РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 15, № 1 2009

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

том 15 № 1 2009

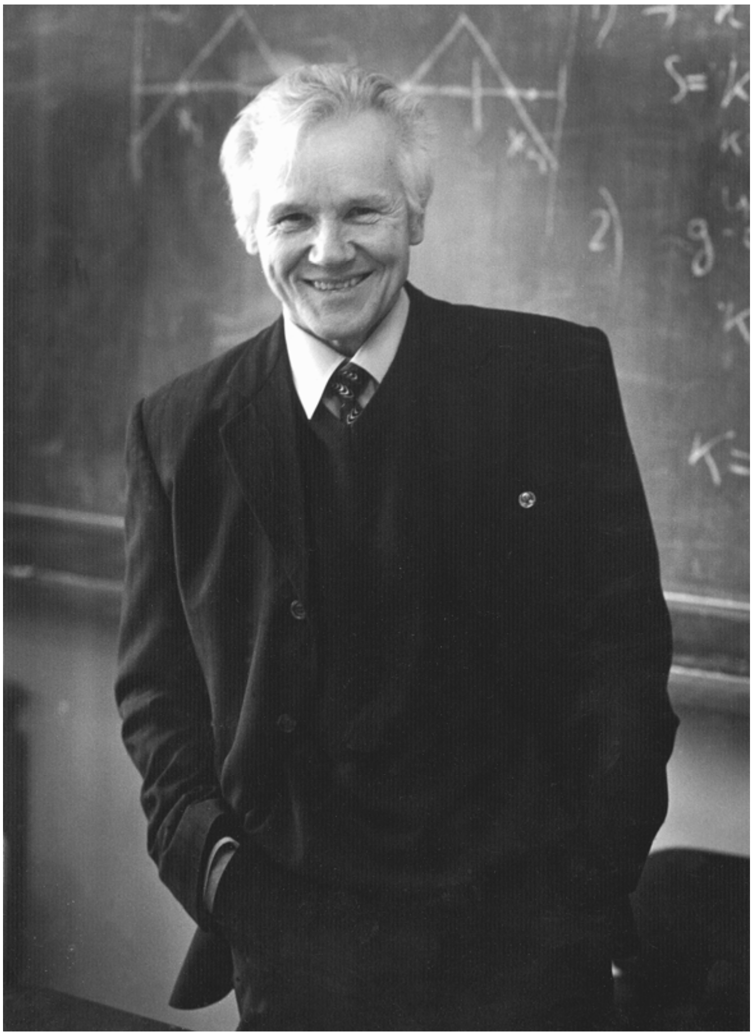
ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 15, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2009. 242 с.

ISSN 0134–4889

Отв. редактор выпуска А. Г. Бабенко

СОДЕРЖАНИЕ



Том 15 № 1 2009

ВИТАЛИЙ ИВАНОВИЧ БЕРДЫШЕВ

(*К семидесятилетнему юбилею*)

27 января 2009 г. исполнилось семьдесят лет известному российскому ученому, директору Института математики и механики УрО РАН члену-корреспонденту РАН Виталию Ивановичу Бердышеву.

В. И. Бердышев родился в большой и дружной сельской семье, проживавшей недалеко от г. Свердловска. Начиная с пятого класса, он учился во 2-й железнодорожной школе г. Свердловска, где благодаря школьному учителю Ивану Григорьевичу Неволину заинтересовался математикой. В 1956–1961 гг. он обучался на математико-механическом факультете Уральского государственного университета. Основные курсы читали А. А. Меленцов (математический анализ) и П. Г. Конторович (алгебра) — оба первоклассные лекторы. На старших курсах он слушал лекции профессора Сергея Борисовича Стечкина, своего будущего научного руководителя. По инициативе С. Б. Стечкина и Н. В. Ефимова в то время в стране началось изучение проблематики чебышевских множеств, в частности известной задачи: *является ли чебышёвское множество выпуклым*? Множество M называется *чебышёвским*, если для любого элемента пространства в множестве M существует единственный ближайший элемент. Этой задачей увлеклись Виталий Иванович и его однокурсник Леонид Петрович Власов. В. И. Бердышев нашел решение задачи в случае конечномерных пространств, и этот результат был отмечен золотой медалью на всесоюзном конкурсе студенческих работ. Эта задача стала впоследствии очень популярной и до сих пор полностью не решена. Существенный вклад в эту проблематику внес также Л. П. Власов. В студенческие годы Виталий Иванович активно участвовал в общественной жизни университета, за работу на целине в составе студенческого отряда он был награжден правительственной медалью “За освоение целинных земель”.

В 1962 г. С. Б. Стечкин пригласил В. И. Бердышева на работу в институт (в то время — Свердловское отделение Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР). В 1968 г. Виталий Иванович защищает кандидатскую диссертацию “Приближение периодических функций в среднем”, в 1988 — докторскую диссертацию “Устойчивость минимизации функционалов и равномерная непрерывность метрической проекции”.

Одним из первых значительных результатов В. И. Бердышева является разработанный им в 1967 г. оригинальный метод оценки снизу точной константы в неравенстве Джексона в пространстве L_p при $1 \le p < \infty$. В случае пространства L_2 задачу о точной константе в неравенстве Джексона решил Н. И. Черных, получив при этом обоснование оценки снизу другим способом. Позднее он получил оценку сверху точной константы и при $1 \le p < 2$, что вместе с ранним результатом В. И. Бердышева дало полное решение задачи в этом случае. При $2 < p < \infty$ задача до сих пор остается открытой. Случай пространств L_∞ и C был в 60-е гг. прошлого века полностью исследован Н. П. Корнейчуком.

С. Б. Стечкиным была поставлена задача о характеризации банаховых пространств X, в которых оператор наилучшего приближения элементами выпуклого множества существования равномерно непрерывен по всей совокупности таких множеств. В цикле работ В. И. Бердышева получено решение как этой, так и ряда других родственных задач. В частности, им описаны конечномерные пространства с тем же свойством, а также охарактеризованы конечномерные подпространства из $C(Q)$, метрическая проекция на которые равномерно непрерывна.

В другом цикле работ В. И. Бердышев рассмотрел вопросы корректности задачи минимизации выпуклого функционала F. Здесь им также получены глубокие и, как правило, окончательные результаты, существенно обобщающие и усиливающие результаты его предшественников. Отметим, например, характеризацию пространств и функционалов, для которых непрерывность множества экстремальных элементов при вариации множества допустимых элементов имеет место на классе всех выпуклых замкнутых допустимых множеств, а также оценки устойчивости в хаусдорфовой метрике множества (почти) экстремальных элементов равномерно выпуклого функционала через его модуль выпуклости. Последний результат получен им как следствие одной весьма общей оценки устойчивости в хаусдорфовой метрике пересечения пары множеств через модуль выпуклости одного из них при возмущении обоих множеств.

Наряду с задачей минимизации $\inf_X F(x)$ В. И. Бердышев рассмотрел возмущенную задачу $\inf_X \varphi(x,u)$ с условием $\varphi(x,0) = F(x)$ и исследовал вопрос об устойчивости множества почти экстремальных элементов $\Phi_t(u) = \{x \in X : \varphi(x,u) \le t\}$. Для отображения $u \to \Phi_t(u)$ им также получены оценки устойчивости через модуль выпуклости функционала $\varphi(x,u)$. Предложенная им общая схема построения двойственной задачи, включающая в себя схемы Жоли — Лорана и Б. Н. Пшеничного, позволила представить множества $\Phi_t(u)$ и соответствующие им множества в двойственной задаче через субдифференциалы сопряженных функционалов. В связи с этим отметим другой его яркий (и более ранний) результат: нахождение зависимости модуля непрерывности оператора субдифференцирования от модулей выпуклости и гладкости функционала (в литературе по выпуклому анализу обычно приводится только более слабое утверждение о полунепрерывности сверху субдифференциального отображения).

Весьма интересны результаты В. И. Бердышева по дифференцируемости оператора метрического проектирования как в общих, так и в конкретных банаховых пространствах. Например, им установлена липшицевость и односторонняя дифференцируемость метрической (почти) проекции на классы $H(\omega)$ и на другие классы. В. И. Бердышев изучил также устойчивость метрической проекции при вариации нормы пространства.

С 1970-х гг. В. И. Бердышев активно занимается вопросами численного приближения больших массивов данных. Им был разработан алгоритм, позволяющий по хаотическим ультразвуковым щелчкам, раздающимся при повышении давления в металлическом баке, предсказать его прочность на разрыв. Под его руководством построены компактные локальные и глобальные модели 30-километрового слоя земной атмосферы, отражающие температуру, плотность, направление и скорость движения воздуха; получены простые формулы, выражающие дальность полета движущегося тела как функцию от начальных географических координат, вектора скорости, атмосферных характеристик и аномалий гравитационного поля Земли; по заказу немецких производителей имплантируемых кардиостимуляторов был построен алгоритм оценки текущей физической нагрузки кардиобольного по импедансу, измеряемому стимулятором, что позволяет регулировать частоту сердечных сокращений в соответствии с нагрузкой.

С конца 1980-х гг. В. И. Бердышев в сотрудничестве с В. Л. Гасиловым занимается задачами навигации по геофизическим полям, разрабатывая методы определения местонахождения автономно движущегося объекта, его траектории и скорости по показаниям находящихся на борту датчиков и записанной в памяти бортового компьютера некоторой информации о местности, где происходит движение. Им разработана прикладная теория аппроксимации геофизических полей, обеспечивающая наилучшую привязку летательного аппарата. В связи с этим он ввел новое важное понятие модуля информативности поля. Им развит математический аппарат, который лежит в основе построения алгоритмов поиска аппроксимации поля, оптимальной с точки зрения задачи навигации. Многие результаты по этой тематике вошли в его совместную с В. Б. Костоусовым монографию “Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям”.

В 1994 г. В. И. Бердышев становится заместителем директора Института математики и механики УрО РАН академика А. Ф. Сидорова, а в 1999 г. — директором института. Кандидатуру В. И. Бердышева на этот пост выдвинул академик Н. Н. Красовский.

В. И. Бердышев является членом президиума УрО РАН и председателем Объединенного ученого совета УрО РАН по математике, механике и информатике, осуществляет координацию работ по развитию вычислительных, информационных и телекоммуникационных ресурсов в Уральском отделении РАН.

Большое внимание В. И. Бердышев уделяет школьному математическому образованию. Традиционно сотрудники института являются составителями задач и организаторами математических олимпиад в Свердловской области, а также руководят работой Очно-заочной школы (ОЗШ), что позволяет выявлять и развивать математические таланты ребят со школьной скамьи.

В. И. Бердышев многие годы читает основные и специальные курсы на математико-механическом факультете Уральского госуниверситета, привлекая способных студентов к научным исследованиям. Его совместная с Ю. Н. Субботиным монография “Численные методы приближения функций” на протяжении 30 лет является хорошим источником для спецкурсов. Монография В. И. Бердышева и Л. В. Петрак “Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения” привлекает большое внимание специалистов.

С начала 1970-х гг. В. И. Бердышев принимает активное участие в организации и проведении школы С. Б. Стечкина по теории функций, которая представляет собой уникальное явление в научной жизни бывшего СССР и нынешнего СНГ. Вот уже более 35 лет группа ученых, насчитывающая несколько десятков человек, ежегодно собирается, обычно на одну или две недели, чтобы обсудить перспективы исследований в теории приближения функций и смежных областях, а также текущие вопросы относительно публикаций и защит диссертаций. Для школы выбирается живописное место, обычно на Урале. Вместе с участниками приезжают и их семьи. Профессор С. Б. Стечкин — основатель школы, в первые годы был ее главным организатором, научным руководителем, верховным судьей и мудрым наставником. В настоящее время школу проводят его ученики (в терминологии самого Стечкина “дети”) и ученики учеников (“внуки”). Председателем оргкомитета школы, начиная с 1996 г., является В. И. Бердышев.

Виталий Иванович Бердышев вместе с академиками Ю. С. Осиповым и А. Ф. Сидоровым стоял у истоков создания Трудов Института математики и механики УрО РАН. В настоящее время он — главный редактор журнала.

С юности увлекшись спортом, Виталий Иванович всегда в прекрасной спортивной форме. В молодости он выступал за команду университета по гимнастике, позднее многократно выигрывал внутриинститутские и межинститутские соревнования по лыжным гонкам и настольному теннису. Он поддерживает спортивное движение в институте, в том числе личным участием в соревнованиях в разных видах спорта. Кроме того, коллегам известна страсть Виталия Ивановича к рисованию. Тушью он нарисовал целую галерею портретов коллег, создал серию акварельных пейзажей уральской природы.

В. И. Бердышев опубликовал более 150 научных работ, в том числе три монографии. Шесть его учеников защитили кандидатские диссертации. Несмотря на огромную административную нагрузку, он продолжает вести научные исследования. В 2000 г. он был избран членом-корреспондентом РАН. Его научные заслуги отмечены премиями и наградами, в том числе орденом Дружбы.

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, редакционная коллегия Трудов ИММ УрО РАН, коллеги, ученики и друзья сердечно поздравляют Виталия Ивановича Бердышева с его славным юбилеем и от всей души желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов!

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ В. И. БЕРДЫШЕВА

1. О приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 5. С. 300.
2. Приближение периодических функций суммами Фурье в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 3. С. 505–526.
3. К вопросу о чебышевских множествах // Докл. АН АзССР. 1966. Т. 22, № 9. С. 3–5.
4. Одно свойство измеримых множеств и его приложение к приближению функций // Междунар. конгресс математиков: тез. кратких науч. сообщ. М., 1966. С. 37.
5. О нахождении элемента наилучшего приближения // Поиск экстремума: тез. докл. 3-го симпоз. по экстремальным задачам. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1967. С. 40 (совм. с В. П. Кондратьевым).
6. О теореме Джексона в L_p // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1967. Т. 88. С. 3–16.
7. Приближение периодических функций в среднем: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ин-т математики АН УССР. Киев, 1968. 9 с.
8. Связь между неравенством Джексона и одной геометрической задачей // Мат. заметки. 1968. Т. 3, вып. 3. С. 327–338.
9. О нахождении элемента наилучшего приближения // Поиск экстремума (Мат. методы и автомат. системы): тр. 3-го Всесоюз. симпоз. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1969. С. 245–247 (совм. с В. П. Кондратьевым).
10. Влияние геометрических свойств пространства на сходимость метода Коши в задаче о наилучшем приближении // Мат. заметки. 1970. Т. 8, вып. 3. С. 329–339.
11. О наилучшей аппроксимации дифференциального оператора // Тр. Центр. зонального объединения мат. кафедр. Калинин, 1970. Вып. 1. С. 141–144.
12. Наилучшее приближение в $L[0, \infty]$ оператора дифференцирования // Мат. заметки. 1971. Т. 9, вып. 5. С. 477–481.
13. О модуле непрерывности оператора наилучшего приближения // Мат. заметки. 1974. Т. 15, вып. 5. С. 797–808.
14. Оператор наилучшего приближения на конечномерные подпространства // Мат. заметки. 1974. Т. 16, вып. 3. С. 501–511.
15. Оценки модуля непрерывности оператора GRAD F // Мат. заметки. 1974. Т. 16, вып. 2. С. 349–360.
16. Метрическая проекция на конечномерные подпространства из C и L // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 473–488.
17. Пространства с равномерно непрерывной метрической проекцией // Мат. заметки. 1975. Т. 17, вып. 1. С. 3–12.
18. Равномерная непрерывность метрической проекции и δ-проекции // Теория приближения функций: тез. докл. Междунар. конф. Калуга, 1975. С. 15–16.
19. On the uniform continuity of the operator of best approximation // Approximation Theory: proc. conf. Warszawa: PWN Pol. Sci. Publ., 1975. P. 21–32.
20. Неравенства для дифференцируемых функций // Методы решения условно-корректных задач: сб. науч. тр. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1975. Вып. 17. С. 108–138 (совм. с В. В. Арестовым).
21. Непрерывная зависимость элемента, реализующего минимум выпуклого функционала, от множества допустимых элементов // Мат. заметки. 1976. Т. 19, вып. 4. С. 501–512.
22. Непрерывность оператора метрического проектирования и его обобщений // Тез. докл. Междунар. конф. по конструктивной теории функций. София: Ун-т Климента Охридски, 1977. С. 5.
23. Равномерная непрерывность метрической проекции и ν-проекции // Теория приближения функций: тр. Междунар. конф. М.: Наука, 1977. С. 37–41.
24. Устойчивость задачи минимизации при возмущении множества допустимых элементов // Мат. сб. 1977. Т. 103, № 4. С. 467–479.
25. Непрерывность многозначных отображений, связанных с минимизацией выпуклых функционалов // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 3. С. 561–564.
26. Устойчивость задачи условной минимизации выпуклого функционала // Динамическое управление: тез. докл. Всесоюз. науч. конф. Свердловск, 1979. С. 39.
27. Численные методы приближения функций. Свердловск: Ср.-Урал. кн. изд-во, 1979. 120 с. (совм. с Ю. Н. Субботиным).

28. On the uniform continuity of metric projection // Approximation Theory: proc. conf. Warsaw: PWN Pol. Sci. Publ., 1979. P. 35–41.
29. Джексона теорема // Мат. энциклопедия. М.: СЭ, 1979. Т. 2. С. 110.
30. Непрерывность многозначного отображения, связанного с задачей минимизации функционала // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 3. С. 483–509.
31. Непрерывность оператора метрического проектирования и его обобщений // Конструктивная теория функций'77: тр. Междунар. конф. София, 1980. С. 29–34.
32. Эквивалентность равномерной непрерывности метрической проекции и ν-проекции // Мат. заметки. 1980. Т. 28, № 4. С. 571–582.
33. Варьирование нормы в задаче о наилучшем приближении // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 2. С. 181–196.
34. Устойчивость метрической проекции на некоторые классы непрерывных функций // Методы математического программирования и их программное обеспечение: тез. докл. науч.-техн. конф. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1981. С. 20–21.
35. Stability with respect to the norm of elements of best approximation // Approximation and function spaces. Amsterdam; New York: North-Holland Publ. Comp., 1981. P. 122–134.
36. Устойчивость решения аппроксимативной задачи // Методы аппроксимации и интерполяции: материалы Всесоюз. науч. конф. Новосибирск, 1981. С. 14–18.
37. Метрическая проекция на класс $H(\Omega)$ // Докл. АН СССР. 1982. Т. 266, № 4. С. 777–779.
38. Дифференциальные свойства метрической проекции // Конструктивная теория функций: тр. Междунар. науч. конф. София, 1983. С. 34–37.
39. Устойчивость элемента наилучшего приближения // Теория функций и приближений: тр. 1-й Сарат. зим. шк. Саратов, 1983. Ч. 1. С. 120–127.
40. The metric projection on the class $H(\Omega)$ satisfies Lipschitz condition // Anal. Math. 1983. Vol. 9, no. 4. P. 259–274.
41. On differentiability of the operator of best approximation // Functions, series, operators. Amsterdam; New York: North-Holland Publ. Comp., 1983. Vol. 1, 2. P. 237–248.
42. Разработка алгоритма многопараметрового акустико-эмиссионного прогнозирования прочности нагруженных конструкций // Дефектоскопия. 1983. № 6. С. 88–92 (совм. с А. М. Шостак, Н. А. Марченковым, Н. Л. Пацко).
43. Устойчивость метрической проекции // Методы математического программирования и их программное обеспечение: тез. докл. науч.-техн. конф. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1984. С. 28.
44. Дифференцируемость метрической проекции в нормированном пространстве // Приближение функций полиномами и сплайнами: сб. науч. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 58–71.
45. Наилучшее приближение в L_p классом функций ограниченной вариации // Приближение функций полиномами и сплайнами: сб. науч. ст. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 72–82.
46. Геометрические характеристики пространств и устойчивость наилучшего приближения // Теория функций и приближений: тр. 2-й Сарат. зим. шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. Ч. 1. С. 115–121.
47. О наилучшей траектории, соединяющей упорядоченный набор множеств: препринт. Свердловск: Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР, 1986. 85 с. (совм. с В. П. Кондратьевым).
48. Метрическое проектирование на классы функций с заданной мажорантой модуля непрерывности // Теория приближения функций: тр. Междунар. науч. конф. М., 1987. С. 55–57.
49. О приближении классом Липшица и наилучших траекториях // Теория функций и приближений: тр. 3-й Сарат. зим. шк. Саратов, 1987. С. 110–114.
50. Устойчивость метрической проекции на класс Липшица в пространстве C(I,V) // Тез. докл. Всесоюз. шк. по теории функций. Ереван, 1987. С. 18.
51. Устойчивость минимизации функционалов и равномерная непрерывность метрической проекции: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук / МИАН им. В. А. Стеклова. М., 1987. 26 с.
52. Устойчивость и алгоритм поиска наилучшего обхода упорядоченной системы множеств // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: тез. докл. Всесоюз. конф. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987. С. 31–32 (совм. с В. П. Кондратьевым).
53. Реография поджелудочной железы // Сов. медицина. 1989. № 4. С. 26–29 (совм. с В. А. Козловым, Л. А. Хоменко, В. П. Кондратьевым).

54. Approximation by the Lipschitz class and the best trajectories // Sov. J. Numer. Anal. and Math. Modelling. 1989. Vol. 4, no. 4. P. 253–266.
55. Численная аппроксимация функции двух переменных сложной структуры // Экстремальные задачи теории приближения и их приложения: тез. докл. Респ. науч. конф. Киев, 1990. С. 16 (совм. с Л. В. Петрак, В. П. Кондратьевым).
56. Полиномиальная аппроксимация, связанная с навигацией по геофизическим полям // Докл. РАН. 1992. Т. 325, № 6. С. 1099–1102.
57. Polynomial approximation and geophysical-field navigation problem // Russ. J. Numer. Anal. & Math. Modelling. 1993. Vol. 8, no. 2. P. 83–100.
58. Забытая математика // Проблемы образования одаренных учащихся: тез. докл. науч.-метод. конф. Екатеринбург, 1994. С. 200–201 (совм. с Д. Я. Шараевым).
59. Применение полиномиальной аппроксимации в задаче навигации по геофизическим полям // Гироскопия и навигация. 1995. № 1(8). С. 60.
60. Экстремальная задача, связанная с навигацией // Информ. бюл. Ассоциации мат. программирования (АМП). Екатеринбург: УрО РАН, 1995. № 5. С. 41–42.
61. Алгоритмические и программные средства подготовки эталонной информации для навигации по геофизическим полям // Тр. 2-й С.-Петерб. Междунар. конф. по гироскопической технике и навигации. СПб., 1995. Ч. 1. С. 145–150 (совм. с В. Л. Гасиловым, В. Б. Костоусовым, Л. В. Петрак, Е. Л. Сафроновичем).
62. Приближение функций и навигация по геофизическим полям // Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ: тез. докл. Междунар. науч. конф. М., 1995. С. 42–43.
63. Задача навигации по геофизическим полям и приближение обобщенными полиномами // Теория функций и приближений: тр. 7-й Сарат. зим. шк. памяти А. А. Привалова. 1963. Ч. 1. С. 50–54.
64. С.Б. Стечкин и теория приближений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1996. Т. 4. С. 3–16 (совм. с В. В. Арестовым, Ю. Н. Субботиным, Н. И. Черных).
65. Аппроксимация в задаче навигации // Теория функций и приближений: тр. 5-й Сарат. зим. шк. Саратов, 1996. Ч. 1. С. 65–70.
66. Аппроксимация обобщенными полиномами, обеспечивающая наилучшую привязку // Мат. заметки. 1996. Т. 60, вып. 5. С. 658–669.
67. On compression and modelling of images // Russ. J. Numer. & Anal. Math. Modelling. 1996. Vol. 11, no. 4. C. 275–285 (jointly with S. V. Berdyshev, V. P. Kondratev, V. B. Kostousov, Ya. V. Malygin).
68. In memory of Sergei Borisovich Stechkin // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 131–134 (jointly with F. Andreev, B. Bojanov et al).
69. Stechkin′s workshop — what is it? // East J. Approx. 1996. Vol. 2, no. 2. P. 135–140.
70. Метод диагностики нарушения кровенаполнения поджелудочной железы: патент RU2098011 Рос. Федерации; опубл. 10.12.199. М.: Роспатент, 1997 (совм. с В. А. Козловым, В. П. Кондратьевым, В. В. Прохоровым, Л. А. Хоменко).
71. Дифференцирование ошибки привязки // Тр. МИАН им. В. А. Стеклова. 1997. Т. 219. С. 74–79.
72. Дифференцирование привязки в L // Алгебра и анализ: тез. докл. шк.-конф., посвящ. 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева. Казань: Изд-во Казан. мат. о-ва, 1997. С. 31–32.
73. Необходимое условие экстремума в задаче, связанной с навигацией // Информ. бюл. АМП. Екатеринбург, 1997. № 7. С. 37–38.
74. Производная уклонения в задаче навигации // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. докл. 9-й Сарат. зим. шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. С. 21.
75. Approximation of function and navigation problem // Approximation & Optimization: Proc. ICAOR. Cluj-Napoca: Transilvania Press, 1997. Vol. 1. P. 177–180.
76. Approximation of function and navigation problem // 4th Saint-Petersburg intern. conf. on integrated navigation system. Saint-Petersburg, 1997. P. 96–100 (jointly with L. V. Petrak, P. A. Lasarenko).
77. Экстремальная задача аппроксимации, связанная с привязкой по фрагменту // Теория приближений и гармонический анализ: тез. докл. Междунар. науч. конф. Тула, 1998. С. 41–42.
78. Дифференцирование в задаче поиска среднеквадратической аппроксимации, обеспечивающей наилучшую навигацию по геофизическому полю // Алгоритмический анализ некоррекных задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург, 1998. С. 49–50.
79. Сергей Борисович Стечкин: Штрихи к портрету // Стечкин С.Б. Избр. тр.: Математика. М.: Наука, 1998. С. 5–14 (совм. с В. Ф. Колчиным, Б. С. Стечкиным, Ю. Н. Субботиным, С. А. Теляковским, Н. И. Черных).

80. Numerical methods of approximation connected with the navigation problem // NMA′98: 4th Intern. conf. on numer. methods & applications. Sofia, 1998. P. 50.
81. Отображение, сопряженное к выпуклозначному // Информ. бюл. АМП. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. № 8. С. 44.
82. Дифференцирование в задаче поиска аппроксимации, обеспечивающей наилучшую привязку // Докл. РАН. 1999. Т. 366, № 2. С. 151–154.
83. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. 297 с. (совм. с Л. В. Петрак).
84. Информативность функции и наилучшие траектории // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы шк.-конф. к 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова. Казань, 1999. С. 38–39.
85. Навигация по аппроксимирующей функции и фрагменту геофизического поля // Тр. Междунар. шк. С.Б. Стечкина по теории функций. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. С. 64–76.
86. Conjugate multivalued maps // Workshop on semi-infinite programming & related topics. Alicante, 1999. P. 2–3.
87. Международная конференция “Теория приближения функций и операторов”, посвященная 80-летию со дня рождения С. Б. Стечкина // Изв. Урал. гос. ун-та. 2001. № 18. С. 214–215. (Математика и механика. Вып. 3.) (совм. с В. В. Арестовым, Ю. Н. Субботиным).
88. Использование внутрисердечного импеданса для идентификации состояния пациента // Теория приближений функций и операторов: тез. докл. Междунар. науч. конф., посвящ. 80-летию С. Б. Стечкина. Екатеринбург, 2000. С. 32–33 (совм. с С. В. Бердышевым, И. Ш. Хасановым, М. Шальдахом).
89. Дифференцирование погрешности навигации по аппроксимирующей функции и фрагменту геофизического поля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 7. С. 1003–1011.
90. Наука и образование: докл. на заседании Объед. учен. совета по математике, механике и информатике // Отчет о научной и научно-организационной деятельности УрО РАН за 1999 г. Екатеринбург, 2000. Ч. 2. С. 21 (совм. с В. Е. Третьяковым).
91. О научных работах А. Ф. Сидорова // Тез. науч. докл. 8-го Всерос. совещания по проблемам построения сеток для решения задач мат. физики, посвящ. памяти А. Ф. Сидорова. Пущино, 2000. С. 4 (совм. с А. М. Ильиным).
92. Аппроксимация и навигация // Тез. науч. докл. 8-го Всерос. совещ. по проблемам построения сеток для решения задач мат. физики, посвящ. памяти А. Ф. Сидорова. Пущино, 2000. С. 4.
93. Траектория наилучшей привязки // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2000. Т. 6, № 1-2. С. 307–312.
94. Наилучшая траектория в задаче навигации // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. науч. конф. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2001. С. 264–265.
95. Траектория, наилучшая с точки зрения навигации // Докл. РАН. 2001. Т. 381, № 2. С. 160–161.
96. Информационные технологии как источник потенциальных опасностей для развития России // Материалы 6-го Рос. экон. форума. Екатеринбург, 2001. № 7. С. 181–184 (совм. с И.А̇. Хохловым).
97. Телекоммуникационные, вычислительные и информационные ресурсы Уральского отделения РАН // Телематика 2001: тр. Междунар. науч.-метод. конф. СПб., 2001. С. 19–20 (совм. с М. Л. Гольдштейном, Ю. И. Кузякиным, И. А. Хохловым).
98. Approximation and navigation // 8th European workshop on well-posedeness in optimization and related topics: Abstr. Warsaw: Banach Center, 2001. P. 11–12.
99. Информационные технологии как источник потенциальных опасностей для развития России // Наука и оборонный комплекс — основные ресурсы российской модернизации: материалы межрегион. науч.-практ. конф. Екатеринбург, 2002. С. 405–408 (совм. с И. А. Хохловым).
100. Наилучшая траектория в задаче навигации по геофизическому полю // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 8. С. 1144–1150.
101. Экстремальные задачи, связанные с навигацией // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. науч. докл. 11-й Сарат. зим. шк. Саратов: Изд-во “Колледж”, 2002. С. 19–20.
102. Создание сети СКЦ как основы развития вычислительного сервиса в Уральском отделении РАН // Научный сервис в сети Интернет: тр. Всерос. науч. конф. М.: Изд-во МГУ, 2002. С. 50 (совм. с В. М. Решетовым, М. Л. Гольдштейном, Н. В. Закурдаевым).
103. Телекоммуникационные, вычислительные и информационные ресурсы Уральского отделения РАН // Телекоммуникации и информатизация образования. 2002. № 5 (совм. с М.Л. Гольдштейном, Ю. И. Кузякиным, В. В. Самофаловым, И. А. Хохловым).

104. Информативность геофизического поля, наилучшая траектория, аппроксимация поля // Информ. технологии и вычисл. системы. 2002. № 1. С. 37–48.

105. On extremal problems of navigation and approximation of surfaces // 5-th inform. conf. on curves and surfaces: resumes. Saint-Malo, 2002. P. 6.

106. Новая модель навигации по геофизическому полю и его фрагменту // Информ. бюл. АМП. Екатеринбург, 2003. № 10. С. 41–42.

107. Новая модель навигации автономного аппарата по полю высот и его фрагменту // Докл. РАН. 2003. Т. 390, № 1. С. 7–10.

108. Анатолий Федорович Сидоров (1933–1999) // Динамика жидкости и газа: сб. науч. тр., посвящ. 70-летию акад. РАН А. Ф. Сидорова. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. С. 3–9. (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН; Т. 9, № 2) (совм. с Ю. С. Осиповым, А. М. Ильиным и др.).

109. Вычислительные, информационные и телекоммуникационные ресурсы объединения УрГУ–УрО РАН // Высокопроизводительные ресурсы России: состояние и перспективы развития: материалы 11-го совещ. Уфа, 2003. С. 63–68 (совм. с В. Е. Третьяковым).

110. Аппроксимация поля применительно к задаче навигации // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: материалы 6-й Казан. Междунар. лет. шк.-конф. Казань, 2003. С. 32–33. (Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского; Т.19).

111. О проекте федерального компонента Государственного образовательного стандарта по математике // Модернизация мат. образования: проблемы, мнения, реалии: сб. науч. ст. Екатеринбург: Изд-во Дома учителя, 2003. С. 9–11 (совм. с Н. Н. Красовским, А. Л. Агеевым).

112. Навигация по полю высот и его фрагменту // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2003. Т. 9, № 1. С. 26–37.

113. A. Sidorov: Life, Science, Followers // 8-th Japan-Russia CFD Symposium. Sendei, 2003. P. S1–S2.

114. Модели навигации по геофизическим полям // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Всерос. конф. Екатеринбург, 2004. С. 330.

115. Информативность траектории в задаче навигации по полю высот // Докл. РАН. 2004. Т. 397, № 3. С. 297–299.

116. Аппроксимация поля высот и навигация // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. докл. 12-й Сарат. зим. шк. Саратов: Изд-во “Колледж”, 2004. С. 21–22.

117. Экстремальные задачи, связанные с навигацией по геофизическим полям // Extremal problems and approxim: Intern. conf., dedic. 70th V. M. Tikhomirov: Abstr. M., 2004. C. 28–29.

118. К 80-летию академика РАН Н. Н. Красовского // Вестн. УрО РАН. Наука. Общество. Человек. Екатеринбург, 2004. № 3. С. 20–22.

119. Математические модели в задаче навигации по геофизическим полям // 24-я Рос. шк. по проблемам науки и технологий, посвящ. 80-летию акад. В. П. Макеева: тез. докл. Миасс, 2004. С. 125.

120. Телекоммуникационные и информационные ресурсы УрО РАН // Тез. докл. 11-й конф. представителей регион. науч.-образов. сетей “RELARN–2004”. Самара, 2004. С. 6–9 (совм. с Ю. И. Кузякиным, И. А. Хохловым).

121. Николай Николаевич Красовский (К 80-летию со дня рождения) // Оптимальное управление и дифференциальные игры: сб. науч. тр. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. С. 3–19. (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН; Т. 10, № 2) (совм. с А. Б. Куржанским, Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Осиповым, В. В. Румянцевым).

122. Концепция программы информатизации УрО РАН на 2006–2008 годы // Научный сервис в сети Интернет: Технологии распределенных вычислений: тр. Всерос. науч. конф. М.: Изд-во МГУ, 2005. С. 125–127 (совм. с М. Л. Гольдштейном, И. А. Хохловым).

123. Математика и производство взаимно необходимы // Выездное заседание Президиума УрО РАН: тез. науч. докл. Миасс, 2005.

124. Сергей Борисович Стечкин. Штрихи к портрету (1920–1995) // Современные проблемы математики, механики, информатики: тез. докл. Междунар. науч. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. С. 6–20 (совм. с В. Ф. Колчиным, Б. С. Стечкиным, Ю. Н. Субботиным, С. А. Теляковским, Н. И. Черных).

125. Навигация двужущихся объектов по геофизическим полям // Современные проблемы математики, механики, информатики: тез. докл. Междунар. науч. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2005. С. 55 (совм. с В. Б. Костоусовым).

126. Математические модели навигации по геофизическим полям // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби: тез. докл. Междунар. семинара. Екатеринбург, 2005. С. 35–36 (совм. с В. Б. Костоусовым).

127. Определение координат и ориентация автономного аппарата по векторному геофизическому полю // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 6. С. 954–965.
128. Аппроксимация геофизического поля в задаче навигации автономного аппарата // Функциональные пространства, теория приближения, нелинейный анализ: тез. докл. Междунар. науч. конф. М.: МИАН, 2005. С. 50.
129. Суперкомпьютерная база современной науки в регионе // Вестн. УрО РАН. Наука. Общество. Человек. 2005. № 3. С. 112–120 (совм. с М. Л. Гольдштейном).
130. Алгоритмы и модели навигации по изображениям геофизических полей // Технические проблемы освоения Мирового океана: материалы Междунар. науч.-техн. конф. Владивосток: ИПМТ ДВО РАН, 2005. С. 249–254 (совм. с В. Б. Костоусовым).
131. Навигация движущихся объектов по геофизическим полям // Современная математика и ее приложения. Тбилиси: Ин-т кибернетики АН Грузии, 2005. Т. 26: Нелинейная динамика. С. 15–41 (совм. с В. Б. Костоусовым).
132. Задача определения координат, ориентации и скорости автономного аппарата по геофизическому полю // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 2. С. 53–59.
133. Проблемы создания интеллектуальных автономных подводных роботов и перспективы их решения на основе интеграции междисциплинарных научных исследований // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 2. С. 6–23 (совм. с М. Д. Агеевым, Л. В. Киселевым, В. А. Акуличевым, Ю. Н. Моргуновым, В.Б. Костоусовым [и др.]).
134. Математические модели навигации по геофизическим полям // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби: тр. Междунар. семинара. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2006. Т. 1. С. 13–20 (совм. с В. Б. Костоусовым).
135. Юрий Сергеевич Осипов (К 70-летию со дня рождения) // Динамические системы: моделирование, оптимизация и управление: сб. науч. тр. Екатеринбург, 2006. С. 3–5. (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН; Т. 12, № 1) (совм. с Н. Н. Красовским, А. Б. Куржанским, Е. Ф. Мищенко).
136. Экстремальные задачи, связанные с навигацией // Математика. Механика. Инфоматика: тез. докл. Всерос. науч. конф. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2006. С. 17.
137. Наилучшее множество визирования в задаче навигации // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Тула, 2006. Т. 12, вып. 1: Математика. С. 141–158 (совм. с Д. Л. Поповой, С. Н. Васильевым).
138. Наилучшее множество визирования в задаче навигации // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Междунар. науч. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. С. 83–86 (совм. с Д. Л. Поповой, С. Н. Васильевым).
139. Аппроксимация поля высот для задачи навигации // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы Междунар. науч. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2006. С. 24–26 (совм. с Я.В. Малыгиным).
140. Оптимизация энергетических режимов и оптовый рынок электроэнергии // Энергетика России. Проблемы и перспективы: тр. науч. сессии РАН. М.: Наука, 2006. С. 90–91 (совм. с М. И. Гусевым, В. М. Летуном).
141. Задача навигации по гидролокационному изображению и моделированию ГБО с синтезированной апертурой // Технические проблемы освоения Мирового океана: материалы науч.-техн. конф. Владивосток: Дальнаука, 2007. С. 367–372 (совм. с А. В. Костоусовым, В. Б. Костоусовым) .
142. Навигация по совокупности программных траекторий // Информ. бюл. АМП. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. № 11. С. 230.
143. Экстремальные задачи, связанные с навигацией // Математика. Механика. Информатика: материалы Всерос. науч. конф. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 2007. С. 29–35.
144. Усложненная модель навигации по геофизическому полю // Докл. РАН. 2007. Т. 414, № 1. С. 13–15.
145. Состояние и перспективы развития научных информационных технологий в УрО РАН // Урало-Сибирская науч.-практ. конф.: материалы науч. докл. Екатеринбург, 2007. С. 26–34 (совм. с И. А. Хохловым).
146. Информационные технологии как источник потенциальных опасностей для развития России // Урало-Сибирская науч.-практ. конф.: материалы науч. докл. Екатеринбург, 2007. С. 111–114 (совм. с И. А. Хохловым).
147. Экстремальные задачи и алгоритмы навигации // Численные методы в математике и механике: тез. докл. конф. мол. ученых. Ижевск: Ин-т прикладной математики УрО РАН, 2007. С. 7 (совм. с В. Б. Костоусовым).

148. Хронология Школы С. Б. Стечкина, 1971–2006 гг. // Тр. Междунар. лет. мат. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 7–14.

149. Задача навигации. Аппроксимация поля высот // Параллельные вычислительные технологии: тр. Междунар. науч. конф. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2007. Т. 1. С. 28–30 (совм. с Я.В. Малыгиным).

150. Экстремальные задачи и модели навигации по геофизическим полям. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. 270 с. (совм. с В. Б. Костоусовым).

151. О сотрудничестве математиков Сибири и Урала // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. Т. 1. С. 1–6. URL: http://semr.math.nsc.ru (совм. с В. В. Васиным, А. А. Махневым, Ю. Н. Субботиным).

152. Аппроксимация в метрике, связанной с навигацией // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. науч. докл. 14-й Сарат. зим. шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008. С. 23–24.

153. Характеристика доступности двигающейся точки // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: тез. докл. Междунар. науч. конф. к 100-летию В. К. Иванова. Екатеринбург: Изд-во Урал. гос. ун-та, 2008. С. 40–41.

154. Экстремальные задачи, связанные с навигацией // Сб. науч. ст. конф. мол. ученых. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2008. С. 15–19 (совм. с В. Б. Костоусовым).

155. Характеристика наблюдаемости движущегося объекта // Актуальные проблемы прикладной математики и механики: тез. науч. докл. 4-й Всерос. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. С. 11.

156. Два способа характеризации видимости движущейся точки // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 69–81.

Том 15 № 1 2009

УДК 517.977.8

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ С ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ ЦЕНЫ[1]

Ю. В. Авербух

В работе исследуется множество решений дифференциальной игры с терминальным функционалом платы. Получен метод, позволяющий установить, является ли данная функция ценой некоторой дифференциальной игры с терминальным функционалом платы или нет. Фактически полученное условие является условием того, что данная функция — минимаксное (вязкостное) решение некоторого уравнения типа Гамильтона — Якоби с однородным по третьей переменной гамильтонианом. Также получено достаточное условие принадлежности функции к множеству цен дифференциальных игр с терминальной функцией платы.

Ключевые слова: дифференциальные игры, минимаксные решения уравнений типа Гамильтона – Якоби.

Yu. V. Averbukh. Differential games with a given value function.

The set of solutions of a differential game with a terminal payoff functional is investigated. A method is obtained that allows to establish whether a given function is a value of some differential game with a terminal payoff functional. The condition obtained is in fact a condition for the given function to be a minimax (viscosity) solution of some Hamilton–Jacobi equation with Hamiltonian homogeneous in the third variable. We also obtain a sufficient condition for a function to belong to the set of values of differential games with a terminal payoff function.

Keywords: differential games, minimax solutions of Hamilton–Jacobi equations.

Введение

Дифференциальные игры являются математическими моделями управляемых процессов, в которых имеет место конфликт интересов или неопределенность. Под дифференциальной игрой обычно понимается совокупность множеств ограничений на управления игроков, функции, описывающей динамику, целевого множества (в случае дифференциальной игры наведения) или функционала платы (в случае дифференциальной игры степени). В работах Н. Н. Красовского, А. И. Субботина и их учеников построена строгая теория дифференциальных игр, основанная на позиционной формализации, предложенной Н. Н. Красовским.

Как следует из теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [1]), структура решения конкретной дифференциальной игры может быть охарактеризована в терминах максимального стабильного моста (в случае игры наведения) или в терминах функции цены (в случае игр степени). А. И. Субботин установил [2], что цена дифференциальной игры является минимаксным решением соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби. Известно, что в случае непрерывного функционала платы цена дифференциальной игры — непрерывная функция; в случае локальной липшицевости функционала платы функция цены наследует это свойство.

Настоящая работа посвящена характеризации множества решений дифференциальных игр с терминальным функционалом платы. Исследуется следующий вопрос: пусть зафиксировано натуральное число n и два момента времени t_0, ϑ_0 (при этом $t_0 < \vartheta_0$), дана локально липшицева функция $\varphi: [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; надо определить, является ли функция φ ценой в некоторой дифференциальной игре с терминальным функционалом платы, т. е. существуют ли компакты P и Q и непрерывные функции $f: [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ и $\sigma(x)$, удовлетворяющие обычным

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00436).

в теории дифференциальных игр предположениям, что функция φ является функцией цены в дифференциальной игре вида

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q$$

с функционалом платы $\sigma(x(\vartheta_0))$?

1. Общие определения и обозначения

В теории антагонистических дифференциальных игр рассматриваются управляемые системы вида

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{1.1}$$

Переменные u и v называются управлениями первого и второго игроков соответственно. Первый игрок стремится минимизировать величину $\sigma(x(\vartheta_0))$, второй игрок стремится эту величину максимизировать. Рассматривается случай, когда множества P и Q — компакты в конечномерном арифметическом пространстве. Предполагаются выполненными следующие условия на функцию f:

F1. f непрерывна по совокупности переменных;

F2. f локально липшицева по фазовой переменной;

F3. f удовлетворяет условию подлинейного роста по фазовой переменной: существует константа Λ_f такая, что для всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, $v \in Q$

$$\|f(t, x, u, v)\| \leq \Lambda_f(1 + \|x\|).$$

На функцию $\sigma: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ наложим следующие условия (см. [2]):

Σ1. σ локально липшицева;

Σ2. σ удовлетворяет условию подлинейного роста: существует Λ_σ такое, что

$$|\sigma(x)| \leq \Lambda_\sigma(1 + \|x\|).$$

Отметим, что во многих работах дифференциальные игры рассматриваются при более слабых предположениях. Именно, не накладывается условие Σ2. Это условие было использовано А. И. Субботиным при характеризации решения дифференциальной игры в терминах уравнения Гамильтона — Якоби (см. [2, § 12]). Также обычно предполагается, что σ только непрерывна. Однако локальная липшицевость функции платы гарантирует локальную липшицевость функции цены (см. [3]).

Мы рассматриваем случай, когда игроки выбирают свои управления из класса контрстратегий первого игрока, стратегий второго игрока [1]. В этом случае существует и единственна функция цены дифференциальной игры [1]. Обозначим функцию цены через $\mathrm{Val}(\cdot, \cdot, P, Q, f, \sigma)$. При характеризации функции цены большую роль играет гамильтониан игры. В рассматриваемом случае гамильтониан есть

$$H(t, x, s) \triangleq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle.$$

Для того чтобы описать свойства гамильтониана H, введем следующее обозначение для множества всех возможных модулей непрерывности. Множество Ω — множество всех четных полуаддитивных функций $\omega: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ таких, что $\omega(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$.

Гамильтониан H удовлетворяет следующим условиям при $\Upsilon = \Lambda_f$ (см. [2]).

H1. Для всех $(t, x, s) \in \mathbb{R}^n$

$$|H(t, x, s)| \leq \Upsilon \|s\|(1 + \|x\|),$$

т. е. H удовлетворяет условию подлинейного роста.

H2. Для каждой ограниченной области $A \subset \mathbb{R}^n$ существуют функция $\omega_A \in \Omega$ и константа L_A такие, что для всех $(t', x', s'), (t'', x'', s'') \in [t_0, \vartheta_0] \times A \times \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$\|H(t', x', s') - H(t'', x'', s'')\| \leq \omega_A(t' - t'') + L_A\|x' - x''\| + \Upsilon(1 + \inf\{\|x'\|, \|x''\|\})\|s_1 - s_2\|.$$

H3. H положительно однороден по третьей переменной

$$H(t, x, \alpha s) = \alpha H(t, x, s) \quad \forall (t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \ \forall s \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in [0, \infty).$$

А. И. Субботин установил [2], что цена дифференциальной игры удовлетворяет в обобщенном смысле уравнению

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + H\left(t, x, \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.2}$$

и краевому условию

$$\varphi(\vartheta_0, x) = \sigma(x).$$

А. И. Субботин ввел несколько определений обобщенного решения уравнения (1.2) и установил их эквивалентность [2], а также эквивалентность определению вязкостного решения (см. [2] и [3]). В настоящей работе используется лишь одно из них. Локально липшицева функция $\varphi(t, x)$ является обобщенным (минимаксным) решением уравнения Гамильтона — Якоби вида (1.2), если для всех $(t, x) \in (t_0, \vartheta_0) \times \mathbb{R}^n$ одновременно

$$a + H(t, x, s) \leq 0 \ \ \forall (a, s) \in D^-_{\mathrm{D}}\varphi(t, x); \tag{1.3}$$

$$a + H(t, x, s) \geq 0 \ \ \forall (a, s) \in D^+_{\mathrm{D}}\varphi(t, x). \tag{1.4}$$

Здесь $D^-_{\mathrm{D}}\varphi(t, x)$ — субдифференциал Дини, а $D^+_{\mathrm{D}}\varphi(t, x)$ — супердифференциал Дини (см. [4]):

$$D^-_{\mathrm{D}}\varphi(t, x)$$

$$= \left\{(a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \quad a\tau + \langle s, g\rangle \leq \liminf_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(t + \alpha\tau, x + \alpha g) - \varphi(t, x)}{\alpha} \quad \forall (\tau, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right\},$$

$$D^+_{\mathrm{D}}\varphi(t, x)$$

$$= \left\{(a, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \quad a\tau + \langle s, g\rangle \geq \limsup_{\alpha \to 0} \frac{\varphi(t + \alpha\tau, x + \alpha g) - \varphi(t, x)}{\alpha} \quad \forall (\tau, g) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\right\}.$$

Пару неравенств (1.3), (1.4) будем называть парой минимаксных неравенств.

Пусть J — множество тех позиций (t, x), в которых функция φ дифференцируема (по теореме Радемахера [5, § 3.1] мера $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \setminus J$ равна 0). Полную производную будем рассматривать как пару $(\partial\varphi(t, x)/\partial t, \nabla\varphi(t, x))$. Здесь $\nabla\varphi(t, x)$ — градиент функции φ в позиции (t, x). Пусть $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество

$$\mathcal{A}\varphi(t, x) = \left\{(a, s) : \ \exists\{(t_i, x_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset J : \quad a = \lim_{i \to \infty} \frac{\partial \varphi(t_i, x_i)}{\partial t}, \ \ s = \lim_{i \to \infty} \nabla\varphi(t_i, x_i)\right\}. \tag{1.5}$$

Для случая локально липшицевой функции φ $\mathcal{A}\varphi(t, x)$ — субдифференциал Кларка в позиции (t, x) (см. [4]).

Известно, что (см. [4])

$$D^-_{\mathrm{D}}\varphi(t, x), D^+_{\mathrm{D}}\varphi(t, x) \subset \mathcal{A}\varphi(t, x). \tag{1.6}$$

2. Формулировка основного результата

В настоящей работе мы изучаем класс функций, которые могут быть ценой некоторой дифференциальной игры при предположениях F1–F3 на функцию, описывающую динамику системы, и предположениях Σ1, Σ2 на функционал платы. Основной результат содержится в сформулированной ниже теореме.

Обозначим семейство всех компактов, содержащихся в конечномерных арифметических пространствах, через COMP. Пусть $P, Q \in \mathrm{COMP}$, множество всех функций $f:\ [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих условиям F1–F3, обозначим через $\mathrm{DYN}(P, Q)$. Множество функций $\sigma:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям Σ1 и Σ2, обозначим через TPL. Множество функций, которые являются ценой какой-либо дифференциальной игры с терминальной функцией платы в классе контрстратегия/стратегия, описывается следующим образом:

$$\mathrm{VALFL} \triangleq \Big\{\varphi:\ [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}:$$

$$\exists P, Q \in \mathrm{COMP}\ \exists f \in \mathrm{DYN}(P, Q)\ \exists \sigma \in \mathrm{TPL},\ \varphi = \mathrm{Val}(\cdot, \cdot, P, Q, f, \sigma)\Big\}.$$

Известно (см. [3]), что множество VALFL вложено во множество локально липшицевых функций $\varphi:\ [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ таких, что $\varphi(\vartheta_0, \cdot)$ удовлетворяет условию подлинейного роста. Обозначим это множество через Lip_B.

Пусть $\varphi \in \mathrm{Lip}_B$. Для того чтобы выяснить, принадлежит ли φ множеству VALFL, мы построим некоторое множество пар (позиция, направление). Если на этом множестве удается определить (частичный) гамильтониан, удовлетворяющий сформулированным ниже условиям, то функция φ принадлежит классу VALFL, причем существует алгоритм построения игры, использующий результат, установленный Л. К. Эвансом и П. Е. Соуганидисом [7], о построении игры с заданным гамильтонианом. Если же эти условия не удовлетворяются, то функция φ не принадлежит классу VALFL.

Вначале рассмотрим позиции, в которых функция φ дифференцируема. Если $(t, x) \in J$, то положим

$$E_1(t, x) \triangleq \{\nabla\varphi(t, x)\};$$

$$h(t, x, \nabla\varphi(t, x)) \triangleq -\frac{\partial\varphi(t, x)}{\partial t}. \tag{2.1}$$

Далее будем использовать следующее

У с л о в и е (E1). Для всякой позиции (t_*, x_*), не лежащей в J, и любых последовательностей позиций $\{(t_i', x_i')\}_{i=1}^{\infty}$, $\{(t_i'', x_i'')\}_{i=1}^{\infty}$ из J из соотношений

$$\lim_{i\to\infty}(t_i', x_i') = (t_*, x_*),\quad \lim_{i\to\infty}(t_i'', x_i'') = (t_*, x_*),\quad \lim_{i\to\infty}\nabla\varphi(t_i', x_i') = \lim_{i\to\infty}\nabla\varphi(t_i'', x_i'')$$

следует равенство

$$\lim_{i\to\infty} h(t_i', x_i', \nabla\varphi(t_i', x_i')) = \lim_{i\to\infty} h(t_i'', x_i'', \nabla\varphi(t_i'', x_i'')).$$

Пусть $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \setminus J$. Обозначим

$$E_1(t, x) = \big\{s \in \mathbb{R}^n:\ \exists\{(t_i, x_i)\} \subset J,\ \lim_{i\to\infty}(t_i, x_i) = (t, x)\ \text{ и }\ \lim_{i\to\infty}\nabla\varphi(t_i, x_i) = s\big\}.$$

Из локальной липшицевости функции φ следует, что $E_1(t, x)$ непусто и ограничено для всех $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \setminus J$.

Если $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \setminus J$, $s \in E_1(t, x)$ и выполняется условие (E1), то может быть корректно определена величина

$$h(t, x, s) \triangleq \lim_{i\to\infty} h(t_i, x_i, \nabla\varphi(t_i, x_i)) \tag{2.2}$$

для любой последовательности $\{(t_i,x_i)\}_{i=1}^{\infty}\subset J$ такой, что

$$\lim_{i\to\infty}(t_i,x_i)=(t,x) \text{ и } s=\lim_{i\to\infty}\nabla\varphi(t_i,x_i).$$

Условие (E1) — это условие продолжимости h с множества $\{(t,x,\nabla\varphi(t,x)):\ (t,x)\in J\}$ на пересечение замыкания этого множества с $\{(t,x,s):\ (t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\setminus J\}$. Таким образом, формулой (2.2) функция h определена для "остова" множества $\mathcal{A}\varphi(t,x)$ для $(t,x)\in(t_0,\vartheta_0)\times\mathbb{R}^n\setminus J$. Из (1.5) и (1.6) следует, что для $(t,x)\in(t_0,\vartheta_0)\times\mathbb{R}^n\setminus J$

$$D^-_{\mathrm{D}}\varphi(t,x),D^+_{\mathrm{D}}\varphi(t,x)\subset\{(-h(t,x,s),s):\ s\in E_1(t,x)\}.\tag{2.3}$$

Обозначим

$$CJ^-\triangleq\{(t,x)\in(t_0,\vartheta_0)\times\mathbb{R}^n\setminus J: D^-_{\mathrm{D}}\varphi((t,x))\neq\varnothing\};$$

$$CJ^+\triangleq\{(t,x)\in(t_0,\vartheta_0)\times\mathbb{R}^n\setminus J: D^+_{\mathrm{D}}\varphi((t,x))\neq\varnothing\}.$$

Заметим, что $CJ^-\cap CJ^+=\varnothing$. Определим для $(t,x)\in CJ^-$ множество $E_2(t,x)$ следующим образом:

$$E_2(t,x)\triangleq\{s\in\mathbb{R}^n:\ \exists a\in\mathbb{R},\ (a,s)\in D^-_{\mathrm{D}}\varphi((t,x))\}\setminus E_1(t,x);$$

для $(t,x)\in CJ^+$ положим

$$E_2(t,x)\triangleq\{s\in\mathbb{R}^n:\ \exists a\in\mathbb{R},\ (a,s)\in D^+_{\mathrm{D}}\varphi((t,x))\}\setminus E_1(t,x);$$

для $(t,x)\in([t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n)\setminus(J\cup CJ^-\cup CJ^+)$ положим

$$E_2(t,x)\triangleq\varnothing.$$

Множество $E_2(t,x)$ — это дополнение $E_1(t,x)$ до проекции субдифференциала (или супердифференциала) Дини функции φ в точке (t,x).

Для $(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\setminus J$ определим

$$E(t,x)\triangleq E_1(t,x)\cup E_2(t,x).$$

Отметим, что $E(t,x)\neq\varnothing$ для всех $(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n$. Для всех $(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n$ обозначим

$$E^\natural(t,x)\triangleq\{\|s\|^{-1}s:\ s\in E(t,x)\setminus\{0\}\}.$$

Рассмотрим графики определенных выше многозначных отображений:

$$\mathbb{E}_1\triangleq\{(t,x,s):\ (t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n,\quad s\in E_1(t,x)\};$$

$$\mathbb{E}_2\triangleq\{(t,x,s):\ (t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n,\quad s\in E_2(t,x)\};$$

$$\mathbb{E}\triangleq\{(t,x,s):\ (t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n,\quad s\in E(t,x)\};$$

$$\mathbb{E}^\natural\triangleq\{(t,x,s):\ (t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n,\quad s\in E^\natural(t,x)\}.$$

Отметим, что $\mathbb{E}^\natural\subset[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\times S^{(n-1)}$. Здесь и ниже через $S^{(n-1)}$ обозначается $(n-1)$-мерная сфера

$$S^{(n-1)}\triangleq\{s\in\mathbb{R}^n:\|s\|=1\}.$$

Теорема 1. *Функция $\varphi\in\mathrm{Lip}_B$ принадлежит классу* VALFL *тогда и только тогда, когда функция h, определенная на $\mathbb{E}_1$ формулами* (2.1) *и* (2.2), *продолжима на множество $\mathbb{E}_2$ так, что выполняются условие* (E1) *и условия* (E2)–(E4), *определенные ниже.*

У с л о в и е (E2).

• При $(t,x)\in CJ^-$ для всех $s_1,\dots,s_{n+2}\in E_1(t,s)$ и $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2}\in[0,1]$ таких, что $\sum\lambda_k=1$, $\bigl(-\sum\lambda_k h(t,x,s_k),\sum\lambda_k s_k\bigr)\in D^-\varphi(t,x)$, выполняется неравенство

$$h\biggl(t,x,\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k s_k\biggr)\le\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k h(t,x,s_k);$$

• при $(t,x)\in CJ^+$ для всех $s_1,\dots,s_{n+2}\in E_1(t,s)$ и $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2}\in[0,1]$ таких, что $\sum\lambda_k=1$, $\bigl(-\sum\lambda_k h(t,x,s_k),\sum\lambda_k s_k\bigr)\in D^+\varphi(t,x)$, выполняется неравенство

$$h\biggl(t,x,\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k s_k\biggr)\ge\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k h(t,x,s_k).$$

Условие (E2) является условием того, что функция φ в точках $(t,x)\in CJ^-\cup CJ^+$ удовлетворяет определению минимаксного решения уравнения вида (1.2) с гамильтонианом, совпадающим с h на $\mathbb{E}$.

У с л о в и е (E3). Для всех $(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n$

• если $0\in E(t,x)$, то выполняется равенство $h(t,x,0)=0$;

• если $s_1\in E(t,x)$ и $s_2\in E(t,x)$ сонаправлены (т.е. $\langle s_1,s_2\rangle=\|s_1\|\,\|s_2\|$), то выполняется равенство

$$\|s_2\|h(t,x,s_1)=\|s_1\|h(t,x,s_2).$$

Условие (E3) — это условие положительной однородности функции $h(\cdot,\cdot,\cdot)$ на ее области определения. При выполнении условия (E3) может быть корректно определена функция $h^\natural(t,x,s):\ \mathbb{E}^\natural\to\mathbb{R}$ по правилу: $\forall(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\ \forall s\in E(t,x)\setminus\{0\}$

$$h^\natural(t,x,\|s\|^{-1}s)\triangleq\|s\|^{-1}h(t,x,s).$$

В терминах функции $h^\natural$ формулируется следующее

У с л о в и е (E4).

• $h^\natural$ удовлетворяет условию подлинейного роста: существует $\Gamma>0$ такое, что для всех $(t,x,s)\in\mathbb{E}^\natural$

$$h^\natural(t,x,s)\le\Gamma(1+\|x\|);$$

• для каждого ограниченного множества $A\subset\mathbb{R}^n$ существуют константа $L_A>0$ и функция $\omega_A\in\Omega$ такие, что для всех $(t',x',s'),(t'',x'',s'')\in\mathbb{E}^\natural\cap([t_0,\vartheta_0]\times A\times\mathbb{R}^n)$

$$\|h^\natural(t',x',s')-h^\natural(t'',x'',s'')\|\le\omega_A(t'-t'')+L_A\|x'-x''\|+\Gamma(1+\inf\{\|x'\|,\|x''\|\})\|s'-s''\|.$$

Условие (E4) является сужением условий H1 и H2 на множество $\mathbb{E}$.

Доказательство сформулированной теоремы будет дано в разд. 5. В нем используются вспомогательные утверждения, сформулированные и доказанные в разд. 3 и 4.

В виде следствия сформулируем достаточное условие принадлежности заданной функции $\varphi\in\mathrm{Lip}_B$ классу VALFL, содержащее явный метод продолжения функции h.

Следствие 1. *Пусть задана функция $\varphi\in\mathrm{Lip}_B$; пусть для функции h, определенной на $\mathbb{E}_1$ формулами* (2.1) *и* (2.2) *и удовлетворяющей условию* (E1)*, корректно определено продолжение на $\mathbb{E}_2$, задаваемое следующим образом*: $\forall(t,x)\in CJ^-\cup CJ^+\ \forall s\in E_2(t,x)$

$$h(t,x,s)\triangleq\sum_{i=1}^{n+2}\lambda_i h(t,x,s_i)$$

для всех $s_1,\dots,s_{n+2}\in E_1(t,x)$ и $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2}$ таких, что $\sum\lambda_i s_i=s$, $\sum\lambda_i=1$. Если получившаяся функция h удовлетворяет условиям (E3) *и* (E4)*, то $\varphi\in$ VALFL.*

Сформулированное следствие будет доказано в разд. 5.

3. Продолжение гамильтониана на все пространство

Настоящий раздел посвящен продолжению функции h, определенной в основной теореме, на все пространство $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. В основе раздела лежит классический результат Е. Дж. Макшейна [6] о продолжении функции с сохранением модуля непрерывности.

Лемма 1. *В условиях* (E1)–(E4) *функция* $h : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ *может быть продолжена до функции* $H : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющей условиям* H1–H3.

Доказательство. Построение продолжения будет проведено в два этапа. Вначале мы продолжим функцию $h^\natural : \mathbb{E}^\natural \to \mathbb{R}$ до функции $h^* : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times S^{(n-1)} \to \mathbb{R}$. Потом построенную функцию h^* доопределим до положительно однородной по третьей переменной функции $H : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которая и будет являться продолжением функции h.

Перейдем к определению функции h^*. Для этого построим последовательности множеств $\{G_r\}_{r=0}^{\infty}$, $G_r \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times S^{(n-1)}$, и функций $\{h_r\}_{r=0}^{\infty}$, $h^r : G_r \to \mathbb{R}$, со свойствами:

(G1) $G_0 = \mathbb{E}^\natural$, $h_0 = h^\natural$;

(G2) $G_{r-1} \subset G_r$ для всех $r \in \mathbb{N}$;

(G3) $\bigcup_{r=0}^{\infty} G_r = [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times S^{(n-1)}$;

(G4) для всякого натурального r ограничение функции h_r на G_{r-1} совпадает с h_{r-1};

(G5) для всех $(t, x, s) \in G_r$ справедливо неравенство

$$|h_r(t, x, s)| \le \Gamma(1 + \|x\|);$$

(G6) для каждого $r \in \mathbb{N}_0$ и любого ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^n$ существуют константа $L_{A,r}$ и функция $\omega_{A,r} \in \Omega$ такие, что для всех $(t', x', s'), (t'', x'', s'') \in G_r \cap [t_0, \vartheta_0] \times A \times S^{(n-1)}$

$$\begin{gathered} |h_r(t', x', s') - h_r(t'', x'', s'')| \\ \le \omega_{A,r}(t' - t'') + L_{A,r}\|x' - x''\| + \Gamma\big(1 + \inf\{\|x'\|, \|x''\|\}\big)\|s' - s''\|. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\}$. Функция h^* будет определена как функция, чье сужение на G_r совпадает с h_r.

Опишем построение множеств G_r. Если $x \in \mathbb{R}^n$, $j \in \overline{1, n}$, то через x^j обозначаем j-ю координату x. Через $\|\cdot\|_*$ обозначим следующую норму x:

$$\|x\|_* \triangleq \max_{j=\overline{1,n}} |x^j|.$$

Отметим соотношение между $\|\cdot\|_*$ и $\|\cdot\|$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, тогда

$$\|x\|_* \le \|x\|. \tag{3.2}$$

В самом деле,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x^j)^2} \ge \sqrt{\max_j (x^j)^2}.$$

Пусть $e \in \mathbb{Z}^n$ ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел), $a \in [0, \infty)$. Обозначим через $\Pi(e, a)$ n-мерный куб с центром в точке e и длиной ребра a:

$$\Pi(e, a) \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|e - x\|_* \le \frac{a}{2}\right\}.$$

Заметим, что если $a \geq 1$, то

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{e \in \mathbb{Z}^n} \Pi(e, a).$$

Упорядочим элементы $e \in \mathbb{Z}^n$ так, что если $\|e_i\|_* \leq \|e_k\|_*$, то $i \leq k$. Определим последовательность $\{G_r\}_{r=0}^{\infty}$ следующим образом:

$$G_0 \triangleq \mathbb{E}^\natural, \qquad G_k \triangleq G_{k-1} \cup ([t_0, \vartheta_0] \times \Pi(e_k, 1) \times S^{(n-1)}) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Справедливо равенство

$$[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times S^{(n-1)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} G_k.$$

Таким образом, по построению условия (G1)–(G3) выполняются.

Построим последовательность функций $\{h_r\}$. Имеем

$$h_0(t, x, s) \triangleq h^\natural(t, x, s) \;\; \forall (t, x, s) \in G_0 = \mathbb{E}^\natural.$$

Отметим, что при $r = 0$ условия (G5) и (G6) выполняются согласно (E4).

Пусть теперь функция h_{k-1} определена на множестве G_{k-1} так, что выполняются свойства (G5) и (G6) при $r = k - 1$. Построим функцию h_k на G_k.

Обозначим в условии (G6) функцию $\omega_{A,k-1}$ и константу $L_{A,k-1}$ при $A = \Pi(e_k, 3)$ соответственно через ω_k и L_k; можно считать, что

$$L_k \geq \Gamma. \tag{3.4}$$

Введем также обозначение: пусть $k \in \mathbb{N}_0$, $a \in [0, \infty)$, положим

$$M(k, a) \triangleq [t_0, \vartheta_0] \times \Pi(e_k, a) \times S^{(n-1)}.$$

Множества $M(k, a)$ компактны при любых $k \in \mathbb{N}_0$, $a > 0$. Как следует из определения множеств G_k, если $k \in \mathbb{N}$, то $G_k = G_{k-1} \cup M(k, 1)$.

Пусть $(t, x, s) \in G_k$. Если $(t, x, s) \notin M(k, 1)$, то положим $h_k(t, x, s) \triangleq h_{k-1}(t, x, s)$.

В случае, когда $(t, x, s) \in M(k, 1)$, положим

$$h_k(t, x, s) \triangleq \max \Big\{ -\Gamma(1 + \|x\|), \; \sup \big\{ h_{k-1}(\tau, y, \xi) - \omega_k(t - \tau) - L_k\|x - y\| - \Gamma(1 + \|x\|)\|s - \xi\| :$$

$$(\tau, y, \xi) \in G_{k-1} \cap M(k, 3) \big\} \Big\}. \tag{3.5}$$

Покажем, что условие (G4) выполняется. Это эквивалентно тому, что $h_k(t, x, s) = h_{k-1}(t, x, s)$ при $(t, x, s) \in G_{k-1} \cap M(k, 1)$. Имеем

$$\sup \big\{ h_{k-1}(\tau, y, \xi) - \omega_k(t - \tau) - L_k\|x - y\| - \Gamma(1 + \|x\|)\|s - \xi\| :$$

$$(\tau, y, \xi) \in G_{k-1} \cap M(k, 3) \big\} \geq h_{k-1}(t, x, s) \geq -\Gamma(1 + \|x\|).$$

Отсюда получаем

$$h_k(t, x, s) = \sup \big\{ h_{k-1}(\tau, y, \xi) - \omega_k(t - \tau) - L_k\|x - y\| - \Gamma(1 + \|x\|)\|s - \xi\| :$$

$$(\tau, y, \xi) \in G_{k-1} \cap M(k, 3) \big\} \geq h_{k-1}(t, x, s). \tag{3.6}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Существует $(\tau, y, \xi) \in G_k \cap M(k, 3)$ — такой элемент, что

$$h_k(t, x, s) \leq h_{k-1}(\tau, y, \xi) - \omega_k(t - \tau) - L_k\|x - y\| - \Gamma(1 + \|x\|)\|s - \xi\| + \varepsilon. \tag{3.7}$$

Пользуясь (3.1) для $r = k-1$ и $A = \Pi(e_k, 3)$, имеем

$$h_{k-1}(\tau, y, \xi) - h_{k-1}(t, x, s) \le \omega_k(t-\tau) + L_k\|x-y\| + \Gamma(1+\inf\{\|x\|, \|y\|\})\|s-\xi\|.$$

Из этой формулы и оценки (3.7) имеем

$$h_k(t, x, s) - h_{k-1}(t, x, s) \le \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем, что $h_k(t, x, s) \le h_{k-1}(t, x, s)$, $(t, x, s) \in G_{k-1} \cap M(k, 1)$. Поскольку обратное неравенство установлено выше (см. (3.6)), получаем, что если $(t, x, s) \in G_{k-1} \cap M(k, 1)$, то $h_k(t, x, s) = h_{k-1}(t, x, s)$. Следовательно, функция h_k является продолжением функции h_{k-1}.

Аналогично доказывается, что если $(t, x, s) \in G_{k-1} \cap M(k, 3)$, то

$$h_{k-1}(t, x, s) = \sup\bigl\{h_{k-1}(\tau, y, \xi) - \omega_k(t-\tau) - L_k\|x-y\| - \Gamma(1+\|x\|)\|s-\xi\| : \\ (\tau, y, \xi) \in G_{k-1} \cap M(k, 3)\bigr\}. \tag{3.8}$$

Будем говорить, что значение $h_k(t, x, s)$, $(t, x, s) \in G_k \cap M(k, 3)$, *реализуется на последовательности* $\{(t_i, x_i, s_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset G_{k-1} \cap M(k, 3)$, если

$$h_k(t, x, s) = \lim_{i\to\infty} \bigl[h_{k-1}(t_i, x_i, s_i) - \omega_k(t-t_i) - L_k\|x-x_i\| - \Gamma(1+\|x\|)\|s-s_i\|\bigr].$$

Заметим (см. (3.5)), что если $h_k(t, x, s) > -\Gamma(1+\|x\|)$, то хотя бы одна такая последовательность существует.

Проверим теперь, что функция h_k удовлетворяет условию (G5) при $r = k$. Достаточно рассмотреть $(t, x, s) \in M(k, 1)$. Если для $(t, x, s) \in M(k, 1)$ функция $h_k(t, x, s) = -\Gamma(1+\|x\|)$, то условие подлинейного роста выполняется.

Рассмотрим точки (t, x, s) такие, что $h_k(t, x, s) > -\Gamma(1+\|x\|)$. Пусть $\{(\tau_i, y_i, \xi_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset G_{k-1} \cap M(k, 3)$ — последовательность, на которой реализуется значение $h_k(t, x, s)$. Используя неравенство (3.4), получаем

$$h_{k-1}(\tau_i, y_i, \xi_i) - \omega_k(t-\tau_i) - L_k\|x-y_i\| - \Gamma(1+\|x\|)\|s-\xi_i\|$$

$$\le \Gamma(1+\|y_i\|) - L_k\|x-y_i\| \le \Gamma(1+\|x\|) + \Gamma\|x-y_i\| - L_k\|x-y_i\| \le \Gamma(1+\|x\|).$$

Таким образом, условие (G5) выполняется для $r = k$.

Покажем, что функция h_k удовлетворяет условию (G6) при $r = k$. Пусть A — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим две тройки (t', x', s'), $(t'', x'', s'') \in ([t_0, \vartheta_0] \times A \times S^{(n-1)}) \cap G_k$. Оценим разность $h_k(t', x', s') - h_k(t'', x'', s'')$. Возможны три случая.

i. Обе тройки (t', x', s') и (t'', x'', s'') не принадлежат $M(k, 1)$. Поскольку $h_k(t, x, s) = h_{k-1}(t, x, s)$ при $(t, x, s) \in G_k \setminus M(k, 1)$, имеем

$$h_k(t', x', s') - h_k(t'', x'', s'') \le \omega_{A,k-1}(t'-t'') + L_{A,k-1}\|x'-x''\| + \Gamma(1+\inf\{\|x'\|, \|x''\|\})\|s'-s''\|. \tag{3.9}$$

ii. Тройки $(t', x', s'), (t'', x'', s'') \in M(k, 3)$ и одна из троек принадлежит $M(k, 1)$. Из метода построения функции h_k следует, что возможны два подслучая. Если $h_k(t', x', s') = -\Gamma(1+\|x'\|)$, то

$$h_k(t', x', s') - h_k(t'', x'', s'') \le -\Gamma(1+\|x'\|) + \Gamma(1+\|x''\|) \le \Gamma\|x''-x'\|. \tag{3.10}$$

Случай, когда $h_k(t', x', s') > -\Gamma(1+\|x'\|)$, рассмотрим более подробно. Существует хотя бы одна последовательность $\{(t_i, x_i, s_i)\}_{i=1}^{\infty} \subset G_{k-1} \cap M(k, 3)$, на которой реализуется значение $h_k(t', x', s')$. В силу (3.8) для $(t, x, s) = (t', x', s')$ и неравенств $\|s''-s'\| \le 2$, $\|s'-s_i\| \le 2$ имеем

$$h_{k-1}(t_i, x_i, s_i) - \omega_k(t'-t_i) - L_k\|x'-x_i\| - \Gamma(1+\|x'\|)\|s'-s_i\| - h_k(t'', x'', s'')$$

$$\le h_{k-1}(t_i,x_i,s_i) - \omega_k(t'-t_i) - L_k\|x'-x_i\| - \Gamma(1+\|x'\|)\|s'-s_i\|$$
$$-h_{k-1}(t_i,x_i,s_i) + \omega_k(t''-t_i) + L_k\|x''-x_i\| + \Gamma(1+\|x''\|)\|s''-s_i\|$$
$$\le \omega_k(t'-t'') + L_k\|x'-x''\| + \Gamma(1+\|x''\|)(\|s''-s_i\| - \|s'-s_i\|) + \Gamma(\|x''\|-\|x'\|)\|s'-s_i\|$$
$$\le \omega_k(t'-t'') + L_k\|x'-x''\| + \Gamma(1+\|x''\|)\|s'-s''\| + 2\Gamma\|x'-x''\|$$
$$\le \omega_k(t'-t'') + (L_k+4\Gamma)\|x'-x''\| + \Gamma(1+\inf\{\|x'\|,\|x''\|\})\|s'-s''\|.$$

Отсюда получаем

$$h_k(t',x',s') - h_k(t'',x'',s'')$$
$$\le \omega_k(t'-t'') + (L_k+4\Gamma)\|x'-x''\| + \Gamma(1+\inf\{\|x'\|,\|x''\|\})\|s'-s''\|. \tag{3.11}$$

iii. Одна из троек (t',x',s'), (t'',x'',s'') принадлежит $M(k,1)$, а вторая не принадлежит $M(k,3)$. Тогда (см (3.2)) $\|x'-x''\| \ge \|x'-x''\|_* > 1$ и в силу уже установленного свойства (G5) для $r=k$ имеем

$$h(t',x',s') - h(t'',x'',s'') \le 2\Gamma(1+\sup_{y\in A}\|y\|) \le 2\Gamma(1+\sup_{y\in A}\|y\|)\|x'-x''\|. \tag{3.12}$$

Таким образом, показано (см. (3.9)–(3.12)), что если $(t',x',s'),(t'',x'',s'') \in G_k \cap ([t_0,\vartheta_0]\times A\times S^{(n-1)})$, то

$$h_k(t',x',s') - h_k(t'',x'',s'') \le \omega_{A,k}(t'-t'') + L_{A,k}\|x'-x''\| + \Gamma(1+\inf\{\|x'\|,\|x''\|\})\|s'-s''\|, \tag{3.13}$$

здесь $\omega_{A,k}$ определяется по правилу

$$\omega_{A,k}(\delta) \triangleq \max\{\omega_{A,k-1}(\delta),\ \omega_k(\delta)\}$$

(непосредственно проверяется, что $\omega_{A,k} \in \Omega$);

$$L_{A,k} \triangleq \max\Big\{L_{A,k-1},\ L_k+4\Gamma,\ \Gamma(1+\sup_{y\in A}\|y\|)\Big\}.$$

Отсюда заключаем, что условие (G6) выполняется для $r=k$.

Таким образом, построены последовательности множеств $\{G_r\}_{r=0}^\infty$ и функций $\{h_r\}_{r=0}^\infty$, удовлетворяющие условиям (G1)–(G6).

Для каждого $(t,x,s) \in [t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\times S^{(n-1)}$ существует $k\in\mathbb{N}_0$ со свойством $(t,x,s)\in G_k$. Положим

$$h^*(t,x,s) \triangleq h_k(t,x,s).$$

Заметим, что значение $h^*(t,x,s)$ не зависит от выбора k такого, что $(t,x,s)\in G_k$. Также по построению функции h_k имеем (см. свойство (G5)), что

$$h^*(t,x,s) \le \Gamma(1+\|x\|).$$

Докажем, что для каждого ограниченного множества A существуют функция $\omega_A \in \Omega$ и константа L_A такие, что для всех $(t',x',s'),(t'',x'',s'') \in [t_0,\vartheta_0]\times A\times S^{(n-1)}$

$$|h^*(t',x',s') - h^*(t'',x'',s'')| \le \omega_A(t'-t'') + L_A\|x'-x''\| + \Gamma\big(1+\inf\{\|x'\|,\|x''\|\}\big)\|s'-s''\|. \tag{3.14}$$

В самом деле, существует такой номер m, что $A \subset \bigcup_{k=1}^m \Pi(e_k,1)$. По определению $\{G_k\}$ (см. (3.3)) имеем

$$[t_0,\vartheta_0]\times A\times S^{(n-1)} \ \subset\ [t_0,\vartheta_0]\times\left[\bigcup_{k=1}^m \Pi(e_k,1)\right]\times S^{(n-1)} \subset G_m.$$

Выберем $\omega_A \triangleq \omega_{A,m}$, $L_A \triangleq L_{A,m}$. Поскольку $h^*(t,x,s) = h_m(t,x,s)$ $\forall (t,x,s) \in [t_0,\vartheta_0] \times A \times S^{(n-1)}$, в силу выполнения условия (G6) при $r = m$ имеем

$$|h^*(t',x',s') - h^*(t'',x'',s'')| = |h_m(t',x',s') - h_m(t'',x'',s'')|$$
$$\le \omega_{A,m}(t'-t'') + L_{A,m}\|x'-x''\| + \Gamma\big(1+\inf\{\|x'\|,\|x''\|\}\big)\|s'-s''\|.$$

Таким образом, неравенство (3.14) установлено.

Определим теперь функцию H на $[t_0,\vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$H(t,x,s) = \begin{cases} \|s\|h^*(t,x,\|s\|^{-1}s), & s \ne 0, \\ 0, & s = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

Функция H является продолжением функции h. Действительно, пусть $(t,x,s) \in \mathbb{E}$, $s \ne 0$. Тогда $(t,x,\|s\|^{-1}s) \in \mathbb{E}^\natural$. Следовательно,

$$H(t,x,s) = \|s\|h^*(t,x,\|s\|^{-1}s) = \|s\|h^\natural(t,x,\|s\|^{-1}\|s\|) = h(t,x,s).$$

В случае, когда $(t,x,0) \in \mathbb{E}$, по свойству (E3) имеем

$$h(t,x,0) = 0 = H(t,x,0).$$

Далее мы покажем, что H удовлетворяет условию H2.

Пусть $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$, $(t,x) \in [t_0,\vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Оценим $|H(t,x,s_1) - H(t,x,s_2)|$. Без ограничения общности можно считать, что $\|s_1\| \ge \|s_2\|$. Если $\|s_2\| = 0$, то

$$|H(t,x,s_1) - H(t,x,s_2)| = |H(t,x,s_1)| \le \Gamma(1+\|x\|)\|s_1\| = \Gamma(1+\|x\|)\|s_1 - s_2\|. \tag{3.16}$$

Пусть теперь $\|s_2\| > 0$. Имеем

$$|H(t,x,s_1) - H(t,x,s_2)| = \left|\|s_1\|h^*\Big(t,x,\frac{s_1}{\|s_1\|}\Big) - \|s_2\|h^*\Big(t,x,\frac{s_2}{\|s_2\|}\Big)\right|$$
$$\le (\|s_1 - s_2\|)\left|h^*\Big(t,x,\frac{s_1}{\|s_1\|}\Big)\right| + \|s_2\|\left|h^*\Big(t,x,\frac{s_1}{\|s_1\|}\Big) - h^*\Big(t,x,\frac{s_2}{\|s_2\|}\Big)\right|$$
$$\le \Gamma(1+\|x\|)\|s_1 - s_2\| + \|s_2\|\Gamma(1+\|x\|)\left\|\frac{s_1}{\|s_1\|} - \frac{s_2}{\|s_2\|}\right\|$$
$$\le 2\Gamma(1+\|x\|)\|s_1 - s_2\|. \tag{3.17}$$

Для того чтобы обосновать последний переход, докажем, что при $\|s_1\| \ge \|s_2\|$

$$\left\|\frac{\|s_2\|s_1}{\|s_1\|} - s_2\right\| \le \|s_1 - s_2\|. \tag{3.18}$$

Пусть $z \in \mathbb{R}^n$ — вектор, сонаправленный с s_1, γ — угол между s_1 и s_2,

$$\cos\gamma = \frac{\langle s_1, s_2\rangle}{\|s_1\|\,\|s_2\|}.$$

Рассмотрим треугольник, образованный началом координат и концами векторов z и s_2. Длины его сторон равны $\|z\|$, $\|s_2\|$ и $\|z - s_2\|$, при этом по теореме косинусов

$$\|z - s_2\|^2 = \|s_2\|^2 + \|z\|^2 - 2\|z\|\|s_2\|\cos\gamma = \|s_2\|^2(1-\cos^2\gamma) + (\|z\| - \|s_2\|\cos\gamma)^2.$$

Следовательно, функция $\|z - s_2\|$ как функция $\|z\|$ возрастает в области $\|z\| \ge \|s_2\|\cos\gamma$. Поскольку

$$\left\|\frac{\|s_2\|s_1}{\|s_1\|}\right\| = \|s_2\| \le \|s_1\|,$$

заключаем, что неравенство (3.18) выполняется.

Объединяя оценки (3.16) и (3.17), приходим к неравенству

$$|H(t,x,s_1) - H(t,x,s_2)| \leq \Upsilon(1+\|x\|)\|s_1 - s_2\| \quad \forall (t,x) \in [t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n \quad \forall s_1,s_2\in\mathbb{R}^n. \tag{3.19}$$

Здесь $\Upsilon = 2\Gamma$. Отсюда с использованием определения H (см. (3.15)) и свойств функции h^* (см. (3.14)) получаем, что функция H удовлетворяет условию H2.

Заметим, что для всех $(t,x,s)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$

$$|H(t,x,s)| \leq \Gamma\|s\|(1+\|x\|) \leq \Upsilon\|s\|(1+\|x\|),$$

т. е. свойство H1 для функции H выполняется.

Положительная однородность по третьей переменной (условие H3) выполняется автоматически.

4. Построение игры с заданным гамильтонианом

Этот раздел содержит некоторое обобщение результата Л. К. Эванса и П. Е. Соуганидиса (см. [7]). Отличие от работы [7] состоит в том, что в настоящей работе рассматриваются локально липшицевы функции, удовлетворяющие условию подлинейного роста (в работе [7] наложены более ограничительные условия).

Лемма 2. *Пусть функция $H:\ [t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям H1–H3. Тогда существуют множества $P,Q\in\mathrm{COMP}$ и функция $f\in\mathrm{DYN}(P,Q)$ такие, что*

$$H(t,x,s) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\big\langle s, f(t,x,u,v)\big\rangle \quad \forall (t,x,s)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $B \triangleq \{s\in\mathbb{R}^n:\ \|s\|\leq 1\}$. По условию H2 существует такое число Υ, что для всех $(t,x,s_1),(t,x,s_2)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$

$$|H(t,x,s_1)-H(t,x,s_2)| \leq \Upsilon(1+\|x\|)\|s_1-s_2\|.$$

Тогда имеем

$$H(t,x,s) = \|s\|H\Big(t,x,\frac{s}{\|s\|}\Big) = \|s\|\max_{z\in B}\left[H(t,x,z) - \Upsilon(1+\|x\|)\left\|\frac{s}{\|s\|}-z\right\|\right]$$

$$= \|s\|\max_{z\in B}\min_{y\in B}\left[H(t,x,z)+\Upsilon(1+\|x\|)\left\langle y,\frac{s}{\|s\|}-z\right\rangle\right]$$

$$= \|s\|\max_{z\in B}\min_{y\in B}\left[\big(H(t,x,z)+\Upsilon(1+\|x\|)\big) - \Upsilon(1+\|x\|) + \Upsilon(1+\|x\|)\left\langle y,\frac{s}{\|s\|}-z\right\rangle\right]$$

$$= \max_{z\in B}\min_{y\in B}\Big[\big(H(t,x,z)+\Upsilon(1+\|x\|)\big)\|s\| + \Upsilon(1+\|x\|)\langle y,s\rangle - \Upsilon(1+\|x\|)(1+\langle y,z\rangle)\|s\|\Big].$$

Поскольку при всех $y,z\in B$

$$H(t,x,z)+\Upsilon(1+\|x\|)\geq 0, \qquad \Upsilon(1+\|x\|)(1+\langle y,z\rangle)\geq 0,$$

последнее равенство может быть продолжено:

$$H(t,x,s) = \max_{z\in B}\min_{y\in B}\max_{z'\in B}\min_{y'\in B}$$

$$\Big[\big(H(t,x,z)+\Upsilon(1+\|x\|)\big)\langle z',s\rangle + \Upsilon(1+\|x\|)\langle y,s\rangle + \Upsilon(1+\|x\|)(1+\langle y,z\rangle)\langle y',s\rangle\Big]. \tag{4.2}$$

Заметим, что в формуле (4.2) $\min_{y\in B}$ и $\max_{z'\in B}$ могут быть переставлены. Обозначим $P = Q \triangleq B\times B$,

$$f(t,x,u,v) \triangleq H(t,x,z)z' + \Upsilon(1+\|x\|)\big[z'+y+(1+\langle y,z\rangle)y'\big]$$

для $(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n$, $u=(y,y')$, $v=(z,z')$. Ясно, что (4.1) выполняется. Из вида функции f следует, что $f\in\mathrm{DYN}(P,Q)$.

5. Построение дифференциальной игры с заданным решением

В настоящем разделе доказываются утверждения, сформулированные в разд. 2.

Доказательство теоремы 1.

Необходимость. Пусть $\varphi \in \mathrm{Lip}_B \cap \mathrm{VALFL}$. По определению VALFL существуют $P, Q \in \mathrm{COMP}$, $f \in \mathrm{DYN}(P,Q)$, $\sigma \in \mathrm{TPL}$ такие, что $\varphi = \mathrm{Val}(\cdot,\cdot,P,Q,f,\sigma)$. Тогда (см. [2]) φ в обобщенном смысле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + H(t,x,\nabla\varphi) = 0$$

при

$$H(t,x,s) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s, f(t,x,u,v)\rangle.$$

Рассмотрим функцию h, определенную формулами (2.1) в точках дифференцируемости φ. Имеем

$$h(t,x,s) = H(t,x,s),\quad (t,x)\in J,\quad s\in E(t,x).$$

Пусть (t,x) — точка, где φ недифференцируема, $s \in E_1(t,x)$. Обозначим

$$L\varphi(t,x,s) \triangleq \Big\{a\in\mathbb{R}:\ \exists\{(t_i,x_i)\}_{i=1}^{\infty}\subset J,$$

$$(t,x,s) = \lim_{i\to\infty}(t_i,x_i,\nabla\varphi(t_i,x_i)),\ a = \lim_{i\to\infty}\partial\varphi(t_i,x_i)/\partial t\Big\}.$$

Поскольку для $(t,x)\in J$ частная производная $\partial\varphi(t,x)/\partial t = -H(t,x,\nabla\varphi(t,x))$, из непрерывности функции H следует, что

$$L\varphi(t,x,s) = \{-H(t,x,s)\}\quad (t,x)\notin J,\quad s\in E_1(t,x).$$

Таким образом, для функции $h = H$ выполняется условие (E1), и функция $h(t,x,s) = H(t,x,s)$ при $(t,x)\notin J$, $s\in E_1(t,x)$ определена формулой (2.2). Имеем, что $h = H$ на $\mathbb{E}_1$. В качестве продолжения h на $\mathbb{E}_2$ выберем функцию H. Поскольку φ есть минимаксное решение уравнения Гамильтона — Якоби, то для всех $(t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n$

$$a + H(t,x,s) \le 0\ \ \forall (a,s)\in D^-\varphi(t,x),$$

$$a + H(t,x,s) \ge 0\ \ \forall (a,s)\in D^+\varphi(t,x).$$

Если в (t,x) функция φ не дифференцируема, а $D^-\varphi(t,x)\cup D^+\varphi(t,x)\neq\varnothing$, то выполнено максимум одно включение: $(t,x)\in CJ^-$ или $(t,x)\in CJ^+$. Пусть $(t,x)\in CJ^-$. Рассмотрим $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+2}\in[0,1]$ и $s_1,\ldots,s_{n+2}\in E_1(t,x)$ такие, что $\sum\lambda_i = 1$,

$$\Big(-\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k H(t,x,s_k), \sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k s_k\Big)\in D^-(t,x).$$

Следовательно,

$$-\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k H(t,x,s_k) + H\Big(t,x,\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k s_k\Big)\le 0.$$

Аналогично устанавливается, что если $(t,x)\in CJ^+$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+2}\in[0,1]$ и $s_1,\ldots,s_{n+2}\in E_1(t,x)$ таковы, что $\sum\lambda_i = 1$ и

$$\Big(-\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k H(t,x,s_k), \sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k s_k\Big)\in D^+(t,x),$$

то выполняется неравенство

$$-\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k H(t,x,s_k)+H\biggl(t,x,\sum_{k=1}^{n+2}\lambda_k s_k\biggr)\geq 0.$$

Таким образом, установлено, что $h=H$ удовлетворяет условию (E2).

Условие (E3) выполняется в силу положительной однородности H.

Заметим, что $h^\natural(t,x,s)=H(t,x,s)\ \ \forall (t,x,s)\in\mathbb{E}^\natural$. Поскольку функция H удовлетворяет условиям H1 и H2, то (E4) также выполняется.

Достаточность. Пусть теперь для функции $\varphi\in\mathrm{Lip}_B$ корректно определена (формулами (2.1) и (2.2)) на $\mathbb{E}_1$ функция h, продолжимая на $\mathbb{E}_2$ так, что выполняются условия (E2)–(E4). Тогда по лемме 1 существует функция H — продолжение h на $[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Функция H удовлетворяет условиям H1–H3. При этом $H(t,x,s)=h(t,x,s)$, $(t,x,s)\in\mathbb{E}$. По лемме 2 существуют компакты $P,Q\in\mathrm{COMP}$ и функция $f\in\mathrm{DYN}(P,Q)$ такие, что

$$H(t,x,s)=\max_{u\in P}\min_{v\in Q}\langle s,f(t,x,u,v)\rangle. \tag{5.1}$$

Положим

$$\sigma(x)\triangleq\varphi(\vartheta_0,x).$$

Поскольку $\varphi\in\mathrm{Lip}_B$, то $\sigma\in\mathrm{TPL}$. Покажем, что $\varphi=\mathrm{Val}(\cdot,\cdot,P,Q,f,\sigma)$. Это равенство эквивалентно тому, что функция φ является минимаксным решением уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\psi}+H(t,x,\nabla\psi)=0 \tag{5.2}$$

с краевым условием

$$\psi(\vartheta_0,x)=\sigma(x). \tag{5.3}$$

В самом деле, краевое условие выполняется в силу определения функции σ. Покажем, что φ является минимаксным решением уравнения (5.2). Если $(t,x)\in J$, то [4]

$$D^-_{\mathrm{D}}\varphi(t,x)=D^+_{\mathrm{D}}\varphi(t,x)=\Bigl\{\Bigl(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t},\nabla\varphi(t,x)\Bigr)\Bigr\},$$

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}=-h(t,x,\nabla\varphi(t,x))=-H(t,x,\nabla\varphi(t,x)).$$

Таким образом, при $(t,x)\in J$ неравенства (1.3) и (1.4) выполняются.

Известно (см. (2.3)), что для $(t,x)\in(t_0,\vartheta_0)\times\mathbb{R}^n\setminus J$

$$D^-_{\mathrm{D}}\varphi(t,x),D^+_{\mathrm{D}}\varphi(t,x)\subset\mathrm{co}\bigl\{(-h(t,x,s),s):\ s\in E_1(t,x)\bigr\}. \tag{5.4}$$

Если $(a,s)\in D^-_{\mathrm{D}}\varphi(t,x)$ (в этом случае $(t,x)\in CJ^-$), то существуют $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2}\in[0,1]$, $s_1,\dots,s_{n+2}\in E_1(t,x)$ такие, что $\sum\lambda_k=1$, $\sum\lambda_k s_k=s$, $-\sum\lambda_k h(t,x,s_k)=a$ (см. (5.4)). Следовательно, из условия (E2) имеем

$$h(t,x,s)\leq\sum\lambda_k h(t,x,s_k)=-a,$$

что эквивалентно условию (1.3). Аналогично устанавливается, что выполняется и условие (1.4). Таким образом, установлено, что φ — минимаксное решение уравнения (5.2) с краевым условием (5.3). В силу [2] и (5.1) $\varphi=\mathrm{Val}(\cdot,\cdot,P,Q,f,\sigma)$. Теорема доказана. □

Доказательство следствия 1. В самом деле, если $(t,x) \in CJ^-$, $s \in E_2(t,x)$, то для любых наборов $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+2} \in [0,1]$, $s_1,\dots,s_{n+2}$ таких, что $\sum \lambda_k = 1$, $\sum \lambda_k s_k = s$, выполняется вложение

$$\Big(-\sum_{k=1}^{n+2} \lambda_k h(t,x,s_k), \sum_{k=1}^{n+2} \lambda_k s_k \Big) \in D^-\varphi(t,x).$$

По условию следствия имеем

$$h(t,x,s) = \sum_{k=1}^{n+2} \lambda_k h(t,x,s_k).$$

Следовательно, первая половина условия (E2) верна. Аналогично доказывается вторая половина условия (E2). Условия (E1), (E3) и (E4) выполняются по предположению.

Таким образом, $\varphi \in$ VALFL.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н. Н., Субботин А. И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Субботин А. И.** Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Перспективы динамической оптимизации. Ижевск: РХД, 2003. 336 с.
3. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 1997. 570 p.
4. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.
5. **Эванс Л.К., Гариепи Р.Ф.** Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002. 216 с.
6. **McShane E. J.** Extension of range of function // Bull. Amer. Math. Soc. 1934. Vol. 40, no. 12. P. 837–842.
7. **Evans L.C., Souganidis P.E.** Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton–Jacobi–Isaacs equations // Ind. Univ. Math. J. 1984. Vol. 33, no. 5. P. 773–797.

Авербух Юрий Владимирович
канд. физ.-мат. наук
младший науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ayv@imm.uran.ru

Поступила 29.10.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 512.542

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ ПО СПЕКТРУ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУПП[1]

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев

Доказано, что если G — конечная группа с таким же множеством порядков элементов, как у простой группы $D_p(q)$, где p — простое число, $p \geq 5$ и $q \in \{2,3,5\}$, то коммутант группы $G/F(G)$ изоморфен $D_p(q)$, подгруппа $F(G)$ равна 1 при $q = 5$ и $O_q(G)$ при $q \in \{2,3\}$, $F(G) \leq G'$ and $|G/G'| \leq 2$.

Ключевые слова: конечная простая группа, спектр группы, граф простых чисел, распознавание по спектру, ортогональная группа.

O.A. Alekseeva and A.S. Kondrat'ev. On recognizability of some finite simple orthogonal groups by spectrum.

It is proved that if G is a finite group with the same set of element orders as simple group $D_p(q)$, where p is a prime, $p \geq 5$ and $q \in \{2,3,5\}$, then the commutator group of $G/F(G)$ is isomorphic to $D_p(q)$, the subgroup $F(G)$ is equal to 1 for $q = 5$ and to $O_q(G)$ for $q \in \{2,3\}$, $F(G) \leq G'$ and $|G/G'| \leq 2$.

Keywords: finite simple group, spectrum of a group, prime graph, recognition by spectrum, orthogonal group.

Введение

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество $\omega(G)$ определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*) $\mathrm{GK}(G)$ группы G, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две различные вершины p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$. Обозначим число компонент связности графа $\mathrm{GK}(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leq i \leq s(G)\}$; при этом для группы G четного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$. Множество $\omega(G)$ однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ своих максимальных по делимости элементов.

Общее строение конечных групп с несвязным графом простых чисел дается теоремой Грюнберга — Кегеля (см. [1, теорема A]). Конечные простые неабелевы группы с несвязным графом простых чисел описаны в [1, 2].

Результаты о конечных группах с несвязным графом Грюнберга — Кегеля нашли большое применение в исследованиях распознаваемости конечных групп по спектру (см., например, последний обзор В. Д. Мазурова [3]). Конечная группа G называется *распознаваемой* (по спектру), если для любой конечной группы H с условием $\omega(H) = \omega(G)$ имеем $H \cong G$.

Первый этап решения вопроса распознаваемости конечных простых групп с несвязным графом Грюнберга — Кегеля заключается в доказательстве условия квазираспознаваемости, более слабого, чем распознаваемость. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой*, если любая конечная группа G с условием $\omega(G) = \omega(P)$ имеет единственный неабелев композиционный фактор и этот фактор изоморфен P. Заметим, что для квазираспознаваемой конечной простой группы положительно решается вопрос 12.39 Ши из "Коуровской тетради" [4] о распознаваемости конечных простых групп по спектру и порядку.

В [5–15] доказана квазираспознаваемость конечной простой группы L в следующих случаях: 1) $s(L) \geq 3$ и L не изоморфна группе A_6; 2) $s(L) = 2$ и L изоморфна одной из групп $L_n(2^k)$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00148), РФФИ-БРФФИ (проект 08-01-90006), программы Отделения математических наук РАН (проект О1-2) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект С1-2) и НАН Беларуси (проект СБ).

${}^2D_{2^m}(2^k)$, ${}^2D_{2^m+1}(2)$ $(m>1)$, $C_{2^m}(2^k)$ $(m>2)$, ${}^3D_4(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$ $(q>2)$, $B_p(3)$ ($p>3$ — простое число), ${}^2D_p(3))$ (p — нечетное простое число), ${}^2D_{2^m+1}(3)$.

В данной работе продолжается изучение распознаваемости простых групп лиева типа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Доказана следующая

Теорема. *Если G — конечная группа с таким же спектром, как у простой группы $D_p(q)$, где p — простое число, $p\geq 5$ и $q\in\{2,3,5\}$, то коммутант группы $G/F(G)$ изоморфен $D_p(q)$, подгруппа $F(G)$ равна 1 при $q=5$ и $O_q(G)$ при $q\in\{2,3\}$, $F(G)\leq G'$ and $|G/G'|\leq 2$.*

Распознаваемость группы $D_5(2)$ была доказана ранее в [16].

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [17–20]. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p и $\pi(n)$ обозначаются соответственно p-часть и множество всех простых делителей числа n. Для конечной группы G положим $\pi(G)=\pi(|G|)$ и $\mu_i(G)=\{n\in\mu(G)\mid \pi(n)\subseteq\pi_i(G)\}$. Через ϵ обозначается переменная, принимающая значения $+$ или $-$. Группы $A_n^\epsilon(q)$ обозначают соответственно $A_n(q)$ при $\epsilon=+$ и ${}^2A_n(q)$ при $\epsilon=-$. Обозначим через $t(G)$ наибольшую из мощностей независимых множеств графа $\mathrm{GK}(G)$ (множество вершин графа называется *независимым*, если его элементы попарно не смежны), а через $t(r,G)$ — наибольшую из мощностей независимых множеств графа $\mathrm{GK}(G)$, содержащих простое число r. Через $\rho(r,G)$ обозначается некоторое независимое множество наибольшей мощности в $\mathrm{GK}(G)$, содержащее простое число r.

В доказательстве теоремы используются следующие результаты.

Лемма 1.1 [21, лемма 4]. *Пусть P — конечная простая группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля. Тогда*

(a) $|\mu_i(P)|=1$ *для* $i>1$ (*пусть* $n_i=n_i(P)$ *обозначает единственный элемент из* $\mu_i(P)$ *для* $i>1$);

(b) *для каждого $i>1$ группа P содержит изолированную абелеву холлову $\pi(n_i)$-подгруппу X_i, причем эта подгруппа циклическая порядка n_i, за исключением следующих случаев*:

(1) $P\cong L_3(4)$, $n_i(P)=3$ *и подгруппа X_i — элементарная абелева группа порядка* 9;

(2) $P\cong L_2(q)$, *где q — непростая степень нечетного простого числа p, $n_i(P)=p$ и подгруппа X_i — элементарная абелева группа порядка q*;

(c) P, $\pi_1(P)$ *и* n_i *для* $2\leq i\leq s(P)$ *такие, как в приведенных ниже табл.* 1–3, *где p обозначает нечетное простое число.*

Лемма 1.2. *Пусть G — конечная группа с несвязным графом Грюнберга — Кегеля, не изоморфная группе Фробениуса или двойной группе Фробениуса, и P — неабелев композиционный фактор в G. Тогда для каждого $i\in\{2,\dots,s(G)\}$ существует $j\in\{2,\dots,s(P)\}$ такое, что $\mu_i(G)=\{n_j(P)\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно.

Лемма 1.3 (теорема Жигмонди [22]). *Пусть q и n — натуральные числа, $q\geq 2$. Если пара (q,n) отлична от $(2,6)$, то существует простое число, делящее q^n-1 и не делящее q^i-1 при любом натуральном $i<n$.*

В обозначениях леммы 1.3 простое число, делящее q^n-1 и не делящее q^i-1 при любом натуральном $i<n$, называется *примитивным простым делителем* числа q^n-1 и обозначается через $r_n(q)$ или просто через r_n, если q фиксировано.

Лемма 1.4 [23]. *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара (p^a, q^b) равна $(3^2, 2^3)$, $(p, 2^b)$ или $(2^a, q)$.*

Лемма 1.5 [24, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Лемма 1.6 [25, предложение 10]. *Каждый максимальный тор T простой группы $D_p(q)$, где p — нечетное простое число, имеет порядок*

$$\frac{1}{(4, q-1)}(q^{n_1}-1)(q^{n_2}-1)\cdots(q^{n_k}-1)(q^{l_1}+1)(q^{l_2}+1)\cdots(q^{l_m}+1)$$

для подходящего разбиения числа $p = n_1 + n_2 + \ldots + n_k + l_1 + l_2 + \ldots + l_m$, где m четно.

Лемма 1.7 [26, табл. 4, 6, 8]. *Пусть $L = D_p(q)$, где p — простое число, $p \geq 5$ и $q \in \{2, 3, 5\}$. Тогда*

(a) $t(L) = \left[\dfrac{3p+1}{4}\right]$;

(b) $t(q, L) = 3$, $t(2, L)$ *равно* 2 *при* $q = 3$ *и* 3 *при* $q \neq 3$, $\rho(2, L)$ *равно* $\{2, r_p\}$ *при* $q = 3$ *и* $\{2, r_p, r_{2(p-1)}\}$ *при* $q \neq 3$, $\rho(q, L) = \{q, r_p, r_{2(p-1)}\}$.

Т а б л и ц а 1

Конечные простые группы P с $s(P) = 2$

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2
A_n	$6 < n = p, p+1, p+2$; одно из чисел $n, n-2$ непростое	$\pi((n-3)!)$	p
$A_{p-1}(q)$	$(p,q) \neq (3,2), (3,4)$	$\pi(q\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1))$	$\dfrac{q^p-1}{(q-1)(p,q-1)}$
$A_p(q)$	$(q-1) \mid (p+1)$	$\pi(q(q^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-1))$	$\dfrac{q^p-1}{q-1}$
${}^2A_{p-1}(q)$		$\pi(q\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-(-1)^i))$	$\dfrac{q^p+1}{(q+1)(p,q+1)}$
${}^2A_p(q)$	$(q+1) \mid (p+1)$, $(p,q) \neq (3,3), (5,2)$	$\pi(q(q^{p+1}-1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^i-(-1)^i))$	$\dfrac{q^p+1}{q+1}$
${}^2A_3(2)$		$\{2, 3\}$	5
$B_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$, q нечетно	$\pi(q\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1))$	$(q^n+1)/2$
$B_p(3)$		$\pi(3(3^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1))$	$(3^p-1)/2$
$C_n(q)$	$n = 2^m \geq 2$	$\pi(q\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1))$	$\dfrac{q^n+1}{(2,q-1)}$
$C_p(q)$	$q = 2, 3$	$\pi(q(q^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1))$	$\dfrac{q^p-1}{(2,q-1)}$

Т а б л и ц а 1 (окончание)

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2
$D_p(q)$	$p \geq 5$, $q = 2, 3, 5$	$\pi(q\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1))$	$\dfrac{q^p-1}{q-1}$
$D_{p+1}(q)$	$q = 2, 3$	$\pi(q(q^p+1)\prod_{i=1}^{p-1}(q^{2i}-1))$	$\dfrac{q^p-1}{(2,q-1)}$
${}^2D_n(q)$	$n = 2^m \geq 4$	$\pi(q\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1))$	$\dfrac{q^n+1}{(2,q+1)}$
${}^2D_n(2)$	$n = 2^m+1$, $m \geq 2$	$\pi(2(2^n+1)\prod_{i=1}^{n-2}(2^{2i}-1))$	$2^{n-1}+1$
${}^2D_p(3)$	$5 \leq p \neq 2^m+1$	$\pi(3\prod_{i=1}^{p-1}(3^{2i}-1))$	$\dfrac{3^p+1}{4}$
${}^2D_n(3)$	$n = 2^m+1 \neq p$, $m \geq 2$	$\pi(3(3^n+1)\prod_{i=1}^{n-2}(3^{2i}-1))$	$\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$
$G_2(q)$	$2 < q \equiv \epsilon 1(3)$	$\pi(q(q^2-1)(q^3-\epsilon))$	$q^2-\epsilon q+1$
${}^3D_4(q)$		$\pi(q(q^6-1))$	q^4-q^2+1
$F_4(q)$	q нечетно	$\pi(q(q^6-1)(q^8-1))$	q^4-q^2+1
${}^2F_4(2)'$		$\{2, 3, 5\}$	13
$E_6(q)$		$\pi(q(q^5-1)(q^8-1)(q^{12}-1))$	$\dfrac{q^6+q^3+1}{(3,q-1)}$
${}^2E_6(q)$	$q > 2$	$\pi(q(q^5+1)(q^8-1)(q^{12}-1))$	$\dfrac{q^6-q^3+1}{(3,q+1)}$
M_{12}		$\{2, 3, 5\}$	11
J_2		$\{2, 3, 5\}$	7
Ru		$\{2, 3, 5, 7, 13\}$	29
He		$\{2, 3, 5, 7\}$	17
McL		$\{2, 3, 5, 7\}$	11
Co_1		$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	23
Co_3		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	23
Fi_{22}		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	13
F_5		$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	19

Таблица 2

Конечные простые группы P с $s(P) = 3$

P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2	n_3
A_n	$n > 6$, числа $n = p, p-2$ простые	$\pi((n-3)!)$	p	$p-2$
$A_1(q)$	$3 < q \equiv \epsilon 1(4)$	$\pi(q-\epsilon)$	$\pi(q)$	$(q+\epsilon)/2$
$A_1(q)$	$q > 2$, q четно	$\{2\}$	$q-1$	$q+1$
${}^2A_5(2)$		$\{2,3,5\}$	7	11
${}^2D_p(3)$	$p = 2^m+1 \geq 3$	$\pi(3(3^{p-1}-1)\prod_{i=1}^{p-2}(3^{2i}-1))$	$(3^{p-1}+1)/2$	$(3^p+1)/4$
$G_2(q)$	$q \equiv 0(3)$	$\pi(q(q^2-1))$	q^2-q+1	q^2+q+1
${}^2G_2(q)$	$q = 3^{2m+1} > 3$	$\pi(q(q^2-1))$	$q-\sqrt{3q}+1$	$q+\sqrt{3q}+1$
$F_4(q)$	q четно	$\pi(q(q^4-1)(q^6-1))$	q^4-q^2+1	q^4+1
${}^2F_4(q)$	$q = 2^{2m+1} > 2$	$\pi(q(q^3+1)(q^4-1))$	$q^2-\sqrt{2q^3}+q-\sqrt{2q}+1$	$q^2+\sqrt{2q^3}+q+\sqrt{2q}+1$
$E_7(2)$		$\{2,3,5,7,11,13,17,19,31,43\}$	73	127
$E_7(3)$		$\{2,3,5,7,11,13,19,37,41,61,73,547\}$	757	1093
M_{11}		$\{2,3\}$	5	11
M_{23}		$\{2,3,5,7\}$	11	23
M_{24}		$\{2,3,5,7\}$	11	23
J_3		$\{2,3,5\}$	17	19
HiS		$\{2,3,5\}$	7	11
Suz		$\{2,3,5,7\}$	11	13
Co_2		$\{2,3,5,7\}$	11	23
Fi_{23}		$\{2,3,5,7,11,13\}$	17	23
F_3		$\{2,3,5,7,13\}$	19	31
F_2		$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23\}$	31	47

Т а б л и ц а 3

Конечные простые группы P с $s(P) > 3$

$t(P)$	P	Ограничения на P	$\pi_1(P)$	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
4	$A_2(4)$		$\{2\}$	3	5	7		
	${}^2B_2(q)$	$q{=}2^{2m+1}{>}2$	$\{2\}$	$q{-}1$	$q{-}\sqrt{2q}{+}1$	$q{+}\sqrt{2q}{+}1$		
	${}^2E_6(2)$		$\{2,3,5,7,11\}$	13	17	19		
	$E_8(q)$	$q{\equiv}2,3(5)$	$\pi\big(q(q^8{-}1)(q^{12}{-}1)$ $(q^{14}{-}1)(q^{18}{-}1)$ $(q^{20}{-}1)\big)$	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	$q^8{-}q^4{+}1$	$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$		
	M_{22}		$\{2,3\}$	5	7	11		
	J_1		$\{2,3,5\}$	7	11	19		
	$O'N$		$\{2,3,5,7\}$	11	19	31		
	LyS		$\{2,3,5,7,11\}$	31	37	67		
	Fi'_{24}		$\{2,3,5,7,11,13\}$	17	23	29		
	F_1		$\{2,3,5,7,11,13,$ $17,19,23,29,$ $31,47\}$	41	59	71		
5	$E_8(q)$	$q{\equiv}0,1,4(5)$	$\pi(q(q^8{-}1)(q^{10}{-}1)$ $(q^{12}{-}1)(q^{14}{-}1)$ $(q^{18}{-}1))$	$\frac{q^{10}+q^5+1}{q^2+q+1}$	$\frac{q^{10}-q^5+1}{q^2-q+1}$	$q^8{-}q^4{+}1$	$\frac{q^{10}+1}{q^2+1}$	
6	J_4		$\{2,3,5,7,11\}$	23	29	31	37	43

2. Доказательство теоремы

Пусть $L = D_p(q)$, где p — простое число, $p \geq 5$ и $q \in \{2,3,5\}$.

Докажем сначала квазираспознаваемость группы L. По лемме 1.1 имеем $s(L) = 2$. Ввиду [16] можно считать, что пара (p,q) отлична от (5,2). Пусть G — конечная группа с условием $\omega(G) = \omega(L)$ и $N = F(G)$. Положим $\overline{G} = G/N$. В силу теоремы Грюнберга — Кегеля, результата М. Р. Зиновьевой (Алеевой) [27] и лемм 1.1 и 1.2 имеем $\mathrm{Inn}(P) \trianglelefteq \overline{G} \leq \mathrm{Aut}(P)$, где P — конечная простая группа с условиями

$$s(P) \geq 2, \quad \pi(N)\bigcup\pi(\bar{G}/\mathrm{Inn}(P)) \subseteq \pi_1(G) \quad \text{и} \quad n_2(L) = (q^p-1)/(q-1) \in \{n_i(P) \mid 2 \leq i \leq s(P)\}.$$

По теореме А. В. Васильева [28] и лемме 1.7 имеем $t(P) \geq t(L) - 1 = [(3p+1)/4] - 1 \geq 3$ и $t(2,P) \geq t(2,L) \geq 2$.

Далее рассматриваются все возможности для P, описываемые в табл. 1–3.

Если P изоморфна одной из спорадических групп или одной из групп ${}^2A_3(2)$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2A_5(2)$, $E_7(2)$, $E_7(3)$, $A_2(4)$, ${}^2E_6(2)$, $E_6(2)$, то непосредственными вычислениями показываем, что из $(p,q) \neq (5,2)$ и $(q^p-1)/(q-1) \in \{n_i(P) |\ 2 \le i \le s(P)\}$ следует $(L,P) = (D_7(3),\ E_7(3))$. Но в этом случае $\pi_1(P) \setminus \pi_1(L)$ содержит элемент 547, что невозможно.

(1) Пусть P — конечная простая исключительная группа лиева типа над полем порядка r.

Предположим, что $p > 7$. Тогда $t(P) \geq 7$. Ввиду леммы 1.1 и [26, табл. 9] (поправку см. в [15, предложение 2]) получаем $t(P) = 12$ и $P \cong E_8(r)$. Поэтому $p \in \{11, 13, 17\}$ и

$$(q^p-1)/(q-1) \in \left\{ \frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1}, \frac{r^{10}+1}{r^2+1}, r^8-r^4+1, \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1} \right\}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{r^{10}+r^5+1}{r^2+r+1} < \frac{r^{10}+1}{r^2+1} < r^8-r^4+1 < \frac{r^{10}-r^5+1}{r^2-r+1}.$$

Поэтому множество $\{n_i(P) \mid 2 \le i \le s(P)\}$ принадлежит отрезку $[151, 331]$ при $r = 2$, отрезку $[4561, 8401]$ при $r = 3$, отрезку $[49981, 80581]$ при $r = 4$, отрезку $[315121, 464881]$ при $r = 5$, отрезку $[4956001, 6568801]$ при $r = 7$, отрезку $[14709241, 18837001]$ при $r = 8$ и отрезку $[38316961, 47763361]$ при $r = 9$, отрезку $[195019441, 158681234401]$ при $11 \le r \le 25$ и полуинтервалу $[271983020401, \infty)$ при $r \geq 27$. Поскольку $n_2(L) = (q^p-1)/(q-1)$ принадлежит $\{2047, 8191, 88573, 797151, 12207031, 30517578, 131071, 64570081, 190734863281\}$, получаем $n_2(L) = 8191$ и $r = 3$. Но тогда $n_2(L) = 8191 \in \{4561, 5905, 6481, 8401\}$; противоречие.

Таким образом, $p \in \{5, 7\}$ и, следовательно, $n_2(L)$ принадлежит $\{31, 121, 781\}$ при $p = 5$ и $\{127, 1093, 19531\}$ при $p = 7$.

Пусть P изоморфна ${}^3D_4(r)$ или $F_4(r)$. По лемме 1.1 $n_2(L) = (q^p-1)/(q-1) \in \{r^4-r^2+1, r^4+1\}$. Если $(q^p-1)/(q-1) = r^4-r^2+1$, то $r^4-r^2+1 \in \{31, 121, 781, 127, 1093, 19531\}$, откуда $n_2(L)-1 = r^2(r^2-1) \in \{2\cdot3\cdot5, 2^3\cdot3\cdot5, 2^2\cdot3\cdot5\cdot13, 2\cdot7\cdot3^2, 2^2\cdot3\cdot7\cdot13, 2\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot31\}$; противоречие. Если $n_2(L) = r^4+1$, то $n_2(L)-1 = r^4$; противоречие.

Пусть $P \cong {}^2F_4(r)$, где $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$n_2(L) = (q^p-1)/(q-1) = r^2 + \epsilon\sqrt{2r^3} + r + \epsilon\sqrt{2r} + 1,$$

откуда $n_2(L) - 1 = 2^{m+1}(2^{3m+1} + \epsilon 2^{2m+1} + 2^m + \epsilon 1)$ и, следовательно, $m \in \{1, 2\}$. Если $m = 1$, то $r = 8$ и $n_2(L) = 73 + \epsilon 36$ равно 109 при $\epsilon = +$ и 37 при $\epsilon = -$; противоречие. Если $m = 2$, то $r = 32$ и $n_2(L) = 1057 + \epsilon 264$ равно 1321 при $\epsilon = +$ и 793 при $\epsilon = -$; противоречие.

Пусть $P \cong {}^2B_2(r)$, где $r = 2^{2m+1} > 2$. Тогда

$$n_2(L) = (q^p-1)/(q-1) \in \{r-1, r+\epsilon\sqrt{2r}+1\}.$$

Предположим, что $n_2(L) = r-1$. Тогда $q = 2$. Если $p = 5$, то $r = 32$ и, следовательно, $41 \in \pi(P) \setminus \pi(L)$; противоречие. Если $p = 7$, то $r = 128$ и, следовательно, $113 \in \pi(P) \setminus \pi(L)$; противоречие. Поэтому $n_2(L) = r+\epsilon\sqrt{2r}+1$, откуда $n_2(L)-1 = 2^{m+1}(2^m+\epsilon 1)$ и, следовательно, $m \in \{1, 2\}$. Если $m = 1$, то $r = 8$ и $n_2(L) = 9 + \epsilon 4$ равно 13 при $\epsilon = +$ и 5 при $\epsilon = -$; противоречие. Если $m = 2$, то $r = 32$ и $n_2(L) = 33 + \epsilon 8$ равно 41 при $\epsilon = +$ и 25 при $\epsilon = -$; противоречие.

Пусть $P \cong {}^2G_2(r)$, где $r = 3^{2m+1} > 3$. Тогда

$$n_2(L) = r + \epsilon\sqrt{3r} + 1,$$

откуда $n_2(L) - 1 = 3^{m+1}(3^m + \epsilon 1)$ и, следовательно, $m = 1$. Поэтому $r = 27$, $p = 7$ и $n_2(L) = 9(3 + \epsilon 1)$ равно 36 при $\epsilon = +$ и 18 при $\epsilon = -$; противоречие.

(2) Пусть $P \cong A_n,\ n > 6$. По лемме 1.1 $n_2(L) =: r$ — нечетное простое число, принадлежащее множеству $\{n, n-1, n-2\}$. Тогда $r = r_p(q) = (q^p - 1)/(q-1)$. Пусть $s = r_{2(p-1)}(q)$. Тогда s делит $q^{p-1} + 1$, и поэтому $s \le q^{p-1} + 1 = r - (q^{p-2} + \ldots + q) < n - 4$. Но тогда числа 2 и s смежны в $\mathrm{GK}(P)$, что противоречит лемме 1.7.

(3) Пусть $n = 2^m \ge 2$ и P изоморфна $B_n(r)$ (r нечетно и $n \ge 4$), $C_n(r)$, ${}^2D_n(r)$ ($n \ge 4$) или ${}^2D_{n+1}(r)$ ($r \in \{2, 3\}$). По лемме 1.1 возможны два случая: либо $P \cong {}^2D_{n+1}(3)$, $n+1$ — простое число и $(q^p - 1)/(q-1) = (3^{n+1} + 1)/4$, либо

$$(q^p - 1)/(q-1) = (r^n + 1)/(2, r-1).$$

Предположим, что выполняется первый случай. Пусть $q = 2$. Тогда $2^p - 1 = (3^{n+1} + 1)/4$. Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим $2^p - 2 = (3^{n+1} - 3)/4$, откуда $8(2^{p-1} - 1) = 3(3^n - 1)$ и, следовательно, $(3^n - 1)_2 = 8$. Но тогда $n = 2$ и, следовательно, $p = 3$, что противоречит условию $p \ge 5$. Если $q = 3$, то $3^p - 1 = (3^{n+1} + 1)/2$, откуда $3^p = 3(3^n + 1)/2$; противоречие. Поэтому $q = 5$ и $5^p - 1 = 3^{n+1} + 1$. Вычитая 4 из обеих частей последнего равенства, получим $5(5^{p-1} - 1) = 3(3^n - 1)$, откуда $(5^{p-1} - 1)_2 = (3^n - 1)_2$. Поскольку

$$5^{p-1} - 1 = (4+1)^{p-1} - 1 = 4^{p-1} + 4^{p-2}(p-1) + \ldots + 4^2(p-1)(p-2)/2 + 4(p-1),$$

условие $p \ge 5$ влечет, что $(5^{p-1} - 1)_2 = 4(p-1)_2$. С другой стороны, индукцией по m легко доказывается, что $(3^n - 1)_2 = 4n$. Следовательно, $n = (p-1)_2 \le p - 1$. Но тогда

$$3(5^n - 1) < 5(5^{p-1} - 1) = 3(3^n - 1),$$

откуда $5^n < 3^n$; противоречие.

Поэтому выполняется второй случай. Если r четно, то $(q^p - 1)/(q-1) = r^n + 1$, откуда $r^n = q(q^{p-1} - 1)/(q-1)$; противоречие. Значит, r нечетно.

Пусть $q = 2$. Тогда $2^p - 1 = (r^n + 1)/2$. Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим $2^p - 2 = (r^n - 1)/2$, откуда $r^n - 1 = 4(2^{p-1} - 1)$. Но $r^n - 1$ делится на 8; противоречие.

Поэтому q нечетно и $(q^p - 1)/(q-1) = (r^n + 1)/2$. Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим $r^n - 1 = 2q(q^{p-1} - 1)/(q-1)$. Ясно, что q не делит r. Индукцией по m легко доказывается, что $(r^n - 1)_2 = n(r^2 - 1)_2/2$. Аналогично, $(q^{p-1} - 1)_2 = 4(p-1)_2$. Получаем $n(r^2 - 1)_2/2 = 8(p-1)_2/(q-1)$. Но $r^2 - 1$ делится на 8. Поэтому n делит $p - 1$ и, в частности, $n \le p - 1$. Ввиду [26, табл. 8] имеем $t(P) = 3n/4 + 1 \ge [(3p+1)/4] - 1$, откуда $n \ge p - 3$.

Предположим, что $n = p - 3$. Так как n делит $p - 1$, то $n = 2$ и, следовательно, $p = 5$. Но тогда $r^2 - 1 = 2q(q^4 - 1)/(q-1)$, и поэтому $r^2 \in \{241, 1560\}$, что невозможно.

Таким образом, $n = p - 1 \ge 4$ и, следовательно, $r^n - 1 = 2q(q^n - 1)/(q-1)$. Если $q = 3$, то $r^n = 3 \cdot 3^n - 2$, откуда $2 < (5/3)^4 \le (r/3)^n = 3 - 2/3^n < 3$; противоречие. Поэтому $q = 5$ и, следовательно, $r^n - 1 = 5(5^n - 1)/2$, откуда $(r/5)^n = 5/2 - 5/2 \cdot 5^n < 3$. Если $r > 5$, то $(r/5)^n \ge (7/5)^4 > 3$; противоречие. Поэтому $r = 3$ и, следовательно, $2 < 5/2 - 1/2 \cdot 5^3 \le (r/5)^n = 5/2 - 5/2 \cdot 5^n \le (3/5)^4 < 1$; противоречие.

(4) Пусть $P \cong A_r^\epsilon(s)$, где r — нечетное простое число, $(s - \epsilon 1) \mid (r+1)$ и $(r, s) \ne (3,3), (5,2)$ при $\epsilon = -$.

По лемме 1.1 имеем $(q^p - 1)/(q-1) = (s^r - \epsilon 1)/(s - \epsilon 1)$. Вычитая 1 из обеих частей последнего равенства, получим $q(q^{p-1} - 1)/(q-1) = s(s^{r-1} - 1)/(s - \epsilon 1)$.

Пусть $r = 3$. Тогда пара (s, ϵ) равна $(3, +)$ или $(5, +)$, и $q^p - 1 = (q-1)s(s+1)/q < 30$, откуда $q = 2$ и $p = s = 5$, что противоречит предположению $(p, q) \ne (5, 2)$.

Таким образом, $r \ge 5$. Предположим, что $r \le 7$, $s = 2$ и $\epsilon = +$. Тогда $q(q^{p-1} - 1)/(q-1) \in \{30, 126\}$ и, следовательно, $q = 2$ и $p = r = 7$. Согласно таблице 1 $\pi_1(G) \setminus \pi_1(\overline{G}) = \{11, 13\}$, поэтому $\{11, 13\} \subseteq \pi(N)$. Поскольку подгруппа N нильпотентна, $11 \cdot 13 \in \omega(N) \subseteq \omega(L)$. Элемент порядка $11 \cdot 13$ из L принадлежит некоторому максимальному тору группы L, что противоречит лемме 1.6. Итак, пара (s, ϵ) не равна $(2, +)$ при $r \le 7$, и, следовательно, по [26, табл. 8] имеем $t(P) = [(r+2)/2] = (r+1)/2 \geq [(3p+1)/4] - 1$, откуда легко увидеть, что $r \geq 3(p-1)/2$. Поскольку r — простое число, а $3(p-1)/2$ — составное число, $r \geq 3(p-1)/2+1 = (3p-1)/2$. Допустим, что q делит s. Тогда $q = s$ и $(q^{p-1}-1)/(q-1) = (q^{r-1}-1)/(q-\epsilon 1)$. Если $\epsilon = +$, то $p = r$, откуда ввиду неравенства $r \geq 3(p-1)/2$ следует, что $p \leq 3$; противоречие. Поэтому $\epsilon = -$ и $(q^{p-1}-1)/(q-1) = (q^{r-1}-1)/(q+1)$. Прибавляя 1 к обеим частям последнего равенства, получим $(q^{p-1}+1)/(q-1) = q(q^{r-2}-1)/(q+1)$, что невозможно.

Следовательно, q не делит s. Имеем

$$s^{r-1} - 1 = \frac{q(s-\epsilon 1)}{s(q-1)}(q^{p-1}-1).$$

Предположим, что $s > q$. Тогда $s \geq 3$. Легко проверить, что $q(s-\epsilon 1)/(s(q-1)) < 3$. Поэтому $s^{r-1}-1 < 3(q^{p-1}-1)$ и, следовательно, $s^{r-1} < 3q^{p-1} < s^p$, откуда $r \leq p$; противоречие.

Таким образом, $s < q$ и, в частности, $q > 2$. Если $q = 3$, то $s = 2$ и, следовательно, $4(2^{r-1}-1) = 3(2-\epsilon 1)(3^{p-1}-1)$, что невозможно, так как правая часть последнего равенства делится на 8, а левая — нет. Поэтому $q = 5$.

Пусть $s = 2$. Предположим, что $\epsilon = -$. Тогда $2^{r-1} - 1 = 15(5^{p-1}-1)/8$. По [10, лемма 6] группа P содержит элемент порядка $2^{r-1}-1$, поэтому некоторый максимальный тор группы L содержит элемент порядка $3(5^{p-1}-1)/8$, что противоречит лемме 1.6. Таким образом, $\epsilon = +$ и $2^r - 1 = (5^p-1)/4$, откуда

$$2^{r+2} = 5^p + 3 = (4+1)^p + 3 = 4^p + 4^{p-1}p + \ldots + 4^2 p(p-1)/2 + 4(p+1)$$

и, следовательно, 4 делит $p+1$. С другой стороны, $2^{r+2}+2 = 5^p+5$, и поэтому 5 делит число $2^{r+1}+1$, равное $16^{(r+1)/4}+1$. Но 5 делит число $16^{(r+1)/4}-1$, взаимно простое с $16^{(r+1)/4}+1$; противоречие.

Таким образом, $s \in \{3, 4\}$. Имеем $(5^p-1)/4 = (s^r-\epsilon 1)/(s-\epsilon 1)$, следовательно,

$$s^r = \frac{s-\epsilon 1}{4}\, 5^p + \frac{\epsilon 5 - s}{4}.$$

Отсюда ввиду неравенства $r \geq 3(p-1)/2$ получаем

$$s^{(3p-1)/2} \leq s^r < \frac{s-\epsilon 1}{4}\, 5^p + 1.$$

Но тогда

$$\left(\frac{s^{3/2}}{5}\right)^p < s^{1/2}\, \frac{s-\epsilon 1}{4} + \frac{1}{5^p}.$$

Если $s = 4$, то $(8/5)^p < 3$ и, следовательно, $p \leq 2$; противоречие.

Итак, $s = 3$ и

$$\left(\frac{s^{3/2}}{5}\right)^p < 3^{1/2}\, \frac{3-\epsilon 1}{4} + \frac{1}{10}.$$

Если $\epsilon = +$, то $(3^{3/2}/5)^p < 3^{1/2}/2 + 1/10 < 1$; противоречие. Поэтому $\epsilon = -$ и $(3^{3/2}/5)^p < 3^{1/2} + 1/10 < 1.84$, откуда $p \leq 13$. Таким образом, $3^r = 5^p - 2 \in \{5^5-2, 5^7-2, 5^{11}-2, 5^{13}-2\} = \{3123, 78123, 48828123, 1220703123\}$. Так как все элементы последнего множества не являются степенями числа 3, приходим к противоречию.

(5) Пусть r — нечетное простое число и P изоморфна $B_r(s)$ $(s = 3)$, $C_r(s)$ $(s \in \{2,3\})$, $D_r(s)$ $(r \geq 5,\ s \in \{2,3,5\})$ или $D_{r+1}(s)$ $(r \geq 5,\ s \in \{2,3\})$. Тогда $(q^p-1)/(q-1) = (s^r-1)/(s-1)$.

Если $r = 3$, то $q < s$ и, следовательно, $q = 2$ и $s = 3$, откуда $31 = 2^5 - 1 \leq (q^p-1)/(q-1) = (s^r-1)/(s-1) = 13$; противоречие.

Пусть $r = 5$. Тогда $q \leq s$. Если $s = 5$, то $p = r$, $q = s$ и $P \cong L \cong D_5(5)$, что означает квазираспознаваемость группы $D_5(5)$. Поэтому можно считать, что $s \leq 3$, откуда получаем

$(s^r-1)/(s-1) \in \{31,121\}$ и, следовательно, $p=r$, $q=s$ и $P \cong B_p(q)$, $C_p(q)$ или $D_{p+1}(q)$. В силу табл. 1 и леммы 1.3 имеем $r_{2p}(q) \in \pi(P) \setminus \pi(L)$, что невозможно.

Итак, $r \geq 7$. Ввиду [26, табл. 8] число $t(P)$ равно $[(3r+5)/4]$, $[(3r+5)/4]$, $[(3r+1)/4]$ и $[(3r+4)/4]$, если группа P изоморфна $B_r(s)$, $C_r(s)$, $D_r(s)$ и $D_{r+1}(s)$ соответственно. Теперь из неравенства $t(P) \geq [(3p+1)/4]-1$ легко получается, что $r \geq p-2$.

Предположим, что $s>q$. Тогда $r<p$ и, следовательно, $r=p-2$. Пусть $s=5$. Тогда $q \leq 3$ и $(q^p-1)/(q-1) = (5^{p-2}-1)/4 = (5^p-25)/100$, откуда $100 < (5/3)^{11} \leq (5/q)^p < 100/(q-1) \leq 100$; противоречие. Если $s<5$, то $s=3$, $q=2$ и $2^p-1=(3^{p-2}-1)/2$, откуда $2^{p+1}-3^{p-2}=1$, что противоречит лемме 1.4.

Если $s=q$, то $p=r$, и, как выше, показываем, что $P \cong D_p(q)$, что означает квазираспознаваемость группы L.

Поэтому можно считать, что $s<q$, откуда $r>p$ и $q \in \{3,5\}$. Если $q=3$, то $s=2$ и $2^r-1=(3^p-1)/2$, откуда $2^{r+1}-3^p=1$, что противоречит лемме 1.4. Таким образом, $q=5$ и $s \leq 3$. Теперь так же, как в (4), приходим к противоречию.

(6) Пусть $P \cong A_1(s)$, где $s>3$. Тогда $t(P)=3 \leq [(3p-1)/2]-1$ и, следовательно, $p=5$. По нашему предположению $q>2$.

Допустим, что $s=2^b$ для некоторого $b \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{q^5-1}{q-1} = 2^b + \epsilon 1.$$

Если $q=5$, то $2^b = -\epsilon 1 + (5^5-1)/4 = 781 \pm 1 \in \{780,782\}$; противоречие. Поэтому $q=3$. Если $\epsilon=+$, то $2^b = 3(3^4-1)/2$; противоречие. Следовательно, $\epsilon=-$ и $2^{b+1}-3^5=1$, что противоречит лемме 1.4.

Таким образом, $s \equiv \epsilon 1(4)$ и $s=r^b$, где r — простое число и $b \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{q^5-1}{q-1} \in \left\{r, \frac{s+\epsilon 1}{2}\right\}.$$

Если $q=5$, то $(q^5-1)/(q-1) = 781 = 11 \cdot 71$ и поэтому $781 = (s+\epsilon 1)/2$, откуда $s = 1562 \pm 1 \in \{3 \cdot 521, 7 \cdot 223\}$; противоречие. Поэтому $q=3$ и $(q^5-1)/(q-1) = 121 = 11^2$, откуда $121 = (s+\epsilon 1)/2$, т. е. $s = 242 \pm 1 \in \{243, 241\}$. Поскольку 241 не делит порядок группы $P \cong D_5(3)$, $s = 243 = 3^5$. Но тогда $61 \in \pi(P) \setminus \pi(L)$; противоречие.

(7) Пусть $P \cong A_{r-1}^{\epsilon}(s)$, где r — нечетное простое число и $(r,s) \neq (3,2),(3,4)$ при $\epsilon=+$.

Ввиду лемм 1.1 и 1.2 имеем

$$\frac{s^r-\epsilon 1}{(s-\epsilon 1)(r,s-\epsilon 1)} = \frac{q^p-1}{q-1},$$

откуда

$$\frac{s^r-\epsilon 1}{s-\epsilon 1} = \frac{(r,s-\epsilon 1)(q^p-1)}{q-1}.$$

Вычитая единицу из обеих частей последнего равенства, получаем

$$s\frac{s^{r-1}-1}{s-\epsilon 1} = \frac{(r,s-\epsilon 1)(q^p-1)-q+1}{q-1}.$$

Пусть $r=3$. Ввиду [26, табл. 8] $4 \geq t(P) \geq [(3p+1)/4]-1$, поэтому $p \leq 7$.

Предположим, что $(3,s-\epsilon 1)=1$. Тогда $s(s+\epsilon 1) = q(q^{(p-1)}-1)/(q-1)$. Если $p=5$, то $s(s+\epsilon 1)$ равно $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2^3 \cdot 3 \cdot 5$ и $2 \cdot 5 \cdot 79$ при q, равном 2, 3 и 5 соответственно, поэтому $q=2$, что противоречит предположению $(p,q) \neq (5,2)$. Следовательно, $p=7$ и $s(s+\epsilon 1)$ равно $2 \cdot 3^2 \cdot 7$, $2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$ и $2^2 \cdot 5 \cdot 977$ при q, равном 2, 3 и 5 соответственно, что невозможно.

Таким образом, $(3, s-\epsilon 1) = 3$ и $s(s+\epsilon 1) = 3(q^p-1)/(q-1)-1$. Если $p=5$, то $s(s+\epsilon 1) \in \{2\cdot 41, 2\cdot 181, 5\cdot 937\}$; противоречие. Если $p=7$, то $s(s+\epsilon 1) \in \{2\cdot 5\cdot 19, 2\cdot 11\cdot 149, 5\cdot 23\cdot 1019\}$; противоречие.

Итак, $r \geq 5$. Если $5 \leq p = r \leq 11$ и $s=2$, то ввиду [26, табл. 8] неравенство $t(P) \geq [(3p+1)/4]-1$ влечет, что $p=r=5$, а значит, $q=2$; противоречие. Поэтому опять по [26, табл. 8] $t(P) = (r+1)/2 \geq [(3p+1)/4]-1$, откуда легко увидеть, что $r \geq (3p-7)/2$.

Пусть $(r, s-\epsilon 1) = 1$.

Предположим, что q делит s. Тогда $q = s$ и так же, как в (4), получаем $r = p$ и $\epsilon 1 = +$, откуда $p \geq (3p-7)/2$ и, следовательно, $p \leq 7$. Пусть $p=5$. Тогда $q>2$, множество $\pi_1(L)\setminus\pi_1(P)$ содержится в $\pi(N)$ и равно $\{7, 41\}$ при $q=3$ и $\{7, 313\}$ при $q=5$. Поскольку подгруппа N нильпотентна, то $\omega(N)$, а значит, $\omega(T)$ для некоторого максимального тора T группы L содержит $7\cdot 41$ при $q=3$ и $7\cdot 313$ при $q=5$, что противоречит лемме 1.6. Поэтому $p=7$. Ввиду [26, табл. 8] неравенство $t(P) \geq [(3p+1)/4]-1 = 4$ влечет, что $q>2$. Множество $\pi_1(L)\setminus\pi_1(P)$ содержится в $\pi(N)$ и равно $\{41, 61, 73\}$ при $q=3$ и $\{313, 521, 601\}$ при $q=5$. Поскольку подгруппа N нильпотентна, то $\omega(N)$, а значит, $\omega(T)$ для некоторого максимального тора T группы L содержит $41\cdot 61\cdot 73$ при $q=3$ и $313\cdot 521\cdot 601$ при $q=5$, что противоречит лемме 1.6.

Таким образом, q не делит s. Имеем

$$s^{r-1}-1 = \frac{q(s-\epsilon 1)}{s(q-1)}(q^{p-1}-1).$$

Предположим, что $s>q$ и, в частности $s \geq 3$. Тогда, как в (4), показываем, что $r \leq p$, откуда $p \leq 7$. Если $r<p$, то $r=5$ и $p=7$, что противоречит неравенству $r \geq (3p-7)/2$. Поэтому $r=p\leq 7$. Легко проверить, что $q(s-\epsilon 1)/(s(q-1)) < 3$. Поэтому $s^{p-1}-1 < 3(q^{p-1}-1)$ и, следовательно, $s^{p-1} < 3q^{p-1}$, откуда $(s/q)^{p-1} < 3$. Если $q=2$, то $3 < (3/2)^4 \leq (s/q)^{p-1} < 3$; противоречие. Если $q=3$, то $3 < (4/3)^4 \leq (s/q)^{p-1} < 3$; противоречие. Если $q=5$, то $3 < (7/5)^4 \leq (s/q)^{p-1} < 3$; противоречие. Следовательно, $s<q$. Теперь так же, как в (4), приходим к противоречию.

Итак, $(r, s-\epsilon 1) = r$. Тогда

$$\frac{s^{r-1}-1}{s-\epsilon 1} = \frac{rq^p-r-q+1}{s(q-1)} = \frac{r}{s(q-1)} - \frac{r+q-1}{s(q-1)}.$$

Кроме того, ввиду неравенства $r \geq 5$ имеем $s \geq 4$.

Предположим, что $\epsilon = +$. Тогда $r/(s(q-1)) < 1$ и, следовательно,

$$s^{r-2} < s^{r-2}+\ldots+s+1 = \frac{s^{r-1}-1}{s-1} < q^p,$$

откуда $s^{r-2} < q^p$. Ввиду неравенства $r \geq 5$ и делимости $s-1$ на r имеем $s \geq 8$.

Пусть $r=5$. Тогда $s \geq 11$ и $p=5$ (ввиду неравенства $r \geq (3p-7)/2$). Если $q \leq 3$, то $1331 = 11^3 \leq s^3 < 3^5 = 243$; противоречие. Поэтому $q=5$. Если $s>11$, то $s>16$ и $4096 = 16^3 < s^3 < q^5 \leq 5^5 = 3125$; противоречие. Поэтому $s=11$. Но тогда

$$16104 = \frac{s(s^{r-1}-1)}{s-\epsilon 1} = \frac{rq^p-r-q+1}{(q-1)} = 3904;$$

противоречие.

Таким образом, $r \geq 7$. Ввиду неравенства $r \geq (3p-7)/2$ имеем $8^{r-2} \leq s^{r-2} < q^p \leq 5^p$ и, следовательно, $r-2<p$, откуда $r \leq p$. Теперь неравенство $r \geq (3p-7)/2$ влечет $r=p=7$. Если $s>8$, то $s>11$ и $161051 = 11^5 < s^{r-2} < q^p \leq 5^7 = 78125$; противоречие. Поэтому $s=8$. Если $q \leq 3$, то $32768 = 8^5 \leq s^5 < 3^7 = 2187$; противоречие. Поэтому $q=5$ и

$$37449 = \frac{(s^{r-1}-1)}{s-\epsilon 1} = \frac{rq^p-r-q+1}{s(q-1)} = 170895;$$

противоречие.

Итак, $\epsilon = -$ и, следовательно, $s \geq 4$.

Предположим, что $s = 4$. Тогда $r = 5$. Ввиду [26, табл. 8] $3 \geq t(P) \geq [(3p+1)/4]-1$, поэтому $p = 5$. Но тогда $41 = (s^r+1)/(r(s+1)) = (q^p-1)/(q-1) \in \{31, 121, 781\}$; противоречие.

Таким образом, $s > 4$ и, следовательно, $s \geq 9$. Имеем

$$\frac{s^{r-1}-1}{s+1} = \frac{rq^p - r - q + 1}{s(q-1)} = \frac{r}{s(q-1)} - \frac{r+q-1}{s(q-1)}.$$

Предположим, что $r/(s(q-1)) \leq 1$. Тогда

$$\frac{s^{r-1}-1}{s+1} = s^{r-2} - \frac{s^{r-2}-1}{s+1} > 4s^{r-2}/5.$$

Отсюда $4 \cdot 9^{r-2}/5 < q^p \leq 5^p$ и, следовательно, $r \leq p$. Но $r \geq (3p-7)/2$, поэтому $p \leq 7$.

Пусть $r = 5$. Тогда $p = 5$. Если $s > 9$, то $s > 19$ и $5487 < 4 \cdot 19^3/5 \leq s^3 < 5^5 = 3125$; противоречие. Поэтому $s = 9$. Если $q \leq 3$, то $583 < 4 \cdot 9^3/5 < q^5 \leq 3^5 = 243$; противоречие. Поэтому $q = 5$ и

$$5404 = \frac{s(s^{r-1}-1)}{s+1} = \frac{rq^p - r - q + 1}{(q-1)} = 3904;$$

противоречие.

Таким образом, $r = p = 7$ и, следовательно, $s \geq 13$. Но тогда $4 \cdot 13^5/5 < q^p \leq 5^7$, откуда $1485172 = 4 \cdot 13^5 < 5^8 = 390625$; противоречие.

Итак, $r/(s(q-1)) > 1$. Так как r делит $s+1$, легко видеть, что $q = 2$ и $r = s+1$. В частности, ввиду леммы 1.4 имеем $s = 2^m \geq 16$ и, следовательно, $r \geq 17$. Поэтому

$$\frac{r}{s(q-1)} = \frac{s+1}{s} \leq \frac{17}{16}$$

и, следовательно, $4 \cdot 16^{r-2}/5 < 17 \cdot 2^p/16$, откуда $2^{4r-2} < 85 \cdot 2^p$, $2^{4r-p-2} < 85 < 2^7$, $4r-p-2 < 7$, $r < (p+9)/4$. С другой стороны, $r \geq (3p-7)/2$, следовательно, $(3p-7)/2 < (p+9)/4$, откуда $p = 3$; противоречие.

Итак, $P \cong L$, т. е. квазираспознаваемость группы L доказана.

Предположим, что $N \neq 1$. Можно считать, что N — элементарная абелева r-группа для некоторого простого числа r из $\pi_1(G)$ и P действует точно и неприводимо на N.

Предположим, что $r \neq q$. Рассмотрим стабилизатор R p-мерного вполне изотропного подпространства в $\Omega_{2p}^+(q)$. Положим $\overline{R} = R/Z(\Omega_{2p}^+(q))$. Можно считать, что $\overline{R} < P$. Тогда по [29, утверждение 4.1.20] имеем $\overline{R} \cong U : L_p(q)$, где $|U| = q^{p(p-1)/2}$. Ввиду [26, табл. 4] и леммы 1.7 в $\overline{R}$ найдется элемент x простого порядка $r_p(q)$, не смежного с q в графе $\mathrm{GK}(G)$. Поэтому $U : \langle x \rangle$ есть группа Фробениуса. Применяя к группе $N : U : \langle x \rangle$ лемму 1.4, получим, что $r \cdot r_p(q) \in \omega(L)$. Элемент порядка $r \cdot r_p(q)$ из L принадлежит некоторому максимальному тору T группы L. По лемме 1.6 $|T| = (q^p-1)/(q-1)$. Поскольку $q^p - 1$ взаимно просто с $q^i - 1$ для всех $i < p$, можно считать, что $r = r_p(q)$. Но тогда подгруппа $N : U$ является группой Фробениуса и, следовательно, U является либо циклической группой, либо обобщенной группой кватернионов; противоречие с тем, что на группе U точно действует неразрешимая группа $L_p(q)$.

Таким образом, $r = q$. Если $q = 5$, то по [30, теорема 1.3] каждый элемент из P фиксирует некоторый неединичный элемент из N, что противоречит лемме 1.1.

Итак, $N = 1$ при $q = 5$ и $N = O_q(G)$ при $q \in \{2, 3\}$.

Наконец, ясно, что $F(G) \leq G'$. Применяя результат [31], получим, что $|\overline{G}/\mathrm{Inn}(P)| \leq 2$ и, следовательно, $|G/G'| \leq 2$.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
2. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
3. **Мазуров В.Д.** Группы с заданным спектром // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 119–138. (Математика и механика; вып. 7.)
4. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 15-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002. 172 с.
5. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** О распознаваемости группы $E_8(q)$ по множеству порядков элементов // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 1003–1008.
6. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость одного класса конечных простых групп по множеству порядков элементов // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 241–255.
7. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А.** О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m, $2^m + 1$ и $2^m + 2$ // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 510–526.
8. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп ${}^3D_4(q)$ и $F_4(q)$ для нечетного q // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 5. С. 517–539.
9. **Алексеева О.А.** Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп ${}^3D_4(q)$, q четно // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 1. С. 3–19.
10. **Кондратьев А.С.** Квазираспознаваемость по множеству порядков элементов групп $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$ // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 6. С. 1250–1271.
11. **Алексеева О.А., Кондратьев А.С.** Распознаваемость по спектру групп ${}^2D_p(3)$ для нечетного простого числа p // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 3–11.
12. **Kondrat'ev A.S.** Recognition by spectrum of the groups ${}^2D_{2^m+1}(3)$ // Science in China. Ser. A: Mathematics. 2009. T. 52, no. 1. P. 293–300.
13. **Зиновьева М.Р., Шен Р., Ши В.** Распознавание простых групп $B_p(3)$ по множеству порядков элементов // Тез. докл. Междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. М.: Изд-во мат.-мех. фак-та МГУ, 2008. С. 105-106.
14. **Гречкосеева М.А.** Распознавание по спектру конечных простых линейных групп над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 405–427.
15. **Васильев А.В., Гречкосеева М.А.** Распознавание по спектру конечных простых линейных групп малых размерностей над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 558–570.
16. **Гречкосеева М.А.** Распознаваемость по спектру группы $\Omega_{10}^+(2)$ // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 734–741.
17. **Aschbacher I.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
18. **Conway J.H., Curtis R.G., Norton S.P., Parker R.A., Wilson R.A.** Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
19. Семинар по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. 315 с.
20. **Стейнберг Р.** Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975. 262 с.
21. **Кондратьев А.С., Мазуров В.Д.** Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 359–369.
22. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Vol. 3, no. 1. P. 265–284.
23. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2) 1870. Vol. 9. P. 469–471.
24. **Мазуров В.Д.** Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
25. **Carter R.W.** Centralizers of semisimple elements in the finite classical groups // Proc. London Math. Soc. Ser. 3. 1981. Vol. 42, no. 1. P. 1–41.
26. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
27. **Алеева М.Р.** О конечных простых группах с множеством порядков элементов как у группы Фробениуса или двойной группы Фробениуса // Мат. заметки. 2003. Т. 73, вып. 3. С. 323–339.
28. **Васильев А.В.** О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.

29. **Kleidman P., Liebeck M.** The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. 303 c.
30. **Guralnick R.M., Tiep P. H.** Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. Vol. 6, no. 3. P. 271–310.
31. **Lucido M.S.** Prime graph components in finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1999. Vol. 102. P. 1–22; addendum // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 2002. Vol. 107. P. 189–190.
32. **Stensholt E.** Certain embeddings among finite groups of Lie type // J. Algebra. 1978. Vol. 53, no. 1. P. 136–187.

Поступила 07.02.2009

Алексеева Оксана Алексеевна
канд. физ.-мат. наук
проректор
Челяб. гуманит. ин-т
e-mail: oksana88888@yandex.ru

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, проф.
зав. сектором
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 517.988.68

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛИЗАЦИИ ИЗЛОМОВ ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ[1]

Т. В. Антонова

Рассматривается задача локализации особенностей (изломов) функции, зашумленной в пространствах L_p, $1 < p < \infty$, или в C. Построен широкий класс сглаживающих методов, позволяющих определять количество и положение изломов. Кроме того, для случая, когда функция зашумлена в C, построен конечноразностный метод. Для предложенных методов доказаны теоремы сходимости и получены оценки точности аппроксимации положений изломов. Полученные в работе оценки снизу демонстрируют оптимальность по порядку этих методов. Все построенные методы также исследованы на способность разделять близкие изломы.

Ключевые слова: некорректные задачи, локализация изломов, регуляризирующие алгоритмы, порог разделимости.

T. V. Antonova. Regularizing algorithms for localizing the breakpoints of a noisy function.

We consider the problem of localizing the singularities (breakpoints) of functions that are noisy in the spaces L_p, $1 < p < \infty$, or C. We construct a wide class of smoothing algorithms that determine the number and location of breakpoints. In addition, for the case when a function is noisy in C, a finite-difference method is constructed. For the proposed methods, convergence theorems are proved and approximation accuracy estimates for the location of breakpoints are obtained. The lower estimates obtained in this paper show the order-optimality of the methods. For all the methods constructed, their capacity of separating close breakpoints is investigated.

Keywords: ill-posed problems, localization of breakpoints, regularizing algorithms, separability threshold.

Введение

При решении многих прикладных задач [1–3] (см. также [4]) интерес представляет не столько нахождение искомой функции, сколько определение характеристик ее особенностей (тип, положение и т. п.). В качестве особенностей функции могут выступать разрывы первого рода, δ-функции или, как в настоящей статье, изломы (разрывы первого рода у производной). Задача определения положения (локализации) особенностей относится к классу нелинейных некорректно поставленных задач, и для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы [5–9].

Данная статья развивает идеи работы [10], в которой рассматривалась проблема локализации разрывов первого рода у функции, зашумленной в $L_2(-\infty,+\infty)$. Для решения этой задачи в [10] предложен широкий класс сглаживающих методов и доказана их оптимальность по порядку точности локализации особенностей.

Предложенные в настоящей статье сглаживающие методы локализации изломов функции, зашумленной в $L_p := L_p(-\infty,+\infty)$, $1 < p < \infty$, и в $C := C(-\infty,+\infty)$, основаны на тех же принципах, что и методы локализации особенностей, изложенные в [10]. Усовершенствованы методы и техника проведения оценок. В частности, предложен новый способ выбора параметра регуляризации, что позволило получить оптимальные по порядку оценки не только для точности, но и для порога разделимости [11, 12] данных методов. Кроме того, для случая, когда функция зашумлена в C, предложен конечноразностный метод, для которого также доказана оптимальность по порядку точности локализации и порога разделимости особенностей.

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 06–01–00116).

В разд. 1 решается задача локализации изломов функции из пространства L_p, $1 < p < \infty$. Отдельно сформулировано утверждение для пространства C. В разд. 2 построен конечноразностный метод для локализации изломов функции из пространства C. В разд. 3 получены оценки снизу точности аппроксимации и порога разделимости для задачи локализации изломов функции, зашумленной в L_p и в C.

1. Локализация изломов функций из L_p $(1 < p < +\infty)$ и C

1.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Рассмотрим задачу локализации положений изломов функции x из пространства L_p, $1 < p < +\infty$, по заданной функции $x^\delta: \quad \|x - x^\delta\|_{L_p} \le \delta$. Относительно функции x известна следующая априорная информация:

(1) функция x непрерывна и имеет неизвестное конечное число l изломов в неизвестных точках $\{s_k\}_1^l$, $0 < l \le L$, L — известно;

(2) вне точек излома функция x дважды непрерывно дифференцируема, и в каждой точке излома существуют левые и правые конечные пределы первой и второй производной; функция x и ее вторая производная x'' принадлежат $L_p: \ \|x\|_{L_p} \le r$ и $\|x''\|_{L_p} \le r$ (в точках s_k функция x'' доопределена произвольным образом); задано $\Delta^{\max}$ такое, что

$$\Delta^{\max} \ge \max\{|\Delta_k|: \ k = 1, 2, \ldots, l\}, \quad \text{где} \quad \Delta_k = x'(s_k + 0) - x'(s_k - 0), \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

В условии (2) число r без ограничения общности можно считать равным единице, что мы и будем делать в дальнейшем. Условие (2) может быть ослаблено.

Обозначим через Φ класс вспомогательных функций $\phi(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих условиям:

(a) функция ϕ принадлежит W_q^2, $1/p + 1/q = 1$;

(b) $\sup_{t\in[-1,1]} |\phi(t)| = \phi(0) = 1$;

(c) $|\phi(t)| \le M/|t|$ для всех $t \notin [-1, 1]$, где M — положительная константа;

(d) $\sup_{t\in[-1,1]} |\phi(t)| - \sup_{t\notin[-1,1]} |\phi(t)| = a > 0$;

(e) $|\phi'(t)| = O(1/t^{(1+\varepsilon)})$ при $t \to \infty$, $\varepsilon > 0$.

Здесь W_q^2 — соболевский класс функций из пространства L_q, у которых вторая производная также принадлежит L_q.

Например, следующие две функции принадлежат классу Φ:

$$\phi(t) = \begin{cases} \cos^2 \pi t/2, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases} \qquad \phi(t) = \exp\Big(-\frac{t^2}{2\sigma}\Big),$$

где $\sigma > 0$ — фиксированный параметр.

Функции $\phi \in \Phi$ сопоставим однопараметрическое семейство функций

$$\phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda), \quad \lambda > 0,$$

и рассмотрим вторую производную свертки функций x и ϕ_λ:

$$x_\lambda(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\phi_\lambda(s - t)dt\right)$$

(функция x_λ существует согласно [13, гл. 14, § 3, п. 520, теорема 3]).

Лемма 1. *Пусть функция x удовлетворяет условиям* (1), (2), *а функция ϕ — условиям* (a), (e). *Тогда имеет место представление*

$$x_\lambda(s) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k \, \phi_\lambda(s - s_k) + \alpha_\lambda(s),$$

где $\sup_s |\alpha_\lambda(s)| \le A_0 \lambda^{(p-1)/p}$, $A_0 = \|\phi\|_{L_q}$.

Доказательство. Поскольку $x, x'' \in L_p$, то и $x' \in L_p$ [14, гл. 5, § 3, теорема 2]. Кроме того, функции x и x' ограничены на всей числовой оси [14, гл. 5, § 2, теорема 1]. Для случая $l = 1$ функцию x можно записать в виде суммы $x = x_1 + x_2$ двух функций x_1 и x_2, определенных следующим образом:

$$x_1(t) = \begin{cases} x(t), & t \le s_1, \\ x(t) - \Delta_1 (t - s_1), & t > s_1, \end{cases} \qquad x_2(t) = x(t) - x_1(t) = \begin{cases} 0, & t \le s_1, \\ \Delta_1 (t - s_1), & t > s_1. \end{cases}$$

Производная x_1' на всей числовой оси непрерывна, ограничена, и существует x_1'' всюду, за исключением, быть может, точки s_1, причем $x_1'' = x'' \in L_p$. Функция x_2 является кусочно линейной.

Для произвольного l доказательство леммы проводится аналогично, поскольку в этом случае x можно точно так же представить в виде суммы функции с непрерывной производной и l кусочно линейных функций.

Для любого числа $b > |s_1|$ рассмотрим функцию

$$x_\lambda^b(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\int_{-b}^{b} x(t) \phi_\lambda(s - t) dt \right).$$

Запишем x_λ^b в виде суммы

$$x_\lambda^b = x_{1\lambda}^b + x_{2\lambda}^b, \tag{1.1}$$

где функции $x_{1\lambda}^b, x_{2\lambda}^b$ соответствуют функциям x_1, x_2. Второе слагаемое $x_{2\lambda}^b$ в этом соотношении имеет вид

$$x_{2\lambda}^b(s) = \int_{s_1}^{b} x_2(t) (\phi_\lambda(s - t))''_{ss} dt.$$

Используя формулу интегрирования по частям и учитывая, что $x_2(s_1) = 0$, получаем

$$x_{2\lambda}^b(s) = x_2(b) \phi_\lambda'(s - b) - \Delta_1 (\phi_\lambda(s - b) - \phi_\lambda(s - s_1)).$$

Для функции $x_{1\lambda}^b$ делаем замену переменной и вычисляем вторую производную

$$x_{1\lambda}^b(s) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\int_{-b}^{b} x_1(t) \phi_\lambda(s - t) dt \right) = \frac{d^2}{ds^2} \left(\int_{s-b}^{s+b} x_1(s - \tau) \phi_\lambda(\tau) d\tau \right)$$

$$= x_1(-b) \phi_\lambda'(s + b) - x_1(b) \phi_\lambda'(s - b) + x_1'(-b) \phi_\lambda(s + b) - x_1'(b) \phi_\lambda(s - b) + \int_{s-b}^{s+b} x_1''(s - \tau) \phi_\lambda(\tau) d\tau.$$

Для оценки последнего слагаемого используем неравенство Гельдера. Затем подставим полученные выражения в (1.1) и перейдем к пределу при $b \to \infty$. При этом благодаря условию (a) величина $\Delta_1 \phi_\lambda(s - b)$ стремится к нулю, а поскольку функция x_1' ограничена, то стремятся к нулю и величины $x_1'(-b) \phi_\lambda(s + b)$, $x_1'(b) \phi_\lambda(s - b)$. Благодаря условию (e) стремится к нулю при

$b \to \infty$ величина $x_2(b)\phi'_\lambda(s-b)$. Так как функция x ограничена, то и слагаемые $x_1(-b)\phi'_\lambda(s+b)$, $x_1(b)\phi'_\lambda(s-b)$ стремятся к нулю. Учитывая равенство $\|\phi_\lambda\|_{L_q} = \lambda^{1/q}\|\phi\|_{L_q}$ и оценку $\|x''\|_{L_p} \le 1$, получаем заключение леммы. □

Рассмотрим функцию

$$x_\lambda^\delta(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^\delta(t)\phi_\lambda(s-t)dt\right).$$

Лемма 2. *Пусть функция* x *удовлетворяет условиям* (1), (2), *а функция* ϕ — *условиям* (a), (e). *Тогда для любых* $\lambda, \delta > 0$ *имеет место представление*

$$x_\lambda^\delta(s) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k\, \phi_\lambda(s-s_k) + \alpha_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s),$$

где $\sup_s|\alpha_\lambda(s)| \le A_0\lambda^{(p-1)/p}$, $\sup_s|\Delta x_\lambda^\delta(s)| \le A_1\delta\lambda^{-(p+1)/p}$, $A_0 = \|\phi\|_{L_q}$, $A_1 = \|\phi''\|_{L_q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $x_\lambda^\delta(s) = x_\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s)$, где

$$\Delta x_\lambda^\delta(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big(x^\delta(t) - x(t)\Big)\phi_\lambda(s-t)dt\right).$$

Представление для функции x_λ было получено в лемме 1. Оценим модуль функции Δx_λ^δ. Для любого достаточно большого числа b рассмотрим функцию

$$\Delta x_\lambda^{\delta b}(s) = \frac{d^2}{ds^2}\left(\int\limits_{-b}^{b}\Big(x^\delta(t) - x(t)\Big)\phi_\lambda(s-t)dt\right) = \int\limits_{-b}^{b}\Big(x^\delta(t) - x(t)\Big)\,(\phi_\lambda(s-t))''_{ss}dt.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем оценку

$$|\Delta x_\lambda^{\delta b}(s)| \le \|x^\delta(t) - x(t)\|_{L_p[-b,b]}\|(\phi_\lambda(s-t))''_{ss}\|_{L_q[-b,b]}.$$

Поскольку $\|(\phi_\lambda(s-t))''_{ss}\|_{L_q} \le \lambda^{(1-2q)/q}\|\phi''\|_{L_q}$, то, переходя к пределу при $b \to \infty$, получаем требуемую оценку. Лемма доказана. □

Рассмотрим уравнение относительно λ

$$\lambda^2 - A\lambda^{(p+1)/p} + B\delta = 0, \tag{1.2}$$

где A, B — положительные числа, δ — положительный параметр. Через $o(g(\delta))$ будем обозначать функцию такую, что $o(g(\delta))/g(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Лемма 3. *Существует* $\delta_0 > 0$ *такое, что для всех* $\delta < \delta_0$ *уравнение* (1.2) *имеет корень* $\lambda = \lambda(\delta)$, *который стремится к нулю при* $\delta \to 0$, *причем* $\lambda(\delta) = (B\delta/A)^{p/(p+1)} + o(\delta^{p/(p+1)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (1.2) имеет один корень при

$$\delta = \delta_0 = \left(\frac{A}{2p}\right)^{2p/(p-1)}\frac{p-1}{B}(p+1)^{(p+1)/(p-1)}.$$

При $\delta > \delta_0$ уравнение не имеет корней, а при $\delta < \delta_0$ уравнение имеет два корня. Причем наименьший из этих корней стремится к нулю при $\delta \to 0$. Преобразуя (1.2), получим

$$\lambda = \Big(B\delta\Big)^{p/(p+1)}\Big(A - \lambda^{(p-1)/p}\Big)^{-p/(p+1)} = \Big(\frac{B}{A}\delta\Big)^{p/(p+1)}\Big(1 - \frac{\lambda^{(p-1)/p}}{A}\Big)^{-p/(p+1)}.$$

Разложим в степенной ряд второй сомножитель, тогда

$$\lambda = \Big(\frac{B}{A}\delta\Big)^{p/(p+1)}\Big(1 + \frac{p}{p+1}\frac{\lambda^{(p-1)/p}}{A} + o(\lambda^{(p-1)/p})\Big).$$

Поскольку λ стремится к нулю при $\delta \to 0$, то

$$\lambda = \lambda(\delta) = \Big(\frac{B\delta}{A}\Big)^{p/(p+1)} + o(\delta^{p/(p+1)}).$$

Лемма доказана. □

1.2. Метод локализации особенностей заключается в исследовании функции x_λ^δ и является модификацией метода, изложенного в [10]. В лемме 2 получено основное разложение функции x_λ^δ. Если выбрать $\lambda = \lambda(\delta)$ так, чтобы слагаемые $\alpha_\lambda(s)$ и $\Delta x_\lambda^\delta(s)$ были достаточно малы, тогда можно надеяться, что точки максимума функции x_λ^δ будут аппроксимировать неизвестные нам положения изломов. Аппроксимацию точек $\{s_k\}_1^l$ проводим в два этапа. Сначала получим грубую локализацию, т. е. определим количество особенностей и найдем непересекающиеся отрезки, на которых они расположены. Затем получим аппроксимацию положений особенностей.

Для обоснования работоспособности алгоритма нужно наложить дополнительные ограничения на характеристики особенностей. Дело в том, что особенности, расположенные близко одна от другой, в условиях шума не могут быть разделены. Также не могут быть восстановлены особенности с маленькими величинами Δ_k. Пусть для функции x известна дополнительная априорная информация:

(3) заданы положительные константы d и $\Delta^{\min}$ такие, что $d \geq \max\{|s_k|:\ k = 1, 2, \dots, l\}$, $\Delta^{\min} \leq \min\{|\Delta_k|:\ k = 1, 2, \dots, l\}$.

(4) задана функция $h(\delta) > 0,\ h(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$ такая, что $\min\{|s_k - s_j| \geq h(\delta),\ k \neq j\}$.

Наименьшая из функций $h(\delta)$ в условии (4) (подробнее см. [12]), для которой заданный метод позволяет определять количество особенностей и локализовать их с точностью, меньшей $h(\delta)$, называется *порогом разделимости особенностей этого метода* (или кратко: *порогом разделимости метода*). Чтобы условие (4) было определено, необходимо зафиксировать конкретную функцию $h(\delta)$, которая дает оценку сверху для порога разделимости метода. Таким образом, кроме оценки точности аппроксимации положения особенностей построенные методы можно сравнивать по их способности разделять близкие особенности.

Минимальное расстояние между особенностями, при котором они не могут быть разделены никаким методом, называем *порогом разделимости задачи* [12]. В разд. 3 введены понятия оптимальности и P-оптимальности методов локализации особенностей [15]. Также получены оценки снизу для оптимальной точности и порога разделимости задачи локализации изломов в $L_p, 1 < p < \infty$, и в C.

Метод локализации особенностей зависит от параметра P. Выберем и зафиксируем число $P:\ \ 0 < P \leq \Delta^{\min}/2$. Наилучшая оценка точности локализации $\{s_k\}_1^l$ достигается при $P = \Delta^{\min}/2$. Поэтому все выкладки ниже будем проводить при этом значении P.

Введем число

$$K = 4A/(a\,\Delta^{\min}), \quad \text{где} \quad A = L\Delta^{\max}\widetilde{M}, \quad \widetilde{M} = \max\{M, 1/(L\Delta^{\max})\},$$

L, a, M — константы из условий на функции ϕ и x.

М е т о д П0. Положим текущее $s := -d,\ m := 0$.

Шаг метода: (a) движемся по s слева направо, пока $s < d$; при $s = d$ завершаем процесс; если при увеличении s встречаем точку $s = \widetilde{s}$ такую, что $|x_\lambda^\delta(\widetilde{s})| = P$, то $m := m + 1$, $a_m := \widetilde{s}$, $b_m := \widetilde{s} + K\lambda$;

(b) продолжаем увеличивать s с точки $s = b_m + K\lambda$; если $|x_\lambda^\delta(b_m + K\lambda)| \geq P$, то $\widetilde{s} = b_m + K\lambda$, $m := m+1$, $a_m := \widetilde{s}$, $b_m := \widetilde{s} + K\lambda$, и переходим на (b), иначе переходим на (a).

М е т о д П. Находим на каждом отрезке $[a_k,\ b_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, точку глобального максимума s_k^δ функции $x_\lambda^\delta(s)$. Если таких точек несколько, то берем самую левую из них.

С помощью метода П0 определяется число m, относительно которого будет доказано, что $m = l$, и выделяются непересекающиеся отрезки $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, содержащие точки s_k. Затем с помощью метода П находятся приближения s_k^δ для точек s_k.

З а м е ч а н и е 1. Для работы методов П0 и П теоретически требуется знание параметров P, d, K, где P и K зависят от констант $\Delta^{\min}$, $\Delta^{\max}$, L, a, M из условий на функции x и ϕ. В практических расчетах эти величины можно подобрать.

З а м е ч а н и е 2. Для получения оценок точности, кроме того, нужно знать величины $A_0 = \|\phi\|_{L_q}$, $A_1 = \|\phi''\|_{L_q}$.

Для формулировки теоремы нам понадобятся числа

$$\delta_0 = \Big(\frac{p+1}{A_0}\Big)^{(p+1)/(p-1)} \frac{p-1}{A_1} \Big(\frac{a\,\Delta^{\min}}{8p}\Big)^{2p/(p-1)}, \qquad D = \Big(\frac{4A_1}{a\,\Delta^{\min}}\Big)^{p/(p+1)}$$

и функции

$$\lambda(\delta) = D\delta^{p/(p+1)} + o(\delta^{p/(p+1)}), \qquad h(\delta) = 2K\lambda(\delta).$$

Теорема 1. *Пусть функция ϕ удовлетворяет условиям* (a)–(e). *Тогда для всех $\delta \leq \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$, если для функции x выполнены условия* (1)–(4), *то, действуя согласно предложенным методам* П0 *и* П, *получим $l = m$, при этом для приближений s_k^δ, $k = 1, 2, \ldots, l$, справедлива оценка*

$$|s_k^\delta - s_k| \leq D\delta^{p/(p+1)} + o(\delta^{p/(p+1)}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о для простоты изложения проведем при $l = 2$, т. е. метод П0 должен сделать два шага и на каждом шаге выделить интервал, содержащий одну точку излома. (Для произвольного l доказательство теоремы проводится аналогично, при этом метод П0 должен сделать l шагов.) Без ограничения общности можно считать, что $s_1 < s_2$. Пусть $\delta \leq \delta_0$ и $\lambda = \lambda(\delta)$. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций, для которых $s_2 - s_1 \geq 2K\lambda(\delta)$. Используя условие (c) на функцию ϕ, для всех s таких, что $|s| \geq K\lambda$, получаем оценку $|\phi_\lambda(s)| \leq M/K$, M — константа. Следовательно, используя лемму 2, в окрестности каждой точки s_k, $k = 1, 2$, получаем разложение

$$x_\lambda^\delta(s) = \Delta_k\,\phi_\lambda(s - s_k) + \alpha_{(k)}^\lambda(s) + \Delta x_\lambda^\delta(s), \tag{1.3}$$

где

$$\sup_{|s-s_k|<K\lambda} |\alpha_{(k)}^\lambda(s)| \leq A_0\lambda^{(p-1)/p} + \overline{A}/K, \qquad \overline{A} = (L-1)\Delta^{\max} M,$$

$$\sup_s |\Delta x_\lambda^\delta(s)| \leq A_1\delta\lambda^{-(p+1)/p}.$$

Поскольку $A > \overline{A}$, то, учитывая условие (b), для $k = 1, 2$ имеем

$$\sup_{|s-s_k|<K\lambda} |x_\lambda^\delta(s)| \geq |x_\lambda^\delta(s_k)| > \Delta^{\min} - A_0\lambda^{(p-1)/p} - A/K - A_1\delta\lambda^{-(p+1)/p}. \tag{1.4}$$

Вне множества $Q = \bigcup_{k=1}^2 \{|s - s_k| < K\lambda\}$ функция x_λ^δ оценивается следующим образом:

$$|x_\lambda^\delta(s)| \leq A_0\lambda^{(p-1)/p} + A/K + A_1\delta\lambda^{-(p+1)/p}.$$

Связь параметров λ и δ выбираем из условия

$$A_0\lambda^{(p-1)/p} + A/K + A_1\delta\lambda^{-(p+1)/p} = a\Delta^{\min}/2. \tag{1.5}$$

Поскольку $K = 4A/(a\,\Delta^{\min})$, то условие (1.5) может быть переписано в виде

$$\lambda^2 - \frac{a\Delta^{\min}}{4A_0}\lambda^{(p+1)/p} + \frac{A_1}{A_0}\delta = 0.$$

Согласно лемме 3 это уравнение при $\delta < \delta_0$ имеет корень $\lambda = \lambda(\delta)$.

Ввиду того, что $a < 1$, для $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ имеют место неравенства

$$\sup_{|s-s_k|<K\lambda}|x_\lambda^\delta(s)| > \frac{(2-a)\,\Delta^{\min}}{2} > P = \frac{\Delta^{\min}}{2},\quad k=1,2,\qquad \sup_{s\notin Q}|x_\lambda^\delta(s)| \le \frac{a\,\Delta^{\min}}{2} < P = \frac{\Delta^{\min}}{2}.$$

Действуя согласно пункту (a) метода П0, находим точку $\widetilde{s}:\ |x_\lambda^\delta(\widetilde{s})| = P$. Значит, $\widetilde{s} \in Q$, т. е. $|\widetilde{s} - s_1| < K\lambda$, так как $s_1 < s_2$. А поскольку из (1.4) следует, что $|x_\lambda^\delta(s_1)| > P$, то $s_1 > \widetilde{s}$. Следовательно, $s_1 \in [\widetilde{s}, \widetilde{s} + K\lambda] = [a_1, b_1]$.

Далее, если $|x_\lambda^\delta(b_1 + K\lambda)| \ge P$, то согласно пункту (b) полагаем $\widetilde{s} = b_1 + K\lambda$ и $\widetilde{s} \in Q$. Но, поскольку $\widetilde{s} - s_1 > K\lambda$, то $|\widetilde{s} - s_2| < K\lambda$. Так как $s_2 - s_1 \ge 2K\lambda$ и $b_1 < s_1 + K\lambda$, имеем $s_2 > \widetilde{s}$. Следовательно, $s_2 \in [\widetilde{s}, \widetilde{s} + K\lambda] = [a_2, b_2]$.

Если $|x_\lambda^\delta(b_1 + K\lambda)| < P$, то, следуя пункту (a), находим точку $\widetilde{s}$, для которой $|x_\lambda^\delta(\widetilde{s})| = P$. Значит, $\widetilde{s} \in Q$ и $\widetilde{s} < s_2$. Но, поскольку $\widetilde{s} - s_1 > K\lambda$, то $s_2 - \widetilde{s} < K\lambda$. Следовательно, и в этом случае $s_2 \in [\widetilde{s}, \widetilde{s} + K\lambda] = [a_2, b_2]$.

Отрезки $[a_1, b_1],\ [a_2, b_2]$ в любом случае разделяются, так как $a_2 - b_1 \ge K\lambda > 0$.

Ясно, что точки $s > b_2 + K\lambda$ не принадлежат множеству Q и $|x_\lambda^\delta(s)| < P$. Таким образом, $m = 2$ и процесс завершен.

Пусть s_k^δ — точка глобального максимума функции x_λ^δ на отрезке $[a_k,\ b_k]$, $k = 1, 2$. В силу условий (b) и (d) имеем

$$\sup_{s\in[s_k-\lambda, s_k+\lambda]}|\phi_\lambda(s - s_k)| - \sup_{s\notin[s_k-\lambda, s_k+\lambda]}|\phi_\lambda(s - s_k)| = a > 0,$$

$$\sup_{s\in[s_k-\lambda, s_k+\lambda]}|\phi_\lambda(s - s_k)| = 1,\qquad \sup_{s\notin[s_k-\lambda, s_k+\lambda]}|\phi_\lambda(s - s_k)| = 1 - a \ge 0.$$

Используя разложение (1.3), при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ для $k = 1, 2$ имеем

$$|x_\lambda^\delta(s_k^\delta)| > \Delta_k - a\,\Delta^{\min}/2,\qquad \sup_{|s-s_k|\ge\lambda}|x_\lambda^\delta(s)| < \Delta_k(1-a) + a\,\Delta^{\min}/2.$$

Следовательно,

$$|x_\lambda^\delta(s_k^\delta)| > \frac{(2-a)\Delta_k}{2},\qquad \sup_{|s-s_k|\ge\lambda}|x_\lambda^\delta(s)| < \frac{(2-a)\Delta_k}{2}.$$

Таким образом,

$$|s_k^\delta - s_k| \le \lambda(\delta) = (4A_1\delta/(a\,\Delta^{\min}))^{p/(p+1)} + o(\delta^{p/(p+1)}),\quad k = 1, 2.$$

Теорема доказана. □

Если в условии (c) на функцию ϕ константа M равна нулю, то можно получить лучшую оценку точности аппроксимации положения изломов путем замены метода П на следующий метод.

Метод П1. В качестве точки s_k^δ возьмем середину отрезка $[a_k,\ b_k]$, $k = 1, 2, \dots, m$.

З а м е ч а н и е 3. Если в условии (c) на функцию ϕ константа $M = 0$, тогда при

$$\delta_0 = \Big(\frac{p+1}{A_0}\Big)^{(p+1)/(p-1)} \frac{p-1}{A_1} \Big(\frac{a\,\Delta^{\min}}{4p}\Big)^{2p/(p+1)}, \qquad D_0 = \frac{1}{2}\Big(\frac{2A_1}{a\,\Delta^{\min}}\Big)^{p/(p+1)},$$

$$\lambda(\delta) = 2D_0\delta^{p/(p+1)} + o(\delta^{p/(p+1)}), \qquad h(\delta) = 2\lambda(\delta),$$

используя сначала метод П0 при $K = 1$, а затем метод П1, получаем следующую оценку:

$$|s_k^\delta - s_k| \le 0.5\lambda(\delta) = D_0\delta^{p/(p+1)} + o(\delta^{p/(p+1)}), \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

Сформулируем теорему, аналогичную теореме 1, для пространства C.

Пусть относительно функции x известна следующая априорная информация:

($2'$) вне точек излома функция дважды непрерывно дифференцируема, и в каждой точке излома существуют левые и правые конечные пределы первой и второй производной; функция x и ее вторая производная x'' принадлежат C: $\|x\|_C \le r$ и $\|x''\|_C \le r$ (в точках s_k функция x' доопределена произвольным образом); задано $\Delta^{\max}$, такое что $\Delta^{\max} \ge \max\{|\Delta_k| : k = 1, 2, \ldots, l\}$.

В условии ($2'$) число r без ограничения общности можно считать равным единице, что мы и будем делать в дальнейшем.

Пусть $\delta_0 = (a\,\Delta^{\min}/8)^2/(A_0A_1)$, $K = 4A/(a\,\Delta^{\min})$, $\overline{D} = 4A_1/(a\,\Delta^{\min})$,

$$\lambda(\delta) = \frac{a\,\Delta^{\min}}{8A_0} - \sqrt{\Big(\frac{a\,\Delta^{\min}}{8A_0}\Big)^2 - \frac{A_1}{A_0}\delta} = \overline{D}\delta + o(\delta), \qquad h(\delta) = 2K\lambda(\delta).$$

Теорема 2. *Пусть функция ϕ удовлетворяет условиям* (a)–(e). *Тогда для всех $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$, если для функции x выполнены условия* (1), ($2'$), (3), (4), *то, действуя согласно предложенным методам* П0 *и* П, *получим $l = m$, при этом для приближений s_k^δ, $k = 1, 2, \ldots, l$, справедлива оценка $|s_k^\delta - s_k| \le \overline{D}\delta + o(\delta)$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

З а м е ч а н и е 4. Если в условии (c) на функцию ϕ константа M равна нулю, тогда при

$$\delta_0 = (a\,\Delta^{\min})^2/(16A_0A_1), \qquad \overline{D}_0 = A_1/(a\,\Delta^{\min}),$$

$$\lambda(\delta) = \frac{a\,\Delta^{\min}}{4A_0} - \sqrt{\Big(\frac{a\,\Delta^{\min}}{4A_0}\Big)^2 - \frac{A_1}{A_0}\delta} = 2\overline{D}_0\delta + o(\delta), \qquad h(\delta) = 2\lambda(\delta),$$

используя сначала метод П0 при $K = 1$, а затем метод П1, получаем следующую оценку:

$$|s_k^\delta - s_k| \le 0.5\lambda(\delta) = \overline{D}_0\delta + o(\delta), \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

П р и м е р. Пусть

$$\phi(t) = \begin{cases} \cos^2 \pi t/2, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

В этом случае константа M равна нулю, $a = 1$, $A_1 = \pi/2$, и для локализации изломов можно использовать сначала метод П0 при $K = 1$, а затем метод П1. Ввиду замечания 4 получаем следующую оценку: $|s_k^\delta - s_k| \le \pi\delta/(2\Delta^{\min}) + o(\delta)$, $k = 1, 2, \ldots, l$.

2. Конечноразностный метод локализации изломов функции из пространства C

2.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты. Рассмотрим задачу локализации положений изломов у функции x из пространства C по заданной функции x^δ: $\|x - x^\delta\|_C \le \delta$. Построим для этого случая еще один метод локализации изломов, который отличается от методов из предыдущего раздела тем, что по-другому строится исследуемая функция. А именно, в качестве исследуемой функции возьмем (см. п. 2.2) конечноразностную вторую производную функции x^δ, умноженную на шаг (шаг в данном случае будет параметром регуляризации). Пусть точная функция x удовлетворяет условиям (1), (2′).

Рассмотрим следующую функцию, зависящую от параметра λ:

$$W_\lambda(s) = \frac{x(s+\lambda) - 2x(s) + x(s-\lambda)}{\lambda}, \quad \lambda < 1.$$

Лемма 4. *Для функции x, удовлетворяющей условиям* (1), (2′), *и числа* $\lambda < \min\limits_{k \ne j} |s_k - s_j|$ *имеет место представление*

$$W_\lambda(s) = \sum_{k=1}^{l} \Delta_k\, \psi_\lambda(s - s_k) + \alpha_\lambda(s), \tag{2.1}$$

где

$$\psi_\lambda(s) = \begin{cases} (\lambda - |s|)/\lambda, & |s| < \lambda, \\ 0, & |s| \ge \lambda, \end{cases} \qquad \sup_s |\alpha_\lambda(s)| \le \lambda.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $W_\lambda(s)$ для $s = s_k$. Используя разложение по λ по формуле Тейлора, имеем

$$W_\lambda(s_k) = x'(s_k + 0) - x'(s_k - 0) + 0.5(x''(\vartheta_1) + x''(\vartheta_2))\lambda,$$

где $\vartheta_1 \in (s_k, s_k + \lambda), \vartheta_2 \in (s_k - \lambda, s_k)$. Следовательно, $W_\lambda(s_k) = \Delta_k + \alpha_\lambda(s_k)$, причем $|\alpha_\lambda(s_k)| \le \lambda$.

Пусть $s \ne s_k$. Так же, как и при доказательстве леммы 1, достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Функцию x запишем в виде суммы $x = x_1 + x_2$ двух функций x_1 и x_2, определенных при доказательстве леммы 1. Напомним, что производная x_1' на всей числовой оси непрерывна, ограничена, и существует x_1'' всюду за исключением, быть может, точки s_1, причем $x_1'' = x'' \in C$. Функция x_2 является кусочно линейной. Тогда $W_\lambda(s) = W_{1\lambda}(s) + W_{2\lambda}(s)$, где функции $W_{1\lambda}, W_{2\lambda}$ соответствуют функциям x_1, x_2. Если $|s - s_1| > \lambda$, то для функции $W_{1\lambda}(s)$ имеем

$$W_{1\lambda}(s) = 0.5(x_1''(\widetilde{\vartheta}_1) + x_1''(\widetilde{\vartheta}_2))\lambda,$$

где $\widetilde{\vartheta}_1 \in (s, s + \lambda)$, $\widetilde{\vartheta}_2 \in (s - \lambda, s)$. Используя свойства функции x, для $|s - s_1| > \lambda$ получаем $\sup_s |W_{1\lambda}(s)| \le \lambda$.

Осталось рассмотреть случаи $0 < s - s_1 < \lambda$ и $-\lambda < s - s_1 < 0$. Рассмотрим второй случай (первый рассматривается аналогично). Представим функцию $W_{1\lambda}(s)$ в виде разности

$$W_{1\lambda}(s) = \frac{x_1(s+\lambda) - x_1(s)}{\lambda} - \frac{x_1(s) - x_1(s-\lambda)}{\lambda}.$$

Используя разложение по формуле Тейлора для $x_1(s - \lambda)$, вторую дробь в правой части этого выражения можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{x_1(s) - x_1(s-\lambda)}{\lambda} = x_1'(s) + \frac{x''(\widetilde{\vartheta})}{2}\lambda, \qquad \widetilde{\vartheta} \in (s - \lambda, s).$$

Рассмотрим первую дробь. Подставляя в разложение

$$x_1(s+\lambda) = x_1(s_1) + x_1'(s_1)(s+\lambda-s_1) + 0.5x''(\widetilde{\vartheta}_3)(s+\lambda-s_1)^2$$

выражения

$$x_1(s_1) = x_1(s) + x_1'(s)(s_1-s) + 0.5x''(\widetilde{\vartheta}_4)(s_1-s)^2, \qquad x_1'(s_1) = x_1'(s) + x''(\widetilde{\vartheta}_5)(s_1-s),$$

$$\widetilde{\vartheta}_3 \in (s_1, s+\lambda), \qquad \widetilde{\vartheta}_4 \in (s, s_1), \qquad \widetilde{\vartheta}_5 \in (s, s_1),$$

для первой дроби получаем

$$\frac{x_1(s+\lambda)-x_1(s)}{\lambda} = x_1'(s) + \frac{1}{2\lambda}\Big(x''(\widetilde{\vartheta}_4)(s_1-s)^2 + 2x''(\widetilde{\vartheta}_5)(s_1-s)(s+\lambda-s_1) + x''(\widetilde{\vartheta}_3)(s+\lambda-s_1)^2\Big).$$

Следовательно,

$$W_{1\lambda}(s) = \frac{1}{2\lambda}\Big(x''(\widetilde{\vartheta}_4)(s_1-s)^2 + 2x''(\widetilde{\vartheta}_5)(s_1-s)(s+\lambda-s_1) + x''(\widetilde{\vartheta}_3)(s+\lambda-s_1)^2\Big) - \frac{x''(\widetilde{\vartheta})}{2}\lambda.$$

Таким образом, для $-\lambda < s - s_1 < 0$ получаем оценку

$$|W_{1\lambda}(s)| \le \frac{1}{2\lambda}\Big((s_1-s)^2 + 2(s_1-s)(s+\lambda-s_1) + (s+\lambda-s_1)^2\Big) + \frac{\lambda}{2} = \lambda.$$

Рассмотрим функцию $W_{2\lambda}(s)$. Для $|s-s_1| \ge \lambda$ функция $W_{2\lambda}(s)$ равна нулю. Если $0 < s-s_1 < \lambda$, то получаем

$$W_{2\lambda}(s) = \frac{x_2'(s_1+0)(s+\lambda-s_1) - 2x_2'(s_1+0)(s-s_1)}{\lambda} = \frac{\Delta_1(\lambda-s+s_1)}{\lambda}.$$

В случае $-\lambda < s - s_1 < 0$ имеем

$$W_{2\lambda}(s) = \frac{-2x_2'(s_1-0)(s-s_1) + x_2'(s_1-0)(s-\lambda-s_1)}{\lambda} = \frac{\Delta_1(\lambda+s-s_1)}{\lambda}.$$

Лемма доказана.

2.2. Метод локализации особенностей. Пусть для функции x выполняются свойства (3), (4) из предыдущего раздела. Введем функцию

$$W_\lambda^\delta(s) = \frac{x_\delta(s+\lambda) - 2x_\delta(s) + x_\delta(s-\lambda)}{\lambda}.$$

Для локализации положений особенностей используем методы П0 и П1 при $P = \Delta^{\min}/2$ и $K = 1$. Сначала, исследуя функцию W_λ^δ с помощью метода П0, определяем число m, относительно которого при дополнительных предположениях будет доказано, что $m = l$, и выделяем непересекающиеся отрезки $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \ldots, m$, содержащие точки s_k. Затем с помощью метода П1 находим приближения s_k^δ для точек s_k.

Введем параметр $\delta_0 = (\gamma\Delta^{\min}/4)^2/4$, $0 < \gamma < 1$, и две функции

$$\lambda(\delta) = \frac{\gamma\Delta^{\min}}{4} - \sqrt{\left(\frac{\gamma\Delta^{\min}}{4}\right)^2 - 4\delta} = \frac{8\delta}{\gamma\Delta^{\min}} + o(\delta), \qquad h(\delta) = 2\lambda(\delta) = \frac{16\delta}{\gamma\Delta^{\min}} + o(\delta).$$

Теорема 3. *Пусть для всех $\delta \le \delta_0$ при связи параметров $\lambda = \lambda(\delta)$ функция x удовлетворяет условиям (1), (2′), (3), (4). Тогда, действуя согласно методам П0 и П1, получим $l = m$, при этом для s_k^δ, $k = 1, 2, \ldots, l$, справедлива оценка $|s_k^\delta - s_k| \le 0.5\lambda(\delta) = 4\delta/(\gamma\Delta^{\min}) + o(\delta)$.*

Доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т. е. метод П0 должен сделать два шага и на каждом шаге выделить интервал, содержащий одну точку излома. (Для произвольного l доказательство теоремы проводится аналогично, при этом метод П0 должен сделать l шагов.) Без ограничения общности будем считать, что $s_1 < s_2$. Пусть $\delta \le \delta_0$ и $\lambda = \lambda(\delta)$. Напомним, что мы рассматриваем задачу на классе функций, для которых $s_2 - s_1 \ge 2\lambda(\delta)$. Для функции $W_\lambda^\delta(s)$ имеет место представление (2.1) из леммы 4. В окрестности каждой точки s_k, $k = 1, 2$, получаем разложение

$$W_\lambda^\delta(s) = \Delta_k\, \psi_\lambda(s - s_k) + \alpha_\lambda(s) + \Delta W_\lambda^\delta(s), \tag{2.2}$$

где $\sup_{|s-s_k|<\lambda} |\alpha_\lambda(s)| \le \lambda$, а $\Delta W_\lambda^\delta(s) = W_\lambda^\delta(s) - W_\lambda(s)$. Поскольку $\sup_s |\Delta W_\lambda^\delta(s)| \le 4\delta/\lambda$, то вне множества $Q = \bigcup_{k=1}^{2} \{|s - s_k| < \lambda\}$ функция W_λ^δ оценивается следующим образом:

$$|W_\lambda^\delta(s)| \le \lambda + 4\delta/\lambda.$$

Оценим функцию W_λ^δ в окрестности точки s_k, $k = 1, 2$, используя разложение (2.2):

$$\sup_{|s-s_k|<\lambda} |W_\lambda^\delta(s)| \ge |W_\lambda^\delta(s_k)| \ge \Delta^{\min} - \lambda - 4\delta/\lambda. \tag{2.3}$$

При $\delta \le \delta_0$ и $\lambda = \lambda(\delta)$ имеем

$$\sup_{|s-s_k|<\lambda} |W_\lambda^\delta(s)| \ge \frac{(2-\gamma)\Delta^{\min}}{2} > P = \frac{\Delta^{\min}}{2}, \quad k = 1, 2, \quad \sup_{s \notin Q} |W_\lambda^\delta(s)| \le \frac{\gamma \Delta^{\min}}{2} < P = \frac{\Delta^{\min}}{2}.$$

Действуя согласно пункту (a) метода П0 при $K = 1$, находим точку $\widetilde{s}: \ |W_\lambda^\delta(\widetilde{s})| = P$. Значит, $\widetilde{s} \in Q$, т. е. $|\widetilde{s} - s_1| < \lambda$, так как $s_1 < s_2$. А поскольку из (2.3) следует, что $|W_\lambda^\delta(s_1)| > P$, то $s_1 > \widetilde{s}$. Следовательно, $s_1 \in [\widetilde{s}, \widetilde{s} + \lambda] = [a_1, b_1]$.

Далее, согласно пункту (b), если $|W_\lambda^\delta(b_1 + \lambda)| \ge P$, то полагаем $\widetilde{s} = b_1 + \lambda$ и $\widetilde{s} \in Q$. Но, поскольку $\widetilde{s} - s_1 > \lambda$, то $|\widetilde{s} - s_2| < \lambda$. Ввиду того, что $s_2 - s_1 \ge 2\lambda$ и $b_1 < s_1 + \lambda$, имеем $s_2 > \widetilde{s}$. Следовательно, $s_2 \in [\widetilde{s}, \widetilde{s} + \lambda] = [a_2, b_2]$.

Если $|W_\lambda^\delta(b_1 + \lambda)| < P$, то, следуя пункту (a), находим точку $\widetilde{s}$, для которой $|W_\lambda^\delta(\widetilde{s})| = P$. Значит, $\widetilde{s} \in Q$ и $\widetilde{s} < s_2$. Но, поскольку $\widetilde{s} - s_1 > \lambda$, то $s_2 - \widetilde{s} < \lambda$. Следовательно, и в этом случае $s_2 \in [\widetilde{s}, \widetilde{s} + \lambda] = [a_2, b_2]$.

Отрезки $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ в любом случае разделяются, так как $a_2 - b_1 \ge \lambda > 0$.

Теперь рассмотрим $s > b_2 + \lambda$. Ясно, что эти точки не принадлежат множеству Q и $|W_\lambda^\delta(s)| < P$. Таким образом, $m = 2$ и процесс завершен.

Пусть s_k^δ — середина отрезка $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2$. Следовательно,

$$|s_k^\delta - s_k| < 0.5\lambda(\delta) = 4\delta/(\gamma\Delta^{\min}) + o(\delta).$$

Теорема доказана.

3. Оптимальность по порядку оценок точности аппроксимации особенностей и порога разделимости

Для установления оптимальности (оптимальности по порядку) конкретного алгоритма необходимы оценки снизу достижимой точности локализации. Эффективные оценки такого рода представляют также и самостоятельный интерес.

Вместо условия (4) на функцию x наложим более сильное условие:

(4′) задано положительное $\widehat{h}$ такое, что $\min\limits_{k \ne j} |s_k - s_j| \ge \widehat{h}$.

На классе функций $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условиям (1)–(3), (4′), для некоторого метода Π, определяющего по функции x^δ и величине погрешности δ количество особенностей l и приближения s_k^δ, $k = 1, 2 \dots, l$, особенностей s_k функции x, стандартным образом введем понятия оптимальности и оптимальности по порядку.

Определение 1. Пусть для метода Π функция

$$\tau(\mathfrak{M}, \Pi, \delta) \equiv \sup_{x \in \mathfrak{M}} \sup_{\|x - x^\delta\| \le \delta} \sup_k |s_k - s_k^\delta|.$$

Величину $\widehat{\tau}(\mathfrak{M}, \delta) = \min_\Pi \tau(\mathfrak{M}, \Pi, \delta)$ назовем оптимальной точностью восстановления особенностей на классе $\mathfrak{M}$ (минимум берется по всем методам локализации изломов). Метод Π назовем оптимальным (оптимальным по порядку) на классе $\mathfrak{M}$, если $\widehat{\tau}(\mathfrak{M}, \delta) = \tau(\mathfrak{M}, \Pi, \delta)$ (существует такая константа $R > 1$, что $\tau(\mathfrak{M}, \Pi, \delta) \le R\,\widehat{\tau}(\mathfrak{M}, \delta)$).

Изложим основную идею получения оценок снизу в абстрактной формулировке для задачи локализации изломов зашумленной функции. Возьмем функцию $x(s) \in \mathfrak{M}$, имеющую одну особенность в точке s_1. Подберем Δs и функции $x_\pm \in \mathfrak{M}$ с особенностями в точках $s_1 \pm \Delta s$ такие, что $\|x_\pm - x\| = \delta$. Пусть x — приближенная функция, а в качестве точной функции можно взять две функции $x_\pm$. Выберем и зафиксируем метод Π, который по функции x для уровня погрешности δ построит приближения $s_\pm^\delta = s_1 \pm \Delta s$ для s_1. Следовательно, справедливо неравенство $\tau(\mathfrak{M}, \Pi, \delta) = \max\{|s_+^\delta - s_1|, |s_-^\delta - s_1|\} \ge \Delta s$. Поскольку метод Π произвольный, то эта же оценка справедлива для функции $\widehat{\tau}(\mathfrak{M}, \delta) \ge \Delta s$.

Теорема 4. *Для задачи локализации изломов зашумленной в пространстве L_p, $p \in (1, \infty)$, функции справедлива оценка*

$$\widehat{\tau}(\mathfrak{M}, \delta) \equiv \min_\Pi \tau(\mathfrak{M}, \Pi, \delta) \ge ((\delta/\Delta^{\min})^p (p+1))^{1/(p+1)} + o(\delta).$$

Доказательство. Построим функции $x, x_\pm \in \mathfrak{M}$, имеющие по одному излому в точках s_1, $s_1 \pm \Delta s$, следующим образом: изломы образуются прямыми, а концы доопределяются так, чтобы функции принадлежали классу $\mathfrak{M}$. Пусть $\Delta_1 > 0$, и функции $x, x_\pm$ имеют вид

$$x(s) = \begin{cases} 0, & s \le s_1, \\ \Delta_1(s - s_1), & s_1 < s \le d, \\ \widetilde{x}, & s > d, \end{cases}$$

$$x_+(s) = \begin{cases} 0, & s \le d_1, \\ \Delta_1 \Delta s \cos^2[(\pi/2)(s - d_1 - m)], & d_1 < s \le d_1 + m, \\ \Delta_1 \Delta s, & d_1 + m < s \le s_1 + \Delta s, \\ \Delta_1(s - s_1), & s_1 + \Delta s < s \le d, \\ \widetilde{x}, & s > d, \end{cases}$$

$$x_-(s) = \begin{cases} 0, & s \le d_1 - \Delta s, \\ -\Delta_1 \Delta s \cos^2[(\pi/2)(s - d_1 - m + \Delta s)], & d_1 - \Delta s < s \le d_1 + m - \Delta s, \\ -\Delta_1 \Delta s, & d_1 + m - \Delta s < s \le s_1 - \Delta s, \\ \Delta_1(s - s_1), & s_1 - \Delta s < s \le d, \\ \widetilde{x}, & s > d, \end{cases}$$

где d, d_1 — произвольные вещественные числа, m — нечетное число, $\widetilde{x}$ — произвольная функция такие, что $x, x_\pm \in \mathfrak{M}$. Например,

$$\widetilde{x}(s) = \begin{cases} \Delta_1(d - s_1)\left(\dfrac{\Delta_1 d_0 + 2}{d_0^3}(s - d - d_0)^3 + \dfrac{\Delta_1 d_0 + 3}{d_0^2}(s - d - d_0)^2\right), & d < s \le d + d_0, \\ 0, & s > d + d_0. \end{cases}$$

Тогда
$$\|x_\pm(s) - x(s)\|^p_{L_p} = \frac{|\Delta_1|^p (\Delta s)^{p+1}}{p+1} + (|\Delta_1|\Delta s)^p D,$$
где D — константа. Поскольку $\|x_\pm - x\|_{L_p} = \delta$, то, выражая из последнего равенства Δs, получаем $\Delta s = ((\delta/|\Delta_1|)^p (p+1))^{1/(p+1)} + o(\delta)$. Положим $\Delta_1 = \Delta^{\min}$. Теорема доказана. □

Обозначим через $\mathfrak{M}'$ множество функций, удовлетворяющих условиям (1), (2′), (3), (4′).

Теорема 5. *Для задачи локализации изломов зашумленной в пространстве C функции справедлива оценка*
$$\widehat{\tau}(\mathfrak{M}', \delta) \equiv \min_{\Pi} \tau(\mathfrak{M}', \Pi, \delta) \geq \delta/\Delta^{\min}.$$

Доказательство. Пусть функции $x, x_\pm \in \mathfrak{M}'$ из доказательства предыдущей теоремы. Тогда $\max_s |x_\pm(s) - x(s)| = |\Delta_1|\Delta s$. Следовательно, $\Delta s = \delta/|\Delta_1|$. Положим $\Delta_1 = \Delta^{\min}$. Теорема доказана. □

Как уже отмечалось в разд. 2, кроме точности локализации необходимы оценки и для других характеристик методов, например, порога разделимости. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество функций, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

Определение 2. Для метода Π назовем наименьшую из функций $h(\mathfrak{M}_1, \Pi, \delta)$, которую можно поставить в условии (4), порогом разделимости данного алгоритма Π на классе функций $\mathfrak{M}_1$. Величину $\widehat{h}(\mathfrak{M}_1, \delta) = \min\limits_{\Pi} h(\mathfrak{M}_1, \Pi, \delta)$ назовем порогом разделимости задачи на классе функций $\mathfrak{M}_1$. Метод Π назовем P-*оптимальным* (P-*оптимальным по порядку*) на классе $\mathfrak{M}_1$, если $\widehat{h}(\mathfrak{M}_1, \delta) = h(\mathfrak{M}_1, \Pi, \delta)$ (существует такая константа $R > 1$, что $h(\mathfrak{M}_1, \Pi, \delta) \leq R\,\widehat{h}(\mathfrak{M}_1, \delta)$).

Изложим основную идею получения оценок снизу для порога разделимости в абстрактной формулировке для задачи локализации изломов зашумленной функции. Возьмем функцию $x_1(s) \in \mathfrak{M}_1$, имеющую особенность в точке s^1_1, и функцию $x_2(s) \in \mathfrak{M}_1$ с особенностями в точках s^2_1, s^2_2, причем $\|x_1 - x_2\| = \delta$ (точки s^2_1, s^2_2 должны быть близки друг к другу и к точке s^1_1). Зафиксируем метод Π, которому соответствует порог разделимости $h(\mathfrak{M}_1, \Pi, \delta)$ в условии (4).

Пусть по функции x_1 для уровня погрешности δ метод определит количество разрывов l_1. Поскольку в качестве точной и приближенной функций можно взять функцию x_1, то должно быть $l_1 = 1$. С другой стороны, в качестве точной можно рассматривать функцию x_2, а в качестве приближенной — функцию x_1. Значит, для функции x_2 условие (4) должно нарушаться, т. е. справедливо неравенство $h(\mathfrak{M}_1, \Pi, \delta) > |s^2_1 - s^2_2|$. Поскольку метод произвольный, то это неравенство должно выполняться для порога разделимости задачи $\widehat{h}(\mathfrak{M}_1, \delta)$.

Теорема 6. *Для задачи локализации изломов функции, зашумленной в пространстве L_p, $1 < p < \infty$, справедлива оценка*
$$\widehat{h}(\mathfrak{M}_1, \delta) \equiv \min_{\Pi} h(\mathfrak{M}_1, \Pi, \delta) > ((2\delta/\Delta^{\min})^p (p+1))^{1/(p+1)}.$$

Доказательство. Пусть $\Delta^2_1 < 0$, $\Delta^2_2 < 0$, $b > 0$, и функция $x_2 \in \mathfrak{M}_1$ имеет вид
$$x_2(s) = \begin{cases} 0, & -\Delta^2_2 s^2_2 + b < s \leq \Delta^2_1 s^2_1 + b, \\ -\Delta^2_1 (s - s^2_1) + b, & \Delta^2_1 s^2_1 + b < s \leq s^2_1, \\ b, & s^2_1 < s \leq s^2_2, \\ \Delta^2_2 (s - s^2_2) + b, & s^2_2 < s \leq -\Delta^2_2 s^2_2 + b. \end{cases}$$
По этой функции построим функцию $x_1 \in \mathfrak{M}_1$:
$$x_1(s) = \begin{cases} 0, & -\Delta^2_2 s^2_2 + b < s \leq \Delta^2_1 s^2_1 + b, \\ -\Delta^2_1 (s - s^2_1) + b, & \Delta^2_1 s^2_1 + b < s \leq s^1_1, \\ \Delta^2_2 (s - s^2_2) + b, & s^1_1 < s \leq -\Delta^2_2 s^2_2 + b, \end{cases}$$

где $s_1^1 = (\Delta_1^2 s_1^2 + \Delta_2^2 s_2^2)/(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)$. При этом $\Delta_1^1 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$. Пусть $\|x_1 - x_2\|_{L_p} = \delta$, тогда $h(\mathfrak{M}_1, \Pi, \delta) > |s_2^2 - s_1^2|$.

Ясно, что

$$x_1(s) - x_2(s) = \begin{cases} -\Delta_1^2(s - s_1^2), & s_1^2 \leq \ s \ < s_1^1, \\ \Delta_2^2(s - s_2^2), & s_1^1 \leq \ s \ \leq s_2^2, \\ 0, & s_2^2 < \ s \ < s_1^2. \end{cases}$$

Значит,

$$\|x_1 - x_2\|_{L_p}^p = \left(\frac{\Delta_1^2 \Delta_2^2}{|\Delta_1^2 + \Delta_2^2|}\right)^p \frac{(s_1^2 - s_2^2)^{p+1}}{p+1}.$$

Следовательно,

$$|s_2^2 - s_1^2|^{p+1} = \left(\frac{\delta|\Delta_1^2 + \Delta_2^2|}{\Delta_1^2 \Delta_2^2}\right)^p (p+1).$$

Минимум функции $(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)/(\Delta_1^2 \Delta_2^2)$ достигается при $\Delta_1^2 = \Delta_2^2 = \Delta^{\min}$ и равен $2/\Delta^{\min}$. Теорема доказана. □

Обозначим через $\mathfrak{M}_1'$ множество функций с условиями (1), (2′), (3).

Теорема 7. *Для решения задачи локализации изломов зашумленной в пространстве C функции справедлива оценка*

$$\widehat{h}(\mathfrak{M}_1', \delta) \equiv \min_{\Pi} h(\mathfrak{M}_1', \Pi, \delta) > 2\delta/\Delta^{\min}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}_1'$ из доказательства предыдущей теоремы. Пусть $\|x_1(s) - x_2(s)\|_C = \delta$, значит, $h(\mathfrak{M}_1', \Pi, \delta) > |s_2^2 - s_1^2|$.

Ясно, что $\max_s |x_1(s) - x_2(s)| = x_1(s_1^1) = \Delta_1^2 \Delta_2^2 (s_1^2 + s_2^2)/(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)$. Следовательно,

$$|s_2^2 - s_1^2| = \frac{\delta|\Delta_1^2 + \Delta_2^2|}{\Delta_1^2 \Delta_2^2}.$$

Поскольку

$$\min_{\Delta_k^2} \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}{\Delta_1^2 \Delta_2^2} = \frac{2}{\Delta^{\min}},$$

теорема доказана. □

Следствие. *Пусть для функции x выполнены условия* (1), (2) *или* (2′), (3), (4). *Тогда методы локализации изломов* П0 *и* П *или* П1 *являются оптимальными и P-оптимальными по порядку.*

Автор благодарит А. Л. Агеева за постановку задачи, а также С. А. Аникина за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г.** Численные методы решения обратных задач астрофизики. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. **Сизиков В. С.** Математические методы обработки результатов измерений. СПб: Политехника, 2001. 240 с.
3. **Теребиж В. Ю.** Введение в статистическую теорию обратных задач. М.: Физматлит, 2005. 376 с.
4. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** О новом классе некорректно поставленных задач // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 27–45. (Математика. Механика. Информатика. Вып. 11.)
5. **Антонова Т. В.** Восстановление функции с конечным числом разрывов 1-го рода по зашумленным данным// Изв. вузов. Математика. 2001. № 7. С. 65–68.
6. **Antonova T. V.** Approximation of function with finite number of discontinuities by noised data // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2002. Vol. 10, no. 2. P. 113–123.

7. **Антонова Т. В.** О решении нелинейных по параметру уравнений 1-го рода на классах обобщенных функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 819–831.
8. **Антонова Т. В.** Решение уравнений первого рода на классах функций с особенностями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2002. Т. 8, № 1. С. 147–188.
9. **Ageev A. L., Antonova T. V.** Localization algorithms for singularities of solution to convolution equation of the first kind // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2008. Vol. 16, iss. 7. P. 639–650.
10. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** Регуляризирующие алгоритмы выделения разрывов в некорректных задачах // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 8. С. 1362–1370.
11. **Козлов В. П.** О разрешающей способности спектральных приборов. I. Постановка задачи и критерий разрешения // Оптика и спектроскопия. 1964. Т. 16, № 3. С. 501–506.
12. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** О задаче разделения особенностей // Изв. вузов. 2007. № 11. С. 1–7.
13. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т.2. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 864 с.
14. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.
15. **Агеев А. Л., Антонова Т. В.** Оценки снизу в задачах локализации особенностей функции // Проблемы теоретической и прикладной математики: тр. 39-й Всерос. молодеж. конф. Екатеринбург, 2008. С. 56–60.

Антонова Татьяна Владимировна
канд. физ.-мат.наук
старший науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
tvantonova@imm.uran.ru

Поступила 30.12.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 517.51

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА И НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В $C(\mathbb{T})$

А. Г. Бабенко[1], **Ю. В. Крякин**[2]

Дано применение полученных ранее результатов авторов об интегральном приближении характеристической функции интервала подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ тригонометрических полиномов степени не выше $n-1$ к неравенству Джексона между величиной наилучшего равномерного приближения непрерывной периодической функции подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ и ее модулем непрерывности второго порядка. Построен соответствующий метод равномерного приближения непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами.

Ключевые слова: интегральное приближение функции полиномами, неравенство Джексона.

A. G. Babenko and Yu. V. Kryakin. Integral approximation of the characteristic function of an interval and the Jackson inequality in $C(\mathbb{T})$.

An application of the results about integral approximation of the characteristic function of an interval by the subspace $\mathcal{T}_{n-1}$ of trigonometric polynomials of order at most $n-1$, which were obtained by the authors earlier, to investigation of the Jackson inequality between the best uniform approximation of a continuous periodic function by the subspace $\mathcal{T}_{n-1}$ and its modulus of continuity of the second order is presented. A respective method of uniform approximation of continuous periodic functions by trigonometric polynomials is constructed.

Keywords: integral approximation of a function by polynomials, the Jackson inequality.

Введение

Пусть $\mathbb{T} = [-\pi, \pi) = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ — период (одномерный тор), $L = L(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических интегрируемых по Лебегу функций $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_L = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt$; $L_\infty = L_\infty(\mathbb{T})$ — пространство 2π-периодических измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{T}$ функций $f:\, \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)|:\ t \in \mathbb{T}\}$; $C = C(\mathbb{T})$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f:\, \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_C = \max\{|f(t)|:\ t \in \mathbb{T}\}$. Наряду с указанными пространствами периодических функций будет использоваться пространство $L(\mathbb{R})$ интегрируемых по Лебегу функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_{L(\mathbb{R})} = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,dt$.

Обозначим через $\chi_{(-h,h)}$ характеристическую функцию интервала $(-h,h)$, т. е.

$$\chi_{(-h,h)}(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-h,h), \\ 0, & t \notin (-h,h). \end{cases}$$

Ниже применяется известный способ периодизации (см. [7, гл. 7, разд. 2, формула (2.1)]), который функции $f \in L(\mathbb{R})$ ставит в соответствие 2π-периодическую функцию F из $L(\mathbb{T})$ по формуле

$$F(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} f(t + 2\pi j). \tag{0.1}$$

[1]Исследования первого автора поддержаны РФФИ (проект 08-01-00213), Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН, и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

[2]Исследования второго автора поддержаны правительством Польши (проект 201 016 31/1206).

Так, например, функции $\chi_{(-h,h)}$ сопоставим 2π-периодическую функцию

$$\chi_h(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \chi_{(-h,h)}(t + 2\pi j).$$

Наряду с $\chi_{(-h,h)}$, χ_h будем рассматривать функции

$$\mathcal{X}_{(-h,h)}(t) = \frac{1}{2h}\chi_{(-h,h)}(t), \qquad \mathcal{X}_h(t) = \frac{1}{2h}\chi_h(t).$$

При любом $h > 0$ имеем

$$\|\mathcal{X}_{(-h,h)}\|_{L(\mathbb{R})} = 1, \qquad \|\mathcal{X}_h\|_{L(\mathbb{T})} = 1.$$

Первое равенство очевидно, относительно второго см. доказательство теоремы 2.4 из [7, гл. 7, разд. 2]. Ряд Фурье функции $\mathcal{X}_h$ имеет вид

$$\mathcal{X}_h(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\sin kh}{kh} e^{ikt} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh}{kh}\,\cos kt\right); \tag{0.2}$$

отношение $(\sin kh)/(kh)$ при $k = 0$ считается равным единице.

Данная статья является продолжением исследований авторов [2, 3], посвященных интегральному приближению функции χ_h подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ вещественнозначных тригонометрических полиномов

$$g(t) = \sum_{|k|\le n-1} c_k e^{ikt}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad c_{-k} = \overline{c}_k,$$

степени не выше $n - 1$.

Величиной наилучшего интегрального приближения функции $f \in L$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ называется

$$E_{n-1}(f)_L = \min\{\|f - g\|_L :\ g \in \mathcal{T}_{n-1}\}.$$

Краткая история интегрального приближения индивидуальных функций полиномами приведена в работах авторов [2,3]. Величина наилучшего интегрального приближения функции $\mathcal{X}_h$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ найдена в [2] для специальных значений параметра h, в [3] указанная величина найдена при всех $h \in (0, \pi)$. В [2, теорема 1.3.1] доказаны следующие утверждения:

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L = 1 \quad \text{при} \quad 0 < h \le \frac{\pi}{2n},$$

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L \le \frac{\pi}{2nh} < 1 \quad \text{при} \quad \frac{\pi}{2n} < h \le \pi; \tag{0.3}$$

причем

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_{h_j})_L = \frac{\pi}{2nh_j}, \quad \text{где} \quad h_j = \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{0.4}$$

В [3, разд. 5] показано, что последовательность $\mathcal{E}_{n-1} := E_{n-1}\left(\mathcal{X}_{\pi/n}\right)_L$ $(n = 2, 3, \ldots)$, монотонно возрастая, стремится к числу $1 - 2v_1/\pi$, где v_1 — единственный корень уравнения

$$\sec v - \operatorname{tg} v = v/\pi \quad \text{на отрезке} \quad [0, \pi/2]\,,$$

т. е.

$$\mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \ldots < \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_n = 1 - 2v_1/\pi = 0.3817350529\ldots$$

Нетрудно проверить, что случай $h > \pi$ сводится к случаю $h \in (0, \pi]$, а именно,

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L = 0 \quad \text{при} \quad h/\pi \in \mathbb{N}, \tag{0.5}$$

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L = \left\{\frac{h}{\pi}\right\}\frac{\pi}{h}E_{n-1}(\mathcal{X}_{\{h/\pi\}\pi})_L \quad \text{при} \quad h>0, \quad h/\pi \notin \mathbb{N}, \tag{0.6}$$

здесь $\{a\}$ означает дробную часть числа a. Утверждение (0.5) очевидно. Для обоснования (0.6) проще всего использовать равенство

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L = E_{n-1}(\widetilde{\mathcal{X}}_h)_L, \quad h>0, \tag{0.7}$$

в котором через $\widetilde{\mathcal{X}}_h$ обозначена 2π-периодическая функция, полученная из функции

$$\mathcal{X}_{(0,2h)}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2h}, & t\in(0,2h), \\ 0, & t\notin(0,2h) \end{cases}$$

с помощью формулы (0.1). В свою очередь, утверждение (0.7) вытекает из свойства инвариантности подпространства $\mathcal{T}_{n-1}$ относительно любого сдвига переменной.

Из (0.5) и (0.6) следует, что в (0.3) ограничение $h\le\pi$ можно убрать, т. е.

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L \le \frac{\pi}{2nh} < 1 \quad \text{при} \quad h>\frac{\pi}{2n}; \tag{0.8}$$

а из (0.4) и (0.6) вытекает, что первое неравенство (0.8) обращается в равенство для h, совпадающего с произвольным положительным нулем функции $\cos nt$, т. е.

$$E_{n-1}(\mathcal{X}_{h_j})_L = \frac{\pi}{2nh_j}, \quad \text{где} \quad h_j=\frac{(2j-1)\pi}{2n}, \quad j\in\mathbb{N}.$$

В данной работе мы показываем, как точный результат о приближении характеристической функции интервала в $L(\mathbb{T})$ можно применить для исследования задачи Джексона об оценке наилучшего равномерного приближения непрерывной периодической функции через вторую конечную разность функции.

1. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения

Обозначим через $*$ операцию свертки функций f и g, заданных на прямой (см. [7, гл. 1, разд. 1]):

$$f{*}g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt,$$

а через $\odot$ — операцию свертки функций f и g, заданных на периоде (см. [6, гл. 1, § 1.5, п. 4], [9, гл. 3, разд. 3.1]):

$$f{\odot}g(x) = \int\limits_{\mathbb{T}} f(x-t)g(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Рассмотрим оператор Стеклова $S_h:\ L\to C$ (см. [1, гл. 3, п. 67])

$$S_hf(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x+t)\,dt = \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{h} f(x-t)\,dt, \quad h>0.$$

Функцию $f\in L$ можно рассматривать как функцию, заданную на прямой. Учитывая это обстоятельство, а также рассуждения, которые применялись при доказательстве теоремы 2.4 из [7, гл. 7, разд. 2], нетрудно показать, что справедливы соотношения

$$S_hf(x) = f{*}\mathcal{X}_{(-h,h)}(x) = f{\odot}\mathcal{X}_h(x) \quad \text{при любом} \quad h>0. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$ множество функций $\varphi \in L_\infty$, ортогональных подпространству $\mathcal{T}_{n-1}$, т. е. множество таких функций $\varphi \in L_\infty$, для которых $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, g(t)\, dt = 0$ при всех $g \in \mathcal{T}_{n-1}$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$ и $g \in \mathcal{T}_{n-1}$. В силу (1.2) и неравенства для сверток (см. [6, гл. 1, § 1.5, п. 4, предложение 1.5.5]) имеем

$$|S_h\varphi(x)| = |\varphi \odot (\mathcal{X}_h - g)(x)| \le \inf_{g \in \mathcal{T}_{n-1}} \|\mathcal{X}_h - g\|_L \|\varphi\|_{L_\infty} = E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L \|\varphi\|_{L_\infty}.$$

Следовательно, для любой функции $\varphi \in \mathcal{T}_{n-1}^{\perp}$ выполняется неравенство

$$|S_h\varphi(x)| \le E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L \|\varphi\|_{L_\infty}. \tag{1.3}$$

Покажем, что это неравенство точное. Обозначим через $g_h \in \mathcal{T}_{n-1}$ полином наилучшего интегрального приближения функции $\mathcal{X}_h$. Тогда по критерию А. А. Маркова (см., например, [3, теорема 2]) имеем, во-первых,

$$\varphi_h(t) := \operatorname{sign}\big(\mathcal{X}_h(t) - g_h(t)\big) \in \mathcal{T}_{n-1}^{\perp},$$

а во-вторых,

$$|S_h\varphi_h(0)| = |\varphi_h \odot \mathcal{X}_h(0)| = \left| \int\limits_{\mathbb{T}} \mathcal{X}_h(t)\varphi_h(t)\, dt \right| = E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L = E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L \|\varphi_h\|_{L_\infty}.$$

Таким образом, неравенство (1.3) является точным, т. е.

$$c(h,n) := \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_{n-1}^{\perp},\, \varphi \not\equiv 0} \frac{\|\varphi * \mathcal{X}_{(-h,h)}\|_C}{\|\varphi\|_{L_\infty}} = \sup_{\varphi \in \mathcal{T}_{n-1}^{\perp},\, \varphi \not\equiv 0} \frac{\|\varphi \odot \mathcal{X}_h\|_C}{\|\varphi\|_{L_\infty}} = E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L \tag{1.4}$$

для любых $n \in \mathbb{N}$ и $h > 0$. Отсюда и из (0.8) получаем

$$c(h,n) \le \frac{\pi}{2nh} < 1 \quad \text{при} \quad h > \frac{\pi}{2n}. \tag{1.5}$$

Обозначим через W_2 оператор, который функции $f \in C$ и числу $h > 0$ ставит в соответствие следующую функцию (см. [1, гл. 5, п. 83]):

$$W_2(f,h,x) := f(x) - S_hf(x) = f(x) - f * \mathcal{X}_{(-h,h)}(x) = f(x) - f \odot \mathcal{X}_h(x). \tag{1.6}$$

Этот оператор можно записать в виде

$$W_2(f,h,x) = -\frac{1}{2h} \int\limits_0^h \Big(f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)\Big)\, dt.$$

Элементу f пространства C сопоставим следующую функцию переменного $h > 0$:

$$W_2(f,h) := \|f - S_hf\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |W_2(f,h,x)|.$$

Ясно, что

$$2W_2(f,h) \le \frac{1}{h} \int\limits_0^h \omega_2(f,t)\, dt \le \omega_2(f,h), \tag{1.7}$$

где

$$\omega_2(f,h) := \sup_{x \in \mathbb{R},\, 0 \le t \le h} |f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)|$$

есть *модуль непрерывности функции f второго порядка.*

2. Связь интегрального приближения функции $\mathcal{X}_h$ с неравенством Джексона в C для случая второго модуля непрерывности

В этом разделе дано приложение результатов об интегральном приближении функции $\mathcal{X}_h$ подпространством $\mathcal{T}_{n-1}$ (см. введение) к неравенству Джексона между величиной

$$E_{n-1}(f) = \min\{\|f-g\|_C : \ g \in \mathcal{T}_{n-1}\}$$

наилучшего равномерного приближения функции $f \in C$ и ее вторым модулем непрерывности.

Задача о константах в неравенствах Джексона и Джексона — Стечкина с модулем непрерывности произвольного порядка имеет богатую историю, частичное описание которой содержится в монографиях [1, 4–6] и в статьях [8, 10]. Ниже будет доказана

Теорема. *Пусть $f \in C$, $n \in \mathbb{N}$, $h > \pi/(2n)$. Тогда выполняются неравенства*

$$E_{n-1}(f) \le \frac{W_2(f,h)}{1-c(h,n)} \le \frac{1}{2h(1-c(h,n))} \int_0^h \omega_2(f,t)\,dt \le \frac{\omega_2(f,h)}{2(1-c(h,n))} \tag{2.1}$$

и как следствие — неравенства

$$E_{n-1}(f) \le \frac{W_2(f,h)}{1-\pi/(2nh)} \le \frac{\omega_2(f,h)}{2-\pi/(nh)}. \tag{2.2}$$

Для доказательства теоремы понадобится следующая лемма, в которой используются стандартные обозначения коэффициентов Фурье функции $F \in L$:

$$\widehat{F}_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-ikt}\,dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Лемма. *Пусть $F \in L$ и $2\pi\widehat{F}_k \ne 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Тогда для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{T}_{n-1}$ существует полином $\tau \in \mathcal{T}_{n-1}$ такой, что*

$$g = \tau - \tau \odot F. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно (см. [9, гл. 3, разд. 3.1]), свертка $\varphi \odot \psi$ (см. (1.1)) функций $\varphi, \psi \in L$ принадлежит L и для коэффициентов Фурье свертки справедлива формула

$$\widehat{(\varphi \odot \psi)}_k = 2\pi \widehat{\varphi}_k \widehat{\psi}_k \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) получаем

$$\widehat{g}_k = \widehat{\tau}_k \left(1 - 2\pi\widehat{F}_k\right), \quad \widehat{\tau}_k = \frac{\widehat{g}_k}{1-2\pi\widehat{F}_k} \quad \text{при} \quad |k| \le n-1.$$

Таким образом, искомый полином τ имеет вид

$$\tau(x) = \sum_{|k| \le n-1} \frac{\widehat{g}_k e^{ikx}}{1-2\pi\widehat{F}_k}. \tag{2.5}$$

Лемма доказана. □

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Обозначим через $g_h \in \mathcal{T}_{n-1}$ полином наилучшего интегрального приближения функции $\mathcal{X}_h$.

Для произвольной функции $f \in C$ в силу леммы найдется тригонометрический полином $\tau_f \in \mathcal{T}_{n-1}$, для которого выполняется равенство

$$f - \tau_f = (f - \tau_f) \odot (\mathcal{X}_h - g_h) + W_2(f, h, \cdot). \tag{2.6}$$

Действительно, в силу (1.6) уравнение (2.6) эквивалентно каждому из следующих уравнений:

$$f - \tau_f = (f - \tau_f) \odot (\mathcal{X}_h - g_h) + f - f \odot \mathcal{X}_h,$$

$$-\tau_f = (f - \tau_f) \odot (\mathcal{X}_h - g_h) - f \odot \mathcal{X}_h,$$

$$f \odot g_h = \tau_f - \tau_f \odot (\mathcal{X}_h - g_h).$$

Последнее из этих уравнений имеет вид (2.3), где

$$g = f \odot g_h, \qquad \tau = \tau_f, \qquad F = \mathcal{X}_h - g_h. \tag{2.7}$$

По условию теоремы $h > \pi/(2n)$, поэтому с учетом (0.8) имеем $\|F\|_L < 1$. Следовательно, $|2\pi \widehat{F}_k| < 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Таким образом, выполнены условия леммы, а значит, уравнение (2.6) имеет решение. Откуда получаем

$$\|f - \tau_f\|_C \le \|f - \tau_f\|_C E_{n-1}(\mathcal{X}_h)_L + W_2(f, h).$$

Принимая во внимание (1.4), приходим к неравенству

$$\|f - \tau_f\|_C \le \frac{W_2(f, h)}{1 - c(n, h)}. \tag{2.8}$$

Из (1.7) и (2.8) следует (2.1), а из (2.1) с учетом (1.5) и (1.7) вытекает (2.2). □

З а м е ч а н и е 1. Анализируя доказательство теоремы (см. формулы (2.4), (2.5), (2.7)) и принимая во внимание (0.2), приходим к выводу, что формула

$$\tau_f(x) = \sum_{|k| \le n-1} \frac{\widehat{g}_k\, e^{ikx}}{1 - 2\pi \widehat{F}_k} = \sum_{|k| \le n-1} \frac{2\pi\, \widehat{g}_k(h)\, \widehat{f}_k\, e^{ikx}}{1 + 2\pi \widehat{g}_k(h) - \dfrac{\sin kh}{kh}} \tag{2.9}$$

(в которой $(\sin kh)/(kh) = 1$ при $k = 0$, $\widehat{g}_k(h)$ — k-й коэффициент Фурье полинома g_h) дает указанный выше метод приближения, т. е. метод, который функции $f \in C$ сопоставляет тригонометрический полином (2.9), уклоняющийся от f с погрешностью (2.8).

З а м е ч а н и е 2. Известно неравенство

$$E_{n-1}(f)_C \le \omega_2\left(f, \frac{\pi}{2n}\right), \quad f \in C, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.10}$$

которое является точным в следующем смысле:

$$\mathcal{K}(\pi/2) = 1,$$

где

$$\mathcal{K}(\delta) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{f \in C,\, f \not\equiv \mathrm{const}} \frac{E_{n-1}(f)_C}{\omega_2(f, \delta/n)}, \quad \delta > 0.$$

Оценки сверху и снизу величины $\mathcal{K}(\pi/2)$ получили соответственно В. В. Жук и В. В. Шалаев (см. [5, гл. 8, § 3, теорема 3 и комментарий к гл. 8, § 3]).

З а м е ч а н и е 3. Несмотря на то что первое неравенство в (2.1) не является точным, модификация предложенного подхода к доказательству прямых теорем теории приближений позволяет получить точное неравенство

$$E_{n-1}(f)_C \le \big(\operatorname{tg}(1) + \sec(1)\big)\, W_2\Big(f, \frac{\pi}{2n}\Big),$$

из которого получается классическое неравенство Фавара — Ахиезера — Крейна (в случае второй производной) с небольшой потерей в константе, а именно,

$$E_{n-1}(f)_C \le \big(\operatorname{tg}(1) + \sec(1)\big)\, W_2\Big(f, \frac{\pi}{2n}\Big) \le \frac{\operatorname{tg}(1) + \sec(1)}{3}\,\frac{3n}{\pi} \int\limits_0^{\pi/(2n)} t^2 |f^{(2)}(t)|\, dt,$$

поэтому

$$E_{n-1}(f)_C \le \lambda\, \frac{\pi^2}{8n^2}\, \|f^{(2)}\|_{L_\infty}, \quad \text{где} \quad \lambda = \frac{\operatorname{tg}(1) + \sec(1)}{3} = 1.1360744807\ldots \tag{2.11}$$

Константа в неравенстве (2.11) в λ раз больше точной константы в следующем неравенстве Фавара — Ахиезера — Крейна (см. [6, гл. 4, § 4.2, теорема 4.2.1, формула (2.5), гл. 3, § 3.1, формулы (1.8), (1.9), комментарии к гл. 4, §§ 4.1, 4.2]):

$$E_{n-1}(f)_C \le \frac{\pi^2}{8n^2}\, \|f^{(2)}\|_{L_\infty}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.; Л.: ГИТТЛ, 1947. 323 с.
2. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** О приближении ступенчатых функций тригонометрическими полиномами в интегральной метрике // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 12, вып. 1. С. 27–56.
3. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики. 2008. Т. 14, вып. 3. С. 19–37.
4. **Дзядык В.К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
5. **Жук В.В.** Аппроксимация периодических функций. Л.: ЛГУ, 1982. 366 с.
6. **Корнейчук Н.П.** Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987. 424 с.
7. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 336 с.
8. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
9. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. Т. 1 / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 264 с.
10. **Foucart S., Kryakin Y., Shadrin A.** On the exact constant in the Jackson—Stechkin inequality for the uniform metric // Constr. Approx. 2009. Vol. 29, no 2. P. 157–179.

Поступила 2.02.2009

Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Kryakin, Yuriy
dr hab.
Mathematical Institute
University of Wroclaw
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

Том 15 № 1 2009

УДК 517.5

ПОТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ МНОГОЧЛЕНОВ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОКРУЖНОСТИ С ВЕСОМ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИМ ПРОСТРАНСТВАМ L^r $(r>1)$[1]

В. М. Бадков

Устанавливаются двусторонние поточечные оценки многочленов, ортогональных на окружности $|z|=1$ с весом $\varphi(\tau):=h(\tau)|\sin(\tau/2)|^{-1}g(|\sin(\tau/2)|)$ $(\tau\in\mathbb{R})$, где $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле, для которого $t^{-1}g(t)\in L^1[0,1]$; $h(\tau)$ — положительная функция класса $C_{2\pi}$ с модулем непрерывности, удовлетворяющим интегральному условию Дини.
Полученные оценки применяются для нахождения порядка расстояния от точки $t=1$ до наибольшего нуля многочлена, ортогонального на отрезке $[-1,1]$.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, поточечные оценки, функция Сегё.

V. M. Badkov. Pointwise estimates of polynomials orthogonal on a circle with respect to a weight not belonging to the spaces L^r $(r>1)$.

Two-sided pointwise estimates are established for polynomials that are orthogonal on the circle $|z|=1$ with the weight $\varphi(\tau):=h(\tau)|\sin(\tau/2)|^{-1}g(|\sin(\tau/2)|)$ $(\tau\in\mathbb{R})$, where $g(t)$ is a concave modulus of continuity slowly changing at zero such that $t^{-1}g(t)\in L^1[0,1]$ and $h(\tau)$ is a positive function from the class $C_{2\pi}$ with a modulus of continuity satisfying the integral Dini condition.
The obtained estimates are applied to find the order of the distance from the point $t=1$ to the greatest zero of a polynomial orthogonal on the segment $[-1,1]$.

Keywords: orthogonal polynomials, pointwise estimates, the Szegő function.

1. Введение

Всюду ниже $\mathbb{R}:=(-\infty,\infty)$, $\mathbb{Z}_+:=\{0,1,\ldots\}$, $\mathbb{N}:=\{1,2,\ldots\}$, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость. При $1\le r\le\infty$ через $L^r[a,b]$ обозначается пространство измеримых комплекснозначных функций F с конечной нормой $\|F\|_{L^r[a,b]}$, где

$$\|F\|_{L^r[a,b]}:=\left\{\int\limits_a^b|F(\tau)|^r\right\}^{1/r}\ (1\le r<\infty),\qquad \|F\|_{L^\infty[a,b]}:=\operatorname{ess}\sup_{a\le\tau\le b}|F(\tau)|.$$

Для 2π-периодической функции F полагаем $L^r:=L^r[0,2\pi]$, $\|F\|_r:=(2\pi)^{-1/r}\|F\|_{L^r[0,2\pi]}$.

Модулем непрерывности называется неубывающая непрерывная полуаддитивная на $[0,\infty)$ функция $\omega(\delta)$, для которой $\omega(0)=0$. Если при этом $2\omega(a/2+b/2)\ge\omega(a)+\omega(b)$ для любых $a,b\ge0$, то говорят, что $\omega(\delta)$ — вогнутый модуль непрерывности. Под модулем непрерывности в L^r функции F понимается величина $\omega(F;\delta)_r:=\sup_{|\lambda|\le\delta}\|F(\lambda+\cdot)-F(\cdot)\|_r$.

Определенная при $x>0$ положительная функция $L(x)$ называется медленно меняющейся в нуле, если она измерима на $(0,A]$ при некотором $A>0$ и $\lim\limits_{x\to+0}[L(\lambda x)/L(x)]=1$ для любого $\lambda>0$ (см. [13]).

Весом называют суммируемую неотрицательную не эквивалентную нулю функцию. Пусть

$$\varphi_n(z)=\kappa_n(\varphi)z^n+\ldots+\varphi_n(0)\qquad(\kappa_n(\varphi)>0,\ n\in\mathbb{Z}_+)$$

[1]Исследования поддержаны РФФИ (проект № 08-01-00213) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ–1071.2008.1).

есть система многочленов, ортонормированная на окружности $|z| = 1$ с 2π-периодическим весом φ (см. [11] и [12]). Рассмотрим ассоциированные с весом φ многочлены второго рода [11]

$$\psi_0(z) := \varphi_0(z) = \kappa_0(\varphi), \quad \psi_n(z) := \frac{1}{2\pi c_0} \int_0^{2\pi} \left[\varphi_n(e^{i\tau}) - \varphi_n(z)\right] \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} \varphi(\tau)\, d\tau \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{1.1}$$

где

$$c_0 = [\kappa_0(\varphi)]^{-2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{1.2}$$

Если $\ln \varphi(\tau) \in L^1$, то для веса φ имеет смысл функция Сегё

$$\pi(\varphi; z) := \exp\left\{-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\tau} + z}{e^{i\tau} - z} \ln \varphi(\tau)\, d\tau\right\} \quad (|z| < 1). \tag{1.3}$$

Рассмотрим вопрос о поточечных оценках функций $|\varphi_n(e^{i\tau})|$ $(n \in \mathbb{N}, \tau \in \mathbb{R})$. Этому вопросу посвящены работы [3–6]. В [4] доказаны следующие предложения.

Предложение 1. *Пусть $j \in \mathbb{Z}_+$, вес φ задан формулой*

$$\varphi(\tau) := h(\tau) \prod_{\nu=1}^{m} w_\nu\Big(\big|\sin[(\tau - \theta_\nu)/2]\big|\Big) \quad (\tau \in \mathbb{R},\ -\pi < \theta_1 < \ldots < \theta_m \le \pi), \tag{1.4}$$

где

$$w_\nu(u) := \prod_{\mu=1}^{l_\nu} [g_{\mu,\nu}(u)]^{\alpha(\mu,\nu)} \in L^1[0,1], \tag{1.5}$$

$m, l_\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha(\mu,\nu) \in \mathbb{R}$, $g_{\mu,\nu}(u)$ — вогнутые модули непрерывности $(\mu = 1, \ldots, l_\nu;\ \nu = 1, \ldots, m)$; функция h удовлетворяет условиям

$$0 \le h(\tau), \qquad h, 1/h \in L^\infty, \tag{1.6}$$

$$\omega(h; \delta)_2 = O(\sqrt{\delta}) \quad (\delta \to +0). \tag{1.7}$$

Тогда найдется константа $C_1(\varphi; j)$ такая, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$|\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})| \le C_1(\varphi; j) n^j \left\{\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu\Big(\big|\sin[(\tau - \theta_\nu)/2]\big| + n^{-1}\Big)\right\}^{-1/2}. \tag{1.8}$$

Предложение 2. *Заключение предложения* 1 *сохраняет силу и после замены в его формулировке условий* (1.6), (1.7) *условиями*

$$0 < h(\tau) \in C_{2\pi}, \qquad \omega(h; \delta)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,1], \tag{1.9}$$

$$\int_0^\theta w_\nu(\tau)\, d\tau = O(\theta w_\nu(\theta)) \quad (\theta \to +0;\ \nu = 1, \ldots, m). \tag{1.10}$$

Предложение 3. *Пусть $j \in \mathbb{Z}_+$, вес φ определяется формулами* (1.4), (1.5), *в которых m, l_ν, $\alpha(\mu,\nu)$, $g_{\mu,\nu}(u)$ имеют тот же смысл, что и в предложении* 1, *для w_ν выполнены соотношения* (1.10), *h удовлетворяет условию* (1.6), *а при $j = 0$ еще и одному из условий* (1.7) *или* (1.9). *Тогда найдется константа $C_2(\varphi; j) > 0$ такая, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n > j$*

$$|\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})| \ge C_2(\varphi; j) n^j \left\{\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu\Big(\big|\sin[(\tau - \theta_\nu)/2]\big| + n^{-1}\Big)\right\}^{-1/2}. \tag{1.11}$$

В [4, теорема 2.1] также установлено, что если вес φ удовлетворяет условиям (1.4)–(1.6), то найдутся положительные константы $C_3(\varphi)$ и $C_4(\varphi)$ такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ функция (1.3) удовлетворяет неравенствам

$$C_3(\varphi) \le \bigl|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})\bigr|\biggl\{\prod_{\nu=1}^{m} w_\nu\Bigl(\bigl|\sin[(\tau-\theta_\nu)/2]\bigr|+n^{-1}\Bigr)\biggr\}^{1/2} \le C_4(\varphi). \tag{1.12}$$

Поэтому при выполнении условий, являющихся пересечением условий предложений 1–3, найдутся положительные константы $C_5(\varphi;j)$ и $C_6(\varphi;j)$ такие, что для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n > j$ выполняются неравенства

$$C_5(\varphi;j)\bigl|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})\bigr| \le \bigl|\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})\bigr| \le C_6(\varphi;j)\bigl|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})\bigr|. \tag{1.13}$$

В [4, разд. 13] показано, что вес

$$\varphi(\tau) = \frac{4}{|\sin\tau|}\biggl(\ln^2\frac{1+\cos\tau}{1-\cos\tau}\biggr)^{-1} \quad (\tau \in \mathbb{R}) \tag{1.14}$$

можно представить в виде (1.4), (1.5) с $m = 2$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ таким образом, что выполняются все условия предложения 3 за исключением условия (1.10). При этом оценка (1.11) при $\tau = j = 0$ не имеет места. Двусторонние поточечные оценки величин в случае веса (1.14) найдены в [5]. В настоящей работе устанавливаются подобные оценки в случае веса

$$\varphi(\tau) := h(\tau)\Bigl|\sin(\tau/2)\Bigr|^{-1} g\Bigl(\Bigl|\sin(\tau/2)\Bigr|\Bigr) \quad (\tau \in \mathbb{R}), \tag{1.15}$$

где $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле, для которого $t^{-1}g(t) \in L^1[0,\pi]$, а $h(\tau)$ удовлетворяет условию (1.9).

Заметим, что для веса (1.15) условие (1.10) не выполняется. Веса (1.14), (1.15) не принадлежат пространствам L^r $(r > 1)$.

2. Оценка снизу ядра Сегё

При оценке снизу величины $|\varphi_n(e^{i\tau})|$ применяется следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть a — положительное число; вес φ определяется формулой*

$$\varphi(\tau) := |\sin(\tau/2)|^{-1} g(|\sin(\tau/2)|) \qquad (\tau \in \mathbb{R}), \tag{2.1}$$

где $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле, для которого $t^{-1}g(t) \in L^1[0,1]$. Тогда справедливо неравенство

$$K_n(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) \ge C_7\, n\bigl|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\theta})\bigr|^2 \qquad (an^{-1} \le |\theta| \le \pi/2,\ n \in \mathbb{N}), \tag{2.2}$$

в котором $C_7 = C_7(a;\varphi)$ — положительная константа,

$$K_n(\varphi;z,\zeta) := \varphi_0(z)\overline{\varphi_0(\zeta)} + \ldots + \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\{u_k(\tau)\}_{k=0}^\infty$ и $\{v_k(\tau)\}_{k=0}^\infty$ — системы тригонометрических полиномов, ортонормированные относительно четных весов u и v, связанных соотношением $u(\tau) = v(\tau)\sin^2\tau$. Положим $D_n(u;\theta,\tau) := u_0(\theta)u_0(\tau) + \ldots + u_n(\theta)u_n(\tau)$. Аналогично определим ядро $D_n(v;\theta,\tau)$. Тогда будем иметь соотношение (см. [14, формула (2.10)])

$$D_{2n}(u;\theta,\tau)\sin^2\tau - D_{2n}(v;\theta,\tau) = \sum_{k=0}^{2n} u_k(\theta) \sum_{\nu=2n+1}^{\infty} c_{u,k}(v_\nu)v_\nu(\tau), \tag{2.4}$$

где

$$c_{u,k}(v_\nu) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi} v_\nu(\tau)u_k(\tau)u(\tau))\,d\tau.$$

Так как $u_\nu(-\tau) = (-1)^\nu u_\nu(\tau)$, $v_\nu(-\tau) = (-1)^\nu v_\nu(\tau)$, а полиномы v_{2n-1} и v_{2n} ортогональны с весом v тригонометрическим полиномам порядка меньше n, то из (2.4) следует, что

$$D_{2n}(u;\theta,\tau)\sin^2\tau - D_{2n}(v;\theta,\tau)$$

$$= \sum_{k=n-1}^{n}\sum_{\nu=n+1}^{n+2}\big[c_{u,2k-1}(v_{2\nu-1})u_{2k-1}(\theta)v_{2\nu-1}(\tau) + c_{u,2k}(v_{2\nu})u_{2k}(\theta)v_{2\nu}(\tau)\big]. \tag{2.5}$$

При $\tau = \theta$ формула (2.5) принимает вид

$$D_{2n}(u;\theta,\theta)\sin^2\theta - D_{2n}(v;\theta,\theta)$$

$$= \sum_{k=n-1}^{n}\sum_{\nu=n+1}^{n+2}\big[c_{u,2k-1}(v_{2\nu-1})u_{2k-1}(\theta)v_{2\nu-1}(\theta) + c_{u,2k}(v_{2\nu})u_{2k}(\theta)v_{2\nu}(\theta)\big]. \tag{2.6}$$

Применяя неравенство Коши, находим, что

$$|c_{u,k}(v_\nu)| \le \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi}\big|[v_\nu(\tau)\sqrt{v(\tau)}][u_k(\tau)\sqrt{u(\tau)}]\big|\,d\tau \le 1. \tag{2.7}$$

Полагая $v(\tau) = \varphi(\tau)$, имеем неравенства (см. [2, следствие 2.4])

$$|v_{2n-1}(\theta)| + |v_{2n}(\theta)| \le 4\big[|\varphi_{2n-1}(e^{i\theta})| + |\varphi_{2n}(e^{i\theta})|\big]. \tag{2.8}$$

На основании (2.8) и (1.12) заключаем, что в формуле (2.6)

$$|v_{2k-1}(\theta)| + |v_{2k}(\theta)| \le C_8(\varphi)\big|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\theta})\big|. \tag{2.9}$$

Аналогично убеждаемся в справедливости неравенств

$$|u_{2k-1}(\theta)| + |u_{2k}(\theta)| \le C_9(\varphi)(|\sin\theta| + n^{-1})^{-1}\big|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\theta})\big|. \tag{2.10}$$

Из (2.6), (2.7), (2.9) и (2.10) выводим неравенство

$$D_{2n}(\varphi;\theta,\theta) \ge D_{2n}(\varphi(\tau)\sin^2\tau;\theta,\theta) - C_{10}(\varphi)(|\sin\theta| + n^{-1})^{-1}\big|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\theta})\big|^2. \tag{2.11}$$

Поскольку $D_{2n}(\varphi;\theta,\theta) = K_{2n}(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta})$ (см. [2, следствие 2.6], а также [8, следствие 17.2]), то (2.11) переписывается в виде

$$K_{2n}(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) \ge K_{2n}(\varphi(\tau)\sin^2\tau;e^{i\theta},e^{i\theta}) - C_{10}(\varphi)(|\sin\theta| + n^{-1})^{-1}\big|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\theta})\big|^2. \tag{2.12}$$

В силу теоремы 9.2 из [4] выполняется неравенство

$$K_{2n}(\varphi(\tau)\sin^2\tau;e^{i\theta},e^{i\theta}) \ge C_{11}(\varphi)n(|\sin\theta| + n^{-1})^{-2}\big|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\theta})\big|^2. \tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.13) следует справедливость неравенства

$$K_{2n}(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) \ge C_{12}n|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\theta})|^2 \quad (bn^{-1} \le |\theta| \le \pi/2,\ n\in\mathbb{N}) \tag{2.14}$$

при некоторых положительных b и $C_{12} = C_{12}(\varphi)$.

Вес φ удовлетворяет условию

$$\delta_n(\varphi) := \inf_{c_0,\dots,c_n\in\mathbb{C}} \big\|[\pi(\varphi;e^{i\tau}) - c_0 - \ldots - c_n e^{in\tau}]\sqrt{\varphi(\tau)}\big\|_2 = O(n^{-1/2}) \quad (n\to\infty), \tag{2.15}$$

достаточному для того (см. [7, разд. 7]), чтобы при $k=1,\dots,n$; $n\in\mathbb{N}$ и $\theta\in\mathbb{R}$ отношение $|\varphi_{n+k}(e^{i\theta})|/|\varphi_{2n}(e^{i\theta})|$ было заключено между двумя положительными константами, зависящими лишь от φ. Отсюда следует (см. [7, теорема 7.1]), что при всех $\theta\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$

$$K_n(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) \le K_{2n}(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) \le K_n(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) + C_{13}(\varphi)n|\varphi_n(e^{i\theta})|^2 \le C_{14}(\varphi)K_n(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}). \tag{2.16}$$

В силу (2.16) для каждого $s\in\mathbb{N}$ найдется константа $C_{15}(s,\varphi)>0$ такая, что

$$K_n(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) \ge C_{15}(s,\varphi)K_{2sn}(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) \quad (\theta\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}). \tag{2.17}$$

Из (2.11), (2.17) и (2.14) следует неравенство

$$K_n(\varphi;e^{i\theta},e^{i\theta}) \ge C_{16}(s,\varphi)n|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\theta})|^2 \quad (b(sn)^{-1}\le|\theta|\le\pi/2,\ n\in\mathbb{N}). \tag{2.18}$$

При $s\ge b/a$ из (2.18) выводим справедливость (2.2).

3. Оценки ортогональных многочленов в условиях леммы 2.1

Следующая теорема устанавливает оценки модуля многочлена $\varphi_n(e^{i\tau})$, ортогонального с весом (1.15), при условии, что $h(\tau)\equiv 1$.

Теорема 3.1. *Пусть вес φ удовлетворяет условиям леммы* 2.1. *Тогда найдутся положительные константы $C_{17}=C_{17}(\varphi)$ и $C_{18}=C_{18}(\varphi)$ такие, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\tau\in\mathbb{R}$ выполняются неравенства*

$$C_{17}\rho_n(\tau) \le |\varphi_n(e^{i\tau})| \le C_{18}\rho_n(\tau), \tag{3.1}$$

где

$$\rho_n(\tau) := \mu_n + |\sin(\tau/2)|\big(|\sin(\tau/2)|+n^{-1}\big)^{-1/2}\big[g(|\sin(\tau/2)|+n^{-1})\big]^{-1/2}, \tag{3.2}$$

$$\mu_n := n^{-1/2}[g(n^{-1})]^{1/2}[G(n^{-1})]^{-1}, \qquad G(t) := \int_0^t \frac{g(u)}{u}\,du. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул Г. Сегё (см. [12, формулы (11.5.2)]) следует, что

$$e^{-in\tau}\varphi_{2n}(e^{i\tau}) = A_n(\varphi)p_n(\cos\tau) + iB_n(\varphi)q_{n-1}(\cos\tau)\sin\tau, \tag{3.4}$$

где

$$\lim_{n\to\infty} A_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} B_n(\varphi) = (\pi/2)^{1/2}, \tag{3.5}$$

$\{p_n(t)\}_{n=0}^\infty$, $\{q_n(t)\}_{n=0}^\infty$ — системы алгебраических многочленов, ортонормированные на отрезке $[-1,1]$ с весами $p(t)$ и $q(t):=(1-t^2)p(t)$ соответственно. В силу (3.4) и (3.5)

$$|\varphi_{2n}(e^{i\tau})| \asymp |p_n(\cos\tau)| + |q_{n-1}(\cos\tau)\sin\tau|. \tag{3.6}$$

Легко проверяется непосредственно (доказательство см. в [8, теорема 21.1]), что функции $\sqrt{\pi}p_n(\cos\tau)$ и $\sqrt{\pi}q_{n-1}(\cos\tau)\sin\tau$ $(n\in\mathbb{N})$ образуют систему тригонометрических полиномов, ортонормированную на отрезке $[-\pi,\pi]$ с весом $\varphi(\tau)$. Поэтому справедливо неравенство

$$|dp_n(\cos\tau)/d\tau| \le C_{19}(\varphi)n\big|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})\big| \quad (n\in\mathbb{N},\ \tau\in\mathbb{R}) \tag{3.7}$$

(см. [4, разд.13]). Так как $\sqrt{\pi}q_n(\cos\tau)$ принадлежит системе тригонометрических полиномов, ортонормированной на отрезке $[-\pi,\pi]$ с весом $\varphi(\tau)\sin^2\tau$, то имеет место также неравенство

$$|dq_n(\cos\tau)/d\tau| \le C_{20}(\varphi)n\big|\pi(\varphi(u)\sin^2 u;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})\big| \quad (n\in\mathbb{N},\ \tau\in\mathbb{R}). \tag{3.8}$$

В силу (1.12) из (3.7), (3.8) следует, что

$$|dp_n(\cos\tau)/d\tau| \le C_{21}(\varphi)n\big(|\sin(\tau/2)|+n^{-1}\big)^{1/2}\big[g(|\sin(\tau/2)|+n^{-1})\big]^{-1/2} \quad (n\in\mathbb{N},\ \tau\in\mathbb{R}), \tag{3.9}$$

$$|dq_n(\cos\tau)/d\tau| \le C_{22}(\varphi)n\big(|\sin(\tau/2)|+n^{-1}\big)^{-1/2}\big[g(|\sin(\tau/2)|+n^{-1})\big]^{-1/2} \quad (n\in\mathbb{N},\ \ \tau\in\mathbb{R}). \tag{3.10}$$

Так как функция $tg(t)$ возрастает, то из (3.10) вытекает неравенство

$$|dq_{n-1}(\cos\tau)/d\tau| \le C_{23}(\varphi)n^{3/2}[g(n^{-1})]^{-1/2} \quad (n\in\mathbb{N},\ \ \tau\in\mathbb{R}),$$

в силу которого

$$|q_{n-1}(\cos\tau)-q_{n-1}(1)| \le C_{23}(\varphi)n^{3/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}|\tau| \quad (n\in\mathbb{N},\ \ |\tau|\le\pi). \tag{3.11}$$

Рассматривая вместо (3.4) аналогичную формулу, соответствующую весу $\chi(\tau):=\varphi(\tau)\sin^2\tau$, получаем

$$\chi_{2n-2}(1) = A_{n-1}(\chi)q_{n-1}(1). \tag{3.12}$$

Из (3.12) и предложений 2, 3 следует, что $\chi_{2n-2}(1)\asymp n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}$. Последнее вместе с (3.2) приводит к соотношению

$$q_{n-1}(1) = n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}. \tag{3.13}$$

С помощью (3.11) и (3.13) устанавливаем существование числа $a\in(0,1)$ такого, что

$$|q_{n-1}(\cos\tau)\sin\tau| \asymp n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}|\tau| \quad (n\in\mathbb{N},\ \ |\tau|\le an^{-1}). \tag{3.14}$$

Как установлено в [9], система многочленов второго рода $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, ассоциированная с весом φ, удовлетворяющим условиям леммы 2.1, ортонормальна на окружности с весом

$$\psi(\tau) := h(\tau)|\sin(\tau/2)|g(|\sin(\tau/2)|)\big[G(|\sin(\tau/2)|)\big]^{-2} \quad (\tau\in\mathbb{R}), \tag{3.15}$$

где $h(\tau)$ — четная функция, удовлетворяющая условиям (1.6), (1.7),

$$G(t) := \int_0^t \frac{g(u)}{u}\,du. \tag{3.16}$$

Согласно предложениям 1 и 3 выполняются неравенства (1.13); поэтому

$$|\psi_n(1)| \asymp n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}G(n^{-1}). \tag{3.17}$$

В силу четности весов (2.1) и (3.15) коэффициенты многочленов $\varphi_n(z)$ и $\psi_n(z)$ — действительные числа. Поэтому из формул

$$\varphi_n^*(z)\psi_n(z)+\varphi_n(z)\psi_n^*(z) = (2/c_0)z^n, \qquad \varphi_n^*(z) := z^n\overline{\varphi_n(1/\overline{z})}$$

(см. (1.1), (1.2) и [11]) следует соотношение

$$\varphi_{2n}(1) \asymp 1/\psi_{2n}(1). \tag{3.18}$$

Из (3.4), (3.5), (3.18) и (3.17) находим, что

$$p_n(1) \asymp \varphi_{2n}(1) \asymp n^{-1/2}[g(n^{-1})]^{1/2}[G(n^{-1})]^{-1}. \tag{3.19}$$

В силу (3.9) $|dp_n(\cos\tau)/d\tau| \le C_{24}(\varphi; a)n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}$ $(n \in \mathbb{N},\ |\tau| \le an^{-1})$. Поэтому

$$|p_n(\cos\tau) - p_n(1)| \le C_{24}(\varphi; a)n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}|\tau| \quad (n \in \mathbb{N},\ \ |\tau| \le an^{-1}). \tag{3.20}$$

По лемме 2.5 из [9]

$$\lambda_n := n^{-1}g(n^{-1})[G(n^{-1})]^{-1} = o(n^{-1}) \quad (n \to \infty). \tag{3.21}$$

Из (3.19)–(3.21) следует, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$|p_n(\cos\tau)| \le C_{25}(\varphi; a)\{n^{-1/2}[g(n^{-1})]^{1/2}[G(n^{-1})]^{-1} + n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}|\tau|\} \quad (|\tau| \le an^{-1}) \tag{3.22}$$

и при достаточно малом $b \in (0, 1)$

$$p_n(\cos\tau) \asymp p_n(1) \asymp n^{-1/2}[g(n^{-1})]^{1/2}[G(n^{-1})]^{-1} \quad (|\tau| \le b\lambda_n). \tag{3.23}$$

Из (3.14), (3.22) и (3.23) вытекают оценки

$$|q_{n-1}(\cos\tau)\sin\tau| = O(1)|p_n(\cos\tau)| \qquad (|\tau| \le b\lambda_n), \tag{3.24}$$

$$|p_n(\cos\tau)| = O(1)|q_{n-1}(\cos\tau)\sin\tau| \quad (b\lambda_n \le |\tau| \le an^{-1}). \tag{3.25}$$

На основании (3.2), (3.3), (3.6), (3.14) и (3.23)–(3.25) заключаем, что

$$|\varphi_{2n}(e^{i\tau})| \asymp \rho_n(\tau) \quad (|\tau| \le an^{-1}). \tag{3.26}$$

Поскольку $|\varphi_{2n}(e^{i\tau})| \asymp |\varphi_n(e^{i\tau})|$ (см. доказательство формулы (2.16)), то из (3.26) следует справедливость неравенств (3.1) при $|\tau| \le an^{-1}$.

В силу неравенств (1.8) и (1.12) справедливы оценки

$$|\varphi_{2n}(e^{i\tau})| \le C_{26}(\varphi)|\pi(\varphi; (1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})| \quad (n \in \mathbb{N},\ \ \tau \in \mathbb{R}), \tag{3.27}$$

$$|\varphi'_{2n}(e^{i\tau})| \le C_{27}(\varphi)n|\pi(\varphi; (1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})| \quad (n \in \mathbb{N},\ \ \tau \in \mathbb{R}). \tag{3.28}$$

В [4, следствие 11.3] установлено неравенство

$$K_n(\varphi; e^{i\tau}, e^{i\tau}) \le 2|\varphi_n(e^{i\tau})\varphi'_n(e^{i\tau})| \quad (n \in \mathbb{N},\ \ \tau \in \mathbb{R}). \tag{3.29}$$

В силу (2.2), (3.29) и (3.28)

$$|\varphi_n(e^{i\tau})| \ge C_{28}(a; \varphi)|\pi(\varphi; (1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})| \quad (an^{-1} \le |\tau| \le \pi/2,\ n \in \mathbb{N}). \tag{3.30}$$

Из (3.2), (3.3) и (1.12) видно, что $|\pi(\varphi; (1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})| \asymp \rho_n(\tau)$ ($n \in \mathbb{N}, an^{-1} \le |\tau| \le \pi/2$). Поэтому из (3.27) и (3.30) следует справедливость неравенств (3.1) при $|\tau| \le \pi/2$. Поскольку $|\varphi^*_n(e^{i\tau})| = |\varphi_n(e^{i\tau})|$ $(\tau \in \mathbb{R})$ и при фиксированном $\delta \in (0, \pi)$ равномерно на отрезке $[\delta, 2\pi - \delta]$ имеет место предельное соотношение $\varphi^*_n(e^{i\tau}) \to \pi(\varphi; e^{i\tau})$ (см. [1]), то неравенства (3.1) верны при $\tau \in \mathbb{R}$.

4. Лемма о неравенствах между модулями многочленов двух систем

Следующая лемма играет важную роль при обобщении теоремы 3.1.

Лемма 4.1. *Пусть $\{\xi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\eta_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — системы алгебраических многочленов, ортонормированные на окружности $|z| = 1$ относительно весов*

$$\xi(\tau) := h_1(\tau)|\sin(\tau/2)|^{-1}g(|\sin(\tau/2)|) \qquad (\tau \in \mathbb{R}) \tag{4.1}$$

и

$$\eta(\tau) := h_2(\tau)|\sin(\tau/2)|^{-1}g(|\sin(\tau/2)|) \qquad (\tau \in \mathbb{R}) \tag{4.2}$$

соответственно, где $g(t)$ *удовлетворяет условиям леммы* 2.1,

$$0 < h_k(\tau) \in C_{2\pi}, \;\; \omega(h_k;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi] \quad (k=1,2). \tag{4.3}$$

Пусть при этом

$$|\xi_n(e^{i\tau})| \le C_{29}(\xi)\rho_n(\tau) \quad (\tau \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}), \tag{4.4}$$

где $\rho_n(\tau)$ *определено формулами* (3.2), (3.3). *Тогда*

$$|\eta_n(e^{i\tau})| \le C_{30}(\xi,\eta)\rho_n(\tau) \quad (\tau \in \mathbb{R},\; n \in \mathbb{N}). \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (4.3) выполняется условие

$$0 < h_1(\tau)/h_2(\tau) \in C_{2\pi}, \qquad \omega(h_1/h_2;\tau)_\infty \tau^{-1} \in L^1[0,\pi].$$

Обозначим через τ_n точку отрезка $[-\pi,\pi]$ такую, что

$$|\eta_n(e^{i\tau_n})/\rho_n(\tau_n)| = M_n := \|\eta_n(e^{i\tau})/\rho_n(\tau)\|_\infty. \tag{4.6}$$

Докажем существование числа $\delta_0 > 0$ такого, что $\forall \delta \in (0,\delta_0]$

$$M_n \le C_{31}(\xi,\eta;\delta) + C_{32}(\xi,\eta)\Omega(\delta)M_n, \qquad \Omega(\delta) := \int_0^\delta \frac{\omega(h_1/h_2;\tau)_\infty}{\tau}\,d\tau, \tag{4.7}$$

причем $C_{32}(\xi,\eta)$ не зависит от δ. Из (4.7) следует оценка

$$\|\eta_n(e^{i\tau})/\rho_n(\tau)\|_\infty \le C_{33}(\xi,\eta) \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{4.8}$$

ибо можно выбрать δ так, чтобы выполнялось неравенство $C_{32}(\xi,\eta)\Omega(\delta) \le 1/2$.

Для доказательства (4.7) оценим $|\eta_n(e^{i\tau_n})|$. Для этого рассмотрим разложение многочлена $\eta_n(z)$ по системе $\{\xi_k\}$ в точке $e^{i\tau_n}$. Учитывая (2.3) и ортогональность $\eta_n(z)$ с весом η многочленам меньшей степени, имеем

$$\eta_n(e^{i\tau_n}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta_n(e^{i\tau})K_n(\xi;e^{i\tau_n},e^{i\tau})\xi(\tau)\,d\tau = J_1 + J_2, \tag{4.9}$$

где

$$J_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \eta_n(e^{i\tau})\overline{\xi_n(e^{i\tau})}\xi(\tau)\,d\tau\,\xi_n(e^{i\tau_n}),$$

$$J_2 := \int_{\tau_n-\pi}^{\tau_n+\pi} F_n(\tau)\,d\tau, \qquad F_n(\tau) := \frac{1}{2\pi}\eta_n(e^{i\tau})\eta(\tau)K_{n-1}(\xi;e^{i\tau_n},e^{i\tau})\left[\frac{h_1(\tau)}{h_2(\tau)} - \frac{h_1(\tau_n)}{h_2(\tau_n)}\right]d\tau.$$

Применив неравенство Коши, получим

$$|J_1| \le \|h_1/h_2\|_\infty^{1/2}|\xi_n(e^{i\tau_n})|. \tag{4.10}$$

Теперь оценим $|J_2|$. Для этого рассмотрим множества $E_1 := [\tau_n-\pi,\tau_n+\pi]\setminus[\tau_n-\delta,\tau_n+\delta]$, $E_2 := \{\tau\colon\; |\tau-\tau_n| \le \delta,\; |\sin(\tau/2)| \ge n^{-1}\}$, $E_3 := \{\tau\colon\; |\tau-\tau_n| \le \delta,\; |\sin(\tau/2)| \le n^{-1}\}$. При этом

$$J_2 = J_{2,1} + J_{2,2} + J_{2,3}, \qquad J_{2,k} := \int_{E_k} F_n(\tau)\,d\tau \quad (k=1,2,3). \tag{4.11}$$

Из формулы Кристоффеля — Дарбу (см. [11, 12])

$$K_{n-1}(\varphi; z, \zeta) = \left[\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\zeta)} - \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\zeta)}\,\right](1 - z\overline{\zeta})^{-1} \tag{4.12}$$

в силу равенства $|\varphi_n^*(e^{i\tau})| = |\varphi_n(e^{i\tau})|$ $(\tau \in \mathbb{R})$ следует неравенство

$$|K_{n-1}(\xi; e^{i\tau_n}, e^{i\tau})| \le |\sin[(\tau - \tau_n)/2]|^{-1} |\xi_n(e^{i\tau_n})\xi_n(e^{i\tau})|. \tag{4.13}$$

Так как $|\sin[(\tau - \tau_n)/2]|^{-1} \le C_{34}(\delta)$ $(\tau \in E_1)$, то из (4.11), (4.13) и неравенства Коши вытекает, что

$$|J_{2,1}| \le C_{35}(h_1, h_2; \delta)|\xi_n(e^{i\tau_n})|. \tag{4.14}$$

Оценим $|J_{2,2}|$. Для этого воспользуемся неравенством

$$|\eta_n(e^{i\tau})| \le M_n \rho_n(\tau), \tag{4.15}$$

вытекающим из (4.8), формулами (4.4), (4.13) и оценкой $[\rho_n(\tau)]^2 = O(1/\eta(\tau))$. В результате получим, что

$$|J_{2,2}| \le C_{36}(\xi, \eta)\Omega(\delta) M_n |\xi_n(e^{i\tau_n})|. \tag{4.16}$$

Оценим $|J_{2,3}|$. Предположим, что многочлен $Q_n(z)$ степени n не имеет нулей в круге $|z| < 1$. Тогда справедливо неравенство (см. [4, формула (9.8)])

$$|Q_n(z)| \le 2|Q_n((1 - n^{-1})z)| \quad (|z| \le 1 + (2n)^{-1},\ \ n \ge 2). \tag{4.17}$$

Так как $K_n(\varphi; z, \zeta) \ne 0$ $(|z| < 1,\ |\zeta| \le 1)$, то из (4.17) следует, что

$$|K_{n-1}(\xi; e^{i\tau_n}, e^{i\tau})| \le 2|K_{n-1}(\xi; e^{i\tau_n}, (1 - (n-1)^{-1})e^{i\tau})| \quad (n \ge 3,\ \tau \in \mathbb{R}).$$

Поэтому, используя (4.12) и неравенство $|\varphi_n(z)| \le |\varphi_n^*(z)|$ $(|z| \le 1)$ (см. [11]), получаем

$$|K_{n-1}(\xi; e^{i\tau_n}, e^{i\tau})| \le C_{37}(\xi) \frac{|\xi_n^*((1 - n^{-1})e^{i\tau})\xi_n(e^{i\tau_n})|}{|\sin[(\tau - \tau_n)/2]| + n^{-1}} \quad (n \ge 3,\ \tau \in \mathbb{R}). \tag{4.18}$$

Так как найдутся положительные числа $C_{38}(\xi)$ и $C_{39}(\xi)$ такие, что при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{R}$

$$C_{38}(\xi) \le \left|\pi(\xi; (1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})\right| \left[|\sin(\tau/2)| + n^{-1}\right]^{-1/2} \left[g(|\sin(\tau/2)| + n^{-1})\right]^{-1/2} \le C_{39}(\xi), \tag{4.19}$$

то из (3.2), (3.3) следует оценка

$$\rho_n(\tau) \le C_{40}(\xi)\left|\pi(\xi; (1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})\right| \quad (n \in \mathbb{N},\ \ \tau \in \mathbb{R}). \tag{4.20}$$

Пользуясь (4.4), (4.19) и (4.20), убеждаемся в справедливости при всех $n \in \mathbb{N}$ на окружности $|z| = 1$, а значит (по принципу максимума модуля аналитической функции), и в круге $|z| \le 1$ неравенства

$$|\xi_n^*(z)| \le C_{41}(\xi)|\pi(\xi; (1 - (2n)^{-1})z)|. \tag{4.21}$$

На основании (4.19) и (4.21) при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tau \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$|\xi_n^*((1 - n^{-1})e^{i\tau})| \le C_{41}(\xi)\left|\pi(\xi; (1 - n^{-1})(1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})\right| \le C_{42}(\xi)\left|\pi(\xi; (1 - (2n)^{-1})e^{i\tau})\right|. \tag{4.22}$$

В силу (4.18), (4.22) и (4.19) имеем оценку

$$|K_{n-1}(\xi; e^{i\tau_n}, e^{i\tau})| \le C_{43}(\xi) n^{1/2} [g(n^{-1})]^{-1} |\xi_n(e^{i\tau_n})| \quad (n \ge 3,\ \ \tau \in E_3). \tag{4.23}$$

Из (4.15) и (4.23) следует неравенство

$$|J_{2,3}| \le C_{44}(\xi, \eta) M_n n^{1/2} [g(n^{-1})]^{-1/2} \omega(h_1/h_2; n^{-1})_\infty |\xi_n(e^{i\tau_n})| \int_0^{1/n} \rho_n(\tau) \frac{g(\tau)}{\tau}\, d\tau. \tag{4.24}$$

Учитывая (3.2), (3.3), находим, что

$$\int\limits_0^{1/n} \rho_n(\tau)\frac{g(\tau)}{\tau}\,d\tau = \mu_n G(n^{-1}) + n^{1/2}[g(n^{-1})]^{-1/2}\int\limits_0^{1/n} g(\tau)\,d\tau \le 2n^{-1/2}[g(n^{-1})]^{1/2}. \tag{4.25}$$

В силу (4.24), (4.25)

$$|J_{2,3}| \le 2C_{44}(\xi,\eta)\omega(h_1/h_2;\delta)M_n|\xi_n(e^{i\tau_n})| \le C_{45}(\xi,\eta)\Omega(\delta)M_n|\xi_n(e^{i\tau_n})|. \tag{4.26}$$

Из формул (4.9)–(4.11), (4.14), (4.16) и (4.26) выводим неравенство

$$|\eta_n(e^{i\tau_n})| \le \big[C_{46}(\xi,\eta,\delta) + C_{47}(\xi,\eta)\Omega(\delta)M_n\big]|\xi_n(e^{i\tau_n})|. \tag{4.27}$$

Пользуясь (4.6), (4.4) и (4.27), получаем (4.7). Из (4.7) вытекает неравенство (4.8), равносильное (4.5).

5. Главные результаты

Из теоремы 3.1 и леммы 4.1 следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть вес φ определяется формулой*

$$\varphi(\tau) := h(\tau)|\sin(\tau/2)|^{-1}g(|\sin(\tau/2)|) \quad (\tau\in\mathbb{R}), \tag{5.1}$$

где $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле, для которого $t^{-1}g(t)\in L^1[0,1]$;

$$0 < h(\tau)\in C_{2\pi}, \qquad \omega(h;\delta)_\infty\tau^{-1}\in L^1[0,1]. \tag{5.2}$$

Тогда найдутся положительные константы $C_{17}=C_{17}(\varphi)$ и $C_{18}=C_{18}(\varphi)$ такие, что для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\tau\in\mathbb{R}$ выполняются неравенства (3.1), *в которых величина $\rho_n(\tau)$ определяется равенствами* (3.2), (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала считаем, что роль веса (4.1) играет вес (2.1), а роль веса (4.2) — вес (5.1). Тогда в силу лемм 3.1 и 4.1 имеем оценку $|\varphi_n(e^{i\tau})| = O(1)\rho_n(\tau)$. Затем, меняя ролями веса (2.1) и (5.1), по лемме 4.1 получаем, что $\rho_n(\tau) = O(1)|\varphi_n(e^{i\tau})|$. □

Заметим, что в силу теоремы 5.1 $|\varphi_n(1)| \asymp \rho_n(0)$. При этом $\rho_n(0) = o(1)|\pi(\varphi;1-(2n)^{-1})|$, поскольку $\rho_n(0)/|\pi(\varphi;1-(2n)^{-1})| \asymp g(n^{-1})/G(n^{-1})$, а последняя величина при $n\to 0$ стремится к нулю (см. (3.21)). Таким образом, в условиях теоремы 5.1 $|\varphi_n(1)| = o(1)|\pi(\varphi;1-(2n)^{-1})|$.

Рассмотрим вопрос об оценках величин $|\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})|$ при $j\in\mathbb{N}$ в случае веса φ, удовлетворяющего условиям теоремы 5.1. Прежде всего заметим, что справедливо

Предложение 4. *Пусть $j\in\mathbb{N}$, вес φ определяется формулой* (5.1), *где $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле, для которого $t^{-1}g(t)\in L^1[0,1]$; функция $h(\tau)$ удовлетворяет условиям* (1.6), (1.7). *Тогда найдутся положительные константы $C_{48}(\varphi;j)$ и $C_{49}(\varphi;j)$ такие, что для всех $\tau\in\mathbb{R}$ и $n\ge j$ выполняются неравенства*

$$C_{48}(\varphi;j)n^j\big|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})\big| \le |\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})| \le C_{49}(\varphi;j)n^j\big|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})\big|. \tag{5.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка $|\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})| \le C_{49}(\varphi;j)n^j|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})|$ имеет место в силу предложения 1. Неравенство $C_{48}(\varphi;j)|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})| \le |\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})|$ выполняется на основании теоремы 1 из [6], условиям которой φ удовлетворяет при $k=1$. □

Таким образом, доказанное предложение является простым следствием известных результатов. Следующая теорема является существенно новой.

Теорема 5.2. *Пусть $j \in \mathbb{N}$, вес φ удовлетворяет условиям теоремы* 5.1. *Тогда для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \geq j$ выполняются неравенства* (5.3).

Доказательство. Так как $\rho_n(\tau) \leq C_{50}(\varphi)|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})|$, то в силу теоремы 5.1 выполняется неравенство $|\varphi_n(e^{i\tau})| \leq C_{51}(\varphi)|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})|$. Поэтому на основании теоремы 7.1 из [4] имеет место оценка $|\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})| \leq C_{49}(\varphi;j)n^j|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})|$.

Для доказательства неравенства $C_{48}(\varphi;j)n^j|\pi(\varphi;(1-(2n)^{-1})e^{i\tau})| \leq |\varphi_n^{(j)}(e^{i\tau})|$ достаточно повторить соответствующую часть доказательства теоремы 1 из [6] при $k = 1$, заменив в последней ссылку на условия (1.6), (1.7) ссылкой на условие (5.2). □

В заключение этого пункта приведем еще следующий вариант теоремы 5.1.

Теорема 5.3. *Теорема* 5.1 *сохраняет силу при замене в ее формулировке условия* (5.2) *условиями*

$$h(-\tau) = h(\tau), \quad 0 \leq h(\tau), \quad h, 1/h \in L^\infty, \tag{5.4}$$

$$\omega(h;\delta)_2 = O(\sqrt{\delta}) \quad (\delta \to +0). \tag{5.5}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (см. [4, формула 11.5])

$$2\Re\{e^{i\tau}\varphi_n'(e^{i\tau})\overline{\varphi_n(e^{i\tau})}\} = n|\varphi_n(e^{i\tau})|^2 + K_{n-1}(\varphi;e^{i\tau},e^{i\tau}). \tag{5.6}$$

В силу четности веса φ коэффициенты многочленов $\varphi_n(z)$ и $\varphi_n'(z)$ являются вещественными числами. Поэтому $\varphi_n(1)$ и $\varphi_n'(1) \in \mathbb{R}$, в силу чего из (5.6) следует, что

$$2\varphi_n'(1)\varphi_n(1) = n[\varphi_n(1)]^2 + K_{n-1}(\varphi;1,1). \tag{5.7}$$

На основании формул Г. Сегё (см. [12, формулы (11.5.2)]) заключаем, что $\varphi_n(1) > 0$, а поскольку правая часть (5.7) положительна, то и $\varphi_n'(1) > 0$. Так как при ограничениях (5.4) и (5.5) для веса (5.1) по теореме 4.1 из [4] выполняется условие (2.15), то справедливы неравенства (2.16), в силу которых правая часть (5.7) по порядку совпадает с $K_{n-1}(\varphi;1,1)$. Поэтому

$$\varphi_n'(1)\varphi_n(1) \asymp K_{n-1}(\varphi;1,1). \tag{5.8}$$

Поскольку порядки величин $\varphi_n'(1)$ и $K_{n-1}(\varphi;1,1)$ такие же, как в случае $h(\tau) \equiv 1$, то в силу (5.8) и (3.1) имеет место порядковое соотношение $\varphi_n(1) \asymp \rho_n(1)$. Далее рассуждаем, как при доказательстве теоремы 3.1.

6. О поведении наибольшего нуля многочлена, ортогонального на отрезке

С помощью установленных выше оценок многочленов, ортогональных на окружности, и их производных доказывается следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть $\{p_n(t)\}_{n=0}^\infty$ — система алгебраических многочленов, ортонормированная на отрезке $[-1,1]$ с весом*

$$p(t) := \frac{H(t)g(\sqrt{1-t})}{(1-t)\sqrt{1+t}}, \tag{6.1}$$

где $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле, для которого $t^{-1}g(t) \in L^1[0,1]$; функция $h(\tau) := H(\cos\tau)$ удовлетворяет условиям любой из теорем 5.1 *и* 5.3. *Обозначим через $\{x_{n,\nu}^{(p)}\}_{\nu=1}^n$ нули многочлена $p_n(t)$ ($x_{n,\nu}^{(p)} = \cos\theta_{n,\nu}^{(p)}$; $0 < \theta_{n,1}^{(p)} < \theta_{n,2}^{(p)} < \ldots < \theta_{n,n}^{(p)} < \pi$). Тогда при $n \to \infty$ справедливы порядковые соотношения*

$$\theta_{n,1}^{(p)} \asymp n^{-1}[g(n^{-1})]^{1/2}[G(n^{-1})]^{-1/2}, \qquad 1 - x_{n,1}^{(p)} \asymp n^{-2}g(n^{-1})/G(n^{-1}), \tag{6.2}$$

где $G(t)$ определяется формулой (3.16).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеет место формула (см. [10])

$$\frac{p_n'(1)}{p_n(1)} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{A_m^{(p)} p_m(1) p_{m+1}(1)} \sum_{\nu=0}^{m} p_\nu^2(1), \tag{6.3}$$

где $A_m^{(p)} := k_m^{(p)}/k_{m+1}^{(p)}$, $k_m^{(p)}$ — коэффициент при t^m многочлена $p_m(t)$. Рассмотрим многочлены $\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, ортонормальные на окружности $|z| = 1$ с весом $\varphi(\tau) = p(\cos\tau)|\sin\tau|$. Для рассматриваемых весов p и φ в силу (3.4) и (3.5) справедливы соотношения

$$\sum_{\nu=0}^{m} p_\nu^2(1) \asymp K_{m-1}(\varphi; 1, 1), \qquad A_m^{(p)} p_m(1) p_{m+1}(1) \asymp \varphi_m^2(1),$$

из которых в силу (5.8) и (6.3) следует, что

$$\frac{p_n'(1)}{p_n(1)} \asymp \sum_{m=1}^{n-1} \frac{\varphi_m'(1)}{\varphi_m(1)} \asymp \sum_{m=1}^{n} m \frac{G(m^{-1})}{g(m^{-1})}. \tag{6.4}$$

Так как $g(t)$ — вогнутый модуль непрерывности, медленно меняющийся в нуле, то последовательность $mG(m^{-1})/g(m^{-1})$ возрастает при достаточно больших m. Поэтому из (6.4) следует, что

$$p_n'(1)/p_n(1) \asymp n^2 G(n^{-1})/g(n^{-1}). \tag{6.5}$$

Наряду с (6.3) имеет место равенство

$$\frac{p_n'(1)}{p_n(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{1 - x_{n,\nu}^{(p)}}. \tag{6.6}$$

Рассматривая многочлены $\{q_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$, ортонормированные на $[-1, 1]$ с весом $q(t) = (1-t^2)p(t)$, замечаем, что нули тригонометрических полиномов $p_n(\cos\tau)$ и $q_{n-1}(\cos\tau)\sin\tau$, а потому и нули многочленов $(1-t^2)q_{n-1}(t)$ и $p_n(t)$ перемежаются (см. [7, теорема 4.1]). По теореме 7.4 из [7] порядок расстояния между любыми соседними нулями функции $q_{n-1}(\cos\tau)$ есть n^{-1}. Поэтому $\theta_{n-1,\nu}^{(q)} \asymp \nu/n$ $(\nu = 1, \ldots, n-1)$, откуда следует, что

$$\theta_{n,\nu}^{(p)} = O(\nu/n) \qquad (\nu = 2, \ldots, n). \tag{6.7}$$

В силу (6.7) $1 - x_{n,\nu}^{(p)} \asymp [\theta_{n,\nu}^{(p)}]^2 = O(n^2/\nu^2)$ $(\nu = 2, \ldots, n)$. Поэтому

$$\sum_{\nu=2}^{n} \frac{1}{1 - x_{n,\nu}^{(p)}} = O(1) \sum_{\nu=2}^{n} \frac{n^2}{\nu^2} = O(n^2). \tag{6.8}$$

Из (6.5), (6.6) и (6.8) вытекают соотношения (6.2).

Заметим, что из (6.2) и (3.21) видно, что в случае веса (6.1) $1 - x_{n,1}^{(p)} = o(n^{-2})$ $(n \to \infty)$. Как известно (подробнее см. в [10]), для веса Якоби $p(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ при фиксированных α и $\beta > -1$ имеет место соотношение $1 - x_{n,1}^{(p)} \asymp n^{-2}$ $(n \to \infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бадков В.М.** Асимптотическое поведение ортогональных многочленов // Мат. сб. 1979. Т. 109(151), № 1. С. 46–51.
2. **Бадков В.М.** Приближение функций в равномерной метрике суммами Фурье по ортогональным полиномам // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 20–62.
3. **Бадков В.М.** Равномерные асимптотические представления ортогональных многочленов // Приближение функций полиномами и сплайнами. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 41–53.

4. **Бадков В.М.** Асимптотические и экстремальные свойства ортогональных полиномов при наличии особенностей у веса // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 41–88.
5. **Бадков В.М.** Асимптотика многочленов второго рода и двусторонние поточечные оценки их производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 1992. Т. 1. С. 41–88.
6. **Бадков В.М.** Поточечные оценки снизу модулей производных многочлена, ортогонального на окружности с весом, имеющим особенности // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 6. С. 3–14.
7. **Бадков В.М.** О нулях ортогональных многочленов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2005. Т. 11, № 2. С. 30–46.
8. **Бадков В.М.** Введение в единую теорию алгебраических и тригонометрических ортогональных полиномов: учеб. пособие. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2006. 132 с.
9. **Бадков В.М.** Об особенностях веса, относительно которого ортогональны многочлены второго рода // Изв. ТулГУ. Тула: Изд-во ТулГУ, 2008. Вып. 1. С. 6–18.
10. **Бадков В.М.** Асимптотика наибольшего нуля многочлена, ортогонального на отрезке с неклассическим весом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 38–42.
11. **Геронимус Я.Л.** Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. М.: Физматгиз, 1958. 240 с.
12. **Сегё Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
13. **Сенета Е.** Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985. 144 с.
14. **Badkov V.M.** Equiconvergence of Fourier sums in orthogonal polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. 1. 2004. P. S101–S127.

Бадков Владимир Михайлович
Поступила 20.02.09
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник, профессор
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Vladimir.Badkov@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 517.5

ТОЧНАЯ КОНСТАНТА В НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА — СТЕЧКИНА В ПРОСТРАНСТВЕ L^2 НА ПЕРИОДЕ[1]

В. С. Балаганский

В пространстве L^2 вещественнозначных измеримых 2π-периодических функций, суммируемых с квадратом на периоде $[0, 2\pi]$, рассматривается неравенство Джексона — Стечкина

$$E_n(f) \le \mathcal{K}_n(\delta, \omega)\, \omega(\delta, f), \qquad f \in L^2,$$

где $E_n(f)$ — величина наилучшего приближения функции f тригонометрическими полиномами порядка не выше n, $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции f в L^2 порядка 1 или 2. Найдена величина

$$\mathcal{K}_n(\delta, \omega) = \sup\left\{ \frac{E_n(f)}{\omega(\delta, f)} :\ f \in L^2 \right\}$$

в точках $\delta = 2\pi/m$ (где $m \in \mathbb{N}$) при $m \ge 3n^2 + 2$ для $\omega = \omega_1$ и при $m \ge 11n^4/3 - 1$ для $\omega = \omega_2$.

Ключевые слова: неравенство Джексона — Стечкина, точная константа.

V.S. Balaganskii. Exact constant in the Jackson–Stechkin inequality in the space L^2 on the period.

In the space L^2 of real-valued measurable 2π-periodic functions that are square summable on the period $[0, 2\pi]$, the Jackson–Stechkin inequality

$$E_n(f) \le \mathcal{K}_n(\delta, \omega)\, \omega(\delta, f), \qquad f \in L^2,$$

is considered, where $E_n(f)$ is the value of the best approximation of the function f by trigonometric polynomials of order at most n and $\omega(\delta, f)$ is the modulus of continuity of the function f in L^2 of order 1 or 2. The value

$$\mathcal{K}_n(\delta, \omega) = \sup\left\{ \frac{E_n(f)}{\omega(\delta, f)} :\ f \in L^2 \right\}$$

is found at the points $\delta = 2\pi/m$ (where $m \in \mathbb{N}$) for $m \ge 3n^2 + 2$ and $\omega = \omega_1$ as well as for $m \ge 11n^4/3 - 1$ and $\omega = \omega_2$.

Keywords: Jackson–Stechkin inequality, exact constant.

1. Введение. Формулировка основного результата

Здесь рассматривается неравенство Джексона — Стечкина в пространстве L^2 вещественнозначных измеримых 2π-периодических функций с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\ dx \right)^{1/2}$$

при приближении тригонометрическими полиномами.

Величиной наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f \in L^2$ подпространством

$$T_n = \left\{ g\colon\ g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

[1]Работа поддержана РФФИ (проект 08-01-00320) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

тригонометрических полиномов порядка n с вещественными коэффициентами называется

$$E_n(f) = \inf\{\|f-g\|\colon\ g\in T_n\}.$$

Напомним, что для $r\in\mathbb{N}$ через $\omega_r(\delta;f)=\sup\{\|\Delta_t^r f\|\colon\ |t|\le\delta\}$ обозначается r-й модуль непрерывности функции $f\in L^2$, где $\Delta_t^r f(x)=\sum_{l=0}^r(-1)^l\binom{r}{l}f(x+lt)$.

Для $f\in L^2$ с рядом Фурье

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

справедливо равенство

$$E_{n-1}^2(f)=\sum_{k=n}^{\infty}(a_k^2+b_k^2).$$

Кроме того, известно (см. [2]), что

$$\omega_r^2(\delta;f)=\sup_{|t|\le\delta}\left\|\Delta_t^r f\right\|^2=\sup_{|t|\le\delta}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\left(2\sin\frac{kt}{2}\right)^{2r}$$

и

$$\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{2r}=\binom{2r}{r}-2\sum_{l=1}^{r}(-1)^{l+1}\binom{2r}{r-l}\cos lt.$$

Наряду с модулем непрерывности $\omega_r(\delta,f)$ при $r=1,2$ здесь будет рассматриваться модуль непрерывности $\omega_{\alpha,\beta}(\delta,f)$, который определяется следующим образом:

$$\omega_{\alpha,\beta}^2(\delta,f)=\sup_{|t|\le\delta}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)(1-\alpha\cos kt-\beta\cos 2kt),\quad \alpha+\beta=1,\quad 1\le\alpha\le\frac{4}{3}.$$

Нетрудно заметить, что $\omega_{1,0}^2(\delta,f)=\omega_1^2(\delta,f)/2$ и $\omega_{4/3,-1/3}^2(\delta,f)=\omega_2^2(\delta,f)/6$.

Нас интересует точная константа $\mathcal{K}=\mathcal{K}_n(\delta,\omega)$ в неравенстве Джексона — Стечкина

$$E_n(f)\le\mathcal{K}_n(\delta,\omega)\,\omega(\delta,f),\qquad f\in L^2, \tag{1.1}$$

т. е. величина

$$\mathcal{K}_n(\delta,\omega)=\sup\left\{\frac{E_n(f)}{\omega(\delta,f)}\colon\ f\in L^2\right\}\qquad\text{при}\qquad \omega=\omega_{\alpha,\beta}\qquad\text{или}\qquad\omega=\omega_r,$$

которую называют *константой Джексона — Стечкина*. Здесь предполагается, что $0/0=0$, $c/0=+\infty$ при $c>0$.

Точные константы в неравенстве Джексона — Стечкина в L^2 рассматривались в [1–10]. Первый точный результат установил Н. И. Черных. Он доказал [1, 2, 4], что при любом $n\in\mathbb{N}$ справедливы соотношения

$$\mathcal{K}_{n-1}(\delta,\omega_1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\text{при}\qquad\delta\ge\frac{\pi}{n};\qquad \mathcal{K}_{n-1}(\delta,\omega_1)>\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\text{при}\qquad 0<\delta<\frac{\pi}{n}; \tag{1.2}$$

$$\mathcal{K}_{n-1}(\delta,\omega_r)=\frac{1}{\sqrt{\binom{2r}{r}}}\qquad\text{при}\qquad n>r\ge 2,\qquad \frac{2\pi}{n}\le\delta<\frac{2\pi}{r}.$$

К настоящему времени известно, что

$$\mathcal{K}_{n-1}(\delta,\omega_r)=\frac{1}{\sqrt{\binom{2r}{r}}}\qquad\text{при}\qquad n\in\mathbb{N},\qquad r>0,\qquad \delta\ge\frac{1.4\pi}{n}; \tag{1.3}$$

соответствующую оценку сверху для $\mathcal{K}_{n-1}(\delta,\omega_r)$ доказал С. Н. Васильев [6], а оценку снизу получили А. И. Козко, А. В. Рождественский [8, 9] и С. Н. Васильев [10].

Приведем результат, полученный в [7], в котором используются обозначения

$$m(1)=3, \qquad m(n)=\frac{3n}{2}+1 \qquad \text{при} \qquad n\ge 2; \qquad \varkappa_1(\tau)=\frac{1}{2}+\frac{\cos\dfrac{\tau}{2}-\dfrac{1}{2}}{\tau\sin\dfrac{\tau}{2}}.$$

Теорема A. *Справедливы следующие утверждения*:

(1) *при* $\tau=\pi/m$, $m\ge m(n)$, $m\in\mathbb{N}$, *имеет место равенство* $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau/n,\omega_1)=\varkappa_1(\tau)$, *причем найдется функция* $f=f_{m,n}\not\equiv\mathrm{const}$ *из* L^2, *на которой неравенство* (1.1) *при* $\delta=\tau/n$ *обращается в равенство*;

(2) *если натуральные числа* m,n *удовлетворяют условию* $m<m(n)$, *то выполняется строгое неравенство* $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau/n,\omega_1)>\varkappa_1(\tau)$, *где* $\tau=\pi/m$.

В настоящей работе, развивая методы статьи [7], мы усилим результат теоремы A (следствие 1) и получим аналогичный результат для модуля непрерывности второго порядка (следствие 3). Для формулировки основного результата нам потребуются следующие обозначения:

$$\psi(n,m)=n(1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau)\Big[\alpha\left(\sin\tau+\sin\frac{\tau}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\left(\sin 2\tau-\sin\tau\right)\Big]$$
$$-(m+1)(1-\alpha\cos\tau-\beta\cos 2\tau)\Big[\alpha\left(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\left(\sin 2n\tau-\sin n\tau\right)\Big], \tag{1.4}$$

$$\varkappa(\tau)=1+\frac{2}{n\tau}\;\frac{\alpha\left(2\cos\dfrac{n\tau}{2}-1\right)+\beta\cos\dfrac{3n\tau}{2}}{\sin\dfrac{n\tau}{2}\left(\alpha+4\beta\cos^2\dfrac{n\tau}{2}\right)}, \qquad \text{где}\ \ \tau=\frac{2\pi}{m}.$$

Теорема 1. *Пусть* $m,k,n\in\mathbb{N}$, $m>2n$, $\tau=2\pi/m$, $\alpha+\beta=1$, $1\le\alpha\le 4/3$ *и выполняется неравенство* $\alpha\big[\sin n\tau-\sin(n\tau/2)\big]\ge -2\beta(\sin 2n\tau-\sin n\tau)$. *Тогда справедливы утверждения*

(1) *при* $\psi(n,m)\le 0$ *имеет место равенство* $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau,\omega_{\alpha,\beta})=\varkappa(\tau)$, *при этом найдется функция* $f=f_{m,n}\not\equiv\mathrm{const}$, $f\in L^2$, *на которой неравенство* (1.1) *при* $\delta=2\pi/m$ *обращается в равенство*;

(2) *при* $\psi(n,m)>0$ *выполняется строгое неравенство* $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau,\omega_{\alpha,\beta})>\varkappa(\tau)$.

2. Основная лемма

Пусть $1=\alpha+\beta$, $1\le\alpha\le 4/3$, $m,n\in\mathbb{N}$, $k\in\mathbb{Z}_+$, $\mu\in\mathbb{R}$, $\tau=2\pi/m$.

Введем величины

$$\left.\begin{aligned} P_0^{(1)}&=\frac{2}{n\tau}\Big[\alpha\left(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\right)+\frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)\Big],\\ P_k^{(1)}&=\frac{4n}{\tau}\left[\frac{\alpha\Big(\sin n\tau-(-1)^k\sin\dfrac{n\tau}{2}\Big)}{(mk)^2-n^2}+\frac{2\beta(\sin 2n\tau-(-1)^k\sin n\tau)}{(mk)^2-4n^2}\right]\end{aligned}\right\}, \tag{k.1}$$

$$\left.\begin{aligned}
P_0^{(2)} &= \frac{2}{n\tau}\Big[\alpha\Big(\sin n\tau - \sin\frac{n\tau}{2}\Big) + \frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau - \sin n\tau)\Big] \\
&\quad + \frac{2\mu}{(m+1)\tau}\Big[\alpha\Big(\sin\tau + \sin\frac{\tau}{2}\Big) + \frac{\beta}{2}(\sin 2\tau - \sin\tau)\Big], \\
P_k^{(2)} &= \frac{4n}{\tau}\left[\frac{\alpha\Big(\sin n\tau - (-1)^k\sin\dfrac{n\tau}{2}\Big)}{(mk)^2 - n^2} + \frac{2\beta(\sin 2n\tau - (-1)^k\sin n\tau)}{(mk)^2 - 4n^2}\right] \\
&\quad + \frac{4\mu(m+1)}{\tau}\left[\frac{\alpha\Big(\sin\tau + (-1)^k\sin\dfrac{\tau}{2}\Big)}{(mk)^2 - (m+1)^2} + \frac{2\beta(\sin 2\tau - (-1)^k\sin\tau)}{(mk)^2 - 4(m+1)^2}\right]
\end{aligned}\right\}. \qquad (k.2)$$

Ясно, что

$$P_\ell^{(1)} = P_\ell^{(1)}(\alpha, m, n), \quad P_\ell^{(2)} = P_\ell^{(2)}(\alpha, \mu, m, n).$$

При $m, k, j \in \mathbb{N}$, $i = 1$ или 2 определим величины $C_k^{(i)}$ рекуррентным способом

$$P_{2j-1}^{(i)} = \alpha C_{2j-1}^{(i)}, \qquad P_{2^k(2j-1)}^{(i)} = \alpha C_{2^k(2j-1)}^{(i)} + \beta C_{2^{k-1}(2j-1)}^{(i)}.$$

Ключевую роль при доказательстве основного результата — теоремы 1 играет следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $m, k, n \in \mathbb{N}$, $m > 2n$, $\tau = 2\pi/m$, $\alpha + \beta = 1$, $1 < \alpha \le 4/3$ *и выполняется неравенство*

$$\alpha\Big(\sin n\tau - \sin\frac{n\tau}{2}\Big) \ge -2\beta(\sin 2n\tau - \sin n\tau). \qquad (2.1)$$

Тогда, во-первых, справедливы следующие утверждения:

(a) $P_k^{(1)} > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$,

(b) $C_k^{(1)} > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$,

(c) *имеет место тождество*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(1)} \cos mkx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}\big(\alpha\cos mkx + \beta\cos 2mkx\big), \qquad x \in \mathbb{R};$$

во-вторых, существует положительное число $\mu_0 := \mu_0(\alpha, m, n) > 0$ *такое, что при любом* $\mu \in (0, \mu_0]$ *справедливы утверждения*:

(d) $P_k^{(2)} > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$,

(e) $C_k^{(2)} > 0$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$,

(f) *имеет место тождество*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(2)} \cos mkx = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)}\big(\alpha\cos mkx + \beta\cos 2mkx\big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения (a) рассмотрим сначала случай $m \ge 3n$. Легко убедиться, что $P_k^{(1)} > 0$ при $m = 3n$. Считаем далее, что $m - 3n > 0$. Тогда $\sin n\tau - (-1)^k \sin(n\tau/2) > 0$.

Если $\sin 2n\tau - (-1)^k \sin n\tau \le 0$, то в силу неравенств $\beta < 0$ и $\alpha > 1$ имеем $P_k^{(1)} > 0$.

Рассмотрим случай $\sin 2n\tau - (-1)^k \sin n\tau > 0$. Докажем сначала неравенство $P_k^{(1)} > 0$ для четных k. Так как $\dfrac{\alpha}{|\beta|} = \dfrac{1}{|\beta|} - 1$ и функция $\dfrac{(mk)^2 - n^2}{(mk)^2 - 4n^2} > 0$ убывает при возрастании k, то неравенство $P_{2k}^{(1)} > 0$ достаточно доказать при $\beta = -1/3$, $k = 1$.

В этом случае требуемое неравенство эквивалентно следующему:

$$2(4m^2-4n^2)\Big(\sin\frac{2n\pi}{m}-\sin\frac{n\pi}{m}\Big)\ge(4m^2-n^2)\Big(\sin\frac{4n\pi}{m}-\sin\frac{2n\pi}{m}\Big). \tag{2.2}$$

После замены $x=n/m$ для доказательства (2.2) достаточно показать, что

$$2(4-4x^2)\,(\sin 2\pi x-\sin\pi x)\ge(4-x^2)\,(\sin 4\pi x-\sin 2\pi x)\ \text{ при } 0<x\le\frac{1}{3},\ \sin 4\pi x-\sin 2\pi x>0.$$

Действительно, при указанных ограничениях на x имеем

$$\frac{8-8x^2}{4-x^2}=2\Big(1-\frac{3x^2}{4-x^2}\Big)\ge 2\Big(1-\frac{27x^2}{35}\Big),$$

$$\frac{\sin 4\pi x-\sin 2\pi x}{\sin 2\pi x-\sin\pi x}=\frac{2\sin\pi x\cos 3\pi x}{2\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}}=\frac{2\cos\frac{\pi x}{2}\cos 3\pi x}{\cos\frac{3\pi x}{2}}\le 2\cos\frac{\pi x}{2}.$$

Кроме того, при $0<x\le 1/3$ выполняются неравенства

$$\frac{4-4x^2}{4-x^2}\ge 1-\frac{27x^2}{35}\ge 1-\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)^2+\frac{1}{4!}\Big(\frac{\pi x}{2}\Big)^4\ge\cos\frac{\pi x}{2}>\frac{\sin 4\pi x-\sin 2\pi x}{2(\sin 2\pi x-\sin\pi x)},$$

следовательно, справедливо неравенство (2.2) и $P_{2k}^{(1)}>0$.

Теперь докажем, что $P_k^{(1)}>0$ для нечетных k. По аналогии с предыдущим случаем достаточно установить, что $P_{2k-1}^{(1)}>0$ при $\beta=-1/3$, $k=1$. В этом случае неравенство $P_{2k-1}^{(1)}>0$ эквивалентно следующему неравенству:

$$(2m^2-8n^2)\Big(\sin\frac{2n\pi}{m}+\sin\frac{n\pi}{m}\Big)>(m^2-n^2)\Big(\sin\frac{4n\pi}{m}+\sin\frac{2n\pi}{m}\Big), \tag{2.3}$$

которое доказывается аналогично тому, как было доказано неравенство (2.2).

Рассмотрим случай $m<3n$. Пусть сначала k — четное. Нам надо доказать неравенство

$$\frac{\alpha\Big(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\Big)}{4(ml)^2-n^2}>\frac{2\beta(\sin 2n\tau-\sin n\tau)}{4(ml)^2-4n^2}. \tag{2.4}$$

Имеем $m>2n$, $-2\beta(\sin n\tau-\sin 2n\tau)\ge\alpha\Big(\sin\frac{n\tau}{2}-\sin n\tau\Big)>0$, $\frac{4(ml)^2-4n^2}{4(ml)^2-n^2}<1$, следовательно, (2.4) справедливо при любом l.

Рассмотрим случай нечетных k. Нам надо установить неравенство

$$\frac{\alpha\Big(\sin\frac{n\tau}{2}+\sin n\tau\Big)}{m^2(2l-1)^2-n^2}+\frac{2\beta(\sin n\tau+\sin 2n\tau)}{m^2(2l-1)^2-4n^2}>0. \tag{2.5}$$

Поскольку

$$\alpha>1,\qquad\beta<0,\qquad m^2(2l-1)^2-n^2>0,\qquad m^2(2l-1)^2-4n^2>0,\qquad m>2n,$$

$$\sin\frac{n\tau}{2}+\sin n\tau>0,\qquad\sin n\tau+\sin 2n\tau=\sin n\tau(2\cos n\tau+1)<0,$$

то отсюда следует неравенство (2.5).

Доказательство утверждения (d). Найдется номер k_0 такой, что при $k\ge k_0$ справедливы следующие неравенства:

$$(mk)^2-4(m+1)^2>0,\qquad\frac{(mk)^2-4(m+1)^2}{(mk)^2-(m+1)^2}>\frac{3}{4}.$$

Поэтому для четных $k \geq k_0$ выполняются соотношения

$$\frac{\alpha\Big(\sin\tau + (-1)^k \sin\dfrac{\tau}{2}\Big)}{(mk)^2 - (m+1)^2} + \frac{2\beta(\sin 2\tau - (-1)^k \sin\tau)}{(mk)^2 - 4(m+1)^2} = \frac{\alpha\Big(\sin\tau + \sin\dfrac{\tau}{2}\Big)}{(mk)^2 - (m+1)^2} + \frac{2\beta(\sin 2\tau - \sin\tau)}{(mk)^2 - 4(m+1)^2}$$

$$\geq \frac{\alpha\sin\tau}{(mk)^2 - (m+1)^2} + \frac{2\beta\sin\tau}{(mk)^2 - 4(m+1)^2} > 0.$$

Из неравенства $P_k^{(1)} > 0$ следует справедливость утверждения пункта (d) при любом $0 < \mu \leq 1$ и любом четном $k \geq k_0$.

Рассмотрим нечетные $k \geq k_0$. Имеем

$$\alpha\left(\sin n\tau + \sin\frac{n\tau}{2}\right) + 2\beta(\sin 2n\tau + \sin n\tau) > \alpha\left(\sin n\tau - \sin\frac{n\tau}{2}\right) + 2\beta(\sin 2n\tau - \sin n\tau) \geq 0,$$

следовательно, найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha\left(\sin n\tau + \sin\dfrac{n\tau}{2}\right) + 2\beta(\sin 2n\tau + \sin n\tau) \geq \varepsilon > 0$. Для нечетных $k \geq k_0$ имеют место неравенства

$$\frac{\alpha\Big(\sin n\tau + \sin\dfrac{n\tau}{2}\Big)}{(mk)^2 - n^2} + \frac{2\beta(\sin 2n\tau + \sin n\tau)}{(mk)^2 - 4n^2} = \frac{\alpha\Big(\sin n\tau + \sin\dfrac{n\tau}{2}\Big)}{(mk)^2 - n^2} + \frac{2\beta(\sin 2n\tau + \sin n\tau)}{(mk)^2 - n^2}$$

$$+ \frac{2\beta(\sin 2n\tau + \sin n\tau)}{(mk)^2 - 4n^2} - \frac{2\beta(\sin 2n\tau + \sin n\tau)}{(mk)^2 - n^2} \geq \frac{\varepsilon}{(mk)^2 - n^2} + \frac{6\beta n^2(|\sin 2n\tau| + |\sin n\tau|)}{((mk)^2 - n^2)((mk)^2 - 4n^2)},$$

$$\left|\frac{\alpha\Big[\sin\tau + (-1)^k \sin\dfrac{\tau}{2}\Big]}{(mk)^2 - (m+1)^2} + \frac{2\beta(\sin 2\tau - (-1)^k \sin\tau)}{(mk)^2 - 4(m+1)^2}\right|$$

$$\leq \frac{\alpha\Big(\sin\tau + \sin\dfrac{\tau}{2}\Big)}{(mk)^2 - 4(m+1)^2} + \frac{2|\beta|(\sin 2\tau + \sin\tau)}{(mk)^2 - 4(m+1)^2} \leq \frac{8\alpha\sin\tau}{(mk)^2 - 4(m+1)^2}.$$

Из последних соотношений следует, что найдется число $k_1 \geq k_0$ такое, что $P_k^{(2)} > 0$ для любого числа $0 < \mu \leq 1$ при всех нечетных номерах $k \geq k_1$.

Итак, мы доказали, что $P_k^{(2)} > 0$ для любого числа $0 < \mu \leq 1$ при всех номерах $k \geq k_1$; в силу пункта (a) величина $P_k^{(1)} > 0$ для всех номеров $k \in \mathbb{N}$, поэтому мы можем выбрать достаточно малое число $\mu_0 > 0$ такое, что $P_k^{(2)} > 0$ при всех номерах $k \leq k_1$, следовательно, утверждение пункта (d) доказано.

Докажем утверждения (b) и (e). Пусть $i = 1$ или 2. Имеем $C_{2k-1}^{(i)} = P_{2k-1}^{(i)} > 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Любое четное натуральное число можно записать в виде $2^\nu(2k-1)$, где $\nu, k \in \mathbb{N}$. Ясно, что

$$0 < P_{2(2k-1)}^{(i)} = \alpha C_{2(2k-1)}^{(i)} + \beta C_{2k-1}^{(i)}, \qquad 0 < P_{2^2(2k-1)}^{(i)} = \alpha C_{2^2(2k-1)}^{(i)} + \beta C_{2(2k-1)}^{(i)}, \ldots,$$

$$0 < P_{2^\nu(2k-1)}^{(i)} = \alpha C_{2^\nu(2k-1)}^{(i)} + \beta C_{2^{\nu-1}(2k-1)}^{(i)}.$$

В силу неравенств $C_{2k-1}^{(i)} > 0$ и $\beta/\alpha \leq 0$ имеем $C_{2(2k-1)}^{(i)} > 0$, $C_{4(2k-1)}^{(i)} > 0, \ldots, C_{2^\nu(2k-1)}^{(i)} > 0$. В результате получается, что $C_k^{(i)} > 0$ для любого номера k.

Перейдем к доказательству утверждений (c) и (f). Пусть $i = 1$ или 2. Сначала докажем, что $\sum_{k=1}^\infty P_k^{(i)} = \sum_{k=1}^\infty C_k^{(i)}$. По доказанному, все $P_k^{(i)}$ и $C_k^{(i)}$ неотрицательны. Поскольку $P_k^{(i)}$ ведет себя, как $1/k^2$, то $\sum_{k=1}^\infty P_k^{(i)} < \infty$, т. е. ряд $\sum_{k=1}^\infty P_k^{(i)}$ абсолютно сходится. По теореме 1 из [11, гл. 11, § 5] выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^\infty P_k^{(i)} = \sum_{j=1}^\infty P_{2j-1}^{(i)} + \sum_{j=1}^\infty \sum_{l=1}^\infty P_{(2j-1)2^l}^{(i)},$$

поэтому достаточно доказать, что

$$P^{(i)}_{2j-1}+\sum_{l=1}^{\infty}P^{(i)}_{(2j-1)2^l}=C^{(i)}_{2j-1}+\sum_{l=1}^{\infty}C^{(i)}_{(2j-1)2^l}\quad \text{для каждого}\quad j\in\mathbb{N}.$$

Имеем

$$P^{(i)}_{2j-1}+\sum_{l=1}^{\infty}P^{(i)}_{(2j-1)2^l}=\alpha C^{(i)}_{2j-1}+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\alpha C^{(i)}_{2^l(2j-1)}+\beta C^{(i)}_{2^{l-1}(2j-1)}\Big)$$

$$=\alpha C^{(i)}_{2j-1}+\alpha\sum_{l=1}^{\infty}C^{(i)}_{2^l(2j-1)}+\beta C^{(i)}_{2j-1}+\beta\sum_{l=1}^{\infty}C^{(i)}_{2^l(2j-1)}=C^{(i)}_{2j-1}+\sum_{l=1}^{\infty}C^{(i)}_{(2j-1)2^l}.$$

Таким образом, $\sum_{k=1}^{\infty}P^{(i)}_k=\sum_{k=1}^{\infty}C^{(i)}_k$.

Зафиксируем произвольное число $x\in[0,2\pi]$. Так как сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty}P^{(i)}_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}C^{(i)}_k$, то сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\big|P^{(i)}_k\cos mkx\big|,\qquad \sum_{k=1}^{\infty}\big|C^{(i)}_k(\alpha\cos mkx+\beta\cos 2mkx)\big|,$$

и по теореме из [11, гл. 11, § 3] при фиксированном $x\in[0,2\pi]$ ряды $\sum_{k=1}^{\infty}P^{(i)}_k\cos mkx$, $\sum_{k=1}^{\infty}C^{(i)}_k(\alpha\cos mkx+\beta\cos 2mkx)$ абсолютно сходятся.

Теперь, как и выше, нам достаточно доказать равенство

$$I_1:=P^{(i)}_{2j-1}\cos m(2j-1)x+\sum_{l=1}^{\infty}P^{(i)}_{(2j-1)2^l}\cos m(2j-1)2^lx$$

$$=C^{(i)}_{2j-1}\big(\alpha\cos m(2j-1)x+\beta\cos 2m(2j-1)x\big)$$

$$+\sum_{l=1}^{\infty}C^{(i)}_{(2j-1)2^l}\big(\alpha\cos m(2j-1)2^lx+\beta\cos 2m(2j-1)2^lx\big)=:I_2.$$

Имеем

$$I_1=\alpha C^{(i)}_{2j-1}\cos m(2j-1)x+\sum_{l=1}^{\infty}\Big(\alpha C^{(i)}_{2^l(2j-1)}+\beta C^{(i)}_{2^{l-1}(2j-1)}\Big)\cos m(2j-1)2^lx=I_2.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\;P^{(i)}_k\cos mkx=\sum_{k=1}^{\infty}C^{(i)}_k(\alpha\cos mkx+\beta\cos 2mkx).$$

Лемма 1 доказана. □

З а м е ч а н и е 1. При $1\le\alpha\le 4/3$, $m\ge 3n$ справедливо неравенство (2.1).

Действительно, $\sin n\tau-\sin(n\tau/2)\ge 0$, следовательно, осталось рассмотреть случай, когда одновременно выполняются два условия: $1<\alpha$ и $\sin 2n\tau-\sin n\tau>0$. Тогда $n\tau<\pi/3$. Для справедливости неравенства (2.1) достаточно доказать неравенство

$$2\Big(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\Big)\ge\cos\frac{n\tau}{2}(2\cos n\tau-1).$$

Имеем $2\Big(2\cos\dfrac{n\tau}{2}-1\Big)\ge 2(\sqrt{3}-1)\ge 1\ge\cos\dfrac{n\tau}{2}(2\cos n\tau-1)$. □

З а м е ч а н и е 2. Для любого $1<\alpha\le 4/3$ найдется пара натуральных чисел n и m таких, что $m<3n$, и справедливо неравенство (2.1).

Действительно, $\alpha\Big(\sin\dfrac{2\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{3}\Big)=0>-2\beta\Big(\sin\dfrac{4\pi}{3}-\sin\dfrac{2\pi}{3}\Big)$, следовательно, существует число $x_0<2\pi/3$ такое, что для любого x из интервала $(x_0,2\pi/3)$ справедливо неравенство $\alpha\Big(\sin x-\sin\dfrac{x}{2}\Big)>-2\beta\,(\sin 2x-\sin x)$. В интервале $(x_0,2\pi/3)$ найдется число вида $\dfrac{2k\pi}{3l}$, где k,l — натуральные числа. Для $m=k<3l=3n$ справедливо неравенство (2.1), и утверждение доказано. □

Нам потребуется аналог части леммы В. В. Арестова, модифицированный для модуля непрерывности $\omega_{\alpha,\beta}$, доказательство этого факта нетрудно извлечь из доказательства леммы 1.5 [7].

Лемма A. *Для любых* $\delta>0,\ \ \alpha+\beta=1,\ \ 1\le\alpha\le 4/3$ *и* $n\in\mathbb{N}$ *верно равенство*

$$\mathcal{K}^2_{n-1}(\delta,\omega_{\alpha,\beta})=\frac{1}{\inf\{\|g\|_{C[0,\delta]}\colon\ g\in W_\alpha\}},$$

где

$$W_\alpha=\Big\{g(t)=\sum_{k=n}^{\infty}\rho_k(1-\alpha\cos kt-\beta\cos 2kt)\colon\rho_k\ge 0,\ \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k=1\Big\}.$$

3. Доказательство основного результата

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения (1) теоремы 1.

Сначала покажем, что при любых натуральных m,n в точке $\tau=2\pi/m$ имеет место оценка $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau,\omega_{\alpha,\beta})\ge\varkappa(\tau)$. По условию $m>2$. Определим τ-периодическую четную относительно точки $\tau/2$ функцию φ, положив $\varphi(x)=\alpha\cos nx+\beta\cos 2nx$ при $\tau/2\le x\le\tau$. Очевидно, что $\varphi(x)=\alpha\cos n(\tau-x)+\beta\cos n(2\tau-2x)$ при $0\le x\le\tau/2$. Разложение функции φ в ряд Фурье имеет вид

$$\varphi(x)=P_0^{(1)}-\sum_{k=1}^{\infty}\ P_k^{(1)}\cos mkx,\qquad\text{где}\quad P_k^{(1)}\quad\text{определены в }\ (k.1).\tag{3.1}$$

Определим рекуррентным способом числа $C_k^{(1)}$. Пусть $k,j\in\mathbb{N}$,

$$P^{(1)}_{2j-1}=\alpha C^{(1)}_{2j-1},\qquad P^{(1)}_{2^k(2j-1)}=\alpha C^{(1)}_{2^k(2j-1)}+\beta C^{(1)}_{2^{k-1}(2j-1)}.$$

Тогда по лемме 1 можем записать (3.1) в виде

$$\varphi(x)=P_0^{(1)}-\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{(1)}(\alpha\cos mkx+\beta\cos 2mkx).$$

Легко заметить, что при $\alpha=1$ справедливы соотношения $C_k^{(1)}=P_k^{(1)}\ge 0$. При $\alpha>1$ по лемме 1 выполняется неравенство $C_k^{(1)}>0$ при любом номере k. Имеем $\varphi(0)=P_0^{(1)}-\sum_{k=1}^{\infty}C_k^{(1)}$, следовательно,

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}\ C_k^{(1)}=1+P_0^{(1)}-\varphi(0)=1+P_0^{(1)}-\varphi(\tau)$$

$$=1+\frac{2}{n\tau}\Big[\alpha\Big(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\Big)+\frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)\Big]-(\alpha\cos n\tau+\beta\cos 2n\tau).$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=f_{m,n}(x)=\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{C_k^{(1)}}\cos mkx,$$

тогда

$$\xi(h) := \|\Delta_h f\|_2^2 = (1-\alpha\cos nh - \beta\cos 2nh) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}(1-\alpha\cos mkh - \beta\cos 2mkh)$$

$$= \Big(1+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}\Big) - (\alpha\cos nh + \beta\cos 2nh) + \varphi(h) - P_0^{(1)}.$$

Докажем, что при $t\in[0,\tau/2]$ функция $\xi(t)$ монотонно не убывает.

При $t\in[0,\tau/2]$ справедливо равенство $\varphi(t) = \alpha\cos n(\tau-t) + \beta\cos n(2\tau-2t)$, следовательно,

$$\xi(t) = \Big(1+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}\Big) - P_0^{(1)} + 2\alpha\sin\frac{n\tau}{2}\sin\frac{2nt-n\tau}{2} + 2\beta\sin n\tau\sin(2nt-n\tau).$$

Докажем, что существует некоторое число $c>0$ такое, что при $t\in[0,\tau/2]$ справедливо неравенство $\xi'(t)\ge c$.

Имеем

$$\cos\frac{2nt-n\tau}{2} \ge \cos\frac{n\tau}{2} > 0, \qquad \cos\frac{n\tau}{2} < 1, \qquad \sin n\tau \ge \sin\frac{n\tau}{2} > 0,$$

$$\xi'(t) = 2\alpha n\sin\frac{n\tau}{2}\cos\frac{2nt-n\tau}{2} + 4\beta n\sin n\tau\cos(2nt-n\tau).$$

Если $\cos(2nt-n\tau)\le 0$, то $\xi'(t)\ge 2\alpha n\sin\frac{n\tau}{2}\cos\frac{n\tau}{2} > 0$.

Если $\cos(2nt-n\tau)>0$, то $2nt-n\tau > -\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{2nt-n\tau}{2} \ge \cos(2nt-n\tau) > 0$ и

$$\xi'(t) \ge 2\alpha n\sin\frac{n\tau}{2}\cos\frac{2nt-n\tau}{2} + 4\beta n\sin n\tau\cos\frac{2nt-n\tau}{2}$$

$$\ge 2n\cos\frac{n\tau}{2}\Big(\alpha\sin\frac{n\tau}{2} + 2\beta\sin n\tau\Big) \ge n\sin n\tau\Big(\alpha + 4\beta\cos\frac{n\tau}{2}\Big) > 0.$$

Следовательно,

$$\xi'(t) \ge c := \min\Big\{2\alpha n\sin\frac{n\tau}{2}\cos\frac{n\tau}{2},\ n\sin n\tau\Big(\alpha+4\beta\cos\frac{n\tau}{2}\Big)\Big\} > 0.$$

Получили, что при $t\in[0,\tau/2]$ функция ξ монотонно не убывает, и при $t\in[0,\tau/2]$ справедливо неравенство $\xi(t)\le\xi(\tau/2)$.

При $t\in[\tau/2,\tau]$ имеем

$$\xi(t) = \Big(1+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}\Big) - (\alpha\cos nt + \beta\cos 2nt) + \varphi(t) - P_0^{(1)}$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} - P_0^{(1)} \equiv 1 - \alpha\cos n\tau - \beta\cos 2n\tau.$$

Итак, функция

$$\widetilde{\xi}(t) := \frac{\xi(t)}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}} = \frac{(1-\alpha\cos nt - \beta\cos 2nt) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}(1-\alpha\cos mkt - \beta\cos 2mkt)}{1+\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)}} \tag{3.2}$$

принадлежит классу W_α, монотонно не убывает на $[0,\tau]$ и постоянна на $[\tau/2,\tau]$. Имеем

$$1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau = 2\sin^2\frac{n\tau}{2}\Big(\alpha+4\beta\cos^2\frac{n\tau}{2}\Big),$$

$$\alpha\Big(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\Big)+\frac{\beta}{2}\Big(\sin 2n\tau-\sin n\tau\Big)=\alpha\sin\frac{n\tau}{2}\Big(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\Big)+\beta\sin\frac{n\tau}{2}\cos\frac{3n\tau}{2},$$

$$\|\widetilde{\xi}\|_{C[0,\tau]}=\widetilde{\xi}(\tau)=\frac{1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau}{1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau+\dfrac{2\alpha}{n\tau}\Big(\sin n\tau-\sin\dfrac{n\tau}{2}\Big)+\dfrac{\beta}{n\tau}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)},$$

и по лемме А верна оценка

$$\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau,\omega_{\alpha,\beta})\geq\varkappa(\tau).$$

Докажем, что

$$\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau,\omega_{\alpha,\beta})\leq\varkappa(\tau).$$

Обозначим

$$A=\frac{n(1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau)}{\alpha\Big(\sin n\tau-\sin\dfrac{n\tau}{2}\Big)+\dfrac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)}.$$

Покажем, что $A>0$. По условию

$$0\geq\psi(n,m)=n(1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau)\Big[\alpha\Big(\sin\tau+\sin\frac{\tau}{2}\Big)+\frac{\beta}{2}(\sin 2\tau-\sin\tau)\Big]$$

$$-(m+1)(1-\alpha\cos\tau-\beta\cos 2\tau)\Big[\alpha\Big(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\Big)+\frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)\Big].$$

Имеем

$$1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau>0,\qquad 1-\alpha\cos\tau-\beta\cos 2\tau>0,$$

$$\alpha\Big(\sin\tau+\sin\frac{\tau}{2}\Big)+\frac{\beta}{2}(\sin 2\tau-\sin\tau)\geq\alpha\sin\tau+\beta\sin\tau=\sin\tau>0,$$

следовательно, $\alpha\Big(\sin n\tau-\sin\dfrac{n\tau}{2}\Big)+\dfrac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)>0$ и $A>0$.

Возьмем $\mu\in C^*[0,2\pi]$ вида

$$\mu(f)=f(\tau)+A\int_{\tau/2}^{\tau}f(t)\,dt\quad\text{для}\quad f\in C[0,2\pi].$$

Пусть

$$W:=\{1-\alpha\cos kt-\beta\cos 2kt,\ k\geq n\},\quad \mu_k:=\mu(1-\alpha\cos kt-\beta\cos 2kt),\quad \gamma:=\inf\{\mu_k\colon\ k\geq n\}.$$

Имеем

$$\mu_k=(1-\alpha\cos k\tau-\beta\cos 2k\tau)+A\int_{\tau/2}^{\tau}(1-\alpha\cos kt-\beta\cos 2kt)\,dt$$

$$=(1-\alpha\cos k\tau-\beta\cos 2k\tau)+A\Bigg(\frac{\tau}{2}-\alpha\frac{\sin k\tau-\sin\dfrac{k\tau}{2}}{k}-\beta\frac{\sin 2k\tau-\sin k\tau}{2k}\Bigg)$$

$$=(1-\alpha\cos k\tau-\beta\cos 2k\tau)$$

$$+\frac{n(1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau)\Bigg(\dfrac{\tau}{2}-\alpha\dfrac{\sin k\tau-\sin\dfrac{k\tau}{2}}{k}-\dfrac{\beta}{2}\ \dfrac{\sin 2k\tau-\sin k\tau}{k}\Bigg)}{\alpha\Big(\sin n\tau-\sin\dfrac{n\tau}{2}\Big)+\dfrac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)},$$

тогда

$$\gamma \le \mu_n = (1-\alpha\cos n\tau - \beta\cos 2n\tau)$$
$$+\frac{n(1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau)\left(\dfrac{\tau}{2}-\alpha\dfrac{\sin n\tau-\sin\dfrac{n\tau}{2}}{n}-\dfrac{\beta}{2}\dfrac{\sin 2n\tau-\sin\tau}{n}\right)}{\alpha\left(\sin n\tau-\sin\dfrac{n\tau}{2}\right)+\dfrac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)}=\frac{A\tau}{2}.$$

Итак, $\gamma\le A\tau/2$. Покажем, что $\gamma=A\tau/2$. Для этого достаточно доказать, что при $k\ge n$ имеет место неравенство

$$\alpha\cos k\tau+\beta\cos 2k\tau+A\left(\alpha\frac{\sin k\tau-\sin\dfrac{k\tau}{2}}{k}+\frac{\beta}{2}\,\frac{\sin 2k\tau-\sin k\tau}{k}\right)\le 1. \tag{3.3}$$

Левую часть неравенства (3.3) обозначим через $g(k\tau)=g(u)$, где $u=k\tau$. Введем обозначения

$$G:=\bigl\{u=k\tau\colon\ k\in\mathbb{N},\ k\ge n\bigr\},$$

$$G_+:=\left\{u\in G\colon\ \alpha\left(\sin u-\sin\frac{u}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\Bigl(\sin 2u-\sin u\Bigr)>0\right\},$$

$$G_-:=\left\{u\in G\colon\ \alpha\left(\sin u-\sin\frac{u}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\Bigl(\sin 2u-\sin u\Bigr)\le 0\right\},$$

$$D:=\sup\{g(u)\colon\ u\in G\},\qquad Q(u):=\frac{u\bigl(g(u)-1\bigr)}{\left(\alpha+4\beta\cos^2\dfrac{u}{2}\right)\sin\dfrac{u}{2}}.$$

Имеем $g(n\tau)=1$, следовательно, $D\ge 1$. Докажем, что $D=1$, для этого покажем, что $g(u)\le 1$ для любого $u\in[n\tau,\infty)$.

В силу неравенства $A>0$ для всех точек $u\in G_-$ имеет место $g(u)\le 1$. Действительно, $\alpha+\beta=1$, $\beta\ge -1/3$, тогда

$$g(u)-1\le\alpha\cos u+\beta\cos 2u-1=-2\sin^2\frac{u}{2}\left(\alpha+4\beta\cos^2\frac{u}{2}\right)\le 0.$$

Осталось доказать неравенство в точках $u\in G_+$. Функции $\cos u$, $\cos 2u$, $\sin(u/2)$, $\sin u$, $\sin 2u$ являются 4π-периодическими, поэтому $g(u+4\pi)\le g(u)$ для $u\in G_+$. Следовательно, достаточно доказать, что $g(u)\le 1$ для $u\in[n\tau,n\tau+4\pi]\cap G_+$.

В силу тождеств

$$\alpha\cos u+\beta\cos 2u-1=-2\sin^2\frac{u}{2}\left(\alpha+4\beta\cos^2\frac{u}{2}\right)$$

и

$$\alpha\left(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\right)+\frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)=\alpha\sin\frac{n\tau}{2}\left(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\right)+\beta\sin\frac{n\tau}{2}\cos\frac{3n\tau}{2}$$

получаем, что

$$Q(u)=\frac{A\tau\left[\alpha\left(2\cos\dfrac{u}{2}-1\right)+\beta\cos\dfrac{u}{2}(2\cos u-1)\right]}{\alpha+4\beta\cos^2\dfrac{u}{2}}-2u\sin\frac{u}{2}.$$

Имеем

$$\frac{dQ(u)}{du}=A\tau\sin\frac{u}{2}\,\frac{\alpha\left(-\alpha+\dfrac{3}{2}\beta\right)-4\beta\cos\dfrac{u}{2}-(6\beta^2+2\alpha\beta)\cos^2\dfrac{u}{2}-8\beta^2\cos^4\dfrac{u}{2}}{\left(\alpha+4\beta\cos^2\dfrac{u}{2}\right)^2}-2\sin\frac{u}{2}-u\cos\frac{u}{2},$$

$$\alpha\Big(-\alpha+\frac{3}{2}\beta\Big)-4\beta\cos\frac{u}{2}-(6\beta^2+2\alpha\beta)\cos^2\frac{u}{2}-8\beta^2\cos^4\frac{u}{2}\le\alpha\Big(-\alpha+\frac{3}{2}\beta\Big)-4\beta\le 0. \qquad (3.4)$$

При $u\in[n\tau,\pi]$ справедливы неравенства $\cos(u/2)\ge 0$, $\sin(u/2)\ge 0$, следовательно, в силу (3.4) получаем $dQ(u)/du\le 0$. Поскольку $g(n\tau)=1$, то $Q(n\tau)=0$, поэтому при $u\in(n\tau,\pi)$ имеем $Q(u)\le 0$, и с учетом неравенства $\sin(u/2)\ge 0$ получаем $g(u)\le 1$.

Пусть $u\in(\pi,2\pi]$, тогда

$$\sin\frac{u}{2}\ge 0,\qquad \cos\frac{u}{2}\le 0,\qquad \sin\frac{u}{2}\left[\alpha\left(2\cos\frac{u}{2}-1\right)+\beta\cos\frac{u}{2}(2\cos u-1)\right]$$

$$=\sin\frac{u}{2}\left(2\alpha\cos\frac{u}{2}-\alpha+4\beta\cos^3\frac{u}{2}-3\beta\cos\frac{u}{2}\right)\le-\alpha\sin\frac{u}{2}<0,$$

следовательно, $(\pi,2\pi]\subset G_-$ и справедливо неравенство $g(u)\le 1$ при $u\in(\pi,2\pi]$.

Точки 2π и $2\pi+\tau$ являются соседними точками множества G, а поэтому $(2\pi,2\pi+\tau)\cap G=\varnothing$.

Докажем, что $g(2\pi+\tau)\le 1$. Имеем

$$g\,(2\pi+\tau)=\alpha\cos\,(2\pi+\tau)+\beta\cos\,(4\pi+2\tau)+\frac{A\tau}{(2\pi+\tau)}$$

$$\times\left[\alpha\left(\sin\,(2\pi+\tau)-\sin\left(\pi+\frac{\tau}{2}\right)\right)+\frac{\beta}{2}\left(\sin\,(4\pi+2\tau)-\sin\,(2\pi+\tau)\right)\right]$$

$$=(\alpha\cos\tau+\beta\cos 2\tau)+\frac{A\tau}{2\pi+\tau}\left[\alpha\left(\sin\tau+\sin\frac{\tau}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\left(\sin 2\tau-\sin\tau\right)\right]$$

$$=(\alpha\cos\tau+\beta\cos 2\tau)+\frac{n(1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau)}{\alpha\left(\sin n\tau-\sin\dfrac{n\tau}{2}\right)+\dfrac{\beta}{2}\left(\sin 2n\tau-\sin n\tau\right)}$$

$$\times\frac{1}{m+1}\left[\alpha\left(\sin\tau+\sin\frac{\tau}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\left(\sin 2\tau-\sin\tau\right)\right].$$

По доказанному ранее $\alpha\left(\sin n\tau-\sin\dfrac{n\tau}{2}\right)+\dfrac{\beta}{2}\left(\sin 2n\tau-\sin n\tau\right)>0$, и, поскольку $\psi(n,m)\le 0$, получаем, что $g(2\pi+\tau)\le 1$.

Пусть $u\in(2\pi+\tau,3\pi]$, тогда $\cos(u/2)\le 0$, $\sin(u/2)\le 0$, и ввиду (3.4) получаем $dQ(u)/du\ge 0$. Имеем $g(2\pi+\tau)\le 1$, $\sin\big(\pi+\tau/2\big)\le 0$, поэтому $Q(2\pi+\tau)\ge 0$, следовательно, при $u\in(2\pi+\tau,3\pi]$ справедливо неравенство $Q(u)\ge 0$, и в силу $\sin(u/2)\le 0$ получаем $g(u)\le 1$.

Пусть $u\in(3\pi,4\pi)$. Докажем, что при $v\in(0,\pi)$ справедливо неравенство $Q(4\pi-v)\ge Q(2\pi+v)$. Имеем $\alpha+\beta=1$, $1\le\alpha\le 4/3$, следовательно, $\cos(v/2)\big(4\alpha+2\beta(2\cos v-1)\big)\ge 0$, тогда

$$Q(4\pi-v)=A\tau\frac{\alpha\Big(2\cos\dfrac{v}{2}-1\Big)+\beta\cos\dfrac{v}{2}(2\cos v-1)}{\alpha+4\beta\cos^2\dfrac{2\pi-v}{2}}+2(4\pi-v)\sin\frac{v}{2}$$

$$\ge -A\tau\frac{\alpha\Big(2\cos\dfrac{v}{2}+1\Big)+\beta\cos\dfrac{v}{2}(2\cos v-1)}{\alpha+4\beta\cos^2\dfrac{v}{2}}+2(2\pi+v)\sin\frac{v}{2}=Q(2\pi+v).$$

Получили, что при $u\in(3\pi,4\pi)$ справедливы неравенства $Q(u)\ge 0$, $\sin(u/2)\le 0$, следовательно, $g(u)\le 1$. Наконец, легко проверить, что $g(4\pi+v)\le g(2\pi+v)$ для $v\in[0,\pi]$. Тем самым доказано, что $g(u)\le 1$ для $u\in[n\tau,5\pi]\cap G$, а следовательно, доказано, что $D=1$.

Итак, мы доказали, что $\inf\{\mu(f)\colon\ f\in W\}=\gamma=A\tau/2$.

Для функции (3.2) имеем

$$\widetilde{\xi}\in W\bigcap\Big\{g\in C[0,2\pi]\colon\ \|g\|_{C[0,\tau]}\le\|\widetilde{\xi}\|_{C[0,\tau]}\Big\},$$

$$\mu(\widetilde{\xi}) = \sup\Big\{\mu(f)\colon\ f \in \{g \in C[0,2\pi]\colon\ \|g\|_{C[0,\tau]} \le \|\widetilde{\xi}\|_{C[0,\tau]}\}\Big\} = \gamma,$$

следовательно, функционал $\mu \in C^*[0,2\pi]$ разделяет множества

$$W \subset C[0,2\pi] \quad \text{и} \quad \big\{g \in C[0,2\pi]\colon\ \|g\|_{C[0,\tau]} \le \|\widetilde{\xi}\|_{C[0,\tau]}\big\}.$$

Тогда

$$\inf\{\|f\|_{C[0,\tau]}\colon\ f \in W\} = \|\widetilde{\xi}\|_{C[0,\tau]},$$

и по лемме A выполняется равенство $K^2_{n-1}(\tau, \omega_{\alpha,\beta}) = \varkappa(\tau)$. □

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения (2) теоремы 1. Пусть

$$\sigma_1(x) = (\alpha\cos nx + \beta\cos 2nx) + \mu(\alpha\cos(m+1)x + \beta\cos 2(m+1)x).$$

Определим τ-периодическую четную относительно точки $\tau/2$ функцию φ_1, положив $\varphi_1(x) = \sigma_1(x)$ при $\tau/2 \le x \le \tau$, $\varphi_1(x) = \sigma_1(\tau - x)$ при $0 \le x \le \tau/2$. Разложение функции φ_1 в ряд Фурье имеет вид

$$\varphi_1(x) = P_0^{(2)} - \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{(2)}\cos mkx, \tag{3.5}$$

где коэффициенты определяются в (k.2).

Определим числа $C_k^{(2)}$ рекуррентным способом: пусть $k, j \in \mathbb{N}$,

$$P^{(2)}_{2j-1} = \alpha C^{(2)}_{2j-1}, \qquad P^{(2)}_{2^k(2j-1)} = \alpha C^{(2)}_{2^k(2j-1)} + \beta C^{(2)}_{2^{k-1}(2j-1)}.$$

Тогда согласно лемме 1 можно записать (3.5) в виде

$$\varphi_1(x) = P_0^{(2)} - \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)}(\alpha\cos mkx + \beta\cos 2mkx).$$

По лемме 1 при $\alpha > 1$ существует число $\mu_0 > 0$ такое, что $C_k^{(2)} > 0$ при любом номере k и $0 < \mu < \mu_0$. Считаем в дальнейшем, что $0 < \mu < \mu_0$ при $\alpha > 1$ и

$$\mu = \frac{n}{m+1}\,\frac{2m+1}{m^2-n^2}\,\frac{\sin n\tau + \sin\dfrac{n\tau}{2}}{\sin\tau - \sin\dfrac{\tau}{2}} \quad \text{при} \quad \alpha = 1.$$

Легко проверить, что при $\alpha = 1$ и $k > 1$ справедливы равенства $C_k^{(2)} = P_k^{(2)}$. По выбору μ имеем $C_1^{(2)} = 0$. В силу леммы 1 выполняется $C_k^{(2)} > 0$ при $k > 1$. Поскольку

$$\varphi_1(0) = P_0^{(2)} - \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)},$$

то

$$\begin{aligned}1 + \mu + \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)} &= 1 + \mu + P_0^{(2)} - \varphi_1(0) = 1 + \mu + P_0^{(2)} - \varphi_1(\tau)\\ &= 1 + \mu + \frac{2}{n\tau}\Big[\alpha\Big(\sin n\tau - \sin\frac{n\tau}{2}\Big) + \frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau - \sin n\tau)\Big]\\ &+ \frac{2\mu}{(m+1)\tau}\Big[\alpha\Big(\sin\tau + \sin\frac{\tau}{2}\Big) + \frac{\beta}{2}(\sin 2\tau - \sin\tau)\Big] - \sigma_1(\tau).\end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = f_{m,n}(x) = \cos nx + \sqrt{\mu}\cos(m+1)x + \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{C_k^{(2)}}\cos mkx,$$

тогда

$$\xi_1(h) := \|\Delta_h f_1\|_2^2 = \bigl(1 - \alpha\cos nh - \beta\cos 2nh\bigr) + \mu\bigl(1 - \alpha\cos(m+1)h - \beta\cos 2(m+1)h\bigr)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)}(1-\alpha\cos mkh-\beta\cos 2mkh) = \left(1+\mu+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)}\right)-(\alpha\cos nh+\beta\cos 2nh)-\varphi_1(h)-P_0^{(2)}.$$

Имеем при $t \in [0, \tau/2]$

$$\xi_1(t) = 1+\mu+\sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)} - P_0^{(2)} + 2\alpha\sin\frac{n\tau}{2}\sin\frac{2nt-n\tau}{2} + 2\beta\sin n\tau\sin(2nt-n\tau)$$

$$+\mu\Bigl[2\alpha\sin\frac{\tau}{2}\sin\frac{(m+1)(2t-\tau)}{2} + 2\beta\sin(m+1)\tau\sin((m+1)(2t-\tau))\Bigr].$$

Так как при $t \in [0, \tau/2]$ справедливо неравенство $\xi'(t) > c > 0$, то найдется число $\mu_1 > 0$ такое, что $\xi_1'(t) > 0$ при $0 < \mu \le \mu_1$ и $t \in [0, \tau/2]$. Считаем, что $0 < \mu < \mu_1 < \mu_0$. Тогда при $t \in [0, \tau/2]$ функция ξ_1 монотонно не убывает. Отсюда следует, что при $t \in [0, \tau/2]$ справедливо неравенство $\xi_1(t) \le \xi_1(\tau/2)$. При $t \in [\tau/2, \tau]$ функция ξ_1 постоянна и равна $\xi_1(t) \equiv 1+\mu-\sigma_1(\tau)$. Итак, функция

$$\widetilde{\xi}_1(t) := \frac{\xi_1(t)}{1+\mu+\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)}} = \frac{1+\mu-\sigma_1(t)+\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)}(1-\alpha\cos mkt-\beta\cos 2mkt)}{1+\mu+\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^{(2)}}$$

принадлежит классу W_α, монотонно не убывает на $[0, \tau]$ и постоянна на $[\tau/2, \tau]$.

Имеем

$$\|\widetilde{\xi}_1\|_{C[0,\tau]} = \widetilde{\xi}_1(\tau) = \frac{1+\mu-\sigma_1(\tau)}{1+\mu-\sigma_1(\tau)+\mathcal{A}_1},$$

где

$$\mathcal{A}_1 := \frac{2}{n\tau}\Bigl[\alpha\Bigl(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\Bigr)+\frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)\Bigr]+\frac{2\mu}{(m+1)\tau}\Bigl[\alpha\Bigl(\sin\tau+\sin\frac{\tau}{2}\Bigr)+\frac{\beta}{2}(\sin 2\tau-\sin\tau)\Bigr].$$

Следовательно,

$$K_{n-1}^2(\tau, \omega_{\alpha,\beta}) \ge \varkappa_1(\tau), \quad \text{где} \quad \varkappa_1(\tau) = 1 + \frac{\mathcal{A}_1}{1+\mu-\sigma_1(\tau)}.$$

Докажем, что $\varkappa_1(\tau) > \varkappa(\tau)$. Для этого достаточно доказать следующее неравенство:

$$\Bigl\{\frac{2}{n\tau}\Bigl[\alpha\Bigl(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\Bigr)+\frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)\Bigr]+\frac{2\mu}{(m+1)\tau}\Bigl[\alpha\Bigl(\sin\tau+\sin\frac{\tau}{2}\Bigr)+\frac{\beta}{2}(\sin 2\tau-\sin\tau)\Bigr]\Bigr\}$$

$$\times\bigl(1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau\bigr) > \frac{2}{n\tau}\Bigl[\alpha\Bigl(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\Bigr)+\frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)\Bigr]$$

$$\times\bigl\{(1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau)+\mu(1-\alpha\cos(m+1)\tau-\beta\cos 2(m+1)\tau)\bigr\}.$$

Приведя подобные в последнем неравенстве, получаем, что нужно доказать следующее неравенство

$$\frac{1}{m+1}\Bigl[\alpha\Bigl(\sin\tau+\sin\frac{\tau}{2}\Bigr)+\frac{\beta}{2}(\sin 2\tau-\sin\tau)\Bigr](1-\alpha\cos n\tau-\beta\cos 2n\tau)$$

$$> \frac{1}{n}\Bigl[\alpha\Bigl(\sin n\tau-\sin\frac{n\tau}{2}\Bigr)+\frac{\beta}{2}(\sin 2n\tau-\sin n\tau)\Bigr]\bigl(1-\alpha\cos(m+1)\tau-\beta\cos 2(m+1)\tau\bigr),$$

которое следует из условия $\psi(n, m) > 0$. Таким образом, теорема 1 доказана.

4. Следствия из основного результата

Лемма 2 посвящена выяснению, когда функция $\psi(n,m)$ из теоремы 1 больше 0, а когда меньше или равна 0.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha+\beta=1$, $n,m\in\mathbb{N}$, $m>2n$, $\tau=\dfrac{2\pi}{m}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1a) *если* $\alpha=1$ *и* $m\ge 3n^2+2$, *то* $\psi(n,m)\le 0$;

(1b) *если* $\alpha=1$ *и* $m<3n^2+2$, *то* $\psi(n,m)>0$;

(2a) *если* $1<\alpha<4/3$ *и* $m\ge\dfrac{3\alpha^2n^2}{\alpha+4\beta}+\dfrac{\pi^2(\alpha+4\beta)}{3\alpha}$, *то* $\psi(n,m)\le 0$;

(3a) *если* $\alpha=4/3$ *и* $m\ge\max\{4,11n^4/3-1\}$, *то* $\psi(n,m)\le 0$;

(3b) *если* $\alpha=4/3$ *и* $m<\max\{4,11n^4/3-1\}$, *то* $\psi(n,m)>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее в доказательстве будем использовать (без ссылок) следующие неравенства для $x>0$: $1-\dfrac{x^2}{2}\le\cos x\le 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}$, $x-\dfrac{x^3}{3!}\le\sin x\le x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}$. Проведя тождественные преобразования в (1.4), получаем

$$\psi(n,m)=\sin\frac{n\tau}{2}\sin\frac{\tau}{2}\Big\{n\sin\frac{n\tau}{2}\Big(\alpha+4\beta\cos^2\frac{n\tau}{2}\Big)\Big[\alpha\Big(2\cos\frac{\tau}{2}+1\Big)+\beta\cos\frac{3\tau}{2}\Big]$$
$$-(m+1)\sin\frac{\tau}{2}\Big(\alpha+4\beta\cos^2\frac{\tau}{2}\Big)\Big[\alpha\Big(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\Big)+\beta\cos\frac{3n\tau}{2}\Big]\Big\}.$$

Далее вместо функции ψ будем рассматривать функцию

$$\psi_1(n,m):=\frac{\psi(n,m)}{\sin\frac{n\tau}{2}\sin\frac{\tau}{2}}=n\sin\frac{n\tau}{2}\Big(\alpha+4\beta\cos^2\frac{n\tau}{2}\Big)\Big[\alpha\Big(2\cos\frac{\tau}{2}+1\Big)+\beta\cos\frac{3\tau}{2}\Big]$$
$$-(m+1)\sin\frac{\tau}{2}\Big(\alpha+4\beta\cos^2\frac{\tau}{2}\Big)\Big[\alpha\Big(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\Big)+\beta\cos\frac{3n\tau}{2}\Big].$$

Поскольку $0<\dfrac{\tau}{2}\le\dfrac{n\tau}{2}=\dfrac{2\pi n}{2m}<\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\dfrac{n\tau}{2}>0$, $\sin\dfrac{\tau}{2}>0$, то $\operatorname{sign}\psi(n,m)=\operatorname{sign}\psi_1(n,m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о пункта (1a). Очевидно, что $m\ge 5$. Рассмотрим случай $n=1$. Покажем, что $\psi_1(1,m)\le 0$. Из определения функции ψ_1 следует, что надо доказать справедливость неравенства $\cos(\tau/2)\ge(m+2)/(2m)$. Для этого достаточно установить неравенство

$$1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{m}\right)^2\ge\frac{m+2}{2m},$$

эквивалентное неравенству $(m-1)^2\ge\pi^2+1$, которое справедливо при $m\ge 5$.

Теперь рассмотрим случай $\alpha=1$, $n\ge 2$. Покажем, что $\psi_1(n,m)\le 0$. Для этого достаточно доказать, что

$$n\Big[\frac{n\tau}{2}-\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^3\frac{1}{3!}+\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^5\frac{1}{5!}\Big]\Big[2\left(1-\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2\frac{1}{2!}+\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4\frac{1}{4!}\right)+1\Big]$$
$$\le(m+1)\Big[\frac{\tau}{2}-\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^3\frac{1}{3!}\Big]\Big[2\Big(1-\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\frac{1}{2!}\Big)-1\Big].$$

Сократив обе части последнего неравенства на $\tau/2$, подставив в него $\tau=2\pi/m$, и применив элементарные преобразования, получаем

$$(3n^2-m+2)+\frac{n^2\pi^2}{m}+\frac{\pi^2}{6m}+\frac{\pi^2}{6m^2}+\frac{\pi^4n^2}{12m^4}+\frac{\pi^4n^4}{6m^4}+\frac{\pi^4n^6}{40m^4}+\frac{\pi^8n^6}{1440m^8}$$

$$\le 3+\frac{\pi^2n^4}{2m^2}+\frac{\pi^6n^4}{72m^6}+\frac{\pi^6n^6}{120m^6}+\frac{n^2\pi^4}{6m^3}+\frac{n^2\pi^4}{6m^4}.$$

Так как $3n^2-m+2\le 0$, то достаточно доказать неравенство

$$\frac{\pi^2}{6m}+\frac{\pi^2}{6m^2}+\frac{n^2\pi^2}{m}+\frac{\pi^4n^2}{12m^4}+\frac{\pi^4n^4}{6m^4}+\frac{\pi^4n^6}{40m^4}+\frac{\pi^8n^6}{1440m^8}\le 3+\frac{\pi^2n^4}{2m^2}$$

или, что то же самое,

$$\Big[\frac{\pi^2}{6}+\Big(n^2+\frac{1}{6}\Big)\pi^2m-3m^2\Big]+\frac{\pi^4n^2}{12m^2}+\frac{\pi^4n^4}{6m^2}+\frac{\pi^4n^6}{40m^2}+\frac{\pi^8n^6}{1440m^6}\le\frac{\pi^2n^4}{2}. \tag{4.1}$$

Поскольку $m\ge 3n^2+2$, то

$$\Big[\frac{\pi^2}{6}+\Big(n^2+\frac{1}{6}\Big)\pi^2x-3x^2\Big]'=\Big(n^2+\frac{1}{6}\Big)\pi^2-6x\le 0\quad\text{при}\quad x\ge 3n^2+2,\quad 4n^2\ge 3n^2+2.$$

Следовательно, достаточно доказать неравенство (4.1) при $m=3n^2+2$. Подставив в (4.1) $m=3n^2+2$, после элементарных преобразований получаем

$$\frac{\pi^2}{18n^2}+\Big(n^2+\frac{1}{6}\Big)\pi^2-9n^2-6+\frac{\pi^4}{324n^4}+\frac{\pi^4}{162n^2}+\frac{\pi^4}{1080}+\frac{\pi^8}{1440\cdot 3^7n^8}\le\frac{\pi^2n^2}{8}.$$

Поскольку $\pi^2/8-\pi^2+9\ge 0$, то достаточно доказать неравенство

$$\frac{\pi^2}{18n^2}+\frac{\pi^2}{6}-6+\frac{\pi^4}{324n^4}+\frac{\pi^4}{162n^2}+\frac{\pi^4}{1080}+\frac{\pi^8}{1440\cdot 3^7n^8}\le 0,$$

которое, в свою очередь, достаточно проверить лишь при $n=2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о пункта (1b). Докажем, что $\psi_1(n,m)>0$, т. е. выполняется неравенство

$$n\sin\frac{n\tau}{2}\left(2\cos\frac{\tau}{2}+1\right)>(m+1)\sin\frac{\tau}{2}\left(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\right). \tag{4.2}$$

В случае $n=1$ имеем $2<m<5$, легко проверить непосредственно, что при $m=3,4$ выполняется $\psi_1(1,m)>0$.

Считаем, что $n\ge 2$. Справедливы неравенства $\sin(n\tau/2)>0, \sin(\tau/2)>0, 2\cos(\tau/2)+1>0$. Следовательно, если $2\cos(n\tau/2)-1<0$, то неравенство (4.2) выполняется. Осталось проверить случай $2\cos(n\tau/2)-1\ge 0$. Имеем $n\tau/2\le\pi/3,\ \ m\ge 3n$. Для справедливости неравенства (4.2) достаточно доказать, что

$$n\Big[\frac{n\tau}{2}-\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^3\frac{1}{3!}\Big]\Big[2\Big(1-\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2\frac{1}{2!}\Big)+1-(m+1)\Big[2\Big(1-\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\frac{1}{2!}+\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^4\frac{1}{4!}\Big)-1\Big]\frac{\tau}{2}>0.$$

Приведя в нем подобные и сократив на $\tau/2$, получаем

$$3n^2-(m+1)>n^2\Big[\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2\Big]+(m+1)\Big[-\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2+\frac{1}{12}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^4\Big]. \tag{4.3}$$

Допустим, что неравенство (4.3) не выполняется, тогда справедливо обратное:

$$3n^2-(m+1)\le n^2\Big[\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2\Big]+(m+1)\Big[-\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2+\frac{1}{12}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^4\Big]. \tag{4.4}$$

Используя условия $\dfrac{n\tau}{2}\le\dfrac{\pi}{3}$ и $m\ge 5$, получаем из (4.4)

$$3n^2-(m+1)\le n^2\Big[\Big(\frac{\pi}{5}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{3}\Big)^2\Big]+\frac{m+1}{12}\Big(\frac{\pi}{3}\Big)^4,$$

т. е.

$$n^2\Big[3-\Big(\frac{\pi}{5}\Big)^2-\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{3}\Big)^2\Big]\le(m+1)\Big[1+\frac{1}{12}\Big(\frac{\pi}{3}\Big)^4\Big].$$

Тогда

$$2n^2\le 1.1(m+1),\qquad m\ge 1.8\,n^2,\qquad \frac{n\tau}{2}\le\frac{\pi}{1.8\,n}<1.$$

Оценим правую часть неравенства (4.4):

$$3n^2-(m+1)\le n^2\Big[\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2+\frac{1}{2}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\Big]+(m+1)\Big[-\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2+\frac{1}{12}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^4\Big]$$

$$\le\frac{3n^2}{4}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2-\frac{11(m+1)}{12}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2,$$

т. е.

$$n^2\Big[3-\frac{3}{4}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\Big]\le(m+1)\Big[1-\frac{11}{12}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\Big].$$

Таким образом, $3n^2<m+1$, следовательно, $m=3n^2$ или $m=3n^2+1$.

Теперь докажем, что справедливо неравенство (4.3). Имеем $3n^2-m+1\ge 0$, следовательно, достаточно доказать следующее:

$$\frac{1}{6}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^4-2+(m+1)\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2-n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2-\frac{n^2}{2}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2-\frac{m+1}{12}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^4>0.$$

Подставив $\tau=2\pi/m$ и умножив неравенство на $12m^4$, получаем эквивалентное неравенство

$$-6m^2n^4\pi^2+n^4\pi^4+12m^3n^2\pi^2-mn^4\pi^4-24m^4>0.$$

При $m=3n^2$ получаем

$$270n^8\pi^2+n^4\pi^4-3n^6\pi^4-1944n^8>0.$$

Поскольку $10>\pi^2>9$, $n\ge 2$, последнее неравенство очевидно.

При $m=3n^2+1$ получаем

$$270n^8\pi^2+288n^6\pi^2+102n^4\pi^2+12n^2\pi^2-3n^6\pi^4-1944n^8-2592n^6-1296n^4-288n^2-24>0.$$

Поскольку $10>\pi^2>9$, то достаточно доказать, что $458n^8-300n^6-378n^4-180n^2-24>0$. Так как $n\ge 2$, то последнее очевидно.

Д о к а з а т е л ь с т в о пункта (2a). Покажем, что $\psi_1(n,m)\le 0$, для этого достаточно доказать неравенство

$$n\sin\frac{n\tau}{2}3\alpha^2-(m+1)\sin\frac{\tau}{2}(\alpha+4\beta)\left[\alpha\left(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\right)+\beta\right]\le 0. \tag{4.5}$$

Обозначим $c=\dfrac{3\alpha^2}{\alpha+4\beta}$. По условию

$$m\ge n^2\frac{3\alpha^2}{\alpha+4\beta}+\frac{\pi^2(\alpha+4\beta)}{3\alpha},\qquad \alpha+4\beta>0;$$

имеем

$$n^2c+\alpha\frac{(n\pi)^2}{m}+\alpha\Big(\frac{n\pi}{m}\Big)^2\le n^2c+\alpha\frac{(n\pi)^2}{n^2\dfrac{3\alpha^2}{\alpha+4\beta}}+\alpha\frac{(n\pi)^2}{\Big(n^2\dfrac{3\alpha^2}{\alpha+4\beta}+\dfrac{\pi^2(\alpha+4\beta)}{3\alpha}\Big)^2}$$

$$\le n^2c+\frac{(\alpha+4\beta)\pi^2}{3\alpha}+1\le m+1,$$

т. е. $n^2c+\alpha\dfrac{(n\pi)^2}{m}+\alpha\left(\dfrac{n\pi}{m}\right)^2\le m+1$. Подставив в последнее неравенство $\tau=2\pi/m$, получаем

$$n^2c\le(m+1)\Big[1-\alpha\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\Big]=(m+1)\Big[\alpha\Big(2\Big(1-\frac12\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\Big)-1\Big)+\beta\Big]$$

$$\le(m+1)\Big[\alpha\Big(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\Big)+\beta\Big],$$

следовательно, неравенство (4.5) доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о пункта (3а). Имеем $m\ge4$. Докажем, что $\psi_1(n,m)\le0$. При $\alpha=4/3$ справедливы тождества:

$$\alpha+4\beta\cos^2\frac{n\tau}{2}=\frac43\sin^2\frac{n\tau}{2},\qquad \alpha+4\beta\cos^2\frac{\tau}{2}=\frac43\sin^2\frac{\tau}{2},$$

$$\alpha\Big(2\cos\frac{\tau}{2}+1\Big)+\beta\cos\frac{3\tau}{2}=\frac83\cos\frac{\tau}{2}-\frac13\cos\frac{3\tau}{2}+\frac43,$$

$$\alpha\Big(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\Big)+\beta\cos\frac{3n\tau}{2}=\frac83\cos\frac{n\tau}{2}-\frac13\cos\frac{3n\tau}{2}-\frac43.$$

Поэтому неравенство $\psi_1(n,m)\le0$ можно записать в следующем виде:

$$n\sin^3\frac{n\tau}{2}\Big(8\cos\frac{\tau}{2}-\cos\frac{3\tau}{2}+4\Big)\le(m+1)\sin^3\frac{\tau}{2}\Big(8\cos\frac{n\tau}{2}-\cos\frac{3n\tau}{2}-4\Big).\tag{4.6}$$

Отдельно рассмотрим случай, когда $4\ge 11n^4/3-1$. Тогда $n=1$ и при $m=4$ справедливость неравенства (4.6) очевидна.

Считаем далее, что $4<11n^4/3-1$, $m\ge5$. Для справедливости неравенства (4.6) достаточно доказать следующее неравенство:

$$n^4\Big[8\Big(1-\frac12\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2+\frac{1}{4!}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4\Big)-\Big(1-\frac12\Big(\frac{3\tau}{2}\Big)^2\Big)+4\Big]$$

$$\le(m+1)\Big[8\Big(1-\frac12\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2\Big)-\Big(1-\frac12\Big(\frac{3n\tau}{2}\Big)^2+\frac{1}{4!}\Big(\frac{3n\tau}{2}\Big)^4\Big)-4\Big].$$

Приведя подобные и подставляя $\tau=2\pi/m$, получаем

$$n^4\Big[11+\frac12\Big(\frac{\pi}{m}\Big)^2+\frac13\Big(\frac{\pi}{m}\Big)^4\Big]\le(m+1)\Big[3+\frac12\Big(\frac{n\pi}{m}\Big)^2-\frac{27}{8}\Big(\frac{n\pi}{m}\Big)^4\Big].$$

Последнее неравенство эквивалентно следующему:

$$-m^5+\Big(\frac{11n^4}{3}-1\Big)m^4-\frac16n^2\pi^2m^3+\Big(-\frac16n^2\pi^2+\frac16n^4\pi^2\Big)m^2+\frac98n^4\pi^4m+\frac{89}{72}n^4\pi^4\le0.\tag{4.7}$$

Докажем его справедливость при $n=1$. В этом случае неравенство (4.7) принимает вид

$$-m^5+\frac83m^4-\frac16\pi^2m^3+\frac98\pi^4m+\frac{89}{72}\pi^4\le0.$$

Перепишем его в эквивалентной форме

$$-3m+8-\frac{\pi^2}{2m}+\frac{27\pi^4}{8m^3}+\frac{89\pi^4}{24m^4}\le0.$$

Так как $m\ge5$ и выражение, стоящее в левой части последнего неравенства, убывает при возрастании m, то достаточно проверить его справедливость при $m=5$. Убеждаемся, что неравенство верно.

Считаем, что $n \geq 2$. Имеем $11n^4 - 3 - 3m \leq 0$, следовательно, для справедливости неравенства (4.7) достаточно доказать, что

$$-\frac{1}{6}m^3 + \Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}n^2\Big)m^2 + \frac{9}{8}n^2\pi^2 m + \frac{89}{72}n^2\pi^2 \leq 0.$$

Поскольку $11n^4 - 3 \leq 3m$, $n \geq 2$, то $m > 57$, $3m \geq 8n^4$, $12m^2 \geq 32mn^4$. Тогда

$$0 \geq n^2 m(-28 \times 57 + 1700) \geq n^2 m(-28m + 1700) = n^2 m(-32m \times 4 + 12m + 1700)$$

$$\geq n^2(-32mn^2 + 12m + 1700) \geq m(-32mn^4 + 12mn^2 + 170n^2\pi^2) \geq m(-12m^2 + 12mn^2 + 170n^2\pi^2)$$

$$= 72m\Big(-\frac{1}{6}m^2 + \frac{1}{6}mn^2 + \frac{170}{72}n^2\pi^2\Big) \geq -\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{6}m^2 n^2 + \frac{170}{72}mn^2\pi^2$$

$$\geq -\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{6}n^2 m^2 + \frac{9}{8}n^2\pi^2 m + \frac{89}{72}n^2\pi^2 \geq -\frac{1}{6}m^3 + \Big(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}n^2\Big)m^2 + \frac{9}{8}n^2\pi^2 m + \frac{89}{72}n^2\pi^2,$$

следовательно, справедливо неравенство (4.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о пункта (3b). Рассмотрим случай, когда $4 \geq 11n^4/3 - 1$. Тогда $n = 1$ и $m = 3$, справедливость неравенства $\psi(1,3) > 0$ проверяется непосредственно.

Считаем далее, что $4 < 11n^4/3 - 1$. Докажем, что при одновременном выполнении условий $3m < 11n^4 - 3$ и $m > 2n$ справедливо неравенство $\psi_1(n,m) > 0$. Имеем $6n < 3m < 11n^4 - 3$, следовательно, $n \geq 2$, $m > 4$.

Нам надо доказать следующее соотношение:

$$n\sin^3\frac{n\tau}{2}\Big(8\cos\frac{\tau}{2} - \cos\frac{3\tau}{2} + 4\Big) > (m+1)\sin^3\frac{\tau}{2}\Big(8\cos\frac{n\tau}{2} - \cos\frac{3n\tau}{2} - 4\Big). \tag{4.8}$$

Имеем $8\cos\frac{\tau}{2} - \cos\frac{3\tau}{2} + 4 > 0$, следовательно, если $8\cos\frac{n\tau}{2} - \cos\frac{3n\tau}{2} - 4 \leq 0$, то неравенство (4.8) справедливо.

Считаем теперь, что

$$11\cos\frac{n\tau}{2} - 4\cos^3\frac{n\tau}{2} - 4 = 8\cos\frac{n\tau}{2} - \cos\frac{3n\tau}{2} - 4 > 0.$$

Тогда

$$\cos\frac{n\tau}{2} > 0.38, \qquad \frac{n\tau}{2} \leq 1.182, \qquad \Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2 \leq \sqrt{2}, \qquad \Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^4 \leq 2.$$

В этом случае для доказательства (4.8) достаточно показать, что

$$n\Big[\Big(\frac{n\tau}{2}\Big) - \frac{1}{3!}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^3\Big]^3\Big[8\Big(1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2\Big) - \Big(1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{3\tau}{2}\Big)^2 + \frac{1}{4!}\Big(\frac{3\tau}{2}\Big)^4\Big) + 4\Big]$$

$$> (m+1)\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^3\Big[8\Big(1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^2 + \frac{1}{4!}\Big(\frac{n\tau}{2}\Big)^4\Big) - \Big(1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{3n\tau}{2}\Big)^2\Big) - 4\Big].$$

Приведя подобные в последнем неравенстве, получаем

$$n^4\Big[11 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 - \frac{27}{8}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4 - \frac{11}{2}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 - \frac{1}{4}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4 + \frac{27}{16}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^6 + \frac{11}{12}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4 + \frac{1}{24}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^6$$

$$- \frac{9}{32}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^8 - \frac{11}{216}n^6\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^6 - \frac{1}{432}n^6\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^8 + \frac{1}{64}n^6\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^{10}\Big]$$

$$> (m+1)\Big[3 + \frac{1}{2}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 + \frac{1}{3}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4\Big].$$

Поскольку $11n^4 - 3m - 3 \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$, то выполняется неравенство

$$\frac{11}{12}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4 - \frac{27}{8}\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4 - \frac{1}{4}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4 - \frac{9}{32}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^8 \geq 0,$$

следовательно, достаточно доказать, что

$$11n^4 - 3m - 3 > n^4\Big[\frac{11}{2}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 + \frac{11}{216}n^6\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^6 + \frac{1}{432}n^6\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^8\Big]$$

$$+ (m+1)\Big[\frac{1}{2}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 + \frac{1}{3}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4\Big].$$

Имеем

$$n^4\Big[\frac{11}{2}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 + \frac{11}{216}n^6\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^6 + \frac{1}{432}n^6\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^8\Big] + (m+1)\Big[\frac{1}{2}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2 + \frac{1}{3}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4\Big]$$

$$\le n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2\Big\{n^4\Big[\frac{11}{2} + \frac{23}{432}n^4\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^4\Big] + (m+1)\Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n^2\Big(\frac{\tau}{2}\Big)^2\Big]\Big\} := \chi.$$

Теперь, если $\chi < 11n^4 - 3m - 3 = 11n^4 - 3(m+1)$, то все доказано.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть $\chi \ge 11n^4 - 3(m+1)$. Тогда

$$\sqrt{2}\Big[n^4\Big(\frac{11}{2} + 2\frac{23}{432}\Big) + (m+1)\Big(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\Big)\Big] \ge \chi \ge 11n^4 - 3(m+1),$$

отсюда

$$4(m+1) \ge (m+1)\Big(3 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\Big) \ge n^4\Big[11 - \sqrt{2}\Big(\frac{11}{2} + \frac{23}{216}\Big)\Big] \ge 3n^4,$$

следовательно, $m \ge \dfrac{n^4}{2}$, $\dfrac{n\tau}{2} = \dfrac{n\pi}{m} \le \dfrac{2n\pi}{n^4} = \dfrac{2\pi}{n^3} < 1$.

Имеем

$$n^4\Big(\frac{11}{2} + \frac{23}{432}\Big) + (m+1)\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big)$$

$$\ge \Big(\frac{2\pi}{n^3}\Big)^2\Big\{n^4\Big[\frac{11}{2} + \frac{23}{432}\Big(\frac{2\pi}{n^3}\Big)^4\Big] + (m+1)\Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big(\frac{2\pi}{n^3}\Big)^2\Big]\Big\} \ge \chi \ge 11n^4 - 3(m+1),$$

тогда $(m+1)\Big(3 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\Big) \ge n^4\Big(\dfrac{11}{2} - \dfrac{23}{432}\Big)$ и, значит, $m > n^4$, $\dfrac{n\tau}{2} \le \dfrac{\pi}{n^3} < \dfrac{1}{2}$.

Имеем

$$\frac{n^4}{4}\Big(\frac{11}{2} + \frac{23}{432\cdot 16}\Big) + \frac{m+1}{4}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 4}\Big)$$

$$\ge \Big(\frac{\pi}{n^3}\Big)^2\Big\{n^4\Big[\frac{11}{2} + \frac{23}{432}\Big(\frac{\pi}{n^3}\Big)^4\Big] + (m+1)\Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{n^3}\Big)^2\Big]\Big\} \ge \chi \ge 11n^4 - 3(m+1),$$

следовательно,

$$(m+1)\Big(3 + \frac{1}{8} + \frac{1}{48}\Big) \ge n^4\Big(11 - \frac{11}{8} - \frac{23}{432\cdot 16}\Big),$$

тогда $m > 2n^4$, $\dfrac{n\tau}{2} \le \dfrac{\pi}{2n^3} < \dfrac{1}{5}$.

Имеем

$$\frac{n^4}{25}\Big(\frac{11}{2} + \frac{23}{432\cdot 5^4}\Big) + \frac{m+1}{25}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 25}\Big)$$

$$\ge \Big(\frac{\pi}{2n^3}\Big)^2\Big\{n^4\Big[\frac{11}{2} + \frac{23}{432}\Big(\frac{\pi}{2n^3}\Big)^4\Big] + (m+1)\Big[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\Big(\frac{\pi}{2n^3}\Big)^2\Big]\Big\} \ge \chi \ge 11n^4 - 3(m+1),$$

следовательно,

$$(m+1)\Big(3 + \frac{1}{50} + \frac{1}{3\cdot 5^4}\Big) \ge n^4\Big(11 - \frac{11}{50} - \frac{23}{432\cdot 5^6}\Big),$$

тогда $m > \pi n^4$, $\dfrac{n\tau}{2} \le \dfrac{1}{n^3} < \dfrac{1}{8}$.

Имеем

$$\frac{n^4}{25}\Big(\frac{11}{2} + \frac{23}{432\cdot 5^4}\Big) + \frac{m+1}{25}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 25}\Big)$$

$$\geq \left(\frac{1}{n^3}\right)^2 \left[n^4\left(\frac{11}{2}+\frac{23}{432\cdot 8^4}\right)+\frac{11n^4}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 64}\right)\right] \geq \chi \geq 11n^4-3(m+1) > 2,$$

следовательно,

$$\frac{11}{2}+\frac{23}{432\cdot 8^4}+\frac{11}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 64}\right) \geq 2n^2 \geq 8,$$

и мы пришли к противоречию, значит, неравенство (4.8) справедливо. Лемма 2 доказана. □

В дальнейшем нам понадобится следующий результат, доказанный А. И. Козко и А. В. Рождественским в [8, 9], С. Н. Васильевым в [10][2].

Теорема B. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $\alpha+\beta=1$, $1 \leq \alpha \leq 4/3$, $\delta \in (0, 2\pi)$. *Тогда для константы* $\mathcal{K}_n(\delta, \omega_{\alpha,\beta})$ *в* (1.1) *справедливо неравенство*

$$\mathcal{K}_n(\delta, \omega_{\alpha,\beta}) \geq \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(1-\alpha\cos x-\beta\cos 2x)\,dx\right)^{-1/2}.$$

Приведем некоторые следствия из результатов Н. И. Черных, С. Н. Васильева, А. И. Козко, А. В. Рождественского, теоремы 1 и леммы 2.

Следствие 1. *Пусть*

$$n, m \in \mathbb{N}, \qquad \tau = \frac{2\pi}{m}, \qquad \varkappa(\tau) = \frac{1}{2}+\frac{1}{n\tau}\,\frac{\cos\dfrac{n\tau}{2}-\dfrac{1}{2}}{\sin\dfrac{n\tau}{2}}.$$

Тогда

(a) *при* $2n \geq m$ *имеет место равенство* $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau, \omega_1) = 1/2$, *при этом не найдется функции* $f = f_{m,n} \not\equiv \mathrm{const}$, $f \in L^2[0, 2\pi]$, *на которой достигается равенство*;

(b) *при* $2n < m < 3n^2+2$ *имеет место строгое неравенство* $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau, \omega_1) > \varkappa(\tau)$;

(c) *при* $m \geq 3n^2+2$ *имеет место равенство* $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau, \omega_1) = \varkappa(\tau)$, *при этом найдется функция* $f = f_{m,n} \not\equiv \mathrm{const}$, $f \in L^2[0, 2\pi]$, *на которой достигается равенство.*

Доказательство. При $m \leq 2n$ имеем $\tau \geq \pi/n$, и справедливость утверждений пункта (a) следует из соответствующего результата Н. И. Черных (см. (1.2)).

При $m \geq 3n$ имеем

$$\alpha\left(\sin n\tau - \sin\frac{n\tau}{2}\right) = \sin n\tau - \sin\frac{n\tau}{2} \geq 0 = -2\beta(\sin 2n\tau - \sin n\tau),$$

и утверждение пункта (b) является следствием теоремы 1 и леммы 2. При $2n < m < 3n$ имеем $\varkappa(\tau) < 1/2$, но в силу (1.2) верна оценка $\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau, \omega_1) \geq 1/2$, следовательно, утверждение доказано.

Утверждения пункта (c) являются следствием теоремы 1 и леммы 2. □

Следствие 2. *Пусть*

$$\alpha+\beta=1, \qquad 0>\beta>-1/3, \qquad n, m \in \mathbb{N}, \qquad m \geq \frac{3\alpha^2 n^2}{\alpha+4\beta}+\frac{\pi^2(\alpha+4\beta)}{3\alpha}, \qquad \tau = \frac{2\pi}{m}.$$

Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{K}^2_{n-1}(\tau, \omega_{\alpha,\beta}) = 1+\frac{2}{n\tau}\;\frac{\alpha\left(2\cos\dfrac{n\tau}{2}-1\right)+\beta\cos\dfrac{3n\tau}{2}}{\sin\dfrac{n\tau}{2}\left(\alpha+4\beta\cos^2\dfrac{n\tau}{2}\right)},$$

и найдется функция $f = f_{m,n} \not\equiv \mathrm{const}$, $f \in L^2[0, 2\pi]$, *на которой достигается равенство.*

[2] Авторами работ [8–10] получен более общий результат, мы приводим ту его часть, которая нам потребуется.

Доказательство. Имеем

$$\alpha = 1-\beta > -4\beta, \qquad m \geq \frac{3\alpha^2 n^2}{\alpha+4\beta} + \frac{\pi^2(\alpha+4\beta)}{3\alpha} \geq 2n\pi\sqrt{\alpha} > 6n,$$

$$\alpha\Big(\sin n\tau - \sin\frac{n\tau}{2}\Big) \geq 4\beta\sin\frac{n\tau}{2}\Big(1-2\cos\frac{n\tau}{2}1\Big) \geq 2\beta\sin n\tau(1-2\cos n\tau) = 2\beta(\sin n\tau - \sin 2n\tau),$$

тогда в силу теоремы 1 и леммы 2 получаем справедливость следствия 2. $\square$

Следствие 3. *Пусть*

$$n, m \in \mathbb{N}, \qquad \tau = \frac{2\pi}{m}, \qquad \varkappa(\tau) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12n\tau}\frac{4\Big(2\cos\frac{n\tau}{2}-1\Big)-\cos\frac{3n\tau}{2}}{\sin^3\frac{n\tau}{2}}.$$

Тогда

(a) *при* $n \geq 0.7m$ *имеет место равенство* $\mathcal{K}_{n-1}^2(\tau,\omega_2) = 1/6$, *при этом не найдется функции* $f = f_{m,n} \not\equiv \mathrm{const}$, $f \in L^2[0,2\pi]$, *на которой достигается равенство*;

(b) *при одновременном выполнении условий* $3n \leq m < 11n^4/3 - 1$ *имеет место строгое неравенство* $\mathcal{K}_{n-1}^2(\tau,\omega_2) > \varkappa(\tau)$;

(c) *при* $m \geq 11n^4/3 - 1$ *выполняется равенство* $\mathcal{K}_{n-1}^2(\tau,\omega_2) = \varkappa(\tau)$, *при этом найдется функция* $f = f_{m,n} \not\equiv \mathrm{const}$, $f \in L^2[0,2\pi]$, *на которой достигается равенство.*

Доказательство пункта (a). По теореме В при $\delta \in (0,2\pi)$ справедливо неравенство $\mathcal{K}_{n-1}^2(\delta,\omega_2) \geq 1/6$, в силу (1.3) имеем $\mathcal{K}_{n-1}^2\big(1.4\pi/n,\omega_2\big) \leq 1/6$, при $n \geq 0.7m$ справедливо $\tau \geq 1.4\pi/n$, следовательно, при $n \geq 0.7m$ справедливо $\mathcal{K}_{n-1}^2(\tau,\omega_2) = 1/6$.

Утверждение пункта (b) при $m \geq 3n$ является следствием теоремы 1 и леммы 2.

Утверждение пункта (c) также является следствием теоремы 1 и леммы 2, т. к. при $n \geq 2$ справедливы неравенства $m \geq 11n^4/3 - 1 \geq 3n$, а при $n = 1$ из неравенства $m \geq 11/3 - 1$ получаем, что $m \geq 3 = 3n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
2. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, вып. 5. С. 513–522.
3. **Тайков Л.В.** Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 // Мат. заметки. 1976. Т. 20, вып. 3. С. 433–438.
4. **Arestov V.V., Chernykh N.I.** On the L_2-approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // Approximation and functions spaces: proc. intern. conf. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1981. P. 25–43.
5. **Бабенко А.Г.** О неравенстве Джексона — Стечкина для наилучших L^2-приближений функций тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2001. Т. 7, № 1. С. 30–46.
6. **Васильев С.Н.** Неравенство Джексона – Стечкина в L_2 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2001. Т. 7, № 1. С. 75–84.
7. **Бабенко А.Г.** О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Мат. заметки. 1986. Т. 39, вып. 5. С. 651–664.
8. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. заметки. 2003. Т. 73, вып. 5. С. 783–788.
9. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 3–46.

10. **Васильев С.Н.** Аппроксимация функций тригонометрическими полиномами в L^2 и фрактальными функциями в C: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2002. 89 с.
11. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 864 с.

Балаганский Владимир Сергеевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Vladimir.Balaganskii@imm.uran.ru

Поступила 14.03.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 517.1

НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В $L_2(\mathbb{T}^N)$ С ОБОБЩЕННЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ[1]

С. Н. Васильев

Для пространства периодических функций многих переменных со среднеквадратичной нормой доказано точное неравенство Джексона в случае произвольного модуля непрерывности, порожденного разностным оператором с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: неравенство Джексона, обобщенный модуль непрерывности, многомерная аппроксимация.

Stanislav Vasilyev. Jackson inequality in $L_2(\mathbb{T}^N)$ with generalized modulus of continuity.

The sharp Jackson inequality is proved for the space of periodic functions of many variables with mean-square norm for an arbitrary modulus of continuity generated by a difference operator with constant coefficients.

Keywords: Jackson inequality, generalized modulus of continuity, multidimensional approximation.

1. Введение

Рассмотрим пространство $L_2 = L_2(\mathbb{T}^N)$, $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N/(2\pi\mathbb{Z}^N)$ комплекснозначных функций N переменных, периодических с периодом 2π по каждой переменной, с нормой

$$\|f\| = \left(\frac{1}{(2\pi)^N}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x_1,x_2,\ldots,x_N)|^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N\right)^{1/2}.$$

Далее векторы (точки) пространства $\mathbb{R}^N$ будем обозначать жирным шрифтом: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_N)$, при этом, как обычно,

$$\mathbf{xy} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_Ny_N \qquad \text{и} \qquad |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{xx}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_N^2}.$$

Символом $M = \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ обозначим набор комплексных чисел μ_j такой, что

$$0 < \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu_j| < \infty, \qquad \sum_{j\in\mathbb{Z}}\mu_j = 0. \tag{1.1}$$

Данному набору M и вектору $\mathbf{t}$ сопоставим разностный оператор $\Delta_{\mathbf{t}}^M\colon\ L_2 \to L_2$ вида

$$\Delta_{\mathbf{t}}^M f(\mathbf{x}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mu_k f(\mathbf{x} + k\mathbf{t}).$$

Для функции $f \in L_2$ определим модуль непрерывности

$$\omega_M(f,\delta) = \sup_{|\mathbf{t}|\le\delta}\|\Delta_{\mathbf{t}}^M f\|, \quad \delta \ge 0.$$

[1]Работа поддержана РФФИ (проект № 08-01-00325), Интеграционным проектом фундаментальных научных исследований, выполняемых в УрО РАН совместно с учеными СО РАН, и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ–1071.2008.1).

Из условий (1.1) следует, что разностный оператор и модуль непрерывности обращаются в ноль на функциях, тождественно равных константе.

Отметим, что набору

$$M_m = \left\{ \mu_j = (-1)^{m-j}\binom{m}{j} \text{ при } j = 0, \dots, m, \quad \mu_j = 0 \text{ при } j < 0,\ j > m \right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

соответствует классический модуль непрерывности $\omega_{M_m}(f,\delta) = \omega_m(f,\delta)$ порядка m.

Пусть Λ — некоторое подмножество $\mathbb{Z}^N$, содержащее начало координат. Обозначим через $E_\Lambda(f)$ величину наилучшего приближения элемента $f \in L_2$ функциями из L_2, спектр которых сосредоточен на множестве Λ, т. е.

$$E_\Lambda(f) = \inf_{\{c_\mathbf{s}\}_{\mathbf{s}\in\Lambda}\subset\mathbb{C}} \Big\| f(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{s}\in\Lambda} c_\mathbf{s} e^{i\mathbf{s}\mathbf{x}} \Big\|.$$

Как известно, справедливо равенство

$$E_\Lambda(f) = \sqrt{\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^n\setminus\Lambda} |\widehat{f}_\mathbf{s}|^2} \quad \text{для} \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^N} \widehat{f}_\mathbf{s} e^{i\mathbf{s}\mathbf{x}} \in L_2.$$

В случае $N = 1$ и $\Lambda_n = \{0, \pm 1, \dots, \pm(n-1)\}$ Н. И. Черных [1, 2] доказал, что при любых натуральных m и n выполняется неравенство

$$E_{\Lambda_n}(f) < \frac{1}{\sqrt{\binom{2m}{m}}}\, \omega_m\Big(f, \frac{2\pi}{n}\Big), \quad f \in L_2(\mathbb{T}), \quad f \neq \text{const}, \tag{1.2}$$

причем константу $1/\sqrt{\binom{2m}{m}}$ в этом неравенстве нельзя заменить меньшей при фиксированных натуральных m и n, удовлетворяющих дополнительному условию $n > m$.

В. А. Юдин [3] распространил этот результат с первым модулем непрерывности ($m = 1$) на случай функций многих переменных в пространстве L_2.

Автором [6] было доказано, что при $N = 1$ для каждого набора $M = \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, удовлетворяющего условиям (1.1), найдется такое число $\gamma > 0$, зависящее только от M, что при всех $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$E_{\Lambda_n}(f) < \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j|^2}}\, \omega_M\left(f, \frac{\gamma}{n}\right), \quad f \in L_2(\mathbb{T}), \quad f \neq \text{const}, \tag{1.3}$$

причем константа $1/\sqrt{\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j|^2}$ является точной, т. е. ее нельзя уменьшить при условии сохранения неравенства (1.3) одновременно для всех $f \in L_2(\mathbb{T})$. Рассмотрим случай, когда набор M содержит лишь конечное число не равных тождественно нулю элементов $\mu_0 = \mu_0(t)$, $\mu_1 = \mu_1(t), \dots, \mu_m = \mu_m(t)$, непрерывно зависящих от шага t разностного оператора Δ_t^M и удовлетворяющих условию $\mu_0(0) + \mu_1(0) + \ldots + \mu_m(0) = 0$. В этом случае А. Г. Бабенко [4], используя результат В. В. Арестова (см. [5, лемма 4.2]), получил универсальную оценку снизу (не зависящую от приближающего конечномерного подпространства) для точной константы в неравенстве Джексона в $L_2(\mathbb{T})$ при условии, что аргумент δ соответствующего модуля непрерывности принадлежит интервалу $(0, 2\pi/m)$.

А. И. Козко и А. В. Рождественский [8] доказали, что если множество $\Lambda \subset \mathbb{Z}^N$ содержит начало координат и его пересечение хотя бы с одной из координатных полуосей — конечное множество, то для произвольных $N \in \mathbb{N}$ и набора M, удовлетворяющего условиям (1.1), верно равенство

$$\min_{\delta\in(0,2\pi]} \sup_{f\neq\text{const}} \frac{E_\Lambda}{\omega_M(f,\delta)} = \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j|^2}}, \tag{1.4}$$

т. е. величина $1/\sqrt{\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\mu_j|^2}$ является наименьшей среди всех точных констант в соответствующем неравенстве Джексона.

В работе [7] Д. В. Горбачева и С. А. Странковского исследовалась величина δ, начиная с которой точная константа в неравенстве Джексона в пространстве $L_2(\mathbb{R}^N)$ становится минимальной. Для указанной величины ими было получено несколько оценок при $N=1$ и $N=3$.

Более подробная история, связанная с неравенством Джексона рассматриваемого вида, содержится в [8].

В данной работе получено неравенство Джексона в пространстве L_2 для периодических функций многих переменных с наименьшей точной константой.

2. Вспомогательное утверждение

В данном разделе докажем вспомогательное утверждение, в котором используется следующее преобразование:

$$\mathcal{R}_N\left[v\right](t_1) = \int\limits_{\sum_{j=1}^N t_j^2\le 1} v\Big(\sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^N t_j^2}\,\Big)\,dt_2\ldots dt_N, \qquad N\ge 2, \tag{2.1}$$

где v — интегрируемая на отрезке $[0,1]$ вещественнозначная функция.

Условимся в дальнейшем называть *весом* неотрицательную интегрируемую по Лебегу на отрезке $[0,1]$ функцию $v:\ [0,1]\to\mathbb{R}$ такую, что $\displaystyle\int_0^1 v(t)dt>0$.

Лемма. *Пусть $N\in\mathbb{N}$, $N\ge 2$, $\sigma\in\mathbb{R}$ и $m>N/2+1$. Тогда существует вес $v(t)$, для которого функция $u=\mathcal{R}_N\left[v\right]$ удовлетворяет следующим требованиям:*

(*a*) *u дифференцируема $2m$ раз,*

(*b*) *$u^{(k)}(1)=0$ при $k=0,1,\ldots,2m$,*

(*c*) *$u^{(2k-1)}(0)=0$ при $k=1,2,\ldots,m-1$,*

(*d*) *$u^{(2m-1)}(0)=\sigma$.*

Доказательство. Для $N\ge 3$ перейдем в (2.1) от переменных $(t_2,\ldots,t_N)$ к полярным координатам $(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{N-2})$:

$$\begin{aligned} t_2 &= r\cos\varphi_1,\\ t_3 &= r\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\ &\ldots\\ t_{N-1} &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-3}\cos\varphi_{N-2},\\ t_N &= r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-3}\sin\varphi_{N-2}, \end{aligned}$$

где $0\le\varphi_j\le\pi$ при $1\le j\le N-3$, $0\le\varphi_{N-2}<2\pi$.

Якобиан этой замены равен $r^{N-2}\sin^{N-3}\varphi_1\sin^{N-4}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-3}$ при $N>3$ и равен r при $N=3$. Следовательно,

$$\mathcal{R}_N\left[v\right](t_1) = \int\limits_0^{\sqrt{1-t_1^2}} v\Big(\sqrt{t_1^2+r^2}\Big)r^{N-2}dr\int\limits_W\left|\sin^{N-3}\varphi_1\sin^{N-4}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{N-3}\right|\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{N-2},$$

где $W=[0,\pi]^{N-3}\times[0,2\pi]$. Сделаем замену $\ r=\sqrt{(1-t_1^2)\rho},\ \ t=t_1,\ $ тогда

$$\mathcal{R}_N\left[v\right](t) = K_N(1-t^2)^{(N-1)/2}\int\limits_0^1 v\Big(\sqrt{t^2+(1-t^2)\rho}\Big)\rho^{(N-3)/2}d\rho, \tag{2.2}$$

где $K_N > 0$ зависит только от N.

Для $N = 2$ имеем

$$\mathcal{R}_N\left[v\right](t_1) = \int\limits_{-\sqrt{1-t_1^2}}^{\sqrt{1-t_1^2}} v\Big(\sqrt{t_1^2+t_2^2}\Big)dt_2 = 2\int\limits_0^{\sqrt{1-t_1^2}} v\Big(\sqrt{t_1^2+t_2^2}\Big)dt_2,$$

откуда, сделав замену $t_2 = \sqrt{(1-t_1^2)\rho}$ и $t = t_1$, получим, что формула (2.2) верна и для $N = 2$. Таким образом, равенство (2.2) выполняется для всех $N \geq 2$.

Пусть $v(x) = \nu(1-x^2)$ для $x \in [0,1]$, тогда $\nu(x) = v(\sqrt{1-x})$. Обозначим $\mathfrak{R}_N\left[\nu\right] = \mathcal{R}_N\left[v\right]$, тогда из (2.2) получим

$$\mathfrak{R}_N\left[\nu\right](t) = K_N(1-t^2)^{(N-1)/2}\int\limits_0^1 \nu\left(1-t^2-(1-t^2)\rho\right)\rho^{(N-3)/2}d\rho$$

$$= K_N(1-t^2)^{(N-1)/2}\int\limits_0^1 \nu\left((1-t^2)(1-\rho)\right)\rho^{(N-3)/2}d\rho.$$

Следовательно, для $\nu(x) = x^j$ имеем

$$\mathfrak{R}_N\left[x^j\right](t) = K_N(1-t^2)^{(N-1)/2}\int\limits_0^1 (1-t^2)^j(1-\rho)^j\rho^{(N-3)/2}d\rho$$

$$= K_N(1-t^2)^{j+(N-1)/2}B\big(j+1,(N-1)/2\big).$$

Таким образом, если аналитическую функцию ν разложить в ряд Тейлора $\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$, то получим равенство

$$\mathfrak{R}_N\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j\right](t) = K_N\sum_{j=0}^{\infty}(1-t^2)^{j+(N-1)/2}c_jB\big(j+1,(N-1)/2\big). \tag{2.3}$$

Пусть для некоторого $m \in \mathbb{N}$ коэффициенты $c'_j = c'_j(m)$ являются коэффициентами ряда Тейлора для функции $t^{2m}(1-t)^{m-1/2}$, т. е.

$$t^{2m}(1-t)^{m-1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} c'_j t^j. \tag{2.4}$$

Несложно подсчитать, что $c'_{j+2m} = \dfrac{1}{j!}\Big(m-\dfrac{1}{2}\Big)\Big(m-\dfrac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(m+\dfrac{1}{2}-j\Big)$ при $j > 1$.

Используя известные соотношения

$$j! = \Gamma(j+1) \quad \text{и} \quad \Gamma(m+1/2) = \Big(m-\frac{1}{2}\Big)\Big(m-\frac{3}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma(1/2),$$

при $j > m$ равенство для c'_{j+2m} можно записать как

$$c'_{j+2m} = \frac{1}{j!}\Big(m-\frac{1}{2}\Big)\Big(m-\frac{3}{2}\Big)\cdots\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)\cdots\Big(m+\frac{1}{2}-j\Big)$$

$$= (-1)^{j-m}\frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(j-m+1/2)}{\Gamma(j+1)\Gamma^2(1/2)}.$$

В силу известного соотношения

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+p)} = x^{-p}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big) \quad \text{при } x \to \infty \tag{2.5}$$

получаем что при $j \to \infty$ коэффициенты c'_j убывают по порядку, как $j^{1/2-m}$. Следовательно, при $m \geq 2$ ряд (2.4) сходится к функции равномерно на всем отрезке $[0,1]$.

Положим

$$c_j = \frac{c'_j}{B\big(j+1, (N-1)/2\big)}.$$

Из (2.5) и свойств бета-функции находим, что

$$B\big(j+1,(N-1)/2\big) = \frac{\Gamma(j+1)\Gamma\big((N-1)/2\big)}{\Gamma\big(j+1+(N-1)/2\big)} = \Gamma\big((N-1)/2\big) j^{-(N-1)/2}\Big(1 + O\Big(\frac{1}{j}\Big)\Big),$$

следовательно, c_j при $j \to \infty$ убывают по порядку, как $j^{N/2-m}$. Отсюда получаем, что при $m > N/2+1$ ряд $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ сходится абсолютно, значит, ряд $\sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$ на отрезке $[0,1]$ будет равномерно сходиться к некоторой функции $\nu_m(t)$. Функция $\nu_m(t)$ непрерывна как равномерный предел непрерывных функций, поэтому она ограничена и интегрируема. Подставив $\nu_m(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^j$ в (2.3) и воспользовавшись равенством (2.4), получим тождество для всех $t \in [0,1]$

$$\mathfrak{R}_N\left[\nu_m\right](t) = K_N(1-t^2)^{(N-1)/2} \sum_{j=0}^{\infty} c'_j (1-t^2)^j$$

$$= K_N(1-t^2)^{(N-1)/2}(1-t^2)^{2m}\left(1-(1-t^2)\right)^{m-1/2} = K_N(1-t^2)^{2m+(N-1)/2} t^{2m-1}.$$

Функция $\mathfrak{R}_N\left[\nu_m\right](t)$ дифференцируема $2m$ раз, в точке $t=1$ все ее производные от нулевого до $2m$-го порядка равны нулю, в точке $t=0$ производные от нулевого до $(2m-2)$-го порядка равны нулю, а производная $(2m-1)$-го порядка не равна нулю.

Возьмем четную дифференцируемую $2m$ раз неотрицательную функцию g, строго положительную на отрезке $[-1/2, 1/2]$ и тождественно равную нулю вне отрезка $[-3/4, 3/4]$ (такие функции, очевидно, существуют). Из представления (2.2) следует, что $\mathcal{R}_N\left[g\right]$ — четная дифференцируемая $2m$ раз функция, тождественно равная нулю вне отрезка $[-3/4, 3/4]$. В силу четности $\mathcal{R}_N\left[g\right](t)$ в точке $t=0$ все существующие производные нечетного порядка равны нулю, а при $|t| \geq 3/4$ функция $\mathcal{R}_N\left[g\right](t)$ и все ее производные тождественно равны нулю.

Определим функцию $v_m(2t) = \nu_m(1-t^2)$ при $t \in [-1/2, 1/2]$ и $v_m(t) = 0$ при $|t| > 1/2$. По построению v_m непрерывна на $[0,1]$, $\mathcal{R}_N\left[v_m\right]$ дифференцируема $2m$ раз на $[0,1]$ и

$$\left(\mathcal{R}_N\left[v_m\right]\right)^{(2m-1)}(0) \neq 0.$$

Функция $g(t)$ неотрицательна на $[0,1]$ и строго положительна на отрезке $[0,1/2]$, а функция v_m ограничена на $[0,1/2]$ и равна нулю на $[1/2,1]$. Значит, найдется положительная константа $c > 0$ такая, что функция

$$v(t) = cg(t) + \frac{\sigma}{\left(\mathcal{R}_N\left[v_m\right]\right)^{(2m-1)}(0)} v_m(t)$$

будет неотрицательной. Тогда в силу линейности преобразования $\mathcal{R}_N$ соответствующая функция $u = \mathcal{R}_N\left[v\right](t)$ будет удовлетворять всем требованиям леммы: $u(t)$ дифференцируема $2m$ раз, $u^{2m-1}(0) = \sigma$, $u^{2k-1}(0) = 0$ при всех $k = 1, \ldots, m-1$, а в силу того, что $u(t) = 0$ при $|t| \geq 3/4$, следует, что $u^k(1) = 0$ при всех $k = 1, \ldots, 2m$. Доказательство леммы завершено.

3. Основной результат

Теорема. *Пусть заданы набор $M = \{\mu_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ такой, что*

$$0 < \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j| < \infty, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j = 0,$$

и множество $\Lambda \subsetneq \mathbb{Z}^N$, удовлетворяющее условию $r(\Lambda) = \inf_{\mathbf{s}\notin\Lambda} |\mathbf{s}| > 0$. Тогда найдется число $\gamma > 0$ (зависящее только от набора M) такое, что при всех $f \in L_2$ выполняется неравенство

$$E_\Lambda(f) \leq \frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |\mu_j|^2}}\, \omega_M\Big(f, \frac{\gamma}{r(\Lambda)}\Big). \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при любом $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^N$ справедливы равенства

$$\Delta_{\mathbf{t}}^M e^{i\mathbf{s}\mathbf{x}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k e^{i\mathbf{s}(\mathbf{x}+k\mathbf{t})} = e^{i\mathbf{s}\mathbf{x}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k e^{ik\mathbf{s}\mathbf{t}}.$$

Поэтому для $f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^N} \widehat{f}_{\mathbf{s}} e^{i\mathbf{s}\mathbf{x}}$ из L_2 имеем

$$\big\|\Delta_{\mathbf{t}}^M f\big\|^2 = \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{f}_{\mathbf{s}}|^2 \phi(\mathbf{t}\mathbf{s}), \qquad \text{где} \quad \phi(\tau) = \Big|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mu_k e^{ik\tau}\Big|^2.$$

Из условия $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k| < \infty$ следует, что ϕ является непрерывной 2π-периодической функцией.

Для любого веса v верны неравенства

$$\omega_M^2(f,\delta) \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t} \geq \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} \omega_M^2(f, \delta|\mathbf{t}|) v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t} \geq \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} \big\|\Delta_{\delta\mathbf{t}}^M f\big\|^2 v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t},$$

$$\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^N} |\widehat{f}_{\mathbf{s}}|^2 \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t} \geq \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^N\setminus\Lambda} |\widehat{f}_{\mathbf{s}}|^2 \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t}$$

$$\geq \Big(\sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^N\setminus\Lambda} |\widehat{f}_{\mathbf{s}}|^2\Big) \inf_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^N\setminus\Lambda} \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t} = E_\Lambda^2(f) \inf_{\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^N\setminus\Lambda} \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t}. \tag{3.2}$$

Для периодической функции g с периодом T введем обозначение

$$I(g) = \frac{1}{T} \int\limits_{t=0}^{T} g(t) dt$$

для ее среднего значения на периоде. Несложно подсчитать, что

$$I(\phi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\mu_k|^2.$$

Покажем, что можно подобрать вес $v(t)$ и число $\gamma > 0$ такие, что при всех $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющих условию $\delta|\mathbf{s}| \geq \gamma$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} \phi(\delta\mathbf{s}\mathbf{t}) v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t} \geq I(\phi) \int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} v(|\mathbf{t}|) d\mathbf{t}, \tag{3.3}$$

откуда будет следовать неравенство (3.1).

Обозначим
$$\psi(t) = \frac{\phi(t) + \phi(-t)}{2}.$$
Ясно, что ψ — четная функция и справедливы равенства
$$I(\phi) = I(\psi), \qquad \int\limits_{|\mathbf{t}|\le 1} \phi(\delta\mathbf{st})v(|\mathbf{t}|)d\mathbf{t} = \int\limits_{|\mathbf{t}|\le 1} \psi(\delta\mathbf{st})v(|\mathbf{t}|)d\mathbf{t}.$$

Расположим оси координат для интегрирования так, чтобы вектор $(1, 0, 0, \dots, 0)$ был сонаправлен $\mathbf{s}$. Пусть $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)$, тогда $\mathbf{st} = |\mathbf{s}|t_1$ и
$$\int\limits_{|\mathbf{t}|\le 1} \psi(\delta\mathbf{st})v(|\mathbf{t}|)d\mathbf{t} = \int\limits_{\sum_{j=1}^N t_j^2 \le 1} \psi(\delta|\mathbf{s}|t_1)v\Big(\sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^N t_j^2}\,\Big)\,dt_1\,dt_2\dots dt_N$$
$$= \int\limits_{|t_1|\le 1} \psi(\delta|\mathbf{s}|t_1)\Bigg(\int\limits_{\sum_{j=1}^N t_j^2 \le 1} v\Big(\sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^N t_j^2}\,\Big)\,dt_2\dots dt_N\Bigg)dt_1.$$
Заметим, что в скобках под интегралом находится преобразование $\mathcal{R}_N[v]$ (см. определение (2.1)). Очевидно, что для функции $u = \mathcal{R}_N[v]$ выполнено равенство
$$\int\limits_{|\mathbf{t}|\le 1} v(|\mathbf{t}|)d\mathbf{t} = \int\limits_{|t|\le 1} u(t)\,dt,$$
следовательно, обозначив $\xi = \delta|\mathbf{s}|$ и сделав замену $t = t_1$, можно переписать неравенство (3.3) как
$$\int\limits_{|t|\le 1} \psi(\xi t)u(t)dt \ge I(\psi)\int\limits_{|t|\le 1} u(t)\,dt. \tag{3.4}$$

Положим
$$\psi_0(t) = I(\psi) - \psi(t), \qquad \psi_k(t) = \int\limits_0^t \big(I(\psi_{k-1}) - \psi_{k-1}(\tau)\big)d\tau, \qquad k \in \mathbb{N},$$
тогда (3.4) эквивалентно условию
$$\int\limits_0^1 \psi_0(\xi t)u(t)dt \le 0.$$
Отметим, что все функции ψ_k периодичны. Кроме того, поскольку ψ_0 — четная функция, то для всех $k \in \mathbb{N}$ функции ψ_{2k} — четные, а ψ_{2k-1} — нечетные. Из нечетности и периодичности функций ψ_{2k-1} следует, что $I(\psi_{2k-1}) = 0$ при всех натуральных k.

Покажем, что существуют сколь угодно большие натуральные m, для которых $I(\psi_{2m}) \ne 0$. Действительно, если при некотором k для любого натурального l выполняется равенство $I(\psi_{k+l}) = 0$, то при l-кратном интегрировании функции ψ_k с переменным верхним пределом будут получаться периодические функции с нулевым значением интеграла по периоду. Это равносильно ортогональности ψ_k всем алгебраическим полиномам на отрезке $[0, 1]$, следовательно, функция ψ_k тождественно равна нулю. Но $\psi_k^{(k)} = (-1)^k\psi_0$, а для ненулевого набора коэффициентов M функция ψ_0 не может быть тождественно равной нулю.

Выберем $m > N/2+1$ такое, что $I(\psi_{2m}) \neq 0$. По доказанной выше лемме для $\sigma = I(\psi_{2m})$ существует вес v, для которого определенная в (2.1) функция u удовлетворяет требованиям леммы. В частности, $u(t)$ дифференцируема $2m$ раз и $u^{(k)}(1) = 0$ при $k \leq 2m$. Отсюда при $k \leq 2m$ и $k > 1$ имеем

$$\int\limits_0^1 \psi_k(\xi t)u^{(k)}(t)dt = u^{(k-1)}(1)\psi_k(\xi) - u^{(k-1)}(0)\psi_k(0) - \xi\int\limits_0^1 \psi_k'(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt$$

$$= -\xi\int\limits_0^1 \left(I(\psi_{k-1}) - \psi_{k-1}(\xi t)\right)u^{(k-1)}(t)dt = \xi\int\limits_0^1 \psi_{k-1}(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt - \xi I(\psi_{k-1})\int\limits_0^1 u^{(k-1)}(t)dt$$

$$= \xi\int\limits_0^1 \psi_{k-1}(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt - \xi I(\psi_{k-1})(u^{(k-2)}(1) - u^{(k-2)}(0))$$

$$= \xi\int\limits_0^1 \psi_{k-1}(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt + \xi I(\psi_{k-1})u^{(k-2)}(0).$$

Если k четно, то $I(\psi_{k-1}) = 0$, а если k нечетно и $k < 2m$, то $u^{k-2}(0) = 0$. Учитывая равенства $I(\psi_1) = I(\psi_0) = 0$, получим, что

$$\int\limits_0^1 \psi_k(\xi t)u^{(k)}(t)dt = \xi\int\limits_0^1 \psi_{k-1}(\xi t)u^{(k-1)}(t)dt$$

$$= \xi^2\int\limits_0^1 \psi_{k-2}(\xi t)u^{(k-2)}(t)dt = \ldots = \xi^{k-1}\int\limits_0^1 \psi_1(\xi t)u'(t)dt = \xi^k\int\limits_0^1 \psi_0(\xi t)u(t)dt.$$

По лемме Фейера (см., например, [9]) при $\xi \to \infty$

$$\int\limits_0^1 \psi_{2m}(\xi t)u^{(2m)}(t)dt \to I(\psi_{2m})\left(u^{(2m-1)}(1) - u^{(2m-1)}(0)\right),$$

т. е.

$$\xi^{2m}\int\limits_0^1 \psi_0(\xi t)u(t)dt \to -I(\psi_{2m})u^{(2m-1)}(0). \tag{3.5}$$

Так как $u^{(2m-1)}(0) = I(\psi_{2m}) \neq 0$ по построению функции u, правая часть в (3.5) равна $-(I(\psi_{2m}))^2 < 0$. Следовательно, для некоторого γ при всех $\xi > \gamma$ величина $\xi^{2m}\int_0^1 \psi_0(\xi t)u(t)dt$ будет отрицательной. Отсюда следует, что при $\xi > \gamma$ выполняется неравенство (3.4), т. е. при $\delta|\mathbf{s}| > \gamma$ верно неравенство (3.3).

По определению $r(\Lambda)$, если $\mathbf{s} \notin \Lambda$, то $|\mathbf{s}| \geq r(\Lambda)$, значит, если в (3.2) положить $\delta = \gamma/r(\Lambda)$, получим

$$\omega_M^2(f,\delta)\int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} v(|\mathbf{t}|)d\mathbf{t} \geq I(\psi)E_\Lambda^2(f)\int\limits_{|\mathbf{t}|\leq 1} v(|\mathbf{t}|)d\mathbf{t},$$

откуда следует неравенство (3.1). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. 1967. Т. 88. С. 71–74.
2. **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. 1967. Т. 2, вып. 5. С. 513–522.
3. **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона в L_2 // Мат. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 309–315.
4. **Бабенко А.Г.** Минимальная константа Джексона — Стечкина в L^2 // Соврем. состояние и перспективы развития математики в рамках программы “Казахстан в третьем тысячелетии”: тр. Междунар. конф. Алматы: Ин-т математики, 2001. С. 72–76.
5. **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Мат. заметки. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 333–355.
6. **Васильев С.Н.** Точное неравенство Джексона — Стечкина в L_2 с модулем непрерывности, порожденным произвольным конечно-разностным оператором с постоянными коэффициентами // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 1. С. 11–14.
7. **Горбачев Д.В., Странковский С.А.** Одна экстремальная задача для четных положительно определенных целых функций экспоненциального типа // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 5. С. 712–717.
8. **Козко А.И., Рождественский А.В.** О неравенстве Джексона с обобщенным модулем непрерывности // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 8. С. 3–46.
9. **Fejer L.** Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen // J. Reine und Angew. Math. 1910. Vol. 138. P. 22–53.

Васильев Станислав Николаевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Stanislav.Vasilyev@imm.uran.ru

Поступила 11.10.2008

Том 15 № 1 2009

УДК 514.7

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ, ИЗМЕНЯЮЩЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ[1]

В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В работе предлагается метод построения векторных полей с определенными вихревыми свойствами с помощью преобразований, изменяющих величину вектора поля в каждой точке, форму линий поля и их взаимное расположение. Обсуждаются и на конкретных примерах иллюстрируются перспективы использования метода в приложениях, связанных с решением дифференциальных уравнений с частными производными, в том числе и нелинейных.

Ключевые слова: векторные поля, взаимная ориентация поля и поля его ротора, отображение векторных полей.

V.P. Vereshchagin, Yu.N. Subbotin, and N.I. Chernykh. Transformation that changes the geometric structure of a vector field.

A method is proposed of constructing vector fields with certain vortex properties by means of transformations changing the value of the field vector at every point, the form of field lines, and their mutual position. We discuss and give concrete examples of the prospects of using the method in applications involving solution of partial differential equations, including nonlinear ones.

Keywords: vector fields, mutual orientation of a field and the field of its curl, mapping of vector fields.

Векторному полю $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X})$, заданному в некоторой области D евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ и обладающему подходящими свойствами гладкости[2], можно поставить в соответствие поле его ротора — $\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

Если интересоваться взаимной ориентацией полей $\mathbf{a}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, то можно выделить поля трех типов. К первому относятся поля (назовем их поперечно вихревыми в D), которые всюду в D отвечают условию $(\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) = 0$; ко второму — поля (назовем их смешанно вихревыми или просто смешанными в D), которые почти всюду в D отвечают условиям: $(\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) \neq 0$, $[\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{a}] \neq 0$; к третьему — поля (назовем их продольно вихревыми в D), которые отвечают условиям: $[\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{a}] = 0$ всюду в D, $(\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) \neq 0$ почти всюду в D. Здесь и далее символы $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ и $[\mathbf{g}, \mathbf{h}]$ используются для обозначения скалярного и векторного произведений векторов $\mathbf{g}$ и $\mathbf{h}$.

Линии поперечно вихревого в D поля $\mathbf{a}$ всюду в D ортогональны его вихревым линиям (линиям поля $\operatorname{rot}\mathbf{a}$). В случае потенциального поля $\mathbf{a}$ имеем $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$ в D, поэтому потенциальное в D поле можем отнести и относим также к поперечно вихревым полям. Линии поля $\mathbf{a}$, смешанно вихревого в D, почти всюду в области D образуют с его вихревыми линиями произвольные углы, отличные от 0 и π, а линии продольно вихревого в D поля всюду в D совпадают с его вихревыми линиями.

1. Постановка вопроса о взаимных свойствах векторного поля и поля его ротора применительно к механике возникла в связи с изучением [1–3] вихревого установившегося движения жидкости. Специальные случаи такого движения, когда вихревые линии всюду совпадают с линиями тока (случаи винтового движения по терминологии авторов работ [1, 2]) и когда

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00014), Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1), а также программы Президиума РАН “Математическая теория управления”.

[2]Поле (скалярное, векторное, тензорное) считается здесь гладким, если оно непрерывно дифференцируемо.

вихревые линии всюду перпендикулярны к линиям тока, впервые детально исследовались И. С. Громекой. Тем самым было положено начало теории винтовых потоков[3] и потоков с поперечной циркуляцией — важного для приложений раздела механики вихревых движений (см. статью Н. А. Талицких “Научные труды И. С. Громеки” в [2]).

Итак, для математического описания физических моделей движения жидкости при различных начальных и граничных условиях, используемых в теоретических исследованиях, требуются векторные поля с определенной (в том числе и задаваемой наперед [1–3]) взаимной ориентацией поля и поля его ротора, которая зависит от формы и расположения линий самого поля, т. е. от деталей его геометрического строения как семейства линий, непрерывно заполняющих все пространство или его область. Изменяя геометрическое строение поля, можно изменять и ориентацию поля его ротора относительно поля. Подходящей для этого операцией представляется композиция двух преобразований: поворота и изменения длины вектора поля в каждой точке.

2. Для иллюстрации обратимся к примеру. Обозначим через X_1, X_2, X_3 координаты точки евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ относительно декартовой системы координат с базисом $\{\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3\}$, а через $\mathbf{X}$ — саму точку и ее радиус-вектор.

Зададим в области $D \subset \mathbb{R}^3$ единичное векторное поле

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{i}_1. \tag{1}$$

Линии поля (1) — параллельные прямые. Изменим взаимную ориентацию векторов поля (1) посредством тензорного поля вращений $\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}(\psi, \mathbf{i}_3)$. Тензорное поле $\widehat{\Omega}$, действуя в каждой точке $\mathbf{X}$ области D на вектор $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X})$, поворачивает его на угол $\psi = \psi(\mathbf{X})$ вокруг оси, проходящей через $\mathbf{X}$ в направлении единичного вектора

$$\mathbf{l}(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{i}_3. \tag{2}$$

В результате такого преобразования полю (1) ставится в соответствие единичное векторное поле

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}) = \widehat{\Omega}(\psi(\mathbf{X}), \mathbf{i}_3)\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) = \mathbf{i}_1 \cos\psi(\mathbf{X}) + \mathbf{i}_2 \sin\psi(\mathbf{X}). \tag{3}$$

(Отметим, что в общем случае поля $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{l}(\mathbf{X})$ можно выбирать произвольно).

Ротор поля (3) выражается через оператор ∇ Гамильтона формулой

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta} = [\nabla, \boldsymbol{\beta}] = -(\mathbf{i}_3, \nabla\psi)\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{\beta}, \nabla\psi)\mathbf{i}_3$$

и имеет, вообще говоря, продольную $-(\mathbf{i}_3, \nabla\psi)\boldsymbol{\beta}$ и поперечную $(\boldsymbol{\beta}, \nabla\psi)\mathbf{i}_3$ составляющие по отношению к самому полю $\boldsymbol{\beta}$.

Если

$$\frac{\partial\psi}{\partial X_3} \neq 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial X_1}\cos\psi + \frac{\partial\psi}{\partial X_2}\sin\psi \neq 0,$$

то обе составляющие отличны от нуля, и поле (3) — смешанно вихревое. Если же

$$\frac{\partial\psi}{\partial X_3} \neq 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial X_1}\cos\psi + \frac{\partial\psi}{\partial X_2}\sin\psi \equiv 0,$$

то отлична от нуля только продольная составляющая, и поле (3) — продольно вихревое.

Если отказаться от условия $|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})| \equiv 1$, то поперечную составляющую в первом случае можно устранить также и путем преобразования $\sigma(\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})$, где $\sigma(\mathbf{X})$ — скалярное поле.

В результате полю (1) ставится в соответствие векторное поле

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \widehat{G}(\mathbf{X})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) \tag{4}$$

[3] За рубежом винтовое движение известно под названием “движение Бельтрами”.

посредством преобразования
$$\widehat{G}(\mathbf{X}) = \sigma(\mathbf{X})\widehat{\Omega}(\psi(\mathbf{X}), \mathbf{i}_3). \tag{5}$$

Поле (4) будет продольно вихревым в D при подходящем выборе полей σ, ψ — параметров преобразования (5), например, таком, когда выполняются следующие два условия:

(а) $\sigma = C\exp(f)$, $\psi = \varphi + \theta$, где C — отличная от нуля постоянная, а $f = f(X_1, X_2)$, $\varphi = \varphi(X_1, X_2)$, $\theta = \theta(X_3)$ — гладкие в D скалярные поля;

(б) поле φ отвечает в D требованию $\Delta\varphi = 0$, где Δ — дифференциальный оператор Лапласа.

При этом в случае односвязной области D и при выбранных функциях φ и θ можно показать, что из условия коллинеарности $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ и $\operatorname{rot}\mathbf{b}(\mathbf{X})$ следует формула

$$f(X_1, X_2) = f(X_{10}, X_{20}) + \int\limits_{\mathbf{X_0}}^{\mathbf{X}} \big(d\mathbf{X}', [\mathbf{i}_3, \nabla\psi(\mathbf{X}')]\big),$$

в которой при $\Delta\varphi \equiv 0$ интеграл не зависит от пути интегрирования. Тогда

$$\mathbf{b} = C\exp(f)\big\{\mathbf{i}_1\cos(\varphi+\theta) + [\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_1]\sin(\varphi+\theta)\big\}, \tag{6}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = -\frac{\partial\theta}{\partial X_3}\mathbf{b}.$$

Отметим, что линии поля (3) представляют собой семейство плоских кривых, если (3) — смешанно вихревое поле, и семейство прямых (параллельных между собой в каждой плоскости $X_3 = \mathrm{const}$), если поле (3) — продольно вихревое.

Такие различия в форме линий единичных векторных полей (криволинейность одних и прямолинейность других) характерны для всех единичных векторных полей с различными взаимными свойствами поля и поля его ротора, в том числе и для полей направлений неединичных векторных полей.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим некоторое векторное поле

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{X}) = |\mathbf{b}(\mathbf{X})|\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}) \tag{7}$$

и семейство его линий. Уравнения линий $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s)$, где s — натуральный параметр, находятся из решения дифференциального уравнения $d\mathbf{X} = \boldsymbol{\beta}ds$, выражающего условие коллинеарности элемента $d\mathbf{X} = \mathbf{X}'ds$ линии поля и вектора $\boldsymbol{\beta}$, взятого в той же точке поля. Штрих при $\mathbf{X}$ означает здесь и ниже дифференцирование по s.

Кривизна k и кручение τ линии поля (7) выражаются через производные $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X}''$, $\mathbf{X}'''$ функции $\mathbf{X}(s)$ формулами [4]
$$k = |\mathbf{X}''|, \qquad \tau = \frac{\big(\mathbf{X}', [\mathbf{X}'', \mathbf{X}''']\big)}{k^2}, \tag{8}$$

а сами производные выражаются через вектор поля $\boldsymbol{\beta}$ в (7) и производные от поля $\boldsymbol{\beta}$ по направлению $\boldsymbol{\beta}$, взятые в точке $\mathbf{X} = \mathbf{X}(s)$, формулами

$$\mathbf{X}' = \boldsymbol{\beta}, \qquad \mathbf{X}'' = (\boldsymbol{\beta}, \nabla)\boldsymbol{\beta}, \qquad \mathbf{X}''' = (\boldsymbol{\beta}, \nabla)(\boldsymbol{\beta}, \nabla)\boldsymbol{\beta}. \tag{9}$$

С другой стороны, в силу тождеств $\nabla(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \equiv 0$, $\nabla(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}) \equiv 2\big\{[\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}] + (\boldsymbol{\beta}, \nabla)\boldsymbol{\beta}\big\}$ имеем $(\boldsymbol{\beta}, \nabla)\boldsymbol{\beta} \equiv -[\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}]$.

Если теперь ввести, следуя Гамильтону, векторное поле

$$\mathbf{h} = -[\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}], \tag{10}$$

то можно записать
$$\mathbf{X}'' = \mathbf{h}\big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(s)}, \qquad \mathbf{X}''' = (\boldsymbol{\beta}, \nabla)\mathbf{h}\big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(s)}. \tag{11}$$

Следовательно (см. также [5]), вектор поля (10) в каждой точке $\mathbf{X}$ области D равен по величине кривизне линии поля (7), проходящей через точку $\mathbf{X}$, и направлен вдоль главной нормали к линии поля в этой точке.

Подстановка первой из формул (9) и формул (11) в (8) приводит к выражениям

$$k = |\mathbf{h}|\Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(s)}, \qquad \tau = \frac{1}{k^2}\big(\boldsymbol{\beta}, [\mathbf{h}, (\boldsymbol{\beta}, \nabla)\mathbf{h}]\big)\Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}(s)}.$$

Итак, если поле направлений $\boldsymbol{\beta}$ векторного поля (7) потенциальное либо продольно вихревое в D, то в каждой точке области D выполняется равенство $[\boldsymbol{\beta}, \mathrm{rot}\boldsymbol{\beta}] = 0$ и в каждой точке каждой линии поля будем иметь $\mathbf{h} = 0$, $k = 0$. Следовательно, линии поля — прямые линии.

Если $[\boldsymbol{\beta}, \mathrm{rot}\boldsymbol{\beta}] \neq 0$ почти всюду в D, т. е. $\boldsymbol{\beta}$ — поперечно вихревое либо смешанно вихревое поле, то линии поля (7) криволинейны и могут быть как плоскими, так и пространственными кривыми.

Стало быть, зависимость взаимной ориентации полей $\boldsymbol{\beta}$ и $\mathrm{rot}\boldsymbol{\beta}$ от геометрического строения поля (7) такова, что допустимыми оказываются лишь определенные варианты в сочетаниях вихревых свойств единичного поля направлений и формы линий поля (7). Если же речь идет о сочетании вихревых свойств самого поля (7) и формы его линий, то число таких вариантов возрастает за счет вклада от векторного поля ∇b, поскольку $\mathrm{rot}\mathbf{b} = b\,\mathrm{rot}\boldsymbol{\beta} + [\nabla b, \boldsymbol{\beta}]$. Так, неединичное поле (6), например, при $\varphi = (X_1^2 - X_2^2)/2$, $\theta = X_3$ и $f = X_1X_2$ является продольно вихревым в $\mathbb{R}^3$, хотя линии его криволинейны, а его поле направлений — смешанно вихревое почти всюду в $\mathbb{R}^3$.

Это обстоятельство оправдывает использование именно композиции поворота и изменения длины векторов поля для изменения взаимной ориентации векторного поля и поля его ротора.

В приведенном выше примере некоторые из свойств рассматриваемых полей (нормировка и пространственная однородность задаваемого поля (1), пространственная однородность единичного поля (2), детали функциональной зависимости скалярных полей ψ и σ) не являются принципиально необходимыми. Учитывая это, можно подвести следующий итог.

Преобразование

$$\widehat{G}(\mathbf{X}) = \sigma(\mathbf{X})\widehat{\Omega}\big(\psi(\mathbf{X}), \mathbf{l}(\mathbf{X})\big), \tag{12}$$

определяемое скалярными полями σ, ψ и векторным полем $\mathbf{l}$, действуя на любое векторное поле $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X})$, заданное в области $D \subset \mathbb{R}^3$, изменяет его геометрическое строение, что позволяет получать в зависимости от выбора параметров σ, ψ, $\mathbf{l}$ преобразования векторные поля с различными свойствами, которые обусловлены величиной вектора поля в каждой точке области D, формой линий поля и их взаимным расположением в D.

3. Для решения задач, связанных с построением векторного поля $\mathbf{b}$ с какими-то заданными свойствами, в рамках предлагаемого подхода, когда поле $\mathbf{b}$ ищется в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{X}) = \widehat{G}(\mathbf{X})\mathbf{a}(\mathbf{X})$$

как результат отображения заданного поля $\mathbf{a}$ посредством преобразования $\widehat{G}$ (12), необходимо знать:

(а) насколько геометрическое строение поля $\mathbf{b}$ зависит от параметров $\sigma, \psi, \mathbf{l}$ преобразования $\widehat{G}$ и насколько от геометрического строения отображаемого поля $\mathbf{a}$;

(б) при каких параметрах преобразования $\widehat{G}$ возможные разрывы непрерывности линии нового поля будут устранимыми разрывами, т. е. при каких полях $\sigma, \psi, \mathbf{l}$ поле $\mathbf{b}$ будет гладким векторным полем при условии, что $\mathbf{a}$ — гладкое поле.

Ответы на эти вопросы содержатся в следующей теореме. Предварительно напомним, что ненулевые векторы называются антинаправленными, если угол между ними равен π.

Теорема. *Пусть векторные поля* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *нигде в* D *не являются антинаправленными и* $\mathbf{a} \in C^{(1)}(D)$, $\mathbf{b} \in C^{(1)}(D)$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. *Тогда существуют такое скалярное поле* σ *класса* $C^{(1)}(D)$ *и семейство полей вращений* $\widehat{\Omega}$ *класса* $C(D)$, *определяемых подходящими скалярными и векторными полями* $\psi(\mathbf{X})$, $\mathbf{l}(\mathbf{X})$, *что* $\mathbf{b} = \sigma\widehat{\Omega}\mathbf{a}$.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы вытекает, что из множества всех отображений $\sigma\widehat{\Omega}$ поля $\mathbf{a}$ в поле $\mathbf{b}$ можно выделить непрерывные, а из доказательства теоремы будет следовать, что при условиях теоремы в точках области D, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, конструируемые тензорные поля вращений $\widehat{\Omega}$ (а значит и поля $\sigma\widehat{\Omega}$) тоже непрерывно дифференцируемы.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть $\mathbf{X}$ — произвольная точка из D, и пусть векторным полям

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}), \qquad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{X}) \tag{13}$$

ставятся в соответствие единичные векторные поля

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}), \qquad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})$$

с помощью правил

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{a}(\mathbf{X})}{|\mathbf{a}(\mathbf{X})|}, \qquad \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{X})}{|\mathbf{b}(\mathbf{X})|}. \tag{14}$$

Введем тензорное поле $\widehat{\Omega}$ второго ранга, определяемое гладким скалярным полем ψ и векторным полем $\mathbf{l}$ по формуле

$$\widehat{\Omega} = \cos\psi\ \widehat{I} + (1-\cos\psi)\mathbf{l}\cdot\mathbf{l} + \sin\psi\ \widehat{U}, \tag{15}$$

где $\widehat{I}$, $\mathbf{l}\cdot\mathbf{l}$, $\widehat{U}$ — операторы, определяемые соотношениями: $\widehat{I}\mathbf{c} = \mathbf{c}$, $\mathbf{l}\cdot\mathbf{l}\mathbf{c} = \mathbf{l}(\mathbf{l},\mathbf{c})$, $\widehat{U}\mathbf{c} = [\mathbf{l},\mathbf{c}]$ для любого вектора $\mathbf{c}$.

Тензорное поле (15), действуя в каждой точке $\mathbf{X}$ на вектор $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X})$, поворачивает последний на угол $\psi = \psi(\mathbf{X})$ вокруг оси, проходящей через точку $\mathbf{X}$ в направлении единичного вектора $\mathbf{l} = \mathbf{l}(\mathbf{X})$. Далее рассмотрим два случая.

С л у ч а й А. Пусть $\mathbf{X}$ — любая точка из D, в которой векторы $\mathbf{a}(\mathbf{X})$, $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ не коллинеарны. Пусть в (15) векторное поле $\mathbf{l}(\mathbf{X})$ определяется в таких точках формулой

$$\mathbf{l} = \boldsymbol{\lambda}_+\cos\gamma + \boldsymbol{\lambda}\sin\gamma, \tag{16}$$

где $\gamma = \gamma(\mathbf{X})$ — некоторое гладкое скалярное поле,

$$\boldsymbol{\lambda}_+ = \frac{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})}{\big|\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})\big|}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = \frac{\big[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})\big]}{\big|[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})]\big|}, \tag{17}$$

а скалярное поле $\psi(\mathbf{X})$ определяется уравнениями

$$\cos\psi = F, \qquad \sin\psi = -F'. \tag{18}$$

В (18) скалярные поля F и F' задаются формулами

$$F = \frac{(f_+)(f_-)}{f}, \qquad F' = 1 - \Big(\frac{f_+^2}{f}\Big). \tag{19}$$

Здесь

$$f_\pm = \sqrt{L_+}\sin\gamma \pm \sqrt{L_-}, \tag{20}$$

$$f = \frac{\big(f_+^2 + f_-^2\big)}{2}, \tag{21}$$

где

$$L_{\pm} = 1 \pm (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}). \tag{22}$$

Поле ψ зависит от гладкого поля γ и от взаимной ориентации векторных полей (13), характеризуемой скалярным полем

$$S = (\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}), \boldsymbol{\beta}(\mathbf{X})), \tag{23}$$

т. е.

$$\psi = \psi(F, F'), \qquad F = F(\gamma(\mathbf{X}), S(\mathbf{X})), \qquad F' = F'(\gamma(\mathbf{X}), S(\mathbf{X})). \tag{24}$$

Таким образом, тензорное поле вращений формулой (15) полностью определено в точках, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны.

Покажем, что

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{X}) = \widehat{\Omega}(\mathbf{X})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}). \tag{25}$$

Действительно,

$$\widehat{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\cos\psi + (1-\cos\psi)(\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha})\mathbf{l} + \sin\psi\ [\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha}]. \tag{26}$$

Подстановка (16), (18) в (26) приводит к выражению

$$\widehat{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = F\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}(1-F)(\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha})\sin\gamma\ - [\boldsymbol{\lambda}_+, \boldsymbol{\alpha}]F'\cos\gamma\ + \boldsymbol{\lambda}_+(1-F)(\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha})\cos\gamma\ - [\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}]F'\sin\gamma. \tag{27}$$

Замечая далее, что

$$1 - F = \frac{2L_-}{f}, \qquad (\mathbf{l}, \boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{\frac{L_+}{2}}\cos\gamma,$$

$$F' = \frac{-2\sqrt{L_+L_-}\sin\gamma}{f},$$

$$[\boldsymbol{\lambda}_+, \boldsymbol{\alpha}] = -\sqrt{\frac{L_-}{2}}\,\boldsymbol{\lambda}, \qquad [\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}] = \frac{\boldsymbol{\beta} - S\boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{L_+L_-}},$$

$$L_+ + L_- = 2, \quad L_+ - L_- = 2S,$$

преобразуем (27) к виду

$$\widehat{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = F\boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{f}\big((L_+ - L_-)\sin^2\gamma - L_-\cos^2\gamma\big)\boldsymbol{\alpha} + \frac{1}{f}\big(L_-\cos^2\gamma + (L_+ + L_-)\sin^2\gamma\big)\boldsymbol{\beta}.$$

Используя равенства $(L_+ - L_-)\sin^2\gamma - L_-\cos^2\gamma = L_+\sin^2\gamma - L_- = f_+f_-$, первую из формул (19) и приводя подобные, получим

$$\widehat{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{f}\big(L_+\sin^2\gamma + L_-\big)\boldsymbol{\beta}.$$

Числитель при множителе $\boldsymbol{\beta}$ в последнем выражении равен f в силу (21), поскольку

$$L_+\sin^2\gamma + L_- = \frac{(f_+^2 + f_-^2)}{2}.$$

Следовательно, $\widehat{\Omega}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ и (25) доказано.

Формула (25) и формулы (14) позволяют в свою очередь установить связь между векторами $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ и $\mathbf{b}(\mathbf{X})$, выражаемую формулой

$$\mathbf{b}(\mathbf{X}) = \sigma(\mathbf{X})\widehat{\Omega}(\mathbf{X})\mathbf{a}(\mathbf{X}). \tag{28}$$

Скалярное поле $\sigma(\mathbf{X})$ в (28) при заданных полях (13) определяется однозначно формулой

$$\sigma(\mathbf{X}) = \frac{|\mathbf{b}(\mathbf{X})|}{|\mathbf{a}(\mathbf{X})|} \tag{29}$$

и непрерывно дифференцируемо, а тензорное поле вращений $\widehat{\Omega} = \widehat{\Omega}(\mathbf{X})$ определяется формулами (15)–(24) с точностью до произвольно заданного гладкого скалярного поля $\gamma(\mathbf{X})$. Произвол объясняется тем, что поворот, преобразующий заданный вектор $\boldsymbol{\alpha}$ в заданный вектор $\boldsymbol{\beta}$, не является единственным.

Действительно, ось вращения располагается в плоскости векторов $\boldsymbol{\lambda}_+$, $\boldsymbol{\lambda}$ и направлена вдоль вектора $\mathbf{l}$, ориентация которого задается с помощью угла γ. Положительные направления отсчета углов γ и ψ совпадают с направлениями против часовой стрелки, если смотреть навстречу векторам $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ и $\mathbf{l}$ соответственно.

Ясно, что при любом значении угла γ, фиксирующего направление единичного вектора $\mathbf{l}$ в плоскости векторов $\boldsymbol{\lambda}_+, \boldsymbol{\lambda}$, найдется такой угол ψ, что поворот $\widehat{\Omega}$ вокруг оси $\mathbf{l}$ на угол ψ преобразует вектор $\boldsymbol{\alpha}$ в вектор $\boldsymbol{\beta}$, и он определяется уравнениями (18).

Отметим, что условия $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ всюду в D обеспечивают такую же гладкость векторных полей $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, как у полей $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. А при дополнительном условии неколлинеарности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ из формул (16)–(22) вытекает, что это же верно для векторного поля $\mathbf{l}$ и скалярных полей $\cos\psi$, $\sin\psi$.

Таким образом, в условиях теоремы для гладкости тензорного поля вращений $\widehat{\Omega}$ в точках $\mathbf{X}$, где векторы $\mathbf{a}(\mathbf{X})$, $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ не коллинеарны, достаточно гладкости поля $\gamma(\mathbf{X})$. В частности, $\widehat{\Omega} \in C(D)$, если $\gamma \in C(D)$; $\widehat{\Omega} \in C^{(1)}(D)$, если $\gamma \in C^{(1)}(D)$.

С л у ч а й Б. Предположим теперь, что в области D имеется точка $\mathbf{X}^{(+)}$, в которой

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \qquad (S^{(+)} = 1).$$

В этом случае гладкое поле γ будем выбирать так, что $\gamma^{(+)} \neq n\pi$. Здесь и ниже надстрочный индекс $(+)$ используется для обозначения полевых величин, взятых в точках $\mathbf{X}^{(+)}$, а n — целое число. Точкам $\mathbf{X}^{(+)}$ соответствуют значения $F^{(+)} = 1$, $F'^{(+)} = 0$ полей (19), так как при $S^{(+)} = 1$ и $\gamma^{(+)} \neq n\pi$ из (20)–(22) следует, что $(f_+^{(+)})(f_-^{(+)}) = f^{(+)} = 2\sin^2\gamma^{(+)} \neq 0$. Следовательно, поля (19) и поле $\psi(\mathbf{X})$ будут непрерывными в D при непрерывности γ. Тогда уравнения (18) в точке $\mathbf{X}^{(+)}$ принимают вид $\cos\psi^{(+)} = 1$, $\sin\psi^{(+)} = 0$ и удовлетворяются при $\psi^{(+)} = 2n\pi$. Поворот вокруг любой оси на угол, равный $2n\pi$, представляет собой тождественное преобразование, т. е. $\widehat{\Omega}^{(+)} = \widehat{I}$, $\boldsymbol{\beta}^{(+)} = \widehat{\Omega}^{(+)}\boldsymbol{\alpha}^{(+)}$, а следовательно, $\mathbf{b} = \sigma\widehat{\Omega}\mathbf{a}$ и в точках $\mathbf{X}^{(+)}$.

Так как поле $\boldsymbol{\lambda}$ в (17) — единичное в тех точках, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не параллельны, а $\sigma(\mathbf{X})$ — гладкое поле по условию теоремы, то предел последовательности операторов $\{\widehat{\Omega}(\mathbf{X}_n)\}$ при $\mathbf{X}_n \to \mathbf{X}^{(+)}$ по последовательностям $\{\mathbf{X}_n\}$, не содержащим точек вида $\mathbf{X}^{(+)}$, равен $\widehat{I}$ в силу доказанной части теоремы. Тем более это верно для последовательностей вида $\{\mathbf{X}_n^{(+)}\} \to \mathbf{X}^{(+)}$. Таким образом, построенное тензорное поле вращений $\widehat{\Omega}$ в точках $\mathbf{X}^{(+)}$ непрерывно. Теорема доказана. $\square$

Формула (28) с учетом соотношений (15)–(24) выражает правило, посредством которого устанавливается непрерывное в D отображение гладкого ненулевого поля $\mathbf{a}$ в гладкое ненулевое поле $\mathbf{b}$. Таким образом, построен класс гладких тензорных полей вращений $\widehat{\Omega}$, каждое из которых определяется посредством произвольно задаваемого гладкого в D скалярного поля γ, отличного от $n\pi$ в точках $\mathbf{X}^{(+)}$.

З а м е ч а н и е 2. Пусть в области D имеется точка $\mathbf{X}^{(-)}$, в которой $\boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\beta}$ $(S^{(-)} = -1)$. Тогда при остальных условиях теоремы тензорное поле вращения $\widehat{\Omega}$ (15), построенное при доказательстве теоремы для точек $\mathbf{X} \neq \mathbf{X}^{(-)}$, можно доопределить в $\mathbf{X}^{(-)}$ по непрерывности. Надстрочный индекс $(-)$ используется здесь и ниже для обозначения полевых величин, взятых в точке $\mathbf{X}^{(-)}$.

Действительно, уравнения (18) в точке $\mathbf{X}^{(-)}$ принимают вид $\cos\psi^{(-)} = -1$, $\sin\psi^{(-)} = 0$, поскольку $F^{(-)} = -1$, $F'^{(-)} = 0$, и имеют решения $\psi^{(-)} = (2n+1)\pi$. С другой стороны, из (18)–(22) следует, что $\psi(\mathbf{X}) \to (2n+1)\pi$ при $\mathbf{X} \to \mathbf{X}^{(-)}$.

Единичное векторное поле $\mathbf{l}$ в точке $\mathbf{X}^{(-)}$ формулами (16), (17) не определено. Покажем, что скалярное поле $(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha})$ в точке $\mathbf{X}^{(-)}$ испытывает устранимый разрыв, а именно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha})\Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^{(-)}+\varepsilon\mathbf{e}} = 0, \tag{30}$$

где $\mathbf{e}$ — произвольный единичный вектор. Действительно, скалярное поле $(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha})$ в точках $\mathbf{X}$, где $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ не коллинеарны, можно выразить формулой

$$(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\sqrt{1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}}{\sqrt{2}}\cos\gamma,$$

так как

$$\mathbf{l} = \frac{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|}\cos\gamma + \boldsymbol{\lambda}\sin\gamma,$$

откуда

$$(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|}\cos\gamma = \frac{\sqrt{1+S}}{\sqrt{2}}\cos\gamma,$$

где S задано формулой (23).

Формула (30) позволяет определить поле $(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha})$ в точках вида $\mathbf{X}^{(-)}$ равенством $(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha})^{(-)} = 0$, не нарушая непрерывности скалярного поля $(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha})$.

В точке $\mathbf{X}^{(-)}$ определению поддается и тензорное поле вращений (15), если положить

$$\widehat{\Omega}^{(-)} = -\widehat{I} + 2\mathbf{l}^{(-)}\mathbf{l}^{(-)},$$

что соответствует предельному переходу $\widehat{\Omega}(\mathbf{X}) \to \widehat{\Omega}(\mathbf{X}^{(-)})$ при $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) \to \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}^{(-)})$ в (26). Здесь $\mathbf{l}^{(-)}$ — единичный вектор, направленный произвольным образом в плоскости, ортогональной вектору $\boldsymbol{\alpha}^{(-)}$. Так как $(\mathbf{l},\boldsymbol{\alpha})^{(-)} = 0$, то действие оператора $\widehat{\Omega}^{(-)}$ на вектор $\boldsymbol{\alpha}^{(-)}$ не зависит от выбора $\mathbf{l}^{(-)}$.

Поворот вектора $\boldsymbol{\alpha}^{(-)}$ на угол, равный $(2n+1)\pi$, вокруг любой оси $\mathbf{l}^{(-)}$, ортогональной $\boldsymbol{\alpha}^{(-)}$, изменяет его направление на противоположное. Учитывая это, можно записать $\boldsymbol{\beta}^{(-)} = \widehat{\Omega}^{(-)}\boldsymbol{\alpha}^{(-)}$, и, следовательно, $\boldsymbol{\beta} = \widehat{\Omega}\boldsymbol{\alpha}$, $\mathbf{b} = \sigma\widehat{\Omega}\mathbf{a}$ всюду в D.

З а м е ч а н и е 3. Из доказательства (см. случай A) видно, что если в D нет точек $\mathbf{X}^{(\pm)}$, в которых $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, но $\mathbf{a} \neq 0$, $\mathbf{b} \neq 0$ в D, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} \in C^{(1)}(D)$, то тензорное поле вращений $\widehat{\Omega} = \widehat{I}\cos\psi + (1-\cos\psi)\mathbf{l}\cdot\mathbf{l} + \sin\psi\widehat{U}$, где $\mathbf{l}$ и ψ определяются формулами (16)–(22), принадлежит $C^{(1)}(D)$.

З а м е ч а н и е 4. Если же в области D нет точек $\mathbf{X}^{(-)}$, в которых $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ антинаправлены, то при остальных условиях теоремы так же можно построить гладкое в D поле вращений, сузив подходящим образом класс скалярных полей $\gamma(\mathbf{X})$.

Из доказательства теоремы следует, что и гладкое тензорное поле вращений $\widehat{\Omega}$ определяется при заданных полях $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не единственным образом. Это обстоятельство немаловажно и может использоваться при решении задач, связанных с построением векторных полей, когда параметры $\psi, \mathbf{l}$ в (15) — независимо задаваемые поля. Произволом в выборе этих полей можно распорядиться по-разному: упростить исследование условий, обеспечивающих требуемые свойства искомого поля; отображать одно и то же векторное поле $\mathbf{a}$ в векторные поля с различными свойствами либо в различные векторные поля с каким-то общим для всех полей свойством, например, в векторные поля, образующие класс всех гладких единичных продольно вихревых полей.

В качестве исходных полей $\mathbf{a}$ пригодны в принципе поля любого типа, в том числе и поперечно вихревые. Гладкие поперечно вихревые поля можно строить, например, с помощью наперед заданных в D скалярных полей (обозначим их μ и Φ) класса $C^{(2)}$, следуя правилу $\mathbf{a} = \mu\,\mathrm{grad}\,\Phi$.

В заключение следует обратить внимание на одно из возможных и важных направлений приложения метода преобразований, устанавливающих математические соотношения между классами гладких векторных полей с различным строением и различными свойствами поля и поля его ротора. Это направление связано с решением дифференциальных уравнений. Дело в том, что взаимные свойства векторного поля и поля его ротора могут выражаться и выражаются дифференциальными уравнениями с частными производными, в том числе и нелинейными, интегрирование которых позволяет в принципе найти векторное поле с требуемыми свойствами, но фактически оказывается трудноразрешимой задачей. Трудности на этом пути можно преодолеть отчасти или даже полностью, следуя предлагаемому здесь методу, поскольку понимание и использование зависимости вихревых свойств векторного поля от его геометрического строения позволяют либо упростить интегрирование исходных уравнений, либо избежать его вовсе, непосредственно конструируя подходящее поле.

В качестве примера приведем поставленную И. С. Громекой [2] задачу о нахождении векторного поля в области D, линии которого всюду в D совпадают с его вихревыми линиями[4]. Решение ее в классе гладких единичных векторных полей, предусматривающее, если следовать И. С. Громеке, интегрирование системы уравнений

$$\begin{cases} [\boldsymbol{\beta}, \operatorname{rot}\boldsymbol{\beta}] = 0, \\ |\boldsymbol{\beta}| = 1 \end{cases} \tag{31}$$

или эквивалентной ей в силу $|\boldsymbol{\beta}|^2 = 1$ системы скалярных уравнений относительно декартовых координат вектора $\boldsymbol{\beta}$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{3} \beta_n \frac{\partial \beta_k}{\partial X_n} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{3} \beta_n^2 = 1 \end{cases}$$

при условиях $\boldsymbol{\beta} \in C^{(1)}(D)$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{\beta} \neq 0$ почти всюду в D, можно найти с помощью теоремы из [6], содержащей рецепт конструирования поля, имеющего такое геометрическое строение, которое характерно для единичных продольно вихревых полей, и заведомо удовлетворяющего поэтому системе (31). К этому классу, в частности, относятся и поля (3), когда $\psi = \psi(X_3)$, $\partial\psi/\partial X_3 \neq 0$ почти всюду в D, а также поля, построенные в работе [7]. А поле (6), построенное в разд. 2 в односвязной области D при условиях $\mathbf{b} \in C^{(1)}(D)$, $\operatorname{rot}\mathbf{b} \neq 0$ почти всюду в D, есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} [\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{b}] = 0, \\ \operatorname{div}\mathbf{b} = 0. \end{cases} \tag{32}$$

Решение найдено в классе гладких соленоидальных (имеющих нулевую дивергенцию) векторных полей

$$\mathbf{b} = C\boldsymbol{\beta}(\psi)\exp f, \tag{33}$$

продольно вихревых в D, линии которых — плоские кривые с бинормалью, коллинеарной в каждой точке орту $\mathbf{i}_3$. В скалярной форме система уравнений (32) имеет вид

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{3} b_n \Big(\frac{\partial b_n}{\partial X_k} - \frac{\partial b_k}{\partial X_n}\Big) = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial b_n}{\partial X_n} = 0. \end{cases}$$

[4]Сам он ее решил [2] в классе векторных полей, удовлетворяющих требованию $\operatorname{rot}\mathbf{b} \equiv \lambda\mathbf{b}$ ($\lambda = \mathrm{const}$) при однородных граничных условиях.

Класс полей (33) есть результат преобразований (5) одного и того же поля (1), образующих класс преобразований, параметризованных парой скалярных полей ($\sigma = C \exp f, \psi$), где C — отличная от нуля постоянная. Поле ψ в каждой паре — задаваемое поле, достаточно гладкое в D, любое, подчиняющееся ограничениям

$$\frac{\partial \psi}{\partial X_3} \neq 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial X_1} \cos \psi + \frac{\partial \psi}{\partial X_2} \sin \psi \neq 0.$$

При этом выделяются такие поля направлений $\boldsymbol{\beta}(\psi)$, которые относятся к классу единичных смешанно вихревых в D полей. Условие коллинеарности в D поля $\mathbf{b}$ из класса (33) и поля его ротора приводят в свою очередь к ограничению

$$\nabla f = [\mathbf{i}_3, \nabla \psi] \tag{34}$$

на выбор поля f, определяющего поле σ. Ограничение (34) при задаваемом ψ есть уравнение относительно f. В скалярной форме это уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial X_1} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial X_2}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial X_2} = \dfrac{\partial \psi}{\partial X_1}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial X_3} = 0. \end{cases}$$

Решение ее приводится в разд. 2 и определяет f как однозначную функцию x в односвязной области D, если ψ подчиняется ограничению

$$\operatorname{rot} [\mathbf{i}_3, \nabla \psi] = 0, \tag{35}$$

которое в скалярной форме выражается системой равенств

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1 \partial X_3} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2 \partial X_3} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_2^2} = 0.$$

Класс всех полей ψ, подчиняющихся (35), указан в разд. 2. Каждое из полей этого класса есть сумма полей φ и θ класса $C^{(2)}(D)$, причем φ принадлежит классу гармонических в D полей. Примером таких полей φ и θ могут служить поля $\varphi = (x_1^2 - x_2^2)/2,\ \theta = x_3^2$.

Таким образом, использование метода преобразований для построения класса (33) решений системы уравнений (32), хотя и предусматривает решение уравнения (34) с частными производными, но интегрирование уравнения (34) проще, чем интегрирование непосредственно системы уравнений (32). Отметим также, что в рамках этого метода уже достаточно широкий класс полей (33) может быть расширен до класса всех гладких соленоидальных полей, удовлетворяющих системе уравнений (32), линии которых — плоские кривые.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Craig Th.** On certain possible cases of steady motion in a viscous fluid // Amer. J. Math. 1880. Vol. 3, no. 3. P. 269–288.
2. **Громека И.С.** Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с.
3. **Beltrami E.** Considerazioni idrodinamiche // Rend. Istit. Lombardo Accad. Sci. Lett. 1889. Vol. 22. P. 121–130.
4. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1977. 832 с.
5. **Аминов Ю.А.** Геометрия векторного поля. М.: Наука, 1990. 208 с.

6. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** К построению единичных продольно вихревых векторных полей с помощью гладких отображений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 82–91.
7. **Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Продольно вихревые единичные векторные поля из класса аксиально симметричных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 92–98.

Поступила 28.11.2008

Верещагин Владимир Пантелеевич
д-р физ.-мат. наук, проф.
Рос. гос. проф.-пед. ун-т, г. Екатеринбург

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 517.518.86

О ТОЧНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА — НИКОЛЬСКОГО ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОГОМЕРНОЙ ЕВКЛИДОВОЙ СФЕРЕ[1]

М. В. Дейкалова

Исследуется наилучшая константа $C_{n,m}$ в неравенстве Джексона — Никольского между равномерной и интегральной нормами алгебраических многочленов заданного порядка $n \geq 0$ (по совокупности переменных) на единичной сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^m$. Для константы $C_{n,m}$ получены двусторонние оценки, которые дают, в частности, порядок ее поведения n^{m-1} по n при $n \to +\infty$ и фиксированном m.

Ключевые слова: многомерная евклидова сфера, алгебраические многочлены, неравенство Джексона — Никольского.

M. V. Deikalova. About the sharp Jackson–Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere.

The best constant $C_{n,m}$ in the Jackson–Nikol'skii inequality between uniform and integral norms of algebraic polynomials of given total degree $n \geq 0$ on the unit sphere $\mathbb{S}^{m-1}$ of the Euclidean space $\mathbb{R}^m$ is studied. Two-sided estimates for the constant $C_{n,m}$ are obtained, which, in particular, give the order n^{m-1} of its behavior with respect to n as $n \to +\infty$ for a fixed m.

Keywords: multidimensional Euclidean sphere, algebraic polynomials, Jackson–Nikol'skii inequality.

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^m,\ m \geq 2$, есть евклидово пространство со скалярным произведением

$$xy = \sum_{k=1}^{m} x_k y_k, \quad x = (x_1, \dots, x_m), \quad y = (y_1, \dots, y_m),$$

и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. При $r > 0$ рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m$ шар $\mathbb{B}^m(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : \ |x| \leq r\}$ и сферу $\mathbb{S}^{m-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^m : \ |x| = r\}$ радиуса r с центром в начале координат; единичные шар и сферу ($r = 1$) будем обозначать соответственно через $\mathbb{B}^m$ и $\mathbb{S}^{m-1}$.

Сделаем несколько замечаний относительно рассматриваемых в данной работе мер и интегралов. На множествах $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{S}^{k-1}(r)$ $(1 \leq k \leq m)$ рассматривается классическая мера Лебега (соответствующей размерности), и для измеримого подмножества E этих множеств символом $|E|$ условимся обозначать (соответствующую) меру множества E. Пусть $L(E)$ есть пространство функций, измеримых и суммируемых на E, наделенное нормой $\|f\|_{L(E)} = \displaystyle\int_E |f(x)| dx$. На множестве E мы будем рассматривать еще пространство $L_\infty(E)$ измеримых существенно ограниченных функций с нормой $\|f\|_{L_\infty(E)} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)| : \ x \in E\}$.

Обозначим через $\mathcal{P}_{n,m}$ множество алгебраических многочленов

$$P_n(x) = \sum_{\substack{\alpha_1 + \ldots + \alpha_m \leq n, \\ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m}} c_\alpha x^\alpha,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213).

степени (не выше) n от m (вещественных) переменных с вещественными коэффициентами c_α.

Основная цель данной работы состоит в исследовании наилучшей константы $C_{n,m}$ в неравенстве

$$\|P_n\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})} \le C_{n,m}\, \|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}, \tag{1.1}$$

между равномерной и интегральной нормами многочленов заданного порядка на единичной сфере. Ниже будет доказано следующее утверждение.

Теорема A. *При $m \ge 3$ существуют положительные константы A_m и B_m такие, что при всех $n \ge 1$ выполняются неравенства*

$$A_m n^{m-1} \le C_{n,m} \le B_m n^{m-1}.$$

Эта теорема дает правильный порядок поведения величины $C_{n,m}$ по n при $n \to +\infty$ для фиксированного m. На самом деле в данной работе будут выписаны информативные оценки сверху и снизу для $C(n,m)$. В частности, будет доказано, что при любых $m \ge 3$, $n \ge 1$ справедливо неравенство

$$C_{n,m} \le \frac{(2\,n+m-1)\,\Gamma\,(n+m-1)}{2^m \pi^{(m-1)/2} \Gamma\Big(\dfrac{m+1}{2}\Big)\Gamma\,(n+1)}.$$

При $m = 2$ неравенство (1.1) сводится к точному неравенству

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}} \le C(n)\|f_n\|_{L_{2\pi}}, \quad f_n \in \mathcal{T}_n, \tag{1.2}$$

между равномерной и интегральной нормами

$$\|f_n\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f_n(t)| : \ t \in \mathbb{R}\}, \qquad \|f_n\|_{L_{2\pi}} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f_n(t)|dt$$

на множестве $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

заданного порядка $n \ge 1$ с вещественными коэффициентами. Задача исследования константы $C(n)$ восходит к Д. Джексону [3]. Как показал С. Б. Стечкин (см. [1,2]), существует предел $c = \lim\limits_{n\to\infty} C(n)/n$. Л. В. Тайков [1] (см. также [2]) получил для величины c близкие между собой оценки сверху и снизу. Лучшие на данный момент результаты относительно наилучшей константы $C(n)$ в неравенстве (1.2) получены в работах В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанова, С. А. Пичугова [4] и Д. В. Горбачева [5] (см. также [6]). Д. В. Горбачев, в частности, установил [5,6] связь неравенства (1.2) с другими экстремальными задачами теории функций.

Неравенство (1.2) есть частный случай неравенств разных метрик, обстоятельное изучение которых было начато С. М. Никольским [7]. В настоящее время таким неравенствам посвящено большое число исследований; см., к примеру, работы [8,9] и приведенную там библиографию.

Как будет показано ниже, неравенство (1.1) сводится к точному неравенству для алгебраических многочленов одного переменного в пространстве суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с соответствующим ультрасферическим весом. Такие неравенства изучались многими математиками; наиболее общий результат здесь получил В. И. Иванов [8]. В частности, в работе [8] содержится правильный порядок по n наилучшей константы в одномерном неравенстве, соответствующем неравенству (1.1).

В данной работе неравенство (1.1) обсуждается для случая $m \ge 3$.

2. Редукция задачи

2.1. На множестве $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n,1}$ алгебраических многочленов (одного переменного) порядка n на отрезке $\mathbb{I} = [-1, 1]$ будем рассматривать равномерную норму

$$\|p\|_C = \|p\|_{C(\mathbb{I})} = \max\{|p(t)| : \ t \in \mathbb{I}\}$$

и интегральную норму с весом

$$\|p\|_{L(m)} = \|p\|_{L(\mathbb{I},m)} = \int\limits_{\mathbb{I}} |p(t)|\,(1-t^2)^{(m-3)/2}\,dt.$$

Обозначим через $M_{n,m}$ и $M_{n,m}(1)$ наименьшие (наилучшие) константы в неравенствах

$$\|p\|_C \le M_{n,m}\|p\|_{L(m)}, \quad p \in \mathcal{P}_n, \tag{2.1}$$

$$|p(1)| \le M_{n,m}(1)\|p\|_{L(m)}, \quad p \in \mathcal{P}_n, \tag{2.2}$$

соответственно; ясно, что $M_{n,m}(1) \le M_{n,m}$.

Теорема 1. *При $n \ge 1$, $m \ge 3$ для наилучших констант в неравенствах* (1.1), (2.1) *и* (2.2) *имеют место равенства*

$$M_{n,m} = M_{n,m}(1) = |\mathbb{S}^{m-2}|\,C_{n,m}. \tag{2.3}$$

2.2. Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных построений и утверждений. В наших дальнейших рассуждениях будут использоваться известные формулы (см., например, [10, гл. 18, § 5, п. 676]):

$$|\mathbb{B}^m(r)| = |\mathbb{B}^m|\,r^m, \qquad |\mathbb{B}^m| = \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma\Big(\dfrac{m+2}{2}\Big)},$$

$$|\mathbb{S}^{m-1}(r)| = |\mathbb{S}^{m-1}|\,r^{m-1}, \qquad |\mathbb{S}^{m-1}| = m|\mathbb{B}^m| = \frac{2\,\pi^{m/2}}{\Gamma\Big(\dfrac{m}{2}\Big)},$$

где Γ есть гамма-функция Эйлера.

Следующая лемма есть вариант теоремы Фубини; подробное обоснование этого утверждения с помощью перехода к полярным координатам на сфере можно найти, например, в [11].

Лемма 1. *Для суммируемой на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$ функции f справедлива формула*

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} f(x)dx = |\mathbb{S}^{m-2}| \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^{(m-3)/2} F(t)\,dt, \tag{2.4}$$

в которой

$$F(t) = F(t,f) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} f\,(ru,\,t)\,du, \quad r = r(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad t \in (-1,1). \tag{2.5}$$

На отрезке $\mathbb{I} = [-1, 1]$ имеет место оценка

$$|F(t)| \le \overline{F}(t) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} |f\,(ru,\,t)\,|\,du, \quad r = \sqrt{1-t^2}.$$

Функция $\overline{F}$ определена формулой (2.5) по функции $|f|$. Поэтому, с помощью формулы (2.4) для функции $|f|$, получаем неравенство

$$|\mathbb{S}^{m-2}|\ \|F\|_{L(m)} = |\mathbb{S}^{m-2}| \int\limits_{-1}^{1} |F(t)|\,(1-t^2)^{(m-3)/2}\,dt \le \|f\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}. \tag{2.6}$$

Отметим еще, что если функция f непрерывна на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$, то функция F непрерывна на отрезке $\mathbb{I} = [-1,1]$, причем справедливо равенство

$$F(1) = f(e_m), \quad e_m = (0,\dots,0,1). \tag{2.7}$$

Следующая лемма описывает структуру функции (2.5) в случае, когда f есть многочлен.

Лемма 2. *При $n \ge 1$, $m \ge 3$ для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$ функция*

$$F_n(t) = F_n(t,P_n) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{m-2}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} P_n\,(ru,\,t)\,du, \quad r = r(t) = \sqrt{1-t^2}, \tag{2.8}$$

является многочленом (одного) переменного $t = x_m$ порядка n.

Доказательство леммы также содержится в работе [11], однако мы повторим его здесь для удобства читателя. Рассмотрим свойства интеграла

$$g(r,t) = \int\limits_{\mathbb{S}^{m-2}} P_n\,(ru,\,t)\,du$$

как функции двух независимых переменных r,t. При фиксированном u подынтегральная функция $P_n(ru,\,t)$ является многочленом двух переменных r,t порядка n (с коэффициентами, зависящими от y). Поэтому функция $g(r,t)$ является многочленом порядка n от двух переменных r,t. В силу свойства симметрии сферы имеем $g(-r,t) = g(r,t)$, т. е. по переменному r многочлен $g(r,t)$ четный. Отсюда следует, что функция $g(\sqrt{1-t^2},t)$ является многочленом порядка n переменного $t \in [-1,1]$. Лемма доказана. □

2.3. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Произвольному многочлену $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$ по формуле (2.8) сопоставим многочлен $F_n \in \mathcal{P}_n$. В силу (2.7), (2.2) и (2.6) имеем

$$P_n(e_m) = F_n(1) \le M_{n,m}(1)\|F_n\|_{L(m)} \le \frac{M_{n,m}(1)}{|\mathbb{S}^{m-2}|}\|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}. \tag{2.9}$$

Пространство $\mathcal{P}_{n,m}$ инвариантно относительно ортогональных преобразований сферы. Поэтому неравенство (1.1) эквивалентно неравенству

$$|P_n(e_m)| \le C_{n,m}\,\|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \quad P_n \in \mathcal{P}_{n,m}. \tag{2.10}$$

Соотношения (2.9) и (2.10) влекут оценку

$$C_{n,m} \le \frac{M_{n,m}(1)}{|\mathbb{S}^{m-2}|}.$$

Пусть $p_n \in \mathcal{P}_n$. Введем многочлен $P_n(x_1,\dots,x_{m-1},x_m) = p_n(x_m)$ от m переменных порядка n. В силу (2.4) и (2.8) имеем

$$\|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} = |\mathbb{S}^{m-2}|\,\|p_n\|_{L(m)};$$

кроме того, очевидно, $\|P_n\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})} = \|p_n\|_{C(\mathbb{I})}$. Поэтому, применяя (1.1), получаем неравенство

$$\|p_n\|_{C(\mathbb{I})} \le C_{n,m}\,|\mathbb{S}^{m-2}|\,\|p_n\|_{L(m)}, \quad p_n \in \mathcal{P}_n.$$

Отсюда следует оценка $M_{n,m} \le |\mathbb{S}^{m-2}|\,C_{n,m}$. Итак, мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$|\mathbb{S}^{m-2}|\,C_{n,m} \le M_{n,m}(1) \le M_{n,m} \le |\mathbb{S}^{m-2}|\,C_{n,m},$$

которая влечет утверждение (2.3). Теорема 1 доказана. □

3. Одномерная задача

Основная цель данного раздела — изучение наилучших констант в неравенствах (2.1), (2.2). Нам удобно рассматривать более общую ситуацию, а именно, в правой части этих неравенств вместо ультрасферического веса взять вес Якоби.

3.1. При $\alpha,\beta > -1$, $1 \le p < \infty$ обозначим через $L^p(w^{(\alpha,\beta)}) = L^p(\alpha,\beta)$ пространство измеримых функций f на отрезке $\mathbb{I} = [-1,1]$, у которых степень $|f|^p$ суммируема с весом Якоби $w(t) = w^{(\alpha,\beta)}(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$. Это пространство наделено нормой

$$\|f\|_{L^p(\alpha,\beta)} = \left(\int\limits_{-1}^{1} |f(t)|^p\,(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt\right)^{1/p}.$$

При $p=1$ наряду с $L^1(\alpha,\beta)$ будет использоваться обозначение $L(\alpha,\beta)$. Пространство $L^2(\alpha,\beta)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt. \tag{3.1}$$

Пусть $\{P_k^{(\alpha,\beta)}\}_{k=0}^\infty$ — система многочленов Якоби, ортогональных на отрезке $\mathbb{I} = [-1,1]$ относительно скалярного произведения (3.1) и нормированных условием

$$P_k^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{k+\alpha}{k}, \qquad \binom{k+\alpha}{k} = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k)}{k!};$$

богатую информацию о многочленах Якоби можно найти в книге [12]. Известно, что для величины

$$h_k^{(\alpha,\beta)} = \langle P_k^{(\alpha,\beta)}, P_k^{(\alpha,\beta)}\rangle = \int\limits_{-1}^{1} \left(P_k^{(\alpha,\beta)}(t)\right)^2 (1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt$$

имеет место формула [12, гл. 4, § 4.3, формула (4.3.3)]

$$h_k^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2k+\alpha+\beta+1}\,\frac{\Gamma(k+\alpha+1)\,\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}.$$

Следовательно, многочлены

$$p_k = p_k^{(\alpha,\beta)} = \frac{1}{\sqrt{h_k^{(\alpha,\beta)}}}\,P_k^{(\alpha,\beta)}, \quad k \ge 0,$$

образуют ортонормальную систему многочленов Якоби (относительно скалярного произведения (3.1)).

Для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ (одного переменного порядка n) имеет место представление

$$P_n(x) = \int\limits_{-1}^{1} P_n(t)\mathcal{K}_n(x,t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt, \tag{3.2}$$

в котором $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n^{(\alpha,\beta)}$ есть ядро Кристоффеля — Дарбу

$$\mathcal{K}_n(x,t) = \mathcal{K}_n^{(\alpha,\beta)}(x,t) = \sum_{k=0}^{n} p_k^{(\alpha,\beta)}(x)p_k^{(\alpha,\beta)}(t) = \sum_{k=0}^{n}\left(h_k^{(\alpha,\beta)}\right)^{-1} P_k^{(\alpha,\beta)}(x)P_k^{(\alpha,\beta)}(t).$$

Нас интересует эта функция при $x = 1$, т. е. функция одного переменного

$$K_n(t) = K_n^{(\alpha,\beta)}(t) = \mathcal{K}_n(1,t);$$

для нее имеет место формула [12, гл. 4, § 4.5, формула (4.5.3)]

$$K_n(t) = 2^{-(\alpha+\beta+1)}\ \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\, P_n^{(\alpha+1,\beta)}(t).$$

Известно [12, гл. 7, § 7.32, теорема 7.32.1], что если

$$\alpha+1 \geq \max\{\beta, -1/2\}, \tag{3.3}$$

то

$$\|P_n^{(\alpha+1,\beta)}\|_{C(\mathbb{I})} = P_n^{(\alpha+1,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha+1}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+2)}.$$

Поэтому при выполнении условия (3.3) имеем

$$\|K_n^{(\alpha,\beta)}\|_{C(\mathbb{I})} = K_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 2^{-(\alpha+\beta+1)}\ \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+2)}. \tag{3.4}$$

Обозначим через $M_n^{(\alpha,\beta)}(1)$ наилучшую константу в неравенстве

$$|P_n(1)| \leq M_n^{(\alpha,\beta)}(1)\|P_n\|_{L(\alpha,\beta)}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n. \tag{3.5}$$

Лемма 3. *Если $\alpha+1 \geq \max\{\beta,-1/2\}$, то для любого $n \geq 0$ имеет место оценка*

$$M_n^{(\alpha,\beta)}(1) \leq \overline{M}_n^{(\alpha,\beta)}, \tag{3.6}$$

в которой

$$\overline{M}_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-(\alpha+\beta+1)}\ \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+2)}. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (3.2) при $x = 1$ принимает вид

$$P_n(1) = \int_{-1}^{1} P_n(t)K_n^{(\alpha,\beta)}(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}\,dt, \quad P_n \in \mathcal{P}_n.$$

Отсюда следует неравенство

$$|P_n(1)| \leq \|K_n^{(\alpha,\beta)}\|_{C(\mathbb{I})}\|P_n\|_{L(\alpha,\beta)}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n,$$

а значит, справедлива оценка $M_n^{(\alpha,\beta)}(1) \leq \|K_n^{(\alpha,\beta)}\|_{C(\mathbb{I})}$. Неравенство (3.6) следует теперь из (3.4). Лемма доказана. □

Исследуем поведение величины (3.7) по n при $n \to \infty$. Известно (впрочем, в этом легко убедиться с помощью формулы Стирлинга), что при любом вещественном a

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-a}\frac{\Gamma(x+a+1)}{\Gamma(x+1)} = 1. \tag{3.8}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} n^{-2\alpha-2}\overline{M}_n^{(\alpha,\beta)} = 2^{-(\alpha+\beta+1)}\ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)}.$$

В частном случае $\beta = \alpha \geq -1/2$ утверждение леммы 3 принимает вид

$$M_n^{(\alpha,\alpha)}(1) \leq \frac{(n+\alpha+1)\,(\alpha+1)\,4^{-\alpha}\Gamma\,(n+2\,\alpha+2)}{2\,(\Gamma\,(\alpha+2))^2\,\Gamma\,(n+1)}. \tag{3.9}$$

Теорема 2. *При* $n \geq 1$, $m \geq 3$ *для наилучших констант в неравенствах* (2.1), (2.2) *и* (1.1) *справедливы оценки*

$$M_{n,m} = M_{n,m}(1) \leq \frac{(2\,n+m-1)\,(m-1)\,\Gamma\,(n+m-1)}{2^m\left(\Gamma\Big(\dfrac{m+1}{2}\Big)\right)^2\Gamma\,(n+1)}, \tag{3.10}$$

$$C_{n,m} \leq \frac{(2\,n+m-1)\,\Gamma\,(n+m-1)}{2^m\pi^{(m-1)/2}\Gamma\Big(\dfrac{m+1}{2}\Big)\Gamma\,(n+1)}. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в (3.9) $\alpha = (m-3)/2$, получаем оценку

$$M_{n,m}(1) \leq \frac{(2\,n+m-1)\,(m-1)\,\Gamma\,(n+m-1)}{2^m\left(\Gamma\Big(\dfrac{m+1}{2}\Big)\right)^2\Gamma\,(n+1)};$$

тем самым проверено соотношение (3.10). Неравенство (3.11) следует из (3.10) и (2.3). Теорема 2 доказана. □

3.2. Оценим наилучшую константу в неравенстве (3.5) снизу. Это будет сделано с помощью конкретного многочлена, конструкция которого восходит к С. Н. Бернштейну (см., например, [13, гл. 1, § 2], [14] и приведенные там ссылки).

Пусть $P_k = P_k^{(\alpha,\beta)}$ есть многочлен Якоби (порядка $k \geq 1$) и $t_k = t_k(\alpha,\beta)$ — его наибольший нуль. Рассмотрим многочлен

$$R_{2k-1}(t) = \frac{P_k^2(t)}{t-t_k} \tag{3.12}$$

нечетной степени $n = 2k-1$. Имеем $R_{2k-1}(t) \leq 0,\ t \in [-1,t_k]$, и $R_{2k-1}(t) \geq 0,\ t \in [t_k,1]$. Многочлен R_{2k-1} удовлетворяет условию (см., например, [17], [12, гл. 14])

$$\int_{-1}^{1} R_{2k-1}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt = 0. \tag{3.13}$$

Из формул (3.13) и (3.12) следует, что

$$\|R_{2k-1}\|_{L(\alpha,\beta)} = \int_{-1}^{1} |R_{2k-1}(t)|(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt = 2\int_{t_k}^{1} R_{2k-1}(t)(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\,dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену $t = \cos\theta,\ \theta \in [0,\theta_k]$, где $\theta_k = \theta_k(\alpha) = \arccos t_k$. В результате получаем выражение

$$\|R_{2k-1}\|_{L(\alpha,\beta)} = \int_0^{\theta_k} R_{2k-1}(\cos\theta)W(\theta)\,d\theta, \tag{3.14}$$

в котором

$$W(\theta) = W^{(\alpha,\beta)}(\theta) = 2\,(1-\cos\theta)^\alpha(1+\cos\theta)^\beta\sin\theta.$$

Сделав в (3.14) еще одну замену $\theta = z/k,\ z \in (0,k\theta_k]$, получим

$$\|R_{2k-1}\|_{L(\alpha,\beta)} = \frac{1}{k}\int_0^{k\theta_k} R_{2k-1}\left(\cos\frac{z}{k}\right)W\left(\frac{z}{k}\right)\,dz. \tag{3.15}$$

Исследуем поведение функции

$$R_{2k-1}\left(\cos\frac{z}{k}\right)=\frac{\left(P_k^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{z}{k}\right)\right)^2}{\cos\frac{z}{k}-\cos\frac{k\theta_k}{k}}$$

по k при $k\to\infty$. Известно (см., например, [12, гл. 8, § 8.1, теорема 8.1.2]), что

$$\lim_{k\to\infty}k\theta_k(\alpha)=j(\alpha),$$

где $j(\alpha)$ есть первый положительный нуль функции Бесселя

$$J_\alpha(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{\nu!\Gamma(\nu+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha+2\nu}$$

первого рода порядка α. Для $j(\alpha)$ имеют место оценка снизу [18, § 15.3]

$$j(\alpha)>\sqrt{\alpha(\alpha+2)},\quad \alpha>0,$$

и оценка сверху [19]

$$j(\alpha)<\sqrt{\alpha+1}\left(\sqrt{\alpha+2}+1\right),\quad \alpha>-1.$$

Хорошо известно [12, гл. 8, § 8.1, теорема 8.1.1], что

$$\lim_{k\to\infty}k^{-\alpha}P_k^{(\alpha,\beta)}\left(\cos\frac{z}{k}\right)=\lim_{k\to\infty}k^{-\alpha}P_k^{(\alpha,\beta)}\left(1-\frac{z^2}{2k^2}\right)=\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}J_\alpha(z);$$

причем сходимость равномерная на любом ограниченном подмножестве комплексной плоскости. Отсюда заключаем, что

$$\lim_{k\to\infty}k^{-2\alpha-2}R_{2k-1}\left(\cos\frac{z}{k}\right)=2\left(\frac{z}{2}\right)^{-2\alpha}\frac{J_\alpha^2(z)}{j^2(\alpha)-z^2},\quad z\in(0,+\infty),\ z\neq j(\alpha). \tag{3.16}$$

Далее, для функции

$$W\left(\frac{z}{k}\right)=W^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{z}{k}\right)=2\left(1-\cos\left(\frac{z}{k}\right)\right)^\alpha\left(1+\cos\left(\frac{z}{k}\right)\right)^\beta\sin\left(\frac{z}{k}\right)$$

имеем

$$\lim_{k\to\infty}k^{2\alpha+1}W\left(\frac{z}{k}\right)=2^{\beta-\alpha+1}z^{2\alpha+1}. \tag{3.17}$$

В силу (3.15), (3.16), (3.17) справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{k\to\infty}\|R_{2k-1}\|_{L(\alpha,\beta)}=2^{\beta+\alpha+2}\int\limits_0^{j(\alpha)}\frac{J_\alpha^2(z)}{j^{\,2}(\alpha)-z^2}\,z\,dz. \tag{3.18}$$

Исследуем теперь поведение величины $R_{2k-1}(1)$ по k при $k\to\infty$. Имеем

$$R_{2k-1}(1)=\frac{P_k^2(1)}{1-\cos\frac{k\theta_k}{k}}=\frac{1}{1-\cos\frac{k\theta_k}{k}}\left(\frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha+1)}\right)^2.$$

В силу (3.8)

$$\lim_{k\to\infty}k^{-2\alpha-2}R_{2k-1}(1)=\frac{2}{j^{\,2}(\alpha)\left(\Gamma(\alpha+1)\right)^2}. \tag{3.19}$$

Положим

$$\Delta_k^{(\alpha,\beta)} = \frac{R_{2k-1}(1)}{\|R_{2k-1}\|_{L(\alpha,\beta)}}.$$

Из (3.18) и (3.19) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} k^{-2\alpha-2}\Delta_k^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{-(\beta+\alpha+1)}}{j^{\,2}(\alpha)\,(\Gamma(\alpha+1))^2}\left(\int\limits_0^{j(\alpha)} \frac{J_\alpha^2(z)}{j^{\,2}(\alpha)-z^2}\,z\,dz\right)^{-1}. \tag{3.20}$$

Оценим сверху величину

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{j(\alpha)} \frac{J_\alpha^2(z)}{j^{\,2}(\alpha)-z^2}\,z\,dz.$$

Имеет место неравенство (см., например, [12, гл. 8, § 8.1, формула (8.1.5)])

$$\Gamma(\alpha+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\alpha}|J_\alpha(z)| \le 1, \quad z>0, \quad \alpha \ge -\frac{1}{2}. \tag{3.21}$$

Справедливы рекуррентные формулы [18, § 3.2]

$$\frac{d}{dz}\{z^\alpha J_\alpha(z)\} = z^\alpha J_{\alpha-1}(z), \tag{3.22}$$

$$\frac{d}{dz}\{z^{-\alpha} J_\alpha(z)\} = -z^{-\alpha} J_{\alpha+1}(z). \tag{3.23}$$

Запишем

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{j(\alpha)} \frac{J_\alpha^2(z)}{j^{\,2}(\alpha)-z^2}\,z\,dz = \int\limits_0^{j(\alpha)} \frac{z^{\alpha+1}J_\alpha(z)}{j^{\,2}(\alpha)-z^2}\,J_\alpha(z)z^{-\alpha}\;dz.$$

В силу (3.23) имеем

$$z^{-\alpha}J_\alpha(z) = \int\limits_z^{j(\alpha)} t^{-\alpha}J_{\alpha+1}(t)dt = \int\limits_z^{j(\alpha)} t^{-(\alpha+1)}J_{\alpha+1}(t)\,t\,dt.$$

Отсюда с помощью (3.21) получаем оценку

$$|z^{-\alpha}J_\alpha(z)| \le \frac{2^{-\alpha-2}}{\Gamma(\alpha+2)}|j^2(\alpha)-z^2|, \quad z>0.$$

И как следствие имеем

$$I(\alpha) \le \frac{2^{-\alpha-2}}{\Gamma(\alpha+2)}\int\limits_0^{j(\alpha)} z^{\alpha+1}J_\alpha(z)\;dz.$$

В силу соотношения (3.22)

$$\int\limits_0^{j(\alpha)} z^{\alpha+1}J_\alpha(z)\;dz = z^{\alpha+1}J_{\alpha+1}(z)\Big|_0^{j(\alpha)} = (j(\alpha))^{\alpha+1}J_{\alpha+1}(j(\alpha)).$$

Применяя вновь неравенство (3.21), получаем оценку

$$I(\alpha) \le 2\left(\frac{2^{-\alpha-2}}{\Gamma(\alpha+2)}\right)^2 (j(\alpha))^{2(\alpha+1)}.$$

В результате получаем для величины (3.20) предельную оценку снизу

$$\lim_{k\to\infty} k^{-2\alpha-2}\Delta_k^{(\alpha,\beta)} \geq \frac{2^{-(\beta+\alpha+2)}}{j^{\,2}(\alpha)\,(\Gamma(\alpha+1))^2}\left(\frac{\Gamma(\alpha+2)}{2^{-\alpha-2}}\right)^2\ (j(\alpha))^{-2(\alpha+1)}$$
$$= 2^{\alpha-\beta+2}\frac{(\alpha+1)^2}{(j\,(\alpha))^{2\alpha+4}} \geq \frac{2^{\alpha-\beta+2}}{(\alpha+1)^{\alpha}(\sqrt{\alpha+2}+1)^{2\alpha+4}}.$$

Итак, для наименьшей константы $M_n^{(\alpha,\beta)}(1)$ в неравенстве (3.5) справедливы следующие утверждения.

(1) При любых $\alpha,\beta>-1$ выполняется неравенство

$$M_n^{(\alpha,\beta)}(1) \geq \Delta_k^{(\alpha,\beta)} = \frac{R_{2k-1}(1)}{\|R_{2k-1}\|_{L(\alpha,\beta)}}, \quad k=\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

(2) При любых $\alpha\geq -1/2,\ \beta>-1$ имеет место предельное соотношение

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{-2\alpha-2}\ M_n^{(\alpha,\beta)}(1) \geq \frac{2^{-\alpha-\beta}}{(\alpha+1)^{\alpha}(\sqrt{\alpha+2}+1)^{2\alpha+4}}. \tag{3.24}$$

Как следствие теоремы 1 и соотношения (3.24) имеем следующее утверждение.

Теорема 3. *При $m\geq 3$ для наилучшей константы в неравенстве* (1.1) *справедлива предельная оценка снизу*

$$\varliminf_{n\to\infty} n^{-(m-1)}\ C_{n,m} \geq \frac{2\,\Gamma\left(\dfrac{m-1}{2}\right)}{\pi^{\,(m-1)/2}(\sqrt{m+1}+\sqrt{2}\,)^{m+1}}.$$

3.3. Утверждение теоремы A является следствием теорем 2 и 3.

4. Связь двух экстремальных задач для алгебраических многочленов на сфере

4.1. В 1963 г. в докладе на семинаре С. Б. Стечкина в Свердловском отделении Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР Л. В. Тайков поставил следующую экстремальную задачу для тригонометрических полиномов, возникшую у него в связи с исследованием наилучшей константы в неравенстве (1.2). Пусть $\mathcal{T}_n^0$ есть множество полиномов $f_n\in\mathcal{T}_n$, имеющих нулевое среднее значение на периоде

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f_n(t)\,dt=0.$$

Для полинома $f_n\in\mathcal{T}_n^0$ рассмотрим меру его множества неотрицательности

$$\mu(f_n)=\operatorname{mes}\{t\in[-\pi,\pi]:\ f_n(t)\geq 0\}.$$

Задача Тайкова состоит в вычислении наименьшего значения этой меры

$$\tau(n)=\inf\{\mu(f_n):\ f_n\in\mathcal{T}_n^0\}. \tag{4.1}$$

Задачу (4.1) решил А. Г. Бабенко в 1983 г.; а именно, он доказал [15, 16], что $\tau(n)=\dfrac{2\pi}{n+1}$ и экстремальным является полином

$$f_n^*(t)=\frac{\left(\cos\dfrac{n+1}{2}\,t\right)^2}{\cos t-\cos\dfrac{\pi}{n+1}}\,. \tag{4.2}$$

Как пишет А. Г. Бабенко [16], гипотезу об экстремальности полинома (4.2) в задаче (4.1) высказывали ранее С. Б. Стечкин и Н. И. Черных.

4.2. Пусть $\mathcal{P}^0_{n,m}$ есть подпространство многочленов $P_n \in \mathcal{P}_{n,m}$, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} P_n(x)\,dx = 0, \tag{4.3}$$

т. е. имеющих нулевое среднее значение на сфере $\mathbb{S}^{m-1}$. Для многочлена $P \in \mathcal{P}^0_{n,m}$ рассмотрим множество его неотрицательности

$$E^+(P) = \{x \in \mathbb{S}^{m-1}:\ P(x) \ge 0\}$$

на сфере и ($(m-1)$-мерную поверхностную классическую) меру

$$\mu(P) = \mu(P, \mathbb{S}^{m-1}) = |E^+(P)|$$

этого множества. Нас интересует наименьшее значение

$$\tau(n,m) = \inf\{\mu(P):\ P \in \mathcal{P}^0_{n,m}\} \tag{4.4}$$

меры множества неотрицательности алгебраических многочленов с нулевым средним значением на многомерной сфере.

Будем рассматривать также аналогичную (4.4) задачу на множестве $\mathcal{Z}_{n,m}$ зональных многочленов из $\mathcal{P}_{n,m}$. Напомним, что функцию $\Phi:\ \mathbb{S}^{m-1} \to \mathbb{R}$ называют *зональной*, если найдется функция $\varphi:\ [-1,1] \to \mathbb{R}$ и точка $y \in \mathbb{S}^{m-1}$ такие, что $\Phi(x) = \varphi(xy)$, $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{S}^{m-1}$. В частности, если $y = e_m = (0, \ldots, 0, 1)$, то $\Phi(x) = \varphi(x_m)$. Итак, рассмотрим подмножество $\mathcal{Z}^0_{n,m} = \mathcal{Z}_{n,m} \cap \mathcal{P}^0_{n,m}$ зональных многочленов с нулевым средним значением на сфере. Задача состоит в нахождении величины

$$z(n,m) = \inf\{\mu(P):\ P \in \mathcal{Z}^0_{n,m}\}; \tag{4.5}$$

очевидно,

$$\tau(n,m) \le z(n,m).$$

При $m = 2$ величина $\tau(n,2)$ совпадает с $\tau(n)$; таким образом, $\tau(n,2) = \tau(n) = 2\pi/(n+1)$. Решение задачи (4.4) при других значениях m неизвестно.

Точное значение $z(n,m)$ (для всех n) известно лишь при $m = 2$ и $m = 3$. При $m = 2$ величины $z(n,2)$ и $\tau(n,2)$ совпадают, поскольку экстремальный полином (4.2) в задаче (4.1) является четным. Решение задачи (4.5) при $m = 3$ следует из результата В. В. Арестова и В. Ю. Раевской [14] для алгебраических многочленов одной переменной на отрезке $[-1,1]$.

Относительно величин (4.4), (4.5) в работе автора [20] доказано следующее утверждение.

Теорема B. *При $m \ge 3$ существуют положительные константы $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{B}_m$ такие, что при всех $n \ge 1$ выполняются неравенства*

$$\frac{\mathcal{A}_m}{n^{m-1}} \le \tau(n,m) \le z(n,m) \le \frac{\mathcal{B}_m}{n^{m-1}}.$$

Эта теорема дает правильный порядок поведения величин $\tau(n,m)$ и $z(n,m)$ по n при $n \to +\infty$ для фиксированного m. На самом деле в [20] приведены более информативные оценки величин $\tau(n,m)$ и $z(n,m)$.

4.3. Величины $\tau(n)$ и $C(n)$ связаны между собой неравенством (см. [16])

$$\tau(n) \ge \frac{1}{2C(n)}, \quad n \ge 1.$$

Подобным же образом связаны и задачи (4.4) и (1.1).

Теорема 4. *При любых $m \geq 3,\ n \geq 1$ справедливо неравенство*

$$\tau(n,m) \geq \frac{1}{2C_{n,m}}. \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся в этом, следуя [16]. Обозначим через $C^0_{n,m}$ наилучшую константу в неравенстве

$$\|P_n\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})} \leq C^0_{n,m}\,\|P_n\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})}, \quad P_n \in \mathcal{P}^0_{n,m}, \tag{4.7}$$

аналогичном неравенству (1.1), но на множестве $\mathcal{P}^0_{n,m}$. Очевидно, $C^0_{n,m} \leq C_{n,m}$.

Для полинома $P \in \mathcal{P}^0_{n,m},\ P \not\equiv 0$, рассмотрим множества $E^+ = \{x \in \mathbb{S}^{m-1}:\ P(x) \geq 0\}$ и $E^- = \{x \in \mathbb{S}^{m-1}:\ P(x) < 0\}$ его неотрицательности и отрицательности. Свойство (4.3) означает, что

$$\int\limits_{E^-} P(x)dx = -\int\limits_{E^+} P(x)dx.$$

Отсюда следуют такие соотношения:

$$\|P\|_{L(\mathbb{S}^{m-1})} = \int\limits_{\mathbb{S}^{m-1}} |P(x)|dx = 2\int\limits_{E^+} P(x)dx \leq 2\|P\|_{C(\mathbb{S}^{m-1})}\,|E^+(P)|.$$

В силу (4.7) это дает оценку $2|E^+(P)|\,C^0_{n,m} \geq 1$, что приводит к неравенству

$$\tau(n,m) \geq \frac{1}{2C^0_{n,m}}.$$

Последнее неравенство влечет (4.6). Теорема 4 доказана. □

Отметим, что теорема B и теорема 4 вновь дают оценку снизу для константы $C_{n,m}$, порядок роста которой по n также будет n^{m-1}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тайков Л. В.** Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, вып. 3. С. 205–211.
2. **Тайков Л. В.** О наилучшем приближении ядер Дирихле // Мат. заметки. 1993. Т. 53, вып. 6. С. 116–121.
3. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39, no. 12. P. 889–906.
4. **Babenko V., Kofanov V., Pichugov S.** Comparison of rearrangement and Kolmogorov–Nagy type inequalities for periodic functions // Approx. Theory: A volume dedicated to Blagovest Sendov / Ed. B. Bojanov. Sofia: DARBA. 2002. P. 24–53.
5. **Gorbachev D. V.** An integral problem of Konyagin and the (C, L)-constants of Nikol'skii // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 2. P. S117–S138.
6. **Горбачев Д. В.** Избранные задачи теории функций и теории приближений и их приложения. Тула: Изд-во “Гриф и К”, 2005. 152 с.
7. **Никольский С. М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 244–278.
8. **Иванов В. И.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 489–498.
9. **Арестов В. В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, вып. 4. С. 539–547.
10. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 3. Спб.: Изд-во “Лань”, 1997. 672 с.

11. **Дейкалова М. В.** Функционал Тайкова в пространстве алгебраических многочленов на многомерной евклидовой сфере // Мат. заметки. 2008. Т. 84, вып. 4. С. 532–551.
12. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: ГИФМЛ, 1962. 500 с.
13. **Бабенко А. Г.** Экстремальные свойства полиномов и точные оценки среднеквадратичных приближений: дисс. ... канд. физ.-мат. наук / Ин-т математики и механики УрО РАН. Свердловск, 1987. 109 с.
14. **Арестов В. В., Раевская В. Ю.** Одна экстремальная задача для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на отрезке // Мат. заметки. 1997. Т. 62, вып. 3. С. 332–342.
15. **Бабенко А. Г.** Точная константа в одном неравенстве слабого типа для полиномов // Тез. докл. Междунар. конф. по теории приближения функций. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1983. С. 11.
16. **Бабенко А. Г.** Об одной экстремальной задаче для полиномов // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 3. С. 349–356.
17. **Крылов В. И.** Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959. 328 с.
18. **Ватсон Г. Н.** Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: ИЛ, 1949. 799 с.
19. **Chambers Ll. G.** An upper bound for the first zero of Bessel functions // Math. Comp. 1982. Vol. 38, no. 158. P. 589–591.
20. **Дейкалова М. В.** Об одной экстремальной задаче для алгебраических многочленов с нулевым средним значением на многомерной сфере // Изв. Урал. гос. ун-та. 2006. № 44. С. 42–54. (Математика и механика; вып. 9).

Дейкалова Марина Валерьевна
ассистент
Урал. гос. ун-т им. А. М. Горького
e-mail: Marina.Deikalova@usu.ru

Поступила 10.01.09

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 517.5

2-АДИЧЕСКИЕ БАЗИСЫ ВСПЛЕСКОВ[1]

С. А. Евдокимов, М. А. Скопина

В рамках теории кратномасштабного анализа разработан метод построения 2-адических систем всплесков, образующих базисы Рисса в $L^2(\mathbb{Q}_2)$. Представлена реализация этого метода для некоторого бесконечного семейства кратномасштабных анализов, приводящих к неортогональным базисам Рисса.

Ключевые слова: p-адические всплески, кратномасштабный анализ, масштабирующая функция, базис Рисса.

S. A. Evdokimov and M. A. Skopina. 2-adic wavelet bases.

Within the theory of multiresolution analysis, a method of constructing 2-adic wavelet systems that form Riesz bases in $L^2(\mathbb{Q}_2)$ is developed. An implementation of this method for some infinite family of multiresolution analyses leading to nonorthogonal Riesz bases is presented.

Keywords: 2-adic wavelets, multiresolution analysis, scaling function, Riesz base.

1. Введение

Сенсацию в научном мире в начале девяностых годов прошлого века вызвало появление теории построения базисов всплесков. Схема построения базировалась на понятии кратномасштабного анализа (далее КМА), введенного Й. Мейером и С. Малла [1, 2] (см. также, например, [4, 11]). Это событие вызвало огромный интерес среди инженеров, особенно специалистов в области обработки сигналов, которые мгновенно стали использовать новые базисы в приложениях. Сегодня трудно назвать инженерную дисциплину, в которой бы не использовались всплески.

В начале этого века возник интерес к созданию теории p-адических всплесков в связи с задачами p-адической математической физики. В 2002 г. С. В. Козырев [3] нашел ортонормированные p-адические базисы всплесков, являющиеся аналогами вещественных базисов Хаара, в частности, при $p = 2$ аналогом классического базиса Хаара. Оказалось, что элементы найденных базисов являются собственными функциями p-адических псевдодифференциальных операторов [5]. Дж. Дж. Бенедетто и Р. Л. Бенедетто в [6] обсуждали возможность построения всплесков на локально компактных группах. Они высказали сомнение в том, что существуют другие p-адические базисы всплесков относительно той же системы сдвигов, что и в случае базиса, найденного С. В. Козыревым, поскольку множество таких сдвигов не является группой. Более того, они предположили, что создание теории p-адических КМА невозможно, так как в поле p-адических чисел не существует дискретных подгрупп относительно сложения. Другая гипотеза была выдвинута В. М. Шелковичем и А. Ю. Хренниковым в [7], которые предположили, что функциональное уравнение

$$\varphi(x) = \sum_{r=0}^{p-1} \varphi\Big(\frac{1}{p}x - \frac{r}{p}\Big), \qquad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта DFG (проект 436 RUS 113/951); первый автор поддержан также грантами РФФИ (проекты 07-01-00485 и 06-01-00471); второй автор — грантом РФФИ (проект 09-01-00162).

является масштабирующим для p-адического КМА Хаара и базисы, найденные С. В. Козыревым, порождаются этим КМА. Решением φ этого уравнения является характеристическая функция единичного круга. Отметим, что равенство (1.1) отражает естественное “самоподобие” пространства $\mathbb{Q}_p$: единичный круг $B_0(0) = \{x: \ |x|_p \le 1\}$ есть объединение p попарно дизъюнктных кругов $B_{-1}(r) = \{x: \ |x-r|_p \le p^{-1}\}$, $r = 0, \dots, p-1$. Опираясь на эту идею, авторы [8] ввели понятие p-адического КМА с ортогональной масштабирующей функцией и описали общую схему построения таких КМА. Используя (1.1) как порождающее масштабирующее уравнение, они реализовали эту схему для построения 2-адического КМА Хаара. В отличие от вещественного случая, масштабирующая функция φ, порождающая КМА Хаара, является 1-периодической, что, как оказалось, обеспечивает существование бесконечного числа различных ортонормированных базисов всплесков в КМА Хаара. Один из них совпадает с базисом, найденным С. В. Козыревым. Авторы [9] описали широкий класс локально постоянных функций с компактным носителем, порождающих КМА, однако все эти функции являются 1-периодическими. В работе [10] доказано, что в классе локально постоянных функций с компактным носителем не существует ортогональных масштабирующих функций, порождающих КМА и отличных от тех, которые были описаны в [9]. Кроме того, в [10] дано более общее определение КМА (не только с ортогональными масштабирующими функциями) и найдено полное описание всех локально постоянных функций с компактным носителем, порождающих такие КМА. То, что множество рассматриваемых сдвигов не является группой, компенсируется тем обстоятельством, что линейная оболочка соответствующих сдвигов каждой такой функции инвариантна относительно всех сдвигов. В [10] также дан метод построения фреймов всплесков в подходящих КМА. В настоящей работе, опираясь на результаты, полученные в [10], мы даем метод построения 2-адических систем всплесков, образующих базисы Рисса в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_2)$. В качестве примера строится бесконечное семейство КМА, приводящее к неортогональным базисам Рисса.

2. Предварительные сведения из p-адического анализа

Здесь и далее мы будем использовать обозначения и результаты книги [12]. Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ обозначают соответственно множества натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел. Для любого простого числа p поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ по определению равно пополнению поля $\mathbb{Q}$ относительно p-адической нормы $|\cdot|_p$, определяемой следующим образом: $|0|_p = 0$, а если $x \ne 0$ и $x = p^\gamma(m/n)$, где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, и целые числа m, n не делятся на p, то $|x|_p = p^{-\gamma}$. Эта норма является неархимедовой и удовлетворяет сильному неравенству треугольника $|x+y|_p \le \max(|x|_p, |y|_p)$. Любое p-адическое число $x \ne 0$ единственным образом представимо в виде

$$x = p^\gamma \sum_{j=0}^{\infty} x_j p^j, \tag{2.1}$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$, $x_j \in D_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$ и $x_0 \ne 0$. Такая форма записи p-адических чисел называется канонической. Дробной частью числа x, имеющего каноническое представление (2.1), называется число $\{x\}_p := p^\gamma \sum_{j=0}^{-\gamma-1} x_j p^j$. Таким образом, $\{x\}_p = 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma \ge 0$. Мы также полагаем $\{0\}_p = 0$.

Обозначим через $B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p\colon \ |x-a|_p \le p^\gamma\}$ круг радиуса p^γ с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Любые два круга в $\mathbb{Q}_p$ либо дизъюнктны, либо один из них содержит другой. Отметим, что круг $B_0(0)$ совпадает с кольцом целых p-адических чисел $\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p\colon \ \{x\}_p = 0\}$.

В пространстве $\mathbb{Q}_p$ существует мера Хаара, которая положительна, инвариантна относительно сдвига, т. е. $d(x+a) = dx$, и нормализована равенством $\int\limits_{|\xi|_p \le 1} dx = 1$.

Комплекснозначная функция f, заданная на $\mathbb{Q}_p$, называется *локально постоянной*, если для любого $x \in \mathbb{Q}_p$ существует целое число $l(x) \in \mathbb{Z}$ такое, что $f(x+y) = f(x)$ для всех

$y \in B_{l(x)}(0)$. Обозначим через $\mathcal{D}$ множество всех локально постоянных функций с компактным носителем (так называемые тест-функции). Класс $\mathcal{D}$ является аналогом класса Шварца в вещественном анализе. Очевидно, любая функция $\varphi \in \mathcal{D}$ является p^M-периодической для некоторого $M \in \mathbb{Z}$. Через $\mathcal{D}_N^M$ мы будем обозначать множество всех p^M-периодических функций, носитель которых содержится в $B_N(0)$.

Преобразование Фурье функции $\varphi \in \mathcal{D}$ определяется формулой

$$\widehat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi_p(\xi x)\varphi(x)\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{Q}_p,$$

где $\chi_p(\xi x) = e^{2\pi i\{\xi x\}_p}$ — аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$. Оператор F является линейным изоморфизмом из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$. Стандартным способом F продолжается на все пространство $L^2(\mathbb{Q}_p)$, и имеет место равенство Планшереля

$$\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(x)g(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\, d\xi, \qquad f, g \in L^2(\mathbb{Q}_p).$$

Если $f \in L^2(\mathbb{Q}_p)$, $0 \neq a \in \mathbb{Q}_p$, $b \in \mathbb{Q}_p$, то

$$F[f(ax+b)](\xi) = |a|_p^{-1}\chi_p\Big(-\frac{b}{a}\xi\Big)F[f(x)]\Big(\frac{\xi}{a}\Big). \tag{2.2}$$

Кроме того, для любого $k \in \mathbb{Z}$

$$F[\Omega(p^{-k}|\cdot|_p)](x) = p^k\Omega(p^k|x|_p), \qquad x \in \mathbb{Q}_p,$$

где Ω — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$.

Кратномасштабный анализ. Рассмотрим множество

$$I_p = \{a \in \mathbb{Q}_p :\ \{a\}_p = a\}.$$

Тогда, очевидно, $I_p \subset \mathbb{Q}$. Более того, равенство $B_0(0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : \{x\}_p = 0\}$ приводит к разбиению $\mathbb{Q}_p = \bigcup_{a\in I_p} B_0(a)$ пространства $\mathbb{Q}_p$ на попарно дизъюнктные круги. Таким образом, I_p является “естественным” множеством сдвигов для пространства $\mathbb{Q}_p$.

Определение 1 [10]. Совокупность замкнутых пространств $V_j \subset L^2(\mathbb{Q}_p)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *кратномасштабным анализом* (КМА) *в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$, если выполнены следующие аксиомы:

(a) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

(b) $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L^2(\mathbb{Q}_p)$;

(c) $\bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

(d) $f \in V_j \Longleftrightarrow f(p^{-1}\cdot) \in V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

(e) существует функция $\varphi \in V_0$, такая что $V_0 = \overline{\operatorname{span}\{\varphi(x-a) :\ a \in I_p\}}$.

Функцию φ из аксиомы (e) называют *масштабирующей*. Мы также будем говорить, что КМА порожден функцией φ (или φ порождает КМА). Из аксиом (d) и (e) мгновенно следует, что

$$V_j = \overline{\operatorname{span}\{\varphi(p^{-j}x-a) :\ a \in I_p\}}, \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Особый интерес представляют КМА, порожденные так называемой ортогональной масштабирующей функцией, т.е. функцией φ, у которой система сдвигов $\{\varphi(x-a) :\ a \in I_p\}$ является ортонормированным базисом в V_0. Очевидно, для такого КМА функции $p^{j/2}\varphi(p^{-j}x-a)$, $a \in I_p$, образуют ортонормированный базис в V_j, $j \in \mathbb{Z}$. Как и в вещественном анализе, на базе КМА, порожденных ортогональными масштабирующими функциями, можно строить ортонормированные базисы всплесков (см. [8, 9]).

Пусть φ — ортогональная масштабирующая функция, порождающая КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Поскольку система $\{p^{1/2}\varphi(p^{-1}x-a):\ a\in I_p\}$ — базис в пространстве V_1, из аксиомы (a) следует

$$\varphi(x)=\sum_{a\in I_p}\alpha_a\varphi(p^{-1}x-a),\quad \alpha_a\in\mathbb{C}. \tag{2.4}$$

Таким образом, функция φ является решением некоторого функционального уравнения специального вида. Такие уравнения называют масштабирующими. Далее будет понятно (см. замечание к предложению 1, разд. 4), что любая тест-функция, порождающая КМА (не обязательно ортогональная), является решением некоторого масштабирующего уравнения (2.4) с конечным числом слагаемых.

Обсудим, как можно построить КМА. Естественный путь — начать с подбора функции φ, которая, как только что было отмечено, должна удовлетворять некоторому масштабирующему уравнению (2.4). Мы будем рассматривать только тест-функции φ. Определив пространства V_j по формуле (2.3), мы обеспечим выполнение аксиом (d) и (e) определения 1. В отличие от вещественного случая, этого недостаточно, чтобы обеспечить аксиому (a), так как соотношение $V_0\subset V_1$ автоматически не следует из (2.4). Действительно, все функции $\varphi(x-b)$, $b\in I_p$, должны принадлежать пространству V_1, но, взяв $x-b$ в качестве аргумента в (2.4), мы не сможем заключить, что $\varphi(x-b)\in V_1$, поскольку $p^{-1}b+a$ может не попасть в I_p для некоторых $a\in I_p$. Тем не менее следующее утверждение говорит о том, что существует широкий класс функций, порождающих КМА.

Теорема 1 [10]. *Функция $\varphi\in\mathcal{D}_N^M$, $M,N\ge 0$, с $\widehat{\varphi}(0)\ne 0$ порождает* КМА *тогда и только тогда, когда*

(1) *φ удовлетворяет масштабирующему уравнению* (2.4);

(2) *существует не более p^N целых чисел l, таких что $0\le l<p^{M+N}$ и $\widehat{\varphi}\Big(\dfrac{l}{p^M}\Big)\ne 0$.*

Для того чтобы обеспечить условие (1) теоремы 1, определим преобразование Фурье функции φ по формуле

$$\widehat{\varphi}(\xi)=C\prod_{j=0}^{\infty}m_0\Big(\frac{\xi}{p^{N-j}}\Big),\quad \xi\in\mathbb{Q}_2, \tag{2.5}$$

где $C\ne 0$ и

$$m_0(\xi)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p^{N+1}-1}h_k\chi_p(k\xi), \tag{2.6}$$

т. е. m_0 — тригонометрический полином и $m_0(0)=1$. Из (2.5) следует равенство

$$\widehat{\varphi}(\xi)=m_0\Big(\frac{\xi}{p^N}\Big)\widehat{\varphi}(p\xi). \tag{2.7}$$

Применяя преобразование Фурье к (2.7) и используя (2.2), получим

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{p^{N+1}-1}h_k\varphi\Big(\frac{x}{p}-\frac{k}{p^{N+1}}\Big)\qquad \forall x\in\mathbb{Q}_p. \tag{2.8}$$

Нетрудно показать (см. [10]), что преобразование Фурье любой функции $\varphi\in\mathcal{D}_N^M$ с $\widehat{\varphi}(0)\ne 0$, удовлетворяющей условиям (1), (2) теоремы 1, имеет вид (2.5). Ясно, что функция φ является p^N-периодической, т. е. имеет место тождество $\varphi(x-p^N)=\varphi(x)$. Применяя к этому равенству обратное преобразование Фурье, получаем $\chi_p(p^N\xi)\widehat{\varphi}(\xi)=\widehat{\varphi}(\xi)$, что равносильно включению $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset B_N(0)$. Аналогично, p^M-периодичность функции φ равносильна соотношению $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset B_M(0)$, которое в свою очередь равносильно тому, что $\widehat{\varphi}\Big(\dfrac{k}{p^{M+1}}\Big) = 0$ для всех целых k, не делящихся на p. Это условие и условие (2) теоремы 1 можно обеспечить за счет выбора достаточно большого N (для данного M) и разумного выбора нулей полинома m_0. Подробнее мы обсудим вопрос выбора нулей в разд. 4.

Теорема 1 дает полное описание всех масштабирующих тест-функций, порождающих КМА. При этом оказывается, что класс ортогональных масштабирующих функций существенно уже.

Теорема 2 [10]. *Если φ — ортогональная масштабирующая тест-функция для некоторого* КМА *и $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, то $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset B_0(0)$.*

Таким образом, носитель преобразования Фурье каждой ортогональной масштабирующей функции содержится в $B_0(0)$, что равносильно ее 1-периодичности. Полное описание всех таких функций дано в [9]. Приведем утверждение, резюмирующее результаты этой работы.

Теорема 3 [9]. *Пусть функция $\widehat{\varphi}$ определена равенством* (2.5)*, где m_0 — тригонометрический полином* (2.6) *и $m_0(0) = 1$. Если $m_0\Big(\dfrac{k}{p^{N+1}}\Big) = 0$ для всех $k = 1, \dots, p^{N+1} - 1$, не делящихся на p, то $\varphi \in \mathcal{D}_N^0$. Если, кроме того, $\Big|m_0\Big(\dfrac{k}{p^{N+1}}\Big)\Big| = 1$ для всех $k = 1, \dots, p^{N+1} - 1$, делящихся на p, и $|C| = 1$, то $\{\varphi(x-a) :\ a \in I_p\}$ — ортонормированная система. Обратно, если $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset B_0(0)$, $\{\varphi(x-a) :\ a \in I_p\}$ — ортонормированная система, то $|C| = 1$, $\Big|m_0\Big(\dfrac{k}{p^{N+1}}\Big)\Big| = 0$ для всех k, не делящихся на p, и $\Big|m_0\Big(\dfrac{k}{p^{N+1}}\Big)\Big| = 1$ для всех k, делящихся на p, $k = 1, 2, \dots, p^{N+1} - 1$.*

3. Базисы всплесков

Здесь и далее мы ограничимся рассмотрением случая $p = 2$.

Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — КМА в $L^2(\mathbb{Q}_2)$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ определим пространство всплесков W_j как ортогональное дополнение пространства V_j в пространстве V_{j+1}, т.е. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Нетрудно видеть, что $f \in W_j$ тогда и только тогда, когда $f(2^j\cdot) \in W_0$, и $W_j \perp W_k$ для всех $j \neq k$. Принимая во внимание аксиомы (b) и (c) определения 1, имеем

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{Q}_2).$$

Предположим теперь, что существует функция $\psi \in L^2(\mathbb{Q}_2)$ (назовем ее *всплеск-функцией*) такая, что

$$W_0 = \overline{\operatorname{span}\{\psi(x-a) :\ a \in I_2\}}, \tag{3.1}$$

тогда из аксиомы (d) определения 1 следует, что

$$W_j = \overline{\operatorname{span}\{\psi(2^{-j}x-a) :\ a \in I_2\}}.$$

Будем рассматривать соответствующие системы всплесков

$$\{2^{j/2}\psi(2^{-j}x-a) :\ a \in I_2, j \in \mathbb{Z}\}. \tag{3.2}$$

Нас интересуют системы всплесков, образующие базис в $L^2(\mathbb{Q}_2)$. Поскольку функции (3.2) занумерованы двумя индексами и при каждом фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ число функций бесконечно, естественно обсуждать безусловные базисы.

Обозначим через ℓ^2 гильбертово пространство последовательностей комплексных чисел $c = \{c_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что $\sum_{n=1}^\infty |c_n|^2 < \infty$, со скалярным произведением $\langle c, d\rangle := \sum_{n=1}^\infty c_n\overline{d_n}$.

О п р е д е л е н и е 2. Система $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ элементов гильбертова пространства H называется *системой Рисса с постоянными* $A, B > 0$, если для любого $c = \{c_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ ряд $\sum_{n=1}^\infty c_n f_n$ сходится в H и

$$A\|c\|^2_{\ell^2} \le \left\| \sum_{n=1}^\infty c_n f_n \right\|^2_H \le B\|c\|^2_{\ell^2}.$$

Если система Рисса является базисом, то будем называть ее базисом Рисса. Хорошо известно, что безусловными базисами являются базисы Рисса и только они (см., например, [13]).

Наша цель — описать класс всплеск-функций ψ, для которых система (3.2) является базисом Рисса, и дать метод построения таких всплеск-функций.

Нам понадобится следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Пусть гильбертово пространство H есть прямая сумма попарно ортогональных подпространств H_n, $n \in \mathbb{N}$, и пусть в каждом H_n существует базис Рисса $\{f_k^n\}_{k=1}^\infty$ с постоянными A, B (независящими от n). Тогда система $\{f_k^n\}_{k,n=1}^\infty$ является базисом Рисса в H с постоянными A, B.*

Теорема 4. *Пусть $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — КМА в $L^2(\mathbb{Q}_2)$. Если ψ — всплеск-функция, $\operatorname{supp}\psi \subset B_N(0)$ и функции $\psi(x-a)$, $a \in I_2 \cap B_N(0)$, линейно независимы, то система (3.2) является базисом Рисса в $L^2(\mathbb{Q}_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала покажем, что система $\{\psi(x-a) : \ a \in I_2\}$ является базисом Рисса в пространстве W_0. Положим $a^{n,l} = \dfrac{2l+1}{2^{N+n}}$,

$$W_0^0 = \operatorname{span}\{\psi(x-a) : \ a \in I_2 \cap B_N(0)\},$$

$$W_0^{n,l} = \operatorname{span}\{\psi(x-a) : \ a \in I_2 \cap B_N(a^{n,l})\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad l = 0, \dots, 2^{n-1}-1.$$

Поскольку шары $B_N(0)$, $B_N(a^{n,l})$ попарно дизъюнктны, а их объединение есть $\mathbb{Q}_2$, каждую функцию $f \in W_0$ можно представить в виде

$$f = f^0 + \sum_{n=1}^\infty \sum_{l=0}^{2^{n-1}-1} f^{n,l}, \qquad f^0 = f\Big|_{B_N(0)}, \quad f^{n,l} = f\Big|_{B_N(a^{n,l})}.$$

Ввиду (3.1) для любого $\epsilon > 0$ существует конечная сумма $\sum_{a\in I_2} \alpha_a \psi(x-a) =: f_\epsilon(x)$ такая, что $\|f - f_\epsilon\| < \epsilon$. Если $|x|_2 \le 2^N$, то

$$f_\epsilon(x) = \sum_{a\in I_2,\ |a|_2 \le 2^N} \alpha_a \psi(x-a) =: f_\epsilon^0(x).$$

Поскольку $\operatorname{supp} f^0 \subset B_N(0)$, $\operatorname{supp} f_\epsilon^0 \subset B_N(0)$, мы имеем

$$\|f - f_\epsilon\|^2 \ge \int\limits_{B_N(0)} |f - f_\epsilon|^2 = \int\limits_{B_N(0)} |f^0 - f_\epsilon^0|^2 = \|f^0 - f_\epsilon^0\|^2.$$

Следовательно, $f^0 \in W_0^0$. Аналогично доказываются соотношения $f^{n,l} \in W_0^{n,l}$. Нетрудно видеть, что пространства W_0^0, $W_0^{n,l}$ попарно ортогональны. Таким образом, мы установили, что

$$W_0 = W_0^0 \oplus \left(\bigoplus_{n=1}^\infty \bigoplus_{l=0}^{2^{n-1}-1} W_0^{n,l} \right). \tag{3.3}$$

Ясно, что система $\{\psi(x-a),\ a\in I_2\cap B_N(0)\}$ — базис в W_0^0. Поскольку в конечномерном пространстве любой базис является базисом Рисса, существуют постоянные A, B такие, что для любого $c=\{c_k\}_{k=0}^{2^N-1}$ выполняется неравенство

$$A\|c\|_{\ell^2}^2 \le \Big\| \sum_{k=0}^{2^N-1} c_k\psi\Big(\cdot - \frac{k}{2^N}\Big)\Big\|^2 \le B\|c\|_{\ell^2}^2. \tag{3.4}$$

Теперь рассмотрим пространство $W_0^{n,l}$. Каждое число $a\in I_2\cap B_N(a^{n,l})$ представимо в виде $a=\dfrac{k}{2^N}+\dfrac{2l+1}{2^{N+n}}$, где $k=0,\dots,2^N-1$, т. е.

$$W_0^{n,l}=\operatorname{span}\Big\{\psi\Big(\cdot-\frac{k}{2^N}-\frac{2l+1}{2^{N+n}}\Big):\ k=0,\dots,2^N-1\Big\}.$$

Ввиду инвариантности нормы относительно сдвига

$$\Big\|\sum_{k=0}^{2^N-1} c_k\psi\Big(\cdot-\frac{k}{2^N}-\frac{2l+1}{2^{N+n}}\Big)\Big\|^2=\Big\|\sum_{k=0}^{2^N-1} c_k\psi\Big(\cdot-\frac{k}{2^N}\Big)\Big\|^2.$$

Отсюда и из (3.4) следует, что функции $\psi(x-a)$, $a\in I_2\cap B_N(a^{n,l})$, образуют базис Рисса в пространстве $W_0^{n,l}$ с постоянными A, B, а значит, в силу леммы 1 и соотношения (3.4) система $\{\psi(x-a):\ a\in I_2\}$ — базис Рисса в пространстве W_0 с постоянными A, B. Очевидно, отсюда следует, что при любом $j\in\mathbb{Z}$ система $\{2^{j/2}\psi(2^{-j}x-a):\ a\in I_2\}$ — базис Рисса в W_j с теми же постоянными A, B, и потому в силу леммы 1 и соотношения (3.3) теорема доказана.

4. Построение всплеск-функций

Предложение 1. *Пусть* $\varphi,\psi\in L^2(\mathbb{Q}_2)$, $\operatorname{supp}\varphi$, $\operatorname{supp}\psi\subset B_N(0)$, $N\ge 0$, *и пусть* $b\in I_2$, $|b|_2\le 2^N$. *Если*

$$\psi(x-b)\in\overline{\operatorname{span}\{\varphi(2^{-1}x-a),\ a\in I_2\}},$$

то

$$\psi(x-b)=\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} h_{k,b}\varphi\Big(\frac{x}{2}-\frac{k}{2^{N+1}}\Big)\quad \forall x\in\mathbb{Q}_2. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $\epsilon>0$ существуют функции

$$f_\epsilon(x):=\sum_{a\in I_2,\ |a|_2\le 2^{N+1}}\alpha_a\varphi(2^{-1}x-a),\quad g_\epsilon(x):=\sum_{a\in I_2,\ |a|_2>2^{N+1}}\alpha_a\varphi(2^{-1}x-a)$$

с конечным числом слагаемых в суммах такие, что $\|\psi(x-b)-f_\epsilon-g_\epsilon\|<\epsilon$. Если $x\in B_N(0)$, $|a|_2>2^{N+1}$, то $|2^{-1}x-a|_2>2^{N+1}$, что влечет $\varphi(2^{-1}x-a)=0$, и, значит, $g_\epsilon(x)=0$ для всех $x\in B_N(0)$. Если $x\notin B_N(0)$, то $\varphi(x-b)=0$ и $\varphi(2^{-1}x-a)=0$ для всех $a\in I_2$, $|a|_2\le 2^{N+1}$, и, значит, $\varphi(x-b)-f_\epsilon(x)=0$ для всех $x\notin B_N(0)$. Отсюда имеем

$$\|\psi(x-b)-f_\epsilon\|^2=\int\limits_{B_N(0)}|\psi(x-b)-f_\epsilon|^2=\int\limits_{B_N(0)}|\psi(x-b)-f_\epsilon-g_\epsilon|^2\le\epsilon^2.$$

Следовательно, $\psi(\cdot-b)\in\operatorname{span}\{\varphi(2^{-1}x-a),\ \ a\in I_2,\ |a|_2\le 2^{N+1}\}$, что и доказывает равенство (4.1). $\square$

З а м е ч а н и е. Из предложения 1, в частности, следует, что любая масштабирующая функция φ, носитель которой содержится в $B_N(0)$, $N \ge 0$, удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} h_k \varphi\Big(\frac{x}{2} - \frac{k}{2^{N+1}}\Big) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}_2,$$

что отмечалось выше.

Теорема 5. *Пусть* $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{Q}_2)$, $\operatorname{supp}\varphi, \operatorname{supp}\psi \subset B_N(0)$, $N \ge 0$, *кратномасштабный анализ* $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *порожден функцией* φ, *и* $\psi(\cdot - b) \in V_1$ *для всех* $b \in I_2 \cap B_N(0)$. *Если пространства* $V_0^0 := \operatorname{span}\{\varphi(x-a) :\ a \in I_2 \cap B_N(0)\}$ *и* $W_0^0 := \operatorname{span}\{\psi(x-b) :\ b \in I_2 \cap B_N(0)\}$ *ортогональны друг другу и* $\dim V_0^0 \le \dim W_0^0$, *то* ψ *— всплеск-функция*[2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего покажем, что

$$\overline{\operatorname{span}\{\psi(x-a) :\ a \in I_2\}} \subset V_1. \tag{4.2}$$

По условиям теоремы $\psi(\cdot - a) \in V_1$ для всех $a \in I_2$, $|a|_2 \le 2^N$. Пусть $a \in I_2$, $|a|_2 = 2^{N+1}$, тогда $a = b + 2^{-N-1}$, где $|b|_2 \le 2^N$. Из предложения 1 следует

$$\psi(x-a) = \sum_{k=0}^{2^{N+1}-1} h_{k,b}\varphi\Big(\frac{x-2^{-N-1}}{2} - \frac{k}{2^{N+1}}\Big) = \sum_{k=0}^{2^{N+2}-1} h^1_{k,b}\varphi\Big(\frac{x}{2} - \frac{k}{2^{N+2}}\Big),$$

где $h^1_{2l+1,b} = h_{l,b}$, $h^1_{2l,b} = 0$, $l = 0,\dots,2^{N+1}-1$. Аналогично по индукции устанавливаем, что если $a \in I_2$, $|a|_2 = 2^{N+n}$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$\psi(x-a) = \sum_{k=0}^{2^{N+n}-1} h^n_{k,b}\varphi\Big(\frac{x}{2} - \frac{k}{2^{N+n}}\Big),$$

что влечет $\psi(\cdot - a) \in V_1$, т. е. выполнено (4.2).

Теперь проверим, что

$$\overline{\operatorname{span}\{\psi(x-a) :\ a \in I_2\}} \perp V_0. \tag{4.3}$$

Пусть $a, b \in I_2$. Если $|a-b|_2 \le 2^N$, то соотношение $\psi(\cdot - b) \perp \varphi(\cdot - a)$ очевидно, а если $|a-b|_2 > 2^N$, то носители функций $\psi(\cdot - b)$, $\varphi(\cdot - a)$ дизъюнктны, и опять имеем $\psi(\cdot - b) \perp \varphi(\cdot - a)$.

Положим

$$V_1^0 = \operatorname{span}\Big\{\varphi\Big(\frac{x}{2} - a\Big) :\ \ a \in I_2 \cap B_{N+1}(0)\Big\}$$

и докажем, что $V_1^0 = V_0^0 \oplus W_0^0$. Соотношение $V_0^0 \oplus W_0^0 \subset V_1^0$ следует из (4.3), (4.2), предложения 1 и аксиомы (a) определения 1. Осталось проверить, что $\dim V_1^0 = 2\dim V_0^0$. Нетрудно видеть, что размерность каждого из пространств

$$V^0_{1,e} = \operatorname{span}\Big\{\varphi\Big(\frac{x}{2} - \frac{2l}{2^{N+1}}\Big) :\ l = 0,\dots,2^N-1\Big\},$$

$$V^0_{1,o} = \operatorname{span}\Big\{\varphi\Big(\frac{x}{2} - \frac{2l+1}{2^{N+1}}\Big) :\ l = 0,\dots,2^N-1\Big\}$$

равна $\dim V_0^0$. Более того, если $\varphi\Big(\frac{x}{2} - \frac{2l}{2^{N+1}}\Big) \ne 0$, то $|x|_2 \le 2^{N-1}$, а если $\varphi\Big(\frac{x}{2} - \frac{2k+1}{2^{N+1}}\Big) \ne 0$, то $|x|_2 = 2^N$. Это влечет ортогональность функций $\varphi\Big(\frac{\cdot}{2} - \frac{2l}{2^{N+1}}\Big)$ и $\varphi\Big(\frac{\cdot}{2} - \frac{2k+1}{2^{N+1}}\Big)$ при всех $l, k = 0,\dots,2^N-1$, а значит, и равенство $V_1^0 = V^0_{1,e} \oplus V^0_{1,o}$.

[2]Используя результаты работы [10], можно показать, что если φ — тест-функция, то требование $\psi(\cdot - b) \in V_1$ для всех $b \in I_2 \cap B_N(0)$ можно ослабить, предположив лишь, что $\psi \in V_1$.

Таким образом, мы установили, что

$$\varphi\Big(\frac{x}{2}-b\Big)=\sum_{k=0}^{2^N-1}\alpha_{bk}\varphi\Big(x-\frac{k}{2^N}\Big)+\beta_{bk}\psi\Big(x-\frac{k}{2^N}\Big)$$

для всех $b\in I_2$, $|b|_2\le 2^{N+1}$. Пусть $a\in I_2$, $|a|_2=2^{N+2}$, тогда $a=b+2^{-N-2}$, где $|b|_2\le 2^{N+1}$, и, значит,

$$\varphi\left(\frac{x}{2}-a\right)=\varphi\left(\frac{x-2^{-N-1}}{2}-b\right)=\sum_{k=0}^{2^{N+1}-1}\alpha^1_{bk}\varphi\Big(x-\frac{k}{2^{N+1}}\Big)+\beta^1_{bk}\psi\Big(x-\frac{k}{2^{N+1}}\Big),$$

где $\alpha^1_{b(2l+1)}=\alpha_{bl}$, $\beta^1_{b(2l+1)}=\beta_{bl}$, $\alpha^1_{b(2l)}=\beta^1_{b(2l)}=0$, $l=0,\dots,2^N-1$. Аналогично по индукции для всех $a\in I_2$, $|a|_2=2^{N+n+2}$, $n\in\mathbb{N}$, устанавливаем равенство

$$\varphi\left(\frac{x}{2}-a\right)=\sum_{k=0}^{2^{N+n+1}-1}\alpha^n_{bk}\varphi\left(x-\frac{k}{2^{N+n+1}}\right)+\beta^n_{bk}\psi\left(x-\frac{k}{2^{N+n+1}}\right),$$

которое вместе с соотношениями (4.2), (4.3) влечет

$$V_1=V_0\oplus\overline{\operatorname{span}\{\psi(x-a):\ a\in I_2\}}.\qquad\square$$

Теперь мы опишем некоторое бесконечное семейство КМА, построим для них всплеск-функции и, выделив бесконечное подсемейство, покажем, что соответствующие системы всплесков являются неортогональными базисами Рисса.

Для целого $K\ge 0$ положим

$$A_K=\Big\{\frac{2^j-1}{2^{j+1}}:\ j=1,\dots,K\Big\}\cup\Big\{\frac{2^{K+1}-1}{2^{K+1}}\Big\},\qquad B_K=\Big\{\frac{2^j-1}{2^j}:\ j=0,1,\dots,K\Big\}.$$

Например,

$$A_0=\Big\{\frac12\Big\},\ B_0=\Big\{0\Big\};\ \ A_1=\Big\{\frac14,\frac34\Big\},\ B_1=\Big\{0,\frac12\Big\};\ \ A_2=\Big\{\frac14,\frac38,\frac78\Big\},\ B_2=\Big\{0,\frac12,\frac34\Big\}.$$

Легко видеть, что мощности множеств A_K и B_K равны $K+1$ для всех K и

$$A_K\cap B_K=\varnothing,\qquad A_K\cup B_K=\frac12 B_K\cup\frac12(1+B_K).\tag{4.4}$$

Определим тригонометрические полиномы $m_{0,K}$ и $n_{0,K}$ степени $K+1$ по формулам

$$m_{0,K}(\xi)=\frac12\prod_{r\in A_K}\left(\chi_2(\xi)-\chi_2(r)\right),\qquad n_{0,K}(\xi)=\prod_{r\in B_K}\left(\chi_2(\xi)-\chi_2(r)\right).$$

Легко проверяется, что $m_{0,K}(0)=1$ для всех $K\ge 0$.

Далее, для целых $M\ge 0$ и $N\ge 0$ положим

$$\widehat{\varphi}_{M,N}(\xi)=\prod_{j=0}^{\infty}m_{0,K}\Big(\frac{\xi}{p^{N-j}}\Big),\quad \xi\in\mathbb{Q}_2,\tag{4.5}$$

$$\widehat{\psi}_{M,N}(\xi)=n_{0,K}\Big(\frac{\xi}{p^N}\Big)\widehat{\varphi}_{M,N}(2\xi),\quad \xi\in\mathbb{Q}_2,\tag{4.6}$$

где $K=M+N$.

Лемма 2. *Для всех M и N имеют место следующие утверждения*:
(1) $\widehat{\varphi}_{M,N} \in \mathcal{D}_M^N$, $\widehat{\psi}_{M,N} \in \mathcal{D}_{M+1}^N$;
(2) $\widehat{\varphi}_{M,N}\Big(\dfrac{l}{2^M}\Big) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $l \in 2^K B_K$, $0 \le l \le 2^K - 1$;
(3) $\widehat{\psi}_{M,N}\Big(\dfrac{l}{2^{M+1}}\Big) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда* $l \in 2^{K+1} A_K$, $0 \le l \le 2^{K+1} - 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что функции $\widehat{\varphi} := \widehat{\varphi}_{M,N}$ и $\widehat{\psi} := \widehat{\psi}_{M,N}$ являются 2^N-периодическими, следует из их определений и 1-периодичности тригонометрических полиномов. Для доказательства включения $\operatorname{supp}\widehat{\varphi} \subset B_M$ достаточно проверить, что $\widehat{\varphi}\Big(\dfrac{l}{2^{M+1}}\Big) = 0$ при всех $l = 1, 3, \dots, 2^{K+1} - 1$. Однако для каждого такого l найдется единственное $L \in \{1, \dots, K+1\}$ такое, что $l \equiv 2^L - 1 \pmod{2^{L+1}}$ (первые L цифр в двоичном разложении числа l равны 1, а $(L+1)$-я равна 0). Поэтому, если $L = K+1$, то, полагая $\xi = l/2^{M+1}$, $m_0 = m_{0,K}$, имеем

$$m_0\Big(\frac{\xi}{2^N}\Big) = m_0\Big(\frac{l}{2^{K+1}}\Big) = m_0\Big(\frac{2^{K+1}-1}{2^{K+1}}\Big) = 0.$$

Если же $L < K+1$, то при $j = K - L$ получаем

$$m_0\Big(\frac{\xi}{2^{N-j}}\Big) = m_0\Big(\frac{l}{2^{L+1}}\Big) = m_0\Big(\frac{2^L - 1}{2^{L+1}}\Big) = 0.$$

В обоих случаях из определения функции $\widehat{\varphi}$ следует, что $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$. Включение $\operatorname{supp}\widehat{\psi} \subset B_{M+1}$ вытекает из уже доказанного и определения функции $\widehat{\psi}$, что и завершает доказательство утверждения (1).

Для доказательства утверждения (2) положим $\xi = l/2^M$, $0 \le l \le 2^K - 1$. Представим l в виде $l = 2^K(l_1/2^L)$, где $0 \le L \le K$ и l_1 взаимно просто с 2^L. Если $l_1 \neq 2^L - 1$ (т. е. $l_1/2^L \notin B_K$), то найдется единственное натуральное $L_1 < L$ такое, что $l_1 \equiv 2^{L_1} - 1 \pmod{2^{L_1+1}}$. Тогда при $j = L - L_1 - 1$ имеем

$$m_0\Big(\frac{\xi}{2^{N-j}}\Big) = m_0\Big(\frac{l_1}{2^{L_1+1}}\Big) = m_0\Big(\frac{2^{L_1} - 1}{2^{L_1+1}}\Big) = 0,$$

и потому $\widehat{\varphi}(\xi) = 0$. Если же $l_1 = 2^L - 1$ (т. е. $l_1/2^L \in B_K$)), то

$$m_0\Big(\frac{\xi}{2^{N-j}}\Big) = m_0\Big(\frac{2^j(2^L-1)}{2^L}\Big) = m_0\left(\xi_j\right),$$

где $\xi_j = 0$ при $j \ge L$ и $\xi_j = \dfrac{2^{L-j} - 1}{2^{L-j}}$ при $j < L$. Поэтому $m_0\Big(\dfrac{\xi}{2^{N-j}}\Big) \neq 0$ для всех $j \ge 0$ и, значит, $\widehat{\varphi}(\xi) \neq 0$.

Для доказательства утверждения (3) положим $f(\xi) = \widehat{\varphi}(2\xi)$, $\xi \in \mathbb{Q}_2$. Из утверждения (2) следует, что $f\Big(\dfrac{l}{2^{M+1}}\Big) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $l \in C_K$, где $C_k := 2^K B_K \cup 2^K(1 + B_K)$. Однако ввиду (4.4) $C_k = 2^{K+1}(A_K \cup B_K)$, а из определения тригонометрического полинома $n_{0,K}$ вытекает, что $n_{0,K}\Big(\dfrac{l}{2^{K+1}}\Big) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $l \in 2^{K+1} B_K$. Таким образом, поскольку $\widehat{\psi}(\xi) = n_{0,K}\Big(\dfrac{\xi}{2^N}\Big) f(\xi)$ (см. (4.6)), мы установили, что $\widehat{\psi}\Big(\dfrac{l}{2^{M+1}}\Big) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $l \in 2^{K+1} A_K$. □

Теорема 6. *Для любых $M, N \ge 0$ таких, что $M \le 2^N - N - 1$, функция $\varphi_{M,N}$, определяемая своим преобразованием Фурье* (4.5), *порождает* КМА, *причем функция $\psi_{M,N}$, определяемая через* (4.6), *является всплеск-функцией. Более того, соответствующая система* (3.2) *с $\psi = \psi_{M,N}$ образует базис Рисса в $L^2(\mathbb{Q}_2)$ тогда и только тогда, когда $M = 2^N - N - 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, функция $\varphi := \varphi_{M,N}$ удовлетворяет соотношению (2.7), а значит, и масштабирующему уравнению (2.8) при любых M, N. Поэтому тот факт, что при $M \le 2^N - N - 1$ она порождает КМА, следует из теоремы 1 и леммы 2. Для доказательства того, что в этом случае $\psi := \psi_{M,N}$ — всплеск-функция, проверим выполнение всех условий теоремы 5. Как и выше, мы полагаем $K = M + N$. Из (4.6) следует, что

$$\widehat{\psi}(\xi)\chi_2\Big(\frac{l\xi}{2^N}\Big) = n_l\Big(\frac{\xi}{p^N}\Big)\widehat{\varphi}(2\xi), \qquad 0 \le l \le 2^N - 1,$$

где $n_l(\xi) = n_{0,K}(\xi)\chi_2(l\xi)$ — тригонометрический полином степени не выше $2^{N+1}-1$. Применяя к этому равенству преобразование Фурье, устанавливаем, что для каждого $b \in I_2 \cap B_N(0)$ функция $\psi(x-b)$ является линейной комбинацией функций $\varphi\Big(\dfrac{x}{2} - a\Big)$, $a \in I_2 \cap B_{N+1}(0)$, т. е. принадлежит пространству V_1.

Для проверки второго условия теоремы 5 заметим прежде всего, что носители функций $\widehat{\varphi}$ и $\widehat{\psi}$ дизъюнктны. $\big($Действительно, если $\xi \in \operatorname{supp}\widehat{\varphi} \cap \operatorname{supp}\widehat{\psi}$, то в силу утверждения (1) из леммы 2 можно считать, что $\xi = l/2^{M+1}$, где $0 \le l \le 2^{K+1} - 1$. Но тогда по утверждениям (2) и (3) той же леммы $2^{-N}\xi \in A_K \cap B_K$, что противоречит первому из равенств (4.4)$\big)$. Это влечет дизъюнктность носителей функций $\widehat{\varphi}(\xi)\chi_2(a\xi)$ и $\widehat{\psi}(\xi)\chi_2(b\xi)$, а потому и ортогональность последних для всех $a, b \in I_2$. Переходя к преобразованию Фурье и используя теорему Планшереля, получаем, что функции $\varphi(x-a)$ и $\psi(x-b)$ также ортогональны для всех $a, b \in I_2$ и, в частности, системы $\{\varphi(x-a) :\ a \in I_2 \cap B_N(0)\}$ и $\{\psi(x-b) :\ b \in I_2 \cap B_N(0)\}$ ортогональны друг другу.

Для проверки последнего условия теоремы 5 достаточно установить, что

$$\dim V_\varphi = \dim V_\psi = K + 1, \tag{4.7}$$

где $V_\theta = \operatorname{span}\{\theta(x-a) :\ a \in I_2 \cap B_N(0)\}$, $\theta \in \{\varphi, \psi\}$. Это, конечно же, равносильно тому, что

$$\dim V'_\theta = K + 1, \qquad \text{где } V'_\theta = \Big\{\widehat{\theta}(\xi)\chi_2\Big(\frac{l\xi}{2^N}\Big) :\ l = 0, \dots, 2^N - 1\Big\}.$$

Однако поскольку мощности множеств A_K и B_K равны $K+1$, то из леммы 2 следует, что для 2^N-периодической функции θ существует ровно $K+1$ попарно не сравнимых по модулю 2^N чисел $\xi_0, \dots, \xi_K \in \mathbb{Q}_2$ таких, что $\alpha_j := \widehat{\theta}(\xi_j) \ne 0$ при всех j. С одной стороны, это показывает, что $\dim V'_\theta \le K + 1$. С другой стороны, определитель матрицы, составленной из строк

$$\Big(\alpha_0\chi_2\Big(\frac{l\xi_0}{2^N}\Big), \dots, \alpha_K\chi_2\Big(\frac{l\xi_K}{2^N}\Big)\Big) = \Big(\alpha_0\chi_2\Big(\frac{\xi_0}{2^N}\Big)^l, \dots, \alpha_K\chi_2\Big(\frac{\xi_K}{2^N}\Big)^l\Big), \qquad l = 0, \dots, K,$$

и равный $D\prod_{j=0}^{K}\alpha_j$, где D — определитель Вандермонда, отвечающий попарно различным комплексным числам $\chi_2\Big(\dfrac{\xi_0}{2^N}\Big), \dots, \chi_2\Big(\dfrac{\xi_K}{2^N}\Big)$, отличен от нуля. Таким образом, указанные строки линейно независимы, что влечет линейную независимость функций $\widehat{\theta}(\xi)\chi_2\Big(\dfrac{l\xi}{2^N}\Big)$, $l = 0, \dots, K$, и, как следствие, равенство $\dim V'_\theta = K + 1$. Итак, все условия теоремы 5 проверены, а значит, ψ — всплеск-функция.

Для доказательства второй части теоремы заметим, что мощность множества $I_2 \cap B_N(0)$ равна 2^N, а размерность линейной оболочки системы функций $\{\psi(x-a) :\ a \in I_2 \cap B_N(0)\}$ равна $K+1 \le 2^N$ (см. (4.7)). Поэтому эти функции линейно независимы тогда и только тогда, когда $K+1 = 2^N$, т. е. $M = 2^N - N - 1$. Остается воспользоваться теоремой 4. □

Легко видеть, что если $(M,N) = (0,0)$ или $(M,N) = (0,1)$, то $\varphi_{M,N}(x) = \Omega(|x|_2)$, и мы получаем КМА Хаара, приводящий к ортонормированному базису всплесков. Напротив, при $N \ge 2$ и $M = 2^N - N - 1$ функции $\varphi_{M,N}$ порождают попарно различные КМА и приводят к неортогональным базисам Рисса (см. теорему 2).

В заключение отметим, что, используя результаты работы [10], можно показать, что при любых $M, N \geq 0$ таких, что $M \leq 2^N - N - 1$, система всплесков (3.2) является фреймом в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Mallat S.** Multiresolution approximation and wavelets // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 315. P. 69–88.
2. **Meyer Y.** Ondelettes et fonctions splines. Paris: Séminaire EDP, 1986. 18 p.
3. **Kozyrev S.V.** Wavelet analysis as a p-adic spectral analysis // Izv. Akad. Nauk. Seria Math. 2002. Vol. 66, no. 2. P. 149–158.
4. **Daubechies I.** Ten lectures on wavelets. CBMS-NSR Series in Appl. Math. Philadelphia: SIAM, 1992. 357 p.
5. **Kozyrev S.V.** p-Adic pseudodifferential operators and p-adic wavelets // Theor. Math. Physics. 2004. Vol. 138, no. 3. P. 322–332.
6. **Benedetto J.J., Benedetto R.L.** A wavelet theory for local fields and related groups // J. Geom. Anal. 2004. Vol. 14. no. 3. P. 423–456.
7. **Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.** p-Adic multidimensional wavelets and their application to p-adic pseudo-differential operators // Cornell University Library: E-print Archive. URL: http://arxiv.org/abs/math-ph/0612049 (2006).
8. **Shelkovich V.M., Skopina M.** p-Adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators // Cornell University Library: E-print Archive. URL: http://arxiv.org/abs/0705.2294 (2007).
9. **Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., Skopina M.** P-Adic refinable functions and MRA-based wavelets // Cornell University Library: E-print Archive. URL:http://arxiv.org/abs/0711.2820 (2008).
10. **Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.** p-Adic multiresolution analyses // Cornell University Library: E-print Archive. URL:http://arxiv.org/abs/0810.1147 (2008).
11. **Новиков И.Я, Протасов В.Ю., Скопина М.А.** Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005. 719 с.
12. **Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.** p-Адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, 1994. 352 с.
13. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М.: АФЦ, 1999. 560 с.

Поступила 17.03.2008

Евдокимов Сергей Алексеевич
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
С.-Петерб. отд-ние
Математического ин-та им. В.А. Стеклова
e-mail: evdokim@pdmi.ras.ru

Скопина Мария Александровна
д-р физ.-мат. наук, проф.
С.-Петерб. гос. ун-т
e-mail: skopina@MS1167.spb.edu

Том 15 № 1 2009

УДК 531.011

ГРУППА ГАЛИЛЕЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

И. В. Козьмин

В работе представлены результаты исследования задачи оптимального управления движением материальной точки при ограничениях на управление. Используется инвариантность рассматриваемой задачи относительно расширенной группы Галилея. С вычислительной точки зрения симметрия позволяет по численно найденной экстремали построить семейство решений. С аналитической точки зрения симметрия позволяет понизить размерность системы и исследовать свойства экстремалей.

Ключевые слова: управляемые механические системы, симметрии.

I. V. Kozmin. The Galilei group in an optimal control problem.

In the paper, results of studying an optimal control problem for the motion of a material point under control constraints are presented. The invariance of this problem with respect to the extended Galilei group is used. From the viewpoint of calculations, the symmetry allows us to construct a family of solutions through an extremal determined numerically. From the analytical viewpoint, the symmetry gives an opportunity to reduce system's dimension and to investigate properties of extremals.

Keywords: controlled mechanical systems, symmetries.

1. Постановка задачи

Трехмерной задачей Бушоу будем называть задачу оптимального по быстродействию управления движением материальной точки в трехмерном евклидовом пространстве под действием управляющей силы, ограниченной по величине.

Компоненты такой задачи имеют следующий вид:

1. Уравнения движения $m\ddot{q}^i = u_i$. Здесь m — масса точки, $q = \left(q^1,\ q^2,\ q^3\right) \in \mathbb{R}^3$ — координаты точки, $u\,(t) = (u_1\,(t)\,,\ u_2\,(t)\,,\ u_3\,(t)) \in \mathbb{R}^3$ — управляющая сила, зависящая от времени $t \in [0, T]$, T — длительность процесса.

2. Ограничение на управление $C\,(t, q, \dot{q}, u) = \|u\|^2 - P \leqslant 0,\ P > 0$.

3. Функциональные ограничения на траекторию в виде системы равенств

$$f^\gamma\,(q_0, \dot{q}_0, q_T, \dot{q}_T) = 0, \quad \gamma = 1, \ldots, 12,$$

где q_0, $\dot{q}_0$, q_T, $\dot{q}_T$ — координаты и скорости в начальной и конечной точке.

4. Критерий качества — быстродействие $I = \displaystyle\int_0^T dt = T \to \min$.

Подобные задачи рассматривались в работах [1–5].

2. Группа симметрии задачи

Назовем расширенной группой Галилея группу преобразований, включающую собственно группу Галилея [6, 7] и преобразование растяжения, т.е. состоящую из комбинаций преобразований следующих одиннадцати типов:

сдвиг по времени
$t' = t + \sigma_0, \quad \acute{q}^1 = q^1, \quad \acute{q}^2 = q^2, \quad \acute{q}^3 = q^3;$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 09-01-00523).

сдвиги по осям координат

$t' = t, \quad \acute{q}^1 = q^1 + \sigma_1, \quad \acute{q}^2 = q^2, \quad \acute{q}^3 = q^3 \quad$ (по оси q^1);

$t' = t, \quad \acute{q}^1 = q^1, \quad \acute{q}^2 = q^2 + \sigma_2, \quad \acute{q}^3 = q^3 \quad$ (по оси q^2);

$t' = t, \quad \acute{q}^1 = q^1, \quad \acute{q}^2 = q^2, \quad \acute{q}^3 = q^3 + \sigma_3 \quad$ (по оси q^3);

переход к подвижной системе координат по осям координат

$t' = t, \quad \acute{q}^1 = q^1 + \sigma_4 t, \quad \acute{q}^2 = q^2, \quad \acute{q}^3 = q^3 \quad$ (по оси q^1);

$t' = t, \quad \acute{q}^1 = q^1, \quad \acute{q}^2 = q^2 + \sigma_5 t, \quad \acute{q}^3 = q^3 \quad$ (по оси q^2);

$t' = t, \quad \acute{q}^1 = q^1, \quad \acute{q}^2 = q^2, \quad \acute{q}^3 = q^3 + \sigma_6 t \quad$ (по оси q^3);

вращения вокруг осей координат q^1, q^2, q^3 соответственно

$\acute{q}^1 = q^1, \quad \acute{q}^2 = q^2 \cos\sigma_7 + q^3 \sin\sigma_7, \quad \acute{q}^3 = -q^2 \sin\sigma_7 + q^3 \cos\sigma_7;$

$\acute{q}^1 = q^1 \cos\sigma_8 - q^3 \sin\sigma_8, \quad \acute{q}^2 = q^2, \quad \acute{q}^3 = q^1 \sin\sigma_8 + q^3 \cos\sigma_8;$

$\acute{q}^1 = q^1 \cos\sigma_9 + q^2 \sin\sigma_9, \quad \acute{q}^2 = -q^1 \sin\sigma_9 + q^2 \cos\sigma_9, \quad \acute{q}^3 = q^3;$

преобразование растяжения

$t' = e^{\sigma_{10}} t, \quad \acute{q}^1 = e^{2\sigma_{10}} q^1, \quad \acute{q}^2 = e^{2\sigma_{10}} q^2, \quad \acute{q}^3 = e^{2\sigma_{10}} q^3.$

Каждому преобразованию $t' = t'(t,\ q)$, $q' = q'(t,\ q)$ соответствует векторное поле, вычисляемое по формуле

$$s^0 = \partial t/\partial\sigma\big|_{\sigma=0}, \qquad s^i = \partial q^i/\partial\sigma\big|_{\sigma=0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда преобразования расширенной группы Галилея дают следующие векторные поля.

Сдвиг по времени: $S_{(0)} = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$;

сдвиг по оси q^1: $S_{(1)} = (0,\ 1,\ 0,\ 0)$;

сдвиг по оси q^2: $S_{(2)} = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$;

сдвиг по оси q^3: $S_{(3)} = (0,\ 0,\ 0,\ 1)$;

переход к подвижной системе координат по оси q^1: $S_{(4)} = (0,\ t,\ 0,\ 0)$;

переход к подвижной системе координат по оси q^2: $S_{(5)} = (0,\ 0,\ t,\ 0)$;

переход к подвижной системе координат по оси q^3: $S_{(6)} = (0,\ 0,\ 0,\ t)$;

вращение вокруг оси q^1: $S_{(7)} = \big(0,\ 0,\ q^3,\ -q^2\big)$;

вращение вокруг оси q^2: $S_{(8)} = \big(0,\ -q^3,\ 0,\ q^1\big)$;

вращение вокруг оси q^3: $S_{(9)} = \big(0,\ q^2,\ -q^1\ ,0\big)$;

преобразование растяжения: $S_{(10)} = \big(t,\ 2q^1,\ 2q^2,\ 2q^3\big)$.

Используя известные формулы продолжения [7], по полученным векторным полям построим выражения

$$s^{n+i}(t, q, \dot{q}) = \dot{s}^i - \dot{s}^0 \dot{q}^i, \qquad s^{2n+i}(t, q, \dot{q}) = \ddot{s}^i - 2\dot{s}^0 \ddot{q}^i - \ddot{s}^0 \dot{q}^i, \quad n = 3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тогда имеем продолжения для векторных полей, соответствующих:

сдвигу по времени

$s^4 = 0,\ s^5 = 0,\ s^6 = 0,\ s^7 = 0,\ s^8 = 0,\ s^9 = 0;$

сдвигам по осям координат

$s^4 = 0,\ s^5 = 0,\ s^6 = 0,\ s^7 = 0,\ s^8 = 0,\ s^9 = 0 \quad$ (по оси q^1);

$s^4 = 0,\ s^5 = 0,\ s^6 = 0,\ s^7 = 0,\ s^8 = 0,\ s^9 = 0 \quad$ (по оси q^2);

$s^4 = 0,\ s^5 = 0,\ s^6 = 0,\ s^7 = 0,\ s^8 = 0,\ s^9 = 0 \quad$ (по оси q^3);

переходу к подвижной системе координат по осям

$s^4 = 1,\ s^5 = 0,\ s^6 = 0,\ s^7 = 0,\ s^8 = 0,\ s^9 = 0 \quad$ (по оси q^1);

$s^4 = 0,\ s^5 = 1,\ s^6 = 0,\ s^7 = 0,\ s^8 = 0,\ s^9 = 0 \quad$ (по оси q^2);

$s^4 = 0,\ s^5 = 0,\ s^6 = 1,\ s^7 = 0,\ s^8 = 0,\ s^9 = 0 \quad$ (по оси q^3);

вращению вокруг осей координат q^1, q^2, q^3 соответственно

$s^4 = 0,\ s^5 = \dot{q}^3,\ s^6 = -\dot{q}^2,\ s^7 = 0,\ s^8 = u_3,\ s^9 = -u_2;$

$s^4 = -\dot{q}^3,\ s^5 = 0,\ s^6 = \dot{q}^1,\ s^7 = -u_3,\ s^8 = 0,\ s^9 = u_1;$

$s^4 = \dot{q}^2,\ s^5 = -\dot{q}^1,\ s^6 = 0,\ s^7 = u_2,\ s^8 = -u_1,\ s^9 = 0;$

растяжению
$s^4 = \dot{q}^1,\ s^5 = \dot{q}^2,\ s^6 = \dot{q}^3,\ s^7 = 0,\ s^8 = 0,\ s^9 = 0.$

Понятие покомпонентной инвариантности задачи оптимального управления введено в работе [10]. Обозначим через Ω множество точек $(t, q, \dot{q}, \ddot{q}, u)$, удовлетворяющих условиям $m\ddot{q} = u$ и $\|u\|^2 - P \leq 0$.

Теорема 1. *Трехмерная задача Бушоу покомпонентно инвариантна относительно действия расширенной группы Галилея.*

Доказательство. Для того чтобы задача оптимального управления была покомпонентно инвариантна относительно действия группы, необходимо, чтобы для каждого преобразования $S_{(\gamma)}$, $\gamma = 0, \ldots, 10$, существовали функции B^γ и w_i, $i = 1, 2, 3$, такие, что выполняются соотношения [10]

$$\dot{s}^0 = dB^\gamma/dt, \tag{1}$$

$$\pounds_{(s,\omega)}\left(\|u\|^2 - P\right) = 0, \tag{2}$$

$$\pounds_{(s,\omega)}\left(m\ddot{q}^i + u_i\right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{3}$$

где $\pounds_{(s,\omega)}$ — оператор Ли — Бэклунда [7], действующий на функцию $\Psi\left(t, q, \dot{q}, \ddot{q}\right)$ по правилу

$$\pounds_{(s,\omega)}\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial t}s^0 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial q^i}s^i + \frac{\partial\Psi}{\partial\dot{q}^i}s^{n+i} + \frac{\partial\Psi}{\partial\ddot{q}^i}s^{2n+i}\right) + \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Psi}{\partial u_i}\omega_i.$$

Проверим условия покомпонентной инвариантности для каждого преобразования из расширенной группы Галилея. Отметим, что условие (2) выполняется вдоль экстремалей для всех преобразований. Рассмотрим условие (3) подробнее. Используя введенные обозначения, получаем

$$\pounds_{(s,\omega)}\left(-m\ddot{q}^i + u_i\right) = -ms^{2n+i} + w^i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Таким образом, функция w^i существует и равна ms^{2n+i}. Следовательно, условие (3) выполняется для всех преобразований расширенной группы Галилея. Проверим условие (1) для каждого типа преобразования, сгруппировав их в зависимости от значения s^0.

Для преобразования сдвига по времени $s^0 = 1$, значит, B будет иметь вид $B^0 = \mathrm{const}$.

Для сдвигов по координатам, перехода к подвижной системе координат и вращений вокруг осей координат $s^0 = 0$, поэтому $B^\gamma = \mathrm{const}$, $\gamma = 1, \ldots, 9$.

Для преобразования растяжения $s^0 = t$. Отсюда находим $B^{10} = t$.

Так как для всех преобразований расширенной группы Галилея существуют функции B^γ, то для рассматриваемой задачи условие (1) выполнено.

3. Приведение общей задачи к задаче с фиксированными начальными условиями

Задача является тривиальной, если скорость в начальной и конечной точке равна нулю. В этом случае двигаемся по прямой, первую половину времени ускоряясь, а вторую — замедляясь. В нетривиальном случае, используя симметрию системы, формулируем следующее утверждение.

Теорема 2. *Нетривиальную задачу с произвольными начальными и конечными условиями можно свести к задаче с начальными и конечным условиями*

$$q_0^i = 0\ (i = 1, 2, 3), \qquad \dot{q}_0^1 = 1, \qquad \dot{q}_0^2 = \dot{q}_0^3 = 0, \qquad q_T^3 = 0. \tag{4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим возможные варианты.

1. Рассматриваемая задача покомпонентно инвариантна относительно действия расширенной группы Галилея. Поэтому, если скорость в начальный момент не равна нулю, то, используя преобразования сдвига по координатам, поворотов вокруг осей и растяжения, приводим задачу к виду (4).

2. Если скорость в начальный момент равна нулю, а в конечный момент времени отлична от нуля, то применяем еще и преобразование отражения по времени t и сводим задачу к первому случаю. После приведения задачи с произвольными начальными условиями к задаче с фиксированными начальными условиями поворотом вокруг оси q^1 произвольные конечные условия сводятся к виду, при котором $q_T^3 = 0$.

Далее везде будем считать, что задача имеет начальные условия $q_0^i = 0$, $\dot{q}_0^1 = 1$, $\dot{q}_0^2 = \dot{q}_0^3 = 0$ и конечное условие $q_T^3 = 0$.

4. Необходимые условия оптимальности

Воспользуемся принципом максимума Л. С. Понтрягина в форме, адаптированной для задач управления механическими системами [8].

Введем вспомогательные переменные (множители Лагранжа): постоянные $\psi{=}(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{12})$, непрерывную и непрерывно-дифференцируемую вектор-функцию $y\,(t) = (y^1\,(t),\ y^2\,(t),\ y^3\,(t))$, кусочно-непрерывную и кусочно-дифференцируемую скалярную функцию $\mu\,(t)$.

Определим следующие функции: расширенный лагранжиан

$$\Lambda\,(t, q, \dot{q}, u) = \psi_0 + \frac{1}{2}\mu\left(\|u\|^2 - P\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(m\ddot{q}^i - u_i\right) y^i,$$

расширенный гамильтониан (функцию Понтрягина)

$$\Pi\,(t, q, \dot{q}, u) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot{q}^i} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot{q}^i}\right)\right]\dot{q}^i - \Lambda = \sum_{i=1}^{3}\left(y^i u_i - m\dot{y}^i\dot{q}^i - \psi_0\right),$$

терминант [9]

$$\lambda = \sum_{\gamma=1}^{12}\psi_\gamma f^\gamma.$$

Если $\{[0{,}T], q\,(\cdot)\,, u\,(\cdot)\}$ — оптимальный процесс, то существуют множители Лагранжа (ψ_0, $y\,(\cdot)$, $\mu\,(\cdot)$) такие, что выполняются необходимые условия оптимальности [10]. Траектории, удовлетворяющие необходимым условиям, будем называть экстремалями.

T1. *Нетривиальность: для всех* $t\in[0, T]$ *постоянные* ψ, *функция* $y\,(t)$ *и ее производная* $\dot{y}\,(t)$ *не обращаются в нуль одновременно.*

T2. *Стационарность по* q *(уравнения Эйлера — Пуассона)*

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot{q}^i}\right)\right] = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Так как Λ явно зависит только от $\ddot{q}^i$, то

$$\ddot{y}^i = 0, \qquad y^i = c_{1i}t + c_{2i},$$

где c_{1i} и c_{2i} — константы.

T3. *Стационарность по* u: *для всех моментов* $t\in[0,\ T]$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial u}=0.$$

Из этого выражения находим $\mu u-y=0$.

T4. *Оптимальность по* u: *для всех моментов* $t\in[0,\ T]$

$$u\left(t\right)=\arg\min_{v\in U(t,q,\dot{q})}\Lambda\left(t,q,\dot{q},v\right).$$

Для того чтобы лучше понять, как получается итоговое выражение (5) из условия T4, выпишем общий вид Λ [10]

$$\Lambda\left(t,q,\dot{q},\ddot{q},u\right)=\psi_0F^0+\mu C+\sum_{i=1}^{3}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q^i}-Q_i\right]y^i.$$

В этом уравнении u содержится в двух слагаемых μC и $\sum_{i=1}^{3}Q_iy^i$. В рассматриваемой задаче эти слагаемые имеют вид

$$\mu C=\frac{1}{2}\mu\left(\|u\|^2-P\right),\qquad\sum_{i=1}^{3}Q_iy^i=-\sum_{i=1}^{3}u_iy^i.$$

Требуется найти такое управление u, чтобы эти выражения были минимальными. Но первое выражение вдоль экстремали равно нулю, следовательно, направление управления не имеет значения. Из второго выражения надо найти такое управление, чтобы выражение $-u_iy^i$ было минимальным, или u_iy^i было максимальным. Это происходит, когда векторы u_i и y^i совпадают по направлению. Окончательное выражение для управления имеет вид

$$u_i=P\frac{y^i}{\|y\|},\qquad i=1,2,3.\tag{5}$$

T5. *Условия трансверсальности*:

$$\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot{q}^i}\right]_{t=t_0}=\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{q}_0^i},\qquad\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot{q}^i}\right)\right]_{t=t_0}=\frac{\partial\lambda}{\partial q_0^i},$$
$$\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot{q}^i}\right]_{t=t_1}=-\frac{\partial\lambda}{\partial\dot{q}_1^i},\qquad\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\dot{q}^i}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial\ddot{q}^i}\right)\right]_{t=t_1}=-\frac{\partial\lambda}{\partial q_1^i}.$$

Так как преобразования, относительно которых задача инвариантна, позволили сделать начальные условия фиксированными (см. (4)), то информативными в нашем случае являются только ограничения для конечного момента времени:

$$-my^i\left(T\right)=-\psi_i,\qquad m\dot{y}^i\left(T\right)=-\psi_{i+3},\qquad i=1,2,3,$$

или, соответственно,

$$c_{1i}T+c_{2i}=\frac{\psi_i}{m},\qquad c_{1i}=-\frac{\psi_{i+3}}{m},\qquad i=1,2,3.$$

Используя выражения, полученные из условий стационарности T3 и оптимальности T4 по u для всех моментов $t\in[0,\ T]$, можно найти $\|y\|=P\mu$.

Для задачи в $\mathbb{R}^3$ уравнения $m\ddot{q}^i=Py^i\left(t\right)/\left\|y\left(t\right)\right\|$ в общем случае нельзя проинтегрировать в явном виде. Явное решение существует, если постоянные вдоль экстремали векторы $C_1=(c_{11},c_{12},c_{13})$ и $C_2=(c_{21},c_{22},c_{23})$ коллинеарны.

5. Первые интегралы

В рассматриваемой задаче первые интегралы имеют более простой вид, чем в общем случае [10].

Теорема 3. *Если трехмерная задача Бушоу покомпонентно инвариантна относительно действия однопараметрической группы преобразований G вида $t' = t'(t, q)$, $q' = q'(t, q)$, тогда вдоль экстремальной траектории сохраняет свое значение выражение*

$$N_{(s)} = \sum_{i=1}^{3} \left(m y^i s^{n+i} - m \dot{y}^i s^i - \left(y^i \ddot{q}^i - m \dot{y}^i \dot{q}^i \right) s^0 \right) = \text{const}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше было доказано, что задача покомпонентно инвариантна относительно действия преобразований расширенной группы Галилея. Следовательно, для этих преобразований первые интегралы существуют [10]. Рассмотрим исходное выражение для первого интеграла сопряженной системы

$$N_{(s)} = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \ddot{q}^i} s^{n+i} + \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \ddot{q}^i} \right) \right] s^i \right] - \Pi s^0 - \sum_{\gamma=0}^{6} \psi_\gamma B^\gamma = \text{const}. \tag{6}$$

Подставляя в формулу (6) выражения для расширенного лагранжиана и расширенного гамильтониана, получаем

$$\begin{aligned} N_{(s)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \left(\psi_0 + \frac{1}{2} \mu \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - P^2 \right) + \left(m \ddot{q}^i - u_i \right) y^i \right)}{\partial \ddot{q}^i} s^{n+i} \\ + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \left(\psi_0 + \frac{1}{2} \mu \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - P^2 \right) + \left(m \ddot{q}^i - u_i \right) y^i \right)}{\partial \dot{q}^i} s^i \\ - \sum_{i=1}^{3} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\psi_0 + \frac{1}{2} \mu \left(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - P^2 \right) + \left(m \ddot{q}^i - u_i \right) y^i \right)}{\partial \ddot{q}^i} \right) s^i \\ - \sum_{i=1}^{3} \left(m y^i \ddot{q}^i - m \dot{y}^i \dot{q}^i - \psi_0 \right) s^0 - \sum_{\gamma=0}^{6} \psi_\gamma B^\gamma = \text{const}. \end{aligned}$$

Так как u не зависит от $\ddot{q}$, то, вычислив значения производных в скобках, получим

$$\begin{aligned} N_{(s)} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \left(\left(m \ddot{q}^i - u_i \right) y^i \right)}{\partial \ddot{q}^i} s^{n+i} + \sum_{i=1}^{3} \left[- \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \left(\left(m \ddot{q}^i - u_i \right) y^i \right)}{\partial \ddot{q}^i} \right) \right] s^i \\ - \sum_{i=1}^{3} \left(m y^i \ddot{q}^i - m \dot{y}^i \dot{q}^i - \psi_0 \right) s^0 - \sum_{\gamma=0}^{6} \psi_\gamma B^\gamma = \text{const}. \end{aligned}$$

Из условия (1) покомпонентной инвариантности в рассматриваемой задаче для каждого поля

$$B^\gamma = s^0 + \text{const}, \quad \gamma = 1, \ldots, 11.$$

Подставляя это равенство в полученную формулу, имеем

$$N_{(s)} = \sum_{i=1}^{3} \left(m y^i s^{n+i} - m \dot{y}^i s^i - \left(m y^i \ddot{q}^i - m \dot{y}^i \dot{q}^i \right) s^0 \right) = \text{const},$$

что и требовалось доказать. □

Используя полученное выражение, выпишем первые интегралы для преобразований расширенной группы Галилея. Имеем

$$N_{(0)} = -\Pi\left(t, q, \dot{q}, u\right) - \psi_0 = -\left\|y\right\| + \sum_{i=1}^{3} m\dot{y}^i\dot{q}^i = \mathrm{const}$$

для сдвига по времени;

$$N_{(1)} = m\dot{y}^1 = mc_{11} = \mathrm{const}, \qquad N_{(2)} = m\dot{y}^2 = mc_{12} = \mathrm{const}, \qquad N_{(3)} = m\dot{y}^3 = mc_{13} = \mathrm{const}$$

для сдвигов по осям q^1, q^2, q^3;

$$N_{(4)} = m\left(y^1 - \dot{y}^1 t\right) = mc_{21} = \mathrm{const}, \qquad N_{(5)} = m\left(y^2 - \dot{y}^2 t\right) = mc_{22} = \mathrm{const},$$
$$N_{(6)} = m\left(y^3 - \dot{y}^3 t\right) = mc_{23} = \mathrm{const}$$

для перехода к подвижной системе координат по осям q^1, q^2, q^3 соответственно;

$$N_{(7)} = m\left(y^2\dot{q}^3 - y^3\dot{q}^2 - \dot{y}^2q^3 + \dot{y}^3q^2\right) = \mathrm{const}, \qquad N_{(8)} = m\left(-y^1\dot{q}^3 + y^3\dot{q}^1 + \dot{y}^1q^3 - \dot{y}^3q^1\right) = \mathrm{const},$$
$$N_{(9)} = m\left(y^1\dot{q}^2 - y^2\dot{q}^1 - \dot{y}^1q^2 + \dot{y}^2q^1\right) = \mathrm{const}$$

для вращения вокруг осей координат q^1, q^2, q^3 соответственно;

$$N_{(10)} = m\sum_{i=1}^{3}\left(2y^i\dot{q}^i - 2\dot{y}^iq^i - \dot{y}^i\dot{q}^it\right) + \left\|y\right\|t = \mathrm{const}$$

для растяжения вдоль осей q^1, q^2, q^3 с коэффициентом $2\sigma_{10}$ и вдоль оси t с коэффициентом σ_{10}.

Интегралы $N_{(1)}, \ldots, N_{(6)}$ тривиальны, поскольку могут быть получены из $\ddot{y}^i = 0$. Нетривиальными являются первые интегралы преобразований сдвига по времени $N_{(0)}$, вращений $N_{(7)}$, $N_{(8)}$, $N_{(9)}$ и растяжения $N_{(10)}$:

$$N_{(0)} = -\left\|y\right\| + m\left(c_{11}\dot{q}^1 + c_{12}\dot{q}^2 + c_{13}\dot{q}^3\right) = \mathrm{const},$$
$$N_{(7)} = mc_{21}\left(t\dot{q}^3 - q^3\right) + mc_{22}\dot{q}^3 - mc_{31}\left(\dot{q}^2t - q^2\right) - mc_{32}\dot{q}^2 = \mathrm{const},$$
$$N_{(8)} = -mc_{11}\left(t\dot{q}^3 - q^3\right) - mc_{21}\dot{q}^3 + mc_{13}\left(\dot{q}^1t - q^1\right) + mc_{23}\dot{q}^1 = \mathrm{const},$$
$$N_{(9)} = mc_{11}\left(t\dot{q}^2 - q^2\right) + mc_{21}\dot{q}^2 - mc_{12}\left(\dot{q}^2t - q^2\right) - mc_{22}\dot{q}^1 = \mathrm{const},$$
$$N_{(10)} = m\sum_{i=1}^{3}\left(2y_i\dot{q}^i - 2\dot{y}_iq^i - \dot{y}^i\dot{q}^it\right) + \left\|y\right\|t = \mathrm{const}.$$

Полученные первые интегралы позволяют понизить размерность задачи и получить формулу для времени процесса в общем случае. Хотя нетривиальных интегралов пять, одновременно можно использовать только четыре, так как интегралы для вращений вокруг осей координат функционально зависимы.

Следующие выражения для констант c_{1i}, $i = 1, 2, 3$, записанные через константы c_{2i}, время процесса T, конечные скорости $\dot{q}^i_T$ и координаты q^i_T, позволяют понизить размерность задачи.

$$\begin{aligned}
c_{11} = c_{21}&\frac{2T\left(T\dot{q}^1_T - q^1_T\right)\left(\dot{q}^1_T - 1\right) + 2\left(\dot{q}^2_TT - q^2_T\right)^2 + 2\left(\dot{q}^3_TT\right)^2}{\Delta}\\
&+ c_{22}\frac{2q^2_T\dot{q}^1_TT - 2q^2_Tq^1_T}{\Delta}\\
&+ c_{23}\frac{2\dot{q}^3_T\left(T^2 - Tq^1_T\right) + 2\left(\dot{q}^2_TT - q^2_T\right)\left(\dot{q}^2_TT - q^1_T\dot{q}^2_T + q^2_T\dot{q}^1_T - q^2_T\right)}{\Delta}\\
&+ \frac{T^2\left(T\dot{q}^1_T - q^1_T\right)\frac{P}{m}\sqrt{c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2}}{\Delta};
\end{aligned}$$

$$c_{12} = c_{21}\frac{\left(T\dot q_T^2 - q_T^2\right)\left(2q_T^1 - T\right)}{\Delta}$$
$$+ c_{22}\frac{2\left(\dot q_T^3 T\right)^2 - \left(T\dot q_T^1 - q_T^1\right)\left(T - 2\left(\dot q_T^1 T - q_T^1\right)\right) + 2T\left(T\dot q_T^2 - q_T^2\right)\dot q_T^2}{\Delta}$$
$$+ c_{23}\frac{\left(T - 2\left(\dot q_T^1 T - q_T^1\right)\right)\left(-q_T^1\dot q_T^2 + q_T^2\dot q_T^1 + T\dot q_T^2 - q_T^2\right) - 2\left(\dot q_T^3\right)^2 T q_T^2}{\dot q^3\Delta}$$
$$+ \frac{T^2\left(T\dot q_T^2 - q_T^2\right)\frac{P}{m}\sqrt{c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2}}{\Delta};$$

$$c_{13} = c_{21}\frac{-\dot q_T^3 T^2 + 2q_T^1\dot q_T^3 T}{\Delta} + c_{22}\frac{2\dot q_T^3 q_T^2 T}{\Delta}$$
$$+ c_{23}\frac{2\left(\dot q_T^2 T - q_T^2\right)T\dot q_T^2 + 2\left(T\dot q_T^3\right)^2 - T\left(T - 2\left(\dot q_T^1 T - q_T^1\right)\right)\left(\dot q_T^1 - 1\right)}{\Delta}$$
$$+ \frac{T^3\dot q_T^3\frac{P}{m}\sqrt{c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2}}{\Delta},$$

где
$$\Delta = T\left(T\left(T\dot q_T^1 - q_T^1\right) - 2\left(\dot q_T^2 T - q_T^2\right)^2 - 2\left(\dot q_T^1 T - q_T^1\right)^2 - 2\left(\dot q_T^3 T\right)^2\right).$$

Используя эти выражения для констант c_{11}, c_{12}, c_{13} и первый интеграл для преобразования растяжения, можно получить формулу для времени процесса. Она имеет достаточно громоздкий вид и здесь не приведена.

6. Случай, когда необходимо попасть в заданную точку с произвольной скоростью

В рассматриваемом частном случае из условий трансверсальности T5 получаем, что в конечный момент времени $y(T) = 0$. Запишем это выражение через константы c_{1i} и c_{2i} (здесь и далее $i = 1, 2, 3$)
$$c_{1i}T + c_{2i} = 0. \tag{7}$$

Выражение для управления в общем случае имеет вид
$$u_i = P\frac{y^i}{\|y\|} = P\frac{c_{1i}t + c_{2i}}{\sqrt{(c_{11}t + c_{21})^2 + (c_{12}t + c_{22})^2 + (c_{13}t + c_{23})^2}},$$

или с учетом выражения (7)
$$u_i = P\frac{(t - T)}{\|t - T\|}\frac{c_{1i}}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2}}.$$

Так как выражение $(t - T)$ неположительно, то выражение для управления будет иметь вид
$$u_i = -P\frac{c_{1i}}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2}}.$$

Введем следующее обозначение:
$$\tilde u_i = P\frac{c_{1i}}{\sqrt{c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2}}.$$

Так как $u(T) = \text{const}$, то в момент времени T уравнение движения $m\ddot{q}(T) = -\tilde{u}$ можно проинтегрировать, представив его в виде системы уравнений через проекции на оси координат

$$\dot{q}^1(T) = -\frac{\tilde{u}_1 T}{m} + 1, \qquad \dot{q}^2(T) = -\frac{\tilde{u}_2 T}{m}, \qquad \dot{q}^3(T) = -\frac{\tilde{u}_3 T}{m},$$

$$q^1(T) = -\tilde{u}_1 \frac{T^2}{2m} + T, \qquad q^2(T) = -\tilde{u}_2 \frac{T^2}{2m}, \qquad q^3(T) = -\tilde{u}_3 \frac{T^2}{2m}.$$

Кроме того, прямой подстановкой можно проверить, что выполняется равенство

$$(\tilde{u}_1)^2 + (\tilde{u}_2)^2 + (\tilde{u}_3)^2 = P^2. \tag{8}$$

Выразим из представлений для координат константы $\tilde{u}_i$:

$$\tilde{u}_1 = -2m\left(q_T^1 - T\right)/T^2, \qquad \tilde{u}_2 = -2mq_T^2/T^2, \qquad \tilde{u}_3 = -2mq_T^3/T^2.$$

Подставляя эти выражения для $\tilde{u}_i$ в (8), получим

$$P^2T^4 - 4T^2 + 8mq_T^1 T - 4m^2\left(\left(q_T^1\right)^2 + \left(q_T^2\right)^2 + \left(q_T^3\right)^2\right) = 0. \tag{9}$$

Уравнение для времени (9) может иметь до трех положительных корней (по правилу знаков Декарта), каждый из которых соответствует экстремали, приводящей в заданную точку. На рис. 1 показан пример такого случая.

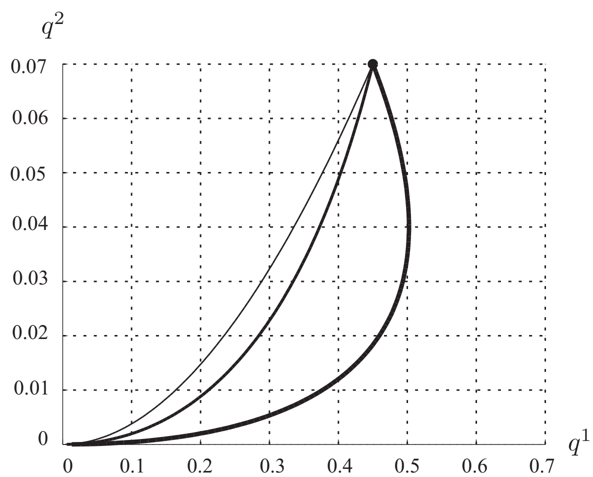


Рис. 1. Экстремали задачи в интегрируемом случае.

Так как в задаче со свободной конечной скоростью управление постоянно, то, используя полученные формулы, можно построить область достижимости. На рис. 2 показаны проекции области достижимости для всех трех положительных корней уравнения для времени. Всем трем корням соответствуют экстремали, приводящие в одну и ту же заданную точку. Наилучшей является экстремаль, приводящая в заданную точку за минимальное время.

На рис. 3 представлено изменение проекции области достижимости во времени.

Для задачи со свободной конечной скоростью получено уравнение для времени T, а также аналитическая зависимость управления от координат конечной точки и времени T.

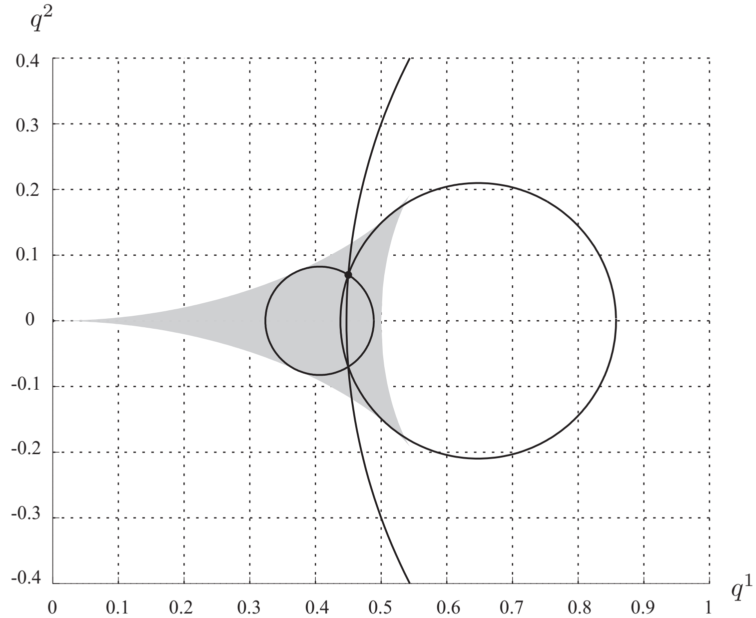


Рис. 2. Проекции на оси q^1 и q^2 области достижимости в моменты, соответствующие трем корням уравнения для времени.

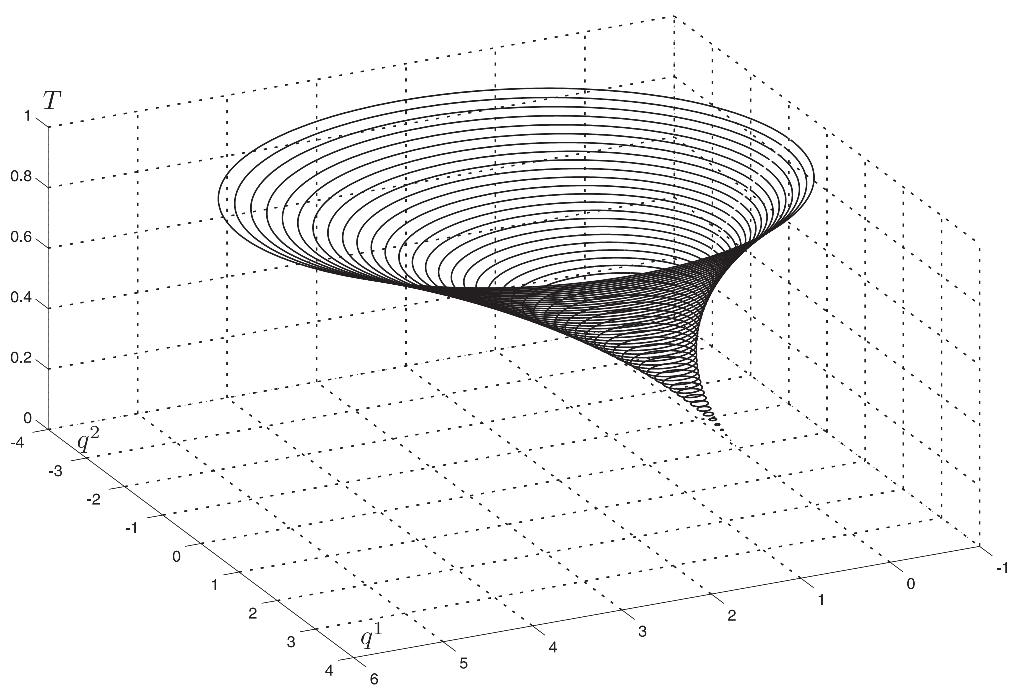


Рис. 3. Динамика области достижимости для задачи со свободным по скорости концом в проекции на оси q^1 и q^2.

7. Анализ алгебры Ли

Каждому векторному полю расширенной группы Галилея соответствует первый интеграл, позволяющий упростить решение задачи. Векторные поля расширенной группы Галилея образуют 11-мерное векторное пространство, которое является алгеброй Ли относительно действия коммутатора (скобок Ли). Под действием коммутатора на векторные поля алгебры Ли снова получается векторное поле, принадлежащее этой алгебре. Для того чтобы убедиться, что векторные поля расширенной группы Галилея не порождают новых полей, позволяющих найти новые первые интегралы, вычислим скобки Ли. Полученные результаты приведены в таблице, где на пересечении строки $S_{(i)}$ и столбца $S_{(j)}$ выписано значение скобки Ли, вычисляемой по правилу

$$[S_{(i)}, S_{(j)}]^k = \frac{\partial s_j^k}{\partial t} s_i^0 + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial s_j^k}{\partial q^l} s_i^l + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial s_j^k}{\partial u^l} w_i^l - \frac{\partial s_i^k}{\partial t} s_j^0 - \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial s_i^k}{\partial q^l} s_j^l - \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial s_i^k}{\partial u^l} w_j^l,$$

$$i, j = 0, \ldots, 10; \qquad k = 1, 2, 3.$$

Таблица

Скобки Ли для векторных полей преобразований расширенной группы Галилея

	$S_{(0)}$	$S_{(1)}$	$S_{(2)}$	$S_{(3)}$	$S_{(4)}$	$S_{(5)}$	$S_{(6)}$	$S_{(7)}$	$S_{(8)}$	$S_{(9)}$	$S_{(10)}$
$S_{(0)}$	0	0	0	0	$-S_{(1)}$	$-S_{(2)}$	$-S_{(3)}$	0	0	0	$-S_{(0)}$
$S_{(1)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$-S_{(3)}$	$S_{(2)}$	$-2S_{(1)}$
$S_{(2)}$	0	0	0	0	0	0	0	$S_{(3)}$	0	$-S_{(1)}$	$-2S_{(2)}$
$S_{(3)}$	0	0	0	0	0	0	0	$-S_{(2)}$	$S_{(1)}$	0	$-2S_{(3)}$
$S_{(4)}$	$S_{(1)}$	0	0	0	0	0	0	0	$-S_{(6)}$	$S_{(5)}$	$-2S_{(4)}$
$S_{(5)}$	$S_{(2)}$	0	0	0	0	0	0	$S_{(6)}$	0	$-S_{(4)}$	$-2S_{(5)}$
$S_{(6)}$	$S_{(3)}$	0	0	0	0	0	0	$-S_{(5)}$	$S_{(4)}$	0	$-2S_{(6)}$
$S_{(7)}$	0	0	$-S_{(3)}$	$S_{(2)}$	0	$-S_{(6)}$	$S_{(5)}$	0	$-S_{(9)}$	$S_{(8)}$	$-2S_{(7)}$
$S_{(8)}$	0	$S_{(3)}$	0	$-S_{(1)}$	$S_{(6)}$	0	$-S_{(4)}$	$S_{(9)}$	0	$-S_{(7)}$	$-2S_{(8)}$
$S_{(9)}$	0	$-S_{(2)}$	$S_{(1)}$	0	$-S_{(5)}$	$S_{(4)}$	0	$-S_{(8)}$	$S_{(7)}$	0	$-2S_{(9)}$
$S_{(10)}$	$S_{(0)}$	$2S_{(1)}$	$2S_{(2)}$	$2S_{(3)}$	$2S_{(4)}$	$2S_{(5)}$	$2S_{(6)}$	$2S_{(7)}$	$2S_{(8)}$	$2S_{(9)}$	0

Анализ таблицы показывает, что для порождения векторных полей расширенной группы Галилея достаточно выбрать поле для сдвига по времени, одно из полей для перехода к подвижной системе координат, два поля для вращений вокруг осей координат и поле растяжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акуленко Л.Д.** Возмущенная оптимальная по быстродействию задача управления конечным положением материальной точки посредством ограниченной силы // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 2. С. 12–21.
2. **Акуленко Л.Д.** Синтез управления в задаче оптимального по быстродействию пересечения сферы // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 5. С. 724–735.
3. **Акуленко Л.Д., Шматков А.М.** Оптимальное по быстродействию достижение сферы материальной точкой с нулевой скоростью // Прикл. математика и механика. 2002. Т. 66, вып. 1. С. 10–23.
4. **Акуленко Л.Д., Кошелев А.П.** Наискорейшее приведение динамического объекта в заданное положение при равенстве начальной и конечной скоростей // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 6. С. 98–105.
5. **Акуленко Л.Д., Кошелев А.П.** Наискорейшее приведение динамического объекта в исходное положение с требуемой скоростью // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 5. С. 46–52.
6. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.

7. **Ибрагимов В.Х.** Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983. 280 с.
8. **Kukushkin A.P.** Necessary condition of optimality for the control lagrangian system // Probl. Control and Inform. Theory. 1984. Vol. 13, no. 4. P. 229–238.
9. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
10. **Кукушкин А.П.** Покомпонентная инвариантность управляемых механических систем // Изв. Урал. гос. ун-та. 2003. № 26. С. 97–107. (Математика и механика; вып. 5).

Козьмин Иван Викторович
младший науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: ikozmin@imm.uran.ru

Поступила 22.12.2008

Том 15 № 1 2009

УДК 517.5

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ПРОСТРАНСТВ ОБОБЩЕННЫХ СОВЕРШЕННЫХ СПЛАЙНОВ[1]

В. А. Кощеев

Вычисляются фундаментальные группы $\pi_1(\Omega_n)$ пространств Ω_n обобщенных совершенных сплайнов. При $n \geq 2$ группы тривиальны, $\pi_1(\Omega_1)$ является свободной группой с тремя образующими.

Ключевые слова: обобщенные совершенные сплайны, фундаментальные группы.

V. A. Koshcheev. Fundamental groups of spaces of generalized perfect splines.

The fundamental groups $\pi_1(\Omega_n)$ of the spaces Ω_n of generalized perfect splines are calculated. For $n \geq 2$, the groups are trivial; $\pi_1(\Omega_1)$ is a free group with three generators.

Keywords: generalized perfect splines, fundamental groups.

Введение

Пространства обобщенных совершенных сплайнов Ω_n изучались В. И. Рубаном в работе [1], где установлено, что Ω_n допускают структуру клеточных пространств, и вычислены группы целочисленных когомологий этих пространств.

Пусть $\omega(t)$ — непрерывная монотонно возрастающая на $[0,1]$ функция, $\omega(0) = 0$. Для произвольного разбиения $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1$ отрезка $[0,1]$ и любого набора знаков $s_i = \pm 1,\ i = \overline{1, q+1}$, положим, как и в [1],

$$F(t) = F(\eta, s, t) = s_i \min\{\omega(t - \eta_{i-1}),\ \omega(\eta_i - t)\}, \qquad t \in [\eta_{i-1}, \eta_i]. \tag{0.1}$$

Пусть Ω_n — множество ω-сплайнов вида (0.1) с $q+2$ узлами $\{\eta_i\}_{i=0}^{q+1}$ при $q \leq n$ и L_1-метрикой

$$\rho(F_1, F_2) = \int_0^1 |F_1(t) - F_2(t)|\, dt$$

(или иной L_p-метрикой, $1 \leq p \leq \infty$, эквивалентной ей на этом множестве) [1].

Обобщенные совершенные сплайны возникают в теории приближения функций при решении экстремальных задач [2, 3]. Пространства, гомеоморфные Ω_n, как отмечено в [1], получаются и при некоторых иных определениях обобщенных совершенных сплайнов [3].

Изложение материала статьи ориентировано на специалистов в теории сплайнов и экстремальных задач и не предполагает детального знакомства читателя с основными понятиями, методами и фактами гомотопической теории. Среди многочисленной литературы по теории гомотопий для ссылок используются книги [4–8]. Клеточная структура пространств Ω_n описана в [1] схематично. В следующих пунктах этот вопрос обсуждается более детально.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (08-01-00320) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1071.2008.1).

1. Клеточные пространства

Структурой клеточного пространства на хаусдорфовом топологическом пространстве X называют разбиение (т. е. представление X в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств) пространства X на подмножества e_i^q (клетки), гомеоморфные открытым шарам соответствующих размерностей q. Для каждой клетки $e_i^q \subset X$ фиксируется характеристический гомеоморфизм $\chi_i^q : \operatorname{int} D^q \to e_i^q$, где D^q — замкнутый шар евклидова пространства $\mathbb{R}^q$, $\operatorname{int} D^q$ — его внутренность. При этом требуется, чтобы гомеоморфизм χ_i^q допускал продолжение до непрерывного отображения (называемого характеристическим отображением) шара D^q в пространство X, причем должны быть выполнены следующие условия:

(C) образ границы шара D^q принадлежит объединению конечного множества клеток e_i^j меньших размерностей (т. е. $j < q$);

(W) подмножество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда его пересечение с замыканием любой клетки замкнуто.

Для клеточных пространств, состоящих из конечного числа клеток (каковыми являются пространства Ω_n) условия (C) и (W) выполняются автоматически.

Клеточное подпространство клеточного пространства X — это замкнутое его подмножество, составленное из целых клеток; клеточные подпространства являются самостоятельными клеточными пространствами. Важнейшие клеточные подпространства клеточного пространства X — его остовы: m-й остов $\mathrm{sk}_m X$ есть объединение всех клеток размерности меньшей или равной m. Непрерывное отображение f клеточного пространства X в клеточное пространство Y называется клеточным, если $f(\mathrm{sk}_q X) \subset \mathrm{sk}_q Y$ при любом q.

При определении тех или иных групп клеточных пространств возникает необходимость в ориентации клеток. Ориентации клеток задаются их характеристическими отображениями.

Пусть e^q и e^{q-1} — соответственно q-мерная и $(q-1)$-мерная клетки пространства X и

$$f\colon\ D^q \to X, \qquad g : D^{q-1} \to X$$

являются их характеристическими отображениями. Отображение g определяет гомеоморфизм

$$\overline{g} :\ \mathbb{S}^{q-1} = D^{q-1}/\mathbb{S}^{q-2} \to \overline{e^{q-1}}/\mathrm{Fr}\,\overline{e^{q-1}},$$

где $D^{q-1}/\mathbb{S}^{q-2}$ получено из D^{q-1} отождествлением всех точек границы $\mathrm{Fr}\,D^{q-1} = \mathbb{S}^{q-2}$, другими словами, $D^{q-1}/\mathbb{S}^{q-2}$ получено из D^{q-1} факторизацией шара D^{q-1} по $\mathrm{Fr}\,D^{q-1}$; аналогично, $\overline{e^{q-1}}/\mathrm{Fr}\,\overline{e^{q-1}}$ — факторпространство $\overline{e^{q-1}}$ по $\mathrm{Fr}\,\overline{e^{q-1}}$.

Рассмотрим композицию отображений

$$\mathbb{S}^{q-1} \xrightarrow{f|_{\mathbb{S}^{q-1}}} \mathrm{sk}_{q-1}X \xrightarrow{P} (\mathrm{sk}_{q-1}X)/\big\{(\mathrm{sk}_{q-2}X) \cup (\text{все } (q-1)\text{-мерные клетки, кроме } e^{q-1})\big\}$$

$$= \overline{e^{q-1}}/\mathrm{Fr}\,\overline{e^{q-1}} \xrightarrow{\overline{g}^{\,-1}} \mathbb{S}^{q-1},$$

где $f|_{\mathbb{S}^{q-1}}$ — сужение отображения f на границу $\mathrm{Fr}\,D^q = \mathbb{S}^{q-1}$ шара D^q, P — проекция $\mathrm{sk}_{q-1}X$ на указанное факторпространство. Степень этого отображения — целое число — называется коэффициентом инцидентности между клетками e^q и e^{q-1} и обозначается через $[e^q : e^{q-1}]$ (см. [4]).

2. Клеточная структура пространств $\mathbf{\Omega_n}$

В определении характеристических отображений шары евклидова пространства иногда удобно заменять гомеоморфными им стандартными симплексами. Стандартный k-мерный симплекс Δ^k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ — это множество

$$\Delta^k = \Big\{x = (x_1, \ldots, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1}\colon\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1, k+1},\ \sum_{i=1}^{k+1} x_i = 1\Big\}.$$

Ориентация симплекса задается упорядочением (нумерацией) его вершин с точностью до четной перестановки.

Теорема А [1, лемма 1]. *Пространства Ω_n допускают структуру клеточных пространств, которые в каждой размерности q, $q \le n$, содержат 2^{q+1} клеток, и при $m \le n$ пространство Ω_m является m-остовом $\mathrm{sk}_m \Omega_n$ пространства Ω_n.*

В каждой размерности $q = 0, 1, 2, \ldots, n$ клетки пространства Ω_n определяются следующим образом. Пусть $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{q+1})$, $s_i = \pm 1$. Тогда $e^q(s)$ — это множество всех сплайнов F вида (0.1), имеющих в точности $q+2$ узла $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_q < \eta_{q+1} = 1$, и $\operatorname{sign} F(t) = s_i$ для $t \in (\eta_{i-1}, \eta_i)$, $i = \overline{1, q+1}$. Характеристический гомеоморфизм $\pi_s^q :\ \operatorname{int} \Delta^q \to e^q(s)$, где Δ^q – q-мерный стандартный симплекс,

$$\operatorname{int} \Delta^q = \Big\{ x = (x_1, \ldots, x_{q+1}) \in \mathbb{R}^{q+1}\colon\ x_i > 0,\ i = \overline{1, q+1},\ \sum_{i=1}^{q+1} x_i = 1 \Big\}$$

— его внутренность, задается формулами

$$\eta_0(x) = 0, \qquad \eta_i(x) = \sum_{k=1}^{i} x_k, \qquad i = \overline{1, q}, \qquad \eta_{q+1}(x) = 1,$$

$$\eta(x) = (\eta_0(x), \eta_1(x), \ldots, \eta_{q+1}(x)), \qquad \pi_s^q(x) = F(\eta(x), s, \cdot)$$

для $x \in \operatorname{int} \Delta^q$, $q > 0$, а сплайн $F(\eta(x), s, t)$ определяется равенством (0.1).

На границе $\operatorname{Fr} \Delta^q$ хотя бы одна из координат равна нулю. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_{q+1}) \in \operatorname{Fr} \Delta^q$ и $x_{i_1} = x_{i_2} = \ldots = x_{i_m} = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, q)$ — все нулевые координаты точки x. Обозначим через $\sigma(x, k)$ k-й по порядку элемент множества $\{1, 2, \ldots, q+1\} \backslash \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, т. е. $x_{\sigma(x,k)}$ — k-я по порядку ненулевая координата точки x. Рассмотрим вектор знаков $s(x) = s(i_1, i_2, \ldots, i_m)$, где $s(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ обозначает вектор, полученный из $s = (s_1, s_2, \ldots, s_{q+1})$ удалением координат с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$.

Для $x \in \operatorname{Fr} \Delta^q$ положим

$$\eta_0(x) = 0, \qquad \eta_i(x) = \sum_{k=1}^{i} x_{\sigma(x,k)}, \qquad i = \overline{1, q+1-m},$$

$$\overline{\pi}_s^q(x) = F(\eta(x), s(x), \cdot),$$

где $\eta(x) = (\eta_0(x), \eta_1(x), \ldots, \eta_{q+1-m}(x))$. Полагая $\overline{\pi}_s^q(x) = \pi_s^q(x)$ для $x \in \operatorname{int} \Delta^q$, получим непрерывное продолжение $\overline{\pi}_s^q :\ \Delta^q \to \Omega_n$ гомеоморфизма $\pi_s^q :\ \operatorname{int} \Delta^q \to e^q(s) \subset \Omega_n$, которое является характеристическим отображением для клетки $e^q(s)$.

3. Фундаментальные группы топологических пространств

Пусть в топологическом пространстве X выбрана точка $x_0 \in X$ (называемая отмеченной), а на окружности $\mathbb{S}^1$ выбрана точка x_*. Рассмотрим множество $\Omega(X, x_0)$ непрерывных отображений $f\colon\ \mathbb{S}^1 \to X$, $f(x_*) = x_0$. На этом множестве есть отношение гомотопности: $f \sim g$ тогда и только тогда, когда существует такое непрерывное отображение $F\colon\ \mathbb{S}^1 \times [0,1] \to X$, что $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ для всех $x \in \mathbb{S}^1$ и $F(x_*, t) = x_0$ для любого $t \in [0,1]$. При этом каждому $t \in [0,1]$ соответствует отображение $f_t\colon\ \mathbb{S}^1 \to X$, где $f_t(x) = F(x, t)$. Эти отображения непрерывны и непрерывно зависят от t. Множество классов эквивалентности по этому отношению (гомотопических классов) называют фундаментальной группой пространства X и обозначают $\pi_1(X, x_0)$.

В определении фундаментальной группы $\pi_1(X, x_0)$ вместо отображений $\mathbb{S}^1 \to X$ можно рассматривать отображения отрезка $[0,1]$ в X, при которых оба конца отрезка переходят в отмеченную точку x_0. Такие отображения называют петлями. Произведение двух петель φ и ψ — это петля χ, составленная из этих двух петель, которые проходятся последовательно: $\chi(t) = \varphi(2t)$ при $0 \le t \le 1/2$ и $\chi(t) = \psi(2t-1)$ при $1/2 \le t \le 1$. Это умножение порождает умножение и в множестве гомотопических классов петель (если $\varphi \sim \varphi',\ \psi \sim \psi'$, то $\varphi\psi \sim \varphi'\psi'$). При этом множество гомотопических классов относительно введенной операции умножения является группой. Обратным к гомотопическому классу петли $\varphi\colon\ [0,1] \to X$ служит класс петли φ', проходимой в обратном направлении $\varphi'(t) = \varphi(1-t)$. Единичный элемент группы $\pi_1(X, x_0)$ — это гомотопический класс постоянного отображения $[0,1] \to x_0$ (подробности см. в [4–8]). Для линейно связного пространства X группа $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна группе $\pi_1(X, x_1)$ для любых точек $x_0,\ x_1 \in X$.

Приведем несколько известных фактов из теории гомотопий, которые понадобятся в дальнейшем.

Теорема B [4, § 6, следствие из теоремы 4]. *Для любого клеточного пространства X и $x_0 \in \mathrm{sk}_0 X$ группа $\pi_1(X, x_0)$ изоморфна $\pi_1(\mathrm{sk}_2 X, x_0)$.*

Топологические пространства X и X' называют гомотопически эквивалентными, если существуют такие непрерывные отображения $f\colon\ X \to X'$ и $g\colon\ X' \to X$, что их композиции $g \circ f\colon\ X \to X,\ f \circ g\colon\ X' \to X'$ гомотопны тождественным отображениям $X \to X,\ X' \to X'$ соответственно. Топологическое пространство Y называется стягиваемым, если тождественное отображение $Y \to Y$ гомотопно отображению, переводящему Y в точку $y_0 \in Y$.

Теорема C [5, § 4, п. 1]. *Пусть Y — клеточное подпространство клеточного пространства X, причем Y стягиваемо. Тогда пространство X/Y гомотопически эквивалентно X.*

Букетную сумму (или, кратко, букет) семейства пунктированных пространств можно определить следующим образом. Пусть $(X_i, x_i),\ i = \overline{1,n}$, — топологические пространства с отмеченными точками x_i. Подмножество произведения $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, состоящее из точек, все координаты которых кроме, быть может, одной являются отмеченными точками, называется букетом пунктированных пространств X_i и обозначается

$$X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_n = (X_1, x_1) \vee (X_2, x_2) \vee \ldots \vee (X_n, x_n).$$

Теорема D [4, § 6, теорема 3]. *Пусть $B_A = \bigvee_{\alpha \in A} \mathbb{S}^1_\alpha$ — букет окружностей $\mathbb{S}^1_\alpha = \mathbb{S}^1$. Тогда $\pi_1(B_A)$ — свободная группа, образующие которой соответствуют элементам множества A.*

Теорема E (К. Борсук [5, § 4, п. 1]). *Пусть Y — топологическое пространство, A — клеточное подпространство клеточного пространства X, $f\colon\ X \to Y$ — непрерывное отображение, f_A — сужение f на $A \subset X$ и $F_A\colon\ A \times [0,1] \to Y$ — гомотопия, $F_A(a, 0) = f_A(a)$ для любого $a \in A$. Гомотопия F_A допускает продолжение до гомотопии $F\colon\ X \times [0,1] \to Y$ отображения f, т. е. существует гомотопия $F\colon\ X \times [0,1] \to Y$ такая, что $F(a,t) = F_A(a,t)$ для любых $a \in A,\ t \in [0,1]$ и $F(x, 0) = f(x)$ для всех $x \in X$.*

4. Фундаментальные группы пространств Ω_n

Нульмерными клетками пространства Ω_n являются два сплайна с узлами $\eta = (\eta_0, \eta_1)$, $\eta_0 = 0,\ \eta_1 = 1$ и знаками $s = (1),\ s' = (-1)$. Положим $a = F(\eta, s, \cdot),\ b = F(\eta, s', \cdot)$, где F определено формулой (0.1).

Пространство Ω_n при $n \ge 1$ в силу теоремы А содержит четыре одномерные клетки, которые вместе с нульмерными образуют 1-остов $\mathrm{sk}_1 \Omega_n$, совпадающий с Ω_1.

Ориентируем одномерный стандартный симплекс Δ^1, фиксируя порядок вершин $\big((1,0), (0,1)\big)$. Вектору знаков $s^1 = (1,1)$ соответствует клетка $e^1(s^1) \subset \Omega_1$, объединение которой с нульмерной клеткой-сплайном $a \in \overline{e^1(s^1)}$ образует простую замкнутую кривую $\omega_1 \subset \Omega_1$. Ориентация ω_1 задается выбранной ориентацией симплекса Δ^1 и характеристическим гомеоморфизмом $\pi^1_{s^1}\colon\ \mathrm{int}\,\Delta^1 \to e^1(s^1)$. Вектору знаков $s^2 = (-1,-1)$ соответствует клетка $e^1(s^2) \subset \Omega_1$, объединение которой с нульмерной клеткой-сплайном $b \in \overline{e^1(s^2)}$ образует простую замкнутую кривую $\omega_2 \subset \Omega_1$ с ориентацией, задаваемой характеристическим гомеоморфизмом $\pi^1_{s^2}$. Вектору знаков $s^3 = (1, -1)$ соответствует клетка $e^1(s^3) \subset \Omega_1$, объединение которой со сплайнами $a, b \in \overline{e^1(s^3)}$ образует дугу $\alpha = [a, b]_\alpha$ с ориентацией от a к b, определяемой гомеоморфизмом $\pi^1_{s^3}$. Наконец, вектору знаков $s^4 = (-1, 1)$ соответствует клетка $e^1(s^4) \subset \Omega_1$, объединение которой со сплайнами $a, b \in \overline{e^1(s^4)}$ образует дугу $\beta = [b, a]_\beta$. Ориентирующая стрелка от b к a задается гомеоморфизмом $\pi^1_{s^4}$. Ориентированный граф, соответствующий $\Omega_1 = \mathrm{sk}_1\Omega_n$, изображен на рис. 1.

Дуга α является клеточным подпространством пространства Ω_1. Очевидно, α стягиваема в точку a. Отождествим между собой все точки дуги α, т. е. рассмотрим факторпространство $Z = \Omega_1/\alpha$ клеточного пространства Ω_1 по клеточному подпространству α. Элементы и подмножества пространства Z будем помечать символом “крышечка”. Очевидно, Z гомеоморфно букету трех окружностей (рис. 2).

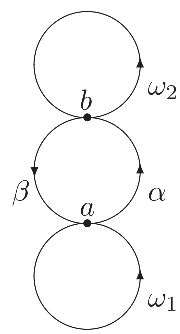


Рис. 1.

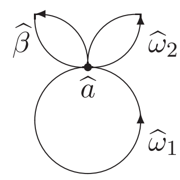


Рис. 2.

По теореме C пространство Ω_1 гомотопически эквивалентно Z. Как известно, фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны. В качестве формальной ссылки можно воспользоваться теоремой, доказанной в [4, § 11, п. 4, теорема 4] для отображений — слабых гомотопических эквивалентностей, однако мы находимся в довольно простой ситуации, и изоморфность фундаментальных групп пространств Ω_1 и Z станет очевидной после нескольких пояснений. Отмеченными точками пространств Ω_1 и Z считаем a и $\widehat{a}$ соответственно.

Пусть $p: \ \Omega_1 \to Z = \Omega_1/\alpha$ — естественная проекция, $f: \ \Omega_1 \to \Omega_1$ — тождественное отображение, f_α — сужение f на α. Так как дуга α стягиваема в точку $a \in \alpha$, существует гомотопия $F_\alpha\colon \ \alpha \times [0,1] \to \alpha$, $F_\alpha(y, 0) = f_\alpha(y) = y$, $F_\alpha(a, t) = a$, $F_\alpha(y, 1) = a$ для всех $y \in \alpha$, $t \in [0, 1]$. По теореме E существует гомотопия $F\colon \ \Omega_1 \times [0,1] \to \Omega_1$ такая, что $F(y, t) = F_\alpha(y, t)$ для всех $y \in \alpha$, $t \in [0,1]$ и $F(x, 0) = f(x) = x$ для любого $x \in \Omega_1$. Положим $f_t(x) = F(x, t)$.

Конечное отображение f_1 гомотопии F представляет собой отображение $\Omega_1 \to \Omega_1$, переводящее α в точку a. На множестве $\Omega_1 \backslash \alpha$ (т. е. на дополнении к α) проекция p является взаимно однозначным отображением, поэтому можно определить непрерывное отображение $g_1\colon \ Z \to \Omega_1$, полагая $g_1(\widehat{a}) = a$, $g_1(\widehat{z}) = f_1 \circ p^{-1}(\widehat{z})$ для $\widehat{z} \neq \widehat{a}$. Имеем

$$g_1 \circ p(x) = \begin{cases} a & \text{при} \quad x \in \alpha, \\ f_1(x) & \text{при} \quad x \in \Omega_1 \backslash \alpha, \end{cases}$$

т. е. $g_1 \circ p = f_1$, но f_1 гомотопно тождественному отображению $f: \ \Omega_1 \to \Omega_1$. При этом $f_t(a) = F_\alpha(a, t) = a$ для любого $t \in [0, 1]$.

Положим $g_t\colon \ Z \to \Omega_1$, $g_t(\widehat{a}) = a$, $g_t(\widehat{z}) = f_t \circ p^{-1}(\widehat{z})$ для $\widehat{z} \neq \widehat{a}$. При $t \neq 1$ отображение g_t, вообще говоря, не является непрерывным, однако композиция $p \circ g_t: \ Z \to Z$ непрерывна при всех $t \in [0, 1]$ и непрерывно зависит от t. Имеем

$$p \circ g_0(\widehat{a}) = \widehat{a} \quad \text{при} \quad t = 0,$$

$$p \circ g_0(\widehat{z}) = p \circ f_0[p^{-1}(\widehat{z})] = p \circ f[p^{-1}(\widehat{z})] = p \circ p^{-1}(\widehat{z}) = \widehat{z} \quad \text{для} \quad \widehat{z} \neq \widehat{a},$$

т. е. $p \circ g_1$ гомотопно тождественному отображению $Z \to Z$. Заметим, что $p \circ g_t(\widehat{a}) = \widehat{a}$ для любого $t \in [0,1]$. Таким образом, отображения p и q_1 являются гомотопически взаимно обратными. При этом как отображения p и g_1, так и отображения, входящие в рассматриваемые гомотопии, переводят отмеченную точку в отмеченную. После этих замечаний изоморфность фундаментальных групп $\pi_1(\Omega_1, a)$ и $\pi_1(Z, \widehat{a})$ очевидна.

Теорема 1. *Фундаментальные группы $\pi_1(\Omega_n)$ пространств Ω_n обобщенных совершенных сплайнов при $n \geq 2$ тривиальны, $\pi_1(\Omega_1)$ является свободной группой с тремя образующими.*

Доказательство. В силу теоремы D и пояснений, предшествующих формулировке теоремы 1, остается доказать тривиальность $\pi_1(\Omega_n)$ при $n \geq 2$. По теореме A имеем $\Omega_2 = \mathrm{sk}_2\Omega_n$ для $n > 2$, поэтому с учетом теоремы B достаточно доказать, что $\pi_1(\Omega_2)$ состоит из одного единичного элемента.

В силу теоремы A пространство Ω_2 содержит восемь двумерных клеток. Ориентируем двумерный стандартный симплекс Δ^2, фиксируя порядок вершин $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Пусть

$$c^1 = (1,1,1), \quad c^2 = (1,1,-1), \quad c^3 = (1,-1,1), \quad c^4 = (1,-1,-1),$$

$$c^5 = (-1,1,1), \quad c^6 = (-1,1,-1), \quad c^7 = (-1,-1,1), \quad c^8 = (-1,-1,-1).$$

Каждому из этих векторов знаков c^i соответствует двумерная клетка $e^2(c^i) \subset \Omega_2$, характеристический гомеоморфизм $\pi^2_{c^i}\colon\ \mathrm{int}\,\Delta^2 \to e^2(c^i)$ и характеристическое отображение $\overline{\pi}^{\,2}_{c^i}$ симплекса Δ^2 в Ω_2, $i = \overline{1,8}$.

Дуга $\alpha = e^1(s^1) \cup \{a\} \cup \{b\} \subset \Omega_1 \subset \Omega_2$ является клеточным подпространством пространства Ω_2. Рассмотрим факторпространство $W = \Omega_2/\alpha$. Факторпространство Z, введенное ранее (см. рис. 2), можно считать подмножеством пространства W, поэтому элементы и подмножества из W также будем помечать символом “крышечка”. Пространство W, очевидно, является клеточным и содержит одну нульмерную клетку $\widehat{a}$, три одномерных и восемь двумерных клеток. На множестве $\Omega_2 \backslash \alpha$ естественная проекция $P\colon\ \Omega_2 \to W$ взаимно однозначна, поэтому отображение $P \circ \pi^2_{c^i}\colon\ \mathrm{int}\,\Delta^2 \to \widehat{e}^{\,2}_{c^i}$ будет характеристическим гомеоморфизмом клетки $\widehat{e}^{\,2}_{c^i} \subset W$, а композиция отображений $P \circ \overline{\pi}^{\,2}_{c_i}\colon\ \Delta^2 \to W$ — характеристическим отображением симплекса Δ^2, соответствующим клетке $\widehat{e}^{\,2}_{c^i}$.

Выбранную ориентацию симплекса Δ^2 назовем положительной. Ориентация Δ^2 индуцирует ориентации сторон треугольника Δ^2. Положительными ориентациями сторон Δ^2 будут $\big((1,0,0),(0,1,0)\big)$, $\big((0,1,0),(0,0,1)\big)$, $\big((0,0,1),(1,0,0)\big)$. Положим $g_i = P \circ \overline{\pi}^{\,2}_{c^i}|_{\mathrm{Fr}\,\Delta^2}$, $i = \overline{1,8}$. Граница $\mathrm{Fr}\,\Delta^2$ симплекса Δ^2 гомеоморфна окружности, вершины Δ^2 переводятся отображениями g_i при любом i в отмеченную точку $\widehat{a}$ пространства W, поэтому отображение $g_i\colon\ \mathrm{Fr}\,\Delta^2 \to \mathrm{sk}_1 W$ является петлей и, следовательно, определяет элемент группы $\pi_1(W, \widehat{a})$, который является единицей группы, поскольку граница $\mathrm{Fr}\,\Delta^2$ стягиваема по Δ^2 в любую из своих вершин. Группа $\pi_1(W, \widehat{a})$ является группой с тремя образующими, соответствующими трем окружностям букета Z (см. рис. 2), и определяющими соотношениями, задаваемыми приклеивающими отображениями g_i (см. [4, § 6, теорема 4], а также [8, гл. 7, § 2, теорема 2.1]).

Рассмотрим двумерную клетку $e^2(c^1) \subset \Omega_2$ и соответствующее ей отображение $g_1\colon\ \mathrm{Fr}\,\Delta^2 \to \mathrm{sk}_1 W$. Петля является по определению отображением окружности или отрезка $[0,1]$, переводящим концы в отмеченную точку, однако интуитивно петля отождествляется с образом этого отображения, поэтому любая простая замкнутая кривая, содержащая отмеченную точку, воспринимается как петля (и становится таковой после соответствующей параметризации). С учетом этого замечания, чтобы не вводить дополнительных обозначений, петлю g_1 запишем в виде $\widehat{\omega}_1 \cdot \widehat{\omega}_1 \cdot \widehat{\omega}_1^{-1}$. В этой записи учтены ориентации сторон треугольника Δ^2 и ориентация простой замкнутой кривой $\widehat{\omega}_1$ (см. рис. 2). В силу сказанного ранее гомотопический класс $[\widehat{\omega}_1 \cdot \widehat{\omega}_1 \cdot \widehat{\omega}_1^{-1}] = [\widehat{\omega}_1]$ петли $\widehat{\omega}_1$ в пространстве W равен единице группы $\pi_1(W, \widehat{a})$.

Аналогичным образом рассмотрим двумерную клетку $e^2(c^3) \subset \Omega_2$ и соответствующее ей отображение $g_3:\ \mathrm{Fr}\,\Delta^2 \to \mathrm{sk}_1 W$. Когда точка обходит $\mathrm{Fr}\,\Delta^2$ в положительном направлении, ее образ при отображении g_3 последовательно обходит простые замкнутые кривые $\widehat{\beta}$ и $\widehat{\omega}_1$ соответственно в положительном и отрицательном направлении, следовательно, гомотопический класс $[\widehat{\beta}\,\widehat{\omega}_1^{-1}] = [\widehat{\beta}]$ в пространстве W также совпадает с единицей группы $\pi_1(W, \widehat{a})$.

Наконец, отображение $g_4\colon\ \mathrm{Fr}\,\Delta^2 \to \mathrm{sk}_1 W$, соответствующее клетке $e^2(c^4) \subset \Omega_2$, дает соотношение, из которого следует, что образующий элемент группы $\pi_1(W, \widehat{a})$, соответствующий $\widehat{\omega}_2$, также равен единице этой группы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рубан В.И.** Клеточная структура и когомологии пространств обобщенных совершенных сплайнов // Вісник Дніпропетровського університету. Математика. 1999. Вып. 4. С. 85–90.
2. **Субботин Ю.Н.** Приближение “сплайн”-функциями и оценки поперечников // Тр. МИАН. 1971. Т. 109. С. 35–60.
3. **Babenko V.F., Ruban V.I.** On the non-symmetric widths of classes of periodic functions // East J. Approx. 1995. Vol. 2, no. 1. P. 119–129.
4. **Фоменко А.Т., Фукс Д.Б.** Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989. 494 с.
5. **Васильев В.А.** Введение в топологию. М.: ФАЗИС, 1997. 132 с.
6. **Постников М.М.** Лекции по алгебраической топологии. Теория гомотопий клеточных пространств. М.: Наука, 1985. 335 с.
7. **Постников М.М.** Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий. М.: Наука, 1984. 416 с.
8. **Масси У., Столлингс Дж.** Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977. 344 с.

Кощеев Виктор Алексеевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Viktor.Koshcheev@imm.uran.ru

Поступила 29.10.2008

Том 15 № 1 2009

УДК 517.518.86

О СХЕМЕ ЮДИНА ОЦЕНКИ СНИЗУ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ НА СФЕРЕ[1]

А. А. Монтиле

Рассматривается задача Юдина, доставляющая оценку снизу для минимума потенциальной энергии системы одинаковых зарядов на единичной сфере $\mathbb{S}^2$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Для этой задачи выписана двойственная задача в случае произвольного числа зарядов. Приводится решение двойственной задачи для конкретных случаев $5, 6, 7, 8, 12$ зарядов. Кроме того, решена прямая задача и указаны предположительно оптимальные расположения для 7 и 8 зарядов. Показано, что метод Юдина не позволяет доказать оптимальность данных расположений.

Ключевые слова: потенциальная энергия системы зарядов, задача Юдина, прямая и двойственная задачи, предположительно оптимальные расположения.

A. A. Montile. On Yudin's scheme of finding a lower estimate for the potential energy of a system of charges on a sphere.

We consider Yudin's problem of finding a lower estimate for the minimum of the potential energy of a system of equal charges on the unit sphere $\mathbb{S}^2$ of Euclidean space $\mathbb{R}^3$. For this problem, we write a dual problem in the case of an arbitrary number of charges. A solution of the dual problem is given for the cases of 5, 6, 7, 8, and 12 charges. In addition, the primal problem is solved and hypothetically optimal distributions are specified for 7 and 8 charges. It is established that Yudin's method does not allow one to prove the optimality of these distributions.

Keywords: potential energy of a system of charges, Yudin's problem, primal and dual problems, hypothetically optimal distributions.

1. Постановка задачи. История вопроса

Пусть $\mathbb{S}^2$ — единичная сфера евклидова пространства $\mathbb{R}^3$. Далее используется обозначение $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ — евклидова норма вектора (точки) $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Зафиксируем произвольный набор $Y = \{y^{(i)}\}_{i=1}^N$ из N попарно различных точек $y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}$, принадлежащих $\mathbb{S}^2$. Рассмотрим функционал потенциальной энергии

$$W(Y) = W(y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}) = \sum_{i,j=1,\ i\neq j}^{N} \frac{1}{|y^{(i)} - y^{(j)}|}$$

системы единичных зарядов, расположенных в точках $y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}$ набора Y. Обозначим через $\operatorname{card}(Y)$ количество точек в наборе Y.

Хорошо известна задача о нахождении величины

$$W_N = \min\{W(Y): \quad Y \subset \mathbb{S}^2, \quad \operatorname{card}(Y) = N\}. \tag{1.1}$$

Набор $Y = \{y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\} \subset \mathbb{S}^2$, на котором достигается минимум в (1.1), будем называть *оптимальным расположением*, а величину W_N назовем *минимальной энергией*. Из определения величины W_N следует, что она возрастает по N, т. е. $W_N < W_{N+1}$ для любого $N \geq 2$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00213) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

Пусть $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ — система многочленов Лежандра ($\deg P_k = k,\ P_k(1) = 1$), ортогональная на отрезке $[-1,1]$ с единичным весом (см. [7, гл. 4]). Обозначим через $\widetilde{\mathcal{F}}$ класс функций $f:\ [-1,1] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu P_\nu(t), \quad \text{все} \quad f_\nu \ge 0, \qquad f(1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu < \infty, \tag{1.2}$$

и

$$f(t) \le \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}} \quad \text{при} \quad -1 \le t < 1.$$

Обозначим через $C = C[-1,1]$ пространство непрерывных на $[-1,1]$ функций с нормой $\|f\|_C = \max\{|f(t)|:\ t \in [-1,1]\}$. Ясно, что $\widetilde{\mathcal{F}} \subset C$.

Рассмотрим задачу

$$u = u_N = \sup\{N f_0 - f(1): \quad f \in \widetilde{\mathcal{F}}\}. \tag{1.3}$$

Задача нахождения величины (1.3) есть задача бесконечномерного линейного программирования, которую назовем *задачей Юдина*. Такое название мотивировано следующим результатом, установленным в [8] (см. также [1, гл. 3, разд. 3.1]).

Теорема 1 (В.А. Юдин). *При любом* $N \ge 2,\ N \in \mathbb{N}$, *величины* (1.1) *и* (1.3) *связаны между собой неравенством*

$$W_N \ge N u. \tag{1.4}$$

Для $N = 2, 3, 4, 6, 12$ неравенство (1.4) обращается в равенство. Соответствующими экстремальными функциями в (1.3) являются: константа, многочлены степеней $1, 1, 2$ и 4. Случаи $N = 2, 3$ очевидны, в остальных из указанных случаев решения были выписаны в работах [8], [2] и [1]. Далее перечислены соответствующие величины минимальных энергий:

$$W_2 = 1, \quad W_3 = 2\sqrt{3} = 3.46410161\ldots, \quad W_4 = 3\sqrt{6} = 7.34846922\ldots,$$

$$W_6 = 3 + 12\sqrt{2} = 19.97056274\ldots, \quad W_{12} = 6 + 30\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 98.33050611\ldots$$

Оптимальными расположениями являются: два полюса сферы ($N = 2$), три вершины равностороннего треугольника, вписанного в окружность экватора ($N = 3$), вершины правильного симплекса (тетраэдра, $N = 4$), октаэдра ($N = 6$) и икосаэдра ($N = 12$), вписанных в сферу; они указаны в [8, 2].

Точное решение задачи Юдина для $N = 5$ нашел И. Д. Иванов (см. [6]) в своей дипломной работе. В этом случае хорошо известно следующее расположение зарядов: два — в южном и северном полюсах сферы, оставшиеся три — на экваторе на одинаковом расстоянии друг от друга. Энергия размещенных таким образом зарядов совпадает (с точностью до 12 знаков после запятой) с приближенным значением минимальной энергии, полученной [10] в результате численного решения соответствующей задачи оптимизации. Естественно предположить, что данное расположение является оптимальным, поэтому будем называть его *предположительно оптимальным расположением.*

В [6] содержится описание другого метода оценки минимальной энергии, основанного на SDP (методе полуопределенного программирования), который в случае $N = 5$ дает более хорошую оценку, чем (1.4).

В [8] получены следующие эффективные оценки для минимальной энергии и величины (1.3) при $N \ge 2$:

$$N(N - 2\sqrt{N} + 1) \le N u \le W_N \le N^2 - N. \tag{1.5}$$

Из оценки снизу $u \ge N - 2\sqrt{N} + 1$ и неравенства $f(1) \ge f_0$ следует, что точную верхнюю грань в (1.3) достаточно искать по функциям $f \in \widetilde{\mathcal{F}}$, удовлетворяющим неравенству

$$f_0 \ge \frac{\sqrt{N} - 1}{\sqrt{N} + 1} = 1 - \frac{2}{\sqrt{N} + 1} > 0.$$

В следующем разделе мы выпишем двойственную задачу для задачи (1.3) в общем случае. При этом будем использовать методику, разработанную в [3], где изучалась задача Дельсарта.

В разд. 3 приводятся решения задачи Юдина и двойственной задачи в нескольких конкретных случаях.

2. Двойственная задача

Обозначим через $l = l_1$ пространство суммируемых последовательностей $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ вещественных чисел с нормой $\|x\|_l = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|$. Неравенство $x \geq 0$ для числовой последовательности $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ означает, что $x_k \geq 0$ для каждого $k \geq 0$. Положим $l^+ = \{x \in l : \ x \geq 0\}$. Используя эти обозначения, перепишем задачу (1.3) в следующей форме:

$$u = \sup\left\{\lambda x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k : \quad x \in l^+, \quad (Ax)(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}} \quad \text{при } t \in [-1, 1)\right\}, \tag{2.1}$$

где $\lambda = N - 1$; оператор $A : \ l \to C$ задается формулой

$$(Ax)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k P_k(t). \tag{2.2}$$

Используя оценку снизу для u из (1.5), заключаем, что точную верхнюю грань в (1.3) достаточно искать по функциям $f \in \widetilde{\mathcal{F}}$ таким, что $Nf_0 - f(1) \geq N - 2\sqrt{N} + 1$. Отсюда, принимая во внимание оценку

$$f_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2(1-t)}}\, dt = 1, \tag{2.3}$$

приходим к следующим неравенствам: $f(1) \leq Nf_0 - N + 2\sqrt{N} - 1 \leq 2\sqrt{N} - 1$.

Таким образом, точную верхнюю грань в (1.3) можно брать по функциям $f \in C$, удовлетворяющим условию (1.2) и неравенству

$$f(t) \leq \alpha_N(t) \quad \text{при} \quad -1 \leq t \leq 1, \quad \text{где}$$

$$\alpha_N(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-t)}} & \text{при} \quad t \in \left[-1, 1 - \dfrac{1}{2(2\sqrt{N}-1)^2}\right], \\ 2\sqrt{N} - 1 & \text{при} \quad t \in \left[1 - \dfrac{1}{2(2\sqrt{N}-1)^2}, 1\right] \end{cases}$$

— функция, непрерывная на $[-1, 1]$. Используя функцию α_N, можно усилить оценку (2.3):

$$f_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\, dt \leq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \alpha_N(t)\, dt = \frac{8\sqrt{N} - 5}{4(2\sqrt{N} - 1)} = 1 - \frac{1}{4(2\sqrt{N} - 1)}.$$

Отсюда получаем новую непрерывную функцию

$$\beta_N(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-t)}} & \text{при} \quad t \in \left[-1, 1 - \dfrac{16(2\sqrt{N}-1)^2}{2(15N - 16\sqrt{N} + 4)^2}\right], \\ \dfrac{15N - 16\sqrt{N} + 4}{4(2\sqrt{N} - 1)} & \text{при} \quad t \in \left[1 - \dfrac{16(2\sqrt{N}-1)^2}{2(15N - 16\sqrt{N} + 4)^2}, 1\right], \end{cases}$$

ограничивающую сверху на всем отрезке $[-1,1]$ функции из класса $\widetilde{\mathcal{F}}$, которые достаточно рассматривать при поиске точной верхней грани в (1.3). Таким образом, задача (2.1) равносильна следующей задаче:

$$u = \sup\left\{\lambda x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k : \quad x \in l^+, \quad (Ax)(t) \le \beta_N(t) \quad \text{при } t \in [-1,1]\right\}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем будем говорить, что функция f из C принадлежит классу $\mathcal{F}$, если она удовлетворяет условию (1.2) и неравенству $f(t) \le \beta_N(t)$ при $-1 \le t \le 1$. Очевидно, что $\mathcal{F} \subset \widetilde{\mathcal{F}}$.

Допустимое множество задачи (2.4) обозначим через G, т. е. положим

$$G = \left\{x \in l^+ : \quad (Ax)(t) \le \beta_N(t) \quad \text{при } t \in [-1,1]\right\}.$$

Ясно, что это множество непусто, ему принадлежит, например, последовательность $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, у которой $x_0 = a$, $x_i = 0$ (при $i \ge 1$), где $0 \le a \le 1/2$. Кроме того, имеем

$$\mathcal{F} = \left\{f \in C : \quad f(t) = f(t,x) = (Ax)(t) \le \beta_N(t), \quad x \in l^+\right\},$$

$$u = \sup\left\{\lambda f_0 - \sum_{k=1}^{\infty} f_k : \quad f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k P_k \in \mathcal{F}\right\}. \tag{2.5}$$

Сопряженное для $C = C[-1,1]$ пространство C^* непрерывных линейных функционалов на C можно отождествить с пространством $V = V[-1,1]$ функций ограниченной вариации на $[-1,1]$. Общий вид линейного непрерывного функционала на C задается функцией $\mu \in V$ с помощью интеграла Римана — Стилтьеса

$$(\mu, f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, d\mu(t). \tag{2.6}$$

Сопряженным пространством l^* для пространства $l = l_1$ суммируемых последовательностей является пространство l_∞ ограниченных последовательностей, и линейный непрерывный функционал на l определяется элементом $y \in l_\infty$ по формуле

$$(y, x) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k. \tag{2.7}$$

Оператор A, определенный формулой (2.2), является линейным ограниченным оператором из l в C. Его норма равна 1, поскольку $|P_k(t)| \le P_k(1) = 1$ при всех $t \in [-1,1]$, и $(Ax)(t) \equiv 1$, если x — последовательность из l, у которой $x_0 = 1$, $x_i = 0$ при $i \ge 1$. Сопряженный ему оператор A^* является линейным ограниченным оператором из $V = C^*$ в $l_\infty = l^*$; он определяется из соотношения

$$(\mu, Ax) = (A^*\mu, x), \quad \mu \in V, \quad x \in l. \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что этот оператор на функциях $\mu \in V$ задается формулой

$$A^*\mu = \{\mu_k\}_{k=0}^{\infty}, \quad \text{где} \quad \mu_k = \int_{-1}^{1} P_k(t)\, d\mu(t), \quad k \ge 0. \tag{2.9}$$

Определим еще величину $\mu_\infty = \inf\{\mu_k : \ k \ge 1\}$.

Пусть C^+ есть конус неотрицательных функций из C. Обозначим через $V^+ = V^+[-1,1]$ конус в V, сопряженный конусу C^+. Нетрудно понять, что V^+ состоит из неубывающих на отрезке $[-1,1]$ функций из V. Функцию $\mu \in V^+$ будем называть иногда мерой (на $[-1,1]$).

В соответствии с [5, гл. 2, § 2, п. 2.3] классическая двойственная задача для задачи (2.4) имеет вид

$$w=\inf\left\{\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t):\quad \mu\in V^+,\quad \mu_0\ge\lambda,\quad \mu_\infty\ge -1\right\}$$

$$=\inf\left\{\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t):\quad \mu\in V^+,\quad A^*\mu+z\ge 0\right\},\tag{2.10}$$

$$z=\{z_k\}_{k=0}^{\infty}\in l_\infty,\quad \text{где}\quad z_0=-\lambda,\quad z_k=1\quad\text{при}\quad k\ge 1.\tag{2.11}$$

На основе леммы 3.1 из [5, гл. 2, § 3] получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Справедливо неравенство* $u\le w$.

Доказательство. Используя обозначения (2.7) и (2.11), введем соответствующую функцию Лагранжа

$$F(x,\mu)=-(z,x)+\int\limits_{-1}^{1}\{\beta_N(t)-(Ax)(t)\}\,d\mu(t),\quad x\in l^+,\quad \mu\in V^+.\tag{2.12}$$

Допустимое множество G задачи (2.4) непусто. Пусть $x^{(1)},\dots,x^{(j)},\dots\in l^+$ — максимизирующая последовательность элементов множества G для задачи (2.4), т. е.

$$\beta_N(t)-(Ax^{(j)})(t)\ge 0\quad \text{при } t\in[-1,1] \text{ для любого } j\ge 1,\qquad \lim_{j\to\infty}-(z,x^{(j)})=u.\tag{2.13}$$

Определим функционал

$$\psi(\mu)=\sup_{x\in l^+}F(x,\mu),\quad \mu\in V^+.\tag{2.14}$$

Для каждого $\mu\in V^+$ имеем

$$\psi(\mu)\ge F(x^{(j)},\mu)=-(z,x^{(j)})+\int\limits_{-1}^{1}\left\{\beta_N(t)-(Ax^{(j)})(t)\right\}d\mu(t)\ge-(z,x^{(j)}).$$

Отсюда с помощью (2.13) приходим к неравенству $\psi(\mu)\ge u$, справедливому для произвольного $\mu\in V^+$, а потому

$$\inf_{\mu\in V^+}\psi(\mu)\ge u.\tag{2.15}$$

Применяя определения (2.6), (2.8), преобразуем функцию Лагранжа (2.12):

$$F(x,\mu)=-(z,x)-(\mu,Ax)+\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t)$$

$$=-(z,x)-(A^*\mu,x)+\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t)=-(z+A^*\mu,x)+\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t),$$

следовательно (см. (2.14)),

$$\psi(\mu)=\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t)+\sup_{x\in l^+}\left\{-(z+A^*\mu),x\right\}.$$

Ясно, что

$$\sup_{x\in l^+}\big\{-(z+A^*\mu),x\big\}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad z+A^*\mu\ge 0,\\ +\infty & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

и, таким образом,

$$\psi(\mu)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t), & \text{если}\quad z+A^*\mu\ge 0,\\ \qquad +\infty & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Отсюда и из (2.15) получаем

$$u\le\inf\{\psi(\mu):\ \mu\in V^+\}=\inf\{\psi(\mu):\ \mu\in V^+,\ z+A^*\mu\ge 0\}=w.$$

Лемма доказана. □

Выпишем оценки, из которых будут следовать некоторые свойства решений прямой и двойственной задач. Эти свойства будут использоваться ниже при доказательстве теоремы 3.

Пусть функция $\mu\in V^+$ удовлетворяет условию

$$\lambda\mu_\infty+\mu_0\ge 0. \tag{2.16}$$

Тогда для последовательности $x=\{x_k\}_{k=0}^{\infty}\in G$ и функции $f(t)=(Ax)(t)$ имеем

$$(\mu,\beta_N)\ge(\mu,f)=\int\limits_{-1}^{1}f(t)\,d\mu(t)=x_0\mu_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kx_k\ge x_0\mu_0+\mu_\infty\sum_{k=1}^{\infty}x_k$$

$$=x_0\mu_0-\mu_\infty\Big(-\sum_{k=1}^{\infty}x_k+\lambda x_0-\lambda x_0\Big)=-\mu_\infty\Big(\lambda x_0-\sum_{k=1}^{\infty}x_k\Big)+\lambda x_0\mu_\infty+x_0\mu_0. \tag{2.17}$$

Отсюда с учетом (2.16) и неотрицательности x_0 получаем неравенство

$$(\mu,\beta_N)\ge-\mu_\infty\Big(\lambda x_0-\sum_{k=1}^{\infty}x_k\Big). \tag{2.18}$$

Отметим, что в каждом из следующих случаев: $\mu=\mathrm{const}$, $\mu_\infty=0$ или $\mu_\infty>0$ это неравенство ничего не дает для оценки сверху искомой величины u. Действительно, если $\mu=\mathrm{const}$, то (2.18) обращается в неравенство $0\ge 0$. Если $\mu_\infty=0$ или $\mu_\infty>0$, то (2.18) обращается соответственно в

$$(\mu,\beta_N)\ge 0\quad\text{или}\quad\lambda x_0-\sum_{k=1}^{\infty}x_k\ge-\frac{(\mu,\beta_N)}{\mu_\infty}. \tag{2.19}$$

В силу того, что $\beta_N(t)>0$ при $t\in[-1,1]$, $\mu\in V^+$, и в допустимом множестве G можно ограничиться последовательностями, для которых $\lambda x_0-\sum_{k=1}^{\infty}x_k>0$, неравенства (2.19) выполняются автоматически.

В случае же $\mu_\infty<0$ из (2.18) следует

$$u\le-\frac{1}{\mu_\infty}(\mu,\beta_N)=-\frac{1}{\mu_\infty}\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t),$$

откуда, в свою очередь, вытекает оценка $u\le\widetilde{w}$, где

$$\widetilde{w}=\inf\bigg\{-\frac{1}{\mu_\infty}\int\limits_{-1}^{1}\beta_N(t)\,d\mu(t):\quad\mu\in V^+,\quad-\frac{\mu_0}{\mu_\infty}\ge\lambda,\quad\mu\ne\mathrm{const},\quad\mu_\infty<0\bigg\}. \tag{2.20}$$

Ясно, что в (2.20) можно ограничиться функциями $\mu \in V^+$ с $\mu_\infty = -1$. Тогда $\widetilde{w}$ примет вид

$$\widetilde{w} = \inf \left\{ \int\limits_{-1}^{1} \beta_N(t)\, d\mu(t) : \quad \mu \in V^+, \quad \mu_0 \geq \lambda, \quad \mu_\infty = -1 \right\}. \tag{2.21}$$

Окончательно для двойственной задачи (2.10) имеют место оценки

$$u \leq w = \inf \left\{ \int\limits_{-1}^{1} \beta_N(t)\, d\mu(t) : \quad \mu \in V^+, \quad \mu_0 \geq \lambda, \quad \mu_\infty \geq -1 \right\} \leq \widetilde{w}. \tag{2.22}$$

Последнее неравенство означает, что если на функции $\mu \in V^+$ достигается нижняя грань в (2.10) и $\mu_\infty = -1$, то на этой функции достигается и нижняя грань в (2.21), причем $\widetilde{w} = w$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1.1 из статьи [3]; доказательство опирается на общие факты теории двойственности задач (бесконечномерного) линейного программирования.

Теорема 2. *Справедливы утверждения*:

(1) *задачи* (2.4) *и* (2.10) *связаны соотношением двойственности*

$$u = w; \tag{2.23}$$

(2) *каждая из задач* (2.4) *и* (2.10) *имеет решение, т. е. существуют последовательность* $x \in G$ *и функция* $\mu \in V^+$, $\mu \neq \mathrm{const}$, *на которых в указанных задачах достигаются соответственно верхняя и нижняя грани.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы будет проведено с использованием результатов, приведенных во второй и третьей главах монографии [5].

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим задачу "$u(\varepsilon)$" :

$$u(\varepsilon) = \sup \left\{ \lambda x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k : \quad x \in l^+, \quad (Ax)(t) \leq \beta_N(t) + \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in [-1,1] \right\},$$

являющуюся ε-расширением задачи "u" — задачи (2.4). Используем оценки $1/2 \leq \beta_N(t) \leq M$, верные для любого $t \in [-1,1]$ при $M = \dfrac{15N - 16\sqrt{N} + 4}{4(2\sqrt{N} - 1)}$. Сделав в задаче "$u(\varepsilon)$" замену $x = (1 + 2\varepsilon)y$, получим

$$0 \geq (Ax)(t) - \beta_N(t) - \varepsilon = (Ay)(t) - \beta_N(t) + 2\varepsilon(Ay)(t) - \frac{2\varepsilon}{2}$$

$$\geq (Ay)(t) - \beta_N(t) + 2\varepsilon(Ay)(t) - 2\varepsilon\beta_N(t) = \big[(Ay)(t) - \beta_N(t)\big](1 + 2\varepsilon),$$

откуда следует неравенство $u(\varepsilon) \leq (1 + 2\varepsilon)u$.

Далее, рассмотрим задачу "$(1+\varepsilon/M)u$". Сделаем в ней замену $x = \left(1+\dfrac{\varepsilon}{M}\right)^{-1} y$. Из цепочки неравенств

$$0 \geq \big[(Ax)(t) - \beta_N(t)\big]\left(1 + \frac{\varepsilon}{M}\right) = (Ay)(t) - \beta_N(t) - \frac{\varepsilon\beta_N(t)}{M}$$

$$\geq (Ay)(t) - \beta_N(t) - \frac{\varepsilon M}{M} = (Ay)(t) - \beta_N(t) - \varepsilon$$

следует, что $\left(1 + \dfrac{\varepsilon}{M}\right)u \leq u(\varepsilon)$.

Таким образом, имеем $\left(1+\dfrac{\varepsilon}{M}\right)u \le u(\varepsilon) \le (1+2\varepsilon)u$, а потому $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} u(\varepsilon) = u$. Этот факт означает, что исходная задача "u" корректна. Отсюда (см. [5, гл. 3, теорема 1.1]) следует равенство (2.23).

Пространство l является сопряженным для банахова пространства c_0 сходящихся к нулю последовательностей $y = \{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ вещественных чисел с нормой $\|y\|_{c_0} = \max\{|y_k| :\ k \ge 0\}$. Конус l^+ является слабо* замкнутым множеством в пространстве l. К задаче (2.4) применима лемма 1.3 из [5, гл. 3], в силу которой указанная задача имеет решение $x \in G$.

Допустим, что элемент $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит множеству G, т. е. удовлетворяет ограничениям задачи (2.4). При любом $\varepsilon \in (0,1)$ имеем $\varepsilon x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon x_k P_k(t) \le \varepsilon \beta_N(t)$, $t \in [-1,1]$. Следовательно, для элемента εx функция

$$g(t) = -A(\varepsilon x)(t) + \beta_N(t), \quad t \in [-1,1],$$

является внутренней точкой конуса C^+. Таким образом, для задачи (2.4) выполняется условие Слейтера (см., например, [5, гл. 3, § 2]). Отсюда следует (см. [5, гл. 3, теорема 2.1 и следствие 2.1]), что существует функция μ, на которой в (2.10) достигается нижняя грань.

Все утверждения теоремы доказаны. □

В предположении $\mu_\infty = -1$ для экстремальной меры μ в (2.10) справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Последовательность $x = \{x_k\}_{k=0}^{\infty} \in G$ и функция $\mu \in V^+$, удовлетворяющая условию $\mu_\infty = -1$, являются решениями соответственно задач* (2.4) *и* (2.10) *тогда и только тогда, когда они обладают следующими свойствами*:

$$(\mu, f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,d\mu(t) = \int_{-1}^{1} \beta_N(t)\,d\mu(t) = (\mu, \beta_N), \quad \text{где} \quad f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k P_k(t); \tag{2.24}$$

$$\mu_0 = \lambda; \qquad x_k = 0, \quad \text{если} \ \ \mu_k = \int_{-1}^{1} P_k(t)\,d\mu(t) > \mu_\infty = \min\{\mu_k :\ k \ge 1\} = -1. \tag{2.25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пара $x \in G$ и $\mu \in V^+$ $\big(\mu_\infty = -1\big)$ обладает свойствами (2.24), (2.25), тогда на ней неравенство (2.18) обращается в равенство. В этом случае имеем

$$\lambda x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k = u = \widetilde{w} = \int_{-1}^{1} \beta_N(t)\,d\mu(t),$$

и, следовательно, последовательность x и функция μ являются решениями задач (2.4) и (2.10) соответственно.

Обратно, если элементы $x \in G$ и $\mu \in V^+$ $\big(\mu_\infty = -1\big)$ являются решениями задач (2.4) и (2.10) соответственно, то на этих элементах неравенства (2.22) обращаются в равенства $u = w = \widetilde{w}$, т. е. обращается в равенство и неравенство (2.18). Из приведенных выше рассуждений (см. (2.17)–(2.22)) легко сделать вывод, что эти x и μ обладают указанными в теореме свойствами. В частности, найдется номер $k^* \ge 1$, на котором достигается минимум $\mu_{k^*} = \min\{\mu_k :\ k \ge 1\} = \mu_\infty$. Теорема доказана. □

Определим класс Φ функций $g(t)$, представимых рядами $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k P_k(t)$ с суммируемой последовательностью $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ вещественных (необязательно неотрицательных) коэффициентов $\big(\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty\big)$. Из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Справедливы следующие два утверждения.*

(1) *Если мера* $\mu \in V^+$, *удовлетворяющая условию* $\mu_\infty = -1$, *является решением двойственной задачи* (2.10), *то на множестве функций* $g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k P_k(t)$ *из* Φ *имеет место формула*

$$g_0 = \Gamma \int_{-1}^{1} g(t) d\mu(t) + \Gamma \sum_{k=1}^{\infty} g_k - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g_k \tag{2.26}$$

с коэффициентами

$$\Gamma = \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{\lambda} > 0, \quad \gamma_k = \frac{\mu_k + 1}{\mu_0} \geq 0 \quad (k \geq 1), \tag{2.27}$$

при этом для экстремальной функции $f \in \mathcal{F}$ *в прямой задаче* (2.5) *выполняются условия*

$$\int_{-1}^{1} f(t)\, d\mu(t) = \int_{-1}^{1} \beta_N(t)\, d\mu(t) \quad \text{и} \quad x_k = 0, \quad \text{если } \gamma_k > 0, \quad k \geq 1. \tag{2.28}$$

(2) *Обратно, если мера* $\mu \in V^+$, *удовлетворяющая условию* $\mu_\infty = -1$, *такова, что на классе функций* Φ *имеет место формула* (2.26) *с неотрицательными коэффициентами* $\Gamma = 1/\lambda$, γ_k $(k \geq 1)$, *и, кроме того, существует функция* $f \in \mathcal{F}$, *разложение которой по многочленам Лежандра обладает свойствами* (2.28), *то*

(a) *мера* μ *является решением двойственной задачи* (2.10),

(b) *для коэффициентов* Γ, γ_k $(k \geq 1)$ *в формуле* (2.26) *выполняются соотношения* (2.27),

(c) *функция* f *является решением прямой задачи.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любой пары $g \in \Phi$, $\mu \in V$ имеем

$$(\mu, g) = \int_{-1}^{1} g(t)\, d\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k g_k = \mu_0 g_0 + \mu_\infty \sum_{k=1}^{\infty} g_k + \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \mu_\infty) g_k,$$

где $\mu_\infty = \inf\{\mu_k : \ k \geq 1\}$. Отсюда следует, что каждая мера $\mu \in V^+$, $\mu \neq \text{const}$, порождает на множестве функций $g \in \Phi$ формулу

$$g_0 = \frac{1}{\mu_0} \int_{-1}^{1} g(t)\, d\mu(t) - \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \sum_{k=1}^{\infty} g_k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k - \mu_\infty}{\mu_0} g_k. \tag{2.29}$$

Если мера $\mu = \mu* \in V^+$, удовлетворяющая условию $\mu_\infty = -1$, является решением задачи (2.10), то формула (2.29) принимает вид (2.26), (2.27). Свойства (2.28) экстремальной функции $f \in \mathcal{F}$ содержатся в теореме 3.

Докажем обратное утверждение. Если функция $g \in \mathcal{F}$, то выполняются неравенства

$$\int_{-1}^{1} g(t)\, d\mu(t) \leq \int_{-1}^{1} \beta_N\, d\mu(t), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k g_k > 0,$$

поэтому из формулы (2.26) следует оценка

$$g_0 \leq \Gamma \int_{-1}^{1} \beta_N(t) d\mu(t) + \Gamma \sum_{k=1}^{\infty} g_k,$$

откуда получаем

$$\lambda g_0 - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \leq \int_{-1}^{1} \beta_N(t)\, d\mu(t).$$

На функции $f \in \mathcal{F}$ со свойствами (2.28) оценка достигается, поэтому имеет место равенство

$$\sup\left\{\lambda g_0 - \sum_{k=1}^{\infty} g_k : \quad g \in \mathcal{F}\right\} = \int_{-1}^{1} \beta_N(t)\, d\mu(t) = \lambda x_0 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k.$$

Последнее означает, что функция f является экстремальной в задаче (2.5), а мера μ является экстремальной в двойственной задаче (2.10). Подставив в формулу (2.26) функцию $g(t) \equiv 1 \in \Phi$, получаем $\Gamma = 1/\lambda = 1/\mu_0$. Взяв теперь в формуле (2.26) $g(t) = P_k(t)$, $k \geq 1$, получаем соотношение $0 = \mu_k/\mu_0 + \Gamma - \gamma_k$, откуда $\gamma_k = (\mu_k + 1)/\mu_0$. Следствие доказано.

3. Решения задачи Юдина и двойственной задачи в конкретных случаях

В данном разделе мы приведем меры и соответствующие им многочлены, которые дают совпадающие оценки сверху и снизу для величины u (2.5) и доставляют решение задачи Юдина для случаев $N = 5, 6, 7, 8, 12$. Также укажем предположительно оптимальные расположения точек при $N = 5, 7, 8$. При $N = 5$ такое расположение хорошо известно (см. разд. 1). В случаях $N = 7, 8$ расположения были восстановлены нами из приближенных значений координат, представленных на сайте [10], которые получены как результат численного решения соответствующей задачи оптимизации. Восстановлению конфигурации точек по известным скалярным произведениям посвящена, например, статья [9]. Как оказалось, решение задачи Юдина в случаях $N = 5, 7, 8$ не позволяет доказать оптимальность вышеуказанных расположений.

В случаях $N = 5, 6, 7, 8, 12$ для экстремальной меры μ и экстремальной функции f выполняются условия теоремы 3.

Как говорилось выше (см. комментарии к теореме 1 разд. 1), при $N = 6, 12$ оптимальные расположения хорошо известны. Также известны при $N = 5, 6, 12$ и решения задачи Юдина. Здесь мы приводим решение двойственной задачи (2.10) для данных N. В случае $N = 5$ И. Д. Иванов построил квадратурную формулу вида (2.26), которая в силу следствия 1 дает решение задачи (2.5). Для $N = 8$ приведем только приближенные решения, в силу того что соответствующие выкладки слишком громоздки.

Для доказательства принадлежности экстремальных многочленов классу $\mathcal{F}$ нам понадобится теорема Маркова [2]. Пусть задан набор точек $t_1 < t_2 < \ldots < t_q$. Алгебраический многочлен h_{2q-1} степени $2q - 1$ называется интерполяционным многочленом Эрмита для функции y, если

$$h(t_1) = y(t_1), \quad h(t_2) = y(t_2), \quad \ldots, \quad h(t_q) = y(t_q),$$
$$h'(t_1) = y'(t_1), \quad h'(t_2) = y'(t_2), \quad \ldots, \quad h'(t_q) = y'(t_q).$$

Теорема 4 (А. А. Марков). *Пусть функция y, непрерывная на отрезке $[t_1, t_q]$, имеет производную порядка $2q$ на интервале (t_1, t_q). Тогда для каждого $t \in (t_1, t_q)$ найдется точка $\tau = \tau(t) \in (t_1, t_q)$ такая, что*

$$y(t) - h_{2q-1}(t) = \frac{y^{2q}(\tau)}{(2q)!}(t - t_1)^2 \cdots (t - t_q)^2.$$

Перейдем к решению прямой и двойственной задач для указанных выше конкретных случаев.

Случай $N = 7$. Предположительно оптимальное расположение зарядов в этом случае следующее. Два заряда расположены в южном и северном полюсах сферы, еще пять расположены на экваторе на одинаковом расстоянии друг от друга (угловое расстояние между соседними зарядами равно $2\pi/5$). Величина энергии такого расположения (с точностью до 12 знаков после запятой) совпадает с приближенным минимальным значением энергии, представленным на сайте [10], и равняется 28.90595482...

Численное решение дискретизации задачи Юдина привело к следующей гипотезе относительно функции, экстремальной в прямой задаче: она является многочленом степени 7, при этом 4-й и 5-й коэффициенты в ее разложении по многочленам Лежандра равны нулю. Данный многочлен совпадает с функцией $\beta_7(t)$ в трех точках a, b и c, расположенных на $[-1, 1]$. В соответствии с утверждением теоремы 3 экстремальная в двойственной задаче мера μ^* должна быть сосредоточена в этих точках. Таким образом, на функциях $f \in C$ имеет место формула

$$(\mu^*, f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, d\mu^*(t) = \lambda(a)f(a) + \lambda(b)f(b) + \lambda(c)f(c), \tag{3.1}$$

в частности

$$\mu_k^* = \int_{-1}^{1} P_k(t)\, d\mu^*(t) = \lambda(a)P_k(a) + \lambda(b)P_k(b) + \lambda(c)P_k(c). \tag{3.2}$$

Для функций $f \in \Phi$ справедлива квадратурная формула

$$f_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\, dt = L(f) - \sum_{\nu=4}^{5} L(P_\nu) f_\nu, \tag{3.3}$$

где

$$L(f) = \lambda(1)f(1) + \lambda(a)f(a) + \lambda(b)f(b) + \lambda(c)f(c),$$

которая должна быть точна на многочленах степени не выше 7. Перечисленные соображения позволяют построить экстремальную меру и экстремальный многочлен, для чего необходимо только найти неизвестные параметры a, b, c, $\lambda(a)$, $\lambda(b)$, $\lambda(c)$, $\lambda(1)$ в формулах (3.2), (3.3).

Из соотношений (3.2), (3.3) вытекает, что $\mu_0^* = 1 - \lambda(1)$. Легко видеть, что $L(P_\nu) = 0$, $\nu = 1, 2, 3, 6, 7$, откуда следует $\mu_\infty^* = -\lambda(1)$. Воспользовавшись первым равенством в (2.25) для меры $-\mu^*/\mu_\infty^*$, получаем $\lambda(1) = 1/N = 1/7$.

Для того чтобы найти выражение коэффициентов квадратурной формулы через a, b и c, подставим в нее многочлены Лежандра $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$, $P_2(t) = (3t^2 - 1)/2$; получим систему из трех уравнений

$$\begin{cases} 0 = \lambda(1) + \lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c), \\ 0 = \lambda(1) + \lambda(a)a + \lambda(b)b + \lambda(c)c, \\ 0 = \lambda(1) + \lambda(a)P_2(a) + \lambda(b)P_2(b) + \lambda(c)P_2(c), \end{cases}$$

из которой находим

$$\lambda(a) = \frac{3b + 18bc + 4 + 3c}{21(a-c)(a-b)}, \quad \lambda(b) = \frac{3a + 18ac + 4 + 3c}{21(b-c)(b-a)}, \quad \lambda(c) = \frac{3b + 18ba + 4 + 3a}{21(c-a)(c-b)}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим многочлен $t^3 - Ut^2 + Vt - W$, где

$$U = a + b + c, \quad V = ab + ac + bc, \quad W = abc, \tag{3.5}$$

и два многочлена, один из которых имеет степень 6, другой 7:

$$(t-1)(t^3 - Ut^2 + Vt - W)(t^2 + Pt + Q), \quad (t-1)(t^3 - Ut^2 + Vt - W)(t^3 + Rt + S).$$

Коэффициенты P, Q, R и S находятся из условия равенства нулю 4-го и 5-го коэффициентов в разложении этих многочленов по многочленам Лежандра:

$$P = U + 1, \quad Q = -\frac{4}{11} - V + U^2 + U,$$

$$R = -U - V - \frac{21}{13}, \quad S = -\frac{179}{143}U - \frac{36}{143} + W - U^2 - UV.$$

Подставив эти многочлены в формулу (3.3), получим систему из трех уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{U}{3} - W = \lambda(1)(1 - U + V - W), \\ -\dfrac{60}{77} - \dfrac{8}{11}U + 2U^2 - \dfrac{24}{11}W - 2VU - \dfrac{30}{11}V + 4WU + 2U^3 - 2V^2 + 2U^2V \\ -6VW + 6WU^2 = 0, \\ -286UV^2 - 72UV - 358U^2 + \dfrac{276}{7}U + 246W + 390V - 286U^3 + \dfrac{780}{7} \\ -502UW - 572U^2V + 572VW - 858WUV + 286V^2 + 858W^2 - 858WU^2 = 0 \end{cases}$$

относительно U, V и W.

Решение этой системы выпишем в терминах единственного отрицательного корня следующего уравнения:

$$3045042z^6 - 135135z^5 - 5524883z^4 + 1822926z^3 - 62964z^2 + 76653z - 13527 = 0.$$

Это уравнение имеет два комплексных корня, три вещественных положительных и один вещественный отрицательный корень. Обозначим отрицательный корень этого уравнения через $\widetilde{z} = -1.47422946\ldots$, тогда решение системы имеет вид

$$U = \widetilde{z},$$

$$V = -\frac{293963051}{494381349} - \frac{79538156}{494381349}\widetilde{z} + \frac{1054651822}{211877721}\widetilde{z}^2 - \frac{27751912838}{1906899489}\widetilde{z}^3 - \frac{1142440}{6420537}\widetilde{z}^4 + \frac{154457888}{19261611}\widetilde{z}^5,$$

$$W = -\frac{100209149}{1483144047} - \frac{289818488}{1483144047}\widetilde{z} - \frac{527325911}{635633163}\widetilde{z}^2 + \frac{13875956419}{5720698467}\widetilde{z}^3 + \frac{571220}{19261611}\widetilde{z}^4 - \frac{77228944}{57784833}\widetilde{z}^5.$$

Воспользовавшись соотношениями (3.4) и (3.5), находим

$$a = -0.91677859\ldots, \quad b = -0.70144358\ldots, \quad c = 0.14399271\ldots,$$

$$\lambda(a) = 0.10623600\ldots, \quad \lambda(b) = 0.18166639\ldots, \quad \lambda(c) = 0.56924046\ldots$$

Соотношениями (3.1), (3.2) с точностью до положительного множителя, равного $-1/\mu_\infty^*$, определяется экстремальная мера. Многочлен h_7, доставляющий решение прямой задачи, можно построить как интерполяционный многочлен степени 7 по узлам a, b и c, т. е. решив систему из 6 уравнений

$$h_7(a) = \beta_7(a), \quad h_7(b) = \beta_7(b), \quad h_7(c) = \beta_7(c), \tag{3.6}$$

$$h_7'(a) = \beta_7'(a), \quad h_7'(b) = \beta_7'(b), \quad h_7'(c) = \beta_7'(c) \tag{3.7}$$

при условии равенства нулю 4-го и 5-го коэффициентов в разложении h_7 по многочленам Лежандра. В результате находим

$$h_7(t) = c_0 + c_1P_1(t) + c_2P_2(t) + c_3P_3(t) + c_6P_6(t) + c_7P_7(t),$$

где $c_0 = 0.79166659\ldots$, $c_1 = 0.42282618\ldots$, $c_2 = 0.16877417\ldots$, $c_3 = 0.03935231\ldots$, $c_6 = 0.00307091\ldots$, $c_7 = 0.00142942\ldots$

Теорема 5. *При $N = 7$ построенная мера $-\mu^*/\mu^*_\infty$, где μ^* определяется соотношениями* (3.1), (3.2), *и многочлен седьмой степени h_7, коэффициенты в разложении которого по многочленам Лежандра определяются из решения системы* (3.6), (3.7), *являются решениями двойственной и прямой задач Юдина соответственно.*

Доказательство. Проверим условия принадлежности многочлена h_7 классу $\mathcal{F}$. Первое условие (неотрицательность коэффициентов Фурье — Лежандра), очевидно, выполняется. Для проверки второго условия воспользуемся приемом, предложенным И. Д. Ивановым. Построим интерполяционный эрмитов многочлен 5-й степени, удовлетворяющий условиям (3.6), (3.7), тогда разность $\beta_7(t) - h_7(t)$ можно представить в виде

$$\beta_7(t) - h_7(t) = \left[\,\beta_7(t) - \widetilde{h}_5(t)\right] + \left[\,\widetilde{h}_5(t) - h_7(t)\right]. \tag{3.8}$$

На отрезке $[-1, 1-\alpha]$, где $\alpha = \dfrac{8(2\sqrt{7}-1)^2}{(109-16\sqrt{7})^2}$, функция $\beta_7(t)$ совпадает с абсолютно монотонной функцией $1/\sqrt{2(1-t)}$, т.е. производные любого порядка этой функции неотрицательны на $[-1, 1-\alpha]$ (см. [4, ст. 26, гл. 4, § 11], [2]), следовательно, на этом отрезке по теореме Маркова первое слагаемое в (3.8) неотрицательно. На отрезке $[1-\alpha, 1]$ многочлен $\widetilde{h}_5(t)$ монотонно возрастает и $\widetilde{h}_5(1) < \beta_7(1)$, т. е. первое слагаемое неотрицательно на всем отрезке $[-1, 1]$. Второе слагаемое в (3.8) можно представить в виде

$$\widetilde{h}_5(t) - h_7(t) = (t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2(a_1 t + a_0),$$

где $a_1 = -0.03832638\ldots,\quad a_0 = 0.06866742\ldots$ Нетрудно понять, что последний сомножитель положителен на отрезке $[-1, 1]$. Таким образом, второе условие в определении класса $\mathcal{F}$ для многочлена h_7 выполнено, т. е. он удовлетворяет условиям прямой задачи (2.5).

Убедимся, что мера $-\mu^*/\mu^*_\infty$ удовлетворяет условиям двойственной задачи (2.10). Для этого необходимо проверить, что $\mu^*_\infty = \min\{\mu_k :\ k \ge 1\} = -1/7$. Проведем оценку, используя следующее неравенство для многочленов Лежандра (см. [7, гл.7]):

$$(\sin\theta)^{1/2}|P_k(\cos\theta)| < \sqrt{\frac{2}{k\pi}}, \quad 0 \le \theta \le \pi. \tag{3.9}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\mu^*_k + \lambda(1) = L(P_k) &= \lambda(1) + \lambda(a)P_k(a) + \lambda(b)P_k(b) + \lambda(c)P_k(c)\\ &\ge \lambda(1) - \lambda(a)|P_k(a)| - \lambda(b)|P_k(b)| - \lambda(c)|P_k(c)|\\ &\ge \lambda(1) - \sqrt{\frac{2}{k\pi}}(\lambda(a)+\lambda(b)+\lambda(c))\max\left\{\frac{1}{(1-a^2)^{1/4}},\quad \frac{1}{(1-b^2)^{1/4}},\quad \frac{1}{(1-c^2)^{1/4}}\right\}\\ &= \lambda(1) - \sqrt{\frac{2}{k\pi}}\frac{1-\lambda(1)}{(1-a^2)^{1/4}},\end{aligned}$$

откуда получаем $L(P_k) > 0$ при $k \ge 58$. Для $1 \le k \le 57$ условие проверяется непосредственно. Этим доказано, что $\mu^*_\infty = -1/7$, откуда, очевидно, $-\mu^*_\infty/\mu^*_\infty = -1$. По построению $-\mu^*_0/\mu^*_\infty = (\lambda(1)-1)/\mu^*_\infty = 6 = \lambda$. Следовательно, мера удовлетворяет условиям двойственной задачи.

Многочлен h_7 в точках a, b и c совпадает с функцией β_7, в этих же точках сосредоточена построенная мера; как следствие имеем $\displaystyle\int_{-1}^{1} h_7(t)d\mu^*(t) = \int_{-1}^{1}\beta_7(t)d\mu^*(t)$. Мера μ^* обладает следующими свойствами: $\mu^*_1 = \mu^*_2 = \mu^*_3 = \mu^*_6 = \mu^*_7 = -1/7$, $\mu^*_k > -1/7$ при $k \ge 8$. Это означает, что для меры $-\mu^*/\mu^*_\infty$ и многочлена h_7 выполняются условия теоремы 3, и нужное утверждение немедленно вытекает из утверждения указанной теоремы.

Теорема доказана. □

Для меры $-\mu^*/\mu^*_\infty$ и многочлена h_7 выполняется равенство

$$\frac{7}{-\mu^*_\infty}\int\limits_{-1}^{1}\beta_7(t)\,d\mu^*(t) = 7(7c_0 - h_7(1)) = 28.80182588\ldots,$$

из которого видно, что в этом случае значение u в задаче Юдина строго меньше предполагаемого минимального значения энергии, реализующегося на указанном выше расположении.

Случай $N = 8$. Предположительно оптимальное расположение зарядов на сфере, соответствующее приближенному расположению, представленному на сайте [10], в этом случае можно построить следующим образом. Разместим по четыре точки на двух параллелях, расположенных симметрично относительно плоскости экватора. Расстояния между соседними точками на одной параллели должны быть одинаковы. Причем точки на одной параллели повернуты на угол $\pi/4$ вокруг оси, соединяющей полюсы сферы, относительно точек, лежащих на другой параллели. Этого можно добиться, например, выбрав координаты точек следующими: $(\rho,0,r)$, $(0,\rho,r)$, $(-\rho,0,r)$, $(0,-\rho,r)$, $\big(\rho/\sqrt{2},\rho/\sqrt{2},-r\big)$, $\big(-\rho/\sqrt{2},\rho/\sqrt{2},-r\big)$, $\big(-\rho/\sqrt{2},-\rho/\sqrt{2},-r\big)$, $\big(\rho/\sqrt{2},-\rho/\sqrt{2},-r\big)$, где $\rho = \sqrt{1-r^2}$ $(r\in[0,1))$ — расстояние от центра сферы до плоскости параллели. Зафиксировав такое взаимное расположение точек, будем менять только r. Тогда потенциальная энергия этого расположения как функция от r имеет единственный минимум на полуинтервале $[0,1)$ в точке $\overline{r} = 0.56043676\ldots$ и равняется в этой точке $39.35057572\ldots$ Это значение также соответствует значению, указанному на сайте [10].

По результатам численного решения дискретизации задачи Юдина экстремальная функция представляет собой многочлен степени 17, который имеет всего 7 ненулевых коэффициентов в разложении по многочленам Лежандра с номерами 0, 1, 2, 3, 7, 12 и 17. Экстремальный многочлен совпадает с функцией $\beta_8(t)$ в четырех точках a,b,c и d. В силу того что степень многочлена велика и соответствующие выкладки чрезвычайно громоздки, приведем только численную реализацию экстремальной меры (являющейся решением двойственной задачи в этом случае), сосредоточенной в указанных точках.

Аналогично предыдущему случаю на функциях $f\in C$ имеет место формула

$$(\mu^*,f) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\,d\mu^*(t) = \lambda(a)f(a)+\lambda(b)f(b)+\lambda(c)f(c)+\lambda(d)f(d),$$

в частности

$$\mu^*_k = \int\limits_{-1}^{1} P_k(t)\,d\mu^*(t) = \lambda(a)P_k(a)+\lambda(b)P_k(b)+\lambda(c)P_k(c)+\lambda(d)P_k(d),$$

где

$$a = -0.76203148\ldots,\quad b = -0.53120336\ldots,\quad c = -0.37074848\ldots,\quad d = 0.23916243\ldots,$$

$$\lambda(a) = -\frac{21bcd+3bd+3cd+3bc+5b+5c+5d+3}{24(a-c)(a-b)(a-d)} = 0.28516127\ldots,$$

$$\lambda(b) = -\frac{21adc+3ad+3ac+3cd+5a+5c+5d+3}{24(b-a)(b-c)(b-d)} = 0.02093402\ldots,$$

$$\lambda(c) = -\frac{21abd+3ad+3ab+3bd+5a+5b+5d+3}{24(c-a)(c-b)(c-d)} = 0.05351361\ldots,$$

$$\lambda(d) = -\frac{21abc+3ab+3bc+3ac+5a+5b+5c+3}{24(d-a)(d-b)(d-c)} = 0.51539108\ldots$$

Параметры формулы, а также коэффициенты экстремального многочлена можно найти, решая систему из 15 уравнений

$$\begin{aligned}
1 &= \lambda(1)+\lambda(a)+\lambda(b)+\lambda(c)+\lambda(d),\\
0 &= \lambda(1)+\lambda(a)P_1(a)+\lambda(b)P_1(b)+\lambda(c)P_1(c)+\lambda(d)P_1(d),\\
0 &= \lambda(1)+\lambda(a)P_2(a)+\lambda(b)P_2(b)+\lambda(c)P_2(c)+\lambda(d)P_2(d),\\
0 &= \lambda(1)+\lambda(a)P_3(a)+\lambda(b)P_3(b)+\lambda(c)P_3(c)+\lambda(d)P_3(d),\\
0 &= \lambda(1)+\lambda(a)P_7(a)+\lambda(b)P_7(b)+\lambda(c)P_7(c)+\lambda(d)P_7(d),\\
0 &= \lambda(1)+\lambda(a)P_{12}(a)+\lambda(b)P_{12}(b)+\lambda(c)P_{12}(c)+\lambda(d)P_{12}(d),\\
0 &= \lambda(1)+\lambda(a)P_{17}(a)+\lambda(b)P_{17}(b)+\lambda(c)P_{17}(c)+\lambda(d)P_{17}(d),
\end{aligned}$$

$$h_{17}(a)=\beta_{17}(a),\quad h_{17}(b)=\beta_{17}(b),\quad h_{17}(c)=\beta_{17}(c),\quad h_{17}(d)=\beta_{17}(d), \tag{3.10}$$

$$h'_{17}(a)=\beta'_{17}(a),\quad h'_{17}(b)=\beta'_{17}(b),\quad h'_{17}(c)=\beta'_{17}(c),\quad h'_{17}(d)=\beta'_{17}(d), \tag{3.11}$$

где $\lambda(1)=1/8$, при этом учитывая условия равенства нулю следующих коэффициентов в разложении экстремального многочлена по многочленам Лежандра:

$$c_4=c_5=c_6=0,\quad c_8=c_9=c_{10}=c_{11}=0,\quad c_{13}=c_{14}=c_{15}=c_{16}=0.$$

Таким образом, находим

$$h_{17}(t)=c_0+c_1P_1(t)+c_2P_2(t)+c_3P_3(t)+c_7P_7(t)+c_{12}P_{12}(t)+c_{17}P_{17}(t),$$

где $c_0 = 0.80401119\ldots$, $c_1 = 0.45465218\ldots$, $c_2 = 0.19567857\ldots$, $c_3 = 0.05970754\ldots$, $c_7=0.00503245\ldots$, $c_{12}=0.00061887\ldots$, $c_{17}=0.00044116\ldots$

Как и в случае $N=7$, проверим, что $\mu^*_\infty=\min\{\mu_k:\ k\geq 1\}=-1/8$. Для этого, используя неравенство (3.9) для многочленов Лежандра [7, гл. 7], оценим

$$\begin{aligned}
\mu^*_k+\lambda(1)=L(P_k)&=\lambda(1)+\lambda(a)P_k(a)+\lambda(b)P_k(b)+\lambda(c)P_k(c)+\lambda(d)P_k(d)\\
&\geq \lambda(1)-\lambda(a)|P_k(a)|-\lambda(b)|P_k(b)|-\lambda(c)|P_k(c)|-\lambda(d)|P_k(d)|\\
&\geq \lambda(1)-\sqrt{\frac{2}{k\pi}}(\lambda(a)+\lambda(b)+\lambda(c)+\lambda(d))Q=\lambda(1)-\sqrt{\frac{2}{k\pi}}(1-\lambda(1))Q,
\end{aligned}$$

где

$$Q=\max\left\{\frac{1}{(1-a^2)^{1/4}},\quad \frac{1}{(1-b^2)^{1/4}},\quad \frac{1}{(1-c^2)^{1/4}},\quad \frac{1}{(1-d^2)^{1/4}}\right\}=\frac{1}{(1-a^2)^{1/4}}.$$

Получаем $L(P_k)>0$ при $k\geq 49$. Для $1\leq k\leq 48$ условие проверяется непосредственно.

Для построенной меры μ^* выполняется равенство

$$\frac{8}{-\mu^*_\infty}\int_{-1}^{1}\beta_8(t)\,d\mu^*(t)=39.29558074\ldots$$

Докажем, что многочлен h_{17} принадлежит классу $\mathcal{F}$. Первое условие принадлежности классу $\mathcal{F}$ выполнено. Проверим второе условие. Запишем

$$\beta_8(t)-h_{17}(t)=\Big[\beta_8(t)-\widetilde{h}_7(t)\Big]+\Big[\widetilde{h}_7(t)-h_{17}(t)\Big], \tag{3.12}$$

где $\widetilde{h}_7(t)$ — интерполяционный эрмитов многочлен 7-й степени, удовлетворяющий условиям (3.10), (3.11). Аналогично предыдущему случаю функция $\beta_8(t)$ на отрезке $[-1,1-\alpha]$, где

$\alpha = \dfrac{8(2\sqrt{8}-1)^2}{(124-16\sqrt{8})^2}$, совпадает с абсолютно монотонной функцией $1/\sqrt{2(1-t)}$, следовательно, на этом отрезке по теореме Маркова первое слагаемое в (3.12) неотрицательно. На отрезке $[1-\alpha, 1]$ многочлен $\widetilde{h}_7(t)$ монотонно возрастает и $\widetilde{h}_7(1) < \beta_8(1)$, т. е. первое слагаемое неотрицательно на всем отрезке $[-1, 1]$. Второе слагаемое в (3.12) можно представить в виде

$$\widetilde{h}_7(t) - h_{17}(t) = (t-a)^2(t-b)^2(t-c)^2(t-d)^2 \sum_{j=0}^{9} a_j t^j,$$

где $a_9 = -7.85442507\ldots$, $a_8 = 22.38229804\ldots$, $a_7 = -7.82724238\ldots$, $a_6 = -34.98281898\ldots$, $a_5 = 40.02295210\ldots$, $a_4 = -0.57328466\ldots$, $a_3 = -21.91195126\ldots$, $a_2 = 13.89145988\ldots$, $a_1 = -3.68396644\ldots$, $a_0 = 0.59804521\ldots$ Последний сомножитель, являющийся многочленом 9-й степени, имеет единственный вещественный корень $t_0 = 1.15423704\ldots$ и положителен на отрезке $[-1, 1]$. Таким образом, второе условие в определении класса $\mathcal{F}$ для многочлена h_{17} выполнено. Для построенного многочлена имеем $8(8c_0 - h_{17}(1)) = 39.29558074\ldots$

С л у ч а й $N = 6$. Экстремальный многочлен в этом случае [2] имеет вид

$$h_2(t) = \Big(\frac{1}{6} + \frac{5}{6\sqrt{2}}\Big)P_0(t) + \frac{1}{2\sqrt{2}}P_1(t) + \frac{2}{3}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)P_2(t).$$

Многочлен h_2 принадлежит классу $\mathcal{F}$ и совпадает с функцией $\beta_6(t)$ в точках $t=-1$ и $t=0$ (последняя есть точка касания). По теореме 3 решением соответствующей двойственной задачи будет функция μ^*, сосредоточенная в указанных точках, и, значит, на функциях $f \in C$ имеет место формула

$$(\mu^*, f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, d\mu^*(t) = \lambda(0)f(0) + \lambda(-1)f(-1),$$

в частности

$$\mu_k^* = \int_{-1}^{1} P_k(t)\, d\mu^*(t) = \lambda(0)P_k(0) + \lambda(-1)P_k(-1),$$

где $\lambda(0) = 4$, $\lambda(-1) = 1$. Так же, как и в описанных выше случаях, проверяется, что $\mu_\infty^* = \min\{\mu_k :\ k \ge 1\} = -1$. При четном $k > 2$ имеем $\mu_k^* > \mu_\infty = -1$, отличие от предыдущих случаев значений N состоит в том, что $\mu_k^* = \mu_\infty = -1$ при любом нечетном k.

Выписанная мера является решением двойственной задачи. Значение двойственной задачи совпадает со значением прямой задачи и (умноженное на 6) совпадает со значением энергии $W_6 = 3 + 12\sqrt{2} = 19.97056274\ldots$ системы зарядов, расположенных в вершинах октаэдра (см. статью [2]).

С л у ч а й $N = 12$. Экстремальный многочлен для этого случая можно найти в [1, гл. 3, разд. 3.3]), он имеет вид

$$h_4(t) = c_0P_0(t) + c_1P_1(t) + c_2P_2(t) + c_3P_3(t) + c_4P_4(t),$$

где

$$c_0 = \frac{1}{48}\Big(4 + \sqrt{650 + 290\sqrt{5}}\,\Big), \quad c_1 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{(25+5\sqrt{5})}{2}}, \quad c_2 = \frac{5}{336}\Big(16 + \sqrt{410 - 178\sqrt{5}}\,\Big),$$

$$c_3 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5(25-11\sqrt{5})}{2}}, \quad c_4 = \frac{5}{56}\Big(2 - \sqrt{25 - 10\sqrt{5}}\,\Big).$$

Мера сосредоточена в двух точках и определяется соотношениями

$$(\mu^*, f) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\,d\mu^*(t) = \lambda(a)f(a) + \lambda(b)f(b),$$

$$\mu_k^* = \int\limits_{-1}^{1} P_k(t)\,d\mu^*(t) = \lambda(a)P_k(a) + \lambda(b)P_k(b) + \lambda(-1)P_k(-1),$$

где $f \in C$, $a = -1/\sqrt{5}$, $b = 1/\sqrt{5}$, $\lambda(a) = \lambda(b) = 5$, $\lambda(-1) = 1$.

Здесь также проверяется, что $\min\{\mu_k : k \geq 1\} = -1$. Как и в случае шести зарядов, $\mu_k^* = -1$ при нечетном k.

Приведенная мера является решением двойственной задачи. В данном случае также значение двойственной задачи совпадает со значением прямой задачи и (умноженное на 12) совпадает со значением энергии системы зарядов, расположенных в вершинах икосаэдра: $W_{12} = 6 + 30\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} = 98.33050611\ldots$

Случай $N = 5$. В этом случае задача Юдина была решена И. Д. Ивановым [6]. Напомним, что предположительно оптимальным расположением пяти зарядов на единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ является следующее. Два заряда расположены в южном и северном полюсах, еще три заряда расположены на экваторе на одинаковом расстоянии друг от друга (угловое расстояние между ними равно $2\pi/3$). Энергия такого расположения, как и в случаях $N = 7, 8$, соответствует значению, представленному на сайте [10], и равняется $6\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 1 = 12.94938298\ldots$

По результатам численного решения задачи Юдина экстремальный многочлен имеет пятую степень, при этом 3-й и 4-й коэффициенты в разложении его по многочленам Лежандра равны нулю. Экстремальный многочлен совпадает с функцией $\beta_5(t)$ в двух точках a и b. Будем искать меру μ^* (являющуюся решением двойственной задачи в этом случае), сосредоточенной в этих точках. Как и раньше, на функциях $f \in C$ имеет место формула

$$(\mu^*, f) = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\,d\mu^*(t) = \lambda(a)f(a) + \lambda(b)f(b), \tag{3.13}$$

в частности

$$\mu_k^* = \int\limits_{-1}^{1} P_k(t)\,d\mu^*(t) = \lambda(a)P_k(a) + \lambda(b)P_k(b), \tag{3.14}$$

где

$$a = -\frac{11}{48} - \frac{\sqrt{217}}{48} - \frac{\sqrt{458 - 2\sqrt{217}}}{48} = -0.96733506\ldots,$$

$$b = -\frac{11}{48} - \frac{\sqrt{217}}{48} + \frac{\sqrt{458 - 2\sqrt{217}}}{48} = -0.10478659\ldots,$$

$$\lambda(a) = \frac{1 + 3b}{3(a^2 - ab - a + b)} = 0.13468312\ldots, \quad \lambda(b) = \frac{1 + 3a}{3(b^2 - ab - b + a)} = 0.66531687\ldots$$

Аналогично случаю $N = 7$ нетрудно убедиться, что $\mu_\infty^* = \min\{\mu_k : k \geq 1\} = -1/5$.

Мера, определяемая соотношениями (3.13), (3.14), деленная на $-\mu_\infty^*$, является решением двойственной задачи, для нее имеем

$$\frac{5}{-\mu_\infty^*} \int\limits_{-1}^{1} \beta_5(t)\,d\mu^*(t) = 12.88705254\ldots,$$

что немного меньше предполагаемого минимального значения энергии, реализующегося на описанном выше расположении.

Многочлен $h_5(t)$, доставляющий решение прямой задачи, строится по той же схеме, что и в случае семи зарядов. Аналогично проверяется и его принадлежность классу $\mathcal{F}$. Для построенного многочлена выполнено соотношение $5(5c_0 - h_5(1)) = 12.88705254\ldots$

Автор выражает искреннюю признательность А. Г. Бабенко за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Андреев Н.Н.** Приближение с ограничениями индивидуальных функций и экстремальные задачи расположения точек на сфере: дис. ... канд. физ.-мат. наук / МГУ. М., 2000. 41 с.
2. **Андреев Н.Н., Юдин В.А.** Экстремальные расположения точек на сфере // Мат. просвещение. Сер. 3. 1997. Вып. 1. С. 115–125.
3. **Арестов В.В., Бабенко А.Г.** О схеме Дельсарта оценки контактных чисел // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 44–73.
4. **Бернштейн С.Н.** Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 582 с.
5. **Гольштейн Е.Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
6. **Горбачев Д.В., Филиппов Д.В.** Оценка энергии зарядов на сфере при помощи SDP // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 70–78.
7. **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. М.: Физматлит., 1962. 500 с.
8. **Юдин В.А.** Минимум потенциальной энергии точечной системы зарядов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, вып. 2. С. 115–121.
9. **Юдин В.А.** О матрицах Грама // Мат. просвещение. Сер. 3. 2005. Вып. 9. С. 183–188.
10. AIM math: American Institute of Mathematic [website] // URL: http://aimath.org/data/paper/BBCGKS2006/

Монтиле Андрей Андреевич
младший науч. сотрудник
Ботанический сад УрО РАН
e-mail: org17@mail.ru

Поступила 1.11.2008

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 517

НАИЛУЧШЕЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ С ЕДИНИЧНОЙ ОКРУЖНОСТИ[1]

А. В. Парфененков

Рассматривается класс $\mathfrak{P}_n$ алгебраических многочленов $P_n(x,y)$ двух переменных степени n по совокупности переменных, равномерная норма которых на окружности Γ_1 единичного радиуса с центром в начале координат плоскости не превосходит единицы: $||P_n||_{C(\Gamma_1)} \le 1$. Изучается продолжение многочленов из класса $\mathfrak{P}_n$ на плоскость с наименьшим значением равномерной нормы на концентрической окружности Γ_r радиуса r. Доказано, что для величины $\theta_n(r)$ наилучшего продолжения класса $\mathfrak{P}_n$ имеют место равенства $\theta_n(r) = r^n$ при $r > 1$ и $\theta_n(r) = r^{n-1}$ при $0 < r < 1$.

Ключевые слова: многочлен многих переменных, наилучшее продолжение, равномерная норма, гармонический многочлен.

A. V. Parfenenkov. The best extension of algebraic polynomials from the unit circle.

We consider the class $\mathfrak{P}_n$ of algebraic polynomials $P_n(x,y)$ of two variables of degree n whose uniform norm on the unit circle Γ_1 centered at the origin is at most 1: $||P_n||_{C(\Gamma_1)} \le 1$. We study the extension of polynomials from the class $\mathfrak{P}_n$ to the plane with the least uniform norm on the concentric circle Γ_r of radius r. We prove that the values $\theta_n(r)$ of the best extension of the class $\mathfrak{P}_n$ satisfy the equalities $\theta_n(r) = r^n$ for $r > 1$ and $\theta_n(r) = r^{n-1}$ for $0 < r < 1$.

Keywords: polynomial of many variables, the best extension, uniform norm, harmonic polynomial.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathcal{P}_n$ есть множество алгебраических многочленов

$$P_n(x,y) = \sum_{k,m\ge 0,\ k+m\le n} a_{k,m} x^k y^m \tag{1.1}$$

от двух вещественных переменных $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ степени не выше $n \ge 0$ по совокупности переменных с вещественными коэффициентами. Обозначим через Γ_r окружность радиуса $r > 0$ с центром в начале координат плоскости. Через $C(\Gamma_r)$ будем обозначать пространство вещественнозначных непрерывных функций на Γ_r с равномерной нормой

$$||f||_{C(\Gamma_r)} = \max\{|f(x,y)|\colon\ (x,y) \in \Gamma_r\}.$$

Символом $\mathfrak{P}_n$ обозначим единичный шар в пространстве $\mathcal{P}_n$ с равномерной нормой, т. е. положим

$$\mathfrak{P}_n = \{P_n \in \mathcal{P}_n\colon\ ||P_n||_{C(\Gamma_r)} \le 1\}.$$

Зафиксируем произвольный многочлен $P_n \in \mathcal{P}_n$ и рассмотрим ассоциированный с ним класс

$$\mathfrak{Q}_n(P_n) = \bigl\{Q_n \in \mathcal{P}_n\colon \quad Q_n(x,y) = P_n(x,y) \quad \text{при} \quad x^2+y^2 = 1\bigr\}$$

алгебраических многочленов $Q_n \in \mathcal{P}_n$, совпадающих с P_n на единичной окружности.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-1071.2008.1).

Основной целью данной работы является изучение величины

$$\theta_n(r) = \sup_{P_n \in \mathfrak{P}_n} \inf_{Q_n \in \mathfrak{Q}_n(P_n)} \|Q_n\|_{C(\Gamma_r)} = \sup_{\|P_n\|_{C(\Gamma_1)}=1} \inf_{Q_n \in \mathfrak{Q}_n(P_n)} \| Q_n \|_{C(\Gamma_r)}, \tag{1.2}$$

которую назовем *величиной наилучшего равномерного продолжения* множества многочленов $\mathfrak{P}_n$ на окружность радиуса r.

В данной работе точно вычислена величина $\theta_n(r)$ при всех $r > 0$. Оказалось, что характер результата существенно разный при $r > 1$ и $0 < r < 1$.

Обозначим через $\mathcal{H}_n$ множество гармонических многочленов (от двух переменных) степени не выше n. Известен результат Гаусса (см., например, [1, гл. 11, § 2, теорема 11.1]) о представлении произвольного однородного многочлена нескольких переменных через однородные гармонические многочлены. Из этого результата вытекает, что *для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ существует единственный гармонический многочлен $H_n = H_n(P_n) \in \mathcal{H}_n$, который совпадает с P_n на единичной окружности*; многочлен H_n называется *гармоническим продолжением* многочлена P_n. Наряду с величиной $\theta_n(r)$ рассмотрим величину

$$\widetilde{\theta}_n(r) = \sup_{\|P_n\|_{C(\Gamma_1)}=1} \| H_n(P_n) \|_{C(\Gamma_r)}, \tag{1.3}$$

которую назовем *величиной равномерного гармонического продолжения* множества $\mathfrak{P}_n$ на окружность Γ_r. Нетрудно понять, что

$$\widetilde{\theta}_n(r) = \sup\{\| H_n \|_{C(\Gamma_r)}: \quad H_n \in \mathfrak{H}_n\}, \tag{1.4}$$

где через $\mathfrak{H}_n$ обозначено множество (гармонических) многочленов $H_n \in \mathcal{H}_n$, удовлетворяющих условию $\| H_n \|_{C(\Gamma_1)} \le 1$. Ясно, что $\mathfrak{H}_n \subset \mathfrak{P}_n$. Следовательно, величины $\theta_n(r)$ и $\widetilde{\theta}_n(r)$ связаны неравенством

$$\theta_n(r) \le \widetilde{\theta}_n(r). \tag{1.5}$$

В данной работе доказана следующая теорема, которая анонсирована (вместе с краткой схемой доказательства) в [2].

Теорема 1. *При любых $n \ge 0$ и $r > 1$ имеют место равенства*

$$\theta_n(r) = \widetilde{\theta}_n(r) = r^n.$$

При этом многочлен

$$P_n^*(x, y) = \sum_{0 \le k \le n/2} (-1)^k C_n^{2k} x^{2k} y^{n-2k} = \operatorname{Re} z^n, \quad z = x + iy,$$

является экстремальным в задачах (1.2) *и* (1.3)*, т. е. для этого многочлена соответствующие наилучшие продолжения на окружность Γ_r имеют максимально возможную равномерную норму, равную r^n.*

Кроме того, здесь доказано, что оператор гармонического продолжения многочлена является оператором наилучшего на классе продолжения многочленов с единичной окружности на окружность радиуса $r > 1$. Данный оператор не зависит от значения r, т. е. оператор строит общее для всех $r > 1$ продолжение.

Теорема 1 является следствием трех вспомогательных лемм 1, 2, 4 и леммы 3 о значении величины (1.4). Лемма 1 дает описание класса $\mathfrak{Q}_n(P_n)$ для произвольного многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$. В лемме 2 получена оценка снизу для величины $\theta_n(r)$. В лемме 4 построена интерполяционная формула для гармонических многочленов, которая позволяет выразить значение гармонического полинома в произвольной фиксированной точке вне единичного круга через линейную комбинацию значений полинома на равномерной сетке, расположенной на единичной окружности. При доказательстве леммы 4, в частности, используются идеи, содержащиеся в работах Г. Сеге [3] и Л. В. Тайкова [4]. В лемме 3 с помощью леммы 4 и 2 выписано решение задачи (1.4), что дает, в частности, оценку сверху величины (1.2), совпадающую с оценкой снизу, полученной в лемме 2.

Нетрудно видеть, что для случая $0 < r < 1$ гармоническое продолжение не является наилучшим. В данной работе доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *При любых $n \geq 1$ и $0 < r < 1$ имеет место равенство*

$$\theta_n(r) = r^{n-1}.$$

При этом многочлен

$$P_n^{**}(x,y) = P_{n-1}^*(x,y) = \sum_{0 \leq k \leq (n-1)/2} (-1)^k C_{n-1}^{2k} x^{2k} y^{n-2k-1}$$

(*порядка $n-1$*) *является экстремальным в задаче* (1.2).

Теорема 2 является следствием лемм 5 и 6. В лемме 5 приведена оценка снизу величины $\theta_n(r)$, а в лемме 6 — оценка сверху. Для обоснования леммы 6 строится оператор продолжения многочленов с единичной окружности на окружность меньшего радиуса, являющийся наилучшим на классе; однако этот оператор зависит от радиуса r.

2. Структура класса $\mathfrak{Q}_n(P_n)$

В этом разделе приводится описание класса $\mathfrak{Q}_n(P_n)$ для произвольного многочлена P_n из пространства $\mathcal{P}_n$.

Лемма 1. *При $n \geq 2$ для любого многочлена $P_n \in \mathcal{P}_n$ класс $\mathfrak{Q}_n(P_n)$ состоит из многочленов вида*

$$Q_n(x,y) = P_n(x,y) + \left(x^2+y^2-1\right) R_{n-2}(x,y), \quad R_{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

При $n = 0$ и $n = 1$ класс $\mathfrak{Q}_n(P_n)$ состоит только из многочлена P_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $P_n \in \mathcal{P}_n$ и $Q_n \in \mathfrak{Q}_n(P_n)$.

При $n = 0$ и $n = 1$ класс $\mathfrak{Q}_n(P_n)$, очевидно, состоит только из многочлена P_n.

Предположим, что $n \geq 2$. Рассмотрим многочлен $S_n = Q_n - P_n$. Многочлен $S_n(x,y) = 0$ при $x^2 + y^2 = 1$, а следовательно, согласно теореме Гильберта о корнях (см. [5, гл. 16, § 130])

$$(S_n(x,y))^q = \left(x^2+y^2-1\right) H(x,y),$$

где q — натуральное число, а $H(x,y)$ — некоторый многочлен двух переменных.

Учитывая то, что многочлен $x^2 + y^2 - 1$ неприводим, и применяя теорему о разложении многочлена (многообразия) ([5, гл. 16, § 126]), получаем

$$S_n(x,y) = \left(x^2+y^2-1\right) R_{n-2}(x,y).$$

Лемма доказана.

3. Оценка снизу для случая $r > 1$

В дальнейшем наряду с декартовой будем рассматривать в плоскости полярную систему координат

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Тогда на единичной окружности ($r = 1$) в полярных координатах многочлен P_n (см. (1.1)) превратится в тригонометрический полином, который для удобства изложения будет иногда обозначаться следующим образом:

$$P_n(\varphi) = \sum_{0\le k+m\le n} a_{k,m}\cos^k\varphi\sin^m\varphi.$$

Рассмотрим конкретный многочлен

$$P_n^*(x,y) = \sum_{0\le k\le n/2} (-1)^k C_n^{2k} x^{2k} y^{n-2k}. \tag{3.1}$$

В полярных координатах этот многочлен имеет вид

$$P_n^*(r\sin\varphi, r\cos\varphi) = \sum_{0\le k\le n/2} r^n(-1)^k C_n^{2k}\sin^{2k}\varphi\cos^{n-2k}\varphi = r^n\cos n\varphi, \tag{3.2}$$

а потому

$$P_n^*(x,y) = \operatorname{Re} z^n, \quad z = x+iy, \tag{3.3}$$

следовательно, многочлен (3.1) является гармоническим, т. е. $P_n^* \in \mathcal{H}_n$.

Имеем $|P_n^*(\sin\varphi,\cos\varphi)| = |\cos n\varphi| \le 1$ при любом $\varphi\in\mathbb{R}$, иными словами, многочлен P_n^* принадлежит множеству $\mathfrak{H}_n$, а значит, и множеству $\mathfrak{P}_n$. Из последующих рассуждений будет следовать, что на этом многочлене достигается верхняя грань как в (1.2), так и в (1.3), т. е. многочлен P_n^* является экстремальным в обеих задачах при $r > 1$.

Лемма 2. *При любых $n \ge 0$ и $r > 1$ справедлива оценка*

$$\theta_n(r) \ge \|P_n^*\|_{C(\Gamma_r)} = r^n. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для обоснования оценки снизу воспользуемся многочленом (3.1). Возьмем произвольный многочлен Q_n из класса $\mathfrak{Q}_n(P_n^*)$.

При $n = 0$ и $n = 1$ многочлен Q_n в силу леммы 1 совпадет с P_n^*, следовательно,

$$\| Q_n \|_{C(\Gamma_r)} = r^n \quad \text{при} \quad n = 0, 1.$$

В случае $n \ge 2$ с помощью леммы 1 получаем, что полином Q_n на окружности радиуса r представим в виде

$$Q_n(r\sin\varphi, r\cos\varphi) = P_n^*(r\sin\varphi, r\cos\varphi) + (r^2-1)R_{n-2}(r\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

$$= r^n\cos n\varphi + (r^2-1)R_{n-2}(r\sin\varphi, r\cos\varphi), \quad R_{n-2}\in\mathcal{P}_{n-2}.$$

Функция $R_{n-2}(r\sin\varphi, r\cos\varphi)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше $n-2$. Но, как известно, $\cos n\varphi$ полиномами меньшей степени не приближается и, значит,

$$\| Q_n \|_{C(\Gamma_r)} \ge r^n.$$

Таким образом, справедлива оценка (3.4). Лемма доказана.

4. Оценка сверху в случае $r > 1$

В данном разделе найдена величина (1.4), которая дает оценку сверху (1.5) величины (1.2).

Пусть $H_n(x,y)$ — гармонический многочлен степени не выше n. Выполним в H_n полярную замену переменных $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Получившуюся в результате функцию для простоты изложения будем обозначать $H_n(r,t)$.

Лемма 3. *При любых $n \geq 0$ и $r > 1$ на классе гармонических многочленов $H_n \in \mathcal{H}_n$ справедливо точное неравенство*

$$\|H_n\|_{C(\Gamma_r)} \leq r^n \|H_n\|_{C(\Gamma_1)}. \tag{4.1}$$

С точностью до мультипликативной константы и поворота системы координат единственным экстремальным в неравенстве (4.1) *является многочлен P_n^*, определенный формулой* (3.1). *Более точно, многочлен $H_n \in \mathcal{H}_n$ обращает неравенство* (4.1) *в равенство в том и только том случае, если он имеет вид $H_n(x,y) = cP_n^*(\zeta x - \xi y, \xi x + \zeta y)$, где $c \in \mathbb{R}$, а $(\zeta,\xi) \in \Gamma_1$, т. е. $\zeta^2 + \xi^2 = 1$. Как следствие имеет место равенство*

$$\widetilde{\theta}_n(r) = r^n.$$

Утверждение леммы 3 можно получить с помощью результата С. Н. Бернштейна [6, ст. 62], для формулировки которого потребуются следующие обозначения.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{T}_n$ есть пространство тригонометрических полиномов

$$f(t) = a_0 + a_1\cos t + b_1 \sin t + \ldots + a_n \cos nt + b_n \sin nt \tag{4.2}$$

степени не выше n с вещественными коэффициентами. Двум наборам вещественных чисел

$$\Lambda_n := \{\lambda_j\}_{j=0}^n, \quad \lambda_0 > 0, \qquad M_n := \{\mu_j\}_{j=0}^n, \quad \mu_0 = \mu_n = 0, \tag{4.3}$$

сопоставим тригонометрический полином

$$\Psi_n(\varphi) := \Psi_n(\Lambda_n, M_n, \varphi) := \lambda_0 + \lambda_n \cos n\varphi + 2\sum_{j=1}^{n-1} \big(\lambda_j \cos j\varphi - \mu_j \sin j\varphi\big).$$

С помощью вещественного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и наборов коэффициентов (4.3) построим в $\mathcal{T}_n$ линейный оператор $F_\alpha := F_{\alpha,\Lambda_n,M_n}$, который тригонометрическому полиному f вида (4.2) сопоставляет тригонометрический полином

$$F_\alpha f(t) := \sum_{\nu=0}^{n} \Big\{\lambda_{n-\nu}[a_\nu \cos(\nu t + \alpha) + b_\nu \sin(\nu t + \alpha)] + \mu_{n-\nu}[b_\nu \cos(\nu t + \alpha) - a_\nu \sin(\nu t + \alpha)]\Big\}.$$

Теорема A (С. Н. Бернштейн [6, ст. 62]). *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что число $\alpha \in \mathbb{R}$ и наборы коэффициентов* (4.3) *удовлетворяют условиям*

$$\Psi_n(\varphi_k) \geq 0 \quad \text{при} \quad \varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{k\pi}{n} \qquad (k = 0,1,2,\ldots,2n-1). \tag{4.4}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\|F_\alpha f\|_{C[0,2\pi]} \leq \lambda_0 \|f\|_{C[0,2\pi]}, \quad f \in \mathcal{T}_n.$$

Для доказательства леммы 3 достаточно положить в последней теореме

$$\alpha = 0, \quad \lambda_j = r^{n-j}, \quad \mu_j = 0 \quad \text{при} \quad j = 0,1,\ldots,n;$$

условие (4.4) в этом случае легко проверяется.

Мы приведем еще одно доказательство леммы 3 с помощью интерполяционной формулы для гармонических многочленов, выражающей значение гармонического полинома вне единичного круга через значения полинома на равномерной сетке, расположенной на единичной окружности. Доказательству этой формулы посвящена следующая лемма, имеющая, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Лемма 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r > 1$. *Тогда для любого гармонического многочлена* $H_n \in \mathcal{H}_n$ *справедлива следующая квадратурная формула*:

$$H_n(r,t) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left\{\alpha_j H_n\Big(1, t - \frac{2j\pi}{n}\Big) - \beta_j H_n\Big(1, t - \frac{(2j-1)\pi}{n}\Big)\right\}, \tag{4.5}$$

где

$$\alpha_j = \frac{(r^2-1)(r^n-1)}{2\Big(1 - 2r\cos\dfrac{2j\pi}{n} + r^2\Big)}, \quad \beta_j = \frac{(r^2-1)(r^n+1)}{2\Big(1 - 2r\cos\dfrac{(2j-1)\pi}{n} + r^2\Big)},$$

причем

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha_j + \beta_j) = r^n. \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся идеей работы Л. В. Тайкова [4]. Имеет место формула

$$H_n(r,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H_n(1, t-\varphi) D_n(\varphi) d\varphi, \tag{4.7}$$

в которой

$$D_n(\varphi) = D_n(r,\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} r^k \cos k\varphi.$$

В формуле (4.7) к $D_n(\varphi)$ можно добавить гармоники порядка старше n, что не повлияет на величину интеграла, поскольку в $H_n(1, t-\varphi)$ не содержатся гармоники этих порядков. Более конкретно, рассмотрим функцию

$$\mathcal{D}_n(\varphi) = D_n(\varphi) + \sum_{k=1}^{n-1} r^{n-k}\cos(n+k)\varphi + \frac{1}{2}\cos 2n\varphi. \tag{4.8}$$

С помощью элементарных преобразований получаем

$$\mathcal{D}_n(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} r^{n-k} 2\cos n\varphi \cos k\varphi + r^n \cos n\varphi + \frac{1}{2}\cos 2n\varphi$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} 2r^{n-k}\cos n\varphi\cos k\varphi + r^n\cos n\varphi + \cos^2 n\varphi$$

$$= 2r^n\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} r^{-k}\cos k\varphi + \frac{1}{2}r^{-n}\cos n\varphi\right)\cos n\varphi = 2r^n U_n(\varphi)\cos n\varphi, \tag{4.9}$$

где

$$U_n(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} r^{-k}\cos k\varphi + \frac{1}{2}r^{-n}\cos n\varphi = \frac{(r^2-1)(r^n - \cos n\varphi) + 2r\sin\varphi\sin n\varphi}{2r^n(1 - 2r\cos\varphi + r^2)}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим ядро Пуассона

$$\Pi_\rho(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos k\varphi, \quad 0 \le \rho < 1;$$

для него справедливо соотношение

$$\frac{1}{\rho}\Big[\Pi_\rho(n\varphi) - \Pi_\rho(n\varphi+\pi)\Big] = 2\cos n\varphi + 2\sum_{m=1}^{\infty} \rho^{2m}\cos(2m+1)n\varphi. \tag{4.11}$$

Добавим к ядру $\mathcal{D}_n$ слагаемое, содержащее только старшие гармоники, а точнее, рассмотрим функцию

$$\widehat{\mathcal{D}}_n(\varphi) = \mathcal{D}_n(\varphi) + 2r^n U_n(\varphi)\sum_{m=1}^{\infty} \rho^{2m}\cos(2m+1)n\varphi$$

$$= D_n(\varphi) + \sum_{k=1}^{n-1} r^{n-k}\cos(n+k)\varphi + \frac{1}{2}\cos 2n\varphi + 2r^n U_n(\varphi)\sum_{m=1}^{\infty} \rho^{2m}\cos(2m+1)n\varphi.$$

Соотношения (4.8)–(4.11) дают формулу

$$\widehat{\mathcal{D}}_n(\varphi) = \frac{r^n}{\rho} U_n(\varphi)\Big[\Pi_\rho(n\varphi) - \Pi_\rho(n\varphi+\pi)\Big].$$

Следовательно, для многочлена H_n справедливо представление

$$H_n(r,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} H_n(1, t-\varphi)\,\frac{r^n}{\rho} U_n(\varphi)\Big[\Pi_\rho(n\varphi) - \Pi_\rho(n\varphi+\pi)\Big]d\varphi.$$

Сделаем в интеграле замену $n\varphi = \psi$. В результате получим

$$H_n(r,t) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2n\pi} H_n\Big(1, t-\frac{\psi}{n}\Big)\frac{r^n}{\rho} U_n\Big(\frac{\psi}{n}\Big)\Big[\Pi_\rho(\psi) - \Pi_\rho(\psi+\pi)\Big]d\psi$$

$$= \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} H_n\Big(1, t-\frac{\mu+2j\pi}{n}\Big) r^n U_n\Big(\frac{\mu+2j\pi}{n}\Big)\Big[\Pi_\rho\left(\mu+2j\pi\right) - \Pi_\rho\left(\mu+2j\pi+\pi\right)\Big]d\mu.$$

Функция Π_ρ является 2π-периодической, поэтому

$$H_n(r,t) = \frac{1}{\rho}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} H_n\Big(1, t-\frac{\mu+2j\pi}{n}\Big) r^n U_n\Big(\frac{\mu+2j\pi}{n}\Big)\Big[\Pi_\rho(\mu) - \Pi_\rho(\mu+\pi)\Big]d\mu.$$

В последнем соотношении устремим ρ к 1. Воспользовавшись приведенными в [7, гл. 3, разд. 6] свойствами ядра Пуассона, получаем представление

$$H_n(r,t) = \frac{r^n}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[H_n\Big(1, t-\frac{2j\pi}{n}\Big)U_n\Big(\frac{2j\pi}{n}\Big) - H_n\Big(1, t-\frac{-\pi+2j\pi}{n}\Big)U_n\Big(\frac{-\pi+2j\pi}{n}\Big)\right].$$

Перепишем его в виде

$$H_n(r,t) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\alpha_j H_n\Big(1, t-\frac{2j\pi}{n}\Big) - \beta_j H_n\Big(1, t-\frac{(2j-1)\pi}{n}\Big)\right], \tag{4.12}$$

где

$$\alpha_j = \frac{(r^2-1)(r^n-1)}{2\Big(1-2r\cos\dfrac{2j\pi}{n}+r^2\Big)}, \quad \beta_j = \frac{(r^2-1)(r^n+1)}{2\Big(1-2r\cos\dfrac{(2j-1)\pi}{n}+r^2\Big)}.$$

Отметим, что поскольку $r>1$, то все коэффициенты $\{\alpha_j\},\{\beta_j\}$ — положительные.

Возьмем конкретный многочлен $H_n(r,t)=r^n\cos nt$. Подставим этот многочлен в полученную выше интерполяционную формулу (4.12) при $t=0$. В результате имеем

$$r^n\cos(0)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\cos\left(n\Big(-\frac{2j\pi}{n}\Big)\right)\alpha_j-\cos\left(n\Big(\frac{(2j-1)\pi}{n}\Big)\right)\beta_j\right]=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha_j+\beta_j).$$

Таким образом, справедлива формула (4.6). □

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 3. Для произвольного многочлена $H_n\in\mathcal{H}_n$ оценим его равномерную норму на окружности Γ_r радиуса $r\geq 1$ через норму на единичной окружности Γ_1. Воспользуемся леммой 4. Представление (4.5) влечет оценку

$$|H_n(r,t)|\leq\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\Big|H_n\Big(1,t-\frac{2j\pi}{n}\Big)\Big|\alpha_j+\Big|H_n\Big(1,t-\frac{(2j-1)\pi}{n}\Big)\Big|\beta_j\right]$$

$$\leq\frac{\|H_n\|_{C(\Gamma_1)}}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\alpha_j+\beta_j)=r^n\|H_n\|_{C(\Gamma_1)}.$$

Отсюда следует неравенство (4.1). В силу соотношений (3.2) и (3.3) на многочлене (3.1) неравенство (4.1) обращается в равенство.

Осталось описать множество всех экстремальных многочленов неравенства (4.1). Ясно, что если H_n — экстремальный многочлен неравенства (4.1), то при любых $c\in\mathbb{R}$ и $(\zeta,\xi)\in\Gamma_1$ многочлен $Z_n(x,y)=cH_n(\zeta x-\xi y,\xi x+\zeta y)$ также является экстремальным.

Предположим, что многочлен $H_n\in\mathcal{H}_n$, $H_n\not\equiv 0$, является экстремальным, т. е. обращает неравенство (4.1) в равенство. Выберем константу $c\in\mathbb{R}$ и точку $(\zeta,\xi)\in\Gamma_1$ так, чтобы многочлен $H_n^*(x,y)=H_n(\zeta x-\xi y,\xi x+\zeta y)$ обладал свойствами: $||H_n^*||_{C(\Gamma_1)}=1$, $||H_n^*||_{C(\Gamma_r)}=H_n^*(r,0)$. Многочлен H_n^* также будет экстремальным в (4.1), а потому

$$||H_n^*||_{C(\Gamma_r)}=H_n^*(r,0)=r^n.$$

Докажем, что H_n^* совпадет с многочленом P_n^*; на этом доказательство леммы будет завершено.

Перейдем к полярным координатам ρ, φ и применим формулу (4.5) для H_n^* в точке $\rho=r$, $\varphi=0$. В результате придем к равенствам

$$r^n=H_n^*(r,0)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left[\alpha_jH_n^*\Big(1,-\frac{2j\pi}{n}\Big)-\beta_jH_n^*\Big(1,-\frac{(2j-1)\pi}{n}\Big)\right].$$

Используя (4.6) и тот факт, что $|H_n^*(1,\varphi)|\leq 1$, получаем

$$H_n^*\left(1,-\frac{k\pi}{n}\right)=(-1)^k,\quad k=0,\dots,2n-1, \tag{4.13}$$

$$(H_n^*)'_\varphi\left(1,-\frac{k\pi}{n}\right)=0,\qquad k=0,\dots,2n-1. \tag{4.14}$$

Разность $T_n(\varphi)=H_n^*(1,\varphi)-P_n^*(1,\varphi)=H_n^*(1,\varphi)-\cos(n\varphi)$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше n, причем согласно (4.13) и (4.14), а также элементарным свойствам косинуса можно заключить, что

$$T_n\Big(-\frac{k\pi}{n}\Big)=0,\quad T_n'\Big(-\frac{k\pi}{n}\Big)=0,\quad k=0,\dots,2n-1.$$

Таким образом, тригонометрический полином T_n имеет как минимум $2n$ корней, каждый кратности не ниже 2, следовательно, $T_n \equiv 0$, т. е. многочлены H_n^* и P_n^* совпадают на Γ_1. Поскольку гармоническое продолжение с окружности Γ_1 единственно, то $H_n^* \equiv P_n^*$. $\square$

Из лемм 2 и 3 следует утверждение теоремы 1.

З а м е ч а н и е. *Многочлен P_n является экстремальным в задаче* (1.2) *в том и только том случае, если найдется поворот τ_ξ такой, что $\tau_\xi(P_n) \in \mathfrak{Q}_n(P_n^*)$.*

Действительно, гармоническое продолжение $H_n = H_n(P_n)$ экстремального многочлена P_n задачи (1.2) является экстремальным многочленом в задаче (1.4) при $r > 1$. В силу же леммы 3 такой многочлен с точностью до поворота совпадает с многочленом P_n^*.

5. Оценка снизу для случая $0 < r < 1$

Рассмотрим конкретный многочлен

$$P_{n-1}^*(x,y) = \sum_{0 \le k \le (n-1)/2} (-1)^k C_{n-1}^{2k} x^{2k} y^{n-2k-1};$$

этот многочлен можно записать в виде (см. (3.3))

$$P_{n-1}^*(x,y) = \operatorname{Re} z^{n-1}, \quad z = x + iy.$$

На единичной окружности имеем $|P_{n-1}^*(\sin\varphi, \cos\varphi)| = |\cos(n-1)\varphi| \le 1$, т. е. $P_{n-1}^* \in \mathfrak{P}_n$. Из дальнейших рассуждений будет следовать, что на этом многочлене достигается верхняя грань в (1.2) при $0 < r < 1$.

Лемма 5. *При любых $n \ge 1$ и $0 < r < 1$ справедлива оценка*

$$\theta_n(r) \ge \|P_{n-1}^*\|_{C(\Gamma_r)} = r^{n-1}. \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольный многочлен Q_n из класса $\mathfrak{Q}_n(P_{n-1}^*)$.

При $n = 1$ многочлен Q_n в силу леммы 1 совпадет с P_{n-1}^*, поэтому $\| Q_n \|_{C(\Gamma_r)} = 1 = r^{n-1}$.

При $n \ge 2$, воспользовавшись леммой 1, получаем, что полином Q_n на окружности Γ_r представим в виде

$$Q_n(r\sin\varphi, r\cos\varphi) = P_{n-1}^*(r\sin\varphi, r\cos\varphi) + (r^2-1)R_{n-2}(r\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

$$= r^{n-1}\cos(n-1)\varphi + (r^2-1)R_{n-2}(r\sin\varphi, r\cos\varphi), \quad R_{n-2} \in \mathcal{P}_{n-2}.$$

Функция $R_{n-2}(r\sin\varphi, r\cos\varphi)$ является тригонометрическим полиномом степени не выше $n-2$. Но, как известно, $\cos(n-1)\varphi$ полиномами меньшей степени не приближается и, значит,

$$\| Q_n \|_{C(\Gamma_r)} \ge r^{n-1}.$$

Таким образом, справедлива оценка (5.1).

6. Оценка сверху для случая $0 < r < 1$

В данном разделе получена оценка сверху величины (1.2) при $0 < r < 1$, $n \ge 1$. Важную роль при этом играет следующая теорема, которая непосредственно вытекает из [8, следствие 4].

Теорема B. (И.Ю. Рыжаков [8]). *Пусть* $T_n(t) = \sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kt + b_k \sin kt)$ *есть тригонометрический полином порядка* $n \in \mathbb{N}$ *с вещественными коэффициентами и фиксированной гармоникой* $a_h \cos ht + b_h \sin ht$ *порядка* $h \in (n/3, n] \cap \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\|a_h \cos ht + b_h \sin ht\|_{C[0,2\pi]} = \sqrt{a_h^2 + b_h^2} \le \|T_n\|_{C[0,2\pi]},$$

т. е. гармоника порядка $h \in (n/3, n] \cap \mathbb{N}$ *не приближается в равномерной метрике на периоде линейной комбинацией гармоник порядка* $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $k \neq h$.

Лемма 6. *При любых* $n \ge 1$ *и* $0 < r < 1$ *для любого многочлена* $P_n \in \mathfrak{P}_n$ *существует многочлен* $Q_n^* \in \mathfrak{Q}_n(P_n)$ *такой, что*

$$\|Q_n^*\|_{C(\Gamma_r)} \le r^{n-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что $n \ge 2$. Возьмем произвольный многочлен

$$P_n(x, y) = \sum_{k,m\ge 0,\ k+m\le n} a_{k,m} x^k y^m \tag{6.1}$$

из класса $\mathfrak{P}_n$. Зафиксируем $0 < r < 1$. Для доказательства оценки сверху построим конкретное продолжение многочлена P_n для заданного r.

После полярной замены координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ многочлен (6.1) преобразуется в функцию, зависящую от ρ и φ, которую условимся обозначать для простоты через $P_n(\rho, \varphi)$. На единичной окружности ($\rho = 1$) эта функция является тригонометрическим полиномом

$$P_n(1, \varphi) = \sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi),$$

коэффициенты α_k и β_k которого определяются однозначно по коэффициентам $a_{k,m}$ многочлена (6.1). Положим

$$Q_n^*(\rho, \varphi) = \sum_{k=n-1}^{n} \rho^k(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi)$$
$$+\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{\rho^2-1}{r^2-1} r^{n-k} + \frac{\rho^2 - r^2}{1-r^2}\right)\rho^k(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi).$$

Учитывая тождество $x^2 + y^2 \equiv \rho^2$, нетрудно видеть, что Q_n^* действительно есть многочлен переменных x, y порядка n. Кроме того, простой подстановкой проверяется, что $Q_n^*(1, \varphi) = P_n(1, \varphi)$, а следовательно, $Q_n^* \in \mathfrak{Q}_n(P_n)$.

На окружности радиуса r имеем

$$Q_n^*(r, \varphi) = \sum_{k=n-1}^{n} r^k(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) + r^n \sum_{k=0}^{n-2}(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi).$$

Преобразуем это выражение следующим образом:

$$Q_n^*(r, \varphi) = r^n \left\{\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\Big[\alpha_{n-1}\cos(n-1)\varphi + \beta_{n-1}\sin(n-1)\varphi\Big]\right\}$$
$$= r^n \left\{P_n(1, \varphi) + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\Big[\alpha_{n-1}\cos(n-1)\varphi + \beta_{n-1}\sin(n-1)\varphi\Big]\right\}.$$

При $n \ge 2$ из теоремы B следует оценка

$$|\alpha_{n-1}\cos(n-1)\varphi + \beta_{n-1}\sin(n-1)\varphi| \le |P_n(1, \varphi)| \le 1.$$

Отсюда с учетом неравенства $1/r - 1 > 0$ получаем

$$|Q_n^*(r,\varphi)| \le r^n \left(|P_n(1,\varphi)| + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\right) \le r^n \left(1 + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\right) = r^{n-1}.$$

Тем самым утверждение при $n \ge 2$ проверено.

При $n = 1$ продолжение многочлена $P_1 \in \mathfrak{P}_n$ совпадает с ним самим. Многочлен P_1 (имеющий первый порядок) является гармоническим. Согласно принципу максимума и минимума для гармонических многочленов имеем $\|P_1\|_{C(\Gamma_r)} \le \|P_1\|_{C(\Gamma_1)} = 1 = r^0$. Лемма доказана. □

Из лемм 5 и 6 следует утверждение теоремы 2.

Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 6, могут быть применены для построения оценки сверху и в случае $r > 1$. Однако построенный на этом пути оператор продолжения будет, в отличие от оператора леммы 3, зависеть от r.

Автор работы выражает признательность своему научному руководителю профессору В. В. Арестову за постановку задачи, советы и поддержку при проведении исследований и подготовке данной работы. Автор выражает благодарность А. Г. Бабенко и С. Ревесу (Sz. Revesz) за плодотворное обсуждение результатов работы и круга проблем, связанных с рассмотренной здесь задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Соболев С. Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.
2. **Парфененков А. В.** Наилучшее продолжение алгебраического многочлена двух переменных с единичной окружности // Тр. Междунар. лет. мат. школы С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: ТулГУ, 2007. С. 110–114.
3. **Szegö G.** Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein // Schrift. Königsberg. Gelehrten Gesellschaft. 1928. J. 5, H. 4. S. 59–70.
4. **Тайков Л. В.** Равномерная оценка величины сопряженного полинома на плоскости // Мат. заметки. 1993. Т. 54, вып. 6. С. 142–145.
5. **Ван дер Варден Б. Л.** Алгебра. СПб.: Лань, 2004. 624 с.
6. **Бернштейн С. Н.** Собрание сочинений: в 4 т. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 628 с.
7. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.
8. **Рыжаков И. Ю.** Об одной задаче С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 2. С. 282–285.

Парфененков Андрей Владимирович
аспирант, ассистент
Урал. гос. ун-т им. А. М. Горького
e-mail: Andrey.Parfenenkov@usu.ru

Поступила 10.01.09

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 519.658.4

СХЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЯ ДВОЙСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ОБРАТНЫЕ БАРЬЕРНЫЕ ФУНКЦИИ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО И ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

Л. Д. Попов

Для решения задач линейного и выпуклого программирования предложена оригинальная схема метода обратных барьерных функций, основанная на идее параметрического смещения ограничений исходной задачи подобно тому, как это реализовано в методах модифицированной функции Лагранжа для обычной квадратичной штрафной функции. Приведены описание метода, обоснование его сходимости и результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: математическое программирование, методы внутренних штрафов, барьерные функции, множители Лагранжа, численные методы.

L. D. Popov. Schemes of involving dual variables in inverse barrier functions for problems of linear and convex programming.

A new scheme of the method of inverse barrier functions is proposed for problems of linear and convex programming. The scheme is based on the idea of a parametric shifting of the constraints of the original problem, similarly to what was done in the method of modified Lagrange function for the usual quadratic penalty function. The description of the method, the proof of its convergence, and the results of numerical experiments are presented.

Keywords: mathematical programming, interior penalty methods, barrier functions, Lagrange multipliers, numerical methods.

Введение

Барьерные функции (или функции внутреннего штрафа) были введены в вычислительный инструментарий математического программирования достаточно давно [1—10]. С их помощью исходная экстремальная задача с ограничениями может быть сведена к (вообще говоря, бесконечной) серии однотипных задач безусловной минимизации взвешенной суммы исходной целевой функции и функции внутреннего штрафа. При увеличении штрафного параметра решение безусловной задачи сходится к искомому решению исходной задачи с ограничениями. Несмотря на простоту и универсальность общей идеи, ее практическая реализация наталкивается на трудности, связанные со стремлением штрафного параметра к бесконечности, что негативно влияет на обусловленность матриц вторых производных минимизируемой функции. В данной работе предпринята попытка модификации исходной конструкции, избавляющей ее от этого недостатка. А именно, в барьерную функцию добавлены параметры, отвечающие за “смещение” ограничений исходной задачи подобно тому, как это сделано в методе модифицированных функций Лагранжа для обычной (квадратичной) штрафной функции [11]. Для оптимальной настройки параметров смещения предложена оригинальная схема, которая опирается на классическую теорию двойственности. Использование двойственных переменных позволяет фиксировать традиционный штрафной коэффициент на некотором среднем уровне, что устраняет перечисленные выше проблемы и делает общую идею более привлекательной. Работа содержит описание метода, обоснование его сходимости и результаты численных экспериментов. Среди близких работ отметим [12, 13].

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 07-01-00399) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2081.2008.1).

1. Модифицированная барьерная функция

Рассмотрим задачу выпуклого программирования: найти

$$\overline{\gamma} = \inf_{x \in X} f_0(x), \quad \text{где} \;\; X = \{\, x \in \mathbb{R}^n \colon\; f_i(x) \le 0 \;\; (i = 1, \dots, m) \,\}; \tag{1.1}$$

здесь $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство (вещественное) и функции $f_i\colon\; \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпуклы и дифференцируемы, $i = 0, 1, \dots, m$.

Предположим, что оптимальное значение задачи (1.1) конечно, $\overline{x}$ — ее единственный оптимальный вектор, и выполняется условие регулярности Слейтера[2], т. е.

$$\exists\; x_{\mathrm{S}} : \max_{1 \le i \le m} f_i(x_{\mathrm{S}}) = -\rho < 0.$$

Как хорошо известно [3], в этом случае оптимальный вектор $\overline{x}$ удовлетворяет классическим соотношениям Куна — Таккера, записанным в форме

$$f_i(\overline{x}) \le 0, \qquad \overline{y}_i\, f_i(\overline{x}) = 0 \qquad (i = 1, \dots, m), \tag{1.2}$$

$$\nabla_x\, \mathcal{L}(\overline{x}, \overline{y}) = \nabla f_0(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{y}_i \nabla f_i(\overline{x}) = 0, \tag{1.3}$$

$$\overline{y} = [\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_m] \ge 0. \tag{1.4}$$

Здесь $\mathcal{L}(x, y) = f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} y_i f_i(x)$ — функция Лагранжа задачи (1.1) и $\overline{y} = [\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_m] \ge 0$ — вектор множителей Лагранжа, являющийся решением двойственной задачи

$$\underline{\gamma} = \sup_{y \ge 0} \inf_x \mathcal{L}(x, y) \;\; (= \overline{\gamma}). \tag{1.5}$$

В основе предлагаемой нами и изучаемой ниже новой конструкции будет лежать функция

$$B_0(x, u) = f_0(x) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} (u_i - f_i(x))^{-1}, \tag{1.6}$$

которая наряду с постоянным штрафным коэффициентом $\tau > 0$ включает в себя вектор параметров $u = [u_1, \dots, u_m] \ge 0$. Формально конструкцию (1.6) можно рассматривать как обычную барьерную функцию для задачи (1.1) со специальным образом ослабленными ограничениями

$$\inf_{x \in X(u)} f_0(x), \quad \text{где} \;\; X(u) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \colon\; f_i(x) \le u_i \;\; (i = 1, \dots, m) \,\}; \tag{1.7}$$

при этом вектор $u = [u_1, \dots, u_m]$ интерпретируется как вектор “смещения” правых частей ограничений исходной задачи.

В силу предположения о единственности решения исходной задачи, условий выпуклости и условия Слейтера задача со смещенными ограничениями (1.7) также разрешима, регулярна, и множество ее оптимальных планов ограничено. В соответствии с общими теоремами метода штрафных функций [1] это позволяет утверждать, что для всех $u = [u_1, \dots, u_m] \ge 0$ существуют такие $x(u) \in X^0(u) = \{x \in \mathbb{R}^n : f_i(x) < u_i \; (i = 1, \dots, m)\}$, что

$$B_0(x(u), u) = \min_{x \in X^0(u)} B_0(x, u) > -\infty.$$

[2]В дальнейшем предположения относительно исходной задачи будут усилены.

Далее дополним конструкцию (1.6) не зависящим от x слагаемым так, чтобы получить функцию

$$B(x,u) = B_0(x,u) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} u_i^{-1},$$

которую преобразуем к виду

$$B(x,u) = f_0(x) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i(x)}{u_i(u_i - f_i(x))}.$$

Сделав в последней формуле замену двойственных переменных $y_i = 1/(\tau u_i^2)$, получаем эквивалентную конструкцию

$$\overline{B}(x,y) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i f_i(x)}{1 - \sqrt{\tau y_i} f_i(x)}. \tag{1.8}$$

В силу вышеизложенного по крайней мере для всех $y = [y_1, \ldots, y_m] > 0$ (но не только для них) существуют такие $x(y) \in \overline{X}^0(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ 1 - \sqrt{\tau y_i} f_i(x) > 0 \quad (i = 1, \ldots, m)\}$, что

$$\overline{B}(x(y), y) = \min_{x \in \overline{X}^0(y)} \overline{B}(x,y) > -\infty.$$

При этом выполняется критерий оптимальности

$$\nabla_x \overline{B}(x,y)\big|_{x=x(y)} = \nabla f_0(x(y)) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i \nabla f_i(x(y))}{[1 - \sqrt{\tau\, y_i}\, f_i(x(y))]^2} = 0.$$

В частности, в силу (1.2)–(1.4) имеем

$$\nabla_x \overline{B}(\overline{x}, \overline{y}) = \nabla f_0(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \overline{y}\, \nabla f_i(\overline{x}) = 0,$$

откуда вытекает

Утверждение 1. $\overline{B}(\overline{x}, \overline{y}) = \min\limits_{x \in \overline{X}^0(\overline{y})} \overline{B}(x, \overline{y}) = \overline{\gamma}$, *т. е.* $\overline{x} = x(\overline{y})$.

Обозначим через D множество всех неотрицательных векторов $y = [y_1, \ldots, y_m] \geq 0$, для которых функция минимума

$$\overline{\mu}(y) = \min_{x \in \overline{X}^0(y)} \overline{B}(x,y)$$

принимает конечные значения (определена). Множество D заведомо не пусто (как уже отмечалось, оно содержит все положительные векторы и по крайней мере вектор $\overline{y} \geq 0$), и в силу условий (1.2)–(1.4), (1.8) и монотонности обратной функции при всех $y \in D$ имеем

$$\overline{\mu}(y) = \min_{x \in \overline{X}^0(y)} \overline{B}(x,y) \leq \overline{B}(\overline{x}, y) = f_0(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{y_i f_i(\overline{x})}{1 - \sqrt{\tau y_i} f_i(\overline{x})} \leq f_0(\overline{x}) = B(\overline{x}, \overline{y}) = \overline{\gamma},$$

откуда следует

Утверждение 2. $\overline{B}(\overline{x}, \overline{y}) = \max\limits_{y \in D} \min\limits_{x \in \overline{X}^0(y)} \overline{B}(x,y)$.

Таким образом, наша центральная идея состоит в том, что решение исходной задачи (1.1) можно осуществить путем максимизации введенной выше функции $\overline{\mu}(y)$, или, что то же, путем поиска максимина

$$\bar{\gamma} = \sup_{u>0} \min_{x \in X^0(u)} B(x,u), \tag{1.9}$$

т. е. точной верхней грани значений функции

$$\mu(u) = \min_{x \in X^0(u)} B(x,u) = \min_{x \in X^0(u)} B_0(x,u) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} u_i^{-1}. \tag{1.10}$$

Отметим, что (1.9) — задача поиска максимина со связанными переменными, так как область определения барьерной функции $B(\cdot,u)$ зависит от вектора параметров u.

2. Процедура настройки параметров смещения

Процедура настройки параметров смещения имеет итеративный характер, т. е. состоит из серии однотипных шагов (итераций). Пусть $u^0 = [u_1^0,\dots,u_m^0] > 0$ — произвольный вектор начального смещения, t — номер итерации, принимающий последовательные значения $t = 0,1,2,\dots$ Итерация с номером t начинается с того, что по текущему приближению двойственных переменных u^t ищется вектор прямых переменных x_t такой, что

$$B_0(x_t,u^t) = \min_{x \in X^0(u^t)} B_0(x,u^t). \tag{2.1}$$

После этого компоненты текущего вектора смещения переопределяются по формуле

$$u_i^{t+1} = u_i^t - f_i(x_t) \qquad (i = 1,\dots,m). \tag{2.2}$$

Затем номер итерации увеличивается на 1 и все перечисленные операции повторяются вновь. Процесс можно прервать при достижении приемлемой точности результата.

Чтобы разобраться в предлагаемой схеме, заметим, что условия (2.2) подразумевают выполнение неравенств $u_i^{t+1} = u_i^t - f_i(x_t) > 0$ $(i = 1,\dots,m)$ и соотношения

$$\nabla_x B_0(x_t,u^t) = \nabla f_0(x_t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m} \frac{\nabla f_i(x_t)}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} = 0. \tag{2.3}$$

Опираясь на (2.3), выпуклость всех входящих в задачу функций и на простое неравенство $1/w - 1/w_0 \ge -(w-w_0)/w_0^2$, которому функция $\phi(w) = 1/w$ удовлетворяет в силу своей выпуклости (при $w > 0$), выпишем последовательность оценок:

$$\begin{aligned} B_0(x,u) - B_0(x_t,u^t) &= f_0(x) - f_0(x_t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{u_i - f_i(x)} - \frac{1}{u_i^t - f_i(x_t)}\right] \\ &\ge f_0(x) - f_0(x_t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{f_i(x) - f_i(x_t) + u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} \\ &\ge \langle \nabla f_0(x_t), x - x_t\rangle + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{\langle \nabla f_i(x_t), x - x_t\rangle}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} \qquad (2.4) \\ &= \langle \nabla_x B_0(x_t,u^t), x - x_t\rangle + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2}\ ;$$

здесь $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ — символ скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$.

Из (2.4) с учетом (1.10) следует

Утверждение 3. *Для всех* $u = [u_1, \ldots, u_m] > 0$ *верно*

$$\mu(u) \geq \mu(u^t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{u_i^t} - \frac{1}{u_i}\right) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2}. \tag{2.5}$$

Подберем теперь такое u, чтобы сумма двух последних слагаемых в правой части неравенства (2.5), равная

$$\Delta(t,u) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{u_i^t} - \frac{1}{u_i}\right) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2}\ ,$$

была как можно больше. Поскольку эта сумма является строго вогнутой функцией аргумента u, то достаточно приравнять к нулю ее частные производные

$$\frac{\partial\Delta(t,u)}{\partial u_j} = \frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{u_i^2} - \frac{1}{[u_i^t - f_i(x_t)]^2}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

и решить полученную систему уравнений. Очевидное решение этой системы

$$u_i = u_i^t - f_i(x_t) \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

и предлагается взять в (2.2) в качестве обновленного вектора смещений u_i^{t+1}. Подчеркнем, что значения его компонент автоматически положительны, и если $u^{t+1} \neq u^t$, то

$$\Delta(t, u^{t+1}) = \max_u \Delta(t,u) > \Delta(t, u^t) = 0,$$

так что заведомо будет верно неравенство

$$\mu(u^{t+1}) > \mu(u^t).$$

Повторяя этот процесс многократно, получаем монотонно растущую последовательность значений функции $\mu(\,\cdot\,)$, при некоторых предположениях сходящуюся к оптимальному значению $\overline{\gamma}$.

3. Обоснование сходимости метода

Процесс (2.1), (2.2) генерирует последовательность $\{\mu(u^t)\}_{t=0}^{\infty}$. Как показано в предыдущем разделе, эта последовательность монотонно растет, причем

$$\overline{\gamma} \geq \mu(u^t) \geq \mu(u^{t-1}) + \Delta(t-1, u^t) \geq\ \ldots\ \geq \mu(u^0) + \sum_{s=1}^{t}\Delta(s, u^{s+1}),$$

где все $\Delta(s, u^{s+1}) \geq 0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty}\Delta(s, u^{s+1})$ сходится, и его общий член стремится к нулю:

$$\Delta(s, u^{s+1}) = \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{u_i^s} - \frac{1}{u_i^{s+1}}\right) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^s - u_i^{s+1}}{[u_i^{s+1}]^2}\ \to 0.$$

Поскольку последний можно представить в виде

$$\Delta(s, u^{s+1}) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \epsilon_{is}^2, \quad \text{где} \quad \epsilon_{is}^2 = \frac{1}{u_i^s} \left(1 - \frac{u_i^s}{u_i^{s+1}}\right)^2 \geq 0,$$

то верно

Утверждение 4. *Последовательности двойственных переменных подчинены следующим рекуррентным соотношениям:*

$$u_i^{t+1} = \frac{u_i^t}{1 + \epsilon_{it}\sqrt{u_i^t}} \qquad (i = 1, \dots, m;\ t = 0, 1, \dots); \tag{3.1}$$

здесь все $\epsilon_{it} \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Подставляя в (3.1) значение $u_i^{t+1} = u_i^t - f_i(x_t)$, получаем

Следствие 1. *Пусть при некотором* $1 \leq i \leq m$ *последовательность* $\{u_i^t\}_{t=0}^{\infty}$ *ограничена. Тогда*

$$f_i(x_t) = \epsilon_{it} \left(u_i^t\right)^{3/2} \left(1 + \epsilon_{it}\sqrt{u_i^t}\right)^{-1} \to 0$$

при $t \to \infty$.

Вернемся к задаче со смещенными ограничениями: найти

$$\overline{\gamma}(u) = \inf_{x \in X(u)} f_0(x), \quad \text{где} \quad X(u) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \colon\ f_i(x) \leq u_i \quad (i = 1, \dots, m) \,\}, \tag{3.2}$$

и к задаче, двойственной к ней: найти

$$\underline{\gamma}(u) = \sup_{y \geq 0} \inf_{x} \, [\, \mathcal{L}(x, y) - \langle y, u \rangle \,].$$

Хорошо известно [6], что при сделанных предположениях (выпуклые) функции оптимального значения $\underline{\gamma}(u)$ и $\overline{\gamma}(u)$ конечны в некоторой окрестности нуля и в этой окрестности совпадают, причем соответствующие множества оптимальных векторов прямой и двойственной задач ограничены.

Сделаем дополнительное предположение относительно задачи (1.1).

Пусть $\overline{x}$ — ее единственное решение и $I_0 = \{i \colon\ f_i(\overline{x}) = 0\}$ — множество индексов ее активных ограничений. Будем считать, что задача (1.1) сильно регулярна, т. е. $|\, I_0 \,| = n$, причем векторы $\{\nabla f_i(\overline{x}) \ (i \in I_0)\,\}$ линейно независимы и $\overline{y}_i > 0$ при всех $i \in I_0$ (см. соотношения (1.2)–(1.4)).

Как показано в [6], условие сильной регулярности задачи (1.1) автоматически обеспечивает и существование для нее точки Слейтера x_{S}, и единственность решения $\overline{x}$ прямой задачи (1.1), и существование и единственность решения $\overline{y}$ двойственной к ней задачи (1.5).

Имеет место простое

Утверждение 5. *Пусть задача* (1.1) *сильно регулярна. Тогда существуют такие* $\sigma > 0$ *и* $\delta > 0$, *что параметрическая задача* (3.2), *в которой значения* $|u_i| < \delta$ *при всех* $i \in I_0$ *и неотрицательны при всех прочих* $i \in I_1 = \{1, \dots, m\} \backslash I_0$, *также будет сильно регулярной и разрешимой, а ее единственное решение* $\overline{x}(u)$ *удовлетворяет условиям* $f_i(\overline{x}(u)) \leq -\sigma < 0$ *при всех* $i \in I_1$.

Зафиксируем некоторые $\delta > 0$, $\sigma > 0$, существующие в силу утверждения 5, и введем множество
$$U(\delta) := \{u \in \mathbb{R}^m: \ \ |u_i| < \delta \ \text{ при } \ i \in I_0 \ \text{ и } \ u_i \geq 0 \ \text{ при } i \in I_1\}.$$

В соответствии с утверждением 5 множества индексов активных ограничений параметрической и исходной задач совпадают, что позволяет охарактеризовать оптимальный вектор параметризованной задачи $\overline{x}(u)$ как единственное решение системы нелинейных уравнений

$$f_i(x) = u_i \qquad (i \in I_0), \tag{3.3}$$

если только $-\delta < u_i < \delta$ при всех $i \in I_0$ и $u_i \geq 0$ при всех прочих i. В силу непрерывной зависимости решения выписанной системы от правых частей и следствия 1 для обоснования сходимости нашего метода остается только установить условия, при которых последовательность $\{u^t\}_{t=0}^{\infty}$ лежит в $U(\delta)$.

Предположим, что $u \in U(\delta)$ и $B_0(x(u), u) = \min\limits_{x \in X^0(u)} B_0(x, u)$. Сравним значение критериальной функции $f_0(x(u))$ со значением этой же функции в некоторой точке

$$x_\alpha = \alpha\, x_{\mathrm{S}} + (1-\alpha)\, \overline{x}(u), \quad \alpha \in (0,1),$$

лежащей на отрезке, соединяющем точку Слейтера x_{S} с оптимальным вектором $\overline{x}(u)$ задачи (3.2). Очевидно,

$$f_0(x(u)) \leq B_0(x(u), u) = \min_{x \in X^0(u)} B_0(x, u) \leq B_0(x_\alpha, u). \tag{3.4}$$

В силу выпуклости исходных функций и определения точки Слейтера

$$f_i(x_\alpha) \leq \alpha f_i(x_{\mathrm{S}}) + (1-\alpha) f_i(\overline{x}(u)) \leq -\alpha\rho + u_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Аналогично для критериальной функции

$$f_0(x_\alpha) \leq \alpha f_0(x_{\mathrm{S}}) + (1-\alpha) f_0(\overline{x}(u)) = \alpha f_0(x_{\mathrm{S}}) + (1-\alpha)\overline{\gamma}(u).$$

Кроме того, в силу выпуклости функции оптимума

$$\overline{\gamma}(u) \geq \overline{\gamma} - \sum_{i=1}^{m} \overline{y}_i u_i = \overline{\gamma} - \sum_{i \in I_0} \overline{y}_i u_i.$$

Поэтому

$$B_0(x_\alpha, u) = f_0(x_\alpha) + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{u_i - f_i(x_\alpha)} \leq \alpha f_0(x_{\mathrm{S}}) + (1-\alpha)\overline{\gamma}(u) + \frac{m}{\alpha\tau\rho}$$
$$\leq \overline{\gamma}(u) + \frac{m}{\alpha\tau\rho} + \alpha(f_0(x_{\mathrm{S}}) - \overline{\gamma}) + \alpha\delta\|\overline{y}\|_1.$$

Поскольку $\alpha > 0$ можно считать сколь угодно малым, то вместе с (3.4) это дает нам

Утверждение 6. *При $\delta > 0$, выбранном в соответствии с утверждением 5, для любого малого $\epsilon > 0$ существует такое большое $\tau(\epsilon) > 0$, что для всех $\tau > \tau(\epsilon)$ и всех $u \in U(\delta)$ верна оценка*
$$f_0(x(u)) \leq \overline{\gamma}(u) + \epsilon,$$
где $x(u) = \arg\min\limits_{x \in X^0(u)} B_0(x, u)$.

Вектор $x(u)$ допустим для задачи (3.2). Поэтому утверждение 6 фактически означает, что этот вектор является ее приближенным решением, тем более точным, чем большим взято значение $\tau > 0$. При этом оценка точности по функционалу не зависит от $u \in U(\delta)$.

Напомним, что в предположении единственности решения задачи (3.2) сходимость допустимого вектора к ее решению по функционалу влечет и сходимость к нему по расстоянию. Поэтому можно сформулировать

Следствие 2. *Пусть* $B_0(x(u), u) = \min_{x \in X^0(u)} B_0(x, u)$. *Тогда существует такое* $\overline{\tau} > 0$, *что при всех* $\tau > \overline{\tau}$ *и всех* $u \in U(\delta)$ *вектор* $x(u)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$u_i - \delta < f_i(x(u)) < u_i \quad \text{при} \ \ i \in I_0. \tag{3.5}$$

При этом автоматически $f_i(x(u)) < 0$ *при* $i \in I_1$.

Зафиксируем подходящее значение $\overline{\tau} > 0$. Сопоставляя последнее утверждение с соотношениями процесса (2.1), (2.2), получаем

Утверждение 7. *Пусть в* (2.1), (2.2) *штрафной параметр* $\tau > \overline{\tau}$ *достаточно велик, а начальное приближение* $u^0 \in U(\delta)$. *Тогда все* u^t — *последующие векторы смещения, генерируемые этим вычислительным процессом, — также удовлетворяют этому условию, т. е. лежат в* $U(\delta)$. *Кроме того,* $f_i(x_t) \le 0$ *при всех* t, $i \in I_1$.

В самом деле, если $i \in I_0$ и $u^0 \in U(\delta)$, то в силу (3.5) последовательно имеем:

$$u_i^1 = u_i^0 - f_i(x_1) < u_i^0 - (u_i^0 - \delta) = \delta,$$

$$u_i^2 = u_i^1 - f_i(x_2) < u_i^1 - (u_i^1 - \delta) = \delta,$$

$$u_i^3 = u_i^2 - f_i(x_3) < u_i^2 - (u_i^2 - \delta) = \delta$$

и так далее.

Возвращаясь к следствию 1 и к интерпретации решения исходной задачи $\overline{x}$ через решение нелинейной системы уравнений (3.3), а решения двойственной задачи $\overline{y}$ — через решение линейной системы

$$-\sum_{i \in I_0} \nabla f_i(\overline{x}) y_i = \nabla f_0(\overline{x}),$$

получаем заключительное

Утверждение 8. *Пусть задача* (1.1) *разрешима и сильно регулярна. Тогда при всех достаточно больших* $\tau > 0$ *и достаточно малых начальных векторах смещения* $u^0 > 0$ *процесс* (2.1), (2.2) *порождает последовательности* $\{x_t\}$ *и* $\{u^t\}$ *со свойствами*

$$\lim_{t \to \infty} \|x_t - \overline{x}\| = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \|y^t - \overline{y}\| = 0,$$

где $y^t = [y_1^t, \dots, y_m^t]$ — *вектор с компонентами* $y_i^t = 1/(\tau(u_i^t)^2)$.

Обоснование алгоритма (2.1), (2.2) завершено.

4. Случай задачи линейного программирования

Рассмотрим в качестве частной, но важной для приложений постановки каноническую задачу линейного программирования: найти

$$\widehat{\gamma} = \min_{x \in \mathcal{X}} \langle c, x \rangle, \quad \text{где} \quad \mathcal{X} = \{\, x\colon\ Ax = b, \quad x \geq 0\}; \tag{4.1}$$

здесь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор неизвестных исходной задачи, $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — ее целевой вектор, $b = (b_1, \ldots, b_m)$ — вектор правых частей и $A = (a_{ij})_{m \times n}$ — матрица коэффициентов ее ограничений.

Как и ранее, будем предполагать, что задача (4.1) разрешима и $\widehat{x}$ — ее единственный оптимальный вектор. Придавая вышеизложенному материалу несколько иной формат, введем параметрическое множество $\mathcal{X}^0(u) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ Ax = b, \quad x + u > 0\}$ и функцию

$$\widehat{\mu}(u) = \min_{x \in \mathcal{X}^0(u)} \widehat{B}(x, u) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i},$$

где

$$\widehat{B}(x, u) = \langle c, x \rangle + \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i + x_i}.$$

Подчеркнем, что здесь мы ограничиваем выход переменных задачи в отрицательную область (с учетом их смещения на вектор $u = [u_1, \ldots, u_n] > 0$) и оставляем за рамками штрафной конструкции остальные ограничения. Последние участвуют в определении $\widehat{\mu}(u)$, задавая область оптимизации барьерной функции.

Как и раньше, при сделанных предположениях для каждого фиксированного $u \geq 0$ можно указать (единственный) вектор $x = x(u) \in \mathcal{X}^0(u)$ такой, что $\widehat{B}(x(u), u) = \min\limits_{x \in \mathcal{X}^0(u)} \widehat{B}(x, u)$. Применяя ту же замену двойственных переменных и те же рассуждения, что были проведены в разд. 1, можно показать, что исходная задача сводится к поиску точной верхней грани функции $\widehat{\mu}(u)$ или, что то же, максимина параметризованной барьерной функции

$$\widehat{\gamma} = \sup_{u > 0} \widehat{\mu}(u) = \sup_{u > 0} \left(\min_{x \in \mathcal{X}^0(u)} \widehat{B}(x, u) - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i} \right). \tag{4.2}$$

Покажем, как строится максимизирующая последовательность для функции $\widehat{\mu}(u)$.

Пусть имеется некоторый вектор смещений $u^t > 0$ и найдена точка $x_t \in \mathcal{X}^0(u^t)$, в которой функция $\widehat{B}(x, u^t)$ достигает своего минимума по x. В этой точке выполнены классические условия оптимальности

$$\nabla_x B(x_t, u^t) = A^T y_t, \qquad Ax_t = b,$$

которые с учетом равенства

$$\nabla_x B(x_t, u^t) = c - \frac{1}{\tau}(X_t + U_t)^{-2}$$

можно привести к виду

$$Ax_t = b, \qquad c - A^T y_t = z_t, \qquad Z_t (X_t + U_t)^2 = \tau^{-1} e. \tag{4.3}$$

Здесь символами Z_t, X_t и U_t обозначены диагональные матрицы, диагонали которых образованы компонентами векторов z_t, x_t и u^t соответственно, $e = [1, \ldots, 1] \in \mathbb{R}^n$, $y_t = [y_1^t, \ldots, y_m^t]$ — вектор переменных двойственной задачи, $z_t = [z_1^t, \ldots, z_n^t]$ — вектор ее дополнительных переменных.

Используя соотношение (4.3), выпуклость всех входящих в задачу функций и неравенство $1/w \geq 1/w_0 - (w - w_0)/w_0^2$, которому функция $\phi(w) = 1/w$ удовлетворяет будучи выпуклой при $w > 0$, выпишем последовательность неравенств

$$\widehat{B}(x,u) = \langle c, x\rangle + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{u_i + x_i} \geq \langle c, x\rangle + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{u_i^t + x_i^t} - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t + x_i - x_i^t}{[u_i^t + x_i^t]^2}$$

$$= \langle c, x - x_t\rangle + \langle c, x_t\rangle + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{u_i^t + x_i^t} - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i - x_i^t}{[u_i^t + x_i^t]^2} - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t}{[u_i^t + x_i^t]^2}$$

$$= \langle c, x - x_t\rangle + \widehat{B}(x_t, u^t) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i - x_i^t}{[u_i^t + x_i^t]^2} - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t}{[u_i^t + x_i^t]^2}$$

$$= \langle c - z^t, x - x_t\rangle + \widehat{B}(x_t, u^t) - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t}{[u_i^t + x_i^t]^2}$$

$$= \langle y_t,\, Ax - b\,\rangle + \widehat{\mu}(u^t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i^t} - \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i - u_i^t}{[u_i^t + x_i^t]^2}.$$

Отсюда

$$\widehat{\mu}(u) = -\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{u_i} + \min_{x\in\mathcal{X}^0(u)}\widehat{B}(x,u) \geq \widehat{\mu}(u^t) + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\frac{u_i^t - u_i}{[u_i^t + x_i^t]^2} + \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{u_i^t} - \frac{1}{u_i}\right). \tag{4.4}$$

Далее, дословно повторяя рассуждения из разд. 2, выводим, что наибольший гарантированный прирост значения функции $\widehat{\mu}(u)$ достигается при

$$u_i^{t+1} = u_i^t + x_i^t \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Именно при таких значениях u_i сумма последних двух слагаемых правой части оценки (4.4) максимальна.

Приведенные выкладки позволяют предложить для решения задачи (4.1) итерационный процесс, основанный на ее сведении к задаче (4.2) и описываемый следующими рекуррентными соотношениями:

$$u^0 > 0, \quad x_t = \arg\min_{x\in\mathcal{X}^0(u^t)}\widehat{B}(x,u^t), \quad u^{t+1} = u^t + x_t, \quad t = 0, 1, \ldots \tag{4.5}$$

Здесь на каждой итерации вначале решается задача минимизации барьерной функции $\widehat{B}(x,u)$ по основным переменным x на множестве $\mathcal{X}^0(u)$, после чего переопределяются компоненты вектора смещений u. По аналогии с общей схемой можно сформулировать

Утверждение 9. *Пусть задача* (4.1) *имеет единственный оптимальный вектор, для которого выполнены условия строгой дополняющей нежесткости. Тогда при всех достаточно больших* $\tau > 0$ *и достаточно малых начальных векторах смещения* $u^0 > 0$ *выписанный выше процесс* (4.5) *порождает последовательность* $\{x_t\}$ *со свойством*

$$\lim_{t\to\infty}\|x_t - \widehat{x}\| = 0$$

(*мы не формулируем двойственную задачу, имеющую специфический вид, и не приводим результат относительно сходимости векторов смещения*).

З а м е ч а н и е. Как уже отмечалось, поиск минимума барьерной функции $\widehat{B}(x,u)$ по $x \in \mathcal{X}^0(u)$ при фиксированном $u > 0$ сводится к решению нелинейной системы уравнений

$$\Phi(x,y,z) = \begin{bmatrix} Z(X+U)^2 e - \tau^{-1} e \\ Ax - b \\ A^T y + z - c \end{bmatrix} = 0,$$

где y — вектор множителей Лагранжа, z — вспомогательный вектор, Z, X и U — диагональные матрицы, образованные векторами z, x и u соответственно. Искомое решение можно получить как предел итерационной последовательности, элементы которой x^s, y^s, z^s пересчитываются по правилу

$$x^{s+1} = x^s + \alpha p_x, \qquad y^{s+1} = y^s + \alpha p_y, \qquad z^{s+1} = z^s + \alpha p_z.$$

Направление спуска $p = [p_x, p_y, p_z]$ находится методом Ньютона как решение линейной системы

$$J(x_s, y_s, z_s) p = -\Phi(x_s, y_s, z_s), \tag{4.6}$$

где

$$J(x_s, y_s, z_s) = \nabla\Phi(x_s, y_s, z_s) = \begin{bmatrix} 2D_{1s}D_{2s} & 0 & D_{2s}^2 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & E \end{bmatrix};$$

здесь $D_{1s} = Z_s$ и $D_{2s} = (X_s + U)$ — невырожденные диагональные матрицы, образованные векторами z_s и $x_s + u$ соответственно. Применяя к системе (4.6) стандартную процедуру исключения неизвестных, получаем

$$p_y = -y_s + (AD_{1s}^{-1}D_{2s}A^T)^{-1}\left[2b - A\left(2x_s - D_{2s}e - D_{1s}^{-1}D_{2s}(c - z_s) + \frac{1}{\tau}D_{1s}^{-1}D_{2s}^{-1}e\right)\right],$$

$$p_z = c - z_s - A^T(y_s + p_y), \qquad p_x = -\frac{1}{2}\left(D_{2s}e + D_{1s}^{-1}D_{2s}p_z - \frac{1}{\tau}D_{1s}^{-1}D_{2s}^{-1}e\right).$$

Что касается шагового параметра $\alpha > 0$, то обычно его полагают равным 1 (для повышения робастности алгоритма можно варьировать значение этого параметра, например, в духе Армийо для предотвращения выхода в отрицательную область переменных z). Трудоемкость этих вычислений примерно совпадает с трудоемкостью одного шага в методе внутренних точек [14].

5. Вычислительный эксперимент

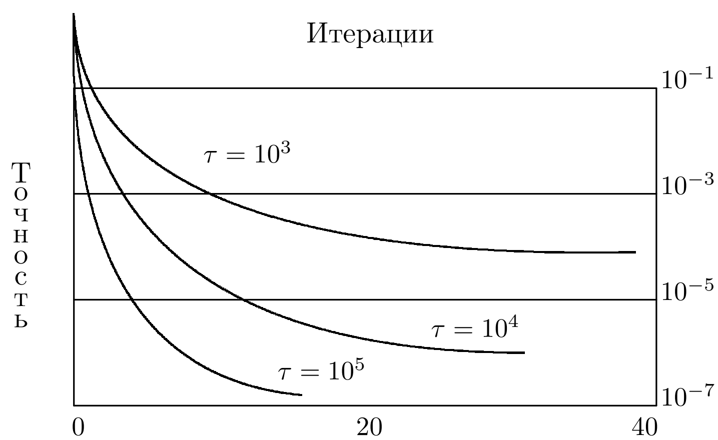
Вычислительный эксперимент проводился на задачах линейного программирования средней размерности в каноническом формате в среде MATLAB. Разреженные матрицы коэффициентов тестовых задач генерировались при помощи датчика случайных чисел с равномерным распределением от -1 до 1. Заполненность матриц ненулевыми элементами составляла 3–8%. Векторы целевой функции и правых частей ограничений подбирались таким образом, чтобы решения прямой и двойственной задач совпадали с некоторыми заранее заданными векторами, составленными из нулей и единиц. При этом выполнялись условия строгой дополняющей нежесткости, что обеспечивало единственность решений прямой и двойственной задач. Формулы расчетов соответствуют приведенным в конце предыдущего раздела. Типичные результаты приведены ниже в таблице.

Таблица

Среднее число итераций метода для достижения точности решения
$\epsilon = \|x - \overline{x}\| \leq 10^{-6}$

Величина штрафного параметра τ	Размерность тестовых задач				
	300×600	600×1200	500×2000	1000×2000	1000×6000
10^3	$55/210$	$76/265$	$131/451$	$106/363$	$141/501$
10^4	$18/82$	$33/132$	$70/251$	$51/193$	$83/286$
10^5	$5/43$	$25/109$	$35/143$	$13/72$	$55/226$

Тестовые задачи разбиты на пять групп по своей размерности. Для каждой группы варьировалось значение штрафного параметра τ. Приведены как среднее число внешних итераций, потребовавшееся для достижения некоторой заданной точности искомого решения, так и общее число решенных в ходе алгоритма систем вида (4.6). Графики усредненной зависимости достигнутой точности решения от числа внешних итераций представлены на рисунке ниже. Шкала вертикальной оси логарифмическая.



Зависимость точности решения от числа внешних итераций.

Как видно из графиков, скорость сходимости метода особенно высока на его начальных итерациях. Результаты близки к приведенным в [12] для метода модифицированной логарифмической барьерной функции и показывают перспективность предпринятых автором исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Фиакко А., Мак–Кормик Г.** Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
2. **Зангвилл У.И.** Нелинейное программирование. Единый подход. М.: “Сов. радио”, 1973. 312 с.
3. **Еремин И.И., Астафьев Н.Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
4. **Евтушенко Ю.Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.

5. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
6. **Эльстер К.-Х., Рейнгард Р., Шойбле М., Донат Г.** Введение в нелинейное программирование / Пер. с нем. под ред. И. И. Еремина. М.: Наука, 1985. 284 с.
7. **Гилл Ф., Мюррей У., Райт М.** Практическая оптимизация / Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 509 с.
8. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988. 552 с.
9. **Нестеров Ю.Е.** Эффективные методы в нелинейном программировании. М.: Радио и связь, 1989. 304 с.
10. **Жадан В.Г.** Численные методы линейного и нелинейного программирования. Вспомогательные функции в условной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 2002. 160 с.
11. **Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.** Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. М.: Наука, 1989. 400 с.
12. **Попов Л.Д.** Об одной модификации метода барьерных логарифмических функций в линейном и выпуклом программировании // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 103–114.
13. **Скарин В.Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.
14. **Roos C., Terlaky T., Vial J.-Ph.** Theory and algorithms for linear optimization. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1997. 484 с.

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: popld@imm.uran.ru

Поступила 15.01.2009

Том 15 № 1 2009

УДК 517.5

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ОБЛАСТИ СО ЩЕЛЬЮ[1]

Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных

В работе построен базис гармонических всплесков в эллиптическом кольце и исследованы его аппроксимативные свойства. Полученные результаты использованы для анализа поведения решения краевой задачи Дирихле при стягивании внутренней границы кольца к отрезку.

Ключевые слова: гармонические всплески, задача Дирихле, область со щелью, асимптотическое разложение, погрешность аппроксимации.

Yu. N. Subbotin and N. I. Chernykh. The Dirichlet problem in a domain with a slit.

A basis of harmonic wavelets is constructed in an elliptic ring and its approximation properties are investigated. The obtained results are used to analyze the behavior of a boundary-value Dirichlet problem under the contraction of the inner boundary of the ring to a segment.

Keywords: harmonic wavelets, Dirichlet problem, domain with a slit, asymptotic expansion, approximation error.

В работах А. М. Ильина [1, 2] решены задачи о (формальном, см. [1, теоремы 1,2]) асимптотическом разложении относительно малого параметра решений краевой задачи Дирихле в двусвязных областях для уравнений в частных производных эллиптического типа, когда в качестве малого параметра выступает диаметр отверстия, стягивающегося в точку, или поперечный размер щели, стягивающейся к отрезку, границы которых образуют вторую компоненту границы области поиска решения соответствующей краевой задачи.[2]

В связи с большой общностью задач, рассматриваемых в этих работах, их решения очень сложные и по форме асимптотических разложений — рядов по дробным степеням и логарифмическим функциям малого параметра (причем разным вблизи малого отверстия и вдали от него), и по способу представления (функциональных) коэффициентов асимптотических рядов, определяющихся рекуррентно через решения последовательных краевых задач, в самой постановке каждой из которых участвуют решения предыдущих задач. Между тем, в частном случае краевой задачи

$$\Delta u(re^{i\theta}) = 0 \qquad (\rho < r < 1,\ |\theta| \le \pi),$$
$$u(e^{i\theta}) = u_1(\theta),$$
$$u(\rho e^{i\theta}) = u_\rho(\theta)$$

(Δ — оператор Лапласа) известно ее явное решение (см., например, [3]) в виде сходящегося внутри кольца $\rho < r < 1$ ряда

$$u(re^{i\theta}) = \alpha_0 + \beta_0 \frac{\ln r}{\ln \rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)(r^{2n} - \rho^{2n}) + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\rho^n (1 - r^{2n})}{(1 - \rho^{2n}) r^n},$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 08-01-00213, 08-01-00320, 09-01-00014), программы Президиума РАН “Математическая теория управления” и Программы государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-1071.2008.1).

[2]По информации, сообщенной авторам А.Р. Данилиным, теорема 2 работы [1] в соответствии с терминологией теории асимптотических разложений превращает формальные асимптотические ряды из теоремы 1 в асимптотические, что уточняет формальную ссылку на работы А.М. Ильина.

который одновременно является и асимптотическим при $\rho \to 0$ [5], если граничные значения функции $u(\xi)$ — достаточно гладкие функции. К сожалению, этот ряд при не очень гладких $u_1(\theta)$ и $u_\rho(\theta)$ ($|\theta| \le \pi$) может не сходиться во всем замкнутом кольце. В работах [4–6] решение этой задачи представлено в виде ряда по гармоническим в кольце $\rho < r < 1$ всплескам, который равномерно сходится в замкнутом кольце для любых непрерывных u_1 и u_ρ и также одновременно является асимптотическим при $\rho \to 0$, причем члены ряда тоже сравнительно просто зависят от малого параметра ρ.

В настоящей работе строится базис из гармонических всплесков для пространств типа Харди гармонических функций в области между двумя софокусными эллипсами, решается задача об асимптотическом поведении решения соответствующей задачи Дирихле и его производной, когда внутренний эллипс стягивается к отрезку, а соответствующий ряд является также равномерно сходящимся представлением решения. Асимптотическое разложение и в этом частном случае значительно проще разложения из [1]. Но важно не это, а то, что из полученной асимптотики явно видно (см. (27)), как производные решения растут у концов щели (не между ними), косвенным образом объясняя известный характер распространения щели в напряженной пластине.

Пусть Γ_τ при $\tau > 1$ — эллипс в комплексной плоскости переменного $\zeta = \xi + i\eta$, который определяется в декартовых координатах (ξ, η) уравнением

$$\frac{\xi^2}{((\tau + \tau^{-1})/2)^2} + \frac{\eta^2}{((\tau - \tau^{-1})/2)^2} = 1. \tag{1}$$

Построим гармонические всплески в открытой области $\mathbb{E}(t, R)$, ограниченной эллипсами Γ_t и Γ_R. Эллипс Γ_τ является образом окружностей $w = \tau e^{i\vartheta}$ и $w = (1/\tau)e^{i\vartheta}$ ($\vartheta \in (0, 2\pi]$) при отображении комплексной плоскости переменного w (сокращенно: плоскости w) на плоскость ζ с помощью функции Жуковского $\zeta = (w + 1/w)/2$. Эта функция не однолистная, ее областями однолистности являются области $|w| < 1$ и $|w| > 1$, граница которых $|w| = 1$ переходит в разрез $\Gamma_1\colon\ \zeta = \cos\vartheta$ $(0 \le \vartheta \le 2\pi)$ плоскости ζ по отрезку $[-1, 1]$, соединяющему фокусы всех эллипсов Γ_τ. Чтобы однозначно представить область $\mathbb{E}(t, R)$ через функцию Жуковского, выберем t и R так, что $1 \le t < R$. Тогда $\mathbb{E}(t, R)$ будет образом кольца $t < |w| < R$. При фиксированном R и $t \downarrow 1$ область $\mathbb{E}(t, R)$ будет расширяться до открытой двусвязной области $\mathbb{E}(1, R)$, ограниченной эллипсом Γ_R с полуосями $(R + 1/R)/2$ и $(R - 1/R)/2$ и берегами разреза по отрезку $[-1, 1]$.

В кольце $\mathbb{R}_\rho = \{z\colon\ \rho < |z| < 1\}$ авторами построены и исследованы в [4–7] базисы гармонических всплесков. Они названы нами так, поскольку элементы базиса являются гармоническим продолжением внутрь кольца периодических всплесков, построенных в [4] на базе всплесков Мейера и рассматриваемых как функции точек на окружностях $|z| = 1$ и $|z| = \rho$, и поскольку они наследуют свойства локализации периодических всплесков, распространяя их с границы внутрь кольца $\mathbb{R}_\rho$. Этот базис есть система гармонических в $\mathbb{R}_\rho$ функций, элементы которой занумерованы в виде

$$\Big\{1,\ \frac{\ln|z|}{\ln\rho},\ \mathcal{W}_{j,k}(z),\ \widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(z),\ \mathcal{W}_{j,k}(\rho/z),\ \widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}(\rho/z)\colon\ 0 \le k < 2^j,\ j = 0, 1, \dots\Big\}. \tag{2}$$

Здесь все функции, кроме $\ln|z|$, являются гармоническими полиномами и явно определены (по-разному) в [4] и [7].

Кольцо $\mathbb{R}_\rho$ при $\rho = t/R$ (< 1) конформно отображается функцией $w = Rz$ в кольцо $t \le |w| \le R$, и, следовательно, функция $\zeta = (Rz + 1/(Rz))/2$ осуществляет взаимно однозначное конформное отображение кольца $\mathbb{R}_\rho$ на эллиптическое кольцо $\mathbb{E}(t, R)$ $(t = \rho R)$. Обратная функция $z = (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})/R$ при выборе ветви вне разреза Γ_1 из условия положительности $\sqrt{\xi^2 - 1}$ при $\xi > 1$ будет регулярной функцией в $\mathbb{E}(t, R)$, и такая подстановка z в систему (2) превращает ее в систему гармонических в $\mathbb{E}(t, R)$ функций

$$\Big\{1,\ \frac{\ln|(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})/R|}{\ln(t/R)},\ \mathcal{E}_{j,k}(\zeta),\ \widetilde{\mathcal{E}}_{j,k}(\zeta),\ \mathcal{E}^t_{j,k}(\zeta),\ \widetilde{\mathcal{E}}^t_{j,k}(\zeta)\colon\ 0 \le k < 2^{j-1},\ j = 0, 1, \dots\Big\}, \tag{3}$$

которую естественно назвать системой гармонических всплесков в $\mathbb{E}(t,R)$. Все эти функции зависят и от R, но в дальнейшем мы будем менять только t ($t\downarrow 1$), поэтому в обозначениях зависимость от R мы опустили.

Используя [7], выпишем явные представления элементов системы (3). Но сначала преобразуем систему (2) в следующую систему гармонических всплесков в кольце $\mathbb{R}_{t,R}=\{w\colon\ 1<t<|w|<R\}$ плоскости w:

$$\left\{1,\ \frac{\ln(|w|/R)}{\ln(t/R)},\ \mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{w}{R}\Big),\ \widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}\Big(\frac{w}{R}\Big),\ \mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{t}{w}\Big),\ \widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}\Big(\frac{t}{w}\Big)\colon\ j,k\in\mathbb{Z}_+,\ 0\le k<2^j\right\},\tag{4}$$

где (см. [7]) при $w=|w|e^{i\vartheta}$ ($0\le\vartheta<2\pi$) (пояснение формул см. ниже)

$$\begin{aligned}\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}\Big(\frac{w}{R}\Big)&=2\sum_{1\le\nu\le 2^{j+1}(1+\varepsilon)}\Big(2^{-j/2}\widehat{\theta}\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big)\sin\frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^{j+1}}\Big)\frac{|w|^\nu}{R^\nu}\overset{(\sin)}{\cos}\nu\vartheta,\\ \overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}\Big(\frac{t}{w}\Big)&=2\sum_{1\le\nu\le 2^{j+1}(1+\varepsilon)}\Big(2^{-j/2}\widehat{\theta}\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big)\sin\frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^{j+1}}\Big)\frac{t^\nu}{|w|^\nu}\overset{(\sin)}{\cos}\nu\vartheta,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\widehat{\theta}(\omega)=\widehat{\theta}_\varepsilon(\omega)=\sqrt{|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega/2)|^2-|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2},\tag{6}$$

а $\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)$ — четная функция типа Мейера с носителем $(-(1+\varepsilon)/2,(1+\varepsilon)/2)$ $(0<\varepsilon\le 1/3)$, непрерывная, дифференцируемая, с ограниченной вариацией первой производной, тождественно равная 1 при $|\omega|<(1-\varepsilon)/2$ и такая, что $|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega)|^2+|\widehat{\varphi}_\varepsilon(\omega-1)|^2\equiv 1$ при $(1-\varepsilon)/2<\omega<(1+\varepsilon)/2$. На рисунке показан вид графика функции $|\widehat{\theta}(\omega)|^2$. В (5) подразумеваются не два, а четыре равенства, первые два без надстрочных символов ($\sim$) и (sin) одновременно в их левых и правых частях, а в двух других вместо $\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}$ слева ставится $\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}$, а справа нужно символ cos заменить на символ в скобках, т. е. на sin. Этот прием будем применять и дальше для сокращения числа формул.

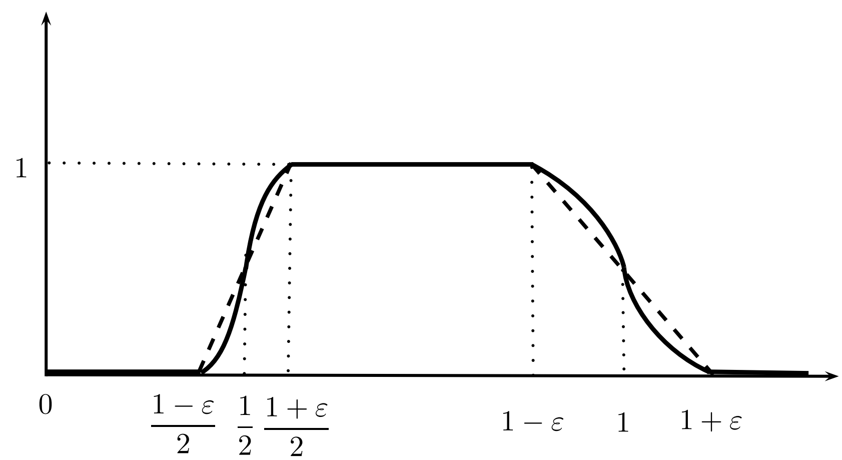


График четной функции $|\widehat{\theta}(\omega)|^2$ при $\omega\ge 0$.

Вслед за [7] поставим в соответствие системе (4) двойственную систему

$$\left\{1-\frac{\ln(|w|/R)}{\ln(t/R)},\ -1,\ \mathcal{W}^d_{j,k}\Big(\frac{w}{R}\Big),\ \widetilde{\mathcal{W}}^d_{j,k}\Big(\frac{w}{R}\Big),\ \mathcal{W}^d_{j,k}\Big(\frac{t}{w}\Big),\ \widetilde{\mathcal{W}}^d\Big(\frac{t}{w}\Big)\colon\ j,k\in\mathbb{Z}_+,\ 0\le k<2^j\right\}\tag{7}$$

по правилу: двойственным для гармонического полинома

$$\overset{(\sim)}{v}(w)=\sum_{\nu=0}^{n}a_\nu|w|^\nu\overset{(\sin)}{\cos}\nu\vartheta$$

будет полином

$$\overset{(\sim)_d}{v}(w) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \frac{|w|^\nu}{1-(t/R)^{2\nu}} \overset{(\sin)}{\cos}\, \nu\vartheta,$$

а для полинома

$$u(w) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \frac{1}{|w|^\nu} \overset{(\sin)}{\cos}\, \nu\vartheta$$

двойственным будет полином

$$\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \frac{1}{|w|^\nu} \frac{-1}{1-(t/R)^{2\nu}} \overset{(\sin)}{\cos}\, \nu\vartheta.$$

Коэффициенты из двух формул (5) будут встречаться далее еще в нескольких формулах. В дальнейшем будем использовать только их обозначение

$$\theta_{j,k}^{(\nu)} = 2^{-j/2}\widehat{\theta}\Big(\frac{\nu}{2^{j+1}}\Big) \sin \frac{2\pi\nu(k+0.5)}{2^{j+1}}. \tag{8}$$

Двойственность систем (4) и (6) состоит в том, что они являются “биортогональными” (и даже “биортонормированными”) по отношению друг к другу относительно псевдоскалярного произведения

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\mathbb{R}_{t,R}} f(w)\overline{g}(w)\frac{dw}{iw} \tag{9}$$

(этот билинейный функционал не является настоящим скалярным произведением, контур интегрирования в (9) обходится в положительном направлении, так что интеграл в (9) равен $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(Re^{i\vartheta})\overline{g}(Re^{i\vartheta})\,d\vartheta - \int_0^{2\pi} f(te^{i\vartheta})\overline{g}(te^{i\vartheta})\,d\vartheta$, и аксиомы $(f,f)\ge 0$, $(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$ здесь не гарантированы).

Указанное свойство двойственности систем (4) и (7) в случае кольца $\mathbb{R}_\rho$ установлено в [7]. Здесь его также можно проверить непосредственно или свести к двойственности систем (4) и (7) заменой переменной интегрирования $w = Rz$.

Теперь легко перейти от систем (4), (7) к системе (3) гармонических в $\mathbb{E}(t,R)$ функций и ее двойственной. Для этого достаточно заметить, что

$$|w|^\nu \cos\nu\vartheta = (w^\nu + \overline{w}^\nu)/2, \qquad |w|^\nu \sin\nu\vartheta = (w^\nu - \overline{w}^\nu)/(2i),$$

$$(\cos\nu\vartheta)/|w|^\nu = (w^{-\nu} + \overline{w}^{-\nu})/2, \qquad (\sin\nu\vartheta)/|w|^\nu = -(w^{-\nu} - \overline{w}^{-\nu})/(2i).$$

Учитывая, что $w = \zeta + \sqrt{\zeta^2-1}$, получим явное представление элементов системы (3):

$$\mathcal{E}_{j,k}^{R}(\zeta) = \sum_{1\le\nu<2^{j+1}(1+\varepsilon)} \theta_{j,k}^{(\nu)} R^{-\nu}\Big[\Big(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\Big)^\nu + \Big(\overline{\zeta}+\sqrt{\overline{\zeta}^2-1}\Big)^\nu\Big], \tag{10}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{j,k}^{R}(\zeta) = \sum_{1\le\nu<2^{j+1}(1+\varepsilon)} \theta_{j,k}^{(\nu)} \frac{R^{-\nu}}{i}\Big[\Big(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\Big)^\nu - \Big(\overline{\zeta}+\sqrt{\overline{\zeta}^2-1}\Big)^\nu\Big],$$

а так как $(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}) \equiv 1$, то аналогично

$$\mathcal{E}_{j,k}^{t}(\zeta) = \sum_{1\le\nu<2^{j+1}(1+\varepsilon)} \theta_{j,k}^{(\nu)} t^{\nu}\Big[\Big(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\Big)^\nu + \Big(\overline{\zeta}-\sqrt{\overline{\zeta}^2-1}\Big)^\nu\Big],$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{j,k}^{t}(\zeta) = \sum_{1\le\nu<2^{j+1}(1+\varepsilon)} \theta_{j,k}^{(\nu)} t^{\nu} i\Big[\Big(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\Big)^\nu - \Big(\overline{\zeta}-\sqrt{\overline{\zeta}^2-1}\Big)^\nu\Big]. \tag{11}$$

Двойственной к (3) системой, “биортонормированной” относительно псевдоскалярного произведения

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{E}(t,R)} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\mathbb{E}(t,R)} f(\zeta)g(\zeta)\frac{d\zeta}{i\sqrt{\zeta^2-1}}, \tag{12}$$

будет система

$$\left\{1-\frac{\ln|(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})/R|}{\ln(t/R)},\ -1,\ \mathcal{E}^{R,d}_{j,k}(\zeta),\ \widetilde{\mathcal{E}}^{R,d}_{j,k}(\zeta),\ \mathcal{E}^{t,d}_{j,k}(\zeta),\ \widetilde{\mathcal{E}}^{t,d}_{j,k}(\zeta)\colon\ j,k\in\mathbb{Z}_+,\ 0\le k<2^j\right\}, \tag{13}$$

где

$$\mathcal{E}^{R,d}_{j,k}(\zeta) = \sum_1 \le \nu < 2^{j+1}(1+\varepsilon)\theta^{(\nu)}_{j,k}\frac{R^{-\nu}}{1-(t/R)^{2\nu}}\Big[\Big(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\Big)^\nu + \Big(\overline{\zeta}+\sqrt{\overline{\zeta}^2-1}\Big)^\nu\Big], \tag{14}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}^{R,d}_{j,k}(\zeta) = \sum_{1\le\nu<2^{j+1}(1+\varepsilon)}\theta^{(\nu)}_{j,k}\frac{R^{-\nu}}{1-(t/R)^{2\nu}}\frac{1}{i}\Big[\Big(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\Big)^\nu - \Big(\overline{\zeta}+\sqrt{\overline{\zeta}^2-1}\Big)^\nu\Big],$$

$$\mathcal{E}^{t,d}_{j,k}(\zeta) = -\sum_{1\le\nu<2^{j+1}(1+\varepsilon)}\theta^{(\nu)}_{j,k}\frac{t^{\nu}}{1-(t/R)^{2\nu}}\Big[\Big(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\Big)^\nu + \Big(\overline{\zeta}-\sqrt{\overline{\zeta}^2-1}\Big)^\nu\Big], \tag{15}$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}^{t,d}_{j,k}(\zeta) = -\sum_{1\le\nu<2^{j+1}(1+\varepsilon)}\theta^{(\nu)}_{j,k}\frac{t^{\nu}}{1-(t/R)^{2\nu}}i\Big[\Big(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\Big)^\nu - \Big(\overline{\zeta}-\sqrt{\overline{\zeta}^2-1}\Big)^\nu\Big].$$

Таким образом, если у гармонической в $\mathbb{E}(t,R)$ функции $u(z)$ известны ее граничные значения $u_t(\zeta)=u(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_t}$, $u_R(\zeta)=u(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_R}$, то ей можно однозначно поставить в соответствие ряд

$$u(\zeta) \sim u_0^\vee + \widetilde{u}_0^\vee\frac{\ln|(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})/R|}{\ln(t/R)}$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-1}\Big(u^R_{j,k}\mathcal{E}^R_{j,k}(\zeta)+\widetilde{u}^R_{j,k}\widetilde{\mathcal{E}}^R_{j,k}(\zeta)+u^t_{j,k}\mathcal{E}^t_{j,k}(\zeta)+\widetilde{u}^t_{j,k}\widetilde{\mathcal{E}}^t_{j,k}(\zeta)\Big), \tag{16}$$

где

$$u_0^\vee = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_R} u_R(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}, \qquad \widetilde{u}_0^\vee = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_t} u_t(\zeta)\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} - u_0^\vee,$$

$$u^R_{j,k} = \Big\langle u, \mathcal{E}^{R,d}_{j,k}\Big\rangle_{\mathbb{E}(t,R)}, \qquad u^t_{j,k} = \Big\langle u, \mathcal{E}^{t,d}_{j,k}\Big\rangle_{\mathbb{E}(t,R)},$$

$$\widetilde{u}^R_{j,k} = \Big\langle u, \widetilde{\mathcal{E}}^{R,d}_{j,k}\Big\rangle_{\mathbb{E}(t,R)}, \qquad \widetilde{u}^t_{j,k} = \Big\langle u, \widetilde{\mathcal{E}}^{t,d}_{j,k}\Big\rangle_{\mathbb{E}(t,R)}. \tag{17}$$

В силу (12) в правой части (16) участвуют только граничные значения $u_t(\zeta)$ и $u_R(\zeta)$ функции $u(\zeta)$, и, чтобы формула (16) действительно имела отношение к $u(\zeta)$, эта функция должна быть тесно связана со своими граничными значениями. Связана так, что $u(\zeta)$ можно восстановить по ним, в отличие, например, от гармонической внутри Γ_R функции $(1-|\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}|^2R^{-2})|1-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})R^{-1}|^{-2}$, зануляющейся на Γ_R, кроме точки $\zeta=(R+1/R)/2$. Для этого нужно на $u(\zeta)$ наложить условия типа условий Харди при определении классов h_p гармонических функций в круге, потребовав, чтобы при соответствующем $1<p\le\infty$ множество величин $\Big(\int_{\Gamma_\tau}|u(\zeta)|^p d\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}\Big)^{1/p}$ $(t<\tau<R)$ было ограниченным, или в случае $p=1$ потребовав дополнительно представимости $u(\zeta)$ интегралом типа интеграла Пуассона:

$$u(\zeta) = u_\infty(\zeta) + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_R} u_+(s)\mathrm{Re}\frac{s+\sqrt{s^2-1}+\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{s+\sqrt{s^2-1}-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}\ \frac{ds}{i\sqrt{s^2-1}}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma_t} u_-(s)\mathrm{Re}\frac{s+\sqrt{s^2-1}+\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}{s+\sqrt{s^2-1}-(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})}\ \frac{ds}{i\sqrt{s^2-1}},$$

где $u_\infty(\zeta)=\widetilde{u}_0^\vee(\ln(|\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}|/R))/\ln(t/R)$, а u_+ и u_- — составляющие функции $u(\zeta)-u_\infty(\zeta)$ ($u(\zeta)-u_\infty(\zeta)=u_+(\zeta)+u_-(\zeta)$, $u_+(\zeta)$ — гармоническая внутри эллипса Γ_R, $u_-(\zeta)$ — гармоническая вне Γ_t и зануляющаяся на бесконечности).

При выполнении этих условий по аналогии с [4] можно показать, что в (16) вместо знака соответствия $\sim$ можно написать знак $=$. В частности, с таким исправлением формула (16) может быть использована для представления решения выписанной в начале работы задачи Дирихле в области $\mathbb{E}(t,R)$.

В случае кольца $\mathbb{R}_\rho$ скорость сходимости разложений гармонических в $\mathbb{R}_\rho$ функций по базису всплесков (2) оценена в [7] через наилучшие приближения E_N граничных значений функций тригонометрическими полиномами порядка N. Чтобы не вводить в случае $\mathbb{E}(t,R)$ громоздкие аппроксимации полиномами по степеням функций $\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1}$ и их комплексно-сопряженных (являющихся для $\mathbb{E}(t,R)$ аналогами гармонических полиномов в круге и кольце), мы здесь при оценке скорости сходимости ограничимся условиями Липшица, накладываемыми на функции $u(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_t}$ и $u(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_R}$ или их производные.

Перенесем сначала указанные оценки из [7] на случай кольца $\mathbb{R}_{t,R}=\{w:\ t\le|w|\le R\}$, приняв следующие обозначения. Для гармонической в $\mathbb{R}_{t,R}$ функции $v(w)$ с граничными значениями $v_t(\theta)=v(te^{i\theta})$ и $v_R(\theta)=v(Re^{i\theta})$ обозначим через $S_n(w;v)$ частичную сумму порядка n ряда

$$v(w)=v_0^\vee+\widetilde{v}_0^\vee\frac{\ln(|w|/R)}{\ln t/R}+\sum_{n=1}^{\infty}V_n(w,v), \tag{18}$$

где при $n=2^j+k$ $(j,k\in\mathbb{Z}_+,\ 0\le k\le 2^j-1)$

$$V_n(w,v)=v_{j,k}^R\mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{w}{R}\Big)+\widetilde{v}_{j,k}^R\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}\Big(\frac{w}{R}\Big)+v_{j,k}^t\mathcal{W}_{j,k}\Big(\frac{t}{w}\Big)+\widetilde{v}_{j,k}^t\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}\Big(\frac{t}{w}\Big),$$

$$v_0^\vee=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v_R(\theta)\,d\theta,\qquad \widetilde{v}_0^\vee=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}v_t(\theta)\,d\theta-v_0^\vee, \tag{19}$$

$$v_{j,k}^R=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{R}_{t,R}}v(w)\mathcal{W}_{j,k}^d\Big(\frac{w}{R}\Big)\frac{dw}{iw},\qquad v_{j,k}^t=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{R}_{t,R}}v(w)\mathcal{W}_{j,k}^d\Big(\frac{t}{w}\Big)\frac{dw}{iw},$$

$$\widetilde{v}_{j,k}^R=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{R}_{t,R}}v(w)\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}^d\Big(\frac{w}{R}\Big)\frac{dw}{iw},\qquad \widetilde{v}_{j,k}^t=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\mathbb{R}_{t,R}}v(w)\widetilde{\mathcal{W}}_{j,k}^d\Big(\frac{t}{w}\Big)\frac{dw}{iw}.$$

(В последних двух формулах тоже используются только граничные значения функции $v(w)$).

При замене $w=Rz,\ t/R=\rho$ ряд (18) по системе (4) перейдет в ряд по системе (2) с теми же коэффициентами, но теперь соответствующими граничным значениям гармонической в кольце $\mathbb{R}_\rho$ функции $v(Rz)$. Поэтому упомянутые оценки из [7] можно сформулировать как следующее (более общее, используемое в дальнейшем) утверждение, в котором приняты обозначения: $w=|w|e^{i\theta},\ \partial^l v(w)=(\partial^l/\partial\theta^l)v(|w|e^{i\theta})$.

Теорема 1. *Если граничные значения $v_t(\theta)$ и $v_R(\theta)$ гармонической в кольце $\mathbb{R}_{t,R}$ функции $v(w)$ m раз непрерывно дифференцируемы ($m\in\mathbb{Z}_+$), то для производных $\partial^l v(w)$ порядка l ($0\le l\le m$) на каждой окружности $|w|=r$ ($t\le r\le R$) при $n\ge 2$ справедливы оценки*

$$|\partial^l(v(w)-S_n(w,v))|\le\frac{C}{N^{m-l}}\Big(\Big(\frac{r}{R}\Big)^N E_N(v_R^{(m)})+\Big(\frac{t}{r}\Big)^N E_n(v_t^{(m)})\Big), \tag{20}$$

где $S_n(w,v)$ — частная сумма порядка n ряда (18), $N=N_n=[2n/3]$ и $v_R^{(m)}=(\partial^m/\partial\theta^m)\,v(Re^{i\theta})$, $v_t^{(m)}=(\partial^m/\partial\theta^m)\ v(te^{i\theta})$.

Эта теорема сформулирована не столько ради обобщения результата [7] для кольца $\mathbb{R}_\rho = R_{\rho,1}$ на кольцо $\mathbb{R}_{t,R}$, сколько для того, чтобы распространить этот результат на разложения гармонических функций в ряды по гармоническим всплескам в эллиптическом кольце $\mathbb{E}(t,R)$.

Пусть функция $U(\zeta)$ удовлетворяет на Γ_R и Γ_t условию Липшица порядка α $(0<\alpha\le 1)$: $|U(\zeta')-U(\zeta'')|\le \mathcal{K}|\zeta'-\zeta''|^\alpha$ для $\zeta',\ \zeta''$, лежащих на Γ_t и Γ_R, константа $\mathcal{K}$ не зависит от $\zeta',\ \zeta''$. Тогда для $v(w)=U(\zeta(w))$ $(\zeta(w)=(w+1/w)/2)$ будем иметь при $\tau=t$ и $\tau=R$

$$|v(\tau e^{i\theta'})-v(\tau e^{i\theta''})|\le \mathcal{K}|\zeta(\tau e^{i\theta'})-\zeta(\tau e^{i\theta''})|^\alpha$$

$$=\mathcal{K}\Big|\tau(e^{i\theta'}-e^{-i\theta''})+\frac{1}{\tau}(e^{-i\theta'}-e^{-i\theta''})\Big|^\alpha\le \mathcal{K}|\theta'-\theta''|^\alpha\Big(\tau+\frac{1}{\tau}\Big)^\alpha.$$

Т. е. функция $U(\zeta(w))$ будет удовлетворять на границах кольца $\mathbb{R}_{t,R}$ условию Липшица порядка α с константой $\mathcal{K}(R+1/R)^\alpha$.

Для гармонической в области $\mathbb{E}(t,R)$ функции $U(\zeta)$ обозначим через $\partial_\tau U(\zeta)$ производную функции $U(\zeta)$ вдоль линии уровня $|w(\zeta)|=\tau$ функции $w(\zeta)=\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}$, т. е. вдоль эллипса Γ_τ $(t\le\tau\le R)\subset\overline{\mathbb{E}(t,R)}$, и пусть $\partial_\tau^2,\ \partial_\tau^3,\dots$ — символы таких производных второго, третьего и т. д. порядка. Параметрическое уравнение Γ_τ выводится из того, что для $\zeta\in\Gamma_\tau$ имеем $\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}=\tau e^{i\theta}$, или, что равносильно, $\zeta=(\tau e^{i\theta}+1/(\tau e^{i\theta}))/2$, или в декартовых координатах $\xi=((\tau+1/\tau)\cos\theta)/2,\ \eta=((\tau-1/\tau)\sin\theta)/2$ $(-\pi\le\theta\le\pi)$. В дальнейшем, применяя запись $\zeta\in\Gamma_\tau$, будем считать, что ζ связана с τ и θ указанным только что образом.

В качестве положительного направления вдоль Γ_τ выберем направление, соответствующее возрастанию θ. Касательный вектор единичной длины к Γ_τ в точке $\zeta\in\Gamma_\tau$ — это вектор $\mathbf{T}(\zeta)$ с координатами

$$\Big(\frac{-(\tau+1/\tau)\sin\theta}{\sqrt{\tau^2-2\cos2\theta+1/\tau^2}},\ \frac{(\tau-1/\tau)\cos\theta}{\sqrt{\tau^2-2\cos2\theta+1/\tau^2}}\Big):=(\mathbf{T}_\xi,\mathbf{T}_\eta).$$

Поэтому $\partial_\tau U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}=\partial_\tau U(\zeta,\eta)=\mathbf{T}_\xi U'_\xi(\zeta,\eta)+\mathbf{T}_\eta U'_\eta(\zeta,\eta)$. Функции $U(\zeta)=U(\zeta,\eta)$, гармонической в эллиптическом кольце $\mathbb{E}(t,R)$, соответствует функция $U(\zeta(w))$, гармоническая в кольце $\mathbb{R}_{t,R}=\{w\colon\ t<|w|<R\}$, где $\zeta(w)=(w+1/w)/2$, а условие $\zeta\in\Gamma_\tau$ эквивалентно тому, что $w=\tau e^{i\theta}$. Поэтому, обозначая декартовы координаты точки ζ на комплексной плоскости через (ξ,η), будем иметь

$$U(\zeta(w))\Big|_{w=\tau e^{i\theta}}=U(\xi(w),\eta(w))=U\Big(\big((\tau+1/\tau)\cos\theta\big)/2,\ \big((\tau-1/\tau)\sin\theta\big)/2\Big).$$

Так что

$$\frac{\partial}{\partial\theta}U(\zeta(\tau e^{i\theta}))=\Big(U'_\xi(\xi,\eta)(\tau+1/\tau)(-\sin\theta)+U'_\eta(\xi,\eta)(\tau-1/\tau)\cos\theta\Big)/2,$$

где $\xi\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}=\xi(\theta)=\big((\tau+1/\tau)\cos\theta\big)/2,\ \eta\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}=\eta(\theta)=\big((\tau-1/\tau)\sin\theta\big)/2$. Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}U(\zeta(\tau e^{i\theta}))=\lambda(\tau,\theta)\partial_\tau U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau},\tag{21}$$

где множитель $\lambda(\tau,\theta)=\sqrt{\tau^2+1/\tau^2-2\cos2\theta}/2$ при $1\le t\le\tau\le R$ принадлежит интервалу $((\tau-1/\tau)/2,\ (\tau+1/\tau)/2)\subset((t-1/t)/2,\ (R+1/R)/2)$, а при $\tau=t=1$ имеем $\lambda(\tau,\theta)=\sin\theta$. Отсюда видно, что если граничные значения функции $U(\zeta)$ на границах Γ_R и Γ_t дифференцируемы вдоль границы и производные $\partial_t U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_t}$ и $\partial_R U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_R}$ удовлетворяют условию Липшица порядка α с константой $\mathcal{K}$, то производные $(\partial/\partial\theta)U(\zeta(\tau e^{i\theta}))$ при $\tau=t$ и $\tau=R$ тоже будут удовлетворять условию Липшица порядка α с конечной константой $\mathcal{K}_1=\mathcal{K}_1(\mathcal{K},U)\le 4\max_{\zeta\in\Gamma_t\cup\Gamma_R}|\partial_\tau U(\zeta)|+\mathcal{K}(R+1/R)$. Если же о производных $\partial_t U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_t}$ и $\partial_R U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_R}$ известно только, что они ограничены, то сами граничные значения функции $U(\zeta(w))$ при $|w| = t$ и $|w| = R$ будут удовлетворять условию Липшица первого порядка с константой $(R + 1/R)\max_{\zeta\in\Gamma_t\cup\Gamma_R} |\partial_\tau U(\zeta)|$. Более того, так как $\lambda(1,\theta) = \sin\theta$, то при $t = 1$ этот факт остается верным, даже если производные граничных значений функции $U(\zeta)$ на берегах разреза по отрезку $[-1,1]$ растут до бесконечности при приближении точек ζ к концам отрезка $[-1,1]$, лишь бы совпадающая с $\sin\theta|(\partial/\partial\xi)U(\xi(\theta),0)|$ функция $\sin\theta|\partial_\tau U(\zeta)|$ при $\tau = 1$ и $\zeta = \cos\theta \in [-1,1]$ была ограниченной (здесь $\zeta(\theta) = \cos\theta$ при θ, убывающем от π до $-\pi$, пробегает верхнюю и нижнюю границы разреза $[-1,1]$ в положительном относительно области $\mathbb{E}(1,R)$ направлении).

При $\tau \in (t,R)$ гармоническая функция $U(\zeta)$ дифференцируема по ξ и η ($\zeta = \xi + i\eta$) бесконечное число раз. В частности, из (21) имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}U(\zeta(\tau e^{i\theta})) = \frac{\sin 2\theta}{2\lambda(\tau,\theta)}\partial_\tau U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau} + \frac{1}{2}\sqrt{\tau^2 + \frac{1}{\tau^2} - 2\cos 2\theta}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\partial_\tau U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}$$

$$= \frac{\sin 2\theta}{2\lambda(\tau,\theta)}\partial_\tau U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau} + \lambda^2(\tau,\theta)\partial_\tau^2 U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}. \qquad (22)$$

Эта же формула будет справедлива и для $\tau = t \geq 1$ и $\tau = R$, если граничные значения функции $U(\zeta)$ в $\mathbb{E}(t,R)$ будут дважды дифференцируемыми вдоль границы. В случае, когда вторые производные $\partial_\tau^2 U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}$ при $\tau = t \geq 1$ и $\tau = R$ будут принадлежать классу $\mathcal{K}\,\mathrm{Lip}\,\alpha$, производные $(\partial^2/\partial\theta^2)U(\zeta(|w|e^{i\theta}))$ при $|w| = t$ и $|w| = R$ тоже будут удовлетворять условию Липшица порядка α с константой $\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2(\mathcal{K}, \|\partial_\tau U\|_{C(\partial\mathbb{E}(t,R))}, \|\partial_\tau^2 U\|_{C(\partial\mathbb{E}(t,R))})$.

Кроме того, и тут для сохранения отмеченных результатов при $t = 1$ и $\zeta \to \pm 1$ разрешается рост вторых производных $\partial_\tau^2 U$ (вплоть до порядка $1/\sin\theta$ при ограниченности первых производных $\partial_\tau U$) без выхода функций $(\partial/\partial\theta)U(\zeta(\tau e^{i\theta}))$ при $\tau = 1$ и $\tau = R$ из класса $\mathrm{Lip}\,1$.

Ясно, что описанный процесс можно продолжить (совсем строго — по индукции) и получить следующее ниже утверждение, учтя при этом, что возникающие при повторном дифференцировании положительные и отрицательные степени функции $\lambda(\tau,\theta)$ суть гладкие ограниченные функции, равномерно отделенные от нуля при $\tau \in (t,R)$ и фиксированном $t > 1$.

Утверждение 1. *Пусть $1 < t < R$. Если гармоническая в эллиптическом кольце $\mathbb{E}(t,R)$ функция $U(\zeta)$ непрерывна в замкнутом кольце, и ее граничные значения m раз непрерывно дифференцируемы вдоль границы, а соответствующие производные $\partial_\tau^m U(\zeta)$ при $\tau = t$, $\zeta \in \Gamma_t$ и $\tau = R$, $\zeta \in \Gamma_R$ удовлетворяют условию Липшица порядка α, то функция $U(\zeta(w))\Big|_{w=\tau e^{i\theta}}$ $(t \leq \tau \leq R)$ также m раз непрерывно дифференцируема по θ, а производные $U_\theta^{(m)}(\zeta(\tau e^{i\theta}))$ $(t \leq \tau \leq R)$ как функции θ принадлежат $\mathcal{K}\mathrm{Lip}\,\alpha$ с константами, зависящими от норм всех производных $\partial_\tau^l U(\zeta)$ $(1 \leq l \leq m)$ в метрике $C(\mathbb{E}(t,R))$. Если $|U(\zeta) - U(\zeta')| < \mathcal{K}|\zeta - \zeta'|^\alpha$ на Γ_t и Γ_R $(1 \leq t < R)$, то $|U(\zeta(\tau e^{i\theta}) - U(\zeta(\tau e^{i\theta'}))| \leq \mathcal{K}(\tau + 1/\tau)^\alpha|\theta - \theta'|^\alpha$, а из условий $U_\tau\Big|_{\Gamma_R} \in \mathcal{K}\mathrm{Lip}\,\alpha$, $|\sin\theta|U_\tau(\zeta(e^{i\theta})) \in \mathcal{K}\mathrm{Lip}\,\alpha$ следует, что $U'_\theta(\zeta(\tau e^{i\theta})) \in (\mathcal{K}(R+1/R)+4\|U_\tau\|_{C(\mathbb{E}(1,R))})\mathrm{Lip}\,\alpha$.*

Формулировать специфическое влияние концов разреза по отрезку $[-1,1]$ на гладкость производных $U_\theta^{(m)}(\zeta(\tau e^{i\theta}))$ при $m > 1$ мы не будем из-за громоздкости строгого обоснования свойств, аналогичных отмеченным выше при $m = 0$ и $m = 1$ и, как нам представляется, наиболее важным.

После проведенного анализа легко доказать следующие ниже утверждения, в которых для элементов ряда (16) с коэффициентами, определяемыми в (17) по граничным значениям функции $U(\zeta)$ в области $\mathbb{E}(t,R)$, приняты обозначения:

$$\mathcal{E}_0(\zeta,u) = \widehat{u}_0 + \widetilde{u}_0\frac{\ln(|\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}|/R)}{\ln(t/R)},$$

а для $n = 2^j + k$ $(0 \le k < 2^j,\ j,k \in \mathbb{Z}_+)$

$$\mathcal{E}_n(\zeta,u) = \sum_{k=0}^{2^j-1}\Big(u^R_{j,k}\mathcal{E}^R_{j,k}(\zeta) + \widetilde{u}^R_{j,k}\widetilde{\mathcal{E}}^R_{j,k}(\zeta) + u^t_{j,k}\mathcal{E}^t_{j,k}(\zeta) + \widetilde{u}^t_{j,k}\widetilde{\mathcal{E}}^t_{j,k}(\zeta)\Big).$$

Ниже под $\overline{\mathbb{E}(1,R)}$ понимается эллипс вместе с границей, состоящей из эллипса Γ_R и берегов разреза Γ_1 по отрезку $[-1,1]$. Непрерывная в $\overline{\mathbb{E}(1,R)}$ функция на разных берегах разреза может иметь различные значения. Расстояние между $\zeta', \zeta'' \in \Gamma_1$ измеряется вдоль границы разреза.

Теорема 2. *Если гармоническая в эллиптическом кольце $\mathbb{E}(t,R)$ функция $U(\zeta)$ непрерывна в замыкании $\overline{\mathbb{E}(t,R)}$, то она представима рядом* (16), *который сходится к ней в $\overline{\mathbb{E}(t,R)}$ равномерно. Если дополнительно функция $U(\zeta)$ удовлетворяет на компонентах границы кольца $\overline{\mathbb{E}(t,R)}$ условиям Липшица порядка α $(0 < \alpha \le 1)$ с константой $\mathcal{K}$, то для частных сумм*

$$S^E_n(\zeta,u) = \sum_{m=0}^{n}\mathcal{E}_m(\zeta,u)$$

порядка n ряда (16) *на каждом эллипсе Γ_τ $(1 \le t \le \tau \le R)$ справедливы оценки*

$$|U(\zeta) - S^E_n(\zeta,u)|_{\zeta\in\Gamma_\tau} \le \Big(R + \frac{1}{R}\Big)^\alpha \frac{\mathcal{K}}{N_n^\alpha}\Big(\Big(\frac{\tau}{R}\Big)^{N_n} + \Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{N_n}\Big),$$

где $n \ge 2$, $N_n = [2n/3]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая формулы (4), (5), (8), (10)–(19), видим, что после замены $\zeta + \sqrt{\zeta^2-1} = w$ $(\zeta = (w+1/w)/2)$ функция $U(\zeta)$ перейдет в функцию $v(w) = u(\zeta(w))$, гармоническую в кольце $\mathbb{R}_{t,R}$, коэффициенты ряда (16) совпадут с коэффициентами ряда (18), рассчитываемыми по функции $v(w) = u(\zeta(w))$, а весь ряд (16) перейдет в ряд (18). При этом мы будем иметь тождество $|v(\tau e^{i\theta}) - S_n(\tau e^{i\theta}, v)| = |U(\zeta) - S^E_n(\zeta,u)|_{\zeta\in\Gamma_\tau}$ $(t \le \tau \le R)$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает, что $S^E_n(\zeta,u)$ в замкнутом эллиптическом кольце $\mathbb{E}(t,R)$ равномерно сходится к $U(\zeta)$. Далее, как было показано выше, из условия $|U(\zeta) - U(\zeta')| \le \mathcal{K}|\zeta-\zeta'|^\alpha$ для $\zeta,\zeta' \in \partial\mathbb{E}(t,R)$ вытекает, что $v(w) = u(\zeta(w))$ на границе кольца $\mathbb{R}_{t,R}$ удовлетворяет условию Липшица порядка α с константой $\mathcal{K}(R+1/R)^\alpha$. Отсюда и из второй части теоремы 1 при $m = 0$ (и $l = 0$) вытекает оценка из теоремы 2. □

Следствие 1. *Пусть функция $U(\zeta)$, гармоническая в эллипсе $\mathbb{E}(1,R)$ с разрезом по отрезку $[-1,1]$, непрерывна в $\overline{\mathbb{E}(1,R)}$ и производные $\partial_\tau U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_R}$ вдоль компоненты Γ_R границы $\mathbb{E}(1,R)$ ограничены, а производные $\partial_\tau U(\zeta^+) = -(\partial/\partial\xi)U(\xi,+0)$ и $\partial_\tau U(\zeta^-) = (\partial/\partial\xi)U(\xi,-0)$ на верхнем и нижнем берегах разреза, если и растут у концов отрезка $[-1,1]$, то не быстрее, чем $1/|\sqrt{1-\zeta^2}|$* (т. е. $\big|\partial_\tau U(\zeta)|_{\Gamma_1}\sqrt{1-\zeta^2}\big| \le \mathcal{K}$ для некоторого положительного числа $\mathcal{K}$). Тогда на каждом эллипсе Γ_τ $(1 \le \tau \le R)$ справедливы оценки

$$|U(\zeta) - S^E_n(\zeta,U)| \le \frac{\mathcal{K}}{N_n}\Big(\Big(\frac{\tau}{R}\Big)^{N_n} + \Big(\frac{1}{\tau}\Big)^{N_n}\Big) \qquad \Big(n \ge 2,\ N_n = [2n/3]\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как показано выше, $(\partial/\partial\theta)\,U(\zeta(\tau e^{i\theta})) = \lambda(\tau,\theta)\partial_\tau U(\zeta)\Big|_{\tau=1} = |\sin\theta|\partial_\tau U(\zeta) = \pm\sqrt{1-\zeta^2}\partial_\tau U(\zeta)$. Поэтому при условиях следствия выполняется включение $U(\zeta) \in \mathcal{K}\mathrm{Lip}\,1$ в $\mathbb{E}(1,R)$. Дальше работает теорема 2. □

Теорема 3. *Если $t > 1$ и на границе области $\mathbb{E}(t,R)$ производные $\partial_\tau U(\zeta)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}$ при $\tau = t$ и $\tau = R$ удовлетворяют условию Липшица порядка α с константой $\mathcal{K}$, то при любом $\tau \in [t,R]$ справедливы оценки*

$$|\partial_\tau(U(\zeta) - S^E_n(\zeta,U))| \le \frac{M}{N_n^\alpha}\Big(\Big(\frac{\tau}{R}\Big)^{N_n} + \Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{N_n}\Big) \qquad (\zeta \in \Gamma_\tau,\ n \ge 2),$$

где $N_n = [2n/3]$, а $M = M(\mathcal{K})$ — константа, не зависящая от U и ζ.

Справедливость этого предложения вытекает из утверждения 1 и теоремы 1, так как в силу (21)

$$|\partial_\tau(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U))| \le \frac{1}{\min\limits_{\theta,\tau} \lambda(\tau,\theta)} |\lambda(\tau,\theta)\partial_\tau\big(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U)\big)|$$

$$= \frac{1}{\min\limits_{\theta,\tau} \lambda(\tau,\theta)} \Big| \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(U(\zeta(\tau e^{i\theta})) - S_n(\zeta(\tau e^{i\theta}), U)\Big)\Big|.$$

Теорема 4. *Пусть у гармонической в эллипсе $\mathbb{E}(1,R)$ с разрезом по отрезку $[-1,1]$ функции $U(\zeta)$ граничные значения дифференцируемы вдоль границы и функция $\sqrt{1-\zeta^2}\partial_\tau U(\zeta)$ на берегах разреза Γ_1 и на эллипсе Γ_R удовлетворяет условию Липшица порядка α с константой $\mathcal{K}$. Тогда при $n \ge 2$ на любом эллипсе Γ_τ $(1 \le \tau \le R)$ справедлива оценка*

$$\Big|\sqrt{1-\zeta^2}\partial_\tau(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U))\Big| \le \frac{C(\mathcal{K})}{N_n^\alpha}\Big(\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{N_n} + \Big(\frac{\tau}{R}\Big)^{N_n}\Big), \quad \zeta \in \Gamma_\tau$$

с конечной константой $C(\mathcal{K})$ и $N_n = [2n/3]$.

Доказательство. Так как $|2\sqrt{1-\zeta^2}| = |\zeta + \sqrt{\zeta^2-1} - (\zeta - \sqrt{\zeta^2-1})| = |(\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}) - (\zeta + \sqrt{\zeta^2-1})^{-1}| = |w(\zeta) - 1/w(\zeta)|$, где $\zeta = \zeta(w) = (w + 1/w)/2$, то при $\zeta \in \Gamma_\tau$ $|2\sqrt{1-\zeta^2}| = |\tau e^{i\theta} - (1/\tau)e^{-i\theta}| = \sqrt{\tau^2 + 1/\tau^2 - 2\cos 2\theta} = 2\lambda(\tau,\theta)$. Поэтому из условия теоремы и формулы (21) следует, что функция $v(w) = U(\zeta(w))$ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $m = 1$ и, кроме того, при $\zeta \in \Gamma_\tau$ имеем

$$\Big|\sqrt{1-\zeta^2}\partial_\tau(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U))\Big| = |\lambda(\tau,\theta)\partial_\tau(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U))| = \Big|\frac{d}{d\theta}\Big(v(\tau e^{i\theta}) - S_n(\tau e^{i\theta}, v)\Big)\Big|.$$

Отсюда и из теоремы 1 вытекает требуемое утверждение, так как в (18) $v'_\theta(\tau e^{i\theta}) \in \mathcal{K}\,\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\tau = 1$ и $\tau = R$, и по теореме Джексона $E_N(v'_\theta(\tau e^{i\theta})) \le C/N^\alpha,\ N \in \mathbb{N}$.

Теорема 5. *Пусть $t > 1$, $N_n = [2n/3]$, $U(\zeta)$ гармоническая в эллиптическом кольце $\mathbb{E}(t,R)$ функция, непрерывная в $\overline{\mathbb{E}(t,R)}$ и ее граничные значения на компонентах Γ_t, Γ_R m раз непрерывно дифференцируемы вдоль границы, а их производные порядка m удовлетворяют условию Липшица порядка α. Тогда найдется положительная константа $C = C(t,R,m,U)$ такая, что при $n \ge 2$ на каждом эллипсе Γ_τ $(t \le \tau \le R)$ будут выполняться оценки*

$$|\partial_\tau^l(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U))| \le \frac{C}{N_n^{m-l+\alpha}}\Big(\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{N_n} + \Big(\frac{\tau}{R}\Big)^{N_n}\Big), \quad \zeta \in \Gamma_\tau \quad (l = 0, 1, \dots, m). \tag{23}$$

Доказательство проведем при каждом m по индукции относительно параметра l. При $m = 0$ теорема вытекает из теоремы 2. При $m = l = 1$ теорема совпадает с теоремой 3. Пусть у гармонической в $\mathbb{E}(t,R)$ $(1 < t < R)$ функции $U(\zeta)$ производные $\partial_\tau^m U(\zeta)$ на границах Γ_t и Γ_R принадлежат классу $\mathcal{K}\,\mathrm{Lip}\,\alpha$. Тогда в силу утверждения 1 у гармонической в $\mathbb{R}(t,R)$ функции $V(w) = U(\zeta(w))$ $(\zeta(w) = (w + 1/w)/2)$ производные $(\partial^m/\partial\theta^m)V(\tau e^{i\theta})$ на границе кольца $\mathbb{R}(t,R)$ удовлетворяют условиям Липшица порядка α, и, применяя теорему 1, при всех $l = 0, 1, \dots, m$ получаем равномерные по $\tau \in [t,R]$ и $\theta \in [0, 2\pi]$ оценки

$$\Big|\Big(\frac{\partial^l}{\partial\theta^l}\Big)\big(V(\tau e^{i\theta}) - S_n(\tau e^{i\theta}, V)\big)\Big| \le \frac{C_{l,m}}{N_n^{m-l+\alpha}}\Big(\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{N_n} + \Big(\frac{\tau}{R}\Big)^{N_n}\Big). \tag{24}$$

Как отмечалось выше, при $l = 0$ левая часть (24) совпадает с $|U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U)|_{\zeta \in \Gamma_\tau}$, и мы получаем оценку (23) при $l = 0$ и $m \ge 1$. Так как функция $\lambda(\tau,\theta)$ при фиксированном $t > 1$ равномерно отделена от нуля $(\lambda(\tau,\theta) \ge (\tau - 1/\tau) \ge (t - 1/t))$, то, применяя (21) к гармонической функции $U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U)$, получаем

$$\Big|\partial_\tau\big(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U)\big)\Big| \le \frac{1}{(t - 1/t)}\Big|\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)\big(V(\tau e^{i\theta}) - S_n(\tau e^{i\theta}, V)\big)\Big|, \quad \zeta \in \Gamma_\tau,$$

откуда и из (24) вытекает (23) при $l = 1,\ m > 1$.

Предположим, что неравенство (23) справедливо для всех производных до порядка $l-1$ включительно. Дифференцируя тождество (21) для функции $U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U)$ последовательно $l-1$ раз, получим

$$\frac{\partial^l}{\partial\theta^l}(V(\tau e^{i\theta}) - S_n(\tau e^{i\theta}, V)) = \lambda^l(\tau,\theta)\partial_\tau^l(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U))\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}$$
$$+\sum_{k=1}^{l-1} f_k(\tau,\theta)\partial_\tau^k(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U)). \tag{25}$$

Здесь функции $f_k(\tau,\theta)$ представляют собой конечные суммы степеней функции $\lambda(\tau,\theta)$ и ее производных. Следовательно,

$$|f_k(\tau,\theta)\lambda^{-l}(\tau,\theta)| \le \max_{k,\theta,\tau}|f_k(\tau,\theta)\lambda^{-l}(\tau,\theta)| = M_l(t,R) < \infty.$$

Поэтому из (25) получаем

$$|\partial_\tau^l(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U))| \le M_l(t,R)\Big\{\Big|\Big(\frac{\partial^l}{\partial\theta^l}\Big)\big(V(\tau e^{i\theta}) - S_n(\tau e^{i\theta}, V)\big)\Big|$$
$$+\sum_{k=1}^{l-1}\big|\partial_\tau^k\big(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U)\big)\big|\Big\}, \quad \zeta\in\Gamma_\tau.$$

Здесь, по предположению индукции,

$$\big|\partial_\tau^k\big(U(\zeta) - S_n^E(\zeta, U)\big)\big| \le \frac{C(m,k,t,R)}{N_n^{m-k+\alpha}}\Big(\Big(\frac{t}{\tau}\Big)^{N_n} + \Big(\frac{\tau}{R}\Big)^{N_n}\Big) \qquad (k \le l-1),$$

что вместе с оценкой (20) обеспечивает справедливость неравенства (24) для рассматриваемого l. По индукции получаем неравенство (24) при всех $l \le m$, а следовательно, и при всех $m \in \mathbb{Z}_+$. Теорема доказана. $\square$

Используем базис (10) для анализа поведения решения задачи Дирихле

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} \Delta U = f \ \text{ в } \ \mathbb{E}(t,R), \\ U|_{\Gamma_R} = U_R(\zeta), \\ U|_{\Gamma_t} = U_t(\zeta) \end{cases}$$

при стягивании контура Γ_t к разрезу Γ_1. В работе [6] аналогичная задача для кольца $\mathbb{R}_\rho = \{z\colon \rho < |z| < 1\}$ была сведена к исследованию однородного уравнения с нулевым граничным условием на внутренней границе. С помощью конформных отображений $z = w/R$ $(\rho = t/R)$, $W = \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}$ вопрос об асимптотическом разложении решения задачи (a) сводится к вопросу об асимптотике решения задачи

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} \Delta U = 0 \ \text{ в } \ \mathbb{E}(t,R), \\ U|_{\Gamma_R} = \varphi_R(\zeta), \\ U|_{\Gamma_t} = 0 \end{cases}$$

при $t \to 1$. Чтобы воспользоваться теоремами о сходимости ряда (16), будем считать, что[3] $\varphi_R(\zeta)|_{\zeta\in\Gamma_R} \in \mathcal{K}\,\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$. В связи с нулевым внутренним краевым условием ряд (16)

[3] При переходе от задачи (a) к задаче (b) с нулевыми граничными условиями и бесконечно дифференцируемой функцией f (как в [1]) соответствующая функция $\varphi_R(\zeta)$ будет бесконечно дифференцируемой вдоль Γ_R.

при представлении решения задачи (b) несколько упростится. Применяя теорему 2, выпишем это решение $U(\zeta) = U(\zeta, t, \varphi_R)$ в развернутом виде

$$U(\zeta, t, \varphi_R) = \widehat{U}_0(1 - \widetilde{\mathcal{E}}_0(\zeta)) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \Big(U^R_{j,k} \mathcal{E}^R_{j,k}(\zeta) + \widetilde{U}^R_{j,k} \widetilde{\mathcal{E}}^R_{j,k}(\zeta) + U^t_{j,k} \mathcal{E}^t_{j,k}(\zeta) + \widetilde{U}^t_{j,k} \widetilde{\mathcal{E}}^t_{j,k}(\zeta) \Big)$$

$$= U_0^{\vee} \Big(1 - \frac{\ln |(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})/R|}{\ln(t/R)} \Big)$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \Bigg\{ U^R_{j,k} \sum_{1 \le \nu < 2^{j+1}(1+\varepsilon)} \theta^{(\nu)}_{j,k} R^{-\nu} \Big[\Big(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\Big)^{\nu} + \Big(\overline{\zeta} + \sqrt{\overline{\zeta}^{\,2} - 1}\Big)^{\nu} \Big]$$

$$+ \widetilde{U}^R_{j,k} \sum_{1 \le \nu < 2^{j+1}(1+\varepsilon)} \theta^{(\nu)}_{j,k} R^{-\nu} \Big[\Big(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\Big)^{\nu} - \Big(\overline{\zeta} + \sqrt{\overline{\zeta}^{\,2} - 1}\Big)^{\nu} \Big]$$

$$+ U^t_{j,k} \sum_{1 \le \nu < 2^{j+1}(1+\varepsilon)} \theta^{(\nu)}_{j,k} t^{\nu} \Big[\Big(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\Big)^{\nu} + \Big(\overline{\zeta} - \sqrt{\overline{\zeta}^{\,2} - 1}\Big)^{\nu} \Big]$$

$$+ \widetilde{U}^t_{j,k} \sum_{1 \le \nu < 2^{j+1}(1+\varepsilon)} \theta^{(\nu)}_{j,k} t^{\nu} \Big[\Big(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\Big)^{\nu} - \Big(\overline{\zeta} - \sqrt{\overline{\zeta}^{\,2} - 1}\Big)^{\nu} \Big] \Bigg\}, \tag{26}$$

где

$$U_0^{\vee} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} \varphi_R(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}},$$

$$U^R_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} \varphi_R(\lambda) \mathcal{E}^{R,d}_{j,k}(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \qquad \widetilde{U}^R_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} \varphi_R(\lambda) \widetilde{\mathcal{E}}^{R,d}_{j,k}(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}},$$

$$U^t_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} \varphi_R(\lambda) \mathcal{E}^{t,d}_{j,k}(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}, \qquad \widetilde{U}^t_{j,k} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_R} \varphi_R(\lambda) \widetilde{\mathcal{E}}^{t,d}_{j,k}(\lambda) \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}}.$$

Отсюда и из (14), (15) видно, что коэффициенты и члены ряда (26) слабо зависят от t, при $t \to 1$ они стремятся к коэффициентам разложения решения задачи (b) по элементам базиса гармонических всплесков в $\mathbb{E}(1, R)$ — эллиптичной области со щелью $[-1, 1]$ и, следовательно, $U(\zeta, t, \varphi_R) \to U(\zeta, 1, \varphi_R)$. При этом элементы разложения предельной функции $U(\zeta, 1, \varphi_R)$ остаются непрерывными функциями в области $\mathbb{E}(1, R)$ вместе с границей, в том числе, на обоих берегах разреза. Действительно, при $\zeta \in \Gamma_\tau$ и $\tau \to 1$

$$\zeta = \frac{1}{2}\Big(\tau + \frac{1}{\tau}\Big) \cos\theta + \frac{1}{2}\Big(\tau - \frac{1}{\tau}\Big) \sin\theta \to \cos\theta, \qquad \zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} = \tau e^{i\theta},$$

$$\frac{\ln\Big(|\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}|/R\Big)}{\ln\Big(t/R\Big)} \to 1 \qquad (1 \le t < \tau),$$

$$\Big(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\Big)^{\nu} \overset{(-)}{+} \Big(\overline{\zeta} + \sqrt{\zeta^2 - 1}\Big)^{\nu} = (\tau e^{i\theta})^{\nu} \overset{(-)}{+} (\tau e^{-i\theta})^{\nu} \to 2 \overset{(i \sin)}{\cos} \nu\theta,$$

$$\Big(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\Big)^{\nu} \overset{(-)}{+} \Big(\overline{\zeta} - \sqrt{\zeta^2 - 1}\Big)^{\nu} = (\tau e^{i\theta})^{-\nu} \overset{(-)}{+} (\tau e^{-i\theta})^{-\nu} \to 2 \overset{(i \sin)}{\cos} \nu\theta,$$

так что элементы двойного ряда (26) при $1 \le t \le \tau \to 1$ не стремятся к 0 или ∞ для функций $\varphi_R(\zeta)$ общего положения, и потому ни один из них не является бесконечно малым относительно другого в процессе $t \to 1$. Но уже из сказанного видно, что при рассмотрении упрощенной по сравнению с [1] задачей для оператора Лапласа вместо эллиптического оператора общего вида (сужение областей со щелью до эллиптического кольца $\mathbb{E}(1,R)$ нам представляется не столь существенным упрощением задачи) в разложении $U(\zeta,t,\varphi_R)$ не возникает, как в [1], членов с отрицательными степенями функций $\sqrt{1-\zeta^2}$ и $\ln|\sqrt{1-\zeta^2}|$. Положительные степени $(\sqrt{1-\zeta^2})^l$ можно, конечно, получить, разлагая функции $(\zeta\pm\sqrt{\zeta^2-1})^\nu$ и их сопряженные по биному Ньютона и группируя соответствующим образом слагаемые всего двойного ряда. Отрицательные степени тоже искусственно можно ввести, разлагая сравнительно простую функцию $\ln|(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})/R|$ в ряд

$$\ln\Big|\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{R}\Big|+\ln(e^{-i\theta})+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l}\Big(\frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2-1}}\Big)^l.$$

Но оба такие преобразования представляют собой искусственное нагнетание несуществующих особенностей и вряд ли целесообразны.

Другое дело, если вести речь о поведении производных $\partial_\tau U(\zeta,t,\varphi_R)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}$ при $1\le t\le\tau\to 1$. Из теоремы 4 вытекает, что ряд (26) можно дифференцировать вдоль линий Γ_τ при всех $\tau\in[1,R)$ почленно, кроме концевых точек разреза при $\tau=t=1$. В результате, учитывая, что $\lambda(\tau,\theta)=|\sqrt{\zeta^2-1}|$, получаем

$$|\sqrt{\zeta^2-1}|\partial_\tau U(\zeta,t,\varphi_R)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^j-k}\Big[U^R_{j,k}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{E}^R_{j,k}(\zeta(\tau e^{i\theta}))+\widetilde{U}^R_{j,k}\frac{\partial}{\partial\theta}\widetilde{\mathcal{E}}^R_{j,k}(\zeta(\tau e^{i\theta}))$$
$$+U^t_{j,k}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{E}^t_{j,k}(\zeta(\tau e^{i\theta}))+\widetilde{U}^t_{j,k}\frac{\partial}{\partial\theta}\widetilde{\mathcal{E}}^t_{j,k}(\zeta(\tau e^{i\theta}))\Big].\tag{27}$$

Здесь коэффициенты те же, что в (26), а так как в силу (10), (11) и (4) $\overset{(\sim)}{\mathcal{E}}{}^R_{j,k}(\zeta(\tau e^{i\theta}))=\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}(\tau e^{i\theta}/R)$, $\overset{(\sim)}{\mathcal{E}}{}^t_{j,k}(\zeta(\tau e^{i\theta}))=\overset{(\sim)}{\mathcal{W}}_{j,k}(t/(\tau e^{i\theta}))$, то по теореме 1 ряд справа сходится равномерно относительно t,τ,θ при $1\le t\le\tau\le R<\infty$, $\theta\in[-\pi,\pi]$. Следовательно, справедлива

Теорема 6. *Если $U(\zeta,t,\varphi_R)$ — решение задачи Дирихле в эллиптическом кольце $\mathbb{E}(t,R)$ $(1\le t<R)$, то производная $\partial_t U(\zeta,t,\varphi_R)\Big|_{\zeta\in\Gamma_\tau}$ в замыкании области $\mathbb{E}(t,R)$ при $t>1$ равномерно непрерывна и при стягивании эллипса Γ_τ вместе с эллипсом Γ_t к разрезу по отрезку $[-1,1]$ неограниченно растет, причем как $O(1/|\sqrt{\zeta^2-1}|)$, только при ζ, стремящемся к концам разреза.*

В заключение отметим, что члены ряда (26), заключенные в фигурные скобки, убывают с ростом j при $\zeta\in\Gamma_\tau$, как $O\Big((\tau/R)^{2^j(1-\varepsilon)}+(t^2/(\tau R))^{2^j(1-\varepsilon)}\Big)$. Перегруппировав ряд в виде

$$U(\zeta,t,\varphi_R)=U_0^\vee\Big(1-\frac{\ln|(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1})/R|}{\ln(t/R)}\Big)+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{2^j-1}U^t_{j,k}\mathcal{E}^t_{j,k}(\zeta)+\widetilde{U}^t_{j,k}\widetilde{\mathcal{E}}^t_{j,k}(\zeta)\right]$$
$$+\sum_{j=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{2^j-1}U^R_{j,k}\mathcal{E}^R_{j,k}(\zeta)+\widetilde{U}^R_{j,k}\widetilde{\mathcal{E}}^R_{j,k}(\zeta)\right],\tag{28}$$

получим два ряда с различными скоростями убывания при $j\uparrow\infty$. Выделенные в квадратные скобки члены первого ряда убывают не медленнее, чем $O(t^2/(\tau R))^{2^j(1-\varepsilon)})$, а члены второго — не медленнее, чем $O((\tau/R)^{2^j(1-\varepsilon)})$. В этом смысле разложение (28) можно считать разложением на два асимптотических по параметру $j\uparrow\infty$ (и равномерно сходящихся в $\overline{\mathbb{E}(t,R)}$) ряда.

Зависимость членов ряда, включая логарифмический член, от малого параметра $t-1\to 0$, как отмечалось выше, некритичная. Это же верно и для членов двойного ряда (27). Конечно, используя методику работ [5] и [6], можно исследовать асимптотику разности $U(\zeta, t, \varphi_R) - U(\zeta, 1, \varphi_R)$ относительно малого параметра $t-1 \to 0$ (при фиксированном τ) и относительно $t-1$, стремящемся к нулю вместе с $\tau - 1$ $(t-1 < \tau - 1 \to 0)$, но этого не позволяет объем работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Краевая задача для эллиптического уравнения в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай // Мат. сб. 1977. Т. 99(141), № 4. С. 514–537.
2. **Ильин А.М.** Краевая задача для эллиптического уравнения в области с узкой щелью. 2. Область с малым отверстием // Мат. сб. 1977. Т. 103(145), № 2. С. 265–284.
3. **Михлин С.Г.** Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.
4. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески в пространствах гармонических функций // Изв. РАН. Сер. мат. 2000. Т. 64, № 1. С. 145–174.
5. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески и асимптотика решения задачи Дирихле в круге с малым отверстием // Мат. моделирование. 2002. Т. 14, № 5. С. 17–30.
6. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Всплески периодические, гармонические и аналитические в круге с нецентральным отверстием // Тр. Междунар. лет. мат. шк. С. Б. Стечкина по теории функций. Тула: Изд-во ТулГУ, 2007. С. 129–144.
7. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Гармонические всплески в краевых задачах // Тр. Междунар. семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби”, посвящ. 60-летию акад. А. И. Субботина. Екатеринбург: Изд-во УрГУ, 2006. Т. 1. С. 38–47.

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Поступила 21.02.2009

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Ин-т математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Chernykh@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

УДК 517.956.8

ИНВАРИАНТЫ И МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА[1]

В. А. Юдин

На различных компактах из $\mathbb{R}^n$ строятся новые многомерные аналоги наименее уклоняющихся от нуля алгебраических многочленов (многочленов Чебышева). Дается краткий обзор построенных ранее. Приводятся оценки наилучших приближений, полученных посредством использования экстремальных сигнатур, решеток и конечных групп.

Ключевые слова: решетки, инварианты, дизайны, наилучшие приближения.

V. A. Yudin. Invariants and Chebyshev polynomials.

On different compact sets from $\mathbb{R}^n$, new multidimensional analogs of algebraic polynomials of least deviation from zero (the Chebyshev polynomials) are constructed. A brief review of the analogs constructed earlier is given. Estimates of best approximations obtained by using extremal signatures, lattices, and finite groups are presented.

Keywords: lattices, invariants, designs, best approximations.

Введение

Основная тема статьи относится к работам Чебышева и его учеников [1, 2], в которых построены алгебраические многочлены (сокращенно АМ) $a_0t^q+a_1t^{q-1}+\ldots+a_q$, $a_0=1$, наименее уклоняющиеся от нуля в пространствах $C[-1,1]$ и $L(-1,1)$. Наша цель состоит в конструировании многомерных аналогов этих многочленов.

Введем необходимые обозначения. Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $xy=x_1y_1+\ldots+x_ny_n$ — скалярное произведение векторов x и y, $|x|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$; $\mathcal{K}$ — компактное множество из $\mathbb{R}^n$. Через A_q^n обозначим совокупность однородных АМ степени q

$$\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=q} a_\nu x^\nu, \qquad x^\nu=x_1^{\nu_1}\cdots x_n^{\nu_n},$$

а через P_q^n — множество всех АМ степени не выше q. Для любой непрерывной на $\mathcal{K}$ функции $f(x)$ через

$$E_{q-1}(f)=\inf_{p\in P_{q-1}^n}\max_{x\in\mathcal{K}}|f(x)-p\,(x)|=\inf_{p\in P_{q-1}^n}\|f(x)-p\,(x)\|_{C(\mathcal{K})}, \qquad q\in\mathbb{N}, \tag{0.1}$$

обозначим последовательность наилучших приближений функции $f(x)$. Аналогично, через

$$E_{q-1}(f)=\inf_{p\in P_{q-1}^n}\left\{\frac{1}{\mathrm{mes}\,\mathcal{K}}\int\limits_{\mathcal{K}}|f(x)-p\,(x)|^p dx\right\}^{1/p}=\inf_{p\in P_{q-1}^n}\|f(x)-p\,(x)\|_{L_p(\mathcal{K})} \tag{0.2}$$

определяется наилучшее приближение $f(x)$ в пространстве $L_p(\mathcal{K})$, $1\le p<\infty$. В частном случае, когда $f(x)\in A_q^n$, вместо $E_{q-1}(f)$ будем писать просто $E(f)$. В качестве $\mathcal{K}$ будем использовать следующие компакты: $Q^n=\{x\in\mathbb{R}^n:\ -1\le x_j\le 1,\ j=1,\ldots,n\}$ — единичный куб, $\mathbb{T}^n=\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор, $\mathbb{B}^n=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|\le 1\}$ и $\mathbb{S}^{n-1}=\{x\in\mathbb{R}^n:\ |x|=1\}$ — единичные шар и сфера.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00598).

В работе будут рассмотрены лишь те методы исследования, которые приводят к точному вычислению наилучших приближений. В многомерном случае исследования начинались для простейших АМ — мономов x^ν [3–8]. Основным способом получения результатов являлся метод экстремальных сигнатур [3]. Сигнатура σ есть функция, заданная на конечном множестве $W = \{w_k\}_1^N$, $W \subset \mathcal{K}$, и принимающая всего два значения: $+1$ и -1. Сигнатура σ называется *экстремальной* для P_q^n, если найдутся неотрицательные числа $\{p_k\}_1^N$, не все равные нулю, такие, что равенство

$$\sum_{k=1}^{N} p_k \sigma(w_k) f(w_k) = 0 \tag{0.3}$$

справедливо для любого АМ $f \in P_q^n$. Приведем характеризационное утверждение, позволяющее в большом количестве случаев [3–10] точно вычислить наилучшее приближение в пространстве $C(\mathcal{K})$.

Теорема 1. *Элемент $p^*(x) \in P_q^n$ есть алгебраический многочлен наилучшего приближения для непрерывной функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда для P_q^n существует экстремальная сигнатура* (0.3) *такая, что для любой точки w из W выполняется равенство*

$$\operatorname{sign}\,[f(w) - p^*(w)] = \sigma(w).$$

С этой теоремой близко связана следующая оценка снизу наилучших приближений.

Утверждение 1. *Пусть две кубатурные формулы*

$$\sum_{k=1}^{M} p_k h(w_k) = \sum_{k=1}^{M} p_k h(w'_k) = \frac{1}{\operatorname{mes} \mathcal{K}} \int\limits_{\mathcal{K}} h(x)dx \tag{0.4}$$

с одинаковыми неотрицательными весами $\{p_k\}_1^M$, $\sum_{k=1}^M p_k = 1$, и двумя системами узлов $\{w_k\}_1^M$, $\{w'_k\}_1^M$ из $\mathcal{K}$ справедливы для любого АМ *из P_q^n, $q \in \mathbb{N}$. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$ справедливо неравенство*

$$E_q(f)_{C(\mathcal{K})} \geq \frac{1}{2} \left| \sum_{1}^{M} p_k \left[f(w_k) - f(w'_k) \right] \right|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольного АМ $h(x) \in P_q^n$ из (0.4) находим

$$\sum_{1}^{M} p_k \left[f(w_k) - f(w'_k) \right] = \sum_{1}^{M} p_k \left[f(w_k) - h(w_k) \right] - \sum_{1}^{M} p_k \left[f(w'_k) - h(w'_k) \right],$$

откуда

$$\sum_{1}^{M} p_k \left[f(w_k) - f(w'_k) \right] \leq \sum_{1}^{M} p_k \left| f(w_k) - h(w_k) \right| + \sum_{1}^{M} p_k \left| f(w'_k) - h(w'_k) \right| \leq 2E_q(f). \qquad \square$$

Конечно, легко просматривается связь между теоремой 1 и теоремой Чебышева об альтернансе [1], а также между утверждением 1 и нижней оценкой наилучших приближений Валле Пуссена [11].

Второй способ получения точных значений, скорее, алгебраический; он основан на применении конечных групп. Идейная сторона вопроса давно известна в связи с построениями кубатурных формул и исследованиями по дискретной математике. Введение понятий сдвига на торе $\mathbb{T}^n$ и вращения на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ позволяет построить бесконечные семейства как тригонометрических, так и алгебраических полиномов, для которых находятся точные значения наилучших приближений в пространствах $L_p(\mathbb{T}^n)$ и $L_p(Q^n)$, $1 \le p \le \infty$. В работе [12] приведено иное доказательство чебышевской теоремы (о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля) без использования теоремы об альтернансе. Оно основано на свойствах группы вращения правильного q-угольника и с небольшим отличием получено ранее С. Н. Бернштейном [13, 14].

Многомерные результаты в пространствах $L_p(\mathbb{S}^{n-1})$ и $L_p(\mathbb{B}^n)$, $1 \le p \le \infty$, получены [12] этим методом, который излагается далее вместе с примерами и обзором других результатов. Автор пытался следовать применительно к теории приближения функций яркой статье [15], в которой дано приложение теории инвариантов групп к теории кодирования.

1. Приближение на торе и на кубе

1.1. Приближение тригонометрическими полиномами на торе

Через X обозначим одно из пространств $L_p(\mathbb{T}^n)$, $p \ge 1$, с нормой

$$\|f(\alpha)\|_X = \|f\|_p = \left\{ \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(\alpha)|^p d\alpha \right\}^{1/p}.$$

Под $L_\infty(\mathbb{T}^n)$ понимаем пространство непрерывных функций $C(\mathbb{T}^n)$. Через

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}_\nu e^{2\pi i \nu \alpha} \qquad \left(\widehat{f}_\nu = \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\alpha) e^{-2\pi i \nu \alpha} d\alpha \right)$$

обозначим ряд Фурье функции $f(\alpha)$ из X. Если коэффициенты Фурье $\widehat{f}_\nu$ функции $f(\alpha)$ равны нулю при всех ν, не принадлежащих множеству $M \subset \mathbb{Z}^n$, то для краткости будем использовать обозначение $\operatorname{sp} f \subset M$.

Пусть $W = \{\alpha^{(k)}\}_{k=1}^N$ — конечное множество точек из $\mathbb{T}^n$; гармоника $e^{2\pi i \nu \alpha}$ называется *инвариантной* для W, если для всех α из $\mathbb{T}^n$ выполняется

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu (\alpha - \alpha^{(k)})} \equiv e^{2\pi i \nu \alpha}. \tag{1.1}$$

Отметим, что для любого W существует по крайней мере одна инвариантная гармоника — единица (она называется *тривиальной*), но больше их может и не быть уже для W, состоящего всего из двух точек. Через $I(W)$ обозначим множество точек $\nu \in \mathbb{Z}^n$, для которых $e^{2\pi i \nu \alpha}$ есть инвариантная гармоника, а через $Z(W)$ обозначим множество точек $\nu \in \mathbb{Z}^n$, при которых левая часть (1.1) обращается в нуль:

$$I(W) = \left\{ \nu \in \mathbb{Z}^n : \ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu (\alpha - \alpha^{(k)})} \equiv e^{2\pi i \nu \alpha} \right\}, \tag{1.2}$$

$$Z(W) = \left\{ \nu \in \mathbb{Z}^n : \ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \nu (\alpha - \alpha^{(k)})} \equiv 0 \right\}. \tag{1.3}$$

Теорема 2. *Для любого конечного множества W из $\mathbb{T}^n$ и любой функции $f(\alpha)$ из X, $\operatorname{sp} f \subset I(W)$, справедливо равенство*

$$E(f)_X := \inf_{g \in X, \ \operatorname{sp} g \subset Z(W)} \|f(\alpha) - g(\alpha)\|_X = \|f(\alpha)\|_X. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале получим оценку снизу для $E(f)_X$. В силу (1.1)–(1.3)

$$f(\alpha) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\alpha - \alpha^{(k)}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Big[f(\alpha - \alpha^{(k)}) - g(\alpha - \alpha^{(k)})\Big].$$

По неравенству Минковского найдем

$$\|f(\alpha)\|_X = \left\|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\alpha - \alpha^{(k)})\right\|_X \le \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\|f(\alpha - \alpha^{(k)}) - g(\alpha - \alpha^{(k)})\|_X.$$

Так как норма в X не зависит от сдвига, то для любых функций $f(\alpha)$, $g(\alpha)$, удовлетворяющих условиям теоремы, выполняется соотношение (оценка снизу)

$$\|f(\alpha)\|_X \le \|f(\alpha) - g(\alpha)\|_X.$$

Выбирая $g(\alpha) \equiv 0$, получаем и оценку сверху: $E(f)_X \le \|f(\alpha)\|_X$. Теорема доказана. $\square$

В дальнейшем будем рассматривать лишь решетчатые множества W (определение которых приведено ниже). Пусть L — невырожденная решетка [16] из $\mathbb{R}^n$, порожденная n линейно независимыми векторами $e_1, \ldots, e_n$, все координаты которых являются целыми числами. Составим из координат векторов $e_1, \ldots, e_n$ матрицу B; тогда $L = B\mathbb{Z}^n$. Через

$$L' = \{\mu \in \mathbb{R}^n : \ \nu\mu \in \mathbb{Z} \ \ \forall \nu \in L\}$$

обозначим решетку, сопряженную к L, т. е. $L' = (\mathbb{B}^{-1})'\mathbb{Z}^n$. Так как определители $d(L)$, $d(L')$ (их модули суть объемы фундаментальных параллелепипедов) связаны соотношением

$$d(L')d(L) = 1,$$

то все координаты базисных векторов $e'_1, \ldots, e'_n$ сопряженной решетки L' будут рациональными числами. Перечисленные краткие сведения из геометрии чисел можно найти в [16]. *Решетчатые* множества $W = \{\mu \in L' : \ \mu \in \mathbb{T}^n\}$ успешно применяются [17–21] в теории кубатурных формул на торе $\mathbb{T}^n$. Поскольку (см. [17–20])

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i\nu(\alpha - \alpha^{(k)})} = \begin{cases} e^{2\pi i\nu\alpha}, & \text{если } \nu \in L,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

то $I(W) = L$, а $Z(W) = \mathbb{Z}^n \backslash L$. Поэтому из теоремы вытекает

Следствие 1. *Для любой целочисленной решетки L, $d(L) \ne 0$, и для любой функции $f(\alpha)$ из X,* sp $f(\alpha) \subset L$, *выполняется равенство* (*частный случай* (1.4))

$$E(f)_X = \inf_{g\in X:\ \mathrm{sp}\ g\subset \mathbb{Z}^n\backslash L}\|f(\alpha) - g(\alpha)\|_X = \|f(\alpha)\|_X. \tag{1.5}$$

Пусть $D_q = \{\nu \in \mathbb{Z}^n : \ |\nu_1| + \ldots + |\nu_n| \le q\}$; $\Gamma_q = \{\nu \in \mathbb{Z}^n : \ |\nu_1| + \ldots + |\nu_n| = q\}$; через

$$E_{q-1}(f)_X = \inf_{t:\ \mathrm{sp}\ t\subset D_{q-1}}\|f(\alpha) - t(\alpha)\|_X, \qquad q \in \mathbb{N},$$

обозначим последовательность наилучших приближений функции $f(\alpha)$ из X тригонометрическими полиномами (сокращенно ТП) со спектром из множеств D_{q-1}. Если сама приближаемая функция $f(\alpha)$ есть ТП и sp $f(\alpha) \subset \Gamma_q$, то вместо $E_{q-1}(f)$ будем писать для краткости $E(f)$.

В гармоническом анализе широко используются и другие определения; например, применяются приближения посредством ТП, спектры которых располагаются в кубе, шаре, “гиперболическом кресте” и т. д. Данный выбор обусловлен хорошо известной взаимозависимостью между приближениями функций алгебраическими многочленами на кубе и тригонометрическими полиномами на торе.

Величина
$$\Delta = \Delta(L) = \min_{\nu \in L\setminus\{0\}} (|\nu_1| + \ldots + |\nu_n|)$$
определяет наименьшее "расстояние" от решетки L до нуля. Выберем в (1.5) в качестве приближаемой функции произвольный ТП $f(\alpha)$ вида
$$f(\alpha) = \sum_{\nu\in\Gamma_\Delta} \widehat{f}_\nu e^{2\pi i\nu\alpha}. \tag{1.6}$$

Имеет место

Следствие 2. *Для любой решетки L и любого* ТП (1.6) *справедливо равенство*
$$E(f)_X = \inf_c \|f(\alpha) - c\|_X. \tag{1.7}$$

Действительно, любой ТП $g(\alpha)$ из (1.5) содержит лишь одну инвариантную гармонику — единичную, поэтому (1.7) вытекает из (1.5).

Если $X = L_2(\mathbb{T}^n)$, то из (1.7) очевидным образом находим, что $E(f)_2 = \|f\|_2$. В случае, когда ТП $f(\alpha)$ является действительнозначным, в пространстве $C(\mathbb{T}^n)$ наилучшее приближение также выражается явно:
$$E(f)_\infty = \frac{1}{2}\Big[\max_{\alpha\in\mathbb{T}^n} f(\alpha) - \min_{\alpha\in\mathbb{T}^n} f(\alpha)\Big].$$

Выбирая конкретные примеры решетчатых множеств или, что одно и то же, целочисленных решеток L, будем вычислять точные значения наилучших приближений бесконечной серии ТП.

П р и м е р 1 [18]. Пусть $n = 2$; выбор $W = \{w_j\}_{j=1}^8$, где $w_j = (j/8\,, 3j/8)$, приводит к кубатурной формуле
$$\frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} f\Big(\frac{j}{8}\,, \frac{3j}{8}\Big) = \int\limits_{\mathbb{T}^2} f(\alpha)d\alpha,$$
справедливой для любого ТП $f(\alpha)$, $\mathrm{sp}\, f \subset D_3$. Соответствующая решетка L определяется решениями сравнения
$$L = \{\nu \in \mathbb{Z}^2 :\ \nu_1 + 3\nu_2 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 8)\}.$$
На Γ_4 располагается шесть точек решетки L: $\{\pm(2,2), \pm(3,-1), \pm(-1,3)\} = M_4$.

Утверждение 2. *Для любого* ТП
$$f_4(\alpha) = \sum_{\nu\in M_4} \widehat{f}_\nu e^{2\pi i\nu\alpha}$$
справедливо равенство
$$E(f)_X = \|f(\alpha)\|_X. \tag{1.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из структуры M_4 вытекает тождество
$$f\Big(\alpha_1 + \frac{1}{8}, \alpha_2 + \frac{1}{8}\Big) = -f(\alpha_1, \alpha_2).$$
Для любой константы c находим, что $I = \|f(\alpha) - c\|_X = \|f(\alpha) + c\|_X$. Поэтому по неравенству Минковского получим
$$I = \frac{1}{2}\left[\|f(\alpha) - c\|_X + \|f(\alpha) + c\|_X\right] \geq \|f(\alpha)\|.$$

Тогда из (1.7) находим оценку снизу $E(f)_X \geq \|f(\alpha)\|_X$.

Выбирая $c = 0$, получаем оценку сверху и, следовательно, (1.8). □

Точки L располагаются на Γ_k лишь для четных k. Так, на Γ_6 располагаются четыре точки: $\{\pm(1,5), \pm(5,1)\} = M_6$.

Утверждение 3. *Для любого* ТП

$$f_6(\alpha) = \sum_{\nu \in M_6} \widehat{f}_\nu e^{2\pi i \nu\alpha}$$

справедливо равенство

$$E(f)_X = \|f(\alpha)\|_X. \tag{1.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху снова очевидна.

Для получения оценки снизу в этом случае придется оценивать

$$I = \|f_6(\alpha) + c_1 + c_2 f_4(\alpha)\|_X,$$

поскольку гармоники 1 и $f_4(\alpha)$ будут инвариантными. Используя тождества

$$f_6\Big(\alpha_1 + \frac{1}{6}, \alpha_2 + \frac{1}{6}\Big) \equiv f_6\Big(\alpha_1 + \frac{2}{6}, \alpha_2 + \frac{2}{6}\Big) \equiv f_6(\alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{T}^2,$$

и

$$f_4\Big(\alpha_1 + \frac{1}{6}, \alpha_2 + \frac{1}{6}\Big) \equiv e^{2\pi i/3} f_4(\alpha_1, \alpha_2), \qquad f_4\Big(\alpha_1 + \frac{2}{6}, \alpha_2 + \frac{2}{6}\Big) = e^{4\pi i/3} f_4(\alpha_1, \alpha_2),$$

по неравенству Минковского найдем

$$3I = \big\|f_6(\alpha) + c_1 + c_2 f_4(\alpha)\big\|_X + \Big\|f_6(\alpha) + c_1 + c_2 e^{2\pi i/3} f_4(\alpha)\Big\|_X$$

$$+ \Big\|f_6(\alpha) + c_1 + c_2 e^{4\pi i/3} f_4(\alpha)\Big\|_X \geq 3\,\big\|f_6(\alpha) + c_1\big\|_X.$$

Осуществив еще один сдвиг $\alpha_1 + \dfrac{1}{12}$, $\alpha_2 + \dfrac{1}{12}$, подобно предыдущему получим $I \geq \|f_6(\alpha)\|_X$ и, следовательно, докажем (1.9). □

Отметим, что подобным образом можно приблизить и ТП $f_8(\alpha)$, спектр которого расположен на Γ_8.

Пусть $q \in \mathbb{N}$ и $qL = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ \nu/q \in L\}$, соответственно, $(1/q)L' = \{\nu \in \mathbb{R}^n : \ \nu q \in L'\}$. Так как у решетчатого множества

$$W_q = \{x : \ qx \in L' \cap \mathbb{T}^n\}$$

инвариантные гармоники определяются решеткой qL, то применение следствия 2 приводит к вычислению наилучших приближений для бесконечной серии ТП.

Следствие 3. *Пусть* $q \in \mathbb{N}$; *тогда для любой целочисленной решетки* L *и любого* ТП

$$f(\alpha) = \sum_{\nu/q \in \Gamma_\Delta} \widehat{f}_\nu e^{2\pi i \nu\alpha}$$

справедливо равенство

$$E(f)_X = \inf_c \|f(\alpha) - c\|_X. \tag{1.10}$$

Таким образом, из (1.8), (1.9) получим: для любого $q \in \mathbb{N}$ и любых ТП

$$f_1(\alpha) = \sum_{\nu \in M_q^{(1)}} \widehat{f}_\nu e^{2\pi i \nu \alpha}, \qquad f_2(\alpha) = \sum_{\nu \in M_q^{(2)}} \widehat{f}_\nu e^{2\pi i \nu \alpha},$$

где

$$M_q^{(1)} = \left\{ \pm\,(2q, 2q), \pm(3q, -q), \pm(-q, 3q) \right\}, \qquad M_q^{(2)} = \left\{ \pm\,(q, 5q), \pm(5q, -q) \right\},$$

справедливы равенства

$$E(f_1)_X = \left\| f_1(\alpha) \right\|_X, \qquad E(f_2)_X = \left\| f_2(\alpha) \right\|_X.$$

П р и м е р 2. Приведем еще одну серию ТП, для которых несложно вычислить их наилучшее приближение. Она основана на решетке D_n, $n \in \mathbb{N}$, и применяется при размерности $n = 2$ в теории кубатурных формул [19–21].

Через M обозначим совокупность q^n $(q, n \in \mathbb{N})$ точек $\{\mu_1/q, \ldots, \mu_n/q\}$, $0 \le \mu_1 < q, \ldots, 0 \le \mu_n < q$. Сдвинем M на вектор $a = (1/(2q), \ldots, 1/(2q))$, $M_a = \{x \in \mathbb{T}^n : \ x - a \in M\}$, и положим $W = M \cup M_a$. Так как M и M_a не пересекаются, то в W содержится $N = 2q^n$ различных точек. Поскольку $I(M) = q\mathbb{Z}^n$, $Z(M) = \mathbb{Z}^n \backslash q\mathbb{Z}^n$, а $1 + e^{2\pi i a \nu} = 1 + e^{\pi i/q}(\nu_1 + \ldots + \nu_n)$, то $I(W)$ состоит из тех точек подрешетки $q\mathbb{Z}^n$, у которых сумма координат делится на $2q$, а $Z(W)$ — оставшаяся часть $\mathbb{Z}^n$. В частности, приведенная конструкция приводит к известной (см. [19–21]) кубатурной формуле

$$\frac{1}{2q^n} \sum_{\alpha \in W} f(\alpha) = \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(\alpha) d\alpha,$$

справедливой для любого ТП $f(\alpha)$, sp $f \subset D_{2q-1}$.

Множество $\Gamma_{2q}(W)$ — совокупность точек W, располагающихся на Γ_{2q}, — состоит из двух групп точек. Первая содержит $2n$ точек вида $(\pm 2q, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, \pm 2q)$. Вторая содержит $2n^2 - 2n$ точек, у которых две произвольные координаты равны $\pm q$, а остальные — нулю. Из (1.7) выводим

Утверждение 4. *Для* $q \in \mathbb{N}$ *и любого* ТП $f(\alpha)$, sp $f(\alpha) \subset \Gamma_{2q}(W)$, *справедливо равенство*

$$E(f)_X = \inf_c \|f(\alpha) - c\|_X = E_0(f)_X.$$

Отметим, что в отличие от предыдущего случая для пространства $X = C(\mathbb{T}^n)$ наилучшая константа c уже не обязана равняться нулю. Пусть $n = 2$ и $q = 1$. Рассмотрим действительнозначный ТП

$$f(\alpha) = \cos 4\pi\alpha_1 + a \cos 2\pi\alpha_1 \cos 2\pi\alpha_2 + \cos 4\pi\alpha_2.$$

Нетрудно показать, что

(A) при $|a| \le 1$ $\quad E(f) = \dfrac{1 + |a|}{2}$ $\quad$ и $\quad c = 1 + \dfrac{1 + |a|}{2}$;

(B) при $|a| \ge 1$ $\quad E(f) = |a|$ $\quad$ и $\quad c = 2$.

Выбор наилучшей постоянной зависит от вида функции.

1.2. Приближение алгебраическими многочленами на кубе

Простейшим однородным многочленом от n переменных $x_1, \dots, x_n$ является моном $x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$. Он называется *невырожденным*, если все его показатели $\nu_1, \dots, \nu_n$ положительны. На основе метода экстремальных сигнатур [3] в работах [4–8] результаты Чебышева [1] и Коркина — Золотарева [2] перенесены на многомерный случай.

Теорема 3. *Для любого невырожденного монома x^ν, $\nu_1 + \ldots + \nu_n = q$, имеют место соотношения*

$$E(x^\nu)_C = \inf_{p \in P_{q-1}^n} \max_{x \in Q^n} |x^\nu - p\,(x)| = 2^{n-q}, \tag{1.11}$$

$$E(x^\nu)_L = \inf_{p \in P_{q-1}^n} \int\limits_{Q^n} |x^\nu - p\,(x)| = 2^{n-q}. \tag{1.12}$$

Наилучший многочлен $p\,(x)$ следует выбирать так, чтобы разность $x^\nu - p\,(x)$ стала многочленом, наименее уклоняющимся от нуля:

$$T_q(x) = T_{\nu_1}(x_1) \cdots T_{\nu_n}(x_n), \qquad U_q(x) = U_{\nu_1}(x_1) \cdots U_{\nu_n}(x_n),$$

где

$$T_k(t) = \frac{\cos k\alpha}{2^{k-1}}\,, \qquad U_k(t) = \frac{\sin\,(k+1)\alpha}{2^k \sin\alpha}, \qquad t = \cos\alpha,$$

суть многочлены Чебышева первого и второго рода со старшим коэффициентом 1.

Для вычислений (0.1) и (0.2) при $p = 1$ и $\mathcal{K} = Q^n$ будем использовать хорошо известную взаимосвязь между приближениями АМ и ТП. В произвольном АМ $f(x)$ из A_q^n

$$f(x) = \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_n = q} a_\nu x^\nu \tag{1.13}$$

сделаем замену $x_1 = \cos 2\pi\alpha_1, \dots, x_n = \cos 2\pi\alpha_n$, которую в дальнейшем будем обозначать кратко $x = \cos 2\pi\alpha$. Согласно формуле Эйлера для произвольного монома x^ν, $\nu_1 + \ldots + \nu_n = q$, справедливы равенства

$$x^\nu|_{\cos 2\pi\alpha} = \cos^{\nu_1} 2\pi\alpha_1 \cdots \cos^{\nu_n} 2\pi\alpha_n = 2^{-q} \sum_{\substack{\mu:\, \mu_k = \pm\nu_k, \\ k=1,\dots,n}} e^{2\pi i\mu\alpha} + t_1(\alpha),$$

где $t_1(\alpha)$ — ТП, спектр которого расположен в D_{q-2}.

Каждому АМ $f(x)$ (1.13) из A_q^n поставим в соответствие тригонометрический полином

$$F(\alpha) = 2^{-q} \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_n = q} a_\nu \sum_\mu e^{2\pi i\mu\alpha} = \sum_{\nu_1 + \ldots + \nu_n = q} a_\nu \cos 2\pi\nu_1\alpha_1 \ldots \cos 2\pi\nu_n\alpha_n.$$

Для любого АМ $p\,(x)$ из P_{q-1}^n имеем

$$f(x) - p\,(x)|_{x = \cos 2\pi\alpha} = F(\alpha) - t_2(\alpha), \qquad \mathrm{sp}\ t_2(\alpha) \subset D_{q-1}.$$

Поскольку для любой непрерывной на Q^n функции $f(x)$

$$\max_{x \in Q^n} |f(x)| = \max_{\alpha \in \mathbb{T}^n} |f(\cos 2\pi\alpha)|,$$

то формула

$$E_{q-1}(f)_{C(Q^n)} = E_{q-1}\big(F(\alpha)\big)_{C(\mathbb{T}^n)} \tag{1.14}$$

устанавливает связь между наилучшими приближениями АМ $f(x)$ и ТП $F(\alpha)$ в пространствах C. Из равенства (1.14) нетрудно вывести новое доказательство (1.11) и его обобщение

$$E_{q-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^q\right)_{C(Q^n)} = 2^{1-q}\sum_{k=1}^{n}|a_k|.$$

Найдем новый наименее уклоняющийся от нуля АМ, “старший член” которого имеет вид

$$f^*(x) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=2q} a_\nu x^\nu;$$

$f^*(x)$ содержит мономы только двух видов: x_k^{2q}, $k=1,\ldots,n$, и $x_k^q x_\ell^q$, $k\neq\ell$, $k,\ell=1,\ldots,n$. Тригонометрический полином $F^*(\alpha)$, соответствующий $f^*(x)$, есть частный случай ТП из примера 2. Следовательно, из утверждения 4 выводится

Утверждение 5. *Для любого $q\in\mathbb{N}$ справедливо равенство*

$$E_{2q-1}(f^*)_{C(Q^n)} = E_0\left(F^*(\alpha)\right)_{C(\mathbb{T}^n)}.$$

Точное вычисление E_0 через коэффициенты $f^*(x)$ сводится к определению наибольшего (M) и наименьшего (m) значения $F^*(\alpha)$ на торе $\mathbb{T}^n$. Рассмотрим один простой случай, когда у $f^*(x)$ все коэффициенты равны 1, т. е.

$$f^*(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} x_k^q\right]^2.$$

Поскольку с точностью до постоянного слагаемого

$$F^*(\alpha) = 2^{2-2q}\left[\sum_{k=1}^{n}\cos^2 2\pi q\alpha_k + \sum_{k\neq\ell}\cos 2\pi q\alpha_k\cos 2\pi q\alpha_\ell\right] = 2^{2-2q}\left[\sum_{k=1}^{n}\cos 2\pi q\alpha_k\right]^2,$$

то $M-m = n^2 2^{2-2q}$ и, значит,

$$E_{q-1}(f^*)_{C(Q^n)} = E_0(f^*)_{C(\mathbb{T}^n)} = n^2 2^{1-2q}.$$

Рассмотрим АМ

$$H(x) = \left[\sum_{k=1}^{n} T_q(x_k)\right]^2 - n^2 2^{1-2q}.$$

Используя оценку

$$|T_k(t)| \le 2^{1-k}, \qquad -1\le t\le 1,$$

для многочленов Чебышева T_k, найдем

$$-n^2 2^{1-2q} \le H(x) \le n^2 2^{2-2q} - n^2 2^{1-2q} = n^2 2^{1-2q}, \qquad x\in Q^n.$$

Так как $f^*(x)$ является “старшим членом” $H(x)$, то $H(x)$ является наименее уклоняющимся от нуля алгебраическим многочленом.

Установим аналог формулы (1.14) в метрике $L_1(Q^n)$. Пусть $f(x)$ — АМ (1.13) и $p(x)$ — произвольный АМ из P_{q-1}^n. В интеграле

$$I = \int_{Q^n} |f(x) - p(x)|\,dx$$

сделаем замену переменной $x = \cos 2\pi\alpha$. Так как

$$dx = (2\pi)^n W(\alpha) d\alpha = (2\pi)^n \sin 2\pi\alpha_1 \cdots \sin 2\pi\alpha_n d\alpha,$$

то из соображений четности найдем

$$I = (2\pi)^n \int\limits_{\mathbb{T}_+^n} |f(\cos 2\pi\alpha) - p(\cos 2\pi\alpha)| \, W(\alpha) d\alpha$$

$$= \pi^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} \big|[f(\cos 2\pi\alpha) - p(\cos 2\pi\alpha)] W(\alpha)\big| d\alpha, \tag{1.15}$$

где $\mathbb{T}_+^n = \{\alpha \in \mathbb{T}^n : \ 0 \leq \alpha_k \leq 1/2, \ k = 1, \dots, n\}$. Имеем

$$[f(\cos 2\pi\alpha) - p(\cos 2\pi\alpha)] \, W(\alpha) = F(\alpha)W(\alpha) + t_1(\alpha)W(\alpha), \qquad \mathrm{sp}\ t_1 \subset D_{q-1}. \tag{1.16}$$

Поскольку спектр W есть множество точек из $\mathbb{Z}^n$, у которых все координаты независимо друг от друга принимают значения ± 1, то $\mathrm{sp}\ t_1(\alpha)W(\alpha) \subset D_{q+n-1}$, а $\mathrm{sp}\ F(\alpha)W(\alpha) \subset D_{q+n}$, и на Γ_{q+n} располагаются лишь те точки, которые после сложения по Минковскому $\mathrm{sp}\ F$ и $\mathrm{sp}\ W$ будут иметь одинаковые по знаку координаты. Поэтому

$$F(\alpha)W(\alpha) = \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=q} a_\nu \cos \nu_1\alpha_1 \cdots \cos \nu_n\alpha_n \sin \alpha_1 \cdots \sin \alpha_n$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=q} a_\nu \sin{(\nu_1+1)\alpha_1} \cdots \sin{(\nu_n+1)\alpha_n} + t_2(\alpha), \tag{1.17}$$

где $\mathrm{sp}\ t_2(\alpha) \subset D_{q+n-1}$.

Каждому АМ $f(x)$ (1.13) поставим в соответствие ТП

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{2^n} \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_n=q} a_\nu \sin{(\nu_1+1)\alpha_1} \cdots \sin{(\nu_n+1)\alpha_n}, \qquad \mathrm{sp}\ \Phi \subset \Gamma_{q+n}.$$

Из (1.15)–(1.17) находим

$$I = \pi^n \|\Phi(\alpha) + t(\alpha)\|_{L(\mathbb{T}^n)}, \qquad \mathrm{sp}\ t(\alpha) \subset D_{q+n-1},$$

откуда вытекает формула

$$E_{q-1}(f)_{L(Q^n)} = \pi^n E_{q+n-1}\left[\Phi(\alpha)\right]_{L(\mathbb{T}^n)}, \tag{1.18}$$

устанавливающая связь между наилучшими приближениями произвольного АМ $f(x)$ из A_q^n и соответствующего ТП $\Phi(\alpha)$, спектр которого расположен на Γ_{2q+n}. В частности, из (1.18) получается простой вывод уже известного равенства (1.12).

2. Приближение на сфере и на шаре

Вначале приведем конструкции многомерных аналогов многочленов Чебышева, построенных методом экстремальных сигнатур [3]. Вопрос о приближении произвольного АМ $f(x)$ из A_q^2 на $\mathbb{S}^1$ оказывается простым. После полярной замены $x_1 = \cos 2\pi\alpha$, $x_2 = \sin 2\pi\alpha$ задача сводится к приближению гармоники порядка q гармониками меньшей степени [12–14].

Утверждение 6. *Для любых $q \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ и $c_{\pm q} \in \mathbb{C}$*

$$\inf_{\{c_\nu\}_{|\nu|<q} \subset \mathbb{C}} \Big\| \sum_{|\nu| \leq q} c_\nu e^{2\pi i \nu\alpha} \Big\|_{L_p(T)} = \big\| c_{-q} e^{-2\pi i q\alpha} + c_q e^{2\pi i q\alpha} \big\|_{L_p(T)}. \tag{2.1}$$

В пространстве $C(\mathbb{B}^2)$ существенный успех обозначился в работе Герхарда [8], в которой найдено наилучшее приближение произвольного монома $x^\nu = x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$, $\nu_1 + \nu_2 = q$. Имеем $E(x^\nu) = 2^{1-q}$, а наименее уклоняющийся от нуля АМ имеет вид

$$2^{-q}\left[U_{\nu_1}(x_1)U_{\nu_2}(x_2) - U_{\nu_1-2}(x_1)U_{\nu_2-2}(x_2)\right], \qquad U_{-1} = 0. \tag{2.2}$$

Более того, в [8] найдено наилучшее приближение для семейства алгебраических многочленов

$$f(x) = \sum_{k=0}^{q} a_k x_1^{q-k} x_2^k, \qquad q \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

действительные коэффициенты которых для всех k удовлетворяют соотношениям

$$(1)\quad a_{2k+1} = 0,\ \ a_{2k}a_{2k+2} \le 0 \qquad \text{или} \qquad (2)\quad a_{2k} = 0,\ \ a_{2k+1}a_{2k+3} \le 0.$$

В дальнейшем было показано [22], что равенство

$$E(x^\nu) = 2^{1-q}, \qquad \nu_1 + \nu_2 = q, \tag{2.4}$$

может быть получено посредством построения интерполяционных АМ из P_q^2. Работа [23] посвящена исследованию их узлов. Отметим, что при $q \ge 3$ в работе [8] доказано, что АМ (2.2) не являются единственными АМ наименьшего уклонения.

Каждому АМ (2.3) поставим в соответствие число

$$I_0 = \sum_{k=0}^{q} a_k i^k, \qquad \text{где} \quad i^2 = -1.$$

Используя (2.1), автор [25] дал оценку снизу наилучших приближений $f(x)$ из A_q^2 в пространствах $L_p(\mathbb{B}^2)$, $1 \le p \le \infty$:

$$E(f)_{L_p(\mathbb{B}^2)} \ge 2^{1/p+1-q}(pq+2)^{-1/p}\|\cos 2\pi\alpha\|_p\,|I_0|.$$

Неравенство обращается в равенство для любого гармонического многочлена из A_q^2. В частности, при $p = \infty$ оно приводит к новому выводу нижней оценки (2.4).

В пространствах размерности $n \ge 3$ известен лишь конечный набор АМ из A_q^n, для которых вычислены наилучшие приближения. Перечислим их в хронологическом порядке для пространств $L_p(\mathbb{S}^{n-1})$, $1 \le p \le \infty$, любой размерности n. В работе [12] установлены равенства:

$$E(x_1x_2\cdots x_n)_p = \|x_1x_2\cdots x_n\|_p, \qquad E(x_1x_2\cdots x_n)_\infty = n^{-n/2}, \tag{2.5}$$

$$E(x_1^4 + \ldots + x_n^4)_p = E_0(x_1^4 + \ldots + x_n^4)_p, \qquad E_0(x_1^4 + \ldots + x_n^4)_\infty = \frac{n-1}{2n}. \tag{2.6}$$

Пусть $n = 3$, $\tau = (\sqrt{5}+1)/2$,

$$f(x) = (\tau x_1 + x_2)^6 + (\tau x_1 - x_2)^6 + (\tau x_2 + x_3)^6 + (\tau x_2 - x_3)^6 + (\tau x_3 + x_1)^6 + (\tau x_3 - x_1)^6;$$

тогда

$$E(f)_p = E_0(f)_p. \tag{2.7}$$

При $p = \infty$ равенства (2.5)–(2.7) справедливы и для пространств $C(\mathbb{B}^n)$, $n \ge 2$. Вопрос о вычислении наилучшего приближения $f(x) = x_1x_2\cdots x_n$ алгебраическими многочленами из P_{n-1}^n в $C(\mathbb{B}^n)$ был поставлен ранее Раймером [24].

Через $a(n)$, $n \ge 2$, обозначим решение уравнения

$$\frac{2}{n+1}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{(n-1)/2}(1-a)^{(n+1)/2} = a,$$

принадлежащее интервалу $(0,1)$; так $a(2) = 1/4$, $a(3) = 3 - \sqrt{8}, \ldots$ В работе [9] рассмотрен анизотропный случай $f(x) = x_1^2 x_2 \cdots x_n$; установлено равенство

$$E(f)_{C(\mathbb{S}^{n-1})} = E(f)_{C(\mathbb{B}^n)} = \frac{a(n)}{(n-1)^{(n-1)/2}}. \tag{2.8}$$

В [10] при $f(x) = x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2$ для некоторых малых размерностей в пространстве $C(\mathbb{B}^n)$ найдены точные значения наилучших приближений, в частности, установлено, что

$$E(x_1^2 x_2^2 x_3^2)_{C(\mathbb{B}^3)} = E(x_1^2 x_2^2 x_3^2)_{C(\mathbb{S}^2)} = 72^{-2}; \tag{2.9}$$

для больших размерностей приведены интересные гипотезы.

Заметим, что для доказательства (2.9) строилась сигнатура, у которой количество плюсов отличалось от количества минусов. Результаты (2.8), (2.9) получены методом экстремальных сигнатур, а (2.5)–(2.7) — применением дискретных групп и их инвариантных многочленов.

Теория инвариантов имеет давнюю историю и используется в различных ситуациях. Дадим необходимые определения.

В дискретной геометрии хорошо известен (см. [16]) ряд старых экстремальных задач о расположении заданного количества точек $W = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N$ на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$: задача о диктаторах, проблема Томсона и др. Как и в разд. 1, для наших целей наибольший интерес представляют сферические дизайны (кубатурные формулы чебышевского типа).

Определение 1. Множество $W = \{x^{(k)}\}_{k=1}^N$ называется *сферическим q-дизайном*, если кубатурная формула

$$\frac{1}{\operatorname{mes} \mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x)dx = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(x^{(k)})$$

точна для любого АМ из P_q^n. Дизайн называется *минимальным*, если он содержит наименьшее количество точек.

Один из способов построения дизайнов состоит в следующем: фиксируется конечная подгруппа G ортогональных матриц из $O(n)$ с порядком $|G|$ и рассматривается множество $W = \{Tx\}_{T \in G}$, $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Оно называется *орбитным кодом*.

Определение 2. Алгебраический многочлен $f(x)$, $f(x) \not\equiv 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, называется *инвариантным многочленом* (для) группы G (сокращенно ИМ), если для любой матрицы T из G выполняется тождество $f(Tx) \equiv f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Через $I(G)$ обозначим совокупность всех ИМ группы G.

Поскольку ортогональная матрица сохраняет расстояние, то у любой группы G имеются ИМ $1, |x|^2, |x|^4, \ldots$ В дальнейшем ИМ этой серии будем называть *тривиальными*.

Существует внешне простой способ нахождения ИМ. Для любого АМ $f(x)$ рассматриваем его усреднение

$$\frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} f(T'x), \tag{2.10}$$

которое дает либо инвариантный многочлен, либо нулевой. Развернутое изложение теории инвариантов с применением к теории кодирования и с историческими ссылками приведено в [15].

Исследование дизайнов, порожденных орбитными кодами, интенсивно развивается (см. [26–35]). На это имеется ряд причин, одна из которых заключается в том, что при $q \to \infty$ и $n \geq 3$ не известен даже порядок роста мощности минимальных сферических дизайнов. С. Л. Соболев [26] установил прямую связь между орбитными дизайнами и ИМ: если среди P_q^n имеются лишь тривиальные ИМ для G, то орбитный код $W = \{Tx\}_{T \in G}$ есть q-дизайн. Эта теорема задает направление для построения орбитных дизайнов минимальной мощности:

среди всех групп G заданного порядка определить те, у которых все нетривиальные ИМ имеют наибольшую степень. Ради полноты изложения короткое доказательство теоремы приведем позднее.

Теория приближения функций предъявляет к орбитным дизайнам близкие, но несколько иные требования. При использовании лишь усреднения (2.10) и неравенства Минковского в работе [12] доказана

Теорема 4. *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, — функция, инвариантная относительно группы $G \subset O(n)$. Тогда наилучшее приближение функции $f(x)$ алгебраическими многочленами из P^n_{q-1}, $q \in \mathbb{N}$, в пространствах $L_p(\mathbb{S}^{n-1})$ будет достигаться на* ИМ *группы G*

$$E_{q-1}(f)_{L_p(\mathbb{S}^{n-1})} = \inf_{p \in I(G) \cap P^n_{q-1}} \left\| f(x) - p\,(x) \right\|_{L_p(\mathbb{S}^{n-1})}. \tag{2.11}$$

Первые простые конструкции многомерных многочленов Чебышева в пространствах $L_p(\mathbb{S}^{n-1})$ и $L_p(\mathbb{B}^n)$ при $n \geq 3$ приведены в [12]. В частности, равенства (2.5)–(2.7) являются следствием теоремы 4. В каждом случае группа G выбирается так, что АМ $f(x)$ из A^n_q есть ИМ для G, причем рассматривается случай, когда $I(G) \cap P^n_{q-1}$ содержит лишь тривиальные ИМ. В противном случае задача становится более сложной, так как $f(x)$ надо приближать не только константой. Тем не менее в некоторых случаях решение задачи удается получить.

П р и м е р 3. При $n = 4$ рассмотрим группу G, порожденную 24-мя отражениями $x \to x - 2a\dfrac{ax}{aa}$, где a — один из векторов $(\pm1, 0, 0, 0)$, $(\pm1, \pm1, 0, 0)$, $(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1)$; рассматриваются все выборы знаков и все перестановки координат. ИМ любой конечной группы образуют $\mathbb{C}$-алгебру, которая для данной группы G порождается базисными ИМ

$$f_2 = |x|^2, \qquad f_6 = \operatorname{sym}(x_1^4 x_2^2) - 3\operatorname{sym}(x_1^2 x_2^2 x_3^2),$$

$$f_8 = \operatorname{sym}(x_1^8) + 14\operatorname{sym}(x_1^4 x_2^4) + 168 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2,$$

$$f_{12} = \operatorname{sym}(x_1^{12}) + 22\operatorname{sym}(x_1^6 x_2^6) + 165\operatorname{sym}(x_1^4 x_2^4 x_3^4)$$
$$+ 330\operatorname{sym}(x_1^6 x_2^2 x_3^2 x_4^2) + 330\operatorname{sym}(x_1^4 x_2^4 x_3^2 x_4^2),$$

где

$$\operatorname{sym}(p) = \frac{1}{|(\mathfrak{S}_4)_p|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_4} \sigma p, \qquad (\mathfrak{S}_4)_p = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4 :\ \sigma p = p\},$$

а $\mathfrak{S}_4$ — симметрическая группа перестановок координат.

Базисные ИМ определяются неоднозначно, возможен иной выбор:

$$F_2 = f_2, \quad F_6 = 8f_6 - f_2^3, \quad F_8 = 10f_8 - 7f_2^4, \quad F_{12} = 64f_{12} - 55f_8 f_2^2 - 176f_6^2 + 220f_6 f_2^3 - 11f_2^6.$$

Он интересен тем, что ортогональная матрица

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

переводит совокупность минимальных векторов решетки D_4 в совокупность минимальных векторов сопряженной решетки D_4'. При этом имеют место тождества

$$F_2(Tx) = F_2(x), \qquad F_6(Tx) = -F_6(x), \qquad F_8(Tx) = F_8(x), \qquad F_{12}(Tx) = -F_{12}(x),$$

справедливые для всех $x \in \mathbb{R}^4$. Совокупность всех ИМ группы G порождается

$$F_2^{\alpha} F_6^{\beta} F_8^{\gamma} F_{12}^{\delta}, \qquad \beta + \delta \equiv 0 \pmod 2.$$

Вся приведенная выше информация относительно примера 3 взята из работы [35]. Для малых q выпишем все ИМ группы G:

$$\begin{aligned} &q = 0: \quad 1, \\ &q = 2: \quad F_2, && q = 8: \quad F_2^4, \\ &q = 4: \quad F_2^2, && q = 10: \quad F_2^5;\ F_2 F_8, \\ &q = 6: \quad F_2^3, && q = 12: \quad F_2^6;\ F_6^2;\ F_8 F_2^2;\ F_{12}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Утверждение 7. *Для любого* $1 \le p \le \infty$

$$\begin{aligned} E(F_8)_{L_p(\mathbb{S}^3)} &= E_0(F_8)_{L_p(\mathbb{S}^3)}, \\ E(F_6^2)_{L_p(\mathbb{S}^3)} &= \inf_{c_0, c_1} \|F_6^2 + c_0 + c_1 F_8\|_{L_p(\mathbb{S}^3)}, \\ E(F_{12})_{L_p(\mathbb{S}^3)} &= E_0(F_{12})_{L_p(\mathbb{S}^3)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

В частности, при $p = \infty$

$$E(F_i) = \frac{1}{2} \left\{ \max_{x \in \mathbb{S}^3} F_i(x) - \min_{x \in \mathbb{S}^3} F_i(x) \right\}, \qquad i = 8, 12.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $F_2(x)|_{\mathbb{S}^3} = 1$, то первая и вторая формулы (2.13) вытекают из теоремы 4. Дополнительно используя свойства матрицы T и список ИМ (2.12), при $q = 12$ находим

$$E(F_{12}) = \inf_{c_0, c_1} \|F_{12}(x) + c_0 + c_1 F_8\|.$$

Заменяя x на Tx, как и при доказательстве (1.9), находим, что

$$E(F_{12}) = \inf_{c} \|F_{12}(x) + c\|. \qquad \square$$

В пространстве $L_2(\mathbb{S}^{n-1})$ задача о построении наименее уклоняющегося от нуля АМ с произвольным фиксированным старшим членом из A_q^n имеет очень простое решение для всех $q, n \in \mathbb{N}$. Оно вытекает из представления Гаусса [36, гл. 11, § 2, теорема 11.1]: любой АМ $f(x)$ из A_q^n может быть представлен единственным образом в виде

$$f(x) = Y_q(x) + Y_{q-2}(x)|x|^2 + Y_{q-4}(x)|x|^4 + \dots,$$

где $Y_j(x)$ — гармонический многочлен из A_j^n. Через

$$\dot{Y}_j(x) = Y_j(x)|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \frac{Y_j(x)}{|x|^j}$$

обозначим сужение $Y_j(x)$ на единичную сферу, а через

$$\dot{f}(x) = \dot{Y}_q(x) + \dot{Y}_{q-2}(x) + \dots$$

— сужение произвольного гармонического многочлена из A_q^n. Так как сферические гармоники $\{\dot{Y}_j(x)\}_0^{\infty}$ образуют ортогональный базис на $\mathbb{S}^{n-1}$, то

$$E(f)_{L_2(\mathbb{S}^{n-1})} = \|Y_q(x)\|_{L_2(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Вычислим наилучшее приближение в пространстве $C(\mathbb{B}^n)$ для некоторого класса АМ из A_q^n, $q > 2$. Каждому АМ из A_q^n поставим в соответствие АМ

$$p\,(x) = Y_{q-2}(x) + Y_{q-4}(x)|x|^2 + \dots \tag{2.14}$$

из A_{q-2}^n и оценим его уклонение от $f(x)$. Для краткости обозначим $r = |x|$.

Утверждение 8. *Пусть $q \geq 2$ и*

$$\|\dot{f}(x)\|_{C(\mathbb{S}^{n-1})} \leq \Big(\frac{q}{2}-1\Big)\,\|\dot{A}_q(x)\|_{C(\mathbb{S}^{n-1})}. \tag{2.15}$$

Тогда

$$E(f)_{C(\mathbb{B}^n)} \leq \|\dot{A}_q(x)\|_{C(\mathbb{S}^{n-1})}. \tag{2.16}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $p\,(x) = r^{-2}\,[f(x) - A_q(x)]$, то из (2.14), (2.15) находим

$$f(x) - p\,(x) = f(x)\Big(1 - \frac{1}{r^2}\Big) + A_q(x)r^{-2} = \dot{f}(x)(r^q - r^{q-2}) + r^{q-2}\dot{A}_q(x).$$

При любом $0 \leq r \leq 1$ имеем

$$|f(x) - p\,(x)| \leq \|\dot{f}(a)\|_{C(\mathbb{S}^{n-1})}(r^{q-2} - r^q) + \|\dot{A}_q(x)\|r^{q-2}$$
$$\leq \|\dot{A}_q(x)\|_{C(\mathbb{S}^{n-1})}\left[\Big(\frac{q}{2}-1\Big)(r^{q-2} - r^q) + r^{q-2}\right] = \|\dot{A}_q(x)\|_{C(\mathbb{S}^{n-1})}\left[\frac{q}{2}\,r^{q-2} - \Big(\frac{q}{2}-1\Big)\,r^q\right].$$

Так как производная функции $y(r) = \dfrac{q}{2}\,y^{q-2} - \Big(\dfrac{q}{2}-1\Big)\,r^q$ неотрицательна на $[0,1]$ и $y(0) = 0$, то $\max\{y(r) :\ 0 \leq r \leq 1\} = 1$. Оценка (2.16) получена. □

В работе [25] оценка (2.16) была доказана лишь в частном случае $n = 2$ и одновременно с оценкой снизу $E(f)_{C(\mathbb{B}^2)} \geq \|\dot{Y}_q\|_{C(S)}$ приводила к точному вычислению $E(f)_{C(\mathbb{B}^2)}$ для всех АМ из A_q^2, удовлетворяющих условию (2.15). Удивительно, но наилучшее приближение сферической гармоники $\dot{Y}_q(x)$ при $n \geq 3$ известно лишь в нескольких частных случаях. Та же ситуация наблюдается и относительно приближения гармонического многочлена $Y_q(x)$ на $\mathbb{B}^n$, поскольку ввиду однородности

$$\max_{x\in\mathbb{B}^n} |Y_q(x)| = \max_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} |\dot{Y}_q(x)|.$$

Разберем в $\mathbb{R}^3$ два простых случая. Введем сферическую систему координат

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\theta, \qquad x_2 = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad x_3 = r\cos\theta, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Через

$$P_k(t) = \frac{1}{2^k\,k!}\frac{d^k}{dt^k}(t^2-1)^k = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{k!}\left[t^k - \frac{k(k-1)}{2(2k-1)}\,t^{k-2} + \dots\right], \qquad k = 0, 1, \dots,$$

обозначим систему многочленов Лежандра. Известно [36], что совокупность сферических гармоник

$$P_q^{(s)}(\cos\theta)\sin^s\theta e^{is\varphi}, \qquad s = 0, \pm 1, \dots, \pm q, \tag{2.17}$$

образует ортогональный базис на $\mathbb{S}^2$ для A_q^3.

С л у ч а й I. Рассмотрим зональную сферическую гармонику $\dot{Y}_q(x) = P_q(\cos\theta)$. Здесь вопрос о приближении $\dot{Y}_q(x)$ легко сводится к классическому одномерному чебышевскому варианту, поэтому

$$E\left(\dot{Y}_q(x)\right)_{C(\mathbb{S}^2)} = E\left(|x|^q P_q\Big(\frac{x_3}{|x|}\Big)\right)_{C(\mathbb{B}^3)} = \frac{1\cdot 3\cdots(2q-1)}{q!\,2^{q-1}}, \qquad q \in \mathbb{N}.$$

С л у ч а й II. Возьмем сферическую гармонику $\dot{Y}_q(x) = \sin^q\theta\cos q\varphi$ ($s = q$ в (2.17)), которой соответствует гармонический многочлен

$$Y_q(x) = 2^{q-1}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{q/2} T_q\Big(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\Big).$$

Рассматривая сужение $\dot{Y}_q(x)$ на экватор $\{x_3 = 0,\ x \in \mathbb{S}^2\}$, снова из одномерного случая находим

$$E(\dot{Y}_q)_{C(\mathbb{S}^2)} = E(Y_q)_{C(\mathbb{B}^3)} = 1.$$

Доказательство теоремы Соболева. Произвольный АМ $F(x)$ из P_q^n представим в виде суммы однородных АМ

$$F(x) = f_0 + f_1(x) + \ldots + f_q(x), \qquad f_i \in A_i^n, \qquad i = 1, \ldots, q.$$

По формуле Гаусса найдем

$$F(x) = \sum_{k,\ell \geq 0;\ k+2\ell \leq q} Y_k(x) D_\ell(|x|^2),$$

где $D_\ell(t)$ есть АМ одного переменного степени ℓ. Так как у группы G отсутствуют ИМ степени, не превышающей q, то для любого $x \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$\frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} Y_k(T'x) D_\ell(|T'x|) = \frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} Y_k(T'x) D_\ell(1) = \begin{cases} Y_0 D_\ell(1) & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Суммируя, получим

$$\frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} F(T'x) = Y_0 \sum_{0 \leq \ell \leq q/2} D_\ell(1). \tag{2.18}$$

С другой стороны, Y_k — гармонический многочлен; следовательно, по теореме о среднем при $k \in \mathbb{N}$ его среднее значение на $\mathbb{S}^{n-1}$ есть нуль. Поэтому

$$\frac{1}{\text{mes } \mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} F(x)dx = \sum_{k+2\ell \leq q} \frac{1}{\text{mes } \mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_k(x) D_\ell(|x|^2) dx$$

$$= \sum_{k+2\ell \leq q} D_\ell(1) \frac{1}{\text{mes } \mathbb{S}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_k(x) dx = Y_0 \sum_{0 \leq \ell \leq q/2} D_\ell(1). \tag{2.19}$$

Правые части равенств (2.18), (2.19) совпадают; значит, равны и левые:

$$\frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} F(x)dx = \frac{1}{|G|} \sum_{T \in G} F(T'x),$$

т. е. орбитный код W является q-дизайном. Теорема доказана.

Заключительные замечания

1. В рецензии на работу [12] В. М. Сидельников советовал авторам увеличить количество групп G из $O(n)$, которые можно использовать для приумножения новых конструкций многомерных многочленов Чебышева. В настоящей статье представлено несколько новых примеров. Конечно, перебирая решетки L из $\mathbb{R}^n$, можно строить новые ТП и АМ, наименее уклоняющиеся от нуля на $\mathbb{T}^n$ и на Q^n. Аналогично, перебор дискретных групп приведет к новым наименее уклоняющимся от нуля многочленам на $\mathbb{S}^{n-1}$. Однако в отличие от приближений на кубе, где точные значения (0.1) вычислены для бесконечной серии АМ, в случае сферы наши возможности ограничены, в основном из-за алгебраических трудностей. В настоящее время неизвестно ни одного примера орбитного кода, являющегося 12-дизайном. В то же время известна старая гипотеза Баннаи: для любых $q, n \in \mathbb{N}$ найдется группа G, орбитный код которой является q-дизайном.

2. Нерешенный вопрос. В $\mathbb{R}^n$ берем произвольный гармонический многочлен из A_q^n. Верно ли, что для любого $q \in \mathbb{N}$ найдется конечная группа G, обладающая следующими свойствами:

(а) $f(x) \in I(G)$; (б) в $I(G) \cap P_{q-1}^n$ содержатся лишь тривиальные ИМ?

При $n = 2$ положительный ответ дает группа ортогональных матриц

$$\begin{bmatrix} \cos\dfrac{2k\pi}{q} & \sin\dfrac{2k\pi}{q} \\ -\sin\dfrac{2k\pi}{q} & \cos\dfrac{2k\pi}{q} \end{bmatrix}, \qquad k = 0, 1, \ldots, q-1,$$

но уже при $n = 3$ ответ неясен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чебышев П.Л.** Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР. Т. 2: Математический анализ. 1947. 520 с.; Т. 3. 1948. 412 с.
2. **Коркин А.И., Золотарев Е.И.** Sur un certain minimum // Полн. собр. соч. Е.И. Золотарева. Вып. 1. Л.: Изд-во АН СССР, 1931. С. 138–153.
3. **Rivlin J.J., Shapiro H.S.** A unified approach to certain problems of approximation and minimization // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1961. Vol. 9. P. 670–699.
4. **Ehlich H., Zeller K.** Čebyšev-Polynome in mehreren Veränderlichen // Math. Z. 1966. Vol. 93. P. 142–143.
5. **Sloss J.M.** Chebyshev approximation to zero // Pacific J. Math. 1965. Vol. 15, no. 1. P. 305–313.
6. **Fromm J.** L_1-approximation to zero // Math. Z. 1976. Vol. 151, no. 1. P. 31–33.
7. **Reimer M.** On multivariate polynomials of least deviation from zero on the unit cube // J. Approx. Theory. 1978. Vol. 23, no. 1. P. 65–69.
8. **Gearhart W.B.** Some Chebyshev approximations by polynomials of two variables // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 8, no. 3. P. 195–209.
9. **Andreev N.N., Yudin V.A.** Best approximation of polynomials on the sphere and on the ball // Internat. Ser. Numer. Math. 2001. Vol. 137. P. 23–30.
10. **Yuan Xu.** On polynomials of least deviation from zero in several variables // J. Exper. Math. 2004. Vol. 13, no. 1. P. 103–112.
11. **Vallée Poussin Ch. de la.** Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris: Gautier-Villars & Co., 1919. 151 p.
12. **Андреев Н.Н., Юдин В.А.** Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены и кубатурные формулы чебышевского типа // Тр. МИАН. 2001. Т. 232. С. 45–57.
13. **Бернштейн С.Н.** Собрание сочинений: в 4 т. М.: Изд-во АН СССР. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905-1930). 1952. 581 с.; Т. 2: Конструктивная теория функций (1931-1953). 1954. 629 с.
14. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 406 с.
15. **Sloane N.J.A.** Error-correcting codes and invariant theory: new applications of a nineteenth-century technique // Amer. Math. Monthly. 1977. Vol. 84, no. 2. P. 82–107.
16. **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решетки и группы: в 2 т. М.: Мир, 1990. Т. 1. 413 с.; Т. 2. С. 414–791.
17. **Фролов К.К.** О связи между квадратурными формулами и подрешетками решеток целых векторов // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 40–43.
18. **Носков М.В.** Кубатурные формулы для приближенного интегрирования функций трех переменных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 10. С. 1583–1586.
19. **Beckers M., Cools R.** A relation between cubature formulae of trigonometric degree and lattice rules // Intern. Ser. Numer. Math. 1993. Vol. 112. P. 13–24.
20. **Sloan I.H., Joe S.** Lattice methods for multiple integration. Oxford Science Publications. New York: Clarendon Press; Oxford University Press, 1994. 239 p.
21. **Резцов А.В.** Неотрицательные тригонометрические полиномы от многих переменных и кубатурные формулы гауссова типа // Мат. заметки. 1991. Т. 50, вып. 5. С. 69–74.
22. **Bos L.** On Kergin interpolation in the disk // J. Approx. Theory. 1983. Vol. 37, no 3. P. 251–261.

23. **Maier U.** On best approximation of the monomials on the unit ball of $\mathbb{R}^r$ // J. Approx. Theory. 1998. Vol. 92, no. 1. P. 74–81.
24. **Reimer M.** Spherical polynomial approximations: a survey // Advances in multivariate approximation (Witten-Bommerholz, 1998). Berlin: Wiley-VCH, 1999. (Math. Res.; Vol. 107). P. 231–252.
25. **Юдин В.А.** Наименее уклоняющиеся от нуля многочлены // Мат. заметки. 2005. Т. 78, вып. 2. С. 308–313.
26. **Соболев С.Л.** О кубатурных формулах на сфере, инвариантных при преобразовании конечных групп вращений // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 2. С. 310–313.
27. **Delsarte P., Goethals J.M., and Seidel J.J.** Spherical codes and designs // Geom. Dedicata. 1977. Vol. 6, no. 3. P. 363–388.
28. **Goethals J.M., and Seidel J.J.** Cubature formulae, polytopes, and spherical designs // Geometric Vein. New York; Berlin: Springer, 1981. P. 203–218.
29. **Bannai E.** On some spherical t-designs // J. Comb. Theory. Ser. A. 1979. Vol. 26, no. 2. P. 157–161.
30. **Bannai E.** Orthogonal polynomials, algebraic, combinatorics and spherical t-designs // Proc. Sympos. Pure Math. 1980. Vol. 37. P. 465–468.
31. **Bannai E.** Spherical designs and group representations: [докл. “Combinatorics and Algebra” (Boulder, Colo., 1983)] // Contemp. Math. 1984. Vol. 34. P. 95–107.
32. **Sidel’nikov V.M.** Spherical 7-designs in 2^n-dimensional Euclidean space // J. Algebr. Combinatorics. 1999. Vol. 10, no. 3. P. 279–288.
33. **Сидельников В.М.** Орбитные сферические 11-дизайны, у которых начальная точка — корень инвариантного многочлена // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, вып. 4. С. 183–203.
34. **Harpe P. de la, Pache C.** Spherical designs and finite group representations (some results of E. Bannai) // Europ. J. Combinatorics. 2004. Vol. 25, no. 2. P. 213–227.
35. **Harpe P. de la, Pache C., Venkov B.** Construction of spherical cubature formulas using lattices // Алгебра и анализ. 2006. Т. 18, № 1. С. 162–186.
36. **Соболев С.Л.** Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 808 с.

Юдин Владимир Александрович
д-р физ.-мат. наук, проф.
Московский энергетический ин-т
(технический ун-т)
e-mail: vlayudin@mtu-net.ru

Поступила 18.02.2008

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале “Труды Института математики и механики УрО РАН” публикуются оригинальные работы теоретического характера по современным разделам математики и механики.

“Труды Института математики и механики УрО РАН” являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы, математические утверждения должны быть обоснованы. В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В “Труды Института математики и механики” не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла “Трудов Института математики и механики”).

Для решения вопроса о целесообразности публикации в “Трудах Института математики и механики” редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей.

В издательстве МАИК “НАУКА/Интерпериодика” выходит перевод журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН” как Приложение к Трудам Математического института им. В.А. Стеклова (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement).

Автор представляет в редакцию два бумажных экземпляра и электронный вариант статьи.

К статье должны быть приложены:

• Сопроводительное письмо от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.

• Лист с индексами статьи по Универсальной десятичной классификации (УДК), английское название статьи, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках.

• Лист со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. В настоящее время также не взимается плата за публикацию рукописей и других авторов.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтом математики и механики Уральского отделения РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Присланные в журнал рукописи статей не возвращаются.

Правила оформления рукописей:

• Текст статьи должен быть набран в LATEX2e в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.

• Представляемая в “Труды Института математики и механики УРО РАН” статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации (5-10 строк), ключевых слов на русском и английском языках. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул.

• Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту, либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.

• Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

• Файлы со статьей — tex-источник и ps (или pdf) вариант статьи — высылаются на адрес trudy@imm.uran.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 15 № 1 2009

Учредитель
Учреждение Российской академии наук
Институт математики и механики Уральского отделения РАН

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

ISSN 0134–4889

Редактор Е. Е. Понизовкина
Технический редактор Н. Н. Моргунова

Фото на с. 4 С. Г. Новикова

Отв. за выпуск Л. В. Петрак, В. В. Шевченко

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 27.03.09. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 25. Уч.-изд. л. 24. Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620219, Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, д.17, офис 226