
\end{array} \quad \text{в случае 5.5б}$$

Рис. 5.11.

Легко проверяется, что

$$\mathrm{H}^{\widetilde{\alpha},\, \widehat{\alpha},\, \widehat{\beta}}(2t-5) = \{H_{12}^{\widetilde{\alpha}},\, H_{11}^{\widehat{\alpha}},\, H_{11}^{\widehat{\beta}}\},$$

причём длины ног крюков $H_{12}^{\widetilde{\alpha}}$ и $H_{11}^{\widehat{\alpha}}$ равны $t-8$ и $t-1$ (см. рис. 5.8). Отсюда и из (5.27) по предложению 3.4 следует, что

$$\chi^{\widetilde{\alpha}^{12}} + \chi^{\widehat{\alpha}^{11}} \ \text{ и } \ \chi^{\widehat{\beta}^{11}} \ \text{ модульны равно на } \ S_r^-, \tag{5.28}$$

где $r = q - (4k + a + 3)$. Легко заметить, что $\widetilde{\alpha}^{12} = \widehat{\alpha}^{11} = (3^{k-2}.\Sigma_l + (4))'$ и $\widehat{\beta}^{11} = 3^{k-2}.\Sigma_l + \widetilde{(4)}$ (напомним, что мы рассматриваем случай, когда $k \geq 2$). Поэтому (5.28) можно переписать в виде

$$2\chi^{\widehat{\alpha}^{11}} \ \text{ и } \ \chi^{\widehat{\beta}^{11}} \ \text{ модульно равны на } \ S_r^-. \tag{5.29}$$

Отсюда следует, что характеры $\chi^{\widehat{\alpha}^{11}}$ и $\chi^{\widehat{\beta}^{11}}$ пропорциональны или полупропорциональны на S_r^-. Ввиду предложения 3.1 они не могут быть пропорциональными на S_r^-. Следовательно, $\chi^{\widehat{\alpha}^{11}}$ и $\chi^{\widehat{\beta}^{11}}$ полупропорциональны на S_r^-. Но отсюда по [2, теорема 1] следует, что

$$\chi^{\widehat{\alpha}^{11}} \ \text{ и } \ \chi^{\widehat{\beta}^{11}} \ \text{ модульно равны на } \ S_r^-. \tag{5.30}$$

Из (5.29) и (5.30) следует, что $\chi^{\widehat{\alpha}^{11}}$ и $2\chi^{\widehat{\alpha}^{11}}$ модульно равны на S_r^-, а значит, $\chi^{\widehat{\alpha}^{11}}$ исчезает на S_r^-. Тогда по предложению 1.1(4) разбиение $\widehat{\beta}^{11}$ самоассоциировано. Но это, очевидно, не так.

Случай 5.5а невозможен.

Случай 5.5б. Пусть $k = 1$ и $l \geq 2$.

Нам потребуется список длин крюков в $[\alpha^{12}]$ и $[\alpha^{21}]$, приведённый в начале случая 5.4б, и следующий список длин крюков в $[\beta^{21}]$:

$$h_{11}^{\beta^{21}} = 4l + a + 8, \quad h_{12}^{\beta^{21}} = 4l + a + 4, \quad h_{21}^{\beta^{21}} = 4l + 5, \quad h_{31}^{\beta^{21}} = 4l + 5, \quad h_{22}^{\beta^{21}} = 4l + 2.$$

Предположим, что $a = 2$. Тогда из списков длин крюков в $[\alpha^{12}]$, $[\alpha^{21}]$ и $[\beta^{21}]$ (см. также рис. 5.9 и 5.11) следует, что

$$\mathrm{H}^{\alpha^{12},\, \alpha^{21},\, \beta^{21}}(4l+7) = \{H_{12}^{\alpha^{12}}\}.$$

По предложению 3.4 из (5.24) следует, что $\chi^{(\alpha^{12})^{12}}$ равно 0 на S_r^{σ}, где $\sigma = (-1)^{4l+8}\delta = 1$ и $r = q - (4l+7)$. Но это, очевидно, противоречиво.

Отсюда и из (5.25) следует, что $a \notin \{2, 3\}$. Теперь из упомянутых выше списков длин крюков видно, что

$$\mathrm{H}^{\alpha^{12},\, \alpha^{21},\, \beta^{21}}(4l+a+4) = \{H_{21}^{\alpha^{12}}, H_{14}^{\alpha^{21}}, H_{12}^{\beta^{21}}\}.$$

Положив
$$\widetilde{\alpha} := (\alpha^{12})^{21}, \quad \widehat{\alpha} := (\alpha^{21})^{14}, \quad \widehat{\beta} := (\beta^{21})^{12},$$
так же, как и в случае 5.4б (помним, что длины ног крюков $H_{21}^{\alpha^{12}}$ и $H_{14}^{\alpha^{21}}$ равны $2l + a + 3$ и $2l - 2$), получаем, что
$$\chi^{\widetilde{\alpha}} + \chi^{\widehat{\alpha}} \ \text{ и } \ \chi^{\widehat{\beta}} \ \text{ модульно равны на } \ S_r^-, \tag{5.31}$$
где $r = q - (4l + a + 4)$.

Диаграммы $[\widetilde{\alpha}]$ и $[\widehat{\alpha}]$ изображены на рис. 5.9, а $[\widehat{\beta}]$ — в правой части рис. 5.11, где взято $l = 2$ (как и раньше, числа в клетках диаграммы — длины соответствующих крюков). Легко проверить, что $\mathrm{H}^{\widetilde{\alpha},\widehat{\alpha},\widehat{\beta}}(4l{+}1) = \{H_{12}^{\widehat{\beta}}\}$. Поэтому согласно предложению 3.4 из (5.31) следует, что $\chi^{\widehat{\beta}^{12}}$ равно 0 на S_r^-, где $r = q-(4l{+}6)$. По предложению 1.1(4) отсюда следует, что $\widehat{\beta}^{12} = (\widehat{\beta}^{12})'$, но это противоречиво.

Таким образом, случай 5.5б невозможен.

Случай 5.5в. Пусть $k = 1$ и $l = 1$. Используя рис. 5.3 и 5.4, изобразим рис. 5.12 диаграммы $[\alpha^{12}]$, $[\alpha^{21}]$ и $[\beta^{21}]$ вместе с информацией о длинах их крюков ($x' := x + a$).

$$[\alpha^{12}] = \begin{array}{|c|c|c|ccc|c}
\hline
16' & 11 & 10 & 7 & 6 & 5 & \cdots \\
\hline
8' & 3 & 2 & & & & \\
7' & 2 & 1 & & & & \\
\hline
4' & & & & & & \\
3' & & & & & & \\
2' & & & & & & \\
\cline{1-1}
1' & & & & & & \\
\cline{1-1}
a & & & & & &
\end{array}, \quad
[\alpha^{21}] = \begin{array}{|c|c|c|ccc|c}
\hline
16' & 12' & 11' & 8' & 7' & 6' & \cdots \\
\hline
7 & 3 & 2 & & & & \\
6 & 2 & 1 & & & & \\
\hline
3 & & & & & & \\
2 & & & & & & \\
1 & & & & & & \\
\cline{1-1}
\end{array}, \quad
[\beta^{21}] = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c}
\hline
16' & 8' & 7' & 6' & 4' & 3' & 1' & a \\
\hline
10 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 & & \\
\cline{4-6}
7 & 3 & 2 & 1 & & & & \\
\cline{1-4}
3 & & & & & & & \\
2 & & & & & & & \\
1 & & & & & & & \\
\cline{1-1}
\end{array}$$

Рис. 5.12.

Из этого рисунка видно, что
$$\mathrm{H}^{\alpha^{12},\,\alpha^{21},\,\beta^{21}}(11 + a) = \{H_{13}^{\alpha^{21}}\}. \tag{5.31}$$
Согласно предложению 3.4 из (5.24) и (5.31) следует, что $\chi^{(\alpha^{21})^{13}}$ равно 0 на S_r^{σ}, где $\sigma = (-1)^{12+a}\delta = 1$ и $r = q - (11 + a)$. Но это условие противоречиво, так как $\chi^{(\alpha^{21})^{13}}(1) \neq 0$.

Случай 5.5 противоречив.

Таким образом, во всех возможных случаях (см. (5.9)) мы получили противоречие. Этим завершено доказательство теоремы А4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах групп S_n и A_n // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 977–994.
2. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 143–163.
3. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 58–68.
4. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n или на $S_n \setminus A_n$. III // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 12–30.
5. **Белоногов В. А.** О равнокорневых неприводимых характерах групп S_n и A_n // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 1. С. 3–25.
6. **Белоногов В. А.** Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: Изд-во УрО АН СССР, 1990. 380 с.
7. **James G., Kerber A.** The representation theory of the symmetric group. London: Addison—Wesley, 1981. 510 p.

8. **Джеймс Г.** Теория представлений симметрических групп. М.: Мир, 1982. 260 с.
9. **Белоногов В. А.** О неприводимых характерах группы S_n, полупропорциональных на A_n // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 135–156.
10. **Белоногов В. А.** Диаграммы Юнга без крюков длины 4 и характеры группы S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 3. С. 30–40.
11. **В. А. Белоногов** О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n и A_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 1. С. 11–43.
12. **Белоногов В. А.**, О некоторых парах неприводимых характеров групп S_n // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2007. Т. 13, № 2. С. 13–32.
13. **Белоногов В. А.** О диаграммах Юнга пары неприводимых характеров S_n, равнокорневых на S_n^ε // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 992–1006.

Белоногов Вячеслав Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 5.12.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 519.14

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ОБОБЩЕННОГО ШЕСТИУГОЛЬНИКА ПОРЯДКА (3,27)[1]

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Найдены возможные порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов обобщенного шестиугольника $\mathcal{S}$ порядка (3,27). Доказано, что если группа автоморфизмов $\mathcal{S}$ действует транзитивно на точках, то $\mathcal{S}$ изоморфен классическому обобщенному шестиугольнику, отвечающему билдингу группы Стейнберга ${}^3D_4(3)$.

Ключевые слова: обобщенный многоугольник, дистанционно регулярный граф, автоморфизмы.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. On automorphisms of the generalized hexagon of order (3,27).

Possible orders and fixed-point subgraphs for automorphisms of the generalized hexagon $\mathcal{S}$ of order (3,27) are found. It is proved that, if the automorphism group of $\mathcal{S}$ acts transitively on points, then $\mathcal{S}$ is isomorphic to the classical generalized hexagon corresponding to the building of the Steinberg group ${}^3D_4(3)$.

Keywords: generalized polygon, distance-regular graph, automorphisms.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные конечные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$. *Окрестность* $\Gamma_1(a)$ вершины a в графе Γ будем обозначать также через $\Gamma(a)$.

Пусть Γ — граф и $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a]\cap[b]$ обозначается через $\mu(a,b)$ (соотв. $\lambda(a,b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (соотв. смежны) в Γ. При этом индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (соотв. *λ-подграфом*) в Γ. Если Γ — граф диаметра d и $i \le d$, то через Γ_i обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *сильно регулярный граф* с параметрами (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух несмежных вершин a, b из Γ. Граф Γ называется *n-кликой* (*кокликой*), если он содержит точно n вершин и различные вершины этого графа смежны (не смежны).

Пусть $(X, \mathcal{L})$ — система инцидентности, где X — множество точек и $\mathcal{L}$ — множество прямых. *Точечным графом* (*графом коллинеарности*) системы инцидентности $(X, \mathcal{L})$ называется граф, множеством вершин которого является множество X, и две различные вершины смежны, если они инцидентны одной прямой.

Система инцидентности $(X, \mathcal{L})$ называется *почти $2n$-угольником порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s + 1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t + 1$ прямой (прямые пересекаются не более чем по одной точке), диаметр графа коллинеарности равен n и для

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00009) РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программ Отделения математических наук РАН и совместных программ с СО РАН и с НАН Беларуси.

любой пары $(a, L) \in (X, \mathcal{L})$ на прямой L найдется единственная точка, ближайшая к a в графе коллинеарности. Почти $2n$-угольник называется *обобщенным $2n$-угольником*, если любые две его точки u, w, находящиеся на расстоянии, меньшем n, лежат в единственном геодезическом пути, идущем от u к w. Обобщенный $2n$-угольник порядка (s, t) называется *толстым*, если $s > 1$ и $t > 1$. *Графом прямых* обобщенного $2n$-угольника называется граф, вершинами которого являются прямые, и две вершины смежны, если они пересекаются в некоторой точке. *Графом инцидентности* обобщенного $2n$-угольника $(X, \mathcal{L})$ называется граф, вершинами которого являются элементы множества $X \cup \mathcal{L}$, и две вершины смежны, если они инцидентны в обобщенном $2n$-угольнике.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (соотв. $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соотв. $\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \ldots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$. Для подмножества X группы автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается подграф, индуцированный на множестве всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X.

Для изучения возможных порядков и подграфов неподвижных точек автоморфизмов дистанционно регулярных графов Г. Хигмен предложил оригинальный метод, использующий теорию характеров конечных групп. Этот метод изложен в монографии П. Камерона [1], причем он применялся им только для изучения инволютивных автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами (3250,57,0,1). Позднее, в работах [2–4] изучались автоморфизмы сильно регулярных графов с малыми числами пересечений. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{q(q^3+1), q^4, q^4; 1, 1, (q^3+1)\}$ на $(q^3+1)(q^2+q+1)(q^4-q^2+1)$ вершинах имеет собственные значения $q(q^3+1), q^2+q-1, -(q^2-q+1), -(q^3+1)$ кратностей $1, 1/2\, q^3(q^3+1)^2, 1/2\, q^3(q+1)^2(q^4-q^2+1), q^5-q^3+q$ соответственно, является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(q, q^3)$ (см. [5, гл. 6]) и не содержит n-циклов для $4 \le n \le 5$. Известно (см. [6]) существование толстых обобщенных шестиугольников $GH(q, q)$ и $GH(q, q^3)$ с точностью до двойственности, но не доказана их единственность. Эти обобщенные шестиугольники имеют группы автоморфизмов $G_2(q)$ и ${}^3D_4(q)$ соответственно. Назовем известные шестиугольники порядка (q, q) и (q, q^3) *классическими*.

Доказана (см. [6]) единственность обобщенного шестиугольника порядка $(2, 8)$. В нашей работе изучаются автоморфизмы обобщенного шестиугольника $GH(3, 27)$.

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{84, 81, 81; 1, 1, 28\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда верно одно из утверждений:*

(1) *$p = 7, 13$ или 73 и Ω — пустой граф;*

(2) *$p = 7$ и Ω состоит из 7ω вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 в Γ;*

(3) *$p = 13$ и Ω является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(3, 1)$;*

(4) *$p = 3$, $|\Omega| \equiv 1(\bmod 3)$ и либо*

(i) Ω является 1-кликой или 4-кликой, либо

(ii) Ω содержится в $a^\perp$ для некоторой вершины a из Ω, либо

(iii) Ω — точечный граф обобщенного шестиугольника $GH(3, 3)$, либо

(iv) в Ω найдется такая 4-клика L, что Ω содержится в объединении шаров радиуса 1 с центрами в L;

(5) *$p = 2$, $|\Omega|$ четно и либо*

(i) Ω является $(54m+28)$-кокликой, где $0 \le m \le 5$, либо

(ii) Ω является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(1, 9)$, либо

(iii) Ω является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(3, 3)$, либо

(*iv*) $|\Omega| = 116$, *Ω содержит четыре вершины степени 28 и двадцать восемь 4-клик, вершины которых имеют степень 4 в Ω.*

Пусть Γ — точечный граф обобщенного $2n$-угольника $(X, \mathcal{L})$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. В [7] доказано, что если G действует транзитивно на множестве $2n$-угольников в каждом из графов для $(X, \mathcal{L})$: точечном графе, графе прямых, графе инцидентности, то обобщенный $2n$-угольник $(X, \mathcal{L})$ является классическим. Из нашей теоремы вытекает

Следствие. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{84, 81, 81; 1, 1, 28\}$, и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Тогда Γ изоморфен точечному графу классического обобщенного шестиугольника группы Стейнберга ${}^3D_4(3)$.*

2. Автоморфизмы обобщенного шестиугольника $GH(q, q^3)$

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф степени k на v вершинах с массивом пересечений $\{q(q^3+1), q^4, q^4; 1, 1, (q^3+1)\}$ и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Для вершин u, w, находящихся на расстоянии l в Γ, через p^l_{ij} обозначается число вершин z таких, что $d(u, z) = i$ и $d(z, w) = j$.

Лемма 2.1. *Для ненулевых чисел пересечения графа Γ верны равенства*

(1) $p^1_{11} = q - 1$, $p^1_{21} = q^4$, $p^1_{22} = q^4(q-1)$, $p^1_{23} = q^8$, $p^1_{33} = q^8(q-1)$;

(2) $p^2_{11} = 1$, $p^2_{12} = q - 1$, $p^2_{22} = q^7 + q^4 - q$, $p^2_{13} = q^4$, $p^2_{23} = q^4(q-1)(q^3+1)$, $p^2_{33} = q^5(q-1)(q^3+q+1)$;

(3) $p^3_{12} = q^3+1$, $p^3_{22} = (q^3+1)^2(q-1)$, $p^3_{13} = (q^3+1)(q-1)$, $p^3_{23} = q(q-1)(q^3+1)(q^3+q+1)$, $p^3_{33} = q^4(q-1)(q^4+q^2-1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $p^2_{12} = a_2$, $p^3_{13} = a_3$. Ввиду [6, лемма 4.1.7] получим

$$p^i_{j+1h} = \big(p^i_{jh-1}b_{h-1} + p^i_{jh}(a_h - a_j) + p^i_{jh+1}c_{h+1} - p^i_{j-1h}b_{j-1}\big)/c_{j+1},$$

в частности,

$$p^1_{ii-1} = c_i k_i/k, p^1_{ii} = a_i k_i/k, \quad p^1_{ii+1} = b_i k_i/k, \quad p^i_{i-22} = c_{i-1}c_i/\mu, p^{i-1}_{i+12} = b_{i-1}b_i/\mu,$$

$$p^2_{i-1i+1} = k_i c_i b_i/(kb_1), \quad p^{i-1}_{i2} = b_{i-1}(a_i + a_{i-1} - a_1)/\mu, \quad p^{i+1}_{i2} = c_{i+1}(a_i + a_{i+1} - a_1)/\mu,$$

где $a_i = b_0 - b_i - c_i$. С помощью этих формул находим числа пересечения. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если Γ содержит собственный подграф Δ, являющийся точечным графом обобщенного шестиугольника порядка (q, t), то $t \le q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ содержит собственный подграф Δ, являющийся точечным графом обобщенного шестиугольника порядка (q, t). Тогда число вершин в Δ равно $v' = (q+1)(q^2t^2 + qt + 1)$, степень графа Δ равна $k' = q(t+1)$, и число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ равно $v'(k - k') = (q+1)(q^2t^2 + qt + 1)q(q^3 - t)$. Так как каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна не более чем с одной вершиной из Δ, то $v = (q+1)(q^8 + q^4 + 1) \ge v' + v'(k - k')$, поэтому $t^3 - q^3t^2 - q^2t + q^5 = (t - q)(t + q)(t - q^3) \ge 0$. Отсюда $t \le q$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если g — автоморфизм простого порядка p в G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ — непустой граф, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *если граф Ω не связен, то он является кокликой, и в случае $p > q$ число p делит q^3+1;*

(2) *если граф Ω связен и $p > q$, то он является точечным графом обобщенного шестиугольника порядка (q, t), и либо $t = 1$, либо число qt является квадратом, $q \le t^3$ и $t \le q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что граф Ω не связен. Тогда вершины из его разных компонент связности находятся на расстоянии 3 в Γ. Допустим, что a, b — смежные вершины из Ω, и выберем вершину c из другой связной компоненты графа Ω. По определению обобщенного многоугольника клика $a^\perp \cap b^\perp$ содержит единственную вершину d, находящуюся на расстоянии 2 от c. Получаем противоречие с тем, что $d \in \Omega$. Значит, Ω — коклика.

Если $p > q$, то из равенства $k = q(q^3+1)$ получим, что p делит q^3+1. Утверждение (1) доказано.

Пусть граф Ω связен и $p > q$. Рассмотрим смежные вершины $a, b \in \Omega$. Тогда клика $L = a^\perp \cap b^\perp$ содержится в Ω. Далее, g действует на множестве из q^3 максимальных клик, отличных от L и лежащих в $[b]$, и фиксирует еще одну клику L_1. Выбрав $c \in L_1 - \{b\}$, найдем еще одну максимальную клику L_2 из $[c]$, фиксируемую g.

Покажем, что любые две вершины $a, d \in \Omega$, находящиеся на расстоянии 3 в Γ, имеют одинаковые степени в Ω. Ввиду связности Ω найдется вершина $b \in \Omega(a) \cap \Gamma_2(d)$ такая, что клика $a^\perp \cap b^\perp$ содержится в Ω и содержит единственную вершину, находящуюся на расстоянии 2 от d. Далее, каждой вершине $b \in \Omega(a) \cap \Gamma_2(d)$ отвечает единственная смежная с b вершина c из $\Omega(d) \cap \Gamma_2(a)$ и клика $c^\perp \cap d^\perp$ из Ω. Так как $\mu = 1$, то различным вершинам b, b' из $\Omega(a) \cap \Gamma_2(d)$ отвечают различные вершины c, c' и $|\Omega(a)| = |\Omega(d)|$.

Напомним, что $p^1_{33} = q^8(q-1)$, поэтому для смежных вершин a, b из Ω найдется вершина $d \in \Omega$, находящаяся на расстоянии 3 от a и от b. Отсюда Ω — регулярный граф. Теперь Ω — точечный граф почти $2d$-угольника с $d = 3$, причем $c_2(\Omega) = 1$. Поэтому Ω — точечный граф обобщенного шестиугольника порядка (q, t) и по [6, теорема 6.5.1] либо $t = 1$, либо число qt является квадратом, $q \le t^3$ и $t < q^3$. По лемме 2.2 получим $t \le q$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [1]. При этом графу Γ диаметра d на v вершинах отвечает симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа Γ и $\mathcal{R} = \{R_0, \ldots, R_{d-1}\}$, где R_0 — отношение равенства на X и для $i \ge 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны тогда и только тогда, когда $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица порядка v. Тогда $A_i A_j = \sum p^l_{ij} A_l$ для подходящих неотрицательных целых чисел p^l_{ij}.

Пусть P_i — квадратная матрица, в которой на месте (j, l) стоит число p^l_{ij}. Тогда собственные значения $k = p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$ соответственно. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1, поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j. Квадратные матрицы P и Q порядка $d+1$, в которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений схемы* $(X, \mathcal{L})$ и связаны равенствами $PQ = QP = |X|I$, где I — единичная матрица порядка $d+1$.

Предложение [1, теорема 17.12]. *Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна* $\dfrac{n}{\langle u_j, w_j \rangle}$.

Фактически, из доказательства предложения следует, что w_j являются столбцами матрицы P, а $m_j u_j$ — строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A_1, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления $\psi|_{W_i}$. Тогда (см. [1, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1}\sum_{j=0}^{d} Q_{ij}\alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров χ_i являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2.4. *Пусть $g \in G$, χ_1, χ_2, χ_3 — характеры проекций представления ψ на подпространства размерности $1/2\,q^3(q^3+1)^2$, $1/2\,q^3(q+1)^2(q^4-q^2+1)$ и q^5-q^3+q соответственно. Тогда*

$$\chi_1(g) = \big((q^2+1)(q^3+1)\alpha_0(g) + (q^3+q^2+1)\alpha_1(g) + \alpha_2(g)\big)/\big(2q^3(q^2+q+1)\big) - (q^3+1)^2/(2q^3),$$

$$\chi_2(g) = \big((q-1)(q+1)^2(q^2-q+1)\alpha_0(g) - (q^3-q^2+1)\alpha_1(g) - \alpha_2(g)\big)/\big(2q^3(q^2-q+1)\big) + (q+1)^2(q^4-q^2+1)/(2q^3),$$

$$\chi_3(g) = \big((q^2-q+1)\alpha_0(g) - (q-1)\alpha_1(g) + \alpha_2(g)\big)/\big(q^2(q^2-q+1)(q^2+q+1)\big) - (q^4-q^2+1)/q^2.$$

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{q^3(q^3+1)^2}{2} & \dfrac{q^2(q^3+1)(q^2+q-1)}{2} & \dfrac{(q^3+1)(q^2-q-1)}{2q} & -\dfrac{(q^3+1)^2}{2q^3} \\ \dfrac{q^3(q+1)^2(q^4-q^2+1)}{2} & -\dfrac{q^2(q+1)(q^4-q^2+1)}{2} & -\dfrac{(q+1)(q^4-q^2+1)}{2q} & \dfrac{(q+1)^2(q^4-q^2+1)}{2q^3} \\ q(q^4-q^2+1) & -q^4+q^2-1 & \dfrac{q^4-q^2+1}{q} & -\dfrac{q^4-q^2+1}{q^2} \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\chi_1(g) = \big(q^6(q^3+1)\alpha_0(g) + q^5(q^2+q-1)\alpha_1(g) + q^2(q^2-q-1)\alpha_2(g) - (q^3+1)\alpha_3(g)\big)/\big(2q^3(q^2+q+1)(q^4-q^2+1)\big).$$

Подставляя $\alpha_3(g) = (q^3+1)(q^2+q+1)(q^4-q^2+1) - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g)$, получим

$$\chi_1(g) = \big((q^2+1)(q^3+1)\alpha_0(g) + (q^3+q^2+1)\alpha_1(g) + \alpha_2(g)\big)/\big(2q^3(q^2+q+1)\big) - (q^3+1)^2/(2q^3).$$

Аналогично,

$$\chi_2(g) = \big(q^6(q+1)\alpha_0(g) - q^5\alpha_1(g) - q^2\alpha_2(g) + (q+1)\alpha_3(g)\big)/\big(2q^3(q^2-q+1)(q^2+q+1)\big).$$

Подставляя $\alpha_3(g) = (q^3+1)(q^2+q+1)(q^4-q^2+1) - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g)$, получим

$$\chi_2(g) = \big((q-1)(q+1)^2(q^2-q+1)\alpha_0(g) - (q^3-q^2+1)\alpha_1(g) - \alpha_2(g)\big)/(2q^3(q^2-q+1)) + (q+1)^2(q^4-q^2+1)/(2q^3).$$

Наконец,

$$\chi_3(g) = \big(q\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + \alpha_2(g)/q - \alpha_3(g)/q^2\big)/\big((q^3+1)(q^2+q+1)\big).$$

Подставляя $\alpha_3(g) = (q^3+1)(q^2+q+1)(q^4-q^2+1) - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g)$, получим

$$\chi_3(g) = \big((q^2-q+1)\alpha_0(g) - (q-1)\alpha_1(g) + \alpha_2(g)\big)/(q^2(q^2-q+1)(q^2+q+1)) - (q^4-q^2+1)/q^2.$$

Лемма доказана.

Далее рассмотрим случай $q = 3$. Тогда соответствующие характеры проекций представления ψ примут вид

$$\chi_1(g) = (280\alpha_0(g) + 37\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/(2\cdot 27\cdot 13) - 7^2 8/27,$$

$$\chi_2(g) = (224\alpha_0(g) - 19\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/(2\cdot 27\cdot 7) + 8\cdot 73/27,$$

$$\chi_3(g) = (7\alpha_0(g) - 2\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/(9\cdot 7\cdot 13) - 73/9.$$

Лемма 2.5. *Пусть g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\mathrm{Fix}(g)$ — пустой граф. Тогда $p = 7, 13$ или 73, причем в случае $p = 73$ имеем*

$$(\alpha_1(g), \alpha_2(g), \alpha_3(g)) \in \{(73, 6789, 19710), (1387, 9417, 15768), (2701, 12045, 11826)\}.$$

Доказательство. Так как число вершин графа равно $2^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$, то $p = 2, 7, 13$ или 73. Через Δ_i обозначим множество вершин a графа Γ таких, что $d(a, a^g) = i$. Каждая вершина из Δ_1 смежна точно с 81 вершиной из Δ_3, в противном случае Γ содержит пятиугольник. Обратно, каждая вершина из Δ_3 смежна не более чем с 28 вершинами из Δ_1. Поэтому $81\alpha_1 \leq 28\alpha_3$.

Пусть $p = 2$. Заметим, что $\alpha_2(g) = 0$. Если вершина a смежна с вершиной a^g и $\{b, c\} = [a] \cap [a^g]$, то $b^g = c$ и g стабилизирует 4-клику $\{a, a^g, b, c\}$. Поэтому $\alpha_1(g) = 4s$ для некоторого неотрицательного целого числа s. Значение характера $\chi_1(g) = 37\alpha_1(g)/(2 \cdot 27 \cdot 13) - 8 \cdot 7^2/27$ является целым числом, поэтому $s = 13 \cdot 27r - 26$ и $\alpha_1(g) = 52 \cdot 27r - 104$ ($r \in \mathbb{Z}$). Из целочисленности $\chi_2(g) = -19\alpha_1(g)/(2 \cdot 27 \cdot 7) + 8 \cdot 73/27$ получаем, что $r = 7u - 2$ и $\alpha_1(g) = 9828u - 2912$ ($u \in \mathbb{Z}$). Так как $\alpha_3 = 26572 - \alpha_1$, то $\alpha_1 \leq 6825$. Получаем противоречие с тем, что $\alpha_1(g) = 9828u - 2912$ ($\alpha_1(g) = 6916$ при $u = 1$).

Пусть $p = 73$. Тогда из целочисленности значений $\chi_1(g)$ и $\chi_2(g)$ и неравенства $81\alpha_1 \leq 28\alpha_3$ получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

В леммах 2.6 и 2.7 предполагается, что g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ — непустой граф.

Лемма 2.6. *Если $p > 3$, то либо $p = 7$ и Ω состоит из 7ω вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 друг от друга в Γ, $\omega \leq 44$, либо $p = 13$ и Ω является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(3, 1)$.*

Доказательство. Пусть $p > 3$. По лемме 2.2 либо Ω — коклика и $p = 7$, либо Ω — точечный граф обобщенного шестиугольника порядка $(3, t)$, число $3t$ является квадратом и $t \leq 3$. Отсюда $t = 1$ и $p = 13$.

Пусть Ω является 7ω-кокликой и $\alpha_i(g) = 7w_i$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $8w_0 - 19w_1 - w_2 - 20$ делится на 54. Из целочисленности $\chi_3(g)$ следует, что $7w_0 - 2w_1 + w_2 - 13$ делится на $9 \cdot 13$. Заметим, что $\alpha_2(g) \geq 7 \cdot 84\omega$, поэтому $\omega \leq 52 \cdot 73/85$ и $\omega \leq 44$. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *Если $p = 3$, то $|\Omega| \equiv 1 (\bmod 3)$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *либо Ω является 1-кликой, $\alpha_1(g) = 13s + 6t + 1 \leq 84$, $\alpha_2(g) = 12t - 65s - 5$ и $s \leq -1$, либо Ω является 4-кликой, $\alpha_1(g) = 13s + 6t + 4 \leq 324$, $\alpha_2(g) = 12t - 65s - 20$ и $s \leq 5$;*

(2) $\Omega \subseteq a^\perp$;

(3) Ω — *точечный граф обобщенного шестиугольника $GH(3, 3)$ и $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 0$;*

(4) *в Ω найдется такая 4-клика L, что Ω содержится в объединении шаров радиуса 1 с центрами в L.*

Доказательство. Пусть $p = 3$. Тогда $|\Omega| \equiv 1 (\bmod 3)$. Далее, вершина u из $\Gamma - \Omega$, смежная с u^g, попадает в g-допустимую 4-клику, поэтому u смежна с единственной вершиной из Ω.

Пусть диаметр Ω не больше 2. Если Ω является кликой, то либо $|\Omega| = 1$, $3 \leq \alpha_1(g) \leq 84$ и $\alpha_1(g)/3 \equiv 1 (\bmod 3)$, либо $|\Omega| = 4$, $0 \leq \alpha_1(g) \leq 324$ и $\alpha_1(g)$ делится на 9.

Если $|\Omega| = 1$, то ввиду целочисленности $\chi_2(g)$ и $\chi_3(g)$ получим сравнения $5\alpha_1(g) + \alpha_2(g) \equiv 0 (\bmod 14)$ и $2\alpha_1(g) - \alpha_2(g) - 7 \equiv 0 (\bmod 91)$. Отсюда $\alpha_2(g) = 14r - 5\alpha_1(g)$, $\alpha_1(g) = 13s + 2r + 1$ ($r, s \in \mathbb{Z}$) и $s \leq 1$. Так как $\alpha_i(g)$ делится на 3, то $r = 3t$ ($t \in \mathbb{Z}$) и $s \equiv -1 (\bmod 3)$. Например, в случае $s = -1$ имеем $\alpha_1(g) = 6t - 12$, $\alpha_2(g) = 12t + 60$ и $t \in \{4, 7, 10, 13, 16\}$.

Если Ω является 4-кликой, то $\alpha_1(g) = 13s + 6t + 4$, $\alpha_2(g) = 12t - 65s - 20$ ($s, t \in \mathbb{Z}$) и $s \leq 5$. Например, в случае $s = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 6t + 69$, $\alpha_2(g) = 12t - 345$ и $t \in \{29, 32, 35, 38, 41\}$. Утверждение (1) выполняется.

Пусть Ω не является кликой. Тогда для $a,b\in\Omega$ число $|[a]\cap[b]\cap\Omega|$ равно 2 при $d(a,b)=1$ и 1 при $d(a,b)=2$.

Пусть диаметр Ω равен 2. Тогда по [6, теорема 1.17.1] либо $\Omega\subseteq a^\perp$ для некоторой подходящей вершины a из Ω, либо Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(400,21,2,1)$. Но во втором случае Ω не может быть подграфом Γ, так как в противном случае для любых смежных вершин $u,w\in\Omega$ получим $|\Omega_2(u)\cap\Omega_2(w)|=360$ и $p^1_{22}=162$, противоречие. Поэтому $\Omega\subseteq a^\perp$, т. е. выполняется утверждение (2).

Пусть диаметр Ω больше 2. Так как $c_3=28$, то для любых вершин $a,b\in\Omega$ с $d(a,b)=3$ найдется 3-путь в Ω от a к b. Значит, Ω — связный граф диаметра 3. Покажем, что любые две вершины $a,d\in\Omega$, находящиеся на расстоянии 3 в Γ, имеют одинаковые степени в Ω. Ввиду связности Ω найдется вершина $b\in\Omega(a)\cap\Gamma_2(d)$ такая, что клика $a^\perp\cap b^\perp$ содержится в Ω и содержит единственную вершину, находящуюся на расстоянии 2 от d. Далее, каждой вершине $b\in\Omega(a)\cap\Gamma_2(d)$ отвечает единственная смежная с b вершина c из $\Omega(d)\cap\Gamma_2(a)$ и клика $c^\perp\cap d^\perp$ из Ω. Так как $\mu=1$, то различным вершинам b,b' из $\Omega(a)\cap\Gamma_2(d)$ отвечают различные вершины c,c' и $|\Omega(a)|=|\Omega(d)|$.

Предположим, что $a,e\in\Omega$, причем $d(a,e)=3$. Тогда существуют вершины $b\in\Omega(a)\cap\Omega_2(e)$ и $c\in\Omega_2(a)\cap\Omega(e)$. Пусть $u\in[a]-\Omega$ и $d(u,u^g)=1$. Тогда найдется путь $au^{g^i}yc$ такой, что $y^{\langle g\rangle}$ является 3-кликой, причем $[u^{g^{i+1}}]\cap[y]=\{u^{g^i},y^g\}$, противоречие. Отсюда $\alpha_1(g)=0$.

Пусть $|\Omega(a)|>3$. Тогда в Ω содержится вершина, находящаяся на расстоянии 3 от e и от c. Поэтому $|\Omega(a)|=|\Omega(c)|$ и степени вершин из $\Omega(a)-b^\perp$ равны $|\Omega(a)|$. Но в силу симметрии $|\Omega(b)|=|\Omega(e)|$, и для любой вершины $x\in\Omega(a)$ выполняется равенство $|\Omega(a)|=|\Omega(x)|$. Ввиду связности графа Ω он является точечным граф обобщенного шестиугольника порядка (q,t), причем $t\le q$ по лемме 2.2. Далее, если вершина u из $\Gamma-\Omega$ смежна с вершиной из Ω, то $d(u,u^g)=2$ и $k-k'$ делится на 9, где k' — степень графа Ω. Поэтому $t=3$ и Ω — точечный граф для $GH(3,3)$. Так как $v'(k-k')=v-v'$, где $v'=|\Omega|$, то $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=0$ и $\alpha_2(g)=26208$. Таким образом, выполняется утверждение (3).

Пусть для любой вершины $a\in\Omega$ с $|\Omega_3(a)|\ne 0$ степень a в Ω равна 3. Зафиксируем 3-путь $abce$ в Ω. Тогда $\Omega(a)\subseteq a^\perp\cap b^\perp$ и $\Omega(e)\subseteq c^\perp\cap e^\perp$. Так как $a^\perp\cap[b]\subseteq\Omega_3(e)$, то $\Omega_2(a)\subseteq[b]$. Симметрично, $\Omega_2(e)\subseteq[c]$. Далее, $|\Omega_3(b)|=|\Omega_3(c)|=0$. Положим $[b]\cap[c]=\{b',c'\}$. Если $|\Omega_3(b')|\ne 0$, то вершина x из $\Omega_3(b')$ находится на расстоянии 3 от b или от c, противоречие. Значит, $|\Omega_3(b')|=|\Omega_3(c')|=0$ и Ω содержится в объединении шаров радиуса 1 с центрами в $\{b,c,b',c'\}$. Утверждение (4) выполняется. Лемма доказана.

Лемма 2.8. *Пусть s — инволюция группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и $\Delta=\mathrm{Fix}(s)$. Тогда Δ — непустой граф с четным числом вершин и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) Δ *является* $(54m+28)$*-кокликой,* $\alpha_1(s)=0$ *и* $\alpha_2(s)=4536m+2352$*, где* $0\le m\le 5$;

(2) Δ *является точечным графом обобщенного шестиугольника* $GH(1,9)$*,* $\alpha_0(s)=182$*,* $\alpha_1(s)=1820$ *и* $\alpha_2(s)=19656$;

(3) Δ *является точечным графом обобщенного шестиугольника* $GH(3,3)$*,* $\alpha_0(s)=364$*,* $\alpha_1(s)=0$ *и* $\alpha_2(s)=364\cdot 72$;

(4) $|\Delta|=116$*,* Δ *содержит четыре вершины степени* 28 *и двадцать восемь* 4*-клик, вершины которых имеют степень* 4 *в* Δ*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $|s|=2$, то по лемме 2.4 Δ — непустой граф и $|\Delta|$ четно. Если для вершины u из Γ имеем $d(u,u^s)=2$, то существует единственная вершина из Δ, смежная с u и u^s. Далее, если вершины w,w^s смежны, то подграф $[w]\cap[w^s]$ содержится в Δ, так как в противном случае лишь одна вершина из максимальной клики, содержащей w и w^s, лежит на минимальном расстоянии от некоторой вершины из Δ.

Докажем, что если в Δ содержится ребро, то Δ — связный граф. Пусть a,b — смежные вершины из Δ и вершина x принадлежит связной компоненте графа Δ, не содержащей $\{a,b\}$. Положим $a^\perp\cap b^\perp=\{a,b,c,e\}$. Тогда, без ограничения общности, $d(a,x)=d(b,x)=d(c,x)=3$. Но $d(e,x)=2$, и поэтому $c,e\in\Delta$, противоречие.

Итак, Δ — связный граф или коклика. Пусть Δ является кокликой. Тогда $\alpha_0(s) = 2n$, $\alpha_1(s) = 0$ и $\alpha_2(s) = 84 \cdot 2n = 168n$ ($n \in \mathbb{Z}$). Из целочисленности $\chi_1(s)$ получаем, что $(560n + 168n)/(26 \cdot 27) - 8 \cdot 49/27$ — целое число. Поэтому $28n - 8 \cdot 49$ делится на 27. Отсюда $n = 27m + 14$ для некоторого целого числа m, $\alpha_0(s) = 54m + 28$ и $\alpha_2(s) = 4536m + 2352$. Так как $\alpha_0(s) + \alpha_2(s) \le v$, то $0 \le m \le 5$. Таким образом, выполняется утверждение (1).

Далее будем предполагать, что Δ содержит ребро ab. Так как p^1_{23} нечетно, то существует вершина $d \in \Delta_2(b) \cap \Delta_3(a)$. Обозначим некоторую вершину из $[b] \cap [d]$ через c. Поскольку $c_3 = 28$, в Δ содержится геодезический 6-цикл.

Пусть Δ является шестиугольником. Тогда $\alpha_0(s) = 6$, $\alpha_1(s) = 12$ и $\alpha_2(s) = 6 \cdot 78$, противоречие с тем, что $\chi_1(s)$ — целое число.

Допустим, что $x \in \Delta$ и $d(a, x) = d(b, x) = 3$. Тогда $a^\perp \cap b^\perp = \{a, b, c, e\}$ и, без ограничения общности, $d(a, x) = d(b, x) = d(c, x) = 3$. Но $d(e, x) = 2$, поэтому $c, e \in \Delta$. Если $f \in [e] \cap [x]$, то Δ содержит два 3-пути: $aefx$ и $azyx$. Так как $d(b, x) = d(b, y) = 3$, то $x^\perp \cap y^\perp$ содержит единственную вершину x', находящуюся на расстоянии 2 от b, и $x^\perp \cap y^\perp \subseteq \Delta$. Аналогично, $x^\perp \cap y^\perp$ содержит единственную вершину y', находящуюся на расстоянии 2 от c. Если $|\Delta| = 12$, то $\alpha_1(s) = 16$ и $\alpha_2(s) = 12 \cdot 78$, противоречие с тем, что $\chi_1(s)$ — целое число.

Если Δ не содержит треугольников, то Δ является двудольным почти шестиугольником, причем вершины, находящиеся на расстоянии 3 в Δ, имеют одну и ту же степень в Δ. Отсюда Δ является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(1, t)$, где t нечетно и не больше 27. Поэтому $\alpha_0(s) = 2(1 + t + t^2)$, $\alpha_1(s) = 2(t + 1)(1 + t + t^2)$ и $\alpha_2(s) = 2(1 + t + t^2)(81 - 3t)$. Из целочисленности $\chi_1(s) = (34t^3 + 432t^2 + 432t + 398 - 104 \cdot 49)/(27 \cdot 13)$ следует, что t делится на 3 и $(t + 1)(t^2 + t + 1)$ делится на 13. Отсюда $t = 3, 9$. Из целочисленности $\chi_2(s) = (-16t^3 + 108t^2 + 108t + 124 + 56 \cdot 73)/(27 \cdot 7)$ следует, что $(t + 1)(t^2 + t + 1)$ делится на 7. Отсюда $t = 9$. Таким образом выполняется утверждение (2).

Предположим, что Δ — граф такой, что $|[a] \cap [b] \cap \Delta| = 2$ для любых смежных вершин a, b из Δ. Снова вершины, находящиеся на расстоянии 3 в Δ, имеют одинаковые степени. Пусть Δ содержит 4-клику $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Так как p^1_{23} нечетно, то Δ содержит вершину b из $\Gamma_2(a_2) \cap \Gamma_3(a_1)$. Далее, p^2_{13} нечетно, поэтому Δ содержит вершину c из $\Gamma_3(a_2) \cap [b]$, некоторая вершина a_i находится на расстоянии 2 от c для $i \in \{1, 3, 4\}$ и все вершины a_i имеют одинаковые степени. Значит, граф Δ регулярен и является точечным графом обобщенного шестиугольника порядка $(3, t)$. Ввиду леммы 2.2 имеем $t \in \{1, 3\}$. Пусть $t = 1$. Тогда $\chi_2(s) = (52(224 - 78)/14 + 8 \cdot 73)/27$, противоречие. Таким образом, выполняется утверждение (3).

Предположим теперь, что Δ содержащит максимальные клики порядков 2 и 4. Тогда любая максимальная 2-клика из Δ либо пересекает максимальную 4-клику из Δ, либо содержит вершину, смежную с одной из вершин максимальной 4-клики. Отсюда Δ содержит 6-цикл $abcdef$ такой, что не каждое ребро этого цикла лежит в 4-клике из Δ, $a', b' \in \Delta(a) \cap [b]$, $d', e' \in \Delta(d) \cap [e]$, $f' \in \Delta(a') \cap [e']$ и $c' \in \Delta(b') \cap [d']$. Положим $\Delta_0 = \{a, a', b, b', \dots, f, f'\}$.

Допустим, что $\Delta(b) \cap [c]$ содержит две вершины b_1 и c_1. Тогда $f_1, e_1 \in \Delta(f) \cap [e]$, $c'_1, d'_1 \in \Delta(c') \cap [d']$ и $a'_1, f'_1 \in \Delta(a') \cap [f']$, для некоторых различных вершин $a'_1, c'_1, d'_1, e_1, f_1 \in \Delta$. Рассмотрев 6-цикл $ab'c'd'ef$, получим, что $\Delta(b') \cap [c']$ содержит еще две вершины. В этом случае каждое ребро 6-цикла $abcdef$ лежит в 4-клике из Δ, противоречие.

Допустим, что $\Delta(a) - \Delta_0$ содержит вершину x. Тогда расстояние от x до d равно 2 и для $q \in \Delta(d) \cap [x]$ и 6-цикла $abcdqp$ подграф $\Delta(x) \cap [q]$ содержит еще две вершины. Получаем противоречие с тем, что для 6-цикла $axqdef$ подграф $\Delta(a) \cap [f]$ содержит еще две вершины. Отсюда $\Delta(y) = 4$ для любой вершины y, лежащей в 4-клике из Δ.

Допустим, что $\Delta(c) - \Delta_0$ содержит вершину x. Тогда расстояние от x до f равно 2 и для $q \in \Delta(f) \cap [x]$ и 6-цикла $abcxqf$ подграф $\Delta(x) \cap [q]$ содержит еще две вершины x', q'. Предположим, что q' лежит в $\Gamma_2(f')$, а $\{q, p, p'\} \in \Gamma_3(f')$. Тогда получим противоречие с тем, что ребро fq лежит на расстоянии 3 от f'. Итак, без ограничения общности, f' смежна с q' и x' смежна с c'. Отсюда степени вершин c, c', f, f' равны в Δ, причем объединение окрестностей этих вершин в Δ является объединением изолированных 4-клик. Пусть $|\Delta(c)| = 2m$. Тогда

$\alpha_0(s) = 4 + 8m$, $\alpha_1(s) = 16m$ и $\alpha_2(s) = 4(84 - 6m) + 8m \cdot 78$ $(m, n \in \mathbb{Z})$. Из целочисленности $\chi_1(s)$ получаем, что $44m - 112$ делится на 9 и $m = 9n + 5$. Из целочисленности $\chi_2(s) = \big(112(44 + 72n) - 19(72n + 40) - 2(54 - 54n) - 72n \cdot 39 - 20 \cdot 78\big)/(27 \cdot 7) + 8 \cdot 73/27$ следует, что $n = 7n_1 + 1$, откуда $\alpha_0(s) = 504n_1 + 116$, $\alpha_1(s) = 1008n_1 + 224$, $\alpha_2(s) = 37800n_1 + 8736$. Так как $\alpha_0(s) + \alpha_1(s) + \alpha_2(s) \le 26572$, то $n_1 = 0$ и $\alpha_0(s) = 116$, $\alpha_1(s) = 224$, $\alpha_2(s) = 8736$. Утверждение (4) выполняется. Лемма доказана.

Теорема следует из лемм 2.5–2.8.

В следующей лемме получаем некоторые ограничения на группу G.

Лемма 2.9. *Выполняются следующие утверждения:*
(1) *в G нет элементов порядка 49, и 7^3 не делит $|G|$;*
(2) *в G нет элементов порядка 169, и 13^3 не делит $|G|$;*
(3) *если G содержит элемент f порядка 73, то $C_G(f) = \langle f \rangle$.*

Доказательство. Пусть f — элемент порядка 49 из G, $g = f^7$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда по лемме 2.5 подграф Ω состоит из 7ω вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 друг от друга. Далее, $v - |\Omega| = 7(4 \cdot 13 \cdot 73 - \omega)$ делится на 49. Поэтому $\omega \equiv 2 \pmod 7$ и $\mathrm{Fix}(f)$ содержит некоторую вершину a. Это противоречит тому, что $|[a]|$ не делится на 49.

Допустим, что $|G|$ делится на 7^3. Пусть P — силовская 7-подгруппа группы G, $\langle g_i \rangle$ — подгруппы порядка 7 из P такие, что $\mathrm{Fix}(g_i)$ состоит из $7\omega_i \ne 0$ вершин, попарно находящихся на расстоянии 3 друг от друга. Так как $|[a]|$ не делится на 49 для любой вершины $a \in \Gamma$, то подграфы $\mathrm{Fix}(g_i)$ попарно не пересекаются. Если $|G|$ делится на 7^3, то $v - \sum_i 7\omega_i$ делится на 7^3, поэтому $52 \cdot 73 - \sum_i \omega_i = 7^4 + 49 \cdot 28 + 23 - \sum_i \omega_i$ делится на 49 и $\sum_i \omega_i \equiv 23 \pmod{49}$. Отсюда найдется i_0 такое, что ω_{i_0} не делится на 7. Тогда $|C_P(g_{i_0})/\langle g_{i_0} \rangle|$ не делится на 49. Поэтому $|g_{i_0}^P|$ делится на 7 и $\sum_{\{j \mid g_j \in g_{i_0}^P\}} \omega_j$ делится на 7. Отсюда $\sum_i \omega_i$ делится на 7, противоречие. Утверждение (1) доказано.

Если f — элемент порядка 169 из G, $g = f^{13}$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то по лемме 2.5 подграф Ω является точечным графом обобщенного шестиугольника $GH(3, 1)$, и поэтому $v - |\Omega| = 52 \times (7 \cdot 73 - 1)$ делится на 13^2, противоречие. Значит, в G нет элементов порядка 169.

Допустим, что $|G|$ делится на 13^3. Пусть Q — подгруппа порядка 13^3 группы G, n — число подгрупп порядка 13 из Q, фиксирующих хотя бы одну вершину из Γ, и Q_0 — подгруппа из Q, порожденная указанными подгруппами. Так как $|[a]|$ не делится на 13, то $v - 52n$ делится на 13^3, и поэтому $7 \cdot 73 - n = 169 \cdot 3 + (4 - n)$. Следовательно, $4 - n$ делится на 169.

Пусть $n = 4$. Если $|Q_0| = 13^3$, то в Q_0 найдется подгруппа порядка 13^2, неединичные элементы которой действуют без неподвижных точек на Γ, противоречие. Значит, Q_0 — подгруппа порядка 13^2 из центра Q. Тогда Q_0 содержится в элементарной абелевой подгруппе Q_1 порядка 13^3 и в Q_1 найдется подгруппа порядка 13^2, неединичные элементы которой действуют без неподвижных точек на Γ, противоречие.

Таким образом, $n = 173$, и каждая подгруппа порядка 13 из Q имеет неподвижные точки в Γ. Получаем противоречие с тем, что порядок группы автоморфизмов обобщенного шестиугольника $GH(3, 1)$ не делится на 169. Утверждение (2) доказано.

Пусть G содержит элемент f порядка 73. Заметим, что 73^2 не делит $|G|$. Допустим, что $C_G(f)$ содержит элемент g простого порядка $p \ne 73$, и положим $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Если подграф Ω не пуст, то f действует без неподвижных точек на Ω и ввиду лемм 2.5–2.7 получим, что $p = 2$ и Ω является $(54m + 28)$-кокликой, где $0 \le m \le 5$. Получаем противоречие с тем, что 73 не делит $|\Omega|$.

Значит, подграф Ω пуст, $p \in \{7, 13\}$ и по лемме 2.4 имеем $(\alpha_1(f), \alpha_2(f), \alpha_3(f)) \in \{(73, 6789, 19710), (1387, 9417, 15768), (2701, 12045, 11826)\}$. Получаем противоречие с тем, что $\alpha_1(f)$ взаимно просто с 91. Утверждение (3) доказано. Лемма доказана.

3. Характеризация вершинно транзитивного графа с массивом пересечений $\{84, 81, 81; 1, 1, 28\}$

В этом разделе мы доказываем следствие. Будем предполагать, что дистанционно регулярный граф Γ имеет массив пересечений $\{84, 81, 81; 1, 1, 28\}$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Из лемм 2.5–2.9 следует, что $|G|$ делит $2^\beta \cdot 3^\gamma \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 73$.

До конца раздела будем предполагать, что группа G действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Зафиксируем вершину a графа Γ и через G_a обозначим стабилизатор вершины a в группе G. Тогда $|G_a|$ делит $2^{\beta-2} \cdot 3^\gamma \cdot 7 \cdot 13$ и $|G : G_a| = 4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$. Пусть $P = \langle g \rangle$ — силовская 73-подгруппа из G.

Лемма 3.1. *Факторгруппа $\bar{G} = G/O_2(G)$ имеет простой цоколь T, и $\bar{G}/T$ — подгруппа из циклической группы порядка* 72.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как 3 не делит v, то ввиду пункта (3) леммы 2.8 разрешимый радикал группы G совпадает с $O_2(G)$. Поэтому факторгруппа $\bar{G} = G/O_2(G)$ имеет простой цоколь T и 73 делит $|T|$, поэтому $\bar{G}/T$ — подгруппа из циклической группы порядка 72. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть T — простая группа порядка, делящего $2^\beta \cdot 3^\gamma \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 73$, 73 делит $|T|$ и в T нет элементов порядка $73p$ для любого $p \in \{2, 3, 7, 13\}$. Тогда T изоморфна группе Стейнберга ${}^3D_4(3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду классификации конечных простых групп T является знакопеременной группой, группой Шевалле над конечным полем или спорадической группой.

Порядок группы T не делится на 5 и делится на 73, поэтому T не является знакопеременной или спорадической группой. Значит, T — группа Шевалле над полем порядка $q = p^m$, где p — простое число. Так как $|T|$ не делится на 5, то $p \neq 5$ и $|T|$ не делится на $p^4 - 1$. Отсюда T изоморфна одной из следующих групп: $A_1(q)$, $A_2(q)$, ${}^2A_2(q)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^3D_4(3)$, $G_2(q)$, ${}^2G_2(q)$.

Предположим, что $T \cong A_1(q)$. Тогда по [8, лемма 4] и лемме 2.8 $73 \in \{p, q \pm 1/(2, q-1)\}$, противоречие.

Аналогично приходим к противоречию в остальных случаях, кроме случая $T \cong {}^3D_4(3)$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. $O_2(G) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что факторгруппа $\bar{G} = G/O_2(G)$ имеет простой цоколь T, изоморфный группе ${}^3D_4(3)$. Далее, по теореме Силова нормализатор силовской 73-подгруппы в T имеет порядок $73 \cdot 4$. Кроме того $|\bar{G} : T|$ делит 3, так как $|\mathrm{Out}({}^3D_4(3))| = 3$.

Рассмотрим факторграф $\bar{\Gamma}$, вершинами которого являются $O_2(G)$-орбиты на множестве вершин графа Γ, и две орбиты смежны, если в одной из них найдется вершина, смежная с вершиной из другой орбиты. Тогда T — вершинно транзитивная подгруппа из $\mathrm{Aut}(\bar{\Gamma})$. Так как $v(\bar{\Gamma})$ делится на $7 \cdot 13 \cdot 73$ и делит $4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$, то стабилизатор $T_{\bar{a}}$ в группе T вершины $\bar{a}$ является параболической подгруппой. Отсюда $|T : T_{\bar{a}}| = 4 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$ и $O_2(G) = 1$. Лемма доказана.

Из лемм 3.1–3.3 следует, что Γ — обобщенный шестиугольник, отвечающий билдингу группы ${}^3D_4(3)$ (см. [7, гл. 6 §5]). Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cameron P.** Permutation groups // London Math. Soc. Student Texts. Vol. 45. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1999. 220 p.

2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах графа Ашбахера // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 125–134.
3. **Махнев А.А., Носов В.В.** Об автоморфизмах сильно регулярных графов с $\lambda = 0,\ \mu = 2$ // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 3. С. 47–68.
4. **Махнев А.А., Минакова И.М.** Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами $\lambda = 1$, $\mu = 2$ // Дискрет. математика. 2004. Т. 16, № 1. С. 95–104.
5. **Cohen A., Tits J.** On generalized hexagons and a near octagon whose lines have three points // Europ. J. Comb. Vol. 6. 1985. C. 13–27.
6. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 494 p.
7. **Van Maldeghem H.** Generalized polygons // Monog. in Math. Vol. 93. Basel: Birkhäuser, 1998. 502 p.
8. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.

Поступила 05.02.2009

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
докторант
Ин-т математики и механики Уро РАН
e-mail: i_belousov@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики Уро РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Том 15 № 2 2009

УДК 512.544

ПРЯМЫЕ СУММЫ ФИНИТАРНЫХ ГРУПП ПОДСТАНОВОК[1]

В. В. Беляев

В данной работе закладываются основы теории прямых разложений групп финитарных подстановок.

Ключевые слова: финитарные подстановки, финитарные группы, прямые суммы.

V. V. Belyaev. Direct sums of finitary permutation groups.

Fundamentals of the theory of direct decompositions of groups of finitary permutations are laid in this paper.

Keywords: finitary permutations, finitary groups, direct sums.

Введение

Данная работа посвящена исследованию финитарных групп подстановок. Хотя эти группы подстановок были объектом исследования в большом количестве работ, в этой области попрежнему остается открытым ряд вопросов (как, например, проблема существования едва транзитивных групп). Построение структурной теории финитарных групп подстановок, как нам кажется, далеко от завершения.

В этой работе нам хотелось бы по-новому взглянуть на основные структурные блоки финитарных групп подстановок, ставя на первое место не стандартные понятия транзитивного и примитивного действий, а понятия соизмеримости точек и финитарного пополнения группы подстановок в топологии поточечной сходимости.

Дадим определения этих новых понятий.

О п р е д е л е н и е 1. Подгруппы A и B из группы G мы будем называть *соизмеримыми*, если их пересечение $A \cap B$ является подгруппой конечного индекса как в A, так и в B.

Термин "соизмеримость" мы будем также использовать для точек из групповых пространств: точки α и β из G-пространства Ω мы будем называть *G-соизмеримыми*, если их стабилизаторы G_α и G_β соизмеримы.

Понятно, что соизмеримость подгрупп является G-инвариантным отношением эквивалентности на множестве всех подгрупп группы G. Следовательно, и G-соизмеримость точек группового G-пространства Ω является G-инвариантным отношением эквивалентности на Ω.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть G — группа подстановок множества Ω. Отображение $f : \Omega \to \Omega$ мы будем называть *G-предельным* (или предельным для G) преобразованием множества Ω, если для любого конечного подмножества $\Delta \subseteq \Omega$ найдется такая подстановка $g \in G$, что $\alpha^f = \alpha^g$ для любого $\alpha \in \Delta$.

Если G — группа финитарных подстановок множества Ω, то легко видеть, что совокупность всех финитарных G-предельных подстановок Ω образует подгруппу G^* в группе $\mathrm{FSym}\,(\Omega)$ всех финитарных подстановок Ω. Эту группу G^* мы будем называть *финитарным пополнением* группы G (в топологии поточечной сходимости). Понятно, что $G \leq G^*$ и $(G^*)^* = G^*$. Менее очевидно, что происходит небольшое подрастание G за счет добавления к G финитарных предельных для G подстановок и вложение G в G^* обладает рядом интересных свойств (например,

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00378) и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/1662).

$G \lhd G^*$). В этой работе мы не будем останавливаться на этих свойствах, а лишь отметим, что переход от финитарной группы к ее финитарному пополнению не добавляет серьезных трудностей при рассмотрении многих вопросов, в то время как удобство финитарной полноты при исследовании структуры группы трудно переоценить.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть G — группа подстановок множества Ω и семейство $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ подмножеств из Ω образует разбиение множества Ω. Положим $G_i = \{g \in G \mid \operatorname{supp} g \subseteq \Omega_i\}$ для каждого $i \in I$. Будем говорить, что G является (внутренней) *прямой суммой* групп подстановок G_i, $i \in I$, и писать $(G, \Omega) = \bigoplus_{i\in I} (G_i, \Omega_i)$, если $G = \langle G_i \mid i \in I\rangle$.

Ясно, что прямая сумма групп подстановок может быть определена также и внешним образом. В тех случаях, когда на первое место в исследовании групп подстановок выступают свойства группового множества Ω, более удобно использовать терминологию групповых пространств. В этих случаях мы будем говорить о прямых суммах групповых пространств.

Важность конструкции прямой суммы финитарных групп подстановок становится понятной уже из следующего факта: прямая сумма любого семейства финитарных групп подстановок также является финитарной группой подстановок. Это утверждение вызывает естественный вопрос: каково строение финитарных групп подстановок, не разложимых нетривиальным образом в прямые суммы?

Нетрудно понять, что любая финитарная группа подстановок есть прямая сумма неразложимых групп, и поэтому знание строения неразложимых финитарных групп можно считать важной задачей теории финитарных групп подстановок.

В общем случае вряд ли можно рассчитывать на построение хорошей теории неразложимых финитарных групп, но в случае финитарно полных групп теория прямых разложений становится достаточно простой. Для формулировки основного результата, касающегося прямых разложений финитарных групп и доказанного в данной работе, нам потребуются следующие дополнительные понятия: будем говорить, что финитарная группа подстановок G на множестве Ω имеет *тип A*, если все точки из Ω G-соизмеримы, и *тип B*, если все классы соизмеримых точек конечны и G действует транзитивно на этих классах.

Основная теорема. *Любая финитарно полная группа финитарных подстановок представима в виде прямой суммы групп, каждая из которых имеет тип A или B.*

Очевидно, что прямые слагаемые в финитарно полной группе также являются финитарно полными группами. Тем самым, основная теорема сводит изучение строения произвольной финитарно полной группы финитарных подстановок к изучению строения финитарно полных групп типа A и B.

1. Вспомогательные результаты

В данном разделе работы доказываются утверждения, которые будут использованы в доказательстве основной теоремы.

Лемма 1. *Пусть G — произвольная группа подстановок множества Ω, Δ — конечное подмножество из Ω и G-орбиты всех точек из Δ бесконечны. Тогда для любого конечного подмножества Σ из Ω найдется такой элемент $g \in G$, что $\Delta^g \cap \Sigma = \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых $\alpha \in \Delta$ и $\beta \in \Sigma$ положим

$$\mathrm{T}\,(\alpha, \beta) = \{g \in G \mid \alpha^g = \beta\}\,.$$

Ясно, что множество $\mathrm{T}\,(\alpha, \beta)$ либо пусто, либо является смежным классом стабилизатора G_α точки α в группе G. Если заключение леммы не выполняется, то объединение всех подмножеств $\mathrm{T}\,(\alpha, \beta)$ совпадает с G, и значит, G покрывается конечным множеством смежных классов стабилизаторов точек из Δ. Отсюда, в свою очередь, согласно леммеНоймана о конечном покрытии, следует, что стабилизатор некоторой точки $\alpha \in \Delta$ имеет конечный индекс в G, т. е. G-орбита точки α конечна, что противоречит условию леммы. Значит, заключение леммы справедливо. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть G — произвольная финитарная группа подстановок множества Ω, Δ — конечное подмножество из Ω и $\alpha \in \Omega$. Предположим также, что*

(1) *G_α-орбиты всех точек из Δ бесконечны*;

(2) *G_Δ-орбита точки α конечна.*

Тогда G_Δ действует транзитивно на G-орбите точки α, т. е. G_Δ-орбита и G-орбита точки α совпадают. В частности, G-орбита точки α конечна и $G = G_\alpha \cdot G_\Delta$.

Доказательство. Пусть K — произвольное конечное подмножество из G и $\Sigma = \operatorname{supp} K$. Согласно лемме 1 найдется такой элемент $a \in G_\alpha$, что $\Delta^a \cap \Sigma = \varnothing$. Таким образом, K содержится в поточечном стабилизаторе множества Δ^a, и поэтому $K \subseteq a^{-1}G_\Delta a$. Отсюда следует, что $\alpha^K \subseteq \alpha^{a^{-1}G_\Delta a} = \alpha^{G_\Delta a}$, и значит, $\left|\alpha^K\right| \leq \left|\alpha^{G_\Delta}\right|$. В силу произвольности выбора конечного множества K и конечности G_Δ-орбиты точки α мы можем сделать вывод, что $\left|\alpha^G\right| \leq \left|\alpha^{G_\Delta}\right|$. Наконец, учитывая включение $\alpha^{G_\Delta} \subseteq \alpha^G$, получаем совпадение этих двух орбит. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — произвольная финитарная группа подстановок множества Ω, Δ — конечное подмножество из Ω и $\alpha \in \Omega$. Предположим также, что*

(1) *G-орбита точки α бесконечна*;

(2) *G_Δ-орбита точки α конечна.*

Тогда точка α G-соизмерима с некоторой точкой из Δ.

Доказательство (индукцией по мощности Δ).

База индукции. Пусть $|\Delta| = 1$ и $\Delta = \{\beta\}$. Согласно условию леммы G_β-орбита точки α конечна. Если G_α-орбита точки β бесконечна, то, согласно лемме 2, G-орбита точки α конечна, что противоречит условию леммы. Значит, G_α-орбита точки β конечна, и точки α и β G-соизмеримы.

Шаг индукции. Пусть $|\Delta| > 1$ и для любых конечных множеств мощности $< |\Delta|$ заключение леммы выполнено. Если G_α-орбиты всех точек из Δ бесконечны, то, согласно лемме 2, G-орбита точки α конечна, что противоречит условию леммы. Значит, в Δ найдется точка β с конечной G_α-орбитой. Возможны два случая: либо G_β-орбита точки α конечна, либо G_β-орбита точки α бесконечна. В первом случае точки α и β G-соизмеримы, и поэтому заключение леммы выполнено. Во втором случае, согласно лемме 2, G-орбита точки β конечна. Пусть $\Delta' = \Delta - \beta$. Так как $|G : G_\beta| < \infty$, то подгруппа G_Δ, равная $G_{\Delta'} \cap G_\beta$, также имеет конечный индекс в $G_{\Delta'}$. Следовательно, $G_{\Delta'}$-орбита точки α конечна, и в силу индуктивного предположения точка α G-соизмерима с некоторой точкой из Δ'. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — произвольная финитарная группа подстановок множества Ω. Тогда для любых двух конечных подмножеств Δ и Γ из Ω реализуется один из следующих случаев*:

(1) *некоторая точка из Δ G-соизмерима с некоторой точкой из Γ*;

(2) *G-орбита некоторой точки из Γ конечна*;

(3) *для любого конечного подмножества Σ из Ω найдется такой элемент $g \in G_\Delta$, что $\Gamma^g \cap \Sigma = \varnothing$.*

Доказательство. Допустим, что п. (3) для Δ и Γ не выполняется, т. е. нашлось такое конечное множество Σ, что $\Gamma^g \cap \Sigma \neq \varnothing$ для любого $g \in G_\Delta$. Тогда, согласно лемме 1, в множестве Γ найдется точка α с конечной G_Δ-орбитой. Если G-орбита точки α бесконечна, то, согласно лемме 3, точка α G-соизмерима с некоторой точкой из Δ и, следовательно, выполняется п. (1) заключения леммы. Если G-орбита точки α конечна, то выполняется п. (2). Лемма доказана.

2. Доказательство основной теоремы

Пусть G — финитарно полная группа финитарных подстановок множества Ω.

Так как отношение G-соизмеримости точек является G-инвариантным отношением эквивалентности на Ω, то действие G на Ω индуцирует действие G на классах G-соизмеримых точек. Следовательно, объединение всех G-орбит точек из произвольного класса G-соизмеримых точек, которое мы будем называть его G-замыканием, является объединением некоторого семейства классов G-соизмеримых точек. Заметим, что в силу финитарности действия G на Ω бесконечные классы G-соизмеримых точек неподвижны относительно действия G и, следовательно, совпадают со своими G-замыканиями. Таким образом, G-замыкание любого класса G-соизмеримых точек либо совпадает с этим классом, либо является объединением некоторого семейства конечных классов, на которых G действует транзитивно.

Пусть $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ — семейство G-замыканий всех классов G-соизмеримых точек и $G_i = \{g \in G \mid \operatorname{supp} g \subseteq \Omega_i\}$, $i \in I$. Покажем, что $G = \langle G_i \mid i \in I\rangle$, откуда и будет следовать, что

$$(G, \Omega) = \bigoplus_{i \in I} (G_i, \Omega_i)\,,$$

где каждое прямое слагаемое (G_i, Ω_i) имеет тип A или B.

Подстановку $g \in G$ назовем G-разложимой, если g представима в виде произведения $g = g_1 \cdot g_2$, где $|\operatorname{supp} g_i| < |\operatorname{supp} g|$, $i = 1, 2$. В противном случае подстановку g будем называть G-неразложимой. В силу конечности носителей подстановок из G любая подстановка из G представима в виде произведения G-неразложимых подстановок, а это значит, что множество всех G-неразложимых подстановок из G порождает всю группу G. Следовательно, для доказательства равенства $G = \langle G_i \mid i \in I\rangle$ нам достаточно показать, что любая G-неразложимая подстановка t принадлежит G_i для некоторого $i \in I$, т. е. $\operatorname{supp} t \subseteq \Omega_i$.

Итак, пусть t — произвольная G-неразложимая подстановка из G. Так как семейство подмножеств $\{\Omega_i \mid i \in I\}$ образует разбиение множества Ω, то найдется такое $i \in I$, что $\operatorname{supp} t \cap \Omega_i \neq \varnothing$. Ясно, что, доказав включение $\operatorname{supp} t \subseteq \Omega_i$, мы тем самым завершим доказательство всей теоремы.

Предположим противное, т. е. что $\operatorname{supp} t$ не содержится в Ω_i. Возможны два случая:

(a) Ω_i состоит из точек с конечными G-орбитами;

(b) Ω_i не содержит точек с конечными G-орбитами.

В случае (a) положим $\Delta = \operatorname{supp} t \cap \Omega_i$ и $\Gamma = \operatorname{supp} t - \Delta$, а в случае (b) положим $\Gamma = \operatorname{supp} t \cap \Omega_i$ и $\Delta = \operatorname{supp} t - \Gamma$. Ясно, что определенная таким образом пара конечных множеств Γ и Δ обладает следующими свойствами:

(1) точки из Γ и Δ не могут быть G-соизмеримыми;

(2) G-орбиты точек из Γ бесконечны.

Но тогда в силу леммы 4 для любого конечного подмножества Σ из Ω найдется такой элемент $g \in G_\Delta$, что $\Gamma^g \cap \Sigma = \varnothing$.

Определим теперь следующим образом две финитарные подстановки t_1 и t_2 множества Ω:

$$\alpha^{t_1} \;=\; \begin{cases} \alpha^t, & \text{если } \alpha \in \Delta, \\ \alpha, & \text{если } \alpha \notin \Delta; \end{cases}$$

$$\alpha^{t_2} \;=\; \begin{cases} \alpha, & \text{если } \alpha \in \Delta, \\ \alpha^t, & \text{если } \alpha \notin \Delta. \end{cases}$$

Очевидно, что $t = t_1 t_2$, причем мощности носителей t_1 и t_2 строго меньше $|\operatorname{supp} t|$. Покажем, что подстановка t_1 является G-предельной. Пусть Σ — произвольное конечное подмножество из Ω и $\Sigma_1 = \Sigma - \Delta$. Согласно указанному свойству множеств Γ и Δ найдется такой элемент $g \in G_\Delta$, что $\Gamma^g \cap \Sigma_1 = \varnothing$, и, значит,

$$\alpha^{g^{-1}tg} = \begin{cases} \alpha^t, & \text{если } \alpha \in \Delta, \\ \alpha, & \text{если } \alpha \in \Sigma_1, \end{cases}$$

т. е. ограничения подстановок t_1 и $g^{-1}tg$ на Σ совпадают. Отсюда согласно определению G-предельных подстановок следует, что t_1 есть G-предельная подстановка. Воспользовавшись финитарной полнотой группы G, получаем, что t_1 принадлежит G. Но тогда и подстановка $t_2 = t_1^{-1}t$ принадлежит G. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Беляев Виссарион Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский физ.-техн. ин-т (гос. ун-т)
e-mail: v.v.belyaev@list.ru

Поступила 16.01.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 512.54

ФИНИТАРНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП[1]

В. В. Беляев, Д. А. Швед

В данной работе мы вводим новое понятие финитарного автоморфизма группы и исследуем строение группы финитарных автоморфизмов произвольной группы.

Ключевые слова: финитарные автоморфизмы групп, локально конечные группы, группы финитарных линейных преобразований, FC-группы.

V. V. Belyaev, D. A. Shved. Finitary automorphisms of groups.

A new notion of a finitary automorphism of a group is introduced and the structure of the group of finitary automorphisms of an arbitrary group is investigated.

Keywords: finitary automorphisms of groups, locally finite groups, groups of finitary linear transformations, FC-groups.

Введение

Автоморфизм φ группы G будем называть *финитарным*, если $\mathrm{C}_G(\varphi)$ — подгруппа конечного индекса в G. Легко видеть, что множество всех финитарных автоморфизмов группы G образует нормальную подгруппу в группе всех автоморфизмов $\mathrm{Aut}G$ группы G. Эту подгруппу мы будем называть *группой всех финитарных автоморфизмов группы* G и обозначать через $\mathrm{FAut}G$. Произвольную подгруппу из $\mathrm{FAut}G$ мы будем называть просто *группой финитарных автоморфизмов* группы G.

Данная работа посвящена исследованию строения группы $\mathrm{FAut}G$ в случае произвольной группы G. Интерес к таким группам вызван следующими двумя обстоятельствами.

Во-первых, группы финитарных автоморфизмов можно рассматривать как некоторый аналог групп финитарных линейных преобразований $\mathrm{FGL}(V)$ векторных пространств, т. е. таких линейных преобразований, для которых коразмерность подпространства, состоящего из всех неподвижных векторов, конечна. Так, например, в случае векторного пространства V над конечным полем любое финитарное линейное преобразование пространства V, очевидно, является финитарным автоморфизмом аддитивной группы V и, следовательно,

$$\mathrm{FGL}(V) \leq \mathrm{FAut}V.$$

Конечно, в случае конечного простого поля эти две группы совпадают:

$$\mathrm{FGL}(V) = \mathrm{FAut}V.$$

Но в общем случае указанное включение может быть строгим.

Напомним, что структурная теория периодических подгрупп из $\mathrm{FGL}(V)$ хорошо разработана для произвольного векторного пространства (см., например, [1]). А так как группа $\mathrm{FGL}(V)$ является периодической для любого векторного пространства V над конечным полем, то можно считать, что строение группы финитарных автоморфизмов элементарной абелевой p-группы изучено достаточно хорошо. Заметим также, что строение группы $\mathrm{FAut}V$, где V —

[1]Работа выполнена при поддержке АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/1662).

элементарная абелева p-группа, далеко не тривиально. В частности, некоторые локально конечные простые группы в программе типологизации простых локально конечных групп, предложенной в [2], реализуются именно в виде подгрупп из $\mathrm{FAut}V$. Это обстоятельство вызывает естественное желание исследовать композиционное строение произвольных групп финитарных автоморфизмов.

Какие простые факторы могут быть у группы $\mathrm{FAut}G$ в случае произвольной группы G? Нет ли среди этих простых факторов новых простых групп, которые не реализуются в виде простых факторов группы $\mathrm{FAut}V$, где V — элементарная абелева группа?

Таковы первые вопросы, которые возникают при изучении строения произвольных групп финитарных автоморфизмов.

Второе обстоятельство, определившее проблемы несколько иного плана, связано с конструкцией группы $\mathrm{Part}G$ классов частичных автоморфизмов группы G [3]. Дело в том, что любой автоморфизм группы G можно рассматривать как частичный автоморфизм этой же группы, и, таким образом, возникает гомоморфизм

$$\pi: \quad \mathrm{Aut}G \to \mathrm{Part}G.$$

Ядро гомоморфизма π состоит из всех финитарных автоморфизмов группы G, и поэтому π есть инъекция тогда и только тогда, когда $\mathrm{FAut}G = 1$.

Инъективность π играет большую роль при изучении группы $\mathrm{Part}G$. Так, например, если $G = \mathbb{Z}^n$ — свободная абелева группа ранга n, то $\mathrm{Aut}\mathbb{Z}^n \simeq \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$, а $\mathrm{Part}\mathbb{Z}^n \simeq \mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$, и совпадение π с естественным вложением

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{Q})$$

возникает вследствие того, что $\mathrm{FAut}\mathbb{Z}^n = 1$.

Рассматривая группы финитарных автоморфизмов с точки зрения ядер гомоморфизмов $\pi : \mathrm{Aut}G \to \mathrm{Part}G$, было бы интересно выяснить, в каких случаях группа $\mathrm{FAut}G$ тривиальна, т. е. любой финитарный автоморфизм группы G является тождественным.

За этим вопросом должен последовать вопрос противоположного характера: насколько велика может быть группа $\mathrm{FAut}G$? Так, В.И. Зенковым был поставлен следующий

В о п р о с: Существует ли бесконечная группа, у которой любой автоморфизм является финитарным?

В данной работе мы не ставили перед собой цель ответить на все поставленные выше вопросы. Наша задача была более простой, и ее можно сформулировать следующим образом: что можно сказать о строении $\mathrm{FAut}G$ в случае произвольной группы G? Первоначальный анализ строения групп финитарных автоморфизмов, проделанный авторами, показал, что эти группы очень близки к локально конечным группам. Более точно полученные результаты могут быть представлены в виде следующих двух теорем.

Теорема 1. *Любая группа финитарных автоморфизмов есть расширение абелевой группы с помощью локально конечной группы.*

Теорема 2. *Коммутант группы финитарных автоморфизмов локально конечен.*

Из теорем 1 и 2 вытекают такие следствия.

Следствие 1. *Любая периодическая группа финитарных автоморфизмов локально конечна.*

Следствие 2. *Любая группа финитарных автоморфизмов обладает периодическим радикалом (т. е. единственной максимальной периодической подгруппой), факторгруппа по которому есть абелева группа.*

Следствие 3. *Любая конечно порожденная группа финитарных автоморфизмов есть центральное расширение конечной группы.*

Следствие 4. *Любая группа финитарных автоморфизмов содержит периодическую абелеву нормальную подгруппу, факторгруппа по которой есть центральное расширение локально конечной группы.*

Полученные результаты вызывают новый вопрос о степени близости групп финитарных автоморфизмов к локально конечным группам. Может, далее, возникнуть предположение, базирующееся на следствиях 3 и 4, что любая группа финитарных автоморфизмов есть центральное расширение локально конечной группы. Но эта гипотеза оказалась неверной. Нам удалось построить пример такой группы, у которой группа всех финитарных автоморфизмов не является центральным расширением локально конечной группы. Правда, этот пример мы не приводим в данной работе.

Необходимо также отметить, что в ходе доказательства теорем 1 и 2 нами был получен ряд интересных результатов, связанных с вопросами, поставленными выше. Мы не стали выносить эти промежуточные результаты во введение, чтобы не делать его громоздким. Тем более что мы надеемся в последующих работах дать более полные ответы на поставленные вопросы.

И, наконец, несколько слов о композиционном расположении материала в данной статье. В разд. 1 мы рассматриваем простые свойства финитарных автоморфизмов, которые будут использоваться в дальнейшем. Здесь же мы в некоторой степени сводим изучение группы $\mathrm{FAut}G$ к случаю, когда G является FC-групой. В разд. 2 мы исследуем строение групп финитарных автоморфизмов FC-групп. В частности, здесь доказывается, что группа $\mathrm{FAut}G$ локально конечна для FC-группы G. В заключительном разд. 3 мы приводим доказательства основных результатов работы — теорем 1, 2 и следствий 1–4.

1. Свойства финитарных автоморфизмов

Назовем *девиацией* произвольного автоморфизма φ группы G множество

$$\mathrm{D}(G,\varphi) := \{[x,\varphi] \mid x \in G\},$$

где $[x,\varphi] = x^{-1}\varphi(x)$.

Напомним, что подгруппа, порожденная девиацией $\mathrm{D}(G,\varphi)$, обозначается через $[G,\varphi]$ и называется *взаимным коммутантом* группы G и автоморфизма φ.

Далее нам потребуется также следующее стандартное понятие FC-центра группы G. Нетрудно показать, что множество $\{x \in G \mid |G : \mathrm{C}_G(x)| < \infty\}$ образует характеристическую подгруппу в группе G, которая называется *FC-центром* группы G и обозначается через $\mathrm{FC}(G)$. Очевидно, что $\mathrm{FC}(G)$ совпадает с объединением всех конечных классов сопряженных элементов в G и является FC-группой. Отметим, что внутренний автоморфизм, индуцированный элементом $g \in G$, является финитарным в том и только том случае, когда $g \in \mathrm{FC}(G)$.

Лемма 1. *Автоморфизм φ группы G является финитарным тогда и только тогда, когда его девиация $\mathrm{D}(G,\varphi)$ конечна.*

Доказательство. Этот критерий финитарности автоморфизма вытекает из следующего более общего утверждения:

$$|\mathrm{D}(G,\varphi)| = |G : \mathrm{C}_G(\varphi)|$$

для любого автоморфизма φ группы G. Действительно,

$$x^{-1}\varphi(x) = y^{-1}\varphi(y) \Leftrightarrow xy^{-1} = \varphi(xy^{-1}) \Leftrightarrow xy^{-1} \in \mathrm{C}_G(\varphi) \Leftrightarrow x \in \mathrm{C}_G(\varphi)\, y.$$

Следовательно, отображение $x \to [x,\varphi]$, $x \in G$, индуцирует биекцию множества $\{\mathrm{C}_G(\varphi)\, g \mid g \in G\}$ на девиацию $\mathrm{D}(G,\varphi)$. Лемма доказана.

В ходе доказательства основных результатов мы часто будем иметь дело с автоморфизмами, которые финитарные автоморфизмы некоторой группы G индуцируют на какой-либо ее подгруппе или факторгруппе. В рассуждениях такого рода мы будем опираться на следующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть φ — финитарный автоморфизм группы G и H есть φ-инвариантная подгруппа из G. Тогда ограничение φ на H является финитарным автоморфизмом группы H.*

Доказательство. Если φ — финитарный автоморфизм G, то согласно лемме 1 его девиация $\mathrm{D}(G,\varphi)$ конечна. Но

$$\mathrm{D}(H,\varphi) = \{[x,\varphi] \mid x \in H\} \subseteq \{[x,\varphi] \mid x \in G\} = \mathrm{D}(G,\varphi).$$

Следовательно, конечна и девиация $\mathrm{D}(H,\varphi)$. Снова воспользовавшись леммой 1, получаем заключение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть φ — произвольный автоморфизм группы G и H — нормальная φ–инвариантная подгруппа в G. Тогда автоморфизм $\overline{\varphi}$ группы $\overline{G} = G/H$, индуцированный φ, также является финитарным.*

Доказательство. Пусть $\overline{\varphi} : Hx \to H\varphi(x)$ — автоморфизм, индуцированный φ на факторгруппе $\overline{G} = G/H$. Понятно, что $H \cdot \mathrm{C}_G(\varphi) \leq \mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{\varphi})$ и в силу конечности индекса $|G : \mathrm{C}_G(\varphi)|$ индекс $\left|\overline{G} : \mathrm{C}_{\overline{G}}(\overline{\varphi})\right|$ также конечен. Следовательно, $\overline{\varphi}$ — финитарный автоморфизм группы $\overline{G}$. Лемма доказана.

Девиация произвольного автоморфизма имеет следующее важное свойство, которое в случае финитарного автоморфизма приводит к интересным результатам.

Лемма 4. *Пусть φ — произвольный автоморфизм группы G и $D = \mathrm{D}(G,\varphi)$. Тогда $D \cdot D^{-1}$ есть нормальное в G подмножество.*

Доказательство. Заключение леммы очевидным образом вытекает из тождества

$$[x,\varphi] \cdot [y,\varphi]^{-1} = \left[xy^{-1},\varphi\right]^y,$$

справедливого для любых $x, y \in G$. Само тождество следует из такой цепочки равенств:

$$[x,\varphi] \cdot [y,\varphi]^{-1} = x^{-1}\varphi(x) \cdot \left(y^{-1}\varphi(y)\right)^{-1} = x^{-1}\varphi(x)\varphi(y^{-1})y = x^{-1}\varphi(xy^{-1})y$$

$$= y^{-1}yx^{-1}\varphi(xy^{-1})y = y^{-1}\left(\left(xy^{-1}\right)^{-1} \cdot \varphi(xy^{-1})\right)y = y^{-1}\left[xy^{-1},\varphi\right]y = \left[xy^{-1},\varphi\right]^y.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Девиация любого финитарного автоморфизма группы G содержится в FC-центре группы G.*

Доказательство. Пусть D — девиация финитарного автоморфизма φ группы G. Согласно лемме 1 множество D конечно, и потому конечно множество DD^{-1}. Из леммы 4 следует, что DD^{-1} — нормальное в G подмножество и в силу своей конечности содержится в FC-центре группы G. Но $1 \in D$, и, значит, $D \subseteq DD^{-1}$. Отсюда следует требуемое включение $D \subseteq \mathrm{FC}(G)$. Лемма доказана.

Очевидно, что автоморфизм φ является тождественным тогда и только тогда, когда его девиация состоит лишь из единичного элемента группы. Воспользовавшись этим тривиальным замечанием, мы получаем из леммы 5

Следствие 5. *Если* $\mathrm{FC}(G) = 1$, *то* $\mathrm{FAut}G = 1$.

Таким образом, сложность строения группы финитарных автоморфизмов группы G зависит от строения ее FC-центра. Рассматривая ограничение действия $\mathrm{FAut}G$ на FC-центр группы G, мы приходим к задаче исследования групп финитарных автоморфизмов FC-групп. Эта задача будет рассматриваться нами в следующем разделе.

2. Группы финитарных автоморфизмов FC-групп

В этом разделе будет доказано, что всякая группа финитарных автоморфизмов произвольной FC-группы является локально конечной.

Лемма 6. *Пусть G — произвольная группа, H — ее локально конечная нормальная подгруппа и $P \le \mathrm{FAut}(G)$. Предположим, что для любого автоморфизма φ из группы P справедливо включение*

$$\mathrm{D}(G, \varphi) \subseteq H.$$

Тогда группа P локально конечна. Другими словами, если все автоморфизмы, содержащиеся в некоторой подгруппе $\mathrm{FAut}(G)$, *действуют тождественно на G/H, то эта подгруппа локально конечна.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный конечный набор автоморфизмов φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_k \in P$. Пусть они порождают подгруппу $Q \le P$. Заметим, что централизаторы всех автоморфизмов φ_i, $i = \overline{1,k}$, имеют в группе G конечный индекс. Следовательно, и их пересечение

$$K = \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{C}_G\left(\varphi_i\right)$$

имеет конечный индекс в группе G.

Возьмем по одному представителю из каждого левого смежного класса группы G по подгруппе K. Обозначим этих представителей через x_j, $j = \overline{1,m}$. Получим разбиение группы G на левые смежные классы:

$$G = \bigcup_{j=1}^{m} x_j K. \tag{2.1}$$

Все автоморфизмы φ_i, а вместе с ними и все автоморфизмы из Q действуют тождественно на K. Следовательно, каждый автоморфизм $\varphi \in Q$ однозначно задается элементами $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, ..., $\varphi(x_m)$.

Теперь покажем, что для всякого элемента $\varphi(x_j)$ существует лишь конечное число возможностей. С этой целью рассмотрим такую подгруппу:

$$S = \left\langle \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{D}(G, \varphi_i) \right\rangle.$$

Поскольку φ_i — финитарные автоморфизмы, то по лемме 1 все множества $\mathrm{D}(G, \varphi_i)$ конечны. Следовательно, их объединение C конечно. Кроме того, оно содержится в H. Так как подгруппа H локально конечна, то конечное множество C порождает в ней конечную подгруппу S.

Докажем, что для всякого $\varphi \in Q$ выполнено включение $\mathrm{D}(G, \varphi) \subseteq S$. Для автоморфизмов φ_i, $i = \overline{1,k}$, это верно по построению множества S. Далее, для обратных к ним автоморфизмов имеем

$$\mathrm{D}(G, \varphi_i^{-1}) = \left\{ x^{-1} \varphi_i^{-1}(x) \,|\, x \in G \right\}.$$

Обозначив $\varphi_i^{-1}(x)$ через y, получим

$$\mathrm{D}(G, \varphi_i^{-1}) = \left\{ \varphi_i(y^{-1}) y \,|\, y \in G \right\} = \left\{ (y^{-1} \varphi_i(y))^{-1} \,|\, y \in G \right\} = \mathrm{D}(G, \varphi_i)^{-1} \subseteq S.$$

Наконец, пусть имеется два автоморфизма φ и ψ из подгруппы Q, для которых известно, что $\mathrm{D}(G,\varphi) \subseteq S$ и $\mathrm{D}(G,\psi) \subseteq S$. Докажем, что и $\mathrm{D}(G,\varphi\psi) \subseteq S$. Для этого рассмотрим произвольный элемент $x \in G$ и соответствующий ему элемент девиации $x^{-1}(\varphi\psi)(x)$. Имеем

$$x^{-1}(\varphi\psi)(x) = x^{-1}\varphi(xx^{-1}\psi(x)) = x^{-1}\varphi(xb),$$

где $b = x^{-1}\psi(x) \in S$ по предположению. Продолжая преобразования, получим

$$x^{-1}(\varphi\psi)(x) = x^{-1}\varphi(x)\varphi(b) = (x^{-1}\varphi(x)) \cdot b \cdot (b^{-1}\varphi(b)).$$

Все три сомножителя $x^{-1}\varphi(x)$, b и $b^{-1}\varphi(b)$ принадлежат S, следовательно, $x^{-1}(\varphi\psi)(x) \in S$, что и требовалось. Теперь для произвольного автоморфизма

$$\varphi = \varphi_{i_1}^{\pm 1}\varphi_{i_2}^{\pm 1}\dots\varphi_{i_l}^{\pm 1} \in Q$$

индукцией по длине l слова нетрудно доказать, что $\mathrm{D}(G,\varphi) \in S$.

Возвращаясь к разложению (2.1), получаем, что

$$\varphi(x_j) = x_j x_j^{-1}\varphi(x_j) \in x_j S.$$

Следовательно, элемент $\varphi(x_j)$ содержится в некотором конечном множестве, которое не зависит от выбора автоморфизма $\varphi \in Q$. Тогда и для всего набора $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_m)$ имеется не более $|S|^m$ возможностей. Следовательно, подгруппа Q конечна, что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть G — абелева группа без кручения. Тогда группа всех ее финитарных автоморфизмов тривиальна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный финитарный автоморфизм $\varphi \in \mathrm{FAut}G$. Предположим, что $\varphi \neq 1$. Тогда $\exists a \in G : \varphi(a) \neq a$. Обозначим централизатор φ в группе G через S. Условие $\varphi(a) \neq a$ равносильно тому, что $a \notin S$. Из того, что индекс S в G конечен, следует, что существует натуральное число i такое, что $a^i \in S$. Поскольку S — централизатор φ, это означает, что $\varphi(a^i) = a^i$. Учитывая, что группа G абелева, это равенство можно переписать в виде $(\varphi(a)a^{-1})^i = 1$. Следовательно, элемент $\varphi(a)a^{-1}$ имеет конечный порядок. Но G — группа без кручения. Следовательно, $\varphi(a)a^{-1} = 1$, т. е. $\varphi(a) = a$; противоречие. Итак, группа G не имеет финитарного автоморфизма, который не был бы тождественным, т. е. группа $\mathrm{FAut}G$ тривиальна. Лемма доказана.

Если множество всех элементов конечного порядка группы G является подгруппой в G, то назовем его *периодической частью* группы G и будем обозначать через $\mathrm{T}(G)$. Мы будем применять это обозначение в случае, когда G — FC-группа. В этом случае множество всех элементов конечного порядка действительно образует подгруппу [4, с. 504].

Лемма 8. *Пусть G есть FC-группа и φ — ее финитарный автоморфизм. Тогда девиация автоморфизма φ содержится в периодической части группы G, т. е.*

$$\mathrm{D}(G,\varphi) \subseteq \mathrm{T}(G).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подгруппа $\mathrm{T}(G)$ характеристична в G, а значит, нормальна в G. Рассмотрим факторгруппу $G_1 = G/\mathrm{T}(G)$. Поскольку $\varphi(\mathrm{T}(G)) = \mathrm{T}(G)$, автоморфизм φ индуцирует некоторый автоморфизм на факторгруппе G_1. Будем обозначать этот индуцированный автоморфизм через $\overline{\varphi}$. Согласно лемме 3, $\overline{\varphi}$ является финитарным автоморфизмом группы G_1. Как известно [4, с. 504], $G_1 = G/\mathrm{T}(G)$ — абелева группа без кручения. Следовательно, согласно лемме 7 имеем $\overline{\varphi} = 1$. Очевидно, это равносильно тому, что $\mathrm{D}(G,\varphi) \subseteq \mathrm{T}(G)$. Лемма доказана.

Следствие 6. *Пусть имеется FC-группа G, φ — ее финитарный автоморфизм. Тогда подгруппа $[G, \varphi]$ конечна.*

Доказательство. Простым следствием из леммы Дицмана [4, с. 338] является тот факт [4, с. 338], что периодический радикал FC-группы является локально нормальной (а значит, и локально конечной) группой. По только что доказанной лемме $\mathrm{D}(G, \varphi) \subseteq \mathrm{T}(G)$, а по лемме 1 девиация $\mathrm{D}(G, \varphi)$ конечна. Значит, порожденная этой девиацией подгруппа конечна, что и требовалось. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — произвольная FC-группа. Тогда любая ее группа финитарных автоморфизмов локально конечна.*

Доказательство. Рассмотрим в G характеристическую подгруппу $H = \mathrm{T}(G)$. По лемме 8 девиация любого автоморфизма $\varphi \in \mathrm{FAut}G$ содержится в H. Кроме того, из леммы Дицмана следует, что H локально конечна. Применим лемму 6, взяв в качестве P всю группу $\mathrm{FAut}G$. Получим, что $\mathrm{FAut}G$ локально конечна, откуда и следует утверждение теоремы.

3. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 1. Пусть G — произвольная группа. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha:\ \mathrm{FAut}G \to \mathrm{AutFC}(G)$, переводящий каждый финитарный автоморфизм группы G в его сужение на FC-центр группы G. Согласно лемме 2 сужение финитарного автоморфизма также является финитарным автоморфизмом. Значит, образ α является группой финитарных автоморфизмов FC-центра группы G, которая по теореме 3 локально конечна. Таким образом, факторгруппа $\mathrm{FAut}G/\ker\alpha$ является локально конечной группой.

Напомним, что, согласно лемме 5, любой финитарный автоморфизм группы G действует тождественно на факторгруппе $G/\mathrm{FC}(G)$, и поэтому ядро $\ker\alpha$ действует тождественно на факторах ряда $1 \leq \mathrm{FC}(G) \leq G$. Воспользовавшись теоремой Калужнина, получаем, что $\ker\alpha$ — абелева группа и, следовательно, $\mathrm{FAut}G$ есть расширение абелевой группы с помощью некоторой локально конечной группы.

Доказательство теоремы 2. Пусть G — произвольная группа и $T = \mathrm{T}(\mathrm{FC}(G))$ — периодическая часть ее FC-центра. Рассмотрим действие группы $\mathrm{FAut}G$ на факторах следующего ряда характеристических подгрупп из G:

$$1 \leq T \leq \mathrm{FC}(G) \leq G.$$

Согласно леммам 5 и 8, группа $\mathrm{FAut}G$ действует тождественно на факторах $G/\mathrm{FC}(G)$ и $\mathrm{FC}(G)/T$ этого ряда. Поэтому в силу теоремы Калужнина группа $\mathrm{FAut}G$ индуцирует абелеву группу автоморфизмов факторгруппы G/T. А это означает, что коммутант группы $\mathrm{FAut}G$ действует тождественно на факторгруппе G/T. Напомним, что периодическая часть любой FC-групы локально конечна. Этот факт позволяет нам воспользоваться леммой 6. Действительно, заменяя H из условия этой леммы на подгруппу T, а подгруппу P — на коммутант группы $\mathrm{FAut}G$, мы получаем требуемое заключение теоремы 2.

Доказательство следствий. Ясно, что следствия 1 и 2 вытекают тривиальным образом из теоремы 2.

Докажем следствие 3. Пусть G — произвольная группа и H — некоторая конечно порожденная подгруппа группы $\mathrm{FAut}G$. Из теоремы 1 следует, что H — почти абелева группа, т. е. H содержит абелеву подгруппу A конечного индекса в H, а по теореме 2 коммутант группы H локально конечен. Конечнопорожденность H влечет конечнопорожденность ее подгруппы конечного индекса A. Значит, периодическая часть абелевой подгруппы A конечна. Отсюда, в свою очередь, следует, что и периодическая часть всей группы H конечна. В частности, локально конечный коммутант группы H конечен. Но почти абелева группа с конечным коммутантом является почти центральной, что завершает доказательство следствия 3.

Для доказательства следствия 4 нам, очевидно, достаточно показать, что любая группа с локально конечным коммутантом, являющаяся расширением абелевой группы с помощью локально конечной группы, будет удовлетворять заключению следствия 4.

Итак, пусть группа H содержит такую абелеву нормальную подгруппу A, для которой факторгруппа H/A локально конечна. Также предположим, что H' — локально конечная группа. Пусть $T = \mathrm{T}(A)$ — периодическая часть группы A. Понятно, что T — абелева периодическая нормальная в H подгруппа. Покажем, что факторгруппа $\overline{H} = H/T$ есть центральное расширение локально конечной группы. Для этого нам, понятно, достаточно показать, что группа $\overline{A} = A/T$ содержится в центре группы $\overline{H}$. Возьмем произвольный элемент $g \in \overline{H}$ и рассмотрим подгруппу $\langle g, \overline{A} \rangle$. Эта подгруппа, согласно условию, имеет локально конечный коммутант. Но $\langle g, \overline{A} \rangle'$ содержится в подгруппе $\overline{A}$, которая не имеет кручения. Следовательно, $\langle g, \overline{A} \rangle' = 1$, и подгруппа $\overline{A}$ поэлементно перестановочна с любым элементом группы $\overline{H}$. Отсюда, конечно, следует, что $\overline{A} \leq \mathrm{Z}\left(\overline{H}\right)$, и доказательство следствия 4 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Беляев В.В.** Строение периодических групп финитарных преобразований // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 4. С. 347–366.
2. **Belyaev V.V.** Inert subgroups in simple locally finite groups // NATO ASI Ser. Ser. C, Math. Phys. Sci. 1994. Vol. 471. P. 213–218.
3. **Беляев. В.В.** Группы классов частичных автоморфизмов // Междунар. алгебр. конф.: тез. докл. Красноярск, 2000. С. 52–53.
4. **Курош. А.Г.** Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.

Беляев Виссарион Викторович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Московский физ.-техн. ин-т (гос. ун-т)
e-mail: v.v.belyaev@list.ru

Поступила 31.12.2008

Швед Даниил Андреевич
студент магистратуры
Московский физ.-техн. ин-т (гос. ун-т)
e-mail: danshved@gmail.com

Том 15 № 2 2009

УДК 512.542

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ ПО СПЕКТРУ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ТИПОВ B_n, C_n И ${}^2D_n$ ПРИ $n = 2^k$ [1]

А. В. Васильев, И. Б. Горшков, М. А. Гречкосеева, А. С. Кондратьев, А. М. Старолетов

Спектром конечной группы называется множество порядков ее элементов. Группа называется распознаваемой (по спектру), если она изоморфна любой конечной группе с тем же спектром. Неабелева простая группа называется квазираспознаваемой, если каждая конечная группа с тем же спектром содержит единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен исходной простой группе. В работе рассматривается вопрос о распознаваемости или квазираспознаваемости конечных простых групп типов B_n, C_n и ${}^2D_n$ при $n = 2^k$.

Ключевые слова: конечная простая группа, спектр группы, граф простых чисел, распознавание по спектру, ортогональная группа, симплектическая группа.

A. V. Vasil'ev, I. B. Gorshkov, M. A. Grechkoseeva, A. S. Kondrat'ev, A. M. Staroletov. On recognizability by spectrum of finite simple groups of types B_n, C_n, and ${}^2D_n$ for $n = 2^k$.

The spectrum of a finite group is the set of its element orders. A group is said to be recognizable (by spectrum) if it is isomorphic to any finite group that has the same spectrum. A nonabelian simple group is called quasi-recognizable if every finite group with the same spectrum possesses a unique nonabelian composition factor, and this factor is isomorphic to the simple group in question. We consider the problem of recognizability and quasi-recognizability for finite simple groups of types B_n, C_n, and ${}^2D_n$ with $n = 2^k$.

Keywords: finite simple group, spectrum of a group, prime graph, recognition by spectrum, orthogonal group, symplectic group.

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G и $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. *Граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $GK(G)$ группы G определяется следующим образом: его вершинами служат элементы множества $\pi(G)$, и две различные вершины r и s соединены ребром тогда и только тогда, когда число rs лежит в $\omega(G)$. Очевидно, что граф $GK(G)$ однозначно определяется спектром $\omega(G)$, а сам этот спектр в свою очередь восстанавливается по множеству $\mu(G)$ максимальных по делимости элементов из $\omega(G)$.

Для конечной группы G обозначим через $h(G)$ число попарно не изоморфных конечных групп H, удовлетворяющих условию $\omega(H) = \omega(G)$. Группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если $h(G) = 1$, *почти распознаваемой*, если $h(G) < \infty$, и *нераспознаваемой*, если $h(G) = \infty$. Поскольку каждая конечная группа, содержащая нетривиальную нормальную разрешимую подгруппу, нераспознаваема, наибольший интерес представляет вопрос о распознаваемости неабелевых простых групп. Оказывается, многие такие группы распознаются или почти распознаются по спектру. Обзор последних результатов в этой области см. в [1, 2].

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-01-39001 и 08-01-00322), Президиума СО РАН (интеграционный проект 2006.1.2), Совета по грантам Президента РФ (НШ-344.2008.1, МД-2848.2007.1 и МК-377.2008.1), и АВЦП Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/419). Четвертый автор поддержан РФФИ (проект 07-01-00148), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программой Отделения математических наук РАН и программами совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

В отдельное направление выделились исследования вопроса о так называемой квазираспознаваемости конечных простых групп. Неабелева конечная простая группа L называется *квазираспознаваемой* (по спектру), если любая конечная группа G с тем же спектром содержит единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен L (обзор результатов о квазираспознаваемости конечных простых групп см. в [3]). Отметим, что наибольшие успехи здесь достигнуты в случае, когда граф простых чисел группы L несвязен. В частности, доказано [4], что все неабелевы простые группы, у которых число связных компонент графа простых чисел больше 2, квазираспознаваемы, за исключением знакопеременной группы Alt_6. В настоящей работе рассматривается вопрос о квазираспознаваемости трех классов конечных простых групп, граф простых чисел которых имеет ровно две связные компоненты. Отметим, что в некоторых специальных случаях нам удается доказать более сильное свойство распознаваемости.

Теорема 1. *Пусть $L = {}^2D_n(q)$, где $n = 2^k \geqslant 4$ и q нечетно. Тогда группа L квазираспознаваема.*

Теорема 2. *Пусть $L \in \{B_n(q), C_n(q)\}$, где $n = 2^k \geqslant 8$, $q = p^\alpha$, p — нечетное простое число и $\alpha \in \mathbb{N}$. Тогда группа L квазираспознаваема. Более того, если α нечетно, то группа L распознаваема.*

Теорема 3. *Пусть $L \in \{B_4(q), C_4(q)\}$, где q нечетно, и G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда группа G содержит единственный неабелев композиционный фактор, и этот фактор изоморфен либо L, либо ${}^2D_4(q)$.*

Отметим, что вопрос о распознаваемости групп $B_2(q)$ ($\simeq C_2(q)$) был решен в [5]. Для случая четного q в [6] была доказана квазираспознаваемость групп $B_n(q)$ ($\simeq C_n(q)$) при $n = 2^k \geqslant 8$ и групп ${}^2D_n(q)$ при $n = 2^k \geqslant 4$. Вопрос о квазираспознаваемости групп $B_4(q)$ и $C_4(q)$ остается открытым как в случае четного, так и в случае нечетного q.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны. Пусть n — натуральное число и p — простое число. Через n_p и $\pi(n)$ обозначаются соответственно *p-часть* и множество всех простых делителей числа n. Если m — натуральное число, то положим $n_m = \prod_{r\in\pi(m)} n_r$ и $n_{m'} = n/n_m$. Наибольшая степень числа p, лежащая в спектре группы G, называется *p-периодом* группы G. Если L — группа лиева типа, то через $Inndiag(L)$ обозначается группа, порожденная внутренними и диагональными автоморфизмами группы L. Через ε обозначается переменная, принимающая значения $+$ или $-$.

1. Предварительные результаты

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $s(G)$ число компонент связности графа $GK(G)$. Для каждого $i \in \{1,\dots,s(G)\}$ обозначим через $\pi_i(G)$ i-ю компоненту графа $GK(G)$ и через $\omega_i(G)$ — подмножество из $\omega(G)$, состоящее из всех чисел, простые делители которых лежат в $\pi_i(G)$. Если порядок группы G четен, то считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

Лемма 1 (Грюнберг, Кегель [7, теорема A]). *Если G — конечная группа со свойством $s(G) > 1$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$s(G) = 2$ и G — группа Фробениуса;*

(2) *$s(G) = 2$ и $G = ABC$, где A и AB — нормальные подгруппы в G, B — нормальная подгруппа в BC, а AB и BC — группы Фробениуса;*

(3) *существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$ для некоторой нильпотентной нормальной подгруппы K из G; более того, K и $\overline{G}/S$ являются $\pi_1(G)$-группами, $s(S) \geqslant s(G)$, и для любого $i \in \{1,\dots,s(G)\}$ существует $j \in \{1,\dots,s(S)\}$ такое, что $\omega_i(G) = \omega_j(S)$.*

Конечные простые группы с несвязным графом простых чисел описаны Уильямсом [7] и Кондратьевым [8]. Полный список этих групп с исправленными неточностями можно найти в [5, табл. 1a–1c]. В настоящей работе используется сокращенный вариант данного списка (см. табл.). В нем отсутствуют группы, приведенные в [5, табл. 1a–1c] отдельно, вне бесконечных серий. Как следует из [9, лемма 4], если S — простая группа и $s(S) > 1$, то для любого $i \in \{2, \dots, s(G)\}$ множество $\omega_i(S)$ имеет единственный максимальный по делимости элемент. В таблице этот максимальный элемент обозначается через $n_i = n_i(S)$. Через p в таблице обозначается простое нечетное число.

Бесконечные серии конечных простых групп с несвязным графом простых чисел

S	Условия на S	$n_2(S)$
Alt_m	$6 < m = p, p+1, p+2$, одно из чисел m, $m-2$ непросто	p
$A_{p-1}(q)$	$(p,q) \neq (3,2), (3,4)$	$(q^p-1)/(q-1)(p,q-1)$
${}^2A_{p-1}(q)$		$(q^p+1)/(q+1)(p,q+1)$
$A_p(q)$	$(q-1) \mid (p+1)$	$(q^p-1)/(q-1)$
${}^2A_p(q)$	$(q+1) \mid (p+1)$, $(p,q) \neq (3,3), (5,2)$	$(q^p+1)/(q+1)$
$B_m(q)$	$m = 2^k \geqslant 4$, q нечетно	$(q^m+1)/2$
$C_m(q)$	$m = 2^k \geqslant 2$	$(q^m+1)/(2,q-1)$
${}^2D_m(q)$	$m = 2^k \geqslant 4$	$(q^m+1)/(2,q+1)$
${}^2D_m(2)$	$m = 2^k+1 \geqslant 5$	$2^{m-1}+1$
${}^2D_m(3)$	$9 \leqslant m = 2^k+1 \neq p$	$(3^{m-1}+1)/2$
${}^2D_p(3)$	$5 \leqslant p \neq 2^k+1$	$(3^p+1)/4$
$B_p(3)$		$(3^p-1)/2$
$C_p(q)$	$q = 2, 3$	$(q^p-1)/(2,q-1)$
$D_p(q)$	$p \geqslant 5$, $q = 2,3,5$	$(q^p-1)/(q-1)$
$D_{p+1}(q)$	$q = 2, 3$	$(q^p-1)/(2,q-1)$
${}^3D_4(q)$		q^4-q^2+1
$F_4(q)$	q нечетно	q^4-q^2+1
$G_2(q)$	$2 < q \equiv \varepsilon 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, $\varepsilon = \pm$	$q^2-\varepsilon q+1$
$E_6(q)$		$(q^6+q^3+1)/(3,q-1)$
${}^2E_6(q)$	$q > 2$	$(q^6-q^3+1)/(3,q+1)$

S	Условия на S	$n_2(S)$	$n_3(S)$
Alt_m	$m > 6$, $m = p$ $p-2$ — простое число	p	$p-2$
$A_1(q)$	$3 < q \equiv \varepsilon 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)$, $\varepsilon = \pm$	$\pi(q)$	$(q+\varepsilon 1)/2$
$A_1(q)$	$q > 2$, q четно	$q-1$	$q+1$
${}^2D_p(3)$	$p = 2^k+1$	$(3^{p-1}+1)/2$	$(3^p+1)/4$
$G_2(q)$	$q \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$	q^2-q+1	q^2+q+1
$F_4(q)$	q четно	q^4+1	q^4-q^2+1
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2k+1} > 3$	$q-\sqrt{3q}+1$	$q+\sqrt{3q}+1$
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2k+1} > 2$	$q^2-\sqrt{2q^3}+q-\sqrt{2q}+1$	$q^2+\sqrt{2q^3}+q+\sqrt{2q}+1$

S	Условия на S	$n_2(S)$	$n_3(S)$	$n_4(S)$	$n_5(S)$
${}^2B_2(q)$	$q = 2^{2k+1} > 2$	$q-1$	$q-\sqrt{2q}+1$	$q+\sqrt{2q}+1$	
$E_8(q)$	$q \equiv 2, 3 \,(\mathrm{mod}\, 5)$	$\dfrac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	$\dfrac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	q^8-q^4+1	
$E_8(q)$	$q \not\equiv 2, 3 \,(\mathrm{mod}\, 5)$	$\dfrac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	$\dfrac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	q^8-q^4+1	$\dfrac{q^{10}+1}{q^2+1}$

Напомним, что подмножество вершин графа называется *кокликой*, если любые две вершины этого подмножества несмежны. Обозначим через $t(G)$ максимальную мощность коклик в $GK(G)$, и если $2 \in \pi(G)$, то обозначим через $t(2,G)$ максимальную мощность коклик в $GK(G)$, содержащих 2.

Лемма 2 [10, 11]. *Пусть L — конечная неабелева простая группа такая, что $t(L) \geqslant 3$ и $t(2,L) \geqslant 2$, а G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *Существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}(S)$, где K — максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G.*

(2) *Для каждой коклики ρ вершин графа $GK(G)$, порядок которой больше 2, не более чем одно простое число из ρ лежит в $\pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)$. В частности, $t(S) \geqslant t(G) - 1$.*

(3) *Каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(2,S) \geqslant t(2,G)$.*

Лемма 3 [12, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, K — нормальная подгруппа в G и G/K — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|,|K|) = 1$ и F не содержится в $KC_G(K)/K$, то $r|C| \in \omega(G)$ для некоторого простого делителя r числа $|K|$.*

Лемма 4 [13]. *В группе $GL_n(q)$ есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка q^{n-1} и циклическим дополнением порядка $q^{n-1} - 1$. В группе $PSL_n(q)$ есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка q^{n-1} и циклическим дополнением порядка $(q^{n-1} - 1)/(n, q-1)$.*

Если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(q,r) = 1$, то через $e(r,q)$ обозначается мультипликативный порядок числа q по модулю r, т. е. наименьшее натуральное число m, удовлетворяющее условию $q^m \equiv 1 \pmod r$. Для нечетного q положим $e(2,q) = 1$, если $q \equiv 1 \pmod 4$, и $e(2,q) = 2$ в противном случае.

Лемма 5 (Жигмонди [14]). *Пусть $q > 1$ — натуральное число. Тогда для каждого натурального числа m найдется простое число r, для которого $e(r,q) = m$, за исключением случаев $q = 2$ и $m = 1$, $q = 3$ и $m = 1$, $q = 2$ и $m = 6$.*

Простое число r, удовлетворяющее условию $e(r,q) = m$, называется *примитивным простым делителем* числа $q^m - 1$. В соответствии с [11] наибольший делитель числа $q^m - 1$, множество простых делителей которого состоит только из примитивных простых делителей, называется *наибольшим примитивным делителем*. В [15, лемма 6] указана формула для вычисления наибольших примитивных делителей.

Лемма 6 [16]. *Если q — нечетное простое число, $n \geqslant 2$ и $q^n = 2^m + \varepsilon 1$, то $q = 3$, $n = 2$, $m = 3$ и $\varepsilon = +$.*

Лемма 7. *Пусть q — нечетное натуральное число, n — четное натуральное число и u — степень простого числа. Если $u^2 + \varepsilon u + 1 = (q^n + 1)/2$, то либо $u = 3$, $q = 5$, $n = 2$ и $\varepsilon = +$, либо $u = 4$, $q = 5$, $n = 2$ и $\varepsilon = -$.*

Доказательство. Подставляя в уравнение значения $u \leqslant 4$, получаем указанные решения. Пусть $u > 4$. Из исходного равенства следует, что $u(2u + \varepsilon 2) = q^n - 1$. Пусть $n = 2l$. Тогда $2u(u + \varepsilon 2) = (q^l - 1)(q^l + 1)$. Так как $(q^l - 1, q^l + 1) = 2$, то либо $q^l - 1$, либо $q^l + 1$ делится на u. Если частное от деления этого числа на u больше 1, то $2u \leqslant q^l + 1$, поэтому $u + \varepsilon 2 < 2u - 2 \leqslant q^l - 1$; противоречие. Следовательно, $q^l - 1 = u$, $q^l + 1 = 2u + \varepsilon 2$. Значит, $u = 2 - \varepsilon 2 \leqslant 4$. Лемма доказана.

2. Свойства групп $B_n(q)$, $C_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$

В данном разделе приведены необходимые сведения о спектрах рассматриваемых групп, их накрытий и автоморфных расширений.

Лемма 8 [17]. *Пусть $G \in \{B_n(q), C_n(q)\}$, где $n \geqslant 3$ и q — степень нечетного простого числа p. Положим $d = 2$ при $G = B_n(q)$ и $d = 1$ при $G = C_n(q)$. Тогда $\omega(G)$ состоит из всех делителей следующих чисел:*

(1) $(q^n \pm 1)/2$;

(2) $[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, *где* $s \geqslant 2$, $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ *и* $n_1 + \dots + n_s = n$;

(3) $p^l(q^{n_1} \pm 1)/d$, *где* $l, n_1 \in \mathbb{N}$ *и* $(p^{l-1} + 1)/2 + n_1 = n$;

(4) $p^l[q^{n_1} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, *где* $s \geqslant 2$, $l, n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$ *и* $(p^{l-1} + 1)/2 + n_1 + \dots + n_s = n$;

(5) p^l, *где* $l \in \mathbb{N}$ *и* $(p^{l-1} + 1)/2 = n$.

Как показывает лемма 8, если $B_n(q) \not\simeq C_n(q)$, то $\omega(B_n(q))$ является собственным подмножеством в $\omega(C_n(q))$. Спектры групп ${}^2D_n(q)$ окончательно не описаны, но для них известны порядки полупростых элементов (см. [18]) и строение графа простых чисел (см. [19]). Кроме того, в группе $B_n(q)$ $(\simeq \Omega_{2n+1}(q))$ есть секция, изоморфная ${}^2D_n(q)$ $(\simeq P\Omega^-_{2n}(q))$, и поэтому $\omega({}^2D_n(q))$ содержится в $\omega(B_n(q))$. Таким образом, при любом q среди всех рассматриваемых групп группа $C_n(q)$ имеет самый большой спектр.

Лемма 9. *Пусть $n \geqslant 4$, q — степень нечетного простого числа p и $a \in \omega(C_n(q))$.*

(1) *Если $(a, p) = 1$ и $a > q^n/3$, то $(q^{n-1} + 1)(q - 1)/2 \leqslant a \leqslant (q^{n-1} - (-1)^n)(q + 1)/2$.*

(2) *Если $q > p$ и $a > q^n/3 + 3$, то $(a, p) = 1$.*

(3) *Если $q > p$, то $a \leqslant (q^{n-1} - (-1)^n)(q+1)/2$; если $q = p > 3$, то $a \leqslant q^n + q$; если $q = p = 3$, то $a \leqslant q^n + q^2$.*

Доказательство. (1) Заметим, что при $q = 3$ нижняя граница $(q^{n-1} + 1)(q - 1)/2$ ровно на единицу больше, чем $q^n/3$, поэтому для доказательства достаточно установить, что $a \leqslant (q^{n-1} - 1)(q + 1)/2$.

Число a делит одно из чисел, указанных в первых двух пунктах леммы 8. Если a — собственный делитель числа $(q^n \pm 1)/2$, то $a \leqslant (q^n + 1)/4 < q^n/3$. Если $a = (q^n \pm 1)/2$, то требуемые в п. (1) неравенства выполнены.

Если a делит $[q^{n_1} - 1, q^{n_2} - 1]$, где $n_1 + n_2 = n$ и $q > 3$, то

$$a \leqslant \frac{(q^{n_1} - 1)(q^{n_2} - 1)}{q - 1} \leqslant \frac{q^n - q^{n_1} - q^{n_2} + 1}{3} \leqslant \frac{q^n}{3};$$

противоречие с условием.

Пусть a делит $[q^{n_1} - 1, q^{n_2} + 1]$, где $n_1 + n_2 = n$ и $q > 3$. Если a — собственный делитель этого числа или $(q^{n_1} - 1, q^{n_2} + 1) > 2$, то

$$a \leqslant \frac{(q^{n_1} - 1)(q^{n_2} + 1)}{4} = \frac{q^n + q^{n_1} - q^{n_2} - 1}{4} \leqslant \frac{q^n + q^{n-1}}{4} \leqslant \frac{q^n + q^n/3}{4} = \frac{q^n}{3};$$

противоречие с условием. Следовательно, $a = [q^{n_1} - 1, q^{n_2} + 1] = (q^{n_1} - 1)(q^{n_2} + 1)/2$, и тогда требуемые неравенства выполнены.

Пусть a делит $[q^{n_1} + 1, q^{n_2} + 1]$, где $n_1 + n_2 = n$ и $q > 3$. Если a — собственный делитель этого числа или $(q^{n_1} + 1, q^{n_2} + 1) > 2$, то

$$a \leqslant \frac{(q^{n_1} + 1)(q^{n_2} + 1)}{4} = \frac{q^n + q^{n_1} + q^{n_2} + 1}{4} \leqslant \frac{q^n + q^{n-2} + q^{n-3} + 1}{4} \leqslant \frac{q^n + q^{n-1}}{4} \leqslant \frac{q^n}{3};$$

противоречие с условием. Если $a=[q^{n_1}+1,q^{n_2}+1]$, $(q^{n_1}+1,q^{n_2}+1)=2$ и $n_1>1$, то

$$\frac{q^n+1}{2}\leqslant a=\frac{q^n+q^{n_1}+q^{n_2}+1}{2}\leqslant\frac{q^n+q^{n-2}+q^2+1}{2}\leqslant\frac{q^n+q^{n-1}-q-1}{2},$$

так что требуемые неравенства выполнены. Пусть, наконец, $a=[q^{n-1}+1,q+1]$. Если n нечетно, то $a=(q^{n-1}+1)(q+1)/2$, и требуемое выполнено. Если n четно, то $a=q^{n-1}+1$ и, значит, $a\leqslant q^n/3$ при $q>3$ и $a=(q^{n-1}+1)(q-1)/2$ при $q=3$, т. е. опять требуемые неравенства выполнены.

Пусть a делит $[q^{n_1}\pm1,q^{n_2}\pm1,\dots,q^{n_s}\pm1]$, где $s\geqslant3$ и $n_1+n_2+\dots+n_s=n$. Будем ограничивать число a сверху. Поскольку число $[q^b\pm1,q^b\pm1]$, где знаки выбираются независимо, делит число $q^{2b}-1$, можно считать, что $n_1<n_2<\dots<n_s$. Так как 2-часть наименьшего общего кратного нескольких чисел совпадает с 2-частью одного из этих чисел, выполнена цепочка неравенств

$$a\leqslant\frac{(q^{n_1}+1)\dots(q^{n_s}+1)}{2^{s-1}}=\frac{q^n+q^{n-n_1}+q^{n-n_2}+\dots+1}{2^{s-1}}\leqslant\frac{q^n+q^{n-1}+q^{n-2}}{4}+2q^{n-3}.$$

Если $q>3$, то $(q^n+q^{n-1}+q^{n-2}+8q^{n-3})/4\leqslant q^n(1+1/5+1/25+8/125)/4=163q^n/500<q^n/3$. Если $q=3$, то $a\leqslant(q^{n-1}-1)(q+1)/2$.

(2) Предположим, что $(a,p)\neq1$. Тогда a делит одно из чисел, указанных в последних трех пунктах леммы 8.

Пусть a делит $p^l[q^{n_1}\pm1,q^{n_2}\pm1,\dots,q^{n_s}\pm1]$, где $s\geqslant1$ и $(p^{l-1}+1)/2+n_1+n_2+\dots+n_s=n$. Обозначим $(p^{l-1}+1)/2$ через n_0. Из (1) следует, что $a\leqslant p^k(q^{n-n_0}+1)$. Поскольку $k\leqslant n_0$ и $p^2\leqslant q$, выполнено неравенство $p^k\leqslant q^{n_0/2}$. Таким образом, $a\leqslant q^{n-n_0/2}+q^{n_0/2}\leqslant q^{n-1/2}+q^{1/2}$. Если $q^{1/2}\geqslant5$, то $a\leqslant q^n/5+q^{1/2}<q^n/3$. Если $q^{1/2}<5$, то $q=9$ и $a\leqslant q^n/3+3$ в противоречие с предположением.

Пусть $a=p^l$, где $p^{l-1}+1=2n$. Тогда $l\leqslant n$ и, значит, $a\leqslant q^{n/2}<q^n/3$; противоречие.

(3) При $q>p$ и $(a,p)=1$ требуемое следует из (1) и (2). Пусть $a=p^{l+1}[q^{n_1}\pm1,\dots,q^{n_s}\pm1]$, где $(p^l+1)/2+n_1+\dots+n_s=n$.

Если $l\geqslant2$, то $l+1\leqslant(p^l-1)/2$ и, следовательно,

$$a\leqslant q^{(p^l-1)/2}(q^{n_1+\dots+n_s}+1)=q^{n-1}+q^{(p^l-1)/2}<q^n.$$

Если $l=1$ и $q>3$, то $a\leqslant p^2(q^{n-(p+1)/2}+1)\leqslant q^{n-1}+p^2\leqslant q^n+q$.

Если $l=1$ и $q=3$, то $a\leqslant q^2(q^{n-2}+1)=q^n+q^2$.

Если $l=0$, то $a\leqslant p(q^{n-1}+1)\leqslant q^n+q$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть $S\in\{B_n(q),C_n(q)\}$, где $n=2^m\geqslant4$ и q — степень нечетного простого числа p. Предположим, что G — конечная группа, K — нетривиальная нормальная нильпотентная подгруппа группы G и $G/K\simeq S$. Тогда либо $\omega(G)\not\subseteq\omega(C_n(q))$, либо K является p-группой.*

Доказательство. Предположим, что $\omega(G)\subseteq\omega(C_n(q))$ и $r\in\pi(K)$, $r\neq p$. Без ограничения общности можно считать, что K является r-группой. Если r делит $(q^n+1)/2$, то $pr\in\omega(G)\setminus\omega(C_n(q))$, и поэтому $(r,(q^n+1)/2)=1$. В силу простоты группы S централизатор $C_G(K)$ либо лежит в K, либо содержит прообраз в G группы S. В последнем случае $r(q^n+1)/2\in\omega(G)$, что невозможно, так как $(q^n+1)/2\in\mu(C_n(q))$. Таким образом, $C_G(K)\subseteq K$.

В группе S есть подгруппа, изоморфная $SL_n(q)$. По лемме 4 в группе $PSL_n(q)$ есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка q^{n-1} и циклическим дополнением порядка $(q^{n-1}-1)/d$, где $d=(n-1,q-1)$. Если в ее прообразе в группе $SL_n(q)$ взять холлову $\pi(d)'$-подгруппу, то она будет группой Фробениуса с ядром порядка q^{n-1} и дополнением порядка $t=(q^{n-1}-1)_{d'}$. Значит, по лемме 3 в группе G есть элемент порядка rt. В группе $C_n(q)$ есть элемент порядка rt, только если r делит $q\pm1$.

Пусть r делит $q \pm 1$. В группе S есть подгруппа, изоморфная $GL_{n-1}(q)$, и, значит, по лемме 4 для любого $i < n-1$ есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка q^i и циклическим дополнением порядка $q^i - 1$.

Пусть $r = 2$. Поскольку $n/2 < n-1$, в группе S есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка $q^{n/2}$ и циклическим дополнением порядка $q^{n/2} - 1$. Тогда по лемме 3 в группе G есть элемент порядка $2(q^{n/2} - 1)$, а это противоречит тому, что $(q^{n/2} - 1)_2$ совпадает с 2-периодом группы $C_n(q)$.

Пусть r нечетно. В группе S есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка q^{n-2} и циклическим дополнением порядка $q^{n-2} - 1$. Тогда по лемме 3 в группе G есть элемент порядка $r(q^{n-2}-1)$. Предположим, что $r(q^{n-2}-1) \in \omega(C_n(q))$. Тогда по лемме 8 это число делит число вида $a = [q^{n_1} \pm 1, q^{n_2} \pm 1, \dots, q^{n_s} \pm 1]$, где $n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$. Среди n_i должно быть число, кратное $n-2$, или должны быть два различных числа, кратных $n/2 - 1$. Следовательно, a делит $[q^{n-2} - 1, q^2 + 1]$. Однако $[q^{n-2} - 1, q^2 + 1]_r = (q^{n-2} - 1)_r < r(q^{n-2} - 1)_r$; противоречие. Лемма доказана.

Согласно [20] простая группа L лиева типа над полем характеристики p называется *унисингулярной*, если при действии группы L на любой неединичной конечной абелевой p-группе K любой полупростой элемент из L имеет неединичную неподвижную точку в K.

Лемма 11 [20, теорема 1.3]. *Простые группы $B_n(p)$ и $C_n(p)$, где p — простое нечетное число, унисингулярны. Группа $E_8(q)$ унисингулярна при любом q.*

Лемма 12. *Пусть $n = 2^m \geqslant 4$, p — нечетное простое число, $\alpha \in \mathbb{N}$, $q = p^\alpha$, r_{2n-2} — примитивный простой делитель числа $q^{2n-2} - 1$.*

(1) *Пусть S — одна из групп $B_n(q)$, $C_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$, $S \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$ и $\omega(G) \subseteq \omega(C_n(q))$. Если α нечетно, то $G = S$; если α четно, то $\pi(G/S) \subseteq \{2\}$.*

(2) *Пусть α четно, $S = B_n(q)$, $S \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$ и $\omega(G) \subseteq \omega(C_n(q))$. Тогда $2pr_{2n-2}$ лежит в $\mu(C_n(q)) \setminus \mu(G)$.*

Доказательство. (1) Прежде всего, $q^n + 1 \in \omega(\mathrm{Inndiag}(S)) \setminus \omega(S)$, поэтому G не содержит $\mathrm{Inndiag}(S)$.

Пусть $r \in \pi(G/S)$ — нечетное простое число. Тогда G содержит полевой автоморфизм φ порядка r. По [21, предложение 4.9.1(a)] централизатор $C_S(\varphi)$ изоморфен группе того же лиева типа, что и S, но над полем порядка $q^{1/r}$, поэтому содержит элементы порядков 2 и $(q^{n/r}+1)/2$. Значит, G содержит элементы порядков $2r$ и $r(q^{n/r} + 1)/2$. Но при нечетном r число $q^{n/r} + 1$ делит $q^n + 1$, поэтому 2 и простые делители числа $(q^{n/r} + 1)/2$ лежат в разных компонентах графа $GK(C_n(q))$; противоречие. Значит, $\pi(G/S) \subseteq \{2\}$.

(2) Если $G = B_n(q)$, то утверждение следует из леммы 8. Поэтому можно считать, что $G > S$. По уже доказанному $\pi(G/S) = \{2\}$. Предположим, что $2pr_{2n-2} \in \omega(G)$. Тогда в $G \setminus S$ есть инволюция t, в централизаторе которой в группе S есть элемент порядка pr_{2n-2}. Инволюция t не лежит в $\mathrm{Inndiag}(S)$, поэтому в силу [21, предложение 4.9.1(d)] она является полевым автоморфизмом группы S. По [21, предложение 4.9.1(a)] централизатор $C_S(t)$ изоморфен группе типа B_n над полем порядка $\sqrt{q}$. Но в такой группе нет элемента порядка r_{2n-2}; противоречие. Лемма доказана.

3. Доказательство теорем

Зафиксируем обозначения, которые будут использоваться всюду в этом параграфе.

Пусть L — одна из групп $B_n(q)$, $C_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$, где $q = p^\alpha$ — степень нечетного простого числа p и $n = 2^k \geqslant 4$ $(\alpha, k \in \mathbb{N})$. Тогда, как указано в таблице, $s(L) = 2$ и $n_2(L) = (q^n + 1)/2$. Кроме того, по [19, табл. 6, 8] имеем $t(L) = (3n + 4)/4$.

Множество $\pi(L)$ состоит из числа p и делителей чисел q^i-1, где $1\leqslant i\leqslant 2n$. Если не оговорено особо, то r_i обозначает некоторый примитивный простой делитель числа q^i-1. По теореме Жигмонди (лемма 5) такой делитель существует для любого $i>2$. Заметим, что 2-период группы L совпадает с 2-частью числа $(q^n-1)/2$.

Пусть G — конечная группа со свойством $\omega(G)=\omega(L)$. По теореме Грюнберга — Кегеля (лемма 1) существует неабелева простая группа S такая, что $S\leq\overline{G}=G/K\leq \mathrm{Aut}(S)$, где K — нормальная нильпотентная подгруппа группы G; при этом $s(S)\geqslant 2$ и $n_2(L)=n_i(S)$ для некоторого $i>1$. Кроме того, $t(S)\geqslant t(L)-1=3n/4$ по п. (2) леммы 2.

Пусть $K\neq 1$. Тогда $S\cap C_G(K)K/K=1$. Действительно, в противном случае группа $C_G(K)K/K$ содержала бы всю простую группу S, и, значит, в группе G имелся бы элемент порядка $rn_2(S)$, где $r\in\pi_1(G)$, что невозможно.

Предложение 1. *Группа S изоморфна одной из групп $B_n(q)$, $C_n(q)$ и ${}^2D_n(q)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство состоит в последовательном рассмотрении в качестве S групп, указанных в таблице. Сведения о циклических торах групп лиева типа, используемые при доказательстве, можно найти в [18] для классических групп и в [22] для исключительных групп.

1. Предположим, что $S\simeq Alt_m$. Тогда $(q^n+1)/2=r$, где $r=m,m-1$ или $m-2$. Рассмотрим в $GK(L)$ коклику, состоящую из примитивных делителей r_{n-1}, r_{2n-2} и r_{2n-4}. В силу леммы 2 по крайней мере два числа из этой коклики лежат в $\pi(S)$. С другой стороны,

$$r_{n-1}\leqslant\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\leqslant\frac{q^{n-1}-1}{2}<\frac{q^n+1}{4}=\frac{r}{2}\leqslant\frac{m}{2},$$

$$r_{2n-2}\leqslant\frac{q^{n-1}+1}{q+1}\leqslant\frac{q^{n-1}+1}{4}<\frac{q^n+1}{4}=\frac{r}{2}\leqslant\frac{m}{2},$$

$$r_{2n-4}\leqslant\frac{q^{n-2}+1}{2}<\frac{q^n+1}{4}=\frac{r}{2}\leqslant\frac{m}{2},$$

следовательно, произведение любых двух из этих чисел лежит в $\omega(S)\setminus\omega(L)$; противоречие.

2. Предположим, что $S\simeq A_m^{\varepsilon}(u)$, где $u=v^{\beta}$, v — простое число, $\beta\in\mathbb{N}$, m — нечетное простое число и $u-\varepsilon 1$ делит $m+1$. Тогда $(q^n+1)/2=(u^m-\varepsilon 1)/(u-\varepsilon 1)$. Из этого равенства следует, что

$$\frac{q^n-1}{2}=u\frac{u^{m-1}-1}{u-\varepsilon 1}. \qquad (1)$$

Предположим, что $u=2^{\beta}$. Тогда $u=(q^n-1)_2/2\geqslant 8$ совпадает с 2-периодом группы L. С другой стороны, $u-\varepsilon 1\leqslant (m+1)/2$, и, значит, $m\geqslant u+1=2^{\beta}+1$. Следовательно, в группе S есть унипотентный элемент порядка $2^{\beta+1}=2u=(q^n-1)_2$; противоречие.

Предположим, что u нечетно. Тогда из (1) следует, что $(u^{m-1}-1)_2>(q^n-1)_2/2$. Поскольку в S есть циклический тор порядка $u^{m-1}-1$, и в этом случае 2-период группы S превосходит 2-период группы L; противоречие.

3. Предположим, что $S\simeq A_{m-1}^{\varepsilon}(u)$, где $u=v^{\beta}$, v — простое число, $\beta\in\mathbb{N}$ и m — нечетное простое число, не делящее $u-\varepsilon 1$. Тогда, как и в предыдущем случае, $(q^n+1)/2=(u^m-\varepsilon 1)/(u-\varepsilon 1)$, и, значит,

$$2u(u^{m-1}-1)=(q^n-1)(u-\varepsilon 1). \qquad (2)$$

Заметим, что $u\neq 2$, так как q^n-1 кратно 16. Кроме того, $t(S)=(m+1)/2\geqslant 3n/4$, откуда $m\geqslant 3n/2-1\geqslant 5$.

Из (1) следует, что $e(v,q)$ является степенью числа 2. Предположим, что $e(v,q)>2$. Тогда $\{v,r_{2n},r_{2n-2},r_{n-1}\}$ — независимое множество вершин графа $GK(G)$, и, значит, по лемме 2 кроме v и r_{2n} в $\pi(S)$ лежит хотя бы одно из чисел r_{2n-2} и r_{n-1}. Обозначим его через r.

Вершины r и v не смежны в $GK(S)$, и r не делит $(u^m - \varepsilon 1)/(u - \varepsilon 1) = (q^n + 1)/2$, следовательно, по [19, предложение 3.1] число r является примитивным делителем числа $u^{m-1} - 1$. Так как $m \geqslant 5$, то r не делит $u - \varepsilon 1$. Тогда из (1) следует, что r делит $q^n - 1$; противоречие с определением примитивного делителя. Таким образом, v является примитивным делителем либо $q - 1$, либо $q^2 - 1$.

В группе S, а значит, и в группе L, есть элемент порядка $u^{m-1} - 1$. Как следует из (2), этот порядок делится на примитивные делители r_n, $r_{n/2}, \ldots, r_4$. При этом в силу равенства

$$u^{m-1} - 1 = \frac{u - \varepsilon 1}{u} \cdot \frac{q^n - 1}{2}$$

он не делит $(q^n - 1)/2$ и не превосходит $(q^n - 1)/3$, так как $u \geqslant 3$. Поскольку $u^{m-1} - 1$ не делит $(q^n \pm 1)/2$, то по лемме 8 он делит число a одного из двух следующих видов:

$$[q^{n_1} - \varepsilon_1, \ldots, q^{n_s} - \varepsilon_s], \quad \text{где } n_1 + \cdots + n_s = n \quad \text{и} \quad \varepsilon_i = \pm 1;$$

$$p^l[q^{n_1} - \varepsilon_1, \ldots, q^{n_s} - \varepsilon_s], \quad \text{где } (p^{l-1} + 1)/2 + n_1 + \cdots + n_s = n \quad \text{и} \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Будем считать, что $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_s$. Число a делится на r_n, следовательно, $n_1 = n/2$ и $\varepsilon_1 = -1$. Далее, a делится на $r_{n/2}$, поэтому либо $n_2 = n/2$ и $\varepsilon_2 = 1$, либо $n_2 = n/4$ и $\varepsilon_2 = -1$. В первом случае $n_1 + n_2 = n$, и поэтому $a = [q^{n/2} + 1, q^{n/2} - 1]$ делит $q^n - 1$; противоречие. Значит, $n_2 = n/4$. Продолжая рассуждать подобным образом, получаем, что для некоторого натурального числа k имеем $s \geqslant k - 1$ и

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1} = n/2 + n/4 + \cdots + 2 = n - 2.$$

Если p не делит a, то a делит $q^n - 1$, что невозможно. Следовательно, p делит a, и, значит, либо

$$a = p[q^{n/2} + 1, \ldots, q^2 + 1, q \pm 1] = p\,\frac{q^n - 1}{2^{k-1}(q \mp 1)},$$

либо $p = 3$ и

$$a = p^2[q^{n/2} + 1, \ldots, q^2 + 1] = p^2 \frac{q^n - 1}{2^{k-2}(q^2 - 1)}.$$

Поскольку $a \geqslant (q^n - 1)/3$, в первом случае получаем, что $3p \geqslant 2^{k-1}(q \mp 1)$, откуда либо $k = 2$ и $q = p$, либо $k = 3$ и $q = p = 3$. Во втором случае выполнено неравенство $3p^2 \geqslant 2^{k-2}(q^2 - 1)$, из которого следует, что $k \in \{2, 3\}$ и $q = p = 3$.

Пусть $k \in \{2, 3\}$ и $q = p = 3$. Число v является делителем $q - 1 = 2$ или $q^2 - 1 = 8$, откуда $v = 2$. Из (2) следует, что $u = 2^{k+1}$. Как показывает непосредственная проверка, для $(q, u, n) \in \{(3, 8, 4), (3, 16, 8)\}$ равенство (2) невозможно ни при каких m.

Пусть $k = 2$ и $p = q$. Тогда $u^{m-1} - 1 = (q^n - 1)(u - \varepsilon 1)/(2u)$ делит $(q^n - 1)p/(2(p \pm 1))$. Следовательно, $(u - \varepsilon 1)(p \pm 1)$ делит pu, откуда $p = u - \varepsilon 1$. Поскольку $u < p$, получаем, что $\varepsilon = -$ и $u = p - 1$. Таким образом, $2(p - 1)^{m-1} = (p^2 + 1)(p + 1)p + 2$. Правая часть сравнима с 6 по модулю $p - 1$, значит, $p \in \{3, 7\}$, откуда $u \in \{2, 6\}$; противоречие.

4. Предположим, что $S \simeq A^{\varepsilon}_{m-1}(u)$, где $u = v^{\beta}$, v — простое число, $\beta \in \mathbb{N}$, m — нечетное простое число и $u - \varepsilon 1$ делится на m. Тогда

$$\frac{q^n + 1}{2} = \frac{u^m - \varepsilon 1}{(u - \varepsilon 1)m}. \tag{3}$$

Ввиду [19, табл. 6] и неравенства $t(S) \geqslant 3n/4$ имеем $(m + 1)/2 \geqslant 3n/4$, откуда $m \geqslant 3n/2 - 1$. Поскольку $n \geqslant 4$, получаем, что $m \geqslant 5$ и $u \geqslant m + \varepsilon 1 \geqslant 4$. При $q \geqslant 3$, $n \geqslant 4$, $m \geqslant 5$ и $u \geqslant 4$ из (3) следует, что $q > u + 1$.

В группе S есть элемент порядка $t=(u^{m-1}-\varepsilon 1)/m$. Следовательно, $t\in\omega(L)$, причем

$$t=\frac{u-\varepsilon 1}{u}\left(\frac{u^m-1}{(u-\varepsilon 1)m}-\frac{1}{m}\right)=\frac{u-\varepsilon 1}{u}\left(\frac{q^n+1}{2}-\frac{1}{m}\right)=\frac{u-\varepsilon 1}{u}\cdot\frac{mq^n+m-2}{2m}. \tag{4}$$

Предположим, что $q=p$. Тогда $p>u-\varepsilon 1\geqslant m-2$, и, значит, p не делит ни $u-\varepsilon 1$, ни $m-2$. Следовательно, p не делит правую часть (4), и, значит, p не делит t. Таким образом, либо $q>p$, либо $(t,p)=1$.

Пусть $\varepsilon=-$. Тогда

$$t=\frac{u+1}{u}\left(\frac{q^n+1}{2}-\frac{1}{m}\right)\geqslant\frac{q+1}{q}\cdot\frac{q^n-1}{2}=\frac{q^n+q^{n-1}-1-1/q}{2}.$$

С другой стороны, в силу п. (3) леммы 9 число t не превосходит

$$\frac{(q^{n-1}-1)(q+1)}{2}=\frac{q^n+q^{n-1}-q-1}{2};$$

противоречие.

Пусть $\varepsilon=+$. Тогда $u\geqslant m+1\geqslant 6$. Если $u=7$, то $m=5$; противоречие с тем, что m делит $u-1$. Таким образом, $u\geqslant 8$, и поэтому для t выполнена оценка

$$t=\frac{u-1}{u}\left(\frac{q^n+1}{2}-\frac{1}{m}\right)\geqslant\frac{7}{8}\cdot\frac{q^n-1}{2}>\frac{q^n}{3}+3.$$

По пунктам (1) и (2) леммы 9 выполнено неравенство $t\geqslant(q^{n-1}+1)(q-1)/2$, из которого следует оценка

$$\left(\frac{q^n+1}{2}-t\right):\frac{q^n+1}{2}\leqslant\left(\frac{q^n+1}{2}-\frac{(q^{n-1}+1)(q-1)}{2}\right):\frac{q^n+1}{2}=\frac{q^{n-1}-q+2}{q^n+1}<\frac{1}{q}.$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{u^m-1}{m(u-1)}-\frac{u^{m-1}-1}{m}\right):\frac{u^m-1}{m(u-1)}=\frac{u^{m-1}+u-2}{u^m-1}>\frac{1}{u}.$$

Следовательно, $1/u<1/q$, и, значит, $u>q$; противоречие.

5. Предположим, что $S\simeq A_1(u)$, где $u=v^\beta$ для простого числа v и натурального числа β.

Пусть $v=2$. Тогда $(q^n+1)/2=u\pm 1$. Если $(q^n+1)/2=u-1$, то $q^n+3=2^{\beta+1}$, но q^n+3 не делится на 8; противоречие. Значит, $q^n-1=2^{\beta+1}$, и по лемме 6 получаем, что $n=2$; противоречие.

Итак, v нечетно. Тогда либо $(q^n+1)/2=v$, либо $(q^n+1)/2=(u\pm 1)/2$. Так как $t(S)=3$ и $t(S)\geqslant 3n/4$, то $n=4$. Числа r_3, r_4, r_6, r_8 образуют коклику в графе $GK(G)$. Из п. (2) леммы 2 и равенства $t(S)=3$ следует, что одно из них не лежит в $\pi(S)$, а оставшиеся три лежат в $\pi(S)$. Поскольку эти три числа не смежны в $GK(S)$, одно из них совпадает с v, второе делит $(u-1)/2$, а третье делит $(u+1)/2$. В частности, $v\neq p$.

Если $(q^4+1)/2=(u+1)/2$, то $u=q^4$; противоречие.

Допустим, что $(q^4+1)/2=(u-1)/2$. Тогда $u=q^4+2$, $u+1=q^4+3$. Значит, r_4 не лежит в $\pi(S)$. Если одно из чисел r_3, r_6 делит u, то в силу равенства $(q^4+2,q^3-\varepsilon 1)=(q-\varepsilon 2,9)$ оно равно 3; противоречие.

Таким образом, $(q^4+1)/2=v$. Тогда $u=v$, так как иначе $(u+1)/2$ больше, чем $v^2/2=(q^4+1)^2/8$, и значит, больше всех элементов из $\omega(L)$. Следовательно, $u-1=(q^4-1)/2$ и $u+1=(q^4+3)/2$. Таким образом, r_4 делит $u-1$. Значит, одно из чисел r_3, r_6 делит q^4+3, а второе не делит порядок группы S. Предположим, что $r_i\in\pi(S)$ и r_j не делит $|S|$, где $i,j\in\{3,6\}$. Тогда любой примитивный делитель числа q^i-1 лежит в $\pi(S)$ и делит q^4+3, поэтому наибольший примитивный делитель числа q^i-1, равный $(q^2+\varepsilon q+1)/(q-\varepsilon 1,3)$, делит q^4+3. В силу равенства $(q^4+3,q^3-\varepsilon 1)=(q+\varepsilon 3,28)$ получаем, что $(q^2+\varepsilon q+1)/(q-\varepsilon 1,3)=(q+\varepsilon 3,7)$. Единственным нечетным решением этого уравнения является число $q=3$.

Пусть $q=3$. Тогда $u=41$ и $r_3=13\in\pi(K)$. По лемме 4 в группе S есть подгруппа Фробениуса с ядром порядка u и циклическим дополнением порядка $(u-1)/2=20$. Из леммы 3 следует, что $260\in\omega(G)\setminus\omega(L)$; противоречие.

6. Предположим, что S изоморфна одной из групп $B_m(u)$, $C_m(u)$ и ${}^2D_m(u)$, где m — степень числа 2. Если u четно, то $(q^n+1)/2=u^m+1$, и, следовательно, $q^n-1=2u^m$, откуда $n=2$ по лемме 6; противоречие. Таким образом, $u=v^\beta$, где v — нечетное простое число и $\beta\in\mathbb{N}$. Тогда $(q^n+1)/2=(u^m+1)/2$, откуда $p=v$ и $\alpha n=\beta m$. Кроме того, $t(S)=3m/4+1\geqslant 3n/4$, и, значит, $m\geqslant n-4/3$. Поскольку m и n — степени числа 2, большие 1, выполнено более сильное неравенство $m\geqslant n$. Если $m>n$, то $\beta<\alpha$, и, следовательно, $2\alpha(n-1)<2\beta(m-1)<2\alpha n$. Тогда число r со свойством $e(r,p)=2\beta(m-1)$ лежит в $\omega(S)\setminus\omega(L)$, что невозможно. Таким образом, $m=n$ и $u=q$.

7. Предположим, что S изоморфна одной из групп $D_m(u)$, $B_m(u)$, $C_m(u)$ и $D_{m+1}(u)$, где m — простое число, причем в первом случае $m\geqslant 5$ и $u\in\{2,3,5\}$, а в остальных случаях $u\in\{2,3\}$. Тогда $(q^n+1)/2=(u^m-1)/(2,u-1)$ и $(3m+3)/4\geqslant t(S)\geqslant 3n/4$. Таким образом, $m\geqslant n-1$.

Пусть $u=2$. Тогда $q^n-1=2^m-4$, что невозможно, так как q^n-1 делится на 8.

Пусть $u\in\{3,5\}$. В группе S есть параболическая подгруппа P, фактор Леви которой имеет тип A_{m-1} и, следовательно, содержит элемент порядка $t=(u^m-1)/(q-1)$. Этот элемент и унипотентный радикал группы P порождают группу Фробениуса с циклическим дополнением порядка t. Значит, если $r\in\pi(K)$ и $r\neq u$, то по лемме 3 в G есть элемент порядка rt; противоречие, так как $t\in\mu(L)$. Таким образом, $\pi(\overline{G}/S)\cup\pi(K)\subseteq\{2,u\}$.

Пусть $m>3$. Тогда $t(S)>3$, и, значит, коклики графа $GK(S)$ максимальной мощности не содержат ни 2, ни u. Следовательно, $t(S)=t(L)$, т. е. $[(3m+5)/4]=(3n+4)/4$ для $S\not\simeq D_m(u)$ и $[(3m+1)/4]=(3n+4)/4$ для $S\simeq D_m(u)$. В первом случае имеем $3m+3=3n+4$ или $3m+5=3n+4$; противоречие. Второй случай возможен только при $m=n+1$, поэтому $q^n+1=u^{n+1}-1$. Если $q^4\geqslant u^5$ или $q\leqslant u$, то это равенство невозможно. Значит, $u=5$, $q=7$ и $7^n+2=5^{n+1}$, но 7^n имеет остаток 1 или 4 при делении на 5; противоречие.

8. Предположим, что $S\simeq {}^2D_m(2)$, где $m=2^l+1\geqslant 5$. Тогда $(q^n+1)/2=2^{m-1}+1$, и значит, $2^m=q^n-1$. По лемме 6 получаем, что $n=2$; противоречие.

9. Предположим, что $S\simeq {}^2D_m(3)$, где $m=2^l+1$ или m — простое число. Тогда либо $(q^n+1)/2=(3^{m-1}+1)/2$, либо $(q^n+1)/2=(3^m+1)/4$. В первом случае $m=n+1$ и $q=3$. Тогда $(3^m+1)/4\in\omega(S)\setminus\omega(L)$; противоречие. Во втором случае $2(q^n-1)=3(3^{m-1}-1)$. В группе S есть циклический тор порядка $(3^{m-1}-1)/2$, и поэтому 2-период группы S больше 2-периода группы L; противоречие.

10. Предположим, что S изоморфна одной из групп ${}^3D_4(u)$, $G_2(u)$ и $F_4(u)$. В этом случае $(q^n+1)/2$ равно одному из чисел u^4-u^2+1, $u^2\pm u+1$, u^4+1. Тогда $n=2$ по леммам 7 и 6; противоречие.

11. Предположим, что $S\simeq {}^2B_2(u)$, где $u=2^{2\beta+1}>2$ $(\beta\in\mathbb{N})$. Тогда либо $(q^n+1)/2=u-1$, либо $(q^n+1)/2=u\pm\sqrt{2u}+1$. В первом случае $q^n+3=2^{2\beta+2}$, но q^n+3 не делится на 8; противоречие.

Во втором случае, $q^n=2u\pm2\sqrt{2u}+1=2^{2\beta+2}\pm2^{\beta+2}+1=(2^{\beta+1}\pm1)^2$. Тогда $q^{n/2}=2^{\beta+1}\pm1$, и, значит, $q=3$, $n=4$, $\beta=2$ по лемме 6. В этом случае $31\in\omega(S)\setminus\omega(L)$; противоречие.

12. Предположим, что $S\simeq {}^2G_2(u)$, где $u=3^{2\beta+1}>3$ $(\beta\in\mathbb{N})$. Тогда $(q^n+1)/2=u\pm\sqrt{3u}+1$, поэтому $q^n-1=2\cdot3^{\beta+1}(3^\beta\pm1)$. Следовательно, q^n-1 делится на $3^{\beta+1}$. С учетом того, что $q^{2i}+1$ не делится на 3, получаем, что $q+1\geqslant 3^{\beta+1}$. Таким образом,

$$q^n-1>6(q+1)(q-1)\geqslant 6\cdot3^{\beta+1}(3^{\beta+1}-2)>2\cdot3^{\beta+1}(3^\beta+1);$$

противоречие.

13. Предположим, что $S \simeq {}^2F_4(u)$, где $u = 2^{2\beta+1} \geqslant 8$ ($\beta \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\frac{q^n+1}{2} = u^2 + \varepsilon\sqrt{2u^3} + u + \varepsilon\sqrt{2u} + 1. \tag{5}$$

Так как $t(S) = 5$ и $t(S) \geqslant 3n/4$, получаем, что $n = 4$. Непосредственно проверяется, что случай $\beta \leq 3$ невозможен, поэтому $\beta \geqslant 4$. Тогда число $q^4 - 1$, равное

$$2\sqrt{2u}(u+1)\Big(\sqrt{\frac{u}{2}} + 1\Big),$$

должно делиться на $2\sqrt{2u} \geqslant 64$, следовательно, $q \equiv \pm 1 \pmod{16}$. В частности, $q \geqslant 17$.

В группе S есть элемент порядка $t = u^2 - \varepsilon\sqrt{2u^3} + u - \varepsilon\sqrt{2u} + 1$. Предположим, что $q = p$ и p делит t. Тогда p делит число $q^4 - t$, равное

$$u^2 + \varepsilon 3\sqrt{u^3} + u + \varepsilon 3\sqrt{2u} = \sqrt{2u}(u+1)\Big(\sqrt{\frac{u}{2}} + 3\varepsilon\Big).$$

С другой стороны, $t = u^2 + (u+1)(1 - \varepsilon\sqrt{2u})$, поэтому p не делит $u+1$. Следовательно, p делит $\sqrt{u/2} + 3\varepsilon = 2^\beta + 3\varepsilon$. Предположим, что $p < 2^\beta$. Тогда $q^4 = p^4 < 2^{4\beta}$. С другой стороны,

$$q^4 = 2u^2 - 2\varepsilon\sqrt{2u^3} + 2u - 2\varepsilon\sqrt{2u} + 1 > u^2 = 2^{4\beta+4};$$

противоречие. Значит, $\varepsilon = +$ и $p = 2^\beta + 3$, что невозможно, так как $q = p \equiv \pm 1 \pmod{16}$. Таким образом, $(t, p) = 1$ или $q > p$.

Пусть $\varepsilon = -$. Тогда из (5) следует, что $q^4 > (q^2+1)/2 > u^2/4$, и, значит, $q > \sqrt{u/2}$. Кроме того, $t > (q^4+1)/2$, а по лемме 9 выполнено неравенство $t \leqslant (q^4 + q^3 - q - 1)/2$. Следовательно,

$$\Big(t - \frac{q^4+1}{2}\Big) : \frac{q^4+1}{2} \leqslant \frac{q^3 - q + 2}{q^4+1} \leqslant \frac{1}{q}.$$

С другой стороны,

$$\Big(t - \frac{q^4+1}{2}\Big) : \frac{q^4+1}{2} = \frac{2\sqrt{2u^3} + 2\sqrt{2u}}{u^2 + \sqrt{2u^3} + u + \sqrt{2u} + 1} \geqslant \frac{2\sqrt{2u}}{2u^2} = \sqrt{\frac{2}{u}};$$

противоречие.

Пусть $\varepsilon = +$. Тогда из (5) следует, что $q^4 > 2u^2$. Значит, $q^2 > \sqrt{2}u$ и

$$t = \frac{q^4+1}{2} - 2\sqrt{2u^3} - 2\sqrt{2u} \geqslant \frac{q^4+1}{2} - 2^{3/4}q^3 - 2^{5/4}q \geqslant \frac{q^4 - 4q^3 - 5q + 1}{2} > \frac{q^n}{3} + 3.$$

По лемме 9 выполнено неравенство $t \geqslant (q^4 - q^3 + q - 1)/2$. Следовательно,

$$\Big(\frac{q^4+1}{2} - t\Big) : \frac{q^4+1}{2} \leqslant \frac{q^3 - q - 2}{q^4+1} \leqslant \frac{1}{q}.$$

С другой стороны, как уже было показано, это отношение больше, чем $\sqrt{2/u}$; противоречие.

14. Пусть $S \simeq E_6^\varepsilon(u)$. Тогда $(q^n+1)/2 = (u^6 + \varepsilon u^3 + 1)/(u - \varepsilon 1, 3)$. Если 3 не делит $u - \varepsilon 1$, то $n = 2$ по лемме 7, что не так. Поэтому 3 делит $u - \varepsilon 1$. Тогда $(u^6 + \varepsilon u^3 + 1)/3 = (q^n+1)/2$, откуда $2(u^6 + \varepsilon u^3 - 2) = 3(q^n - 1)$. Если u четно, то левая часть сравнима с 4 по модулю 8. С другой стороны, правая часть делится на 8. Таким образом, u нечетно.

Сравним 2-периоды групп S и L. Поскольку в S есть циклический тор порядка $u^4 - 1$, выполнено неравенство $(u^4-1)_2 \leqslant (q^n-1)_2/2$. С другой стороны, из равенств

$$\frac{3(q^n-1)}{2} = u^6 + \varepsilon u^3 - 2 = (u^3 - \varepsilon 1)(u^3 + \varepsilon 2)$$

следует, что $(q^n-1)_2/2=(u^3-\varepsilon 1)_2$. Таким образом, $(u^4-1)_2 \leqslant (u^3-\varepsilon 1)_2=(u-\varepsilon 1)_2$; противоречие.

15. Предположим, что $S \simeq E_8(u)$. Тогда

$$\frac{q^n+1}{2} \in \left\{\frac{u^{10}+u^5+1}{u^2+u+1}, \frac{u^{10}-u^5+1}{u^2-u+1}, u^8-u^4+1, \frac{u^{10}+1}{u^2+1}\right\}.$$

Отметим, что $(u^{10}+u^5+1)/(u^2+u+1)=k_{15}$, $(u^{10}-u^5+1)/(u^2-u+1)=k_{30}$, $u^8-u^4+1=k_{24}$ и $(u^{10}+1)/(u^2+1)=(5,u^2+1)k_{20}$, где k_i — наибольший примитивный делитель числа u^i-1. Случай $(q^n+1)/2=u^8-u^4+1$ невозможен в силу леммы 7. Зафиксируем число l из $\{15,30,20\}$ такое, что $(q^n+1)/2=k_l$.

Если $(q^n+1)/2=(u^{10}+1)/(u^2+1)$, то

$$\frac{q^n-1}{2}=u^2(u^2-1)(u^4+1). \tag{6}$$

Если $(q^n+1)/2=(u^{10}+\varepsilon u^5+1)/(u^2+\varepsilon u+1)$, то

$$\frac{q^n-1}{2}=u(u^4-1)(u^3-\varepsilon u^2+\varepsilon 1). \tag{7}$$

Предположим сначала, что u нечетно. Тогда, как видно из (6) и (7), выполнено равенство $(q^n-1)_2/2=(u^4-1)_2$. В группе S есть циклический тор порядка u^8-1, поэтому есть элемент порядка $(u^8-1)_2>(u_4-1)_2$. Следовательно, 2-период группы S больше 2-периода группы L; противоречие.

Пусть теперь $u=2^\beta$ ($\beta \in \mathbb{N}$). В [19, табл. 6,5] указано, что $t(2,L)=2$ и $t(2,S)=5$. Пусть w_{20}, w_{24} и w_{30} — простые делители чисел k_{20}, k_{24} и k_{30} соответственно. Заметим, что все эти делители больше 5, попарно не смежны и не смежны с 2 в $GK(L)$. Предположим, что одно из них, скажем r, делит $|\overline{G}/S|$. Тогда в группе $\overline{G}$ есть полевой автоморфизм порядка r группы S. Централизатор этого автоморфизма в S изоморфен группе $E_8(u_0)$, где $u_0=u^{1/r}$. Следовательно, в нем есть элемент порядка w_l, где w_l — примитивный простой делитель числа u_0^l-1. Поскольку $(r,l)=1$, число w_l будет примитивным простым делителем числа u^l-1. Тогда $r \in \pi(\overline{G}/S) \subseteq \pi_1(G)$, w_l делит $(q^n+1)/2$ и $rw_l \in \omega(G)$; противоречие. Пусть в группе $\overline{G}$ есть полевой автоморфизм порядка 2 группы S. Тогда его централизатор в S изоморфен группе $E_8(u_0)$, где $u_0=u^{1/2}$. Как несложно проверить, порядок $|E_8(u_0)|$ взаимно прост с каждым из чисел k_{20}, k_{24} и k_{30}. Таким образом, w_{20}, w_{24}, w_{30} и 2 попарно не смежны в $GK(\overline{G})$. Поскольку $t(2,L)=2$, то либо $2 \in \pi(K)$, либо $w_i, w_j \in \pi(K)$, где $i,j \in \{20,24,30\}$, $i \neq j$ и $i \neq l \neq j$.

Пусть $2 \in \pi(K)$. Без ограничения общности можно считать, что K является элементарной абелевой 2-группой. По лемме 11 группа S унисингулярна, и, значит, ее полупростой элемент порядка $k_l=(q^n+1)/2$ имеет нетривиальную неподвижную точку в K. Следовательно, $q^n+1 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$; противоречие.

Пусть $w_i, w_j \in \pi(K)$, где $i,j \in \{20,24,30\}$, $i \neq j$. Числа k_i и k_j взаимно просты, значит, хотя бы одно из них не делится на p. Пусть это k_i. Предположим, что $2k_i \notin \omega(G)$. Тогда k_i может делить только нечетные порядки максимальных торов группы L. По лемме 8 и [18, теорема 6] единственный тор нечетного порядка в группе L — это тор порядка $(q^n+1)/2=k_l$, который не делится на w_i. Значит, $2k_i \in \omega(G)$. Поскольку $2r \notin \pi(\overline{G})$ для любого простого делителя r числа k_i и $2 \notin \pi(K)$, в группе K есть элемент порядка k_i. Так как группа K нильпотентна, то $k_iw_j \in \omega(K)$.

Как следует из п. (3) леммы 9, любой элемент из $\omega(G)$ не превосходит $10q^n/9$. Правые части в равенствах (6) и (7) меньше, чем $2u^8$, поэтому $q^n \leqslant 4u^8$. Следовательно, $k_iw_j \leqslant 40u^8/9$. С другой стороны, $k_i \geqslant k_{20} \geqslant (u^{10}+1)/(5u^2+5) > u^{10}/(5u^2+5)$, а $w_j \geqslant 40$, так как w_j-1 должно делиться на j. Таким образом, $8u^{10}/(u^2+1) < 40u^8/9$, откуда $9u^{10} < 5u^{10}+5u^8$ и $4u^2<5$; противоречие.

16. Пусть S — простая группа с несвязным графом простых чисел, не указанная в таблице. Тогда $(q^n+1)/2 = n_i = n_i(S)$ для некоторого $i > 1$, и, следовательно, $2n_i - 1$ равно четвертой степени натурального числа. Непосредственной проверкой устанавливается, что такое возможно лишь в случае $S \simeq F_1$ и $n_i = 41$. Тогда $q = 3$ и $n = 4$. Поскольку $23 \in \omega(F_1) \setminus \omega(L)$, этот случай невозможен.

Предложение доказано.

Так как $\omega(^2D_n(q)) \subset \omega(B_n(q)) \subset \omega(C_n(q))$, то из предложения 1 следует, что если $L = {}^2D_n(q)$, то группа S изоморфна L. Таким образом, теорема 1 доказана.

Из предложения 1 и указанных выше строгих включений следует, что если $L = B_n(q)$, то S изоморфна $^2D_n(q)$ или L.

Предложение 2. *Пусть группа L равна $B_n(q)$ или $C_n(q)$ и $n \geqslant 8$. Тогда $S \not\simeq {}^2D_n(q)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $r_{n-2}r_{n+2} \in \omega(L) \setminus \omega(S)$. По лемме 12 индекс $|\overline{G} : S|$ не делится на нечетные простые числа. Значит, какое-то из чисел r_{n-2}, r_{n+2} делит $|K|$. Обозначим его через r. Пусть k_{n-2} — наибольший примитивный простой делитель числа $q^{n-2}-1$. Группа S содержит подгруппу типа A_{n-2} над полем порядка q. По лемме 4 в S есть подгруппы Фробениуса с ядрами порядка q^{n-2}, q^{n-3} и циклическими дополнениями порядка k_{n-2}, $q^{n-3}-1$ соответственно. Следовательно, rk_{n-2}, $r(q^{n-3}-1) \in \omega(G)$. С другой стороны, если $r = r_{n-2}$, то $rk_{n-2} \notin \omega(L)$, а если $r = r_{n+2}$, то $r(q^{n-3}-1) \notin \omega(L)$ в силу неравенства $n - 3 + n/2 + 1 > n$; противоречие. Предложение доказано.

Предложение 3. *Пусть L, $S \in \{B_n(q), C_n(q)\}$ и α нечетно. Тогда $G = S \simeq L$.*

Доказательство. Предположим, что $K \neq 1$. Тогда K является p-группой по п. (1) леммы 10. Без потери общности можно считать, что K — элементарная абелева группа. В группе S есть подгруппа, изоморфная $B_n(p)$ или $C_n(p)$. Следовательно, по лемме 11 некоторый элемент группы S порядка $(p^n+1)/2$ имеет в K нетривиальную неподвижную точку. Таким образом, естественное полупрямое произведение KS содержит элемент порядка $p(p^n+1)/2$. По [23, лемма 10] группа G также содержит элемент такого порядка. С другой стороны, α нечетно, и поэтому p^n+1 делит q^n+1. Значит, по таблице делители числа $(p^n+1)/2$ и p лежат в разных компонентах графа $GK(L)$; противоречие.

Таким образом, $K = 1$. По п. (1) леммы 12 группа G совпадает с S. Поскольку $\omega(B_n(q)) \neq \omega(C_n(q))$, получаем, что $S \simeq L$. Предложение доказано.

Из предложений 1, 2 и 3 следует утверждение теоремы 2 для случая, когда α нечетно.

Предложение 4. *Пусть α четно и $L = C_n(q)$. Тогда $S \not\simeq B_n(q)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $pr_{2n-2}(q^{n-1}+1)_2 \in \omega(G) \setminus \omega(\overline{G})$ по п. (2) леммы 12. Значит, подгруппа K не равна 1 и по лемме 10 является p-группой. Более того, в G есть элемент x порядка $r = r_{2n-2}$ такой, что $C =: C_K(x) \neq 1$. Обозначим через $\overline{x}$ образ элемента x в $\overline{G}$. Так как по п. (1) леммы 12 имеем $\pi(\overline{G}/S) \subseteq \{2\}$, то $\overline{x}$ — элемент порядка r группы S. Силовская r-подгруппа группы S циклическая, поэтому все такие элементы сопряжены в S. Как следует из описания централизаторов полупростых элементов групп типа B_n [24, предложение 11], в $C_S(\overline{x})$ есть подгруппа $\overline{H} = \langle\overline{x}\rangle \times M$, где $M \simeq B_1(q)$.

Пусть $1 = Z_0(K) \leq Z_1(K) \leq \dots \leq Z_s(K) = K$ — верхний центральный ряд группы K. Найдется $i \geqslant 0$ такое, что $Z_i(K) \cap C = 1$ и $Z_{i+1}(K) \cap C \neq 1$. Взяв фактор-группу группы G по $Z_i(K)$, можно без потери общности считать, что $V := C \cap Z(K) \neq 1$. Заметим, что V — элементарная абелева группа, так как иначе в G был бы элемент порядка p^2r, что невозможно. Прообраз H группы $\overline{H}$ в G нормализует V, и K централизует V, значит, сопряжение элементами из H индуцирует действие группы $\overline{H}$ на V.

Пусть $p > 3$. В группе M есть подгруппа, изоморфная $B_1(p)$. При $p > 3$ группа $B_1(p)$ проста и по лемме 11 унисингулярна. Значит, в естественном полупрямом произведении VM

есть элемент порядка $pr(p+1)/2$. По [23, лемма 10] элемент такого порядка есть и в G. По условию α четно, поэтому $(q^{n-1}+1, p+1) = 2$. Поскольку $(p+1)/2 > 2$, в группе L нет элемента порядка $pr_{2n-2}(p+1)/2$; противоречие.

Итак, $p = 3$. Тогда $q \geqslant 9$. Если M не централизует V, то $C_M(V) = 1$, так как M проста. Рассмотрим подгруппу F группы M, изоморфную $B_1(3) \simeq Alt_4$. Группа F является группой Фробениуса с ядром порядка 4 и дополнением порядка 3. Пусть $\overline{y} \in F$ и $|\overline{y}| = 3$. По лемме 3 в естественном полупрямом произведении $V\overline{H}$ есть элемент порядка 9. Это означает, что в V существует элемент v такой, что $w = v^{\overline{y}^2} v^{\overline{y}} v \neq 1$. Пусть y — некоторый прообраз элемента $\overline{y}$ в H. Элементы x и y коммутируют по модулю K, поэтому xy и xyv — элементы порядка $3^l r$. При этом

$$(xyv)^{3r} = (xy)^{3r} v^{(xy)^{3r-1}} v^{(xy)^{3r-2}} \ldots v = (xy)^{3r} v^{\overline{y}^{3r-1}} v^{\overline{y}^{3r-2}} \ldots v = (xy)^{3r} w^r,$$

а потому xy и xyv не могут одновременно иметь порядок $3r$. Следовательно, в G есть элемент порядка $9r = 3^2 r_{2n-2}$, а это противоречит тому, что в $\omega(L)$ числа $3^2 r_{2n-2}$ нет. Таким образом, M централизует V. Значит, в G есть элемент порядка $pr_{2n-2}(q-1)/2$. Так как $(q^{n-1}+1, q-1) = 2$, а $(q-1)/2 > 2$, в группе L элементов такого порядка нет. Предложение доказано.

Из предложений 1, 2 и 4 следует утверждение теоремы 2 для случая, когда α четно.

Из предложений 1, 3 и 4 следует утверждение теоремы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. УрГУ. Сер. Математика и механика. 2005. № 36, вып. 7. С. 119–138.
2. **Grechkoseeva M.A., Shi W.J., Vasil'ev A. V.** Recognition by spectrum of finite simple groups of Lie type // Front. Math. China. 2008. Vol. 3, no. 2. P. 275–285.
3. **Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1250–1271.
4. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.
5. **Мазуров В.Д.** Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
6. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А.** О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m, 2^m+1 и 2^m+2 над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 510–526.
7. **Williams J.S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
8. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
9. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
10. **Васильев А.В.** О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
11. **Васильев А.В., Горшков И.Б.** О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 292–299.
12. **Мазуров В.Д.** Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
13. **Заварницин А.В.** Порядки элементов в накрытиях групп $L_n(q)$ и распознаваемость знакопеременной группы A_{16}: препринт / Ин-т математики СО РАН. Новосибирск: НИИДМИ, 2000. 13 с.
14. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3. P. 265–284.
15. **Васильев А. В., Гречкосеева М. А.** Распознавание по спектру конечных простых линейных групп малой размерности над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 558–570.
16. **Gerono G.C.** Note sur la resolution en nombres entiers et positifs de l'equation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.

17. **Бутурлакин А.А.** Спектры конечных простых симплектических групп и ортогональных групп нечетной размерности: препринт. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2008. 17 с.
18. **Бутурлакин А.А., Гречкосеева М.А.** Циклическое строение максимальных торов в конечных классических группах // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 2. С. 129–156.
19. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
20. **Guralnick R.M., Tiep P.H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6. P. 271–310.
21. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, Number 3, Part I. (Math. Surveys Monogr. Vol. 40, no. 3). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p.
22. **Kantor W.M, Seress A.** Prime power graphs for groups of Lie type // J. Algebra. 2002. Vol. 247, no. 3. P. 370–434.
23. **Заварницин А.В., Мазуров В.Д.** Порядки элементов в накрытиях симметрических и знакопеременных групп // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 3 С. 296–315.
24. **Carter R.W.** Centralizers of semisimple elements in the finite classical group // Proc. London Math. Soc. (3). 1981. Vol. 42, no. 1. P. 1–41.

Поступила 29.12.2008

Васильев Андрей Викторович
д-р физ.-мат. наук, доцент
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: vasand@math.nsc.ru

Горшков Илья Борисович
магистрант
Новосибирский гос. ун-т
e-mail: ily@gorodok.net

Гречкосеева Мария Александровна
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Ин-т математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: grechkoseeva@gmail.com

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Старолетов Алексей Михайлович
магистрант
Новосибирский гос. ун-т
e-mail: astaroletov@gmail.com

Том 15 № 2 2009

УДК 512.542

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ РАЗРЕШИМЫХ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ[1]

Е. П. Вдовин, В. И. Зенков

Рассматривается следующая гипотеза: если конечная группа G содержит разрешимую π-холлову подгруппу H, то существуют элементы $x, y, z, t \in G$, для которых справедливо равенство $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = O_\pi(G)$. Показано, что при дополнительных условиях на G и H минимальный контрпример к этой гипотезе должен быть почти простой группой лиева типа.

Ключевые слова: разрешимая холлова подгруппа, конечная простая группа, π-радикал.

E. P. Vdovin, V. I. Zenkov. On the intersections of solvable Hall subgroups in finite groups.

The following conjecture is considered: if a finite group G possesses a solvable π-Hall subgroup H, then there exist elements $x, y, z, t \in G$ such that the identity $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = O_\pi(G)$ holds. Under additional conditions on G and H, it is shown that a minimal counterexample to this conjecture must be an almost simple group of Lie type.

Keywords: solvable Hall subgroup, finite simple group, π-radical.

Введение

Обозначения настоящей работы стандартны и согласуются с обозначениями из [1]. Здесь рассматриваются лишь конечные группы, поэтому термин "группа" всегда означает "конечная группа". Через π всегда обозначается некоторое множество простых чисел, через π' — его дополнение в множестве всех простых чисел. Для натурального числа n через $\pi(n)$ обозначается множество простых делителей числа n; число n называется *π-числом*, если $\pi(n) \subseteq \pi$. Для конечной группы G положим $\pi(G) := \pi(|G|)$; группа G называется *π-группой*, если $\pi(G) \subseteq \pi$. Максимальная нормальная π-подгруппа группы G обозначается через $O_\pi(G)$. Подгруппа H группы G называется *π-холловой в G*, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Множество всех π-холловых подгрупп конечной группы G обозначается через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$, множество всех силовских p-подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Syl}_p(G)$. Группа G называется *π-разрешимой*, если в ней существует субнормальный ряд $1 = G_0 < G_1 < G_2 < \ldots < G_{n-1} < G_n = G$, все факторы которого являются либо π'-группами, либо разрешимыми группами. Далее Sym_n — симметрическая группа степени n. Если G — группа и S — подгруппа группы Sym_n, то через $G \wr S$ обозначается подстановочное сплетение группы G с подгруппой S.

Следуя Ф. Холлу [2] мы будем говорить, что группа G *обладает свойством* E_π (или коротко $G \in E_\pi$), если G содержит π-холлову подгруппу. Если $G \in E_\pi$ и любые две π-холловы подгруппы в G сопряжены, то будем говорить, что G *обладает свойством* C_π ($G \in C_\pi$). Если $G \in C_\pi$ и любая π-подгруппа группы G вкладывается в π-холлову подгруппу группы G, то будем говорить, что G *обладает свойством* D_π ($G \in D_\pi$).

[1]Работа выполнена при поддержке СО РАН и УрО РАН (интеграционный проект "Группы и графы". Первый автор поддержан грантом Президента РФ для молодых ученых — кандидатов наук (МК-3036.2007.1), программой государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-344.2008.1), РФФИ (проект 08-01-00322), АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" (проект 2.1.1.419) и фондом Бальзана. Второй автор поддержан РФФИ (проект 07-01-00148), программой Отделения математических наук РАН и программами совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

Пусть A, B, H — такие подгруппы группы G, что $B \trianglelefteq A$. Тогда $N_H(A/B) := N_H(A) \cap N_H(B)$ называется *нормализатором секции* A/B в H. Если $x \in N_H(A/B)$, то x индуцирует автоморфизм секции A/B, действующий по правилу $Ba \mapsto Bx^{-1}ax$. Таким образом, существует гомоморфизм $N_H(A/B) \to \mathrm{Aut}(A/B)$. Образ нормализатора $N_H(A/B)$ относительно данного гомоморфизма обозначается через $\mathrm{Aut}_H(A/B)$ и называется *группой индуцированных автоморфизмов* секции A/B в H. Отметим, что для композиционных факторов группы G, изоморфных A/B, группа индуцированных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_G(A/B)$ зависит от выбора подгрупп A и B, т. е. от выбора композиционного ряда. Если $A \leq G$, то $\mathrm{Aut}_G(A) := \mathrm{Aut}_G(A/1)$.

Пусть G — подгруппа группы Sym_n. Разбиение $\{P_1, P_2, \ldots P_m\}$ множества $\{1, \ldots, n\}$ назовем *асимметрическим разбиением* для группы G, если только единичный элемент группы G фиксирует данное разбиение, т. е. из того, что для любого $j = 1, \ldots, m$ справедливо равенство $P_j x = P_j$, следует, что $x = 1$. Очевидно, что для любой группы G разбиение $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ всегда является асимметрическим разбиением.

В настоящей работе рассматривается следующая

Гипотеза [3]. *Пусть G — конечная группа, имеющая разрешимую π-холлову подгруппу H. Тогда в G существуют такие элементы x, y, z, t, что справедливо равенство*

$$H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = O_\pi(G). \tag{1}$$

Мы покажем, что при некоторых дополнительных условиях на G и H минимальный контрпример к данной гипотезе является почти простой группой, а также проверим гипотезу для почти простой группы G, цоколь которой является знакопеременной, спорадической группой или группой Титса.

Предложение. *Пусть G — конечная группа, имеющая разрешимую π-холлову подгруппу H. Если гипотеза для G и H верна, то $|H/O_\pi(G)| \leq |G:H|^4$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{}\ : G \to G/O_\pi(G)$ — естественный гомоморфизм. Используя известное равенство $|A \cdot B| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$, где A и B — подгруппы группы G, мы получаем, что, если гипотеза верна, то для разрешимой π-холловой подгруппы H справедлива цепочка неравенств

$$|\tilde{G}| \geq |\tilde{H} \cdot \tilde{H}^x| = \frac{|\tilde{H}| \cdot |\tilde{H}^x|}{|\tilde{H} \cap \tilde{H}^x|} = \frac{|\tilde{H}| \cdot |\tilde{H}^x|}{|\tilde{H} \cap \tilde{H}^x|} \cdot \frac{|\tilde{H} \cap \tilde{H}^x| \cdot |\tilde{H}^y|}{|\tilde{H} \cap \tilde{H}^x \cap \tilde{H}^y| \cdot |(\tilde{H} \cap \tilde{H}^x)\tilde{H}^y|}$$

$$\geq \frac{|\tilde{H}| \cdot |\tilde{H}^x| \cdot |\tilde{H}^y|}{|\tilde{H} \cap \tilde{H}^x \cap \tilde{H}^y| \cdot |\tilde{G}|} \geq \ldots \geq \frac{|\tilde{H}|^5}{|\tilde{G}|^3},$$

из которой следует требуемое неравенство. Предложение доказано.

Отметим, что Д.С. Пассман в [4] доказал, что в p-разрешимой группе всегда существуют три силовских p-подгруппы, пересечение которых совпадает с $O_p(G)$. Позже В.И. Зенков доказал такое же утверждение для произвольной группы (см. [5, следствие C]). В [6] С. Долфи доказал, что если $2 \notin \pi$, то в любой π-разрешимой группе G существуют три сопряженных π-холловых подгруппы, пересечение которых совпадает с $O_\pi(G)$. Наконец, в [7] С. Долфи доказал, что в любой π-разрешимой группе G существуют элементы $x, y \in G$, для которых справедливо равенство $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$, где H — π-холлова подгруппа в G (см. также [8]). Исходя из этого, естественно было предположить, что в случае произвольной конечной группы G и произвольной разрешимой π-холловой подгруппы H из G пересечение некоторых четырех сопряженных с H относительно G подгрупп равно $O_\pi(G)$. Однако в [3] был построен контрпример к этому предположению, в котором пересечение некоторых пяти сопряженных с H относительно G подгрупп равно $O_\pi(G)$. На основании этого примера в [3] и была выдвинута отмеченная выше гипотеза. С другой стороны, условие разрешимости подгруппы H в гипотезе существенно. Действительно, если p — простое число, то S_{p-1} является p'-холловой подгруппой группы S_p, но пересечение любых $p-2$ сопряженных π'-холловых подгрупп не равно 1.

1. Предварительные результаты

Утверждения, собранные в следующей лемме, хорошо известны.

Лемма 1. *Пусть A — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(а) *если H — π-холлова подгруппа группы G, то HA/A и $H \cap A$ — π-холловы подгруппы групп G/A и A соответственно*;

(б) *если существует некоторый субнормальный ряд группы G, все факторы которого являются π- или π'- группами, то $G \in D_\pi$*;

(в) *если G/A — π-группа и $H \in \mathrm{Hall}_\pi(A)$, то π-холлова подгруппа H_0 группы G, удовлетворяющая условию $H_0 \cap A = H$, существует в том и только в том случае, если G, действуя сопряжениями, оставляет инвариантным множество $\{H^a \mid a \in A\}$.*

Доказательство. (а) следует из того, что индексы $|(G/A) : (HA/A)|$ и $|A : (A \cap H)|$ делят индекс $|G : H|$, в то время как порядки $|HA/A|$ и $|A \cap H|$ делят порядок $|H|$.

(б) следует из теоремы Шура — Цассенхауза (см. [2, теоремы D6, D7]) и разрешимости групп нечетного порядка.

Докажем (в). Необходимость очевидна, поскольку $N_G(H) = H_0 N_A(H)$ и $G = H_0 A$. Докажем достаточность. Поскольку группа G оставляет множество $\{H^a \mid a \in A\}$ инвариантным, аргумент Фраттини влечет, что $G = AN_G(H)$. Далее в нормализаторе $N_G(H)$ есть нормальный ряд $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq N_A(H) \trianglelefteq N_G(H)$, и все секции этого ряда являются либо π-, либо π'-группами. Из п. (б) следует, что $N_G(H) \in D_\pi$. В частности, существует π-холлова подгруппа H_0 группы $N_G(H)$ и $H \leq H_0$. Поскольку $\pi(G/A) \subseteq \pi$, $\pi(|A : H|) \subseteq \pi'$ и $G = AN_G(H)$, получаем, что $|G : N_G(H)|$ является π'-числом. Значит, $H_0 \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Лемма доказана.

Пусть S — неабелева конечная простая группа и группа G такова, что существует нормальная подгруппа $T = S_1 \times \ldots \times S_k$ группы G, удовлетворяющая условиям:

(1) $S_1 \simeq \ldots \simeq S_k \simeq S$;

(2) подгруппы $S_1, \ldots, S_k$ сопряжены в G;

(3) $C_G(T) = 1$.

В силу условия (2) подгруппы $N_G(S_1), \ldots, N_G(S_k)$ сопряжены в G. Пусть $\rho : G \to \mathrm{Sym}_k$ — подстановочное представление группы G правыми сдвигами группы G на правых смежных классах по подгруппе $N_G(S_1)$. Так как соответствующее ρ действие эквивалентно действию сопряжениями группы G на множестве $\{S_1, \ldots, S_k\}$, то $G\rho$ — транзитивная подгруппа группы Sym_k. Ввиду [9, теорема IV.1.4] существует мономорфизм

$$\varphi : G \to (N_G(S_1) \times \ldots \times N_G(S_k)) : (G\rho) = N_G(S_1) \wr (G\rho) := L.$$

Рассмотрим естественный гомоморфизм

$$\psi : L \to L/(C_G(S_1) \times \ldots \times C_G(S_k)).$$

Обозначая через A_i группу $\mathrm{Aut}_G(S_i) = N_G(S_i)/C_G(S_i)$, мы получаем, что

$$\varphi \circ \psi : G \to (A_1 \times \ldots \times A_k) : (G\rho)$$

— гомоморфное вложение группы G в группу $(A_1 \times \ldots \times A_k) : (G\rho)$, изоморфную $A_1 \wr (G\rho) := \overline{G}$. Ядро этого гомоморфизма совпадает с $C_G(S_1, \times \ldots \times S_k) = 1$, т. е. $\varphi \circ \psi$ является мономорфизмом, и мы будем отождествлять G с подгруппой $G(\varphi \circ \psi)$ группы $\overline{G}$.

Лемма 2. *Пусть для неабелевой простой подгруппы S группы G и π-холловой подгруппы H из G, где $G = (S_1 \times \ldots \times S_k)H$, выполняются условия* (1), (2) *и* (3), *введенные выше. Тогда в группе $\overline{G}$, введенной перед леммой* 2, *существует π-холлова подгруппа $\overline{H}$ такая, что $\overline{H} \cap G = H$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Факторгруппа $\overline{G}/(S_1 \times \ldots \times S_k)$ является π-группой. По построению $\mathrm{Aut}_{\overline{G}}(S_1) = \mathrm{Aut}_G(S_1)$ и $\mathrm{Aut}_{\overline{G}}(S_i) = \mathrm{Aut}_G(S_i) \simeq \mathrm{Aut}_G(S_1)$ для любого i. В силу леммы 1(в) π-холлова подгруппа M группы $S_1 \times \ldots \times S_k$ вкладывается в π-холлову подгруппу группы G (соответственно группы $\overline{G}$) в том и только в том случае, если множество $\{M^s \mid s \in S_1 \times \ldots \times S_k\}$ инвариантно относительно действия группы G (соответственно группы $\overline{G}$) сопряжениями. Для завершения доказательства леммы достаточно показать, что если H — π-холлова подгруппа группы G и $M = H \cap (S_1 \times \ldots \times S_k)$, то класс $\{M^s \mid s \in S_1 \times \ldots \times S_k\}$ является $\overline{G}$-инвариантным. Действительно, в этом случае существует π-холлова подгруппа $\overline{H}$ группы $\overline{G}$, для которой справедливо равенство $\overline{H} \cap (S_1 \times \ldots \times S_k) = M$. Значит, $H, \overline{H} \leq N_{\overline{G}}(M)$. Поскольку $\overline{G}/(S_1 \times \ldots \times S_k)$ является π-группой, то лемма 1(б) влечет $N_{\overline{G}}(M) \in D_\pi$, значит, H сопряжена подгруппе группы $\overline{H}$. Утверждение о том, что класс $\{M^s \mid s \in S_1 \times \ldots \times S_k\}$ является $\overline{G}$-инвариантным, легко следует из построения группы $\overline{G}$ и вложения в нее группы G, а также того факта, что по лемме 1(в) класс $\{M^s \mid s \in S_1 \times \ldots \times S_k\}$ является G-инвариантным. Действительно, любой элемент из $\overline{G}$ можно записать в виде $(a_1, \ldots, a_k)g$, где $a_i \in A_i$ и $g \in G$. Поскольку множество $\{M^s \mid s \in S_1 \times \ldots \times S_k\}$ является G-инвариантным, можно считать, что $g = 1$. Кроме того, для любого i класс $\{(M \cap S_i)^x \mid x \in S_i\}$ является A_i-инвариантным, поскольку $A_i = S_i \,\mathrm{Aut}_H(S_i)$, откуда следует утверждение леммы.

Лемма 3 [10, теорема 1]. *Пусть A — абелева подгруппа конечной группы G. Тогда существует такой элемент $x \in G$, что $A \cap A^x \leq F(G)$.*

Следствие 1. *Пусть $G = PR$, где P — нормальная силовская p-подгруппа группы G, а R — абелева p'-холлова подгруппа группы G, причем $C_R(P) = 1$. Тогда существует такой элемент $x \in P$, что $R \cap R^x = 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3 существует элемент $x \in G$ такой, что $R \cap R^x \leq F(G)$. Следовательно, $[P, R \cap R^x] = 1$. Поскольку $C_R(P) = 1$, имеем $R \cap R^x = 1$. Так как $G = PR$, то $x = r \cdot p$, где $r \in R$ и $p \in P$. Значит, $1 = R \cap R^x = R \cap R^{rp} = R \cap R^p$. Следствие доказано.

Лемма 4 [11, теорема 1.2]. *Пусть G — разрешимая группа подстановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда существует асимметрическое разбиение $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ данного множества, где $m \leq 5$.*

2. Сведение к почти простой группе

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что группа G является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой, если она имеет π-холлову подгруппу, для любой π-холловой подгруппы H выполняется заключение гипотезы и при действии H сопряжениями на множестве упорядоченных четверок $\big(H^x, H^y, H^z, H^t\big)$, удовлетворяющих равенству (1), существует не менее пяти орбит.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что группа G является $\mathbf{(CI)}_\pi$-группой, если для любой компоненты $\overline{S}$ из $E(\overline{G})$, где $\overline{G} := G/S(G)$, любая группа L такая, что $\mathrm{Inn}(\overline{S}) \leq L \leq \mathrm{Aut}(\overline{S})$, является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой.

Теорема 1. *Пусть G — конечная $\mathbf{(CI)}_\pi$-группа и H — разрешимая π-холлова подгруппа из G. Тогда в G существуют элементы x, y, z, t такие, что справедливо равенство*

$$H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = O_\pi(G).$$

Более того, если G не π-замкнута, то G является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — контрпример минимального порядка к утверждению теоремы. Если $O_\pi(G) \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$, то доказывать нечего. Поэтому предположим, что $O_\pi(G) \notin \mathrm{Hall}_\pi(G)$, т. е. никакая π-холлова подгруппа группы G не является нормальной.

С л у ч а й 1. G разрешима.

В силу [7, теорема 1.3] или [8, теорема 1.3] существуют элементы $x, y \in G$ такие, что $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$. Поскольку H не является нормальной подгруппой группы G, можно считать, что $H \neq H^x$ и $H \neq H^y$. Значит, $H \not\leq N_G(H^x)$ и $H \not\leq N_G(H^y)$, так как в противном случае подгруппы HH^x и HH^y были бы π-подгруппами группы G порядка бо́льшего, чем $|H|$. Поэтому упорядоченные четверки

$$(H, H^x, H^y, H^x),\ (H^x, H, H^y, H^x),\ (H^x, H^y, H, H^x),\ (H^x, H^y, H^x, H),\ (H, H, H^x, H^y)$$

лежат в разных орбитах относительно действия сопряжениями подгруппы H, и для этих четверок справедливо равенство (1). Значит, G является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой.

С л у ч а й 2. G неразрешима.

Пусть $\overline{G} = G/S(G)$, где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G. Из разрешимости подгруппы H следует, что подгруппа $O_\pi(G)$ также разрешима, поэтому $O_\pi(G) \leq S(G)$.

Предположим, что $S(G) \neq 1$. Тогда $\overline{G}$ является $\mathbf{(CI)}_\pi$-группой, и значит, по индукции ввиду неравенства $|\overline{G}| < |G|$ группа $\overline{G}$ является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой. По лемме 1(а) подгруппа $H_1 := H \cap S(G)$ является π-холловой подгруппой группы $S(G)$ и $|S(G)| < |G|$. Следовательно, в $S(G)$ выполняются заключения теоремы. В силу разрешимости группы $S(G)$ все ее π-холловы подгруппы сопряжены, и по аргументу Фраттини справедливо равенство $G = N_G(H_1)S(G)$. Выберем элементы $x_1, y_1, z_1, t_1 \in S(G)$ так, чтобы выполнялось равенство

$$H_1 \cap H_1^{x_1} \cap H_1^{y_1} \cap H_1^{z_1} \cap H_1^{t_1} = O_\pi(S(G)) = O_\pi(G).$$

Теперь в $N_G(H_1)$ выберем π-холлову подгруппу H. Элементы $x_2, y_2, z_2, t_2 \in G$ выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{H} \cap \overline{H}^{\bar{x}_2} \cap \overline{H}^{\bar{y}_2} \cap \overline{H}^{\bar{z}_2} \cap \overline{H}^{\bar{t}_2} = \bar{1}. \tag{2}$$

В $N_G(H_1^{x_1})$, $N_G(H_1^{y_1})$, $N_G(H_1^{z_1})$ и $N_G(H_1^{t_1})$ выберем те π-холловы подгруппы H^x, H^y, H^z и H^t, образы которых в $\overline{G}$ совпадают с $\overline{H}^{\bar{x}_2}$, $\overline{H}^{\bar{y}_2}$, $\overline{H}^{\bar{z}_2}$ и $\overline{H}^{\bar{t}_2}$ соответственно (такие подгруппы существуют в силу леммы 1(в)).

Покажем, что $D := H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = O_\pi(G)$. Имеем

$$D \cap S(G) = H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t \cap S(G)$$

$$= (H \cap S(G)) \cap (H^x \cap S(G)) \cap (H^y \cap S(G)) \cap (H^z \cap S(G)) \cap (H^t \cap S(G))$$
$$= H_1 \cap H_1^{x_1} \cap H_1^{y_1} \cap H_1^{z_1} \cap H_1^{t_1} = O_\pi(G),$$

т. е. $D \cap S(G) = O_\pi(G)$. Кроме того, по равенству (2)

$$\overline{D} = \overline{H} \cap \overline{H}^{\bar{x}_2} \cap \overline{H}^{\bar{y}_2} \cap \overline{H}^{\bar{z}_2} \cap \overline{H}^{\bar{t}_2} = \bar{1},$$

значит, $D = O_\pi(G)$. Поскольку группа G неразрешима, факторгруппа $\overline{G}$ также неразрешима. По индукции относительно действия сопряжениями подгруппы $\overline{H}$ существует не менее пяти орбит упорядоченных четверок $(\overline{H}^{\bar{x}_2}, \overline{H}^{\bar{y}_2}, \overline{H}^{\bar{z}_2}, \overline{H}^{\bar{t}_2})$, для которых справедливо равенство (2). Следовательно, существует не менее пяти орбит упорядоченных четверок (H^x, H^y, H^z, H^t), для которых справедливо равенство (1), поскольку полные прообразы представителей пяти орбит в факторе будут лежать в пяти разных орбитах в G. Противоречие с тем, что группа G является контрпримером к утверждению теоремы.

Итак, $S(G) = 1$. Рассмотрим подгруппу $G_1 = F^*(G)H$. Тогда по [12, теорема 9.8] $C_G(F^*(G)) \le F^*(G)$, и поскольку $S(G) = 1$, то $F(G) = 1$ и $F^*(G) = E(G) = S_1 \times \ldots \times S_k$, где $S_1, \ldots, S_k$ — неабелевы простые группы. Следовательно, H точно действует сопряжениями на $E(G)$. Если $G \neq G_1$, то по индукции (ясно, что G_1 является $\mathbf{(CI)}_\pi$-группой) в G_1 выполняются заключения теоремы, значит, они выполняются и в группе G, т. е. группа G не является контрпримером к ней. Поэтому $G = G_1 = E(G)H$. Поскольку $S_1, \ldots, S_k$ — неабелевы простые группы, то группа G, действуя сопряжениями, переставляет элементы множества $\{S_1, \ldots, S_k\}$.

Пусть $E_1 := \langle S_1^H \rangle$. Так как $E(G) = S_1 \times \ldots \times S_k$, то $E(G) = E_1 \times E_2$, где E_1 и E_2 — H-допустимые подгруппы. По теореме Ремака [13, теорема 4.3.9] существует гомоморфизм $G \to G/C_G(E_1) \times G/C_G(E_2)$, при котором образ группы G является подпрямым произведением групп $G/C_G(E_1)$ и $G/C_G(E_2)$, а ядро совпадает с $C_G(E_1) \cap C_G(E_2) = C_G(E(G)) = 1$. Обозначим через π_1 и π_2 отображения проекций группы G на $G/C_G(E_1)$ и $G/C_G(E_2)$ соответственно. Поскольку $G = E(G)H$, $E_1 \le \operatorname{Ker}(\pi_2)$ и $E_2 \le \operatorname{Ker}(\pi_1)$, то справедливы равенства $G\pi_1 = E_1(H\pi_1)$ и $G\pi_2 = E_2(H\pi_2)$ (ввиду изоморфизма $E_i\pi_i \simeq E_i$ мы отождествляем $E_i\pi_i$ и E_i).

Предположим, что $E_1 \neq E(G)$. Тогда по индукции для каждого $i \in \{1, 2\}$ существуют такие элементы x_i, y_i, z_i, t_i группы $E_i(H\pi_i)$, что

$$(H\pi_i) \cap (H\pi_i)^{x_i} \cap (H\pi_i)^{y_i} \cap (H\pi_i)^{z_i} \cap (H\pi_i)^{t_i} = 1. \tag{3}$$

Поскольку $G\pi_i = E_i(H\pi_i)$, можно считать, что элементы x_i, y_i, z_i, t_i лежат в E_i. Рассмотрим элементы $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2$, $z = z_1z_2$, $t = t_1t_2$. Поскольку равенство (3) справедливо для любого i, то для элементов x, y, z, t справедливо равенство (1). Поскольку существует не менее пяти орбит упорядоченных четверок $((H\pi_1)^{x_1}, (H\pi_1)^{y_1}, (H\pi_1)^{z_1}, (H\pi_1)^{t_1})$ относительно действия группы $H\pi_1$, то существует не менее пяти орбит упорядоченных четверок (H^x, H^y, H^z, H^t) относительно действия группы H. Таким образом, в этом случае для группы G выполнены заключения теоремы, т. е. G не является контрпримером к ней.

Значит, $E_1 = E(G)$ и H действует транзитивно на множестве $\{S_1, \ldots, S_k\}$. Так как $\operatorname{Aut}(S_1)$ является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой, можно считать, что $k > 1$. Ввиду леммы 2 можно считать, что $G = (A_1 \times \ldots \times A_k) : L = A_1 \wr L$, где $A_i = \operatorname{Aut}_G(S_i)$ и $L = G\rho = H\rho \le \operatorname{Sym}_k$ (в частности, L — разрешимая π-группа). Обозначим $H \cap A_i$ через H_i. По лемме 1 подгруппа H_i является разрешимой π-холловой подгруппой группы A_i. В силу того, что A_1 является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой относительно действия группы H_1, существует не менее пяти орбит упорядоченных четверок $(H_1^{x_1}, H_1^{y_1}, H_1^{z_1}, H_1^{t_1})$, для которых справедливо равенство

$$H_1 \cap H_1^{x_1} \cap H_1^{y_1} \cap H_1^{z_1} \cap H_1^{t_1} = 1.$$

Пусть $(H_1^{x_{1,j}}, H_1^{y_{1,j}}, H_1^{z_{1,j}}, H_1^{t_{1,j}})$ — представитель j-ой из этих орбит ($j = 1, 2, 3, 4, 5$). Пусть $h \in H$. Тогда $S_1^h = S_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$, и значит, $H_1^h = H_i$. Рассмотрим представителей

$$(H_1^{x_{1,j}}, H_1^{y_{1,j}}, H_1^{z_{1,j}}, H_1^{t_{1,j}}) \text{ и } (H_1^{x_{1,l}}, H_1^{y_{1,l}}, H_1^{z_{1,l}}, H_1^{t_{1,l}})$$

различных орбит упорядоченных четверок относительно действия группы H_1. Ясно, что

$$\big((H_1^{x_{1,j}})^h, (H_1^{y_{1,j}})^h, (H_1^{z_{1,j}})^h, (H_1^{t_{1,j}})^h\big) \text{ и } \big((H_1^{x_{1,l}})^h, (H_1^{y_{1,l}})^h, (H_1^{z_{1,l}})^h, (H_1^{t_{1,l}})^h\big)$$

также являются представителями различных орбит упорядоченных четверок относительно действия группы H_i. Кроме того, множество

$$\Big\{\big((H_1^{x_{1,j}})^h \cap S_i, (H_1^{y_{1,j}})^h \cap S_i, (H_1^{z_{1,j}})^h \cap S_i, (H_1^{t_{1,j}})^h \cap S_i\big) \mid h \in H,\ S_1^h = S_i\Big\}$$

является орбитой относительно действия группы H_i. Для каждой такой H_i-орбиты выберем одного представителя. Тогда каждый такой представитель может быть записан в виде

$$(H_i^{x_{i,j}}, H_i^{y_{i,j}}, H_i^{z_{i,j}}, H_i^{t_{i,j}})$$

для подходящих $x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}, t_{i,j} \in S_i$, где $j \in \{1,2,3,4,5\}$. Отметим также, что подгруппа $H_{1,j_1} \times \ldots \times H_{k,j_k}$, где $H_{i,j_i} \in \{H_i, H_i^{x_{i,j}}, H_i^{y_{i,j}}, H_i^{z_{i,j}}, H_i^{t_{i,j}} \mid j = 1,2,3,4,5\}$, является π-холловой подгруппой группы $S_1 \times \ldots \times S_k$ (см. лемму 1(а)) и содержится в некоторой π-холловой подгруппе группы G (см. лемму 1(в)).

По лемме 4 существует асимметрическое разбиение $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ множества $\{1, \ldots, k\}$ (некоторые из этих подмножеств могут быть пустыми) такое, что только единичный элемент группы L ($\simeq G/(A_1 \times \ldots \times A_k)$) стабилизирует это разбиение. Положим $j(i) = m$, если $i \in P_m$, и рассмотрим подгруппы

$$M_1 = H_1 \times \ldots \times H_k, \quad M_2 = H_1^{x_{1,j(1)}} \times \ldots \times H_k^{x_{k,j(k)}}, \quad M_3 = H_1^{y_{1,j(1)}} \times \ldots \times H_k^{y_{k,j(k)}},$$

$$M_4 = H_1^{z_{1,j(1)}} \times \ldots \times H_k^{z_{k,j(k)}}, \quad M_5 = H_1^{t_{1,j(1)}} \times \ldots \times H_k^{t_{k,j(k)}}.$$

По построению существуют элементы $x, y, z, t \in S_1 \times \ldots \times S_k$ такие, что $M_2 = M_1^x$, $M_3 = M_1^y$, $M_4 = M_1^z$, $M_5 = M_1^t$. Покажем, что $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = 1$. Отметим, что по построению $H \cap (S_1 \times \ldots \times S_k) = M_1$, $H^x \cap (S_1 \times \ldots \times S_k) = M_2$, $H^y \cap (S_1 \times \ldots \times S_k) = M_3$, $H^z \cap (S_1 \times \ldots \times S_k) = M_4$, $H^t \cap (S_1 \times \ldots \times S_k) = M_5$, поэтому, если $h \in H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t$, то h нормализует подгруппы M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Предположим, что $S_i^h = S_{h(i)}$ для некоторого элемента $h(i) \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда $H_i^h = H_{h(i)}$, а упорядоченные наборы

$$\big((H_i^{x_{i,j(i)}})^h, (H_i^{y_{i,j(i)}})^h, (H_i^{z_{i,j(i)}})^h, (H_i^{t_{i,j(i)}})^h\big), \big(H_{h(i)}^{x_{h(i),j(h(i))}}, H_{h(i)}^{y_{h(i),j(h(i))}}, H_{h(i)}^{z_{h(i),j(h(i))}}, H_{h(i)}^{t_{h(i),j(h(i))}}\big)$$

лежат в одной $H_{h(i)}$-орбите. Значит, $j(i)$ и $j(h(i))$ лежат в одном и том же множестве P_j при $j = 1,2,3,4,5$. Следовательно, элемент h стабилизирует разбиение $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ множества $\{1, \ldots, k\}$, и поэтому его образ в группе L равен 1. Значит, $h \in M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4 \cap M_5 = 1$.

Выбирая в качестве M_2, M_3, M_4, M_5 группы $H_1^{x_{1,j(1)+1}} \times \ldots \times H_k^{x_{k,j(k)+1}}$, $H_1^{y_{1,j(1)+1}} \times \ldots \times H_k^{y_{k,j(k)+1}}$, $H_1^{z_{1,j(1)+1}} \times \ldots \times H_k^{z_{k,j(k)+1}}$, $H_1^{t_{1,j(1)+1}} \times \ldots \times H_k^{t_{k,j(k)+1}}, \ldots$, $H_1^{x_{1,j(1)+4}} \times \ldots \times H_k^{x_{k,j(k)+4}}$, $H_1^{y_{1,j(1)+4}} \times \ldots \times H_k^{y_{k,j(k)+4}}$, $H_1^{z_{1,j(1)+4}} \times \ldots \times H_k^{z_{k,j(k)+4}}$, $H_1^{t_{1,j(1)+4}} \times \ldots \times H_k^{t_{k,j(k)+4}}$, мы получим не менее пяти орбит упорядоченных четверок относительно действия группы H, удовлетворяющих равенству (1). Теорема доказана.

3. Пересечение разрешимых холловых подгрупп в почти простых группах

В данном разделе мы докажем, что почти простая группа с простым цоколем, изоморфным знакопеременной группе, спорадической группе или группе Титса, является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой.

Теорема 2. *Пусть H — разрешимая π-холлова подгруппа почти простой группы G. Предположим также, что подгруппа $F^*(G)$ изоморфна либо знакопеременной группе, либо спорадической группе, либо группе Титса. Тогда существуют такие элементы x, y, z, t группы G, что справедливо равенство* (1). *Более того, группа G является $\mathbf{(Orb)}_\pi$-группой.*

Доказательство. Покажем сначала, что если в группе G существуют такие элементы x, y, z, что $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = 1$ и при этом $H \notin \{H^x, H^y, H^z\}$, то относительно действия сопряжениями подгруппы H найдется не менее пяти орбит упорядоченных четверок сопряженных с H подгрупп, для которых справедливо равенство (1). Действительно, если $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = 1$, то четверки

$$(H, H^x, H^y, H^z), (H^x, H, H^y, H^z), (H^x, H^y, H, H^z), (H^x, H^y, H^z, H), (H^x, H^x, H^y, H^z)$$

лежат в разных H-орбитах.

Дальнейшее доказательство мы будем вести, последовательно рассматривая различные почти простые группы. Для данной почти простой группы мы будем сначала пытаться найти тройку элементов x, y, z, для которых справедливо равенство $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = 1$ (в этом случае, как мы заметили выше, условие о количестве H-орбит выполняется автоматически), и лишь в том случае, когда такую тройку элементов найти не удается, мы будем указывать четверку элементов x, y, z, t и доказывать, что существует не менее пяти H-орбит. Пусть $S = F^*(G)$ — простой цоколь группы G.

Пусть $S \simeq \mathrm{Alt}_n$, $n \geqslant 5$. Из [14, теорема 4.3] имеем, что в группе S свойство E_π влечет свойство C_π. Тогда из леммы 1(в) следует, что любая π-холлова подгруппа группы S содержится в некоторой π-холловой подгруппе группы $\mathrm{Aut}(S)$. Поэтому [2, теорема A4] влечет, что либо $|\pi \cap \pi(S)| = 1$ и H является силовской подгруппой группы S (а, значит, и группы G), либо $n = 5$, 7 или 8 и $\pi \cap \pi(S) = \{2, 3\}$. В первом случае из [5, следствие C] следует существование таких элементов $x, y \in G$, что $H \cap H^x \cap H^y = 1$. Поэтому можно считать, что H является $\{2, 3\}$-холловой подгруппой группы G и $n = 5$, 7 или 8. В этом случае $\mathrm{Aut}(\mathrm{Alt}_n) \simeq \mathrm{Sym}_n$ и, поскольку $G = HS$, утверждение теоремы 2 достаточно доказать для случая $G \simeq \mathrm{Aut}(S) \simeq \mathrm{Sym}_n$. Рассмотрим отдельно все три возможных значения для n, учитывая [1].

Пусть $G = \mathrm{Sym}_5$. Тогда $H \simeq \mathrm{Sym}_4$ является стабилизатором точки для группы G в ее естественном подстановочном представлении. Поскольку пересечение стабилизаторов в G любых четырех точек тривиально и все стабилизаторы точек в транзитивной группе подстановок сопряжены, существуют такие элементы $x, y, z \in G$, что $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = 1$.

Пусть $G = \mathrm{Sym}_7$. Тогда $H \simeq \mathrm{Sym}_3 \times \mathrm{Sym}_4$. С точностью до сопряжения в G орбитами группы H являются множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5, 6, 7\}$. Непосредственные вычисления показывают, что для элементов $x = (2, 4)(3, 5)$ и $y = (1, 2, 4)(3, 6, 5)$ справедливо равенство $H \cap H^x \cap H^y = 1$.

Пусть $G = \mathrm{Sym}_8$. Тогда $H \simeq \mathrm{Sym}_4 \wr \mathrm{Sym}_2$. С точностью до сопряжения в G можно считать, что H порождается элементами $(1, 2, 3, 4), (1, 2), (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)$. В этом случае таких элементов $x, y, z \in G$, что $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = 1$, не существует. Действительно, действие группы G правыми сдвигами на множестве $G : H$ правых смежных классов группы G по подгруппе H дает вложение группы G в Sym_{35} (причем образ группы G при этом вложении примитивен). Используя [15], легко проверить, что декартова степень $(G : H)^4$ относительно указанного действия разбивается на 152 орбиты, порядок которых не превосходит $20160 = |G|/2$, т. е. стабилизатор любых четырех точек нетривиален. Это означает, что пересечение любых четырех сопряженных с H подгрупп (по построению H является стабилизатором точки) нетривиально.

Для элементов $x = (4, 5)$, $y = (3, 5)(4, 6)$, $z = (4, 7, 6, 5)$, $t = (2, 3, 4, 5)$ справедливо равенство $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = 1$. Оценим количество орбит группы H на множестве

$$X := \big\{(H^x, H^y, H^z, H^t) \mid H \cap H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t = 1\big\}.$$

Поскольку $N_G(H) = H$, элемент $g \in G$ оставляет неподвижным набор (H^x, H^y, H^z, H^t) в том и только в том случае, когда $g \in H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t$. Таким образом, группа H действует на множестве X регулярно, поэтому размер каждой H-орбиты на X равен $|H| = 1152$. Пересечение $H^x \cap H^y \cap H^z \cap H^t$ является группой порядка 2, которая порождается элементом $a = (1, 8)(2, 4)(3, 6)(5, 7)$. Равенство $H \cap (H^x)^g \cap (H^y)^g \cap (H^z)^g \cap (H^t)^g = 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $a^g \notin H$. Кроме того, из равенства $N_G(H) = H$ следует, что упорядоченные четверки

$$\big((H^x)^{g_1}, (H^y)^{g_1}, (H^z)^{g_1}, (H^t)^{g_1}\big), \big((H^x)^{g_2}, (H^y)^{g_2}, (H^z)^{g_2}, (H^t)^{g_2}\big)$$

совпадают в том и только в том случае, если $g_1 g_2^{-1} \in \langle a \rangle$. Непосредственными вычислениями (или с помощью [15]) легко проверить, что в группе G существует 72 элемента, сопряженных с a и не лежащих в H. Кроме того, $C_G(a) \simeq 2 \wr \mathrm{Sym}_4$, и порядок $|C_G(a)|$ равен 384. Поэтому мощность множества X равна $72 \cdot 192 = 13824$. Следовательно, группа H на множестве X имеет $13824/1152 = 12$ орбит.

Предположим, что S — спорадическая группа или группа Титса. Если H является силовской подгруппой группы G, то из [5, следствие C] вытекает существование таких элементов

$x, y \in G$, что $H \cap H^x \cap H^y = 1$. Поэтому можно считать, что порядок группы H делится не менее, чем на два простых числа.

Предположим сначала, что порядок группы H делится лишь на два простых числа r, p и $H = R : P$, где $R \in \mathrm{Syl}_r(H)$, $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ и $O_p(H) = 1$. Предположим также, что либо r нечетно, либо $S = \mathrm{Aut}(S)$. Поскольку для любой спорадической группы и группы Титса группа ее внешних автоморфизмов является 2-группой, то в наших предположениях мы получаем, что $R \leq S$. В силу [16] существует такой элемент $x \in S$, что $R \cap R^x = 1$. Следовательно, с точностью до сопряжения в H можно считать, что $H \cap H^x \leq P$. Из [4] следует, что существуют такие $y, z \in R$, что $P \cap P^y \cap P^z = 1$. Поэтому $(H \cap H^x) \cap (H \cap H^x)^y \cap (H \cap H^x)^z = H \cap H^x \cap H^{xy} \cap H^{xz} = 1$.

Если порядок группы H делится лишь на два простых числа r, p и $H = R \times P$, где $R \in \mathrm{Syl}_r(H)$ и $P \in \mathrm{Syl}_p(H)$, то одно из этих чисел, например r, нечетно, и вновь $R \leq S$. В силу [16] существует такой элемент $x \in S$, что $R \cap R^x = 1$. Кроме того, в силу [5, следствие C] существуют такие $y, z \in G$, что $P \cap P^y \cap P^z = 1$. Следовательно, $H \cap H^x \cap H^y \cap H^z = 1$.

Из [17, теорема 6.14 и табл. III] и [18, теорема 4.1] следует, что π-холлова подгруппа H спорадической группы S с условием $|\pi| \geq 2$, строение которой отлично от строения групп в рассмотренных выше случаях, существует лишь при $S \simeq M_{23}$ и $H \simeq 2^4 : (3 \times \mathrm{Alt}_4) : 2 \simeq (2^4 : 2^2) : 3^2 : 2$ либо при $S \simeq J_1$ и $H \simeq 2^3 : 7 : 3$. В обоих случаях мы имеем $\mathrm{Aut}(S) \simeq S = G$.

Предположим, что $S \simeq M_{23}$ и $H = R : P : Q$, где $R \simeq (2^4 : 2^2)$, $P \simeq 3^2$ и $Q \simeq 2$. В силу [16] существует такой элемент $x \in G$, что $R \cap R^x = 1$, следовательно, можно считать, что $H \cap H^x \leq PQ$. По следствию 1 существует $y \in R$ такой, что $(H \cap H^x) \cap (H \cap H^x)^y = H \cap H^x \cap H^{xy}$ и $|H \cap H^x \cap H^{xy}| \leq 2$. Вновь применяя следствие 1, находим элемент $z \in H \cap H^x$, для которого справедливо равенство

$$(H \cap H^x \cap H^{xy}) \cap (H \cap H^x \cap H^{xy})^z = H \cap H^x \cap H^{xy} \cap H^{xyz} = 1.$$

Пусть, наконец, $S = G \simeq J_1$ и $H = R : P$, где $P \simeq 2^3$ и $P \simeq 7 : 3$. Тогда $R = O_2(H) \in \mathrm{Syl}_2(H)$ и $P \in \mathrm{Hall}_{\{3,7\}}(H)$, причем $O_{\{3,7\}}(H) = 1$. Из [16] следует, что существует $x \in S$ такой, что $R \cap R^x = 1$, поэтому, с точностью до сопряжения в H, можно считать, что $H \cap H^x \leq P$. В силу [6] существуют такие $y, z \in R$, что $P \cap P^y \cap P^z = 1$. Поэтому $H \cap H^x \cap H^{xy} \cap H^{xz} = 1$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.G. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
2. **Hall P.** Teorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. Vol. 6. P. 286–304.
3. **Зенков В.И.** О пересечениях разрешимых холловых подгрупп в конечных неразрешимых группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 2. С. 86–89.
4. **Passman D.S.** Groups with normal solvable Hall p'-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 123, no. 1. P. 99–111.
5. **Зенков В.И.** Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, вып. 1. С. 1–92.
6. **Dolfi S.** Intersections of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. 2005. Vol. 37, no. 1. P. 61–66.
7. **Dolfi S.** Large orbits in coprime actions of solvable groups // Trans. AMS. 2008. Vol. 360, no. 1. P. 135–152.
8. **Vdovin E.P.** Regular orbits of solvable linear p'-groups // Sib. Electr. Math. Reports. 2007. Vol. 4. P. 345–360.
9. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin: Springer, 1967. 808 p.
10. **Зенков В.И.** Пересечения абелевых подгрупп в конечных группах // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 2. С. 150–152.
11. **Seress A.** The minimal base size of primitive solvable permutation groups // J. London Math. Soc. 1996. Vol. 53, no. 2. P. 243–255.
12. **Isaacs I.M.** Finite group theory. Providence, R.I. : Amer. Math. Soc., 2008. 351 p.

13. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука. 1982. 288 с.
14. **Revin D.O., Vdovin E.P.** Hall subgroups of finite groups // Ischia Group Theory — 2004: Proc. Conf. in Honor of Marcel Herzog. Contemporary Math. 2006. Vol. 402. P. 229–263.
15. The GAP Group (GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10). 2008. URL: http://www.gap-system.org.
16. **Мазуров В.Д., Зенков В.И.** Пересечения силовских подгрупп в конечных простых группах // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 4. С. 424–432.
17. **Gross F.** On a conjecture of Philip Hall // Proc. London Math. Soc. Ser. III. 1986. Vol. 53, no. 3. P. 464–494.
18. **Ревин Д.О.** Свойство D_π в одном классе конечных групп // Алгебра и логика. 2002. Vol. 41, № 3. С. 335–370.

Вдовин Евгений Петрович
д-р физ.-мат. наук, доцент
зам. директора
Ин-т математики СО РАН
e-mail: vdovin@math.nsc.ru

Поступила 10.12.2008

Зенков Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
вед. науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: zenkov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 519.17

О ГРАФАХ ТЕРВИЛЛИГЕРА С $\mu = 4$ [1]

А. Л. Гаврилюк

Графом Тервиллигера называется неполный связный граф, в котором пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, является μ-кликой для некоторой константы μ. В работе описано локальное строение графов Тервиллигера с $\mu = 4$.

Ключевые слова: графы Тервиллигера, проблема регулярности.

A. L. Gavrilyuk. On Terwilliger graphs with $\mu = 4$.

A Terwilliger graph is an incomplete connected graph in which the intersection of the neighborhoods of any two vertices lying at the distance of 2 is a μ-clique for some constant μ. The local structure of Terwilliger graphs with $\mu = 4$ is described.

Keywords: Terwilliger graphs, regularity problem.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим подграф, индуцированный в графе Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a (обозначение: $d(x, a) = i$ для $x \in \Gamma_i(a)$). Далее, подграф из Γ всюду будет означать индуцированный подграф. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a в графе Γ. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Пусть $a^{\perp}$ — шар радиуса 1 с центром a. Для подграфа Σ графа Γ через $\Sigma^{\perp}$ обозначим $\cap_{a\in\Sigma} a^{\perp}$. В частности, подграф $[a]^{\perp}$ назовем *ядром* вершины $a \in \Gamma$.

Через k_a обозначим *степень вершины* a, т. е. число вершин в $[a]$. Через L_a обозначим *порядок ядра* вершины a, т. е. число вершин в $[a]^{\perp}$. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *бирегулярным*, если степени его вершин принимают точно два значения. Для бирегулярного графа Γ через $\mathcal{A}(\Gamma)$ (соотв. $\mathcal{B}(\Gamma)$) будем обозначать множество вершин меньшей (соотв. большей) степени. Для ребра $\{a, c\}$ графа Γ положим $\lambda_{ac} = |[a] \cap [c]|$. Граф Γ называется *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если Γ — регулярный граф степени k на v вершинах, в котором $\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра $\{a, c\}$. Подграф, индуцированный на $[a] \cap [b]$, назовем *μ-подграфом* (соотв. *λ-подграфом*), если $d(a, b) = 2$ (соотв. $\{a, b\}$ — ребро), а через μ_{ab} (соотв. λ_{ab}) обозначим число вершин в этом подграфе. Скажем, что $\mu(\Gamma) = \mu$, если для любых вершин a, b из Γ с $d(a, b) = 2$ верно равенство $\mu_{ab} = \mu$. Реберно регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ), в котором $\mu(\Gamma) = \mu$, называется *вполне регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ). Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным*.

Для вершины a подграфа Σ графа Γ *ядром* a в Σ назовем подграф $\Sigma \cap \Sigma(a)^{\perp}$. Для вершины $x \in \Gamma$ через Δ_x будем обозначать подграф, индуцированный на $[x] - [x]^{\perp}$. Вершину a графа Γ назовем *редуцированной*, если $[a]^{\perp} = \{a\}$. Через $\bar{\Gamma}$ обозначим факторграф по отношению эквивалентности $\equiv$, где $a \equiv b$, если $a^{\perp} = b^{\perp}$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00009), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программы Отделения математических наук РАН и программы совместных исследований УрО РАН с СО РАН.

Кликой порядка n (n-кликой) мы называем полный граф на n вершинах. *Кликовым расширением* графа Γ называется граф, полученный заменой каждой вершины a на клику (a), причем различные клики попарно не пересекаются, и вершина из (a) смежна с вершиной из (b) тогда и только тогда, когда вершины a, b смежны в Γ. Если число вершин в каждой клике равно α, то расширение называется *α-кликовым.* В этом случае $L_a = \alpha$ для любой вершины $a \in \Gamma$. Если Γ — кликовое расширение графа $\bar{\Gamma}$, то для вершины $x \in \Gamma$ через $\bar{x}$ будем обозначать полный прообраз вершины x в графе $\bar{\Gamma}$.

Через $\mathcal{F}(s,r)$ обозначим класс сильно регулярных графов с $\mu = 1$, в которых окрестность любой вершины является объединением r изолированных клик порядка s. Пусть $\mathcal{S}$ — некоторое множество графов. Скажем, что граф Γ является *локально* $\mathcal{S}$-графом, если окрестность любой вершины в Γ изоморфна графу из $\mathcal{S}$. Если множество $\mathcal{S}$ состоит из одного графа Σ, то будем говорить, что Γ является локально Σ-графом.

Граф *Тервиллигера* — это неполный связный граф, в котором пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, является μ-кликой. Через $\mathcal{G}$ обозначим класс сильно регулярных графов Тервиллигера с $\mu = 2$, а через $\mathcal{G}(s,r)$ — подкласс графов из $\mathcal{G}$, состоящий из локально $\mathcal{F}(s,r)$-графов.

В первой главе монографии [1] сформулирована следующая проблема о графах Тервиллигера.

Проблема 1. *Пусть Γ — связный регулярный граф Тервиллигера, содержащий вершину b с $|[b]^\perp| < \mu$. Верно ли, что для любой вершины x подграф $[x] - [x]^\perp$ является регулярным?*

В работе [2] А.А. Махнев эту проблему решил для $\mu = 2$, а в работе [3] (совместно с автором) — в случае $\mu = 3$ (при этом решение было получено без предположения регулярности графа). В [4] А.А. Махнев и автор получили решение проблемы 1 для любого натурального μ, тем самым доказав справедливость указанной гипотезы о графах Тервиллигера.

В данной работе описано локальное строение графов Тервиллигера Γ с $\mu(\Gamma) = 4$.

Теорема. *Пусть Γ — граф Тервиллигера с пустым графом $\Gamma^\perp$ и $\mu(\Gamma) = 4$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *подграф Ψ на множестве вершин из Γ с некликовыми окрестностями является кликовым 4-расширением графа $\bar{\Psi}$ с $\mu(\bar{\Psi}) = 1$;*

(2) *$L_a = 2$ для любой вершины $a \in \Gamma$, и Γ — 2-кликовое расширение графа Тервиллигера с $\mu = 2$;*

(3) *для некоторой вершины $a \in \Gamma$ имеем $L_a = 2$, подграф Δ_a является 2-кликовым расширением бирегулярного графа, и граф Γ является 2-кликовым расширением бирегулярного графа Тервиллигера $\bar{\Gamma}$ с $\mu = 2$, имеющим диаметр, больший 2, при этом окрестности вершин в графе $\bar{\Gamma}$ являются либо бирегулярными графами диаметра 2 с $\mu = 1$, либо графами из класса $\mathcal{F}(s,r)$;*

(4) Γ *содержит вершины с ядрами порядка 2 и 1, и существуют натуральные числа r, s такие, что:*

(*i*) *для вершины x с ядром порядка 1 граф Δ_x является 3-кликовым расширением графа из класса $\mathcal{F}(s,r)$;*

(*ii*) *для вершины y с ядром порядка 2 граф Δ_y является 2-кликовым расширением графа из класса $\mathcal{F}(3s/2,r)$;*

(*iii*) *для вершины z с ядром порядка 3 граф Δ_z является графом из класса $\mathcal{F}(3s,r)$;*

(5) *каждая вершина графа Γ редуцирована, граф Γ регулярен, и существуют натуральные числа r, s такие, что:*

(*i*) *для любой вершины $y \in \Gamma$ подграф Δ_y является 3-кликовым расширением графа из $\mathcal{F}(s,r)$;*

(*ii*) *для любой вершины $y \in \Gamma$ подграф Δ_y является локально $\mathcal{G}(s,r)$-графом;*

(*iii*) *для любой вершины $y \in \Gamma$ окрестности вершин в подграфе Δ_y являются 2-кликовыми расширениями графов из класса $\mathcal{F}(s,r)$;*

(6) Γ *содержит вершину* a *с* $L_a = 3$ *и не содержит вершин с ядром порядка* 2*, диаметр* Γ *больше* 2 *и либо*

(i) *существуют натуральные числа* r, s *такие, что для любой вершины* $y \in \Gamma$ *с* $L_y = 3$ *подграф* Δ_y *является графом из класса* $\mathcal{F}(3s, r)$*, а для любой вершины* $x \in \Gamma$ *с* $L_x = 1$ *подграф* Δ_x *является* 3*-кликовым расширением графа из класса* $\mathcal{F}(s, r)$*, либо*

(ii) *для любой вершины* $y \in \Gamma$ *с* $L_y = 3$*, подграф* Δ_y *является графом из класса* $\mathcal{F}(3, 7)$*, для любой вершины* $x \in \Gamma$ *с* $L_x = 1$ *подграф* Δ_x *является* 3*-кликовым расширением либо графа из класса* $\mathcal{F}(1, 7)$*, либо бирегулярного графа со степенями вершин* 7 *и* 8*, отвечающего полярности проективной плоскости порядка* 7.

Заметим, что окрестность любой вершины в графе Тервиллигера также является графом Тервиллигера, что позволяет использовать при доказательстве следующие два предложения.

Предложение 1 [3, предложение 1]. *Пусть* Γ *— связный граф Тервиллигера с* $\mu = 2$ *и* $\Gamma^{\perp}$ *— пустой граф. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(1) Γ *является кликовым* 2*-расширением графа* $\bar{\Gamma}$ *с* $\mu(\bar{\Gamma}) = 1$;

(2) *найдутся такие натуральные числа* s *и* r*, что* Γ *является локально* $\mathcal{F}(s, r)$*-графом*;

(3) *диаметр* Γ *больше* 2*,* Γ *является бирегулярным графом, и окрестность вершины* a *из* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *содержится в* $\mathcal{B}(\Gamma)$*, окрестность каждой вершины* b *из* $\mathcal{B}(\Gamma)$ *пересекает по непустому подграфу подграф* $\mathcal{A}(\Gamma)$ *и верно одно из утверждений*:

(i) *подграф* $[a]$ *— граф Петерсена, а подграф* $[b]$ *— граф, отвечающий полярности проективной плоскости порядка* 3;

(ii) *подграф* $[a]$ *— граф Хофмана — Синглтона, а* $[b]$ *— граф, отвечающий полярности проективной плоскости порядка* 7;

(iii) *подграф* $[a]$ *— граф Мура степени* 57*, а* $[b]$ *— граф на множестве точек и прямых аффинной плоскости порядка* 56*, в котором множество точек совпадает с* $\mathcal{A}(\Gamma) \cap [b]$*, точка и прямая смежны, если они инцидентны в плоскости, и две прямые смежны, если они параллельны*;

(iv) *подграф* $[a]$ *— граф Мура степени* 57*, а* $[b]$ *— граф, полученный добавлением к подграфу из п.* (iii) *клики из* 57 *вершин, отвечающих классам параллельных прямых аффинной плоскости, и каждая прямая смежна с классом параллельных прямых, содержащим эту прямую*;

(v) *подграф* $[a]$ *— граф Мура степени* 57*, а* $[b]$ *— бирегулярный граф, в котором меньшая степень вершины равна* 57*, а большая —* 65 *или* 81.

Фактически, п. (2) предложения 1 утверждает, что каждый граф из класса $\mathcal{G}$ является графом из класса $\mathcal{G}(s, r)$ для подходящих натуральных чисел s и r. В этом случае известно существование графов только при $s = 1$ и $r = 2$ (пятиугольник) или $r = 3$ (граф Петерсена).

Позднее в работе [5] было доказано несуществование графов из п. (3)(i), в работе [6] — несуществование графов из п. (3)(v).

Предложение 2 [3, теорема 1]. *Пусть* Γ *— граф Тервиллигера с* $\mu = 3$ *и* $\Gamma^{\perp}$ *— пустой граф. Тогда верно одно из следующих утверждений*:

(1) *подграф* Ψ *на множестве вершин из* Γ *с некликовыми окрестностями является кликовым* 3*-расширением графа* $\bar{\Psi}$ *с* $\mu(\bar{\Psi}) = 1$;

(2) *найдутся такие натуральные числа* s *и* r*, что* Γ *является локально* $\mathcal{G}(s, r)$*-графом*;

(3) Γ *содержит нередуцированную вершину, диаметр* Γ *больше* 2*, найдутся такие натуральные числа* s *и* r*, что для любой нередуцированной вершины* $a \in \Gamma$ *подграф* $[a] - [a]^{\perp}$ *принадлежит классу* $\mathcal{F}(s, r)$*, а для любой редуцированной вершины* $u \in \Gamma$ *подграф* $\Sigma = [u]$ *является кликовым* 2*-расширением графа из класса* $\mathcal{F}(s/2, r)$;

(4) *найдутся такие натуральные числа* s *и* r*, что для любой вершины* $u \in \Gamma$ *подграф* $[u]$ *является кликовым* 2*-расширением графа из класса* $\mathcal{F}(s, r)$*, где* $s(s + 1)$ *делится на* 3.

Результаты, полученные в работе и предыдущих работах, позволяют сформулировать следующую усиленную проблему.

Проблема 2. *Пусть Γ — связный граф Тервиллигера, содержащий вершину b с $|[b]^\perp| < \mu$, $\mu \ge 2$, не являющийся 2-кликовым расширением бирегулярного графа Тервиллигера с $\bar{\mu} = 1$. Верно ли, что в этом случае для любой вершины x подграф $[x] - [x]^\perp$ является регулярным?*

1. Предварительные результаты

Пусть далее Γ — граф Тервиллигера. В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с $\mu = 1$. Тогда*

(1) *окрестность любой вершины a состоит из r изолированных s-клик, где $s+1$ делит $r(r-1)^2$;*

(2) *если Γ не является пятиугольником и $s = c^2 f$, где c и f — натуральные числа и f свободно от квадратов, то $s+1 < r$, $r-1 = (t+c)tf$ для некоторого натурального числа t и $2t+c$ делит многочлен $R(s)$, где $R(s) = cs(s-4)(s^2-2s-4)$, если s не делится на 4, и $R(s) = cs(s-4)(s^2+2s+4)/16$, если s делится на 4;*

(3) *$s \ne 2$, а в случае $s = 3$ параметр r равен 7.*

Доказательство. Заметим, что число $(s+1)$-клик в Γ равно $r^2(r-1)(s+1) - r^2(2r-3) + r(r-1)^2/(s+1)$. Поэтому $s+1$ делит $r(r-1)^2$. Далее, $s+1 \le r$. Утверждение (2) доказано в [7, теорема 4]. Покажем, что $s+1 \ne r$, если Γ не является пятиугольником. В противном случае $t(t+c) = c^2$, но это уравнение не имеет целочисленных решений.

Пусть $s = 2$. Тогда $c = 1$ и $2t+1$ делит $R(2) = 16$, противоречие. Если $s = 3$, то $s = 1^2 3$, $R(s) = 3$ и $2t+1$ делит 3, поэтому $t = 1$, $r = 1 + 3 \cdot 2 = 7$. Лемма доказана.

Лемма 2 [1, теорема 1.17.1]. *Пусть Γ — граф диаметра 2 с $\mu = 1$. Тогда либо Γ является сильно регулярным графом, либо $\Gamma = a^\perp$ для подходящей вершины a, либо выполняются следующие утверждения:*

(1) *Γ является бирегулярным графом, все вершины из $\mathcal{A}(\Gamma)$ (соответственно $\mathcal{B}(\Gamma)$) имеют степень α (соответственно β), подграф $\mathcal{A}(\Gamma)$ является кокликой;*

(2) *для $a \in \mathcal{A}(\Gamma)$ подграф $[a]$ является кокликой, и для смежных вершин b и c из $\mathcal{B}$ имеем $\lambda_{bc} = \beta - \alpha$;*

(3) *$|\Gamma| = \alpha\beta + 1$.*

Лемма 3 [3, лемма 2]. *Пусть граф Γ с пустым графом $\Gamma^\perp$ содержит вершину b с $|[b]^\perp| < \mu$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любой вершины $a \in [b]$ подграф $[a] \cap [b]$ не является кликой;*

(2) *если для некоторой вершины $a \in \Gamma$ подграф $a^\perp$ инцидентен $b^\perp$, то $a^\perp = b^\perp$;*

(3) *если $a \in [b] - [b]^\perp$, то $|[a]^\perp| + |[b]^\perp| \le \mu$;*

(4) *Γ не содержит вершин x с $|[x]^\perp| \ge \mu$.*

Лемма 4 [4, лемма 5]. *Пусть диаметр графа Γ равен 2 и подграф $\Gamma^\perp$ пуст. Если Γ нерегулярен, то Γ является кликовым расширением бирегулярного графа $\bar{\Gamma}$ с $\mu(\bar{\Gamma}) = 1$.*

Лемма 5 [3, лемма 3]. *Пусть $\Gamma^\perp$ — пустой граф, Ψ — подграф, индуцированный на множестве вершин графа Γ с некликовыми окрестностями. Если граф $\Gamma - \Psi$ не пуст, то Ψ — кликовое расширение графа $\bar{\Psi}$ с $\mu(\bar{\Psi}) = 1$ и диаметр Γ больше 2.*

Лемма 6. *Пусть граф Γ содержит вершину a, для которой подграф Δ_a является кликовым расширением бирегулярного графа со степенями вершин α и β, где $\alpha < \beta$. Тогда окрестность вершины $b \in \mathcal{A}(\Delta_a)$ является L_a-кликовым расширением графа из класса $\mathcal{F}(s,r)$, где $r = \alpha$, $s = (\mu - L_a)/L_a$ и $L_b = \mu - L_a$.*

Доказательство. Покажем, что вершины меньшей степени графа Δ_a имеют в графе Γ ядро порядка $\mu - L_a$. Выберем $c \in \Delta_a$ — вершину большей степени, смежную с вершиной меньшей степени b в Δ_a. Тогда подграф Δ_c является $(\mu - L_c)$-кликовым расширением графа $\bar{\Delta}_c$ с $\mu(\bar{\Delta}_c) = 1$. По лемме 2 подграф $\bar{\Delta}_c$ является либо сильно регулярным, либо бирегулярным графом. Первое невозможно в силу того, что $|\bar{\Delta}_c(\bar{a}) \cap \bar{\Delta}_c(\bar{b})| \neq |\bar{\Delta}_c(\bar{a}) \cap \bar{\Delta}_c(\bar{z})|$ для любой вершины $z \in \mathcal{B}(\Delta_a) \cap ([c] - [c]^\perp)$. Значит, $\bar{\Delta}_c$ — бирегулярный граф, и вновь b в нем является вершиной меньшей степени. Отсюда следует, что $[b]^\perp = \Delta_c(b)^\perp = \Delta_a(b)^\perp$, значит, $L_b = \mu - L_a = \mu - L_c$ и $|[a]^\perp| = |[c]^\perp|$. Действительно, если $u \in \Delta_a(b)^\perp - [b]^\perp$, то в подграфе Δ_b вершина u принадлежит ядру вершины a, т. е. $u \in \Delta_b(a)^\perp$. Аналогично доказывается, что $u \in \Delta_b(c)^\perp$, что невозможно. Поэтому $\Delta_b = [b] - [b]^\perp$ — кликовое расширение сильно регулярного графа из класса $\mathcal{F}(s,r)$, где $r = \alpha$, $s = (\mu - L_a)/L_a$. Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы

Пусть до конца работы Γ — граф Тервиллигера с пустым графом $\Gamma^\perp$ и $\mu(\Gamma) = 4$. Заметим, что для любой вершины $x \in \Gamma$ подграф Δ_x является графом Тервиллигера диаметра 2 с $\mu(\Delta_x) = \mu(\Gamma) - L_x$.

Если ядро некоторой вершины $x \in \Gamma$ содержит 4 вершины, то на основании лемм 3 и 5 граф Γ — граф из утверждения (1) доказываемой теоремы. Если порядок ядра L_x любой вершины $x \in \Gamma$ равен 2, то Γ является 2-кликовым расширением некоторого графа $\bar{\Gamma}$ с $\mu(\bar{\Gamma}) = 2$. В следующей лемме мы покажем, что для выполнения этого условия достаточно, чтобы окрестность некоторой вершины была 2-кликовым расширением бирегулярного графа.

Лемма 7. *Пусть Γ содержит вершину a с $L_a = 2$, окрестность которой является 2-кликовым расширением бирегулярного графа. Тогда диаметр Γ больше 2 и Γ является 2-кликовым расширением бирегулярного графа Тервиллигера с $\mu = 2$.*

Доказательство. Зафиксируем вершину $a \in \Gamma$ с $L_a = 2$ такую, что подграф Δ_a является 2-кликовым расширением бирегулярного графа. Если вершина $\bar{b}$ имеет меньшую степень в графе $\bar{\Delta}_a$, то по лемме 6 имеем $L_b = 2$. Далее, по той же лемме 6 для вершины c большей степени из подграфа $\Delta_a(b) - \Delta_a(b)^\perp$ имеем $L_c = 2$, и Δ_c — 2-кликовое расширение бирегулярного графа, а Δ_b — 2-кликовое расширение графа из класса $\mathcal{F}(s,r)$. Легко заметить, что в нашем случае $s = 1$, поэтому ввиду леммы 1 имеем $r \in \{2, 3, 7, 57\}$. Поэтому граф $\bar{\Delta}_b$ является одним из графов Мура — пятиугольником, графом Петерсена, графом Хофмана — Синглтона или гипотетическим графом Ашбахера.

Если $L_d = 1$ для некоторой вершины $d \in \Delta_b$, то $\Delta_d(b) - \Delta_d(b)^\perp$ — объединение изолированных 2-клик, противоречие. Поэтому $L_d > 1$ для всех $d \in \Delta_b$.

Допустим далее, что некоторая вершина $e \in \Delta_a$ отвечает вершине большей степени в графе $\bar{\Delta}_a$, и ядро e содержит единственную вершину, т. е. $[e]^\perp = \{e\}$. Ввиду предыдущих рассуждений e не может быть смежна с вершиной меньшей степени в бирегулярном графе Δ_a. По лемме 2 окрестность вершины $\bar{e}$ в графе $\bar{\Delta}_a$ распадается на клики порядка $\beta - \alpha + 1$, где α, β — степени вершин в бирегулярном факторграфе $\bar{\Delta}_a$, и количество таких клик равно $\beta/(\beta - \alpha + 1)$. Кроме того, Δ_e — 3-кликовое расширение некоторого графа с $\mu = 1$, а потому 3 должно делить и 2β, и $2(\beta - \alpha + 1)$. Теперь, так как $\bar{\Delta}_b \in \mathcal{F}(1,r)$, то $\alpha = r$ и $r \in \{2, 3, 7, 57\}$. Если $r = 2$, то $\beta - 1$ делит β, поэтому $\beta = 2$ и $\alpha = \beta$, противоречие. Если $r = 3$, то $\beta - 2$ делит β и $\beta \in \{3, 4\}$; оба случая невозможны, так как $\alpha < \beta$ и β делится на 3. В случае $r = 7$ получим, что $\beta - 6$ делит β и $\beta \in \{7, 8, 9, 12\}$. Ввиду делимости β на 3 имеем $\beta \in \{9, 12\}$.

Если $\beta = 9$, то окрестность вершины $\bar{a}$ в графе $\bar{\Delta}_e$ состоит из $9/(9-7+1) = 3$ изолированных клик порядка 2, поэтому $\bar{\Delta}_e$ — бирегулярный граф с большей степенью β', равной 6 (напомним, что по лемме 1 не существует сильно регулярных графов из класса $\mathcal{F}(s,r)$ при $s = 2$). По лемме 2 получаем, что меньшая степень α' в подграфе $\bar{\Delta}_e$ равна 5 (так как порядок максимальной клики равен 3). Теперь по лемме 6 некоторая вершина $u \in \Delta_e$ меньшей степени в графе Γ будет иметь ядро порядка 3, более того, $\Delta_u \in \mathcal{F}(3,\alpha')$, противоречие с тем, что $\alpha' \neq 7$.

При $\beta = 12$ окрестность вершины $\bar{a}$ в графе $\bar{\Delta}_e$ состоит из двух изолированных клик порядка 4, поэтому $\bar{\Delta}_e$ — бирегулярный граф с большей степенью β', равной 8 (по лемме 1 не существует сильно регулярных графов из класса $\mathcal{F}(s,r)$ при $r = 2$ и $s = 4$). По лемме 2 получаем, что меньшая степень α' в подграфе $\bar{\Delta}_e$ равна 5 (так как порядок максимальной клики равен 5). Противоречие, как и в предыдущем случае.

Итак, $r = 57$ и $\beta - 56$ делит β. Отсюда $\beta \in \{58, 60, 63, 64, 70, 84, 112\}$. Ввиду делимости β на 3 имеем $\beta \in \{60, 63, 84\}$. Однако, если $\beta \in \{60, 63, 84\}$, то $(\beta - \alpha + 1) \in \{4, 7, 28\}$, противоречие.

Мы показали, что для любой вершины $e \in \Delta_a$ порядок L_a её ядра равен 2. Напомним, что подграф Δ_b для $b \in \mathcal{A}(\Delta_a)$ является 2-кликовым расширением графа Мура, а потому для любой вершины $x \in \Delta_b$ подграф Δ_x является также 2-кликовым расширением либо графа Мура, либо бирегулярного графа.

Допустим теперь, что Δ_e — 2-кликовое расширение сильно регулярного графа из класса $\mathcal{F}(s', r')$ для некоторой вершины $e \in \Delta_a$, и $\bar{e}$ — вершина большей степени в графе $\bar{\Delta}_a$. Заметим, что вершина e не смежна с вершинами меньшей степени в графе Δ_a, и снова $\beta - \alpha + 1$ делит β и $\alpha = r$, где s и r — параметры, определяющие класс графов $\mathcal{F}(s,r)$, которому принадлежит подграф $\bar{\Delta}_b$. Как отмечалось выше, $r \in \{2, 3, 7, 57\}$.

Если $r = 2$, то $\beta - 1$ делит β, поэтому $\beta = 2$ и $\alpha = \beta$, противоречие. Если $r = 3$, то $\beta - 2$ делит β и $\beta = 4$. В случае $r = 7$ получим, что $\beta - 6$ делит β и $\beta \in \{8, 9, 12\}$. Наконец, если $r = 57$, то $\beta - 56$ делит β и $\beta \in \{58, 60, 63, 64, 70, 84, 112\}$.

Далее в наших обозначениях $r' = \beta/(\beta - \alpha + 1)$ и $s' = \beta - \alpha + 1$. Нам остается показать, что при определенных значениях параметров r' и s' класс графов $\mathcal{F}(s', r')$ пуст. Если $\beta = 4$, то $r' = 4/(4-3+1) = 2$ и $s' = \beta - \alpha + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$, противоречие с леммой 1. Если $\beta = 8$, то $r' = 8/(8-7+1) = 4$ и $s' = \beta - \alpha + 1 = 8 - 7 + 1 = 2$. Если $\beta = 9$, то $r' = 9/(9-7+1) = 3$ и $s' = \beta - \alpha + 1 = 9 - 7 + 1 = 3$, противоречие с тем, что $s' + 1 < r'$. В случае $\beta = 12$ имеем $r' = 12/(12-7+1) = 2$ и $s' = \beta - \alpha + 1 = 12 - 7 + 1 = 6$, противоречие. Если $\beta \in \{58, 60, 63, 64, 70, 84, 112\}$, то $r' \in \{29, 15, 9, 8, 5, 3, 2\}$ и $s' \in \{2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\}$. Далее случай $s' = 2$ невозможен, а при $s' \in \{8, 14, 28, 56\}$ имеем $s' + 1 > r'$, противоречие. Если $s' = 4$, то по утверждению (2) леммы 1 имеем $r' - 1 = (t+2)t$ и $t(t+2) = 14$ для некоторого натурального числа t, противоречие. Если $s' = 7$, то $r' - 1 = 7(t+1)t$, $7t(t+1) = 8$, противоречие. Итак, Δ_e не является 2-кликовым расширением сильно регулярного графа из класса $\mathcal{F}(s', r')$ для любой вершины $e \in \Delta_a$ большей степени. Поэтому и не найдется такой вершины $f \in \Gamma_2(a)$, что $L_f \neq 2$.

Ввиду связности графа Γ для любой вершины $x \in \Gamma$ имеем $L_x = 2$, поэтому Γ — 2-кликовое расширение графа Тервиллигера с $\mu = 2$ из заключения предложения 1.

Лемма 8. *Пусть Γ содержит вершину a с $L_a = 2$ и Δ_a содержит вершину e такую, что $L_e = 1$. Тогда диаметр Γ больше 2, подграф Δ_a — 2-кликовое расширение графа из класса $\mathcal{F}(s,r)$, и выполняются следующие утверждения:*

(1) *для любой вершины $z \in \Gamma$ такой, что $L_z = 2$, подграф Δ_z — 2-кликовое расширение сильно регулярного графа из класса $\mathcal{F}(s,r)$;*

(2) *для любой вершины $y \in \Gamma$ такой, что $L_y = 1$, подграф Δ_y — 3-кликовое расширение сильно регулярного графа из класса $\mathcal{F}(2s/3, r)$;*

(3) *для любой вершины $x \in \Gamma$ такой, что $L_x = 3$, подграф Δ_x — сильно регулярный граф из класса $\mathcal{F}(2s, r)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем вершину $a \in \Gamma$ с $L_a = 2$. Если Δ_a — 2-кликовое расширение бирегулярного графа, то по лемме 7 граф Γ является 2-кликовым расширением бирегулярного графа Тервиллигера с $\mu = 2$, противоречие с тем, что по условию леммы Δ_a содержит вершину e с $L_e = 1$. Допустим, что Δ_a — граф из класса $\mathcal{G}(s,r)$. Тогда для любой вершины $x \in \Delta_a$ порядок ядра L_x вершины x равен 1, и ядро вершины a в графе Δ_x содержит две вершины. Противоречие с тем, что в соответствии с п. (3) предложения 2 диаметр Δ_x больше 2. Утверждение (1) доказано.

Итак, Δ_a — 2-кликовое расширение графа из класса $\mathcal{F}(s,r)$. Если Δ_a содержит вершину e с $L_e = 1$, то Δ_e — 3-кликовое расширение либо графа из класса $\mathcal{F}(s',r')$, либо бирегулярного графа.

Зафиксируем вершину e такую, что Δ_e — кликовое расширение бирегулярного графа со степенями вершин α и β в графе $\bar{\Delta}_e$, где $\alpha < \beta$. Заметим, что $\alpha = 2s(r-1)/3 + 1$ и $\beta = 2rs/3$. Кроме того, вершина $\bar{a} \in \bar{\Delta}_e$ не смежна в графе $\bar{\Delta}_e$ с вершинами меньшей степени, поэтому $\beta - \alpha + 1$ делит β.

По лемме 6 вершины графа Δ_e меньшей степени имеют в графе Γ ядро порядка 3. Далее, если $b \in \mathcal{A}(\Delta_e)$, то $\Delta_b = [b] - [b]^\perp$ — кликовое расширение сильно регулярного графа из класса $\mathcal{F}(s',r')$, где $r' = \alpha$ и $s' = (\mu - L_e)/L_e$. Поэтому $s' = 3$, и по лемме 1 имеем $r' = 7$.

Далее, из [1, теорема 1.17.5] следует, что либо число $D = \alpha - 1 + (\beta - \alpha + 1)^2/4$ является квадратом некоторого рационального числа, либо $\alpha \le 2(\beta - \alpha + 1)$, либо $\beta - \alpha = 1$, причем в двух последних случаях бирегулярный граф описан в [1, теорема 1.17.4]. Допустим, что D — не квадрат. Тогда по [1, теорема 1.17.4] либо $\alpha \in \{2, \beta-\alpha+2, \beta-\alpha+3\}$, либо $\beta - \alpha = 1$. Если $\alpha = 2$, то $2s(r-1)/3+1 = 2$, $2s(r-1) = 3$, противоречие. Если $\alpha = \beta-\alpha+2$, то $2s(r-1)/3+1 = 2s/3+1$, $s(r-1) = s$, $r = 2$, $s = 1$, противоречие с тем, что s не делится на 3. Если $\alpha = \beta - \alpha + 3$, то $2s(r-1)/3 + 1 = 2s/3 + 2$, $2s(r-2)/3 = 1$, $2s(r-2) = 3$, противоречие. Наконец, если $\beta - \alpha = 1$, то $2s/3 - 1 = 1$, $s = 3$ и $r = 7$. Отсюда $\beta = 2 \cdot 7 = 14$ и $\alpha = 13$, противоречие с тем, что $\alpha = r' = 7$. Если же D — квадрат, то $24 + (\beta - 6)^2 = 4d^2$ для подходящего целого числа d. Значит, $(2d - (\beta - 6))(2d + (\beta - 6)) = 24$. Отсюда $2d - (\beta - 6) = 4, 2d + (\beta - 6) = 6$ или $2d - (\beta - 6) = 2, 2d + (\beta - 6) = 12$. В первом случае получим $\beta = 7$, противоречие. Во втором случае $\beta = 11$, $\beta - \alpha + 1 = 11 - 7 + 1 = 5$ и $\beta/(\beta - \alpha + 1) = 11/5$, противоречие.

Итак, Δ_e — 3-кликовое расширение сильно регулярного графа из класса $\mathcal{F}(2s/3, r)$. Если $y \in \Delta_e$, то подграф Δ_y снова является 3-кликовым расширением либо бирегулярного графа, либо сильно регулярного графа из класса $\mathcal{F}(2s/3, r)$. В первом случае мы получим противоречие, как и в предыдущем абзаце. Поэтому Δ_y — 3-кликовое расширение графа из класса $\mathcal{F}(2s/3, r)$. Наконец, если $d(y,a) \ge 3$, то геодезический путь в Γ, связывающий вершины y и a, состоит из вершин с ядрами порядка 1, 2 или 3. Для вершин с ядрами порядка 2 мы показали, что Δ-подграфами смежных с ними вершин и вершин, находящиеся от них на расстоянии 2, являются кликовые расширения сильно регулярных графов. Если указанный геодезический путь состоит только из вершин с ядрами порядка 1 или 2, то утверждение (2) справедливо. Остается показать, что утверждение (2) справедливо и при наличии в геодезическом пути $a, \ldots, y$ вершин с ядрами порядка 3. Докажем предварительно последнее утверждение леммы.

Зафиксируем вершину $x \in \Gamma$ с $L_x = 3$ и предположим, что Δ_x — бирегулярный граф. Тогда для вершины $y \in \mathcal{A}(\Delta_x)$ подграф Δ_y содержит вершину x с ядром порядка 3 в подграфе Δ_y. Из леммы 3 следует, что Δ_y является 3-кликовым расширением некоторого графа. Это противоречит тому, что $\Delta_x(y)$ — коклика и, соответственно, $\Delta_y(x)$ состоит из вершин с порядком ядра, равным 1. Поэтому $\Delta_x \in \mathcal{F}(s',r')$. Ввиду связности графа Γ имеем $r' = r$ и $s' = 2s$. Утверждение (3) доказано.

Теперь без ограничения общности можно считать, что $y \in \Delta_x$, где вершина x принадлежит геодезическому пути $a, .., x, y$. С помощью рассуждений, аналогичных доказательству (3), получаем, что Δ_y является 3-кликовым расширением сильно регулярного графа. Все утверждения леммы доказаны.

Ввиду лемм 7 и 8 до конца работы можно предполагать, что Γ не содержит вершин x с ядрами порядка 2. Тогда $L_x \in \{1, 3\}$ для любой вершины $x \in \Gamma$.

Лемма 9. *Если Γ не содержит вершин x с $L_x = 3$, то Γ регулярен и существуют такие натуральные числа s и r, что выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *для любой вершины $y \in \Gamma$ подграф Δ_y является 3-кликовым расширением графа из класса $\mathcal{F}(s, r)$;*

(2) *для любой вершины $y \in \Gamma$ подграф Δ_y является локально $\mathcal{G}(s, r)$-графом;*

(3) *для любой вершины $y \in \Gamma$ окрестности вершин в подграфе Δ_y являются 2-кликовыми расширениями графов из класса $\mathcal{F}(s, r)$.*

Доказательство. Все утверждения леммы следуют из предложения 2. Если для некоторой вершины $x \in \Gamma$ подграф Δ_x является 3-кликовым расширением некоторого графа, то для любой вершины $y \in \Delta_x$ подграф Δ_y также является 3-кликовым расширением некоторого графа (так как ядро вершины x в графе Δ_y будет иметь порядок 3). Если же $\bar{\Delta}_x$ — бирегулярный граф, то из леммы 6 следует, что его вершины меньшей степени имеют ядро порядка 3 в графе Γ, что противоречит предположению в этой лемме. Поэтому $\bar{\Delta}_x$ — граф из класса $\mathcal{F}(s, r)$ для некоторых натуральных чисел s и r.

Если для вершины $x \in \Gamma$ подграф Δ_x является локально $\mathcal{G}(s, r)$-графом, то для любой вершины $y \in \Delta_x$ подграф Δ_y также является локально $\mathcal{G}(s, r)$-графом. Аналогично рассуждаем в том случае, когда подграф Δ_x является локально 2-кликовым расширением графа из класса $\mathcal{F}(s, r)$. Ввиду связности графа Γ выполняется одно из утверждений в заключении леммы. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть Γ содержит вершину a с $L_a = 3$. Тогда диаметр Γ больше 2 и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *существуют натуральные числа r и s такие, что либо*

(i) *для любой вершины $y \in \Gamma$ такой, что $L_y = 3$, подграф Δ_y является графом из класса $\mathcal{F}(3s, r)$, либо*

(ii) *для любой вершины $x \in \Gamma$ такой, что $L_x = 1$, подграф Δ_x является 3-кликовым расширением графа из класса $\mathcal{F}(s, r)$;*

(2) *для любой вершины $y \in \Gamma$ такой, что $L_y = 3$, подграф Δ_y является графом из класса $\mathcal{F}(3, 7)$, для любой вершины $x \in \Gamma$ такой, что $L_x = 1$, подграф Δ_x является 3-кликовым расширением либо графа из класса $\mathcal{F}(1, 7)$, либо бирегулярного графа со степенями вершин 7 и 8, отвечающего полярности проективной плоскости порядка 7.*

Доказательство. Зафиксируем вершину $a \in \Gamma$ с $L_a = 3$ и предположим, что Δ_a — бирегулярный граф. Тогда для вершины $y \in \mathcal{A}(\Delta_a)$ подграф Δ_y содержит вершину a с ядром порядка 3 в подграфе Δ_y. Из леммы 3 следует, что Δ_y является 3-кликовым расширением некоторого графа. Это противоречит тому, что $\Delta_a(y)$ — коклика и, соответственно, $\Delta_y(a)$ состоит из вершин с порядком ядра, равным 1. Утверждение (1) доказано.

Итак, по лемме 2 подграф Δ_a — граф из класса $\mathcal{F}(s, r)$ для подходящих s и r, кроме того, s делится на 3. Предположим теперь, что для $y \in \Delta_a$ подграф Δ_y — 3-кликовое расширение бирегулярного графа со степенями вершин α и β, где $\alpha < \beta$. Если $s > 3$, то $\bar{a} \in \mathcal{B}(\bar{\Delta}_y)$. Более того, вершина $\bar{a}$ не смежна с вершинами меньшей степени в $\bar{\Delta}_y$, поэтому $\beta - \alpha + 1$ делит β. Далее, $\beta = rs/3$, $\alpha = s(r-1)/3 + 1$.

По лемме 7 вершины меньшей степени графа Δ_y имеют в графе Γ ядро порядка 3. Далее, если $b \in \mathcal{A}(\Delta_y)$, то $\Delta_b = [b] - [b]^{\perp}$ — сильно регулярный граф из класса $\mathcal{F}(s', r')$, где $r' = \alpha$, $s' = (\mu - L_y)/L_y$. Поэтому $s' = 3$, и по лемме 1 имеем $r' = 7$.

Далее, из [1, теорема 1.17.5] следует, что либо число $D = \alpha - 1 + (\beta - \alpha + 1)^2/4$ является квадратом некоторого рационального числа, либо $\alpha \leq 2(\beta - \alpha + 1)$, либо $\beta - \alpha = 1$, причем в двух последних случаях бирегулярный граф описывается в [1, теорема 1.17.4]. Допустим, что D — не квадрат. Тогда по [1, теорема 1.17.4] либо $\alpha \in \{2, \beta - \alpha + 2, \beta - \alpha + 3\}$, либо $\beta - \alpha = 1$. Напомним, что $\alpha = 7$. Если $\alpha = \beta - \alpha + 2$, то $s(r-1)/3 + 1 = s/3 + 1$, $r = 2$, $s = 1$, противоречие с тем, что s не делится на 3. Если $\alpha = \beta - \alpha + 3$, то $s(r-1)/3 + 1 = s/3 + 2$, $s(r-2)/3 = 1$, $s(r-2) = 3$, $r = 5$, $s = 1$, противоречие. Наконец, если $\beta - \alpha = 1$, $\beta = 8$, то $s/3 - 1 = 1$, $s = 6$. Тогда $s = 1^2 \cdot 2 \cdot 3$ и $r - 1 = 6t(t+1)$, $R(6) = 6(6-4)(36-12-4) = 12 \cdot 20$. Далее, по лемме 1 число $2t+1$ делит $R(6) = 240 = 16 \cdot 5 \cdot 3$, поэтому $t \in \{1, 2, 7\}$ и $r \in \{13, 37, 337\}$. С другой стороны, $r = \beta/(\beta - \alpha + 1) = 4$, противоречие.

Если же D — квадрат, то $6 + (\beta - 6)^2/4 = d^2$ для подходящего рационального числа d, противоречие, как и в лемме 8.

Пусть $s = 3$. Тогда $\bar{a} \in \mathcal{A}(\bar{\Delta}_y)$, $\alpha = 7$ и Δ_a является графом из класса $\mathcal{F}(3, 7)$. Снова либо число $D = \alpha - 1 + (\beta - \alpha + 1)^2/4$ является квадратом некоторого рационального числа, либо $\alpha \le 2(\beta - \alpha + 1)$, либо $\beta - \alpha = 1$. Допустим, что D — не квадрат. Тогда по [1, теорема 1.17.4] имеем $\alpha \in \{2, \beta-\alpha+2, \beta-\alpha+3\}$ либо $\beta-\alpha = 1$. Если $\alpha = \beta-\alpha+2$, то $\beta = 12$. Если $\alpha = \beta-\alpha+3$, то $\beta = 11$. Наконец, если $\beta - \alpha = 1$, то $\beta = 8$. Если D — квадрат, то $6 + (\beta - 6)^2/4 = d^2$ для подходящего рационального числа d, противоречие.

Итак, если $\Delta_a \in \mathcal{F}(3, 7)$ и Δ_y — 3-кликовое расширение бирегулярного графа со степенями вершин α и β, где $\alpha < \beta$, то $(\alpha, \beta) \in \{(7, 8), (7, 11), (7, 12)\}$. В последних двух случаях $\bar{\Delta}_y$ является графом, связанным с аффинной плоскостью порядка 6, которой не существует, противоречие. Значит, $(\alpha, \beta) = (7, 8)$, и граф $\bar{\Delta}_y$ отвечает полярности проективной плоскости порядка 7.

Если же Δ_y — регулярный граф, то он является 3-кликовым расширением графа из класса $\mathcal{F}(s/3, r)$, причем если Γ содержит вершину с нерегулярным Δ-подграфом, то, как показано выше, $s = 3$ и $r = 7$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Как отмечалось выше, если $L_x = 4$ для некоторой вершины $x \in \Gamma$, то по лемме 3 имеем, что Γ — 4-кликовое расширение графа $\bar{\Gamma}$, $\mu(\bar{\Gamma}) = 1$ и выполняется утверждение (1) теоремы. Если $L_x = 2$ для любой вершины $x \in \Gamma$, то по лемме 3 имеем, что Γ — 2-кликовое расширение графа $\bar{\Gamma}$, $\mu(\bar{\Gamma}) = 2$ и выполняется второе утверждение теоремы. Если же для некоторой вершины $x \in \Gamma$ порядок L_x ее ядра равен 2, и подграф Δ_x является 2-кликовым расширением бирегулярного графа, то $L_y = 2$ для любой вершины $y \in \Gamma$, и по лемме 7 получим, что Γ — 2-кликовое расширение бирегулярного графа Тервиллигера $\bar{\Gamma}$ и $\mu(\bar{\Gamma}) = 2$. Тем самым выполнено утверждение (3) теоремы. Пусть для некоторой вершины $x \in \Gamma$ порядок L_x ее ядра равен 2, а подграф Δ_x является 2-кликовым расширением графа из класса $\mathcal{F}(s, r)$, и граф Γ содержит вершины с ядром порядка 1. Тогда $L_y \in \{1, 2, 3\}$ для $y \in \Gamma$ и лемма 8 (и утверждение (4) нашей теоремы) описывает локальное строение такого графа. Если каждая вершина графа Γ редуцирована (т. е. $L_x = 1$ для любой вершины $x \in \Gamma$), то локальное строение такого графа Γ описано в лемме 9 и в утверждении (5) нашей теоремы. Наконец, лемма 10 завершает доказательство теоремы рассмотрением случая, когда граф Γ содержит вершины с ядрами порядка только 1 и 3. В этом случае выполняется последнее утверждение теоремы. Ограничения на диаметр графов в утверждениях (3), (4) и (6) теоремы следуют из лемм 4 и 5. Доказательство теоремы завершено.

З а м е ч а н и е. Существование графов из класса $\mathcal{F}(s, r)$ при $s > 1$ является одной из нерешенных проблем теории комбинаторно-симметричных графов. Если класс $\mathcal{F}(s, r)$ пуст при $s > 1$, то сформулированная нами проблема 2 решается положительно. Действительно, пусть для вершины $u \in \Gamma$ подграф Δ_u является кликовым расширением бирегулярного графа. Из леммы 6 в этом случае следует, что для вершины $w \in \mathcal{A}(\Delta_u)$ подграф Δ_w принадлежит классу $\mathcal{F}(s, r)$ и $s = 1 = (\mu - L_u)/L_u$. Отсюда $\mu = 2L_u$ и Γ — 2-кликовое расширение бирегулярного графа $\bar{\Gamma}$ и $\mu(\bar{\Gamma}) = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. New York: Springer-Verlag, 1989. 494 p.

2. **Махнев А.А.** О регулярных графах Тервиллигера с $\mu = 2$ // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 5. С. 1132–1134.
3. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** О графах Тервиллигера с $\mu \leq 3$ // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 1. С. 14–26.
4. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** О проблеме регулярности в графах Тервиллигера // Докл. РАН. 2007. Т. 417, № 2. С. 151–155.
5. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Графы Тервиллигера, в которых окрестность некоторой вершины изоморфна графу Петерсена // Докл. РАН. 2008. Т. 421, № 4. С. 445–448.
6. **Гаврилюк А.Л.** О коспектральных подграфах в бирегулярных геодезических графах диаметра 2 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2007. Т. 13, № 4. С. 49–60.
7. **Bose R.C., Dowling T.A.** A generalization of Moore graphs of diameter 2 // J. Combin. Theory. Ser. B. 1971. Vol. 11, № 3. P. 213–226.

Гаврилюк Александр Львович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ax-g@mail.ru

Поступила 20.01.2009

Том 15 № 2 2009

УДК 512.544

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МОДУЛЕЙ НАД ГРУППОВЫМИ КОЛЬЦАМИ ЛОКАЛЬНО РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

О. Ю. Дашкова

В работе изучается модуль A над групповым кольцом DG в случае, когда D — дедекиндова область, группа G локально разрешима, фактор-модуль $A/C_A(G)$ не является артиновым D-модулем, а система всех подгрупп $H \leq G$, для которых фактор-модули $A/C_A(H)$ не являются артиновыми D-модулями, удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. При выполнении указанных условий доказано, что группа G гиперабелева, а также описаны некоторые свойства ее периодической части.

Ключевые слова: модуль, групповое кольцо, локально разрешимая группа.

O. Yu. Dashkova. On a class of modules over group rings of locally soluble groups.

A module A over a group ring DG is studied in the case when D is a Dedekind domain, the group G is locally soluble, the quotient module $A/C_A(G)$ is not an Artinian D-module, and the system of all subgroups $H \leq G$ for which the quotient modules $A/C_A(H)$ are not Artinian D-modules satisfies the minimality condition for subgroups. Under these assumptions, it is proved that the group G is hyperabelian and some properties of its periodic part are described.

Keywords: module, group ring, locally soluble group.

Исследование модулей над групповыми кольцами является важным направлением в современной алгебре. В этом направлении было получено много интересных результатов. Достаточно широким классом модулей над групповыми кольцами являются артиновы модули над групповыми кольцами. Напомним, что модуль называется *артиновым*, если частично упорядоченное множество всех подмодулей этого модуля удовлетворяет условию минимальности. Следует отметить, что ряд проблем математики требует исследования специфических артиновых модулей. В [1] изучались артиновы модули, удовлетворяющие различным ограничениям. Естественно возникает вопрос об исследовании модулей над групповыми кольцами, которые сами не являются артиновыми, но в некотором смысле близки к артиновым.

Пусть A — DG-модуль, где G — группа, D — дедекиндова область. Напомним, что кольцо D называется *дедекиндовой областью*, если выполняются следующие условия:

(1) D — область целостности;

(2) D — нетерово кольцо;

(3) каждый ненулевой простой идеал кольца D является максимальным идеалом;

(4) кольцо D целозамкнуто.

Следует отметить, что дедекиндовы кольца по своей структуре достаточно близки к полям. Идея дедекиндовых колец возникла в процессе развития алгебраической теории чисел. Дедекиндовы кольца и модули над дедекиндовыми кольцами исследовались многими авторами. Здесь следует отметить Н. Бурбаки, З.И. Боревича, И.Р. Шафаревича, Л. Фукса, С.Б. Ли, И. Капланского, Г. Карпиловского, Е. Матлиса, Д.С. Пассмана, Р. Шарпа, М.Д. Ларсена. Л.А. Курдаченко, И.Я. Субботин и Н.Н. Семко [2] исследовали разные классы модулей над дедекиндовыми кольцами. Ими были рассмотрены проективные, инъективные, минимаксные модули над дедекиндовыми кольцами, а также прямые суммы циклических модулей над дедекиндовыми кольцами. Была описана структура артинова модуля над дедекиндовым кольцом, построен прюферов модуль над дедекиндовым кольцом, и описано кольцо эндоморфизмов этого модуля.

Если $H \leq G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$ называется *коцентрализатором* подгруппы H в модуле A. Пусть A — DG-модуль такой, что коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым D-модулем. Обозначим через $L_{nad}(G)$ систему всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми D-модулями. Введем на $L_{nad}(G)$ порядок относительно обычного включения подгрупп. Если $L_{nad}(G)$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми D-модулями, или просто, что группа G удовлетворяет условию $min - nad$.

Пусть A — DG-модуль такой, что коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым D-модулем, а группа G локально разрешима и удовлетворяет условию $min - nad$. В работе установлено, что в этом случае группа G является гиперабелевой, т. е. обладает возрастающим нормальным рядом с абелевыми факторами, а также описаны некоторые свойства ее периодического радикала.

Из определения коцентрализатора подгруппы непосредственно вытекают следующие свойства. Пусть A — D-модуль. Отметим, что если $K \leq H \leq G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым D-модулем, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A также является артиновым D-модулем. Если коцентрализаторы подгрупп $U, V \leq G$ в модуле A являются артиновыми D-модулями, то фактор-модуль $A/(C_A(U) \cap C_A(V))$ также является артиновым D-модулем и, следовательно, коцентрализатор подгруппы $\langle U, V\rangle$ в модуле A является артиновым D-модулем.

Предположим, что группа G удовлетворяет условию $min - nad$. Если $H_1 > H_2 > H_3 > \dots$ есть бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы G, то существует натуральное число n такое, что коцентрализатор подгруппы H_n в модуле A является артиновым D-модулем. Кроме того, если N — нормальная подгруппа группы G и коцентрализатор подгруппы N в модуле A не является артиновым D-модулем, то фактор-группа G/N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Лемма 1 [3, лемма 2.1]. *Пусть A — DG-модуль. Предположим, что G удовлетворяет условию $min - nad$, X, H — подгруппы группы G и Λ — множество индексов, для которых выполняются следующие условия*:

(i) *$X = Dr_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ — прямое произведение подгрупп X_λ, где X_λ — H-инвариантная неединичная подгруппа в X для каждого $\lambda \in \Lambda$;*

(ii) *$H \cap X \leq Dr_{\lambda \in \Gamma} X_\lambda$ для некоторого подмножества Γ из Λ.*

Если множество $\Lambda \setminus \Gamma$ бесконечно, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым D-модулем.

В дальнейшем в предложении 1 и теореме 2 рассматривается DG-модуль A, который не является артиновым D-модулем и централизатор которого в группе G единичен.

Следующее предложение дает важную информацию о строении фактор-группы группы по ее коммутанту при выполнении для этой группы условия $min - nad$.

Предложение 1. *Пусть A — DG-модуль и группа G удовлетворяет условию $min - nad$. Тогда фактор-группа G/G' является черниковской группой.*

Доказательство. Предположим, что фактор-группа G/G' не является черниковской группой. Обозначим через S множество подгрупп $H \leq G$ таких, что фактор-группа H/H' не является черниковской и коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является артиновым D-модулем. Поскольку $G \in S$, то $S \neq \varnothing$. Так как множество S удовлетворяет условию минимальности, то оно содержит минимальный элемент, обозначим его через M. Если U и V — собственные подгруппы группы M такие, что $M = UV$ и $U \cap V = M'$, то по крайней мере одна из подгрупп, скажем, U, такова, что ее коцентрализатор в модуле A не является артиновым D-модулем. Из выбора подгруппы M вытекает, что фактор-группа U/U' черниковская. Отсюда и из изоморфизма $U/M' \simeq (U/U')/(M'/U')$ следует, что фактор-группа U/M'

также является черниковской. Поскольку коцентрализатор подгруппы V в модуле A не является артиновым D-модулем, то абелева фактор-группа M/U также является черниковской. Следовательно, фактор-группа M/M' является черниковской. Получаем противоречие с выбором подгруппы M. Отсюда вытекает, что фактор-группу M/M' нельзя представить в виде произведения двух собственных подгрупп. Следовательно, фактор-группа M/M' изоморфна подгруппе квазициклической группы C_{q^∞} для некоторого простого числа q; противоречие. Предложение доказано.

Пусть A — DG-модуль и группа G удовлетворяет условию $min-nad$. Через $AD(G)$ обозначим множество элементов $x \in G$ таких, что коцентрализатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A является артиновым D-модулем. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)^g$ для всех $x, g \in G$, отсюда вытекает, что $AD(G)$ является нормальной подгруппой группы G.

Пусть группа G локально разрешима и фактор-модуль $A/C_A(G)$ является артиновым D-модулем. Согласно [2, теорема 7.13] A имеет ряд D-подмодулей

$$\{0\} = C_0 \leq C_1 \leq C_2 \leq C_3 = A$$

такой, что $C_1 = C_A(G)$, C_2/C_1 — делимый D-модуль, представимый в виде прямой суммы конечного числа прюферовых D-модулей, и C_3/C_2 — конечно порожденный D-модуль. Положим

$$N = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1) \cap C_G(C_3/C_2).$$

Тогда N — нильпотентная подгруппа. По теореме Ремака можно считать, что

$$H := G/N \leq G/C_G(C_1) \times G/C_G(C_2/C_1) \times G/C_G(C_3/C_2).$$

По построению $G \leq C_G(C_1)$, следовательно, фактор-группа $G/C_G(C_1)$ тривиальна. Отсюда вытекает, что

$$H \leq G/C_G(C_2/C_1) \times G/C_G(C_3/C_2).$$

Согласно [1, предложение (16.16)] фактор-группа $S_1 := G/C_G(C_2/C_1)$ изоморфна подгруппе группы $GL(r, D(P^\infty))$, где $D(P^\infty)$ является проективным пределом

$$limproj\{D/P^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

для некоторого максимального идеала P кольца D. Данный предел является целостным кольцом. Поэтому $D(P^\infty)$ можно вложить в некоторое поле F. Отсюда вытекает, что группа S_1 изоморфна некоторой подгруппе линейной группы $GL(r, F)$. Согласно [4, следствие 3.8] проекция H_1 группы H на S_1 разрешима. Фактор-группа $S_2 := G/C_G(C_3/C_2)$ изоморфна подгруппе $Aut_D(C_3/C_2)$, которая согласно [4, теорема 13.3] является расширением нильпотентной группы при помощи квазилинейной группы. Следовательно, группа S_2 является расширением нильпотентной подгруппы L при помощи квазилинейной группы $S_2/L = M_1/L \times M_2/L \times \ldots \times M_k/L$, где M_i/L — конечномерная линейная группа для $i = 1, \ldots, k$. Обозначим через H_2 проекцию группы H на прямой множитель S_2. Тогда $H_2L/L \leq M_1/L \times M_2/L \times \ldots \times M_k/L$. Согласно [4, следствие 3.8] проекция группы H_2L/L на каждый из прямых множителей $M_i/L, i = 1, \ldots, k$, разрешима. Отсюда следует разрешимость группы H_2L/L. Из разрешимости групп H_1 и H_2L/L и нильпотентности подгруппы N вытекает разрешимость группы G. Поэтому при изучении локально разрешимых групп с условием $min-nad$ следует сосредоточить внимание на исследовании локально разрешимых групп G, для которых фактор-модуль $A/C_A(G)$ не является артиновым D-модулем.

Теорема 1. *Пусть A — DG-модуль и G — периодическая локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию $min-nad$. Тогда либо G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, либо $G = AD(G)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть группа G не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и $G \neq AD(G)$. Обозначим через S множество подгрупп $H \leq G$ таких, что H не удовлетворяет условию минимальности и $H \neq AD(H)$. Тогда $S \neq \varnothing$. Покажем, что S удовлетворяет условию минимальности. Пусть $\{H_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ — некоторое непустое подмножество множества S. Поскольку $H_\sigma \neq AD(H_\sigma)$ для любого $\sigma \in \Sigma$, то для любого $\sigma \in \Sigma$ найдется элемент $h_\sigma \in H_\sigma$, коцентрализатор которого в модуле A не является артиновым D-модулем. Поскольку $C_A(H_\sigma) \leq C_A(\langle h_\sigma \rangle)$, коцентрализатор подгруппы H_σ в A не является артиновым D-модулем. Ввиду выполнения условия $min - nad$ множество S удовлетворяет условию минимальности. Пусть M — минимальный элемент в S и $L = AD(M)$. Существует бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы M:

$$V_1 > V_2 > V_3 > \ldots .$$

Поскольку группа M удовлетворяет условию $min - nad$, существует натуральное число k такое, что коцентрализатор подгруппы V_k в модуле A является артиновым D-модулем. Следовательно, $V_k \leq L$, и поэтому L не удовлетворяет условию минимальности. Отсюда ввиду выбора подгруппы M вытекает, что если $x \in M \setminus L$, то $\langle x, L \rangle = M$. Следовательно, фактор-группа M/L имеет порядок, равный некоторому простому числу q. Можно полагать, что элемент $x \in M \setminus L$ имеет порядок q^r для некоторого натурального числа r. Так как группа M не является черниковской, то согласно теореме Д.И. Зайцева [5] группа M содержит $\langle x \rangle$-инвариантную абелеву подгруппу $B = Dr_{n\in\mathbb{N}}\langle b_n \rangle$ — прямое произведение подгрупп $\langle b_n \rangle$, причем можно считать, что элементы b_n имеют простые порядки для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $1 \neq c_1 \in B$ и $C_1 = \langle c_1^{\langle x \rangle} \rangle$ — нормальное замыкание подгруппы $\langle c_1 \rangle$ относительно подгруппы $\langle x \rangle$. Тогда подгруппа C_1 конечна, и существует подгруппа E_1 такая, что $B = C_1 \times E_1$. Пусть U_1 — ядро подгруппы E_1 относительно $\langle x \rangle$. Тогда U_1 имеет конечный индекс в B. Если $1 \neq c_2 \in U_1$ и $C_2 = \langle c_2^{\langle x \rangle} \rangle$, то C_2 — конечная $\langle x \rangle$-инвариантная подгруппа и $\langle C_1, C_2 \rangle = C_1 \times C_2$. Продолжим это построение. На шаге с номером n будет построена конечная $\langle x \rangle$-инвариантная подгруппа C_n, причем $\langle C_1, C_2, ..., C_n \rangle = C_1 \times C_2 \times ... \times C_n$. В результате будет построено семейство конечных подгрупп $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\} = Dr_{n\in\mathbb{N}} C_n$. Из леммы 1 следует, что $x \in L$; противоречие. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть A — DG-модуль, группа G локально разрешима и удовлетворяет условию $min - nad$. Тогда либо группа G разрешима, либо G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп $1 = S_0 \leq S_1 \leq \ldots \leq S_\omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n \leq G$ таким, что коцентрализатор подгруппы S_n в модуле A является артиновым D-модулем, факторы S_{n+1}/S_n абелевы для $n \geq 0$, а фактор-группа G/S_ω — разрешимая черниковская группа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сначала, что группа G гиперабелева. Для этого достаточно показать, что каждый нетривиальный гомоморфный образ группы G содержит неединичную нормальную абелеву подгруппу.

Пусть H — собственная нормальная подгруппа группы G. Предположим сначала, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является артиновым D-модулем. Тогда фактор-группа G/H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Следовательно, она является черниковской группой и поэтому имеет неединичную нормальную абелеву подгруппу.

Рассмотрим теперь случай, когда коцентрализатор подгруппы H в модуле A является артиновым D-модулем. Пусть $S = \{M_\sigma/H \mid \sigma \in \Sigma\}$ — множество всех неединичных нормальных подгрупп фактор-группы G/H. Рассмотрим сначала случай, когда для любого $\sigma \in \Sigma$ коцентрализатор подгруппы M_σ не является артиновым D-модулем. Покажем, что в этом случае G/H удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп. Пусть $\{M_\delta/H\}$ — непустое подмножество множества S. Для любого δ коцентрализатор подгруппы M_δ в модуле A не является артиновым D-модулем. Ввиду выполнения условия $min - nad$ множество $\{M_\delta\}$ имеет минимальный элемент M. Следовательно, M/H — минимальный элемент подмножества $\{M_\delta/H\}$. Поэтому группа G/H удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп и, следовательно, является гиперабелевой. Тогда G/H содержит неединичную нормальную абелеву подгруппу. В случае, когда для некоторого $\gamma \in \Sigma$ коцентрализатор подгруппы M_γ является артиновым D-модулем, группа M_γ разрешима. Следовательно, M_γ/H — неединичная нормальная разрешимая подгруппа в G/H, и поэтому G/H содержит неединичную нормальную абелеву подгруппу. Отсюда вытекает, что группа G гиперабелева.

Пусть $1 = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_\alpha \leq \ldots \leq G$ — возрастающий нормальный ряд с абелевыми факторами и α — наименьшее порядковое число, для которого коцентрализатор подгруппы H_α в модуле A не является артиновым D-модулем. Тогда, как и ранее, подгруппа H_β разрешима для всех $\beta < \alpha$. Кроме того, фактор-группа G/H_α удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и поэтому является разрешимой черниковской группой.

Предположим сначала, что α — непредельное порядковое число. Тогда подгруппа H_α разрешима, и поэтому разрешима группа G. Предположим теперь, что α — предельное порядковое число и группа G не является разрешимой. Для каждого положительного целого числа k существует порядковое число β_k такое, что $\beta_k < \alpha$ и H_{β_k} имеет ступень разрешимости, не превосходящую k. Более того, можно считать, что $\beta_i < \beta_{i+1}$ для каждого натурального числа i. Для каждого i положим $T_i = H_{\beta_i}$. Тогда группа G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп $1 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots$. Подгруппа $T_\omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ не является разрешимой, и поэтому $T_\omega = H_\alpha$. Нужный ряд $1 = S_0 \leq S_1 \leq \ldots \leq S_\omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} S_n \leq G$ может быть получен уплотнением ряда $1 = T_0 \leq T_1 \leq \ldots \leq T_\omega \leq G$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kurdachenko L.A., Otal J., Subbotin I.Ya.** Artinian modules over group rings. Basel: Birkhäuser Verlag, 2007. 247 p.
2. **Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya., Semko N.N.** Insight into modules over Dedekind domains. Kiev: Inst. of Mathematics NAS of Ukraine, 2008. 119 p.
3. **Dixon M.R., Evans M.J., Kurdachenko L.A.** Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. 2004. Vol. 277, № 1. P. 172–186.
4. **Wehrfritz B.A.** Infinite linear groups. An account of the group-theoretic properties of infinite groups of matrices. New York: Springer-Verlag, 1973. 229 p.
5. **Зайцев Д.И.** О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР. 1974. Т. 214, № 6. С. 1250–1253.

Дашкова Ольга Юрьевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
докторант
Киевский национальный ун-т им. Тараса Шевченко
e-mail: odashkova@yandex.ru

Поступила 9.10.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 519.17

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОДНОГО КЛАССА ГРАФОВ БЕЗ 3-ЛАП

Г. М. Ермакова, В. В. Кабанов[1]

Дана классификация связных графов без 3-лап, которые содержат 3-коклику с некоторыми числовыми ограничениями на число вершин в их μ-подграфах.

Ключевые слова: граф, подграф, 3-коклика, граф без 3-лап.

G.M. Ermakova, V.V. Kabanov. A characterization of one class of graphs without 3-claws.

A classification is given of connected graphs without 3-claws containing a 3-coclique under some numerical restrictions on the number of vertices in their μ-subgraphs.

Keywords: graph, subgraph, 3-coclique, graph without 3-claws.

Введение

Мы рассматриваем только конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Далее всюду подграф из Γ будет означать индуцированный подграф графа Γ. Для вершины a графа Γ через $\Gamma(a)$ обозначим подграф на множестве всех вершин, смежных с a. Этот подграф называется окрестностью вершины a в графе Γ. Если граф Γ зафиксирован, то вместо $\Gamma(a)$ будем писать $[a]$. Пусть $a^{\perp}$ — подграф на множестве $[a] \cup \{a\}$. Для подграфа Δ графа Γ через $\Delta^{\perp}$ обозначим подграф на множестве $\bigcap_{a\in\Delta} a^{\perp}$. Через k_a обозначим валентность вершины a в Γ, т. е. число вершин в $[a]$. Граф Γ называется регулярным валентности k, если $k_a = k$ для любой вершины a из Γ. Для ребра ac графа Γ через λ_{ac} обозначим число вершин в подграфе $[a] \cap [c]$. Граф Γ называется реберно регулярным с параметрами (v, k, λ), если Γ — регулярный граф на v вершинах валентности k, в котором каждое ребро лежит в λ треугольниках, т. е. $\lambda_{ac} = \lambda$ для любого ребра ac графа Γ. Подграф $[a] \cap [b] = M(a, b)$ назовем μ-подграфом, если вершины a, b находятся на расстоянии 2 друг от друга в графе Γ.

Граф Γ на v вершинах валентности k называется μ-регулярным с параметрами (v, k, μ), если $|[a] \cap [b]| = \mu$ для любых двух вершин a, b с условием $d(a, b) = 2$. Если такой граф имеет диаметр 2, то он называется кореберно регулярным.

Пусть α — натуральное число. Полный (вполне несвязный) граф на α вершинах назовем α-кликой (кокликой). Под α-расширением графа Γ будем понимать граф Γ', полученный заменой каждой вершины a из Γ на α-клику (a), причем вершины из (a) и (b) смежны в Γ' тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ.

Граф $K_{m,n}$ — это полный двудольный граф с долями порядка m и n. Граф $K_{1,m}$ называется m-лапой, если $m \geq 3$. Через $\{a; b_1, \ldots, b_m\}$ будем обозначать m-лапу, в которой вершина a смежна с вершинами $b_1, \ldots, b_m$.

Пусть X и Y — множества, причем $|X| = m$ и $|Y| = n$. Напомним, что граф на множестве $X \times Y$ называется $m \times n$-решеткой, если пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ или $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве множества вершин, причем вершины $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны в $T(m)$ тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00009) и РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006).

Если реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) является μ-регулярным графом, то он называется вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ). Вполне регулярный граф диаметра 2 называется сильно регулярным.

Мы называем n-угольником $a_1a_2\ldots a_n$ связный регулярный граф валентности 2 на n вершинах, в котором a_1a_n и a_ia_{i+1} — ребра, $i = 1, \ldots, n-1$. Графом Тэйлора называется вполне регулярный граф диаметра 3, в котором каждая вершина лежит в $a^\perp \cup b^\perp$ для любых двух вершин a и b с $d(a, b) = 3$. Граф икосаэдра — это граф Тэйлора, в котором окрестность любой вершины является пятиугольником. Граф Тервиллигера — это неполный граф, в котором для некоторого фиксированного $\mu > 0$ все μ-подграфы являются кликами из μ вершин. Графом Шлефли называется сильно регулярный граф с параметрами $(27, 16, 10, 8)$, который является дополнительным к точечному графу обобщенного четырехугольника $GQ(2, 4)$.

Ядром подграфа Δ из Γ, содержащего более одной вершины, мы будем называть подграф $K(\Delta) = \Delta^\perp \cap \Delta$. Ядро μ-подграфа $M(a, b)$ будем обозначать через $K(a, b)$. Ядром вершины a называется подграф $K(a) = \{x \in \Gamma \mid x^\perp = a^\perp\}$. Число вершин в $K(a)$ будем обозначать через $\hat{a}$. Вершину a назовем редуцированной, если $K(a)$ состоит из единственной вершины, т. е. $\hat{a} = 1$. Граф Γ называется редуцированным, если все его вершины редуцированы. Пусть $x \equiv y$ для вершин x и y графа Γ тогда и только тогда, когда $x^\perp = y^\perp$. Редукцией графа Γ называется фактор-граф $\bar{\Gamma}$ графа Γ по отношению $\equiv$.

Пара вершин a, b из Γ называется сильной, если μ-подграф $[a] \cap [b]$ не является кликой.

В статье [6] В.В. Кабановым и А.А. Махневым доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть Γ — неполный связный граф без 3-лап, в котором μ-подграфы являются кликами из μ вершин для некоторого фиксированного $\mu > 0$. Тогда либо граф Γ является α-расширением графа икосаэдра, либо в $\Gamma - \Gamma^\perp$ подграф на множестве всех вершин с некликовыми окрестностями либо не содержит вершин, либо является кликой или α-расширением связного графа с $\mu = 1$.*

Теорема 2. *Пусть Γ — связный граф без 3-лап, содержащий 3-коклику, в котором все μ-подграфы имеют одинаковое число вершин. Тогда либо Γ имеет диаметр больше двух и является графом из заключения теоремы 1, либо граф Γ является α-расширением одного из следующих графов:*

(1) *$m \times n$-решетки, $m \geq 3$, $n \geq 3$;*

(2) *треугольного графа $T(m)$, $m \geq 6$;*

(3) *графа Шлефли.*

Таким образом, оказалось, что в графе без 3-лап, содержащем 3-коклику, μ-подграфы могут быть только одного типа, т. е. все кликовые или все некликовые. И.А. Вакулой и В.В. Кабановым в статьях [1, 2] изучены графы без 3-лап с некликовыми μ-подграфами, содержащие 3-коклику. В настоящей статье мы продолжаем исследования, начатые в [3], и доказываем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть Γ — связный граф без 3-лап, содержащий 3-коклику. Пусть также в Γ для любой пары вершин u, v, находящихся на расстоянии 2 друг от друга, подграф $M(u, v) = [u] \cap [v]$ содержит μ вершин, если он не является кликой, и содержит ν вершин в противном случае. Если в Γ имеются подграфы $M(u, v)$ разных типов, то $\nu < \mu$.*

Таким образом, графы из условия теоремы 3 описываются в теоремах 1 и 2.

1. Предварительные результаты

В данном разделе будем предполагать, что граф Γ не содержит 3-лап.

Лемма 1 [3, лемма 1]. *Пусть* $a \in \Gamma$. *Тогда*

(1) *если* b, c — *несмежные вершины из* $[a]$, *то* $a^\perp \subseteq b^\perp \cup c^\perp$;

(2) *для любого ребра* ac *из* Γ *подграф* $[a] - c^\perp$ *является кликой*;

(3) *если* b, c — *несмежные вершины из* $\Gamma - a^\perp$, *то* μ-*подграф* $[b] \cap [c]$ *содержится в* $\Gamma - a^\perp$.

Лемма 2 [3, лемма 2]. *Если* $acbd$ — *четырехугольник графа* Γ, *то*

(1) $a^\perp \cup b^\perp = c^\perp \cup d^\perp$;

(2) *если* ce — *ребро из* $([a] \cap [b]) - d^\perp$, *то* $c^\perp$ *и* $e^\perp$ *совпадают вне* $[d]$, *т. е.* $c^\perp - [d] = e^\perp - [d]$.

Лемма 3 [3, лемма 3]. *Пусть* a, b — *сильная пара вершин из* Γ. *Тогда*

(1) *если окрестность некоторой вершины* x *содержит* μ-*подграф* $[a] \cap [b]$, *то* $x^\perp$ *содержит* $a^\perp$ *или* $b^\perp$;

(2) *если* $x \in [a] - [b]$, *то либо* $[x] \cap [b]$ *содержит не смежную с* a *вершину, либо* $a^\perp$ *содержит* $x^\perp$, *либо* $[x] \cap [b]$ *является кликой из* $[a] \cap [b]$.

Зафиксируем четырехугольник $acbd$ из Γ.

Лемма 4 [3, лемма 4]. *Если* $e \notin a^\perp \cup b^\perp$ *и подграф* $[b] \cap [e]$ *не является кликой, то* $x^\perp = b^\perp$ *для любой не смежной с* a *вершины* $x \in [c] \cap [d]$.

Пусть $\Delta = a^\perp \cup b^\perp$ и $X(\Delta) = \{x \in \Delta \mid x^\perp \subseteq \Delta\}$.

Лемма 5 [3, лемма 6]. *Пусть подграф* $([a] \cap [b]) - d^\perp$ *содержит ребро* cx. *Если* $\Gamma_2(c) - \Delta$ *содержит вершину* f, *то*

(1) *графы* $[f] \cap [c]$ *и* $[f] \cap [x]$ *совпадают*;

(2) *если* $[x] - c^\perp$ *содержит вершину из* $[a] - [b]$, *то* $[f] \cap [x] \subseteq [b]$;

(3) *если* $[f] \cap [c]$ *имеет непустое пересечение с* $[a]$ *и* $[b]$, *то* $c^\perp$ *и* $x^\perp$ *совпадают вне* $[a] \cap [b] \cap [d]$.

Лемма 6 [3, лемма 8]. *Если* Λ — *связный граф, в котором все* μ-*подграфы регулярны одинаковой валентности, не являются кликами и имеют одинаковое число вершин, то* Λ *является регулярным графом.*

Лемма 7 [3, лемма 9]. *Пусть* $a \in \Gamma$, $b, e \in \Gamma_2(a)$ *и вершина* c *из* $[a] \cap ([b] - e^\perp)$ *смежна с вершиной* f *из* $[a] \cap ([e] - b^\perp)$. *Тогда* $[c]$ *и* $[f]$ *совпадают на* $a^\perp - ([b] \cup [e])$.

Лемма 8 [3, лемма 11]. *Пусть* $[a] \cap [e]$ *содержит несмежные вершины* f, g. *Тогда*

(1) *каждая вершина из* $[a] - ([b] \cup K(a))$ *смежна точно с одной вершиной в каждом из множеств* $\{c, d\}$ *и* $\{f, g\}$ (*в частности, без ограничения общности, можно считать, что* cf, dg — *ребра*);

(2) *если* μ-*подграфы* $[c] \cap [g]$ *и* $[f] \cap [d]$ *имеют непустые пересечения с* $[b] \cap [e]$, *то любая вершина из* $[c] \cap [g] \cap [b] \cap [e]$ *не смежна с вершинами из* $[f] \cap [d] \cap [b] \cap [e]$.

Лемма 9 [3, лемма 15]. *Пусть* a, b — *вершины из* Γ, *находящиеся на расстоянии* 2, $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, $x \in K([a] \cap [e])$, y — *не смежная с* x *вершина из* $K([b] \cap [e])$. *Тогда*

(1) *если* $d(x, b) = d(y, a) = 2$, *то либо подграф* $[x] \cap [y]$ *содержит некоторую вершину из* $[a] \cap [b]$, *либо* $M(a, y)$ *и* $M(x, b)$ *не являются кликами, а* $M(x, y)$ — *клика*;

(2) *если* a, b — *сильная пара, то выполняется заключение утверждения* (1).

Лемма 10 [3, лемма 17]. *Пусть граф* Γ *содержит четырехугольник* $acbd$, $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$ *и* μ-*подграф* $[b] \cap [e]$ *является кликой. Тогда существует пара несмежных вершин* $x \in K([a] \cap [e])$ *и* $y \in [b] \cap [e]$ *такая, что подграф* $[x] \cap [y]$ *содержит некоторую вершину* z *из* $[a] \cap [b]$. *В частности, пары* x, y *и* e, z *являются сильными.*

Лемма 11 [3, лемма 19]. *Граф* Γ *имеет диаметр* 2.

Лемма 12 [3, лемма 20]. *Если граф* Γ *является контрпримером к теореме* 3 *с наименьшим числом вершин и содержит четырехугольник* $acbd$, *то граф* Γ *не содержит* 4-*коклик.*

2. Графы без 3-лап с ограничениями на их μ-подграфы

До конца статьи будем предполагать, что граф Γ является контрпримером к теореме 3 с наименьшим числом вершин и содержит четырехугольник $acbd$.

Лемма 13. *Если $e \in \Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b)$, то граф $M(a,e)$ имеет непустые пересечения с $[c]$ и $[d]$.*

Доказательство. Положим $\Delta = M(a,e) \cup M(b,e)$. Заметим, что по п. (1) леммы 1 имеем $c^\perp \subseteq a^\perp \cup b^\perp$, следовательно, $M(c,e) \subseteq a^\perp \cup b^\perp$ и $M(c,e) \subseteq e^\perp$, значит, $M(c,e) \subseteq \Delta$. Аналогично можно показать, что $M(d,e) \subseteq \Delta$. С другой стороны, из симметрии четырехугольника $abcd$ получаем, что $\Delta \subseteq M(c,e) \cup M(d,e)$, следовательно, $\Delta = M(c,e) \cup M(d,e)$. Если $M(a,e)$ не является кликой, то, не ограничивая общности рассуждений, можно положить, что для несмежных вершин x_1, x_2 из $M(a,e)$ вершина c смежна, например, с x_1, а вершина d смежна с x_2.

По п. (2) леммы 3 подграфы $[a] \cap \Delta$ и $\Delta - [a]$ являются кликами. Если $f \in [a] \cap \Delta$, то по лемме 10 в $\Delta - [a] = [b] \cap [e]$ найдется не смежная с f вершина u такая, что $[f] \cap [u]$ содержит некоторую вершину z из $[a] \cap [b]$.

Так как подграф $[f] \cap [u]$ содержит вершину z из $[a] \cap [b]$, то по п. (2) леммы 2 вершина z лежит в $[c] \cap [d]$. Так как $[a] \subset c^\perp \cup d^\perp$, то по лемме 7 подграф $a^\perp - ([b] \cup [e])$ содержится в $[x]$ для любой вершины x из $([a] \cap \Delta) \cup \{z, c\}$. Симметрично, подграф $b^\perp - ([a] \cup [e])$ содержится в $[y]$ для любой вершины y из $([b] \cap \Delta) \cup \{z, d\}$.

По лемме 12 подграф $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$ является кликой и, следовательно, $\Gamma - e^\perp$ содержится в $a^\perp \cup b^\perp$. Подграф $[a] \cap [e]$ лежит в $(a^\perp - [b])^\perp$, подграф $[b] \cap [e]$ лежит в $(b^\perp - [a])^\perp$, ни одна вершина из $[a] \cap [b]$ не смежна ни с одной вершиной из $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$, и ни одна вершина из $\Gamma - e^\perp$ не смежна ни с одной вершиной из $e^\perp - ([a] \cup [b])$. Значит, $e^\perp = K(e) \cup \Delta$.

Теперь для любой вершины x из $[a] \cap \Delta$ имеем $x^\perp = K(e) \cup (a^\perp - [b]) \cup ([x] \cap [b])$, а для любой вершины y из $[b] \cap \Delta$ имеем $y^\perp = K(e) \cup (b^\perp - [a]) \cup ([y] \cap [a])$. Отсюда $k_x = k_a + \hat{e}$ и $k_y = k_b + \hat{e}$.

Пусть $v = |\Gamma|$. Тогда, с одной стороны, $v = 2 + k_a + k_b - \mu + \hat{e}$. С другой стороны, $|z^\perp \cup e^\perp| = 2 + k_f + k_u - \mu = 2 + (k_a + \hat{e}) + (k_b + \hat{e}) - \mu > v$, противоречие. Лемма доказана.

Для вершин x и y, находящихся на расстоянии 2 в Γ, положим $\Delta(x,y) = K(x) \cup K(y) \cup ([x] \cap [y])$. Пусть Δ — подграф из Γ такой, что $K(x) \subseteq \Delta$ для любой вершины $x \in \Delta$, а $\bar{\Delta}$ — фактор-граф, полученный из Δ так, что $\bar{x} = K(x)$ для $x \in \Delta$. Тогда $\bar{\Delta}$ назовем ядерным расширением графа $\bar{\Delta}$. Через $\mathcal{K}$ обозначим класс графов, состоящий из 2-коклики и полных многодольных графов с долями порядка 2.

Лемма 14. *Пусть $e \in \Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$. Тогда*
(1) *если xy — ребро из $[a] \cap [b] - ([a] \cap [b])^\perp$ и $[x] \cap [e] = [y] \cap [e]$, то $x^\perp = y^\perp$;*
(2) *граф $\Delta(a,b) - ([a] \cap [b])^\perp$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$;*
(3) *$\Delta(a,b) = \Delta(c,d)$ и $\hat{c} + \hat{d} = \hat{a} + \hat{b}$ для любых несмежных вершин c и d из $[a] \cap [b]$.*

Доказательство. Пусть выполнены условия п. (1) леммы. Для $w \in [x] \cap [e]$ получим равенство $[w] \cap x^\perp = [w] \cap y^\perp$, в противном случае окрестность вершины w содержит 3-коклику, например, вершины e, y и вершину из $[x] - [y]$. По лемме 13 подграф $[x] \cap [e]$ имеет непустые пересечения с $[a]$ и $[b]$. Отсюда, если $x^\perp \neq y^\perp$, то существует вершина u из $[x] - y^\perp$, которая не смежна ни с одной вершиной из $[x] \cap [e]$. Понятно, что $u \in [a] \cap [b]$, так как если $u \in [a] - [b]$, то $\{x; u, w, b\}$ — 3-лапа для некоторой вершины w из $([x] \cap [e]) - [b]$. Так как вершина u не смежна с вершиной y, то $M(u,e) \cap M(y,e) = \varnothing$ и $M(a,e) \cup M(b,e) = M(x,e) \cup M(u,e)$.

Пусть вершина z — не смежная с x вершина из $[a] \cap [b]$. Так как z не смежна с x, то $M(z,e) \cap M(x,e) = \varnothing$ и $M(a,e) \cup M(b,e) = M(x,e) \cap M(z,e)$. Отсюда $M(u,e) = M(z,e)$, значит, вершина u смежна с вершиной z. Пусть вершина z смежна с вершиной y. Тогда по лемме 13 подграф $M(y,e)$ имеет непустые пересечения с $[x]$ и $[z]$, что противоречит условию

$[x]\cap[e]=[y]\cap[e]$. Поэтому вершина z не смежна с y, иначе по п. (3) леммы 5 графы $x^\perp$ и $y^\perp$ совпадают вне $[a]\cap[b]\cap[z]$. Итак, $x^\perp=y^\perp$. Покажем, что $x^\perp$ и $y^\perp$ совпадают в $[a]\cap[b]\cap[z]$. Так как $M(x,z)$ и $M(y,z)$ содержат несмежные вершины a и b, то число вершин в каждом из этих графов равно μ. Так как $u\in M(x,z)-M(y,z)$, то существует вершина h такая, что $h\in M(y,z)-M(x,z)$. Если вершина h смежна с вершиной u, то мы получим четырехугольник $xuhy$, что противоречит лемме 13. Поэтому вершина h не смежна с u, и мы имеем пятиугольник $xuzhy$. Но тогда $[h]\cap[e]=[x]\cap[e]$, что противоречит выбору вершины h. Итак, $x^\perp=y^\perp$, и утверждение (1) леммы доказано.

Пусть $x\in[a]\cap[b]-([a]\cap[b])^\perp$ и yz — ребро из $([a]\cap[b])-x^\perp$. По п. (2) леммы 2 $[y]\cap[e]=[z]\cap[e]$, и из (1) следует, что $z^\perp=y^\perp$. Это влечет утверждение (2).

Из (2) следует равенство $\Delta(a,b)-([a]\cap[b])^\perp=\Delta(c,d)-([c]\cap[d])^\perp$ для любых несмежных вершин c,d из $[a]\cap[b]$. Пусть $z\in([a]\cap[b])^\perp-([c]\cap[d])^\perp$ для некоторой пары несмежных вершин c,d из $[a]\cap[b]$. Тогда без ограничения общности рассуждений найдется вершина x из $[a]-(b^\perp\cup e^\perp)$, которая смежна с c,d и не смежна с z. Из равенства $|[a]\cap[b]|=|[x]\cap[b]|$ следует, что в $[b]-(a^\perp\cup e^\perp)$ есть вершина y, смежная с x. Без потери общности рассуждений можно считать, что y смежна с вершиной c. Из равенств $a^\perp\cup b^\perp=c^\perp\cup d^\perp$ и $c^\perp\cup d^\perp=x^\perp\cup z^\perp$ следует, что вершина y смежна с вершиной z. Если вершины y и d смежны, то yz — ребро из μ-подграфа $[c]\cap[d]$ вне $x^\perp$. По (2) $y^\perp=z^\perp$. Противоречие, так как y не смежна с вершиной a. Если вершины y и d несмежны, то yc — ребро из μ-подграфа $[x]\cap[b]$ вне $d^\perp$. По (2) $y^\perp=c^\perp$, что невозможно. Значит, $\Delta(a,b)=\Delta(c,d)$. Теперь $|\Delta(a,b)|=\hat a+\hat b+\mu$ и $|\Delta(c,d)|=\hat c+\hat d+\mu$, откуда следует (3). Лемма доказана.

Для подграфа χ из Γ вершину x из $\Gamma-\chi$, смежную точно с α вершинами из χ, назовем α-точкой для χ.

Лемма 15. *Пусть f,g — несмежные вершины из $[a]\cap[e]$ и cf, dg — ребра. Тогда*

(1) *если $[d]\cap[f]$ содержит γ вершин, а $[c]\cap[g]$ содержит δ вершин из $[b]\cap[e]$, то $\gamma+\delta=\hat b+\hat e$;*

(2) *либо $[c]\cap[g]\cap[b]\cap[e]=K(u)$ и $[d]\cap[f]\cap[b]\cap[e]=K(w)$ для некоторых несмежных вершин $u,w\in[b]\cap[e]$, либо $[c]\cap[g]\cap[b]\cap[e]=\varnothing$ и $[d]\cap[f]\cap[b]\cap[e]=K([b]\cap[e])$, либо $[d]\cap[f]\cap[b]\cap[e]=\varnothing$ и $[c]\cap[g]\cap[b]\cap[e]=K([b]\cap[e])$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подграфы $[c]\cap[g]$ и $[d]\cap[f]$. Если x — вершина из $[c]\cap[g]$ такая, что $x^\perp\neq a^\perp$ и $x\in[a]\cap([b]\cap[e])$, то $\{x,d,f\}$ является 3-кокликой из $[a]$, что невозможно. Значит, $[a]\cap[c]\cap[g]$ содержится в $([a]\cap[b])\cup([a]\cap[e])$. Аналогично, $[a]\cap[d]\cap[f]$ содержится в $([a]\cap[b])\cup([a]\cap[e])$.

Пусть вершина c является α-точкой для $[b]\cap[e]$, а f является β-точкой для $[b]\cap[e]$. Поскольку $|M(c,e)|+|M(d,e)|=|M(a,e)|+|M(b,e)|=\mu+|M(b,e)|$, то для пары c,d имеем следующее: если $M(b,e)$ — кликовый подграф, то один из графов $M(c,e)$ или $M(d,e)$ также кликовый. Аналогично для $M(b,f)$ и $M(b,g)$.

Найдем число вершин в подграфе $M(d,f)$. По п. (2) леммы 14 любой некликовый μ-граф является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Отсюда $M(d,f)$ содержит все вершины из $M(b,f)$, кроме β вершин из $M(b,e)$ и вершин из $K(c)$. Аналогично, $M(d,f)$ содержит все вершины из $M(d,e)$, кроме $|M(b,e)|-\alpha$ вершин из $M(b,e)$ и вершин из $K(g)$. Таким образом, $|M(d,f)|=\hat a+\gamma+|M(b,f)|-\beta-\hat c+|M(d,e)|-|M(b,e)|+\alpha-\hat g$.

Симметрично, $|M(c,g)|=\hat a+\delta+\mu-|M(b,f)|+\beta-\hat d+\mu-|M(d,e)|+|M(b,e)|-\alpha-\hat f$. Учитывая п. (3) леммы 14 и сложив полученные равенства, имеем $|M(d,f)|+|M(c,g)|=2\hat a+\gamma+\delta+2\mu-\hat c-\hat d-\hat f-\hat g=2\hat a+\gamma+\delta+2\mu-\hat a-\hat b-\hat a-\hat e=\gamma+\delta+2\mu-\hat b-\hat e$.

Рассмотрим все возможные случаи для μ-подграфов $M(c,e),M(d,e),M(b,e),M(b,f)$ и $M(b,g)$.

С л у ч а й 1. $|M(c,e)|=\nu,|M(d,e)|=\mu,|M(b,e)|=\nu$, $|M(b,f)|=\nu,|M(b,g)|=\mu$, $|[d]\cap M(a,e)|=\mu-\nu+\alpha$, $|[g]\cap M(a,b)|=\mu-\nu+\beta$. Поскольку $M(b,f)$, $M(c,e)$ — клики, то $\gamma=0$ и $\delta=0$, и получаем $|M(d,f)|+|M(c,g)|=2\mu-\hat b-\hat e<2\mu$. Но подграфы $M(d,f)$ и $M(c,g)$ непусты, противоречие. Значит, рассматриваемый случай невозможен.

С л у ч а й 2. $M(d,e), M(b,e)$ и $M(b,g)$— клики, $M(c,e)$ и $M(b,f)$ не являются кликами, а $|[d]\cap M(a,e)|=\alpha$, $|[g]\cap M(a,b)|=\beta$. По п. (2) леммы 8 всякая вершина из $M(c,g)\cap M(b,e)$ не смежна с вершинами из $M(d,f)\cap M(b,e)$. Но $M(b,e)$ — клика. Значит, либо $\gamma=0$ и $\delta\neq 0$, либо $\delta=0$ и $\gamma\neq 0$. Пусть $\gamma=0$ и $\delta\neq 0$. Тогда $M(c,g)$ — некликовый подграф и $\delta=\alpha-\beta$. Ввиду равенств $\hat{a}+\hat{e}=\hat{f}+\hat{g}$ и $|[g]\cap M(a,b)|=\beta=|[f]\cap M(b,e)|$ имеем $\hat{a}=\hat{f}$. Но тогда $\mu=|M(c,g)|=\hat{a}+\delta+\beta-\hat{d}+\mu-\alpha-\hat{f}=\mu-\hat{d}<\mu$, противоречие.

Пусть теперь $\delta=0$ и, следовательно, $\gamma\neq 0$. Значит, подграф $M(d,f)$ некликовый и $\gamma=\beta-\alpha$. Ввиду равенств $\hat{a}+\hat{b}=\hat{c}+\hat{d}$ и $|[d]\cap M(a,e)|=\alpha=|[c]\cap M(b,e)|$ имеем $\hat{a}=\hat{c}$. Но тогда $\mu=|M(d,f))|=\hat{a}+\gamma+\mu-\beta-\hat{c}+\alpha-\hat{g}=\mu-\hat{g}<\mu$. Получили противоречие, и поэтому рассматриваемый случай тоже невозможен.

С л у ч а й 3. $M(d,e), M(b,e)$ и $M(b,f)$ — клики, $M(c,e)$ и $M(b,g)$ не являются кликами, а $|[d]\cap M(a,e)|=\alpha$, $|[g]\cap M(a,b)|=\mu-\nu+\beta$. Обозначим через d_j представителей ядер из $M(a,b)$, смежных с g, а через c_j — представителей ядер, смежных с f, где $j\in\{1,\ldots,m\}$. Пусть $c=c_1$ и $d=d_1$. Аналогично, обозначим через f_i, g_i представителей ядер в долях μ-подграфа $M(a,e)$, где $i\in\{1,\ldots,k\}$, причем $f=f_1$ и $g=g_1$. Пусть t — вершина из $M(c,f)\cap M(b,e)$, p — вершина из $M(d,g)\cap M(b,e)$ и s — вершина из $M(c,g)\cap M(b,e)$, x и x' — вершины из $K(a,b)$, смежные с f и g соответственно, а y и y' — вершины из $K(a,e)$, смежные с c и d соответственно. В $M(c,g)\cap M(b,e)$ всего $\delta=\alpha-\beta$ вершин. Заметим, что $\hat{c_j}=\hat{a}=\hat{g_i}$ и $\hat{d_j}=\hat{b}=\hat{e}=\hat{f_i}$. Кроме того, $\gamma=0$, так как $M(d,e)$ — клика, а $M(c,g)$ не является кликой, поскольку вершины a и s несмежны. Значит, $|M(d,f)|=\delta+\mu-\hat{b}-\hat{e}$. Если μ-подграф $M(d,f)$ некликовый, то $\delta=\hat{b}+\hat{e}$, и значит, лемма верна. Пусть теперь $M(d,f)$ — клика. Тогда $\delta=\nu-\mu+\hat{b}+\hat{e}$. Из равенства $\nu=|M(d,f)|=\hat{a}+\nu-\beta-\hat{c}+\alpha-\hat{g}$ получаем $\hat{a}=\alpha-\beta$. Теперь уточним смежности для имеющихся вершин. Поскольку мы предположили, что $M(d,f)$ — клика, то вершина a смежна с вершинами x, y', $c_2,\ldots,c_m$, $g_2,\ldots,g_k$. Вершина s смежна с вершинами c_1, g_1, y, $f_2,\ldots,f_k$ (иначе существует 3-лапа $\{g_1;d_1,s,q\}$, где $q\in\{y,f_2,\ldots,f_k\}$) и с вершинами $x',d_2,\ldots,d_m$ (иначе существует 3-лапа $\{c_1;f_1,s,p\}$, где $p\in\{x',d_2,\ldots,d_m\}$). Если вершина t смежна с некоторой вершиной из $[c]\cap M(a,e)$(без ограничения общности с f_2), то вершина t смежна с вершинами $y',g_3,\ldots,g_k$, иначе существует 3-лапа $\{f_2;d_2,t,l\}$, где $l\in\{y',g_3,\ldots,g_k\}$. Пусть $m,k\geq 2$. Рассмотрим подграф $M(g_1,t)$. Он не является кликой, так как вершина s не смежна с вершинами $g_2,\ldots,g_k$, причем $M(g_1,t)\cap M(a,b)=\varnothing$. Поэтому

$$\mu=|M(g_1,t)|=\alpha-\beta+\nu-\alpha+\hat{e}+|M(g_1,t)\cap M(a,e)|$$

$$=\nu-\beta+\hat{e}+\begin{cases}\alpha-\hat{g}_1-\hat{g}_2+\hat{f}_2\,, & \text{если } t \text{ смежна с } f_2\\ \alpha-\hat{g}_1\,, & \text{если } t \text{ не смежна с } f_2\end{cases}$$

$$=\ \nu-\beta+\hat{e}+\alpha-2\hat{a}+\hat{e}\nu-\beta+\hat{e}+\alpha-2\hat{a}+\hat{a}\ =\begin{cases}\mu\,,\\ \nu+\hat{e}\,.\end{cases}$$

Значит, вершина t смежна с вершинами f_2, $y',g_3,\ldots,g_k$.

Аналогично, ввиду симметрии для вершины p справедливо следующее: если вершина p смежна с вершиной d_2, то p смежна с вершинами $x,c_3,\ldots,c_m$. Рассматривая некликовый подграф $M(c_1,p)$, получаем, что вершина p смежна с вершинами $d_2,x,c_3,\ldots,c_m$.

Так как вершины a и t несмежны, то $\mu=|M(c_2,f_2)|=\hat{a}+\beta+\alpha-\hat{g_1}-\hat{g_2}+\hat{f_1}+\mu-\nu+\beta-\hat{d_1}-\hat{d_2}+\hat{c_1}=2\beta+\alpha+\mu-\nu-\hat{b}=3\beta+\hat{b}$. С другой стороны, вершина a не смежна с вершиной p и $\mu=|M(d_2,g_2)|=\hat{a}+\nu-\alpha+\nu-\beta-\hat{c_1}-\hat{c_2}+\hat{d_1}+\mu-\alpha-\hat{f_1}-\hat{f_2}+\hat{g_1}=3(\mu-\beta)-5\hat{b}$. Приравнивая, получаем $\beta=\hat{b}$. Поскольку $|[d]\cap M(a,e)|=\alpha$, то $\alpha=|[d]\cap K(a,e)|+\hat{g_1}+\ldots+\hat{g_k}=|[d]\cap K(a,e)|+k\cdot\hat{a}$. Следовательно, $\alpha-\beta=|[d]\cap K(a,e)|+k\cdot\hat{a}-\hat{b}$. Но $\alpha-\beta=\hat{a}$, $0=|[d]\cap K(a,e)|+(k-2)\hat{a}+(\hat{a}-\hat{b})$. Если $k\geq 2$, то первые два слагаемых здесь неотрицательны, а $\hat{a}-\hat{b}=\nu-\mu+\hat{e}>0$, противоречие.

Отсюда $k=1$ и $|M(a,t)|=\nu-\beta+\alpha-\hat{g}+\hat{f}=\nu+\hat{f}>\nu$, противоречие. Значит, $M(d,f)$ не может быть кликой, и в этом случае лемма верна.

Случай, когда $M(c,e), M(b,e)$ и $M(b,g)$ — клики, $M(d,e), M(b,f)$ не являются кликами, а $|[d] \cap M(a,e)| = \mu - \nu + \alpha$, $|[g] \cap M(a,b)| = \beta$, рассматривается аналогично ввиду симметричности.

С л у ч а й 4. $M(d,e), M(b,e), M(c,e), M(b,f), M(b,g)$ не являются кликами, $|[d] \cap M(a,e)| = \alpha$, $|[g] \cap M(a,b)| = \beta$ при $\gamma = 0$ или $\delta = 0$. Имеем $\hat{a} = \hat{c_j}, \hat{a} = \hat{f_i}, \hat{b} = \hat{d_j}, \hat{e} = \hat{g_i}$. Пусть $\gamma = 0$, и значит, $\delta \neq 0$, $|M(c,g)| = \mu$. Получаем $|M(d,f)| = \delta + \mu - \hat{b} - \hat{e}$. Если $|M(d,f)| = \mu$, то $\delta = \hat{b} + \hat{e}$ и лемма верна. Пусть теперь $|M(d,f)| = \nu$. Тогда $\alpha - \beta = \delta = \nu - \mu + \hat{b} + \hat{e}$. Рассмотрим 3-коклику $\{d,f,s\}$. Вершина b не смежна с g, и поэтому $|M(d,s)| = \mu$, а $M(f,s)$ — некликовый подграф, так как вершины e и c несмежны. Получаем $\hat{d} + \hat{f} + \hat{s} + \nu + 2\mu = \hat{a} + \hat{b} + \hat{e} + 3\mu$ и $\hat{s} = \mu - \nu + \hat{e}$. Но вершина s из $M(c,g) \cap M(b,e)$ была произвольной, а таких $\alpha - \beta = \nu - \mu + \hat{b} + \hat{e}$ штук. Значит, $\hat{s} \geq \nu - \mu + \hat{b} + \hat{e}$ и, следовательно, $0 \geq 2(\nu - \mu) + \hat{b}$. Получили противоречие, так как первое слагаемое в правой части неравенства неотрицательно, а второе — строго положительно. Поэтому подграф $M(d,f)$ не может быть кликой, и лемма верна. Случай $\delta = 0$ рассматривается аналогично ввиду симметрии. Лемма доказана.

3. Исключительные тройки в графах без 3-лап с ограничениями на их μ-подграфы

Граф Γ — минимальный контрпример к теореме 3, и ввиду лемм 11 и 12 он имеет диаметр 2 и не содержит 4-коклик. Далее мы хотим доказать, что $\Gamma = a^{\perp} \cup b^{\perp}$ для любой сильной пары вершин a, b из Γ. Предположим противное.

Лемма 16. *Пусть $\{x,y,z\}$ является 3-кокликой из Γ, u — произвольная вершина из $K([x] \cap [z])$, а w — произвольная вершина из $K([y] \cap [z])$. Если вершина u не смежна с вершиной w, то $|M(x,y)| = \nu$ и выполнено одно из следующих условий*:

(a) $|M(x,w)| = \mu, |M(u,y)| = \mu, |M(u,w)| = \mu$;

(b) $M(u,w)$ — клика, а один из μ-подграфов $M(x,w), M(u,y)$ не является кликой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вершина u не смежна с w. Положим $|[u] \cap M(y,z)| = \alpha$, $|[w] \cap M(x,z)| = \beta$ и $|M(x,y) \cap M(u,w)| = \gamma$. Тогда $|M(u,w)| = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, где $\delta = |M(u,w) - (x^{\perp} \cup y^{\perp})|$ и $\delta \geq 1$. Рассмотрим возможные варианты мощностей вышеупомянутых μ-подграфов и подсчитаем число вершин в подграфах $M(x,y)$ и $M(u,w)$.

С л у ч а й 1. Если $|M(x,y)| = \mu \geq (\mu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $\delta = 0$, противоречие.

С л у ч а й 2. Если $|M(x,y)| = \mu \geq (\nu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $2\mu \geq 2\nu + \delta$, что противоречит условию $\nu \geq \mu$.

С л у ч а й 3. Если $|M(x,y)| = \mu \geq (\nu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $\mu \geq \nu + \delta$, что противоречит условию $\nu \geq \mu$.

С л у ч а й 4. Если $|M(x,y)| = \mu \geq (\nu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $\mu \geq \nu + \delta$, что противоречит условию $\nu \geq \mu$.

С л у ч а й 5. Если $|M(x,y)| = \mu \geq (\nu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $\delta = 0$, противоречие.

С л у ч а й 6. Если $|M(x,y)| = \mu \geq (\mu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $\mu \geq \nu + \delta$, что противоречит условию $\nu \geq \mu$.

С л у ч а й 7. Если $|M(x,y)| = \mu \geq (\mu - \alpha) + (\nu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $\delta = 0$, противоречие.

С л у ч а й 8. Если $|M(x,y)| = \mu \geq (\mu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \nu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $\mu \geq \alpha + \beta + \gamma$ и $\nu = \mu + \delta$.

С л у ч а й 9. Если $|M(x,y)| = \nu \geq (\nu - \alpha) + (\mu - \beta) - \gamma$ и $|M(u,w)| = \mu = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, то $\delta = 0$, противоречие.

С л у ч а й 10. Если $|M(x,y)| = \nu \geq (\nu-\alpha)+(\mu-\beta)-\gamma$ и $|M(u,w)| = \mu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, то $\delta = 0$, противоречие.

С л у ч а й 11. Если $|M(x,y)| = \nu \geq (\nu-\alpha)+(\nu-\beta)-\gamma$ и $|M(u,w)| = \mu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, то $\mu \geq \nu+\delta$, что противоречит условию $\nu \geq \mu$.

С л у ч а й 12. Если $|M(x,y)| = \nu \geq (\nu-\alpha)+(\nu-\beta)-\gamma$ и $|M(u,w)| = \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, то $\delta = 0$, противоречие.

С л у ч а й 13. Если $|M(x,y)| = \nu \geq (\mu-\alpha)+(\mu-\beta)-\gamma$ и $|M(u,w)| = \mu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, то $\nu \geq \mu+\delta$.

С л у ч а й 14. Если $|M(x,y)| = \nu \geq (\mu-\alpha)+(\mu-\beta)-\gamma$ и $|M(u,w)| = \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, то $2\nu \geq 2\mu+\delta$.

С л у ч а й 15. Если $|M(x,y)| = \nu \geq (\nu-\alpha)+(\mu-\beta)-\gamma$ и $|M(u,w)| = \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, то $\nu \geq \mu+\delta$.

С л у ч а й 16. Если $|M(x,y)| = \nu \geq (\mu-\alpha)+(\nu-\beta)-\gamma$ и $|M(u,w)| = \nu = \alpha+\beta+\gamma+\delta$, то $\nu \geq \mu+\delta$.

Таким образом, в случаях 1–7 и 9–12 пришли к противоречию. Значит, $M(x,y) \not\subseteq u^\perp \cup w^\perp$. Поэтому в $M(x,y) \setminus (u^\perp \cup w^\perp)$ существует вершина f.

Итак, в случаях 1–7 и 9–12 вершина u смежна с w, а в случаях 8, 13–16 они несмежны.

Рассмотрим теперь случаи 8 и 13–16.

С л у ч а й 8. Пусть существует пара несмежных вершин u, w таких, что подграфы $M(x,y)$, $M(x,w)$, $M(u,y)$ некликовые, а $M(u,w)$ — кликовый подграф. Аналогично лемме 10 среди всех пар, удовлетворяющих условию случая 8, выберем такую, что вершина u смежна с наибольшим числом вершин в подграфе $[y] \cap [z]$, т. е. $|[u] \cap M(y,z)| = \max_{u' \in K(x,z)} \{|[u'] \cap M(y,z)|\}$.

Заметим, что подграфы $M(x,z)$ и $M(y,z)$ не могут быть кликовыми, так как иначе $\mu \in \{\alpha, \beta\}$, что не так.

Пусть теперь в подграфе $M(x,y)$ существует вершина t, не смежная с вершинами u и w. Тогда пересечения $[t] \cap [u] \cap M(y,z)$ и $[t] \cap [w] \cap M(x,z)$ пусты. Поскольку число вершин в подграфе $M(x,y)$ равно μ, то $\mu = \mu-\alpha+\mu-\beta+|M(x,y) \setminus (u^\perp \cup w^\perp)|$ и $|M(t,z)| \leq (\mu-\alpha-1)+(\mu-\beta-1) = \mu-\alpha+\mu-\beta-2 = \mu-|M(x,y) \setminus (u^\perp \cup w^\perp)|-2 < \mu$. Значит, вершина t находится на расстоянии, большем двух от вершины z в графе Γ, что противоречит лемме 11. Таким образом, в подграфе $M(x,y)$ не существует вершин, не смежных с u и w. Получаем $\mu = \alpha+\beta, \nu = \mu+\hat{z}$. Подграф $M(x,y)$ некликовый, поэтому существуют несмежные вершины c и d такие, что $c \in [u]$ и $d \in [w]$.

Обозначим через h_j представителей ядер из $M(y,z)$, смежных с u, а через s_j — представителей ядер, не смежных с u, где $j \in \{1,\dots,m\}$. Аналогично, обозначим через f_i, g_i представителей ядер в долях μ-подграфа $M(x,z)$, где $i \in \{1,\dots,k\}$, причем вершины f_i смежны с w. Поскольку $M(u,w)$ — клика, то f_i смежны с h_j и, значит, f_i не смежны с s_j. Пусть для определенности $f_1,\dots,f_l$ и $g_{l+1},\dots,g_k$ смежны с вершиной c. Для этих вершин выполняется следующее: либо $M(c,w) \cap M(x,z) \neq \varnothing$ влечет $M(d,u) \cap M(y,z) = \varnothing$ (иначе получим 3-лапу $w; f_1, d, s_j$ для некоторой вершины s_j из $[c]$); либо $M(c,w) \cap M(x,z) = \varnothing$. Получаем две возможности: $M(c,w) \cap M(x,z) \neq \varnothing$ или $M(c,w) \cap M(x,z) = \varnothing$, которые рассматриваются аналогично. Поэтому будем предполагать, что $M(c,w) \cap M(x,z) \neq \varnothing$. Тогда все вершины h_j смежны с c. По лемме 15 имеем $m = 1$, $k = l+1$ и $|[d] \cap K(y,z)| = \hat{y}+\hat{z}$. Заметим, что $\hat{x} = \hat{c}$ и $\hat{y} = \hat{d}$. Поскольку вершина y не смежна с f_1, то $\mu = |M(c,w)| = \beta-\hat{f_k}+\hat{h_1}+|[c] \cap K(y,z)|+\hat{y}+\alpha-\hat{d} = \mu+|[c] \cap K(y,z)|-\hat{f_k}+\hat{h_1}$ и, следовательно, $\hat{f_k} = \hat{h_1}+|[c] \cap K(y,z)| = \alpha+|[c] \cap K(y,z)|$. Выпишем некоторые соотношения для α, β и μ:

$\mu = |[c] \cap K(y,z)| + 2(\hat{y}+\hat{z})$;

$\beta = \hat{f_1}+\ldots+\hat{f_k} = |[c] \cap K(x,z)| + \hat{f_1}+\ldots+\widehat{f_{k-1}}+\hat{g_k}$, т. е. $\hat{f_k} = |[c] \cap K(x,z)| + \hat{g_k}$;

$\alpha = \hat{h_1} = |[c] \cap K(x,z)| + |[d] \cap K(x,z)| + \hat{g_1}+\ldots+\hat{g_k} = |[d] \cap K(x,z)| + \hat{g_1}+\ldots+\widehat{g_{k-1}}+\hat{f_k}$.

Но тогда $|[c] \cap K(x,z)| + |[d] \cap K(x,z)| + \hat{g_1}+\ldots+\hat{g_k} = \alpha = \hat{f_k} - |[c] \cap K(y,z)| = \hat{g_k} + |[c] \cap K(x,z)| - |[c] \cap K(y,z)|$, и получаем $|[d] \cap K(x,z)| + \hat{g_1}+\ldots+\widehat{g_{k-1}} = -|[c] \cap K(y,z)| \leq 0$.

Следовательно, $|[c] \cap K(y,z)| = 0 = |[d] \cap K(x,z)| = \hat{g_1} = \ldots = \hat{g_{k-1}}$, и, значит, $\mu = 2(\hat{y}+\hat{z})$, $\beta = \hat{f_k} = \hat{h_1} = \alpha$, $\mu = 2\alpha$. Отсюда $\hat{y}+\hat{z} = \alpha = \hat{h_1}$, но $\hat{h_1}+\hat{s_1} = \hat{y}+\hat{z}$ по лемме 15. Но тогда $\hat{s_1} = 0$, противоречие. Лемма доказана.

Упорядоченную тройку (x,y,z) вершин из Γ назовем особой, если $\{x,y\}$ — сильная пара и $z \notin x^\perp \cup y^\perp$. Для 3-коклики $\{x,y,z\}$ из Γ положим $\Sigma(x,y,z) = \Delta(x,y) \cup \Delta(x,z) \cup \Delta(y,z)$, где $\Delta(u,w) = K(u) \cup K(w) \cup ([u] \cap [w])$ для $u,w \in \{x,y,z\}$. Особую тройку (x,y,z) назовем исключительной,если $\Gamma = \Sigma(x,y,z)$. В леммах 17–21 предполагается, что (a,b,e) — исключительная тройка из Γ и c,d — несмежные вершины из $[a] \cap [b]$. Очевидно, что (b,a,e) является исключительной тройкой из Γ.

Лемма 17. *Пусть (x,y,z) — особая тройка. Если произвольная вершина u из $K(x,z)$ смежна с любой вершиной w из $K(y,z)$, то ни один из μ-подграфов $[x]\cap[z]$, $[y]\cap[z]$ не является кликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (x,y,z) — особая тройка в Γ, f и g — несмежные вершины из $M(x,y)$ и один из μ-подграфов $M(x,z)$, $M(y,z)$, например, $M(x,z)$ является кликой, а подграф $K(y,z)$ непуст. В этом случае по лемме 16 вершина w из $K(y,z)$ смежна с каждой вершиной из $M(x,z)$ и с одной из вершин f или g. Но тогда $|M(w,x)| > \nu$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 18. *Ни один из μ-подграфов $M(a,b)$, $M(a,e)$, $M(b,e)$ не является кликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подграф $M(a,b)$ — не клика, в нем содержатся несмежные вершины c и d. Предположим противное, пусть $M(a,e)$ — клика. Тогда по лемме 17, примененной к тройке (a,b,e), $K(a,b) = \varnothing$ и $K(b,e) = \varnothing$, а каждый из подграфов $M(a,b)$ и $M(a,e)$ — ядерное расширение графа из класса $\mathcal{K}$. Выбираем вершину w в $M(a,b) \cup M(b,e)$ такую, что $[w]$ имеет пересечение наибольшей мощности с $M(a,e)$. Без потери общности рассуждений можно считать, что w принадлежит $M(b,e)$.

Обозначим через d_j представителей ядер из $M(a,b)$, смежных с w, а через c_j — представителей ядер, не смежных с w, где $j \in \{1,\ldots,\delta\}$. Пусть $c = c_1$ и $d = d_1$. Аналогично обозначим через u_i и w_i представителей ядер в разных долях μ-подграфа $M(b,e)$, где $i \in \{1,\ldots,\varepsilon\}$, причем $w = w_1$, $u = u_1$ и пусть вершина c смежна с u_i, где $i \in \{1,\ldots,\varepsilon\}$. По п. (3) леммы 14 $\hat{b}+\hat{e} = \hat{u}_i+\hat{w}_i$ для любого $i \in \{1,\ldots,\varepsilon\}$ и, следовательно, $|M(b,e)| = \mu = \varepsilon(\hat{b}+\hat{e})$. Аналогично, $\hat{a}+\hat{b} = \hat{c_j}+\hat{d_j}$ для любого $j \in \{1,\ldots,\delta\}$, откуда $|M(a,b)| = \mu = \delta(\hat{a}+\hat{b})$.

Далее заметим, что $M(u,d_j) \cap M(a,e) = \varnothing$ для всех $j \in \{1,\ldots,\delta\}$. Действительно, если $x \in M(u,d_j) \cap M(a,e)$, то для $y \in M(w,c_j) \cap M(a,e)$ получаем 3-лапу $\{x;y,d_j,u\}$. Значит, $M(w,c_j) \cap M(a,e) = \varnothing$. Но тогда получаем $M(a,e) \cap [w] \subset M(a,e) \cap [d_j]$, что противоречит максимальности w.

По п. (2) леммы 15 имеем $M(w,c_j) \cap M(a,e) = \varnothing$ для всех $j \in \{1,\ldots,\delta\}$.

Пусть $\varepsilon = 1$. Тогда $M(d,u) = K(b) \cup (\bigcup_{j=2}^{\delta} K(c_j))$ — клика, т. е. $\nu = \hat{b} + \sum_{j=2}^{\delta} \hat{c_j}$. Из строения подграфа $M(a,b)$ получаем $\mu = \sum_{j=1}^{\delta}(\hat{c_j}+\hat{d_j})$. По п. (3) леммы 14 выполняется $\hat{a}+\hat{b} = \hat{c}+\hat{d}$. Но тогда $\mu = \hat{a}+\hat{b}+\sum_{j=2}^{\delta}(\hat{c_j}+\hat{d_j}) = \nu + \hat{a} + \sum_{j=2}^{\delta}\hat{d_j}$, противоречие с условием $\nu \ge \mu$. Аналогично предположим, что $\delta = 1$. Тогда $\nu = |M(d,u)| = \hat{b} + \sum_{i=2}^{\varepsilon}\hat{w}_i$, из строения подграфа $M(b,e)$ получаем $\mu = \sum_{i=1}^{\varepsilon}(\hat{u}_i+\hat{w}_i)$, а по п. (3) леммы 14 имеем $\hat{b}+\hat{e} = \hat{u}+\hat{w}$. Тогда $\mu = \hat{b}+\hat{e}+\sum_{i=2}^{\varepsilon}(\hat{u}_i+\hat{w}_i) = \nu+\hat{e}+\sum_{i=2}^{\varepsilon}\hat{u}_i$, противоречие. Значит, $\varepsilon > 1$ и $\delta > 1$.

Пусть $z_j \in M(a,e) \cap M(w,c_j)$. Тогда (u,d_j,z_j) — исключительная тройка. В самом деле, u,z_j — сильная пара, $d_j \notin u^\perp \cup z_j^\perp$, $M(u,d_j) = (\bigcup_{i\neq j} c_j^\perp) \cup K(b) \cup (\bigcup_{i=2}^{\varepsilon} w_i^\perp)$, $M(u,z_j) = K(c_j) \cup K(e) \cup (\bigcup_{i=2}^{\varepsilon} u_i^\perp) \cup ([u] \cap M(a,e))$ и $M(d_j,z_j) = K(a) \cup K(w) \cup (\bigcup_{i\neq j} d_i^\perp) \cup (M(w,d_j) \cap M(a,e))$, т. е. $\Gamma = \Sigma(u,d_j,z_j)$.

Ясно, что $\Gamma = b^\perp \cup z_j^\perp$. По п. (1) леммы 15 имеем $\hat{z_j} = |K(z_j)| = |(M(w,c_j) \cap M(a,e)| = |[w] \cap [c_j] \cap [a] \cap [e]| = \hat{a}+\hat{e}$. Поэтому $|\Gamma| = \hat{a}+\hat{e}+\hat{b}+\nu+2\mu = \hat{b}+\hat{z_j}+\nu+2\mu$ для всех j.

Рассматривая 3-коклику $\{u, d_j, z_j\}$, по п. (1) леммы 15 получаем $\hat{b} = \hat{u} + \hat{d}_j$. Теперь рассмотрим 3-коклику $\{a, u, w\}$. Так как $M(a, u) = (\bigcup_{j=1}^{\delta} K(c_j)) \cup ([u] \cap M(a, e))$ — клика, то $M(a, w) = (\bigcup_{j=1}^{\delta} K(d_j)) \cup ([w] \cap M(a, e))$ — не клика и $M(u, w) = K(b) \cup K(e) \cup (\bigcup_{i=2}^{\varepsilon} K(u_i)) \cup (\bigcup_{i=2}^{\varepsilon} K(w_i))$ — не клика, причем $M(d_j, e) \cap M(a, u) = \varnothing$ и $|M(z_j, b) \cap M(a, u)| = \hat{c_j}$.

Пусть $z = z_1$. Заметим, что окрестность вершины z в подграфе $M(a, b)$ равна $K(c) \cup (\bigcup_{j=2}^{\delta} K(d_j))$. Действительно, если вершина z смежна с вершиной c_2, то $z^{\perp} \cup d^{\perp} = c_2^{\perp} \cup w^{\perp} = z^{\perp} \cup b^{\perp} = \Gamma$. Но $u \notin z^{\perp} \cup d^{\perp}$, противоречие. Значит, вершина z не смежна с вершиной c_2.

Окрестность каждой из вершин z_j в подграфе $M(b, e)$ равна $K(w) \cup (\bigcup_{i=2}^{\varepsilon} K(u_i))$. В самом деле, предположим, что вершина z смежна с вершиной w_2. Тогда $\Gamma = z^{\perp} \cup b^{\perp} = c^{\perp} \cup w_2^{\perp} = z^{\perp} \cup u^{\perp}$. Но $d \notin z^{\perp} \cup u^{\perp}$. Значит, z не смежна с вершиной w_2. Кроме того, $([c_j] \cap M(b, e)) \setminus (K(u) \cup K(w)) = ([z_j] \cap M(b, e)) \setminus (K(u) \cup K(w))$ при $j \in \{2, \ldots, \delta\}$, так как если c_2 смежна с вершиной u_2 и z_2 смежна с вершиной w_2, то получаем 3-лапу $\{z_2; z, c_2, w_2\}$. Число вершин в $[u] \cap M(a, e)$ больше $|\bigcup_{j=1}^{\delta} K(d_j)|$, т. е. существует вершина x из $[u] \cap M(a, e)$. Действительно, рассматривая 3-коклику $\{a, u, w\}$, получим $|(\bigcup_{j=1}^{\delta} K(c_j)) \cup ([u] \cap M(a, e))| = |M(a, u)| = \nu \geq \mu = |M(a, b)| = |(\bigcup_{j=1}^{\delta} K(c_j)) \cup (\bigcup_{j=1}^{\delta} K(d_j))|$. Следовательно, $|[u] \cap M(a, e)| \geq |\bigcup_{j=1}^{\delta} K(d_j)| \geq 1$. Теперь возьмем $x \in [u] \cap M(a, e)$. Вершина x смежна со всеми вершинами c_j. Обозначим через y некоторую вершину из $M(b, e) \setminus ([z] \cup K(u))$. Если вершина x смежна с вершиной y, то для всех $j \in \{2, \ldots, \delta\}$ вершины c_j смежны с вершиной y, так как иначе получаем 3-лапу $\{x; z, c_j, y\}$. Другими словами, окрестности всех вершин c_j (а значит, и z_j) содержатся в окрестности вершины x в подграфе $M(b, e) \setminus ([z] \cup K(u))$. Более точно $([z_i] \cap M(b, e)) \setminus [z_j] \subseteq ([x] \cap M(b, e)) \setminus [z_j]$ для $i \neq j$.

Если вершина y смежна с некоторой вершиной z_i, но не смежна с z_j, то она попадает в окрестность вершины x. Предположим, что существует такая вершина $y \in ((\bigcap_{i=1}^{\delta} [z_i]) \cap M(b, e)) \setminus [x]$. Тогда y смежна со всеми z_i и со всеми c_i. Получаем 3-лапу $\{c; x, d_2, y\}$, противоречие.

Тройка вершин (a, u, w) является исключительной, и $K(a, w)$ пусто по лемме 17. Значит, $[w] \cap M(a, e) = \bigcup_{j=1}^{\delta} K(z_j)$.

Таким образом, $[w] \cap M(a, e)$ содержит в точности $\delta(\hat{a} + \hat{e})$ вершин. Поскольку подграф $M(a, w)$ — не клика, то $\mu = |M(a, w)| = \sum_{j=1}^{\delta} \hat{d}_j + |[w] \cap M(a, e)|$ и $\mu = |M(a, b)| = \sum_{j=1}^{\delta} (\hat{d}_j + \hat{c}_j)$. Отсюда $|[w] \cap M(a, e)| = \sum_{j=1}^{\delta} \hat{c}_j$ и $\hat{e} = \hat{u}$, а $\hat{b} = \hat{w}$. Заметим, что окрестность вершины u_i совпадает с окрестностью вершины w в μ-подграфе $M(a, e)$ для $i \geq 2$. Поскольку dw_2 и cu_2 — ребра, то по лемме 15 имеем $|M(d, u_2) \cap M(a, e)| + |M(c, w_2) \cap M(a, e)| = \hat{a} + \hat{e}$, т. е. $\hat{z}_2 + \ldots + \hat{z}_\delta + |M(c, u) \cap M(a, e)| = \hat{a} + \hat{e}$. Но тогда получаем равенство $(\delta - 1) \cdot (\hat{a} + \hat{e}) + |M(c, u) \cap M(a, e)| = \hat{a} + \hat{e}$, из которого при $\delta \geq 2$ следует, что $\delta = 2$ и $|M(c, u) \cap M(a, e)| = 0$. Значит, $|[w] \cap M(a, e)| = \nu$, противоречие. Лемма доказана.

Среди исключительных троек зафиксируем тройку (a, b, e) с минимальной валентностью вершины a.

Лемма 19. *Пусть подграф $K(b, e)$ содержит вершину z. Если $x \in \Gamma - z^{\perp}$, то $\Gamma = x^{\perp} \cup z^{\perp}$, вершина x лежит в исключительной тройке (x, y, z) и либо $k_x = k_a$, либо $k_x > k_a$, причем $|M(a, z)| = \mu$, $|M(x, z)| = \nu$ и $\hat{y} \geq \hat{e} + \mu - \nu$.*

Доказательство. Так как вершина z принадлежит $K(b, e)$, то $x \in K(a) \cup M(a, b) \cup M(a, e)$. Если $x \in K(a)$, то $x^{\perp} = a^{\perp}$ и, следовательно $k_x = k_a$. Не теряя общности рассуждений, мы можем считать, что $x \in M(a, e)$. Поскольку (a, b, e) — особая тройка и $K(b, e) \neq \varnothing$, то $M(a, e)$ не является кликой. Тогда по лемме 17 вершина x не смежна с некоторой вершиной $y \in M(a, e)$. Тройка (x, y, b) является исключительной, так как подграф $M(x, y)$ содержит несмежные вершины a и e, вершина b не лежит в $x^{\perp} \cup y^{\perp}$ и $\Gamma = \Sigma(x, y, b)$.

Поскольку $\Gamma = a^{\perp} \cup z^{\perp}$, то $|\Gamma| = k_a + k_z + 2 - |M(a, z)|$. Ввиду включения $x^{\perp} \cup z^{\perp} \subseteq \Gamma$ имеем $k_x + k_z + 2 - |M(x, z)| \leq k_a + k_z + 2 - |M(a, z)|$. Далее рассмотрим все возможные варианты для подграфов $M(a, z)$ и $M(x, z)$.

С л у ч а й 1. Если $M(a,z)$ и $M(x,z)$ — кликовые подграфы, то $k_x + k_z + 2 - \nu \le k_a + k_z + 2 - \nu$. Но по выбору вершины a должно быть $k_x \ge k_a$. Значит, $k_x = k_a$.

С л у ч а й 2. Если $M(a,z)$ и $M(x,z)$ не являются кликами, то аналогично случаю 1 получаем $k_x = k_a$.

С л у ч а й 3. Если $M(a,z)$ — кликовый подграф, а $M(x,z)$ не является кликой, то $k_x - \mu \le k_a - \nu$ или $k_x + \nu \le k_a + \mu$, противоречие, так как $k_x \ge k_a$ и $\nu \ge \mu$.

С л у ч а й 4. Если $M(x,z)$ — кликовый подграф, а $M(a,z)$ не является кликой, то $k_x - \nu \le k_a - \mu$, причем $k_x = 2\mu - 1 - \hat{y} + \hat{a} + \hat{e}$, $k_a = 2\mu - 1 + \hat{a}$. Значит, $\hat{y} \ge \hat{e} + \mu - \nu$.

Лемма доказана.

Лемма 20. *Граф $M(b,e)$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 18 подграф $M(b,e)$ не является кликой. По п. (2) леммы 14 подграф $M(b,e) - K(b,e)$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Для доказательства леммы достаточно доказать, что $K(b,e) = \varnothing$. По лемме 17 подграф $M(a,e)$ некликовый. Теперь предположим, что $K(b,e)$ содержит вершину z, и пусть для определенности эта вершина смежна с d. Если $[z]$ содержит в точности α вершин из $M(a,e)$, то $|[z] \cap M(a,b)| = |M(a,z)| - \alpha$. Поскольку $M(a,e)$ и $M(a,b)$ не являются кликами, то без ограничения общности $\alpha \le |M(a,z)| - \alpha$ и $\mu/2 \le |M(a,z)| - \alpha$. Далее ввиду п. (2) леммы 14 и леммы 17 для любой вершины $f_1 = f \in M(a,e) - [z]$ найдется вершина $g_1 = g \in [z] \cap M(a,e)$ такая, что $M(a,e) - f^{\perp} = K(g)$. Если g является β-точкой для $M(b,e)$, то f — β-точка для $M(a,b)$. Поэтому, рассмотрев вместо 3-коклики $\{e,a,b\}$ тройку (f,g,b), получим, с одной стороны, $\hat{a} = \hat{f}$ и $\hat{e} = \hat{g}$, а с другой стороны, $\hat{a} = \hat{g}$ и $\hat{e} = \hat{f}$. Тогда $\hat{a} = \hat{f} = \hat{e} = \hat{g}$, и из строения μ-подграфа $M(a,e)$ получаем $\alpha = |K(a,b)| + m\hat{a}, \mu - \alpha = m\hat{a}$ и $\mu - \alpha \le \alpha$.

Далее, если подграф $M(a,z)$ некликовый, то $\mu - \alpha \le \alpha \le \mu - \alpha$. Отсюда $\mu = 2\alpha$ и $K(a,e) = \varnothing$. Симметрично, в подграфе $M(a,b)$ ядро пусто, и, значит, он также является расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Пусть теперь u и w — несмежные вершины из $M(b,e)$. Поэтому $\hat{u} + \hat{w} = \hat{b} + \hat{e}$ и $M(b,e) - K(b,e)$ является расширением графа из класса $\mathcal{K}$. Заметим, что $[c] \cap K(b,e) = \varnothing$ и $|[d] \cap M(b,e)| > \mu/2$. С другой стороны, $|[d] \cap M(b,e)| = \mu/2$ по структуре графа $M(c,e)$, противоречие.

Если же $M(a,z)$ — клика, то получаем $\mu \le 2\alpha \le \nu$, т. е. $\mu/2 \le \alpha$. Окрестность вершины d в подграфе $M(a,e)$ совпадает с окрестностью вершины z, следовательно, $|[d] \cap M(b,e)| = \mu - \alpha > \mu/2$. Таким образом, $\mu/2 > \alpha$. Но $\mu/2 \le \alpha$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 21. *Пусть (a,b,e) — исключительная тройка и $M(b,e)$ лежит в классе $\mathcal{K}$. Пусть также подграф $M(a,e) \setminus K(a,e)$ состоит из δ долей $K(f_i) \cup K(g_i)$, где $f_i c$ и $g_i d$ — ребра, $[c] \cap M(b,e) = \bigcup_{j=1}^{\epsilon} K(u_j)$ и $[d] \cap M(b,e) = \bigcup_{j=1}^{\epsilon} K(w_j)$, где $K(u_j) \cup K(w_j)$ — доля подграфа $M(b,e)$ для $j \in \{1,\ldots,\epsilon\}$. Тогда доли $K(u_j) \cup K(w_j)$ можно упорядочить так, что $K(u_j) = M(c,g_j) \cap M(b,e)$ и $K(w_j) = M(d,f_j) \cap M(b,e)$ для $j \in \{1,\ldots,\epsilon\}$. Более того, пары вершин $f_i u_j, g_i w_j$ являются ребрами тогда и только тогда, когда $i \ne j$, пары вершин $f_i w_j, g_i u_j$ являются ребрами тогда и только тогда, когда $i = j, i =\in \{1,\ldots,\delta\}, j \in \{1,\ldots,\epsilon\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если f и g — несмежные вершины из $M(a,e)$ и cf, dg — ребра, то по лемме 20 и п. (2) леммы 15 подграфы $M(c,g)$ и $M(d,f)$ имеют непустые пересечения с $M(b,e)$, так как $K(b,e) = \varnothing$. По лемме 8 в подграфе $M(c,g) \cap M(b,e)$ нет вершин, смежных с вершинами из $M(d,f) \cap M(b,e)$. Поэтому указанные графы совпадают с $K(u)$ и $K(w)$ для некоторых несмежных вершин u и w из $M(b,e)$ соответственно. Отсюда число ϵ долей в редукции графа $M(b,e)$ не меньше числа долей δ в редукции графа $M(a,e) \setminus K(a,e)$, так как для каждой пары f_i, g_i есть хотя бы одна пара u_j, w_j. Теперь $[g_i] \cap (K(u_1) \cup \ldots \cup K(u_\epsilon)) = K(u_i)$, следовательно, вершина g_i не смежна с $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_\epsilon$. Поэтому g_i смежна с $w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_\epsilon$. Аналогично доказывается утверждение о смежности вершин f_i с u_j. Лемма доказана.

В оставшихся леммах этого раздела зафиксируем обозначения, введенные в лемме 21.

Лемма 22. *Если $z \in K(a,b)$, то подграф $M(z,e) - K(a,e)$ не является кликой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т. е. $M(z,e) - K(a,e)$ — клика. Следовательно, $M(z,e)$ — клика. Без ограничения общности $z \in [f_1] - [g_1]$. Клика $M(z,e)$ содержит вершину f_1. Значит, вершины из $[z] \cap M(b,e)$ смежны с f_1, т. е. $M(b,e) \cap [z] \subseteq [f_1] = K(w_1) \cup (\bigcup_{j=2}^{\epsilon} K(u_j))$. Теперь $M(z,e)$ содержит вершину w_1, т. е. $(M(a,e) - K(a,e)) \cap [z] \subseteq (M(a,e) - K(a,e)) \cap [w_1] = K(f_1) \cup (\bigcup_{i=2}^{\delta} K(g_i))$. Таким образом, подграф $M(z,e)$ равен подграфу $K(w_1) \cup (\bigcup_{j=2}^{\epsilon} K(u_j)) \cup K(f_1) \cup (\bigcup_{i=2}^{\delta} K(g_i)) \cup K(a,e)$, причем из леммы 21 следует, что $\varepsilon \geq \delta$. Заметим, что если $[c] \cap K(a,e)$ непусто, то $\{g_1; y, d, u_1\}$ — 3-лапа для некоторой вершины $y \in [c] \cap K(a,e)$. Таким образом, все вершины из $K(a,e)$ смежны с d. Симметрично, если $[g_1] \cap K(a,b)$ непусто, то $\{c; z', f_1, u_1\}$ — 3-лапа для некоторой вершины $z' \in [g_1] \cap K(a,b)$. Таким образом, все вершины из $K(a,b)$ смежны с f_1. Поскольку вершина g_2 не смежна с вершиной u_3 по лемме 21, то при $\epsilon > \delta \geq 2$ получаем противоречие с тем, что $M(z,e)$ — клика. Рассмотрим возможные случаи.

С л у ч а й 1. Пусть $\epsilon = \delta = 1$. Тогда $M(z,e) = K(f_1) \cup K(w_1) \cup K(a,e)$. Но любая вершина из $K(a,e)$ содержится в ядре подграфа $M(d,e)$. По лемме 20 $K(d,e)$ — пустой граф. Значит, $K(a,e) = \varnothing$. Теперь $|M(a,e)| = \mu = \hat{f}_1 + \hat{g}_1 = \hat{a} + \hat{e}$ и $|M(b,e)| = \mu = \hat{w}_1 + \hat{u}_1 = \hat{b} + \hat{e}$. Отсюда $\hat{b} = \hat{a} = \hat{c} = \hat{d}$, $\mu = 2\hat{a}$, и, значит, $K(a,b)$ пусто, противоречие.

С л у ч а й 2. Пусть $\epsilon = \delta = 2$. Так как $\Gamma - z^{\perp}$ является кликой, то $\Gamma = z^{\perp} \cup x^{\perp}$ для любой вершины x из $\Gamma - z^{\perp}$. Отсюда $\hat{x} = \hat{e}$ для любой вершины x из $\Gamma - z^{\perp}$ и $\hat{y} = \hat{a}$ для любой вершины y из $M(z,e)$. Далее, $\mu = |M(b,e)| = 2(\hat{b} + \hat{e}) = 2\hat{a} + 2\hat{e}$, и поэтому $\hat{a} = \hat{b}$. Рассматривая вместо $\{b,e,a\}$ 3-коклику $\{w_1, u_1, a\}$, получим $\hat{w}_1 = \hat{e}$, т. е. $\hat{a} = \hat{e}$. Но тогда $|[g_1] \cap M(a,b)| = \mu - \hat{u}_1 - \hat{w}_2 = \mu - 2\hat{e} = 2\hat{a}$, и поэтому $K(a,b)$ пусто, противоречие.

С л у ч а й 3. Пусть $\epsilon > \delta = 1$. Тогда по п. (2) леммы 15 для любого $i \geq 2$ подграф $M(u_i, d)$ содержит вершину s_i из $K(a,e)$, причем $\hat{s_i} = \hat{a} + \hat{e}$. Поэтому $\mu = |M(a,e)| = \hat{f}_1 + \hat{g}_1 + (\epsilon - 1)\hat{s_1} = \epsilon(\hat{a} + \hat{e})$. Из строения подграфа $M(b,e)$ получаем $\mu = \epsilon(\hat{b} + \hat{e})$. Значит, $\hat{a} = \hat{b}$ и $\mu = |M(c,e)| = \hat{f}_1 + \epsilon\hat{u}_1 = \hat{a} + \epsilon\hat{e}$. Поэтому $\epsilon = 1$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 23. *Граф Γ не содержит исключительных троек вершин.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (a,b,e) — исключительная тройка вершин графа Γ с наименьшим значением k_a. По лемме 20 граф $\Gamma - a^{\perp} = K(b) \cup K(e) \cup M(b,e)$ является ядерным расширением графа из класса $\mathcal{K}$ с числом долей на 1 больше, чем в $M(b,e)$. Ввиду леммы 18 ни один из подграфов $M(a,b), M(a,e), M(b,e)$ не является кликой. Значит, $|M(a,b)| + |M(a,e)| = 2\mu$. С другой стороны, $|M(a,u)| + |M(a,w)| = |M(a,b)| + |M(a,e)| = 2\mu$. Так как подграфы $M(a,u)$ и $M(a,w)$ непусты, то они некликовые. Значит, для любой вершины $x \in \Gamma - a^{\perp}$ подграф $M(a,x)$ не является кликой. Без ограничения общности можно считать, что вершина e имеет наибольшую валентность среди вершин из $\Gamma - a^{\perp}$. Покажем, что $M(a,e)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$. Пусть $z \in K(a,e)$. Тогда $\Gamma = z^{\perp} \cup b^{\perp}$. Без ограничения общности можно считать, что вершина z смежна с вершиной c. Если вершина z смежна с вершиной w_1, то получаем 3-лапу $\{z; c, g_1, w_1\}$. Значит, z смежна с u_1. Рассмотрим ребра cu_1 и dw_1. По лемме 15 либо $M(d,u_1)$ и $M(c,w_1)$ пересекают подграф $M(a,e)$ по долям, либо один из них не пересекает этот подграф, а другой пересекает его по ядру. Но пересечение $M(d,u_1) \cap M(a,e)$ пусто, а $M(c,w_1) \cap M(a,e) = K(a,e) \cup K(f_1)$, противоречие. Значит, $K(a,e)$ пусто.

Теперь по лемме 15 число δ долей в редукции графа $M(a,e)$ совпадает с числом долей в редукции графа $M(b,e)$, т. е. $\mu = \delta(\hat{a} + \hat{e}) = \delta(\hat{b} + \hat{e})$ и, следовательно, $\hat{a} = \hat{b}$, $k_a = k_b = k_c = k_d$.

Если ϵ — число долей в подграфе $M(a,b)$, то $\epsilon \leq \delta$. Если $K(a,b)$ пусто, то $\epsilon = \delta$, $k_a = k_e$, и тогда в редукции $\bar{\Gamma}$ графа Γ все μ-подграфы изоморфны $K_{\delta,2}$. По лемме 6 граф $\bar{\Gamma}$ регулярен, по [8, теорема 1] $\bar{\Gamma}$ изоморфен 3×3 решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Шлефли, что противоречит выбору Γ. Значит, $K(a,b)$ непусто, т. е. существует вершина $z \in K(a,b)$. По лемме 22 $(M(z,e) - K(z,e))$ — не клика, т. е. $[z]$ содержит несмежные вершины f_1 и w_2, причем

$\delta \geq 2$. Так как g_1 и u_2 — антиподы для f_1 и w_2 в подграфах $M(a,e)$ и $M(b,e)$ соответственно, то тройка (g_1, u_2, z) является исключительной, $\Gamma = \Sigma(g_1, u_2, z)$ и $\hat{a}+\hat{b}+\hat{e} = \hat{g}_1+\hat{u}_2+\hat{z}$. Ввиду того, что $M(f_1, w_2) \cap M(a,b)$ содержит вершину z, по лемме 15 пересечение $M(g_1, u_2) \cap M(a,b)$ пусто и $\hat{z} = |M(f_1, w_2) \cap M(a,b)| + |M(g_1, u_2) \cap M(a,b)| = \hat{a} + \hat{b} = 2\hat{a}$. Теперь из четырехугольников $f_1 u_2 b z$ и $f_1 e w_2 z$ получаем равенства $\hat{f}_1 + \hat{b} = \hat{u}_2 + \hat{z}$ и $\hat{f}_1 + \hat{w}_2 = \hat{e} + \hat{z}$. Упрощая эти равенства, получим $\hat{f}_1 = \hat{u}_2 + \hat{a}$, $\hat{f}_1 + \hat{w}_2 = \hat{e} + 2\hat{a}$ и $\hat{e} = \hat{g}_1 + \hat{u}_2$. Кроме того, из четырехугольников $c f_i e u_i$ и $d g_i e w_i$ имеем $\hat{f}_i + \hat{u}_i = \hat{c} + \hat{e}$, $\hat{g}_i + \hat{w}_i = \hat{d} + \hat{e} = \hat{c} + \hat{e}$. Значит, $\hat{g}_i = \hat{u}_i$, $\hat{f}_i = \hat{w}_i$.

Если вершина z смежна с вершиной g_2, то g_2 и w_2 — несмежные вершины из $M(z,e)$ и, следовательно, $\hat{g}_2 + \hat{w}_2 = \hat{z} + \hat{e} = 2\hat{a} + \hat{e}$. Но $\hat{g}_2 + \hat{w}_2 = \hat{u}_2 + \hat{w}_2 = \hat{e} + \hat{a}$, противоречие. Значит, z смежна с вершиной f_2 и, симметрично, z смежна с вершиной w_1.

Если вершина z не смежна с $u_3, \ldots, u_\delta$, то получаем 3-лапу $\{f_2; z, g_1, u_m\}$, где $3 \leq m \leq \delta$. Значит, вершина z смежна с вершинами $u_3, \ldots, u_\delta$. Аналогично, если вершина z не смежна с вершинами $g_3, \ldots, g_\delta$, то получаем 3-лапу $\{w_2; z, u_1, g_m\}$, где $3 \leq m \leq \delta$. Значит, вершина z смежна с вершинами $g_3, \ldots, g_\delta$. Теперь при $\delta \geq 5$ получаем 3-лапу $\{g_5; z, w_4, f_3\}$. Следовательно, $2 \leq \delta \leq 4$.

Пусть $\delta = 4$ и $\mu = 4(\hat{a} + \hat{e})$. Так как g_2 не смежна с вершиной u_1, то $\mu = |M(g_1, u_2)| = \hat{f}_3 + \hat{w}_3 + \hat{f}_4 + \hat{w}_4 + \hat{e} + \hat{g}_2 + \hat{u}_1 = 4\hat{e}$, противоречие.

Пусть $\delta = 3$ и $\mu = 3(\hat{a} + \hat{e})$. Так как $\mu = |M(g_1, u_2)| = \hat{f}_3 + \hat{w}_3 + \hat{e} + \hat{g}_2 + \hat{u}_1 = 2\hat{e} + 2\hat{f}_3$, то $2\hat{f}_3 = \hat{e} + 3\hat{a}$. Из равенства $\mu = |M(z,e)| = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \hat{w}_1 + \hat{w}_2 + \hat{g}_3 + \hat{u}_3 = 2\hat{e} + 4\hat{a} + 2\hat{g}_3$ находим, что $2\hat{g}_3 = \hat{e} - \hat{a}$. Пересечение подграфа $M(f_2, u_2)$ с $M(a,b)$ дает только долю $K(c)$. Если число ϵ долей подграфа $M(a,b)$ не меньше двух, то получаем 3-лапу $\{c; f_2, u_2, x\}$, где $x \in M(a,b) - (K(a,b) \cup K(c) \cup K(d))$. Следовательно, $\epsilon = 1$. Но тогда $\mu = |M(a,b)| = \hat{z} + \hat{c} + \hat{d} = 4\hat{a}$ и $\hat{a} = 3\hat{e}$. Получаем $2\hat{g}_3 = \hat{e} - \hat{a} = -2\hat{a}$, противоречие.

Пусть $\delta = 2$ и $\mu = 2(\hat{a} + \hat{e})$. Но $\mu = |M(z,e)| = \hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \hat{w}_1 + \hat{w}_2 = 2\hat{e} + 4\hat{a}$, противоречие. Лемма доказана.

4. Особые тройки в графах без 3-лап с ограничениями на их μ-подграфы

В этом разделе завершается доказательство теоремы 3. Пусть (a,b,e) — особая тройка из Γ, а вершины c и d взяты из $[a] \cap [b]$. В разд. 3 мы доказали, что тройка (a,b,e) не является исключительной.

Лемма 24. *Если (a,b,e) — особая тройка в Γ, то $\Sigma(a,b,e)$ является α-расширением 3×3-решетки, треугольного графа $T(6)$ или графа Шлефли.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что $\Sigma(a,b,e)$ содержит μ-подграфы своих вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Пусть $x, y \in \Sigma(a,b,e), d(x,y) = 2$ и $M(x,y)$ не лежит в $\Sigma(a,b,e)$. Без ограничения общности $x \in M(a,b), y \in M(b,e)$ и $M(x,y)$ содержит вершину s из $[b] - (K(b) \cup [a] \cup [e])$. Если y не принадлежит ядру подграфа $M(b,e)$, т. е. y не смежна с некоторой вершиной z из этого подграфа, то xz — ребро. Тогда по лемме 7 окрестности вершин x и z совпадают на $b^\perp - ([a] \cup [e])$, т. е. sz — ребро. Но тогда по лемме 4 вершина s принадлежит $K(b)$. Значит, $x \in K(a,b)$ и $y \in K(b,e)$. Согласно лемме 16 вершина x смежна с y, что противоречит выбору вершин x и y.

По лемме 23 подграф $\Sigma(a,b,e)$ является собственным подграфом из Γ и удовлетворяет условию теоремы 3. Так как Γ — минимальный контрпример и не содержит 4-коклик, то по индуктивному предположению $\Sigma(a,b,e)$ является α-расширением 3×3-решетки, треугольного графа $T(6)$ или графа Шлефли. Лемма доказана.

Лемма 25. *Граф Γ не содержит особых троек вершин.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (a,b,e) является особой тройкой вершин графа Γ. По лемме 24 все μ-подграфы для вершин из $\Sigma(a,b,e)$ изоморфны α-расширениям графов из класса $\mathcal{K}$ с одним и тем же числом долей m, где $m \in \{1,2,4\}$. Далее, если $x \in \Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$, то (a, b, x) — особая тройка. Более того, поскольку $\Sigma(a, b, e)$ и $\Sigma(a, b, x)$ содержат μ-подграф $M(a, b)$, то подграф $\Sigma(a, b, x)$ изоморфен $\Sigma(a, b, e)$. Аналогично, подграф $\Sigma(a, y, e)$ изоморфен $\Sigma(a, b, e)$ для любой вершины $y \in \Gamma - (a^\perp \cup e^\perp)$. Следовательно, μ-подграф $M(a, x)$ изоморфен μ-подграфу $M(a, b)$ для любой вершины $x \in \Gamma - a^\perp$. Ввиду строения графов из заключения леммы 24 любая вершина из $\Sigma(a, b, e)$ лежит в 3-коклике из $\Sigma(a, b, e)$, т. е. лежит в особой тройке вершин. Значит, вышеприведенное рассуждение справедливо для любой вершины из $\Sigma(a, b, e)$. Но тогда все μ-подграфы из Γ изоморфны. Итак, все μ-подграфы из Γ регулярны, и по лемме 6 граф Γ регулярен. По основному результату из [5] Γ является α-расширением $3 \times m$-решетки, где $m \geq 4$ или треугольного графа $T(7)$, противоречие с выбором Γ. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 3. По условию теоремы 3 граф Γ содержит 3-коклику. Пусть $\{x, y, z\}$ — произвольная 3-коклика из Γ. По лемме 25 кликами являются μ-подграфы $M(x, y), M(x, z)$ и $M(y, z)$. Более того, кликой является любой μ-подграф из антиокрестности вершины w, где $w \in \{x, y, z\}$. Таким образом, ввиду леммы 25 антиокрестность вершины w является связным графом Тервиллигера без 3-коклик. По [7, теорема 1] антиокрестность вершины w является кликовым расширением 2-пути, 3-пути, пятиугольника или пятиугольной пирамиды. В случае, когда антиокрестность одной из вершин из множества $\{x, y, z\}$ является кликовым расширением пятиугольной пирамиды, нетрудно видеть, что две другие антиокрестности также будут кликовыми расширениями пятиугольной пирамиды. В этом случае граф Γ изоморфен кликовому расширению графа икосаэдра. Это противоречит лемме 11, поскольку граф икосаэдра имеет диаметр 3. Во всех остальных случаях мы можем найти подграф в Γ, антиокрестности вершин которого являются кликовыми расширениями 2-путей. По предположению индукции можно считать, что таковым является граф Γ. Теперь граф Γ состоит из 6 клик: $X, Y, Z, M(x, y), M(x, z)$ и $M(y, z)$, где X, Y и Z — ядра окрестностей вершин x, y и z соответственно. Рассмотрим две несмежные вершины $u \in M(x, z)$ и $w \in M(x, y)$. Тогда $|M(u, w)| = \hat{x} + \alpha + \beta + \gamma$, где α, β и γ — число вершин в $M(x, y) \cap [u]$, $M(x, z) \cap [w]$ и $M(z, y) \cap [u] \cap [w]$ соответственно.

Пусть $M(u, w)$ — клика. Тогда $\gamma = 0$ и $\hat{x} + \alpha + \beta = \nu$. Поэтому $\delta = |M(z, y) - M(z, y) \cap [u] \cap [w]| = \alpha + \beta - \mu$. Если $\delta \neq 0$, то $\nu = \delta + (\mu - \alpha) + (\mu - \beta)$. Учитывая, что $\delta = \alpha + \beta - \mu$, получим $\mu = \nu$, противоречие. Поэтому $\delta = 0$, откуда $\nu + \alpha + \beta = 2\mu$. С другой стороны, $\nu = \hat{x} + \alpha + \beta$. Отсюда следует, что $\hat{x} = 0$, противоречие.

Итак, $M(u, w)$ не является кликой, т. е. $\hat{x} + \alpha + \beta + \gamma = \mu$. Тогда в подграфе $M(z, y)$ число вершин, смежных с u, равно $|M(u, y)| - \alpha - \gamma$, а число вершин, смежных с w, равно $|M(w, z)| - \beta - \gamma$ и $(|M(u, y)| - \alpha - \gamma) + (|M(w, z)| - \beta - \gamma) + \gamma = \nu - \delta$. Заметим, что $|M(u, y)| + |M(w, z)| \leq \nu + \alpha + \beta + \gamma$. Поэтому рассматриваемые μ-подграфы не являются кликами, т. е. $|M(u, y)| = \mu$ и $|M(w, z)| = \mu$. Тогда $2\mu - \alpha - \beta - \gamma = \nu - \delta$. Учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = \mu - \hat{x}$, получим $\mu + \delta + \hat{x} = \nu$. Если $\delta \neq 0$, то в рассматриваемом графе есть 3-коклика, состоящая из вершин u, w и некоторой вершины из $M(z, y) - M(z, y) \cap [u] \cap [w]$. По условию в этом случае все μ-подграфы являются кликами, противоречие. Значит, $\delta = 0$ и $\mu + \hat{x} = \nu$. Рассуждая аналогично, можно показать, что $\hat{x} = \hat{y} = \hat{z} = \nu - \mu$.

Рассмотрим граф $\Omega = M(x, y) \cap M(x, z) \cap M(y, z)$. В этом графе число вершин равно 3ν, а степень каждой вершины равна $\nu + \mu - 1$. Любая пара несмежных вершин имеет $2\mu - \nu$ общих смежных вершин. Заметим, что в Ω нет кликовых μ-подграфов. Антиокрестность любой вершины содержит $2\nu - \mu$ вершин и является кликой. Поэтому любая вершина из $M(z, y)$ смежна не менее чем с $\nu - \alpha$ вершинами из $M(x, y)$. Рассмотрим вершину s из $M(x, y)$, не смежную с вершиной u. Тогда μ-граф вершин u и s содержит $\nu - \alpha$ вершин из $M(z, y) \cup M(x, y)$ и α вершин из $[u] - (M(z, y) \cup M(x, y))$. В этом случае $M(x, s) = \nu$. С другой стороны, $\mu(x, s) = 2\mu - \nu$. Отсюда $\mu = \nu$, противоречие. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вакула И.А., Кабанов В.В.** О графах без 3-лап с некликовыми μ-подграфами // Дискрет. анализ и исследование операций. 2005. Т. 12, № 4. С. 3–22.
2. **Вакула И.А., Кабанов В.В.** О графах без 3-лап с некликовыми μ-подграфами, натягиваемых на 3-коклику // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. Т. 36, вып. 7. С. 81–92. (Сер. Математика и механика.)
3. **Ермакова Г.М., Кабанов В.В., Сабирзянова Е.Ш., Го Вэньбинь.** Свойства графов без порожденных подграфов $K_{1,3}$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 43–52.
4. **Кабанов В.В., Махнев А.А.** Об отделимых графах с некоторыми условиями регулярности // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 10. С. 73–86.
5. **Кабанов В.В., Махнев А.А.** Кореберно регулярные графы без 3-лап // Мат. заметки. 1996. Т. 60, № 4. С. 495–503.
6. **Кабанов В.В., Махнев А.А.** Графы без 3-лап с равномощными μ-подграфами // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. Т. 10, вып. 1. С. 44–68. (Сер. Математика и механика.)
7. **Кабанов В.В., Махнев А.А., Падучих Д.В.** О графах без корон с регулярными μ-подграфами, II// Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 396–406.
8. **Terwilliger P.**, Distance-regular graphs with girth 3 or 4 // J. Combin. Theory. Ser. B. 1985. Vol. 39. P. 265–281.

Ермакова Галина Михайловна
ст. преподаватель
УГТУ-УПИ

Поступила 18.05.2009

Кабанов Владислав Владимирович
д-р физ.-мат. наук
зам. директора
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: *vvk@imm.uran.ru*

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 512.542.5

ПРИМИТИВНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ПОДСТАНОВОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУПП[1]

В. В. Кораблева

Определены ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы подстановочных представлений конечных специальных линейных и унитарных групп на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам.

Ключевые слова: подстановочное представление, параболическая подгруппа, классическая группа, изотропное подпространство.

V. V. Korableva. Primitive parabolic permutation representations of finite special linear and unitary groups.

The ranks, degrees, subdegrees, and double stabilizers of the permutation representations of finite special linear and unitary groups on the cosets of the parabolic maximal subgroups are found.

Keywords: permutation representation, parabolic subgroup, classical group, isotropic subspace.

Введение

Достаточно полную информацию о подстановочном представлении конечной группы дают следующие параметры: степень, ранг, подстепени, строение стабилизатора точки и двойных стабилизаторов. К настоящему времени эти параметры получены для точных подстановочных представлений минимальной степени всех конечных простых групп лиева типа (см. [1–5]). Важный класс подстановочных представлений конечных групп лиева типа составляют их параболические представления, т. е. представления на смежных классах по параболическим подгруппам. Группы лиева типа подразделяются на классические, т. е. имеющие естественные представления группами автоморфизмов векторных пространств, и исключительные группы.

В работах автора [6–10] вычислены ранги, степени, подстепени и двойные стабилизаторы примитивных параболических подстановочных представлений для всех конечных простых исключительных групп лиева типа. В работах [11, 12] вычислены ранги подстановочных представлений классических групп $A_l(q)$, $B_l(q)$, $C_l(q)$ и $D_l(q)$ на смежных классах по параболическим максимальным подгруппам, а в работе [13] определены подстепени, строение стабилизатора точки и двойных стабилизаторов для групп $A_l(q)$. В этих работах [11–13] доказательства для указанных классических групп проводились в терминах систем корней. В предлагаемой работе определяются параметры примитивных параболических подстановочных представлений конечных специальных линейных и унитарных групп, причем доказательство проводится в терминах линейных преобразований и билинейных форм.

1. Предварительные сведения

Пусть V — векторное пространство размерности l над конечным полем K. Обозначим через $GL(V)$ группу всех невырожденных линейных преобразований пространства V. Специальная линейная группа $SL(V)$ состоит из линейных преобразований пространства V с единичным

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07–01–00148).

определителем. Пусть f — бинарная форма на V, линейная по первому аргументу, т. е. отображение из $V\times V$ в поле K такое, что $f(\alpha x+\beta y,z)=\alpha f(x,z)+\beta f(y,z)$ при всех $\alpha,\beta\in K$ и x, y, $z\in V$. Подгруппа группы $GL(V)$, состоящая из элементов φ, для которых $f(x^\varphi,y^\varphi)=f(x,y)$ при всех x,y из V, называется группой *изометрий* формы f. В этой работе рассматриваются только два случая.

Случай 1. Форма f *нулевая.* Это означает, что $f(x,y)=0$ при всех $x,y\in V$. В этом случае группа изометрий формы f совпадает с группой $GL(V)$.

Случай 2. Форма f *невырожденная унитарная.* Это означает, что поле K имеет автоморфизм σ порядка 2, $\{v\in V\mid f(v,z)=0$ при всех $z\in V\}=\{0\}$ и $f(x,y)=f(y,x)^\sigma$ для всех x, y из V. Для случая конечного поля K все такие формы на V эквивалентны, соответствующая группа изометрий формы f называется *унитарной* группой пространства V и обозначается через $GU(V)$. Положим также $SU(V)=SL(V)\cap GU(V)$.

Далее значение $f(x,y)$ формы f на паре $(x,y)\in V\times V$ будем обозначать через (x,y). Подпространство, на котором ограничение формы f есть нулевая форма, называется *изотропным* относительно f. Для любого подмножества J из V положим $J^\perp=\{v\in V\mid f(v,x)=0$ для всех $x\in J\}$. Элементы матрицы (φ_{ij}) изометрии φ формы f в базисе $v_1,v_2,\dots,v_l$ пространства V задаются правилом $v_i^\varphi=\sum_{j=1}^{l}\varphi_{ij}v_j$, $i=1,2,\dots,l$. Пусть $G\in\{SL(V),SU(V)\}$ и W — изотропное подпространство пространства V относительно f. Известно (см. [14]), что стабилизатор G_W подпространства W является параболической максимальной подгруппой в группе G, причем все максимальные параболические подгруппы в G получаются так. Рассмотрим представление группы G подстановками множества Ω левых смежных классов группы G по подгруппе G_W, в котором элементу g из G соответствует подстановка, переводящая каждый смежный класс xG_W в gxG_W. Подгруппа G_W является стабилизатором точки G_W из Ω в данном представлении, и стабилизатор каждой точки сопряжен в G с G_W. Число орбит стабилизатора G_W на Ω называется (*подстановочным*) рангом подстановочного представления (G,Ω). Орбиты подгруппы G_W на Ω называются *подорбитами* группы G, а мощности n_i этих подорбит, называемые *подстепенями* подстановочного представления (G,Ω), могут быть вычислены как индексы *двойных стабилизаторов* $G_W\cap G_{W_i}$ в группе G_W, где W_i является изотропным подпространством из V той же размерности, что и размерность W, и G_{W_i} — стабилизатор подпространства W_i. В соответствии с этим обозначением тривиальной подорбитой является G_W и $n_0=1$.

Если $\dim W=1$, то подстановочное представление имеет минимальную степень и рассмотрено в [1].

Обозначим через $X.Y$ (соответственно $X{:}\,Y$) расширение (соответственно расщепляемое расширение) группы X посредством группы Y, через a — циклическую группу порядка a, через $[b]$ — произвольную разрешимую группу порядка b $(a,b\in\mathbb{N})$, через $[c/d]$ — целую часть рационального числа c/d. Диагональная матрица с элементом a_i, расположенным на пересечении строки и столбца с номером i, $i=1,2,\dots,l$, обозначается через $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\dots,a_l)$, E_j обозначает единичную матрицу порядка j и A^t — транспонированную к A матрицу. Через $M_{r,s}(q)$ обозначается алгебра $r\times s$-матриц над полем $GF(q)$ $(r,s\in\mathbb{N})$. Если $V=\bigoplus V_i$ — разложение пространства V в прямую сумму подпространств V_i, то базис $(v_{11},\dots,v_{1m_1},v_{21},\dots,v_{2m_2},\dots)$ пространства V такой, что $(v_{i1},\dots,v_{im_i})$ — базис пространства V_i, называется *базисом, согласованным с этим разложением.*

2. Специальные линейные группы

Пусть форма f *нулевая* и $G=SL(V)$. Тогда любое подпространство из V является изотропным. Пусть W — произвольное собственное подпространство размерности k пространства V. Для любого подпространства Y из V размерности $l-k$ представления группы G на левых смежных классах по подгруппам G_W и G_Y подобны, так как существует автоморфизм группы G, отображающий G_W на G_Y (см. [14, гл. 4, разд. 1]). Поэтому считаем далее в этом разделе, что $k \leqslant [l/2]$.

Матрицы элементов из $GL(V)$ в произвольном фиксированном базисе пространства V образуют группу $GL_l(q)$ всех невырожденных матриц порядка l над полем $K = GF(q)$, изоморфную $GL(V)$. Порядок этой группы равен $q^{(l^2-l)/2}(q^l-1)(q^{l-1}-1)\dots(q-1)$, а порядок группы $SL_l(q)$ равен $\mid GL_l(q)\mid/(q-1)$.

Лемма 1 [14, лемма 4.1.13 и предложение 4.1.17]. *Пусть $G = SL(V)$ и W — собственное подпространство пространства V. Тогда в V существует подпространство U такое, что $V = W \oplus U$ и $G_W = C\colon L$, где C действует тождественно на факторах ряда $0 < W < V$, а L фиксирует подпространства W и U.*

Теорема 1. *Пусть $G = SL(V)$ и W — собственное подпространство размерности k пространства V. Тогда $G_W \cong [q^{k(l-k)}]\colon ((SL_k(q)\times SL_{l-k}(q))\colon(q-1))$.*

Доказательство. В обозначениях леммы 1 пусть $w_1,w_2,\dots,w_k,u_1,u_2,\dots,u_{l-k}$ — базис пространства V, согласованный с разложением $V = W\oplus U$. Доказательство непосредственно следует из леммы 1, так как в выбранном базисе матрицы преобразований из C и L имеют соответственно вид

$$\left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline A & E_{l-k}\end{array}\right) \quad \text{и} \quad \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & D\end{array}\right)\cdot \operatorname{diag}(\lambda,1,1,\dots,1,\lambda^{-1},1,1,\dots,1),$$

где $A \in M_{l-k,k}(q)$, $B\in SL_k(q)$, $D \in SL_{l-k}(q)$, $\lambda \in GF(q)^*$ и λ^{-1} стоит на $(k+1)$-м месте. В частности, $\mid C\mid = q^{k(l-k)}$ и $L = (L_1\times L_2)\colon\langle x\rangle$, где $L_1 = C_L(U)$, $L_2 = C_L(W)$), а матрица преобразования x в выбранном базисе имеет вид $\operatorname{diag}(\mu,1,1,\dots,1,\mu^{-1},1,1,\dots,1)$, причем μ — порождающий элемент группы $GF(q)^*$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть W — подпространство размерности k пространства V. Степень подстановочного представления группы $G \cong SL_l(q)$ на левых смежных классах по подгруппе G_W равна*

$$\frac{(q^{l-k+1}-1)(q^{l-k+2}-1)\dots(q^l-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q^2-1)(q-1)}.$$

Доказательство. Имеем $\mid G_W\mid = q^{k(l-k)}\cdot\mid SL_k(q)\mid\cdot\mid SL_{l-k}(q)\mid\cdot(q-1)$ из теоремы 1. Утверждение следствия получается из того, что степень подстановочного представления группы G на левых смежных классах по подгруппе G_W равна индексу $\mid G\colon G_W\mid$.

Теорема 2. *Пусть $G = SL(V)$ и W — подпространство размерности $k \leqslant [l/2]$ в V. Тогда в V найдутся подпространства $W_1,\dots,W_k$ размерности k такие, что*

$$G_W\cap G_{W_i} \cong \left[q^{kl-i^2-k^2}\right]\colon\Big(\Big([q^{i(l-2i)}]\colon\big(SL_i(q)\times GL_{k-i}(q)\times SL_i(q)\times GL_{l-k-i}(q)\big)\Big)\colon(q-1)\Big).$$

Доказательство. Пусть $w_1,w_2,\dots,w_k,u_1,u_2,\dots,u_{l-k}$ — базис пространства V, согласованный с разложением $V = W\oplus U$ и C, $L = (L_1\times L_2)\colon\langle x\rangle$, как в доказательстве теоремы 1. Зафиксируем i из множества $\{1,2,\dots,k\}$ и рассмотрим подпространство W_i размерности k, натянутое на векторы $w_{i+1},w_{i+2},\dots,w_k,u_1,u_2,\dots,u_i$. Для $i = 1,2,\dots,k$ подгруппа $G_W\cap G_{W_i}$ из G является двойным стабилизатором подстановочного представления группы G на смежных классах по параболической максимальной подгруппе G_W, причем $G_W\cap G_{W_i} = (C\cap G_{W_i})\colon(L\cap G_{W_i})$ и

$$C_i \equiv C\cap G_{W_i} = \big\{\varphi\in SL(V)\mid w_j^{\varphi} = w_j \text{ для } j = 1,\dots,k;\quad u_r^{\varphi}-u_r\in W\cap W_i \text{ для } r = 1,\dots,i;$$

$$u_r^{\varphi}-u_r\in W \text{ для } r = i+1,\dots,l-k\big\},$$

$$L \cap G_{W_i} = \{\varphi \in SL(V) \mid W^\varphi = W, \quad W_i^\varphi = W_i, \quad U^\varphi = U\}.$$

Положим $S_i \equiv (L_1 \times L_2) \cap G_{W_i}$, тогда $L \cap G_{W_i} = S_i\colon (q-1)$. Матрицы c_i преобразований из C_i и s_i из S_i при $i = 1, 2, \ldots, k-1$ в выбранном базисе имеют соответственно вид

$$c_i = \left(\begin{array}{c|c} E_k & 0 \\ \hline \begin{array}{c|c} 0 & M \\ \hline \multicolumn{2}{c}{D} \end{array} & E_{l-k} \end{array}\right) \quad \text{и} \quad s_i = \left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c|c} b\cdot B & F \\ \hline 0 & Q \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} t\cdot T & 0 \\ \hline R & N \end{array} \end{array}\right),$$

где $M, F \in M_{i,k-i}(q)$, $D \in M_{l-k-i,k}(q)$, $R \in M_{l-k-i,i}(q)$, $Q \in GL_{k-i}(q)$, $B, T \in SL_i(q)$, $N \in GL_{l-k-i}(q)$, $b = \mathrm{diag}(\det Q^{-1}, 1, 1, \ldots, 1)$, $t = \mathrm{diag}(\det N^{-1}, 1, 1, \ldots, 1)$.

Если $i = k$ и $l > 2k$, то

$$c_k = \left(\begin{array}{c|c|c} E_k & 0 & 0 \\ \hline 0 & E_k & 0 \\ \hline H & 0 & E_{l-2k} \end{array}\right) \quad \text{и} \quad s_k = \left(\begin{array}{c|c|c} P & 0 & 0 \\ \hline 0 & z\cdot Z & 0 \\ \hline 0 & Y & X \end{array}\right),$$

а если $i = k$ и $l = 2k$, то $c_k = E_{2k}$ и $s_k = \left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Z \end{array}\right)$, где $P, Z \in SL_k(q)$, $X \in GL_{l-2k}(q)$, $z = \mathrm{diag}(\det X^{-1}, 1, 1, \ldots, 1)$ и $Y, H \in M_{l-2k,k}(q)$. Имеем

$\mid C_i \mid = q^{i(k-i)} \cdot q^{k(l-k-i)}$, $C_i \cong \left[q^{kl-i^2-k^2}\right]$, $S_i \cong [q^{i(l-2i)}]\colon \big(SL_i(q) \times GL_{k-i}(q) \times SL_i(q) \times GL_{l-k-i}(q)\big)$.

Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть W — подпространство размерности k пространства V. Подстепени n_i подстановочного представления группы $G \cong SL_l(q)$ на левых смежных классах по подгруппе G_W равны*

$$q^{i^2} \cdot \frac{(q^{k-i+1}-1)(q^{k-i+2}-1)\ldots(q^k-1)(q^{l-k-i+1}-1)(q^{l-k-i+2}-1)\ldots(q^{l-k}-1)}{(q-1)^2(q^2-1)^2\ldots(q^i-1)^2}$$

для $i = 1, 2, \ldots, k$ и $n_0 = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 2 имеем $\mid G_W \cap G_{W_i} \mid = \mid C_i S_i (q-1) \mid = q^{kl-i^2-k^2} \cdot q^{i(l-2i)} \cdot \mid SL_i(q) \mid \cdot \mid GL_{k-i}(q) \mid \cdot \mid SL_i(q) \mid \cdot \mid GL_{l-k-i}(q) \mid \cdot (q-1)$. Теперь можно вычислить подстепень $n_i \equiv \mid G_W : G_W \cap G_{W_i} \mid$. Следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть W — подпространство размерности k пространства V. Ранг подстановочного представления группы $G = SL(V)$ на левых смежных классах по подгруппе G_W равен $k+1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что $k \leqslant [l/2]$, где l — размерность пространства V. Ранее в [11] с помощью других методов, отличных от настоящей работы, был получен ранг подстановочного представления группы $G = SL(V)$ на левых смежных классах по подгруппе G_W. В теореме 2 явно указаны k попарно не изоморфных стабилизаторов G_{W_i} для $i = 1, 2, \ldots, k$ других точек, отличных от точки G_W. Следствие 2 говорит о том, что найдены все орбиты группы G_W, включая и тривиальную, количество этих орбит равно $k+1$. Следствие доказано.

Проективная специальная линейная группа $PSL_l(q)$ является факторгруппой группы $SL_l(q)$ по центру. Степень, ранг и подстепени подстановочного представления группы $PSL_l(q)$ по параболической максимальной подгруппе совпадают с соответствующими степенью, рангом и подстепенями подстановочного представления группы $SL_l(q)$. Из строения двойного стабилизатора $G_W \cap G_{W_i} = C_i\colon (S_i\colon (q-1))$ в группе $SL_l(q)$ $(0 \leqslant i \leqslant k,\ W_0 = W)$ следует, что при естественном гомоморфизме группы $SL_l(q)$ на $PSL_l(q)$ подгруппа C_i отображается изоморфно, а подгруппа $S_i\colon (q-1)$ содержит центр группы $SL_l(q)$ и поэтому отображается на свою факторгруппу по этому центру, который является циклической группой порядка, равного $(l, q-1)$. Если $(l, q-1) = 1$, то двойные стабилизаторы подстановочного представления группы $PSL_l(q)$ совпадают с соответствующими двойными стабилизаторами группы $SL_l(q)$.

3. Унитарные группы

Пусть V — векторное пространство размерности l над полем $K = GF(q^2)$. Это поле обладает автоморфизмом $\sigma\colon a \mapsto a^q$ порядка 2, а его подполе $GF(q)$ состоит из неподвижных точек относительно этого автоморфизма σ. Пусть f — невырожденная унитарная форма, определенная на V. Порядок унитарной группы $GU(V) \cong GU_l(q)$ равен $q^{(l^2-l)/2}\prod_{i=1}^{l}(q^i-(-1)^i)$. Порядок ее подгруппы $G = SU(V) \cong SU_l(q) = GU_l(q) \cap SL_l(q^2)$ равен $\mid GU(V) \mid /(q+1)$.

Лемма 2 [14, предложение 2.3.2]. *В пространстве V с невырожденной унитарной формой $(\ ,\ )$ существует базис $e_1,e_2,\dots,e_m,f_1,f_2,\dots,f_m$ при $\dim V = 2m$ и базис $e_1,e_2,\dots,e_m,f_1$, $f_2,\dots,f_m,x$ при $\dim V = 2m+1$ такой, что выполняются равенства $(e_i,e_j) = (f_i,f_j) = 0$, $(e_i,f_j) = \delta_{ij}$ и $(e_i,x) = (f_i,x) = 0$ для всех $1 \leqslant i,j \leqslant m$, $(x,x) = 1$.*

Лемма 3 [14, лемма 4.1.12, предложение 4.1.18]. *Пусть $G = SU(V)$ и W — изотропное подпространство размерности k пространства V. Тогда*

(1) *в V существует подпространство Y такое, что $V = (W \oplus Y) \perp (W \oplus Y)^{\perp}$;*

(2) *$G_W = C\colon L$, где группа C действует тождественно на факторах ряда $0 < W < W^{\perp} < V$, а группа L изоморфна $(SL_k(q^2) \times SU_{l-2k}(q)).(q^2-1)$ при $2k < l$, $SL_k(q^2).(q-1)$ — при $2k = l$.*

Лемма 4. *Матрицы преобразований из подгруппы C группы G_W в некотором базисе, согласованном с разложением $V = (W \oplus Y) \perp (W \oplus Y)^{\perp}$, имеют вид*

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
E_k & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline
A & E_k & F & R & Z\\ \hline
B & 0 & E_{m-k} & 0 & 0\\ \hline
Q & 0 & 0 & E_{m-k} & 0\\ \hline
X & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right),$$

где для матриц A,B,Q,R,F,Z,X справедливы равенства

$$(A+FR^{\sigma t})^{\sigma t} + (A+FR^{\sigma t}) + ZZ^{\sigma t} = 0, \quad F = -Q^{\sigma t}, \quad R = -B^{\sigma t}, \quad Z = -X^{\sigma t}.$$

Доказательство. Из базиса пространства V, указанного в лемме 2, построим новый базис, согласованный с разложением $V = (W \oplus Y) \perp (W \oplus Y)^{\perp}$. Пусть W — подпространство, натянутое на векторы $e_1,e_2,\dots,e_k$, и Y — подпространство, натянутое на $f_1,f_2,\dots,f_k$. Тогда подпространство $(W\oplus Y)^{\perp}$ есть линейная оболочка векторов $e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_m,f_{k+1}f_{k+2},\dots,$ f_m,x, причем последний базисный вектор x отсутствует, если размерность V четна. Заметим, что при этом подпространство $W^{\perp}$ есть линейная оболочка векторов $e_1,e_2,\dots,e_m,f_{k+1},f_{k+2},\dots,$ f_m,x. Матрица преобразования φ из C в полученном базисе $e_1,e_2,\dots,e_k,f_1,f_2,\dots,$ f_k,e_{k+1}, $e_{k+2},\dots,e_m,f_{k+1},f_{k+2},\dots,f_m,x$ имеет вид, указанный в формулировке леммы, где $A = (a_{ij})_{k,k}$, $B = (b_{ij})_{m-k,k}$, $Q = (q_{ij})_{m-k,k}$, $F = (f_{ij})_{k,m-k}$, $R = (r_{ij})_{k,m-k}$, $X = (x_i)_{1,k}$, $Z = (z_j)_{k,1}$. Заметим, что последний столбец и последняя строка в этой матрице исчезают, если размерность пространства V четна.

Любая матрица преобразования из C сохраняет невырожденную унитарную форму. Пусть для $i = 1,2,\dots,k$ и $t = 1,2,\dots,m-k$

$$e_i^{\varphi} = e_i, \quad f_i^{\varphi} = f_i + \sum_{d=1}^{k} a_{id}e_d + \sum_{d=1}^{m-k} f_{id}e_{k+d} + \sum_{d=1}^{m-k} r_{id}f_{k+d} + z_i x,$$

$$e_{k+t}^{\varphi} = e_{k+t} + \sum_{d=1}^{k} b_{td}e_d, \quad f_{k+t}^{\varphi} = f_{k+t} + \sum_{d=1}^{k} q_{td}e_d, \quad x^{\varphi} = x + \sum_{d=1}^{k} x_d e_d.$$

Вычислим значение формы f на базисных векторах. Имеем

$$0=(f_i,e_{k+t})=(f_i^{\varphi},e_{k+t}^{\varphi})=b_{ti}^q+r_{it},\quad 0=(f_i^{\varphi},f_{k+t}^{\varphi})=q_{ti}^q+f_{it},\quad 0=(f_i^{\varphi},x^{\varphi})=x_i^q+z_i,$$

поэтому $R=-B^{\sigma t}$, $F=-Q^{\sigma t}$ и $Z=-X^{\sigma t}$. Далее,

$$0=(f_i^{\varphi},f_j^{\varphi})=a_{ij}+a_{ji}^q+\sum_{d=1}^{m-k}f_{id}r_{jd}^q+\sum_{d=1}^{m-k}f_{jd}^q r_{id}+z_iz_j^q,\quad a_{ij}+\sum_{d=1}^{m-k}f_{id}r_{jd}^q+a_{ji}^q+\sum_{d=1}^{m-k}f_{jd}^q r_{id}+z_iz_j^q=0.$$

Последнее равенство означает, что $(A+FR^{\sigma t})^{\sigma t}+(A+FR^{\sigma t})+ZZ^{\sigma t}=0$. Значения формы f на остальных базисных векторах дают тривиальные соотношения. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $G=SU(V)$ и W — изотропное подпространство размерности k в V. Тогда порядок $|\,G_W\,|$ равен*

$$q^{(l^2-l)/2}(q^{2k}-1)(q^{2k-2}-1)\dots(q^2-1)(q^{l-2k}-(-1)^{l-2k})(q^{l-2k-1}-(-1)^{l-2k-1})\dots(q^2-1)$$
при $k<[l/2]$,

$$q^{(l^2-l)/2}(q^{2k}-1)(q^{2k-2}-1)\dots(q^4-1)(q-1) \text{ при } l=2k,$$
$$q^{(l^2-l)/2}(q^{2k}-1)(q^{2k-2}-1)\dots(q^4-1)(q^2-1) \text{ при } l=2k+1.$$

Доказательство. Известно, что максимальное изотропное подпространство пространства V относительно невырожденной унитарной формы имеет размерность $[l/2]$ (см., например, [14, следствие 2.1.7]).

Из леммы 3 следует, что $|\,G_W\,|=|\,C\,|\cdot|\,L\,|$ и порядок $|\,L\,|$ равен $|\,SL_k(q^2)\,|\cdot|\,SU_{l-2k}(q)\,|\cdot(q^2-1)$ при $2k<l$ и $|\,SL_k(q^2)\,|\cdot(q-1)$ при $2k=l$. Для того чтобы найти порядок подгруппы C, нужно вычислить количество матриц вида A, B, Q и X из леммы 4. Элементами матриц B, Q и X могут быть любые элементы поля $GF(q^2)$, поэтому существует точно $q^{2k(m-k)}$ матриц B, столько же матриц Q и q^{2k} матриц X. Таким образом, имеем точно $q^{2k(2m-2k+1)}=q^{2k(l-2k)}$ троек $\{B,Q,X\}$. Положим $A+FR^{\sigma t}=T=(t_{ij})_{k,k}$. Тогда первое матричное равенство из заключения леммы 4 примет вид $T^{\sigma t}+T+ZZ^{\sigma t}=0$. Определим количество матриц T, удовлетворяющих этому равенству, при фиксированной матрице $ZZ^{\sigma t}=H=(h_{ij})_{k,k}$.

При $1\leqslant i<j\leqslant k$ имеем уравнения $t_{ji}^q+t_{ij}+h_{ij}=0$ для элементов матриц. Покажем, что при фиксированных t_{ij} и h_{ij} из $GF(q^2)^*$ существует единственный элемент $t_{ji}\in GF(q^2)^*$, удовлетворяющий уравнению $t_{ji}^q+t_{ij}+h_{ij}=0$. Пусть γ — порождающий элемент мультипликативной группы $GF(q^2)^*$. Положим $t_{ji}=\gamma^c$ и $-t_{ij}-h_{ij}=\gamma^a$. Наше уравнение примет вид $(\gamma^c)^q=\gamma^a$, что равносильно сравнению $cq\equiv a\bigl(\operatorname{mod} q^2-1\bigr)$. Это сравнение имеет в $GF(q^2)$ единственное решение c, так как q и q^2-1 взаимно просты. Поэтому при фиксированном h_{ij}, где $1\leqslant i<j\leqslant k$, существует точно $q^{2(k-1)}\cdot q^{2(k-2)}\dots q^2=q^{k(k-1)}$ элементов t_{ij}.

Рассмотрим случай $i=j\in\{1,2,\dots,k\}$ и уравнения $t_{ii}^q+t_{ii}+h_{ii}=0$. Заметим, что $t_{ii}^q+t_{ii}$ и h_{ii} принадлежат $GF(q)$. Для фиксированного $h_{ii}\in GF(q)$ найдется хотя бы один элемент $t\in GF(q^2)$, удовлетворяющий равенству $t^q+t=-h_{ii}$, так как отображение следа сюрьективно (см. [15, теорема 2.28]). Если характеристика поля K четна и есть один корень t уравнения $x^q+x+h_{ii}=0$, то все элементы вида $t+t_0$ для любого $t_0\in GF(q)^*$ тоже будут корнями этого уравнения. Действительно, $(t+t_0)^q+(t+t_0)+h_{ii}=t^q+t_0^q+t+t_0+h_{ii}=t^q+t_0+t+t_0+h_{ii}=t^q+t+h_{ii}=0$. Если же характеристика поля K нечетна, то, выполнив в уравнении $x^q+x+h_{ii}=0$ замену $x+h_{ii}/2=y$, получим уравнение $y^q+y=0$, которое имеет точно q решений.

Таким образом, каждая диагональная позиция матрицы T может принимать точно q значений. Поэтому матрицу T, а значит, и матрицу A можно выбрать точно $q^{k(k-1)}\cdot q^k=q^{k^2}$ способами при каждой фиксированной тройке матриц $\{B,Q,X\}$. Получаем, что порядок подгруппы C из стабилизатора G_W равен $q^{2k(l-2k)}\cdot q^{k^2}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть W — изотропное подпространство размерности k в V. Степень подстановочного представления группы $G = SU(V)$ на левых смежных классах по параболической максимальной подгруппе G_W равна*

$$\frac{(q^l-(-1)^l)(q^{l-1}-(-1)^{l-1})\dots(q^{l-2k+1}-(-1)^{l-2k+1})}{(q^{2k}-1)(q^{2k-2}-1)\dots(q^2-1)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что заключение леммы непосредственно следует из леммы 5, так как степень нашего представления равна индексу $|\,G\colon G_W\,|$.

Теорема 3. *Пусть $G = SU(V)$ и W — изотропное подпространство размерности k в V. Тогда в V найдутся такие изотропные подпространства $W_{i,k-i-j,j}$ размерности k, где $0 \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant i+j \leqslant k$ и $0 \leqslant j \leqslant [l/2]-k$ при $2k \geqslant [l/2]$, $0 \leqslant j \leqslant k$ при $2k \leqslant [l/2]$, что*

$$G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = C_{i,k-i-j,j}\colon L_{i,k-i-j,j}\,,\ \textit{где}\ \ |\,C_{i,k-i-j,j}\,| = q^{2(i+j)(l-k)-(i+j)^2-2j^2},$$

$$L_{i,k-i-j,j} \cong \left[q^{2i(k-i)+2j(k-i-j)}\right]\colon \left(SL_i(q^2).\,(q^2-1)\times SL_j(q^2).\,(q^2-1)\times SL_{k-i-j}(q^2).\,(q^2-1)\times G_j\right)$$

и подгруппа G_j изоморфна стабилизатору изотропного подпространства размерности j в $SU_{l-2k}(q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $m = [l/2]$. Зафиксируем согласно лемме 2 в пространстве V базис $e_1,e_2,\dots,e_k,f_1,f_2,\dots,f_k,e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_m,f_{k+1},f_{k+2},\dots,f_m,x$, согласованный с разложением $V = (W\oplus Y)\perp(W\oplus Y)^{\perp}$, причем вектор x отсутствует в этом базисе, если размерность пространства V четна.

Если $m-k \leqslant k$, т. е. $2k \geqslant m$, то рассмотрим следующие изотропные подпространства размерности k в V:

$$\begin{aligned}
&W_{k-1,1,0} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-1},f_k\rangle,\quad W_{k-2,2,0} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-2},f_{k-1},f_k\rangle,\dots,\\
&W_{1,k-1,0} = \langle e_1,f_2,f_3,\dots,f_k\rangle,\quad W_{0,k,0} = \langle f_1,f_2,\dots,f_k\rangle;\quad W_{k-1,0,1} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-1},e_m\rangle,\\
&W_{k-2,1,1} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-2},f_k,e_m\rangle,\quad W_{k-3,2,1} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-3},f_{k-1},f_k,e_m\rangle,\dots,\\
&W_{1,k-2,1} = \langle e_1,f_3,f_4,\dots,f_k,e_m\rangle,\quad W_{0,k-1,1} = \langle f_2,f_3,\dots,f_k,e_m\rangle;\\
&W_{k-2,0,2} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-2},e_{m-1},e_m\rangle,\quad W_{k-3,1,2} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-3},f_k,e_{m-1},e_m\rangle,\\
&W_{k-4,2,2} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-4},f_{k-1},f_k,e_{m-1},e_m\rangle,\dots,W_{1,k-3,2} = \langle e_1,f_4,f_5,\dots,f_k,e_{m-1},e_m\rangle,\\
&W_{0,k-2,2} = \langle f_3,f_4,\dots,f_k,e_{m-1},e_m\rangle;\quad W_{k-3,0,3} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-3},e_{m-2},e_{m-1},e_m\rangle,\\
&W_{k-4,1,3} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-4},f_k,e_{m-2},e_{m-1},e_m\rangle,\\
&W_{k-5,2,3} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-5},f_{k-1},f_k,e_{m-2},e_{m-1},e_m\rangle,\dots,\\
&W_{1,k-4,3} = \langle e_1,f_5,f_6,\dots,f_k,e_{m-2},e_{m-1},e_m\rangle,\\
&W_{0,k-3,3} = \langle f_4,f_5,\dots,f_k,e_{m-2},e_{m-1},e_m\rangle;\dots;\\
&W_{2k-m,0,m-k} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{2k-m},e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_m\rangle,\\
&W_{2k-m-1,1,m-k} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{2k-m-1},f_k,e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_m\rangle,\\
&W_{2k-m-2,2,m-k} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{2k-m-2},f_{k-1},f_k,e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_m\rangle,\dots,\\
&W_{1,2k-m-1,m-k} = \langle e_1,f_{m-k+2},f_{m-k+3},\dots,f_k,e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_m\rangle,\\
&W_{0,2k-m,m-k} = \langle f_{m-k+1},f_{m-k+2},\dots,f_k,e_{k+1},e_{k+2},\dots,e_m\rangle.
\end{aligned}$$

Если $m-k \geqslant k$, т. е. $2k \leqslant m$, то рассмотрим изотропные подпространства размерности k в V :

$$W_{k-1,1,0} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-1},f_k\rangle,\quad W_{k-2,2,0} = \langle e_1,e_2,\dots,e_{k-2},f_{k-1},f_k\rangle,\dots,$$

$W_{1,k-1,0} = \langle e_1, f_2, f_3, \ldots, f_k\rangle, \quad W_{0,k,0} = \langle f_1, f_2, \ldots, f_k\rangle; \quad W_{k-1,0,1} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, e_m\rangle,$
$W_{k-2,1,1} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-2}, f_k, e_m\rangle, \quad W_{k-3,2,1} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-3}, f_{k-1}, f_k, e_m\rangle, \ldots,$
$W_{1,k-2,1} = \langle e_1, f_3, f_4, \ldots, f_k, e_m\rangle, \quad W_{0,k-1,1} = \langle f_2, f_3, \ldots, f_k, e_m\rangle;$
$W_{k-2,0,2} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-2}, e_{m-1}, e_m\rangle, \quad W_{k-3,1,2} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-3}, f_k, e_{m-1}, e_m\rangle,$
$W_{k-4,2,2} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-4}, f_{k-1}, f_k, e_{m-1}, e_m\rangle, \ldots, W_{1,k-3,2} = \langle e_1, f_4, f_5, \ldots, f_k, e_{m-1}, e_m\rangle,$
$W_{0,k-2,2} = \langle f_3, f_4, \ldots, f_k, e_{m-1}, e_m\rangle; \quad W_{k-3,0,3} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-3}, e_{m-2}, e_{m-1}, e_m\rangle,$
$W_{k-4,1,3} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-4}, f_k, e_{m-2}, e_{m-1}, e_m\rangle,$
$W_{k-5,2,3} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_{k-5}, f_{k-1}, f_k, e_{m-2}, e_{m-1}, e_m\rangle, \ldots,$
$W_{1,k-4,3} = \langle e_1, f_5, f_6, \ldots, f_k, e_{m-2}, e_{m-1}, e_m\rangle, \quad W_{0,k-3,3} = \langle f_4, f_5, \ldots, f_k, e_{m-2}, e_{m-1}, e_m\rangle; \ldots;$
$W_{3,0,k-3} = \langle e_1, e_2, e_3, e_{m-k+4}, e_{m-k+5}, \ldots, e_m\rangle, \quad W_{2,1,k-3} = \langle e_1, e_2, f_k, e_{m-k+4}, e_{m-k+5}, \ldots, e_m\rangle,$
$W_{1,2,k-3} = \langle e_1, f_{k-1}, f_k, e_{m-k+4}, e_{m-k+5}, \ldots, e_m\rangle,$
$W_{0,3,k-3} = \langle f_{k-2}, f_{k-1}, f_k, e_{m-k+4}, e_{m-k+5}, \ldots, e_m\rangle;$
$W_{2,0,k-2} = \langle e_1, e_2, e_{m-k+3}, e_{m-k+4}, \ldots, e_m\rangle, \quad W_{1,1,k-2} = \langle e_1, f_k, e_{m-k+3}, e_{m-k+4}, \ldots, e_m\rangle,$
$W_{0,2,k-2} = \langle f_{k-1}, f_k, e_{m-k+3}, e_{m-k+4}, \ldots, e_m\rangle; \quad W_{1,0,k-1} = \langle e_1, e_{m-k+2}, e_{m-k+3}, \ldots, e_m\rangle,$
$W_{0,1,k-1} = \langle f_k, e_{m-k+2}, e_{m-k+3}, \ldots, e_m\rangle; \quad W_{0,0,k} = \langle e_{m-k+1}, e_{m-k+2}, \ldots, e_m\rangle.$

Для любого $k \leqslant m$ рассмотрим стабилизатор $G_{W_{i,k-i-j,j}}$ фиксированного изотропного подпространства $W_{i,k-i-j,j} = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i, f_{i+j+1}, f_{i+j+2}, \ldots, f_k, e_{m-j+1}, e_{m-j+2}, \ldots, e_m\rangle$, где i и j указаны в формулировке теоремы. Выясним строение пересечения $G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}}$ стабилизаторов подпространств W и $W_{i,k-i-j,j}$. Отметим, что

$$G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = (C\colon L) \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = (C \cap G_{W_{i,k-i-j,j}})\colon (L \cap G_{W_{i,k-i-j,j}}),$$

где C и L из леммы 3. Выясним строение матриц из подгруппы $C_{i,k-i-j,j} \equiv C \cap G_{W_{i,k-i-j,j}}$. Матрицы из подгруппы C описаны в лемме 4. Те из них, которые стабилизируют подпространство $W_{i,k-i-j,j}$, имеют вид, указанный на с. 122.
Символом $*$ отмечены прямоугольные матрицы с произвольными элементами из поля $GF(q^2)$, размер которых легко усматривается. Используя лемму 4, вычисляем количество матриц в подгруппе $C_{i,k-i-j,j}$. Получаем, что $\mid C_{i,k-i-j,j} \mid = q^{2(i+j)(l-k)-(i+j)^2-2j^2}$.

Выясним вид матриц из подгруппы $L_{i,k-i-j,j} \equiv L \cap G_{W_{i,k-i-j,j}}$. Как следует из доказательства леммы 3, матрицы из L в выбранном базисе имеют вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c} M & 0 & 0 \\ \hline 0 & M^{-1\sigma t} & 0 \\ \hline 0 & 0 & S \end{array}\right) \cdot \operatorname{diag}(a, 1, \ldots, 1, a^{-q}, 1, \ldots, 1, a^{q-1}, 1, \ldots, 1),$$

где $M \in SL_k(q^2)$, $M^{-1\sigma t} = ((M^{-1})^t)^\sigma$, $S \in SU_{l-2k}(q)$, а в диагональной матрице неединичные элементы стоят на первом, $(k+1)$-м и $(2k+1)$-м местах, $a \in GF(q^2)^*$. Из матриц, лежащих в L, выберем те, которые централизуют подпространство, натянутое на векторы e_1,e_2,…,e_i, и подпространство, натянутое на f_{i+j+1},f_{i+j+2},…,f_k, а подпространство $\langle e_{m-j+1}, e_{m-j+2}, \ldots, e_m\rangle$ стабилизируют. Для того чтобы матрица M централизовала подпространство $\langle e_1, e_2, \ldots, e_i\rangle$, она должна иметь вид

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline * & A_1 \end{array}\right),$$

где $A \in GL_i(q^2)$, $A_1 \in GL_{k-i}(q^2)$ и $\det AA_1 = 1$. С другой стороны, для того чтобы матрица $M^{-1\sigma t}$ централизовала подпространство $\langle f_{i+j+1}, f_{i+j+2}, \ldots, f_k\rangle$, матрица $M_1 = (M^{-1})^t$ должна иметь вид

$$\left(\begin{array}{c|c|c} B & * & * \\ \hline 0 & B_1 & * \\ \hline 0 & 0 & B_2 \end{array}\right),$$

$$
\begin{array}{c|ccc|c|cc|ccc}
 & e_1\dots e_i & e_{i+1}\dots e_{i+j} & e_{i+j+1}\dots e_k & f_1\dots f_k & e_{k+1}\dots e_{m-j} & e_{m-j+1}\dots e_m & f_{k+1}\dots f_{m-j} & f_{m-j+1}\dots f_m & x \\
\hline
e_1\dots e_k & \multicolumn{3}{c|}{E_k} & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c}{0} \\
\hline
f_1\dots f_i & * & \multicolumn{2}{c|}{*} & E_k & * & * & * & * & * \\
f_{i+1}\dots f_{i+j} & * & \multicolumn{2}{c|}{*} & E_k & * & * & * & 0 & * \\
f_{i+j+1}\dots f_k & * & \multicolumn{2}{c|}{0} & E_k & 0 & * & \multicolumn{3}{c}{0} \\
\hline
e_{k+1}\dots e_{m-j} & * & * & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{E_{m-k}} & \multicolumn{3}{c}{0} \\
e_{m-j+1}\dots e_m & * & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{E_{m-k}} & \multicolumn{3}{c}{0} \\
\hline
f_{k+1}\dots f_{m-j} & \multicolumn{2}{c}{*} & 0 & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{E_{m-k}} & 0 \\
f_{m-j+1}\dots f_m & \multicolumn{3}{c|}{*} & 0 & \multicolumn{2}{c|}{0} & \multicolumn{2}{c|}{E_{m-k}} & 0 \\
\hline
x & \multicolumn{2}{c|}{*} & 0 & & \multicolumn{2}{c|}{} & \multicolumn{2}{c|}{0} & 1
\end{array}
$$

Матрица из $C_{i,k-i-j,j}$.

где $B \in GL_i(q^2)$, $B_1 \in GL_j(q^2)$, $B_2 \in GL_{k-i-j}(q^2)$, $\det BB_1B_2 = 1$ и символом $*$ отмечены прямоугольные матрицы с произвольными элементами из поля $GF(q^2)$, размер которых легко усматривается. Матрица S выбирается из стабилизатора пространства $\langle e_{m-j+1}, e_{m-j+2}, \dots, e_m\rangle$ (размерности j) в группе $SU_{l-2k}(q)$. Такие стабилизаторы описаны в лемме 5. Таким образом, подгруппа $L_{i,k-i-j,j}$ состоит из матриц вида

$$\left(\begin{array}{c|c|c} M_1^{-1\sigma t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & S \end{array}\right) \cdot \operatorname{diag}(a, 1, \dots, 1, a^{-q}, 1, 1, \dots, 1, a^{q-1}, 1, 1, \dots, 1),$$

где M_1 и S — выбранные матрицы указанного вида. Строение группы $L_{i,k-i-j,j}$ установлено, и теорема доказана.

Следствие 4. *В обозначениях предыдущей теоремы подстепени*

$$n_{i,k-i-j,j} \equiv \mid G_W : G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} \mid$$

подстановочного представления группы G на левых смежных классах по подгруппе G_W равны

$$q^a \cdot \frac{\prod\limits_{s=1}^{k}(q^{2s}-1)\prod\limits_{s=1}^{l-2k}(q^s-(-1)^s)}{\prod\limits_{s=1}^{i}(q^{2s}-1)\prod\limits_{s=1}^{j}(q^{2s}-1)^2\prod\limits_{s=1}^{k-i-j}(q^{2s}-1)\prod\limits_{s=1}^{l-2k-2j}(q^s-(-1)^s)},$$

где $a = 2lk - 3k^2 - 2(l-k)(i+j) + (i+j)^2 + 2j^2$. (Если верхний индекс в $\prod$ равен нулю, то считаем, что соответствующее произведение равно единице).

Доказательство. Порядок группы $C_{i,k-i-j,j}$ указан в теореме 3, поэтому для доказательства достаточно вычислить порядок группы

$$L_{i,k-i-j,j} \cong \Big[q^{2(i(k-i)+j(k-i-j))}\Big] : \Big(SL_i(q^2).(q^2-1) \times SL_j(q^2).(q^2-1) \times SL_{k-i-j}(q^2).(q^2-1) \times G_j\Big).$$

Порядок подгруппы G_j из $L_{i,k-i-j,j}$ находим с помощью леммы 5.

Следствие 5. *Пусть W — изотропное подпространство размерности k в V. Ранг подстановочного представления группы $G = SU(V)$ на левых смежных классах по параболической максимальной подгруппе G_W равен $([l/2]-k+1)(3k-[l/2]+2)/2$ при $2k \geqslant [l/2]$ и $(k+1)(k+2)/2$ при $2k \leqslant [l/2]$.*

Доказательство. Положим $W = W_{k,0,0}$. Для доказательства достаточно вычислить в каждом из случаев $2k \geqslant [l/2]$ и $2k \leqslant [l/2]$ количество подпространств вида $W_{i,k-i-j,j}$, указанных в теореме 3. Отметим, что в каждом из этих случаев выполняются неравенства $0 \leqslant i+j \leqslant k$ и равенства $n = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{[l/2]-k} n_{i,k-i-j,j}$ при $2k \geqslant [l/2]$ и $n = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{k} n_{i,k-i-j,j}$ при $2k \leqslant [l/2]$, где через n обозначена степень рассматриваемого представления, вычисленная в лемме 6.

Проективной специальной унитарной группой $PSU(V)$ называется факторгруппа группы $SU(V)$ по центральной подгруппе, порядок которой равен $(q+1,l)$. Степень, ранг и подстепени подстановочного представления группы $PSU(V)$ по параболической максимальной подгруппе совпадают с соответствующими степенью, рангом и подстепенями подстановочного представления группы $SU(V)$. Из строения двойного стабилизатора $G_W \cap G_{W_{i,k-i-j,j}} = C_{i,k-i-j,j} : L_{i,k-i-j,j}$ в группе $SU(V)$ ($0 \leqslant i \leqslant k$, $0 \leqslant i+j \leqslant k$, $0 \leqslant j \leqslant [l/2]-k$ или $0 \leqslant j \leqslant k$) следует, что при естественном гомоморфизме группы $SU(V)$ на $PSU(V)$ подгруппа $C_{i,k-i-j,j}$ отображается изоморфно, подгруппа $L_{i,k-i-j,j}$ содержит центр группы $SU(V)$ и поэтому отображается на свою факторгруппу по этому центру.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мазуров В.Д.** Минимальные подстановочные представления конечных простых классических групп. Специальные линейные, симплектические и унитарные группы // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 3. С. 267–287.
2. **Васильев А.В., Мазуров В.Д.** Минимальные подстановочные представления конечных простых ортогональных групп // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 6. С. 603–627.
3. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа G_2 и F_4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 6. С. 663–684.
4. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп типа E_6, E_7 и E_8 // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 5. С. 518–530.
5. **Васильев А.В.** Минимальные подстановочные представления конечных простых исключительных групп скрученного типа // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 1. С. 17–35.
6. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления группы $F_4(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1998. Т. 5. С. 39–59.
7. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп $E_6(q)$ и $E_7(q)$ // Комбинатор. и вычисл. методы в математике. Омск: Изд-во ОмГУ, 1999. С. 160–189.
8. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп $E_8(q)$ / Челяб. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 29.10.99, № 3224–В99. 221 с.
9. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп ${}^2F_4(q)$ и ${}^3D_4(q^3)$ // Мат. заметки. 2000, Т. 67, № 1. С. 69–76.
10. **Кораблева В.В.** Параболические подстановочные представления групп ${}^2E_6(q)$ // Мат. заметки. 2000. Т. 67, № 6. С. 899–912.

11. **Кораблева В.В.** Ранги примитивных параболических подстановочных представлений классических групп лиевского типа $A_l(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2001. Т. 7. С. 188–193.
12. **Кораблева В.В.** Ранги примитивных параболических подстановочных представлений простых групп $B_l(q)$, $C_l(q)$ и $D_l(q)$ // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 2. С. 340–356.
13. **Кораблева В.В.** Примитивные параболические подстановочные представления простых групп $A_l(q)$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 70–81.
14. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups // London Math. Soc. Lect. Note Ser. 1990. Vol. 129. 303 p.
15. **Айерлэнд К., Роузен М.** Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987. 476 с.

Кораблева Вера Владимировна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Челябин. гос. ун-т
e-mail: vvk@csu.ru

Поступила 12.01.2008

Том 15 № 2 2009

УДК 512.54

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ БЕРНСАЙДОВЫХ ГРУПП $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$ [1]

А. А. Кузнецов, А. К. Шлёпкин

Описан алгоритм для вычисления элементов и соотношений в бернсайдовых группах. Затем сделан сравнительный анализ групп $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$.

Ключевые слова: проблема Бернсайда.

A. A. Kuznetsov, A. K. Shlepkin. Comparative analysis of the Burnside groups $B(2,5)$ and $B_0(2,5)$.

An algorithm for computing elements and relations in Burnside groups is described. After that, a comparative analysis of the groups $B(2,5)$ and $B_0(2,5)$ is carried out.

Keywords: Burnside problem.

Введение

В 1902 г. У. Бернсайд сформулировал следующую проблему: “Будет ли всякая группа с конечным числом m образующих и тождественным соотношением $x^n = 1$ конечной?”. В общем случае ответ на эту задачу отрицательный [1]. По данной задаче имеется внушительный машинный эксперимент [2–4]. В большинстве работ в этом направлении используются комбинаторно-перечислительные методы в коммутаторном исчислении, базирующиеся на конструкциях алгебры Ли. Однако до сих пор остается открытым вопрос о конечности некоторых бернсайдовых групп. Так, например, неизвестно, конечна ли группа с двумя образующими $m = 2$ и тождественным соотношением $x^5 = 1$ ($B(2,5)$ — группа).

В 1955 г. А.И. Кострикин решил ослабленную проблему Бернсайда для показателя 5 [5], доказав, что существует максимальная конечная группа с двумя образующими и тождественным соотношением $x^5 = 1$ ($B_0(2,5)$ — группа), для которой $5^{31} \le |B_0(2,5)| \le 5^{34}$. Позднее, в 1974 г., Дж. Хавас, Г. Уолл и Дж. Уомсли показали, что $|B_0(2,5)| = 5^{34}$ [6].

Если группа $B(2,5)$ конечна, то $B_0(2,5) \cong B(2,5)$.

В разд. 1 настоящей работы подробно описывается алгоритм, при помощи которого можно вычислять элементы и соотношения в бернсайдовых группах и, в частности, в группе $B(2,5)$. После чего (разд. 2) проводится сравнение групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ на основе указанного алгоритма. В разд. 3 приведены результаты вычислений элементов и соотношений в группе $B(2,5)$ по алгоритму из разд. 1.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента России (проект МК-2494.2008.1), АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/3023), а также РФФИ (проект 09-01-00717-а).

1. Описание алгоритма

1.1. Слова в $B(m,n)$, отношение порядка на них, соотношения в группе и минимальные слова

Введем несколько определений. Пусть $B(m,n) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid g^n = e\rangle$ — свободная бернсайдова группа периода n с множеством свободных порождающих $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ и e — ее единица. На множестве этих порождающих введем отношение порядка "$<$" (меньше): $\{x_1 < x_2 < \dots < x_m\}$.

Пусть g — элемент группы $B(m,n)$. Тогда его можно представить в виде конечного произведения из свободных порождающих, т. е. $g = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s$, где $\alpha_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Правую часть данного равенства мы будем называть словом и записывать $v = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_s$. В некоторых случаях, если необходимо подчеркнуть связь между элементом группы g и представляющим его словом v (т. е. записью элемента g через образующие), мы будем писать $g_v = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s$. Натуральное число s будем называть длиной слова v. Функция $L(v)$ определена на множестве всех слов и равна длине слова v, т. е. $L(v) = s$ для слова v, указанного выше. Единица e группы $B(m,n)$ будет представлена пустым словом. По определению длина пустого слова равна 0. Говорят, что слово x входит в слово w, если можно указать такие слова p и q, что $w = pxq$. Если при этом слово p (слово q) пусто, то говорят, что x есть начало (конец) слова w. Слово вида $w = \underbrace{xx\ldots x}_{n}$ будем называть n-периодическим. Слово w будем называть n-апериодическим, если в него не входит никакое непустое слово вида x^n, т. е. $w \neq p\underbrace{xx\ldots x}_{n}q$.

Определение отношения порядка "$<$" на множестве слов. Будем говорить, что слово w меньше слова v, и записывать это как $w < v$, если имеет место одно из следующих утверждений:

1. $L(w) < L(v)$.

2. Если $L(w) = L(v)$, то $w = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s$ и $v = \beta_1\beta_2\ldots\beta_s$, где $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\ldots$, $\alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$ и $\alpha_k < \beta_k$ для некоторого $1 \le k \le s$.

Определение соотношения в группе. Пусть $v = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s$ и $w = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r$ — два слова, представляющие один элемент $g \in B(m,n)$, т. е. $g_v = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s = g_w = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_r$. Тогда равенство

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r$$

мы будет называть соотношением в $B(m,n)$.

Каждое слово единственным образом определяет соответствующий ему элемент в группе.

Определение минимального слова. Слово v будем называть минимальным в $B(m,n)$ относительно введенного порядка, если для любого другого слова w, удовлетворяющего условию $g_v = g_w$, будет выполняться $v < w$. Для любого $g \in B(m,n)$ существует единственное минимальное слово v, представляющее данный элемент.

1.2. Определение объекта $K_1(m,n) = (P_1, A_1, C_1, T_1)$

Опишем каждую составляющую объекта $K_1(m,n)$.

Определение последовательности P_1. Пусть $P_1 = \{x_1 < x_2 < \dots < x_m\}$ — множество слов длины 1, упорядоченных относительно введенного выше порядка "$<$". Таким образом, P_1 является упорядоченным множеством образующих группы $B(m,n)$.

Определение алгоритма A_1. A_1 — алгоритм n-апериодичности, который преобразует любое слово w в n-апериодическое слово. Опишем работу этого алгоритма.

1. Задаем исходное слово w.

2. Вычисляем длину слова w: $L(w) = s$.

2.1. Если $s < n$, то слово w заведомо является n-апериодическим. Алгоритм завершен.

2.2. Если $s \geq n$, то задаем n последовательно идущих в w слов $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n$ одинаковой длины, т. е. $w = px_1x_2\ldots x_k\ldots x_nq$, $L(x_1) = L(x_2) = \cdots = L(x_n)$. Длину и месторасположение слов x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в слове w зададим посредством двух параметров i и j, где $j = 1, 2, \ldots, [s/n]$ ($[s/n]$ — целая часть дроби s/n) — параметр, задающий длину слов x_k; $i = 1, 2, \ldots, (s - jn + 1)$ — параметр, задающий месторасположение слов x_k в слове w. Таким образом, $x_k = w_{i+j(k-1)}\ldots w_{i+jk-1}$.

3. Задаем начальное значение длин слов x_k: $j = 1$.

4. Задаем начальное месторасположение слов x_k: $i = 1$ (при $i = 1$ последовательность слов x_k начинается с начала слова w, т. е. $w = x_1x_2\ldots x_nq$).

5. Сравниваем слова $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ (*).

5.1. Если (*) выполняется, то слово w сокращается, т. е. $w = px_1x_2\ldots x_nq \to w = pq$. Возвращаемся в п. 2.

5.2. Если (*) не выполняется, делаем проверку неравенства $i < (s - jn + 1)$ (**).

5.2.1. Если (**) выполняется, то увеличиваем значение параметра i на единицу: $i = i + 1$, смещая тем самым слова x_k на один индекс вправо в w. Затем возвращаемся в п. 5.

5.2.2. Если (**) не выполняется, проверяем истинность неравенства $j < [s/n]$ (***).

5.2.2.1. Если (***) выполняется, то $j = j + 1$. Возвращаемся в п. 4.

5.2.2.2. Если (***) не выполняется, то w — n-апериодическое слово. Алгоритм завершен.

Определение таблицы умножения T_1:

$$T_1 = ||x_ix_j|| \quad (i, j = 1, 2, \ldots m).$$

Определение списка соотношений C_1:

$$C_1 = \varnothing.$$

1.3. Построение объекта $K_s(m,n)$ для $s > 1$

Определим

$$P_s^{(0)} = \underbrace{x_1 < \cdots < x_m < \ldots < v_{s-1,1} < \cdots < v_{s-1,r}}_{P_{s-1}}$$
$$< x_1v_{s-1,1} < \cdots < x_1v_{s-1,r} < \cdots < x_mv_{s-1,1} < \cdots < x_mv_{s-1,r}.$$

Таким образом, последовательность $P_s^{(0)}$ получается из последовательности P_{s-1} выделением в P_{s-1} подпоследовательности всех слов, длины которых в точности равны $s-1$, и приписыванием к ее элементам слева образующих $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ с последующим упорядочиванием этой подпоследовательности и объединением ее с P_{s-1}.

Пусть теперь v пробегает всю последовательность $P_s^{(0)}$. Рассмотрим множество

$$P_s^{(1)} = \{A_{s-1}(v) \mid v \in P_s^{(0)}\},$$

удалим в нем повторяющиеся слова, а затем упорядочим его элементы относительно введенного отношения порядка. При этом полученная последовательность $P_s^{(1)}$ будет обладать свойством $\forall v \in P_s^{(1)}\ A_{s-1}(v) = v$. Запишем

$$P_s^{(1)} = \{v_1 < v_2 < \cdots < v_{m_s}\}.$$

Далее составим таблицу умножения

$$T_s^{(0)} = ||v_i v_j|| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, m_s).$$

Затем получаем таблицу $T_s^{(1)}$, применяя ко всем словам из $T_s^{(0)}$ алгоритм $A_s^{(0)}$, считая по определению, что $A_s^{(0)} = A_{s-1}$:

$$A_s^{(0)}(T_s^{(1)}) = ||A_s^{(0)}(v_i v_j)||.$$

Пусть в таблице $T_s^{(1)}$ имеется строка с номером i_0, в которой

$$A_s^{(0)}(v_{i_0} v_j) = A_s^{(0)}(v_{i_0} v_k).$$

Это означает, что слова v_j и v_k соответствуют одному и тому же элементу группы, т. е. если $v_j = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s$ и $v_k = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r$, то

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_s = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_r.$$

В итоге получаем соотношение $v_j = v_k$, т. е.

$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_s = \beta_1\beta_2\ldots\beta_r.$$

Пусть для определенности $v_j < v_k$. Считая по определению $C_s^{(0)} = C_{s-1} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{r-1}\}$ и $c_r = \{v_j = v_k\}$, полагаем

$$C_s^{(1)} = \{C_s^{(0)} \cup c_r\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_r\}.$$

Далее, строим алгоритм $A_s^{(1)} = A_s^{(0)} * A_{c_r}$. Опишем действие $A_s^{(0)}$ на все слова $y \in B(m,n)$, записав $C_s^{(0)}$ в следующем виде:

$$C_s^{(0)} = \{v_k = w_k, v_k < w_k \mid k = 1, 2, \ldots, r-1\}.$$

1. $y = A_1(y)$ — приводим слово y к n-апериодическому виду и определим параметр k, который указывает номер соотношения в списке соотношений $C_s^{(0)}$.

2. $k = 1$.

3. Делаем проверку $y = pw_kq$ (*).

3.1. Если (*) выполняется, то $y = pv_kq$. Возвращаемся в п. 1.

3.2. Если (*) не выполняется, то делаем проверку $k < r-1$ (**).

3.2.1. Если (**) выполняется, то $k = k+1$, возвращаемся в п. 3.

3.2.2. Если (**) не выполняется, алгоритм $A_s^{(0)}$ завершает работу.

Таким образом,

$$A_s^{(0)}(y) = v \neq \begin{cases} p\underbrace{xx\ldots x}_{n}q \\ pw_kq, \quad k = 1, 2, \ldots, r-1. \end{cases}$$

Затем, умножая $A_s^{(0)}$ на A_{c_r}, получим алгоритм $A_s^{(1)}$, который действует на все слова $y \in B(m,n)$ следующим образом:

$$A_s^{(1)}(y) = v \neq \begin{cases} p\underbrace{xx\ldots x}_{n}q \\ pw_kq, \quad k = 1, 2, \ldots, r. \end{cases}$$

Далее, применяя алгоритм $A_s^{(1)}$ ко всем словам из $P_s^{(1)}$, получим последовательность $P_s^{(2)}$, инвариантную относительно $A_s^{(1)}$. Заметим, что ввиду инвариантности относительно $A_s^{(0)}$ последовательности $P_s^{(1)}$ достаточно проверить ее алгоритмом A_{c_r}. Таким образом, если любое слово y из $P_s^{(1)}$ равно pw_rq, то данное слово необходимо удалить из $P_s^{(1)}$ по той причине, что оно будет графически равно какому-то слову y_0, стоящему раньше в последовательности $P_s^{(1)}$. Действительно, $A_{c_r}(y) = A_{c_r}(pw_rq) = pv_rq = y_0 < pw_rq$.

В результате получим

$$P_s^{(2)} = \{v_1 < v_2 < \cdots < v_{m_{s'}}\}.$$

Затем строим таблицу Кэли $T_s^{(2)}$:

$$T_s^{(2)} = ||A_s^{(1)}(v_iv_j)|| \quad (i,j = 1,2,\ldots,m_{s'}).$$

Если в $T_s^{(2)}$ найдется строка с номером i_0, в которой

$$A_s^{(1)}(v_{i_0}v_m) = A_s^{(1)}(v_{i_0}v_p),$$

то список соотношений $C_s^{(1)}$ пополнится новым соотношением $c_{r+1} = \{v_m = v_p\}$, т. е.

$$C_s^{(2)} = C_s^{(1)} \cup \{c_{r+1}\} = \{c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}\}.$$

Ввиду изменения списка соотношений изменятся также алгоритм, последовательность и таблица умножения $\left(A_s^{(1)} \stackrel{c_{r+1}}{\to} A_s^{(2)},\ P_s^{(2)} \stackrel{A_s^{(2)}}{\to} P_s^{(3)} \text{ и } T_s^{(2)} \stackrel{A_s^{(2)}}{\to} T_s^{(3)}\right)$.

Данный процесс будет продолжаться до тех пор, пока при некотором z таблица умножения $T_s^{(z)}$ станет инвариантной относительно алгоритма $A_s^{(z-1)}$, т. е. в $T_s^{(z)}$ не найдется ни одной строки с номером i_0 такой, что $A_s^{(z-1)}(v_{i_0}v_j) = A_s^{(z-1)}(v_{i_0}v_k)$.

Когда это будет выполнено, мы получим, что $P_s = P_s^{(z)}$, $A_s = A_s^{(z-1)}$, $C_s = C_s^{(z-1)}$ и $T_s = T_s^{(z)}$. Таким образом, объект $K_s(m,n) = \{P_s, A_s, T_s, C_s\}$ построен.

1.4. Условие конечности группы $B(m,n)$

Теорема 1. *Если s — наименьшее натуральное число со свойством $K_s(m,n) = K_{s+1}(m,n)$, то $|B(m,n)| \le |P_s(m,n)|$.*

Доказательство. Поскольку

$$K_s(m,n) = (P_s, A_s, T_s, C_s) = K_{s+1}(m,n) = (P_{s+1}, A_{s+1}, T_{s+1}, C_{s+1}),$$

то $P_s = P_{s+1} = P_{s+2} = \ldots$ Другими словами $A_s(w) = v \in P_s$ для любого слова w. Возьмем произвольный элемент $g \in B(m,n)$ и запишем его в виде произведения свободных порождающих: $g = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_r$, где $\alpha_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Рассмотрим слово $v_1 = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$. Применим алгоритм A_s к слову v_1: $A_s(v_1) = A_s(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r) = v = \alpha_1^*\alpha_2^*\ldots\alpha_{r_1}^*$ где $\alpha_i^* \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Как было показано выше, $v \in P_s$. Из описания алгоритма A_s следует, что $g = \alpha_1^* \cdot \alpha_2^* \cdot \ldots \cdot \alpha_{r_1}^*$ и $r_1 \le s$. Это означает, что элемент g представим в виде слова $v \in P_s$. С другой стороны, различным элементам $g_1, g_2 \in B(m,n)$ будут соответствовать различные слова $v_1, v_2 \in P_s$, в противном случае g_1 и g_2 будут равны как элементы группы. Теорема доказана.

Рассмотренный выше алгоритм был реализован на персональном компьютере для вычисления известных конечных бернсайдовых групп $B(2,3)$, $B(3,3)$ и $B(2,4)$. Полученные результаты для вышеуказанных групп полностью совпали с ранее известными. Следует отметить, что во всех случаях имеет место строгое равенство из теоремы 1, т. е. $|B(2,3)| = |P_6(2,3)| = 3^3$, $|B(3,3)| = |P_{13}(3,3)| = 3^7$ и $|B(2,4)| = |P_{20}(2,4)| = 2^{12}$.

2. Сравнение групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$

Будем считать, что образующие групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ записаны в одном алфавите $\{1,2\}$, т. е. $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

В работе [6] с использованием коммутаторного исчисления были вычислены соотношения для базисных коммутаторов группы $B_0(2,5)$. В качестве первых двух коммутаторов были взяты образующие группы $B_0(2,5)$, которые обозначались через 1 и 2, а последующие с 3 по 34 коммутаторы вычислялись рекурсивно через 1 и 2.

Каждый элемент $h \in B_0(2,5)$ однозначно представляется упорядоченным произведением базисных коммутаторов в определенных степенях:

$$h = 1^{\alpha_1} \cdot 2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot 34^{\alpha_{34}},$$

где $\alpha_i \in \{0,1,2,3,4\}$ $(i = 1,2,\ldots,34)$. Согласно [6] правую часть приведенного равенства мы будем называть нормальным словом и обозначать через $k(h)$.

Пусть ψ — гомоморфизм группы $B(2,5)$ на группу $B_0(2,5)$, заданный следующим правилом:

$$\psi(g_v) \to k(h_v),$$

где h_v — элемент, вычисленный по слову v в группе $B_0(2,5)$ по аналогии с элементом g_v в группе $B(2,5)$.

Покажем действие этого гомоморфизма на примере (операцию умножения для краткости не пишем). Пусть $g_v = 221 \in B(2,5)$. Под действием ψ переведем g_v в нормальное слово $k(h_v) \in B_0(2,5)$. Имеем $221 = 2(21) \to 2123$, так как $21 = 12[2,1] = 123$ (см. [6]). Далее, $2123 = (21)23 = 12323 = 12(32)3 \to 122353$, поскольку $32 = 23[3,2] = 235$. Теперь

$$12^2353 = 12^23(53) \to 12^23^2510^413^114^415^117^219^120^221^122^223^124^225^226^327^129^130^231^232^333^1,$$

так как $53 = 35[5,3] = 3510^413^114^4\ldots33^1$. Таким образом

$$221 \xrightarrow{\psi} 12^23^2510^413^114^415^117^219^120^221^122^223^124^225^226^327^129^130^231^232^333^1.$$

Очевидно, все соотношения группы $B(2,5)$ будут справедливыми в $B_0(2,5)$. Обратное утверждение будет верно, если $B_0(2,5) \cong B(2,5)$. Таким образом, если два слова v и w равны как элементы группы в $B(2,5)$, то под действием ψ они будет соответствовать одному и тому же нормальному слову в $B_0(2,5)$. Например, из соотношения $11112222 = 21212121$ следует, что $11112222 \xrightarrow{\psi} 1^42^4$ и $21212121 \xrightarrow{\psi} 1^42^4$.

Если гомоморфизм ψ окажется взаимно однозначным, то из этого будет следовать изоморфизм $B(2,5)$ и $B_0(2,5)$, т.е. группа $B(2,5)$ будет конечной. В противном случае $B(2,5)$ — бесконечная группа.

При помощи компьютерных вычислений с использованием гомоморфизма ψ мы получаем на каждой длине максимально возможный список соотношений для группы $B_0(2,5)$ в терминах $\{1,2\}$-слов. С применением компьютерных расчетов по алгоритму из п. 1 получается, что список соотношений будет таковым и для $B(2,5)$. Поэтому для слов с длинами ≤ 27 имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть v, w — два слова в алфавите образующих $\{1,2\}$, $L(v) \leq 27$ и $L(w) \leq 27$. Тогда $v = w$ — соотношение в группе $B_0(2,5)$ тогда и только тогда, когда $v = w$ — соотношение в группе $B(2,5)$.*

Используя теорему 2 и компьютерные вычисления, мы показываем, что последовательности P_s для $1 \leq s \leq 27$ представляют собой минимальные слова для групп $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$. Если группы $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$ совпадают, то и число минимальных слов равных длин в этих группах будет одинаковым. Если же эти группы различны, то найдется число s такое, что число минимальных слов длины s в группе $B_0(2,5)$ будет меньше, чем в группе $B(2,5)$. Как показывает теорема 2, до длины 27 включительно имеет место совпадение чисел минимальных слов в группах $B_0(2,5)$ и $B(2,5)$.

3. Результаты вычислений

Для группы $B(2,5)$ был вычислен объект $K_{27}(2,5)$. В качестве образующих группы использовались символы $\{1,2\}$. Количество соотношений $C_{27}(2,5)$, а также количество слов каждой длины в $P_{27}(2,5)$ приведены ниже в табл. 1 и 2.

Т а б л и ц а 1

Количество соотношений в $C_{27}(2,5)$

Длина	Кол-во	Длина	Кол-во	Длина	Кол-во	Длина	Кол-во
0	0	7	0	14	8	21	115
1	0	8	2	15	4	22	136
2	0	9	0	16	10	23	224
3	0	10	2	17	22	24	372
4	0	11	4	18	29	25	569
5	0	12	7	19	67	26	973
6	0	13	5	20	93	27	1353
$\lvert C_{27}(2,5)\rvert = 3995$							

Т а б л и ц а 2

Количество слов в $P_{27}(2,5)$

Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов	Длина	Кол-во слов
0	1	7	112	14	10303	21	926592
1	2	8	214	15	19604	22	1761409
2	4	9	410	16	37290	23	3348267
3	8	10	784	17	70914	24	6364536
4	16	11	1495	18	134856	25	12097646
5	30	12	2847	19	256394	26	22994736
6	58	13	5417	20	487422	27	43706981
$\lvert P_{27}(2,5)\rvert = 92228348$							

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 336 с.
2. **Vaughan-Lee M.** The restricted Burnside problem. New York: Clarendon Press, 1993. 210 p.
3. **Sims C.** Computation with finitely presented groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 628 p.
4. **Holt D., Eick B., O'Brien E.** Handbook of computational group theory. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2005. 514 p.

5. **Кострикин А.И.** Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5 // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1955. Т. 19, № 3. С. 233–244.
6. **Havas G., Wall G., Wamsley J.** The two generator restricted Burnside group of exponent five // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. Vol. 10. P. 459–470.

Кузнецов Александр Алексеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Красноярский гос. аграр. ун-т
e-mail: alex_kuznetsov80@mail.ru

Поступила 24.11.2008

Шлёпкин Анатолий Константинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Красноярский гос. аграр. ун-т
e-mail: ak_kgau@mail.ru

Том 15 № 2 2009

УДК 512.542

АВТОМОРФИЗМЫ И НОРМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ УНИПОТЕНТНЫХ ПОДГРУПП ФИНИТАРНЫХ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ[1]

В. М. Левчук, Г. С. Сулейманова

Известное ранее при $char K \neq 2,3$ (Гиббс, 1970 г.) описание автоморфизмов унипотентной подгруппы U группы Шевалле над полем K было завершено в 1990 году вместе с решением проблемы (1.5) из обзора А.С. Кондратьева (Успехи мат. наук, 1986 г.). В данной статье дается описание $Aut\ U$ для случая финитарных групп Шевалле. Доказана сопряженность в группе Шевалле классического типа над конечным полем всякой большой абелевой подгруппы из U с нормальной подгруппой в U. Показано, что в общем случае это не так, и поэтому к перечислению исключений сводится проблема (1.6) о больших абелевых подгруппах в U из обзора А.С. Кондратьева. Их порядки и большие абелевы нормальные подгруппы в U перечислены ранее.

Ключевые слова: финитарная группа Шевалле, унипотентная подгруппа, автоморфизм, большая абелева подгруппа.

V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova. Automorphisms and normal structure of unipotent subgroups of finitary Chevalley groups.

The description of the automorphisms of an unipotent subgroup U of a Chevalley group over a field K known earlier for $char K \neq 2,3$ (Gibbs, 1970) was completed in 1990 together with a solution of problem (1.5) from A.S. Kondrat'ev's survey (Usp. Mat. Nauk, 1986). In the present paper, $Aut\ U$ is described for the case of finitary Chevalley groups. For a Chevalley group of classical type, it is proved that any large Abelian subgroup from U is conjugate to a normal subgroup in U. It is shown that this is not so in the general case; therefore, problem (1.6) from Kondrat'ev's survey about large Abelian subgroups in U is reduced to listing the exceptions. Large Abelian normal subgroups were listed by the authors earlier.

Keywords: finitary Chevalley group, unipotent subgroup, automorphism, large abelian subgroup.

Введение

А.С. Кондратьев в обзоре [4] выделил проблемы, стимулировавшие исследования группы Шевалле G и ее унипотентной подгруппы U.

Вместе с решением проблемы (1.5) из [4], в [5, 6] завершено описание автоморфизмов, центральных рядов и характеристических подгрупп группы U над полем K, известное ранее при $char K \neq 2,3$ (Гиббс [15]). В настоящей статье исследуется случай финитарных групп Шевалле. Наряду с [8], мы применяем подход работы [7], описывающей максимальные абелевы нормальные подгруппы, а затем и автоморфизмы финитарной унитреугольной группы $UT(\Gamma, K)$ (группы U типа A_Γ) над кольцом K без делителей нуля для произвольной цепи Γ матричных индексов, см. также [17]. Подобную схему для группы $UT(n,q)$ с нечетным q использовала Уир [20].

Проблема описания множества $A(U)$ "больших" (т. е. наибольшего порядка) абелевых подгрупп унипотентной группы U над конечным полем, восходящая к работе А.И. Мальцева [9], в основном, решена в [12, 13, 21, 22] для классических типов. А.С. Кондратьев поставил вопрос описания $A(U)$ для оставшихся случаев [4, проблема (1.6)]. Е.П. Вдовин [1, 2] указывает порядки подгрупп из $A(U)$ и подгруппу Томпсона $J(U)$, используя алгоритмический подход и обобщение коммутативных множеств систем корней из [9]. Эффективного описания множества $A(U)$ до сих пор не найдено.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00717).

В [8] вместе с перечислением максимальных абелевых нормальных подгрупп найдено явно множество $A_N(U)$ нормальных в U подгрупп из $A(U)$. В разд. 3 доказана сопряженность в группе Шевалле классического типа всякой большой абелевой подгруппы из U с нормальной подгруппой в U. (Вопрос о сопряженности в группе Шевалле подгрупп из $A(U)$ с подгруппами из $A_N(U)$ впервые обсуждался на 1001-м заседании семинара “Алгебра и логика” Новосибирского государственного университета в 1994 г. и рассматривался в [16, § 1].) В общем случае это не так (см. предложение 1), и поэтому проблема (1.6) сводится к перечислению исключений.

1. Предварительные сведения

В группе Шевалле над полем K, ассоциированной с системой корней Φ, унипотентную подгруппу $U\Phi(K)$ порождают корневые подгруппы $x_r(K) = X_r$, $r \in \Phi^+$. Положим

$$p(\Phi) = \max\{(r,r)/(s,s) \mid r,s \in \Phi\} \quad (\text{равно } 1, 2 \text{ или } 3).$$

Графовый автоморфизм τ группы Шевалле $\Phi(K)$ переводит подгруппу X_r на $X_{\bar r}$ $(r \in \Phi)$, где подстановка $\bar{\ }$ системы корней Φ индуцирована симметрией порядка m (равно 2 или 3) графа Кокстера системы Φ. (При $p(\Phi) > 1$ основное поле здесь совершенное характеристики $p(\Phi)$.) Композиция τ с автоморфизмом, индуцированным нетождественным автоморфизмом $\sigma : t \to \bar t$ поля K с условием $p(\Phi)\sigma^m = 1$, дает “скручивающий” автоморфизм θ. Скрученная подгруппа $U^m\Phi(K)$ — это централизатор θ в $U\Phi(K)$. “Корневые” элементы мы сопоставляем минимальным $\bar{\ }$-инвариантным множествам в Φ. Таким образом, подгруппе X_S из [14, предложение 13.6.3] с множеством корней $S = \{r, \bar r, r+\bar r\}$ типа A_2 сопоставляем корневую подгруппу $x_{\{r+\bar r\}}(\ker(1+\sigma))$ и систему представителей $x_{\{r,\bar r\}}(t,\tilde t)$ смежных классов по ней с определенным преобразованием $\tilde{\ }$ поля K. (См. также далее теорему 2 об определяющих соотношениях.)

Отображение одной системы корней в другую называем гомоморфизмом, если оно продолжается до гомоморфизма решеток корней. Когда либо $m = 2$ и Φ типа E_6, D_{n+1}, A_{2n-1} или A_{2n}, либо $(\Phi, m) = (D_4, 3)$, то систему ${}^m\Phi$ ассоциируют с системой корней, соответственно, типа F_4, B_n, C_n, BC_n или G_2 [14, замечание 13.3.8]. В этом случае существует единственный гомоморфизм ζ системы Φ на ассоциированную систему корней с условием $\zeta(r) = \zeta(s) \Leftrightarrow r = s$ или $\bar r = s$ или $\bar s = r$. Высоту корня в $\zeta(\Phi)$ считаем высотой соответствующего элемента в ${}^m\Phi$.

В группе $UG(K)$ ($G = \Phi$ или ${}^m\Phi$) член U_i стандартного центрального ряда порождают все корневые элементы, соответствующие корням высоты $\geq i$. Гиперцентральный ряд и централы группы $UG(K)$ полностью описаны в [14, теорема 5.3.3], [15] и [5, 6]; в скрученном случае они стандартны.

Стандартными автоморфизмами унипотентной подгруппы группы Шевалле над полем считаем произведения графового, полевого, диагонального, внутреннего и центрального автоморфизмов этой подгруппы. Согласно [5], автоморфизм группы (или кольца) G называется *гиперцентральным высоты* k, если он действует тождественно по модулю k-го гиперцентра алгебры G, отличного от G, и такое k нельзя уменьшить умножениями на внутренние автоморфизмы. Автоморфизм ϕ группы G назовем *локально гиперцентральным*, если любая конечно порожденная подгруппа группы G лежит в ее подгруппе, на которой ϕ действует как гиперцентральный автоморфизм подходящей конечной высоты.

Описание $Aut\ UG(K)$ (и решение проблемы (1.5) из обзора [4]) найдено в [5, 6]. Для лиева ранга > 4 это описание дает следующая теорема (см. [6], [18, теорема 6]).

Теорема 1. *Всякий автоморфизм унипотентной группы $UG(K)$ лиева ранга > 4 над полем K есть произведение стандартного автоморфизма и гиперцентрального автоморфизма высоты $m \leq n-1$, когда $2K = 0$ и $G = B_n$ или C_n, и $m \leq 5$ в остальных случаях.*

В исследованных Гиббсом [15] случаях $6K = K$ имеем $m \leq 3$ при $G = C_n$ и $m \leq 2$ в остальных случаях.

Перечисление в $[5, 6]$ гиперцентральных автоморфизмов группы $UG(K)$ показывает, что оценка высоты m в теореме 1 неулучшаема. В частности, группа $UC_n(K), n > 2$, над совершенным полем (и даже кольцом) K характеристики 2 изоморфна группе $UB_n(K)$ и допускает гиперцентральный автоморфизм высоты $n-1$.

Если систему корней типа C_n и ее базу выбрать как в [14, с. 47], то такой автоморфизм с произвольным параметром $b \in K$ можем определить действием на корневых элементах (неподвижные корневые элементы при этом опускаем) следующим образом:

$$x_{2\varepsilon_n}(t) \to x_{2\varepsilon_n}(t)x_{\varepsilon_1+\varepsilon_n}(b\sqrt{t^2-t}),$$
$$x_{2\varepsilon_i}(t) \to x_{2\varepsilon_i}(t)x_{\varepsilon_1+\varepsilon_i}(b\sqrt{t}),$$
$$x_{\varepsilon_i+\varepsilon_n}(t) \to x_{\varepsilon_i+\varepsilon_n}(t)x_{\varepsilon_1+\varepsilon_i}(bt) \qquad (t \in K,\ 1 < i < n).$$

При $G = \Phi$ основные гиперцентральные автоморфизмы в [5,6] используют простой корень q и корень s такие, что $s+q$ есть максимальный корень, структурную константу c_{sq} базиса Шевалле и параметр $b \in K$. (Выбор q, s однозначен, кроме типа A_n, когда возможен еще случай $\bar{q}, \bar{s}$.) Определим их действием на корневых элементах:

$$6K = K,\ \Phi = C_n:\ \ x_q(t) \to x_q(t)x_{s-q}(bt)x_s(-bt^2/2)x_{s+q}(bt^3/3);$$
$$2K = K,\ \Phi \neq C_n: \quad x_q(t) \to x_q(t)x_s(bt)x_{s+q}(bt^2/2) \quad (t \in K).$$

Другие автоморфизмы используют простой корень r с условием $q+r, s-r \in \Phi^+$, причем длины корней $q, r, q+r, s-r, s$ и $s-q$ при $\Phi \neq C_n$ совпадают. Имеем

$$|K| = 3,\ \Phi = C_n: \qquad x_q(t) \to x_q(t)x_{s-r-q}(bt)x_{s-r}(bt^2),$$
$$x_{q+r}(t) \to x_{q+r}(t)x_{s-q}(bt)x_{s+q}(-bt^3) \quad (t \in K);$$

$$|K| = 2,\ \Phi \neq C_n: \quad x_q(t) \to x_q(t)x_{s-r}(bt),$$
$$x_{q+r}(t) \to x_{q+r}(t)x_s(bt)x_{s+q}(bt^2).$$

Когда $\Phi = B_n$ или D_n и $n > 4$, корень r можно выбрать двумя (для типа D_4 тремя) способами. Выбрав второй корень r', получим

$$|K| = 2,\ \Phi = B_n, D_n: \quad x_a(t) \to x_a(t)x_{s-q-r'-r}(bt),$$
$$x_{q+a}(t) \to x_{q+a}(t)x_{s-r'-r}(bt)x_{s-r'-r+a}(bt), \quad a \in \{r, r'\},$$
$$x_{q+r'+r}(t) \to x_{q+r'+r}(t)x_{s-r}(bt)x_{s-r'}(bt)x_{s+q}(bt).$$

Далее существенно каноническое разложение [14, теорема 5.3.3], [11, лемма 18]: *Всякий элемент α группы $UG(K)$ однозначно представляется в виде произведения корневых элементов $x_r(t_r)$, $r \in G^+$, расположенных соответственно фиксированному (произвольно) упорядочению корней.* Для описаний групп $UG(K)$ важную роль играют подгруппы

$$T(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+\rangle \text{ и } \quad Q(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+,\ s \neq r\rangle,$$

где $r \in G$ и $\{r\}^+$ обозначает совокупность $s \in G^+$ с неотрицательными коэффициентами в линейном выражении $s-r$ через базу $\Pi(G)$ системы G.

Подгруппа $U\Phi(K)$ тесно связана с подалгеброй $N\Phi(K)$ с базисом e_r $(r \in \Phi^+)$ алгебры Шевалле типа Φ над K [14, § 4.4]. Для элемента α из $U\Phi(K)$, представленного выше, положим

$$\pi(\alpha) = \sum_{r \in \Phi^+} t_r e_r.$$

Для элементов $\alpha, \beta \in N\Phi(K)$ определим произведение

$$\alpha \circ \beta = \pi(\pi^{-1}(\alpha)\pi^{-1}(\beta)).$$

Тогда π есть изоморфизм группы $U\Phi(K)$ на алгебру $N\Phi(K)$ с присоединенным групповым умножением $\circ$. С помощью скручивающего автоморфизма получаем также модуль $NG(K)$ над подполем $K_\sigma = ker(1-\sigma)$ поля K неподвижных относительно полевого автоморфизма σ элементов и представление его присоединенной группой $(NG(K), \circ)$ скрученных групп $UG(K)$ (см. [6]).

2. Финитарные унипотентные группы

По аналогии с унитреугольными группами рассмотрим финитарные обобщения унипотентных групп $UG(K)$ классических типов.

Классическая присоединенная группа кольца $NT(n,K)$ нильтреугольных $n \times n$-матриц над K с присоединенным умножением $\alpha \circ \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta$ допускает изоморфизм $\alpha \to e + \alpha$ на унитреугольную группу $UT(n,K)$, где e — единичная матрица. Пусть Γ — произвольная цепь (линейно упорядоченное множество) с отношением порядка $\leq$. Обобщенная унитреугольная группа $UT(\Gamma, K)$ исследуется в [7, 18, 19] как присоединенная группа финитарного кольца $NT(\Gamma, K)$, которое взаимосвязано с ассоциированным кольцом Ли, а в [10] она изучается как подгруппа мультипликативной группы $GL(\Gamma, K)$ обратимых финитарных Γ-матриц над K. Подгруппу $SL(\Gamma, K)$ в $GL(\Gamma, K)$ образуют Γ-матрицы, равные единичной Γ-матрице, за исключением элементов из какой-либо клетки $||a_{ij}|| \in SL(\Gamma_1, K)$ с подходящей конечной подцепью Γ_1 в Γ. Для бесконечной цепи Γ группа $SL(\Gamma, K)$ имеет единичный центр и является простой группой при любом выборе основного поля.

Обобщенные классические (унитарные, симплектические и ортогональные) группы естественно выделяются в группах $GL(\Gamma, K)$ и $SL(\Gamma, K)$.

Пусть Γ — произвольная цепь (линейно упорядоченное множество) с фиксированной антиизометрией $'$ на новую цепь. Образуем новую цепь $\widetilde{\Gamma} = \Gamma' \cup \Gamma$, полагая $i'' = i$ и $i' \leq j$ для всех $i, j \in \Gamma$. Если Γ и Γ' содержат общий элемент, то он единствен. Его обозначаем через 0 (или $0'$), а через $NB_\Gamma(K)$ — K-модуль с базисом

$$\{e_{im} \mid i \in \Gamma, m \in \widetilde{\Gamma}, i' < m < i\}.$$

При $\Gamma' \cap \Gamma = \varnothing$ обозначим K-модуль с такой же записью базиса через $ND_\Gamma(K)$, а K-модуль с базисом $\{e_{im} \mid i \in \Gamma, m \in \widetilde{\Gamma}, i' \leq m < i\}$ — через $NC_\Gamma(K)$. Умножение $*$ определяет произведения базисных элементов:

$$e_{ij} * e_{jv} = e_{iv}; \quad e_{ij} * e_{kt} = 0, \quad j \neq k, \quad i \neq t, \quad t \neq j';$$

$$e_{i0} * e_{j0} = 2e_{ij'} \ (G = B_\Gamma); \quad e_{ij} * e_{ij'} = 2e_{ii'} \ (G = C_\Gamma), \quad i > j \in \Gamma;$$

$$e_{im} * e_{jm'} = e_{ij'}, \quad j' < m < j < i, \quad j \neq 0, \quad e_{im} * e_{im'} = 0 \ (G = B_\Gamma, \ D_\Gamma);$$

$$e_{jk} * e_{ik'} = e_{ik} * e_{jk'} = e_{ij'}, \quad i > j > k \in \Gamma \ (G = C_\Gamma).$$

Лемма 1. *K-модули $NG(K)$ типа $G = B_\Gamma, C_\Gamma$ или D_Γ с умножением $*$ являются алгебрами Ли. Для конечной цепи Γ с условием $|\Gamma \setminus (\Gamma' \cap \Gamma)| = n$ алгебра $NG(K)$ изоморфна лиевой алгебре, соответственно, $NB_n(K)$, $NC_n(K)$ или $ND_n(K)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку всякое конечное множество элементов, скажем, K-модуля $NB_\Gamma(K)$ лежит в подмодуле того же типа $NB_{\Gamma_1}(K)$ для подходящей конечной подцепи Γ_1 в Γ, то достаточно доказать второе утверждение леммы. Заметим, что любая конечная цепь Γ с условиями $|\Gamma\backslash(\Gamma'\cap\Gamma)| = n$ и $i' \le j$ $(i, j \in \Gamma)$ изоморфна цепи целых чисел $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ или $\{1, 2, \dots, n\}$ с антиизометрией $i' = -i$ в обоих случаях.

Системы корней классического типа A_{n-1}, B_n, C_n и D_n выберем, как обычно, в евклидовом пространстве с ортонормированным базисом $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, см. табл. 1.

Положительные корни систем классических типов записываются в виде

$$\varepsilon_i - m\varepsilon_j = p_{i,mj}, \quad 1 \le j \le i \le n, \quad m \in \{0, -1, +1\}.$$

Сумма корней $p_{iv} + p_{kt}$ есть корень в тех случаях, когда $v = k$ или $t = i$, или $v = -t$; в последнем случае требуем еще $i \ne k$ или $\Phi = C_n$.

Т а б л и ц а 1

Системы корней классического типа

Φ	Φ^+	Π
A_n	$\varepsilon_i - \varepsilon_j$ $(1 \le j < i \le n+1)$	$\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j$ $(1 \le j \le n)$
B_n	ε_i $(1 \le i \le n)$, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \le j < i \le n)$	$\varepsilon_1,\ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j$ $(1 \le j < n)$
C_n	$2\varepsilon_i$ $(1 \le i \le n)$, $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \le j < i \le n)$	$2\varepsilon_1,\ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j$ $(1 \le j < n)$
D_n	$\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$ $(1 \le j < i \le n)$	$\varepsilon_2 + \varepsilon_1,\ \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j$ $(1 \le j < n)$

Полагая для элементов e_r базиса Шевалле $\psi(e_r) = e_{i,mj}$ при $r = p_{i,mj}$ (где $e_{i,mj}$ — элемент базиса алгебры $NG(K)$) и выбирая знаки структурных констант согласно [14, предложение 4.2.2], получаем требуемый во втором утверждении изоморфизм K-алгебр. Это завершает доказательство леммы.

Далее, всякий элемент K-алгебры $N\Phi(K)$ отождествляем с его образом относительно изоморфизма ψ и распространяем групповую операцию $\circ$ на алгебры $NG(K)$ типа $G = B_\Gamma, C_\Gamma$ или D_Γ с любой цепью Γ.

Записывая элемент алгебры $N\Phi(K)$ типа B_n, C_n или D_n суммой $\sum a_{iv}e_{iv}$, представляем его Φ^+-матрицей $\|a_{iv}\|$ над K. Так, B_n^+-матрица имеет вид

$$\begin{matrix} a_{10} \\ a_{2,-1}\ a_{20}\ a_{21} \\ \dots\ \ \dots\ \ \dots \\ a_{n,-n+1}\ \dots\ a_{n,-1}\ a_{n0}\ a_{n1}\ \dots\ a_{n,n-1}. \end{matrix}$$

Отбрасывая здесь нулевой столбец, получаем D_n^+-матрицу.

Скрученная группа, как присоединенная группа $\ker(1-\sigma)$-модуля $NG(K)$, представлена в [6] при $G = {}^2D_{n+1}$ или ${}^2A_{2n-1}$, соответственно, B_n^+-матрицами или C_n^+-матрицами. При $G = {}^2A_{2n}$ она представлена BC_n^+-матрицами

$$\begin{matrix} a_{1,-1}\ a_{10} \\ a_{2,-2}\ a_{2,-1}\ a_{20}\ a_{21} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{c} \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n,-n} \ \dots \ a_{n,-2} \ a_{n,-1} \ a_{n0} \ a_{n1} \ \dots \ a_{n,n-1}. \end{array}$$

(C_n^+-матрицу получаем, отбрасывая здесь нулевой столбец.)

Таким образом, K_σ-модули $NG(K)$ типа $G = {}^2D_\Gamma$ или ${}^2A_{\tilde{\Gamma}}$ и их присоединенные группы построены для любой конечной цепи Γ. Это означает, как и выше, что они определены и для произвольной цепи Γ.

Используя [6, леммы 3–5] (см. также [18]), находим описание определяющих соотношений присоединенных групп в терминах порождающих "корневых" элементов:

$$N^2A_\Gamma(K) = \langle xe_{iv},\ ze_{i,i'} \mid \ x \in K,\ z \in \ker(1+\sigma),\quad i, v \in \tilde{\Gamma},\ i' < v < i\rangle,$$

$$N^2D_\Gamma(K) = \langle xe_{i0},\ ze_{iv} \mid \ x \in K,\ z \in \ker(1-\sigma),\quad i, v \in \tilde{\Gamma},\ i' < v < i,\ v \neq 0\rangle.$$

Теорема 2. *Всякое соотношение в присоединенной группе* $\langle NG(K), \circ\rangle$ *типа* $G = B_\Gamma, C_\Gamma$, D_Γ *или* ${}^2D_\Gamma$ *есть следствие соотношений в* K *и следующих соотношений*:

$$xe_{iv} \circ ye_{iv} = (x+y)e_{iv}; \tag{2.1}$$

$$[xe_{ik}, ye_{jt}] = 0, \quad j \neq k,\ i \neq t,\ t \neq k'; \tag{2.2}$$

$$[xe_{ij}, ye_{jv}] = xye_{iv}, \quad v \neq 0,\ v \neq j'; \tag{2.3}$$

$$G = B_\Gamma, D_\Gamma,\ {}^2D_\Gamma: \quad [xe_{jv}, ye_{i,v'}] = \begin{cases} xye_{i,j'}, & i > j,\ v \neq 0, \\ 0, & i = j; \end{cases}$$

$$G = B_\Gamma: \quad [xe_{ij}, ye_{j0}] = xye_{i0} + xy^2e_{i,j'}, \quad [xe_{i0}, ye_{j0}] = 2xye_{i,j'};$$

$$G = {}^2D_\Gamma: [xe_{ij}, ye_{j0}] = xye_{i0} + xy\bar{y}e_{i,-j},\ [xe_{i0}, ye_{j0}] = (x\bar{y} + \bar{x}y)e_{i,-j}, \quad i > j > 0;$$

$$G = C_\Gamma: \quad [xe_{ik}, ye_{j,k'}] = [xe_{jk}, ye_{i,k'}] = xye_{i,j'}, \quad i > j > k \in \Gamma,$$

$$[xe_{ij}, ye_{j,j'}] = xye_{i,j'} - x^2ye_{i,i'}, \quad [xe_{ij}, ye_{i,j'}] = 2xye_{i,i'}, \quad i > j \in \Gamma.$$

Определяющими в группе $N^2A_{\tilde{\Gamma}}(K)$ *являются соотношения* (2.1) *при* $v \neq 0$, (2.2), (2.3) *и следующие соотношения*:

$$xe_{i0} \circ ye_{i0} = (x+y)e_{i0} \circ (\tilde{x} + \tilde{y} - \widetilde{(x+y)} + \bar{x}y)e_{i,-i}, \quad i > 0;$$

$$[xe_{jv}, ye_{i,-v}] = \bar{x}ye_{i,-j}, \quad [xe_{ij}, ye_{j0}] = xye_{i0} \circ (-x\bar{\bar{y}})e_{i,-j} \circ (x\bar{x}\bar{\bar{y}} - xy)e_{i,-i},$$

$$[xe_{ij}, ye_{i,-j}] = (\bar{x}y - x\bar{y})e_{i,-i}, \quad [xe_{ij}, ze_{j,-j}] = xze_{i,-j} - \bar{x}xze_{i,-i}, \quad i > j > 0.$$

В случае финитарной унитреугольной группы $UT(\Gamma, K)$ обобщение диагональных и внутренних автоморфизмов дает переход к сопряжениям слабо финитарными обратимыми треугольными Γ-матрицами над K [7, 18, 19], в том числе, к локально внутренним автоморфизмам [3]. Аналогично расширяется понятие стандартного автоморфизма финитарной унипотентной подгруппы $UG(K)$ типа $G = B_\Gamma$ и так далее.

Выделенные в разд. 1 гиперцентральные автоморфизмы несложно переносятся сначала на построенный матричный язык, а затем и на финитарный случай, когда их высота определяется наименьшим числом m с точностью до умножения на локально внутренние автоморфизмы.

Перенесение описания автоморфизмов на финитарный случай основываем на том, что всякое конечное множество элементов финитарного модуля $NG(K)$ лежит в подмодуле того же типа соответствующего подходящей конечной подцепи Γ_1 в Γ. Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Всякий автоморфизм финитарной унипотентной группы $UG(K)$ над полем K типа $G = A_\Gamma,\ B_\Gamma,\ C_\Gamma,\ D_\Gamma,\ {}^2A_\Gamma$ или ${}^2D_\Gamma$ равен произведению $\mu\chi$, где μ — стандартный автоморфизм, а χ — локально гиперцентральный автоморфизм, когда $2K = 0$ при $G = B_\Gamma$ или C_Γ, и гиперцентральный автоморфизм высоты ≤ 5 в остальных случаях.*

3. Большие абелевы подгруппы

В данном параграфе исследуется вопрос о сопряженности подгрупп из $A(U)$ с подгруппами из $A_N(U)$. Для классических типов справедлива следующая

Теорема 4. *Всякая большая абелева подгруппа группы $UG(q)$ классического типа сопряжена в $G(q)$ с нормальной подгруппой из $UG(q)$.*

Доказательство. В табл. 2 для унипотентной подгруппы U группы Шевалле классического типа G приведены порядок $a(U)$ ее больших абелевых подгрупп, их количество $|A(U)|$, множество больших абелевых нормальных подгрупп $A_N(U)$ и подгруппа Томпсона $J(U)$.

Для классических групп равенство $A_N(U) = A(U)$ нарушается в случаях, когда $G = B_n$ $(n \geq 4)$ и $2K = K$, или $G = {}^2A_{2n}$, или $G = {}^2D_n$ [4, 12, 21, 22].

Согласно [12] для типа $G = B_n$ большие абелевы подгруппы порождают $T_{10} + T_{21}$. Опишем их более точно. Полагая $M_i = T_{2,-1} + Ke_{i0}$ и обозначая через n_i в группе $B_n(q)$ мономиальный элемент $n_r(1)$ для $r = p_{i+1,i}$ $(1 \leq i \leq n)$, находим

$$n_i e_{i0} n_i = e_{i+1,0}, \quad n_i T_{2,-1} n_i = T_{2,-1}, \quad n_i M_i n_i = M_{i+1} \quad (1 \leq i < n).$$

Сопряжения элементами $\alpha \in T_{21}$ дают $(q^n - 1)/(q-1)$ подгрупп

$$\alpha^{-1} M_i \alpha = T_{2,-1} + K(e_{i0} + a_{i+1}e_{i+1,0} + \cdots + a_n e_{n0}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

(a_j обозначает $(j,1)$-проекцию в α.) По доказанному, эти подгруппы сопряжены в $B_n(q)$ с нормальной в U подгруппой M_n, а согласно [12] исчерпывают все большие абелевы подгруппы из U, лежащие в T_{10}. Напомним, что $\langle X_r, X_{-r}\rangle$-сопряжения для простого корня r не выводят за пределы U подгруппу $\langle X_s \mid s \in \Phi^+, s \neq r\rangle$. Таким образом, n_0-сопряжения подгрупп $\alpha^{-1}M_i\alpha$, $1 < i \leq n$, дают оставшиеся $(q^n - 1)/(q-1) - 1$ подгрупп в $A(U)$; в случае $n = 4$ добавляется еще нормальная подгруппа T_{43}.

Рассмотрим тип $G = {}^2A_{2n}$. Полагая $M_i = T_{1,-1} + aK_\sigma e_{i0}$, где $a \in K^*$, и обозначая через n_i в группе ${}^2A_n(q)$ мономиальный элемент $n_r(1)$ для $r = p_{i+1,i}$ $(1 \leq i \leq n)$, находим

$$n_i e_{i0} n_i = e_{i+1,0}, \quad n_i T_{1,-1} n_i = T_{1,-1}, \quad n_i M_i n_i = M_{i+1} \quad (1 \leq i < n).$$

Сопряжения элементами $\alpha \in T_{21}$ дают $(q^n - 1)/(q-1)$ подгрупп

$$\alpha^{-1} M_i \alpha = T_{1,-1} + K(e_{i0} + a_{i+1}e_{i+1,0} + \cdots + a_n e_{n0}), \quad 1 \leq i \leq n.$$

По доказанному, эти подгруппы сопряжены в ${}^2A_n(q)$ с нормальной в U подгруппой M_n, а согласно [22], исчерпывают все большие абелевы подгруппы из U.

Случай $G = {}^2D_{n+1}$ рассматривается аналогично случаю $G = B_n$, $2K = K$. Теорема доказана.

В общем случае большая абелева подгруппа группы $U = UG(K)$ не всегда сопряжена с нормальной подгруппой из U.

Т а б л и ц а 2

Большие абелевы подгруппы группы $UG(q)$ классического типа

Группа $G(q)$	$a(U)$	$\lvert A(U)\rvert$	$A_N(U)$	$J(U)$
$A_{2n-1}(q)$	q^{n^2}	1	$T_{n+1,n}$	$T_{n+1,n}$
$A_{2n}(q)\,(n>1)$	$q^{n(n+1)}$	2	$T_{n+1,n}$, $T_{n+2,n+1}$	$T_{n+1,n}+T_{n+2,n+1}$
$A_2(q)$	q^2	$q+1$	$U_2 < K\alpha >$, $\alpha \notin U_2$	U
$B_n(q),\ \ 2 \mid q$				
$n \geq 3$	$q^{\binom{n+1}{2}}$	1	T_{10}	T_{10}
$n=2, q=2$	q^3	3	$U_2 < K\alpha >$, $\alpha \notin U_2$	U
$n=2, q>2$	q^3	2	T_{10}, T_{21}	U
$B_n(q),\ 2 \nmid q$				
$n \geq 5$	$q^{\binom{n}{2}+1}$	$\dfrac{2(q^n-1)}{q-1}-1$	$T_{2,-1}+T_{n0}$	$T_{10}+T_{21}$
$n=4$	q^7	$\dfrac{2(q^4-1)}{q-1}$	$T_{2,-1}+T_{40}$, T_{43}	$T_{10}+T_{21}+T_{43}$
$n=2,3$	q^{2n-1}	1	T_{nn-1}	T_{nn-1}
$C_n(q), n>2$	$q^{\binom{n+1}{2}}$	1	$T_{1,-1}$	$T_{1,-1}$
$D_n(q)\,(n \geq 5)$				
$2 \nmid q$	$q^{\binom{n}{2}}$	2	$T_{2,-1}$, $T^{\tau}_{2,-1}$	$T_{2,-1}+T^{\tau}_{2,-1}$
$2 \mid q$	$q^{\binom{n}{2}}$	$q+1$	$T_{3,-2}+\sum\limits_{m=2}^{n} K(ae_{m1}+be_{m,-1})$, $(a,b) \neq (0,0)$	$T_{2,-1}+T^{\tau}_{2,-1}$
$D_4(q),\ 2 \nmid q$	q^6	3	$T_{2,-1}$, $T^{\tau}_{2,-1}$, T_{43}	$T_{2,-1}+T^{\tau}_{2,-1}+T_{43}$
$q=2^t>2$	q^6	$3q$	$T_{2,-1}$, $T^{\tau}_{2,-1}$, T_{43}, $T_{3,-2}+\sum\limits_{m=2}^{4} K(e_{m1}+ae_{m,-1})$	$T_{2,-1}+T^{\tau}_{2,-1}+T_{43}$
$q=2$	q^6	7	$T_{2,-1}$, $T^{\tau}_{2,-1}$, T_{43}, M_1, $T_{3,-2}+\sum\limits_{m=2}^{4} K(e_{m1}+ae_{m,-1})$	$T_{2,-1}+T^{\tau}_{2,-1}+T_{43}$
${}^2A_{2n-1}(q^2)$	q^{n^2}	1	$T_{1,-1}$	$T_{1,-1}$
${}^2A_{2n}(q^2)$	q^{n^2+1}	$\dfrac{q^n-1}{q-1}$	$T_{1,-1}+K_{\sigma}e_{n0}$	T_{10}
${}^2D_{n+1}(q^2),\ 2 \nmid q$				
$n \geq 5$	$q^{\binom{n}{2}+2}$	$\dfrac{2q^{2n}-q^2-1}{(q^2-1)}$	$T_{2,-1}+T_{n0}$	$T_{10}+T_{21}$
$n=4$	q^8	$\dfrac{2q^{2n}-q^2-1}{(q^2-1)}+1$	$T_{2,-1}+T_{40}$, T_{43}	$T_{10}+T_{21}+T_{43}$
$n=3$	q^6	1	T_{nn-1}	T_{nn-1}
${}^2D_{n+1}(q^2),\ 2 \mid q$				
$n \geq 4$	$q^{\binom{n+1}{2}}$	q^2-1	$T_{2,-1}+a\sum\limits_{u=1}^{n} K_{\sigma}e_{u0}$	T_{10}
${}^2D_4(4)$	q^6	6	$T_{2,-1}+a\sum\limits_{u=1}^{3} K_{\sigma}e_{u0}$, M_2	$T_{10}+T_{32}$

П р и м е ч а н и я к табл. 2.

1. Всюду в таблице $a \neq 0$.
2. Через τ обозначен графовый автоморфизм второго порядка.

3. Для группы $D_4(q)$ список больших абелевых нормальных подгрупп приведен с точностью до графового автоморфизма третьего порядка.

4. Через T_{ij} обозначается $T(r)$ для корня $r = p_{ij}$, кроме случая $G = D_n$, $(i,j) = (i,1)$. Это же обозначение применяется и для скрученных типов для $r \in \zeta(\Phi)$.

5. Используются обозначения подгрупп

$$M_1 = K(e_{43}+e_{21}+e_{2,-1}+e_{3,-2})+K(e_{42}+e_{31}+e_{3,-1}+e_{3,-2})+K(e_{41}+e_{3,-2})+K(e_{4,-1}+e_{3,-2})+T_{4,-2},$$
$$M_2 = K_\sigma(e_{32}+ae_{10}+e_{2,-1})+K_\sigma(e_{31}+ae_{20}+e_{2,-1})+\{axe_{30}+(x+\bar{x})e_{2,-1} \mid x \in K\}+T_{3,-1}.$$

Предложение 1. *В группе $U = UG_2(K)$ над конечным полем K при $6K = K$ существует большая абелева подгруппа, не сопряженная в $G_2(K)$ ни с какой нормальной подгруппой из U.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [8], в рассматриваемом случае множество $A_N(U)$ состоит из подгруппы U_3. Пусть a, b — простые корни из Φ, $|a| < |b|$. Тогда

$$A = X_a X_{3a+b} X_{3a+2b} = X_a U_4$$

есть большая абелева подгруппа в U. Покажем, что она не сопряжена с U_3. Предположим противное: $gAg^{-1} = U_3$ для некоторого $g \in \Phi(K)$. Пусть B — подгруппа Бореля группы $\Phi(K)$, N — мономиальная подгруппа и n_w — фиксированный (произвольно) прообраз в N элемента w группы Вейля W при естественном гомоморфизме $N \mapsto W$. Известно [14], что

$$g = bn_w u, \quad b \in B, u \in U_w^- = \langle X_r \mid \ r \in \Phi^+, \ \ \omega(r) \in \Phi^- \rangle,$$

причем элементы b, w, u определены однозначно. Отсюда $(n_w u)A(n_w u)^{-1} \subseteq U$, и поэтому

$$uAu^{-1} = n_w^{-1}(X_{2a+b}X_{3a+b}X_{3a+2b})n_w \subseteq U.$$

В результате приходим к соотношению

$$n_w^{-1}(X_{2a+b}X_{3a+b}X_{3a+2b})n_w = X_a \mod U_2,$$

из которого получаем, что $w^{-1}(2a+b), w^{-1}(3a+b), w^{-1}(3a+2b) \in \Phi^+$. Кроме того, так как $a, 2a+b$ — короткие корни, а $3a+b, 3a+2b$ длинные, то $w^{-1}(2a+b) = a$ и

$$w^{-1}\{3a+b, 3a+2b\} \equiv \{3a+b, 3a+2b\}. \tag{3.4}$$

Тогда корень $w(3a+b)$ должен совпадать с $3a+b$ или $3a+2b$, а так как $w(3a+b) = 6a+3b+w(b)$, то $w(b)$ совпадает с $-3a-2b$ или $-3a-b$. Но тогда $w(3a+2b) = \pm b$, что противоречит соотношению (3.4). Предложение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вдовин Е. П.** Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле // Мат. заметки. 2001. Т. 69, вып. 4. С. 524–549.
2. **Вдовин Е. П.** Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 523–544.
3. **Горчаков Ю. М.** Группы с конечными классами сопряженных элементов. М.: Наука, 1978. 119 с.
4. **Кондратьев А. С.** Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, вып. 1(247). С. 57–96.
5. **Левчук В.М.** Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиева типа малых рангов // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 141-161.
6. **Левчук В.М.** Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 3. С. 315-338.

7. **Левчук В. М.** Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы // Мат. заметки. 1987. Т. 42, вып. 5. С. 631–641.
8. **Левчук В.М., Сулейманова Г.С.** Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы // Докл. РАН. 2008. Т. 419, № 5. С. 595–598.
9. **Мальцев А. И.** Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9, № 4. С. 291-300.
10. **Мерзляков Ю.И.** Эквиподгруппы унитреугольных групп: критерий самонормализуемости // Докл. РАН. 1994. Т. 339, № 6. С. 732–735.
11. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 264 с.
12. **Barry M. J. J.** Large Abelian subgroups of Chevalley groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. Vol. 27, no. 1. P. 59–87.
13. **Barry M.J.J., Wong W.J.** Abelian 2-subgroups of finite symplectic groups in characteristic 2 // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1982. Vol. 33, no. 3. P. 345–350.
14. **Carter R.** Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972. 332 p.
15. **Gibbs J.** Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. Vol. 14, no. 2. P. 203–228.
16. **Gupta Ch. K., Levchuk V.M. and Ushakov Yu. Yu.** Hypercentral and monic automorphisms of classical algebras, rings and groups // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2008. Vol. 1, iss. 4. P. 380–390.
17. **Kuzucuoglu F., Levchuk V.M.** Isomorphism of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings // Acta Appl. Math. 2004. Vol. 82, no. 2. P. 169–181.
18. **Levchuk V.M.** Chevalley groups and their unipotent subgroups // Contemp. Math. 1992. Vol. 131, part 1. P. 227–242.
19. **Levchuk V.M.** Sylow subgroups of the Chevalley groups and associated (weakly) finitary groups and rings // Acta Appl. Math. 2005. Vol. 85, no. 1-3. P. 225–232.
20. **Weir A. J.** Sylow p-subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic p // Proc. Amer. Math. Soc. 1955. Vol. 6, no. 3. P. 454-464.
21. **Wong W. J.** Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1982. Vol. 32, no. 2. P. 223-245.
22. **Wong W. J.** Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1982. Vol. 33, no. 2. P. 331-344.

Левчук Владимир Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Сибир. федерал. ун-т
e-mail: levchuk@lan.krasu.ru

Поступила 19.01.2009

Сулейманова Галина Сафиуллановна
канд. физ.-мат. наук, доцент
докторант
Сибир. федерал. ун-т
e-mail: suleymanova@list.ru

Том 15 № 2 2009

УДК 519.17

О ГРАФАХ, В КОТОРЫХ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИН ИЗОМОРФНЫ ГРАФУ ХОФМАНА — СИНГЛТОНА[1]

А. А. Махнев

Изучаются связные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона (т. е. сильно регулярному графу с параметрами (50,7,0,1)). Доказано, что дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона, имеет $\mu = 2$.

Ключевые слова: граф Хофмана — Синглтона, дистанционно регулярный граф, локально $\mathcal{F}$-граф.

A. A. Makhnev. Graphs in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Hoffman–Singleton graph.

Connected graphs are studied in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Hoffman–Singleton graph (i.e., the strongly regular graph with parameters (50,7,0,1)). It is proved that a distance-regular graph in which neighborhoods of vertices are isomorphic to the Hoffman–Singleton graph has $\mu = 2$.

Keywords: Hoffman–Singleton graph, distance-regular graph, locally $\mathcal{F}$-graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (соотв. $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (соотв. смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (соотв. *λ-подграфом*). *Степенью вершины* называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины a из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v, k, λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v, k, λ, μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i = b_i(u, w)$ (через $c_i = c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $\Gamma(w)$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w, находящихся на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$, через k_i обозначается $|\Gamma_i(u)|$ и $a_i = k - b_i - c_i$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \ldots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$.

Графом Тервиллигера называется неполный граф, в котором пересечение окрестностей любых двух вершин, находящихся на расстоянии 2, является μ-кликой. *Графом Мура* называется

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00009), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программы Отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и НАН Беларуси.

сильно регулярный граф, в котором $\lambda = 0$ и $\mu = 1$. Хорошо известно, что степень графа Мура равна 2, 3, 7 или 57. Для каждой из степеней 2, 3 и 7 существует единственный граф Мура — это пятиугольник, граф Петерсена и граф Хофмана — Синглтона соответственно. Существование графа Мура степени 57 неизвестно.

Каждый из известных дистанционно регулярных графов Тервиллигера с $\mu > 1$ является локально графом Мура. Связный локально пятиугольный граф является графом икосаэдра. По теореме Холла [1, теорема 1.16.5] имеется точно 3 связных локально петерсеновских графа: $\bar{T}(7)$, граф Конвея — Смита (единственный дистанционно регулярный граф на 63 вершинах с массивом пересечений $\{10, 6, 4, 1; 1, 2, 6, 10\}$) и граф Доро (единственный дистанционно регулярный граф на 65 вершинах с массивом пересечений $\{10, 6, 4; 1, 2, 5\}$). В [2] доказано, что связный граф Тервиллигера, в котором окрестность некоторой вершины a изоморфна графу Петерсена, совпадает либо с $a^\perp$, либо с графом Конвея — Смита, либо графом Доро. Неизвестно существование графов, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона.

В данной работе начато изучение дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона. Получен следующий результат, анонсированный в [3].

Теорема. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона. Тогда Γ является графом Тервиллигера (т. е. Γ имеет $\mu = 2$).*

1. Предварительные результаты

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы. Сначала приведем аналог границы Хофмана для произвольных регулярных подграфов сильно регулярных графов.

Лемма 1.1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с собственными значениями k, r, s на v вершинах, и Ω — регулярный подграф степени k' на u вершинах графа Γ. Тогда $s \le k' - u(k - k')/(v - u) \le r$, причем если в одном из этих нестрогих неравенств достигается равенство, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с $u(k - k')/(v - u)$ вершинами из Ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это утверждение хорошо известно [4, § 2].

Следующая лемма является двойственной к результату Зейделя [1, предложение 1.4.1].

Лемма 1.2. *Пусть Γ является связным регулярным графом степени k на v вершинах. Если найдутся такие целые числа $\lambda \ge 0$ и $\mu > 0$, что для любого ребра $\{a, b\}$ имеем $\lambda_{ab} \le \lambda$ и для любых двух вершин u, w, находящихся на расстоянии 2, имеем $\mu_{uw} \le \mu$, то $v \ge 1 + k + k(k - \lambda - 1)/\mu$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем вершину u. Тогда число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ не меньше $k(k-\lambda-1)$, поэтому $|\Gamma_2(u)| \ge k(k-\lambda-1)/\mu$. Таким образом, $v \ge 1+k+k(k-\lambda-1)/\mu$.

Если $v = 1 + k + k(k - \lambda - 1)/\mu$, то диаметр Γ равен 2 и $|\Gamma_2(u)| = k(k - \lambda - 1)/\mu$ для любой вершины u. Более того, для любого ребра $\{a, b\}$ имеем $\lambda_{ab} = \lambda$ и для любых двух несмежных вершин u, w имеем $\mu_{uw} = \mu$. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения графа Γ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $3 \le e \le d$, то $k_{e-1} \ge k$, причем в случае $k_{e-1} = k$ граф Γ является многоугольником или антиподальным 2-накрытием $(d = e, k_d = 1)$;*

(2) *если окрестность некоторой вершины в* Γ *изоморфна графу Хофмана — Синглтона, то* $\theta_1 \le 20$ *и* $\theta_d \ge -15$;

(3) *если неглавное собственное значение* θ_i *имеет кратность* f_i*, меньшую* k*, то* $i \in \{1, d\}$ *и для* $b = b_1/(\theta_i + 1)$ *каждая окрестность вершины в графе* Γ *имеет собственное значение* $-1 - b$ *кратности, не меньшей* $k - f_i$ (*если окрестность некоторой вершины в* Γ *изоморфна графу Хофмана — Синглтона и* $f_i \le 49$*, то число* θ_i *целое*).

Доказательство. Утверждение (1) следует из [1, лемма 5.1.2].

Пусть окрестность вершины a в Γ изоморфна графу Хофмана — Синглтона. Тогда $[a]$ имеет собственные значения $2, -3$, и ввиду [5] получим $b^+ = -1 - b_1/(1 + \theta_d) \ge 2$ и $b^- = -1 - b_1/(1 + \theta_1) \le -3$. Отсюда следует утверждение (2).

Утверждение (3) следует из [1, теорема 4.4.4]. Если окрестности вершин в Γ изоморфны графу Хофмана — Синглтона и $f_i \le 49$, то $-1 - b \in \{7, 2, -3\}$. В двух последних случаях b делит $b_1 = 42$ и число θ_i целое. Если же $-1 - b = 7$, то $\theta_i = -42/8 - 1$ — число нецелое рациональное, следовательно, должно быть целым, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Пусть* Γ *— граф Хофмана — Синглтона,* Δ *— его подграф, являющийся объединением* t *изолированных ребер,* X_i *— множество вершин из* $\Gamma - \Delta$*, смежных точно с* i *вершинами из* Δ*,* $n_i = |X_i|$*. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $\sum n_i = 50 - 2t$, $\sum i n_i = 12t$ *и* $\sum \binom{i}{2} n_i = 2t(t-1)$;

(2) $n_0 + \sum \binom{i-1}{2} n_i = 2t^2 - 16t + 50$ *и* $n_i = 0$ *для* $i > t$;

(3) $t \le 10$*, причем в случае равенства каждая вершина из* $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с 4 вершинами из* Δ.

Доказательство. Утверждение (1) получается с помощью подсчета вершин вне Δ, ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$ и 2-путей с концами в Δ и средней вершиной в $\Gamma - \Delta$.

Вычитая второе равенство в (1) из суммы первого и третьего, получим равенство из (2). Если $i > t$ и $u \in X_i$, то $[u]$ содержит ребро из Δ, противоречие с тем, что Γ не содержит треугольников. Утверждение (2) доказано.

По лемме 1.1 получим $t \le 10$, и если $t = 10$, то $n_i = 0$ для $i \ne 4$. Утверждение (3) доказано. Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Пусть* Γ *— граф Хофмана — Синглтона,* B*,* C *— такие непустые подграфы из* Γ*, что между* B *и* C *нет ребер. Без ограничения общности,* $\beta = |B| < \gamma = |C|$*. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) $\beta + \gamma + 4\beta\gamma/25 \le 50$;

(2) *если* $\beta + \gamma = 30$*, то* $\beta \le 4$;

(3) *если* $\beta = 2$*, то* $\gamma \le 36$*, если* $\beta = 3$*, то* $\gamma \le 30$*, если* $\beta = 4$*, то* $\gamma \le 26$*, причем в случае* $\gamma = 26$ *подграф* B *является объединением двух изолированных ребер*;

(4) *если* $\gamma > 36$*, то* $\beta = 1$*, если* $\gamma > 30$*, то* $\beta \le 2$*, если* $\gamma > 25$*, то* $\beta \le 4$*; если* $\gamma \in \{24, 25\}$*, то* $\beta \le 4$*, если* $\gamma \ge 21$*, то* $\beta \le 5$*, если* $\gamma = 20$*, то* $\beta \le 6$*, причем в случае* $\beta = 6$ *подграф* B *является объединением трех изолированных ребер.*

Доказательство. Так как между B и C нет ребер, то по [6, предложение 4.6.1] имеем $|B||C| \le (v - |B|)(v - |C|)(\theta_2 - \theta_1)^2/(2k - \theta_2 - \theta_1)^2$, где $\theta_2 = -3, \theta_1 = 2$ — неглавные собственные значения графа Хофмана-Синглтона. Поэтому $\beta\gamma \le (50 - \beta)(50 - \gamma)/9$. Отсюда следует утверждение (1).

Пусть $\beta + \gamma = 30$. Тогда по утверждению (1) имеем $\beta \le 5$. Предположим, что $\beta = 5$. Пусть вершина b из B смежна с δ вершинами из A. Так как число путей с началом b и концом в C равно 25 и вершина из $A \cap [b]$ смежна не более чем с 6 вершинами из C, то $\delta > 4$. Заметим, что вершина x из $A \cap [b]$ смежна не более чем с 5 вершинами из C (иначе $d(x, b') = 3$ для

$b' \in B - b^{\perp}$). Если $\delta = 5$, то каждая вершина из $A \cap [b]$ смежна с 5 вершинами из C и с вершиной e из $(B - b^{\perp}) \cup A$. Если $e \in B$, то $B - b^{\perp}$ — ребро. Если же $e \in A$, то $B - b^{\perp}$ является 2-кокликой из $[e]$. Ясно, что в $A \cap [b]$ не более одной вершины, смежной с вершиной e из A. Далее, в $A \cap [b]$ не более двух вершин, смежных с вершиной e из $B - b^{\perp}$, противоречие.

Если $\delta = 6$, то степень каждой вершины в графе B не больше 1. Если B содержит пару изолированных ребер, то $|A| \geq (6+6)+(4+4)+2$, противоречие. Если B содержит единственное изолированное ребро, то $|A| \geq (6+6)+5+4$, противоречие.

Значит, $\delta = 7$ и $|A| \geq 7+6+5+4$, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Если $\beta = 2$, то по утверждению (1) имеем $\gamma \leq 36$. Если $\beta = 3$, то ввиду утверждения (1) имеем $\gamma \leq 31$. Пусть $\gamma = 31$. Заметим, что B содержит не более одной вершины степени 2. Если B является 2-путем, то $|A| \geq 6+6+5$. Если B содержит ребро и изолированную вершину, то $|A| \geq 6+6+5$. Если же B является кокликой, то $|A| \geq 7+6+5$. В любом случае получаем противоречие.

Если $\beta = 4$, то ввиду утверждения (1) имеем $\gamma \leq 28$. Заметим, что B не содержит вершин степени 3 и содержит не более двух вершин степени 2. Если B является 3-путем, то $|A| \geq 6+5+5+5$. Если B содержит точно одну вершину степени 2, то $|A| \geq 6+6+5+4$. Если B содержит ребро, то $|A| \geq 6+6+4+4$ (в случае, когда B содержит 2 ребра) или $|A| \geq 6+6+5+4$. Если B — коклика, то $|A| \geq 7+6+5+4$. В любом случае $|A| \geq 20$ и $\gamma \leq 26$. Утверждение (3) доказано.

Утверждение (4) доказывается простыми вычислениями с помощью утверждения (3). Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) μ *делит* $b_i b_{i+1}$, $c_i c_{i+1}$ *и* $a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 - k$;

(2) $b_2 b_3 b_4$ *делится на* $c_2 c_3$ *и* $k_i c_i b_i$ *делится на* $k b_1$;

(3) c_2 *делит* $b_i(a_i + a_{i+1} - a_1)$ *и* $c_{i+1}(a_i + a_{i+1} - a_1)$.

Доказательство. Все утверждения следуют из [1, лемма 4.1.7] (например, утверждение (1) следует из целочисленности p^{i+1}_{2i-1}, p^{i-1}_{2i+1} и p^2_{22}). Лемма доказана.

В леммах 1.7–1.8 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона. Зафиксируем в Γ геодезический 2-путь uwx.

Лемма 1.7. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) $\mu \in \{2, 4, 6, 10, 12, 14\}$;

(2) *диаметр* Γ *больше* 2;

(3) $c_3 \geq 3\mu/2$*, и если* k_i *нечетно, то числа* a_i, b_i, c_i *четны.*

Доказательство. Заметим, что каждый μ-подграф $\Omega = [u] \cap [x]$ является объединением t изолированных ребер. По лемме 1.4 получим $t \leq 10$, причем в случае $t = 10$ каждая вершина из $[u] - \Omega$ смежна точно с 4 вершинами из Ω.

Так как для любой вершины u имеем $|\Gamma_2(u)| = k(k - \lambda - 1)/\mu = 50 \cdot 42/\mu$, то $\mu \in \{2, 4, 6, 10, 12, 14, 20\}$, причем в случае $\mu = 20$ граф Γ является сильно регулярным.

Пусть граф Γ является сильно регулярным. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = (7 - \mu)^2 + 4(50 - \mu) = \mu^2 - 18\mu + 249$, поэтому либо $\mu = 20$ и $n = 17$, либо $\mu = 10$ и $n = 13$. В первом случае Γ имеет собственные значения 2 и -15, причем кратность 2 равна $15 \cdot 50 \cdot 65/(20 \cdot 17)$, противоречие. Во втором случае Γ имеет собственные значения 5 и -8, причем кратность 5 равна $7 \cdot 50 \cdot 58/(10 \cdot 13)$, противоречие. Утверждения (1) и (2) доказаны.

Пусть $y \in \Gamma_3(u) \cap [x]$, w, w' — смежные вершины из $[u] \cap [x]$ и $[w] \cap [w']$ содержит ровно δ вершин из $[y] \cap \Gamma_2(u)$. Тогда $\delta \leq \mu/2$ и $[w] \cap [y]$ содержит $\mu - \delta$ вершин вне $[w']$, в частности $c_3 \geq 3\mu/2$.

Пусть k_i нечетно. Так как i-я окрестность вершины содержит $k_i a_i/2$ ребер, то число a_i четно. Поэтому $b_i + c_i$ четно. Допустим, что числа b_i, c_i нечетны. Так как $k_i b_i = k_{i+1} c_{i+1}$, то число c_{i+1} нечетно. Противоречие с тем, что $c_i c_{i+1}$ делится на μ. Утверждение (3) и лемма доказаны.

Лемма 1.8. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* Γ *содержит четырехугольник, то* $c_i - b_i \geq c_{i-1} - b_{i-1} + 9$;

(2) *если* $1 < i < d$ *и* $b_i = 1$, *то* $c_{i+1} = 50$;

(3) *если* Γ — *не антиподальный граф, то* $k_2 \leq k_d(k_d - a_d - 1)$.

Доказательство. Утверждение (1) следует из [1, теорема 5.2.1].

Докажем утверждение (2). Пусть $u_1, \ldots, u_i, u_{i+1}$ — геодезический путь в Γ и $b_i = 1$. Если $c_{i+1} < 50$, то $[u_{i+1}] - \Gamma_i(u_1)$ содержит вершину w. Тогда $[u_i] \cap [w]$ содержит смежные вершины u_i, z. Так как $b_1 = 1$, то $z \in \Gamma_i(u_1)$. Противоречие с тем, что $[z]$ содержит 2 вершины u_i, w из $\Gamma_i(u)$.

Докажем утверждение (3). По [1, предложение 5.6.1] либо верно утверждение (3), либо $\lambda + 1$ делит k, либо $k \leq a_d \cdot \min\{k_d, \lambda + 2 - a_d\}$. Заметим, что $\lambda + 1 = 8$ не делит $k = 50$. Далее, максимум $a_d(9 - a_d)$ достигается при $a_d = 4,5$ и равен $81/4$. Лемма доказана.

2. Случай больших μ

В этом разделе доказано, что не существуют дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона и $\mu \geq 6$.

Пусть до конца раздела Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона.

Лемма 2.1. *Параметр* μ *не больше* 10.

Доказательство. Пусть $\mu = 14$. Тогда $k_2 = 50 \cdot 42/14 = 150$ и диаметр Γ равен 3. Действительно, если диаметр Γ больше 3 и $uwxyz$ — геодезический путь в Γ, то $([u] \cap [x]) \cup ([x] \cap [z])$ является объединением 14 изолированных ребер, противоречие с леммой 1.4. Далее, v делится на 3, поэтому k_3 делится на 3. По лемме 1.4 имеем $b_2 \leq 15$. Так как $a_3 + a_2 - a_1 = 79 - c_3 - b_2$, а 14 делит $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ и $(a_3 + a_2 - a_1)b_2$, то 14 делит $(c_3 + b_2 + 5)b_2$ и $(c_3 + b_2 + 5)c_3$.

Если $b_2 = 1$, то $c_3 = 50$, Γ является 4-накрытием клики и имеет массив пересечений $\{50, 42, 1; 1, 14, 50\}$. По [1, следствие 4.2.6] граф Γ имеет собственные значения θ и τ, являющиеся корнями квадратного трехчлена $x^2 - (\lambda - \mu)x - (n - 1)$, и кратность $\theta = 3,5 + \sqrt{62,25}$ равна $50 \cdot 51 \cdot 3/(50 + \theta^2)$, противоречие.

Если $c_3 = 50$ и $b_2 > 1$, то 7 делит $b_2 - 1$, поэтому $b_2 = 8$, число 2-путей с концами в $\Gamma_3(x)$ равно $150 \cdot 2 \cdot 14$, но не больше $12 \cdot 23 \cdot 14$, противоречие. Итак, если $b_2 > 1$, то $c_3 < 50$. Так как для смежных вершин $w, w' \in \Gamma_2(x) \cap [u]$ подграф $[w] \cap [w']$ содержит не более 6 вершин из $\Gamma_2(u) \cap [x]$, то $c_3 \geq 22$.

Если $b_2 = 2$, то c_3 делит 300 и делится на 7, противоречие. Если $b_2 = 3$, то c_3 делит 450 и $c_3 - 6$ делится на 14, противоречие. Если $b_2 = 4$, то c_3 делит 600, $c_3 - 5$ делится на 7, $c_3 = 40$, $k_3 = 15$ и $p^3_{23} = (40 \cdot 3 + 10 \cdot 2)/14 = 10 > k_3 - a_3$, противоречие. Если $b_2 = 5$, то c_3 делит 750 и $c_3 - 4$ делится на 14, противоречие. Если $b_2 = 6$, то c_3 делит 900 и $c_3 - 3$ делится на 7, поэтому $c_3 = 45$ и $k_3 = 20$ не делится на 3, противоречие.

Если $b_2 = 7$, то c_3 четно и делит 1050, поэтому $c_3 \in \{30, 42\}$. В первом случае $k_3 = 35$, а во втором $k_3 = 25$, и в обоих случаях k_3 не делится на 3, противоречие.

Если $b_2 = 8$, то c_3 делит 1200 и $c_3 - 1$ делится на 7. Если $b_2 = 9$, то c_3 делит 1350 и c_3 делится на 14. Если $b_2 = 10$, то c_3 делит 1500 и $c_3 + 1$ делится на 7. Если $b_2 = 11$, то c_3 делит 1650 и $c_3 + 2$ делится на 7. Во всех случаях имеем противоречие. Если $b_2 = 12$, то c_3 делит 1800 и $c_3 + 3$ делится на 7, поэтому $c_3 = 25$, $k_3 = 72$ и $p^3_{23} = (25 \cdot 11 + 25 \cdot 17)/14 = 50 > k_3 - a_3$, противоречие.

Если $b_2 = 13$, то c_3 делит 1950 и $c_3 + 4$ делится на 14, противоречие. Если $b_2 = 14$, то c_3 делит 2100 и $c_3 - 2$ делится на 7, поэтому $c_3 = 30$ и $k_3 = 70$ не делится на 3, противоречие. Если $b_2 = 15$, то c_3 делит 2250 и $c_3 - 1$ делится на 14, противоречие.

Пусть $\mu = 12$. Тогда $k_2 = 50 \cdot 42/12 = 175$, b_2 четно и диаметр Γ равен 3. Действительно, если диаметр Γ больше 3 и $uwxyz$ — геодезический путь в Γ, то $([u] \cap [x]) \cup ([x] \cap [z])$ является объединением 12 изолированных ребер, противоречие с леммой 1.4. Далее, v делится на 3, поэтому k_3 сравнимо с -1 по модулю 3. По лемме 1.4 имеем $b_2 \leq 17$. Но $a_3+a_2-a_1 = 81-b_2-c_3$, а 12 делит $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ и $(a_3 + a_2 - a_1)b_2$, поэтому 12 делит $(c_3 + b_2 + 3)b_2$ и $(c_3 + b_2 + 3)c_3$.

Если $c_3 = 50$, то 6 делит $53 + b_2$ и b_2 нечетно, противоречие. Итак, $c_3 < 50$. Так как для смежных вершин $w, w' \in \Gamma_2(x) \cap [u]$ подграф $[w] \cap [w']$ содержит не более 6 вершин из $\Gamma_2(u) \cap [x]$, то $c_3 \geq 18$.

Если $b_2 = 2$, то c_3 делит 350 и $c_3 + 5$ делится на 6, поэтому $c_3 = 25$ и $k_3 = 14 < a_3$, противоречие. Если $b_2 = 4$, то c_3 делит 700 и $c_3 - 5$ делится на 3, поэтому $c_3 = 35$ и $k_3 = 20$, противоречие с леммой 1.2. Если $b_2 = 6$, то c_3 делит 1050 и c_3-3 четно, поэтому $c_3 = 21, k_3 = 50$, противоречие с леммой 1.2. Если $b_2 = 8$, то c_3 делит 1400 и $c_3 - 5$ делится на 3, поэтому $c_3 \in \{20, 35\}$ и $k_3 \in \{70, 40\}$, противоречие с тем, что k_3 сравнимо с -1 по модулю 3.

Если $b_2 = 10$, то c_3 делит 1750 и $c_3 + 1$ делится на 6, поэтому $c_3 = 35$, $k_3 = 50$ и $p^3_{23} = (35 \cdot 9 + 15 \cdot 7)/12 = 35 = k_3 - a_3$, противоречие. Если $b_2 = 12$, то c_3 делит 2100, 12 делит $c_3(c_3 + 3)$, поэтому $c_3 = 21$ и $k_3 = 100$, противоречие. Если $b_2 = 14$, то c_3 делит $175 \cdot 14$ и $c_3 + 5$ делится на 6, поэтому либо $c_3 = 25$ и $k_3 = 98$, либо $c_3 = 49$ и $k_3 = 50$. В первом случае $p^3_{23} = (25 \cdot 13 + 25 \cdot 17)/12$, а во втором $p^3_{23} = (49 \cdot 13 - 7)/12$, противоречие.

Если $b_2 = 16$, то c_3 делит $175 \cdot 16$, 6 делит $c_3 - 5$, поэтому $c_3 = 35, k_3 = 80$, $p^3_{23} = (35 \cdot 15 + 15 \cdot 7)/12$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Параметр μ не равен* 10.

Доказательство. Покажем сначала, что если $\mu = 10$, то Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 10; 1, 10, 35\}$.

Пусть $\mu = 10$ и $u = u_0, u_1, \ldots, u_d$ — геодезический путь в Γ. По лемме 1.4 имеем $c_3 \geq 3\mu/2 = 15$. Далее, $k_2 = 50 \cdot 42/10 = 210$ и k_2b_2 делится на k, поэтому b_2 делится на 5. Если диаметр графа Γ больше 4, то $([u_3] \cap [u_1]) \cup ([u_3] \cap [u_5])$ является объединением 10 изолированных ребер. Если $\Gamma_2(u) \cap [u_3] - [u_1]$ содержит еще по крайней мере 3 вершины, то либо $[u_3]$ содержит четырехугольник, либо μ-подграф для некоторых вершин из $\Gamma_2(u) \cap [u_3] - [u_1]$ содержит в окрестности $[u_3]$ более одной вершины, противоречие в любом случае. Поэтому $c_3 < 13$, противоречие.

Пусть диаметр Γ равен 4. Если $b_2 \geq 15$, то, как и выше, $[u_2]$ содержит треугольник или четырехугольник, противоречие. Итак, $b_2 = 10$ и $a_2 = 30$. Далее, $k_3 = 210 \cdot 10/c_3$ и 50 делит $k_3b_3 = 210 \cdot 10b_3/c_3$, поэтому c_3 делит $42b_3$. Напомним, что $c_3 - b_3 \geq 9$, и в случае $c_3 = 42$ имеем $b_3 = 1$.

Если $b_3 = 10$, то $c_3 \geq 19$, а по лемме 1.4 имеем $c_3 \leq 19$, противоречие. Если $b_3 = 9$, то $c_3 = 18$ и $a_3 = 23$, противоречие с тем, что $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 5. Если $b_3 = 8$, то $c_3 = 21$ и $a_3 = 21$, противоречие с тем, что $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 5. Если $b_3 = 7$, то $c_3 = 21$, $k_3 = 100$ и $a_3 = 22$, противоречие с тем, что $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 10.

Если $b_3 = 6$, то $c_3 \in \{18, 21\}$. В случае $c_3 = 18$ имеем $a_3 = 26$, а в случае $c_3 = 21$ имеем $a_3 = 23$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 5. Если $b_3 = 5$, то $c_3 \in \{15, 21\}$. В случае $c_3 = 15$ имеем $a_3 = 30$, а в случае $c_3 = 21$ имеем $a_3 = 24$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 5.

Если $b_3 = 4$, то $c_3 = 21$ и $a_3 = 25$, противоречие с тем, что $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 5. Если $b_3 = 3$, то $c_3 \in \{21, 28\}$. В случае $c_3 = 21$ имеем $a_3 = 26$, а в случае $c_3 = 28$ имеем $a_3 = 19$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 5.

Если $b_3 = 2$, то $c_3 \in \{21, 28\}$. В случае $c_3 = 21$ имеем $k_3 = 100, a_3 = 27$ и $k_4 = 200/c_4$. Так как $k_3 + k_4$ делится на 3, то $c_4 = 25, k_4 = 8 < a_4$. В случае $c_3 = 28$ имеем $a_3 = 20$, и

$(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 10, противоречие.

Если $b_3 = 1$, то $c_3 \in \{21, 42\}$. В случае $c_3 = 21$ имеем $a_3 = 28$ и $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 10. В случае $c_3 = 42$ имеем $k_3 = 50, c_4 = 50$ и $k_4 = 1$. В этом случае Γ является антиподальным графом с массивом пересечений $\{50, 42, 10, 1; 1, 10, 42, 50\}$, противоречие с тем, что его антиподальное частное является сильно регулярным графом, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона.

Пусть диаметр Γ равен 3. Напомним, что v делится на 3, поэтому k_3 делится на 3. Так как b_2b_1 делится на 10, то b_2 делится на 5.

Далее, $\sum n_i = 40$, $\sum in_i = 60$, $\sum \binom{i}{2}n_i = 40$ и $n_0 + \sum \binom{i-1}{2}n_i = 20$. Если $b_2 = 15$, то $n_3 + 3n_4 \le 5$. В случае $n_4 = 1$ получим $n_3 \le 2$, $n_1 + n_2 + n_3 \le 24$ и $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 56$, противоречие. Значит, $n_4 = 0, n_3 \le 5, n_1 + n_2 + n_3 \le 25$ и $n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 60$, снова противоречие. Итак, $b_2 \in \{5, 10\}$.

Если $c_3 = 50$, то $k_3 \in \{21, 42\}$ и $p^3_{23} = 50(b_2 - 1)/6 = 75$, противоречие.

Пусть $c_3 < 50$. Если $b_2 = 5$, то $c_3 \in \{14, 25, 35\}$, $k_3 \in \{75, 42, 30\}$ и $a_3 \in \{36, 25, 15\}$. В первых двух случаях имеем противоречие с леммой 1.2, а в последнем $p^3_{23} = (35 \cdot 4 + 15 \cdot 7)/10$, противоречие.

Если $b_2 = 10$, то $c_3 \in \{14, 20, 25, 28, 35\}$, $k_3 \in \{150, 105, 84, 75, 60\}$ и $a_3 \in \{36, 30, 25, 22, 15\}$. Если $c_3 = 14$, то $p^3_{32} = (36 \cdot 28 + 14 \cdot 9)/10$, противоречие. Если $c_3 = 20$, то $p^3_{32} = (30 \cdot 22 + 20 \cdot 9)/10 = 84$. Если $c_3 = 25$, то $p^3_{32} = (25 \cdot 17 + 25 \cdot 9)/10 = 65$. Если $c_3 = 28$, то $p^3_{32} = (22 \cdot 14 + 28 \cdot 9)/10 = 56$. В любом из этих случаев $p^3_{32} > k_3 - a_3$, противоречие.

Если $c_3 = 35$, то граф Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 10; 1, 10, 35\}$. По [1, предложение 4.1.1] собственные значения $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ графа Γ диаметра d — это корни многочлена $w_{d+1}(x)$, где $w_0(x) = 1$, $w_1(x) = x$ и $w_{i+1}(x) = (x - a_i)w_i(x) - c_ib_{i-1}w_{i-1}(x)$. В случае $d = 3$ многочлен $w_4(x)$ имеет по крайней мере два целочисленных корня (см. первый абзац на с. 130 в [1]).

Если Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 10; 1, 10, 35\}$, то $w_2(x) = x^2 - 7x - 50$, $w_3(x) = x^3 - 37x^2 - 260x + 1500$ и $w_4(x) = (x - 50)(x^3 - 2x^2 - 155x + 100)$. Противоречие с тем, что 50 — единственный целочисленный корень многочлена $w_4(x)$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $\mu = 6$. *Тогда* $n_0 + \sum \binom{i-1}{2}n_i = 20$ *и выполняются следующие утверждения*:

(1) $c_3 \ge 12$, *причем в случае равенства для любого геодезического пути* $uwxy$ *в* Γ *подграф* $[u] \cap \Gamma_2(y)$ *является объединением двух изолированных шестиугольников*;

(2) *если диаметр* Γ *равен* 3, *то* Γ *имеет один из следующих массивов пересечений:* $\{50, 42, 10; 1, 6, 20\}$, $\{50, 42, 12; 1, 6, 15\}$, $\{50, 42, 16; 1, 6, 20\}$, $\{50, 42, 16; 1, 6, 50\}$.

Доказательство. Пусть $\mu = 6$. Тогда $k_2 = 50 \cdot 42/6 = 350$. По лемме 1.4 имеем $\sum n_i = 44$, $\sum in_i = 36$ и $\sum \binom{i}{2}n_i = 12$. Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим $n_0 + \sum \binom{i-1}{2}n_i = 20$, в частности, $b_2 \le 20$.

Пусть $uwxy$ — геодезический путь в Γ, $\Delta = \{u\} \cup ([u] \cap \Gamma_2(y)) \cup (\Gamma_2(u) \cap [y]) \cup \{y\}$. Ввиду леммы 1.4 для любых смежных вершин $x, x' \in \Delta(y)$ получим $|\Delta(u) \cap [x] \cap [x']| \le 3$. Аналогично, для любых двух несмежных вершин $x, x'' \in \Delta(y)$ получим $|\Delta(u) \cap [x] \cap [x']| \le 4$, причем в случае равенства подграф $\Delta(u) \cap [x] \cap [x']$ является объединением двух изолированных ребер. Покажем, что степень любой вершины x в графе $\Delta(y)$ не меньше 2. В противном случае для любой вершины $w \in \Delta(u) \cap [x]$ подграф $[w] \cap \Delta(y)$ содержит ребро $\{x, x'\}$, а это противоречит тому, что $|\Delta(u) \cap [x] \cap [x']| = 6$.

Допустим, что $c_3 \le 12$. Если $x_1x_2x_3$ — путь в графе $\Delta(y)$, то либо $|\Delta(u) \cap [x_1] \cap [x_3]| = 4$ и $c_3 = 12$, либо $|\Delta(u) \cap [x_1] \cap [x_3]| = 3$ и $c_3 \ge 11$, либо $|\Delta(u) \cap [x_1] \cap [x_3]| = 2$ и $c_3 \ge 10$. Действительно, в случае $|\Delta(u) \cap [x_1] \cap [x_3]| = 4$ подграф $\Delta(u) \cap [x_2]$ не пересекает $[x_1] \cap [x_3]$, содержит не более одной вершины в каждом из подграфов $[x_1] - [x_3]$, $[x_3] - [x_1]$ и не менее четырех вершин из $\Delta(u) - ([x_1] \cup [x_3])$, поэтому $c_3 = 12$. В случае $|\Delta(u) \cap [x_1] \cap [x_3]| = 3$ подграф $\Delta(u) \cap [x_2]$

содержит не более двух вершин в каждом из подграфов $[x_1]-[x_3]$, $[x_3]-[x_1]$ и $c_3 \geq 11$. В случае $|\Delta(u) \cap [x_1] \cap [x_3]| = 2$ имеем $c_3 \geq 10$. Если $\Delta(u) \cap [x_1] \cap [x_3]$ является кликой, то $\Delta(u) \cap [x_2]$ содержит точно две вершины в каждом из подграфов $[x_1]-[x_3]$, $[x_3]-[x_1]$, $\Delta(u)-([x_1] \cup [x_3])$ и $c_3 = 12$. В любом случае $[x_2] \cup [x_3]$ содержит не более 5 вершин из $\Delta(u) \cap [x_1]$.

Число ребер между $[u] \cap [x]$ и $\Delta(y)-\{x\}$ равно 30. Если $c_3 \leq 11$ или степень x в графе $\Delta(y)$ равна 3, то число 3-лап с центром в $\Delta(y)-x^{\perp}$ и концевыми вершинами в $[u] \cap [x]$ не меньше 8. Противоречие с тем, что некоторое ребро из $[x] \cap \Delta(u)$ попадает в окрестности четырех вершин из $\Delta(y)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть диаметр Γ равен 3. Тогда k_3 сравнимо с 1 по модулю 3.

Если $b_2 = 1$, то $c_3 = 50$, Γ является антиподальным 8-накрытием 51-клики и имеет массив пересечений $\{50, 42, 1; 1, 6, 50\}$. По [1, следствие 4.2.6] граф Γ имеет собственные значения θ и τ, являющиеся корнями квадратного трехчлена $x^2-(\lambda-\mu)x-(n-1)$, и кратность $\theta = 0,5+\sqrt{50,25}$ равна $50 \cdot 51 \cdot 7/(50+\theta^2)$, противоречие.

Заметим, что $a_3+a_2-a_1$ сравнимо с b_2+c_3-3 по модулю 3, поэтому 6 делит $(b_2+c_3-3)b_2$ и $(b_2+c_3-3)c_3$.

Пусть $b_2 = 2$. Тогда 3 делит c_3-1, $c_3 \in \{25, 28\}$ и $k_3 \in \{28, 25\}$, противоречие с леммой 1.2. Пусть $b_2 = 3$. Ввиду леммы 1.2 получим $c_3 = 42, k_3 = 25$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 3; 1, 6, 42\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 4$. Тогда 3 делит c_3+1, и ввиду леммы 1.2 получим $c_3 = 35, k_3 = 40, p^3_{23} = (40 \times 3+10 \cdot 2)/6$, противоречие, или $c_3 = 50, k_3 = 28$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 4; 1, 6, 50\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 5$. Тогда 6 делит c_3+2, противоречие. Пусть $b_2 = 6$. Тогда 6 делит $c_3(c_3-3)$, и ввиду леммы 1.2 получим $c_3 \in \{30, 42\}, k_3 \in \{70, 50\}$ и $p^3_{23} = (30 \cdot 5+20 \cdot 12)/6 = 65 > k_6-a_6$, противоречие. Пусть $b_2 = 7$. Тогда 6 делит c_3-2, и ввиду леммы 1.2 получим $c_3 = 50, k_3 = 49$ и $p^3_{23} = 50 > k_3$. Пусть $b_2 = 8$. Тогда 3 делит c_3-1, и ввиду леммы 1.2 получим $c_3 \in \{25, 28, 40\}$ и $k_3 \in \{112, 100, 70\}$. В первом случае $p^3_{23} = (25 \cdot 7+25 \cdot 17)/6 = 100$, а во втором $p^3_{23} = (28 \cdot 7+22 \cdot 14)/6 = 84$. В любом случае $p^3_{23} > k_3-a_3$, противоречие. В третьем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 8; 1, 6, 40\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 9$. Так как k_3 сравнимо с 1 по модулю 3, то $c_3 \in \{18, 45\}$ и $k_3 \in \{175, 70\}$ соответственно. В первом случае $p^3_{23} = (18 \cdot 8+32 \cdot 24)/6 = 152 > k_3-a_3$, а во втором $p^3_{23} = (45 \cdot 8-5 \cdot 3)/6$, противоречие. Пусть $b_2 = 10$. Тогда 3 делит c_3+1, $c_3 \in \{14, 20, 35, 50\}$ и $k_3 \in \{250, 175, 40, 28\}$. В третьем и четвертом случаях имеем $1+a_3+p^3_{23} > k_3$, противоречие. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 10; 1, 6, 14\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 10; 1, 6, 20\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 5, и выполняется заключение леммы.

Пусть $b_2 = 11$. Тогда 6 делит c_3+2, поэтому $c_3 = 22, k_3 = 175$, $p^3_{23} = (22 \cdot 10+28 \cdot 20)/6 = 130$ и для вершин $y, z \in \Gamma_3(u)$ с $d(y, z) = 3$ подграф $[y] \cap \Gamma_3(u)$ содержит не менее 29 вершин из $\Gamma_2(z)$, противоречие с тем, что $c_3 = 22$. Пусть $b_2 = 12$. Тогда $c_3 \in \{12, 15, 21, 24, 30, 42\}$ и $k_3 \in \{350, 280, 200, 175, 140, 100\}$. Так как v делится на 3, то $k_3 \in \{280, 175, 100\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 6, 15\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 5, и выполняется заключение леммы.

Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 6, 24\}$, а в третьем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 6, 42\}$. В любом случае $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 13$. Тогда 6 делит c_3-2, $c_3 \in \{14, 26, 50\}$ и $k_3 \in \{325, 175, 91\}$. В первых двух случаях многочлен $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. В третьем случае имеем $p^3_{23} = 50 \cdot 12/6 > k_3$, противоречие.

Пусть $b_2 = 14$. Тогда 3 делит c_3-1, $c_3 \in \{25, 28, 49\}$ и $k_3 \in \{196, 175, 100\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 14; 1, 6, 25\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 14; 1, 6, 28\}$. По [1, предложение 4.2.17] граф Γ_2 является сильно регулярным с параметрами $(576, 350, 134, \mu)$, противоречие. В третьем случае имеем $p^3_{23} = (49 \cdot 13 - 7)/6 = 105$, противоречие.

Пусть $b_2 = 15$. Тогда $c_3 \in \{15, 21, 30, 42\}$ и $k_3 \in \{350, 250, 175, 125\}$. Так как v делится на 3, то $k_3 \in \{250, 175\}$ и $a_3 \in \{29, 20\}$. В первом случае имеем $p^3_{23} = (21 \cdot 14 + 29 \cdot 21)/6$, противоречие. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 15; 1, 6, 30\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 16$. Тогда 3 делит $c_3 + 1$, $c_3 \in \{14, 20, 32, 35, 50\}$, $k_3 \in \{400, 280, 175, 160, 112\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 6, 14\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 6, 20\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 20, и выполняется заключение леммы. В третьем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 6, 32\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. В четвертом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 6, 35\}$. По [1, предложение 4.2.17] граф Γ_3 является сильно регулярным с параметрами $(561, 160, 20, \mu)$, противоречие. В пятом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 6, 50\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и -4, и выполняется заключение леммы.

Пусть $b_2 = 17$. Тогда 6 делит $c_3 + 2$, поэтому $c_3 \in \{14, 34\}$ и $k_3 \in \{425, 175\}$. В первом случае имеем $p^3_{23} = (14 \cdot 16 + 36 \cdot 28)/6$, противоречие. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 17; 1, 6, 34\}$. По [1, предложение 4.2.17] граф Γ_3 является сильно регулярным с параметрами $(576, 175, 39, \mu)$, противоречие.

Пусть $b_2 = 18$. Так как c_3 делится на 9, то $c_3 \in \{18, 36, 45\}$ и $k_3 \in \{350, 175, 140\}$. Далее, v делится на 3, $k_3 = 175$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 18; 1, 6, 36\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 19$. Тогда 6 делит $c_3 - 2$, поэтому $c_3 \in \{14, 38, 50\}$ и $k_3 \in \{575, 175, 133\}$. Так как v делится на 3, то $k_3 \in \{175, 133\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 19; 1, 6, 38\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. Во втором случае $p^3_{23} = 50 \cdot 18/6 = 150 > k_3$, противоречие.

Пусть $b_2 = 20$. Тогда 3 делит $c_3 - 1$, $c_3 \in \{14, 25, 28, 40\}$ и $k_3 \in \{500, 280, 250, 175\}$. Далее, v делится на 3 и $k_3 \in \{280, 250, 175\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20; 1, 6, 25\}$, во втором случае — $\{50, 42, 20; 1, 6, 28\}$ и в третьем — $\{50, 42, 20; 1, 6, 40\}$. В любом случае $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. Лемма доказана.

Замечание 1. Дистанционно регулярные графы, имеющие массивы пересечений $\{50, 42, 10; 1, 6, 20\}$, $\{50, 42, 12; 1, 6, 15\}$, $\{50, 42, 16; 1, 6, 20\}$, $\{50, 42, 16; 1, 6, 50\}$, не существуют.

В [1, § 4.1] показано, что кратность собственного значения θ графа Γ равна $f(\theta) = v / \sum_{i=0}^{3} k_i \times u_i(\theta)^2$, где $u_i(\theta) = w_i(\theta)/(b_0 \dots b_{i-1})$.

Рассмотрим, например, массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 6, 15\}$. Тогда $w_2(x) = x^2 - 7x - 50$, $w_3(x) = x^3 - 39x^2 - 78x + 1600$ и $w_4(x) = (x - 50)(x - 5)(x^2 - 19x - 188)$. Пусть $\theta = 5$, $v = 1 + 50 + 350 + 280 = 681$. Тогда $u_0(\theta) = 1$, $u_1(\theta) = \theta/b_0 = 1/10$, $u_2(\theta) = w_2(\theta)/(b_0 b_1) = -60/(50 \cdot 42) = -1/35$, $u_3(\theta) = w_3(\theta)/(b_0 b_1 b_2) = 360/(50 \cdot 42 \cdot 12) = 1/70$ и $f(\theta) = v / \sum_{i=0}^{3} k_i u_i(\theta)^2 = 681/(1 + 1/2 + 2/7 + 2/35) = 70 \cdot 681/129 = 70 \cdot 227/43$, противоречие.

Аналогичное противоречие получается для массивов пересечений $\{50, 42, 12; 1, 6, 15\}$, $\{50, 42, 16; 1, 6, 20\}$. Однако в случае массива $\{50, 42, 16; 1, 6, 50\}$ имеется единственное не равное 50 целое собственное значение $\theta_2 = -4$, и его кратность равна 350. Но в этом случае θ_3 примерно равно $-20,674$, что противоречит утверждению (2) леммы 1.3.

Заметим, что если диаметр Γ не больше 7, то граф Γ не является антиподальным, иначе его антиподальное частное будет дистанционно регулярным графом диаметра, не большего 3, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона, противоречие.

Лемма 2.4. *Пусть $\mu = 6$. Тогда $b_2 \neq c_3$.*

Доказательство. Пусть $\mu = 6$ и $b_2 = c_3$. Тогда $k_3 = 350$, и ввиду леммы 2.3 получим $12 \leq b_2 \leq 20$.

Если диаметр Γ больше 5, то $b_2 = b_3 = c_3 = c_4$. По лемме 1.8 имеем $c_i - b_i \geq c_{i-1} - b_{i-1} + 9$, поэтому при $i = 3$ получим $b_2 \geq 15$. По лемме 1.5 имеем $b_3 + c_3 + 4b_3c_3/25 \leq 50$, противоречие. Значит, диаметр Γ не больше 5, и $k_4 + k_5$ сравнимо с -1 по модулю 3. Далее, $c_3 - b_3 \geq 15 - b_2$.

Покажем, что $c_3 \in \{12, 18\}$. В случае $c_3 = 13$ параметры b_3, c_4 делятся на 6 и $b_3 \leq 11$, поэтому $b_3 = 6, a_3 = a_2 = 31$ и $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 6, противоречие.

В случае $c_3 = 14$ параметры b_3, c_4 делятся на 3 и $b_3 \leq 11$. Поэтому $b_3 \in \{6, 9\}, a_3 \in \{30, 27\}$ и $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 6, противоречие.

В случае $c_3 = 15$ параметры b_3, c_4 четны. Далее, $a_3 = 35 - b_3, a_2 = 29$ и $a_3 + a_2 - a_1 = 57 - b_3$. По лемме 1.6 число $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ делится на 6, поэтому $a_3 + a_2 - a_1$ четно и b_3 нечетно, противоречие.

В случае $c_3 = 16$ параметры b_3, c_4 делятся на 3, и по лемме 1.5 имеем $b_3 \leq 9$. Поэтому $b_3 \in \{6, 9\}$, $a_3 \in \{28, 25\}, a_2 = 28$ и $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 6, противоречие.

В случае $c_3 = 17$ параметры b_3, c_4 делятся на 6. Ввиду леммы 1.5 имеем $b_3 = 6$, $a_3 = 27 = a_2$, и $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 6, противоречие.

В случае $c_3 = 19$ числа b_3 и c_4 делятся на 6. Далее, $a_3 = 31 - b_3, a_2 = 25$ и $a_3 + a_2 - a_1 = 49 - b_3$. По лемме 1.8 число $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ делится на 6, поэтому $a_3 + a_2 - a_1$ четно и b_3 нечетно, противоречие.

В случае $c_3 = 20$ по лемме 1.5 имеем $b_3 = 6, a_3 = 24 = a_2$ и $(a_3 + a_2 - a_1)c_3$ не делится на 6, противоречие.

В случае $c_3 = 12$ получим $a_2 = 32$ и $12 - b_3 \geq 6 - 12 + 9$. Допустим сначала, что диаметр Γ равен 5. Тогда $6 \leq b_3 \leq 9$ и $k_4 + k_5$ сравнимо с -1 по модулю 3.

Если $b_3 = 6$, то по лемме 1.8 имеем $c_4 - b_4 \geq 15$, поэтому $c_4 \in \{20, 21, 28, 30, 35, 42\}$ и $k_4 \in \{105, 100, 75, 70, 60, 50\}$. Если k_4 не делится на 25, то $b_4 = 5$ и $c_4 \in \{30, 35\}$, что противоречит лемме 1.5. Значит, k_4 делится на 25. В случае $c_4 = 21$ число k_5 сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $c_5 \in \{24, 25, 30\}$, $k_5 \in \{25, 20\}$, противоречие с леммой 1.2. В случае $k_4 = 75$ число k_5 сравнимо с -1 по модулю 3, поэтому $c_5 = 30, b_4 = 2, k_5 = 10$. В случае $k_4 = 50$ имеем $k_5 \leq 300/42$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $350 \leq k_5(k_5 - a_5 - 1)$.

Если $b_3 = 7$, то $b_4 = 6$ и $c_4 = 35$, противоречие с леммой 1.5. Если $b_3 = 8$, то b_4 делится на 3, $c_4 - b_4 \geq 13$, поэтому $c_4 \in \{20, 28, 35, 40\}$. Так как b_4 делится на 3, то k_4 делится на 25, $c_4 = 28$, $k_4 = 100$, $b_4 = 3$, k_5 сравнимо с 1 по модулю 3 и c_5 делится на 3, противоречие.

Если $b_3 = 9$, то b_4 четно, $c_4 - b_4 \geq 12$. В случае $c_4 > 36$ имеем $b_4 = 1$, поэтому $c_4 \in \{15, 18, 21, 30, 35\}$ и $k_4 \in \{210, 175, 150, 105, 90\}$. Так как b_4 не делится на 5, то $c_4 \in \{18, 21\}$ и $c_5 \geq c_4 - b_4 + 9$. Если $c_4 = 18$, то k_5 не делится на 3, поэтому $c_5 \in \{21, 30, 42\}$. В случае $c_5 = 21$ имеем $b_4 = 6$ и $k_5 = 50$, а в случае $c_5 = 30$ имеем $b_4 = 6$ и $k_5 = 35$. В любом случае имеем противоречие с леммой 1.2. В случае $c_5 = 42$ имеем $b_4 = 6, k_5 = 25$ и $p^5_{25} = 42 \cdot 5/6 = 35$, противоречие.

Если $c_4 = 21$, то k_5 сравнимо с -1 по модулю 3, поэтому $c_5 \in \{30, 36, 48\}$, $b_4 \leq 4$ и $k_5 \leq 20$, противоречие.

Пусть теперь $c_3 = 12$ и диаметр Γ равен 4. Тогда $b_3 \leq 9$ и k_4 сравнимо с -1 по модулю 3. Далее, $c_4 \in \{12, 14, 15, 20, 21, 25, 28, 30, 35, 40, 42, 50\}$.

Если $c_4 = 12$, то $b_3 = 6$ и $k_4 = 175$, противоречие. Если $c_4 = 14$, то $k_4 = 25b_3 \in \{50, 125\}$, $p^4_{24} = (14(b_3 - 1) + 36 \cdot 28)/6$, противоречие. Если $c_4 = 15$, то $k_4 = 70b_3/3 = 140$ и $p^4_{24} = (15 \cdot 5 + 35 \cdot 27)/6 = 170$, противоречие. Если $c_4 = 20$, то $k_4 = 35b_3/2 \in \{35, 140\}$, $p^4_{24} = (20(b_3 - 1) + 30 \cdot 22)/6$, противоречие. Если $c_4 = 21$, то $k_4 = 50b_3/3 = 50$, противоречие с леммой 1.2. Если $c_4 = 25$, то $k_4 = 14b_3$, $b_3 \in \{1, 4, 7\}$ и $p^4_{24} = (25(b_3 - 1) + 25 \cdot 17)/6$, противоречие. Если $c_4 = 28$, то $k_4 = 25b_3/2 = 50$. Если $c_4 = 30$, то $k_4 = 35b_3/3 = 35$. В обоих случаях имеем противоречие с леммой 1.2. Если $c_4 = 35$, то $k_4 = 10b_3$, $b_3 \in \{2, 5, 8\}$ и $p^4_{24} = (35(b_3 - 1) + 15 \cdot 7)/6$, противоречие. Если $c_4 = 40$, то $k_4 = 35b_3/4 = 35$ и $p^4_{24} = (40 \cdot 3 + 10 \cdot 2)/6$, противоречие. Если $c_4 = 42$, то $k_4 = 25b_3/2 = 50$. В этом случае $a_4 = 8, a_3 = 34, a_2 = 32$, противоречие с тем, что $(a_4 + a_3 - a_1)b_3 = 35 \cdot 4$ не делится на μ. Если $c_4 = 50$, то $k_4 = 7b_3$, $b_3 \in \{2, 5, 8\}$ и $p^4_{24} = 50(b_3 - 1)/6$, противоречие.

В случае $c_3 = 18$ по лемме 1.5 имеем $b_3 \leq 8$. Допустим сначала, что диаметр Γ равен 5. Тогда $6 \leq b_3 \leq 8$ и $k_4 + k_5$ сравнимо с -1 по модулю 3.

Если $b_3 = 6$, то по лемме 1.8 имеем $c_4 - b_4 \geq 21$, поэтому $c_4 \in \{28, 30, 35, 42\}$ и $k_4 \in \{75, 70, 60, 50\}$. Если $k_4 = 75$, то $c_5 \in \{30, 45\}$. В первом случае $k_5 = 5b_4/2$, а во втором $b_4 = 6$ и $k_5 = 10$. Если $k_4 \in \{70, 60\}$, то $b_5 = 5$ и $k_5 \leq 70 \cdot 5/30$. Если $k_4 = 50$, то $k_5 \leq 50 \cdot 6/42$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $350 \leq k_5(k_5 - 1)$.

Если $b_3 = 7$, то $b_4 = 6$, $c_4 = 35$ и $k_4 = 70$, противоречие с тем, что b_4k_4 не делится на 50.

Если $b_3 = 8$, то b_4 делится на 3 и $c_4 - b_4 \geq 19$, поэтому $c_4 \in \{28, 35, 40\}$. Так как b_4 делится на 3, то k_4 делится на 25 и $c_4 = 28$. Поэтому $k_4 = 100, b_4 = 3$, $c_5 \geq 34$ и c_5 делится на 3, противоречие.

Пусть теперь $c_3 = 18$ и диаметр Γ равен 4. Тогда $k_3 = 350, b_3 \leq 8$, k_4 сравнимо с -1 по модулю 3, $c_4 - b_4 \geq 27 - b_3$ и $c_4 \in \{20, 21, 25, 28, 30, 35, 40, 42, 49, 50\}$. Если $c_4 = 20$, то $k_4 = 35b_3/2 \in \{35, 140\}$ и $p^4_{24} = (20(b_3 - 1) + 30 \cdot 22)/6$, противоречие.

Если $c_4 = 21$, то $k_4 = 50b_3/3 = 50$, противоречие с леммой 1.2. Если $c_4 = 25$, то $k_4 = 14b_3$, $b_3 \in \{4, 7, 11\}$ и $p^4_{24} = (25(b_3-1)+25\cdot 17)/6$, противоречие. Если $c_4 = 28$, то $k_4 = 25b_3/2 = 125$ и $p^4_{24} = (28\cdot 9+22\cdot 14)/6$, противоречие. Если $c_4 = 30$, то $k_4 = 35b_3/3 = 35$ $p^4_{24} > k_4$, противоречие.

Если $c_4 = 35$, то $k_4 = 10b_3$, $b_3 \in \{2, 5, 8, 11\}$ и $p^4_{24} = (35(b_3 - 1) + 15 \cdot 7)/6 = 35(b_1 + 2)/6$, противоречие. Если $c_4 = 40$, то $k_4 = 35b_3/4 = 35$ и $p^4_{24} = (40\cdot 3+10\cdot 2)/6$, противоречие. Если $c_4 = 42$, то $k_4 = 25b_3/2 \in \{50, 125\}$. Если $k_4 = 50$, то $a_4 = 8, a_3 = 28, a_2 = 26$ и $(a_4+a_3-a_1)b_3 = 29\cdot 4$ не делится на μ, противоречие. Если $k_4 = 125$, то $a_4 = 8, a_3 = 22, a_2 = 26$ и $(a_4+a_3-a_1)b_3 = 23\cdot 10$ не делится на μ, противоречие.

Если $c_4 = 49$, то $b_3 = 7, k_4 = 50$ и $p^4_{24} = (49 \cdot 6 - 7)/6$, противоречие. Если $c_4 = 50$, то $k_4 = 7b_3$, $b_3 \in \{5, 8, 11\}$ и $p^4_{24} = 50(b_3 - 1)/6$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Если $\mu = 6$, то диаметр Γ равен 4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 6$ и диаметр Γ больше 4. Ввиду леммы 2.4 имеем $b_2 > c_3$. В этом случае полезным будет равенство $p^2_{35} = b_2b_3b_4/(c_2c_3)$.

Рассуждая, как и выше, получим, что для любого из возникающих массивов пересечений одно из чисел пересечений является нецелым или отрицательным. Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Параметр μ не равен 6.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая, как и выше, получим единственный массив пересечений, для которых все числа пересечений являются неотрицательными целыми числами: $\{50, 42, 18, 12; 1, 6, 12, 36\}$. Но тогда число θ_1 нецелое и имеет кратность, меньшую 49. Лемма доказана.

3. Графы с $\mu = 4$, случай малых c_3

В этом разделе рассмотрены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона, $\mu = 4$ и либо диаметр графа не больше 4, либо $c_3 \leq 13$.

Зафиксируем геодезический 3-путь $uwxy$ в Γ. Пусть X_i — множество вершин из $[x] - [u]$, смежных точно с i вершинами из $[u] \cap [x]$ и $n_i = |X_i|$. По лемме 1.4 получим $\sum n_i = 46$, $\sum in_i = 24$ и $\sum \binom{i}{2} n_i = 4$.

Лемма 3.1. *Пусть $\mu = 4$. Тогда $k_2 = 525$, b_2 четно и выполняются следующие утверждения*:

(1) *если b_2 не делится на 4, то c_3 нечетно и $b_3 + c_3$ сравнимо с -1 по модулю 4;*

(2) *если c_3 сравнимо с 2 по модулю 4, то b_3 нечетно, b_2 и b_4 делятся на 4, и либо $b_3 - 1$ делится на 4 и c_4 сравнимо с 2 по модулю 4, либо $b_3 - 1$ сравнимо с 2 по модулю 4 и c_4 делится на 4;*

(3) *если* c_3 *нечетно и* b_2 *делится на* 4, *то* $b_3 + c_3$ *сравнимо с* 1 *по модулю* 4;

(4) $n_0 = 26, n_1 = 16, n_2 = 4$, $b_2 \leq 26$ *и* $c_3 \geq 10$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 4$. Тогда $k_2 = 50 \cdot 42/4 = 525$, $k_2 b_2$ делится на 50, поэтому b_2 четно.

Если b_2 не делится на 4, то $a_2 = 46 - b_2$ делится на 4. Так как $a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 - 50$ делится на 4, то c_3 нечетно. Далее, $a_3 + a_2 - a_1$ делится на 4, поэтому $a_3 = 50 - b_3 - c_3$ сравнимо с -1 по модулю 4 и $b_3 + c_3$ сравнимо с -1 по модулю 4. Утверждение (1) доказано.

Пусть c_3 сравнимо с 2 по модулю 4. Так как b_2 четно и $a_2(a_2 - a_1) + b_2 c_3 - 50$ делится на 4, то a_2 сравнимо с 2 по модулю 4 и b_2 делится на 4. Далее, $a_3 + a_2 - a_1$ четно, поэтому a_3 и b_3 нечетны. Теперь $a_4 + a_3 - a_1, b_4$ делятся на 4, поэтому либо $a_3 - a_1$ (и $b_3 - 1$) делится на 4 и c_4 сравнимо с 2 по модулю 4, либо $a_3 - a_1$ сравнимо с 2 по модулю 4 и c_4 делится на 4. Утверждение (2) доказано.

Пусть c_3 нечетно и b_2 делится на 4. Тогда $a_3 + a_2 - 7$ делится на 4 и a_2 сравнимо с 2 по модулю 4. Поэтому $a_3 - 1$ делится на 4 и $b_3 + c_3$ сравнимо с 1 по модулю 4. Утверждение (3) доказано.

Далее, $\sum n_i = 46$, $\sum i n_i = 24$ и $\sum \binom{i}{2} n_i = 4$, причем $n_i = 0$ для $i > 2$. Отсюда $n_0 = 26, n_1 = 16, n_2 = 4$, в частности, $b_2 \leq 26$.

Пусть u — вершина графа Γ. Зафиксируем вершины $x \in [u]$, $y \in \Gamma_3(u) \cap \Gamma_2(x)$, и пусть $\{e, f\}, \{g, h\}$ — изолированные ребра из $[x] \cap [y]$. Допустим сначала, что для двух пар несмежных вершин из $[x] \cap [y]$ пересечения их окрестностей содержат по ребру из $[u]$, инцидентному x, например, $[e] \cap [g] \cap [u] = \{x, q\}$, $[f] \cap [h] \cap [u] = \{x, p\}$. Тогда для любой вершины $w \in [x] \cap [y]$ подграф $[u] \cap [w]$ содержит ребро вне $x^\perp$, причем для смежной с w вершины w' из $[x] \cap [y]$ подграф $[u] \cap [w] \cap [w']$ содержит не более одной вершины вне $x^\perp$. Поэтому $|[u] \cap \Gamma_2(y)| \geq 9$.

Пусть для единственной пары несмежных вершин из $[x] \cap [y]$ пересечение их окрестностей содержит ребро из $[u]$, инцидентное x, например, $[e] \cap [g] \cap [u] = \{x, q\}$. Тогда для любых двух несмежных вершин $w, w' \in [x] \cap [y]$ подграф $[w] \cap [w']$ не пересекает $[u] - x^\perp$ (иначе этот подграф содержит 3-коклику), поэтому $|[u] \cap \Gamma_2(y)| \geq 10$.

Если для любых пар несмежных вершин из $[x] \cap [y]$ пересечение их окрестностей не содержит ребер из $[u]$, инцидентных x, то степень x в графе $[u] \cap \Gamma_2(y)$ не меньше 4 и $c_3 \geq 11$.

Если $|[u] \cap \Gamma_2(y)| = 9$, то $[u] \cap \Gamma_2(y)$ — регулярный граф степени 2. Так как $[u] \cap \Gamma_2(y)$ не содержит треугольников и четырехугольников, то $[u] \cap \Gamma_2(y)$ является девятиугольником. В этом случае пара $([u] \cap \Gamma_2(y), [y] \cap \Gamma_2(u))$ является симметричной 2-(V, K, Λ) схемой, где $V = 9, K = 4, \Lambda = 2$. Противоречие с тем, что $(V - 1)\Lambda \neq K(K - 1)$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Если диаметр* Γ *равен* 3, *то* Γ *имеет один из следующих массивов пересечений*: $\{50, 42, 6; 1, 4, 35\}$, $\{50, 42, 8; 1, 4, 28\}$, $\{50, 42, 12; 1, 4, 20\}$, $\{50, 42, 12; 1, 4, 25\}$, $\{50, 42, 16; 1, 4, 25\}$, $\{50, 42, 16; 1, 4, 28\}$, $\{50, 42, 18; 1, 4, 15\}$, $\{50, 42, 24; 1, 4, 21\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mu = 4$ и диаметр Γ равен 3. Тогда k_3 делится на 3. Заметим, что $50(b_2 - 1)$ не делится на 4, поэтому $c_3 \neq 50$. Далее, $p^3_{23} = (c_3(b_2 - 1) + (50 - c_3)(42 - c_3))/4$ и $c_3(c_3 + b_2 - 5)$ делится на 4, поэтому либо b_2 делится на 4, либо c_3 сравнимо с -1 по модулю 4.

Пусть b_2 не делится на 4. Тогда $c_3 \in \{15, 35\}$. Если $c_3 = 15$, то $k_3 = 35 b_2$ и $p^3_{23} = (15(b_2 - 1) + 35 \cdot 27)/4 = 15(b_2 + 62)/4 < 35(b_2 - 1)$. Поэтому $b_2 = 18$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 18; 1, 4, 15\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 5, и выполняется заключение леммы.

Если $c_3 = 35$, то $k_3 = 15 b_2$ и $p^3_{23} = (35(b_2 - 1) + 15 \cdot 7)/4 = 35(b_2 + 2)/4 < 15(b_2 - 1)$. В случае $b_2 = 6$ граф Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 6; 1, 4, 35\}$, $w_4(x) = (x - 50)(x - 13)(x - 5)(x + 6)$, и выполняется заключение леммы.

В случае $b_2 = 10$ имеем $k_3 = 150$, и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 10; 1, 4, 35\}$. В случае $b_2 = 14$ имеем $k_3 = 210$, и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 14; 1, 4, 35\}$. В случае $b_2 = 18$ имеем $k_3 = 270$, и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 18; 1, 4, 35\}$. В случае $b_2 = 22$ имеем $k_3 = 330$, и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 22; 1, 4, 35\}$. В случае $b_2 = 26$ имеем

$k_3 = 390$, и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 26; 1, 4, 35\}$. В любом из этих случаев $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 4$. Ввиду леммы 1.2 получим $c_3 = 35, k_3 = 60$ и $p^3_{23} = (35 \cdot 3 + 15 \cdot 7)/4$, противоречие.

Пусть $b_2 = 8$. Ввиду леммы 1.2 получим $c_3 \in \{25, 28, 40\}$ и $k_3 \in \{168, 150, 105\}$. В первом случае $p^3_{23} = (25 \cdot 7 + 25 \cdot 17)/4$, противоречие. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 8; 1, 4, 28\}$, $w_4(x) = (x - 50)(x - 17)(x - 6)(x + 6)$ и выполняется заключение леммы. В третьем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 8; 1, 4, 40\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 12$. Ввиду леммы 1.2 получим $c_3 \in \{12, 20, 21, 25, 28\}$ и $k_3 \in \{1050, 630, 600, 504, 450\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 4, 12\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 4, 20\}$, многочлен $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 6, и выполняется заключение леммы. В третьем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 4, 21\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. В четвертом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 4, 25\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 5, и выполняется заключение леммы. В пятом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 12; 1, 4, 28\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 16$. Тогда $c_3 \in \{16, 20, 25, 28, 40\}$ и $k_3 \in \{525, 420, 336, 300, 210\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 4, 16\}$. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 4, 20\}$. В обоих случаях $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. В третьем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 4, 25\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и -7, и выполняется заключение леммы. В четвертом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 4, 28\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 2, и выполняется заключение леммы. В последнем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16; 1, 4, 40\}$, и $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 20$. Тогда $c_3 \in \{20, 25, 28\}$ и $k_3 \in \{525, 420, 375\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20; 1, 4, 20\}$, а во втором — $\{50, 42, 20; 1, 4, 25\}$. В третьем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20; 1, 4, 28\}$. В любом случае многочлен $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие.

Пусть $b_2 = 24$. Ввиду леммы 1.2 получим $c_3 \in \{12, 20, 21, 24, 25, 28, 40\}$ и $k_3 \in \{1050, 630, 600, 504, 450, 315\}$. В первом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24; 1, 4, 12\}$. Во втором случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24; 1, 4, 20\}$. В обоих случаях многочлен $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. В третьем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24; 1, 4, 21\}$, $w_4(x)$ имеет целые корни 50 и 1, и выполняется заключение леммы. В четвертом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24; 1, 4, 25\}$. В пятом случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24; 1, 4, 28\}$. В последнем случае Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24; 1, 4, 40\}$. В любом случае многочлен $w_4(x)$ имеет единственный целый корень, противоречие. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{50, 42, 6; 1, 4, 35\}$, $\{50, 42, 8; 1, 4, 28\}$, $\{50, 42, 12; 1, 4, 20\}$, $\{50, 42, 12; 1, 4, 25\}$, $\{50, 42, 16; 1, 4, 25\}$, $\{50, 42, 16; 1, 4, 28\}$, $\{50, 42, 18; 1, 4, 15\}$, $\{50, 42, 24; 1, 4, 21\}$ не существуют.

Граф с массивом пересечений $\{50, 42, 12; 1, 4, 25\}$ имеет единственное не равное 50 целое собственное значение 5, кратность которого равна 368. Но для этого графа число θ_1 нецелое и имеет кратность, меньшую 49, противоречие с леммой 1.3.

Граф с массивом пересечений $\{50, 42, 24; 1, 4, 21\}$ имеет единственное не равное 50 целое собственное значение 1, кратность которого равна 720. Но для этого графа θ_1 примерно равно 15,5934, θ_3 примерно равно $-8,5934$, а их кратности не являются целыми числами.

Граф с любым из оставшихся массивов пересечений имеет целочисленное собственное значение, кратность которого не является целым числом.

Если диаметр Γ не больше 7, то Γ не является антиподальным графом, иначе его антиподальное частное является графом диаметра, не большего 3, в котором окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона.

Лемма 3.3. *Диаметр* Γ *больше* 4.

Доказательство. Пусть диаметр Γ равен 4. Заметим, что $4 \le b_2 \le 26$. Рассуждая, как и выше, получим, что каждый из возникающих массивов пересечений имеет нецелое или отрицательное число пересечения. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Параметр* c_3 *не равен* 10.

Доказательство. Пусть $c_3 = 10$. Тогда $k_3 = 105b_2/2$ и b_2b_3 делится на 5. По лемме 3.1 число b_3 нечетно, b_2 и b_4 делятся на 4, и либо $b_3 - 1$ делится на 4 и c_4 сравнимо с 2 по модулю 4, либо $b_3 - 1$ сравнимо с 2 по модулю 4 и c_4 делится на 4.

Подробно разберем случай $b_2 = 20$. Тогда $k_3 = 1050$, $10 - b_3 \ge -7$ и c_4 не делится на 4, поэтому $b_3 \in \{5, 9, 13, 17\}$, $c_4 - b_4 \ge 19 - b_3$ и $c_4 \in \{10, 14, 18, 30, 42\}$. Если $c_4 = 10$, то $b_3 - b_4 \ge 9$, поэтому либо $b_3 = 13$ и $b_4 = 4$, либо $b_3 = 17$ и $b_4 \in \{4, 8\}$. В любом случае k_4b_4 не делится на 50, противоречие.

Если $c_4 = 14$, то $k_4 = 75b_3, b_4 \le 11$. В случае $b_3 = 9$ имеем $b_4 = 4$, диаметр Γ равен 5 и $c_5 \in \{20, 36\}$. Если $c_5 = 20$, то $k_5 = 135$, противоречие с леммой 1.2. Если $c_5 = 36$, то $k_5 = 75$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 9, 4; 1, 4, 10, 14, 36\}$ и число p^5_{45} нецелое, противоречие.

В случае $b_3 = 13$ имеем $b_4 \in \{4, 8\}$, диаметр Γ не больше 6 и $c_5 \in \{20, 26, 40, 50\}$. Допустим, что диаметр Γ равен 5. Если $c_5 = 20$, то $k_5 = 195b_4/4$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 13, b_4; 1, 4, 10, 14, 20\}$ и число p^5_{45} нецелое, противоречие. Если $c_5 = 26$, то $k_5 = 75b_4/2$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие. Если $c_5 = 40$, то $b_4 = 8, k_5 = 195$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 13, 8; 1, 4, 10, 14, 40\}$ и число p^5_{45} нецелое, противоречие. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 39b_4/2$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Допустим, что диаметр Γ равен 6. Если $c_5 = 20$, то $b_5 = 5, b_4 = 8$, $k_5 = 195, c_6 = 25$ и $k_6 = 39$, противоречие с леммой 1.2. Если $c_5 = 26$, то $k_5 = 75b_4/2, c_6 = 50$ и $k_6 \le 6$. Если $c_5 = 40$, то $b_4 = 8, k_5 = 195$ и $c_6 \ge 44$, противоречие.

В случае $b_3 = 17$ имеем $b_4 \in \{4, 8, 12\}$ и $c_5 \in \{20, 40\}$. Допустим сначала, что диаметр Γ равен 5. Если $c_5 = 20$, то $k_5 = 255b_4/4$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 17, b_4; 1, 4, 10, 14, 20\}$ и число p^2_{44} нецелое, противоречие. Если $c_5 = 40$, то $b_4 = 8, k_5 = 255$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 17, 8; 1, 4, 10, 14, 40\}$ и число p^5_{45} нецелое, противоречие. Итак, диаметр Γ равен 6. Тогда $k_4 = 75 \cdot 17$ и $c_5 \in \{18, 20, 24, 30, 34, 36, 40\}$. В случае $c_5 = 18$ имеем $b_4 = 12, k_5 = 850$, k_6 сравнимо с -1 по модулю 3, $18 - b_5 \ge 11$ и $c_6 \in \{20, 30, 34, 40, 50\}$. Если $c_6 = 20$, то $k_6 = 85b_5/2 = 170$, противоречие с леммой 1.2. Если $c_6 = 30$, то $k_6 = 85b_5/3 = 170$ и число p^6_{26} нецелое, противоречие. Если $c_6 = 34$, то $k_6 = 25b_5$, $b_5 = 5$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 17, 12, 5; 1, 4, 10, 14, 18, 34\}$ и число p^6_{36} нецелое. Если $c_6 = 40$, то $k_6 = 85b_5/4$, $b_5 = 8$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 17, 12, 8; 1, 4, 10, 14, 18, 40\}$ и число p^6_{46} нецелое, противоречие. Если $c_6 = 50$, то $k_6 = 17b_5$, $b_5 = 7$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 17, 12, 7; 1, 4, 10, 14, 18, 50\}$ и $p^6_{36} < 0$, противоречие.

В случае $c_5 = 20$ имеем $k_5 = 255b_4/4$, k_5b_5 делится на 25 и $20 - b_5 \ge 23 - b_4$. Если $b_4 = 8$, то $b_5 = 5, k_5 = 510$ и $c_6 \in \{25, 34, 50\}$. Если $c_6 = 25$, то $k_6 = 102$ и число p^6_{26} нецелое. Если $c_6 = 34$, то $k_6 = 75$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 17, 8, 5; 1, 4, 10, 14, 20, 34\}$ и число p^6_{36} нецелое. Если $c_6 = 50$, то $k_6 = 51$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 17, 8, 5; 1, 4, 10, 14, 20, 50\}$ и $p^6_{36} < 0$. Во всех трех случаях получаем противоречие.

В случае $c_5 = 24$ имеем $b_5 \le 4, b_4 = 8, k_5 = 425$, k_6 сравнимо с 1 по модулю 3 и $c_6 \in \{25, 34, 50\}$. Если $c_6 = 25$, то $k_6 = 17b_5, b_5 = 2$ и число p^6_{26} нецелое. Если $c_6 = 34$, то $k_6 = 25b_5/2 = 100$ и число p^6_{26} нецелое. Если $c_6 = 50$, то $k_6 = 17b_5/2$ и число p^6_{26} нецелое. Во всех случаях получаем противоречие.

В случае $c_5 = 30$ имеем $b_5 \le 3, b_4 = 12, k_5 = 510$ и k_5b_5 не делится на 50. В случае $c_5 = 34$ имеем $k_5 = 75b_4/2$, $b_5 \le 2$ и $c_6 \in \{40, 50\}$. Если $c_6 = 40$, то $b_4 = 8, b_5 = 2$ и $k_6 = 15$. Если $c_6 = 50$, то $k_6 = 3b_4b_5/4$. В обоих случаях имеем противоречие с тем, что $525 \le k_6(k_6 - 1)$.

В случае $c_5 = 36$ имеем $b_4 = 12$, противоречие. В случае $c_5 = 40$ имеем $b_4 = 8, k_5 = 255$, $b_5 = 1$ и k_5b_5 не делится на 50, противоречие.

Если $c_4 = 18$, то $k_4 = 175b_3/3$ и $b_3 \in \{9, 15\}$. Если $b_3 = 9$, то $b_4 \in \{4, 8\}$, диаметр Γ равен 5 и $c_5 \in \{20, 28, 40\}$. Если $c_5 = 20$, то $k_5 = 105b_4/4$, $b_4 = 8$ и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 9, 8; 1, 4, 10, 18, 20\}$. Если $c_5 = 28$, то $k_5 = 75b_4/4$, $b_4 = 8$ и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 9, 8; 1, 4, 10, 18, 28\}$. Если $c_5 = 40$, то $b_4 = 8, k_5 = 105$ и Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 20, 9, 8; 1, 4, 10, 18, 40\}$. В любом из трех случаев число p^5_{45} нецелое.

Если $c_4 = 30$, то $b_4 \leq 3$, $k_4 = 35b_3$ и b_3b_4 делится на 5. Поэтому $b_3 = 15, b_4 = 2$, диаметр Γ равен 5, k_5 делится на 3, $c_5 = 50$, $k_5 = 21$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Если $c_4 = 42$, то $b_4 = 1, c_5 = 50$ и $k_4 = 25b_3$, противоречие с леммой 1.7.

Итак, $b_2 \neq 20$. Тогда $b_3 \in \{5, 15\}$. Рассуждая, как и выше, получим, что для любого из возникающих массивов пересечений одно из чисел пересечений является нецелым или отрицательным. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Параметр c_3 не равен* 11.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $c_3 = 11$. Рассуждая, как и выше, получим, что для любого из возникающих массивов пересечений одно из чисел пересечений является нецелым или отрицательным. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Параметр c_3 не равен* 12.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $c_3 = 12$. Рассуждая, как и выше, получим единственный массив пересечений, для которого все числа пересечений являются неотрицательными целыми числами: $\{50, 42, 24, 16, 3; 1, 4, 12, 14, 48\}$. Но тогда собственное значение θ_3 равно 2 и имеет дробную кратность. Лемма доказана.

Лемма 3.7. *Параметр c_3 отличен от* 13.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $c_3 = 13$. Тогда c_4 делится на 4, $b_2 = 26, a_2 = 20$ и $k_3 = 1050$. Ввиду лемм 1.5 и 1.8 имеем $b_3 \in \{6, 10\}$ и $c_4 \in \{20, 28, 36\}$.

Если $c_4 = 20$, то $b_4 \leq 6$ и b_3b_4 делится на 5, поэтому $b_3 = 10, k_4 = 525$ и диаметр Γ равен 5. Далее, k_5 делится на 3 и $c_5 \in \{25, 28, 30, 35, 42, 50\}$. В случае $c_5 = 25$ имеем $k_5 = 21b_4$. В случае $c_5 = 28$ имеем $k_5 = 75b_4/4$. В обоих случаях $p^5_{25} > k_5$, противоречие.

В случае $c_5 = 30$ имеем $k_5 = 35b_4/2 = 105$ и $p^5_{25} = (30 \cdot 5 + 20 \cdot 12)/4$, противоречие. В случае $c_5 = 35$ имеем $k_5 = 15b_4$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 26, 10, 6; 1, 4, 13, 20, 35\}$ и число p^5_{35} нецелое, противоречие.

В случае $c_5 = 42$ имеем $k_5 = 25b_4/2 = 75$ и $p^5_{25} = 42 \cdot 5/4$, противоречие. В случае $c_5 = 50$ имеем $k_5 = 21b_4/2$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Если $c_4 = 28$, то $b_4 = 2, k_4 = 75b_3/2$, диаметр Γ равен 5, k_5 делится на 3 и $c_5 \in \{35, 50\}$. В случае $c_5 = 35$ имеем $b_3 = 14, k_4 = 525, k_5 = 30$ и $p^5_{25} > k_5$, противоречие. В случае $c_5 = 50$ имеем $k_5 = 3b_3/2$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Если $c_4 = 36$, то $b_3 = 6, k_4 = 175, b_4 = 2$, k_5 сравнимо с -1 по модулю 3, $c_5 = 50$, $k_5 = 7$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие. Лемма доказана.

4. Графы с $\mu = 4$, случай больших c_3

В этом разделе доказано несуществование дистанционно регулярных графов диаметра, большего 4, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона, $\mu = 4$ и $c_3 \geq 14$.

Лемма 4.1. *Параметр c_3 не равен* 14.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c_3 = 14$. Тогда $k_3 = 75b_2/2$, $b_4 \le 11$, по лемме 3.1 число b_3 нечетно, и либо $b_3 - 1$ делится на 4 и c_4 сравнимо с 2 по модулю 4, либо $b_3 - 1$ сравнимо с 2 по модулю 4 и c_4 делится на 4. Далее, $b_3 \le 15$ и $b_2 \in \{16, 20, 24\}$.

Пусть $b_2 = 16$. Тогда $k_3 = 600$. Если $b_3 = 15$, то $c_4 \in \{20, 24, 36, 40\}$ и диаметр Γ равен 5. Так как b_4 делится на 4, то $c_4 \in \{20, 24\}$ и $b_4 = 4$. Пусть $c_4 = 20$. Тогда $k_4 = 450$, k_5 делится на 3 и $c_5 \in \{25, 30, 40, 50\}$. Если $c_5 = 25$, то $k_5 = 72$. Если $c_5 = 30$, то $k_5 = 60$. Если $c_5 = 40$, то $k_5 = 45$. В любом случае $p^5_{25} \ge k_5 - a_5$, противоречие. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 36$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие. Пусть $c_4 = 24$. Тогда $k_4 = 375$, k_5 делится на 3, $c_5 = 50$, $k_5 = 30$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Итак, $b_3 \le 13$ и диаметр Γ равен 5. Если b_3 не делится на 5, то c_4 не делится на 5 (иначе b_4 делится на 20, противоречие).

Если $b_3 = 13$, то $c_4 = 26$ и $b_4 \le 3$, а это противоречит тому, что b_3b_4 делится на 4. Пусть $b_3 = 11$. Тогда $c_4 = 24, b_4 = 4, k_4 = 275$, k_5 сравнимо с 1 по модулю 3 и $c_5 \in \{44, 50\}$. Если $c_5 = 44$, то $k_5 = 25$ и $p^5_{25} > k_5$. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 22$ и число p^5_{25} нецелое. В обоих случаях имеем противоречие.

Пусть $b_3 = 9$. Тогда $c_4 = 18$, $b_4 \in \{4, 8\}$, $k_4 = 300$, k_5 делится на 3 и $c_5 \in \{20, 40, 50\}$. Если $c_5 = 20$, то $b_4 = 8, k_5 = 120$ и $p^5_{25} > k_5$. Если $c_5 = 40$, то $k_5 = 60$ и $p^5_{25} > k_5$. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 48$ и число p^5_{25} нецелое. Во всех трех случаях получаем противоречие.

Пусть $b_3 = 7$. Тогда $c_4 \in \{24, 28\}$. В случае $c_4 = 28$ имеем $b_4 \le 3$, поэтому $c_4 = 24, b_4 = 4$, $k_4 = 100$, k_5 сравнимо с -1 по модулю 3 и $c_5 \in \{40, 50\}$. Если $c_5 = 40$, то $k_5 = 10 = a_5$. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 8$ и число p^5_{25} нецелое. В обоих случаях получаем противоречие.

Если $b_3 = 5$, то $c_4 \in \{30, 50\}$ и $b_4 \le 3$, противоречие.

Если $b_2 = 20$, то $k_3 = 750$, b_3 нечетно и k_3b_3 не делится на 4, противоречие.

Пусть $b_2 = 24$. Тогда $k_3 = 900$. Если $b_3 = 15$, то $c_4 \in \{20, 36\}$. Так как b_4 делится на 4, то $c_4 = 20, b_4 = 4$, $k_4 = 675$, k_5 делится на 3 и $c_5 \in \{25, 30, 36, 45, 50\}$.

Если $c_5 = 25$, то $k_5 = 108$ и $p^5_{25} \ge k_5 - a_5$. Если $c_5 = 30$, то $k_5 = 90$ и число p^5_{25} нецелое. Если $c_5 = 36$, то $k_5 = 75$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24, 15, 4; 1, 4, 14, 20, 36\}$ и число p^5_{35} нецелое. Если $c_5 = 45$, то $k_5 = 60$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24, 15, 4; 1, 4, 14, 20, 45\}$ и число p^5_{35} нецелое. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 54$ и число p^5_{25} нецелое. В любом случае получаем противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Параметр* c_3 *не равен* 15.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c_3 = 15$. Тогда $k_3 = 35b_2$ и по лемме 3.1 либо b_2 не делится на 4 и $b_3 + c_3$ сравнимо с -1 по модулю 4, либо b_2 делится на 4 и $b_3 + c_3$ сравнимо с 1 по модулю 4. Далее, $b_2 \ge 16$, $b_3 \le 14$, b_2b_3 делится на 5 и диаметр Γ равен 5.

Пусть $b_2 = 16$. Тогда $k_3 = 560, b_3 = 10$ и $c_4 \in \{16, 20, 28, 40\}$. Если $c_4 = 16$, то $16 - b_4 \ge 14$, $k_4 = 350$, k_5 сравнимо с -1 по модулю 3 и $c_5 \in \{25, 50\}$. В случае $c_5 = 25$ имеем $k_5 = 14b_4$ и число p^5_{25} нецелое. В случае $c_5 = 50$ имеем $k_5 = 7b_4 = 14$ и число p^5_{25} нецелое. В обоих случаях получаем противоречие. Если c_4 делится на 5, то b_4 делится на 10, противоречие. Пусть $c_4 = 28$. Тогда $b_4 = 2$, $k_4 = 200$, k_5 сравнимо с -1 по модулю 3 и $c_5 \in \{40, 50\}$. В случае $c_5 = 40$ имеем $k_5 = 10$, противоречие. В случае $c_5 = 50$ имеем $k_5 = 8$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Если $b_2 = 18$, то $k_3 = 630$ и b_3 делится на 20, противоречие.

Пусть $b_2 = 20$. Тогда $k_3 = 700$, b_3 сравнимо с 2 по модулю 4 и $c_4 \in \{20, 24, 28, 40\}$. Если $c_4 = 20$, то $20 - b_4 \ge 24 - b_3$, $k_4 = 35b_3$ и b_3b_4 делится на 5, поэтому $b_3 = 10, k_4 = 350$, k_5 делится на 3, $b_4 = 6$ и $c_5 \in \{25, 28, 35, 50\}$. В случае $c_5 = 25$ имеем $k_5 = 84$. В случае $c_5 = 28$ имеем $k_5 = 75$. В случае $c_5 = 35$ имеем $k_5 = 60$. В любом случае $p^5_{25} > k_5$. В случае $c_5 = 50$ имеем $k_5 = 42$ и число p^5_{25} нецелое. Во всех случаях получаем противоречие.

Пусть $c_4 = 24$. Тогда $b_3 = 6$, $k_4 = 175$, k_5 сравнимо с 1 по модулю 3 и $c_5 \in \{35, 50\}$. В случае $c_5 = 35$ имеем $k_5 = 5b_4 = 10 < a_5$. В случае $c_5 = 50$ имеем $k_5 = 42$ и число p^5_{25} нецелое. В обоих случаях получаем противоречие.

Пусть $c_4 = 28$. Тогда $b_4 = 2, k_4 = 25b_3$. В случае $b_3 = 6$ имеем $k_4 = 150$, k_5 сравнимо с -1 по модулю 3 и $c_5 \geq 35$, противоречие. В случае $b_3 = 10$ имеем $k_4 = 250$, k_5 сравнимо с 1 по модулю 3, $c_5 = 50, k_5 = 10$, противоречие. В случае $b_3 = 14$ имеем $k_4 = 350$, k_5 делится на 3, противоречие.

Если $c_4 = 40$, то $b_4 = 1$ и b_3b_4 не делится на 4.

Если $b_2 = 22$, то $k_3 = 770$ и b_3 делится на 20, противоречие.

Пусть $b_2 = 24$. Тогда $k_3 = 840, b_3 = 10$ и $c_4 \in \{16, 20, 24, 28, 40\}$. В случае $c_4 = 16$ имеем $16 - b_4 \geq 14$, $k_4 = 525$, k_5 делится на 3 и $c_5 \in \{25, 35, 50\}$. Если $c_5 = 25$, то $k_5 = 42$ и $p^5_{25} > k_5$, противоречие. Если $c_5 = 35$, то $k_5 = 30$ и $p^5_{25} > k_5$, противоречие. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 21$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Если c_4 делится на 5, то b_4 делится на 10, противоречие. Пусть $c_4 = 24$. Тогда $b_4 \leq 4, k_4 = 350$, k_5 сравнимо с 1 по модулю 3 и $c_5 \in \{28, 35, 40, 50\}$. Если $c_5 = 28$, то $b_4 = 2, k_5 = 25$ и $p^5_{25} > k_5$, противоречие. Если $c_5 = 35$, то $k_5 = 10b_4 = 40$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 7b_4$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Пусть $c_4 = 28$. Тогда $b_4 = 2, k_4 = 300$, k_5 делится на 3 и $c_5 \in \{40, 50\}$. Если $c_5 = 40$, то $k_5 = 15$ и $p^5_{25} > k_5$, противоречие. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 7b_4$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Если $b_2 = 26$, то $k_3 = 910$ и b_3 делится на 20, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Параметр c_3 не равен* 16.

Доказательство. Пусть $c_3 = 16$. Тогда $b_2 = 16, k_3 = 525$, $b_3 \leq 13$, диаметр Γ равен 5 и $c_4 \in \{18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 35, 36, 39, 40, 42\}$. Если $c_4 = 18$, то $18 - b_4 \geq 25 - b_3$, $b_3 = 12, k_4 = 350$, k_5 сравнимо с 1 по модулю 3 и $c_5 \in \{25, 28, 35, 40, 42, 50\}$. В случае $c_5 = 25$ имеем $k_5 = 14b_4$, $b_4 \in \{2, 5\}$ и число p^5_{25} нецелое. В случае $c_5 = 28$ имеем $k_5 = 25b_4/2$, $b_4 = 2$ и $p^5_{25} > k_5$. В случае $c_5 = 35$ имеем $k_5 = 10b_4$, $b_4 = 4$ и число p^5_{25} нецелое. В случае $c_5 = 40$ имеем $b_4 = 4, k_5 = 35$, противоречие. В случае $c_5 = 42$ имеем $b_4 = 3, k_5 = 25$ и $p^5_{25} > k_5 - a_5$. В случае $c_5 = 50$ имеем $k_5 = 7b_4 = 28$ и число p^5_{25} нецелое. В любом случае получаем противоречие.

Если $c_4 = 20$, то $20 - b_4 \geq 25 - b_3$, $k_4 = 105b_3/4$, $b_3 \in \{4, 8, 12\}$, b_4 делится на 5, поэтому $b_4 = 5, b_3 = 12$, противоречие с леммой 1.7.

Пусть $c_4 = 21$. Тогда $b_4 \leq 5, 21 - b_4 \geq 25 - b_3$, $k_4 = 25b_3$, $a_4 = 29 - b_4, a_3 = 34 - b_3$ и $a_4 + a_3 - 7 = 56 - b_3 - b_4$ делится на 4. В случае $b_3 = 6$ имеем $b_4 = 2$, $k_4 = 150$, k_5 делится на 3 и $c_5 = 50$, противоречие. В случае $b_3 = 8$ имеем $b_4 = 4$, $k_4 = 200$, k_5 сравнимо с 1 по модулю 3 и $c_5 \in \{32, 40\}$. Если $c_5 = 32$, то $k_5 = 25$ и $p^5_{25} > k_5$, противоречие. Если $c_5 = 40$, то $k_5 = 20$, противоречие.

В случае $b_3 = 10$ имеем $b_4 = 2$, $k_4 = 250$, k_5 сравнимо с -1 по модулю 3 и $c_5 = 50$, противоречие. В случае $b_3 = 12$ имеем $b_4 = 4$, $k_4 = 300$, k_5 делится на 3, $c_5 = 40$, $k_5 = 30$ и $p^5_{25} > k_5$, противоречие.

Пусть $c_4 = 24$. Тогда $b_4 \leq 4, b_3 = 8, k_4 = 175$, k_5 сравнимо с -1 по модулю 3 и $c_5 \in \{28, 35, 50\}$. В случае $c_5 = 28$ имеем $b_4 = 4, k_5 = 25$, противоречие. В случае $c_5 = 35$ имеем $k_5 = 5b_4 = 20$ и число p^5_{25} нецелое. В случае $c_5 = 50$ имеем $k_5 = 7b_4/2$ и число p^5_{25} нецелое. В обоих случаях получаем противоречие.

Если $c_4 = 25$, то $b_4 \leq 4, b_3 \in \{5, 10\}, k_4 = 21$ и k_4b_4 не делится на 50. Если $c_4 = 27$, то $b_3 = 9, k_4 = 175$, противоречие с тем, что $b_4 \leq 3$ и b_3b_4 не делится на 4.

Пусть $c_4 = 28$. Тогда $b_4 \leq 3$ и $k_4 = 75b_3/4$. В случае $b_3 = 4$ имеем $k_4 = 75$, $b_4 = 2$, $c_5 = 50$, $k_5 = 3$ и число p^5_{25} нецелое. В случае $b_3 = 8$ имеем $k_4 = 150$, $c_5 = 50$, $b_4 = 1, k_5 = 3$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16, 8, 1; 1, 4, 16, 28, 50\}$ и число p^5_{35} нецелое. В случае $b_3 = 12$ имеем $k_4 = 225$, $c_5 = 45$, $b_4 = 3, k_5 = 15$ и число p^5_{25} нецелое. Во всех случаях получаем противоречие.

Если $c_4 = 30$, то $b_4 \leq 3$, $k_4 = 35b_3/2$ и b_3 делится на 5, поэтому $b_3 = 10, k_4 = 175$, $b_4 = 2$, $c_5 = 50$, $k_5 = 7$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие. Если $c_4 = 33$, то $b_4 \leq 2$, $b_3 = 11$ и b_3b_4 не делится на 4, противоречие. Если $c_4 = 35$, то $b_4 \leq 2$, $k_4 = 15b_3$ и b_3 делится на 5, поэтому

$b_3 = 10, k_4 = 150$, $b_4 = 2$, $c_5 = 50$, $k_5 = 3$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие. Если $c_4 = 36$, то $b_4 \leq 2$, $b_3 = 12, k_4 = 175$, $c_5 = 50$, $k_5 = 7$ и число p^5_{25} нецелое, противоречие.

Если $c_4 = 39$, то $b_4 = 1$, $b_3 = 13$ и b_3b_4 не делится на 4, противоречие. Если $c_4 = 40$, то $b_4 = 1$, $b_3 = 8, k_4 = 105$ и k_4b_4 не делится на 50, противоречие. Если $c_4 = 42$, то $b_4 = 1$, $k_4 = 25b_3/2$, $c_5 = 50$, $k_5 = b_3/4$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 16, 8, 1; 1, 4, 16, 42, 50\}$ и число p^5_{45} нецелое, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Параметр c_3 четен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что параметр c_3 нечетен. Так как b_2 четно, то $c_3 \notin \{17, 19, 23\}$. Пусть $c_3 = 21$. Тогда $b_3 \leq 8, k_3 = 25b_2$ и $b_2 \in \{22, 24, 26\}$. По лемме 3.1 либо b_2 не делится на 4 и $b_3 + c_3$ сравнимо с -1 по модулю 4, либо b_2 делится на 4 и $b_3 + c_3$ сравнимо с 1 по модулю 4.

Если $b_2 = 22$, то $b_3 = 6$, $k_3 = 550$, $c_4 = 44, k_4 = 75$ и v не делится на 3, противоречие. Если $b_2 = 26$, то $b_3 = 6$, $k_3 = 650$, c_4 делится на 4 и не делит k_3b_3, противоречие. Значит, $b_2 = 24$, $b_3 \in \{4, 8\}$, $k_3 = 600$ и $c_4 \in \{32, 40\}$. Если $c_4 = 32$, то $b_4 \leq 2, k_4 = 75b_3/4$, k_5 делится на 3, $c_5 = 50$, $b_4 = 1, k_5 = 3b_3/8 = 3$, Γ имеет массив пересечений $\{50, 42, 24, 8, 1; 1, 4, 21, 32, 50\}$ и число p^5_{35} нецелое, противоречие. Если $c_4 = 40$, то $k_4 = 15b_3$, $b_4 = 1$ и k_4b_4 не делится на 50, противоречие.

Если $c_3 = 25$, то $b_3 \leq 4, b_2 = 26$, $k_3 = 26 \cdot 21$ и k_3b_3 не делится на 50, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Параметр c_3 нечетен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $c_3 = 18$. Тогда $b_3 \leq 11, k_3 = 175b_2/6$, $b_2 \in \{18, 24\}$, $b_3 \in \{4, 8\}$ и $c_4 \in \{20, 24, 28, 30, 32, 40, 42\}$. Если $c_4 = 20$, то $20 - b_4 \geq 27 - b_3, b_3 = 8, b_4 = 1, k_4 = 35b_2/3$ и k_4b_4 не делится на 50. Пусть $c_4 = 24$. Тогда $24 - b_4 \geq 27 - b_3$, $b_2 = 18$, $k_3 = 525$, $b_3 = 8$, $k_4 = 175$, k_5 сравнимо с -1 по модулю 3 и $c_5 \in \{35, 50\}$. Если $c_5 = 35$, то $k_5 = 5b_4 = 20$ и число p^5_{25} нецелое. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 7b_4/2$ и число p^5_{25} нецелое. В обоих случаях получаем противоречие.

Пусть $c_4 = 28$. Тогда $b_4 \leq 3$. В случае $b_2 = 18$ имеем $k_3 = 525$, $k_4 = 75b_3/4$, k_5 делится на 3, $c_5 = 50$, $k_5 = 3b_3b_4/8$, противоречие с тем, что $525 \leq k_5(k_5 - 1)$. В случае $b_2 = 24$ имеем $k_3 = 700$, $k_4 = 25b_3$. Если $b_3 = 4$, то k_5 сравнимо с -1 по модулю 3, $c_5 = 50$, $k_5 = 2b_4 = 2$. Если $b_3 = 8$, то k_5 сравнимо с 1 по модулю 3, $c_5 \in \{40, 50\}$. Если $c_5 = 40$, то $k_5 = 5b_4 = 10$. Если $c_5 = 50$, то $k_5 = 4b_4 = 16$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $525 \leq k_5(k_5 - 1)$.

Если $c_4 \geq 30$, то $b_4 \leq 3, k_4 \leq 140$, $k_5 \leq 420/36$, противоречие с тем, что $525 \leq k_5(k_5 - 1)$.

Пусть $c_3 = 20$. Тогда $b_3 \leq 6, k_3 = 105b_2/4$ и $b_2 \in \{20, 24\}$.

В случае $b_2 = 20$ имеем $k_3 = 525$ и $c_4 \in \{25, 28, 30, 35, 42\}$. Если $c_4 = 25$, то $25 - b_4 \geq 29 - b_3$, $b_3 = 6, b_4 = 2$, $k_4 = 126$ и k_4b_4 не делится на 50, противоречие. Если $c_4 = 28$, то $b_3 = 4, b_4 \leq 3$, $k_4 = 75$, k_5 делится на 3, $c_5 = 50$, $k_5 = 3b_4/2$ и число p^5_{25} не целое, противоречие. Если $c_4 \in \{30, 35\}$, то $b_4 \leq 3$ и k_4b_4 не делится на 50, противоречие. Если $c_4 = 42$, то $b_4 = 1$, $k_4 = 25b_3/2 = 75$ и $c_5 = 50$ не делит k_4b_4, противоречие.

Если $b_2 = 24$, то $k_3 = 630, b_3 = 5, b_4 = 4$ и $c_4 = 25$ (если $c_4 > 26$, то $b_4 \leq 3$). Противоречие с тем, что $25 - b_4 \geq 29 - b_3$.

Пусть $c_3 = 22$. Тогда $b_2 = 22$, противоречие с леммой 3.1. Пусть $c_3 = 26$. Тогда $b_2 = 26$, противоречие с леммой 3.1. Пусть $c_3 = 24$. Тогда $b_2 = 24, b_3 \leq 4, k_3 = 525$, $c_4 \geq 30, b_4 \leq 3$, $k_4 \leq 70$, $c_5 \geq 36$, $k_5 \leq 210/36$, противоречие с тем, что $525 \leq k_5(k_5 - 1)$. Лемма доказана.

Теорема следует из результатов, полученных в разд. 2–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p.

2. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Графы Тервиллигера, в которых окрестность некоторой вершины изоморфна графу Петерсена // Докл. РАН. 2008. Т. 421, № 4. С. 445–448.
3. **Махнев А.А.** О графах, в которых окрестности вершин изоморфны графу Хофмана — Синглтона // Докл. РАН. 2008. Т. 421, № 6. С. 735–737.
4. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. V. 14, iss. 5. P. 397–407.
5. **Terwilliger P.** A new feasibility condition for distance-regular graphs // Discrete Math. 1986. V. 61, iss. 2–3. P. 311–315.
6. **Haemers W.H.** Interlacing eigenvalues and graphs // Linear Alg. Appl. 1995. Vol. 226–228. P. 593–616.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 24.11.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 519.17+512.54

О ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ ГРАФА АШБАХЕРА[1]

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Графом Мура называется регулярный граф степени k и диаметра d на v вершинах, для которого выполняется неравенство $v \leq 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{d-1}$. Известно, что граф Мура степени $k \geq 3$ имеет диаметр 2, т. е. сильно регулярен с параметрами $\lambda = 0$, $\mu = 1$ и $v = k^2 + 1$, где степень k равна 3, 7 или 57. Существование графа Мура степени $k = 57$ неизвестно. Ашбахер показал, что граф Мура с $k = 57$ не является графом ранга 3. В связи с этим мы будем называть граф Мура с $k = 57$ графом Ашбахера и исследовать группу G его автоморфизмов без дополнительных предположений (ранее предполагалось, что G содержит инволюцию).

Ключевые слова: группа автоморфизмов графа, граф Мура, сильно регулярный граф.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. On the automorphism group of the Aschbacher graph.

A Moore graph is a regular graph of degree k and diameter d with v vertices such that $v \leq 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{d-1}$. It is known that a Moore graph of degree $k \geq 3$ has diameter 2, i.e., it is strongly regular with parameters $\lambda = 0$, $\mu = 1$, and $v = k^2 + 1$, where the degree k is equal to 3, 7, or 57. It is unknown whether there exists a Moore graph of degree $k = 57$. Aschbacher showed that a Moore graph with $k = 57$ is not a graph of rank 3. In this connection, we call a Moore graph with $k = 57$ the Aschbacher graph and investigate its automorphism group G without additional assumptions (earlier, it was assumed that G contains an involution).

Keywords: automorphism group of a graph, Moore graph, strongly regular graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $[a]$ обозначим *окрестность вершины* a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех смежных с a вершин. Положим $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Граф называется *сильным с параметрами* (λ, μ), если любое его ребро лежит в λ треугольниках и любая пара несмежных вершин имеет μ общих соседей. Граф Γ называется *сильно регулярным* с параметрами (v, k, λ, μ), если он имеет v вершин, регулярен степени k и является сильным с соответствующими параметрами. *Звездой* назовем граф, содержащий такую вершину a, что любая отличная от a вершина графа смежна только с a. Если звезда имеет не менее трех вершин, то a называется *центром* звезды. Если Y — некоторое множество автоморфизмов графа Γ, то через $\mathrm{Fix}(Y)$ обозначим множество всех вершин из Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из Y. Для подграфа Δ графа Γ через $X_i = X_i(\Delta)$ обозначим множество всех вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ, и положим $x_i = |X_i|$.

Если регулярный граф степени k и диаметра d имеет v вершин, то выполняется неравенство

$$v \leq 1 + k + k(k-1) + \cdots + k(k-1)^{d-1}.$$

Графы, для которых это нестрогое неравенство превращается в равенство, называются *графами Мура*. Простейший пример графа Мура доставляет $(2d+1)$-угольник. Дамерелл [1] доказал, что граф Мура степени $k \geq 3$ имеет диаметр 2. В этом случае $v = k^2+1$, граф сильно регулярен с $\lambda = 0$ и $\mu = 1$, а степень k равна 3 (граф Петерсена), 7 (граф Хофмана — Синглтона), или 57.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00009), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программы отделения математических наук РАН и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

Существование графа Мура степени $k = 57$ неизвестно. Ашбахер [2] показал, что граф Мура с $k = 57$ не является графом ранга 3. Мы будем называть граф Мура с $k = 57$ *графом Ашбахера*.

Пусть Γ — граф Ашбахера, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. В работе [3] доказано, что если G содержит инволюцию t, то $G = O(G)\langle t\rangle$ и $\mathrm{Fix}(t)$ — это $a^{\perp} - \{b, b^t\}$ для некоторых смежных вершин a, b. В данной работе исследуется строение группы G без дополнительных предположений.

Теорема 1. *Пусть Γ — граф Ашбахера и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Тогда либо*

(1) *G содержит инволюцию t и либо $O(G) = P$ — силовская 5-подгруппа из G порядка 125, $|[P, t]| = 25$, $Z(P)$ действует полурегулярно на Γ, $\mathrm{Fix}(C_P(t))$ является графом Хофмана — Синглтона и P содержит 25 подгрупп U_i порядка 5, имеющих пятиугольник в качестве подграфа неподвижных точек, либо $G = Y\langle t\rangle \times X$, Y — циклическая группа, инвертируемая t, $|Y|$ делит 7, 19 или 55, $|X|$ делит 7, 25, 27 или 55 и, если $X \neq 1$, то верно одно из утверждений:*

(*i*) *$\mathrm{Fix}(X)$ — звезда, $|X| = 7$ и $Y = 1$;*

(*ii*) *$\mathrm{Fix}(X)$ — пятиугольник, $|Y|$ делит 5 и либо $\mathrm{Fix}(x)$ есть граф Хофмана — Синглтона для некоторого элемента x порядка 5 из X и $|X : \langle x\rangle| \in \{5, 11\}$, либо $\mathrm{Fix}(x) = \mathrm{Fix}(X)$ для любого неединичного элемента x из X и $|X|$ делит 55;*

(*iii*) *$\mathrm{Fix}(X)$ — граф Петерсена, $|X|$ делит 27, $|Y|$ делит 5 и, если $Y \neq 1$, то $\mathrm{Fix}(Y)$ является пустым графом;*

(*iv*) *$\mathrm{Fix}(X)$ есть граф Хофмана — Синглтона, $|X|$ делит 25, $|Y|$ делит 5 или 7 и, если $|Y| = 5$, то $\mathrm{Fix}(Y)$ является пустым графом или пятиугольником, а если $|Y| = 7$, то $\mathrm{Fix}(Y)$ является звездой на 51 или на 16 вершинах,*

либо

(2) *$|G|$ — нечетное число и верно одно из утверждений:*

(*i*) *19 делит $|G|$, $G = G_a$ для некоторой вершины a, и G — подгруппа из группы Фробениуса порядка $3^2 \cdot 19$;*

(*ii*) *либо 13 делит $|G|$, либо G — подгруппа из циклической группы порядка 65 и каждый неединичный элемент из G действует без неподвижных точек на Γ, либо G — группа Фробениуса порядка 39;*

(*iii*) *11 делит $|G|$, G — расширение циклической группы порядка 11 с помощью элементарной абелевой группы U порядка, делящего 25;*

(*iv*) *либо 7 делит $|G|$, либо G — подгруппа прямого произведения циклической группы порядка 7 и элементарной абелевой группы U порядка, делящего 25 (в случае $U \neq 1$ подграф $\mathrm{Fix}(U)$ является графом Хофмана — Синглтона), либо G — группа Фробениуса порядка 21;*

(*v*) *либо $\pi(G) \subseteq \{3, 5\}$, либо $|G|$ делит 5^4, либо G — подгруппа из прямого произведения группы порядка 5 и группы порядка 27, либо G — группа Фробениуса порядка 75 или $5^4 \cdot 3$, либо $|Z(G)| = 5$ и $G/Z(G)$ — группа Фробениуса порядка 75.*

При доказательстве теоремы 1 используется следующий результат о подграфах неподвижных точек автоморфизмов графа Ашбахера, вытекающий из лемм 2.1–2.7.

Предложение 1. *Пусть Γ — граф Ашбахера, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) *Ω — пустой граф и $p \in \{5, 13\}$;*

(2) *Ω — звезда на ω вершинах и либо $\omega = 1$ и $p = 19$, либо $\omega = 56$ и $p = 2$, либо $\omega = 58 - 7y$ для некоторого $y \leq 8$ и $p = 7$;*

(3) *Ω — пятиугольник и $p \in \{5, 11\}$;*

(4) *Ω — граф Петерсена и $p = 3$;*

(5) *Ω является графом Хофмана — Синглтона и $p = 5$.*

1. Предварительные результаты

В этом разделе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы 1. Заметим, что непустой подграф неподвижных точек подгруппы нечетного порядка из группы автоморфизмов графа Мура является графом Мура или звездой.

Лемма 1.1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с* $\mu = 1$, g *— автоморфизм графа* Γ *и* Δ *— такая* $\langle g\rangle$*-орбита, что для* $x \in \Delta$ *вершины* x, x^g *смежны. Тогда* Δ *является кликой или многоугольником.*

Доказательство. Пусть i — наименьшее число из $\{3, \dots, |g|\}$ такое, что x несмежна с вершиной x^{g^i}. Тогда $[x] \cap [x^{g^i}]$ содержит $x^g, x^{g^{i-1}}$, поэтому $i = 2$. Пусть теперь j — наименьшее число из $\{3, \dots, |g|-1\}$ такое, что вершины x, x^{g^j} смежны. Тогда $[x] \cap [x^{g^{j-1}}]$ содержит $x^{g^{-1}}, x^{g^j}$ и $j = |g| - 1$. Но в этом случае Δ — многоугольник. □

Лемма 1.2. *Пусть* X *— подгруппа нечетного порядка из* G, $\Sigma = \mathrm{Fix}(X)$ *и* $|\Sigma| \geq 2$. *Если* $\Delta = \mathrm{Fix}(x)$ *не содержится в* Σ *для некоторого неединичного элемента* x *из* X *и* X_0 *— поточечный стабилизатор* Δ, *то выполняется одно из утверждений*:

(1) Σ *— пятиугольник и либо*

(i) Δ *есть граф Хофмана — Синглтона и* $|X : X_0| = 5$, *либо*

(ii) Δ *есть граф Хофмана — Синглтона,* $X = X_0L$, $|X_0| = 5$, L *— нормальная в* X *подгруппа,* $|L|$ *делится на* 11 *и делит* 55;

(2) Σ *— звезда с* $|\Sigma| = 2$ *и либо*

(i) $X = KX_0$, $|X_0| = 3$, Δ *— граф Петерсена,* $|K| = 7$ *и* $\mathrm{Fix}(K)$ *— звезда, содержащая* Σ, *либо*

(ii) $X = X_0Z$, Δ *есть граф Хофмана — Синглтона,* X_0 *— элементарная абелева группа порядка* 25, $|Z| = 3$, $\mathrm{Fix}(Z)$ *— граф Петерсена, пересекающий* Δ *по* Σ, *и* Z *действует точно на* X_0.

Доказательство. Пусть Σ — граф Петерсена. Тогда Δ является графом Хофмана — Синглтона. Так как X_0 действует полурегулярно на $[a] - \Delta$ для $a \in \Delta$, то $|X_0|$ делит 25. Для неединичной подгруппы Y из X_0 группа $N_X(Y)$ действует на графе Δ и на 4-вершинном подграфе $\Delta(a) - \Sigma$, где $a \in \Sigma$. Поэтому $N_X(Y) \leq X_0$, X_0 — циклическая силовская 5-подгруппа из X и $|X'|$ сравнимо с 1 по модулю 5. Далее, $\mathrm{Fix}(y) = \Sigma$ для любого неединичного элемента $y \in X'$. Поэтому для $a \in \Sigma$ группа X' действует полурегулярно на $[a] - \Sigma$ и $|X'|$ делит 27. Противоречие с тем, что 5 не делит $|X'| - 1$.

Пусть Σ — пятиугольник. Повторив рассуждения из предыдущего абзаца, получим, что Δ не может быть графом Петерсена. Поэтому Δ является графом Хофмана — Синглтона. Для неединичной подгруппы Y из X_0 группа $N_X(Y)$ действует на графе Δ и на 5-вершинном подграфе $\Delta(a) - \Sigma$, где $a \in \Sigma$. Поэтому $N_X(Y) \leq X_0$ или $|N_X(Y) : N_{X_0}(Y)| = 5$. Если $X = N_X(X_0)$, то выполняется утверждение (1)(i). Если же $X \neq N_X(X_0)$, то $X = KP$, где $P = N_X(X_0)$ — силовская 5-подгруппа из X и K — нормальное 5-дополнение, причем $|K|$ сравним с 1 по модулю 5. Далее, $\mathrm{Fix}(y) = \Sigma$ для любого неединичного элемента $y \in K$. Поэтому для $a \in \Sigma$ группа K действует полурегулярно на $[a] - \Sigma$ и $|K| = 11$. Теперь утверждение (1)(ii) выполняется с $L = KC_P(K)$.

Пусть Σ — звезда с $|\Sigma| \geq 2$, лежащая в $a^\perp$, и Y — неединичная подгруппа из X_0. Если $\mathrm{Fix}(x)$ — звезда для любого неединичного элемента $x \in X$, то X действует полурегулярно на 56 вершинах из $[b] - \mathrm{Fix}(X)$ для отличной от a вершины $b \in \mathrm{Fix}(X)$, поэтому $|X| = 7$, противоречие.

Допустим сначала, что $|\Sigma| \geq 3$. Пусть Δ — пятиугольник. Тогда $|\Sigma| = 3$. Если $\mathrm{Fix}(Y)$ не содержится в Δ, то $\mathrm{Fix}(Y)$ есть граф Хофмана — Синглтона. В этом случае по утверждению (1) либо X_0 является 5-группой, либо $|X_0|$ делится на 11 и делит 55. В любом случае $N_X(Z) \leq X_0$

для каждой неединичной подгруппы Z из X_0, и группа X имеет нормальное 5-дополнение K. Пусть $K = L(X_0 \cap K)$ и $L \cap X_0 = 1$. Если y — элемент простого порядка из L, то $\mathrm{Fix}(y)$ — звезда или граф Петерсена. Если $\mathrm{Fix}(y)$ — звезда, то $\langle y \rangle$ действует полурегулярно на 55 вершинах из $[a] - \Sigma$ и на 56 вершинах из $[b] - \Sigma$ для $b \in \Sigma(a)$, противоречие. Если $\mathrm{Fix}(y)$ — граф Петерсена, то $|L|$ делит 27. Противоречие с тем, что элемент порядка 5 или 11 из X_0 действует без неподвижных точек на L.

Если же $\mathrm{Fix}(Y)$ содержится в Δ для любой неединичной подгруппы Y из X_0, то $X = KX_0$ и $|X_0|$ делит 55. Снова $\mathrm{Fix}(y)$ — звезда или граф Петерсена для любого неединичного элемента y из L, поэтому $|K| = 7$ или $|K|$ делит 27. Противоречие, как и выше.

Если Δ — граф Петерсена, то $|\Sigma| \leq 4$ и $N_X(Y)$ действует на двух вершинах из $\Delta(b) - \Sigma$ для отличной от a вершины $b \in \mathrm{Fix}(X)$. Отсюда $X = KX_0$, где K — нормальная $3'$-подгруппа из X и $|X_0|$ делит 27. Если $\mathrm{Fix}(y) = \Sigma$ для любого неединичного элемента $y \in K$, то K действует полурегулярно на $58 - |\Sigma|$ вершинах из $[a] - \Sigma$ и на 56 вершинах из $[b] - \Sigma$ для $b \in \Sigma(a)$, противоречие. Значит, $\mathrm{Fix}(K)$ — граф Хофмана — Синглтона, K — элементарная абелева группа порядка 25 и $|X_0| = 3$. Противоречие с тем, что X_0 действует полурегулярно на 4 вершинах из $\mathrm{Fix}(K) \cap [a] - \Delta$.

Пусть Δ является графом Хофмана — Синглтона. Если $N_X(Y)$ не содержится в X_0, то $N_X(Y)$ действует на 6 вершинах из $\Delta(b) - \Sigma$ для отличной от a вершины $b \in \Sigma$ и на $8 - |\Sigma|$ вершинах из $\Delta(a) - \Sigma$. Тогда либо $|N_X(Y) : N_{X_0}(Y)| = 3$ и $|\Sigma| = 5$, либо $|N_X(Y) : N_{X_0}(Y)| = 5$ и $|\Sigma| = 3$. В первом случае получим противоречие с тем, что подграф неподвижных точек автоморфизма порядка 3 является одновершинным графом или графом Петерсена. Во втором случае $\mathrm{Fix}(y)$ является пятиугольником для $y \in N_X(Y) - X_0$, и X имеет нормальное 5-дополнение K.

Если же $N_X(Y)$ содержится в X_0 для любой неединичной подгруппы Y из X_0, то снова X имеет нормальное 5-дополнение K. Тогда $\mathrm{Fix}(y) = \Sigma$ для любого неединичного элемента y из K. Противоречие с тем, что K действует на 56 вершинах из $[b] - \Sigma$ для отличной от a вершины $b \in \Sigma$ и на $57 - 4$ вершинах из $[a] - \Sigma$.

Пусть $\Sigma = \{a, b\}$, где вершины a, b смежны. Повторив рассуждения из предыдущего случая, получим, что Δ — граф Петерсена или граф Хофмана — Синглтона. Если Δ — граф Петерсена, то $X = KX_0$, $|K| = 7$ и $|X_0| = 3$. В этом случае выполняется утверждение (2)(i).

Если Δ является графом Хофмана — Синглтона, то $X = X_0Z$, $|Z| = 3$, $\mathrm{Fix}(Z)$ — граф Петерсена, пересекающий Δ по Σ и Z не централизует неединичные элементы из X_0. В противном случае элемент x порядка 5 из $C_{X_0}(Z)$ действует на графе Петерсена, оставляя неподвижными две смежные вершины. Отсюда X_0 — элементарная абелева группа порядка 25. □

Следующая лемма является обобщением границы Хофмана для коклик.

Лемма 1.3. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с собственными значениями k, r, s на v вершинах и Ω — регулярный подграф графа Γ степени k' на u вершинах. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) *$s \leq k' - u(k-k')/(v-u) \leq r$, причем если в одном из этих нестрогих неравенств достигается равенство, то каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с $u(k-k')/(v-u)$ вершинами из Ω*;

(2) *если $\Delta_1, \ldots, \Delta_t$ — такие подграфы Хофмана — Синглтона из графа Ашбахера Γ, что $\Omega = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_t$ — регулярный граф степени 7 на $50t$ вершинах, то $t \leq 15$, причем в случае $t = 15$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 15 вершинами из Ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение хорошо известно (см., например, § 2 из [4]).

Пусть Γ — граф Ашбахера. Тогда Γ имеет собственные значения $57, 7, -8$, и по утверждению (1) имеем $-8 \leq 7 - 50t/(65-t) \leq 7$, поэтому $t \leq 15$. В случае $t = 15$ каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 15 вершинами из Ω. □

Доказательство теоремы 1 опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$. Тогда графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$, где X — множество вершин графа $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_d\}$, где R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин графа Γ, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^k A_k$ для подходящих неотрицательных целых p_{ij}^k.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, k) стоит p_{ij}^k. Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$ соответственно. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Лемма 1.4 [6, теорема 17.12]. *Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату* 1. *Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j \rangle$.*

Доказательство. См. теорему 17.12 из [6]. □

Фактически w_j являются столбцами матрицы P и векторы $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $\mathrm{GL}(v, \mathbb{C})$. Пространство $\mathbb{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, \dots, W_d$ матрицы смежности A графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления, полученного при проектировании ψ на W_i. Тогда (см. [5, § 3.7])

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число вершин x из Γ таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и так как правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 1.5. *Пусть Γ — граф Ашбахера и g — элемент из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Тогда значение характера, полученного при проектировании ψ на подпространство размерности* 1520 *равно*

$$\chi_1(g) = \frac{1}{15}\big(7\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 50\big).$$

Доказательство. Пусть Γ — граф Ашбахера. Тогда

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 57 & -8 & 7 \\ 3192 & 7 & -8 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1520 & -640/3 & 10/3 \\ 1729 & 637/3 & -13/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 1520, равно

$$\chi_1(g) = \frac{1}{3250}\Big(1520\alpha_0(g) - \frac{640}{3}\alpha_1(g) + \frac{10}{3}\alpha_2(g)\Big).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = 3250 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 50)/15$. □

Лемма 1.6. *Пусть* Γ *— граф Хофмана — Синглтона,* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $g \in G$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *не содержит* 11-*угольников*;

(2) *значение характера, полученного при проектировании* ψ *на подпространство размерности* 21, *равно* $\chi_1'(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/5 + 1$;

(3) *если* t *— такая инволюция из* G, *что* $\mathrm{Fix}(t)$ *является звездой на шести вершинах и* P *является* t-*допустимой силовской* 5-*подгруппой из* G, *то* $t \notin G'$, *группа* $C_G(t)$ *изоморфна симметрической группе* S_5, $|C_P(t)| = 5$, $\mathrm{Fix}(C_P(t))$ *является пятиугольником,* $Z(P)$ *действует на* Γ *без неподвижных точек и* P *содержит точно две подгруппы порядка* 5, *имеющие неподвижные точки на* Γ.

Доказательство. Пусть Γ есть граф Хофмана — Синглтона. Допустим, что Γ содержит 11-угольник Δ. Пусть $X_i = X_i(\Delta)$ и $x_i = |X_i|$. Тогда $\sum x_i = 39, \sum i x_i = 55, \sum \binom{i}{2} x_i = 33$, причем $x_i = 0$ для $i \geq 4$. Поэтому $x_0 = 17 - x_3, x_1 = 3x_3 - 22, x_2 = 44 - 3x_3$ и $8 \leq x_3 \leq 14$.

Если вершина a из Δ смежна с 3 вершинами из X_3, то она смежна ровно с 2 вершинами из X_1. Пусть β — число вершин из Δ, смежных с 3 вершинами из X_3. Тогда $x_1 \geq 2\beta$ и $x_3 \leq 10$. Если $x_3 = 10$, то $\beta \geq 8$; если $x_3 = 9$, то $\beta \geq 5$, а если $x_3 = 8$, то $\beta \geq 4$. В любом случае имеем противоречие с тем, что $x_1 \geq 2\beta$. Утверждение (1) доказано.

Имеем

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & -3 & 2 \\ 42 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 21 & -9 & 1 \\ 28 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому значение характера, полученного при ограничении на подпространство размерности 21, равно

$$\chi_1'(g) = \frac{1}{50}\big(21\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g) + \alpha_2(g)\big).$$

Подставляя $\alpha_2(g) = 50 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1'(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/5 + 1$. Утверждение (2) доказано.

Пусть t — такая инволюция из G, что $\mathrm{Fix}(t)$ является звездой на 6 вершинах. Тогда $t \notin G'$, группа $C_G(t)$ изоморфна симметрической группе S_5, $|C_P(t)| = 5$, $\mathrm{Fix}(C_P(t))$ является пятиугольником, на котором точно действует диэдральная группа $Z(P)\langle t \rangle$ порядка 10. Далее, $Z(P)$ действует на Γ без неподвижных точек, и P содержит точно две подгруппы порядка 5, имеющие неподвижные точки. Утверждение (3) доказано. □.

2. Неподвижные точки автоморфизмов графа Ашбахера

Пусть Γ — граф Ашбахера и $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. В леммах 2.1–2.7 предполагается, что g — элемент простого порядка p из G, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ и $\alpha_1(g) = pw$. По лемме 1.5 получим $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 50)/15$.

Лемма 2.1. *Если* $p = 2$, *то* Ω *— звезда на* 56 *вершинах и* $\alpha_1(g) = 112$.

Доказательство. По теореме из [3] граф Ω является звездой на 56 вершинах. Пусть a — центр звезды Ω и $b \in [a] - \Omega$. Допустим, что вершина u смежна с u^g. Из доказательства утверждения (1) [3, лемма 2] следует, что $u \in [b] \cup [b^g]$ и $\alpha_1(g) = 112$. □

Лемма 2.2. *Если* $p = 3$, *то* Ω *— граф Петерсена.*

Доказательство. Заметим, что $\alpha_1(g) = 0$, иначе $\{x, x^g, x^{g^2}\}$ — треугольник для некоторой вершины x. По [3, лемма 3] Ω является одновершинным графом или графом Петерсена.

Если $|\Omega| = 1$, то $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 50)/15 = 19/5$, противоречие.

Если $|\Omega| = 10$, то $\chi_1(g) = 8$. □

Лемма 2.3. *Если $p = 5$, то Ω является пустым графом, пятиугольником или графом Хофмана — Синглтона и выполняются утверждения*:

(1) *Ω является пустым графом и $\alpha_1(g) = 15s+5$ для некоторого неотрицательного целого числа s*;

(2) *Ω является пятиугольником и $\alpha_1(g) = 15s + 10$*;

(3) *Ω является графом Хофмана — Синглтона, $\alpha_1(g) = 15s - 5$, и если поточечный стабилизатор P подграфа Ω имеет порядок 25, то P — силовская 5-подгруппа из $C_G(P)$.*

Доказательство. По [3, лемма 3] граф Ω является пустым, пятиугольником или графом Хофмана — Синглтона.

Если $|\Omega| = 0$, то $\alpha_1(g) - 50$ делится на 15.

Если $|\Omega| = 5$, то $\alpha_1(g) - 85$ делится на 15.

Если $|\Omega| = 50$, то $\alpha_1(g) - 400$ делится на 15. Пусть поточечный стабилизатор P подграфа Ω имеет порядок 25 и P содержится в подгруппе Q порядка 125 из $C_G(P)$. Тогда Q действует на $X_0 = X_0(\Omega)$ и $x_0 = 700$. Для любой подгруппы U порядка 5 из Q имеем $|\operatorname{Fix}(U) \cap X_0| \in \{0, 25, 50\}$. Пусть y_j — число подгрупп U порядка 5 из Q таких, что $|\operatorname{Fix}(U) \cap X_0| = 25j$. Тогда $y_0 + y_1 + y_2 = 25$ и $700 - 25y_1 - 50y_2 = 25(28 - y_1 - 2y_2)$ делится на 125, поэтому $y_1 + 2y_2 \in \{3, 28\}$. Отсюда $2y_0 + y_1 \in \{47, 22\}$, противоречие с тем, что $|X_1| - 50y_0 - 25y_1 = 25(100 - 2y_0 - y_1)$ делится на 125. □

Лемма 2.4. *Пусть $p = 7$. Тогда Ω является звездой на $58 - 7y$ вершинах и $\alpha_1(g) + 4y - 6$ делится на 15.*

Доказательство. Заметим, что нетривиальная орбита вершины под действием $\langle g \rangle$ является семиугольником или 7-кокликой.

По [3, лемма 3] граф Ω является звездой на $58 - 7y$ вершинах, $y \le 8$. Далее, $\chi_1(g) = (456 - 49y - 7w)/15$. Поэтому $7w + 4y - 6$ делится на 15. □

Лемма 2.5. *Пусть $p = 11$. Тогда Ω — пятиугольник, $\alpha_1(g) = 165x + 55$, и если подгруппа Q порядка 25 из G нормализует $\langle g \rangle$ и f — элемент порядка 5 из $C_Q(g)$, то выполняются следующие утверждения*:

(1) $\alpha_1(g) = 550$;

(2) *если f действует без неподвижных точек на Γ, то $\alpha_1(f) = 825s + 275$*;

(3) *если $|\operatorname{Fix}(f)| = 5$, то $\alpha_1(f) = 825s + 500$.*

Доказательство. По [3, лемма 3] граф Ω является пятиугольником. Далее, $\chi_1(g) = (85 - 11w)/15$ и 15 делит $11(w - 8) + 3$. Отсюда $w = 15x + 5$ и $\alpha_1(g) = 165x + 55$. Если подгруппа Q порядка 25 из G нормализует $\langle g \rangle$, то $\alpha_1(g)$ делится на 25 (иначе некоторый элемент порядка 5 поточечно фиксирует 11-угольник, противоречие с леммой 1.6) и $\alpha_1(g) = 550$.

Пусть f — элемент порядка 5 из $C_Q(g)$. Если f действует без неподвижных точек на Γ, то $\alpha_1(f)$ делится на 275 и $\alpha_1(f) = 825s + 275$, а если $|\operatorname{Fix}(f)| = 5$, то $\alpha_1(f) = 825s + 500$. □

Лемма 2.6. *Если $p = 13$, то $\operatorname{Fix}(g)$ — пустой граф и $\alpha_1(g) = 195y + 65$.*

Доказательство. По [3, лемма 3] граф $\operatorname{Fix}(g)$ пуст, $\chi_1(g) = (50 - 13w)/15$ и 15 делит $13w - 5$. Отсюда $w = 15y + 5$ и $\alpha_1(g)$ сравнимо с 65 по модулю 195. □

Лемма 2.7. *Если $p = 19$, то $\operatorname{Fix}(g)$ является одновершинным графом и $\alpha_1(g) = 285z + 57$.*

Доказательство. Пусть $p = 19$. По [3, лемма 3] $\operatorname{Fix}(g) = \{a\}$ является одновершинным графом. Далее, $\chi_1(g) = (57 - 19w)/15$ и 15 делит $w - 3$. Отсюда $w = 15z + 3$ и и $\alpha_1(g)$ сравнимо с 65 по модулю 195. □

Предложение 1 следует из лемм 2.1–2.7.

Лемма 2.8. *Если P — силовская 3-подгруппа из G, то $|P|$ делит 27.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как подгруппа P действует на некотором подграфе Петерсена Δ из Γ и $|[a]-\Delta|=54$ для вершины $a\in\Delta$, то $|P|$ делит 27. □

Лемма 2.9. *Пусть G содержит элемент f порядка pr, p,r — нечетные простые числа, $p<r$, $g=f^r$ и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда*

либо

(1) *$p=3$, $r=5$ и $\mathrm{Fix}(f^3)$ является пустым графом,*

либо

(2) *$p=5$ и выполняется одно из утверждений:*

(*i*) *$r=7$, подграф $\mathrm{Fix}(f^5)$ является звездой на 16 или на 51 вершине, Ω является графом Хофмана — Синглтона и $\alpha_1(g)=105u+35$;*

(*ii*) *$r=11$, подграф $\mathrm{Fix}(f^5)$ является пятиугольником, и либо $\mathrm{Fix}(g)$ — пустой граф и $\alpha_1(g)=165u+110$, либо $\mathrm{Fix}(g)=\mathrm{Fix}(f^5)$ и $\alpha_1(g)=165u+55$;*

(*iii*) *$r=13$, подграф $\mathrm{Fix}(f^5)$ является пустым, g не имеет неподвижных точек и $\alpha_1(g)=195u+65$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $p=3$, то Ω является графом Петерсена, f^3 точно действует на Ω, поэтому $r=5$. Далее, $\mathrm{Fix}(f^3)$ является пустым графом, иначе g фиксирует вершину из $\mathrm{Fix}(f^3)$.

Пусть $p=5$. Тогда $r\in\{7,11,13,19\}$. В случае $r=7$ подграф $\mathrm{Fix}(f^5)$ является звездой и пересекает Ω. Поэтому Ω является графом Хофмана — Синглтона и f^5 фиксирует единственную вершину a из Ω. Значит, $|\mathrm{Fix}(f^5)|-1$ делится на 5 и $|\mathrm{Fix}(f^5)|\in\{16,51\}$.

В случае $r=11$ подграф $\mathrm{Fix}(f^5)$ является пятиугольником, поэтому g точно действует на $\mathrm{Fix}(f^5)$ и не имеет неподвижных точек.

В случае $r=13$ подграф $\mathrm{Fix}(f^5)$ является пустым, поэтому g не имеет неподвижных точек и $\alpha_1(g)=195u+65$.

В случае $r=19$ подграф $\mathrm{Fix}(f^5)$ является одновершинным, поэтому Ω — непустой граф и f^5 фиксирует единственную вершину из Ω, противоречие.

Пусть $p=7$. Тогда $r\in\{11,13,19\}$. В случае $r=11$ подграф $\mathrm{Fix}(f^7)$ является пятиугольником и попадает в Ω, противоречие.

В случае $r=13$ подграф $\mathrm{Fix}(f^7)$ является пустым, противоречие с тем, что f^7 фиксирует вершину из Ω.

В случае $r=19$ подграф $\mathrm{Fix}(f^7)$ является одновершинным, и окрестность этой вершины содержится в Ω. По лемме 2.7 число $\alpha_1(f^7)=285z+57$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(f^7)=1197$. Противоречие с тем, что $\alpha_1(f^7)+\alpha_1(f^{14})>3250$.

Пусть $p=11$. Тогда $r\in\{13,19\}$, подграф Ω является пятиугольником и попадает в $\mathrm{Fix}(f^{11})$, противоречие.

Пусть $p=13$. Тогда $r=19$, подграф $\mathrm{Fix}(f^{13})$ является одновершинным и попадает в Ω, противоречие. □

3. Группа автоморфизмов графа Ашбахера, четный случай

Пусть Γ — граф Ашбахера, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ содержит инволюцию t, $\mathrm{Fix}(t)\subset a^\perp$ и $[a]-\mathrm{Fix}(t)=\{b,b^t\}$. По лемме 1.5 получим $\chi_1(g)=(7\alpha_0(g)-\alpha_1(g)+50)/15$.

Лемма 3.1. *Пусть p — простое число, делящее $|C_G(t)|$, и P — силовская p-подгруппа из $C_G(t)$. Тогда $p\in\{3,5,7,11\}$, и если $|P|>p$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) *$|P|=25$ и либо $\mathrm{Fix}(P)$ является графом Хофмана — Синглтона, либо $\mathrm{Fix}(P)$ — пятиугольник, и число подгрупп P_i порядка 5 из P таких, что $\mathrm{Fix}(P_i)$ является графом Хофмана — Синглтона, равно 1 или 6;*

(2) $|P|$ *делит* 27, $\mathrm{Fix}(P)$ *является графом Петерсена и* $\mathrm{Fix}(P)=\mathrm{Fix}(x)$ *для любого неединичного элемента* x *из* P.

Доказательство. Заметим, что подграф Φ, состоящий из вершин u, смежных с u^g, совпадает с $[b]\cup[b^g]-\{a\}$ и $\{a,b,b^g\}$ содержится в $\mathrm{Fix}(P)$.

Если $p=11$, то $\mathrm{Fix}(P)$ является пятиугольником и $|P|=11$.

Если $p=7$, то $\mathrm{Fix}(P)$ является звездой. По лемме 1.2 имеем $\mathrm{Fix}(P)=\mathrm{Fix}(x)$ для любого неединичного элемента x из P. В случае $|P|>7$ имеем $|[a]-\mathrm{Fix}(P)|=49$, и P действует полурегулярно на Φ, противоречие.

Пусть $p=5$. Если $\mathrm{Fix}(P)$ является графом Хофмана — Синглтона, то по лемме 1.2 имеем $\mathrm{Fix}(P)=\mathrm{Fix}(x)$ для любого неединичного элемента x из P. В случае $|P|>5$ имеем $|P|=25$, и P действует полурегулярно на $\Phi-\mathrm{Fix}(P)$ и на $[a]-\mathrm{Fix}(P)$.

Если $\mathrm{Fix}(P)$ является пятиугольником, то либо $\mathrm{Fix}(P)=\mathrm{Fix}(x)$ для любого неединичного элемента x из P и $|P|=5$, либо $\Delta=\mathrm{Fix}(x)$ является графом Хофмана — Синглтона для некоторого неединичного элемента x из P. В случае $|P|>5$ имеем $|P|=25$, и число подгрупп P_i порядка 5 из P таких, что $\mathrm{Fix}(P_i)$ является графом Хофмана — Синглтона, равно 1 или 6 (P действует полурегулярно на $(55-5i)$-вершинном подграфе из $[a]$).

Пусть $p=3$. Тогда $\mathrm{Fix}(P)$ является графом Петерсена, и по лемме 1.2 имеем $\mathrm{Fix}(P)=\mathrm{Fix}(x)$ для любого неединичного элемента x из P. В случае $|P|>3$ имеем $|P|=25$, и P действует полурегулярно на $\Phi-\mathrm{Fix}(P)$ и на $[a]-\mathrm{Fix}(P)$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть* s *— отличная от* t *инволюция из* G *и* $\mathrm{Fix}(s)\subset e^{\perp}$. *Тогда выполняется одно из утверждений*:

(1) *подграф* $\{a,e,a^s,e^t,a^{st}\}$ *является* st-*допустимым пятиугольником*, $|st|=5$ *и* $\mathrm{Fix}(st)$ *— пустой граф*;

(2) $[a]\cap[e]$ *содержит вершину* c *из* $\mathrm{Fix}(s)\cap\mathrm{Fix}(t)$ *и либо* $\mathrm{Fix}(st)=\{c\}$ *и* $|st|=19$, *либо* $\mathrm{Fix}(st)$ *пересекает* $[c]$ *и*

(*i*) $|st|$ *делит* 55 *и* $\mathrm{Fix}(st)$ *— пятиугольник или*

(*ii*) $|st|$ *равен* 7 *и* $\mathrm{Fix}(st)$ *является звездой порядка* $8,22,36$ *или* 50.

Доказательство. Допустим, что $a\in[e]$. Если a принадлежит $\mathrm{Fix}(s)$, то s действует на $[a]$, t — транспозиция на $[a]$, поэтому $|[s,t]|=3$ и $e\in\{b,b^t\}$. Противоречие с тем, что $|\mathrm{Fix}(t)\cap\mathrm{Fix}(t^s)|=55$.

Значит, $a\ne a^s, e\ne e^t$, и по лемме 5 из [3] $\{a^s,a^{st}\}$ и $\{e^t,e^{ts}\}$ — ребра. Если $a^{st}\ne e^{ts}$, то подграф $\{a^s,e^{ts},e^t,a^{st}\}$ — четырехугольник, противоречие. Значит, $a^{st}=e^{ts}$ и $\{a,e,a^s,a^{st},e^t\}$ является $\langle s,t\rangle$-допустимым пятиугольником. Далее, $(st)^5$ оставляет неподвижной каждую вершину из $a^{\perp}\cup e^{\perp}$, и по предложению 1 $(st)^5=1$. Если st имеет неподвижные точки, то $\mathrm{Fix}(st)$ является пятиугольником или графом Хофмана — Синглтона. В случае графа Хофмана — Синглтона t фиксирует ребро из $\mathrm{Fix}(st)$, противоречие. В случае пятиугольника подграф $\mathrm{Fix}(st)\cup\{a,e,a^s,a^{st},e^t\}$ является $\langle s,t\rangle$-допустимым графом Петерсена, причем st фиксирует пятиугольник в этом графе, противоречие. Итак, если $a\in[e]$, то выполняется утверждение (1).

Пусть $a\notin[e]$. Тогда $[a]\cap[e]$ содержит вершину c. Если $c^t\ne c$, то по [3, лемма 5] вершины e,e^t смежны. По утверждению (1) получим $\langle s,s^t\rangle$-допустимый пятиугольник $\{e,e^t,e^{ts},e^{tstst}=e^{tsts},e^{tst}\}$, причем вершина e^{tsts} является центром звезды $\mathrm{Fix}(s^{tsts})$, неподвижным под действием t. Поэтому $a=e^{tsts}$, и снова выполняется утверждение (1).

Пусть $c\in\mathrm{Fix}(t)\cap\mathrm{Fix}(s)$. Тогда t оставляет на месте единственную $\langle st\rangle$-орбиту на $[c]$ (содержащую a) и переставляет остальные орбиты. Если $\mathrm{Fix}(y)$ не пересекает $[c]$ для любого неединичного элемента $y\in\langle st\rangle$, то $|st|=19$.

Пусть $\mathrm{Fix}(y)$ пересекает $[c]$ для некоторого неединичного элемента $y\in\langle st\rangle$. Тогда $\mathrm{Fix}(y)$ является графом Мура или звездой. Если $\mathrm{Fix}(y)$ является графом Петерсена или графом Хофмана — Синглтона, то t фиксирует ребро из $\mathrm{Fix}(y)$, противоречие с тем, что $a\notin\mathrm{Fix}(y)$.

Если $\mathrm{Fix}(y)$ является пятиугольником, то $|st|$ делит 55. Итак, если $\mathrm{Fix}(y)$ является графом Мура для некоторого неединичного элемента $y \in \langle st \rangle$, то выполняется утверждение (2)(i).

Если $\mathrm{Fix}(y)$ является звездой, то $|y| = |st| = 7$, $|\mathrm{Fix}(y) \cap [c]| = 57 - 7n$ для некоторого нечетного числа n, и выполняется утверждение (2)(ii). □

Лемма 3.3. *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если t инвертирует абелеву группу X, то либо X — циклическая группа порядка, делящего $7, 19$ или 55, либо X — элементарная абелева группа порядка 25, X содержит точно 5 подгрупп Y_i таких, что $|\mathrm{Fix}(Y_i)| = 5$, $\Delta = a^X \cup \mathrm{Fix}(Y_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Fix}(Y_5)$ является графом Хофмана — Синглтона и $|G|$ делит 250;*

(2) *либо $O(G) = [t, O(G)] \times C_{O(G)}(t)$, либо $O(G) = P$ — силовская 5-подгруппа из G порядка 125, $|[P,t]| = 25$, $Z(P)$ действует полурегулярно на Γ, $\mathrm{Fix}(C_P(t))$ — граф Хофмана — Синглтона, и P содержит 25 подгрупп Y порядка 5, имеющих пятиугольник в качестве подграфа неподвижных точек.*

Доказательство. Допустим, что утверждение (1) не выполняется. Тогда можно считать, что X — элементарная абелева подгруппа порядка p^2. Ввиду леммы 3.1 имеем $p \in \{5, 7, 19\}$.

Если $p = 19$, то X фиксирует некоторую вершину x и действует без неподвижных точек на $[x]$, противоречие.

Если $p = 7$, то либо $\mathrm{Fix}(X)$ является звездой с центром c на 9 вершинах, либо $\mathrm{Fix}(X)$ является ребром $\{c, e\}$ и каждый элемент порядка 7 из X фиксирует 7 вершин из $[c] - \{e\}$. В любом случае для $e \in \mathrm{Fix}(X) \cap [c]$ каждый неединичный элемент из X действует без неподвижных точек на $[e] - \{c\}$.

Если $p = 5$, то ввиду леммы 3.2 в X нет подгрупп Y порядка 5 таких, что $|\mathrm{Fix}(Y)| = 50$. Пусть β — число подгрупп Y порядка 5 из X таких, что $|\mathrm{Fix}(Y)| = 5$. Тогда X действует без неподвижных точек на $3250 - 5\beta$ вершинах, поэтому $\beta \in \{0, 5\}$. Пусть группа X порождается элементами x, y. Если $\beta = 0$, то по лемме 3.2 инволюция t действует на пятиугольниках $a^{\langle x \rangle}$ и $a^{\langle y \rangle}$, содержащих b, b^t. Без ограничения общности, $b^x = a, a^x = b^t$, $(b^t)^y = a, a^y = b$. Тогда $\mathrm{Fix}(xy)$ содержит a, b, противоречие. Если же $\beta = 5$ и Y_i, Z — такие подгруппы порядка 5 из X, что $|\mathrm{Fix}(Y_i)| = 5$, $|\mathrm{Fix}(Z)| = 0$, то по лемме 3.2 подграф $\mathrm{Fix}(Y_i)$ содержит вершину c_i из $[a]$ и $a^Z \cup \mathrm{Fix}(Y_i)$ является графом Петерсена. Далее, $\Delta = a^X \cup \mathrm{Fix}(Y_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Fix}(Y_5)$ является графом Хофмана — Синглтона. Заметим, что $C_G(Y_i) = X$.

Пусть P является t-допустимой силовской 5-подгруппой из G, $X_i = X_i(\Delta)$. Если $P \neq X$, то P содержит отличную от X нормальную в $P\langle t \rangle$ подгруппу U порядка 25. Положим $W = C_U(t)$. Тогда $\mathrm{Fix}(W)$ содержит a^Z. Если $|P| > 125$, то $\mathrm{Fix}(W)$ является графом Хофмана — Синглтона и $P_0 = C_P(W)$ — абелева группа порядка 125. Противоречие с тем, что группа $C_{P_0}(t)$ поточечно стабилизирует пятиугольник a^Z. Значит, $|P|$ делит 5^3.

Если $O(G) \neq P$, то $|O(G)| = 75$, но в этом случае P содержит два класса сопряженных подгрупп порядка 5, по 3 подгруппы в каждом классе. Противоречие с тем, что подгруппа Z — единственная подгруппа порядка 5 из P, действующая без неподвижных точек на Γ. Утверждение (1) доказано.

Если каждая инвертируемая t абелева подгруппа является циклической, то $P = [P, t] \times C_P(t)$ для любой t-допустимой силовской подгруппы P из $O(G)$. В противном случае $p = 5$. Пусть z — неединичный элемент из центра P и $\Sigma = \mathrm{Fix}(z)$. Заметим, что по лемме 2.8 число $|C_P(t)|$ делит 25. Если t инвертирует z, то P — абелева группа и $P = [P, t] \times C_P(t)$.

Значит, t централизует z. Пусть P_0 — поточечный стабилизатор в P подграфа Σ. Тогда Σ является графом Хофмана — Синглтона, иначе Σ — пятиугольник, $|P_0|$ делит 5 и $|P| \leq 25$, противоречие. Если $[P_0, t] \neq 1$, то t инвертирует элемент порядка 5 из $Z(P)$ и противоречие получается, как и в предыдущем абзаце. Значит, $P_0 \leq C_P(t)$ и в случае $|P_0| = 25$ инволюция t инвертирует P/P_0. Если y — неединичный элемент из P, инвертируемый t, то y централизует P_0, противоречие с леммой 2.3.

Итак, $|P_0| = 5$, и в случае $|P : P_0| = 5^2$ снова $P = [P,t] \times C_P(t)$. Поэтому $|P : P_0| = 5^3$, $C_P(t)$ — центральная в P подгруппа порядка 25 и $P = [P,t] \times \langle z\rangle$. Теперь для любого элемента z' порядка 5 из $Z(P) - (P' \cup \langle z\rangle)$ подграф $\mathrm{Fix}(z') = \Sigma'$ является графом Хофмана — Синглтона, не пересекающим Σ (группа $Z(P)/\langle z\rangle$ действует на Σ без неподвижных точек). Противоречие с тем, что $b, b^g \in \Sigma \cap \Sigma'$. Таким образом, $O(G) = [O(G), t] \times C_{O(G)}(t)$.

Пусть $O(G) \neq [O(G), t] \times C_{O(G)}(t)$. Тогда t инвертирует элементарную абелеву подгруппу X порядка 25, по утверждению (1) X содержит точно 5 подгрупп Y_i таких, что $|\mathrm{Fix}(Y_i)| = 5$, $\Delta = a^X \cup \mathrm{Fix}(Y_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Fix}(Y_5)$ является графом Хофмана-Синглтона и $|G| = 250$.

Пусть $X, U, Q_1, Q_1^t, Q_2, Q_2^t$ — все максимальные подгруппы из P, R_i — подгруппы порядка 5 из Q_i, не лежащие в X, $\beta_i = |\mathrm{Fix}(R_i) \cap X_0|$. Тогда P действует полурегулярно на множестве из $700 - 10\beta_1 - 10\beta_2 - 5|\mathrm{Fix}(W) \cap X_0|$ вершин в X_0, поэтому $140 - 2\beta_1 - 2\beta_2 - |\mathrm{Fix}(W) \cap X_0|$ делится на 25. Если $\mathrm{Fix}(W)$ — граф Хофмана — Синглтона, то $\mathrm{Fix}(W)$ содержит 25 вершин из X_1 и 20 из X_0. В этом случае $120 - 2\beta_1 - 2\beta_2$ делится на 25 и $2500 - 125 - 10(|\mathrm{Fix}(R_1)| - \beta_1 + |\mathrm{Fix}(R_2)| - \beta_2)$ делится на 125. Отсюда $|\mathrm{Fix}(R_i)| = \beta_i = 5$.

Если $\mathrm{Fix}(W)$ — пятиугольник, то $70 - \beta_1 - \beta_2$ делится на 25 и $2500 - 125 - 10(|\mathrm{Fix}(R_1)| - \beta_1 + |\mathrm{Fix}(R_2)| - \beta_2)$ делится на 125. Поэтому $\beta_1 + \beta_2 + 5$ делится на 25, противоречие с тем, что $\beta_1 + \beta_2 - |\mathrm{Fix}(R_1)| - |\mathrm{Fix}(R_2)|$ делится на 25 и $|\mathrm{Fix}(R_1)| + |\mathrm{Fix}(R_2)| \in \{10, 55, 100\}$. □

Лемма 3.4. *Пусть $G = Y\langle t\rangle \times X$, где Y — циклическая группа, инвертируемая t. Тогда $|Y|$ делит $7, 19$ или 55, $|X|$ делит $7, 25, 27$ или 55, и если $X \neq 1$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $\mathrm{Fix}(X)$ — *звезда*, $|X| = 7$ *и* $Y = 1$;

(2) $\mathrm{Fix}(X)$ — *пятиугольник*, $|Y|$ *делит* 5, *либо* $\mathrm{Fix}(x)$ — *граф Хофмана — Синглтона для некоторого элемента x порядка 5 из X и* $|X : \langle x\rangle| \in \{5, 11\}$, *либо* $\mathrm{Fix}(x) = \mathrm{Fix}(X)$ *для любого неединичного элемента x из X и* $|X|$ *делит* 55;

(3) $\mathrm{Fix}(X)$ — *граф Петерсена*, $|X|$ *делит* 27, $|Y|$ *делит* 5 *и, если* $Y \neq 1$, *то* $\mathrm{Fix}(Y)$ *является пустым графом*;

(4) $\mathrm{Fix}(X)$ — *граф Хофмана — Синглтона*, $|X|$ *делит* 25, $|Y|$ *делит* 5 *или* 7 *и, если* $|Y| = 5$, *то* $\mathrm{Fix}(Y)$ *является пустым графом или пятиугольником, а если* $|Y| = 7$, *то* $\mathrm{Fix}(Y)$ *является звездой на* 51 *вершине.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) следует из лемм 3.1 и 3.2.

Пусть $X \neq 1$. Тогда $\mathrm{Fix}(X)$ является графом Мура или звездой. Если $\mathrm{Fix}(X)$ — звезда, то $|X| = 7$, и если $Y \neq 1$, то порядок группы Y равен 5 или 7. Но в этом случае центр a звезды $\mathrm{Fix}(X)$ принадлежит $\mathrm{Fix}(Y)$, противоречие с тем, что группа Y сдвигает вершину a. Утверждение (1) выполняется.

Пусть $\mathrm{Fix}(X)$ — пятиугольник. Тогда порядок группы Y делит 5, 7 или 11. Но если $|Y| \in \{7, 11\}$, то $\mathrm{Fix}(X) \subseteq \mathrm{Fix}(Y)$, противоречие с тем, что инволюция t действует как транспозиция на $[a]$. Если $|Y| = 5$, то Y точно действует на $\mathrm{Fix}(X)$. Если X содержит такой неединичный элемент x, что $\Delta = \mathrm{Fix}(x)$ не содержится в $\mathrm{Fix}(X)$, и X_0 — поточечный стабилизатор Δ, то по лемме 1.2 Δ является графом Хофмана — Синглтона и либо $|X : X_0| = 5$, либо $X = X_0L$, $|X_0| = 5$, L — нормальная в X подгруппа, $|L|$ делится на 11 и делит 55.

Если же для любого неединичного элемента $x \in X$ получим $\mathrm{Fix}(x) = \mathrm{Fix}(X)$, то $|X|$ делит 55. Утверждение (2) выполняется.

Если $\mathrm{Fix}(X)$ — граф Петерсена, то $|X|$ делит 27 и, если $Y \neq 1$, то $|Y| = 5$ и $\mathrm{Fix}(Y)$ является пустым графом. Утверждение (3) выполняется.

Если $\mathrm{Fix}(X)$ является графом Хофмана — Синглтона, то $|X|$ делит 25 и, если $Y \neq 1$, то ввиду леммы 2.9 порядок группы Y равен 5 или 7. В случае $|Y| = 5$ подграф $\mathrm{Fix}(Y)$ является пустым графом или пятиугольником, а в случае $|Y| = 7$ — звездой на 51 вершине. Утверждение (4) выполняется. □

4. Группа автоморфизмов графа Ашбахера, нечетный случай

Пусть группа автоморфизмов G графа Ашбахера имеет нечетный порядок. Из лемм 2.1–2.8 следует, что $|G|$ делит $3^3 5^\gamma 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19$.

Лемма 4.1. *Если Q — силовская 5-подгруппа из G, $|Q| = 5^\gamma$, z — элемент порядка 5 из $Z(Q)$ и $\Sigma = \mathrm{Fix}(z)$, то выполняется одно из утверждений*:

(1) Σ — *граф Хофмана — Синглтона и* $\gamma \le 4$;

(2) Σ — *пятиугольник и* $\gamma \le 2$;

(3) *каждый неединичный элемент из* Q *действует без неподвижных точек на* Γ *и* $\gamma \le 3$;

(4) *каждый неединичный элемент из* $Z(Q)$ *действует без неподвижных точек на* Γ, *но для некоторого элемента* f *порядка* 5 *из* Q *подграф* $\mathrm{Fix}(f)$ *не пуст, и* $\gamma \le 4$.

Доказательство. Пусть Σ — граф Хофмана — Синглтона, $X_i = X_i(\Sigma)$ и $x_i = |X_i|$. Тогда $x_1 = 2500, x_0 = 700$. Если порядок поточечного стабилизатора Q_0 подграфа Σ в Q равен 25, то по лемме 2.3 имеем $C_Q(Q_0) = Q_0$ и $\gamma \le 3$. Если же $|Q_0| = 5$, то $|Q : Q_0|$ делит 125 и $\gamma \le 4$ (по строению группы автоморфизмов графа Хофмана — Синглтона Q является расширением группы порядка 5 с помощью подгруппы из неабелевой группы порядка 5^3).

Если Σ — пятиугольник, то порядок поточечного стабилизатора Q_0 подграфа Σ в Q равен 5 и $\gamma \le 2$.

Пусть Σ — пустой граф. Если каждый неединичный элемент из Q действует без неподвижных точек на Γ, то $\gamma \le 3$.

Допустим, что каждый элемент из $Z(Q)$ действует без неподвижных точек на Γ и некоторый элемент f порядка 5 из Q имеет неподвижные точки. Если $\Delta = \mathrm{Fix}(f)$ — пятиугольник, то поточечный стабилизатор подграфа Δ в Q совпадает с $\langle f \rangle$ и $|C_Q(f)| = 25$. Если Δ — граф Хофмана — Синглтона, то ввиду леммы 2.3 поточечный стабилизатор Q_0 подграфа Δ в Q совпадает с $\langle f \rangle$.

Пусть Δ является графом Хофмана — Синглтона и $C_Q(f)$ содержит элемент h такой, что $\Sigma = \mathrm{Fix}(h) \cap \Delta$ является пятиугольником. Тогда $\mathrm{Fix}(h)$ допускает группу $\langle Z(Q), f, h \rangle$ и $\mathrm{Fix}(h)$ — граф Хофмана — Синглтона. Из действия группы $\langle f, h \rangle$ на $[a]$ для $a \in \Sigma$ следует, что каждая подгруппа порядка 5 из $\langle f, h \rangle$ фиксирует поточечно подграф Хофмана — Синглтона. Теперь группа $\langle Z(Q), f, h \rangle$ действует полурегулярно на множестве из $3200 - 5 \cdot 45 - 24 \cdot 50$ вершин. Противоречие с тем, что $3200 - 5 \cdot 45 - 24 \cdot 50 = 25(128 - 9 - 48)$ не делится на 125.

Итак, если Δ является графом Хофмана — Синглтона, то $C_Q(f)/\langle f \rangle$ действует без неподвижных точек на Δ и $|C_Q(f)|$ делит 125. Пусть $|Z(Q)| = 25$. Тогда для любого элемента x порядка 5 из Q подграф $\mathrm{Fix}(x)$ является графом Хофмана — Синглтона и Q действует без неподвижных точек на $3250 - 50\beta$ вершинах, где β — число подгрупп порядка 5 из Q, имеющих неподвижные точки на Γ. Если $|Q| \ge 5^5$, то $\beta = 65$ и Γ допускает разбиение на подграфы Хофмана — Синглтона. Но в этом случае можно считать, что число подгрупп, сопряженных с $\langle f \rangle$ в группе Q, равно 5 и $|Q| = 5^4$, противоречие. Значит, $|Q| = 5^4$ и $\beta \in \{15, 40, 65\}$.

Пусть $|Z(Q)| = 5$ и U — нормальная в Q нециклическая подгруппа порядка 25. Тогда группа $Q_0 = C_Q(U)$ имеет нециклический центр и $|Q : Q_0| = 5$. По доказанному $|Q_0|$ делит 5^4.

Допустим, что $|Q| = 5^5$. Тогда каждая подгруппа порядка 5 из U действует без неподвижных точек на Γ. Далее, Q действует без неподвижных точек на $3250 - 50\beta - 5\delta$ вершинах, где β — число подгрупп порядка 5 из Q, поточечно фиксирующих подграф Хофмана — Синглтона, а δ — число подгрупп порядка 5 из Q, поточечно фиксирующих пятиугольники. Так как подгруппа порядка 5 из Q, поточечно фиксирующая пятиугольник, имеет 125 сопряженных с ней в Q подгрупп, то $\delta = 125\delta'$, $3250 - 50\beta - 5\delta = 125(26 - 2\beta/5 - 5\delta')$ и $26 - 2\beta/5 - 5\delta'$ делится на 25.

Пусть β' — число подгрупп порядка 5 из Q_0, поточечно фиксирующих подграф Хофмана — Синглтона. Как показано выше, имеем $\beta' \in \{15, 40, 65\}$. В любом случае некоторая подгруппа $\langle f\rangle$ порядка 5 из Q_0, поточечно фиксирующая подграф Хофмана — Синглтона, имеет в Q пять сопряженных подгрупп и $|C_Q(f)| = 5^4$, противоречие. $\square$

Лемма 4.2. *Если* 19 *делит* $|G|$, *то* $G = G_w$ *для подходящей вершины* w *и* G — *расширение группы порядка* 19 *с помощью циклической группы порядка, делящего* 9.

Доказательство. Допустим, что $g \in G$ и $|g| = 19$. Тогда $\mathrm{Fix}(g) = \{w\}$ для подходящей вершины w. Далее, $C_G(g) = \langle g\rangle$ и $|N_G(\langle g\rangle) : C_G(g)|$ делит 9. В самом деле, если f — элемент простого порядка $r < 19$ из $C_G(g)$, то $w^f = w$ и из лемм 2.1–2.6 следует, что $|\mathrm{Fix}(f)| > 1$ и $\mathrm{Fix}(f) \subseteq \mathrm{Fix}(g)$.

Для любого простого числа r из $\pi(G)$ найдется силовская r-подгруппа R, перестановочная с $\langle g\rangle$. Из утверждений, доказанных в предыдущем абзаце, следует, что если $r \neq 3$, то g нормализует R. Так как 19 не делит $5^i - 1$ для $1 \le i \le 4$, то g централизует R, противоречие.

Итак, G — расширение $\langle g\rangle$ с помощью циклической группы P, $|P|$ делит 9. $\square$

Лемма 4.3. *Если* 13 *делит* $|G|$, *то* G — *подгруппа из циклической группы порядка* 65 *и любой неединичный элемент из* G *действует без неподвижных точек на* Γ.

Доказательство. Допустим, что $g \in G$ и $|g| = 13$. Тогда $\mathrm{Fix}(g)$ — пустой граф. Если f — элемент простого порядка, меньшего 13, из $C_G(g)$, то по лемме 2.9 граф $\mathrm{Fix}(f)$ пуст, $|f| = 5$ и $\alpha_1(f) = 195u+65$. Так как 13 не делит 5^i-1 для $1 \le i \le 3$, то g централизует силовскую 5-подгруппу Q из $C_G(f)$. Если $|Q| > 5$, то $|Q| = 25$ и $\alpha_1(f) = 65(15s+10)$. Если h — элемент порядка 25 из $C_G(g)$, то $\alpha_1(h) = 65(15t+10)$ и для $i \in \{1,2,3,4,6,7,8,9\}$ имеем $\alpha_1(h^i) \ge 650$, противоречие с тем, что $\sum \alpha_1(h^i) \le 3250$. Если Q — элементарная абелева группа порядка 25, то Q содержит 6 подгрупп $\langle f_i\rangle$ и $\alpha_1(f_i) \ge 650$, противоречие с тем, что $\sum \alpha_1(f_i) \le 3250$.

Для любого простого числа r из $\pi(G)$ найдется силовская r-подгруппа R, перестановочная с $\langle g\rangle$. Из утверждений, доказанных в предыдущем абзаце, следует, что если $r \neq 3$, то g нормализует R. Так как 13 не делит $5^i - 1$ для $1 \le i \le 3$, то либо g централизует R, либо R — элементарная абелева группа порядка 5^4. В последнем случае имеем противоречие с леммой 4.1.

Если $|N_G(\langle g\rangle)|$ делится на 3, то $\alpha_1(g)$ делится на 3, иначе подгруппа P порядка 3 из $N_G(\langle g\rangle)$ поточечно фиксирует 13-угольник. Противоречие с тем, что $\alpha_1(g) = 195y + 65$. $\square$

Лемма 4.4. *Если* 11 *делит* $|G|$, *то выполняются следующие утверждения*:

(1) G — *расширение циклической группы порядка* 11 *с помощью элементарной абелевой группы* U *порядка, делящего* 25;

(2) *если* $|U| = 25$, *то* U *содержит такую подгруппу* U_0 *порядка* 5, *что* $\mathrm{Fix}(g) \subseteq \mathrm{Fix}(U_0)$, *и либо* $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(U_0)$ *и* U *содержит еще* 4 *подгруппы* U_i *порядка* 5 *такие, что* $|\mathrm{Fix}(U_i)| = 5$, *либо* $\mathrm{Fix}(U_0)$ *является графом Хофмана — Синглтона,* $C_U(g)$ *действует без неподвижных точек на* Γ, *и число подгрупп* U_i *порядка* 5 *из* U *таких, что* $|\mathrm{Fix}(U_i)| = 5$, *равно* 0.

Доказательство. Допустим, что $g \in G$ и $|g| = 11$. Тогда 121 не делит $|G|$ и $\mathrm{Fix}(g)$ — пятиугольник. Если f — элемент простого порядка, меньшего 11, из $C_G(g)$, то по лемме 2.9 имеем $|f| = 5$ и либо f точно действует на $\mathrm{Fix}(g)$, не имеет неподвижных точек и $\alpha_1(f) = 165u + 110$, либо $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(f)$ и $\alpha_1(f) = 165u + 55$. Так как 11 не делит $5^i - 1$ для $1 \le i \le 3$, то g централизует силовскую 5-подгруппу Q из $C_G(f)$.

Пусть подгруппа U порядка 25 из G нормализует $\langle g\rangle$. Тогда по лемме 2.5 имеем $\alpha_1(g) = 550$, и Γ имеет ровно 45 кокликовых $\langle g\rangle$-орбит длины 11. Заметим, что U содержит такую подгруппу U_0 порядка 5, что $\mathrm{Fix}(g) \subseteq \mathrm{Fix}(U_0)$. Если $\mathrm{Fix}(g) = \mathrm{Fix}(U_0)$, то U содержит еще 4 подгруппы U_i порядка 5 такие, что $|\mathrm{Fix}(U_i)| = 5$. Если же $\mathrm{Fix}(g) \neq \mathrm{Fix}(U_0)$, то $\mathrm{Fix}(U_0)$ — граф Хофмана — Синглтона, $C_U(g)$ действует без неподвижных точек на Γ, и число подгрупп U_i порядка 5 из U таких, что $|\mathrm{Fix}(U_i)| = 5$, равно 0.

Для любого простого числа r из $\pi(G)$ найдется силовская r-подгруппа R, перестановочная с $\langle g\rangle$. Из утверждений, доказанных в предыдущем абзаце, следует, что если $r \neq 3$, то g нормализует R. Так как 11 не делит 3^i-1 для $1 \leq i \leq 3$, то g централизует R. $\square$

Лемма 4.5. *Если 7 делит $|G|$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G — подгруппа прямого произведения циклической группы порядка 7 и элементарной абелевой группы U порядка, делящего 25, в случае $U \neq 1$ подграф $\mathrm{Fix}(U)$ является графом Хофмана — Синглтона*;

(2) *G — группа Фробениуса порядка 21.*

Доказательство. Допустим, что $g \in G$ и $|g| = 7$. По лемме 2.4 число 49 не делит $|G|$, $\mathrm{Fix}(g)$ — звезда на $58-7y$ вершинах и $\alpha_1(g)+4y-6$ делится на 15.

Если f — элемент простого порядка, меньшего 7, из $C_G(g)$, то по лемме 2.9 имеем $|f| = 5$, подграф $\mathrm{Fix}(g)$ является звездой на 16 или на 51 вершине (число y равно 6 и 1 соответственно), $\Delta = \mathrm{Fix}(f)$ является графом Хофмана — Синглтона и $\alpha_1(f) = 105u+35$. Так как 7 не делит 5^i-1 для $1 \leq i \leq 3$, то g централизует силовскую 5-подгруппу U из $C_G(f)$. Если $|U| > 5$, то $|\mathrm{Fix}(g)| = 51$, $|U| = 25$, U — поточечный стабилизатор подграфа Δ и $\alpha_1(f) = 525s+350$.

Для любого простого числа r из $\pi(G)$ найдется силовская r-подгруппа R, перестановочная с $\langle g\rangle$. Из утверждений, доказанных в предыдущем абзаце, следует, что если $r \neq 3$, то g нормализует R. Так как 7 не делит 5^i-1 для $1 \leq i \leq 4$, то g централизует R.

Если $|N_G(\langle g\rangle)|$ делится на 3, то $\alpha_1(g)$ делится на 3, иначе подгруппа P порядка 3 из $N_G(\langle g\rangle)$ поточечно фиксирует 7-угольник. Отсюда $\alpha_1(g) = 21w, y = 3z$ и $7w+4z-2$ делится на 5. Если $|C_G(g)|$ делится на 5, то $y = 6$, $|Q| = 5$, P централизует Q и фиксирует ребро из $\mathrm{Fix}(Q)$. Противоречие с действием Q на $\mathrm{Fix}(P)$. $\square$

Лемма 4.6. *Если $\pi(G) \subseteq \{3,5\}$, то выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *G — группа порядка, делящего 5^4*;

(2) *G — подгруппа из прямого произведения группы порядка 5, действующей без неподвижных точек на Γ, и группы порядка 27*;

(3) *либо G — группа Фробениуса порядка 75 или порядка $5^4 3$, либо $|Z(G)| = 5$ и $G/Z(G)$ — группа Фробениуса порядка 75.*

Доказательство. Пусть $\pi(G) \subseteq \{3,5\}$. Если G является 3-группой, то по лемме 2.9 выполняется утверждение (1).

Если G является 5-группой, то по лемме 4.1 выполняется утверждение (2).

Пусть $\pi(G) = \{3,5\}$. Так как 5 не делит $|\mathrm{GL}(3,3)|$, то некоторая силовская 3-подгруппа P из G нормализует силовскую 5-подгруппу Q из G. Если в G нет элементов порядка 15, то G — группа Фробениуса, $|Q| \in \{5^2, 5^4\}$ и $|P| = 3$.

Пусть элемент g порядка 5 из Q централизует элемент f порядка 3 из P. Тогда $\langle g\rangle = C_Q(f)$ и $C_P(f)$ централизует g. По лемме 2.9 подграф $\mathrm{Fix}(g)$ пуст. Далее, f действует без неподвижных точек на $U/\langle g\rangle$, где $U = C_Q(g)$. Если $|U| > 5$, то $U/\langle g\rangle$ — элементарная абелева группа порядка 25, и $|P| = 3$. Если же $|P| > 3$, то $|Q| = 5$. Выполняется утверждение (3). $\square$

Из результатов разд. 3 и 4 следует теорема 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Damerell R.M.** On Moore graphs // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1973. Vol. 74. P. 227–236.
2. **Aschbacher M.** The nonexistence of rank three permutation groups of degree 3250 and subdegree 57 // J. Algebra. 1971. Vol. 19, no. 3. P. 538–540.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах графа Ашбахера // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 2. С. 125–134.
4. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // Europ. J. Comb. 1993. Vol. 14, iss. 5. P. 397–407.

5. **Cameron P.** Permutation groups // London Math. Soc. Stud. Texts. Vol. 45. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1999. 220 p.
6. **Cameron P., Van Lint J.** Designs, graphs, codes and their links // London Math. Soc. Stud. Texts. Vol. 22. Cambridge: Cambr. Univ. Press, 1989. 240 p.

Поступила 10.12.2008

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
зав. отделом
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р. физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: paduch@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 517.982.272+515.122.55

К ВОПРОСУ О СОВПАДЕНИИ МНОЖЕСТВЕННО-ОТКРЫТОЙ И РАВНОМЕРНОЙ ТОПОЛОГИЙ[1]

С. Э. Нохрин, А. В. Осипов

Изучается свойство $\mathbb{R}$-компактности и устанавливаются критерии совпадения множественно-открытой топологии и топологии равномерной сходимости на пространствах непрерывных функций.

Ключевые слова: пространство непрерывных функций, множественно-открытая топология, топология равномерной сходимости на семействе множеств.

S. N. Nokhrin, A. V. Osipov. On the coincidence of the set-open and uniform topologies.

The $\mathbb{R}$-compactness property is studied and criteria are established for the coincidence of the set-open topology and the topology of uniform convergence on the spaces of continuous functions.

Keywords: space of continuous functions, set-open topology, topology of uniform convergence on a family of sets.

Введение

Пусть X — тихоновское пространство. На множестве $C(X)$ всех вещественнозначных функций на X рассмотрим три классические топологии: топологию равномерной сходимости, топологию поточечной сходимости и компактно-открытую топологию.

Топология равномерной сходимости задается базой в каждой точке $f \in C(X)$. Эта база состоит из всех множеств $\big\{g \in C(X) : \sup\{|g(x) - f(x)|\} < \varepsilon,\ x \in X\big\}$. Естественным обобщением этой топологии является топология равномерной сходимости на элементах семейства λ (λ-топология), где λ — фиксированное семейство непустых подмножеств множества X. Базу λ-топологии в точке $f \in C(X)$ образуют все множества вида $\{g \in C(X) :\ \exists\, a < \varepsilon \,\forall\, x \in F\ |f(x) - g(x)| \leqslant a\}$, где $F \in \lambda$, $\varepsilon > 0$.

Если в качестве семейства λ взять все конечные подмножества множества X, то получившаяся топология называется топологией поточечной сходимости; если все компактные подмножества множества X — топологией равномерной сходимости на компактах, или компактно-открытой топологией. Компактно-открытую топологию впервые определил Р. Фокс [5] как топологию, предбазу которой образуют все множества вида $\{f \in C(X) :\ f(F) \subseteq U\}$, где F — компактное подмножество из X, U — открытое подмножество числовой прямой. Заметим, что топология поточечной сходимости может быть определена похожим образом: заменой в определении предбазы компактных подмножеств конечными.

Обобщением компактно-открытой топологии и топологии поточечной сходимости является множественно-открытая топология на семействе λ непустых подмножеств множества X (λ-открытая топология), введенная впервые Р. Аренсом и Ж. Дугунджи [4]. Предбазу λ-открытой топологии образуют все множества вида $\{f \in C(X) :\ f(F) \subseteq U\}$, где $F \in \lambda$, а U — открытое подмножество числовой прямой.

В результате при заданном семействе λ подмножеств множества X на $C(X)$ возникают две топологии: λ-топология и λ-открытая топология. В общем случае эти топологии различны. В случае, когда λ состоит из компактных подмножеств множества X, взаимосвязи этих топологий исследовались Р.А. Маккоем и И. Нтанту [6].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00139-а) и программы Отделения математических наук РАН.

В настоящей работе решается вопрос совпадения λ-открытой и равномерной на семействе λ топологий, где λ — произвольное семейство подмножеств множества X.

1. Основные определения и обозначения

В работе рассматривается пространство $C(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций, определенных на тихоновском пространстве X. Через λ обозначается семейство непустых подмножеств множества X. Для различных топологических пространств на множестве $C(X)$ используются следующие обозначения:

$C_\lambda(X)$ для множественно-открытой топологии;

$C_{\lambda,u}(X)$ для равномерной на семействе λ топологии;

$C_p(X)$ для топологии поточечной сходимости;

$C_c(X)$ для компактно-открытой топологии.

В случае, когда рассматривается множество непрерывных функций из топологического пространства X в метрическое пространство Y, соответствующие топологические пространства будут обозначаться через $C_\lambda(X,Y)$, $C_{\lambda,u}(X,Y)$, $C_p(X,Y)$ и $C_c(X,Y)$.

Элементы стандартных предбаз λ-открытой и λ-топологии будем обозначать следующим образом:

$\langle F, U\rangle = \{f \in C(X):\ f(F) \subseteq U\}$,

$\langle f, F, \varepsilon\rangle = \{g \in C(X):\ \exists a < \varepsilon\, \forall x \in F |f(x) - g(x)| \leqslant a\}$.

Если X и Y — два топологических пространства, то запись $X \geqslant Y$ $(X > Y,\ X = Y)$ означает, что X и Y совпадают как множества, и топология на X сильнее или равна (строго сильнее, равна) топологии на Y.

Замыкание множества A будем обозначать как $\overline{A}$, символом $\varnothing$ обозначаем пустое множество. Если $A \subseteq X$, а $f \in C(X)$ (или $f \in C(X,Y)$), то через $f|_A$ обозначаем сужение функции f на множество A. Как обычно, $f(A)$ и $f^{-1}(A)$ — соответственно образ и полный прообраз множества A при отображении f. Напомним, что нуль-множеством называется подмножество X, являющееся полным прообразом нуля для некоторой функции из $C(X)$.

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел, через $\mathbb{R}$ — числовая прямая в естественной топологии, $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $D(\tau)$ — дискрет мощности τ, $D = \{0, 1\}$ — дискретное двоеточие.

Остальные обозначения можно найти в [3].

2. $\mathbb{R}$-компактные множества и их свойства

В [6] был получен следующий результат.

Предложение 1 [6, теорема 1.2.3]. *Если семейство λ состоит из компактных множеств, то ${}_{\lambda,u}(X,Y) \geqslant C_\lambda(X,Y)$. Если дополнительно λ наследственно замкнуто (т. е. вместе с каждым своим элементом содержит все его замкнутые подмножества), то эти топологии совпадают.*

В случае $Y = \mathbb{R}$ предложение 1 можно усилить; для этого потребуется следующее понятие, введенное М.О. Асановым.

О п р е д е л е н и е [1]. Подмножество A пространства X называется $\mathbb{R}$-*компактным*, если для любой непрерывной на X вещественнозначной функции f множество $f(A)$ компактно в $\mathbb{R}$.

Заметим, что в случае $A = X$ свойство множества A быть $\mathbb{R}$-компактным совпадает с псевдокомпактностью пространства X.

Ранее первым автором был получен следующий результат.

Предложение 2 [2]. *$C_{\lambda,u}(X) \geqslant C_\lambda(X)$ тогда и только тогда, когда λ состоит из $\mathbb{R}$-компактных множеств.*

Предложение 2 показывает, что $\mathbb{R}$-компактность является существенным свойством при рассмотрении вопросов о совпадении топологий на пространствах функций. Рассмотрим некоторые свойства $\mathbb{R}$-компактных множеств. Очевидно следующее

Утверждение 1. *Любой компакт $\mathbb{R}$-компактен в любом пространстве X. Любое замкнутое подмножество счетно компактного пространства $\mathbb{R}$-компактно.*

Не всякое $\mathbb{R}$-компактное подмножество компактного пространства замкнуто.

Пример 1. Пусть X — пространство всех ординалов, меньших или равных ω_1, и A — подмножество всех счетных ординалов из X. Для любой функции $f \in C(X)$ существует счетный ординал α такой, что $f(\beta) = f(\omega_1)$ при всех $\beta > \alpha$. Отсюда $f(A) = f(X)$ — компакт, т. е. A является $\mathbb{R}$-компактным. Однако оно не замкнуто в X.

Утверждение 2. *Замыкание $\mathbb{R}$-компактного множества $\mathbb{R}$-компактно.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq X$ — $\mathbb{R}$-компактное множество и f — произвольная функция из $C(X)$. Покажем, что $f(\overline{A}) = f(A)$. Пусть это не так, и существует точка $y \in f(\overline{A}) \setminus f(A)$. Пусть $y = f(x)$, где $x \in \overline{A}$. Так как $f(A)$ компактно, $\mathbb{R} \setminus f(A)$ — открытое множество, содержащее y. Тогда $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus f(A))$ — окрестность точки x, не пересекающаяся с A. Это противоречит тому, что $x \in \overline{A}$. Утверждение доказано.

Пример 2. Пусть $X = D(\tau) \cup \{a\}$ — александровская компактификация дискрета $D(\tau)$ мощности $\tau > \omega_0$. Покажем, что все несчетные подмножества пространства X будут $\mathbb{R}$-компактны. Действительно, пусть $A \subseteq X$ и A несчетно. Пусть $f \in C(X)$ и $f(a) = y$. Тогда для любой окрестности Oy множество $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus Oy)$ конечно, поэтому $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{y\})$ не более чем счетно и $f(A) \ni y$. Кроме того, $f(X)$ — последовательность, сходящаяся к y, поэтому любое подмножество множества $f(X)$, содержащее y, есть компакт. Значит, $f(A)$ — компакт, и A является $\mathbb{R}$-компактным множеством.

Следующие примеры показывают, что $\mathbb{R}$-компактность не сохраняется при пересечениях и переходе к замкнутому подмножеству.

Пример 3. Пусть $X = D(\tau) \cup \{a\}$ — александровская компактификация дискрета $D(\tau)$ мощности $\tau > \omega_0$, A и B — несчетные подмножества множества $D(\tau)$, пересекающиеся по счетному множеству. Подмножества A и B являются $\mathbb{R}$-компактными (см. пример 2). Пусть $A \cap B = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Рассмотрим функцию $f : X \mapsto R$ такую, что $f(x_i) = 1/i$ при всех $i \in \mathbb{N}$ и $f(x) = 0$, если $x \notin A \cap B$. Очевидно, f непрерывна и $f(A \cap B) = \{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ не компактно.

Пример 4. Пусть $\mathbb{N} = D(\omega_0)$ — счетный дискрет, $\{P_s : s \in S\}$ — максимальное по включению семейство почти дизъюнктных подмножеств из $\mathbb{N}$. Положим $X = \mathbb{N} \cup \{a_s : s \in S\}$. Топология на X такова: все точки из $\mathbb{N}$ изолированные, а базисная окрестность в точке a_s имеет вид $\{a_s\} \cup \{P_s \setminus K\}$, где K — произвольное конечное подмножество из P_s. Получилось пространство, известное как пространство Мрувки — Исбела. Оно псевдокомпактно (см., например, [3, 3.6.I.]).

Множество $A = \{a_s : s \in S\}$ $\mathbb{R}$-компактно. Действительно, пусть $f \in C(X)$. Тогда $f(X)$ — компакт, и нам достаточно показать, что $f(A)$ замкнуто. Возьмем произвольную точку $y \in \overline{f(A)}$. Так как $\mathbb{N}$ всюду плотно в X, найдется последовательность $T = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ (где $b_i \in \mathbb{N}$) такая, что последовательность $\{f(b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к y. Существует такое подмножество P_s, что $P_s \cap T$ — бесконечное множество (в противном случае, добавив множество T к семейству $\{P_s :$

$s \in S\}$, получим большее почти дизъюнктное семейство; противоречие с максимальностью семейства $\{P_s : s \in S\}$). Тогда $f(a_s) = y$ в силу непрерывности функции f, т. е. $y \in f(A)$, что и требовалось доказать.

Пусть $B = \{a_{s_i} : i = 1, 2 \dots\}$ — произвольное счетное подмножество из A. Оно замкнуто в X, так как все множество A — замкнутый дискрет. Но B не $\mathbb{R}$-компактно. Построим функцию f таким образом: если $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(P_{s_i} \cup \{a_{s_i}\})$, то $f(x) = 0$; если $x \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(P_{s_i} \cup \{a_{s_i}\})$, то $f(x) = 1/i$, где i — наименьший номер такой, что $x \in P_{s_i} \cup \{a_{s_i}\}$. Легко видеть, что функция f непрерывна и $f(a_{s_i}) = 1/i$, поэтому $f(B)$ не компактно.

Утверждение 3. *Если A — $\mathbb{R}$-компактное подмножество в X и n — натуральное число, то A также $\mathbb{R}^n$-компактное множество (т. е. для любой непрерывной функции, отображающей X в $\mathbb{R}^n$, образ A является компактным подмножеством в $\mathbb{R}^n$).*

Доказательство. Пусть $f \in C(X, \mathbb{R}^n)$. Заметим, что проекция множества $f(A)$ на каждый из множителей есть компакт, поэтому $f(A)$ лежит в произведении компактов, так что достаточно доказать, что $f(A)$ замкнуто в $\mathbb{R}^n$. Пусть $y \in \overline{f(A)}$. Рассмотрим функцию $g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ такую, что $g(x)$ равно расстоянию от x до y в $\mathbb{R}^n$. Это непрерывная функция и $g^{-1}(0) = y$. Тогда $(g \circ f)(A)$ — компактное в $\mathbb{R}$ множество, и точка 0 лежит в его замыкании. Отсюда $0 \in (g \circ f)(A)$, $y \in f(A)$ и $f(A)$ замкнуто. Утверждение доказано.

Утверждение 4. *Пересечение $\mathbb{R}$-компактного множества и нуль-множества является $\mathbb{R}$-компактным множеством.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq X$ и $B \subseteq X$— соответственно $\mathbb{R}$-компактное множество и нуль-множество, функция $g \in C(X)$ такова, что $g^{-1}(0) = B$; f — произвольная функция из $C(X)$. Покажем, что $f(A \cap B)$ — компакт. Рассмотрим функцию $h: X \mapsto \mathbb{R}^2$ такую, что $h(x) = (f(x), g(x))$.

Функция h непрерывна, так как $h^{-1}(U \times V) = \{x \in X : f(x) \in U \text{ и } g(x) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. В силу утверждения 3 множество $h(A)$ является компактом. Рассмотрим $T = R \times \{0\}$ и покажем, что $h(A \cap B) = h(A) \cap T$. Действительно, если $y \in h(A \cap B)$, то $y \in h(A)$. Кроме того, существует точка $x \in A \cap B$ такая, что $y = h(x) = (f(x), g(x)) = (f(x), 0)$, т. е. $y \in T$. Наоборот, пусть $y \in h(A) \cap T$. Тогда $y = h(x) = (f(x), g(x))$ для некоторого $x \in A$. Так как $y \in T$, а $g(x) = 0$, то $x \in g^{-1}(0) = B$. Значит, $x \in A \cap B$ и $y \in h(A \cap B)$. Итак, множество $h(A \cap B) = h(A) \cap T$ — компакт как пересечение компакта с замкнутым множеством. Остается заметить, что $f(A \cap B)$ есть проекция множества $h(A \cap B)$ на T. Утверждение доказано.

3. Совпадение множественно-открытой и равномерной топологий

Теорема 1. *Пусть λ состоит из $\mathbb{R}$-компактных множеств и вместе с каждым своим элементом содержит все содержащиеся в нем $\mathbb{R}$-компактные множества. Тогда $C_{\lambda,u}(X) = C_\lambda(X)$.*

Доказательство. Неравенство $C_\lambda(X) \leqslant C_{\lambda,u}(X)$ доказано в предложении 2. Докажем, что $C_\lambda(X) \geqslant C_{\lambda,u}(X)$.

Возьмем произвольно $A \in \lambda$, $\varepsilon > 0$, $f \in C(X)$ и найдем окрестность Of функции f в топологии $C_\lambda(X)$, содержащуюся в множестве $\langle f, A, \varepsilon \rangle$. Тогда по условию $f(A)$ — компакт. Семейство интервалов $\{(y - \varepsilon/3; y + \varepsilon/3) : y \in f(A)\}$ — его открытое покрытие. Выделим из него конечное подпокрытие $\{(y_i - \varepsilon/3; y_i + \varepsilon/3)\}_{i=1}^n$. Тогда $f^{-1}([y_i - \varepsilon/3; y_i + \varepsilon/3])$ — нуль-множество как непрерывный прообраз отрезка; согласно утверждению 4 множество $A_i = f^{-1}([y_i - \varepsilon/3; y_i + \varepsilon/3]) \cap A$ является $\mathbb{R}$-компактным; по условию оно есть элемент семейства λ. Следовательно, множество $Of = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle A_i, (y_i - \varepsilon/2; y_i + \varepsilon/2) \rangle$ открыто в множественно-открытой топологии.

Покажем, что $f \in Of$. В самом деле, для любого номера $i \leqslant n$ и для любой точки $x \in A_i = f^{-1}([y_i - \varepsilon/3;\ y_i + \varepsilon/3]) \cap A$ выполняется $f(x) \in [y_i - \varepsilon/3;\ y_i + \varepsilon/3] \subseteq (y_i - \varepsilon/2;\ y_i + \varepsilon/2)$.

Покажем, что $Of \subseteq \langle f,\, A,\, \varepsilon \rangle$. Пусть $g \in Of$ и x — произвольная точка множества A. Выберем i так, что $x \in A_i$ $\bigl($это возможно, так как $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A\bigr)$. Так как $g \in Of$, то $g(x) \in g(A_i) \subseteq (y_i - \varepsilon/2;\ y_i + \varepsilon/2)$, т. е. $|g(x) - y_i| < \varepsilon/2$. По тем же соображениям $|f(x) - y_i| < \varepsilon/2$. Но тогда $|g(x) - f(x)| < \varepsilon$, т. е. $g \in \langle f,\, A,\, \varepsilon \rangle$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $C_\lambda(X) = C_{\lambda,u}(X)$. Тогда семейство λ состоит из $\mathbb{R}$-компактных множеств, и для любого элемента $A \in \lambda$ и любого $\mathbb{R}$-компактного подмножества B из A множества $\langle B, U \rangle$ и $\langle f, B, \varepsilon \rangle$ открыты в этих топологиях при любом открытом в R множестве U, любой функции $f \in C(X)$ и любом $\varepsilon > 0$ (т. е. можно полагать, что в семейство λ входят все $\mathbb{R}$-компактные подмножества его элементов).*

Доказательство. Пусть $A \in \lambda$, и B является $\mathbb{R}$-компактным подмножеством в A. Рассмотрим семейство $\lambda_1 = \lambda \cup \{B\}$. Ясно, что $C_\lambda(X) \leqslant C_{\lambda_1}(X)$. Согласно предложению 2 семейство λ состоит из $\mathbb{R}$-компактных множеств, значит, семейство λ_1 также состоит из $\mathbb{R}$-компактов и (снова по предложению 2) $C_{\lambda_1}(X) \leqslant C_{\lambda_1,\,u}(X)$. Хорошо известно, что равномерная топология на элементах семейства не меняется, если добавить к семейству любое подмножество любого элемента семейства. Поэтому $C_{\lambda_1,\,u}(X) = C_{\lambda,\,u}(X)$. По условию $C_{\lambda,\,u}(X) = C_\lambda(X)$. Получаем

$$C_\lambda(X) \leqslant C_{\lambda_1}(X) \leqslant C_{\lambda_1,\,u}(X) = C_{\lambda,\,u}(X) = C_\lambda(X),$$

т. е. все четыре топологии на $C(X)$ совпадают, откуда и следует утверждение теоремы.

Следствие 1. *Пусть λ — семейство подмножеств тихоновского пространства X. Тогда $C_\lambda(X) = C_{\lambda,u}(X)$ в том и только том случае, когда найдется состоящее из $\mathbb{R}$-компактных множеств семейство $\tilde\lambda \supseteq \lambda$ такое, что $C_\lambda(X) = C_{\tilde\lambda}(X)$ и $B \in \tilde\lambda$ для любого $\mathbb{R}$-компактного подмножества B из A, где $A \in \tilde\lambda$.*

Следствие 2. *Пусть семейство λ максимально по включению среди всех семейств, задающих одну и ту же множественно-открытую топологию на $C(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(а) $C_\lambda(X) = C_{\lambda,u}(X)$;

(б) *λ состоит из $\mathbb{R}$-компактных множеств, и $B \in \lambda$ для любого элемента $A \in \lambda$ и любого $\mathbb{R}$-компактного в X подмножества B из A.*

Следствие 3. *Пусть семейство λ состоит из компактных множеств и максимально по включению среди всех семейств, задающих одну и ту же множественно-открытую топологию на $C(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(а) $C_\lambda(X) = C_{\lambda,u}(X)$;

(б) *λ наследственно-замкнуто* (*т. е. вместе с каждым своим элементом содержит все его замкнутые подмножества*).

Следствие 4. *Пусть семейство λ состоит из конечных множеств и максимально по включению среди всех семейств, задающих одну и ту же множественно-открытую топологию на $C(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

(а) $C_\lambda(X) = C_{\lambda,u}(X)$;

(б) *λ — семейство всех конечных подмножеств некоторого подмножества Y из X.*

4. Совпадение топологий на $C(X, D(\tau))$

Если Y — метрическое пространство с метрикой ρ, λ — семейство подмножеств из X, то на множестве $C(X, Y)$ определены λ-топология и λ-открытая топология следующим образом (см. [6]).

Базу λ-топологии в точке $f \in C(X, Y)$ образуют все множества вида

$$\langle f, F, \varepsilon\rangle = \{g \in C(X, Y) : \exists a < \varepsilon \quad \forall x \in F \quad \rho(f(x), g(x)) \leqslant a\},$$

где $F \in \lambda$ и $\varepsilon > 0$.

Предбазу λ-открытой топологии образуют все множества вида

$$\langle F, U\rangle = \{f \in C(X, Y) : f(F) \subseteq U\},$$

где $F \in \lambda$ и U — открытое подмножество в Y.

Рассмотрим вопрос совпадения этих топологий в случае, когда Y — дискретное метрическое пространство ($\rho(y_1, y_2) = 1$ при любых $y_1 \neq y_2$ из Y).

Лемма 1. *Семейство всех множеств вида $\{g \in C(X, Y) : g|_A = f|_A\}$, где $A \in \lambda$, образует базу топологии $C_{\lambda,u}(X, Y)$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что при $\varepsilon < 1$ множества $\langle f, A, \varepsilon\rangle$ и $\{g \in C(X, Y) : g|_A = f|_A\}$ совпадают. Лемма доказана.

Утверждение 5. *Для любого тихоновского пространства X, любого семейства λ его подмножеств и произвольного дискретного метрического пространства Y выполняется соотношение $C_{\lambda,u}(X, Y) \geqslant C_\lambda(X, Y)$.*

Доказательство. Пусть $f \in \langle F; U\rangle$, где U открыто в Y. Тогда $f(F) \subseteq U$, поэтому $\{g \in C(X, Y) : g|_F = f|_F\} \subseteq \langle F; U\rangle$ и равномерная топология на λ сильнее множественно-открытой. Утверждение доказано.

По аналогии с $\mathbb{R}$-компактностью уместно ввести понятие Y-компактности.

Определение. Пусть $A \subseteq X$, Y — произвольное пространство. Будем говорить, что A является Y-компактным, если для любой непрерывной функции $f \in C(X, Y)$ множество $f(A)$ компактно в Y.

Заметим, что если Y конечно, то любое подмножество пространства X будет Y-компактным, а если Y — дискрет, то Y-компактность A означает, что образ A при любом непрерывном отображении из X в Y конечен.

Лемма 2. *Пусть Y — дискретное метрическое пространство и $C_\lambda(X, Y) \geqslant C_{\lambda,u}(X, Y)$. Тогда семейство λ состоит из Y-компактных множеств.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. существуют $F \in \lambda$ и $f \in C(X, Y)$ такие, что $f(F)$ бесконечно. По условию найдутся $n \in \mathbb{N}$, $F_i \in \lambda$ и открытые в Y множества U_i такие, что $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle F_i, U_i\rangle \subseteq \langle f, F, 1/2\rangle$. Выберем произвольное счетное подмножество $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ из $f(F)$. Каждому элементу y_i соответствует некоторый набор (возможно пустой) множеств U_j, которым y_i принадлежит. Так как число таких наборов конечно, а количество точек y_i бесконечно, найдутся две точки (без ограничения общности y_1 и y_2), которым соответствует один и тот же набор. Множества $A = f^{-1}(y_1)$ и $B = f^{-1}(y_2)$ открыто-замкнуты в X и пересекаются с F по непустому множеству. Рассмотрим функцию $g \in C(X, Y)$, совпадающую с f на множестве $X \setminus (A \cup B)$, равную y_1 на множестве B и y_2 на множестве A. Докажем, что $g \in \langle F_i, U_i \rangle$ для любого номера i. Пусть p — произвольная точка из F_i. Если $p \notin A \cup B$, то по построению $g(p) = f(p) \in f(F_i) \subseteq U_i$. Если же $p \in A \cup B$ (например, $p \in A$), то $g(p) = y_2$ и $f(p) = y_1 \in U_i$. В силу выбора y_1 и y_2 точка y_2 принадлежит U_i. Отсюда следует, что $g(p) \in U_i$. Имеем $g(F_i) \subseteq U_i$, т. е. $g \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle F_i, U_i \rangle$. Но по лемме 1 $\langle f, F, 1/2 \rangle = \{g \in C(X, Y) : g|_F = f|_F\}$, поэтому $g \notin \langle f, F, 1/2 \rangle$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 3. *Пусть Y — дискретное пространство. Тогда $C_\lambda(X, Y) = C_{\lambda,u}(X, Y)$ в том и только том случае, когда выполнены одновременно два условия*:

(1) *λ состоит из Y-компактных множеств*;

(2) *для любого элемента $F \in \lambda$ и любого открыто-замкнутого в X множества U такого, что $F \cap U \neq \varnothing$, найдутся элементы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ семейства λ такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \subseteq U$, и для любого открыто-замкнутого подмножества V из U такого, что $V \cap F \neq \varnothing$, выполняется соотношение $V \cap \big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i\big) \neq \varnothing$.*

Доказательство. *Необходимость.* В силу леммы 2 семейство λ состоит из Y-компактных множеств. Покажем выполнение условия (2).

Возьмем любой элемент $F \in \lambda$ и любое открыто-замкнутое подмножество U в X с условием $F \cap U \neq \varnothing$. Рассмотрим функцию $f \in C(X, Y)$, равную 0 на U и 1 на $X \setminus U$. Пусть Of — базисная окрестность функции f в равномерной топологии. Тогда $Of = \{g \in C(X, Y) : g|_F = f|_F\}$ согласно лемме 1. В силу совпадения топологий найдутся множества $F_1, F_2, \ldots, F_k$ из λ и открытые в Y множества $V_1, V_2, \ldots, V_k$ с условием $f \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \langle F_i, U_i \rangle \subseteq Of$. Без ограничения общности можно считать, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \subseteq f^{-1}(0) = U$ и $f(F_i) \ni 1$ для всех $i = n+1, n+2, \ldots k$. Тогда семейство $F_1, F_2, \ldots, F_n$ искомое. Действительно, возьмем произвольное открыто-замкнутое подмножество $V \subseteq U$ такое, что $V \cap F \neq \varnothing$. Существует функция $h \in C(X,Y)$, совпадающая с f на множестве $X \setminus V$ и тождественно равная 1 на множестве V. Так как в любой точке $x \in V \cap F$ выполняются равенства $f(x) = 0$ и $h(x) = 1$, то $h \notin Of$, и тем более $h \notin \bigcap\limits_{i=1}^{k} \langle F_i, U_i \rangle$. Значит, для некоторого номера $m \leqslant k$ выполнено $h \notin \langle F_m, U_m \rangle$. Заметим, что $F_m \cap V \neq \varnothing$, так как в противном случае $f|_{F_m} = h|_{F_m}$ и $h \in \langle F_m, U_m \rangle$; противоречие. Если $m > n$, то $U_m \ni 1$, а так как $F_m \cap U \neq \varnothing$, то $U_m \ni 0$ и $U_m \supset \{0, 1\}$, тогда $h \in \langle F_m, U_m \rangle$; противоречие. Поэтому $m \leqslant n$ и $V \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i) \supset V \cap F_m \neq \varnothing$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Неравенство $C_{\lambda,u}(X, Y) \geqslant C_\lambda(X, Y)$ выполняется в силу утверждения 5. Покажем обратное неравенство, для чего установим, что при условиях теоремы множество $\{g \in C(X, Y) : g|_A = f|_A\}$ открыто в множественно-открытой топологии для любых $f \in C(X, Y)$ и $A \in \lambda$. Нам достаточно доказать, что существует открытое в λ-открытой топологии множество W такое, что $f \in W \subseteq \{g \in C(X, Y) : g|_A = f|_A\}$. В силу Y-компактности A множество $f(A)$ компактно, а так как Y — дискретное пространство, $f(A)$ конечно. Пусть $f(A) = \{y_i\}_{i=1}^{n}$. Тогда семейство $\{f^{-1}(y_i)\}_{i=1}^{n}$ — дизъюнктное покрытие множества A, состоящее из открыто-замкнутых множеств. По условию (2) для любого $i \leqslant n$ существует конечный набор $\{\Phi_{i,j}\}$ из семейства λ такой, что $F_i = \bigcup\limits_{j} \Phi_{i,j} \subseteq f^{-1}(y_i)$ и для любого пересекающегося с A по непустому подмножеству открыто-замкнутого подмножества V из $f^{-1}(y_i)$ пересечение $V \cap F_i$ непусто. Заметим, что $\langle F_i, y_i \rangle = \big\langle \bigcup\limits_{j} \Phi_{i,j}, y_i \big\rangle = \bigcap\limits_{j} \langle \Phi_{i,j}, y_i \rangle$, и потому $\langle F_i, y_i \rangle$ открыто в λ-открытой топологии. Положим $W = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle F_i, y_i \rangle$. Очевидно, $f \in W$. Покажем, что

$W \subseteq \{g \in C(X, Y) : g|_A = f|_A\}$. Выберем произвольно $g \in W$ и $a \in A$. Так как $\{f^{-1}(y_i)\}_{i=1}^n$ — дизъюнктное покрытие множества A, существует номер k такой, что $a \in f^{-1}(y_k)$. Множество $V = g^{-1}(g(a)) \cap f^{-1}(y_k)$ — открыто-замкнутое, пересекающееся с A множество, поэтому $V \cap F_k \neq \varnothing$. Следовательно, $g(a) = y_k = f(a)$. Теорема доказана.

Следствие 5. $C_\lambda(X, \mathbb{N}) = C_{\lambda,u}(X, \mathbb{N})$ *тогда и только тогда, когда выполнены одновременно два условия*:

(1) λ *состоит из* $\mathbb{N}$*-компактных множеств*;

(2) *для любого элемента* $F \in \lambda$ *и любого открыто-замкнутого в* X *множества* U *такого, что* $F \cap U \neq \varnothing$, *найдутся элементы* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *семейства* λ *такие, что* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \subseteq U$, *и для любого открыто-замкнутого подмножества* V *из* U *такого, что* $V \cap F \neq \varnothing$, *выполняется соотношение* $V \cap \big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i\big) \neq \varnothing$.

Следствие 6. $C_{\lambda,u}(X, D) = C_\lambda(X, D)$ *тогда и только тогда, когда для любого элемента* $F \in \lambda$ *и любого открыто-замкнутого в* X *множества* U *такого, что* $F \cap U \neq \varnothing$, *найдутся элементы* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *семейства* λ *такие, что* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i \subseteq U$, *и для любого открыто-замкнутого подмножества* V *из* U *такого, что* $V \cap F \neq \varnothing$, *выполняется соотношение* $V \cap \big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i\big) \neq \varnothing$.

Следствие 7. *Пусть пространство* X *нульмерно, а семейство* λ *замкнуто относительно конечных объединений. Тогда* $C_{\lambda,u}(X, D) = C_\lambda(X, D)$ *тогда и только тогда, когда для любого открыто-замкнутого подмножества* U *из* X *найдется* $F \in \lambda$, *замыкание которого совпадает с множеством* $U \cap \big(\bigcup\limits_{F\in\lambda} F\big)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М.О.** Пространство непрерывных отображений: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1980. 72 с.
2. **Нохрин С.Э.** Пространство непрерывных функций в множественно-открытых топологиях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 1997. 90 с.
3. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир,1986. 754 с.
4. **Arens R., Dugundji J.** Topologies for functions spaces // Pac. J. Math. 1951. Vol. 1. C. 5–31.
5. **Fox R.H.** On topologis for function spaces// Bull. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 51. C. 429–432.
6. **McCoy R.A., Ntantu I.** Topological properties of spaces of continuous functions. Lect. Notes Math. Ser. 1325. Berlin: Springer-Verlag, 1988. 124 c.

Поступила 03.02.2009

Нохрин Сергей Эрнестович
канд. физ.-мат. наук
научн. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: varyag2@mail.ru

Осипов Александр Владимирович
канд. физ.-мат. наук
ст. научн. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: OAB@list.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 512.562

О КОНЕЧНЫХ КРИТИЧЕСКИХ РЕШЕТКАХ

О. Е. Перминова

Рассматриваются критические решетки, т. е. решетки без нетривиальных эндоморфизмов, не имеющие нетривиальных собственных подрешеток без нетривиальных эндоморфизмов. Доказано, что для любого $n \geq 21$ существуют n-элементные критические решетки.

Ключевые слова: решетка, подрешетка, эндоморфизм, критическая решетка.

O. E. Perminova. On finite critical lattices.

Critical lattices are considered, i.e., lattices without nontrivial endomorphisms and not containing nontrivial proper sublattices without nontrivial endomorphisms. It is proved that there exist n-element critical sublattices for any $n \geq 21$.

Keywords: lattice, sublattice, endomorphism, critical lattice.

Введение

Алгебраическая система называется *жесткой*, если она обладает только тождественным или постоянными эндоморфизмами, т. е. эндоморфизмами, преобразующими все элементы в какой-либо один элемент. Жесткие алгебраические системы рассматривались в работах Хватала [1], Сиклера [2], Ю.М. Важенина и Е.А. Перминова [3] и других работах. В частности, описывались мощности жестких систем, исследовалась аксиоматизируемость класса жестких систем, вложимость произвольной системы в жесткую систему и др.

Продолжая изучение свойства жесткости, естественно заинтересоваться минимальными (критическими) в этом смысле системами. А именно, под такой системой следует понимать жесткую систему, не обладающую собственными нетривиальными жесткими подсистемами. Например, в монографии Пультра и Трнковой [4] критическим (соответственно ко-критическим) назван жесткий граф, удаление (соответственно добавление) любого ребра которого превращает его в нежесткий граф.

Естественно назвать *критической* жесткую решетку, у которой нет собственных жестких подрешеток, исключая тривиальных — одно- и двухэлементных подрешеток.

В работах [3, 5] перечислены все мощности жестких решеток; доказано, что класс жестких решеток арифметически не замкнут (и, следовательно, неаксиоматизируем) и для любого бесконечного кардинала α существует 2^{α} жестких решеток мощности α из данного класса.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Для натурального числа* $n \in \{7,\ 15,\ 18,\ 19\}$ *и* $n \geq 21$ *существуют* n-*элементные критические решетки.*

Из работы [3] следует, что для $3 \leq n \leq 6$ не существует жестких, а, следовательно, критических n-элементных решеток.

В разд. 1 работы приводится описание искомых решеток. В разд. 2 приводится доказательство жесткости, а в разд. 3 — критичности этих решеток.

1. Описание критических решеток

Для решеток мы будем придерживаться системы понятий и обозначений, принятых в книге [6].

Рассмотрим множество $\{0,\ a,\ b,\ d,\ u,\ 1\}$ и для произвольных натуральных чисел k и $m > 1$ попарно не пересекающиеся множества $\{c_i,\ e_i,\ f_i \mid 1 \le i \le k\}$, $\{g_i,\ p_i \mid 1 \le i \le m\}$, $\{h_i,\ r_i \mid 1 \le i \le m-1\}$.

На объединении R этих множеств определим частичный порядок $\le$, который имеет следующее отношение покрытия:

$$0 \prec a, \quad 0 \prec b, \quad 0 \prec c_1, \quad b \prec d, \quad a \prec e_1, \quad c_1 \prec d, \quad d \prec e_1, \quad c_i \prec c_{i+1},$$

$$e_i \prec e_{i+1} \quad (1 \le i \le k-1), \quad c_i \prec f_i \quad (1 \le i \le k), \quad f_i \prec e_{i+1} \quad (1 \le i \le k-1),$$

$$c_i \prec e_i \quad (2 \le i \le k), \quad c_k \prec g_1, \quad f_k \prec r_1, \quad e_k \prec r_1, \quad g_i \prec p_i \quad (1 \le i \le m),$$

$$g_i \prec g_{i+1}, \quad p_i \prec p_{i+1}, \quad g_i \prec h_i, \quad h_i \prec p_{i+1}, \quad p_i \prec r_i \quad (1 \le i \le m-1),$$

$$r_i \prec r_{i+1} \quad (1 \le i \le m-2), \quad g_m \prec u, \quad r_{m-1} \prec 1, \quad p_m \prec 1, \quad u \prec 1.$$

Диаграмму частично упорядоченного множества R см. на рис. 1.

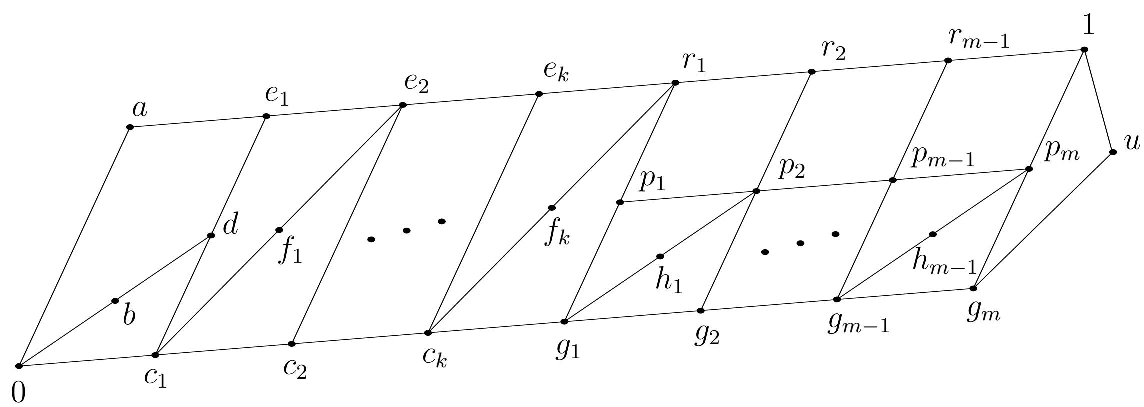

Рис. 1. Решетка R.

Нетрудно проверить, что множество R относительно определенного таким образом частичного порядка является решеткой.

Пусть n — число элементов решетки R. Очевидно,

$$n = 6 + 3k + 2m + 2(m-1) = 3k + 4m + 4 \qquad (k \ge 1,\ m \ge 2).$$

Из этой формулы в результате варьирования чисел k и m получаются все искомые значения n, для которых существуют n-элементные критические решетки (за исключением $n = 7$). Пример семиэлементной критической решетки можно извлечь из работы [3].

2. Доказательство жесткости решеток

Приведем необходимые для дальнейшего определения и утверждения.

Простой называется решетка, обладающая только тривиальными конгруэнциями. Очевидно, произвольная решетка L является простой тогда и только тогда, когда L обладает только тривиальными гомоморфизмами (т. е. образы L при гомоморфизме либо изоморфны L, либо одноэлементны).

Если для интервалов $[a, b]$ и $[c, d]$ решетки L справедливы или равенства $b \wedge c = a$ и $b \vee c = d$, или равенства $a \wedge d = c$ и $a \vee d = b$, то будем писать $[a,\ b] \sim [c,\ d]$.

Определим для интервалов транзитивное замыкание $\approx$ отношения $\sim$, полагая $[a,\ b] \approx [c,\ d]$, если $[a,\ b] = [a_0, b_0] \sim [a_1, b_1] \sim \ldots \sim [a_n, b_n] = [c, d]$ для некоторых интервалов $[a_i,\ b_i]$ $(0 \leq i \leq n)$. В таком случае будем говорить, что интервалы $[a,\ b]$, $[c,\ d]$ решетки связаны отношением $\approx$. Из [7, теорема 10.2] следует

Лемма 1. *Если любые два интервала решетки связаны отношением $\approx$, то решетка является простой.*

Лемма 2 [3, лемма 2]. *Если решетку L можно разбить в объединение двух подрешеток L_1 и L_2 так, что хотя бы одна из них неодноэлементна, и для любых $x \in L_1$, $y \in L_2$, либо x меньше y, либо x и y несравнимы, то L обладает нетривиальным эндоморфизмом, т. е. не является жесткой.*

Склеивающим эндоморфизмом решетки L будем называть любой ее эндоморфизм φ такой, что $\varphi x = \varphi y$ для некоторых различных элементов $x, y \in L$.

Лемма 3. *Решетка R не имеет склеивающих эндоморфизмов, отличных от постоянных.*

Доказательство. Покажем, что простые интервалы решетки R связаны отношением $\approx$. Все простые интервалы подрешетки $B = \{0,\ a,\ b,\ c_1,\ d,\ e_1\}$ решетки R следующим образом связаны отношением $\approx$:

$$[b,\ d] \sim [0,\ c_1] \sim [a,\ e_1] \sim [0,\ b] \sim [c_1,\ d] \sim [g_1,\ r_1] \sim [c_1,\ e_1] \sim [0,\ a] \sim [d,\ e_1]. \tag{2.1}$$

Очевидно, все простые интервалы каждого из бриллиантов $F_i = \{c_i,\ e_i,\ f_i,\ c_{i+1},\ e_{i+1}\}$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, $F_k = \{c_k,\ e_k,\ f_k,\ g_1,\ r_1\}$, $H_i = \{g_i,\ p_i,\ h_i,\ g_{i+1},\ p_{i+1}\}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ связаны отношением $\approx$.

Рассмотрим решетку $G = \{g_i,\ p_i,\ h_j,\ r_j,\ u,\ 1 \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, m-1\}$, подрешеткой которой для любого $i = 1, \ldots, m-1$ является бриллиант H_i. Заметим, что

$$[r_i,\ r_{i+1}] \sim [p_i,\ p_{i+1}] \sim [g_i,\ g_{i+1}] \approx [g_m,\ p_m] \sim [u,\ 1] \sim [g_1,\ r_1] \sim [c_1,\ e_1] \sim [p_i,\ r_i]$$

$$\sim [p_m,\ 1] \sim [g_m,\ u]. \tag{2.2}$$

Отсюда следует, что все простые интервалы подрешетки G связаны отношением $\approx$.

Поскольку в цепочки (2.1) и (2.2) входит интервал $[c_1,\ e_1]$, все простые интервалы решеток B, F_i, G связаны отношением $\approx$. Отсюда следует, что все простые интервалы решетки R связаны отношением $\approx$. Следовательно, на основании леммы 1 решетка R является простой, и поэтому любой ее склеивающий эндоморфизм является постоянным. Лемма доказана.

Очевидно, при автоморфизме φ решетки элемент, разложимый в пересечение (объединение) n попарно не сравнимых элементов, отображается в элемент с таким же свойством и $x \prec y$ тогда и только тогда, когда $\varphi x \prec \varphi y$. На основании этого легко показать, что справедлива

Лемма 4. *Решетка R не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного.*

Из лемм 3 и 4 вытекает

Лемма 5. *Решетка R является жесткой.*

3. Доказательство критичности решеток

Нам потребуются следующие решеточные конструкции.

(1) *Одноэлементное расширение* решетки. Рассмотрим произвольную решетку A и одноэлементную решетку $\{v\}$ такие, что $A \cap \{v\} = \varnothing$. Возьмем в решетке A произвольные сравнимые элементы a и b $(a < b)$. На множестве $B = A \cup \{v\}$ определим следующий частичный порядок $\leq$:

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x,\, y \in A \quad \text{и} \quad x \leq y \quad \text{на} \quad A, \\ x \in A, \quad x \leq a, \quad y = v, \\ x = v, \quad y \in A, \quad y \geq b. \end{cases}$$

Легко проверить, что множество B относительно определенного таким образом частичного порядка является решеткой.

(2) *n-бриллиантная* решетка B_n определяется на множестве

$$B_n = \bigl\{a_i,\, b_i,\, c_j \mid 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq n-1\bigr\}$$

отношением покрытия

$$a_i \prec a_{i+1}, \quad b_i \prec b_{i+1}, \quad a_i \prec b_i, \quad a_i \prec c_i \prec b_{i+1} \quad (0 \leq i \leq n-1), \quad a_n \prec b_n.$$

(3) Решетка L. Построение решетки L (см. рис. 2) проведем последовательно с помощью нескольких вспомогательных решеточных конструкций.

Рассмотрим сначала множества $\{d_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ и $\{f_j \mid 1 \leq j \leq k\}$, причем $d_i, f_j \notin B_n$ для любых i и j.

На множестве $B'_n = B_n \cup \{d_i \mid 1 \leq i \leq m\} \cup \{f_j \mid 1 \leq j \leq k\}$ определим следующий частичный порядок $\leq$:

$$x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x,\, y \in B_n \quad \text{и} \quad x \leq y \quad \text{на} \quad B_n, \\ x = a_0, \quad y = d_1, \\ x \in B_n \cup \{d_1, \ldots, d_i\}, \quad x \leq d_i, \quad y = d_{i+1} \quad (1 \leq i \leq m-1), \\ x = d_m, \quad y \in B_n, \quad y \geq b_0, \\ x \in B_n, \quad x \leq a_n, \quad y = f_1, \\ x \in B_n \cup \{f_1, \ldots, f_i\}, \quad x \leq f_i, \quad y = f_{i+1} \quad (1 \leq i \leq k-1), \\ x = f_k, \quad y \in B_n, \quad y \geq b_n. \end{cases}$$

Очевидно, множество B'_n относительно определенного таким образом частичного порядка является решеткой.

Далее рассмотрим решетку $C_n = B'_n \cup \{0\}$, получаемую *процедурой присоединения к решетке B'_n внешнего нуля* 0:

$$x \prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x,\, y \in B'_n \quad \text{и} \quad x \prec y \quad \text{на} \quad B'_n, \\ x = 0, \quad y = a_0, \quad \text{где} \quad a_0 \text{ — наименьший элемент решетки } B'_n. \end{cases}$$

Нам понадобится также решетка $C'_n = C_n \cup \{1\}$, получаемая *процедурой присоединения к решетке C_n внешней единицы* 1:

$$x \prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x,\, y \in C_n \quad \text{и} \quad x \prec y \quad \text{на} \quad C_n, \\ x = b_n, \quad y = 1, \quad \text{где} \quad b_n \text{ — наибольший элемент решетки } C_n. \end{cases}$$

Теперь определим решетку L, получаемую последовательным повторением процедуры одноэлементного расширения решетки C'_n элементами, не принадлежащими C'_n. При этом каждый раз в качестве сравнимых элементов в конструкции одноэлементного расширения выбираем элементы x и y ($x < y$) такие, что выполняется одно из условий:

(1) x больше либо равен 0, а y меньше либо равен одному из элементов множества $\{a_0, d_1, \ldots, d_m, b_0\}$;

(2) x больше либо равен одному из элементов множества $\{a_n, f_1, \ldots, f_k, b_n\}$, а y меньше либо равен 1.

Диаграмма решетки L изображена на рис. 2.

Обозначим через P и Q частично упорядоченные множества $\{x \in L \mid x < b_0 \ \text{ и } \ x \notin B'_n\}$ и $\{y \in L \mid y > a_n \ \text{ и } \ y \notin B'_n\}$ соответственно.

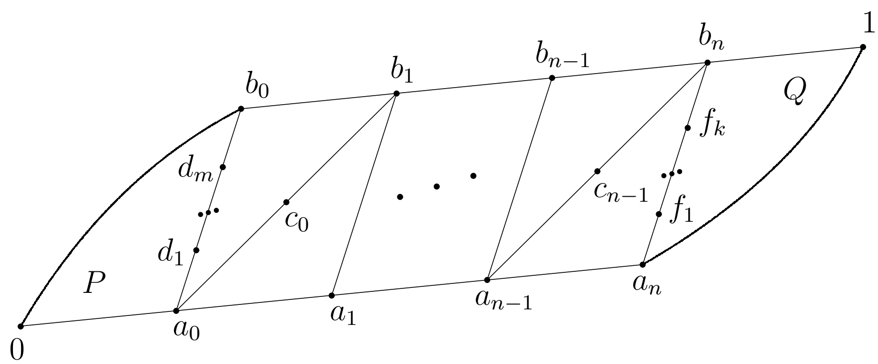

Рис. 2. Решетка L.

Лемма 6. *Для решетки L справедливы следующие утверждения*:

(i) *при $n \geq 3$ является нежесткой* (*более чем двухэлементная*) *подрешетка решетки L, не содержащая любое собственное подмножество элементов “$(n-2)$-бриллиантной” решетки $B_{n-2} = \{a_i, b_i, c_j \mid 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq n-2\}$*;

(ii) *при $n \geq 2$ являются нежесткими*: *подрешетка $L' = L \backslash P$; подрешетка $L'' = L \backslash Q$; любая собственная подрешетка решетки L' или L'', содержащая хотя бы один бриллиант из множества бриллиантов $C_i = \{a_i, b_i, c_i, a_{i+1}, b_{i+1}\}$ при $(1 \leq i \leq n-1)$ или $(0 \leq i \leq n-2)$ соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) Доказательство будем вести индукцией по n. Покажем, что при $n = 3$ является нежесткой более чем двухэлементная подрешетка S решетки L, не содержащая собственных подмножеств бриллианта $B_1 = \{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2\}$. Здесь возможны случаи $c_1 \notin S$ и $c_1 \in S$, рассуждения в которых аналогичны. Поэтому рассмотрим более сложный случай $c_1 \in S$.

Рассмотрим отдельно подслучаи $a_1 \notin S$ и $a_1 \in S$.

(1) $a_1 \notin S$. Ясно, что $b_1 \notin S$ и S не содержит элементов x таких, что $x \geq a_2$ и x несравнимо с c_1, поскольку в противном случае из равенства $x \wedge c_1 = a_1$ следует, что $a_1 \in S$.

Пусть $b_2 \in S$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x < b_1$, то S имеет две подрешетки S_1 из $\{x \mid x < b_1\}$ и S_2 из $\{y \mid y \geq c_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$, $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Пусть подрешетка S не содержит элементов x таких, что $x < b_1$. Если в подрешетке S содержатся элементы y такие, что $y \geq b_3$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{c_1, b_2\}$ и S_2 из $\{y \mid y \geq b_3\}$, удовлетворяющие условиям леммы 2.

Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{c_1\}$, $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y, так как в противном случае $S = \{c_1, b_2\}$ является двухэлементной решеткой.

Пусть теперь $b_2 \notin S$. Тогда S не содержит элементов x таких, что $x < b_2$ и x несравнимо с c_1, поскольку в противном случае из равенства $x \vee c_1 = b_2$ следует, что $b_2 \in S$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \leq a_0$, или элементы y такие, что $y \geq b_3$ и $|S| \geq 3$, то S имеет две подрешетки, удовлетворяющие условиям леммы 2. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом, так как в противном случае $|S| \leq 2$.

(2) $a_1 \in S$. Пусть сначала $b_1 \notin S$. Тогда S не содержит элементов x таких, что $x < b_1$ и x несравнимо с a_1, поскольку в противном случае из равенства $x \vee a_1 = b_1$ следует, что $b_1 \in S$. Если в подрешетке S содержатся элементы x такие, что $x \leq a_0$, то S имеет две подрешетки S_1 из $\{x \mid x \leq a_0\}$ и S_2 из $\{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$, $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Пусть подрешетка S не содержит элементы x такие, что $x \leq a_0$. Если в подрешетке S содержатся элементы y такие, что $y \geq a_2$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{a_1, c_1\}$ и S_2 из $\{y \mid y \geq a_2\}$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{a_1\}$, $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторого y, так как в противном случае $S = \{a_1, c_1\}$ является двухэлементной решеткой.

Пусть теперь $b_1 \in S$. Ясно, что из равенства $b_1 \vee c_1 = b_2$ в решетке L следует, что $b_2 \in S$. Если $a_2 \in S$, то подрешетка S содержит бриллиант B_1. Предположим, что $a_2 \notin S$. Тогда S не содержит элементов x таких, что $x > a_2$ и x несравнимо с b_2, поскольку в противном случае из равенства $x \wedge b_2 = a_2$ следует, что $a_2 \in S$. Тогда S имеет две подрешетки S_1 из $\{x \mid x \leq b_1\}$ и S_2 из $\{y \mid y \geq c_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$, $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y.

Итак, утверждение (i) леммы 6 для случая $n = 3$ справедливо.

Пусть $n > 3$. Предположим, что утверждение (i) справедливо для $n - 1$. Покажем, что подрешетка S решетки L, не содержащая любое собственное подмножество элементов “$(n-2)$-бриллиантной” решетки B_{n-2}, является нежесткой. По предположению индукции является нежесткой подрешетка решетки L, не содержащая собственных подмножеств “$(n-3)$-бриллиантной” решетки B_{n-3}.

Теперь предположим, что в подрешетке S либо содержатся все элементы из B_{n-3}, либо в ней не содержится ни одного из элементов B_{n-3}. Тогда рассуждениями, аналогичными проведенным в случае $n = 3$, убеждаемся, что утверждение (i) доказываемой леммы является верным.

(ii) Подрешетка L' имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} b_0, & x = d_m, \\ x, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

поэтому L' является нежесткой.

Теперь докажем утверждение (ii) для любой собственной подрешетки S решетки L'. Доказательство будем вести индукцией по n. Покажем, что при $n = 2$ любая собственная подрешетка S решетки L', содержащая бриллиант C_1, является нежесткой. Рассмотрим случаи, когда $c_0 \in S$ и $c_0 \notin S$.

Пусть $c_0 \in S$. Ясно, что из равенства $a_1 \wedge c_0 = a_0$ в решетке L следует, что $a_0 \in S$. Рассмотрим возникающие здесь подслучаи.

(1) $b_0 \notin S$ и $d_i \notin S$ для любого $i = 1, \dots, m$. Тогда S имеет две подрешетки $S_1 = \{a_0, c_0\}$ и S_2 из $\{y \mid y \geq a_1\}$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$, $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y.

(2) $b_0 \in S$ или $d_i \in S$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Если подрешетка S содержит единственный элемент u из множества $\{b_0\} \cup \{d_i \mid 1 \leq i \leq m\}$, то S имеет автоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} u, & x = c_0, \\ c_0, & x = u, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если подрешетка S содержит хотя бы два различных элемента из множества $\{b_0\} \cup \{d_i \mid 1 \leq i \leq m\}$, то, очевидно, S имеет нетривиальный эндоморфизм.

Пусть теперь $c_0 \notin S$. Если в подрешетке S есть элемент x такой, что $x \leq b_0$, то S удовлетворяет условиям леммы 2. В противном случае S имеет нетождественный автоморфизм. Случай $n = 2$ рассмотрен.

Пусть теперь $n > 2$. Предположим, что утверждение (ii) справедливо для $n - 1$. Покажем, что любая собственная подрешетка S решетки L', содержащая хотя бы один бриллиант из множества бриллиантов C_i $(1 \leq i \leq n-1)$, является нежесткой. Если подрешетка S решетки L' содержит хотя бы один бриллиант из множества бриллиантов C_i $(1 \leq i \leq n-2)$, то по предположению индукции S является нежесткой. Поэтому достаточно рассмотреть подрешетку S решетки L' такую, что $S \cap C_{n-1} = C_{n-1}$ и $S \cap C_i \neq C_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, n-2\}$. Поскольку в этом случае S не содержит собственного подмножества элементов решетки B_{n-2}, по утверждению (i) рассматриваемой леммы S является нежесткой.

Рассуждениями, двойственными проведенным, нетрудно показать справедливость утверждения (ii) для подрешетки L'' и любой ее собственной подрешетки, содержащей хотя бы один бриллиант из множества бриллиантов C_i $(0 \leq i \leq n-2)$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Как следует из доказательства леммы 6, она справедлива также в случае, когда хотя бы одно из частично упорядоченных множеств P и Q бесконечно.

Рассмотрим теперь нашу основную решетку R для $k \geq 3$ и $m \geq 4$. Для нее справедлива

Лемма 7. *Решетка R не содержит жестких подрешеток, кроме одно- и двухэлеметных подрешеток.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если подрешетка S решетки R не содержит собственных подмножеств множества $\bigcup_{i=2}^{k-1} F_i$, то в силу утверждения (i) леммы 6 подрешетка S нежесткая.

С л у ч а й 1. В рассматриваемой подрешетке S не содержится ни одного элемента из бриллиантов F_i, $2 \leq i \leq k-1$.

Если подрешетка S $(|S| \geq 3)$ содержится в объединении множеств $A_1 = \{x \mid x \leq e_1$ или $x = f_1\}$ и $A_2 = \{y \mid y = f_k$ или $y \geq g_1\}$ и, кроме того, $S \cap A_1 \neq \varnothing$ и $S \cap A_2 \neq \varnothing$, то S имеет две подрешетки $S_1 \subset A_1$ и $S_2 \subset A_2$, удовлетворяющие условиям леммы 2. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$, $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y.

Если подрешетка S содержится в $\{x \mid x \leq e_1 \quad \text{или} \quad x = f_1\}$, то легко понять, что $|S| \leq 6$, и поэтому, как отмечено ранее, подрешетка S не является жесткой.

Пусть теперь подрешетка S содержится в $\{y \mid y = f_k \quad \text{или} \quad y \geq g_1\}$. Если $f_k \in S$, то $g_i, p_i \notin S$ $(1 \leq i \leq m)$, $h_i \notin S$ $(1 \leq i \leq m-1)$ и $u \notin S$. Тогда S является либо одноэлементной, либо двухэлементной решеткой, либо цепью с числом элементов более двух. В последнем случае подрешетка S, очевидно, имеет нетривиальный эндоморфизм. Пусть теперь $f_k \notin S$. В этом случае S является подрешеткой решетки G. Если подрешетка S не содержит собственных подмножеств множества $\bigcup_{i=2}^{m-2} H_i$, то рассуждениями, подобными рассуждениям, проведенным при доказательстве утверждения (i) леммы 6, нетрудно показать, что S является нежесткой.

(a) В подрешетке S не содержится ни одного элемента из бриллиантов H_i, $2 \leq i \leq m-2$. Рассмотрим более сложный случай $h_1 \in S$. Здесь из равенства $h_1 \vee p_1 = p_2$ в решетке L следует, что $p_1 \notin S$. Предположим, что $r_1 \in S$. Тогда из равенств $h_1 \wedge r_1 = g_1$ и $h_1 \vee r_1 = r_2$ в решетке L следует, что $g_1, r_2 \in S$. Таким образом, S имеет две подрешетки, удовлетворяющие условиям леммы 2, и поэтому обладает нетривиальным эндоморфизмом. Пусть теперь $r_1 \notin S$. Если $r_i \in S$ для некоторого $i \in \{2, \dots, m-1\}$, то $h_{m-1}, g_m, p_m, u \notin S$. Тогда S является либо двухэлементной решеткой, либо цепью с числом элементов более двух. В последнем случае подрешетка S, очевидно, имеет нетривиальный эндоморфизм. Если $r_i \notin S$ для любого $i \in \{1, \dots, m-1\}$, то легко понять, что $|S| \leq 6$.

(б) Подрешетка S содержит все элементы бриллиантов H_i $(2 \leq i \leq m-2)$. Если $r_i \in S$ для некоторого $i \in \{1, \dots, m-1\}$, то S имеет эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} r_i, & x = p_i, \\ 1, & x = p_m, \\ u, & x = g_m, \\ x, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если $r_i \notin S$ для любого $i \in \{1, \dots, m-1\}$, то в силу утверждения (ii) леммы 6 подрешетка S не является жесткой.

С л у ч а й 2. Подрешетка S содержит все элементы бриллиантов F_i, $2 \leq i \leq k-1$.

Заметим, что если подрешетка S не содержит ни одного элемента множества $\{0,\ a,\ b\}$, то в силу утверждения (ii) леммы 6 подрешетка S обладает нетривиальным эндоморфизмом. Если $\varnothing \neq S \cap \{0,\ a,\ b\} \neq \{0,\ a,\ b\}$, то нетрудно проверить, что подрешетка S обладает нетривиальным эндоморфизмом.

Пусть теперь подрешетка S содержит все элементы множества $\{0, a, b\}$. Тогда $e_1, c_1, d \in S$. Если $f_1 \notin S$ или $f_k \notin S$, то в силу леммы 2 или утверждения (ii) леммы 6 подрешетка S является нежесткой.

Пусть теперь $f_1 \in S$ и $f_k \in S$. Тогда $r_1 \in S$. Если подрешетка S не содержит собственных подмножеств множества $\bigcup_{i=2}^{m-2} H_i$, то рассуждениями, подобными рассуждениям проведенным при доказательстве утверждения (i) леммы 6, нетрудно показать, что S является нежесткой.

Пусть в подрешетке S не содержится ни одного элемента из бриллиантов H_i, $2 \leq i \leq m-2$. Рассматривая отдельно случаи $h_1 \in S$ и $h_1 \notin S$, легко убедиться, что полученная подрешетка обладает нетривиальным эндоморфизмом (автоморфизмом).

Пусть подрешетка S содержит все элементы бриллиантов H_i, $2 \leq i \leq m-2$. Тогда $g_1, p_1 \in S$, $r_i \in S$ $(2 \leq i \leq m-1)$. Если множество $\{h_1,\ h_{m-1},\ g_m,\ p_m,\ u,\ 1\}$ не принадлежит подрешетке S, то можно проверить, что S в данном случае обладает нетривиальным эндоморфизмом. Лемма доказана.

Напомним, что в доказательстве леммы 7 предполагается, что $k \geq 3$ и $m \geq 4$. Однако нетрудно проверить, что и в случае $k = 1, 2$ или $m = 2, 3$ решетка R не содержит жестких подрешеток, кроме одно- и двухэлеметных подрешеток. Ранее было указано существование критической семиэлементной решетки. Поэтому из лемм 5, 7 вытекает доказываемая теорема.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю проф. В.А. Баранскому за постоянное внимание и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chvatal V.** On finite and countable rigid graphs and tournaments // Comment. Math. Univ. Carolinae. 1965. Vol. 6, no. 4. P. 429–438.
2. **Sichler J.** Non-constant endomorphisms of lattices // Proc. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 34. P. 67–70.
3. **Важенин Ю.М., Перминов Е.А.** О жестких решетках и графах // Исслед. по соврем. алгебре: межвуз. сб. ст. Т. 2, № 3. Свердловск, 1979. С. 3–21. (Мат. записки.)

4. **Pultr A., Trnkova V.** Combinatorial, algebraic and topological representations of groups, semigroups and categories. Prague: Academia Praha, 1980. 372 p.
5. **Перминов Е.А.** О жестких решетках / Урал. гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 27.01.84, № 847–84. 22 с.
6. **Гретцер Г.** Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
7. **Crawley P., Dilworth R.P.** Algebraic theory of lattices. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1973. 193 p.

Перминова Ольга Евгеньевна
магистрант
Уральск. гос. ун-т
e-mail: perminova_oe@mail.ru

Поступила 12.02.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 519.713

РЕГУЛЯРНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОКРЕСТНОСТИ РЕГУЛЯРНОГО ЯЗЫКА[1]

Г. А. Поваров

Изучается операция взятия динамической окрестности языка. Доказывается, что эта операция сохраняет регулярность языка. Приводится оценка прироста сложности языка при переходе к его динамической окрестности.

Ключевые слова: регулярный язык, конечный трансдьюсер, расстояние Хэмминга, окрестность языка, недетерминированная сложность.

G. A. Povarov. Regularity of a dynamic neighborhood of a regular language.

The operation of taking a dynamic neighborhood of a language is studied. It is proved that this operation preserves the regularity of the language. The increase in the complexity of the language under the passage to its dynamic neighborhood is estimated.

Keywords: regular language, finite transducer, Hamming distance, neighborhood of a language, nondeterministic complexity.

Введение

Хорошо известна та исключительная роль, которую играет в теоретических и практических разделах современной информатики понятие *регулярного языка*. Одним из важнейших свойств класса регулярных языков является его замкнутость относительно многих естественных операций. Другой особенностью регулярных языков, весьма существенной с практической точки зрения, является крайняя простота вычислительных моделей (прежде всего, конечных автоматов), при помощи которых осуществляются те или иные действия над регулярными языками.

Так, например, один из самых простых в реализации и при этом крайне эффективный алгоритм поиска образца в тексте основан на использовании конечных автоматов. Суть этого классического алгоритма заключается в том, что по заданному образцу строится конечный автомат, который распознает множество всех слов, содержащих данный образец в качестве подстроки. Далее на вход этого автомата подается текст, в котором требуется осуществить поиск. Такой алгоритм работает за линейное от длины текста время и за линейную от длины образца память.

Распространенным обобщением задачи поиска образца является поиск одного из образцов из словаря или, в общем случае, поиск по регулярному выражению. Такая задача тоже хорошо решается при помощи конечных автоматов: по регулярному выражению строится конечный автомат, на вход которого подается текст для поиска.

Следующей задачей, пришедшей из практики, является задача приближенного поиска образца. Имеющийся образец или текст, в котором требуется осуществить поиск, содержит ошибки, вызванные опечатками, ошибками распознавания, помехами, мутациями или иными причинами. Эта задача также находит эффективное решение при помощи конечных автоматов: строится автомат, который вместе с образцом ищет также другие похожие варианты (с

[1]Работа выполнена при поддержке программы Рособразования “Развитие научного потенциала высшей школы” (проект 2.1.1/3537).

заданным количеством ошибок). Классическими работами в этой области являются [12, 14]. Интересным исследованием различных источников ошибок в текстах является работа [8].

Естественным соединением двух предыдущих задач является задача приближенного поиска по регулярному выражению. Один из подходов к решению этой задачи состоит в следующем. Если рассмотреть операцию, которая по множеству слов возвращает множество близких к ним слов относительно некоторого расстояния, то окажется, что практически для всех естественных расстояний эта операция сохраняет регулярность. Другими словами, окрестность регулярного языка (регулярного выражения) относительно некоторого расстояния будет регулярным языком. Более того, такое преобразование языка в его окрестность во многих случаях достаточно хорошо формализуется. Это позволяет в явном виде выписать конечный автомат, распознающий нужную окрестность исходного регулярного выражения. Далее приближенный поиск регулярного выражения ведется уже на основе построенного конечного автомата. Хороший обзор существующих алгоритмов приближенного поиска дан в работах [4, 10].

В работе [6] предлагается алгоритм (также на основе конечных автоматов) для поиска образца в тексте, который содержит не более чем заданное количество ошибок в каждом блоке заданной длины. Подобная постановка задачи кажется очень естественной: чем более длинный образец или текст мы обрабатываем, тем большее количество ошибок там может содержаться. Пожалуй, такая постановка задачи актуальней всего для проблемы поиска образца в цепочке ДНК. Если имеется некоторый образец ДНК и нужно проверить его вхождение в какую-то цепочку ДНК, то мы должны учитывать, что в цепочке вполне могли произойти какие-то мутации или погрешности экспериментов, в результате чего отдельные нуклеотиды могли быть изменены. Такие изменения не могут быть очень концентрированными (в противном случае цепочка ДНК разрушится), они должны быть более или менее равномерно распределены по всей длине цепочки. Поиск достаточно длинного образца в такой цепочке необходимо производить с учетом приведенных особенностей. Более подробную информацию об особенностях поиска в цепочках ДНК можно найти в [9, 13].

Естественное желание обобщить поиск одного образца до поиска по регулярному выражению приводит к задаче описания окрестности регулярного языка относительно расстояния, допускающего заданное количество ошибок в каждом блоке заданной длины. В данной работе мы покажем, что взятие такой окрестности сохраняет регулярность языка. Это позволяет конструировать соответствующие алгоритмы поиска на основе конечных автоматов.

В первом разделе работы даются необходимые определения и вспомогательные утверждения. Во втором разделе приводится доказательство основного результата — теоремы о том, что окрестность регулярного языка относительно расстояния, допускающего заданное количество ошибок в каждом блоке заданной длины, остается регулярным языком.

1. Предварительные сведения

1.1. Расстояние между словами и окрестность языка

Конечное непустое множество Σ будем называть *алфавитом*, его элементы — *буквами*, конечные последовательности букв — *словами*, а произвольное множество слов — *языком*. Через $|w|$ будем обозначать *длину* слова w, т. е. количество букв в w. *Пустым словом* будем называть слово нулевой длины (будем обозначать его через λ). Множество всех слов над алфавитом Σ будем обозначать через Σ^*. Для слова $w = a_1 \dots a_n$, где $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$, и чисел i и j $(1 \le i \le j \le n)$ будем обозначать через $w[i, j]$ отрезок $a_i \dots a_j$ слова w.

Расстоянием на множестве Σ^* будем называть всякую функцию $\rho : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, определяемую следующим образом. Расстояние $\rho(x, y)$ между словами x и y — это минимальная стоимость последовательности операций, преобразующей x в y (и ∞, если такой последовательности не существует). Стоимость последовательности операций равна сумме стоимостей отдельных элементарных операций. Итак, для того чтобы определить какое-то конкретное расстояние, необходимо задать элементарные операции и их стоимость. Такое задание есть конечный набор выражений вида $\delta(x, y) = c$, где x и y — это различные слова над Σ, а c — некоторое неотрицательное число. Здесь выражение $\delta(x, y) = c$ определяет элементарную операцию, позволяющую переходить от любого слова вида $w = uxv$, $u, v \in \Sigma^*$, к слову $w' = uyv$, и приписывает ей стоимость c.

Нетрудно заметить, что при таком определении вне зависимости от выбора конкретного набора элементарных операций и их стоимостей выполняются неравенства $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для любых x, y и z. Если стоимость каждой элементарной операции положительна и для каждой операции $\delta(x, y) = t$ существует элементарная операция $\delta(y, x) = t$, то такое расстояние называют *симметричным.* Если расстояние симметричное, то множество всех слов относительно этого расстояния образует *метрическое пространство.*

В большинстве приложений используются следующие операции:

вставка ($\delta(\lambda, a)$ для некоторой буквы a),

удаление ($\delta(a, \lambda)$ для некоторой буквы a),

замена ($\delta(a, b)$ для некоторых букв a и b, $a \neq b$),

перестановка ($\delta(ab, ba)$ для некоторых букв a и b, $a \neq b$).

В данной работе мы ограничимся рассмотрением одного из наиболее популярных расстояний — расстояния Хэмминга. *Расстояние Хэмминга* между двумя словами одинаковой длины определяется количеством позиций, в которых эти слова различаются. Более формально, расстояние Хэмминга $\rho(x, y)$ задается следующим набором элементарных операций:

$$\{\delta(a, b) = 1 : a, b \in \Sigma, \quad a \neq b\}.$$

Для данного числа r можно определить *r-окрестность* слова w относительно расстояния Хэмминга — множество всех слов, которые отличаются от слова w не более чем в r позициях. Такую окрестность будем обозначать через $\mathcal{O}(w, r)$. Окрестность одного слова естественным образом обобщается до *окрестности языка*:

$$\mathcal{O}(L, r) = \bigcup_{w \in L} \mathcal{O}(w, r).$$

Окрестность языка определяет множество слов, близких к словам этого языка с точки зрения выбранного расстояния. Часто на практике речь идет о некотором эталонном слове (или языке) и о множестве слов, полученных из эталонного при помощи фиксированного количества допустимых искажений или ошибок. Однако такой "статический" подход к определению множества близких слов не подходит для моделей, где вероятность появления ошибок в слове не является фиксированной величиной, а зависит от длины этого слова. Например, в процессе передачи сигнала тем большее количество искажений может произойти, чем более длинное слово мы передаем. Это заставляет нас прийти к понятию динамической окрестности слова.

Для расстояния Хэмминга, слова w и чисел r и ℓ будем называть *динамической окрестностью* (или *r-ℓ-окрестностью*) слова w множество слов $\mathcal{O}(w, r, \ell)$, каждый участок длины ℓ которых отличается от соответствующего участка слова w не более чем в r позициях. Более формально, динамическая окрестность слова w определяется следующим образом:

$$\mathcal{O}(w, r, \ell) = \big\{v : |v| = |w| \quad \& \quad \forall i = 0, \ldots, |v| - \ell; \quad \rho\left(w[i+1, i+\ell],\ v[i+1, i+\ell]\right) \leq r\big\}.$$

Способ обобщения окрестности слова до окрестности языка остается прежним.

Рассмотрим более подробно процесс сравнения двух слов с точки зрения динамической окрестности. Пусть даны слова w и v одинаковой длины и нужно проверить, принадлежит ли слово v динамической r-ℓ-окрестности слова w. Процесс проверки удобно представлять себе следующим образом. Выписываем слова w и v друг под другом и накладываем поверх этих слов окно с фиксированной шириной в ℓ символов. Если в процессе движения этого окна от начала слов к концу в окне в каждый момент времени видно не более r ошибок, то слово v принадлежит r-ℓ-окрестности слова w.

В каждый момент времени состояние окна при сравнении слов w и v удобно характеризовать *вектором ошибки* $e = e(w, v)$ — ℓ-мерным вектором, i-я компонента которого равна 1, если буквы сравниваемых слов в i-й слева позиции окна различаются, и 0 в остальных случаях. Через $\|e\|$ будем обозначать сумму компонент вектора ошибки e, которую назовем его *весом*. Вектор ошибки будем называть *допустимым*, если его вес не превосходит r.

В начальный момент времени, когда окно находится целиком слева от всех букв сравниваемых слов, вектор ошибки состоит целиком из нулей. Затем каждый раз, сдвигая окно на одну позицию вправо, мы добавляем в поле видимости по одному символу сравниваемых слов. При этом информация в векторе ошибок сдвигается справа налево, а на крайнюю правую позицию помещается результат сравнения новой пары символов. Вектор ошибок в начальный момент времени будем обозначать через $e_{-\ell}$, затем, по мере движения окна, будем увеличивать индекс вектора ошибки на 1. Как нетрудно заметить, последний вектор ошибки имеет индекс $|w| - \ell$. Процесс движения окна проиллюстрирован на рис. 1.

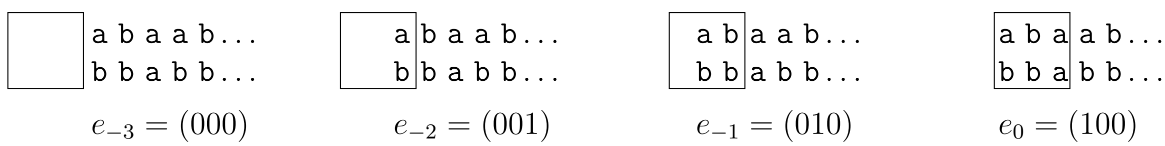

Рис. 1. Пример движения окна для $\ell = 3$.

Два следующих утверждения, касающихся веса вектора ошибки, очевидны.

Лемма 1. *Пусть* $w \in \Sigma^*$, $v \in \Sigma^*$ *и* $|w| = |v|$. *Тогда*

$$\rho\big(w[i+1, i+\ell],\ v[i+1, i+\ell]\big) = \|e_i(w, v)\|$$

для $0 \le i \le |w| - \ell$.

Лемма 2. *Пусть* $v \in \mathcal{O}(w, r, \ell)$. *Тогда*

$$\|e_i(w, v)\| \le r$$

для $-\ell \le i \le |w| - \ell$.

1.2. Регулярные языки и конечные трансдьюсеры

Существуют различные способы задания регулярных языков — детерминированные и недетерминированные конечные автоматы, регулярные выражения, право- и леволинейные грамматики и др. В данной работе нам не будет важен способ задания регулярного языка, но для того чтобы ввести необходимые обозначения, напомним, что *недетерминированный конечный автомат* (НКА) — это пятерка $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, где

$$\begin{aligned} Q &— \text{конечное множество состояний,}\\ \Sigma &— \text{конечное множество входных символов,}\\ \delta \subset Q \times \Sigma \times Q &— \text{множество переходов,}\\ q_0 \in Q &— \text{начальное состояние,}\\ F \subset Q &— \text{множество заключительных состояний.} \end{aligned}$$

Будем писать $p \xrightarrow{a} q$, если $(p, a, q) \in \delta$, и $p \overset{w}{\twoheadrightarrow} q$, если найдутся такие $a_1, \ldots, a_n \in \Sigma$ и $p_0, \ldots, p_n \in Q$, что $p = p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} p_n = q$ и $w = a_1 a_2 \ldots a_n$.

Слово w *принимается* НКА $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, если найдется такое заключительное состояние $q \in F$, что $q_0 \overset{w}{\twoheadrightarrow} q$. Языком, *распознаваемым* НКА $\mathcal{A}$, называется множество

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* : \exists q \in F : q_0 \overset{w}{\twoheadrightarrow} q\},$$

т. е. множество всех слов, принимаемых этим НКА.

Наряду с обычными недетерминированными конечными автоматами можно рассматривать недетерминированные конечные автоматы с выходом — автоматы, которые по мере чтения входной последовательности символов формируют некоторую выходную последовательность (возможно, уже над другим алфавитом). Поскольку автоматы с выходом удобно использовать как средство для преобразования языков, такие автоматы принято называть конечными трансдьюсерами. Для обозначения трансдьюсеров обычно используются строчные буквы греческого алфавита.

Конечным трансдьюсером (*абстрактным конечным автоматом* в терминах книги [1]) называется шестерка $(Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F)$, где

$$\begin{aligned}
Q &— \text{конечное множество состояний,}\\
\Sigma &— \text{конечное множество входных символов,}\\
\Delta &— \text{конечное множество выходных символов,}\\
\delta \subset Q \times \Sigma^* \times \Delta^* \times Q &— \text{конечное множество переходов}\\
q_0 \in Q &— \text{начальное состояние,}\\
F \subset Q &— \text{множество заключительных состояний.}
\end{aligned}$$

Для конечного трансдьюсера τ через $|\tau|$ будем обозначать количество его состояний.

Будем писать $p \xrightarrow{u|v} q$, если $(p, u, v, q) \in \delta$, и $p \overset{u|v}{\twoheadrightarrow} q$, если найдутся такие $u_1, \ldots, u_n \in \Sigma^*$, $v_1, \ldots, v_n \in \Delta^*$ и $p_0, \ldots, p_n \in Q$, что $p = p_0 \xrightarrow{u_1|v_1} p_1 \xrightarrow{u_2|v_2} \ldots \xrightarrow{u_n|v_n} p_n = q$, $u = u_1 \ldots u_n$ и $v = v_1 \ldots v_n$.

Конечный трансдьюсер, множество переходов которого является подмножеством множества $Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Delta \cup \{\lambda\}) \times Q$, называется *нормализованным*.

Конечный трансдьюсер $\tau = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F)$ определяет отношение

$$\mathcal{R}(\tau) = \{(u, v) \in \Sigma^* \times \Delta^* : \exists q \in F : q_0 \overset{u,v}{\twoheadrightarrow} q\}.$$

Также при помощи τ можно преобразовывать языки. Пусть $L \subset \Sigma^*$, тогда

$$\tau(L) = \{v \in \Delta^* : \exists u \in L : (u, v) \in \mathcal{R}(\tau)\}.$$

Важное значение для теории конечных трансдьюсеров имеет следующий результат.

Теорема 1 [11, теорема 1.6]. *Для каждого конечного трансдьюсера τ и каждого регулярного языка L язык $\tau(L)$ регулярен.*

Приведенную теорему можно применять для доказательства того, что некоторая операция над языком сохраняет регулярность. Так, например, известно (см. [5]), что окрестность регулярного языка относительно расстояния Хэмминга (т. е. множество слов, каждое из которых отличается от некоторого слова из исходного языка не более чем в фиксированном количестве позиций) остается регулярным языком. Получим этот результат, построив соответствующий конечный трансдьюсер.

П р и м е р. Операция взятия окрестности относительно расстояния Хэмминга сохраняет регулярность.

Для $r \geq 0$ рассмотрим конечный трансдьюсер τ_r, изображенный на рис. 2. (На этом рисунке каждая дуга с меткой $a|a$ символизирует $|\Sigma|$ переходов, по одному для каждой буквы $a \in \Sigma$, а каждая дуга с меткой $a|b$ символизирует $|\Sigma|(|\Sigma| - 1)$ переходов, по одному для каждой пары различных букв $a, b \in \Sigma$.) Легко заметить, что язык $\tau_r(L)$ совпадает с r-окрестностью языка L относительно расстояния Хэмминга. Следовательно, по теореме 1 взятие окрестности некоторого радиуса относительно расстояния Хэмминга сохраняет регулярность.

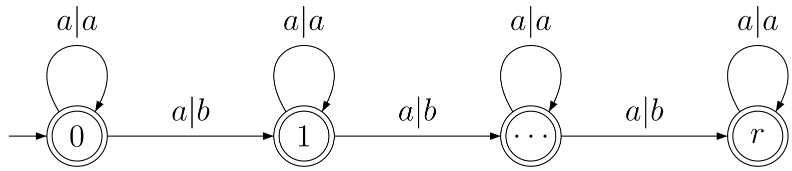

Рис. 2. Трансдьюсер τ_r.

Дополнительную информацию по регулярным языкам и конечным автоматам можно почерпнуть в [7, 15].

2. Доказательство основного результата

Для доказательства того, что операция взятия динамической окрестности сохраняет регулярность, мы построим конечный трансдьюсер, соответствующий этой операции.

Теорема 2. *Пусть $L \subset \Sigma^*$ — регулярный язык, $r, \ell \geq 0$. Тогда $\mathcal{O}(L, r, \ell)$ — регулярный язык.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $r, \ell \geq 0$. Построим конечный трансдьюсер

$$\tau = (Q, \Sigma, \Sigma, \delta, q_0, F),$$

который будет преобразовывать язык $L \subset \Sigma^*$ в динамическую r-ℓ-окрестность $\mathcal{O}(L, r, \ell)$.

В качестве Q возьмем множество допустимых векторов ошибок. В качестве начального состояния q_0 возьмем нулевой вектор ошибок. В качестве множества заключительных состояний выберем все множество Q. Множество переходов δ определим следующим образом. Переход (e, a, b, f) для $e, f \in Q$ и $a, b \in \Sigma$ содержится в множестве δ тогда и только тогда, когда $f = (p_2, \ldots, p_\ell, x)$, где $e = (p_1, p_2, \ldots, p_\ell)$ и $x = 0$, если $a = b$, и $x = 1$, если $a \neq b$.

Пример трансдьюсера τ для динамической 1-ℓ-окрестности приведен на рис. 3. (Здесь мы придерживаемся тех же договоренностей, которые были сформулированы выше применительно к рис. 2.)

Покажем, что в построенном трансдьюсере при чтении пары слов $w|v$ значение вектора ошибки этих слов в каждый момент времени соответствует текущему состоянию трансдьюсера. Более формально, нужно доказать, что если имеется последовательность переходов $q_0 \overset{a_1|b_1}{\to} q_1 \overset{a_2|b_2}{\to} \ldots \overset{a_n|b_n}{\to} q_n$, $w = a_1 \ldots a_n$ и $v = b_1 \ldots b_n$, то $e_{i-\ell}(w, v) = q_i$ для $i = 0, \ldots, n$.

Это утверждение мы будем доказывать индукцией по i. Для $i = 0$ значением вектора ошибки $e_{-\ell}(w, v)$ является нулевой вектор. Им же, по определению трансдьюсера τ, является начальное состояние q_0. База индукции доказана. Предположим, что доказываемое утверждение выполнено для i. Покажем, что оно справедливо и для $i+1$. Пусть вектор ошибки $e_{i-\ell}(w, v)$ имеет значение $(p_1, \ldots, p_\ell)$. По предположению индукции $q_i = e_{i-\ell}(w, v) = (p_1, \ldots, p_\ell)$. По определению перехода $q_i \overset{a_{i+1}|b_{i+1}}{\to} q_{i+1}$ состояние q_{i+1} является вектором $(p_2, \ldots, p_\ell, x)$, где $x = 0$,

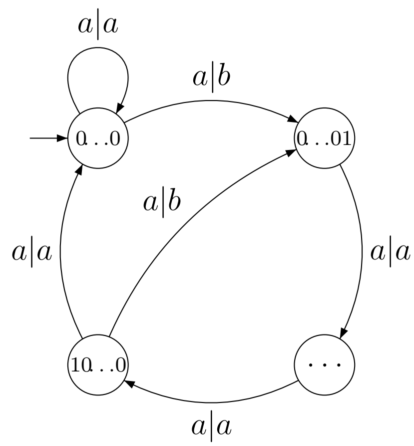

Рис. 3. Трансдьюсер τ для динамической 1-ℓ-окрестности.

если $a_{i+1} = b_{i+1}$, и $x = 1$, если $a_{i+1} \neq b_{i+1}$. Этот вектор совпадает со значением вектора ошибки $e_{i+1-\ell}(w, v)$, т. е. $e_{i+1-\ell}(w, v) = q_{i+1}$. Шаг индукции доказан.

Теперь докажем основное утверждение о том, что язык $\tau(L)$ совпадает с динамической окрестностью $\mathcal{O}(L, r, \ell)$.

Сначала покажем, что $\tau(L) \subset \mathcal{O}(L, r, \ell)$. Возьмем слово v из языка $\tau(L)$. Это означает, что найдется такое слово w из языка L, что $(w, v) \in \mathcal{R}(\tau)$. Покажем, что слово v принадлежит динамической r-ℓ-окрестности слова w, т. е. множеству слов

$$\bigl\{v : |v| = |w| \quad \& \quad \forall i = 0, \ldots, |v| - \ell \quad \rho\,(w[i+1, i+\ell],\ v[i+1, i+\ell]) \le r\bigr\}.$$

Поскольку все переходы в τ имеют вид (e, a, b, f), где $a, b \in \Sigma$, то преобразование слова с помощью τ изменяет его буквы, но не меняет его длину. Поэтому $|v| = |w|$.

Теперь покажем, что для $i = 0, \ldots, |v| - \ell$ слова $v[i+1, i+\ell]$ и $w[i+1, i+\ell]$ различаются не более чем в r позициях. Зафиксируем i. По лемме 1 расстояние Хэмминга между словами $v[i+1, i+\ell]$ и $w[i+1, i+\ell]$ равно весу i-го вектора ошибки $e_i(w, v)$. Далее, поскольку $(w, v) \in \mathcal{R}(\tau)$, найдется такая последовательность $q_1, \ldots, q_n$ состояний трансдьюсера τ, что $q_0 \overset{a_1|b_1}{\to} q_1 \overset{a_2|b_2}{\to} \ldots \overset{a_n|b_n}{\to} q_n$, $w = a_1 \ldots a_n$ и $v = b_1 \ldots b_n$. Как мы показали ранее, в этом случае вектор ошибки $e_i(w, v)$ совпадает с состоянием $q_{i+\ell}$. Поскольку множество всех состояний Q состоит только из допустимых векторов, имеем $\rho(w[i+1, i+\ell], v[i+1, i+\ell]) = \|e_i(w, v)\| = \|q_{i+\ell}\| \le r$. Значит, слово v принадлежит динамической r-ℓ-окрестности слова w и, следовательно, всему языку $\mathcal{O}(L, r, \ell)$.

Докажем теперь, что $\mathcal{O}(L, r, \ell) \subset \tau(L)$. Возьмем слово v из динамической окрестности $\mathcal{O}(L, r, \ell)$. Это значит, что найдется такое слово w из языка L, что слово v принадлежит динамической окрестности слова w. Для того чтобы показать, что $v \in \tau(L)$, достаточно доказать, что $(w, v) \in \mathcal{R}(\tau)$. Поскольку $v \in \mathcal{O}(w, r, \ell)$, длины слов v и w совпадают. Представим слова w и v в виде последовательностей букв $a_1 \ldots a_n$ и $b_1 \ldots b_n$ соответственно. Покажем, что найдутся такие состояния $q_i \in Q$, $1 \le i \le n$, что в трансдьюсере τ определены переходы (q_{i-1}, a_i, b_i, q_i), $1 \le i \le n$.

Для $i = 1, \ldots, n$ в качестве состояния q_i возьмем вектор ошибки $e_{i-\ell}(w, v)$. Поскольку $v \in \mathcal{O}(w, r, \ell)$, по лемме 2 вес вектора ошибки $e_{i-\ell}(w, v)$ не превосходит r для $i = 1, \ldots, n$, т. е. эти векторы ошибок являются допустимыми, а значит, принадлежат множеству состояний Q. Для $i = 1, \ldots, n$ переход (q_{i-1}, a_i, b_i, q_i) в трансдьюсере τ определен, поскольку q_{i-1} и q_i — это два последовательных вектора ошибок при чтении в словах w и v букв a_i и b_i соответственно. Это совпадает с определением множества переходов δ в трансдьюсере τ.

Мы построили конечный трансдьюсер, который преобразует язык L в его динамическую окрестность $\mathcal{O}(L, r, \ell)$. Значит, в силу леммы 1 из регулярности языка L следует регулярность языка $\mathcal{O}(L, r, \ell)$. □

После того как мы показали, что динамическая окрестность регулярного языка остается регулярным языком, возникает вопрос об устройстве конечного автомата, распознающего эту окрестность. Этот вопрос возникает прежде всего в связи с задачами приближенного поиска, о которых говорилось во введении.

Под *дескриптивной сложностью регулярного языка* понимается количественная мера наиболее экономичного задания этого языка в некоторых естественных терминах. Представляет интерес вопрос о том, как изменяется дескриптивная сложность при переходе от языка к его динамической окрестности. Дадим ответ на этот вопрос в терминах так называемой *недетерминированной сложности*, т. е. минимального числа состояний недетерминированного автомата, распознающего данный язык. Недетерминированную сложность языка L будем обозначать через $\mathrm{nsc}(L)$.

Если у нас имеются некоторый нормализованный конечный трансдьюсер τ и регулярный язык L, заданный недетерминированным конечным автоматом $\mathcal{A}$, то можно сконструировать недетерминированный конечный автомат, который будет распознавать язык $\tau(L)$. Для этого следует рассмотреть декартово произведение трансдьюсера τ и автомата $\mathcal{A}$. Каждое состояние нового автомата будет соответствовать паре — состояние исходного автомата $\mathcal{A}$ и состояние трансдьюсера τ. Множество переходов нового автомата будет устроено таким образом, чтобы одновременно учитывать переходы внутри исходного автомата и трансдьюсера. Чтение слова в таком автомате будет соответствовать одновременному чтению слова-прообраза в исходном автомате и чтению пары слово-прообраз и слово-образ в трансдьюсере. За счет этого построенный автомат будет распознавать язык $\tau(L)$.

Основываясь на приведенных рассуждениях, несложно доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть L — регулярный язык, τ — нормализованный конечный трансдьюсер. Тогда*

$$\mathrm{nsc}(\tau(L)) \le |\tau| \, \mathrm{nsc}(L).$$

Теперь получим оценку недетерминированной сложности динамической окрестности.

Теорема 4. *Пусть L — регулярный язык, $r, \ell \ge 0$, $r \le \ell/2$. Тогда*

$$\mathrm{nsc}(\mathcal{O}(L, r, \ell)) \le 2^{\ell} \, e^{\frac{-2(\ell/2 - r)^2}{\ell}} \, \mathrm{nsc}(L).$$

Доказательство. Пусть L — регулярный язык, $r, \ell \ge 0$, $r \le \ell/2$. Отметим, что последнее ограничение достаточно естественно, так как означает, что ошибки имеют место меньше чем в половине символов каждого блока.

Возьмем трансдьюсер $\tau = (Q, \Sigma, \Sigma, \delta, q_0, F)$, построенный при доказательстве теоремы 2 для преобразования языка L в динамическую окрестность $\mathcal{O}(L, r, \ell)$. Поскольку все переходы из δ имеют вид (e, a, b, f), где $a, b \in \Sigma$, трансдьюсер τ является нормализованным. Поэтому к нему применима теорема 3: $\mathrm{nsc}(\tau(L)) \le |\tau| \, \mathrm{nsc}(L)$.

Оценим количество состояний в трансдьюсере τ. Состояния Q трансдьюсера τ — это ℓ-компонентные векторы, в которых не более r единиц. Для того чтобы оценить количество таких векторов, воспользуемся неравенством Чернова для оценки суммы биномиальных коэффициентов (см. [3, теорема 2.10]):

$$\sum_{k=0}^{n/2-t} \binom{n}{k} \le 2^n e^{-2t^2/n},$$

где $0 \le t \le n/2$.

Тогда количество состояний в трансдьюсере τ можно оценить следующим образом:

$$|\tau| = |Q| = \sum_{i=0}^{r} \binom{\ell}{i} \le 2^{\ell}\, e^{\frac{-2(\ell/2-r)^2}{\ell}}.$$

В результате мы получаем требуемую оценку недетерминированной сложности динамической окрестности $\mathcal{O}(L, r, \ell)$. □

В заключение отметим, что хотя все построения делались для случая расстояния Хэмминга, основные идеи доказательства переносятся и на случай других важных для приложений расстояний (например, на случай расстояния Левенштейна [2]). Для построения соответствующего трансдьюсера надо лишь правильно определить множество допустимых векторов ошибок и нужным образом организовать переходы между ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С.** Введение в теорию автоматов. М.: Наука, 1985. 320 с.
2. **Левенштейн В.И.** Двоичные коды с исправлением выпадений, вставок и замещений символов // Докл. АН СССР. М., 1965. Т. 163, № 4. С. 846–848.
3. **Чашкин А.В.** Лекции по дискретной математике. М.: МГУ, 2007. 261 с.
4. Modern information retrieval / Eds. R. Baeza-Yates, B. Ribeiro. Boston: Addison-Wesley, 1999. 513 p.
5. **Calude C., Salomaa K., Yu S.** Metric lexical analysis // Lecture notes in computer science. Vol. 2214. Berlin: Springer, 2001. P. 48–59.
6. **Epifanio C., Gabriele A., Mignosi F., Restivo A., Sciortino M.** Languages with mismatches // Theoret. Comp. Science. 2007. Vol. 385, no. 1–3. P. 152–166.
7. **Hopcroft J.E., Motwani R., Ullman J.D.** Introduction to automata theory, languages, and computation. Boston: Addison-Wesley, 2001. 521 p.
8. **Kukich K.** Techniques for automatically correcting words in text // ACM Computing Surveys. 1992. Vol. 24, no. 4. P. 377–439.
9. **Myers E.** Algorithmic Advances for Searching Biosequence Databases // Computational methods in genome research / Ed. S. Suhai. New York: Plenum Press, 1994. P. 121–125.
10. **Navarro G.** A Guided tour to approximate string matching // ACM Computing Surveys. 2001. Vol. 33. P. 31–88.
11. **Sakarovitch J.** Éléments de théorie des automates. Paris: Vuibert, 2003. 816 p.
12. **Ukkonen E.** Finding approximate patterns in strings // J. Alg. 1985. Vol. 6. P. 132–137.
13. **Waterman M.** Introduction to computational biology. London: Chapman and Hall, 1995. 431 p.
14. **Wu S., Manber U.** Fast text searching allowing errors // Communicaions of the ACM. 1992. Vol. 35, no. 10. P. 83–91.
15. **Yu S.** Regular languages // Handbook of formal languages / Eds. G. Rozenberg, A. Salomaa. Vol. 1. New York: Springer, 1997. P. 41–110.

Поваров Григорий Андреевич
аспирант
Урал. гос. ун-т
e-mail: grigoriy.povarov@gmail.com

Поступила 25.02.2009

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

УДК 512.54

О ГРУППАХ ШУНКОВА С СИЛЬНО ВЛОЖЕННОЙ ПОДГРУППОЙ[1]

В. И. Сенашов

Изучаются бесконечные группы Шункова с условием: нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. При этом условии устанавливается почти слойная конечность периодической части группы Шункова с сильно вложенной подгруппой, обладающей черниковской почти слойно конечной периодической частью. Ранее автором была установлена почти слойная конечность группы Шункова с сильно вложенной подгруппой при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп и при условии периодичности группы.

Ключевые слова: бесконечные группы, условия конечности, слойная конечность, периодичность.

V. I. Senashov. On Shunkov Groups with a strongly embedded subgroup.

Infinite Shunkov groups with the following condition are studied: the normalizer of any finite nontrivial subgroup has an almost layer-finite periodic part. Under this condition, the almost layer-finiteness of the periodic part of a Shunkov group with a strongly embedded subgroup possessing a Chernikov almost layer-finite periodic part is established. Earlier, the author proved the almost layer-finiteness of a Shunkov group with a strongly embedded group under the conditions that all proper subgroups are almost layer-finite and that the group is periodic.

Keywords: infinite groups, finiteness conditions, layer-finiteness, periodicity.

Слойно конечные группы впервые появились без названия в статье С. Н. Черникова [1], а затем в его последующих публикациях за ними закрепилось название слойно конечных групп. Группа называется *слойно конечной*, если множество ее элементов любого данного порядка конечно. *Почти слойно конечные группы* — это расширения слойно конечных групп при помощи конечных групп.

Здесь мы изучаем бесконечные группы с условием: нормализатор любой конечной нетривиальной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью. Класс групп, удовлетворяющий этому условию, довольно широк. В нем содержатся свободные бернсайдовские группы нечетного периода ≥ 665 [2] и группы, построенные А. Ю. Ольшанским [3]. Рассматривается классический вопрос: как свойства системы подгрупп влияют на свойства всей группы? Показывается, что почти слойная конечность распространяется на периодическую часть группы G с периодических частей нормализаторов нетривиальных конечных подгрупп группы G, когда G является группой Шункова, обладающей сильно вложенной подгруппой с черниковской почти слойно конечной периодической частью.

Группой Шункова называется такая группа G, в которой для любой ее конечной подгруппы K в фактор-группе $N_G(K)/K$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу. В статье изучается класс групп Шункова. Это название закрепилось в 1997 г. за сопряженно бипримитивно конечными группами, введенными В. П. Шунковым. Оно уже используется в работах автора, А. И. Созутова, А. К. Шлепкина, А. В. Рожкова, Л. Хаммуди и других авторов.

Напомним, что *сильно вложенной* называется собственная подгруппа H группы G, если H содержит элемент порядка 2 (инволюцию) и для любого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппа $H \cap H^g$ не содержит инволюций. Бесконечные группы с сильно вложенной подгруппой изучались также в работах [4–11]. Ранее автором была установлена почти слойная конечность

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00395) и гранта Сибирского федерального университета (проект “Элитное математическое образование в СФУ”).

группы Шункова с сильно вложенной подгруппой при условии почти слойной конечности всех собственных подгрупп [12] и при условии периодичности группы [13]. В данной работе рассматривается случай смешанных групп, и условие почти слойной конечности накладывается только на периодические части нормализаторов конечных нетривиальных подгрупп.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть группа Шункова G содержит сильно вложенную подгруппу, обладающую черниковской почти слойно конечной периодической частью. Если в G нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы обладает почти слойно конечной периодической частью, то сама группа G обладает почти слойно конечной периодической частью.*

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Так как в G есть сильно вложенная подгруппа, то G обладает инволюциями. Обозначим через i некоторую инволюцию из центра силовской 2-подгруппы S группы G; такая найдется ввиду того, что силовские примарные подгруппы в G черниковские по [13, лемма 1], и того, что всякая черниковская примарная группа обладает нетривиальным центром по [14, теорема 1.6].

Пусть в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков конечно. Тогда по условиям теоремы и [15, теорема 1] либо G обладает почти нильпотентной периодической частью, либо G — T_0-группа.

Напомним определение класса T_0-групп. Группа G с инволюцией i называется T_0-*группой*, если выполняются условия: (1) все подгруппы вида $\langle i, i^g\rangle$, $g \in G$, конечны; (2) силовские 2-подгруппы из G — циклические группы или обобщенные группы кватернионов; (3) централизатор $C_G(i)$ бесконечен и обладает конечной периодической частью; (4) нормализатор любой нетривиальной $\langle i\rangle$-инвариантной локально конечной подгруппы из G либо содержится в $C_G(i)$, либо обладает периодической частью, являющейся группой Фробениуса с абелевым ядром и конечным неинвариантным множителем четного порядка; (5) $C_G(i) \neq G$ и для всякого элемента c из $G \setminus C_G(i)$, строго вещественного относительно i, т. е. $c^i = c^{-1}$, в $C_G(i)$ существует такой элемент s_c, что подгруппа $\langle c, c^{s_c}\rangle$ бесконечна.

Если периодическая часть группы G почти нильпотентна, то G обладает периодической нильпотентной нормальной подгруппой K конечного индекса в периодической части группы G. Так как K обладает нетривиальным центром $Z(K)$, то централизатор любого неединичного элемента из $Z(K)$ по условиям теоремы обладает почти слойно конечной периодической частью, очевидно, содержащей K. Тогда K почти слойно конечна, а вместе с ней почти слойно конечна и периодическая часть группы G как расширение почти слойно конечной группы при помощи конечной группы. Таким образом, в случае, когда периодическая часть группы G почти нильпотентна, теорема доказана. T_0-группой группа G быть не может, так как в группе Шункова не выполняется условие (5) из определения T_0-группы.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что в централизаторе $C_G(i)$ множество элементов конечных порядков бесконечно.

Так как по [16, предложение 4.3] в группе с сильно вложенной подгруппой все инволюции сопряжены, то по условиям теоремы в группе G найдется сильно вложенная подгруппа H с черниковской почти слойно конечной периодической частью, содержащая $C_G(i)$.

Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что в группе G найдется нечерниковская почти слойно конечная подгруппа W с инволюциями, так как иначе по [17, теорема 3.1] и условиям доказываемой теоремы сама группа G обладала бы черниковской и, значит, почти слойно конечной периодической частью. Ввиду леммы Цорна и [18, теорема 1] группу W можем считать максимальной почти слойно конечной подгруппой. Обозначим через B нормализатор в G подгруппы W, а через $\mathfrak{M}$ — множество всех подгрупп группы G вида $L_g = \langle a, a^g\rangle$, где a — элемент некоторого простого порядка p из B и $g \in G \setminus B$. Так как G является группой Шункова, подгруппы L_g конечны.

По [17, лемма 2.3] слойно конечный радикал $R(W)$ нечерниковской группы W является нечерниковской группой. По [14, теоремы 3.3, 3.7] $R(W)$ можно представить в виде произведения двух поэлементно перестановочных подгрупп A и B, где A — полная абелева группа, а B — локально нормальная группа с конечными силовскими подгруппами. Если бы множество $\pi(W)$ было конечным, то группа A являлась бы прямым произведением конечного числа квазициклических групп, а группа B — конечной группой, и тогда группа $R(W)$ была бы черниковской. Противоречие означает, что $\pi(W)$ бесконечно, и поэтому число p можно считать таким достаточно большим, что p не делит индекс $|W : R(B)|$, где $R(B)$ — слойно конечный радикал группы B. Будем также предполагать, что $p \notin \pi(H)$, это можно сделать ввиду черниковости периодической части группы H. Напомним, что через $\pi(H)$ обозначается множество простых делителей порядков элементов группы H.

Зафиксируем в дальнейшем введенные обозначения $i, S, B, W, H, \mathfrak{M}$.

Доказательству теоремы предпошлем ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть F и M — две различные бесконечные максимальные почти слойно конечные подгруппы группы $G, R(F)$ и $R(M)$ — их слойно конечные радикалы соответственно. Тогда пересечение $R(F) \cap R(M)$ единично.*

Доказательство повторяет доказательство [18, лемма 10] для групп без инволюций.

Лемма 2. *Если для некоторого элемента и конечного порядка из G пересечение $C_G(u) \cap W$ бесконечно, то периодическая часть группы $C_G(u)$ содержится в B.*

Доказательство повторяет доказательство [18, лемма 11] для групп без инволюций.

Лемма 3. *Любая группа L_g четного порядка из множества $\mathfrak{M}$ обладает сильно вложенной подгруппой.*

Доказательство. Ввиду сильной вложенности подгруппы H в группе G все инволюции в группе G сопряжены. Подберем элемент b из G таким образом, чтобы группа L_g^b содержала инволюцию i. Ввиду выбора числа p элемент a^b не принадлежит группе H. Таким образом, группа L_g^b не содержится в H, и пересечение $L_g^b \cap H$ содержит инволюцию i. Ввиду сильной вложенности группы H в группе G подгруппа $L_g^b \cap H$ сильно вложена в L_g^b. Поэтому сильно вложенная подгруппа найдется и в группе L_g. Лемма доказана.

Лемма 4. *Можно считать, что p выбрано настолько большим, что группы из $\mathfrak{M}$ не содержат инволюций.*

Доказательство. Пусть V — произвольная группа четного порядка из $\mathfrak{M}$. По лемме 3 и [19, теорема 97] она обладает сильно вложенной подгруппой, так что группа $\overline{V} = V/O_{2'}(V)$ либо имеет единственную инволюцию, либо обладает нормальной подгруппой F нечетного индекса, которая изоморфна одной из групп $PSL(2, K), Sz(K), PSU(3, K)$, где K — конечное поле характеристики 2.

Рассмотрим сначала второй случай. Обозначим через $\mathfrak{N}$ подмножество подгрупп из $\mathfrak{M}$, для которых реализуется эта возможность. Так как силовские 2-подгруппы в G сопряжены и являются черниковскими, то по условиям теоремы порядки нижних слоев силовских 2-подгрупп в группах из множества $\mathfrak{N}$ ограничены (эти нижние слои — элементарные абелевы подгруппы). Поэтому по свойствам групп $PSL(2, K), Sz(K), PSU(3, K)$ порядок группы F ограничен некоторым числом, не зависящим от p. Ясно, что $F \leq \overline{V} \leq Aut(F)$.

Выберем число p настолько большим, что оно не делит $|Aut(F)|$. Но тогда порождающие элементы a и a^g группы V принадлежат $O_{2'}(V)$; противоречие с тем, что группа V четного порядка.

Итак, выполняется первый случай, т.е. $\overline{V}$ обладает единственной инволюцией. Тогда силовская 2-подгруппа в $\overline{V}$ либо циклическая группа, либо (обобщенная) группа кватернионов, откуда по [17, теорема 1.36] группа V имеет вид $V = O_{2'}(V) \cdot C_V(w)$, где w — некоторая инволюция из V, причем ввиду сопряженности инволюций в группе G можем считать, что $w \in H$. Ввиду включения $C_G(w) \le H$ и выбора числа $p \notin \pi(H)$ порождающие элементы a и a^g группы V принадлежат $O_{2'}(V)$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если в группе W найдется почти регулярная инволюция, то группа W почти абелева. В этом случае можно считать, что число p выбрано так, что оно не делит индекс $|W : A(W)|$, где $A(W)$ — абелев радикал группы W.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть k — почти регулярная инволюция в W. Поскольку в бесконечной слойно конечной группе $R(W)$ централизаторы всех элементов бесконечны, то $k \in W \setminus R(W)$. Так как слойно конечная группа обладает полной частью, содержащейся ввиду [14, теорема 3.3] в ее центре, то слойно конечный радикал $R(W)$ группы W обладает полной частью A, причем $A \le Z(R(W))$. В группе $R(W) \leftthreetimes (k)$, очевидно, A является нормальной подгруппой.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{R(W) \leftthreetimes (k)} = R(W) \leftthreetimes (k)/A$. Так как в $\overline{R(W)} = R(W)/A$ нет бесконечных силовских подгрупп, то по [14, лемма 3.5] для каждого простого числа q в $\overline{R(W)}$ найдется q'-подгруппа $\overline{R_q(W)}$ конечного индекса, нормальная в $\overline{R(W) \leftthreetimes (k)}$. Рассмотрим пересечение $\overline{C}$ подгрупп $\overline{R_q(W)}$ по всем $q \in \pi(C_{\overline{R(W)}}(\overline{k})$. Подгруппа $\overline{C}$ имеет конечный индекс в $\overline{R(W)}$ ввиду почти регулярности инволюции $\overline{k}$ в $\overline{R(W) \leftthreetimes (k)}$. Так как множества $\pi(C_{\overline{R(W)}}(kA))$ и $\pi(\overline{C})$ не пересекаются, то $\overline{k}$ действует на $\overline{C}$ регулярно. По [19, теорема 2] локально конечная группа $\overline{C}$, обладающая регулярным автоморфизмом $\overline{k}$ порядка 2, абелева. Ввиду локальной конечности группы $\overline{C} \leftthreetimes (\overline{k})$ и свойств групп Фробениуса инволюция $\overline{k}$ инвертирует $\overline{C}$.

Так как A и $\overline{C}$ являются абелевыми 2-полными группами (группа называется 2-*полной*, если ее силовские 2-подгруппы полны или единичны), то по [16, предложение 3.2] полный прообраз C группы $\overline{C}$ в группе $R(W)$ является абелевой группой. Поскольку она имеет конечный индекс в W, это доказывает первое утверждение леммы.

Выбор числа p во втором утверждении леммы возможен ввиду конечности индекса $|W : A(W)|$ и бесконечности множества $\pi(W)$. Лемма доказана.

Лемма 6. *В дополнение к выбору числа p можно предполагать, что оно не принадлежит $\pi(C_W(b))$, где b пробегает элементы простых порядков из W с централизаторами, имеющими бесконечный индекс в W, и оно не является порядком регулярного автоморфизма никакой элементарной абелевой q-группы из W для всех простых чисел q, делящих $|W : R(W)|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как по [20, теорема 2.5.6] централизатор любого элемента из слойно конечного радикала $R(W)$ почти слойно конечной группы W имеет конечный индекс в W, то с точностью до сопряженности в группе W найдется лишь конечное число элементов простых порядков с централизаторами, имеющими бесконечный индекс в W.

Так как группа W почти слойно конечна, то множество простых делителей индекса $|W : R(W)|$ конечно. Поэтому порядки элементарных абелевых q-подгрупп в почти слойно конечной группе W для всех простых чисел q из этого множества ограничены в совокупности. Следовательно, множество простых порядков регулярных автоморфизмов элементарных абелевых q-групп для всех простых чисел q, делящих индекс $|W : R(W)|$, также конечно. Поскольку выбор для числа p бесконечен, лемма доказана.

Лемма 7. *Можно считать, что в множестве $\mathfrak{M}$ нет подгрупп L_g, для которых нильпотентный радикал $F(L_g)$ является p-группой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для некоторой подгруппы $L_g = \langle a, a^g \rangle$ из $\mathfrak{M}$ нильпотентный радикал $F(L_g)$ является p-группой. Выберем из центра конечной p-группы $\langle a, F(L_g) \rangle$ элемент b порядка p. По лемме 2 периодическая часть централизатора $C_G(a)$ содержится в W вместе с элементом b. По выбору числа p элемент b содержится в $R(W)$, а по [20, теорема 2.5.6] централизатор $C_W(b)$ бесконечен. Следовательно, по лемме 2 периодическая часть централизатора $C_G(b)$ содержится в W. Так как элемент b принадлежит центру группы $\langle a, F(L_g)\rangle$, то и группа $F(L_g)$ содержится в W. Ввиду выбора числа p группа $F(L_g)$ содержится в слойно конечном радикале $R(W)$ группы W.

Теперь выберем из пересечения подгруппы $F(L_g)$ с центром конечной p-группы $\langle a^g, F(L_g)\rangle$ элемент d порядка p. По лемме 2 и по [20, теорема 2.5.6] периодическая часть централизатора $C_G(d)$ содержится в W вместе с элементом a^g. По выбору числа p элемент a^g содержится в $R(W)$. Таким образом, группа L_g содержится в слойно конечном радикале $R(W)$ группы W. Так как группа $R(W)$ слойно конечна, то таких групп L_g в множестве $\mathfrak{M}$ лишь конечное число. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть T — максимальная почти слойно конечная подгруппа с сильно вложенным нормализатором в G, V — подгруппа, сопряженная с T в G, h — нетривиальный примарный элемент из $D = T \cap V$. Если централизатор $C_V(h)$ бесконечен, то и централизатор $C_T(h)$ бесконечен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству [21, лемма 9].

Лемма 9. *Если в группе W все инволюции имеют бесконечные централизаторы, то подгруппа B сильно вложена в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в группе W все инволюции имеют бесконечные централизаторы. По лемме 2 периодические части централизаторов инволюций из W содержатся в B. Если пересечение $B \cap B^g$, где $g \in G \setminus B$, содержит некоторую инволюцию, то оно содержит и бесконечную периодическую часть ее централизатора, что невозможно, так как по лемме 1 максимальные почти слойно конечные подгруппы W и W^g могут пересекаться только по конечной подгруппе. Лемма доказана.

Лемма 10. *Простое число p можно выбрать таким достаточно большим, что силовские p-подгруппы в группах $L_g = \langle a, a^g\rangle$ из $\mathfrak{M}$ циклические.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g\rangle$ из $\mathfrak{M}$. Обозначим через P силовскую p-подгруппу из L_g, содержащую элемент a. Так как P обладает нетривиальным центром, то выберем элемент b простого порядка из $Z(P)$. Ввиду выбора числа p, не делящего индекс $|W : R(W)|$, централизатор $C_W(a)$ бесконечен. Ввиду леммы 2 $b \in B$, и, значит, $b \in R(W)$ и периодическая часть C централизатора $C_B(b)$ бесконечна. Тогда по лемме 2 $C \leq B$. Следовательно, P содержится в B.

Предположим, что P не является циклической подгруппой. Обозначим через R элементарную абелеву подгруппу порядка p^2 из P, содержащую элемент a. Рассмотрим подгруппу $O_{p'}(L_g) \leftthreetimes R$ ($O_{p'}(L_g) \neq 1$ по леммам 4, 7 и теореме Файта — Томпсона). Согласно [16, теорема 1.21] $O_{p'}(L_g) \leq \langle C_G(r) \mid r \in R^{\#}\rangle$. Как отмечалось выше, элементы из $R^{\#}$ имеют бесконечные централизаторы в W, поэтому в силу леммы 2 периодические части централизаторов этих элементов, а значит, $O_{p'}(L_g)$ содержатся в B.

Пусть в группе W все инволюции имеют бесконечные централизаторы. Тогда по лемме 9 подгруппа B сильно вложена в G. Проведя аналогичные рассуждения относительно подгруппы B^g вместо B и элемента a^g вместо a, видим, что $O_{p'}(L_g) < B^g$. Таким образом, $O_{p'}(L_g) < W \cap W^g$. Ввиду предположения и [16, теорема 1.21] в $O_{p'}(L_g)$ найдется элемент h простого порядка, перестановочный с некоторым неединичным элементом из R. По лемме 6 централизатор в W элемента h бесконечен, следовательно, по лемме 2 периодическая часть централизатора $C_G(h)$ содержится в B. Отсюда по лемме 8 централизатор в W^g элемента h также бесконечен и, следовательно, по лемме 1 $W = W^g$; противоречие с выбором элемента $g \in G \setminus B$.

Таким образом, в группе W найдется почти регулярная инволюция. Тогда по лемме 5 группа W почти абелева, и ввиду выбора числа p подгруппа R содержится в абелевом радикале $A(W)$ подгруппы W. Пусть Q — силовская q-подгруппа из $O_{p'}(L_g)$ для некоторого простого числа q. По лемме Фраттини [22] Q выберем таким образом, чтобы Q нормализовалась подгруппой R. Если $Q < A(W)$, то, очевидно, Q централизует R. Если q — делитель индекса $|W : A(W)|$, то по определению абелевого радикала R нормализуется подгруппой Q. Таким образом, опять получаем, что Q централизует R. Так как это рассуждение проходит для любого $q \in \pi(O_{p'}(L_g))$, то $O_{p'}(L_g) < C_G(a)$. Отсюда и ввиду выбора числа p все элементы из $O_{p'}(L_g)$ имеют в W бесконечные централизаторы, так что по лемме 2 периодические части централизаторов этих элементов содержатся в B. Снова по [16, теорема 1.21] в $O_{p'}(L_g)$ найдется элемент c простого порядка, перестановочный с некоторым неединичным элементом r из элементарной абелевой p-подгруппы из L_g, содержащей элемент a^g. По лемме 6 централизатор $C_W(c)$ бесконечен, следовательно, по лемме 2 периодическая часть группы $C_G(c)$ содержится в B. Аналогично, периодическая часть группы $C_G(r)$ содержится в B. Отсюда получаем, что и элемент a^g содержится в B. Напомним, что элемент a принадлежит группе B. Снова по выбору числа p имеем $|C_G(a) \cap W| = \infty$ и $|C_G(a^g) \cap W| = \infty$, поэтому $|C_G(a^g) \cap W^g| = \infty$. Значит, по лемме 1 $W = W^g$; противоречие с выбором элемента $g \in G \setminus B$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. В силу леммы 10 считаем, что найдется элемент $a \in B$ порядка p такого, что силовские p-подгруппы в группе $L_g = \langle a, a^g\rangle$ из $\mathfrak{M}$ циклические. Поэтому ввиду лемм 4, 7 и теоремы Файта-Томпсона нильпотентный радикал N_g группы L_g есть неединичная p'-группа.

Предположим, что в $C_{L_g}(a)$ найдется элемент b простого порядка, который перестановочен с нетривиальным элементом c из N_g. По лемме 6 элемент b имеет бесконечный централизатор в W, значит, по лемме 2 периодическая часть централизатора элемента b содержится в B вместе с элементом c. Отсюда следует, что пересечение $D_g = N_g \cap B$ нетривиально, так как содержит элемент c. Поэтому подгруппа $O_q(D_g)$ нетривиальна для некоторого $q \in \pi(D_g)$. Рассмотрим нижний слой A_g центра группы $O_q(D_g)$. Тогда A_g — неединичная $\langle a\rangle$-допустимая характеристическая элементарная абелева q-подгруппа в D_g.

Обозначим через C периодическую часть группы $C_G(A_g)$ и покажем, что подгруппа C бесконечна и содержится в B. Если a действует регулярно на A_g, то по лемме 6 $A_g < R(W)$ и, следовательно, по лемме 2 C содержится в B, а тогда по [20, теорема 2.5.6] группа C бесконечна.

Пусть теперь элемент a перестановочен с нетривиальным элементом d из A_g. Снова по лемме 6 элемент d имеет бесконечный централизатор в W, а по лемме 2 периодическая часть централизатора элемента d содержится в B. Поэтому C тоже содержится в B. Кроме того, группа C также бесконечна. Действительно, группу A_g можно представить в виде $A_g = C_g \times B_g$, где $C_g = C_{A_g}(a)$, а на B_g элемент a действует регулярно. Если подгруппа B_g неединична, то по лемме 6 $A_g < R(W)$, и снова, как и выше, получаем бесконечность группы C. Пусть теперь $B_g = 1$, т. е. $A_g = C_g$. Так как группа A_g конечна, а по лемме 6 централизатор $C_W(c)$ для любого элемента c из A_g имеет конечный индекс в W, то централизатор $C_W(A_g)$ также имеет конечный индекс в W. Таким образом, централизатор $C_W(A_g)$ бесконечен, и, значит, бесконечна его периодическая часть C.

Итак, в любом случае периодическая часть C группы $C_G(A_g)$ бесконечна и содержится в B. Отсюда вытекает, что группа C почти слойно конечна (напомним, что периодическая часть W группы B почти слойно конечна). Ввиду конечности индекса $|N_G(A_g) : C_G(A_g)|$ периодическая часть F нормализатора $N_G(A_g)$ тоже почти слойно конечна (как расширение почти слойно конечной группы C с помощью конечной группы). Включая группу F в максимальную почти слойно конечную подгруппу H группы G, получаем, что две максимальные почти слойно конечные подгруппы W и H пересекаются по бесконечной подгруппе, содержащей C. По лемме 1 получаем совпадение подгрупп W и H и включение периодической части нормализатора $N_G(A_g)$ в B. Так как A_g является характеристической подгруппой в D_g, то периодическая часть группы $N_G(D_g)$ также содержится в B.

Если $N_g \neq D_g$, то ввиду нормализаторного условия в нильпотентных группах нормализатор подгруппы D_g в N_g отличен от D_g и по доказанному содержится в B, что противоречит построению подгруппы D_g. Поэтому $N_g = D_g$, откуда ввиду нормальности подгруппы N_g в L_g и доказанного выше включения периодической части нормализатора $N_G(D_g)$ в B получаем $L_g < B$ вопреки выбору группы L_g.

Таким образом, любой элемент простого порядка из $C_{L_g}(a)$ действует регулярно на N_g. Поэтому ввиду [16, лемма 4.27] и леммы 10 L_g — группа Фробениуса с неинвариантным множителем (a). По основной теореме из [23] группа G либо обладает нетривиальной нормальной локально конечной подгруппой, либо имеет вид $G = F \leftthreetimes N_G((a))$, где $F \leftthreetimes (a)$ — группа Фробениуса. В последнем случае ввиду теоремы Шмидта и [17, лемма 4.6] группа G обладает неединичным локально конечным радикалом.

Итак, в любом случае в группе G найдется нормальная неединичная локально конечная подгруппа, которая по [18, теорема 1] почти слойно конечна, следовательно, в этой подгруппе имеется конечная характеристическая подгруппа, нормализатор которой по условию теоремы обладает почти слойно конечной периодической частью. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черников С.Н.** К теории бесконечных p-групп // Докл. АН СССР. Т. 50. 1945. С. 71–74.
2. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 336 с.
3. **Ольшанский А.Ю.** Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. 448 с.
4. **Измайлов А.Н., Шунков В.П.** Два признака непростоты группы с бесконечно изолированной подгруппой // Алгебра и логика. 1982. Т. 21, № 6. С. 647–669.
5. **Измайлов А.Н.** О сильно вложенной бесконечно изолированной подгруппе в периодической группе // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 2. С. 128–137.
6. **Мазуров В.Д.** О дважды транзитивных группах подстановок // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 102–104.
7. **Мазуров В.Д.** О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 1. С. 74–86.
8. **Созутов А.И.** О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, № 5. С. 602–617.
9. **Созутов А.И., Сучков Н.М.** О бесконечных группах с заданной сильно изолированной 2-подгруппой // Мат. заметки. 2000. Т. 68, вып. 2. С. 272–285.
10. **Созутов А.И.** Два признака непростоты группы с сильно вложенной подгруппой и конечной инволюцией // Мат. заметки. 2001. Т. 69, вып. 3. С. 443–453.
11. **Сучков Н.М.** О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 153–160.
12. **Сенашов В.И.** Достаточные условия почти слойной конечности группы // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 4. С. 472–485.
13. **Сенашов В.И.** Строение бесконечной силовской подгруппы в некоторых периодических группах Шункова // Дискрет. математика. 2002. Т. 14, № 4. С. 133–152.
14. **Черников С.Н.** Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.
15. **Шунков В.П.** T_0-группы. Новосибирск: Наука, 2000. 178 с.
16. **Шунков В.П.** M_p-группы. М.: Наука, 1990. 160 с.
17. **Шунков В.П.** О вложении примарных элементов в группе. Новосибирск: Наука, 1992. 148 с.
18. **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Почти слойная конечность периодической части группы без инволюций // Дискрет. математика. 2003. Т. 15, № 3. С. 91–104.
19. **Сенашов В.И., Шунков В.П.** Группы с условиями конечности. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 336 с.
20. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1982. 288 с.
21. **Сенашов В.И.** Группы с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 7–8. С. 1002–1008.

22. **Курош А.Г.** Теория групп. 3-е изд. М.: Наука, 1967. 648 с.
23. **Созутов А.И., Шунков В.П.** О бесконечных группах, насыщенных фробениусовыми подгруппами. Ч. 1, 2 // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 711–735; Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 2. С. 206–223.

Сенашов Владимир Иванович,
д-р физ.-мат. наук, профессор
ведущий науч. сотрудник
Ин-т вычисл. моделирования СО РАН
e-mail: sen@icm.krasn.ru

Поступила 27.10.2008

Том 15 № 2 2009

УДК 534.1

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ О КОЛЕБАНИЯХ ПЛОСКИХ МЕМБРАН[1]

В. П. Федотов, А. А. Контеев

В работе описан модифицированный метод граничных элементов (ММГЭ) для решения задач гиперболического типа на примере задачи колебаний плоской мембраны. Модификация метода заключается в аналитическом вычислении компонентов тензора влияния, причем интегрирование осуществляется не по всем элементам границы, а однократно по специально выбранному базовому элементу.

Ключевые слова: мембрана, колебание, граница, фундаментальное решение, параллельные вычисления.

V. P. Fedotov, A. A. Konteev. Modified boundary element method for problems about oscillations of flat membranes.

A modified boundary element method (MBEM) for hyperbolic problems is exemplified by solving the problem of oscillations of a flat membrane. The modification of the method consists in the analytical computation of the components of the influence vector; the integration is carried out not over all the component of the boundary but only once over a specially chosen base element.

Keywords: membrane, oscillation, boundary, elementary solution, parallel computing.

Введение

Задачей является решение уравнения гиперболического типа в области $\Omega \in \mathbb{R}^2$ [1]:

$$\nabla^2 u(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t)}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \in \mathbb{R}^2, \tag{0.1}$$

на границе Γ области Ω заданы отклонения либо деформации

$$u(\mathbf{x},t) = \overline{u}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \qquad \frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial \mathbf{n}} = \overline{q}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \tag{0.2}$$

и начальные условия в области Ω

$$u(\mathbf{x},t)\big|_{t=t_0} = \varphi(\mathbf{x}), \quad \left.\frac{\partial u(\mathbf{x},t)}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{0.3}$$

В методе граничных элементов (МГЭ) [2] авторы переходят к обобщенной формулировке, требуя выполнения исходного уравнения (0.1) в целом по области с весом u^*

$$\int\limits_{t_0}^{t_F}\int\limits_{\Omega}\left(\nabla^2 u(\mathbf{x},\tau) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2}\right)u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)d\Omega(\mathbf{x})\,d\tau = 0, \tag{0.4}$$

где в качестве весовой функции $u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,t)$ выбрано фундаментальное решение уравнения (0.1). Кроме того, от этой функции требуется выполнение принципа причинности

$$\nabla^2 u^*(\mathbf{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)}{\partial \tau^2} = \delta(\|\xi - \mathbf{x}\|)\delta(t_F - \tau), \tag{0.5}$$

$$u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau) = 0 \quad \text{при} \quad c(t_F - t) < |\mathbf{x} - \xi|. \tag{0.6}$$

[1]Работа выполнена при поддержке программы президиума РАН №14.

Первое слагаемое выражения (0.4) дважды преобразуется по формуле Гаусса — Остроградского, второе — дважды интегрированием по частям. В итоге получаем

$$\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Omega}\left(\nabla^2 u(\mathbf{x},\tau)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2}\right)u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)\,d\Omega(\mathbf{x})\,d\tau$$
$$=\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Omega}\left(\nabla^2 u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)}{\partial\tau^2}\right)u(\mathbf{x},t_F)\,d\Omega(\mathbf{x})\,d\tau$$
$$+\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma}\nabla u(\mathbf{x},\tau)u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau-\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma}u(\mathbf{x},\tau)\nabla u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau$$
$$+\int_{\Omega}\frac{1}{c^2}\left(u(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)\right)\Bigg|_{\tau=t_0}^{\tau=t_F}d\Omega(\mathbf{x})=0. \qquad (0.7)$$

Применяя последнее свойство (0.6) фундаментального решения к выражению (0.7), а также учитывая, что верхний предел интегрирования обращается в нуль при $t_F=\tau$, поскольку $u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,t)=\partial u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,t)/\partial t=0$, для произвольной точки области можно записать соотношение

$$u^*(\xi,t_F)=\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma}u(\mathbf{x},\tau)\nabla u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau-\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma}\nabla u(\mathbf{x},\tau)u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau$$
$$+\int_{\Omega}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)-u(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\tau=t_0}d\Omega(\mathbf{x}). \qquad (0.8)$$

В соотношении (0.8) интегрирование ведется по всей границе, в то время как функции $u(\mathbf{x},t)$ и $q(\mathbf{x},t)$ заданы только на части границы. Поскольку последнее уравнение справедливо на всей области Ω, и в том числе на ее границе Γ, функции $u(\mathbf{x},t)$ и $q(\mathbf{x},t)$ можно доопределить, устремив точку ξ к границе и решив граничное интегральное уравнение

$$\alpha(\xi)u^*(\xi,t_F)=\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma}u(\mathbf{x},\tau)\nabla u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau-\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma}\nabla u(\mathbf{x},\tau)u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau$$
$$+\int_{\Omega}\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)-u(\mathbf{x},\tau)\frac{\partial u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)}{\partial\tau}\right)\Bigg|_{\tau=t_0}d\Omega(\mathbf{x}), \qquad (0.9)$$

где $\alpha(\xi)=1/2$ для регулярной границы.

1. МГЭ для двумерного случая

В двумерном случае граничные условия (0.2) характеризуют способ закрепления границ. Условие $u(\mathbf{x},t)\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_1}=\overline{u}(\mathbf{x},t)$ (условие I рода) означает движение границы по заданному закону, $\partial u(\mathbf{x},t)/\partial\mathbf{n}\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_2}=\overline{q}(\mathbf{x},t)$ (условие II рода) характеризует усилия, приложенные к границе.

Фундаментальное решение для двумерного случая представляет собой отклик среды на приложенное возмущение вида δ-функции в момент времени τ. Фундаментальное решение в двумерном случае имеет вид:

$$u^*=\frac{c\,H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\sqrt{c^2\,(t_F-\tau)^2-r^2}}\quad\text{при}\quad c(t_F-\tau)-r\neq 0, \qquad (1.1)$$

где $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, $r = \|\mathbf{x} - \xi\|$ — расстояние от точки влияния $\mathbf{x}$ до точки ξ. Сделаем, однако, следующую оговорку: всякий раз при дифференцировании функции $H(x)$ производную будем понимать в обыкновенном, а не в обобщенном смысле, т. е. в точке $x = 0$ производной не существует.

Нормальная производная функции $u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau)$ на границе Γ имеет вид:

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \mathbf{n}} = \frac{c\, r\, H(c\,(t_F - \tau) - r)}{2\,\pi \left(c^2\ (t_F - \tau)^2 - r^2\right)^{3/2}}\, n_r \quad \text{при} \quad c(t_F - \tau) - r \neq 0, \tag{1.2}$$

где $n_r = \partial r / \partial \mathbf{n}$ — производная радиус-вектора по нормали к границе.

Граничное интегральное соотношение (0.7) с учетом вида фундаментального решения (1.1) и его нормальной производной на границе (1.2) принимает вид:

$$\begin{aligned} u(\xi, t_F) = &\int\limits_{t_0}^{t_F} \int\limits_{\Gamma} u(\mathbf{x}, \tau) \frac{c\, r\, H(c\,(t_F - \tau) - r)}{2\,\pi \left(c^2\ (t_F - \tau)^2 - r^2\right)^{3/2}}\, n_r\, d\Gamma(\mathbf{x})\, d\tau \\ &- \int\limits_{t_0}^{t_F} \int\limits_{\Gamma} \nabla u(\mathbf{x}, \tau) \frac{c\, H(c\,(t_F - \tau) - r)}{2\,\pi \sqrt{c^2\,(t_F - \tau)^2 - r^2}}\, d\Gamma(\mathbf{x})\, d\tau \\ &+ \frac{1}{c^2} \int\limits_{\Omega} \left.\frac{\partial u(\mathbf{x}, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = t_0} \frac{c\, H(c\,(t_F - t_0) - r)}{2\,\pi \sqrt{c^2\,(t_F - t_0)^2 - r^2}}\, d\Omega(\mathbf{x}) \\ &+ \frac{1}{c^2} \int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x}, t_0) \frac{c^3\,(t_F - t_0)\, H(c\,(t_F - t_0) - r)}{2\,\pi \left(c^2\,(t_F - t_0)^2 - r^2\right)^{3/2}}\, d\Omega(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Первый и последний интегралы, входящие в соотношение (1.3), по отдельности расходятся, поскольку имеют особенности в окрестности точек $c(t_F - \tau) - r = 0$, однако их сумма конечна. В отдельных случаях граничное интегральное соотношение преобразуется таким образом, что неинтегрируемые особенности сокращаются.

В отличие от эллиптических задач для решения уравнений гиперболического типа необходимо задание начальных условий во всей области Ω. Это требует разбиения на элементы всей области, что ведет к усложнению вычислений и сводит на нет преимущества метода.

В ряде задач начальные условия представлены нулевыми либо, в более общем виде, гармоническими функциями. В этом случае размерность задачи уменьшается на единицу, т. е. от разбиения всей области мы переходим к разбиению только ее границы.

Пусть начальные условия заданы в виде гармонических функций. В этом случае с помощью второго тождества Грина интегралы по области в выражении (1.3) преобразуются в эквивалентные граничные интегралы. Второе тождество Грина для случая, когда u_0 — гармоническая функция, имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega} u_0 \nabla^2 U\, d\Omega = \int\limits_{\Gamma} \left(u_0 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} - U \frac{\partial u_0}{\partial \mathbf{n}}\right) d\Gamma.$$

С помощью простой подстановки можно убедиться, что

$$\begin{gathered} \left.\frac{\partial u^*(\xi, \mathbf{x}, t_F, \tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau = t_0} = \nabla^2 \left(\frac{c^2\, H(c\,(t_F - t_0) - r)}{2\,\pi} \ln\left(\frac{2\,(c\ (t_F - t_0) - R_F)}{r}\right)\right) = \nabla^2 U_\tau^*, \\ \frac{\partial U_\tau^*}{\partial \mathbf{n}} = \frac{c^3\ (t_F - t_0)\ H(c\,(t_F - t_0) - r)}{2\,\pi\, r \sqrt{c^2\,(t_F - t_0)^2 - r^2}}\, n_r, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где $R_F = \sqrt{c^2\,(t_F - t_0)^2 - r^2}$.

Применяя второе тождество Грина к последнему из интегралов правой части выражения (1.3) и учитывая (1.4), получаем

$$\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x},t_0)\frac{c^3\,(t_F-t_0)\,H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi\left(c^2\,(t_F-t_0)^2-r^2\right)^{3/2}}\,d\Omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{c^2}\int\limits_{\Omega} u(\mathbf{x},t_0)\frac{\partial u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=t_0} d\Omega(\mathbf{x})$$

$$= \frac{1}{c^2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u(\mathbf{x},t_0)}{\partial\mathbf{n}}U^*_\tau\,d\Gamma(\mathbf{x}) - \frac{1}{c^2}\int\limits_{\Gamma} u(\mathbf{x},t_0)\,\frac{\partial U^*_\tau}{\partial\mathbf{n}}\,d\Gamma(\mathbf{x}).$$

Первый из интегралов, стоящих в правой части соотношения, расходится, поскольку он содержит особенность вида $1/r$. Второй из интегралов по области Ω также можно преобразовать к эквивалентным интегралам по границе Γ. С помощью простой подстановки можно убедиться, что

$$u^*(\xi,\mathbf{x},t_F,t_0) = \nabla^2\left(\frac{c\,H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi}\left(c\,(t_F-t_0)\,\ln\left(\frac{2\,(c\,(t_F-t_0)-R_F)}{r\,c^2\,(t_F-t_0)^2}\right)-R_F\right)\right) = \nabla^2 U^*,$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial\mathbf{n}} = \frac{c\,H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi}\left(\frac{r}{R_F-c\,(t_F-t_0)}+\frac{c\,(t_F-t_0)}{r}\right)n_r.$$

Применяя второе тождество Грина, получаем

$$\frac{1}{c^2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=t_0}\frac{c\,H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi\sqrt{c^2\,(t_F-t_0)^2-r^2}}\,d\Omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{c^2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=t_0}\nabla^2 U^*(\xi,\mathbf{x},t_F,t_0)\,d\Omega(\mathbf{x})$$

$$= \frac{1}{c^2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=t_0}\frac{\partial U^*}{\partial\mathbf{n}}\,d\Omega(\mathbf{x}) + \frac{1}{c^2}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\left(\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\bigg|_{\tau=t_0}\right)U^*(\xi,\mathbf{x},t_F,t_0)\,d\Omega(\mathbf{x}).$$

Первый из интегралов соотношения (1.3) расходится, преобразуем его по частям. Учитывая, что верхний предел интегрирования обращается в нуль при $t_F = \tau$, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_F}\int\limits_{\Gamma} u(\mathbf{x},\tau)\frac{c\,r\,H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\left(c^2\;(t_F-\tau)^2-r^2\right)^{3/2}}\,n_r\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau$$

$$= \int\limits_{\Gamma} u(\mathbf{x},t_0)\,\frac{c\,(t_F-t_0)\;H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi\,r\sqrt{c^2\,(t_F-t_0)^2-r^2}}n_r\,d\Gamma(\mathbf{x})$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_F}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}\,\frac{c\,(t_F-\tau)\;H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\,r\sqrt{c^2\,(t_F-\tau)^2-r^2}}n_r\,d\Gamma(\mathbf{x})\,d\tau.$$

В итоге при подстановке в граничное интегральное соотношение (1.3) интегралы с особенностями сокращаются. Граничное интегральное соотношение (1.3) в случае, когда начальные условия заданы в виде гармонических функций, принимает вид:

$$u(\xi, t_F) = -\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma} \frac{\partial u(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau}\frac{c\,(t_F-\tau)\;H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\,r\,\sqrt{c^2\,(t_F-\tau)^2-r^2}} n_r\, d\Gamma(\mathbf{x})\, d\tau$$

$$-\int_{t_0}^{t_F}\int_{\Gamma} \nabla u(\mathbf{x},\tau)\frac{c\,H(c\,(t_F-\tau)-r)}{2\,\pi\,\sqrt{c^2\,(t_F-\tau)^2-r^2}}\, d\Gamma(\mathbf{x})\, d\tau$$

$$+\frac{1}{c^2}\int_{\Gamma}\psi(\mathbf{x})\frac{c\,H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi}\left(\frac{r}{R_F-c\,(t_F-t_0)}+\frac{c\,(t_F-t_0)}{r}\right) n_r\, d\Gamma(\mathbf{x})$$

$$+\frac{1}{c^2}\int_{\Gamma}\frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}\frac{c\,H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi}\left(c\,(t_F-t_0)\ln\left(\frac{2\,(c\,(t_F-t_0)-R_F)}{r\,c^2\,(t_F-t_0)^2}\right)-R_F\right)\, d\Gamma(\mathbf{x})$$

$$+\frac{1}{c^2}\int_{\Gamma}\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{n}}\,\frac{c^2\,H(c\,(t_F-t_0)-r)}{2\,\pi}\ln\left(\frac{2\,(c\,(t_F-t_0)-R_F)}{r}\right)\, d\Gamma(\mathbf{x}). \tag{1.5}$$

Все интегралы, стоящие в правой части последнего выражения, интегрируемы в обобщенном смысле. Кроме того, благодаря свойству (1.1) гармонических функций интегрирование функций, определяющих начальное отклонение и скорости точек мембраны, по области Ω удалось заменить эквивалентными интегралами по границе Γ.

2. ММГЭ для двумерного случая

Классический МГЭ предполагает численное вычисление интегралов по границе области. Такой подход был применен Мансуром [3]. Достоинствами метода является снижение на единицу размерности задачи и практически неограниченные возможности распараллеливания, поскольку наиболее затратные по времени операции интегрирования производятся независимо друг от друга на элементах границы.

В ММГЭ граница разбивается на отрезки прямых. В отличие от классического МГЭ интегрирование проведено аналитически, причем не по каждому элементу границы, а выбранному один раз базовому элементу, помещенному в начало координат.

Таким образом, в отличие от классического МГЭ, где фиксируется точка и вычисляется влияние каждого элемента границы на эту точку, в ММГЭ фиксируется базовый элемент и определяется влияние этого базового элемента на эквивалентную точку. Переход от произвольного элемента к базовому осуществляется аффинным преобразованием (см. рис. 1). Такой подход применялся в работе [4] для решения задач теории упругости и диффузии, там же была показана эквивалентность классического и предлагаемого подходов.

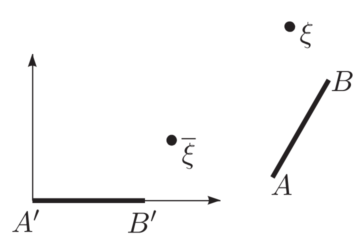

Рис. 1. Аффинное преобразование. Влияние элемента AB на точку ξ эквивалентно влиянию элемента $A'B'$ на точку $\overline{\xi}$.

Полученное соотношение (1.5) позволяет находить неизвестные на границе области функции $u(\mathbf{x}, t)$ и $q(\mathbf{x}, t)$. Будем предполагать, что граница Γ задана кусочно-линейной функцией, причем отрезки границы имеют ориентацию.

Выберем теперь элемент границы — отрезок. Относительно него введем специальную систему координат таким образом, что ее начало O совпадает с началом отрезка, а ось OX направлена вдоль направления, задаваемого отрезком, ось OY образована поворотом оси OX на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Такой элемент в дальнейшем договоримся называть базовым, а систему координат — системой координат, связанной с базовым элементом. Направлением нормали будем считать направление, противоположное оси OY.

При выводе граничного интегрального соотношения подразумевалось, что нормаль направлена "наружу" области. Таким образом, при рассмотрении области, ограниченной кусочно-линейной границей, считаем, что задача решается внутри области, если обход границы (ориентация отрезков) ведется против часовой стрелки, и вне области, если обход границы ведется по часовой стрелке.

Нумерация отрезков границы проведена следующим образом: сначала те отрезки, на которых заданы граничные условия I рода ($i = 1, \ldots, N$), затем те, на которых заданы граничные условия II рода ($i = N+1, \ldots, N+M$).

На первом этапе решения задачи из граничного интегрального уравнения определяются N неизвестных функций $\overline{q}_i(\mathbf{x}, t)$ для первых N отрезков ($i = 1, \ldots, N$), где заданы граничные условия I рода, и M неизвестных функций $\overline{u}_i(\mathbf{x}, t)$ для оставшихся M отрезков ($i = N+1, \ldots, N+M$), где заданы граничные условия II рода. Для решения этой задачи использовалась конечно-разностная по времени схема.

Предполагалось, что функция $\overline{u}(\mathbf{x}, t)$ является линейной по времени: $\overline{u}(\mathbf{x}, t) = u_{ij-1} + (u_{ij} - u_{ij-1})/h_j$, а функция $\overline{q}(\mathbf{x}, t)$ — постоянной: $\overline{q}(\mathbf{x}, t) = q_{ij}$ на i-м базовом элементе в интервале времени $[t_{j-1}, t_j]$. Функции, характеризующие начальное состояние мембраны, принимались постоянными на i-м базовом элементе

$$\psi(\mathbf{x}_i) = \psi_i, \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} = \psi_{n,i}, \quad \frac{\partial \varphi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i} = \varphi_{i,n}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_i.$$

В соответствии со сделанными предположениями система линейных уравнений в силу соотношений (1.5) для определения неизвестных на границе значений q_{in} и u_{in} имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} F_1(\xi, \Gamma_i, t_n, t_{n-1}, t_n) q_{in} + \sum_{i=N+1}^{N+M} \left(\frac{F_2(\xi, \Gamma_i, t_n, t_{n-1}, t_n)}{h_n} - \frac{1}{2}\delta_{im} \right) u_{in}$$
$$= -\sum_{i=N+1}^{N+M} F_1(\xi, \Gamma_i, t_n, t_{n-1}, t_n) q_{in} - \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{F_2(\xi, \Gamma_i, t_n, t_{n-1}, t_n)}{h_n} - \frac{1}{2}\delta_{im} \right) u_{in}$$
$$+ \sum_{i=1}^{N+M} \left(\frac{F_2(\xi, \Gamma_i, t_n, t_{n-1}, t_n)}{h_n} \right) u_{in-1}$$
$$- \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{N+M} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_j} F_2(\xi, \Gamma_i, t_n, t_{j-1}, t_j) - \sum_{j}^{n-1} \sum_{i=1}^{N+M} q_{ij} F_1(\xi, \Gamma_i, t_n, t_{j-1}, t_j)$$
$$- \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{N+M} \psi_i F_3(\xi, \Gamma_i, t_n, t_0) - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{N+M} \psi_{n,i} F_4(\xi, \Gamma_i, t_n, t_0) - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^{N+M} \varphi_{n,i} F_5(\xi, \Gamma_i, t_n, t_0),$$

где

$$F_1(\xi, \Gamma_i, t_F, t_{j-1}, t_j) = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \int\limits_{\Gamma_i} \frac{c\, H(c\,(t_F - \tau) - r)}{2\,\pi\, \sqrt{c^2\,(t_F - \tau)^2 - r^2}}\, d\Gamma(\mathbf{x})\, d\tau,$$

$$F_2(\xi, \Gamma_i, t_F, t_{j-1}, t_j) = \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \int\limits_{\Gamma_i} \frac{c\, (t_F - \tau)\, H(c\,(t_F - \tau) - r)}{2\,\pi\, r\, \sqrt{c^2\,(t_F - \tau)^2 - r^2}} n_r\, d\Gamma(\mathbf{x})\, d\tau,$$

$$F_3(\xi, \Gamma_i, t_F, t_0) = \int\limits_{\Gamma_i} \frac{c\, H(c\,(t_F - t_0) - r)}{2\,\pi} \left(\frac{r}{R_F - c\,(t_F - t_0)} + \frac{c\,(t_F - t_0)}{r} \right) n_r\, d\Gamma(\mathbf{x}),$$

$$F_4(\xi, \Gamma_i, t_F, t_0) = \int\limits_{\Gamma_i} \frac{c\, H(c\,(t_F - t_0) - r)}{2\,\pi} \left(c\,(t_F - t_0) \ln\left(\frac{2\,(c\,(t_F - t_0) - R_F)}{r\, c^2\,(t_F - t_0)^2} \right) - R_F \right) d\Gamma(\mathbf{x}),$$

$$F_5(\xi, \Gamma_i, t_F, t_0) = \int\limits_{\Gamma_i} \frac{c^2\, H(c\,(t_F - \tau) - r)}{2\,\pi} \ln\left(\frac{2\,(c\,(t_F - t_0) - R_F)}{r} \right) d\Gamma(\mathbf{x}).$$

Таким образом, для реализации описанного метода необходимо вычислять интегралы по граничным элементам от компонентов функций влияния и их пространственных производных для различных точек влияния, лежащих как на границе, так и внутри области. Классический подход предполагает численное вычисление этих интегралов в каждой конкретной задаче. В предлагаемом подходе фиксируется наиболее удобный "базовый" граничный элемент, на котором точно вычисляются интегралы от компонентов функций влияния и их производных. Результатом такого вычисления являются элементарные функции, зависящие от координат точки влияния.

Для аналитического вычисления выражений $F_1, \ldots, F_5$ полагаем, что интегрирование ведется по базовому элементу, а аргументы функций преобразованы к системе координат, связанной с базовым элементом.

Пусть точка $\overline{\xi}$ имеет координаты (x_0, y_0) в системе координат, связанной с базовым элементом. Тогда при интегрировании выражений необходимо различать следующие случаи расположения точки $\overline{\xi}$ относительно базового элемента. Скорость распространения волны конечна, а значит, влияние точки $\overline{\xi}$ на базовый элемент проявится только после того, как волна, возникшая в точке $\overline{\xi}$ в момент времени τ, достигнет базового элемента. Будем различать пять случаев:

1. Волна еще не достигла базового элемента; множество таких точек будем обозначать

$$M_1 = \left\{ \overline{\xi} \in \Omega \colon c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, x) < 0, \quad x \in [a, b] \right\},$$

где $r(\xi, x)$ — расстояние между точками ξ и x;

2. Волна достигла некоторых внутренних точек базового элемента, но не достигла его границ; множество таких точек будем обозначать

$$M_2 = \Big\{ \overline{\xi} \in \Omega \colon c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, a) < 0 \cap c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, b) < 0$$
$$\cap\, \exists x \in (0, b) \colon\ c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, x) > 0 \Big\}\,;$$

3. Волна достигла только правой границы базового элемента; множество таких точек будем обозначать

$$M_3 = \left\{ \overline{\xi} \in \Omega \colon c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, a) < 0 \cap c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, b) > 0 \right\};$$

4. Волна достигла только левой границы базового элемента; множество таких точек будем обозначать

$$M_4 = \left\{ \overline{\xi} \in \Omega \colon c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, a) > 0 \cap c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, b) < 0 \right\};$$

5. Волна полностью достигла базового элемента; множество таких точек будем обозначать

$$M_5 = \left\{ \overline{\xi} \in \Omega \colon c(t_F - \tau) - r(\overline{\xi}, x) > 0, \quad x \in [a, b] \right\}.$$

Графически пространства $M_1, \ldots, M_5$ относительно базового элемента изображены на рис. 2.

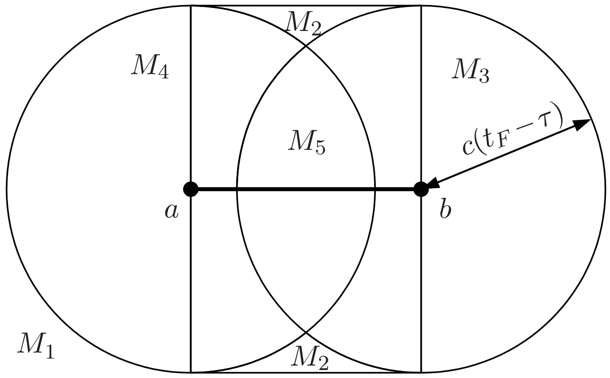

Рис. 2. Пространства $M_1, \ldots, M_5$.

Для аналитического вычисления выражений $F_1(\xi, \Gamma_i, t_F, t_1, t_2)$, $F_2(\xi, \Gamma_i, t_F, t_1, t_2)$, $F_3(\xi, \Gamma_i, t_F, t_0)$, $F_4(\xi, \Gamma_i, t_F, t_0)$, $F_5(\xi, \Gamma_i, t_F, t_0)$ получены конечные алгебраические формулы, для краткости функции ниже обозначены $F_1, \ldots, F_5$:

$$F_1 = \begin{cases} 0, \quad \xi \in M_1, \\ \dfrac{t_{21}}{2}, \quad \xi \in M_2, \\ \dfrac{t_{21}}{4} + \dfrac{A_{21}^{(b)}\,R_2 - A_{11}^{(b)}\,R_1 + (A_{12}^{(b)} - A_{22}^{(b)})\,y_0}{2\,\pi} + \dfrac{L_{bx}}{2\,\pi}\,\ln\left(\dfrac{R_2^{(b)} + R_2}{R_1^{(b)} + R_1}\right), \quad \xi \in M_3, \\ \dfrac{t_{21}}{4} + \dfrac{A_{21}^{(a)}\,R_2 - A_{11}^{(a)}\,R_1 + (A_{12}^{(a)} - A_{22}^{(a)})\,y_0}{2\,\pi} + \dfrac{x_0}{2\,\pi}\,\ln\left(\dfrac{R_2^{(a)} + R_2}{R_1^{(a)} + R_1}\right), \quad \xi \in M_4, \\ \dfrac{1}{2\,\pi}\Bigg((A_{21}^{(a)} + A_{21}^{(b)})\,R_2 - (A_{11}^{(a)} + A_{11}^{(b)})\,R_1 + (A_{12}^{(a)} - A_{22}^{(a)})\,y_0 + (A_{12}^{(b)} - A_{22}^{(b)})\,y_0 \\ \qquad + x_0\,\ln\left(\dfrac{R_2^{(a)} + R_2}{R_1^{(a)} + R_1}\right) + L_{bx}\,\ln\left(\dfrac{R_2^{(b)} + R_2}{R_1^{(b)} + R_1}\right)\Bigg), \quad \xi \in M_5; \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} 0, \quad \xi \in M_1, \\ d_2, \quad \xi \in M_2, \\ \dfrac{d_2}{2} + \dfrac{2\,(A_{12}^{(b)}\,R_1 - A_{22}^{(b)}\,R_2)}{4\,c\,\pi} + \dfrac{y_0\,(A_{23}^{(b)} + A_{24}^{(b)} - A_{13}^{(b)} - A_{14}^{(b)})}{4\,c\,\pi}, \quad \xi \in M_3, \\ \dfrac{d_2}{2} + \dfrac{2\,(A_{12}^{(a)}\,R_1 - A_{22}^{(a)}\,R_2)}{4\,c\,\pi} + \dfrac{y_0\,(A_{23}^{(a)} + A_{24}^{(a)} - A_{13}^{(a)} - A_{14}^{(a)})}{4\,c\,\pi}, \quad \xi \in M_4, \\ \dfrac{2\,(A_{12}^{(a)} + A_{12}^{(b)})\,R_1 - 2\,(A_{22}^{(a)} + A_{22}^{(b)})\,R_2}{4\,c\,\pi} \\ \qquad + \dfrac{y_0\,(A_{23}^{(b)} + A_{23}^{(a)} + A_{24}^{(b)} + A_{24}^{(a)})}{4\,c\,\pi} - \dfrac{y_0\,(A_{13}^{(b)} + A_{13}^{(a)} + A_{14}^{(b)} + A_{14}^{(a)})}{4\,c\,\pi}, \quad \xi \in M_5; \end{cases}$$

$$F_3 = \begin{cases} 0, \quad \xi \in M_1, \\ \dfrac{c(R_0\,\operatorname{sign}(y_0) - y_0)}{2}, \quad \xi \in M_2, \\ \dfrac{c(R_0\,\operatorname{sign}(y_0) - y_0)}{4} + \dfrac{c(A_{02}^{(b)}\,R_0 - A_{01}^{(b)}\,y_0)}{2\,\pi}, \quad \xi \in M_3, \\ \dfrac{c(R_0\,\operatorname{sign}(y_0) - y_0)}{4} + \dfrac{c(A_{02}^{(a)}\,R_0 - A_{01}^{(a)}\,y_0)}{2\,\pi}, \quad \xi \in M_4, \\ \dfrac{(A_{02}^{(a)} + A_{02}^{(b)})\,c\,R_0 - (A_{01}^{(a)} + A_{01}^{(b)})\,c\,y_0}{2\,\pi}, \quad \xi \in M_5; \end{cases}$$

$$F_4 = \begin{cases} 0, \quad \xi \in M_1, \\ d_4, \quad \xi \in M_2, \\ \dfrac{d_4}{2} + c\dfrac{R_0^{(b)}\, L_{bx} + A_{01}^{(b)}\,(3\,R_0^2 - y_0^2)}{4\,\pi} - \dfrac{c\,R_0}{2\,\pi}\left(A_{02}^{(b)}\,y_0 + L_{bx}\,\ln\!\left(\dfrac{2\,(R_0 - R_0^{(b)})}{R_b\,R_0^2}\right)\right), \quad \xi \in M_3, \\ \dfrac{d_4}{2} + c\dfrac{R_0^{(a)}\, x_0 + A_{01}^{(a)}\,(3\,R_0^2 - y_0^2)}{4\,\pi} - \dfrac{c\,R_0}{4\,\pi}\left(A_{02}^{(a)}\,y_0 + x_0\,\ln\!\left(\dfrac{2\,(R_0 - R_0^{(a)})}{R_a\,R_0^2}\right)\right), \quad \xi \in M_4, \\ c\left(\dfrac{R_0^{(b)}\,L_{bx} + R_0^{(a)}\,x_0 + (A_{01}^{(a)} + A_{01}^{(b)})\,(3\,R_0^2 - y_0^2)}{4\,\pi} - \dfrac{R_0\,y_0\,(A_{02}^{(a)} + A_{02}^{(b)})}{2\,\pi}\right. \\ \qquad \left. - \dfrac{R_0}{2\,\pi}\left(x_0\,\ln\!\left(\dfrac{2\,(R_0 - R_0^{(a)})}{R_a\,R_0^2}\right) + L_{bx}\,\ln\!\left(\dfrac{2\,(R_0 - R_0^{(b)})}{R_b\,R_0^2}\right)\right)\right), \quad \xi \in M_5; \end{cases}$$

$$F_5 = \begin{cases} 0, \quad \xi \in M_1, \\ d_5, \quad \xi \in M_2, \\ \dfrac{d_5}{2} + \dfrac{c^2}{2\,\pi}\left(A_{02}^{(b)}\,y_0 - A_{01}^{(b)}\,R_0 + L_{bx}\,\ln\!\left(\dfrac{2\,(R_0 - R_0^{(b)})}{R_b}\right)\right), \quad \xi \in M_3, \\ \dfrac{d_5}{2} + \dfrac{c^2}{2\,\pi}\left(A_{02}^{(a)}\,y_0 - A_{01}^{(a)}\,R_0 + x_0\,\ln\!\left(\dfrac{2\,(R_0 - R_0^{(a)})}{R_a}\right)\right), \quad \xi \in M_4, \\ \dfrac{c^2\,((A_{02}^{(a)} + A_{02}^{(b)})\,y_0 - (A_{01}^{(a)} + A_{01}^{(b)})\,R_0)}{2\,\pi} \\ \qquad + \dfrac{c^2}{2\,\pi}\left(x_0\,\ln\!\left(\dfrac{2\,(R_0 - R_0^{(a)})}{R_a}\right) + L_{bx}\,\ln\!\left(\dfrac{2\,(R_0 - R_0^{(b)})}{R_b}\right)\right), \quad \xi \in M_5; \end{cases}$$

здесь

$$\begin{gathered} t_{21} = c\,(t_2 - t_1), \quad L_{bx} = b - x_0 \quad R_0 = c(t_F - t_0), \quad R_1 = c(t_1 - t_F), \quad R_2 = c(t_2 - t_F), \\ R_a = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad R_b = \sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2}, \quad R_0^{(a)} = \sqrt{R_0^2 - R_a^2}, \quad R_0^{(b)} = \sqrt{R_0^2 - R_b^2}, \\ R_1^{(a)} = \sqrt{R_1^2 - R_a^2}, \quad R_2^{(a)} = \sqrt{R_2^2 - R_a^2}, \quad R_1^{(b)} = \sqrt{R_1^2 - R_b^2}, \quad R_2^{(b)} = \sqrt{R_2^2 - R_b^2}, \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} A_{01}^{(a)} &= \arctan\!\left(\frac{x_0}{R_0^{(a)}}\right), & A_{11}^{(a)} &= \arctan\!\left(\frac{L_{bx}}{R_1^{(a)}}\right), & A_{21}^{(a)} &= \arctan\!\left(\frac{L_{bx}}{R_2^{(a)}}\right), \\ A_{01}^{(b)} &= \arctan\!\left(\frac{L_{bx}}{R_0^{(b)}}\right), & A_{11}^{(b)} &= \arctan\!\left(\frac{x_0}{R_1^{(b)}}\right), & A_{21}^{(b)} &= \arctan\!\left(\frac{x_0}{R_2^{(b)}}\right), \\ A_{02}^{(a)} &= \arctan\!\left(\frac{R_0\,x_0}{y_0\,R_0^{(a)}}\right), & A_{12}^{(a)} &= \arctan\!\left(\frac{R_1\,L_{bx}}{y_0\,R_1^{(a)}}\right), & A_{22}^{(a)} &= \arctan\!\left(\frac{R_2\,L_{bx}}{y_0\,R_2^{(a)}}\right), \\ A_{02}^{(b)} &= \arctan\!\left(\frac{R_0\,L_{bx}}{y_0\,R_0^{(b)}}\right), & A_{12}^{(b)} &= \arctan\!\left(\frac{R_1\,x_0}{y_0\,R_1^{(b)}}\right), & A_{22}^{(b)} &= \arctan\!\left(\frac{R_2\,x_0}{y_0\,R_2^{(b)}}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{(t_2 - t_1)\,\operatorname{sign}(y_0)}{2}, \\ d_4 &= \frac{c\,\pi\,(3\,R_0^2 - y_0^2 - 2\,R_0\,|y_0|) - 4\,c\,R_y\,R_0\,\ln\left(\frac{2}{R_0^2}\right)}{4\,\pi}, \\ d_5 &= \frac{c^2\,(\pi\,(|y_0| - R_0) + 2\,\sqrt{R_0^2 - {y_0}^2}\,\ln(2))}{2\,\pi}. \end{aligned}$$

$$A_{13}^{(b)} = \arctan\left(\frac{L_{bx}^2 + y_0\,(y_0 - R_1)}{R_1^{(b)}\,L_{bx}}\right), \qquad A_{14}^{(b)} = \arctan\left(\frac{L_{bx}^2 + y_0\,(y_0 + R_1)}{R_1^{(b)}\,L_{bx}}\right),$$

$$A_{23}^{(b)} = \arctan\left(\frac{L_{bx}^2 + y_0\,(y_0 - R_2)}{R_2^{(b)}\,L_{bx}}\right), \qquad A_{24}^{(b)} = \arctan\left(\frac{L_{bx}^2 + y_0\,(y_0 + R_2)}{R_2^{(b)}\,L_{bx}}\right),$$

$$A_{13}^{(a)} = \arctan\left(\frac{x_0^2 + y_0\,(y_0 - R_1)}{R_1^{(a)}\,x_0}\right), \qquad A_{14}^{(a)} = \arctan\left(\frac{x_0^2 + y_0\,(y_0 + R_1)}{R_1^{(a)}\,x_0}\right),$$

$$A_{23}^{(a)} = \arctan\left(\frac{x_0^2 + y_0\,(y_0 - R_2)}{R_2^{(a)}\,x_0}\right), \qquad A_{24}^{(a)} = \arctan\left(\frac{x_0^2 + y_0\,(y_0 + R_2)}{R_2^{(a)}\,x_0}\right).$$

Решение всей задачи можно условно поделить на три этапа. На первом этапе формируется система линейных уравнений (СЛАУ), при этом распараллеливание счета является абсолютным, так как вычисление коэффициентов разрешающей системы осуществляется подстановкой координат точек влияния в элементарные функции независимо друг от друга. На втором этапе решается СЛАУ, при этом применяется подход, разработанный в Институте математики и механики УрО РАН. Первые два этапа повторяются на каждом шаге по времени. Наконец, на третьем этапе вычисляются перемещения точек мембраны внутри области путем подстановки их координат в элементарные функции. Расчет перемещений точек, как и на первом этапе, производится независимо, что позволяет абсолютно распараллелить вычисления.

Важно отметить, что, один раз решив задачу определения граничных значений, мы можем сколько угодно раз менять сетку внутренних точек и пересчитывать необходимые значения величин в них без дополнительного решения СЛАУ.

Разовые аналитические вычисления интегралов от функций влияния с последующей независимой подстановкой координат точек влияния на первом и третьем этапах решения позволили для конкретных задач сократить время счета на несколько порядков без потери точности (см. табл.).

П р и м е р. В качестве примера рассмотрена задача о колебаниях прямоугольной мембраны. На этом примере сравнивались скорость и точность решения классическим МГЭ и ММГЭ. Пусть мембрана имеет форму прямоугольника $ABCD$. Размеры мембраны $AB = CD = b$, $BC = DA = l$. Стороны мембраны закреплены, причем в интервале времени $t \in [0, \pi]$ стороны движутся по закону $u = -\sin(t)/10$ и далее неподвижно фиксируются в нулевом положении. Начальные (при $t = 0$) отклонения и скорости точек мембраны нулевые.

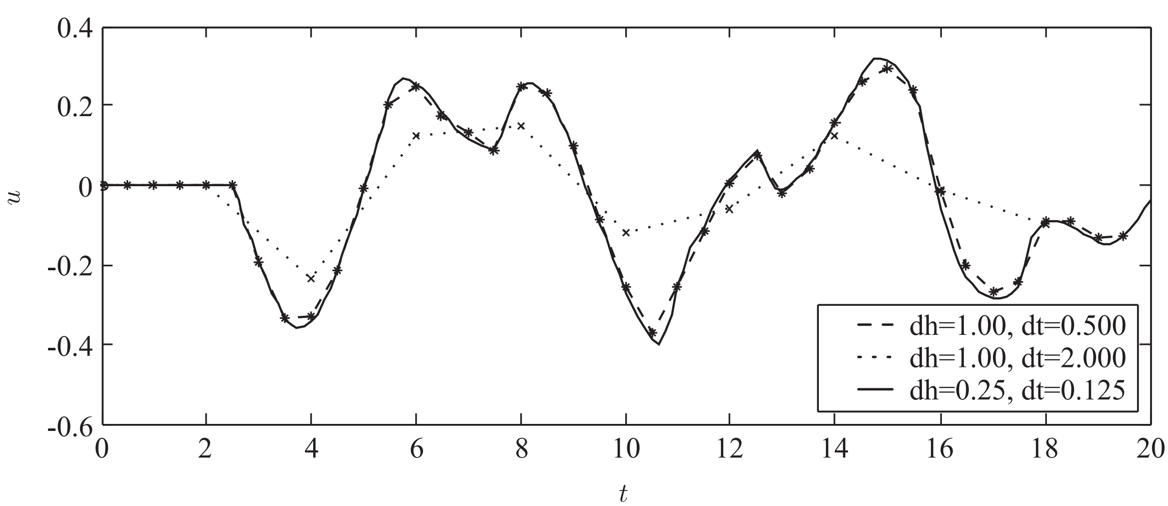

Рис. 3. Отклонение точки мембраны.

Размеры мембраны, выбранные для решения задачи, $b = l = 5$, скорость звука принята равной 1. Задача решалась до 20 с. Рассмотрены три варианта решения с различными шагами по времени dt и границе dh. Первый вариант $dt = 1\,\text{с}$, $dh = 2$, второй вариант $dt = 0.5\,\text{с}$, $dh = 1.0$, третий вариант $dt = 0.125\,\text{с}$, $dh = 0.25$. Колебания центральной точки $x = 2,5; y = 2,5$ изображены на рис. 3.

Из рисунка видно, что хорошая сходимость обеспечивается уже во втором варианте решения ($dt = 0.5\,\text{с}$, $dh = 1.0$). Расчеты, проведенные классическим МГЭ, совпали с результатами ММГЭ. Время решения задачи с разбиением $dt = 0.5\,\text{с}$, $dh = 1.0$ для МГЭ составило 46.68 с, для ММГЭ 0.78 с. Таким образом, при решении задачи ММГЭ за счет однократного вычисления интеграла по базовому элементу достигнуто существенное ускорение счета (см. табл.).

Сравнение времени и точности решения с классическим МГЭ

метод и шаг решения	невязка, %	время решения, с
МГЭ ($dt = 0.5, dh = 1.0$)	0.05	46.687
ММГЭ ($dt = 0.5, dh = 1.0$)	0.04	0.781
МГЭ ($dt = 0.125, dh = 0.25$)	0.0028	346.158
ММГЭ ($dt = 0.125, dh = 0.25$)	0.0021	3.126

Результаты решения задачи приводятся для сравнения предлагаемого метода с классическим и анализа его численной сходимости. При решении задачи ММГЭ за счет точного вычисления интеграла при той же точности решения существенно возрастает скорость счета.

3. Заключение

В ММГЭ, как и в МГЭ, решение выражено через функции, заданные на границе, что снижает размерность задачи на единицу. При этом по сравнению с классическим МГЭ достигаются большая точность и скорость решения за счет однократного аналитического интегрирования по базовому элементу. Полученные конечные элементарные функции применимы для упругих колебаний с любыми изотропными свойствами и произвольной геометрией границы. На примере задачи колебаний квадратной мембраны показано, что при той же точности решения ускорение счета составило 2 порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 728 с.
2. **Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.** Методы граничных элементов М.: Мир, 1987. 524 с.
3. **Mansur W.J., Brebbia C.A.** Formulation of the boundary element method for transient problems governed by the scalar wave equation // Appl. Math. Modelling. 1982. Vol. 6, iss. 4. P. 307-311.
4. **Федотов В. П., Спевак Л. Ф.** Решение связных диффузионно–деформационных задач на основе алгоритмов параллельного действия. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 191 с.

Федотов Владимир Петрович
д-р физ.-мат. наук
ст. науч. сотрудник
зав. лабораторией
Ин-т машиноведения УрО РАН
e-mail: fedotov@imach.uran.ru.

Поступила 30.12.2008

Контеев Алексей Александрович
аспирант
Ин-т машиноведения УрО РАН
e-mail: a_konteev@mail.ru.

Том 15 № 2 2009

ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ ПО ТЕОРИИ ГРУПП

А. А. Махнев

К концу 70-х годов XX века в теории конечных групп (особенно в теории конечных неразрешимых групп) были получены выдающиеся результаты, позволившие в основном завершить программу классификации конечных простых групп. Доктора физ.-мат. наук Виктор Данилович Мазуров и Альберт Иванович Старостин предложили идею проведения Всесоюзных школ-конференций по конечным группам с периодичностью раз в два года. Эта идея была поддержана членом-корреспондентом АН СССР Алексеем Ивановичем Кострикиным.

Первая школа по теории конечных групп состоялась в г. Красноярске (пос. Шушенское, 5–10 февраля 1978 г.). Председателем оргкомитета был профессор Виктор Михайлович Бусаркин. В работе школы участвовало 66 человек, из них 3 доктора наук и 20 кандидатов наук. Были прочитаны следующие лекции [1]:

В.М. Бусаркин “Применения теории характеров в нечетных характеризациях” (5 часов); В.В. Кабанов, А.С. Кондратьев “Силовские 2-подгруппы конечных неразрешимых групп” (6 часов); В.Д. Мазуров “Приложения теории модулярных представлений конечных групп” (4 часа); С.А. Сыскин “Локальные подгруппы групп Шевалле” (4 часа); А.Н. Фомин “Конечные примитивные группы подстановок” (4 часа).

С краткими сообщениями выступили В.М. Бусаркин, П.Г. Гресь, Б.К. Дураков, В.Р. Майер, А.А. Махнев, Б.А. Погорелов, Н.Д. Подуфалов, И.А. Чубаров.

Одно из заседаний школы было посвящено обсуждению проблем теории конечных групп.

Вторая Всесоюзная школа по теории конечных групп проходила в г. Иркутске (оз. Байкал, 4–10 августа 1980 г.). Председателем оргкомитета был Алексей Иванович Кострикин. В работе школы участвовало 76 человек. Были прочитаны следующие двухчасовые лекции [2]:

Л.С. Казарин “Конечные группы с факторизациями”; В.И. Логинов “Квазитонкие группы”; А.А. Махнев “Классы инволюций и элементарные TI-подгруппы”; Н.Д. Подуфалов “3-локальные подгруппы в группах характеристики 2”; Е.И. Хухро “Об автоморфизмах p-групп”.

Были прочитаны четыре часовых доклада: А.П. Ильиных “Построение симплектических групп”; В.М. Левчук “Параболические подгруппы некоторых ABA-групп”; И.А. Чубаров “О мономиальных характерах некоторых групп”; В.И. Логинов, С.В. Царанов “Экстремальные пары”.

С краткими сообщениями выступили В.В. Беляев, А.В. Боровик, В.Н. Егоров и А.И. Марков, А.С. Кондратьев, Е.И. Седова.

Одно из заседаний школы было посвящено обсуждению проблем теории конечных групп.

Третья школа по теории конечных групп проходила в г. Нальчике (Приэльбрусье, 23–28 августа 1982 г.). Председателем оргкомитета был Алексей Иванович Кострикин. В работе школы участвовало 62 человека, из них 1 член-корреспондент АН СССР, 7 докторов и 32 кандидата наук. Были прочитаны следующие лекции продолжительностью от 2 до 5 часов [3]:

А.И. Кострикин “Решетки в алгебрах Ли и их группы автоморфизмов”; А.В. Боровик “Конечные и линейные алгебраические группы”; В.В. Кабанов “Конечные проективные плоскости”; А.С. Кондратьев “Подгруппы конечных групп Шевалле”; Е.И. Хухро “Нильпотентные p-группы”; И.А. Чубаров “Представления конечных групп Шевалле”.

Были заслушаны также несколько кратких сообщений.

Заключительное заседание школы было посвящено обсуждению проблем теории конечных групп.

Четвертая школа по теории конечных групп проходила в г. Миассе (оз. Тургояк, 26–30 июня 1984 г.). Председателем оргкомитета был Алексей Иванович Кострикин. В работе школы участвовало 55 человека, из них 4 доктора и 28 кандидатов наук. Научная программа школы состояла из 12 лекций продолжительностью от 1 до 3 часов и 5 кратких сообщений [4]. Названия лекций:

В.Д. Мазуров "Широкие подгруппы конечных простых групп" (2 часа); А.А. Махнев "TI-подгруппы конечных неразрешимых групп" (3 часа); С.А. Сыскин "О проблеме классификации конечных простых групп, ее ревизии и свойствах спорадических групп" (2 часа); Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба "О формациях конечных групп" (2 часа); И.А. Чубаров "Модулярные представления конечных групп Шевалле" (2 часа); В.В. Беляев "О локально конечных группах" (2 часа); А.В. Боровик "Конечные и несчетно категоричные группы" (1 час); В.М. Бусаркин "Группы коллинеаций конечных геометрий" (2 часа); В.И. Трофимов "О действии групп на графах" (2 часа); Е.И. Хухро "Применение ЭВМ в теории групп" (1 час); В.И. Сергиенко, Н.М. Курносенко "Применение ЭВМ для составления картотеки статей по теории конечных групп" (1 час).

Заключительное заседание школы было посвящено обсуждению проблем теории конечных групп.

Пятая школа по теории конечных групп состоялась в г. Ярославле (30 мая–3 июня 1988 г.). Председателем оргкомитета был Алексей Иванович Кострикин. В работе школы участвовало 56 человек из 16 городов. Были прочитаны следующие часовые лекции [5]:

А.И. Кострикин "Группы автоморфизмов инвариантных решеток в алгебрах Ли"; В.А. Белоногов "D-блоки и p-блоки характеров конечных групп" (3 лекции); А.А. Иванов "Группы автоморфизмов дистанционно транзитивных графов"; А.И. Кострикин "О классе нильпотентности конечных групп простого показателя"; Э.М. Пальчик "(Z, J)-свойства конечных групп"; А.В. Боровик "Редукционная теорема для подгрупп в группах лиевского типа"; Н.А. Вавилов "Подгруппы групп Шевалле" (2 лекции); А.С. Кондратьев "Максимальные подгруппы простых групп" (2 лекции); В.А. Устименко "Максимальные подгруппы симметрических групп"; В.И. Трофимов "Стабилизаторы вершин графов"; С.В. Шпекторов "Группы и геометрии"; Л.С. Казарин "Факторизации конечных групп".

С краткими сообщениями выступили Фам Хыу Тьеп, А.Л. Пецик, А.А. Ядченко, В.П. Шумяцкий, Ю.Б. Мельников, В.П. Шунков, Н.С. Черников.

В связи с перестройкой и рядом экономических проблем проведение школ было заморожено. Только в 2005 г. по инициативе доктора наук Арчила Хазешовича Журтова и члена-корреспондента РАН Александра Алексеевича Махнева было принято решение о возрождении школ по теории конечных групп. При этом была расширена тематика школ, увеличился охват участников, а также повысился статус школы.

Шестая международная школа-конференция по теории групп проходила в г. Нальчике (Приэльбрусье, 4–10 июля 2006 г.). Председателем программного комитета был Александр Алексеевич Махнев. Школа-конференция была посвящена 75-летию выдающегося ученого, основателя уральской школы теории конечных групп, доктора физ.-мат. наук, профессора А.И. Старостина. В конференции участвовало 81 человек из 15 городов России и зарубежья, в том числе 2 члена-корреспондента РАН и 30 докторов наук. Были заслушаны 23 лекции:

А.А. Махнев "Дистанционно регулярные графы и их автоморфизмы"; Л.С. Казарин "Нильпотентные алгебры и их применения"; А.И. Созутов "О группах с почти совершенной инволюцией"; Е.П. Вдовин "Конечные группы лиева типа"; А.С. Кондратьев "Максимальные подгруппы в конечных простых группах"; И.Н. Пономаренко "Обобщения теоремы Бернсайда о группах перестановок простой степени"; А.Ю. Ольшанский "Большие группы и их большие фактор-группы"; Д.О. Ревин "Свойство D_π конечных групп"; В.А. Белоногов "О таблицах характеров конечных групп"; А.В. Заварницин "О приложении модулярных представлений к проблеме распознаваемости групп по спектру"; Е.П. Вдовин "Картеровы подгруппы конечных групп"; В.И. Зенков "Конечные простые группы, в которых нормализаторы всех парных пересечений силовских 2-подгрупп имеют нечетный индекс"; А.С. Кондратьев "Локальные и силовские подгруппы в конечных простых группах"; А.И. Созутов "Некоторые обобщения теоремы Фробениуса"; В.М. Левчук "К теореме Р. Брауэра и вопросу о слабо факторизуемых конечных группах"; В.А. Антонов "О двойных группах Фробениуса"; В.В. Блудов "Геометрические многообразия групп"; В.Д. Мазуров "Распознавание групп по спектру: нерешенные вопросы"; В.В. Кабанов "Сильно регулярные графы с условием Хоффмана"; В.А. Белоногов "Неприводимые характеры групп S_n и A_n"; О.Ю. Дашкова "Бесконечномерные линейные группы с ограничениями на некоторые системы их подгрупп"; И.А. Хубежты "Об автоморфизмах бесконечной плоскости Фано"; А.А. Махнев "О графах Тервиллигера".

Кроме того, на двух секциях "Конечные группы" и "Комбинаторная теория групп" были заслушаны 19 кратких сообщений.

Седьмая международная школа-конференция по теории групп проходила в г. Челябинске (оз. Еловое, 4–10 августа 2008 г.). Председателем программного комитета был Александр Алексеевич Махнев. Школа-конференция была посвящена 60-летию выдающегося ученого доктора физ.-мат. наук, профессора А.С. Кондратьева. В конференции участвовал 61 человек из 9 городов России и зарубежья, в том числе 3 члена-корреспондента РАН и 18 докторов наук. Были заслушаны 24 лекции:

А.С. Кондратьев "О пересечениях максимальных подгрупп в конечных почти простых группах"; А.Ю. Ольшанский "Модули и действия групп максимального роста"; С.В. Матвеев "Присоединенная группа дистрибутивного группоида"; А.В. Васильев "Распознавание конечных групп по спектру"; А.А. Махнев "Об автоморфизмах некоторых дистанционно регулярных графов"; Е.П. Вдовин, В.И. Зенков "Пересечение разрешимых холловых подгрупп в конечной группе"; Д.О. Ревин "Холловы подгруппы и обобщения теоремы Силова"; В.А. Белоногов "О таблицах характеров симметрических и знакопеременных групп" (2 лекции); М.А. Гречкосеева "Распознавание простых линейных групп малых размерностей над полями характеристики 2"; В.М. Левчук, Г.С. Сулейманова "Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле" (2 лекции); В.А. Чуркин "Квазикристаллографические группы в пространствах Минковского"; Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин "Критерии существования и сопряженности холловых подгрупп в конечных группах"; А.В. Заварницин "Распознавание по спектру среди накрытий простых групп $PSL(n,q)$"; В.В. Кабанов "Графы и транзитивные группы подстановок"; Р.Ж. Алеев "Ранги групп центральных единиц и теоремы разложения"; Г.П. Егорычев "Метод коэффициентов: алгебраическая характеризация и приложения в теории групп"; А.В. Рожков "Условия конечности и теория AT-групп"; А.И. Созутов "Инволюции в бесконечных группах"; В.В. Беляев, Д.А. Швед "Финитарные автоморфизмы групп"; Н.Ю. Макаренко "Теоремы о больших характеристических подгруппах с тождеством и их приложения к почти регулярным автоморфизмам"; В.И. Сенашов "Характеризации слойно конечных групп и их расширений"; О.Ю. Дашкова "Модули над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп".

Кроме того, были заслушаны 20 кратких сообщений.

Следующую Восьмую Международную школу-конференцию по теории групп планируется провести в 2010 г. в Приэльбрусье.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бусаркин В.М., Подуфалов Н.Д.** Школа по теории конечных групп // Успехи мат. наук. 1979. Т. 33, № 5. С. 219–220.

2. **Кострикин А.И., Старостин А.И., Сыскин С.А.** Вторая Всесоюзная школа по теории конечных групп // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 2. С. 227–229.
3. **Кострикин А.И., Уначев Х.Я., Сыскин С.А.** Третья школа по теории конечных групп // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 2. С. 236–238.
4. **Кодратьев А.С., Махнев А.А., Старостин А.И.** Четвертая школа по теории конечных групп // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 241–243.
5. **Казарин Л.С., Кострикин А.И.** Школа по теории конечных групп // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, № 3. С. 196-197.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
зав. отделом алгебры и топологии
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступила 24.11.2008

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале "Труды Института математики и механики УрО РАН" публикуются оригинальные работы теоретического характера по современным разделам математики и механики.

"Труды Института математики и механики УрО РАН" являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы, математические утверждения должны быть обоснованы. В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В "Труды Института математики и механики" не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла "Трудов Института математики и механики").

Для решения вопроса о целесообразности публикации в "Трудах Института математики и механики" редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей.

В издательстве МАИК "НАУКА/Интерпериодика" выходит перевод журнала "Труды Института математики и механики УрО РАН" как Приложение к Трудам Математического института им. В.А. Стеклова (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement).

Автор представляет в редакцию два бумажных экземпляра и электронный вариант статьи.

К статье должны быть приложены:

• Сопроводительное письмо от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.

• Лист с индексами статьи по Универсальной десятичной классификации (УДК), английское название статьи, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках.

• Лист со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. В настоящее время также не взимается плата за публикацию рукописей и других авторов.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтом математики и механики Уральского отделения РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Присланные в журнал рукописи статей не возвращаются.

Правила оформления рукописей:

• Текст статьи должен быть набран в LATEX2e в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.

• Представляемая в "Труды Института математики и механики УРО РАН" статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации (5-10 строк), ключевых слов на русском и английском языках. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул.

• Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту, либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.

• Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

• Файлы со статьей — tex-источник и ps (или pdf) вариант статьи — высылаются на адрес trudy@imm.uran.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 2 2009

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
Технический редактор Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 11.06.09. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 28, 5. Уч.-изд. л. 24,5 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620219, Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226