

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

Том 12, № 2

2006

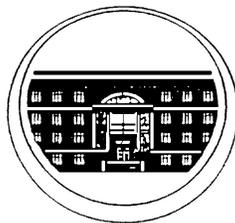
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
И МЕХАНИКИ
УрО РАН

Том 12
№ 2

УПРАВЛЕНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ
И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

*К 70-летию со дня рождения президента РАН
академика Юрия Сергеевича ОСИПОВА*



Екатеринбург
2006

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 12, № 2. Управление, устойчивость и обратные задачи динамики. Сб. науч. трудов. К 70-летию со дня рождения президента РАН академика Юрия Сергеевича Осипова. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. 215 с.
ISBN 5-7691-1799-0.

Настоящий выпуск посвящен 70-летию со дня рождения президента Российской Академии наук Юрия Сергеевича Осипова и представляет собой продолжение юбилейного издания “Динамические системы: моделирование, оптимизация и управление” (Труды Института математики и механики, том 12, № 1, 2006). Тематика статей данного выпуска в основном относится к теории регуляризации и обращения, а также теории устойчивости и оптимального управления. Издание предназначено для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в указанных областях.

Редакционная коллегия

акад. РАН **Ю. С. Осипов** (главный редактор),
член-корр. РАН **В. И. Бердышев** (зам. гл. редактора),
член-корр. РАН **В. В. Васин**, **Л. П. Власов**, **М. И. Гусев**, акад. РАН **И. И. Еремин**,
акад. РАН **А. М. Ильин**, **В. В. Кабанов**, **А. Ф. Клейменов**,
акад. РАН **Н. Н. Красовский**, **В. И. Максимов** (отв. редактор выпуска),
член-корр. РАН **А. А. Махнев**, **А. В. Маринов**,
член-корр. РАН **Ю. Н. Субботин**, **С. И. Тарасова**.

ISBN 5-7691-1799-0

Т $\frac{17(07)}{8П6(03) - 1998}$ ПВ-2006

© УрО РАН, Институт
математики и механики, 2006 г.

СОДЕРЖАНИЕ

С. Н. Аввакумов, Ю. Н. Киселев. Некоторые алгоритмы оптимального управления	3
А. Ю. Вдовин, А. В. Ким, С. С. Рублева. Об асимптотической точности в L_1 одного динамического алгоритма восстановления возмущения	18
Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова. Оптимальное управление с гарантией системами с запаздыванием	27
И. В. Гайшун. Об асимптотическом оценивании состояний линейных нестационарных систем со скалярным выходом	47
В. Л. Гасилов, В. Б. Костоусов, А. П. Кукушкин. Идентификация состояния движущегося объекта по наблюдениям геофизических полей	53
М. И. Гусев. Оценки погрешности для множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями	64
Ю. Ф. Долгий. Использование самосопряженных краевых задач при исследовании устойчивости периодических систем с запаздыванием	78
А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов. Реконструкция граничных режимов в обратной задаче тепловой конвекции высоковязкой жидкости	88
В. М. Кунцевич. Анализ устойчивости и синтез устойчивых систем управления одним классом нелинейных нестационарных систем	98
Н. Ю. Лукоянов. Дифференциальные неравенства для негладкого функционала цены в задачах управления системами с последствием	108
А. С. Мартьянов. Оценки скорости сходимости одного алгоритма динамической реконструкции	119
А. А. Меликян. Необходимые условия оптимальности фазовых портретов различной структуры в окрестности особой дуги	129
М. С. Никольский. Исследование некоторых управляемых моделей	142
В. Г. Романов. Оценка устойчивости решения в двумерной обратной задаче для уравнений упругости	152
В. А. Садовничий, В. Е. Подольский. Регуляризованные следы дискретных операторов	162
В. Н. Ушаков, Я. А. Латушкин. Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления	178
В. Т. Шевалдин. Аппроксимация локальными L -сплайнами, соответствующими линейному дифференциальному оператору второго порядка	195

УДК 517.977.58

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ¹

С. Н. Аввакумов, Ю. Н. Киселев

В первой части статьи описывается метод продолжения по параметру в алгоритмах решения нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Приводятся результаты численных экспериментов для решения краевых задач, в том числе краевых задач, возникающих в теории оптимального управления. Схему вариации параметра (метод продолжения) можно рассматривать как специальное развитие и модификацию классического метода Ньютона. Основная идея рассматриваемого подхода допускает сжатую формулировку: *сведение краевой задачи к задаче Коши*. При рассмотрении задачи Коши в качестве элементарной операции мы приходим к компактному описанию алгоритма решения краевой задачи методом продолжения по параметру. Интерес к данной тематике связан с исследованием численных алгоритмов решения линейной задачи быстрого действия и нацелен на краевые задачи принципа максимума. Разработанная нами программа *BVP* позволяет решать в среде Maple регулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, некоторые краевые задачи принципа максимума, возникающие в оптимальном управлении, задачи поиска периодических решений, предельных циклов и т.д. Во второй части статьи описывается простой алгоритм для построения множеств достижимости (управляемости) в плоских линейных управляемых системах, примеры его применения. Основой алгоритма служат параметрические уравнения границы плоского строго выпуклого компакта, заданного своей опорной функцией. Подход позволяет строить двумерные проекции множеств достижимости многомерных линейных управляемых систем. В третьей части статьи излагаются достаточные условия оптимальности для нелинейных управляемых систем в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина.

1. Алгоритмы решения краевых задач

1.1. Метод продолжения для нелинейного векторного уравнения в \mathbb{R}^n

Рассмотрим векторное уравнение

$$\Phi(p) = 0, \quad (1.1)$$

где $\Phi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ — гладкая векторная функция. Предполагается разрешимость уравнения (1.1). Классический метод Ньютона

$$p_{k+1} = p_k - [\Phi'(p_k)]^{-1} \Phi(p_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.2)$$

требующий невырожденности вдоль процесса матрицы

$$\Phi'(p) = (\partial \Phi_i(p) / \partial p_j)_{i,j=1}^n, \quad (1.3)$$

в случае сходимости обладает квадратичной скоростью сходимости, но он обычно требует “достаточно хорошего” начального приближения p_0 . Этот недостаток метода Ньютона преодолевается в методе продолжения, который вырабатывает “хорошее” начальное приближение к решению при грубом начальном приближении. В методе продолжения проблема поиска решений уравнения (1.1) сводится к некоторой задаче Коши. Это можно сделать при определенных предположениях, формулируемых ниже. В методе продолжения рассматривается уравнение

$$\Phi(p) = (1 - \mu)\Phi(p_0), \quad \mu \in [0, 1], \quad (1.4)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-01-00359-а, 05-01-00193), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7581.2006.1) и Программы развития научного потенциала высшей школы (проект РНП-2.1.1.1714).

содержащее параметр μ . Здесь p_0 — некоторая фиксированная точка из \mathbb{R}^n , которую можно рассматривать в качестве начального приближения к решению уравнения (1.1); погрешность этой аппроксимации не предполагается “малой”. Уравнение (1.4) при $\mu = 0$ имеет решение p_0 . Для $\mu = 1$ уравнение (1.4) совпадает с исходным уравнением (1.1). В методе продолжения по параметру решение p_0 трансформируется в искомое решение уравнения (1.1). Закон этой трансформации описывается задачей Коши. Заметим, что вспомогательное уравнение (1.4) может быть выбрано в общей форме: $H(p, \mu) = 0$, $H(p_0, 0) = 0$, $H(p, 1) = \Phi(p)$; конкретный выбор функции H может быть сделан с учетом специфики решаемой задачи. Ограничимся рассмотрением вспомогательного уравнения метода продолжения в форме (1.4). Ниже считаются выполненными следующие два предположения.

Предположение 1 (о гладкой ветви). Уравнение (1.4) при любом $\mu \in [0, 1]$ имеет решение

$$p = p(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1; \quad (1.5)$$

функция (1.5) является гладкой функцией параметра μ и удовлетворяет начальному условию

$$p(\mu)|_{\mu=0} = p_0. \quad (1.6)$$

Предположение 2 (о невырожденности). Матрица (1.3) невырождена вдоль ветви (1.5).

Справедливость предположений 1 и 2 зависит от уравнения (1.1) и от выбора точки p_0 . Конечно, прямая проверка этих предположений в сложных нелинейных задачах невозможна. Успешное завершение вычислительного процесса может служить косвенным подтверждением их выполнения. Подстановка (1.5) в (1.4) приводит к тождеству

$$\Phi(p(\mu)) = (1 - \mu)\Phi(p_0), \quad \mu \in [0, 1].$$

Дифференцирование этого тождества по параметру μ влечет соотношение

$$\Phi'(p(\mu)) \frac{dp(\mu)}{d\mu} = -\Phi(p_0). \quad (1.7)$$

Из (1.6), (1.7) следует, что функция (1.5) является решением векторной задачи Коши

$$\text{IVP} : \quad \frac{dp}{d\mu} = -[\Phi'(p)]^{-1}\Phi(p_0), \quad p(\mu)|_{\mu=0} = p_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (1.8)$$

Численное решение задачи Коши (1.8) позволяет найти функцию $p(\mu)$, $0 \leq \mu \leq 1$; вектор

$$p(\mu)|_{\mu=1} \quad (1.9)$$

должен быть точным решением (1.1) в идеальной ситуации точного нахождения решения $p(\mu)$. В реальных вычислениях вектор (1.9) дает новое приближение для решения; точность решения зависит от использованного численного метода и его параметров. Один шаг итерационной процедуры ассоциируется с решением задачи Коши (1.8). Итерационный процесс p^0, p^1, p^2, \dots поиска решения уравнения (1.1) представим схемой

$$p^0 \xrightarrow{\text{IVP}(1.8), p_0=p^0} p^1 = p(\mu)_{(1.8)}|_{\mu=1} \xrightarrow{\text{IVP}(1.8), p_0=p^1} p^2 = p(\mu)_{(1.8)}|_{\mu=1} \longrightarrow \dots \quad (1.10)$$

Процесс (1.10) включает широкий спектр дискретных численных схем, определяемых привлекаемым численным методом решения задачи Коши. Метод Эйлера с шагом $\Delta\mu = 1$ в задаче Коши (1.8) превращает процесс (1.10) в процесс Ньютона (1.2). Задача Коши (1.8) допускает модификации (см., например, [6], уравнение продолжения с обратной связью).

1.2. Метод продолжения в краевых задачах

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad R(x(a), x(b)) = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.11)$$

Здесь $f(t, x) : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $R(x, y) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ являются гладкими векторными функциями. Предполагая существование решения краевой задачи (1.11), обсудим алгоритмические вопросы поиска ее решения. Решение краевой задачи можно свести к некоторому нелинейному векторному уравнению в \mathbb{R}^n . Выберем некоторую точку $t_* \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x|_{t=t_*} = p \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

Свобода выбора точки t_* может быть полезна для вычислительной практики. Пусть

$$x(t, p), \quad a \leq t \leq b, \quad (1.13)$$

— решение задачи Коши (1.12). Предполагается продолжимость решения (1.13) на весь отрезок $[a, b]$ для любого p . Начальное значение параметра $p \in \mathbb{R}^n$ ищется из векторного граничного условия в задаче (1.11), т.е. искомое p является решением уравнения

$$\Phi(p) \equiv R(x(a, p), x(b, p)) = 0. \quad (1.14)$$

Итак, краевая задача (1.11) сведена к конечному векторному уравнению (1.14). Далее к уравнению (1.14) применяется метод продолжения, описанный в 1.1. Матрица $\Phi'(p)$ определяется равенством $\Phi'(p) = R'_x \frac{\partial x(a, p)}{\partial p} + R'_y \frac{\partial x(b, p)}{\partial p}$. Здесь $(n \times n)$ -матрицы $R'_x(x, y)$, $R'_y(x, y)$ вычисляются вдоль решения (1.13), т.е. при $x = x(a, p)$, $y = x(b, p)$. Введем обозначение $X(t, p) \equiv \frac{\partial x(t, p)}{\partial p}$ для $(n \times n)$ -матрицы производных решения (1.13) по начальному условию. Матрица $X(t, p)$ определяется дифференциальным уравнением в вариациях

$$\dot{X} = AX, \quad X|_{t=t_*} = I, \quad a \leq t \leq b,$$

где $A = A(t, p) \equiv f'_x(t, x)|_{x=x(t, p)}$ есть $(n \times n)$ -матрица, I — единичная матрица. Основная задача Коши схемы продолжения по параметру имеет вид

$$\mathbf{IVP} : \quad \frac{dp}{d\mu} = -[\Phi'(p)]^{-1}\Phi(p_0), \quad p(0) = p_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (1.15)$$

где $\Phi(p) = R(x(a, p), x(b, p))$, $\Phi'(p) = R'_x(x(a, p), x(b, p))X(a, p) + R'_y(x(a, p), x(b, p))X(b, p)$.

Для одновременного вычисления векторной функции $x(t, p)$ и матричной функции $X(t, p)$ может быть записана следующая векторно-матричная задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & x|_{t=t_*} = p, \\ \dot{X} = f'_x(t, x)X, & X|_{t=t_*} = I, \quad a \leq t \leq b. \end{cases} \quad (1.16)$$

Задачу Коши (1.15) будем называть *внешней задачей*, задачу Коши (1.16) — *внутренней задачей*. Таким образом, предлагается итерационный процесс (1.10) для решения рассматриваемой краевой задачи (1.11) на основе внешней задачи (1.15) и внутренней задачи (1.16). На одном шаге итерационного процесса выполняется решение внешней задачи (1.15), в ходе решения которой происходит многократное обращение к решению внутренней задачи Коши (1.16) при различных значениях параметра p . Описанная схема применялась нами при разработке программы *BVP* в среде Maple для численного решения краевой задачи (1.11). При формировании матриц f'_x , R'_x , R'_y привлекаются возможности среды по выполнению аналитических вычислений.

Краевая задача принципа максимума Понтрягина может содержать разрывные или негладкие функции, например, функции *сигнатуры* (sign), *насыщения* (sat), *мертвой зоны* (dez) и т.д. Поэтому описанный подход для решения гладких краевых задач, как правило, не может быть использован непосредственно в краевых задачах принципа максимума. Другая веская причина для сглаживания заключается в том, что в задачах с управлениями *релейного типа* (bang-bang) обрабатываемая матрица может оказаться вырожденной в некоторых областях, а при сглаживании можно добиться невырожденности соответствующих матриц, поэтому оправдана предварительная работа по сглаживанию краевой задачи принципа максимума. Некоторые методы сглаживания задач управления описаны в [7–13, 16, 18]. Эти процедуры сглаживания связаны с изменением размерности управления. Регуляризация задачи иногда достигается без изменения размерности управления. Простые формулы сглаживания приводятся ниже.

Функция *сигнатуры* $\text{sign}(s)$ может быть приближена гладкими функциями

$$\text{SGN1}(s, \nu) = \frac{s}{\sqrt{\nu + s^2}}, \quad \text{SGN2}(s, \nu) = \text{th} \frac{s}{\nu}, \quad \text{SGN3}(s, \nu) = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{s}{\nu}.$$

Функция *насыщения* и функция *мертвой зоны*

$$\text{sat}(s) = \begin{cases} s, & |s| \leq 1, \\ \text{sign}(s), & |s| > 1, \end{cases} \quad \text{dez}(s) = \begin{cases} 0, & |s| < 1, \\ \text{sign}(s), & |s| > 1, \end{cases}$$

соответственно аппроксимируются следующими функциями:

$$\text{SAT}(s, \nu) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\nu + (s+1)^2} - \sqrt{\nu + (s-1)^2} \right),$$

$$\text{DEZ}(s, \nu) = \frac{1}{2} \left(\frac{s+1}{\sqrt{\nu + (s+1)^2}} + \frac{s-1}{\sqrt{\nu + (s-1)^2}} \right).$$

Параметр сглаживания ν является некоторым малым положительным числом. Соответствующие формулы сглаживания для экстремальных управлений при применении принципа максимума [15] могут быть получены в результате подходящего “малого” возмущения функционала.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Краевая задача двух тел [3].

$$\ddot{x} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \ddot{y} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad x(0) = a_1, \quad y(0) = a_2, \quad x(T) = b_1, \quad y(T) = b_2.$$

Эта краевая задача переписывается в виде:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & \dot{x}_2 = x_4, & x_1(0) = a_1, \quad x_1(T) = b_1, \\ \dot{x}_3 = -x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, & \dot{x}_4 = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, & x_2(0) = a_2, \quad x_2(T) = b_2. \end{cases}$$

Для данных $T = 7$, $a_1 = 2$, $a_2 = 0$, $b_1 = 1.0738644361$, $b_2 = -1.0995343576$, при выборе параметра $t_* = 0$, для начальных приближений $p_{01} = [2, 0, -0.5, 0.5]$ и $p_{02} = [2, 0, 0.5, -0.5]$ получены два разных решения со следующими векторами начальных условий в момент времени t_* :

$$\text{ans1} = [2., 0., 0.0000004834, 0.5000000745] \quad \text{и} \quad \text{ans2} = [2., 0., 0.4510782034, -0.2994186665].$$

Соответствующие траектории **1** и **2** системы (с начальной точкой S и конечной точкой F) в плоскости x_1x_2 показаны на рис. 1. Здесь и в следующих примерах для решения задачи Коши использовался метод Рунге — Кутты — Фельберга (rkf-45). Выбранная точность: 10^{-4} для решения внешней задачи, 10^{-6} для решения внутренней задачи. Число итераций — 3.

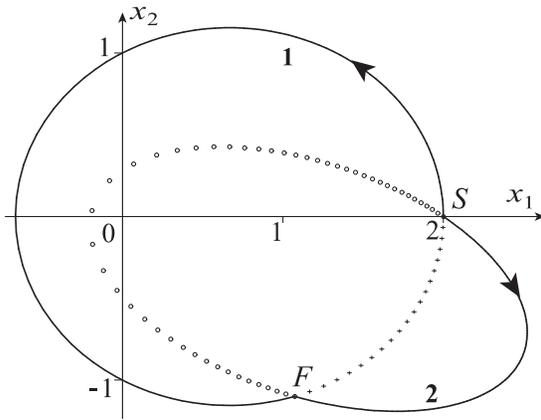


Рис. 1

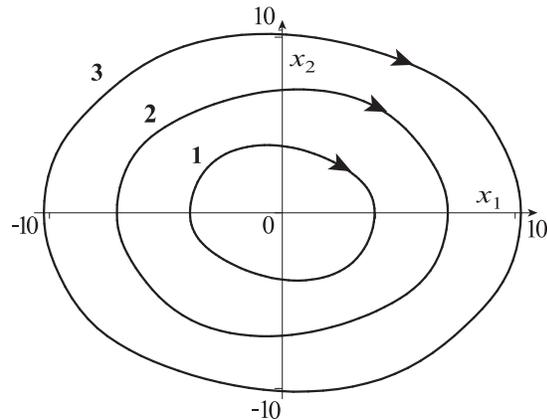


Рис. 2

Пример 2. Предельные циклы в системе Эквейлера [14].

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \sin(x_2).$$

Эта система имеет счетное множество предельных циклов. Некоторые из них вычисляются вместе с неизвестными периодами T . Выбор различных начальных векторов p_0 позволяет находить различные предельные циклы. Поиск предельного цикла сводится к краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 x_2, & \dot{x}_3 = 0, & x_1(0) = x_4(0), & x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_3(-x_1 + \sin(x_2)), & \dot{x}_4 = 0, & x_1(1) = x_4(1), & x_2(1) = 0. \end{cases}$$

Здесь введены вспомогательные переменные: $x_3 = T$ – период, и $x_4 = x_1(0)$ – абсцисса точки пересечения предельного цикла с осью x_1 . Выбирая точку $t_* = 0$, для начальных векторов $p_{01} = [2, 0, 2\pi, 2]$, $p_{02} = [6.5, 0, 2\pi, 6.5]$, $p_{03} = [9, 0, 2\pi, 9]$ получаем следующие векторы начальных условий в момент времени t_* :

$$\text{ans1} = [3.9655467678, 0, 6.4661401325, 3.9655467678],$$

$$\text{ans2} = [7.1078664573, 0, 6.3387892836, 7.1078664573],$$

$$\text{ans3} = [10.2456910360, 0, 6.3101121791, 10.2456910360].$$

Соответствующие предельные циклы **1**, **2**, **3** показаны на рис. 2.

Пример 3. Функционал типа “энергия” для трехкратного интегратора. Рассмотрим задачу управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = u, & |u| \leq 1, & x(0) = (1, 0, 0), & x(T) = (0, 0, 0), & T = 3.275, \\ L = \frac{1}{2} \int_0^T u(t)^2 dt \rightarrow \min. \end{cases} \quad (1.17)$$

Для задачи управления в \mathbb{R}^n

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \leq 1, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0, \quad L(u) = \frac{1}{2} \int_0^T u^2 dt \rightarrow \min, \quad T > 0 \text{ задано,}$$

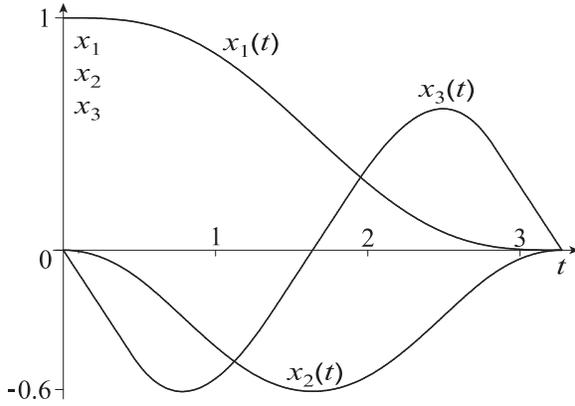


Рис. 3

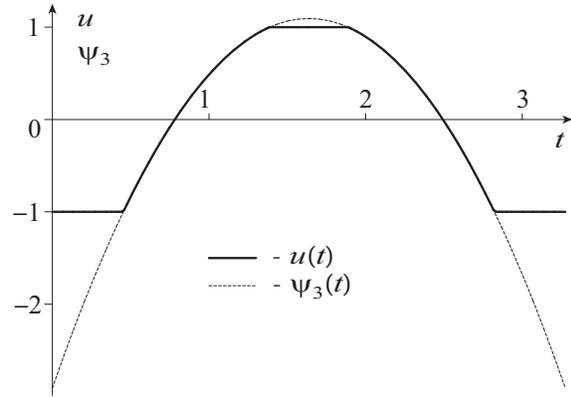


Рис. 4

с одномерным ограниченным управлением краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\dot{x} = Ax + b \cdot \text{sat}(b^* \psi), \quad \dot{\psi} = -A^* \psi, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0,$$

(здесь и далее символ * означает транспонирование), а в частном случае (1.17), при сглаженной функции насыщения, — вид системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = x_3, & \dot{x}_3 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\nu + (x_6 + 1)^2} - \sqrt{\nu + (x_6 - 1)^2} \right), \\ \dot{x}_4 = 0, & \dot{x}_5 = -x_4, & \dot{x}_6 = -x_5 \end{cases}$$

с граничными условиями из (1.17). Эта краевая задача решена программой *BVP* ($t_* = T$, $\nu = 10^{-10}$) с вектором начальных значений p в момент t_* : $\text{ans} = [0, 0, 0, -2.9850435834, 4.8880088678, -2.9083874537]$. Зависимость оптимальных фазовых переменных и управления от t показана на рис. 3, 4.

Пример 4. Задача быстрогодействия с областью управления в форме лунки [16]. Сглаживание негладкой области управления U , т.е. построение ее гладкой выпуклой аппроксимации U_μ , предполагает конструктивное описание опорной функции сглаженного² множества U_μ . Рассмотрим задачу быстрогодействия с областью управления U в форме лунки:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, & \dot{x}_2 = -\beta x_1 - \alpha x_2 + u_2, & x_1(0) = a_1, & x_1(T) = 0, & x_2(0) = a_2, & x_2(T) = 0, \\ u = (u_1, u_2) \in U = S_{\sqrt{2}}((+1, 0)) \cap S_{\sqrt{2}}((-1, 0)), & \alpha = 0.25, & \beta = 1.5, & a_1 = 4, & a_2 = 1. \end{cases}$$

Сглаженная лунка U_μ ($\mu > 0$ — малый параметр) задается опорной функцией, см. [18],

$$c(U_\mu, \psi) = \left(\sqrt{2(q_1^2 + q_2^2)} - \sqrt{q_1^2} \right) \Big|_{q_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{\mu \|\psi\|^2 + (\psi_1 + \psi_2)^2} + \sqrt{\mu \|\psi\|^2 + (\psi_1 - \psi_2)^2}), q_2 = \psi_2}.$$

Краевая задача принципа максимума сглаженной задачи управления, в безразмерном времени,

²Для множеств U , представимых в виде алгебраической суммы, выпуклой оболочки объединения множеств с известной гладкой выпуклой аппроксимацией, задача сглаживания решается конструктивно (см. [13]). Труднее работать с множествами U , заданными в форме пересечения нескольких множеств или в виде геометрической разности (см. [18]). Пример сглаживания лунки приведен ниже.

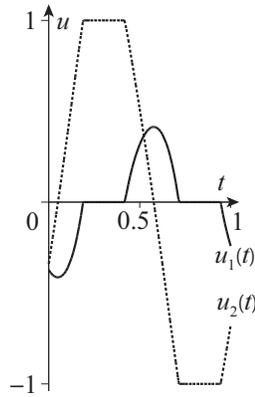


Рис. 5

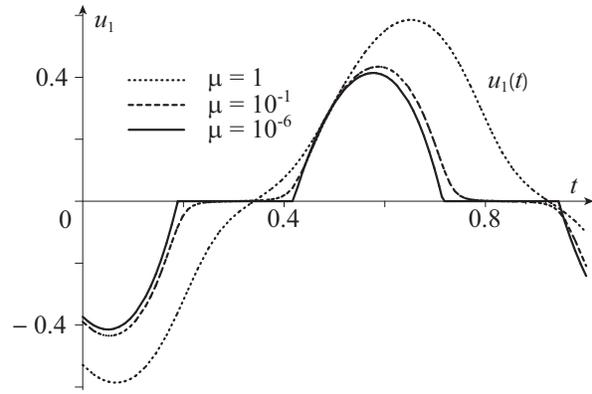


Рис. 6

состоит из пяти скалярных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = T(x_2 + c'_{\psi_1}(U_\mu, \psi)), & x_1(0) = a_1, & x_1(1) = 0, \\ \dot{x}_2 = T(-\beta x_1 - \alpha x_2 + c'_{\psi_2}(U_\mu, \psi)), & x_2(0) = a_2, & x_2(1) = 0, \\ \dot{\psi} = -TA^*\psi, & \psi_1(1)^2 + \psi_2(1)^2 = 1, \\ \dot{T} = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, & A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, & \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Решение краевой задачи при малых μ дает приближения к оптимальному процессу. На рис. 5 показаны графики управлений $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\mu = 10^{-6}$, на рис. 6 — графики $u_1(t)$ для трех значений $\mu = 1, 10^{-1}, 10^{-6}$. Вычисления выполнены с помощью упомянутой выше программы *BVP*.

Пример 5. Задача быстрогодействия.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \dot{x} + \beta x = u, & x \in \mathbb{R}^m, u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ x(0) = a_0, \dot{x}(0) = b_0, \quad x(T) = a_1, \dot{x}(T) = b_1, \quad T \rightarrow \min. \end{cases}$$

При $m = 2$ область управления U — лунка, при $m = 3$ — тело, полученное вращением лунки вокруг ее вертикальной оси. Краевая задача принципа максимума содержит $4m + 1$ уравнение. Область управления конструктивно сглаживается до телесного выпуклого компакта в пространстве \mathbb{R}^{2m} . Внимание авторов к изучению двух последних примеров привлек А.А.Чикрий.

Сделаем несколько важных замечаний. Если в краевой задаче (1.11) краевые условия содержат задание нескольких неизвестных функций $x_1(a) = x_{10}, \dots, x_k(a) = x_{k0}, 1 \leq k \leq n - 1$, то при выборе $t_* = a$ порядок внешней задачи можно понизить до $n - k$, полагая $p = (x_{k+1}(a), \dots, x_n(a))$, что является существенным при решении краевых задач принципа максимума, в которых фазовая переменная задана в начальный момент времени, а в роли искомого вектора p выступает неизвестное начальное значение сопряженной переменной. Описанная схема применима и для многоточечных краевых задач. Другие примеры расчетов см. в [17].

2. Множества достижимости плоских линейных управляемых систем

Для линейных управляемых систем множества достижимости определяются опорными функциями, и на этой основе могут быть построены различные вычислительные алгоритмы. Здесь излагается *простой* алгоритм построения множеств достижимости плоских линейных управляемых систем, основой которого служат параметрические уравнения границы плоского строго выпуклого компакта M , заданного опорной функцией $s(p) = \max_{x \in M} (x, p), p \in \mathbb{R}^2$.

Утверждение 1 (о параметрических уравнениях границы плоского выпуклого компакта).
Граница ∂M выпуклого компакта M описывается векторным уравнением

$$x = s_0(\alpha)q(\alpha) + s'_0(\alpha)q'(\alpha), \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad (2.1)$$

$$\text{где } s_0(\alpha) = s(p)|_{p=q(\alpha)}, \quad s'_0(\alpha) = \frac{d}{d\alpha}s_0(\alpha), \quad q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad q'(\alpha) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Уравнение (2.1) в координатной форме принимает вид двух параметрических уравнений

$$x_1 = s_0(\alpha) \cos \alpha - s'_0(\alpha) \sin \alpha, \quad x_2 = s_0(\alpha) \sin \alpha + s'_0(\alpha) \cos \alpha. \quad (2.2)$$

Функция $s_0(\cdot)$ является сужением опорной функции $s(\cdot)$ на единичную окружность.

Это утверждение является следствием теоремы о параметризации границы строго выпуклого компакта с помощью градиента его опорной функции. Действительно, векторное параметрическое уравнение границы ∂M имеет вид $x = s'(q(\alpha))$, $\alpha \in [0, 2\pi]$. Разлагая вектор $s'(q(\alpha))$ по базису $q(\alpha)$, $q'(\alpha)$, приходим к (2.2). Предлагаемый подход позволяет строить двумерные проекции множеств достижимости в многомерных линейных управляемых системах. Ниже приводятся примеры расчетов множеств достижимости на основе утверждения 1³.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + u, \quad x(0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^2; \quad u \in U \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.3)$$

где область управления U — выпуклый компакт, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — известная матрица, $x_0 = (x_{01}, x_{02})$ — заданное начальное состояние. Множество достижимости $X(T)$ системы (2.3) в момент времени T является выпуклым компактом. Множество $X(T)$ описывается опорной функцией

$$c(X(T), p) = (x_0, e^{TA^*} p) + \int_0^T c(U, e^{tA^*} p) dt, \quad p \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Полагая $e^{tA^*} = \begin{pmatrix} e_{11}(t) & e_{12}(t) \\ e_{21}(t) & e_{22}(t) \end{pmatrix}$, имеем: $e^{tA^*} p = \begin{pmatrix} e_{11}(t)p_1 + e_{12}(t)p_2 \\ e_{21}(t)p_1 + e_{22}(t)p_2 \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$,

$$(x_0, e^{TA^*} p) = x_{01}(e_{11}(T)p_1 + e_{12}(T)p_2) + x_{02}(e_{21}(T)p_1 + e_{22}(T)p_2).$$

Утверждение 2 (об экспоненциале квадратной матрицы второго порядка). *Имеет место следующая формула:*

$$e^{tA} = \begin{cases} 1/(\lambda_1 - \lambda_2) \left[(\lambda_1 e^{\lambda_2 t} - \lambda_2 e^{\lambda_1 t}) I + (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) A \right], & \lambda_1 \neq \lambda_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^1, \\ e^{\lambda t} \left[(1 - \lambda t) I + tA \right], & \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}^1, \\ e^{\rho t} / \nu \left[(\nu \cos(\nu t) - \rho \sin(\nu t)) I + \sin(\nu t) A \right], & \lambda_{1,2} = \rho \pm i\nu, \end{cases}$$

где $\lambda_{1,2}$ — собственные значения матрицы A , I — единичная матрица, i — мнимая единица.

³ Построение кривой, определяемой параметрическими уравнениями (2.2), в среде Maple достигается командой `plot([x1(alpha), x2(alpha), alpha=0..2*Pi])`; Предполагается, что функция $s_0(\alpha)$ описана аналитически, производная $s'_0(\alpha)$ находится средствами компьютерной алгебры командой `ds0:=unapply(diff(s0(alpha), alpha), alpha)`;

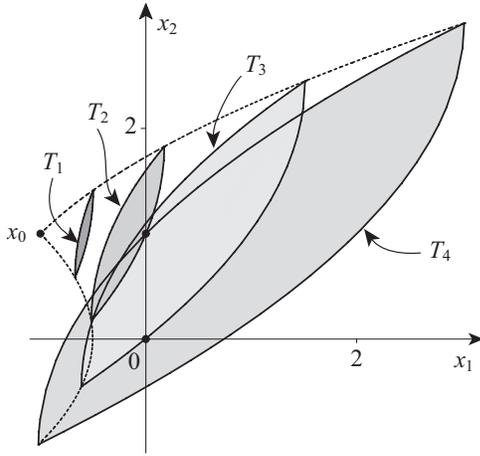


Рис. 7

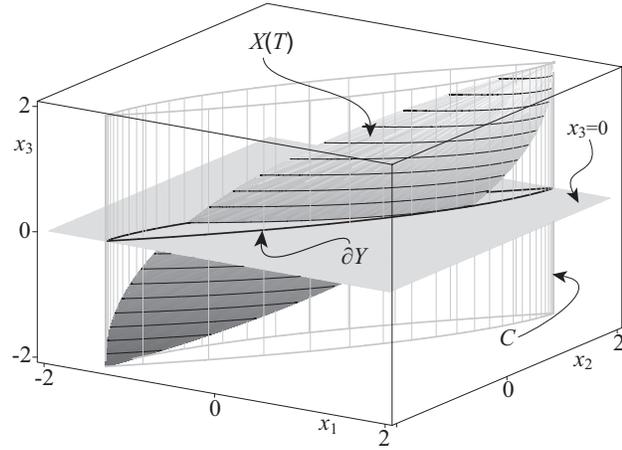


Рис. 8

Обсудим вопрос о практической реализации процесса построения множества достижимости $X(T)$ по его опорной функции (2.4). Интеграл в (2.4) представим приближенно суммой $\sigma(p, N) = \sum_{n=1}^N \frac{T}{N} c(U, e^{n \frac{T}{N} A^*} p)$, где N — число узлов⁴. Функцию (2.4) приближает функция $s(p, N) = (x_0, e^{TA^*} p) + \sigma(p, N)$. Полагаем

$$s_0(\alpha) = s(p, N)|_{p=q(\alpha)}, \quad ds_0(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} s_0(\alpha), \quad q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Функции (2.5) зависят не только от углового параметра α , но и от времени T , от числа узлов N . Граница $\partial X(T)$ описывается приближенно параметрическими уравнениями

$$x_1 = s_0(\alpha) \cos \alpha - ds_0(\alpha) \sin \alpha, \quad x_2 = s_0(\alpha) \sin \alpha + ds_0(\alpha) \cos \alpha, \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (2.6)$$

При необходимости опорная функция множества U может быть взята в сглаженной форме. Приведем примеры расчетов, выполненных в среде Maple на основе уравнений (2.6).

Пример 6. Для управляемого объекта (2.3) с $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $x_0 = (-1, 1)^*$, $U = \{u_1 = 0, |u_2| \leq 1\}$ (тележка), построить множества достижимости для моментов времени

$$T_1 = \sqrt{2} - 1, \quad T_2 = 2(\sqrt{2} - 1), \quad T_3 = \sqrt{6} - 1, \quad T_4 = 2.$$

Результаты расчетов показаны на Рис. 7. Число узлов $N = 100$.

Обсудим вопрос о построении двумерных проекций множеств достижимости *многомерных линейных управляемых систем*. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y = \pi X \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклые компакты. Здесь π — $(2 \times n)$ -матрица, транспонированная матрица π^* составлена из столбцов $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}^n$, $\|\pi_1\| = \|\pi_2\| = 1$, $\pi_1 \perp \pi_2$. Таким образом, Y есть двумерная проекция множества X . Опорная функция $s(q)$ множества Y и ее сужение $s_0(\alpha)$ на единичную окружность имеют вид

$$s(q) = c(X, \pi^* q), \quad q \in \mathbb{R}^2, \\ s_0(\alpha) \equiv s(q(\alpha)) = c(X, \pi^* q(\alpha)) = c(X, \pi_1 \cos(\alpha) + \pi_2 \sin(\alpha)), \quad \alpha \in [0, 2\pi]. \quad (2.7)$$

Если $X = X(T)$ есть множество достижимости n -мерной ($n > 2$) линейной управляемой системы, то, учитывая вид опорной функции (2.4), $p \in \mathbb{R}^n$, формулу (2.7) и параметрические уравнения (2.2), мы можем построить кривую ∂Y .

⁴При построении функции (2.4) можно привлекать и другие квадратурные формулы.

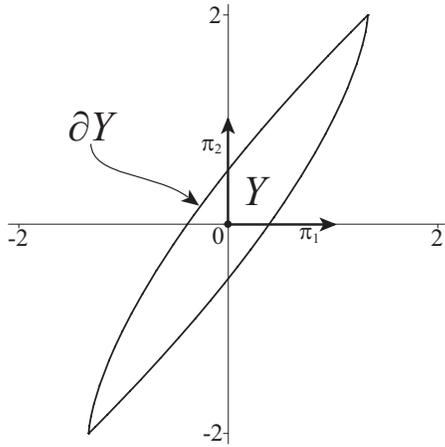


Рис. 9

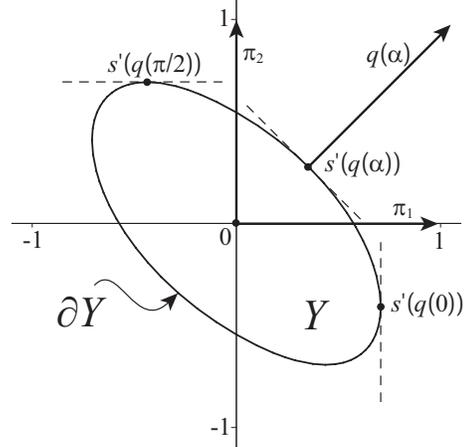


Рис. 10

Пример 7. Двумерная проекция на плоскость $x_3 = 0$ множества достижимости $X(T)$, $X(0) = \{0\}$, трехкратного интегратора:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = u; \quad |u| \leq 1; \quad x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

Полагая $\pi_1 = (1, 0, 0)^*$, $\pi_2 = (0, 1, 0)^*$, имеем:

$$c(X(T), p) = \int_0^T \left| \frac{t^2}{2} p_1 + t p_2 + p_3 \right| dt, \quad s_0(\alpha) = c(X(T), \pi^* q(\alpha)) = \int_0^T \left| \frac{t^2}{2} \cos \alpha + t \sin \alpha \right| dt.$$

Результаты расчета при $T = 2$ показаны на рис. 8, где жирной линией отмечена граница ∂Y проекции Y множества достижимости $X(2)$ на плоскость $x_3 = 0$. Эта линия является линией пересечения цилиндра (с образующими, параллельными оси x_3), описанного вокруг трехмерного множества достижимости, и плоскости $x_3 = 0$. Множество достижимости отмечено темным цветом, цилиндр — серым цветом, плоскость $x_3 = 0$ — светлой заливкой. На рис. 9 показаны линия ∂Y и проекция Y множества $X(2)$. В расчетах опорная функция области управления записывалась в сглаженной форме с малым параметром сглаживания $\nu = 10^{-6}$. Результат проектирования множества $X(2)$ на плоскость $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ показан на рис. 10. При вычислениях положено $\pi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)^*$, $\pi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, 1)^*$.

3. Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина

Принцип максимума Понтрягина [15] содержит необходимые условия оптимальности. После построения экстремального решения вопрос об его оптимальности остается открытым и требует дополнительного исследования. Можно построить примеры задач управления, имеющие более одного решения, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума, среди этих решений могут встретиться неоптимальные, и это утверждение иллюстрируется примером [19] (модифицированный пример из [20]) двумерной нелинейной управляемой системы на фиксированном отрезке времени $[0, T]$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 x_2 - u_2 x_1, & \dot{x}_2 = -u_1 x_1 - u_2 x_2, & x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \\ 0 \leq t \leq T, & u_1^2 + u_2^2 \leq 1, & J = x_1(T) \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases}$$

Краевая задача принципа максимума при этом допускает разрешение в аналитической форме (см. [19]), причем при малых значениях параметра T решение краевой задачи единственно, а при увеличении параметра T количество экстремальных решений неограниченно растет, так что не любое экстремальное решение является оптимальным. В то же время для определенных классов нелинейных задач управления решение, удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности в форме принципа максимума, оказывается оптимальным. К такому классу задач относятся некоторые оптимизационные модели экономической динамики (модель диффузии инноваций [24], модель “Рост” [23], модель Рамсея и др.), для которых актуальна проблема обоснования оптимальности решений, получаемых из краевой задачи принципа максимума при численном анализе. Здесь обсуждаются достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина, которые позволяют исследовать ряд задач оптимального управления, в том числе и задачи, допускающие особые режимы. Излагаемый материал развивает результаты статьи [21]. Основой предлагаемого подхода является *интегральное представление приращения функционала* для экстремального процесса в терминах функции Гамильтона — Понтрягина K и *интегральная оценка приращения функционала* для экстремального процесса в терминах функции Гамильтона M .

3.1. Достаточные условия оптимальности

Изучаются задачи максимизации и минимизации с интегральным функционалом на заданном отрезке времени при свободном правом конце траектории и фиксированных концах траектории для случая бесконечного горизонта и задач с особыми режимами.

3.1.1. Постановка задачи. Формулировка предположений. Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0; & x \in \mathbb{R}^n, & u \in U \subset \mathbb{R}^r, & t \in [t_0, t_1], \\ J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max_{u(\cdot)}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь x — фазовая переменная, u — управление, подчиненное геометрическому ограничению $u \in U$, где множество $U \subset \mathbb{R}^r$ — область управления; x_0 — заданное начальное состояние объекта, $T > 0$ — заданная длительность процесса управления. Запишем функцию Гамильтона — Понтрягина для задачи (3.1), полагая в ней $\psi_0 = 1$, $\psi \in \mathbb{R}^n$:

$$K(t, x, \psi, u) = f^0(t, x, u) + (\psi, f(t, x, u)). \quad (3.2)$$

Предположение П1. *Существует единственный максимизатор функции (3.2):*

$$u_*(t, x, \psi) = \arg \max_{u \in U} K(t, x, \psi, u) \quad \forall t, x, \psi. \quad (3.3)$$

С помощью максимизатора (3.3) строится функция Гамильтона (функция максимума):

$$M(t, x, \psi) = \max_{u \in U} K(t, x, \psi, u) = K(t, x, \psi, u)|_{u=u_*(t, x, \psi)}. \quad (3.4)$$

Запишем краевую задачу принципа максимума для задачи управления (3.1):

$$\begin{cases} \dot{x} = K'_\psi(t, x, \psi, u)|_{u=u_*(t, x, \psi)} \equiv F(t, x, \psi), & x(t_0) = x_0, \\ \dot{\psi} = -K'_x(t, x, \psi, u)|_{u=u_*(t, x, \psi)} \equiv G(t, x, \psi), & \psi(t_1) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Предположение П2. *Существует решение краевой задачи принципа максимума (3.5):*

$$(x(t), \psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (3.6)$$

О единственности решения (3.6) краевой задачи принципа максимума (3.5) никаких предположений не делается. Строится суперпозиция максимизатора (3.3) и решения (3.6) — допустимое управление $u(t) = u_*(t, x, \psi)|_{x=x(t), \psi=\psi(t)}$, $t_0 \leq t \leq t_1$. Тройка и пара функций

$$(x(t), \psi(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3.7)$$

$$(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3.8)$$

удовлетворяющие принципу максимума с участием сопряженной переменной $\psi(t)$, называются соответственно *экстремальной тройкой* и *экстремальным процессом*. Вопрос об оптимальности экстремального процесса (3.8) решает теорема 1 и ее модификации.

Предположение П3. *Функции $M(t, x, \psi)$ и $M'_x(t, x, \psi)$ определены и непрерывны.*

Предположение П4. *Сопряженное уравнение в (3.5) допускает запись*

$$\dot{\psi} = -M'_x(t, x, \psi). \quad (3.9)$$

З а м е ч а н и е. Последнее предположение можно заменить условием

$$\dot{\psi}(t) = -M'_x(t, x(t), \psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (3.10)$$

вдоль решения (3.6) задачи (3.5). Проверка условия (3.10) требует знания решения (3.6), тогда как проверка (3.9) не требует этого и может быть более удобной для применения.

Предположение П5. *Функция $m(t, x) \equiv M(t, x, \psi(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, где $\psi(t)$ — вторая компонента решения (3.6), является вогнутой функцией аргумента x при $t \in (t_0, t_1)$.*

3.1.2. Достаточные условия оптимальности.

Теорема 1. *В предположениях П1–П5 процесс (3.8) оптимален в задаче (3.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, наряду с исследуемым экстремальным процессом (3.8), любой другой допустимый процесс $(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, где $\hat{u}(t)$ — допустимое управление, $\hat{x}(t)$ — траектория, отвечающая этому управлению: $\hat{x}(t_0) = x_0$, $\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$. Введем обозначения для приращений управления, траектории и функционала:

$$\Delta u(t) = \hat{u}(t) - u(t), \quad \Delta x(t) = \hat{x}(t) - x(t), \quad \Delta J[u] = J[\hat{u}] - J[u].$$

Для доказательства теоремы будет установлено неравенство $\Delta J[u] \leq 0$. Это неравенство может быть получено на основе приведенного ниже интегрального представления приращения ΔJ функционала. Исходным пунктом этого плана служит следующее представление нуля:

$$0 = (\psi(t), \Delta x(t))|_{t=t_0}^{t=t_1}, \quad (3.11)$$

где $\psi(t)$ — сопряженная переменная (вторая компонента решения (3.6) краевой задачи (3.5) и экстремальной тройки (3.7)), $\Delta x(t)$ — приращение траектории. Справедливость формулы (3.11) вытекает из условия трансверсальности $\psi(t_1) = 0$ и очевидного равенства $\Delta x(t_0) = 0$.

Исходя из формулы (3.11) и привлекая формулу Ньютона — Лейбница, соотношения (3.10),

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} [f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) - f^0(t, x(t), u(t))] dt,$$

$$\begin{aligned}(\psi(t), f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))) &= K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - f^0(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), \\(\psi(t), f(t, x(t), u(t))) &= K(t, x(t), \psi(t), u(t)) - f^0(t, x(t), u(t)),\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}0 &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} (\psi(t), \Delta x(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} [(\psi(t), \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t)) + (\dot{\psi}(t), \Delta x(t))] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - K(t, x(t), \psi(t), u(t)) - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] dt - \Delta J.\end{aligned}$$

Отсюда в силу равенства $K(t, x(t), \psi(t), u(t)) = M(t, x(t), \psi(t))$ находим

$$\Delta J = \int_{t_0}^{t_1} [K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] dt. \quad (3.12)$$

Из (3.12) и неравенства $K(t, \hat{x}(t), \psi(t), \hat{u}(t)) \leq M(t, \hat{x}(t), \psi(t))$ вытекает оценка

$$\Delta J \leq \int_{t_0}^{t_1} [M(t, \hat{x}(t), \psi(t)) - M(t, x(t), \psi(t)) - (M'_x(t, x(t), \psi(t)), \Delta x(t))] dt. \quad (3.13)$$

В силу П5 интегрант в (3.13) неположителен, что влечет за собой неравенство $\Delta J \leq 0$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение теоремы 1 сохраняется для задачи управления

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1; & x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^r, & t \in [t_0, t_1], \\ J[u] = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max_{u(\cdot)} \end{cases} \quad (3.14)$$

с двумя фиксированными концами траектории. Ключевое в доказательстве теоремы соотношение (3.11) имеет место, так как $\Delta x(t_0) = \Delta x(t_1) = 0$. В краевой задаче (3.5) вместо условия трансверсальности $\psi(t_1) = 0$ присутствует условие на траекторию $x(t_1) = x_1$.

З а м е ч а н и е 2. Если в (3.1), (3.14) заменить \max на \min , то функция (3.2) записывается в виде $K = -f^0(t, x, u) + (\psi, f(t, x, \psi))$.

З а м е ч а н и е 3. Достаточные условия оптимальности применимы и для задач управления на бесконечном промежутке времени: $t_0 \leq t < +\infty$. Допустимыми управлениями считаются управления, гарантирующие продолжимость решений основного дифференциального уравнения управляемого движения на бесконечный промежуток времени $t_0 \leq t < +\infty$ и сходи-

мость несобственного интеграла $\int_{t_0}^{+\infty} f^0(t, x(t), u(t)) dt$. Достаточные условия формулируются в

прежней форме с дополнительным предположением $0 = (\psi(t), \Delta x(t)) \Big|_{t_0}^{+\infty}$. Последнее условие выполняется, например, если $\psi(+\infty) = 0$ и все допустимые траектории ограничены.

З а м е ч а н и е 4. Предположение П1 исключает из рассмотрения задачи с особыми режимами. Предложенная процедура вывода неравенства $\Delta J \leq 0$ позволяет охватить и задачи с особыми режимами. Для этого вместо П1, П2 формулируется следующее предположение.

Предположение П0. Пусть $(x(t), \psi(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, $\psi(t_1) = 0$ — экстремальная тройка для задачи (3.1), т.е. пара $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина с участием сопряженной переменной $\psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, причем $\psi_0 = 1$.

Теорема 2. Если (1) выполняется предположение П0, (2) для функции (3.4) выполнено предположение П3, (3) вдоль экстремального решения выполняется соотношение (3.10), (4) имеет место условие вогнутости (предположение П5), то процесс $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, является оптимальным для задачи управления (3.1).

Предложенные достаточные условия применимы в линейно-квадратичной задаче (конечный и бесконечный горизонт) [22], в моделях диффузии инноваций [24], “Рост” [23], Рамсея и др., что заслуживает отдельного обсуждения.

Поступила 05.06.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давиденко Д.Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР. 1953. Т. 88, № 4. С. 601–602.
2. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Bellman R.E., Kalaba R.E. Quasilinearization and nonlinear boundary value problems. New York, 1965.
4. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Киев: Наукова думка, 1966.
5. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. Iterative solution of nonlinear equations in several variables. New York: Acad. Press, 1970.
6. Аввакумов С.Н. Метод продолжения по параметру с обратной связью // “Понтрягинские чтения-7” на ВМШ “Современные методы в теории краевых задач”: Тез. докл. Воронеж, 1996. С. 6.
7. Киселев Ю.Н. Линейная теория быстрогодействия с возмущениями. М.: Изд-во МГУ, 1986.
8. Киселев Ю.Н. Быстросходящиеся алгоритмы решения линейной задачи быстрогодействия // Кибернетика. 1990. № 6. С. 47–57.
9. Киселев Ю.Н., Орлов М.В. Численные алгоритмы линейных быстрогодействий // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. № 12. С. 1763–1771.
10. Киселев Ю.Н., Орлов М.В. Метод потенциалов в линейной задаче быстрогодействия // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32, № 1. С. 44–51.
11. Киселев Ю.Н., Орлов М.В. Нелинейная краевая задача принципа максимума в линейной задаче быстрогодействия // Дифференц. уравнения. 1995. № 12. С. 1843–1850.
12. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н., Орлов М.В. Методы решения некоторых задач оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 3–31.
13. Аввакумов С.Н. Гладкая аппроксимация выпуклых компактов // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 184–200.
14. Stoker J.J. Nonlinear vibrations. New York. 1950.
15. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
16. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. Примеры решения краевых задач принципа максимума // Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках: Тез. докл. конф. Воронеж, 2000. С. 7.
17. Avvakumov S., Kiselev Yu. Boundary value problem for ODE with applications to optimal control // Report at the Conference SSI-2004. USA. Orlando. Florida. 5 p.
18. Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н. Опорные функции некоторых специальных множеств // Проблемы динамического управления / Под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжимского. М.: МАКС Пресс, 2005. Вып. 1. С. 24–110.
19. Киселев Ю.Н. Построение точных решений для нелинейной задачи быстрогодействия специального вида // Фундамент. и прикл. математика. 1997. Т. 3, № 3. С. 847–867.

20. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления М.: Наука, 1972.
21. **Киселев Ю.Н.** Достаточные условия оптимальности в терминах конструкций принципа максимума Понтрягина // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. Планерное Московской обл. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 57–67.
22. **Киселев Ю.Н.** Линейно-квадратичная задача оптимального управления: анализ с помощью принципа максимума // Проблемы динамического управления / Под ред. Ю.С. Осипова, А.В. Кряжковского. М.: МАКС Пресс, 2005. Вып. 1. С. 168–182.
23. **Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н.** Численный метод поиска оптимального решения: модель “РОСТ” // Математические модели в экономике и биологии: Материалы научного семинара. Планерное Московской обл. М.: МАКС Пресс, 2003. С. 1–15.
24. **Avvakumov S.N., Kiselev Yu.N.** Qualitative study and algorithms in the mathematical model of innovation diffusion // J. Math. Sci. 2003. V. 116, no. 6. P. 3657–3672.

УДК 517.935, 519.653

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ В L_1 ОДНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЯ¹

А. Ю. Вдовин, А. В. Ким, С. С. Рублева

В статье предлагается модификация динамического алгоритма Ю.С. Осипова и А.В. Кряжимского, обладающая в пространстве L_1 асимптотическим порядком точности, сколь угодно близким к $1/2$. Рассматривается возможность достижения этого порядка в классе конечношаговых динамических алгоритмов.

Статьями [1–3] было положено начало большому циклу работ об аппроксимациях движений динамических систем, а также действующих на них возмущений. Упомянутые аппроксимации строились с помощью алгоритмов, обрабатывающих результаты наблюдений фазовых координат.

Особые требования, предъявляемые к этим алгоритмам, состоят в том, что искомые величины должны восстанавливаться на этапе функционирования системы в темпе реального времени и обладать устойчивостью к информационным ошибкам. Их работа рассматривается как процесс управления вспомогательной динамической системой с использованием позиционных методов из теории дифференциальных игр [4].

Следуя предложенному в процитированных работах подходу, рассмотрим функционирующую на заданном временном интервале $[t_0, T]$ динамическую систему:

$$x'(t) = f(t, x(t), v(t)), \quad (1)$$

правая часть которой имеет вид

$$f(t, x(t), v(t)) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))v(t).$$

Здесь $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ — непрерывные отображения $[t_0, T] \times \mathbb{R}^m$ в \mathbb{R}^m и в пространство $(m \times q)$ -матриц со спектральной нормой соответственно. Значения $v(t) \in \mathbb{R}^q$ — величины возмущения, действующего на систему в момент t . Далее $|\cdot|$ — нормы в упомянутых пространствах, а \mathbf{V} — множество всех возмущений, т.е. измеримых по Лебегу функций $v(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow Q$, где Q — заданный выпуклый компакт из \mathbb{R}^q . Без ограничения общности предполагаем, что $0 \in Q$.

Движением, порожденным помехой $v(\cdot)$, называется всякое определенное по Каратеодори на $[t_0, T]$ решение уравнения (1). В связи с этим в дальнейшем, где это необходимо, равенства и неравенства считаются выполненными почти всюду. Совокупность всех движений, порожденных помехой $v(\cdot)$, обозначается $\mathcal{X}(v(\cdot))$. Считаем, что $\mathcal{X}(v(\cdot))$ непусто для любого $v(\cdot) \in \mathbf{V}$, и пусть $\mathcal{X} \subset \bigcup_{v(\cdot) \in \mathbf{V}} \mathcal{X}(v(\cdot))$ непусто и равномерно ограничено. Тогда для некоторого компакта $X \subset \mathbb{R}^m$ включение $x(t) \in X$ имеет место при всех $t \in T$, $x(\cdot) \in \mathcal{X}$. Фиксируем положительные константы a , L и M такие, что $|v| \leq M$ при $v \in Q$, а $|x| \leq L$ при $x \in X^a$, где X^a — замкнутая a -окрестность X .

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 05-01-00330, 05-01-00732), Урало-Сибирского интеграционного проекта и Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН №22 “Процессы управления”.

Для каждого движения $x(\cdot)$ из \mathcal{X} рассмотрим множество всех возмущений, его порождающих

$$\mathbf{V}_*(x(\cdot)) = \{v(\cdot) \in \mathbf{V} : x(\cdot) \in \mathcal{X}(v(\cdot))\}.$$

Пусть $p \in \mathbb{N}$, а $\|\cdot\|_p$ — норма пространства $L_p([t_0, T], \mathbb{R}^q)$, тогда решение задачи

$$\inf_{v(\cdot) \in \mathbf{V}_*(x(\cdot))} \|v(\cdot)\|_p$$

единственно с точностью до эквивалентности по мере Лебега. Далее это решение обозначается $v_*(\cdot|x(\cdot))$.

Измерением будем называть всякую функцию $\xi(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$, а измерение такое, что $\sup_{t \in [t_0, T]} |\xi(t) - x(t)| \leq h$ — измерением с погрешностью $h > 0$ движения $x(\cdot) \in \mathcal{X}$. Множество таких измерений обозначим $\Theta_h(x(\cdot))$.

Рассмотрим множество операторов, ставящих в соответствие каждому измерению движения из \mathcal{X} некоторое возмущение из \mathbf{V} . Семейство таких операторов $(D_h)_{h>0}$ назовем p -регуляризирующим, если для всех $x(\cdot) \in \mathcal{X}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{\xi(\cdot) \in \Theta_h(x(\cdot))} \|D_h(\xi(\cdot)) - v_*(\cdot|x(\cdot))\|_p = 0.$$

Оператор восстановления возмущения в темпе реального времени, следуя [1], станем называть конечношаговым динамическим алгоритмом (КДА). Будем трактовать КДА D как пятерку

$$D : (n, \tau(\cdot), W_i^0(\cdot), U(\cdot), W(\cdot)),$$

где

$$\begin{aligned} \tau(\cdot) &: [t_0, T] \rightarrow [t_0, T]; \\ U(\cdot) &: [t_0, T] \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m \rightarrow Q; \\ W(\cdot) &: [t_0, T] \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^m; \\ W_i^0(\cdot) &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s; \\ s, n &\in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2}$$

Назовем s -мерную управляемую динамическую систему

$$w_i(t) = W(t, t_i, w_i(t_i), \xi(t_i), u(t)),$$

функционирующую на временном интервале $[\tau(t_i), t_{i+1}]$ с начальным условием

$$w_i(\tau(t_i)) = W_i^0(\xi(\tau(t_i))),$$

моделью системы (1), где $u(t) = U(t_i, w_i(t_i), \xi(t_i))$ — значение ее управления при $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Здесь $t_i = t_0 + i\Delta$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $\Delta = \frac{T-t_0}{n}$.

Работа КДА протекает во времени по следующей схеме. В начальный момент времени t_0 (либо заранее) задаются узлы разбиения отрезка $[t_0, T] : t_0, \dots, t_n$ и осуществляется измерение $\xi(t_0)$. В каждый момент t_i производится измерение $\xi(t_i)$ и по правилам (2) формируются продолжения на $[t_i, t_{i+1}]$ построенных на $[\tau(t_i), t_i]$ функций $w_i(\cdot)$, $u(\cdot)$. Результат работы алгоритма — построение к моменту $T = t_n$ кусочно-постоянного управления $u(\cdot)$ для модели, т.е. $D_h(\xi(\cdot)) = u(\cdot)$.

Пусть КДА $(D_h^1)_{h>0}$ имеет вид:

$$n = \left\lceil \frac{T-t_0}{h} \right\rceil + 1, \quad s = m, \quad \tau(t) \equiv t_0, \quad W_i^0(\xi(\tau(t_i))) \equiv \xi(t_0)$$

(здесь квадратные скобки означают целую часть числа), $U(t_i, w_i(t_i), \xi(t_i))$ — результат проекции на Q точки минимума функции

$$u \rightarrow 2(w(t_i) - \xi(t_i)) f_2(t_i, \xi(t_i)) u + \alpha(h)|u|^2,$$

где $\alpha(\cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$,

$$W(t, t_i, w_i(t_i), \xi(t_i), u(t_i)) = w_i(t_i) + f(t_i, \xi(t_i), u(t_i)) (t - t_i).$$

А.В. Кряжимский и Ю.С. Осипов [1] доказали следующее.

Теорема 1. Пусть $\alpha(h) \rightarrow 0$, $h/\alpha(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow +0$, тогда $(D_h^1)_{h>0}$ — 2-регуляризирующий КДА.

Отметим, что вид $(D_h^1)_{h>0}$ позволяет опустить индекс у $w_i(\cdot)$.

Назовем точностью семейства $(D_h)_{h>0}$ в пространстве $L_p([t_0, T], \mathbb{R}^q)$ величину

$$\mu(h) = \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{X}} \sup_{\xi(\cdot) \in \Theta_h(x(\cdot))} \|D_h(\xi(\cdot)) - v_*(\cdot|x(\cdot))\|_p.$$

Известно, что оператор $A: x(\cdot) \rightarrow v_*(\cdot|x(\cdot))$ в общем случае разрывен; отсюда следует, что не существует семейства $(D_h)_{h>0}$ такого, что его точность $\mu(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Число $r > 0$ называется асимптотическим порядком точности семейства $(D_h)_{h>0}$ в пространстве $L_p([t_0, T], \mathbb{R}^q)$, если существуют такие положительные числа λ_1, λ_2 , что справедливы неравенства:

$$\lambda_1 h^r \leq \mu(h) \leq \lambda_2 h^r.$$

В [5] доказана

Теорема 2. Пусть $f_1(\cdot), f_2(\cdot)$ удовлетворяют условию Липшица, $f_2(\cdot)$ является матрицей полного ранга вдоль движения, $v_*(\cdot|x(\cdot))$ обладает ограниченной вариацией $\left(\bigvee_{t_0}^T v_*(\cdot|x(\cdot))\right)$.

Тогда наивысший асимптотический порядок точности КДА $(D_h^1)_{h>0}$ в пространстве $L_2([t_0, T], \mathbb{R}^q)$ равен $1/3$ и достигается при $\alpha(h) = h^{2/3}$.

В статье показывается, что порядок точности КДА $(D_h^1)_{h>0}$ в $L_1([t_0, T], \mathbb{R})$ может быть сделан сколь угодно близким к $1/2$, а также предлагается другой КДА, имеющий порядок точности, равный $1/2$.

Пусть $\delta > 0$; рассмотрим действие КДА $(D_h^1)_{h>0}$ на расширенном временном промежутке $[t_0 - \delta, T]$, положив $x(t) \equiv x(t_0)$, $\xi(t) \equiv \xi(t_0)$ для $t \in [t_0 - \delta, t_0)$. Заметим, что реализация КДА $(D_h^1)_{h>0}$ на интервале $[t_0 - \delta, t_0)$ упрощается, так как на нем $u(t) \equiv 0$ и $w(t) \equiv \xi(t_0)$. Поэтому для $t \geq t_0$ результаты действия алгоритма будут полностью идентичны применению КДА на $[t_0, T]$. Отметим также, что вариация $\bigvee_{t_0-\delta}^T v_*(\cdot|x(\cdot)) = v_*(t_0|x(t_0)) + \bigvee_{t_0}^T v_*(\cdot|x(\cdot))$ ограничена.

Далее, для упрощения изложения, рассмотрим систему с простым движением: $f_1(t, x) \equiv 0$, $m = 1$, $f_2(t, x) \equiv 1$. При этих предположениях задача восстановления возмущения становится задачей численного дифференцирования функции $x(\cdot)$ при неточной информации о ней. Далее $v_*(\cdot|x(\cdot)) = v_*(\cdot)$.

При $t \in [t_i, t_{i+1})$ система-модель для КДА принимает вид:

$$w(t) = w(t_i) + u_i(t - t_i), \quad u_i = u(t_i), \quad (3)$$

$$u_i = \frac{\xi(t) - w(t_i)}{\alpha}, \quad \text{где } \xi(t) = \xi(t_i). \quad (4)$$

Отметим, что при построении u_i мы не применяем процедуру проектирования на Q , как это предполагалось в работе [1], однако ее использование лишь улучшит результат.

Рассмотрим задачу Коши:

$$w'_*(t) = \frac{x(t) - w_*(t)}{\alpha}, \quad w_*(t_0) = x_0. \quad (5)$$

Обозначим $u_*(t) = \frac{x(t) - w_*(t)}{\alpha}$. Решение задачи (5) имеет вид:

$$w_*(t) = x(t) - \int_{t_0}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} v_*(\tau) d\tau,$$

поэтому

$$u_*(t) = \frac{1}{\alpha} \int_{t_0}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} v_*(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Лемма 1. Пусть $\alpha(h)/\delta(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N} \exists h_k$ такое, что $\forall h \in (0, h_k]$, $\forall t \in [t_0, T]$ справедлива оценка

$$|u_*(t) - v_*(t)| \leq 3M \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^k + \bigvee_{t-\delta}^t v_*(\cdot) \quad (\delta = \delta(h)). \quad (7)$$

Доказательство. В силу представления

$$v_*(t) = \left(1 - e^{\frac{t_0-\delta-t}{\alpha}}\right)^{-1} \frac{1}{\alpha} \int_{t_0-\delta}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} v_*(\tau) d\tau,$$

на основании (6) имеем

$$\begin{aligned} u_*(t) - v_*(t) &= \frac{1}{\alpha} \left(\int_{t_0-\delta}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} v_*(\tau) d\tau - \int_{t_0-\delta}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} v_*(t) d\tau \right) - \frac{e^{\frac{t_0-\delta-t}{\alpha}}}{\alpha \left(1 - e^{\frac{t_0-\delta-t}{\alpha}}\right)} \int_{t_0-\delta}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} v_*(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{t_0-\delta}^{t-\delta} e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} [v_*(\tau) - v_*(t)] d\tau + \frac{1}{\alpha} \int_{t-\delta}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} [v_*(\tau) - v_*(t)] d\tau - e^{\frac{t_0-\delta-t}{\alpha}} v_*(t). \end{aligned}$$

Поэтому для $t \geq t_0$

$$\begin{aligned} |u_*(t) - v_*(t)| &\leq 2M e^{-\frac{\delta}{\alpha}} + \bigvee_{t-\delta}^t v_*(\cdot) \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\alpha}}\right) + e^{-\frac{\delta}{\alpha}} v_*(t) \leq 3M e^{-\frac{\delta}{\alpha}} + \bigvee_{t-\delta}^t v_*(\cdot) \\ &\leq 3M \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^k + \bigvee_{t-\delta}^t v_*(\cdot). \end{aligned}$$

Лемма 2. Для КДА $(D_h^1)_{h>0} \exists h_1, M_1 > 0 : \forall h \in [0, h_1], \forall t \in [t_0, T]$

$$|u(t)| \leq M_1.$$

Доказательство. Заметим, что правило нахождения $w(t)$ (3) можно трактовать как решение методом Эйлера задачи (5).

Тогда $\forall t \in [t_0, T] \exists h_1 > 0, K > 0 : \forall h \in (0, h_1)$, справедлива оценка

$$|w_*(t) - w(t)| \leq K \frac{h^2}{\alpha^2}. \quad (8)$$

Доказательство этого факта опускаем, так как оно повторяет рассуждения, приведенные в работе [6]. Отметим лишь то, что K выписывается конструктивно. В силу (4), (5), (8) получаем:

$$|u_*(t) - u(t)| = \left| \frac{x(t) - w_*(t)}{\alpha} - \frac{\xi(t) - w(t)}{\alpha} \right| \leq \frac{h}{\alpha}(1 + M) + K_1 \frac{h^2}{\alpha^3}.$$

Кроме того, в силу (7) $u_*(\cdot)$ ограничено, что влечет за собой справедливость леммы.

Лемма 3. Пусть $\Delta = h$. Тогда $\exists h_2 > 0 : \forall h \in (0, h_2), \forall t \in [t_0, T]$

$$|u_*(t) - u(t)| \leq \frac{h}{\alpha}(2M + M_1 + 3).$$

Доказательство. Пусть $y(t) = w(t) - w_*(t)$. Очевидно, что при $t \in [t_i, t_{i+1})$ функция $y(\cdot)$ является решением дифференциального уравнения:

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{\alpha} + \frac{\xi(t) - x(t)}{\alpha} + u_i \frac{t - t_i}{\alpha}, \quad |y(t_0)| \leq h.$$

Так как

$$y(t) = y(t_0)e^{\frac{t_0-t}{\alpha}} + \int_{t_0}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} \left(\frac{\xi(\tau) - x(\tau)}{\alpha} + u_i \frac{\tau - t_i}{\alpha} \right) d\tau,$$

а

$$\left| \frac{\xi(t) - x(t)}{\alpha} + u_i \frac{t - t_i}{\alpha} \right| \leq \frac{h}{\alpha}(1 + M + M_1),$$

то

$$|y(t)| \leq h + \frac{h}{\alpha}(1 + M + M_1) \int_{t_0}^t e^{\frac{\tau-t}{\alpha}} d\tau \leq h(M + M_1 + 2).$$

В силу (4), (5) и условий леммы получаем:

$$|u_*(t) - u(t)| = \left| \frac{x(t) - w_*(t)}{\alpha} - \frac{\xi(t) - w(t)}{\alpha} \right| \leq \frac{h}{\alpha}(2M + M_1 + 3).$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия лемм 1–3. Тогда

$$\|u(t) - v_*(t)\|_1 \leq \frac{h}{\alpha}(2M + M_1 + 3)(T - t_0) + 3M \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^k (T - t_0) + \delta \bigvee_{t_0}^T v_*(\cdot). \quad (9)$$

Доказательство. На основании лемм 1–3

$$\|u(t) - v(t)\|_1 \leq \frac{h}{\alpha}(2M + M_1 + 3)(T - t_0) + 3M \left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^k (T - t_0) + \int_{t_0}^T \bigvee_{t-\delta}^t v_*(\cdot) dt.$$

Оценивая последний интеграл, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T \bigvee_{t-\delta}^t v_*(\cdot) dt &= \int_{t_0}^T \left(\bigvee_{t-\delta}^T v_*(\cdot) - \bigvee_t^T v_*(\cdot) \right) dt = \int_{t_0}^T \bigvee_{t-\delta}^T v_*(\cdot) dt - \int_{t_0}^T \bigvee_t^T v_*(\cdot) dt \\ &\leq \int_{t_0-\delta}^{T-\delta} \bigvee_t^T v_*(\cdot) dt - \int_{t_0}^T \bigvee_t^T v_*(\cdot) dt \leq \int_{t_0-\delta}^{T-\delta} \bigvee_t^T v_*(\cdot) dt - \int_{t_0}^{T-\delta} \bigvee_t^T v_*(\cdot) dt = \int_{t_0-\delta}^{t_0} \bigvee_t^T v_*(\cdot) dt \leq \delta \bigvee_{t_0}^T v_*(\cdot) dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$\|u(t) - v(t)\|_1 \leq \frac{h}{\alpha} (2M + M_1 + 3) (T - t_0) + 3M \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^k (T - t_0) + \delta \bigvee_{t_0}^T v_*(\cdot).$$

З а м е ч а н и е 1. Оптимизация по порядку правой части (9) реализуется при $\delta = \alpha^{\frac{k}{k+1}}$, $\alpha = h^{\frac{k+1}{2k+1}}$. Это означает, что порядок верхней оценки точности КДА (при выборе достаточного большого значения k) может быть сделан сколь угодно близким к $1/2$.

Получим нижнюю оценку точности:

Теорема 4. Пусть $\bar{v} \neq 0$ — внутренняя точка Q ; $\alpha(h)$, $h/\alpha(h) \rightarrow 0$ вместе с h , $\Delta = h$. Тогда существуют постоянные h_* , M_* такие, что при $h \in (0, h_*)$ справедлива оценка

$$\mu(h) \geq M_* \sqrt{h}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x'(t) = \bar{v}$, $x(t_0) = x_0$, а $\xi(\cdot)$ удовлетворяет условиям:

$$\xi(t_{2k}) = x(t_{2k}), \quad \xi(t_{2k+1}) = x(t_{2k+1}) - h.$$

Обозначим $u_i - \bar{v} = r_i$, тогда:

$$r_{2k+1} = \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha}\right) r_{2k} - \frac{h}{\alpha}, \quad r_{2k+2} = \left(1 - \frac{\Delta}{\alpha}\right) r_{2k+1} + \frac{h}{\alpha},$$

и, значит,

$$|r_{2k+2}| \geq \left(1 - \frac{2\Delta}{\alpha}\right) |r_{2k}| + \frac{h\Delta}{\alpha^2}. \quad (10)$$

Кроме того $|r_0| = |\bar{v}|$, поэтому условия теоремы гарантируют существование $h_* > 0$ такого, что для всех $h \in (0, h_*]$

$$|r_0| \geq \frac{h}{2\alpha}. \quad (11)$$

Ввиду (10), (11) с помощью индукции получаем

$$|r_{2k}| \geq \frac{h}{2\alpha}. \quad (12)$$

Более того, $|r_i| \geq r(t_i)$, где $r(\cdot)$ — решение задачи Коши: $r'(t) = -\frac{r(t)}{\alpha}$, $r(t_0) = |\bar{v}|$. Поэтому

$$|r_{2k}| \geq |\bar{v}| e^{\frac{t_0 - t_{2k}}{\alpha}}. \quad (13)$$

Из соотношений (11)–(13) следует существование константы M_* такой, что

$$\|u(\cdot) - \bar{v}\|_1 \geq M_* \max \left\{ \frac{h}{\alpha}, \alpha \right\} \geq M_* \sqrt{h}.$$

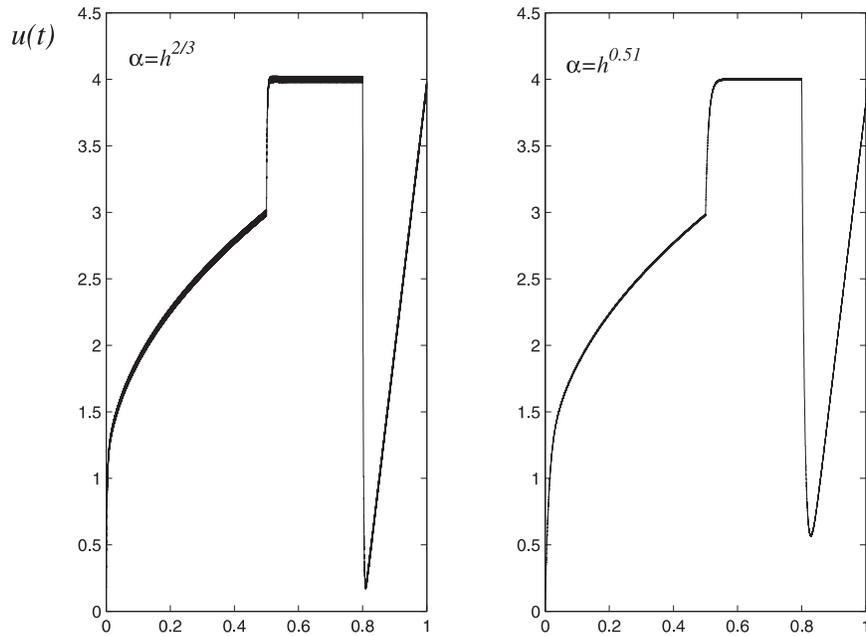


Рис. 1

Проиллюстрируем реализацию действия КДА, проведенную в среде Matlab, на следующем примере:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}\sqrt{2x^3} + x, & x \in [0, 0.5], \\ \frac{7}{6} + 4\left(x - \frac{1}{2}\right), & x \in (0.5, 0.8], \\ 10x^2 - 16x + \frac{263}{30}, & x \in (0.8, 1], \end{cases}$$

при $h = 10^{-4}$ (задание ошибки, как в теореме 2).

Первое слагаемое в формуле (9) можно рассматривать как результат влияния случайных ошибок измерения и погрешности метода Эйлера. Второе и третье слагаемое можно трактовать как систематическую ошибку восстановления $v(\cdot)$ с помощью использования неупреждающего сингулярного интеграла [7] по формуле (6). В связи с этим, выбор $\alpha = h^{2/3}$ уменьшает систематическую ошибку, что иллюстрирует поведение приближений в окрестности точек $t = 0.5$ и $t = 0.8$ на рис. 1. С другой стороны, выбор $\alpha = h^{0.51}$ уменьшает влияние случайных ошибок, что характеризуется степенью размытости линий на промежутках $[0, 0.5]$ и $(0.5, 0.8)$; при этом ошибка в целом становится меньшей.

Рассмотрение результатов экспериментов при $h = 10^{-6}$ показывает, что систематическая ошибка практически устраняется, а случайная ошибка имеет меньшее влияние при $\alpha = h^{0.51}$ (см. рис. 2), что согласуется с полученными теоретическими результатами.

З а м е ч а н и е 2. Пусть α кратно Δ , определим КДА $(D_h^2)_{h>0}$:

n , $U(\cdot)$, $W(\cdot)$ задаются так же, как для $(D_h^1)_{h>0}$;

$\tau(t_i) = t_i - \alpha$;

$W_i^0(\xi(\tau(t_i))) = \xi(t_0)$ при $t_i < \alpha$ и $W_i^0(\xi(\tau(t_i))) = \xi(t_i - \alpha)$ при $t_i \geq \alpha$.

Использование КДА $(D_h^2)_{h>0}$ можно трактовать как аналог метода средних функций [8]. При этом до момента $t = \alpha$ КДА $(D_h^2)_{h>0}$ использует одну систему-модель с начальным условием $\xi(t_0)$, к моменту $t = 2\alpha$ количество систем-моделей возрастает до $\frac{\alpha}{\Delta}$, и остается постоянным

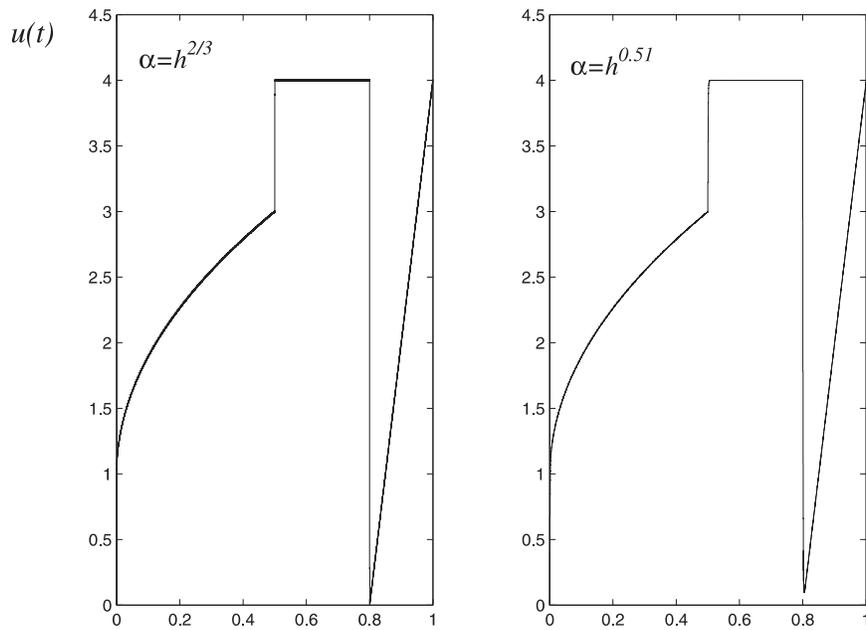


Рис. 2

до $T - \alpha$, а далее количество систем-моделей уменьшается на единицу на каждом шаге алгоритма.

Тогда для любого i значение u_i приближения $v_*(t)$ на промежутке $(t_i + \alpha - \Delta, t_i + \alpha]$ согласно (7) удовлетворяет неравенству

$$|v_*(t) - u_i| \leq \bigvee_t^{t+\alpha} v_*(\cdot).$$

С учетом леммы 3 это дает оценку:

$$|u_i - v_*(t)| \leq \frac{h}{\alpha}(2M + M_1 + 3) + \bigvee_t^{t+\alpha} v_*(\cdot),$$

откуда аналогично теореме 3 следует, что

$$\|u(t) - v_*(t)\|_1 \leq \frac{h(2M + M_1 + 3)}{\alpha}(T - t_0) + \alpha \bigvee_{t_0}^T v_*(\cdot).$$

При выборе $\alpha = \sqrt{h}$, асимптотический порядок точности становится равным $1/2$.

З а м е ч а н и е 3. Аналогичные подходы применены нами для оценки точности метода восстановления возмущения в $L_1([t_0, T], \mathbb{R}^q)$ для общего вида системы (1). При этом значения асимптотических порядков точности совпадают с полученными для случая простого движения. Изложение этих результатов не приводится, так как это потребовало бы существенного увеличения объема работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
2. **Кряжимский А.В., Максимов В.И., Осипов Ю.С.** О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, № 6. С. 815–825.
3. **Krjaziński A.V., Osipov Yu.S.** On positional calculation on Ω -normal controls in dynamical system // Problems of Control and Information Theory. 1984. V. 13, no. 6. P. 425–436.
4. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
5. **Вдовин А.Ю.** О точности алгоритмов динамического восстановления возмущения // Свердловск: ИММ УрО РАН, 1989. С. 40. Деп. в ВИНТИ 20.04.89, № 2584-B89.
6. **Бахвалов Н.С.** Численные методы. М.: Наука, 1974.
7. **Натансон И.П.** Теория функций вещественного переменного. М.: Наука, 1974.
8. **Васин В.В.** Методы решения неустойчивых задач. Свердловск: УрГУ, 1989.

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ГАРАНТИЕЙ СИСТЕМАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹

Р. Габасов, Н. М. Дмитрук, Ф. М. Кириллова

Рассматривается линейная задача оптимального управления с гарантией системой с запаздыванием, в которой учитываются геометрические ограничения на управляющие воздействия и терминальные ограничения на состояния. Вводится новое понятие состояния задачи, которое представляет собой конечно-мерный вектор. Определяются три типа оптимальной обратной связи. Описываются методы реализации оптимальных размыкаемой и замыкаемой обратных связей. В их основу положен быстрый двойственный метод коррекции оптимальных программ. Результаты иллюстрируются на примерах.

Введение

Человек занимается управлением всю сознательную жизнь. Он постоянно для обеспечения желаемого течения тех или иных процессов или сам предпринимает необходимые действия и принимает соответствующие решения, или поручает некоторые из них создаваемым им автоматическим системам управления. Свои действия и решения человек выбирает в зависимости от складывающейся ситуации и делает это, как правило, в режиме реального времени, т.е. в таком же темпе, в каком меняется ситуация. С началом современной научно-технической революции появилась возможность на базе вычислительной техники создавать и системы управления, функционирующие по принципу управления в реальном времени. Для синтеза в рамках этого принципа оптимальных систем управления нужны быстрые алгоритмы коррекции оптимальных программ.

Существуют два взгляда на теорию оптимального управления. Согласно одному из них, возникшему после открытия принципа максимума Понтрягина [1], теория оптимального управления — раздел современного (неклассического) вариационного исчисления. Другой взгляд трактует теорию оптимального управления как раздел современной теории управления, представляющей собой естественное развитие классической теории управления. В соответствии с этим в первом случае под *управлениями* понимают элементы функциональных пространств, по которым ищется экстремум выбранного функционала качества, и основным вопросом теории считается *анализ* решения экстремальной задачи (существование, единственность, непрерывная зависимость решений, необходимые и достаточные условия оптимальности и т.п.). Во втором случае *управление* — это процесс, в котором для достижения нужного поведения объекта управления создаются в каждый текущий момент времени целенаправленные (*управляющие*) воздействия на объект управления в зависимости от доступной к этому моменту информации о поведении объекта и действующих на него возмущениях. Управление называется *программным*, если (*программные*) управляющие воздействия (*программы*) планируются по априорной информации до начала процесса управления и не корректируются в процессе управления. При *позиционном* управлении (*позиционные*) управляющие воздействия создаются в процессе управления по текущим *позициям*, которые аккумулируют информацию, доступную к текущему моменту. Создание оптимальных позиционных управляющих воздей-

¹Работа финансируется Государственной программой фундаментальных исследований НАН Беларуси (Математические модели 14).

ствий называется *синтезом* оптимальных систем управления и является основным вопросом теории оптимального управления во втором случае.

Программное и позиционное управления реализуются с помощью систем управления, создаваемых согласно (1) принципу управления *по разомкнутому контуру*, (2) классическому принципу управления *по замкнутому контуру*, (3) современному принципу управления по замкнутому контуру (принципу управления *в реальном времени*). Системы, следующие первому принципу, реализуют программное управление. Системы, основанные на втором и третьем принципах, реализуют позиционное управление, используя *связи* трех типов: *прямые*, *обратные* и *комбинированные* (рис. 1). Эти связи с помощью *регуляторов* (*управляющих органов*) преобразуют в управляющие воздействия доступную информацию, содержащуюся в текущих позициях. *Замыкая* ими объекты управления, получают *замкнутые системы управления*. При использовании второго принципа управления связи строятся явно до начала процесса управления. В системах по третьему принципу управления связи не строятся явно, вместо них вводятся вычислительные устройства, которые нужные для управления текущие значения связей вычисляют в режиме реального времени по ходу каждого процесса управления. В замкнутых системах, функционирующих по второму принципу управления, связи осуществляются *аппаратно* (*жестко*, с помощью технических устройств). В системах управления в реальном времени они осуществляются *программно* (*гибко*, с помощью программ для вычислительной техники). Современная вычислительная техника позволяет программно реализовать очень сложные связи, аппаратная реализация которых сопряжена с большими трудностями. Системы управления, основанные на втором и третьем принципах управления, называются также *автоматическими* и *автоматизированными*, соответственно.

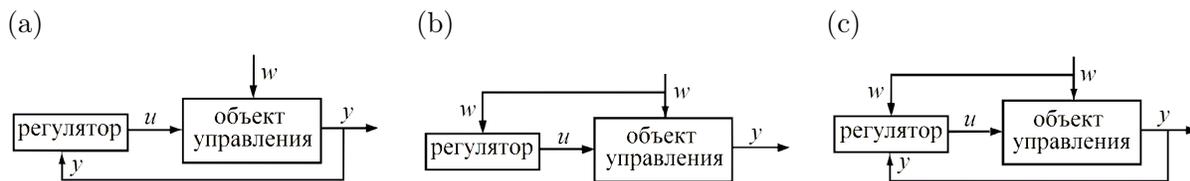


Рис. 1. (а) Обратная связь; (б) прямая связь; (с) комбинированная связь.

Первые задачи оптимального управления, поставленные и решенные инженерами, были нацелены на синтез замкнутых (автоматических) систем управления с оптимальными обратными связями. В новых экстремальных задачах принципиальную роль играли важные в приложениях геометрические ограничения на управляющие воздействия, чем они существенно отличались от задач классического вариационного исчисления. При решении первых задач оптимального управления инженеры, следуя традициям классической теории управления, использовали в качестве вспомогательных разомкнутые системы управления и строили для них оптимальные программы, которые затем применяли для синтеза оптимальных обратных связей. Основываясь на этих фактах, Л.С. Понтрягин сформулировал новую (неклассическую) вариационную задачу и (вместе со своими учениками) доказал для нее необходимое условие оптимальности программ в виде фундаментального *принципа максимума* [1].

На протяжении всей истории развития теории оптимального управления ученые занимались анализом оптимальных систем (процессов, объектов). Основная же проблема теории состоит в том, чтобы синтезировать оптимальные системы. В настоящее время анализ оптимальных систем проводится достаточно полно с помощью принципа максимума и других математических методов. Проблему же синтеза в рамках классического принципа управления по замкнутому контуру не удастся решить из-за *проклятия размерности* ни с помощью принципа максимума, ни с помощью *динамического программирования* Беллмана [2] — второго фундаментального метода теории оптимального управления. Исключение составляет

линейно-квадратичная задача Летова — Калмана. Успех в ней достигается благодаря специфике ее квадратичного критерия качества и игнорированию геометрических ограничений на управляющие воздействия. В силу этого позиционное решение задачи получается в виде простейшей (линейной) обратной связи². С математической точки зрения обсуждаемая задача представляет собой скорее гладкую задачу классического вариационного исчисления, чем задачу теории оптимального управления, наличие в которой геометрических ограничений стало главной причиной создания самой теории.

Ситуация, сложившаяся в теории оптимального управления с проблемой синтеза оптимальных систем в рамках классического принципа управления по замкнутому контуру, невольно заставляет вспомнить поговорку: “Легче избежать дьявола, нежели с ним бороться”. Одним из способов избежания проклятия размерности является переход к синтезу оптимальных систем, следуя современному принципу оптимального управления в реальном времени [3], который в большей степени, чем классический принцип, ориентируется на достижения современных конструктивных методов оптимизации и вычислительной техники.

В [4–9] для обыкновенных динамических систем изложен разработанный в Минске метод синтеза оптимальных систем по принципу управления в реальном времени. В его основе лежат: (1) специальная *параметризация* (дискретных) оптимальных программ и (2) опирающиеся на нее быстрые *процедуры коррекции* и *доводки* оптимальных программ.

Как известно, в теории принципа максимума оптимальные программы параметризуются с помощью состояний сопряженных систем и вспомогательных мер. Параметризация управляющих воздействий с помощью моментов их переключения давно использовалась инженерами при исследованиях релейных систем. Эти исследования в свое время привели к постановке и решению первых задач оптимального управления (линейного быстрогодействия). В описанном в [4–9] методе синтеза оптимальных систем при параметризации оптимальных программ к множеству их точек переключения добавляются (в зависимости от типа исследуемой задачи) моменты захода и схода с фазовых и смешанных ограничений, моменты входа и выхода из особых режимов, режимы Фуллера со сколь угодно высокой точностью аппроксимируются релейно-особыми режимами.

Параметризация оптимальных программ сама по себе не решает проблему синтеза оптимальных систем в реальном времени, нужны еще адекватные алгоритмы коррекции оптимальных программ. В теории оптимального управления существуют два типа вариаций: Лагранжа (поперечные вариации) и Макшейна (продольные вариации). Вариации Лагранжа — основной инструмент классического вариационного исчисления. Для задач оптимального управления более естественны вариации Макшейна, которые сыграли огромную роль в математической теории оптимальных процессов при доказательстве принципа максимума. Большинство известных численных методов оптимального управления [10] опирается только на вариации Лагранжа. Быстрые процедуры коррекции оптимальных программ [4–9] основаны на вариациях Макшейна и возникли при обобщении на задачи оптимального управления методов линейного программирования. Оказалось, что прямые методы вычисления оптимальных программ не пригодны для синтеза оптимальных систем. Успех был достигнут при обобщении специального двойственного метода [11]. Была найдена такая его динамическая реализация, при которой для осуществления коррекции оптимальных программ достаточно интегрировать сопряженную систему на малых промежутках времени. Это в совокупности с небольшим количеством итераций метода, достаточных в каждый момент времени для коррекции текущей оптимальной программы, привело к методу синтеза оптимальных систем по принципу управления в реальном времени. Отметим, что численные методы [10], основанные на классической параметризации оптимальных программ, требуют на каждой итерации многократного интегрирования прямой и сопряженной систем на всем промежутке управления, что ведет к

²Линейные обратные связи просты в реализации и были основой классической теории управления. Однако, перефразируя К.Э. Циолковского, следует признать, что теория управления не может оставаться вечно в своей колыбели.

большим затратам времени и препятствует их использованию при оптимальном управлении в реальном времени.

В [5] при вычислении оптимальных программ в классе кусочно-непрерывных функций после процедуры быстрой коррекции оптимальной дискретной программы осуществляется процедура доводки, основанная на методе Ньютона решения специальной системы уравнений, составленной для элементов параметризации.

Подход к задачам оптимального управления, описанный в [4–9] для динамических систем с сосредоточенными параметрами, допускает естественное обобщение на другие классы динамических систем. Цель настоящей работы — обобщить его на линейные задачи оптимального управления системами с запаздыванием. Известно, что системы с запаздыванием по математической природе существенно сложнее обыкновенных систем. Их состояния бесконечномерны, что резко усложняет управление такими системами. В литературе получены принципиальные результаты по их устойчивости [12], опубликовано множество результатов по качественной теории оптимальных процессов в системах с запаздыванием. Проблема синтеза оптимальных систем с запаздываниями исследована пока только в рамках задачи Летова — Калмана (см., например, [13] и приведенную там библиографию).

Структура работы. В разд. 1 дается постановка задачи. Линейная нестационарная система управления с одним запаздыванием по фазовым переменным оптимизируется в классе дискретных скалярных управляющих воздействий с геометрическими ограничениями на их значения. Математическая модель системы содержит неизвестное скалярное возмущение, которое в процессе управления может реализоваться в виде любой кусочно-непрерывной функции с известным множеством значений. Требуется (1) гарантированно [14] перевести систему в заданный момент на терминальное множество, определенное с помощью линейных функционалов на состояниях системы и (2) получить оптимальное гарантированное значение критерия качества — линейного функционала на терминальных состояниях системы. Вводится понятие состояния задачи в виде конечномерного вектора, который содержит спрессованную информацию о бесконечномерном состоянии системы и параметрах задачи, достаточную для построения оптимальной программы. По аналогии с [15], для рассматриваемой задачи определяется несколько типов оптимальных обратных связей. Возможности их синтеза с помощью динамического программирования обсуждаются в [16]. В разд. 2 исследуется простейшая из них — оптимальная размыкаемая обратная связь. Для ее реализации в п. 2.1 описывается двойственный метод построения оптимальных программ. Метод положен в основу алгоритма работы оптимального регулятора (п. 2.2), который в режиме реального времени генерирует значения оптимальной размыкаемой обратной связи. В п. 2.3 расширение области применения оптимальной размыкаемой обратной связи достигается с помощью двухстадийного метода оптимального управления в реальном времени. Метод иллюстрируется в п. 2.4 на примере, в котором математическая модель объекта управления взята из [17]. Другой способ повышения эффективности управления состоит во введении оптимальных замыкаемых обратных связей. Эффективность таких связей повышается с увеличением количества моментов замыкания. Предельным случаем замыкаемой обратной связи является замкнутая обратная связь, которая не размыкается ни в один момент промежутка управления. С увеличением количества моментов замыкания растет и сложность реализации оптимальной замыкаемой обратной связи. В разд. 3 вводится понятие оптимальной замыкаемой обратной связи. Ради упрощения изложения рассматривается только однократно замыкаемая обратная связь. Обобщения на случай многократного замыкания носят чисто технический характер. Пункт 3.1 содержит метод вычисления оптимальной программы, необходимой для реализации оптимальной замыкаемой обратной связи. Сама реализация описывается в п. 3.2. Статья завершается примером (п. 3.3), который иллюстрирует работу оптимального регулятора, реализующего оптимальную замыкаемую обратную связь.

1. Линейная задача оптимального управления для системы с запаздыванием

На промежутке времени $T = [t_*, t^*]$ рассмотрим линейную задачу оптимального гарантирующего управления системой с запаздыванием

$$h'_0 x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_0(t) x(t) dt \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\theta) + b(t)u(t) + d(t)w(t), \quad (1.2)$$

$$x(t_*) = x_0, \quad x(t) = x_0(t), \quad t \in [t_* - \theta, t_*], \quad (1.3)$$

$$h'_i x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_i(t) x(t) dt \geq g_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.4)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq 1\}, \quad w(t) \in W = \{w \in \mathbb{R} : w_* \leq w \leq w^*\}, \quad t \in T. \quad (1.5)$$

Здесь $\theta \in \mathbb{R}$, $0 < \theta < \infty$, — постоянное запаздывание, $h_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, m}$; $x_0(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t_* - \theta]$; $A(t)$, $A_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b(t)$, $d(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$; $h_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t^* - \theta, t^*]$, $i = \overline{0, m}$, — кусочно-непрерывные функции; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — положение динамической системы (1.2) в момент времени t ; $x(s)$, $s \in [t - \theta, t]$, — история системы (1.2) в момент t ; $u(t)$ — значение скалярного управляющего воздействия; $w(t) \in \mathbb{R}$, $t \in T$, — неизвестное возмущение.

Пара $x_\tau = \{x(\tau); x(t), t \in [\tau - \theta, \tau]\}$ — положение и история динамической системы (1.2) — называется ее *состоянием* в момент времени τ . Состояние x_τ однозначно определяет поведение системы (1.2) на промежутке $T(\tau) = [\tau, t^*]$ для каждого управляющего воздействия $u(t)$, $t \in T(\tau)$, и возмущения $w(t)$, $t \in T(\tau)$.

В качестве доступных управляющих воздействий в работе используются дискретные функции

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h], \quad \tau \in T_h = \{t_*, t_* + h, \dots, t^* - h\},$$

с периодом квантования $h = (t^* - t_*)/N$, $N \in \mathbb{N}$, принимающие значения из множества U .

Будем считать, что в каждом процессе управления возмущение может реализоваться в виде любой кусочно-непрерывной функции $w(t)$, $t \in T$, со значениями из множества W .

Управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T$, назовем *программой*, если при любых возможных возмущениях $w(t) \in W$, $t \in T$, выполняются ограничения (1.4). Качество программы $u(t)$, $t \in T$, определяется числом $\min_w \left[h'_0 x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_0(t) x(t) dt \right]$ — гарантированным значением критерия качества (1.1). Программа $u^0(t)$, $t \in T$, называется *оптимальной*, если она доставляет максимум гарантированному значению критерия качества.

2. Оптимальная размыкаемая обратная связь

При определении обратных связей для задачи (1.1)–(1.5) наряду с бесконечномерным состоянием системы x_τ удобно использовать конечномерный вектор $\xi(\tau) = (\xi_i(\tau), i = \overline{0, m})$:

$$\xi_i(\tau) = \xi_i(\tau, x_\tau) = h'_i x_*(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_i(t) x_*(t) dt, \quad i = \overline{0, m},$$

где $x_*(t)$, $t \in T(\tau)$, — траектория системы (1.2) с начальным состоянием системы x_τ при $u(t) \equiv 0$, $w(t) \equiv 0$, $t \in T$.

Вектор $\xi(\tau)$ назовем *состоянием задачи* в момент τ . Он представляет собой результат линейного преобразования (векторный функционал) состояния системы x_τ и в компактной форме содержит информацию о нем, достаточную для построения решения задачи (1.1)–(1.5). В дальнейшем для упрощения будем вместо x_τ использовать $(m+1)$ -вектор $\xi(\tau)$.

Предположим, что в процессе управления для каждого $\tau \in T_h$ доступно точное значение состояния задачи $\xi(\tau)$ в момент τ . Пару $(\tau, \xi(\tau))$ назовем *позицией задачи* в момент τ .

Для того чтобы определить простейшую обратную связь, погрузим задачу (1.1)–(1.5) в семейство задач

$$\begin{aligned} J_0(u, w|\tau, \xi) &= h'_0 x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_0(t)x(t)dt \rightarrow \max, \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_1(t)x(t-\theta) + b(t)u(t) + d(t)w(t), \\ x(\tau) &= z, \quad x(t) = z(t), \quad t \in [\tau-\theta, \tau], \\ J_i(u, w|\tau, \xi) &= h'_i x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_i(t)x(t)dt \geq g_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ u(t) &\in U, \quad w(t) \in W, \quad t \in T(\tau), \end{aligned} \quad (2.1)$$

зависящее от момента времени $\tau \in T_h$ и состояния задачи $\xi = \xi(\tau, z_\tau)$, порожденного состоянием системы $z_\tau = \{z; z(t), t \in [\tau-\theta, \tau]\}$, где $z \in \mathbb{R}^n$; $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [\tau-\theta, \tau]$, — кусочно-непрерывная функция.

Пусть $u^0(t|\tau, \xi)$, $t \in T(\tau)$, — оптимальная программа для позиции задачи (τ, ξ) , Ξ_τ — множество состояний задачи ξ в момент $\tau \in T_h$, для которых указанные оптимальные программы существуют.

Функция

$$u^0(\tau, \xi) = u^0(\tau|\tau, \xi), \quad \xi \in \Xi_\tau, \quad \tau \in T_h, \quad (2.2)$$

называется *оптимальной размыкаемой (дискретной) обратной связью* (по состоянию задачи).

Для реализации обратной связи (2.2) (п. 2.2) понадобится двойственный метод построения оптимальной программы $u^0(t|\tau, \xi)$, $t \in T(\tau)$.

2.1. Построение оптимальной программы

Управляющее воздействие $u(t) \in U$, $t \in T(\tau)$, является программой задачи (2.1) тогда и только тогда, когда при всех $w(t) \in W$, $t \in T(\tau)$, выполняются неравенства $J_i(u, w|\tau, \xi) \geq g_i$, $i = \overline{1, m}$, т.е.

$$\min_{w(t) \in W, t \in T(\tau)} J_i(u, w|\tau, \xi) \geq g_i, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.3)$$

Для каждого $i = \overline{0, m}$ введем функцию $\psi_i(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in T$, — решение сопряженного уравнения

$$\dot{\psi}_i(t) = \begin{cases} -A'(t)\psi_i(t) - A'_1(t+\theta)\psi_i(t+\theta), & t \in [t_*, t^* - \theta]; \\ -A'(t)\psi_i(t) - h'_i(t), & t \in [t^* - \theta, t^*], \end{cases} \quad (2.4)$$

с начальным условием $\psi_i(t^*) = h_i$. Используя равенства

$$J_i(u, w|\tau, \xi) = \xi_i + \int_{\tau}^{t^*} \psi'_i(s) [b(s)u(s) + d(s)w(s)] ds, \quad i = \overline{0, m},$$

представим соотношения (2.3), определяющие программу, в виде

$$\int_{\tau}^{t^*} \psi'_i(s)b(s)u(s)ds \geq g_i(\tau) - \xi_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где $g_i(\tau) = g_i - \gamma_i(\tau)$,

$$\gamma_i(\tau) = \min_{w(t) \in W, t \in T(\tau)} \int_{\tau}^{t^*} \psi'_i(s) d(s) w(s) ds, \quad i = \overline{0, m}.$$

Сформулируем полученный результат в динамической форме: управляющее воздействие $u(t)$, $t \in T(\tau)$, есть программа задачи (2.1) для позиции задачи (τ, ξ) тогда и только тогда, когда (1) $u(t) \in U$, $t \in T(\tau)$, и (2) на порожденной им траектории $x(t)$, $t \in T$, детерминированной системы

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t - \theta) + b(t)u(t), \quad x(\tau) = 0, \quad x(t) = 0, \quad t \in [\tau - \theta, \tau], \quad (2.5)$$

выполняются неравенства

$$h'_i x(t^*) + \int_{t^* - \theta}^{t^*} h'_i(t) x(t) dt \geq g_i(\tau) - \xi_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Аналогичным образом устанавливается, что оптимальная программа $u^0(t|\tau, \xi)$, $t \in T(\tau)$, определяется соотношением

$$\int_{\tau}^{t^*} \psi'_0(s) b(s) u^0(s|\tau, \xi) ds = \max_u \int_{\tau}^{t^*} \psi'_0(s) b(s) u(s) ds.$$

При этом оптимальное гарантированное значение критерия качества равно

$$J^0(\tau, \xi) = \xi_0 + \gamma_0(\tau) + \int_{\tau}^{t^*} \psi'_0(s) b(s) u^0(s|\tau, \xi) ds.$$

Итак, оптимальная программа $u^0(t|\tau, \xi)$, $t \in T(\tau)$, задачи (2.1) для позиции задачи (τ, ξ) есть решение следующей задачи оптимального управления детерминированной системой:

$$h'_0 x(t^*) + \int_{t^* - \theta}^{t^*} h'_0(t) x(t) dt \rightarrow \max,$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t - \theta) + b(t)u(t), \quad x(\tau) = 0, \quad x(t) = 0, \quad t \in [\tau - \theta, \tau], \quad (2.6)$$

$$h'_i x(t^*) + \int_{t^* - \theta}^{t^*} h'_i(t) x(t) dt \geq g_i(\tau) - \xi_i, \quad i = \overline{1, m}; \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T(\tau).$$

Двойственный метод построения оптимальных программ в детерминированных задачах оптимального управления системами с запаздыванием разработан в [18]. В исследованной в [18] задаче отсутствуют интегральные слагаемые в ограничениях (1.4) и критерии качества (1.1), т.е. $h_i(t) \equiv 0$, $t \in [t^* - \theta, t^*]$, $i = \overline{0, m}$. Это отличие, однако, не представляет принципиальных трудностей при реализации алгоритма [18] для решения задачи (2.6). Новые элементы учитываются при построении функций³ $\psi_i(t)$, $t \in T$, $i = \overline{1, m}$, которые теперь строятся с помощью нового сопряженного уравнения (2.4).

³Эти функции в работе [18] составляют матричную функцию $G(t) = (\psi_i(t))$, $i = \overline{1, m}$, $t \in T$.

2.2. Реализация оптимальной размыкаемой обратной связи

Замкнем систему (1.2) оптимальной обратной связью (2.2):

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t - \theta) + b(t)u^0(t, \xi(t, x_t)) + d(t)w(t), \quad (2.7)$$

где $u^0(t, \xi(t, x_t)) = u^0(\tau, \xi(\tau, x_\tau))$, $t \in [\tau, \tau + h]$, $\tau \in T_h$.

Пусть в конкретном процессе управления реализуется возмущение $w^*(t) \in W$, $t \in T$. Оно вызовет в системе (2.7) переходный процесс $x^*(t)$, $t \in T$, удовлетворяющий тождеству

$$\dot{x}^*(t) \equiv A(t)x^*(t) + A_1(t)x^*(t - \theta) + b(t)u^0(t, \xi^*(t)) + d(t)w^*(t), \quad t \in T,$$

и порождающий состояния задачи $\xi^*(t) = \xi(t, x_t^*)$, $t \in T$.

Функцию

$$u^*(t) \equiv u^*(\tau) = u^0(\tau, \xi^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h], \quad \tau \in T_h, \quad (2.8)$$

назовем *реализацией* оптимальной размыкаемой обратной связи (2.2) в рассматриваемом процессе управления.

При оптимальном управлении по классическому принципу замкнутого контура для получения управляющих воздействий $u^*(t)$, $t \in T$, нужно заранее (до начала процесса управления) синтезировать обратную связь (2.2). Это чрезвычайно трудная задача, не решенная пока и для оптимального управления обыкновенными системами. При оптимальном управлении в реальном времени обратная связь (2.2) не строится. В каждом конкретном процессе управления текущие значения $u^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, реализации (2.8) для каждого текущего момента времени $\tau \in T_h$ вычисляются по ходу процесса управления за время, не превосходящее h , т.е. в режиме реального времени. Устройство, способное выполнять эту работу, будем называть *оптимальным регулятором*.

Работу оптимального регулятора организуем следующим образом. До начала процесса управления регулятор решает задачу (1.1)–(1.5) для начальной позиции задачи $(t_*, \xi^*(t_*))$. Вычисленную оптимальную программу $u^0(t|t_*, \xi^*(t_*))$, $t \in T$, он использует для управления физическим объектом на промежутке времени $[t_*, t_* + h]$:

$$u^*(t) \equiv u^*(t_*) = u^0(t|t_*, \xi^*(t_*)), \quad t \in [t_*, t_* + h].$$

Поскольку задача (1.1)–(1.5) решается до начала фактического управления, то ограничения на время, затрачиваемое оптимальным регулятором на вычисление двойственным методом [18] оптимальной программы и сопровождающих ее элементов, не накладываются.

В каждый текущий момент времени $\tau \in T_h \setminus t_*$ оптимальный регулятор решает задачу (2.1) для текущей позиции задачи $(\tau, \xi^*(\tau))$. При этом в качестве начального приближения для сопровождающих элементов [18] оптимальной программы $u^0(t|\tau, \xi^*(\tau))$, $t \in T(\tau)$, он использует сопровождающие элементы оптимальной программы $u^0(t|\tau - h, \xi^*(\tau - h))$, $t \in T(\tau - h)$, построенные в предыдущий момент $\tau - h$. На промежутке времени $[\tau, \tau + h]$ оптимальный регулятор подает на вход объекта управления сигнал⁴

$$u^*(t) \equiv u^*(\tau) = u^0(\tau|\tau, \xi^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h].$$

Как следует из приведенных в [5] оценок трудоемкости двойственного метода, коррекция сопровождающих элементов, необходимая для вычисления текущего значения $u^*(\tau)$ реализации оптимальной размыкаемой обратной связи, может быть осуществлена современной вычислительной техникой за время, не превосходящее h для систем достаточно высокого порядка.

⁴Понятно, что на вычисление оптимальной программы $u^0(t|\tau, \xi^*(\tau))$, $t \in T(\tau)$, затрачивается некоторое время $s(\tau)$, $0 < s(\tau) \leq h$, и фактическая реализация имеет вид $u^*(t) = u^0(t|\tau, \xi^*(\tau))$, $t \in [\tau + s(\tau), \tau + h + s(\tau + h)]$. В данной работе для упрощения изложения указанная задержка $s(\tau)$, $\tau \in T_h \setminus t_*$, не учитывается.

Отметим, что управляющее воздействие $u^0(t|\tau - h, \xi^*(\tau - h))$, $t \in T(\tau)$, (часть оптимальной программы задачи (2.1) для момента $\tau - h$) является программой задачи (2.1) для момента τ , поскольку оно порождает траекторию, удовлетворяющую ограничениям данной задачи. Отсюда следует, что если $\xi^*(t_*) \in \Xi_{t_*}$, т.е. в задаче (1.1)–(1.5) существует оптимальная программа $u^0(t|t_*, \xi^*(t_*))$, $t \in T$, то $\xi^*(\tau) \in \Xi_\tau$ и задача (2.1) имеет решение для каждого $\tau \in T_h \setminus t_*$.

При больших возмущениях в системе управления нельзя априори гарантировать выполнение ограничений (1.4) для любого возможного возмущения. В этом случае осуществить описанную процедуру оптимального управления в реальном времени невозможно. Одним из способов преодоления этой трудности является переход к двухстадийному управлению.

2.3. Двухстадийная оптимальная размыкаемая обратная связь

Для позиций задачи (τ, ξ) с $\xi \notin \Xi_\tau$ сформируем две вспомогательные задачи оптимального управления. Первая задача

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \varrho_i &\rightarrow \min, \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_1(t)x(t - \theta) + b(t)u(t), \quad x(\tau) = 0, \quad x(t) = 0, \quad t \in [\tau - \theta, \tau[, \\ h'_i x(t^*) &+ \int_{t^* - \theta}^{t^*} h'_i(t)x(t)dt \geq g_i(\tau) - \xi_i - \varrho_i, \\ |u(t)| &\leq 1, \quad t \in T(\tau), \quad \varrho_i \geq 0, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

всегда имеет решение $\varrho^0(\tau, \xi)$. Это обеспечивает совместность ограничений и существование оптимальной программы $u^0_\varrho(t|\tau, \xi)$, $t \in T(\tau)$, во второй задаче оптимального управления, которая имеет вид

$$\begin{aligned} h'_0 x(t^*) &+ \int_{t^* - \theta}^{t^*} h'_0(t)x(t)dt \rightarrow \max, \\ \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + A_1(t)x(t - \theta) + b(t)u(t), \quad x(\tau) = 0, \quad x(t) = 0, \quad t \in [\tau - \theta, \tau[, \\ h'_i x(t^*) &+ \int_{t^* - \theta}^{t^*} h'_i(t)x(t)dt \geq g_i(\tau) - \xi_i - \varrho^0_i(\tau, \xi) - \varepsilon, \quad i = \overline{1, m}, \quad |u(t)| \leq 1, \quad t \in T(\tau), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где число $\varepsilon > 0$ — малый параметр, правила выбора которого указываются ниже.

Двухстадийную оптимальную размыкаемую обратную связь определим соотношением

$$u^0(\tau, \xi) = \begin{cases} u^0_\varrho(\tau|\tau, \xi), & \xi \notin \Xi_\tau, \\ u^0(\tau|\tau, \xi), & \xi \in \Xi_\tau, \quad \tau \in T_h, \end{cases}$$

где включение $\xi \in \Xi_\tau$ эквивалентно равенству $\varrho^0(\tau, \xi) = 0$.

Таким образом, если задача (1.1)–(1.5) не имеет решения, то алгоритм работы оптимального регулятора состоит из двух стадий. На первой стадии для каждой текущей позиции задачи $(\tau, \xi^*(\tau))$, $\tau \geq t_*$, он вычисляет вектор $\varrho^*(\tau) = \varrho^0(\tau, \xi^*(\tau))$, с помощью которого формирует и решает задачу (2.9). На промежутке времени $[\tau, \tau + h[$ на вход объекта управления подается сигнал $u^*(\tau) = u^0_\varrho(\tau|\tau, \xi^*(\tau))$.

Если к некоторому моменту $\tau_* \in T_h$ окажется $\varrho^*(\tau_*) = 0$, то в этот момент происходит переход ко второй стадии, на которой оптимальный регулятор управляет в реальном времени системой (1.2) по схеме п. 2.2.

Параметр ε в задаче (2.9) подбирается таким, чтобы в момент перехода с первой стадии на вторую коррекция сопровождающих элементов оптимальной программы $u^0_\varrho(t|\tau_* - h, \xi^*(\tau_* - h))$, $t \in T(\tau_* - h)$, задачи (2.9) до получения сопровождающих элементов оптимальной программы $u^0(t|\tau_*, \xi^*(\tau_*))$, $t \in T(\tau_*)$, задачи (2.6) занимала время, меньшее h .

2.4. Пример

Метод оптимального управления системой с запаздыванием в реальном времени на базе размыкаемой обратной связи проиллюстрируем на следующей задаче:

$$\int_0^{t^*} u(t) dt \rightarrow \min, \quad (2.10)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\pi/2x_1(t-1) + b_1u(t), \quad \dot{x}_2(t) = ax_1(t) + a_1x_1(t-1) + w(t),$$

$$x(0) = x_0, \quad x_1(t) = x_{10}(t), \quad t \in [-1, 0],$$

$$|x_i(t^*)| \leq g_i, \quad \left| \int_{t^*-1}^{t^*} x_i(t) dt \right| \leq g_i, \quad i = 1, 2,$$

$$0 \leq u(t) \leq 1, \quad w(t) \in W = \{w \in R : |w| \leq w^*\}, \quad t \in T = [0, t^*].$$

Параметрам задачи присвоим значения: $t^* = 4$, $a = a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $x_0 = (1, 1)$, $x_{10}(t) = t + 1$, $t \in [-1, 0]$, $g_1 = 0.01$, $g_2 = 1$, $w^* = 0.4$. На систему действует неизвестное оптимальному регулятору возмущение $w(t) = -0.3 \sin 5t$, $t \in T$.

Если ввести дополнительную фазовую переменную $x_3(t) = \int_0^t u(s) ds$, $t \in T$, то получим частный случай⁵ задачи (1.1)–(1.5) с $n = 3$, $m = 4$; $h_0 = -e_3$; $h_i = e_i$, $i = 1, 2$; $h_i = 0$, $i = 3, 4$; $h_i(t) = 0$, $t \in [3, 4]$, $i = \overline{0, 2}$; $h_i(t) = e_{i-2}$, $i = 3, 4$, $t \in [3, 4]$, ($e_j \in \mathbb{R}^3$ — единичный орт);

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} -\pi/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Начальное состояние задачи в (2.10) равно $\xi(0) = (0, 0.944018, 1.038818, 0.467539, 1.008053)$.

Поскольку (2.10) не имеет решения для начальной позиции задачи $(0, \xi(0))$, то управление системой (2.10) осуществлялось с помощью двухстадийной оптимальной размыкаемой обратной связи. Значения реализации $u^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, $h = 0.01$, вычислялись по правилам первой стадии с $\varepsilon = 0$ до момента $\tau_* = 1.78$. Полученные при этом значения $\rho^*(\tau)$, $\tau \in T_h \cap [0, 1.78]$, представлены на рис. 2. Реализация оптимальной обратной связи $u^*(t)$, $t \in [0, 4]$, и порожденные ею траектории $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $t \in [0, 4]$, изображены на рис. 3.

На рис. 4 помещены графики изменения компонент состояния задачи $\xi_i^*(t)$, $t \in [0, 4]$, $i = \overline{1, 4}$. Терминальное состояние задачи оказалось равным $\xi^*(4) = (1.395272, 0.01, -0.041524, 0.01, 0.054992)$. Заметим, что $\xi_0^*(4) = 1.395272$ — значение критерия качества в задаче (2.10), которое достигается при реализации двухстадийной оптимальной размыкаемой обратной связи.

3. Оптимальная замыкаемая обратная связь

Главная особенность оптимальной размыкаемой обратной связи состоит в том, что при ее определении не используется априорная информация о том, что система управления будет замкнута не только в текущий момент, но и в будущие моменты. Это обстоятельство не играет никакой роли для оптимальной классической обратной связи, которая определяется по детерминированной модели, но существенно при использовании недетерминированной модели.

⁵Результаты разд. 2 легко обобщаются на задачи с двухсторонними терминальными ограничениями. Состояние задачи при этом определяется так же, как и для задачи с ограничениями (1.4).

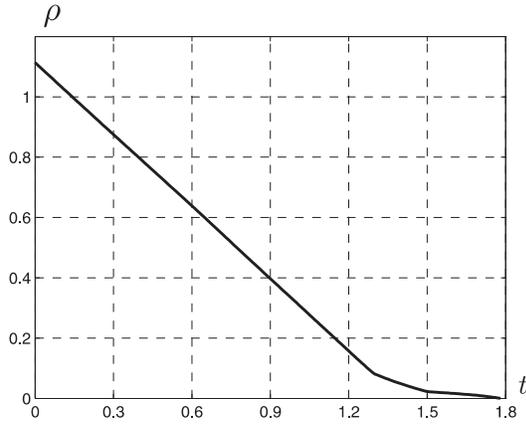


Рис. 2

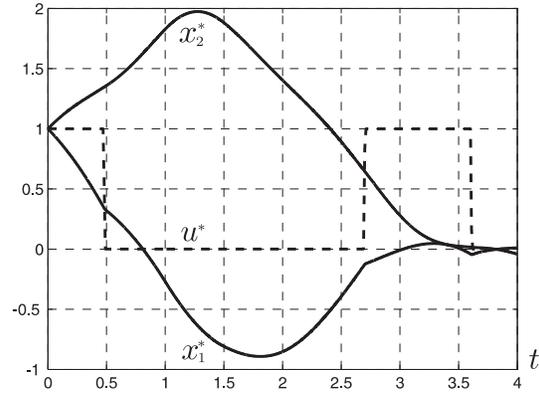


Рис. 3

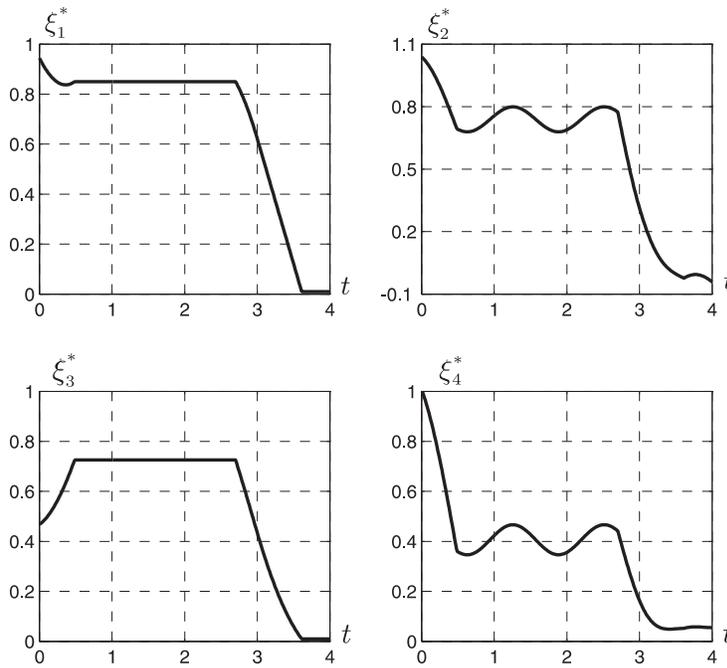


Рис. 4

В данном пункте исследуется ситуация, когда при определении оптимальной замыкаемой обратной связи учитывается информация о том, что система управления будет однократно замкнута в будущем. Обобщения на случай многократного замыкания носят чисто технический характер.

Для определения оптимальной однократно замыкаемой обратной связи введем некоторые вспомогательные конструкции.

Пусть задан момент времени $t^1 \in T_h$, $t_* < t^1 < t^* - h$, который будем называть *моментом замыкания* системы управления (1.2); $T^0 = [t_*, t^1[$, $T^0(\tau) = [\tau, t^1[$; $T^1 = [t_1, t^*]$; $T_h^k = T^k \cap T_h$, $k = 0, 1$.

Множество $Z^1 = \Xi_{t^1}$, состоящее из всех состояний задачи ξ^1 , для которых существует оптимальная программа $u^0(t|t^1, \xi^1)$, $t \in T^1$, задачи (2.1) в позиции (t^1, ξ^1) , назовем *множеством замыкания* в момент t^1 .

Обозначим

$$\alpha_* = \min_{\xi^1 \in Z^1} J^0(t^1, \xi^1); \quad \alpha^* = \max_{\xi^1 \in Z^1} J^0(t^1, \xi^1).$$

Для $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ множество Z_α^1 назовем α -множеством замыкания в момент t^1 , если для каждого $\xi^1 \in Z_\alpha^1$ оптимальная программа $u^0(t|t^1, \xi^1)$, $t \in T^1$, обеспечивает гарантированное значение критерия качества (1.1), не меньшее α , т.е.

$$Z_\alpha^1 = \{\xi^1 \in Z^1 : J^0(t^1, \xi^1) \geq \alpha\}.$$

Рассмотрим задачу (2.1) для позиции задачи (τ, ξ) , $\tau \in T_h^0$, $\xi \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Обозначим через $\Xi^1(u|\tau, \xi)$ множество всех состояний задачи в момент замыкания t^1 , порождаемых начальной позицией задачи (τ, ξ) , управляющим воздействием $u(t)$, $t \in T^0(\tau)$, и всеми возможными возмущениями $w(t) \in W$, $t \in T^0(\tau)$.

Предположим, что при некотором $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ выполняются следующие условия:

- (1) α -множество замыкания Z_α^1 не пусто;
- (2) существует управляющее воздействие $u^\alpha(t|\tau, \xi) \in U$, $t \in T^0(\tau)$, для которого $\Xi^1(u^\alpha|\tau, \xi) \subset Z_\alpha^1$.

Условия (1), (2) означают, что если на промежутке $T^0(\tau)$ система (1.2) из начальной позиции задачи (τ, ξ) управляется с помощью $u^\alpha(t|\tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, то выбор в момент замыкания t^1 оптимальной программы $u^0(t|t^1, \xi(t^1))$, $t \in T^1$, для реализовавшегося состояния задачи $\xi(t^1) \in \Xi^1(u^\alpha|\tau, \xi)$ обеспечит гарантированное значение критерия качества (1.1), не меньшее α .

Управляющее воздействие $u^\alpha(t|\tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, назовем *начальной α -программой* задачи (2.1) для позиции (τ, ξ) . Вместе с семейством оптимальных программ $u^0(t|t^1, \xi^1)$, $t \in T^1$, $\xi^1 \in \Xi^1(u^\alpha|\tau, \xi)$, она составляет α -программу задачи оптимального управления (2.1) с моментом замыкания t^1 для позиции задачи (τ, ξ) .

Максимальное значение $\alpha^0 = \alpha^0(\tau, \xi)$, при котором выполняются условия (1), (2), является оптимальным гарантированным значением критерия качества (1.1). Соответствующую α^0 -программу назовем *оптимальной программой* задачи (2.1) с моментом замыкания t^1 для позиции (τ, ξ) .

Пусть Ξ_τ^1 — множество всех состояний задачи ξ в момент $\tau \in T_h^0$, для которых существует оптимальная программа в смысле, определенном выше. Если в начальный момент времени $\tau = t_*$ множество $\Xi_{t_*}^1$ пусто, то в задаче (2.1) с моментом замыкания t^1 не существует гарантирующего управления.

Функцию

$$u^0(\tau, \xi) = \begin{cases} u^{\alpha^0}(\tau|\tau, \xi), & \xi \in \Xi_\tau^1, \quad \tau \in T_h^0, \\ u^0(\tau|\tau, \xi), & \xi \in \Xi_\tau, \quad \tau \in T_h^1, \end{cases} \quad (3.11)$$

будем называть *оптимальной однократно замыкаемой обратной связью* (с моментом замыкания t^1).

3.1. Вычисление оптимальной программы

Опишем алгоритм вычисления оптимального гарантированного значения $\alpha^0 = \alpha^0(\tau, \xi)$ критерия качества (1.1) и соответствующей ему оптимальной начальной программы $u^{\alpha^0}(t|\tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, задачи (2.1) с моментом замыкания t^1 для позиции задачи (τ, ξ) . Поскольку структура α -множеств замыкания Z_α^1 , $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$, очень сложна, то точно описать их в общем случае невозможно. Поэтому предложим метод, позволяющий построить решение задачи (2.1) с требуемой точностью.

В излагаемом ниже методе вместо множества замыкания Z_α^1 будем использовать его внешнюю аппроксимацию многогранником $\bar{Z}_\alpha^1 \supseteq Z_\alpha^1$, грани которого построены по заданной системе нормальных векторов $p_j \in \mathbb{R}^{m+1}$, $j = \overline{1, q}$. Соответственно, вместо начальной α -программы

$u^\alpha(t|\tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, будем строить *начальную α -субпрограмму* $\bar{u}^\alpha(t|\tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, — управляющее воздействие, обеспечивающее включение

$$\Xi(\bar{u}^\alpha|\tau, \xi) \subset \bar{Z}_\alpha^1. \quad (3.12)$$

Начальную $\bar{\alpha}$ -субпрограмму $\bar{u}^{\bar{\alpha}}(t|\tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, с максимальным значением $\bar{\alpha}$, обеспечивающим включение (3.12), назовем *субоптимальной начальной программой*.

Опишем построение субоптимальной начальной программы $\bar{u}^\alpha(t|\tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, для произвольной системы нормальных векторов p_j , $j = \overline{1, q}$. Эта итерационная процедура будет использована ниже в качестве первой процедуры метода построения оптимальной программы $u^{\alpha^0}(t|\tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$.

Начнем с построения аппроксимирующего многогранника \bar{Z}_α^1 при некотором $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$. Множество Z^1 состоит из тех и только тех состояний задачи ξ^1 в момент t^1 , для которых существует управляющее воздействие $u(t|t^1, \xi^1)$ такое, что с гарантией (при всех $w(t) \in W$, $t \in T^1$) выполняются неравенства $J_i(u, w|t^1, \xi^1) \geq g_i$, $i = \overline{1, m}$, что эквивалентно соотношениям

$$\min_{w(t) \in W, t \in T(\tau)} J_i(u, w|t^1, \xi^1) = \xi_i^1 + \gamma_i(t^1) + h'_i x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_i(t)x(t)dt \geq g_i, \quad i = \overline{1, m},$$

где $x(t)$, $t \in T$, — траектория детерминированной системы (2.5). Это определение множества замыкания эквивалентно приведенному выше.

Если дополнительно выполняется неравенство

$$J_0(u, w|t^1, \xi^1) = \xi_0^1 + \gamma_0(t^1) + h'_0 x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_0(t)x(t)dt \geq \alpha,$$

то $\xi^1 \in Z_\alpha$.

Поэтому, решив q задач оптимального управления

$$\chi_j = \min_{\xi^1, u} p'_j \xi^1,$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t - \theta) + b(t)u(t), \quad x(t^1) = 0, \quad x(t) = 0, \quad t \in [t^1 - \theta, t^1], \quad (3.13)$$

$$\xi_0^1 + h'_0 x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_0(t)x(t)dt \geq \alpha - \gamma_0(t^1), \quad \xi_i^1 + h'_i x(t^*) + \int_{t^*-\theta}^{t^*} h'_i(t)x(t)dt \geq g_i(t^1), \quad i = \overline{1, m},$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in T^1,$$

относительно неизвестного управляющего воздействия $u(t)$, $t \in T^1$, и $(m+1)$ -вектора ξ^1 , получим оценки χ_j , $j = \overline{1, q}$, множества Z_α^1 . С помощью этих оценок построим многогранник

$$\bar{Z}_\alpha^1 = \{\xi^1 \in \mathbb{R}^{m+1} : p'_j \xi^1 \geq \chi_j, \quad j = \overline{1, q}\}. \quad (3.14)$$

Для получения начальной субоптимальной программы рассмотрим семейство задач

$$\rho_\alpha = \min_u \rho,$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t - \theta) + b(t)u(t) + d(t)w(t),$$

$$x(\tau) = z, \quad x(t) = z(t), \quad t \in [\tau - \theta, \tau],$$

$$p'_j \xi(t^1) = \bar{h}'_j x(t^1) + \int_{t^1-\theta}^{t^1} \bar{h}'_j(t)x(t)dt \geq \chi_j, \quad j = \overline{1, q}, \quad (3.15)$$

$$|u(t)| \leq \rho, \quad w(t) \in W, \quad t \in T^1,$$

зависящее от параметра $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$. Здесь

$$\bar{h}_j = p'_j \Psi(t^1), \quad \bar{h}_j(t) = p'_j \Psi(t + \theta) A_1(t + \theta), \quad t \in [t^1 - \theta, t^1];$$

$$\Psi(t) = (\psi_i(t), i = \overline{0, m}), \quad t \in T.$$

Отметим, что в связи с новыми терминальными ограничениями в задаче (3.15) появляется новое состояние задачи:

$$\zeta_j(\tau) = \zeta_j(\tau, z_\tau) = \bar{h}'_j x_*(t^1) + \int_{t^1 - \theta}^{t^1} \bar{h}'_j(t) x_*(t) dt, \quad j = \overline{1, q}.$$

По решению $\rho_\alpha, u_\rho^0(t|\tau, \zeta), t \in T^0(\tau)$, задачи (3.15) при фиксированном α можно судить о существовании начальной α -субпрограммы в задаче (2.1). Действительно, при $\rho_\alpha > 1$ невозможно построить управляющее воздействие $u(t) \in U, t \in T^0(\tau)$, обеспечивающее включение (3.12). При $\rho_\alpha \leq 1$ оптимальная программа $u_\rho^0(t|\tau, \zeta), t \in T^0(\tau)$, задачи (3.15) является начальной α -субпрограммой в задаче (2.1). При этом, если $\rho_\alpha = 1$, то $\bar{u}^{\bar{\alpha}}(t|\tau, \xi) \equiv u_\rho^0(t|\tau, \zeta), t \in T^0(\tau)$, — субоптимальная начальная программа задачи (2.1) с моментом замыкания t^1 .

Таким образом, алгоритм построения субоптимальной программы $\bar{u}^{\bar{\alpha}}(t|\tau, \xi), t \in T^0(\tau)$, для заданной системы нормальных векторов $p_j, j = \overline{1, q}$, состоит из следующих шагов:

- (1) Выбираем $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ и малый параметр $\delta \geq 0$.
- (2) Решаем q задач (3.13).
- (3) Формируем множество \bar{Z}_α^1 согласно (3.14).
- (4) Находим $\rho_\alpha, u_\rho^0(t|\tau, \zeta), t \in T^0(\tau)$, — решение задачи (3.15).
- (5) Если $\rho_\alpha > 1, \alpha > \alpha_*$, то уменьшаем α ; если $\rho_\alpha < 1 - \delta, \alpha < \alpha^*$, то увеличиваем α , и возвращаемся к шагу 2.
- (6) При $\rho_\alpha < 1, \alpha = \alpha_*$ или $1 - \delta \leq \rho_\alpha \leq 1$, полагаем $\bar{\alpha} = \alpha, \bar{u}^{\bar{\alpha}}(t|\tau, \xi) \equiv u_\rho^0(t|\tau, \zeta), t \in T^0(\tau)$, и построение субоптимальной начальной программы завершаем.
- (7) В случае, когда ни одно из условий шагов (5)–(6) не выполняется, задача (2.1) не имеет начальных α -субпрограмм и, следовательно, субоптимальной начальной программы, для момента замыкания t^1 .

Задачи (3.13), (3.15) решаются с помощью несложных модификаций двойственного метода решения детерминированных задач оптимального управления системами с запаздыванием, описанного в [18]. При построении решения для текущего значения α используются сопровождающие элементы [18], вычисленные для предыдущего значения α . На последних итерациях метода, а также при реализации оптимальной замыкаемой обратной связи (см. п. 3.1) значения α меняются незначительно. Это вносит малые изменения в соответствующие оценки $\chi_j, j = \overline{1, q}$, и значения ρ_α и позволяет быстро получать решения задач (3.13), (3.15) методом [18].

Субоптимальную начальную программу $\bar{u}^{\bar{\alpha}}(t|\tau, \xi), t \in T^0(\tau)$, можно принять за оптимальную начальную программу (2.1) для позиции задачи (τ, ξ) , если \bar{Z}_α^1 достаточно хорошо аппроксимирует $\bar{\alpha}$ -множество замыкания $Z_{\bar{\alpha}}^1$. Такая аппроксимация требует, как правило, значительного числа нормальных векторов $p_j, j = \overline{1, q}$, что приводит к большому числу ограничений в задаче (3.15). Это обстоятельство можно считать несущественным при построении оптимальной начальной программы в задаче (1.1)–(1.5) с моментом замыкания t^1 , поскольку ее решение проводится до начала процесса управления. В произвольный текущий момент $\tau \in T_h^1 \setminus t_*$ процесса управления построение оптимальной начальной программы задачи (3.15)

с большим числом ограничений может оказаться слишком трудоемким для завершения вычислений до наступления следующего момента $\tau + h$. Поэтому дополним описанную выше процедуру вычисления субоптимальной начальной программы процедурой повышения точности аппроксимации α -множеств замыкания только в окрестности множества $\Xi(\bar{u}^\alpha | \tau, \xi)$ возможных состояний задачи в момент t^1 . Будем итеративно выполнять обе процедуры до получения требуемой точности вычисления значения α^0 .

Выберем начальную систему нормальных векторов p_j^1 , $j = \overline{1, q^1}$ (например, $p_j^1 = e_j$, где $e_j \in \mathbb{R}^{m+1}$ — единичный орт). Пусть к началу k -й итерации получена система p_j^k , $j = \overline{1, q^k}$, по которой описанным выше алгоритмом вычислены значение $\alpha^k = \bar{\alpha}^k$, субоптимальная начальная программа $\bar{u}^{\alpha^k}(t | \tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, и построен аппроксимирующий многогранник $\bar{Z}_{\alpha^k}^1$.

Обозначим: $\xi^{\alpha^k}(t^1)$ — состояние задачи (2.1), которое будет получено в момент t^1 , если на промежутке времени $T^0(\tau)$ на детерминированную систему (2.5) подается управляющее воздействие $\bar{u}^{\alpha^k}(t | \tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$:

$$\xi_i^{\alpha^k}(t^1) = \xi_i(\tau) + \int_{\tau}^{t^1} \psi'_i(t) b(t) \bar{u}^{\alpha^k}(t | \tau, \xi) dt;$$

$J^k = \{0, \dots, q^k\}$; J_a^k — множество индексов активных ограничений задачи (3.15) на решении:

$$J_a^k = \{j \in J^k : p'_j \xi^{\alpha^k}(t^1) = \chi_j\}$$

$J_n^k = J^k \setminus J_a^k$ — множество индексов пассивных ограничений; ν_j^k , $j \in J^k$, — оптимальные множители Лагранжа, найденные в результате решения задачи (3.15) двойственным методом [18]; $\nu_j^k = 0$, $j \in J_n^k$.

Построим новую систему нормальных векторов p_j^{k+1} , $j = \overline{1, q^{k+1}}$, по следующим правилам:

(1) Если $|J_a^k| > 1$, то положим $q^{k+1} = q^k + 1$, $p_j^{k+1} = p_j^k$, $j = \overline{1, q^k}$, и построим один новый вектор

$$p_{q^{k+1}}^{k+1} = - \frac{\sum_{j \in J_a^k} \nu_j^k p_j^k}{\|\sum_{j \in J_a^k} \nu_j^k p_j^k\|}.$$

(2) Если $J_a^k = \{j_0\}$, то положим $q^{k+1} = q^k + s$, $p_j^{k+1} = p_j^k$, $j = \overline{1, q^k}$; используя решение ξ^{j_0} задачи (3.13) для $j = j_0$, построим s новых векторов

$$p_{q^k+l}^{k+1} = \frac{p_{j_0}^k + \frac{1}{s}(\xi^{j_0} - \xi^{\alpha^k}(t^1))}{\|p_{j_0}^k + \frac{1}{s}(\xi^{j_0} - \xi^{\alpha^k}(t^1))\|}, \quad l = \overline{1, s}.$$

З а м е ч а н и е. В ходе итераций целесообразно не только добавлять новые нормальные векторы, но и избавляться от некоторых старых. Например, можно удалить из системы p_j^k , $j = \overline{1, q^k}$, те векторы p_j^k , которые остаются пассивными на протяжении нескольких итераций, т.е. $j \in J_n^{k_1}$, $k_1 = \overline{k_0, k}$. Это приведет к уменьшению числа задач (3.13) и количества ограничений в задаче (3.15).

На $(k+1)$ -й итерации в качестве начального приближения для α^{k+1} возьмем значение α^k (шаг 1). Задачи (3.13) для $j = \overline{1, q^k}$ решим (шаг 2), используя сопровождающие элементы [18], полученные при последнем их решении на k -й итерации. В качестве сопровождающих элементов новых задач (3.13) ($j = \overline{q^k, q^{k+1}}$) возьмем элементы j_0 -й задачи, где $j_0 \in J_a^k$ — такой, что $|\nu_{j_0}^k| = \max_{j \in J_a^k} |\nu_j^k|$.

Если для α^{k+1} выполняются неравенства

$$\alpha^k - \alpha^{k+1} \leq \varepsilon_1, \quad \|\xi^{\alpha^{k+1}}(t^1) - \xi^{\alpha^k}(t^1)\| \leq \varepsilon_2, \quad (3.16)$$

($\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — заданные точности), то положим $\alpha^0 = \alpha^{k+1}$, $u^{\alpha^0}(t | \tau, \xi) = \bar{u}^{\alpha^{k+1}}(t | \tau, \xi)$, $t \in T^0(\tau)$, и построение оптимальной начальной программы завершим.

3.2. Реализация оптимальной замыкаемой обратной связи

Реализацию оптимальной замыкаемой обратной связи определим формулой (2.8), однако теперь под $u^0(\tau, \xi^*(\tau))$, $\tau \in T_h$, будем подразумевать оптимальную однократно замыкаемую обратную связь (3.11). Как и в п. 2.2, опишем алгоритм работы оптимального регулятора, который в каждом конкретном процессе управления вычисляет в режиме реального времени текущие значения $u^*(\tau)$, $\tau \in T_h$, реализации для каждого текущего момента $\tau \in T_h$.

До начала процесса управления оптимальный регулятор с помощью алгоритма п. 3.1 находит оптимальное гарантированное значение $\alpha^0 = \alpha^0(t_*)$ критерия качества (1.1) и соответствующую ему оптимальную начальную программу $u^{\alpha^0}(t|t_*, \xi^*(t_*))$, $t \in T^0$. В произвольный момент времени $\tau \in T_h^0 \setminus t_*$ оптимальный регулятор вычисляет $\alpha^0 = \alpha^0(\tau, \xi^*(\tau))$ и $u^{\alpha^0}(t|\tau, \xi^*(\tau))$, $t \in T^0(\tau)$, для текущей позиции задачи $(\tau, \xi^*(\tau))$. При этом в качестве начального приближения для $\alpha^0(\tau, \xi^*(\tau))$ он берет оптимальное значение $\alpha^0(\tau - h, \xi^*(\tau - h))$, а в качестве начального приближения для сопровождающих элементов [18] решений задач (3.13), (3.15) использует сопровождающие элементы соответствующих задач, решенных в предыдущий момент $\tau - h$.

На промежутке времени $[\tau, \tau + h[$, $\tau \in T_h^0$, оптимальный регулятор подает на вход физического объекта управляющее воздействие

$$u^*(t) \equiv u^*(\tau) = u^{\alpha^0}(\tau|\tau, \xi^*(\tau)), \quad t \in [\tau, \tau + h[.$$

Начиная с момента t^1 , оптимальный регулятор работает согласно алгоритму п. 2.2, реализуя оптимальную замыкаемую обратную связь по решению задачи (2.1) для позиции задачи $(\tau, \xi^*(\tau))$, $\tau \in T_h^1$.

Для того чтобы в момент t^1 построить оптимальную программу $u^0(t|t^1, \xi^*(t^1))$, $t \in T^1$, за время, не превышающее h , оптимальный регулятор в каждый момент времени $\tau \in T_h^0$ параллельно с решением задач (3.13), (3.15) вычисляет также сопровождающие элементы оптимальной программы $u^0(t|t^1, \xi^{\alpha^0}(t^1))$, $t \in T^1$. Тогда к моменту t^1 будут известны сопровождающие элементы решения задачи (2.1) для позиции задачи $(t^1, \xi^{\alpha^0}(t^1))$ при $\alpha^0 = \alpha^0(\tau - h, \xi^*(\tau - h))$. Различие между состояниями задачи $\xi^*(t^1)$ и $\xi^{\alpha^0}(t^1)$ определяется только действием возмущения на отрезке $[t^1 - h, t^1]$ и выражается соотношением

$$\xi^*(t^1) = \xi^{\alpha^0}(t^1) + \int_{t^1-h}^{t^1} \psi'_i(t) d(t) w^*(t) dt.$$

При малых h и ограниченных $w^*(t)$, $t \in T$, эти состояния близки. Поэтому по имеющимся данным оптимальный регулятор сможет построить двойственным методом [18] оптимальную программу $u^0(t|t^1, \xi^*(t^1))$, $t \in T^1$, за время, не превышающее h .

3.3. Пример

Для иллюстрации метода реализации оптимальной однократно замыкаемой обратной связи рассмотрим пример п. 2.4 с терминальными ограничениями

$$x_1(t^*) = 0, \quad \left| \int_{t^*-1}^{t^*} x_2(t) dt \right| \leq g_2, \quad (3.17)$$

и параметрами: $t^* = 3$, $g_2 = 0.1$, $w^* = 0.1$. В качестве момента замыкания возьмем $t^1 = 1.5$.

Начальное состояние задачи равно $\xi(0) = (0, -0.20984722, 1.94323871)$. Для позиции $(0, \xi(0))$ задача (2.10), (3.17) не имеет решения, поэтому построить оптимальную замыкаемую обратную связь невозможно. Более того, при использовании двухстадийной оптимальной замыкаемой обратной связи в процессе управления с $w^*(t) \equiv 0.1$, $t \in T$, невозможно найти момент $\tau_* \in T_h$, и в терминальный момент процесс приходит в состояние задачи $\xi(3) = (1.50214591, 0, 0.10762751)$, которое, очевидно, не удовлетворяет ограничениям (3.17).

Проиллюстрируем построение оптимальной программы в задаче (2.10), (3.17) с моментом замыкания t^1 . На первой итерации было получено значение $\alpha^1 = 1.3829045$ и соответствующее ему управляющее воздействие

$$\bar{u}^{\alpha^1}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, 0.62] \cup [1, 1.23[, \\ 0.16417363, & t \in [0.62, 0.63[, \\ 0, & t \in [0.63, 0.99] \cup [1.23, 1.5], \\ 0.56023768, & t \in [0.99, 1[. \end{cases} \quad (3.18)$$

На рис. 5(a) изображены сечения α^1 -множества замыкания $Z_{\alpha^1}^1$ плоскостями $\xi_0^1 = 0.25j$, $j = \overline{0, 5}$, и $\xi_0^1 = \xi_0^{\alpha^1}(t^1) = 0.85679272$ (штриховая линия). Последнее сечение представлено отдельно на рис. 5(b). Аппроксимирующий его многогранник $\bar{Z}_{\alpha^1}^1$ ограничен сплошной тонкой линией. Состояние задачи $\xi^{\alpha^1}(t^1)$ в момент t^1 должно принадлежать сужению многогранника $\bar{Z}_{\alpha^1}^1$, которое изображено штриховой тонкой линией. Действительно, детерминированная система

$$\dot{x}_1(t) = -\pi/2x_1(t-1) + b_1u(t), \quad \dot{x}_2(t) = ax_1(t) + a_1x_1(t-1),$$

под действием управляющего воздействия (3.18) порождает в момент времени t^1 состояние задачи $\xi^{\alpha^1}(t^1) = (0.85679272, 0.52611178, 0.25444908)$ (см. рис. 5(b)).

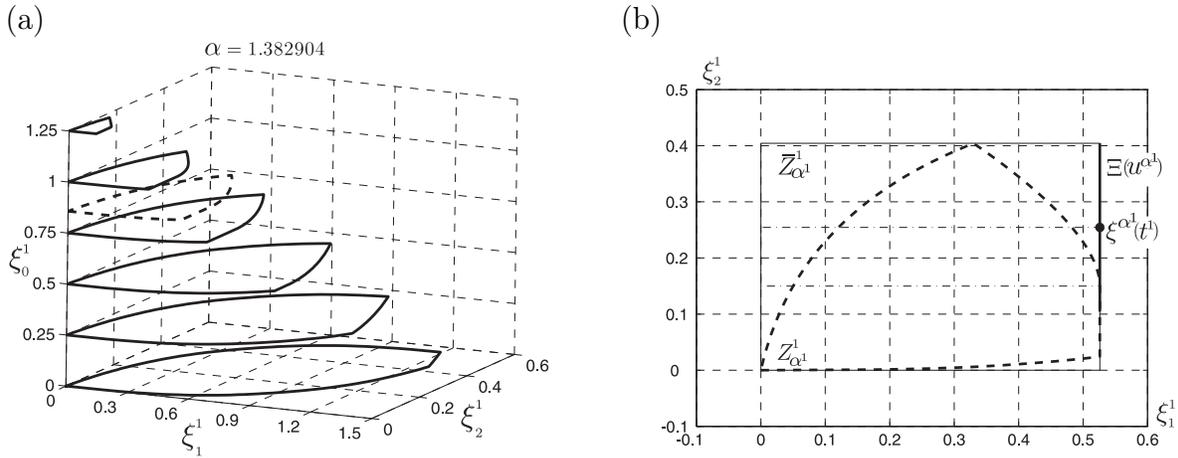


Рис. 5

Множество $\Xi(\bar{u}^{\alpha^1}) = \Xi(\bar{u}^{\alpha^1}|0, \xi(0))$ возможных состояний задачи является отрезком и на рис. 5(b) изображено жирной сплошной линией. Очевидно,

$$\Xi(\bar{u}^{\alpha^1}|0, \xi(0)) \not\subset Z_{\alpha^1}^1. \quad (3.19)$$

Этот факт также может быть проверен по решению следующей экстремальной задачи

$$\beta(\alpha) = \max_{\xi^1 \in \Xi(\bar{u}^\alpha)} J^0(t^1, \xi^1).$$

При $\beta(\alpha^1) \leq \alpha^1$ множество $\Xi(\bar{u}^{\alpha^1})$ принадлежит α^1 -множеству замыкания $Z_{\alpha^1}^1$, при $\beta(\alpha^1) > \alpha^1$ верно неравенство (3.19).

Решение задачи (2.10), (3.17) было продолжено до тех пор, пока не были выполнены неравенства (3.16) с $\varepsilon_1 = 10^{-8}$, $\varepsilon_2 = 10^{-4}$. Для этого потребовалось 13 итераций. В таблице для каждой итерации представлены значения α^k , $\xi^{\alpha^k}(t^1)$ и величина $\beta(\alpha^k) - \alpha^k$.

Программное решение

α^k	$\xi^{\alpha^k}(t^1)$			$\beta(\alpha^k) - \alpha^k$
1.38290450	0.85679272	0.52611178	0.25444908	0.13936467
1.49917996	1.00839978	0.31098675	0.23708655	0.00977963
1.50064595	1.01487957	0.31889618	0.22237486	0.00793229
1.50361913	1.01361950	0.34370854	0.20330709	0.00451373
1.50794873	0.97670182	0.33652137	0.25579268	0.00015735
1.50795192	0.97755990	0.33737444	0.25400860	0.00012785
1.50796001	0.97796143	0.34036697	0.25105382	0.00006646
1.50797032	0.98024212	0.34334117	0.24573416	0.00002624
1.50797800	0.98248923	0.34529106	0.24129436	0.00000185
1.50797927	0.98252237	0.34573542	0.24088927	5×10^{-7}
1.50797954	0.98244278	0.34552114	0.24116517	1.2×10^{-7}
1.50797965	0.98253306	0.34561290	0.24097582	3.3×10^{-8}
1.50797966	0.98250213	0.34558200	0.24104026	3×10^{-9}

На 13-й итерации было получено значение $\alpha^0 = \alpha^{13} = 1.50797966$ и оптимальная начальная программа

$$u^{\alpha^0}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 0.11] \cup [0.51, 0.91], \\ 0.23877127, & t \in [0.11, 0.12], \\ 1, & t \in [0.12, 0.5] \cup [0.91, 1.5], \\ 0.01144162, & t \in [0.5, 0.51], \end{cases}$$

Рис. 6 содержит результаты для последней итерации, аналогичные рис. 5.

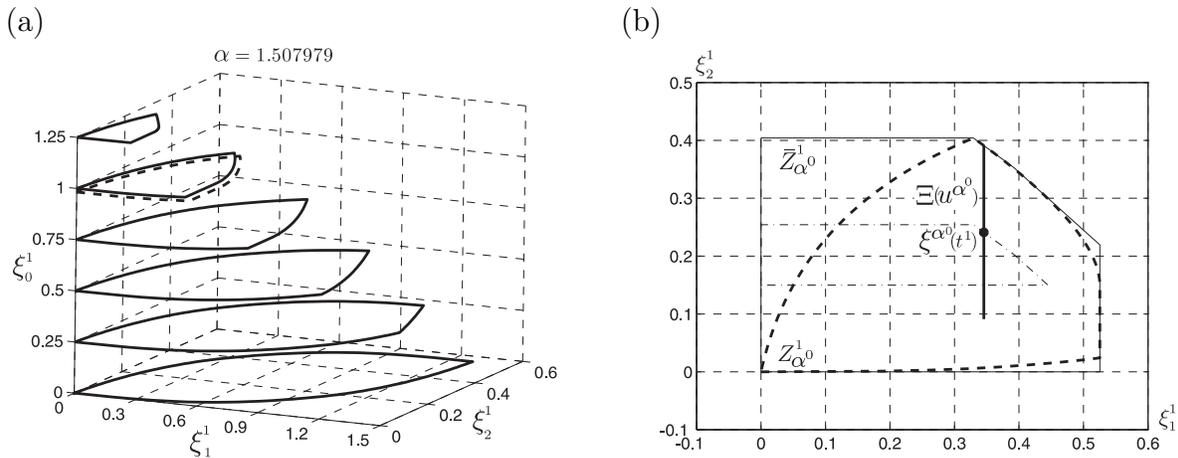


Рис. 6

Приведем результаты реализации оптимальной замыкаемой обратной связи для задачи (2.10), (3.17). Пусть в конкретном процессе управления на систему действует неизвестное оптимальному регулятору возмущение

$$w(t) = \begin{cases} 0.1, & t \in [0, 0.5] \cup [1.5, 2.5], \\ -0.1, & t \in [0.5, 1.5] \cup [2.5, 3]. \end{cases}$$

Реализация оптимальной замыкаемой обратной связи $u^*(t)$, $t \in [0, 3]$, и порожденные ею траектории $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $t \in [0, 4]$, изображены на рис. 7. Рис. 8 содержит графики изменения компонент состояния задачи $\xi_i^*(t)$, $t \in [0, 3]$, $i = \overline{1, 2}$. В момент t^* терминальное состояние задачи оказалось равным $\xi^*(3) = (1.35033355, 0, 0.075)$. В терминальный момент t^* достигнуто гарантированное значение критерия качества, равное 1.35033355.

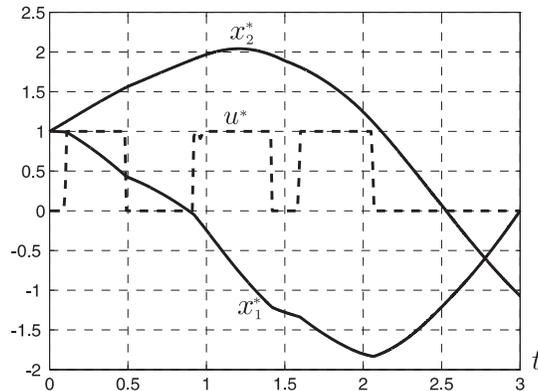


Рис. 7

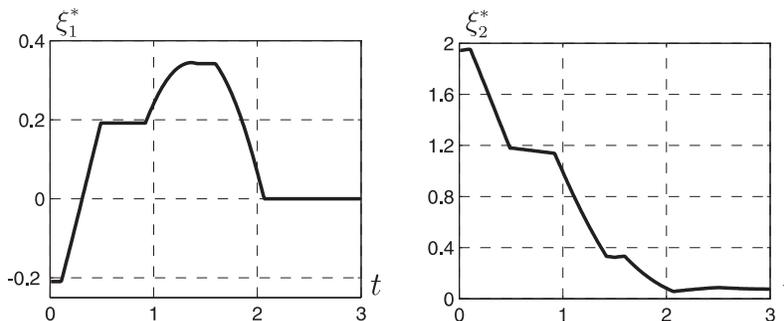


Рис. 8

Заключение

В работе исследована задача оптимального управления с гарантией системами с запаздыванием. Ее терминальные ограничения и критерий качества определены на бесконечномерных состояниях систем. Однако, для решения задачи достаточно использовать конечномерные состояния задачи, получающиеся из состояний систем и параметров задачи. Новые состояния позволяют реализовать не только оптимальную размыкаемую обратную связь, но и замыкаемые, которые в пределе переходят в оптимальную замкнутую обратную связь. Изложенный метод оптимального управления системами с запаздыванием допускает обобщения на задачи оптимального управления другими системами с распределенными параметрами.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принципы оптимального управления // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 1. С. 15–18.
4. Gabasov R., Kirillova F.M. Fast algorithms for positional optimization of dynamic systems // Proc. of the Workshop “Fast solutions of discretized optimization problems” / K.-H. Hoffmann, R. Hoppe and V. Schulz (eds). 2001. P. 107–119.
5. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 838–859.
6. Gabasov R., Kirillova F.M., Balashevich N.V. On the Synthesis Problem for Optimal Control Systems // SIAM J. Control Optim. 2000. V. 39, no. 4. P. 1008–1042.
7. Балашевич Н.В., Габасов Р., Калинин А.И., Кириллова Ф.М. Оптимальное управление нелинейными системами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2002. Т. 42, № 7. С. 969–995.
8. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Вычисление оптимальных программы и управления в линейной задаче с фазовым ограничением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 12. С. 2112–2130.
9. Габасов Р., Дмитрук Н.М., Кириллова Ф.М. Оптимальное управление многомерными системами по неточным измерениям их выходных сигналов // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 33–57.
10. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И. Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. Мн.: Университетское, 1984.
12. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
13. Ким А.В., Рублева С.С., Чой Е.С. К задаче аналитического конструирования регуляторов для систем с последействием // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 111–121.
14. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985.
15. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Построение оптимальных обратных связей по математическим моделям с неопределенностью // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 265–286.
16. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимальные обратные связи по состоянию: синтез и реализация // Докл. НАН Беларуси. 2005. Т. 49, № 4. С. 31–37.
17. Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963, № 6. С. 3–15.
18. Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимальное управление линейными системами с запаздыванием // Докл. РАН. 2006. Т. 410, № 2.

УДК 517.9

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЙ ЛИНЕЙНЫХ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ СО СКАЛЯРНЫМ ВЫХОДОМ****И. В. Гайшун**

Для линейной нестационарной системы с одним выходом указаны условия существования идентификатора, с экспоненциальной скоростью оценивающего текущие состояния. Описан алгоритм построения такого идентификатора, изучена зависимость его от малых возмущений коэффициентов.

Введение

Многие алгоритмы синтеза систем регулирования основаны на точном знании состояния $x(t)$. Однако, как правило, вектор $x(t)$ недоступен для измерения, известны лишь некоторые линейные комбинации (выходные переменные) его компонент. Поэтому важное значение имеет задача вычисления или хотя бы достаточно точного оценивания функции $x(t)$ по заданным выходным параметрам. Решению этой задачи посвящена многочисленная литература (см., например, [1–4]), причем в стационарном случае разработаны простые и эффективные методы ее решения [4].

Ситуация существенно усложняется для нестационарных систем. Однако если выход скалярный, то, используя теорию канонических форм, развитую в монографии [5], и в случае неавтономных систем можно предложить эффективный способ построения асимптотического наблюдателя или идентификатора состояния $x(t)$, т.е. такой динамической системы, решения которой неограниченно приближаются к процессу $x(t)$. Описание этого способа и составляет содержание предлагаемой заметки.

1. Постановка задачи

Пусть задана линейная нестационарная система

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1)$$

со скалярным выходом

$$y = c(t)x; \quad (2)$$

здесь независимая переменная t изменяется в множестве \mathbb{R} действительных чисел или в множестве \mathbb{R}_+ неотрицательных действительных чисел, $A(t)$ — $(n \times n)$ -матрица с непрерывными элементами, $c(t)$ — непрерывная n -вектор-строка. Как показано, например, в [3], дифференциальное уравнение

$$\dot{w} = A(t)w + k(t)(y(t) - c(t)w) \quad (3)$$

с произвольным n -вектор-столбцом $k(t)$ (вектором коэффициентов усиления) является наблюдателем или идентификатором для системы (1), (2). Это значит, что при любых $\tau \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^n$ из соотношения

$$x(\tau) = w(\tau) = v \quad (4)$$

следует, что решения $x(t) = x(t, \tau, v)$ и $w(t) = w(t, \tau, v)$ систем (1) и (3), порожденные начальными условиями (4), совпадают в каждый момент $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, в случае выполнения равенства (4) наблюдатель (3) точно восстанавливает решения системы (1). Однако поскольку измеряется только функция (2) и, следовательно, начальный вектор v неизвестен, то точная идентификация состояний $x(t, \tau, v)$ невозможна. Поэтому естественно рассмотреть задачу построения такого вектора $k(t)$, что любое решение $w(t)$ уравнения (3) асимптотически оценивает процесс $x(t, \tau, v)$, т.е. неограниченно приближается к функции $x(t, \tau, v)$, каким бы ни было $v \in \mathbb{R}^n$.

Так как разность (ошибка восстановления) $e(t) = x(t) - w(t)$ подчиняется системе дифференциальных уравнений

$$\dot{e} = (A(t) - k(t)c(t))e, \quad (5)$$

то задача асимптотического оценивания эквивалентна выбору такого вектора коэффициентов усиления $k(t)$, при котором $e(t) \rightarrow 0$, когда $t \rightarrow \infty$.

Часто важен не только факт асимптотического сближения функций $x(t)$ и $w(t)$, но и скорость этого сближения. Пусть ω — положительное число; будем говорить, что идентификатор (3) ω -асимптотический, если ошибка восстановления $e(t) = e(t, \tau, r)$, описываемая системой (5), удовлетворяет неравенству

$$\|e(t)\| \leq c_{r,\tau} e^{-\omega(t-\tau)} \quad (t \geq \tau), \quad (6)$$

где $c_{r,\tau}$ — положительная постоянная, зависящая от начального момента времени τ и от начального значения $e(\tau) = r$.

В следующих разделах дано обоснование сравнительно простого алгоритма построения вектора коэффициентов усиления $k(t)$, при котором наблюдатель (3) ω -асимптотический.

2. Существование канонической формы

Скажем, что система наблюдения (1), (2) имеет класс m (m — положительное целое число), если любая ее выходная функция $y(t)$ m раз непрерывно дифференцируема (отметим, что класс системы не связан прямым образом с гладкостью коэффициентов; например, легко указать систему (1), (2) с всего лишь непрерывными коэффициентами, обладающую классом n [5]). Как установлено в монографии [5], наличие класса m эквивалентно существованию и непрерывности вектор-функций

$$s_0(t) = c(t), \quad s_i(t) = s_{i-1}(t)A(t) + \dot{s}_{i-1}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

Когда $m = n - 1$, матрица $S(t)$, составленная из строк (7), называется матрицей наблюдаемости. Далее предполагаем, что система (1), (2) имеет класс $n - 1$ и $\det S(t) \neq 0$ при любом $t \in \mathbb{R}$, т.е. считаем эту систему равномерно наблюдаемой [5] (согласно [5] равномерная наблюдаемость означает, что любое состояние $x(t)$ можно однозначно восстановить с помощью обобщенных разрешающих операций $\delta(t), \dot{\delta}(t), \dots, \delta^{(n-1)}(t)$, где $\delta(t)$ — дельта-функция, сосредоточенная в точке t , а $\delta^{(j)}(t)$ — обобщенная производная).

Предположим теперь, что система (1), (2) имеет класс n и ее матрица наблюдаемости является обобщенной матрицей Ляпунова, т.е. характеристические показатели [7] функций $\|S(t)\|$ и $\|S(t)^{-1}\|$ нулевые. Определим вектор-строку $h(t) = s_n(t)S(t)^{-1}$, где $s_n(t) = s_{n-1}(t)A(t) + \dot{s}_{n-1}(t)$. Пусть ее компоненты, $h_j(t)$, $j - 1$ раз непрерывно дифференцируемы, причем функции $h_j^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, \dots, j - 1$) имеют неположительные характеристические показатели. Тогда, как установлено в монографии [5], существует линейное преобразование

$$x = G(t)z \quad (8)$$

с обобщенной матрицей Ляпунова $G(t)$, приводящее систему (1), (2) к так называемой канонической форме

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0(t) \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} z, \quad (9)$$

$$y = (0, 0, \dots, 0, 1)z,$$

где каждый коэффициент $a_j(t)$ непрерывно дифференцируем $j-1$ раз и его производные $a_j^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, \dots, j-1$) имеют неположительные характеристические показатели. Легко проверить, что при таких функциях $a_j(t)$ система (9) имеет класс n , а ее матрица наблюдаемости является обобщенной матрицей Ляпунова.

Обозначим через $S_0(t)$ матрицу наблюдаемости системы (9). Простые рассуждения показывают, что в силу замены (8) матрицы $S(t)$ и $S_0(t)$ связаны равенством $S_0(t) = S(t)G(t)$. Поэтому матрица $G(t)$ преобразования (8), осуществляющего переход от уравнений (1), (2) к системе (9), задается формулой

$$G(t) = S(t)^{-1}S_0(t). \quad (10)$$

3. Вычисление коэффициентов $a_j(t)$

Если коэффициенты $a_j(t)$ системы (9) известны и $j-1$ раз непрерывно дифференцируемы, то матрица $S_0(t)$ находится достаточно просто. Именно, легко показать, что ее элементы $s_{ij}^0(t)$ определяются следующим образом: они нулевые, если расположены выше боковой диагонали, и равны 1, если лежат на боковой диагонали; остальные функции $s_{ij}^0(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$s_{i,n+2-i}^0(t) = a_{n-1}(t) \quad (i = 2, 3, \dots, n),$$

$$s_{ij}^0(t) = s_{i-1,j+1}^0(t) + \dot{s}_{i-1,j}^0(t) \quad (i = 4, 5, \dots, n; j = n+3-i, \dots, n-1), \quad (11)$$

$$s_{in}^0(t) = a_{n+1-i}(t) + \sum_{j=n+2-i}^{n-1} a_j(t)s_{i-1,j+1}^0(t) + \dot{s}_{i-1,n}^0(t)$$

$$(i = 3, 4, \dots, n).$$

Таким образом, нахождение канонической формы (9) и соответствующего преобразования (8), (10) требует знания коэффициентов $a_j(t)$. Для их вычисления построим функцию $h_0(t) = s_n^0(t)S_0(t)^{-1}$, где матрица $S_0(t)$ задается правилами (11), а строка $s_n^0(t)$ подчиняется рекуррентным формулам

$$s_0^0(t) = e_n = (0, 0, \dots, 1), \quad s_i^0(t) = s_{i-1}^0(t)A_0(t) + \dot{s}_{i-1}^0(t)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n);$$

здесь $A_0(t)$ — матрица коэффициентов системы (9), элементы $a_j(t)$ которой пока считаются неопределенными.

Пусть теперь выполняются все предположения разд. 2, обеспечивающие существование канонической формы (9). Тогда [5] коэффициенты $a_j(t)$ удовлетворяют равенству

$$h(t) = h_0(t), \quad (12)$$

которое можно рассматривать как систему уравнений для их нахождения. Представим эту систему в виде

$$s_n^0(t) = h(t)S_0(t). \quad (13)$$

Простые выкладки показывают, что в координатной форме соотношение (13) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{n-1}(t) &= h_1(t), \\ D_i(t, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-i+1})(t) + a_{n-i}(t) &= 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n), \end{aligned} \quad (14)$$

где $D_i(t, \cdot)$ — дифференциальные операторы, структура которых легко определяется из условия (13). Поэтому каждый коэффициент $a_j(t)$ однозначно вычисляется из равенств (14), при этом, как легко проверить, он $j - 1$ раз непрерывно дифференцируем и функции $a_j^{(i)}(t)$ ($i = 0, 1, \dots, j - 1$) имеют неположительные характеристические показатели.

Итак, равенства (14) позволяют единственным образом найти коэффициенты $a_j(t)$ канонической формы (9), а формулы (10), (11) — построить преобразование (8), приводящее систему (1), (2) к виду (9).

4. Построение ω -асимптотического идентификатора

Пусть, как и в разд. 2, система (1), (2) имеет класс n , равномерно наблюдаема, ее матрица наблюдаемости $S(t)$ является обобщенной матрицей Ляпунова и компоненты $h_j(t)$ строки $h(t) = s_n(t)S(t)^{-1}$ являются $j - 1$ раз непрерывно дифференцируемыми, причем функции $h_j^{(i)}(t)$ ($i = 1, 2, \dots, j - 1$) имеют неположительные характеристические показатели. Выберем различные действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, удовлетворяющие неравенству $\alpha_j < -\omega$ (ω — величина, входящая в определение ω -асимптотического идентификатора), и построим многочлен

$$p(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) \dots (\lambda - \alpha_n) = \lambda^n - b_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - b_0. \quad (15)$$

Из соотношений (14) вычислим функции $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ и с помощью правил (11) найдем элементы $s_{ij}^0(t)$ матрицы $S_0(t)$. Зададим, наконец, вектор

$$k(t) = S(t)^{-1}S_0(t)(a(t) - b), \quad (16)$$

где $a(t)$ и b — столбцы с компонентами $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-1}(t)$ и b_0, b_1, \dots, b_{n-1} .

Теорема 1. *Идентификатор (3) с вектором коэффициентов усиления (16) является ω -асимптотическим.*

Доказательство. В силу сделанных предположений относительно матрицы $S(t)$ и строки $h(t)$ матрица $G(t) = S(t)S_0(t)^{-1}$ и ей обратная имеют нулевые характеристические показатели, т.е. $G(t)$ — обобщенная матрица Ляпунова. Произведем в системе

$$\dot{e} = (A(t) - G(t)(a(t) - b)c(t))e, \quad (17)$$

описывающей ошибку восстановления, замену переменных

$$e = S(t)^{-1}S_0(t)u = G(t)u. \quad (18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{u} &= G(t)^{-1} \left(A(t)G(t) - G(t)(a(t) - b)c(t)G(t) - \dot{G}(t) \right) u \\ &= \left(G(t)^{-1}A(t)G(t) - \dot{G}(t) - (a(t) - b)c(t)G(t) \right) u. \end{aligned}$$

Поскольку преобразование (18) приводит систему (1), (2) к канонической форме (9) (см. разд. 2), то

$$G(t)^{-1}A(t)G(t) - \dot{G}(t) = A_0(t), \quad c(t)G(t) = e_n,$$

и поэтому

$$\dot{u} = \left(A_0(t) - (a(t) - b)e_n \right) u. \quad (19)$$

Очевидно, уравнение (19) стационарно и матрица $B_0 = A_0(t) - (a(t) - b)e_n$ получается из матрицы $A_0(t)$ заменой функций $a_j(t)$ числами b_j . Поэтому характеристический многочлен $\det(\lambda I - B_0)$ системы (9) совпадает с полиномом (15). Значит, спектр этой системы состоит из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а так как обобщенное преобразование Ляпунова (18) не меняет характеристических показателей, то и спектр системы (17) задается этими числами. Следовательно, для ее решений верно неравенство (6), т.е. идентификатор (3) с вектором коэффициентов усиления (16) ω -асимптотический. Теорема доказана.

Заметим, что в условиях теоремы 1 постоянная $c_{r,\tau}$, входящая в формулу (6), зависит от начального момента τ , т.е. асимптотическое оценивание не является равномерным. Чтобы гарантировать равномерность по τ оценки (6), достаточно предъявить к системе (1), (2) следующие требования: (а) она имеет класс n и равномерно наблюдаема; (б) матрицы $S(t)$ и $S(t)^{-1}$ ограничены (т.е. $S(t)$ — матрица Ляпунова); (с) функции $h_j(t)$ ограничены и имеют непрерывные ограниченные производные

$$\dot{h}_j(t), \ddot{h}_j(t), \dots, h_j^{(j-1)}(t) \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

В этом случае вектор коэффициентов усиления (16) ограничен, а система (17) равномерно асимптотически устойчива, т.е.

$$\|e(t, \tau, r)\| \leq c_r e^{-\omega(t-\tau)} \quad (t \geq \tau), \quad (21)$$

где постоянная c_r не зависит от τ . При выполнении неравенства (21) мы говорим, что идентификатор (3) равномерно ω -асимптотический.

В частности, если матрица $A(t)$ и строка $c(t)$ T -периодические, система (1), (2) имеет класс n и равномерно наблюдаема, а функции $h_j(t)$ непрерывно дифференцируемы $j - 1$ раз, то столбец (16) является T -периодическим, а идентификатор (3), построенный с его помощью, равномерно ω -асимптотическим.

5. Зависимость от возмущений

Теорема 1 сформулирована в предположении, что коэффициенты системы (1), (2) известны точно и вектор (16) определяется без каких-либо ошибок. На самом деле такое предположение, как правило, не выполняется, и в действительности мы имеем систему наблюдения

$$\dot{x} = (A(t) + \mu D(t))x, \quad y = (c(t) + \mu d(t))x, \quad (22)$$

а в качестве вектора коэффициентов усиления получаем столбец

$$l(t) = k(t) + \mu p(t), \quad (23)$$

где $D(t)$, $d(t)$, $p(t)$ — неизвестные непрерывные матричная и векторные функции, подчиняющиеся неравенствам

$$\|D(t)\| \leq c_1, \quad \|d(t)\| \leq c_2, \quad \|p(t)\| \leq c_3 \quad (24)$$

(c_1, c_2, c_3 — фиксированные положительные константы), μ — малый параметр, $k(t)$ — вектор (16). Будем считать, что матрица $A(t)$ и строка $c(t)$ ограничены, система (1), (2) имеет класс n и равномерно наблюдаема, причем матрица наблюдаемости $S(t)$ есть матрица Ляпунова. Пусть, кроме того, ограничены и непрерывны производные (20). Тогда, как отмечено в предыдущем разделе, ограничен и столбец (16).

Рассмотрим идентификатор системы (22) с вектором коэффициентов усиления (23):

$$\dot{w} = \left(A(t) + \mu D(t) \right) w + \left(k(t) + \mu p(t) \right) \left(y(t) - (c(t) + \mu d(t)) w \right). \quad (25)$$

В этом случае уравнение для ошибки восстановления записывается следующим образом:

$$\dot{e} = (A(t) - k(t)c(t) + \mu F(t))e, \quad (26)$$

где $F(t) = D(t) - p(t)c(t) - k(t)d(t) - \mu p(t)d(t)$, причем, очевидно, матричная функция $F(t)$ ограничена.

Теорема 2. Для любого положительного числа $\delta < \omega$ существует такая величина $\mu_0 > 0$, что при любом $|\mu| < \mu_0$ уравнение (25) является равномерным δ -асимптотическим идентификатором для системы (22), какими бы ни были стесненные неравенствами (24) возмущения $D(t)$, $d(t)$, $p(t)$.

Доказательство. Сделаем в системе (26) замену переменных по формуле (18), имея в виду, что в силу принятых предположений $G(t) = S(t)^{-1}S_0(t)$ — матрица Ляпунова. Тогда

$$\dot{u} = (B_0 + \mu G(t)^{-1}F(t)G(t))u, \quad (27)$$

при этом матрица $H(t) = G(t)^{-1}F(t)G(t)$ ограничена: $\|H(t)\| \leq L = \text{const}$. Кроме того, так как идентификатор (3) равномерно ω -асимптотический, то верна оценка

$$\|e^{B_0(t-\tau)}\| \leq ce^{-\omega(t-\tau)} \quad (t \geq \tau; c = \text{const} > 0).$$

Из системы (27) вытекает, что

$$u(t) = e^{B_0(t-\tau)}u_0 + \mu \int_{\tau}^t e^{B_0(t-s)}H(s)u(s)ds.$$

Поэтому

$$\|u(t)\| \leq c\|u_0\|e^{-\omega(t-\tau)} + |\mu|cL \int_{\tau}^t e^{-\omega(t-s)}\|u(s)\|ds,$$

а по лемме Гронуолла

$$\|u(t)\| \leq c\|u_0\|e^{(-\omega+|\mu|cL)(t-\tau)}.$$

Значит, если $\mu_0 = (Lc)^{-1}(\omega - \delta)$, то при $|\mu| < \mu_0$ выполняется неравенство

$$\|u(t)\| \leq c\|u_0\|e^{-\delta(t-\tau)}. \quad (28)$$

Поскольку система (26) эквивалентна уравнению (27) относительно преобразования Ляпунова (18), то из оценки (28) следует требуемая равномерная δ -асимптотичность наблюдателя (25). Теорема доказана.

Поступила 25.04.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
2. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
3. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977.
4. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М.: Наука, 1980.
5. Гайшун И.В. Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: Едиториал УРСС, 2004.
6. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
7. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.

ИДЕНТИФИКАЦИЯ СОСТОЯНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ¹

В. Л. Гасилов, В. Б. Костоусов, А. П. Кукушкин

Рассматриваются вопросы идентификации состояния движущегося объекта по наблюдениям геофизических полей. Для коррекции ошибок, накопленных в инерциальной навигационной системе объекта, применяется экстремальное сравнение информации о внешних геофизических полях с априорной (эталонной) информацией о них, хранящейся в памяти бортового вычислительного устройства (корреляционно-экстремальный подход). В работе описываются общие принципы исследования систем навигации движущихся объектов по внешним информационным полям. Предлагается модель навигации по геофизическому полю и метод априорной оценки локальной информативности поля.

Введение

В автономном движении информация о положении движущегося объекта (наземного движущегося средства, летательного или космического аппарата, надводного или подводного судна) поступает от инерциальной навигационной системы (ИНС). Специфика работы ИНС приводит к появлению ошибок в определении положения объекта, которые с течением времени могут стать неприемлемо большими [1]. Допустим, что управляющие воздействия формируются по принципу обратной связи в виде функции от измеряемых ИНС величин. Так как измерения содержат большие ошибки, то реализуемая траектория со временем будет значительно отличаться от желаемой.

Эффективным средством коррекции накопленных ошибок является использование информации о внешних геофизических полях (ГФП), наблюдаемых в процессе движения объекта. При этом применяется корреляционно-экстремальный подход, который основан на экстремальном сравнении полученных измерений поля с априорной (эталонной) информацией о нем, хранящейся в памяти бортового вычислительного устройства [2].

В качестве ГФП может выступать, например, магнитное или гравитационное поле Земли, поле высот рельефа, оптическая и радиотепловая яркость покровов земной поверхности и т.п. (см. [2]). Эталон (карта) геофизического поля хранится в памяти бортового вычислительного управляющего устройства. При движении специальные измерители (датчики поля) определяют характеристики поля вдоль реализуемой траектории. Сравнение их с эталонными значениями в зоне коррекции движения позволяет уточнить параметры последнего.

В работе описываются общие принципы исследования систем навигации движущихся объектов по внешним информационным полям, которые были выработаны в ИММ УРО РАН в результате многолетнего опыта прикладных исследований. Материалы статьи в значительной степени опираются на черновые записи безвременно ушедшего из жизни Виталия Леонидовича Гасилова.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 06-01-00229, 04-07-90120).

1. Постановка задачи

Рассмотрим произвольную управляемую механическую (или электро-механическую) систему (объект), на которую наложены голономные и неголономные связи [3].

Геометрически движение объекта можно рассматривать как движение изображающей точки в n -мерном конфигурационном пространстве M [3], положение точек в котором описывается обобщенными координатами $q^i, i = 1, \dots, n$. В задачах механики движение объекта есть решение системы дифференциальных уравнений. При известном законе управления траектория движения определяется начальными (граничными) условиями по координатам и скоростям.

Обычно информацию о траектории объекта дает автономная инерциальная навигационная система (ИНС). Эта информация получается путем измерения кажущегося ускорения, т.е. по сути измеряется непотенциальная составляющая обобщенной силы [4]. Потенциальная составляющая вычисляется на основании принятой модели потенциальных силовых полей и имеющейся к этому моменту информации о положении объекта.

Интегрирование уравнений движения при заданных начальных (граничных) условиях производится самой ИНС и результатом является измеренная траектория объекта. При большом времени движения в автономном режиме такие измерения траектории содержат значительные накопившиеся ошибки [2]. Как правило, на небольших отрезках времени (интервалах измерения навигационных полей) известна структура ошибок измерения ИНС, но эта структура содержит неизвестные параметры. Например, в качестве таких параметров могут выступать координаты смещения начальной точки траектории. Теперь задача коррекции ошибок ИНС сводится к определению этих параметров, в частности, при помощи ГФП.

Внешние физические поля и их датчики. Обратимся теперь к внешним информационным полям и средствам их измерения. В простейшем случае используется одно скалярное информационное поле (например, высота рельефа земной поверхности) и оно измеряется одним датчиком (высотомером). Однако можно использовать и несколько различных физических полей, отличающихся как размерностью своей области определения (сфера, трехмерное пространство), так и типом измеряемого поля (скаляр, вектор). Отвлекаясь от этих физических подробностей, можно предложить единое математическое описание, учитывающее то общее, что присутствует в большинстве задач.

В качестве результата измерений будем рассматривать компоненты вектора h из векторного пространства H соответствующей размерности. Будем считать, что этот вектор получен в результате работы некоторого обобщенного датчика, т.е., объединим все измеряемые физические поля в одно информационное поле $h(\cdot)$, определенное на некотором пространстве S — *визируемом пространстве*. Размерность $\dim H$ значения информационного поля h равна сумме размерностей всех измеряемых полей с учетом числа каналов каждого датчика. Размерность $\dim S$ визируемого пространства S равна сумме размерностей областей определения для всех используемых полей. Заметим, что часто реальный физический датчик снимает информацию не в единственной точке, а в некоторой области (“пятне засветки”). При решении задачи навигации по ГФП вполне допустима привязка показаний датчика к некоторой “точке визирования” (например, к центру пятна засветки).

Для краткости обобщенный датчик будем в дальнейшем называть просто датчиком. Алгоритм работы датчика, в частности, дает возможность определить точку визирования — ту точку визируемого пространства S , в которую “направлен” обобщенный датчик. Пусть $[0, \vartheta]$ — отрезок времени, на котором производятся измерения. Положение точки визирования r на S зависит от положения объекта в конфигурационном пространстве в данный момент времени $t \in [0, \vartheta]$, параметров установки датчика на носителе, а также от ориентации и состояния датчика в момент времени t (в соответствии с алгоритмом его функционирования). Все вместе это формирует условия визирования в виде функции f , определяющей в каждый момент t положение точки визирования $r(t) = f(q(t), t)$ на визируемом пространстве S . Здесь $q(\cdot) : t \mapsto q(t)$

— траектория объекта, $t \in [0, \vartheta]$. Промежуток $[0, \vartheta]$ считаем фиксированным. В момент измерения $t_\alpha \in [0, \vartheta]$ ($\alpha = 1, \dots, N$) объект находится в точке q_α пространства M , имеет скорость \dot{q}_α , и условия визирования определяют положение точки $r_\alpha = f(q_\alpha, t_\alpha)$ визируемого пространства S , в которую направлен датчик. На визируемом пространстве S задано информационное поле h , измеренное значение которого в точке визирования r_α равно $h_\alpha = h(r_\alpha)$. Полагаем, что априори нам известно информационное поле в виде некоторой *карты поля* h_e .

Упорядоченную (по времени) совокупность точек визирования $\{r_\alpha\}$ на поверхности S будем называть *трассой* измерений, а набор соответствующих значений информационного поля $\{h_\alpha\}$ назовем *профилем трассы*. Если дискретный характер трассы и ее профиля не влияет на рассуждения, будут использоваться также обозначения $r(\cdot)$ и $h(\cdot)$.

Задача привязки. К моменту окончания измерений $t_N = \vartheta$ на борту движущегося объекта имеется следующая информация: карта информационного поля h_e , условия визирования f , измеренный профиль трассы $h(\cdot) = \{h_\alpha\}$ и моменты замеров $\{t_\alpha\}$. Имеется также траектория $q(\cdot)$, измеренная с помощью ИНС, однако эти измерения слишком грубы, чтобы по ним можно было найти трассу замеров с требуемой точностью.

Ключевым моментом является задача нахождения трассы, к которой относятся полученные замеры. Ее иногда называют задачей *привязки* измерений к эталону. Основное внимание в дальнейшем будет уделено именно этой задаче.

В реальной ситуации вся доступная информация содержит ошибки. Условия визирования определяются установочными и иными параметрами, которые могут быть измерены лишь приближенно, поэтому вместо истинного отображения f можно использовать лишь некоторое эталонное отображение f_e , а вместо истинного поля h — только его приближенную карту h_e (эталон). Далее, ошибки входят и в измерения поля, поэтому измеренный профиль $h_m(\cdot)$ может отличаться как от истинного профиля данной трассы $h(\cdot)$, так и от ее эталонного профиля $h_e(\cdot)$, восстановленного по эталону поля. Наконец, истинная траектория $q(\cdot)$ отличается от траектории $q_m(\cdot)$, измеренной с помощью ИНС.

В соответствии с методом экстремальной идентификации привязка измерений к эталону производится следующим образом.

Измеренная инерциальной системой траектория, условия визирования и априорная информация о динамике и системе управления объекта используются для выделения множества допустимых трасс $W = \{r_d(\cdot)\}$.

Каждой допустимой трассе $r_d(\cdot)$ можно поставить в соответствие допустимый профиль $h_d(\cdot)$, восстановленный по имеющейся карте поля $h_d(\cdot) = h_e(r_d(\cdot))$. Кроме того, рассматривая эту трассу в качестве гипотезы, отнесем к ней и измеренный профиль $h_m(\cdot)$.

Введем в рассмотрение некоторый функционал $F(h_1(\cdot), h_2(\cdot))$, который оценивает расстояние между двумя профилями, отнесенными к одной и той же трассе $r(\cdot)$. В этом функционале зафиксируем один аргумент, приравняв его к измеренному профилю трассы $h_m(\cdot)$, а в качестве другого аргумента будем рассматривать профили $h_e(\cdot) = h_e(r_d(\cdot))$, определяемые при помощи эталонной карты на каждой допустимой трассе. В результате получаем критерий невязки — функционал Φ на множестве допустимых трасс W (индекс “ d ” для краткости опускаем):

$$\Phi(r(\cdot)) = F(h_e(\cdot), h_m(\cdot)). \quad (1)$$

Таким образом, что этот функционал оценивает меру рассогласования гипотезы об истинности допустимой трассы с имеющимися измерениями [5].

Приведенные построения позволяют свести проблему привязки измерений к трассе к следующей экстремальной задаче:

На множестве W допустимых трасс требуется найти трассу $r(\cdot)$, доставляющую минимум функционалу невязки $\Phi(r(\cdot))$ (1):

$$\hat{r}(\cdot) = \operatorname{argmin}\{\Phi(r(\cdot)) | r(\cdot) \in W\}. \quad (2)$$

2. Алгоритм привязки и его компоненты

В рамках принятого подхода построение алгоритма привязки сводится к выбору следующих компонент:

- эталонная карта поля h ,
- множество допустимых трасс W ,
- функционал невязки Φ ,
- процедура минимизации Φ на W .

Ошибки в априорной информации и измерениях порождают ошибку привязки, которая, естественно, зависит от выбора указанных компонент. Рассмотрим эти компоненты более подробно.

Множество допустимых трасс. По постановке задачи трасса измерений — упорядоченный набор точек $\{r_\alpha\}$ на визируемом пространстве S . При фиксированных условиях визирования трасса полностью определяется траекторией объекта $q(t)$, $t \in [0, \vartheta]$.

Вообще говоря, множество допустимых трасс W является бесконечномерным, как и множество допустимых траекторий. Однако при конструировании практически используемых алгоритмов удается с приемлемой точностью описать множество допустимых трасс с помощью конечного числа параметров. Любая трасса $r_d(\cdot)$, рассматриваемая в качестве допустимой, должна согласовываться с траекторией объекта $q_m(\cdot)$, измеренной ИНС. Поэтому задача описания множества допустимых трасс тесно связана с описанием множества возможных траекторий объекта. Траектория, как решение уравнений движения, определяется граничными условиями и измеренными действующими силами.

Параметризация множества допустимых трасс W может быть проведена следующим образом. Интегрируя уравнения движения при граничных условиях $q(\vartheta) = q_\vartheta$, $\dot{q}(\vartheta) = \dot{q}_\vartheta$ находим решение

$$q(t) = q(t, q_\vartheta, \dot{q}_\vartheta), \quad t \in [0, \vartheta].$$

Рассматривая $q_\vartheta, \dot{q}_\vartheta$ в качестве параметров с учетом условий визирования $f(q, t)$, получаем параметрическое описание множества допустимых трасс

$$r_d(t, q_\vartheta, \dot{q}_\vartheta) = f(q(t, q_\vartheta, \dot{q}_\vartheta), t).$$

Не все введенные параметры фактически влияют на профиль трассы, даже если на саму трассу они оказывают влияние. Это обуславливается многими факторами — информативностью поля и чувствительностью датчика по отношению к данному параметру, условиями визирования и т.п. Так что число искомых параметров может быть значительно меньше размерности набора $(q_\vartheta, \dot{q}_\vartheta)$. При минимизации функции многих переменных размерность задачи и удачный выбор переменных сильно сказывается на трудоемкости и сходимости процедуры минимизации.

В дальнейшем будем полагать, что выделено множество навигационных параметров P и доверительная область $D \subset P$. Тогда множество допустимых трасс описывается соотношениями вида

$$W = \{r_{d\alpha} : r_{d\alpha} = r(t_\alpha, p), \quad p \in D, \quad \alpha = 0, \dots, N\}, \quad (3)$$

где $r(t, p)$ — заданная функция. Полагаем, что различным значениям p отвечают различные трассы.

На практике множество допустимых трасс формируется по измеренной траектории объекта с использованием эталонных условий визирования f_e . Для этого принимается некоторая модель ошибок ИНС [5] и в качестве параметров p множества W выбираются неизвестные параметры этой модели. В важном частном случае такими параметрами могут быть, например, ошибки в измерениях начальной и конечной точки трассы, либо ошибки в определении

конечной точки и поправки по скоростям $p = (\delta q_\vartheta, \delta \dot{q}_\vartheta)$.

Критерий невязки. Функционал невязки должен оценивать “расстояние” между измеренным профилем и любым допустимым профилем, рассматриваемым в качестве гипотезы.

Геофизические поля, используемые для навигации, можно разбить на два класса в зависимости от их морфологических особенностей — поля структурированные и поля непрерывные. Структурированными полями будем называть ГФП, при наблюдении которых явно обнаруживается наличие определенной структуры. Такая структура может, например, состоять из контрастных относительно фона областей (объектов), допускающих однотипное описание. При мониторинге земной поверхности подобную структуру наблюдаемого поля дают при соответствующем выборе спектра многие искусственные и естественные образования — районы промышленной и жилой застройки, сельхозугодия, дорожная и гидрологическая сеть и т.д. Примером непрерывного поля является поле высот рельефа — такие поля могут не обладать четко выраженной структурой.

При выборе критерия невязки морфологические характеристики поля должны учитываться. Если отсутствуют надежные методы выделения структур на карте, либо датчики не позволяют точно определить момент пересечения границ структурных образований, то профили сравниваются традиционным способом — путем задания метрики в пространстве вектор-функций. В этом случае в качестве критерия невязки будем использовать квадратичный функционал. Такой функционал можно определить, например, по формуле

$$\Phi(\{r_{d\alpha}\}) = \sum_{\alpha} |h_{d\alpha} - h_{m\alpha}|^2.$$

В любом случае требования к функционалу невязки заведомо противоречивы и, как показывает опыт, на практике не удается обойтись одним единственным функционалом на всех этапах решения задачи привязки.

Действительно, при поиске нужной трассы приходится искать глобальный минимум при наличии множества локальных. Поэтому неизбежен этап перебора — для отсеивания локальных минимумов. На этом “грубом” этапе необходимо производить многократное вычисление функционала, так что важнее простота вычисления, а не высокая точность оценки расстояния между профилями. Аналитические методы на данном этапе, как правило, не используются, да и вообще при поиске глобального минимума теория весьма скупа на рекомендации — по крайней мере для функционалов достаточно общего вида [6].

Напротив, на этапе “тонкого” поиска, после отсеивания заведомо ложных гипотез, необходимо обеспечить высокую точность нахождения действительного минимума (естественно, и здесь затраты времени не должны превосходить некоторого разумного предела). На этом этапе начинает играть роль гладкость (дифференцируемость) функционала. Гладкие функционалы обладают тем неоспоримым преимуществом, что они допускают применение аналитических методов как при конструировании функционала, так и при анализе достижимой точности и, наконец, при построении алгоритма минимизации.

Надежность и точность, с которыми определяется искомая трасса, зависят, естественно, от выбора функционалов на “грубом” и “тонком” этапе. Грубый функционал $\tilde{\Phi}$ должен обеспечивать надежное отсеивание заведомо ложных гипотез и локализацию области, в которой может находиться истинная трасса. А уже при поиске минимума в этой области выбор тонкого функционала Φ определяет в конечном счете погрешность, с которой находится искомая трасса.

В простейшем варианте грубый функционал является просто укороченным вариантом тонкого функционала — например, получен из последнего путем прореживания (меньшее количество членов в сумме). В общем случае грубый функционал может иметь принципиально иной вид, в частности, от него не требуется дифференцируемости.

Эталонная карта поля. Способ хранения априорной информации об измеряемом ГФП в значительной мере определяется выбором функционала невязки. Если структурные особенности поля не используются, то поле может храниться в виде матрицы его значений на равномерной сетке, покрывающей район ориентирования (например, в виде цифровой карты рельефа). Для восстановления значений поля в промежуточных точках используется процедура интерполяции. Погрешность восстановления δh_e определяется ошибками задания значений поля в узлах сетки и ошибками интерполяции. В общем случае эта ошибка может быть описана [12] стационарным случайным процессом с известной корреляционной функцией $K(\rho)$.

В качестве эталонной карты для структурированных полей в [7], [8] предлагается использовать контурный эталон — упорядоченный набор контуров элементов, расположенных в зоне коррекции. Ошибки контурного эталона можно разбить на два класса — локальные и структурные. К локальным ошибкам отнесем ошибки положения границ, возникающие как за счет неточного указания положения угловых точек контуров, так и вследствие аппроксимации криволинейных участков границ отрезками прямых. Структурные ошибки обусловлены изменением к моменту визирования конфигурации контурной мозаики границ структур (например, датчик не обнаружил часть объектов) и ошибками при формировании карты (ложные объекты).

Локальные ошибки положения границ можно оценить вектором отклонений крайних точек отрезков реальной границы от соответствующих точек на эталоне. Такие ошибки характеризуются случайными величинами δr_e , которые в простейшем случае являются независимыми (по координатам), нормальными, с нулевым средним и среднеквадратическим значением σ_e . Структурные ошибки эталона можно оценить коэффициентом искажений K_{err} , который вычисляется как отношение суммарного числа необнаруженных и ложных объектов к общему числу объектов на эталоне.

Процедура минимизации. С математической точки зрения задача привязки сводится к задаче минимизации функции многих переменных путем параметрического описания множества допустимых трасс. При этом сам функционал в задаче привязки носит вспомогательный характер — нас, в конечном счете, не интересует численное значение функционала и его вид, важен лишь результат, который мы получаем (точность привязки). Именно с этим обстоятельством связано использование различных функционалов (“грубого” и “тонкого”) на разных этапах решения задачи привязки.

Основными особенностями задачи минимизации при ориентировании по геофизическим полям являются:

- трудоемкость вычисления функционала — функционалы могут содержать большое количество слагаемых, восстановление эталона представляет собой громоздкую процедуру, требующую многократного интерполирования дискретной карты; кроме того, в процессе вычисления необходимо выделять систематические составляющие ошибок и фильтровать их флуктуационные составляющие и т.п.;
- неопределенность условий решения задачи — неточность всей исходной информации, большие случайные ошибки, реальная возможность сбоев аппаратуры;
- ограниченные возможности бортового вычислителя по быстродействию, разрядности представления чисел, объему памяти.

Эти особенности предопределяют компромиссность метода решения между многими противоречивыми факторами — между точностью решения и временем счета, между общностью математического метода минимизации и его эффективностью в каждом конкретном случае, между стремлением к максимальному учету специфики ошибок и устойчивостью алгоритма по отношению к ошибкам в самой статистической информации и т.п.

Теоретические проработки и опыт численного моделирования, накопленный в ИММ, привели к построению общей схемы поиска решения в задаче привязки. Данная схема содержит три основных этапа:

- предварительная обработка замеров — фильтрация ошибок измерений, преобразование замеров к виду, удобному для совмещения с эталоном и т.п.;
- перебор по узлам сетки в множестве допустимых трасс (т.е., в области определяющих параметров $D \subset P$) с адаптивным нахождением линейных составляющих суммарной ошибки при вычислении “грубого” функционала $\tilde{\Phi}$ и выделением трассы $\tilde{r}(\cdot)$, соответствующей минимуму $\tilde{\Phi}$;
- “тонкий” спуск (с адаптацией к ошибкам) от трассы $\tilde{r}(\cdot)$ по функционалу Φ (“тонкий” функционал) к минимуму $\hat{r}(\cdot)$ — именно эта трасса принимается за искомое решение задачи привязки.

3. Оценка информативности навигационных полей

На содержательном уровне информативность поля определяется возможной величиной ошибки решения задачи навигации. При этом влияние ошибок на точность привязки проявляется двояким образом — локально и глобально, что связано с сущностью метода экстремальной навигации — неизвестные параметры находятся из условия минимума выбранного функционала.

Локальный анализ, проведенный в малой окрестности истинной трассы, показывает (при дифференцируемом функционале невязки и достаточно малых ошибках), что погрешность в определении параметров трассы линейно зависит от ошибок. При малых ошибках такое отклонение в принципе должно быть небольшим.

Однако такая оценка справедлива лишь при условии, что среди нескольких локальных минимумов удалось выделить именно тот, который соответствует истинной трассе. И второй — глобальный — эффект наличия ошибок может быть разрушительным: алгоритм привязки выделит локальный минимум, далекий от глобального, и величина погрешности привязки при этом никак не связана с малостью ошибок. Подобную ситуацию принято называть срывом привязки.

Оба этих аспекта — локальный (точность привязки) и глобальный (устойчивость алгоритма) — необходимо учитывать при анализе информативности.

В соответствии с описанной выше общей схемой решения задачи на этапе грубого поиска производится сравнение измеренного профиля с профилями конечного набора трасс-гипотез. Этот набор определяется выбором некоторой сетки в доверительной области D . Задача грубого этапа — отсеять трассы, лежащие далеко от действительной, и выделить трассу, расположенную в области притяжения трассы с минимальным значением функционала и близкую к реализовавшейся. Под областью притяжения подразумевается такая окрестность глобального минимума, из каждой точки которой на этапе тонкого поиска произойдет спуск (по функционалу невязки) к трассе, соответствующей этому глобальному минимуму. Глобальная информативность навигационного поля понимается как такое его свойство, которое обеспечивает успешное решение задачи грубого поиска, прежде всего — надежное отсеивание трасс, далеко отстоящих от истинной.

Глобальная информативность может оцениваться с помощью модуля информативности, введенного в [9]. Информативность ГФП с позиций теории стохастического оценивания рассматривалась многими исследователями (см., например, [10]).

Рассмотрим влияние ошибок измерения профиля и ошибок восстановления профиля с эталона на локальную точность привязки.

В рамках аддитивной модели ошибок связи между введенными величинами (истинными, измеренными и восстановленными) можно описать соотношениями вида

$$r(t) = r_d(t) + \delta r_d(t), \quad h_m(t) = h(t) + \delta h_m(t), \quad h(r) = h_e(r) + \delta h_e(r). \quad (4)$$

Здесь δr_d — ошибка в определении допустимой трассы (т.е., отклонение допустимой трассы $r_d(t, p)$ от истинной $r(t)$, соответствующей этому же значению p), δh_m — ошибка датчика

поля и δh_e — ошибка процедуры восстановления эталона (в частности, сюда входит ошибка картографирования). Заметим, что при такой модели ошибок $h_m(t) = h_e(t) + \delta h(t)$, где $\delta h(t) = \delta h_m(t) + \delta h_e(t)$. Обозначим сводный вектор ошибок через $\varepsilon = (\delta r_d, \delta h_m, \delta h_e)$.

Допустим, что процедура минимизации критерия невязки на множестве допустимых трасс обеспечивает нахождение глобального минимума и истинная трасса находится в области притяжения именно этого минимума. Так как измерения и восстановление профиля производится с ошибками, минимум может достигаться не на истинной трассе $r(\cdot)$ а на некоторой другой трассе $\hat{r}(\cdot)$.

Принятый метод описания множества допустимых трасс позволяет считать (для данного измеренного профиля и конкретной реализации ошибок) функционал невязки просто функцией от p . Обозначим эту функцию той же буквой: $\Phi(p) = \Phi(r(\cdot, p))$. Если критерий невязки является гладким, то эта функция дифференцируема. В результате решения задачи привязки (ср. с (2)) получим вектор навигационных параметров

$$\hat{p} = \operatorname{argmin}\{\Phi(p) | p \in D\}. \quad (5)$$

Пусть \hat{p} лежит внутри области D . Тогда в точке \hat{p} должно выполняться необходимое условие минимума

$$\Phi_v(\hat{p}) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial p^v} \right|_{p=\hat{p}} = 0, \quad v = 1, \dots, \dim P. \quad (6)$$

Здесь Φ_v вычисляется вдоль допустимого профиля $r_d(\cdot, \hat{p})$ при реализовавшихся ошибках. Так что по сути критерий невязки Φ и сама эта производная являются функционалами от $r_d(\cdot)$, $h_m(\cdot)$ и $h_e(\cdot)$. При определенных предположениях о гладкости функционала Φ можно записать:

$$\Phi_v(\hat{p}) = \sum_{\alpha} \sum_s \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r_{da}^s} \frac{\partial r_{da}^s}{\partial p^v} + \sum_{\varkappa} \frac{\partial \Phi}{\partial h_e^{\varkappa}} \frac{\partial h_e^{\varkappa}}{\partial r_{da}^s} \frac{\partial r_{da}^s}{\partial p^v} \right) = \Phi_v(r_d(\cdot, \hat{p}), h_m(\cdot), h_e(\cdot)).$$

Здесь суммирование по α , s и \varkappa производится в пределах от единицы до N , $\dim S$ и $\dim H$ соответственно. С учетом малости ошибок можно разложить это выражение в окрестности истинной трассы, истинного профиля трассы и истинного поля в окрестности трассы. Однако такое разложение бесполезно, поскольку фактически истинные значения нам неизвестны. Кроме того, если вполне допустимо говорить о дифференцируемости (гладкости) карты поля, то гладкость истинного поля — весьма сомнительное допущение. Фактически нам известны лишь эталонные значения и возможные ошибки отклонения эталона от истины. Поэтому для получения практически пригодных формул надо проводить разложение производной $\Phi_v(\hat{p})$ в окрестности допустимой трассы $r_d(\cdot)$ и эталонного профиля $h_e(\cdot)$ этой трассы.

Рассматриваем ошибки измерения и восстановления как вариации (возмущения) соответствующих функций (4) и, полагая $\hat{p} = p + \delta p$ (p — истинная точка, δp — малый вектор), получаем в первом приближении

$$\Phi_v(\hat{p}) = \Phi_v^e + \sum_w \Phi_{vw}^e \delta p^w + \delta \Phi_v^e(\varepsilon(\cdot)) = 0. \quad (7)$$

Здесь $\{\Phi_{vw}^e\}$ — матрица вторых производных критерия невязки по p , $\delta \Phi_v^e$ — вариация функционала Φ_v^e (линейная часть приращения Φ_v^e при возмущении $r_d(\cdot)$ и $h_m(\cdot)$):

$$\delta \Phi_v^e(\varepsilon(\cdot)) = \sum_a \left[\sum_s \left(\frac{\partial \Phi_v^e}{\partial r_{da}^s} + \sum_{\varkappa} \frac{\partial \Phi_v^e}{\partial h_e^{\varkappa}} \frac{\partial h_e^{\varkappa}}{\partial r_{da}^s} \right) \delta r_a^s + \sum_{\varkappa} \frac{\partial \Phi_v^e}{\partial h_e^{\varkappa}} \delta h_a^{\varkappa}(\cdot) \right].$$

Индекс “e” в формуле (7) означает, что все производные и вариации вычисляются вдоль допустимой трассы, с использованием карты поля и при отсутствии ошибок, так что они полностью определяются выбором допустимой трассы и могут быть определены численно. Для

упрощения записи в дальнейшем, если это не приводит к двусмысленности, опускаем индекс “ e ” у производных и вариаций.

В регулярном случае матрица вторых производных $\{\Phi_{vw}\}$ невырождена (точнее, положительно определена) и существует обратная матрица $\{\Phi^{vw}\}$, что позволяет разрешить уравнение (7) относительно ошибки привязки δp :

$$\delta p^v = - \sum_w \Phi^{vw} (\Phi_w + \delta \Phi_w(\varepsilon(\cdot))). \quad (8)$$

Формула (8) позволяет для каждой допустимой трассы определить влияние конкретной реализации ошибок и оценить это влияние с точки зрения принятого критерия качества.

Рассмотрим в качестве примера задачу навигации по полю высот рельефа. Пусть измерения производятся с постоянным шагом в моменты времени $t_\alpha = \alpha \Delta T$, $\alpha = \overline{0, N}$, $\Delta T = \vartheta/N$, где ϑ — время визирования, $N+1$ — число замеров. Пусть p — вектор “истинных” параметров, при которых произведены измерения высот. Пусть \hat{p} — решение задачи (5) и $\delta p = \hat{p} - p$ — вектор ошибки привязки. Ошибка привязки возникает за счет ошибок измерений $\varepsilon = \delta h$ (где δh — вектор размерности $N+1$) и зависит от информативных свойств поля h . Для сокращения выкладок и получения явных выражений рассмотрим случай нулевых ошибок по скорости. Тогда требуется найти двумерный вектор $\hat{p} = (\hat{x}, \hat{y})$, доставляющий минимум в задаче (5) и оценить ошибки $\delta p = (\delta x, \delta y)$.

Обозначим через $h_{xi} = \frac{\partial h}{\partial x}(x_i, y_i)$, $h_{yi} = \frac{\partial h}{\partial y}(x_i, y_i)$ частные производные поля h , вычисленные в точках истинной трассы замеров (при нулевых ошибках измерения). Введем в рассмотрение $(N+1)$ -векторы h_x и h_y , составленные из h_{xi} и h_{yi} соответственно, и пусть, как обычно, (a, b) обозначает скалярное произведение векторов a и b .

В предположении непрерывной дифференцируемости функции h и малости ошибок δx и δy для всех $i = \overline{0, \dots, N}$ имеем: $\delta h_i = h_i(\hat{p}) - h_i(p) \approx h_{xi} \delta x + h_{yi} \delta y$. Учитывая это, путем линеаризации системы (6) получаем следующую линейную систему уравнений относительно ошибок δx и δy :

$$\begin{cases} (h_x, h_x) \delta x + (h_x, h_y) \delta y = (h_x, \varepsilon) \\ (h_x, h_y) \delta x + (h_y, h_y) \delta y = (h_y, \varepsilon) \end{cases}.$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{cases} \delta x = \frac{(h_x, \varepsilon)(h_y, h_y) - (h_y, \varepsilon)(h_x, h_y)}{(h_x, h_x)(h_y, h_y) - (h_x, h_y)^2} \\ \delta y = \frac{(h_y, \varepsilon)(h_x, h_x) - (h_x, \varepsilon)(h_x, h_y)}{(h_x, h_x)(h_y, h_y) - (h_x, h_y)^2} \end{cases} \quad (9)$$

и выражает явную зависимость ошибок привязки от ошибок измерения ε . Условие неравенства нулю знаменателя в этих формулах допускает простую геометрическую интерпретацию: на трассе должны найтись по крайней мере две точки замеров, в которых градиенты поля высот не коллинеарны.

Предположим, что все $N+1$ компонент вектора ε являются независимыми случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией σ_ε^2 . Тогда из формул (9) получаем следующие выражения для дисперсий ошибок привязки:

$$\begin{cases} \sigma_{\delta x}^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(h_y, h_y)}{(h_x, h_x)(h_y, h_y) - (h_x, h_y)^2} \\ \sigma_{\delta y}^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(h_x, h_x)}{(h_x, h_x)(h_y, h_y) - (h_x, h_y)^2} \end{cases}, \quad (10)$$

которые и определяют информативность геофизического поля h в окрестности некоторой трассы замеров. Для общей оценки локальной информативности поля в заданной области плоскости формулы (10) применяются к множеству трасс, покрывающих эту область.

Важной характеристикой полученных выше формул (8, 9) для оценки точности привязки является их линейность по отношению к ошибкам ε . Это позволяет рассматривать влияние

на точность привязки суммы различных ошибок (ошибок в каждом из каналов датчика, отдельных составляющих ошибок в одном из каналов и т.п.) как суперпозицию влияний отдельных ошибок. Тем самым исследование точности коррекции параметров движения объекта при сложном составе ошибок в измерениях можно свести к разложению ошибок на относительно простые слагаемые и к изучению влияния на точность каждой из составляющих в отдельности.

Рассмотрим методику оценки локальной информативности более подробно на примере поля высот рельефа. Формулы (9) можно представить в виде

$$\delta x = \sum_{\alpha=0}^N X_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}, \quad \delta y = \sum_{\alpha=0}^N Y_{\alpha} \varepsilon_{\alpha}, \quad (11)$$

где коэффициенты X_{α}, Y_{α} выражаются через частные производные функции $h(x, y)$, вычисленные по цифровой карте поля высот.

Пусть ошибки ε в (11) можно рассматривать как сумму l независимых стационарных случайных процессов $\xi_j, j = 1, \dots, l$, с нулевыми средними, среднеквадратическими отклонениями σ_j и корреляционными функциями $K_j(t - t_0)$ [12]. Соответствующий радиус корреляции обозначим через ρ_j . В качестве таких компонент-процессов можно рассматривать, например, ошибки картографирования (вдоль трассы), ошибки измерения, ошибки интерполирования рельефа, ошибки определения трассы измерений и т.д.

Для дисперсий ошибок привязки $D(\delta x), D(\delta y)$, используя соотношения (11), получаем

$$D(\delta x) = \sum_{j=1}^l D_{xj}, \quad D(\delta y) = \sum_{j=1}^l D_{yj}. \quad (12)$$

Здесь D_{xj}, D_{yj} — дисперсии ошибок $\delta x, \delta y$, отвечающие отдельному случайному процессу ξ_j . Эти величины рассчитываются [12] по формулам (приводим только для D_{xj})

$$D_{xj} = K_j(0) \sum_{\alpha=0}^N X_{\alpha}^2 + 2K_j(\Delta T) \sum_{\alpha=1}^N X_{\alpha} X_{\alpha-1} + \dots + 2K_j(T) X_0 X_N. \quad (13)$$

Дисперсии (12), (13) при заданных статистических свойствах ошибок измерения и картографирования могут быть вычислены при известных исходных данных.

На этапе проектирования информация об ошибках неизбежно носит предварительный характер. Чаще всего можно определенно предположить только структуру ошибок (вид корреляционной функции и т.п.). При этом параметры корреляционных функций известны лишь приближенно. Для оценки влияния различных параметров на достижимую точность привязки удобно использовать *номограммы точности* [11], которые строятся по данному участку ориентирования для определенных условий привязки (количество и шаг замеров, число членов функционала, параметры фильтра и т.п.). Для построения номограмм точности используются формулы (13), в которых применяется нормированная корреляционная функция ($\sigma = 1$), причем радиус корреляции ρ рассматривается в качестве параметра. Сами номограммы представляют собой зависимости

$$\sigma_{\delta x}(\rho) = \sqrt{D(\delta x, \rho)}, \quad \sigma_{\delta z}(\rho) = \sqrt{D(\delta z, \rho)},$$

которые и дают возможность учитывать влияние отдельных составляющих ошибок.

Номограммы точности позволяют легко определить дисперсию ошибки привязки от воздействия отдельно взятой помехи — для известного радиуса ρ корреляции помехи находим по графику соответствующие ординаты $\sigma_{\delta x}, \sigma_{\delta y}$, умножаем эти значения на σ помехи и возводим в квадрат. В случае независимости отдельных составляющих ошибки дисперсия суммарной ошибки привязки вычисляется как сумма дисперсий ошибок привязки, порождаемых отдельными помехами (12).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ишлинский А.Ю.** Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1967.
2. **Белоглазов И.Н., Джанджгава Г.И., Чигин Г.П.** Основы навигации по геофизическим полям. М.: Наука, 1985.
3. **Лурье А.И.** Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.
4. **Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.** Динамика полета. М.: Машиностроение, 1973.
5. **Красовский А.А., Белоглазов И.Н., Чигин Г.П.** Теория корреляционно-экстремальных навигационных систем. М.: Наука, 1979.
6. **Химмельблау Д.М.** Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975.
7. **Костоусов В.Б., Кукушкин А.П.** Идентификация состояния механических систем по измерениям границ: оценка точности // Задачи моделирования и оптимизации. Свердловск: ИММ УрО РАН, 1991.
8. **Гасилов В.Л., Костоусов В.Б.** Задача идентификации параметров движения объекта на основе обработки изображения внешнего информационного поля // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 3. С. 78–86.
9. **Бердышев В.И.** Полиномиальная аппроксимация, связанная с навигацией по геофизическим полям // Докл. РАН. 1992. Т. 325, № 6. С. 1099–1102.
10. **Степанов О.А.** Методы оценки потенциальной точности в корреляционно-экстремальных навигационных системах. // СПб: ГНЦ РФ–ЦНИИ “Электроприбор”, 1993.
11. **Гасилов В.Л., Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** Задачи повышения точности навигации движущихся объектов // Тез. докл. Всесоюзной Школы по проблемам математического обеспечения и архитектуры бортовых вычислительных систем. Ташкент, 1988.
12. **Пугачев В.С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М.: Физматгиз, 1962.

ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ДЛЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

М. И. Гусев

В работе исследуется вопрос об оценках погрешности областей достижимости управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, при дискретизации фазовых ограничений. Особенностью изучаемых в данной работе задач является то, что рассматриваются фазовые ограничения типа равенства.

1. Введение

Сходимость дискретных аппроксимаций и оценки погрешности аппроксимаций являются предметом исследования в теории обратных задач динамики [1–3], в теории гарантированного оценивания для управляемых систем с неопределенными возмущениями [4–6], в теории управления и дифференциальных играх [7–9]. В данной статье рассматривается задача построения множеств достижимости для управляемых систем с фазовыми ограничениями типа равенства. Фазовые ограничения на всем рассматриваемом промежутке времени заменяются ограничениями в дискретные моменты времени. Ищется оценка для погрешности, возникающей в результате такой замены, в зависимости от шага дискретизации. Учитывая, что информационное множество для задачи гарантированного оценивания состояния динамической системы по результатам измерений можно представить как множество достижимости системы с фазовыми ограничениями, приводимые оценки можно рассматривать с точки зрения обоснования применения дискретных аппроксимаций при построении информационных множеств. Эти оценки могут быть использованы также при исследовании устойчивости процедур гарантированного оценивания [10, 11].

Рассмотрим управляемую систему на заданном интервале времени $[t_0, t_1]$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$. Пусть ограничения на управление и фазовую траекторию системы заданы в следующем виде

$$u(t) \in P, \quad t \in [t_0, t_1], \quad h(x(t)) = 0, \quad t \in T, \quad (1.2)$$

где $P \subset \mathbb{R}^r$ — компакт, T — заданное подмножество отрезка $[t_0, t_1]$, h — непрерывно дифференцируемая функция. Будем далее предполагать, что ее градиент ∇h удовлетворяет условию Липшица и отличен от нуля в точках множества $X = \{x : h(x) = 0\}$. Обозначим через U множество измеримых вектор-функций $u(t)$, удовлетворяющих условию $u(t) \in P$, $t \in [t_0, t_1]$.

Будем далее считать, что f , g — непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие следующим условиям: существуют константы C_1 , C_2 такие, что $\|f(x)\| \leq C_1(1 + \|x\|)$,

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (06-01-00332) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5344.2006.1).

$\|g(x)\| \leq C_2$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Данные условия обеспечивают продолжимость решения системы (1.1) на интервал $[t_0, t_1]$ при любом $u(\cdot) \in U$. Обозначим через $x(t, u(\cdot))$ решение системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$, отвечающее управлению $u(\cdot)$.

Пусть задан начальный вектор x^0 такой, что $h(x^0) = 0$. Обозначим через $G_0(t_1)$ область достижимости в момент времени t_1 системы (1.1) при ограничениях (1.2), если в качестве T взят интервал $[t_0, t_1]$. Таким образом, $G_0(t_1)$ — множество всех тех векторов $x \in \mathbb{R}^n$, для каждого из которых существует управление $u(\cdot) \in U$ такое, что $x = x(t_1, u(\cdot))$, и $x(t, u(\cdot))$ удовлетворяет (1.2). Далее, не оговаривая это особо, всегда считаем, что $G_0(t_1) \neq \emptyset$.

Рассмотрим конечное множество моментов времени $T_\sigma = \{\tau_i\}_{i=1}^N \subset [t_0, t_1]$, $\tau_1 = t_0$, $\tau_N = t_1$, $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N$; где $\sigma = \max_{1 \leq i \leq N-1} (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Пусть $G_\sigma(t_1)$ — область достижимости в момент времени t_1 системы (1.1), отвечающая множеству $T = T_\sigma$. Очевидно, $G_0(t_1) \subset G_\sigma(t_1)$. Если множество P выпукло, то $d(G_0(t_1), G_\sigma(t_1)) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$, где d — хаусдорфово расстояние. Наша цель состоит в получении оценок для $d(G_0(t_1), G_\sigma(t_1))$ как функции от σ . Именно, далее указаны условия, при выполнении которых имеет место неравенство

$$d(G_0(t_1), G_\sigma(t_1)) \leq K\sigma \tag{1.3}$$

для любого разбиения T_σ ; здесь K — константа, не зависящая от разбиения.

2. Сходимость и оценки скорости сходимости областей достижимости при дискретной аппроксимации фазовых ограничений

Будем далее использовать следующее обозначение:

$$I_k(y(\cdot)) = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} y(t) dt.$$

Пусть $U = \{u(\cdot) \in L_2[t_0, t_1] : u(t) \in P \text{ для п.в. } t \in [t_0, t_1]\}$. Рассмотрим оператор A_{T_σ} , переводящий функции $u(\cdot) \in L_2[t_0, t_1]$ в кусочно-постоянные функции $v(\cdot) = A_{T_\sigma} u(\cdot)$ по следующему правилу: $v(t) = \frac{1}{\sigma_k} I_k(u(\cdot))$, $\tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}$, $\sigma_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Таким образом, $v(t)$ представляет собой усреднение $u(t)$ на отрезках $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, \dots, N - 1$. Если P выпукло, то, очевидно, A_{T_σ} отображает U в U .

Лемма 2.1. *Существует константа $K_1 > 0$ такая, что для любого $u(\cdot) \in U$ и любого разбиения T_σ справедливо неравенство*

$$\|x(t, u(\cdot)) - x(t, A_{T_\sigma} u(\cdot))\| \leq K_1\sigma, \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2.1}$$

Доказательство. Из компактности $\text{conv } P$ — выпуклой оболочки P — следует, что существуют константы L и K_2 такие, что для любой траектории системы (1.1) с заданным начальным условием, отвечающей управлению $u(t)$ со значениями в $\text{conv } P$, выполняются неравенства

$$\|x(t)\| \leq K_2, \quad \|x(t) - x(\tau)\| \leq L|t - \tau|, \quad \tau, t \in [t_0, t_1]. \tag{2.2}$$

Понятно, что найдутся константы L_1, L_2 такие, что для любой траектории системы (1.1) ($x(t_0) = x^0$) функции $f(x(\tau)), g(x(\tau))$ удовлетворяют условию Липшица с константами L_1, L_2 , соответственно. Обозначим $K_3 = \max\{\|u\| : u \in \text{conv } P\}$. Пусть $u(t) \in U$ — произвольное управление, обозначим $\bar{u}(\cdot) = A_{T_\sigma} u(\cdot)$. Пусть $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ — траектории системы, отвечающие соответственно $u(t)$ и $\bar{u}(t)$.

Интегрируя тождество $\dot{x} = f(x(t)) + g(x(t))u(t)$ на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 1, \dots, N-1$, получим

$$\begin{aligned} x(\tau_{k+1}) - x(\tau_k) &= \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} f(x(\tau))d\tau + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} g(x(\tau))u(\tau)d\tau \\ &= f(x(\tau_k))\sigma_k + g(x(\tau_k))I_k(u(\cdot)) + p_k + q_k, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\|p_k\| \leq L_1 \frac{\sigma_k^2}{2}, \quad \|q_k\| \leq L_2 \frac{\sigma_k^2}{2} K_3.$$

Аналогично

$$\bar{x}(\tau_{k+1}) - \bar{x}(\tau_k) = f(\bar{x}(\tau_k))\sigma_k + g(\bar{x}(\tau_k))I_k(\bar{u}(\cdot)) + \bar{p}_k + \bar{q}_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

где \bar{p}_k и \bar{q}_k удовлетворяют тем же неравенствам, что и p_k, q_k . Заметим, что $I_k(u(\cdot)) = I_k(\bar{u}(\cdot)) = \sigma_k \bar{u}_k$, где \bar{u}_k — значение функции \bar{u} в точках отрезка $[\tau_k, \tau_{k+1}]$. Далее $f(x(\tau_k)) - f(\bar{x}(\tau_k)) = F_k(x(\tau_k) - \bar{x}(\tau_k))$, где F_k — матрицы, элементы которых f_{ij} имеют вид

$$f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left(\bar{x}(\tau_k) + \theta_i(x(\tau_k) - \bar{x}(\tau_k)) \right), \quad 0 \leq \theta_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Определим вектор-функции $b^k(x)$ равенствами $b^k(x) = g(x)\bar{u}_k$, тогда

$$g(x(\tau_k))\bar{u}_k - g(\bar{x}(\tau_k))\bar{u}_k = b^k(x(\tau_k)) - b^k(\bar{x}(\tau_k)) = B_k(x(\tau_k) - \bar{x}(\tau_k)),$$

где матрицы B_k вычисляются аналогично F_k по функциям $b^k(x)$. Вычитая (2.4) из (2.3) и обозначая $z_k = x(\tau_k) - \bar{x}(\tau_k)$, получим

$$z_{k+1} = z_k + \sigma_k F_k z_k + \sigma_k B_k z_k + p_k + q_k + \bar{p}_k + \bar{q}_k, \quad z_1 = 0.$$

Последнее соотношение перепишем в виде

$$z_{k+1} = (E + \sigma_k A_k)z_k + w_k, \quad z_1 = 0, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

где E — единичная матрица, $A_k = F_k + B_k$, $w_k = z_k + p_k + q_k + \bar{p}_k + \bar{q}_k$. Как нетрудно видеть, существуют не зависящие от разбиения константы α_1, α_2 такие, что $\|A_k\| \leq \alpha_1$, $\|w_k\| \leq \alpha_2 \sigma_k^2$, $k = 1, \dots, N-1$. Из (2.5) получаем $z_{k+1} = w_k + \sum_{j=2}^k \left(\prod_{i=j}^k (E + \sigma_i A_i) \right) w_{j-1}$. Отсюда

$$\begin{aligned} \|z_{k+1}\| &\leq \sum_{j=2}^k \left(\prod_{i=j}^k (1 + \sigma_i \|A_i\|) \|w_{j-1}\| \right) + \|w_k\| \leq \sum_{j=2}^k \exp \left(\sum_{i=j}^k \sigma_i \|A_i\| \right) \|w_{j-1}\| + \|w_k\| \\ &\leq \exp(\alpha_1(t_1 - t_0)) \sum_{j=1}^k \|w_j\| \leq \alpha_2 \exp(\alpha_1(t_1 - t_0)) \sum_{j=1}^k \sigma_j^2 \leq C\sigma, \end{aligned}$$

где $C = \alpha_2(t_1 - t_0) \exp(\alpha_1(t_1 - t_0))$. Таким образом, $\|x(\tau_k) - \bar{x}(\tau_k)\| \leq C\sigma$, $k = 1, \dots, N-1$, откуда с учетом (2.2) получаем $\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \leq (C + 2L)\sigma$. Лемма 2.1 доказана.

Обозначим

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \exists u(\cdot) \in U, \tau \in [t_0, t_1], x(\tau, x^0, u(\cdot)) = x, h(x(t, x^0, u(\cdot))) = 0, t_0 \leq t \leq t_1 \right\}.$$

Заметим, что если $G_0 \neq \emptyset$, то и $D \neq \emptyset$. Для $x \in D$ имеем

$$0 \in \nabla h(x)^\top (f(x) + g(x)P). \quad (2.6)$$

Действительно, выберем $u(\cdot) \in U$ такое, что $x(\tau, x^0, u(\cdot)) = x$ и $h(x(t, x^0, u(\cdot))) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Дифференцируя последнее тождество, получим

$$\nabla h(x(t))^\top (f(x(t)) + g(x(t))u(t)) = 0, \quad \text{для п.в. } t \in [t_0, t_1],$$

т.е.

$$0 \in \nabla h(x(t))^\top (f(x(t)) + g(x(t))P).$$

Из непрерывности многозначного отображения $x \rightarrow \nabla h(x)^\top (f(x) + g(x)P)$ следует включение (2.6).

Будем далее предполагать, что выполнено следующее

Предположение 2.1. *Существует $\varepsilon > 0$ такое, что*

$$[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \nabla h(x)^\top (f(x) + g(x)P)$$

для любого $x \in D$.

Теорема 2.1. *Пусть $G_0 \neq \emptyset$, P — выпуклый компакт и выполнено предположение 2.1. Тогда существует константа K такая, что имеет место неравенство (1.3).*

Доказательство. Из непрерывности $\nabla h(x)$, $f(x)$, $g(x)$ следует, что включение

$$\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right] \in \nabla h(x)^\top (f(x) + g(x)P) \tag{2.7}$$

будет выполнено в некоторой δ -окрестности множества D . Обозначим через X_0 семейство траекторий системы (1.1), (1.2), удовлетворяющих фазовым ограничениям на всем интервале $[t_0, t_1]$, а через X_{T_σ} — семейство траекторий, удовлетворяющих фазовым ограничениям в точках T_σ . Пусть h_C — хаусдорфова метрика в пространстве непрерывных вектор-функций $C[t_0, t_1]$. Покажем, что $h_C(X_0, X_{T_\sigma}) \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow 0$. Допустим, от противного, что существуют $\alpha > 0$, последовательность $\sigma_n \rightarrow 0$, разбиение T_{σ_n} и траектория $x^n(\cdot) \in X_{T_{\sigma_n}}$ такие, что $d_C(x^n(\cdot), X_0) \geq \alpha$ (слева — расстояние от $x^n(\cdot)$ до X_0 в метрике пространства $C[t_0, t_1]$). В предположении о выпуклости P множество траекторий системы (1.1), отвечающих управлениям из U , компактно в $C[t_0, t_1]$. Выберем подпоследовательность $x^{n_k}(\cdot)$, сходящуюся к траектории $x^0(\cdot)$. Равенства $h(x^{n_k}(\tau_k^n)) = 0$, $\tau_k^n \in T_{\sigma_n}$, в пределе дают $h(x^0(t)) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$, т.е. $x^0(\cdot) \in X$ в противоречие с неравенством $d_C(x^0(\cdot), X_0) \geq \alpha > 0$.

Будем далее рассматривать σ настолько малые, что

$$h_C(X_0, X_{T_\sigma}) \leq \frac{\delta}{4}, \quad \|x(\cdot) - \bar{x}(\cdot)\|_{C[t_0, t_1]} \leq \frac{\delta}{4}$$

для любой траектории $x(\cdot) \in X_{T_\sigma}$ и полученной из нее посредством усреднения управления на интервалах T_σ траектории $\bar{x}(t)$.

Итак, пусть $x(\cdot) \in X_{T_\sigma}$, $T_\sigma = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$, — траектория, порожденная управлением $u(t)$, пусть $\bar{x}(\cdot)$ — траектория, отвечающая усредненному управлению $\bar{u}(t)$. Интегрируя тождество $\frac{d}{dt}h(x(t)) = \nabla h(x(t))^\top (f(x(t)) + g(x(t))u(t))$ на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, получим

$$0 = \nabla h(x(\tau_k))^\top (f(x(\tau_k))\sigma_k + g(x(\tau_k))\bar{u}_k\sigma_k) + r_k,$$

где $\bar{u}_k = \frac{1}{\sigma_k} I_k(u(\cdot))$, $\|r_k\| \leq R_1\sigma_k^2$, и константа R_1 не зависит от выбора траектории $x(\cdot)$. Таким образом, $|\nabla h(x(\tau_k))^\top (f(x(\tau_k)) + g(x(\tau_k))\bar{u}_k)| \leq R_1\sigma$ и, учитывая лемму 2.1, можно утверждать, что существует константа R_2 такая, что

$$|\nabla h(\bar{x}(t))^\top (f(\bar{x}(t)) + g(\bar{x}(t))\bar{u}(t))| \leq R_2\sigma \tag{2.8}$$

во всех точках $t \in [t_0, t_1]$. При этом R_2 не зависит от траектории $x(\cdot)$.

Пусть Δ — достаточно малое положительное число. Построим разбиение отрезка $[t_0, t_1]$, $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N$, $\xi_i = \xi_i(\Delta)$, и управление \tilde{u} таким образом, чтобы для отвечающей этому управлению траектории $\tilde{x}_\Delta(t)$ ($\tilde{x}_\Delta(t_0) = x^0$) выполнялись условия $h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i)) = 0$ и величины $\xi_{i+1} - \xi_i$ были достаточно малы. Положим $\xi_0 = t_0$, тогда $h(\tilde{x}_\Delta(\xi_0)) = 0$. Для $0 \leq i$ положим $\tilde{u}(t) = \bar{u}(t)$ при $\xi_i \leq t \leq \xi_i + \Delta$. Пусть $\tilde{x}_\Delta(t)$ — отвечающая $\tilde{u}(t)$ траектория с начальным условием $\tilde{x}_\Delta(t_0) = x^0$. При $t > \xi_i + \Delta$ полагаем $\tilde{u}(t) = u$, где $u \in P$ выбрано так, что

$$\nabla h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta))^\top (f(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)) + g(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta))u) = -\frac{\varepsilon}{2} \text{sign } h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)).$$

Такой выбор возможен в силу условия теоремы. Тогда

$$h(\tilde{x}_\Delta(t)) - h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)) = \int_{\xi_i + \Delta}^t \frac{dh}{d\tau}(\tilde{x}_\Delta(\tau)) = \frac{dh}{d\tau}(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta))(t - \xi_i - \Delta) + q(t),$$

где $|q(t)| \leq \frac{L_h}{2}(t - \xi_i - \Delta)^2$. Здесь L_h — константа Липшица для функций $t \rightarrow h(x(t))$ (одна и та же для всех траекторий $x(t)$).

Пусть для определенности $h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)) > 0$. При $t > \xi_i + \Delta$ имеем неравенство $h(\tilde{x}_\Delta(t)) \leq l(t - \xi_i - \Delta)$, где $l(\tau) = h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)) - \frac{\varepsilon}{2}\tau + \frac{L_h}{2}\tau^2$. В силу равенства $h(\tilde{x}_\Delta(\xi_0)) = 0$ имеем $h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)) \leq L_h\Delta$. Отсюда следует, что при достаточно малом Δ квадратный трехчлен $l(\tau)$ имеет два положительных корня, меньший из которых, τ_1 , удовлетворяет неравенству $\tau_1 \leq \frac{2}{\varepsilon}h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta))$. Обозначим $\xi_{i+1} = \min\{t : h(\tilde{x}_\Delta(t)) = 0, t \geq \xi_i + \Delta\}$, тогда

$$0 < \xi_{i+1} - \xi_i \leq \Delta + \frac{2}{\varepsilon}h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)), \quad (2.9)$$

и, в частности, $0 < \xi_{i+1} - \xi_i \leq \Delta + \frac{2}{\varepsilon}L_h\Delta$.

Таким образом, по управлению \bar{u} мы строим управление \tilde{u} такое, что для траектории $\tilde{x}_\Delta(t)$ имеют место равенства $h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i)) = 0$. Процесс построения точек ξ_i и управления \tilde{u} продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие $\xi_i + \Delta \geq t_1$, либо величина $t_1 - \xi_i - \Delta$ не окажется настолько мала, что отрезке $[\xi_i + \Delta, t_1]$ нет корня функции $h(\tilde{x}_\Delta(t))$. Соответствующий номер i обозначим через $N(\Delta)$. Обозначим

$$z_i = \|\bar{x}(\xi_i) - \tilde{x}_\Delta(\xi_i)\|, \quad z_i^\Delta = \|\bar{x}(\xi_i + \Delta) - \tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)\|,$$

$i = 0, 1, \dots, N(\Delta)$. На отрезке $[\xi_i, \xi_i + \Delta]$ имеем $\tilde{u}(t) = \bar{u}(t)$, следовательно,

$$\bar{x}(\xi_i + \delta) - \bar{x}(\xi_i) = \int_{\xi_i}^{\xi_i + \Delta} f(\bar{x}(\tau))d\tau + \int_{\xi_i}^{\xi_i + \Delta} g(\bar{x}(\tau))\bar{u}(\tau)d\tau,$$

$$\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \delta) - \tilde{x}_\Delta(\xi_i) = \int_{\xi_i}^{\xi_i + \Delta} f(\tilde{x}_\Delta(\tau))d\tau + \int_{\xi_i}^{\xi_i + \Delta} g(\tilde{x}_\Delta(\tau))\tilde{u}(\tau)d\tau.$$

Представим соответствующие интегралы от \bar{x} , \bar{u} в виде

$$\int_{\xi_i}^{\xi_i + \Delta} f(\bar{x}(\tau))d\tau = \Delta f(\bar{x}(\xi_i)) + \bar{p}_i,$$

$$\int_{\xi_i}^{\xi_i+\Delta} g(\bar{x}(\tau))\bar{u}(\tau)d\tau = g(\bar{x}(\xi_i)) \int_{\xi_i}^{\xi_i+\Delta} \bar{u}(\tau)d\tau + \bar{q}_i,$$

где

$$\|\bar{p}_i\| \leq L_1 \frac{\Delta^2}{2}, \quad \|\bar{q}_i\| \leq L_2 \frac{\Delta^2}{2} K_3.$$

Аналогичные формулы выпишем для интегралов, содержащих $\tilde{x}_\Delta, \tilde{u}$. Из приведенных формул следует оценка для z_i^Δ :

$$z_i^\Delta \leq (1 + \alpha_1 \Delta) z_i + r_i, \quad (2.10)$$

где $\alpha_1 = L_f + L_g K_3$, $|r_i| \leq (L_1 + L_2 K_3) \Delta^2$. Заменяя дифференциальные уравнения конечными разностями на отрезке $[\xi_i + \Delta, \xi_{i+1}]$ и учитывая, что существует константа β такая, что $\|g(x(t))u\| \leq \beta$ для любой траектории $x(t)$ и вектора $u \in P$, получим следующее неравенство

$$z_{i+1} \leq z_i^\Delta + L_f(\xi_{i+1} - \xi_i - \Delta)z_i^\Delta + \beta(\xi_{i+1} - \xi_i - \Delta),$$

откуда следует, что найдется константа α_2 такая, что

$$z_{i+1} \leq (1 + \alpha_2 \Delta) z_i^\Delta + \beta \frac{2}{\varepsilon} h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta)). \quad (2.11)$$

Определим функцию $h'(x, u)$ равенством $h'(x, u) = \nabla h(x)(f(x) + g(x)u)$. Из условий теоремы следует, что существует константа Липшица $L_{h'}$ такая, что $|h'(x^1, u) - h'(x^2, u)| \leq L_{h'} \|x^1 - x^2\|$ для любых x^1, x^2, u , удовлетворяющих условию $\|x^i\| \leq K_2$, $i = 1, 2, u \in P$. Тогда

$$\left| \int_{\xi_i}^{\xi_i+\Delta} h'(\tilde{x}_\Delta(\tau), \bar{u}(\tau))d\tau - \int_{\xi_i}^{\xi_i+\Delta} h'(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))d\tau \right| \leq L_{h'} \|\tilde{x}_\Delta(\xi_i) - \bar{x}(\xi_i)\| \Delta + p_i, \quad (2.12)$$

где $|p_i| \leq L \Delta^2$. Из (2.12) следует, что

$$|h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta))| \leq \left| \int_{\xi_i}^{\xi_i+\Delta} h'(\bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau))d\tau \right| + L_{h'} \Delta z_i + p_i,$$

откуда с учетом неравенства (2.8) получаем $|h(\tilde{x}_\Delta(\xi_i + \Delta))| \leq R_2 \sigma \Delta + L_{h'} \Delta z_i + p_i$. Следовательно, (2.11) переходит в неравенство

$$z_{i+1} \leq (1 + \alpha_2 \Delta) z_i^\Delta + \frac{2\beta}{\varepsilon} (R_2 \sigma \Delta + L_{h'} \Delta z_i + p_i).$$

Заменяя в последнем неравенстве z_i^Δ ее оценкой из (2.10), получим

$$z_{i+1} \leq (1 + \alpha_1 \Delta)(1 + \alpha_2 \Delta) z_i + (1 + \alpha_2 \Delta) r_i + \frac{2\beta}{\varepsilon} (R_2 \sigma \Delta + L_{h'} \Delta z_i + p_i). \quad (2.13)$$

Будем далее выбирать Δ так, чтобы $\Delta < \min \left\{ \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2}, \frac{1}{\alpha_2} \right\}$, тогда из (2.13) следует

$$z_{i+1} \leq (1 + \alpha \Delta) z_i + \phi(\Delta, \sigma), \quad z_0 = 0, \quad i = 0, \dots, N(\Delta), \quad (2.14)$$

где

$$\alpha = 2 + \alpha_1 + \alpha_2, \quad \phi(\Delta, \sigma) = \frac{2\beta}{\varepsilon} R_2 \sigma \Delta + \left(2 + \frac{2\beta}{\varepsilon} \right) \Delta^2.$$

Последовательно применяя неравенства (2.14), для произвольного $q \in \overline{1, N(\Delta)}$ получим

$$z_q \leq \sum_{j=0}^{q-1} \prod_{k=0}^j (1 + \alpha\Delta)^k \phi(\Delta, \sigma) \leq e^{\alpha \sum_{j=0}^{q-1} \Delta} \sum_{j=0}^{q-1} \phi(\Delta, \sigma) = e^{\alpha \sum_{j=0}^{q-1} \Delta} q\phi(\Delta, \sigma).$$

В силу неравенства $\xi_{i+1} - \xi_i \geq \Delta$, $i \leq N(\Delta) - 1$, имеем $\sum_{j=0}^{q-1} \Delta = q\Delta \leq \xi_q - t_0 \leq t_1 - t_0$, следовательно,

$$q\phi(\Delta, \sigma) = \frac{2\beta}{\varepsilon} R_2 \sigma (q\Delta) + \left(2 + \frac{2\beta}{\varepsilon}\right) (q\Delta) \Delta \leq \frac{2\beta}{\varepsilon} R_2 \sigma (t_1 - t_0) + \left(2 + \frac{2\beta}{\varepsilon}\right) \Delta (t_1 - t_0).$$

Таким образом,

$$z_q \leq e^{\alpha(t_1-t_0)} \left(\frac{2\beta}{\varepsilon} R_2 \sigma (t_1 - t_0) + \left(2 + \frac{2\beta}{\varepsilon}\right) \Delta (t_1 - t_0) \right).$$

Так как $\bar{x}(t)$, $\tilde{x}_\Delta(t)$ удовлетворяют условию Липшица по t с константой L , из последнего неравенства и неравенства $0 < \xi_{i+1} - \xi_i \leq \Delta + \frac{2}{\varepsilon} L_h \Delta$ получаем

$$\|\bar{x}(t) - \tilde{x}_\Delta(t)\| \leq e^{\alpha(t_1-t_0)} \left(\frac{2\beta}{\varepsilon} R_2 \sigma (t_1 - t_0) + \left(2 + \frac{2\beta}{\varepsilon}\right) \Delta (t_1 - t_0) \right) + 2L \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} L_h\right) \Delta. \quad (2.15)$$

Выберем последовательность $\Delta_k \rightarrow 0$ так, чтобы последовательность $\tilde{x}_{\Delta_k}(t)$ равномерно на $[t_0, t_1]$ сходилась к некоторой траектории $x^0(t)$. Из условий $h(\tilde{x}_{\Delta_k}(\xi_i(\Delta_k))) = 0$ и $\xi_{i+1}(\Delta_k) - \xi_i(\Delta_k) \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, следует, что $h(x^0(t)) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Переход к пределу в неравенстве (2.15) дает

$$\|\bar{x}(t) - x^0(t)\| \leq e^{\alpha(t_1-t_0)} \frac{2\beta}{\varepsilon} R_2 \sigma (t_1 - t_0). \quad (2.16)$$

Учитывая, что в силу леммы 2.1 $\|\bar{x}(t) - x(t)\| \leq K_1 \sigma$ и константы K_1 , α , β , ε , R_2 не зависят от выбора траектории $x(t)$, получаем утверждение теоремы 2.1. \square

Пусть фазовые ограничения заданы системой уравнений $h(x) = 0$, где через $h(\cdot)$ обозначена вектор-функция $h(x) = (h_1(x), \dots, h_m(x))$. Считаем, что функции $h_i(x)$ непрерывно дифференцируемы и их частные производные удовлетворяют условию Липшица. Предположим, что выполнено следующее условие: существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\varepsilon S \subset \frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)P) \quad (2.17)$$

для любого $x \in D$. Здесь S — единичный шар в \mathbb{R}^m относительно евклидовой нормы.

При выполнении условия (2.17) утверждение теоремы 2.1 остается в силе. Опишем изменения, которые необходимо внести в доказательство теоремы в данном случае. Переход к усредненному управлению $\bar{u}(t)$ обеспечивает выполнение условий $\left\| \frac{\partial h(\bar{x}(t))}{\partial x} (f(\bar{x}(t)) + g(\bar{x}(t))\bar{u}(t)) \right\| \leq R_2 \sigma$ во всех точках $t \in [t_0, t_1]$. Далее, как и ранее выбираем разбиение отрезка $[t_0, t_1]$ точками $\xi_i(\Delta)$. Основное изменение относится к процедуре выбора управления $u(t) \in P$, $t \geq \xi_i + \Delta$, переводящего систему (1.1) из точки $\tilde{x}(\xi_i + \Delta)$ на множество $H = \{x : h(x) = 0\}$. Существование управления с нужными свойствами вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.2. Пусть выполнено условие (2.17). Существует окрестность $V_\delta(D)$ множества D такая, что для любого $\tilde{x} \in V_\delta(D)$ найдется управление $u(t) \in P$, $\eta_1 \leq t \leq \eta_2$, переводящее систему (1.1) из точки $x(\eta_1) = \tilde{x}$ в точку $x(\eta_2) \in H$ таким образом, что для $\eta_1 \leq t \leq \eta_2$ выполняется неравенство $\frac{d}{dt} \|h(x(t))\| \leq -\frac{\varepsilon}{4}$.

Доказательство. Выберем δ_1 таким образом, чтобы при $x \in V_{\delta_1}(D)$ выполнялось включение $\frac{\varepsilon}{2}S \subset \frac{\partial h(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)P)$. Затем выберем $\delta < \frac{\delta_1}{2}$ так, чтобы при $x \in V_\delta(D)$ выполнялось неравенство $\|h(x)\| \leq \frac{2\delta_1}{L\varepsilon}$, где L — постоянная Липшица для траекторий. Возможность такого выбора следует из непрерывности $h(x)$ и компактности множества D . Пусть $\tilde{x} \in V_\delta(D)$. Выберем $u_1 \in P$ так, чтобы

$$\frac{\partial h(\tilde{x})}{\partial x}(f(\tilde{x}) + g(\tilde{x})u_1) = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{h(\tilde{x})}{\|h(\tilde{x})\|}.$$

Положим $u(t) \equiv u_1$, $t \geq \eta_1$. Выберем максимальное $\alpha > 0$ такое, что при $t \in [\eta_1, \eta_1 + \alpha]$ имеет место неравенство

$$\frac{d}{dt}\|h(x(t))\| = \left(\frac{h(x(t))}{\|h(x(t))\|}, \frac{\partial h(x(t))}{\partial x}(f(x(t)) + g(x(t))u_1) \right) \leq -\frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.18)$$

обозначим его величину через α_1 . Если $\|h(x(\eta_1 + \alpha_1))\| > 0$, то из условия (2.18) получаем $\alpha_1 \leq \frac{\delta_1}{2L}$, следовательно $\|x(\eta_1) - x(\eta_1 + \alpha_1)\| \leq L\alpha_1 \leq \frac{\delta_1}{2}$, поэтому $x(\eta_1 + \alpha_1) \in V_{\delta_1}(D)$. Таким образом, в точке $x = x(\eta_1 + \alpha_1)$ можно выбрать $u_2 \in P$ так, чтобы

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x}(f(x) + g(x)u_2) = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{h(x)}{\|h(x)\|},$$

и определить величину α_2 аналогично α_1 . Повторяя далее процедуру, мы либо на каком-то шаге получим $h(x(\eta_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i)) = 0$, либо построим бесконечную последовательность $\alpha_i > 0$ такую, что на каждом из отрезков $[\eta_1, \eta_1 + \sum_{i=1}^k \alpha_i]$ выполнено неравенство (2.18). Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i$, очевидно, сходится. Обозначим его сумму через $\bar{\alpha}$. Предположив, что $\|h(x(\eta_1 + \bar{\alpha}))\| > 0$, нетрудно прийти к противоречию с максимальнойностью α_i для достаточно больших номеров i . Следовательно, в точке $\eta_2 = \eta_1 + \bar{\alpha}$ выполнено равенство $h(x(\eta_2)) = 0$ и $x(\eta_2) \in H$. Лемма доказана.

Дальнейшее доказательство оценки (1.3) полностью аналогично доказательству для случая скалярной функции $h(x)$.

З а м е ч а н и е 2.1. Рассмотрим задачу построения областей достижимости, в предположении, что начальный вектор x^0 не фиксирован, а ограничен условием $x^0 \in X^0$, где $X^0 \subset \mathbb{R}^n$ — компакт. Из доказательства оценки (1.3) следует, что если из точки x^0 выходит траектория системы (1.1), удовлетворяющая фазовым ограничениям $h(x) = 0$ в моменты времени $t \in T_\sigma$, то существует траектория с этим же начальным условием, удовлетворяющая фазовым ограничениям уже для всех моментов $t \in [t_0, t_1]$ и отклоняющаяся от исходной на величину, не превосходящую $K\sigma$. Используя компактность X^0 , нетрудно показать, что константа K может быть выбрана не зависящей от начального вектора. Таким образом, оценка (1.3) остается справедливой и в рассматриваемом случае.

З а м е ч а н и е 2.2. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u(t), \quad x(t_0) = x^0, \quad (2.19)$$

предполагая, что $u(t)$ — неизвестное возмущение на входе системы, стесненное ограничением $u(t) \in P$, $t \in [t_0, t_1]$. Начальное состояние системы (2.19) предполагается неизвестным, будем считать, что $x^0 \in X^0$, где X^0 — заданный компакт в \mathbb{R}^n .

Предположим, что измерению на $[t_0, t_1]$ доступен вектор

$$y(t) = h(x(t)), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.20)$$

Определим информационное множество системы (2.19), совместимое с реализовавшимся сигналом, как множество всех возможных состояний $x = x(t_1)$, порожденных управлением $u(\cdot)$ ($u(t) \in P$, $t \in [t_0, t_1]$) и начальным вектором $x^0 \in X^0$ такими, что выполнено тождество (2.20). Обозначим это множество через $Z_0(y(\cdot))$.

Через $Z_\sigma(y(\cdot))$ обозначим информационное множество системы (2.19), совместимое с измерениями (2.20), проводимыми в точках множества T_σ .

Понятно, что рассматриваемые множества — это множества достижимости системы (2.19) с фазовыми ограничениями вида $\bar{h}(t, x(t)) = 0$, где $\bar{h}(t, x) = h(x) - y(t)$. Предположим, что производная сигнала $y(t)$ по t удовлетворяет условию Липшица. Добавим к уравнениям системы (2.19) дифференциальное уравнение $\dot{x}_{n+1} = 1$, $x_{n+1}(t_0) = t_0$, тогда фазовые ограничения можно записать в виде равенства $\bar{h}(x_{n+1}(t), x(t)) = 0$. Условия (2.17) для расширенной системы и ограничений принимают вид

$$\varepsilon S \subset \frac{\partial \bar{h}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{h}(t, x)}{\partial x} (f(x) + g(x)P) = -\dot{y}(t) + \frac{\partial h(x)}{\partial x} (f(x) + g(x)P).$$

Если последнее условие выполнено во всех точках множества D , порожденного траекториями системы (2.19), совместимыми с реализовавшимся сигналом $y(\cdot)$, то имеет место оценка

$$d(Z_0(y(\cdot)), Z_\sigma(y(\cdot))) \leq K\sigma.$$

3. Оценка погрешности: линейный случай

Рассмотрим на $[t_0, t_1]$ линейную управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u + f(t), \\ u(t) &\in P, \quad x(t_0) \in X^0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где матричные функции $A(t), B(t)$ непрерывны, $f(t)$ — измеримая ограниченная функция на $[t_0, t_1]$. Пусть фазовые ограничения заданы в виде $x(t) \in X(t)$, $t \in [t_0, t_1]$. Предположим, что

(1) X^0 и P — выпуклые, компактные множества;

(2) $X(t)$ — липшицево многозначное отображение на $[t_0, t_1]$ с выпуклыми компактными значениями;

(3) существуют $\varepsilon > 0$, начальный вектор $x^* \in X^0$ и управление $u^*(t) \in P$ такие, что траектория $x^*(t) = x(t, x^*, u^*(\cdot))$ удовлетворяет включению $x^*(t) + \varepsilon S \subset X(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

При этих предположениях справедлива

Теорема 3.1. *Существует $K > 0$ такое, что для любого конечного набора точек $t_0 = \tau_1 < \dots < \tau_N = t_1$ справедливо неравенство*

$$d(G_0(t_1), G_\sigma(t_1)) \leq K\sigma,$$

где $\sigma = \max_{1 \leq i \leq N-1} (\tau_{i+1} - \tau_i)$.

Доказательство. Обозначим $\text{dist}(y, X) = \inf\{\|x - y\| : x \in X\}$. Докажем вначале, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт и векторы $x \in X$, $y \in \mathbb{R}^n$ и число λ таковы, что $x + \varepsilon S \subset X$, $0 \leq \lambda \leq 1 - \frac{1}{\varepsilon} \text{dist}(y, X)$, то $\lambda y + (1 - \lambda)x \in X$. Действительно, пусть $y' \in X$ — проекция вектора y на X . Введем обозначения $d = \|y' - y\| = \text{dist}(y, X)$, $a = y - y'$, $x' = x + \frac{\varepsilon}{d}a$. Так как $x', y' \in X$ и X выпукло, то $\lambda y' + (1 - \lambda)x' \in X$ при $0 \leq \lambda \leq 1$. Пусть $z_\lambda = \lambda y + (1 - \lambda)x = \lambda y' + (1 - \lambda)x' + [\lambda - (1 - \lambda)]\frac{\varepsilon}{d}a$. При $\lambda = \bar{\lambda} := 1 - \frac{d}{d + \varepsilon}$ имеем $z_\lambda = \lambda y' + (1 - \lambda)x' \in X$. Если

$$\lambda \leq 1 - \frac{1}{\varepsilon} \text{dist}(y, X) = 1 - \frac{d}{\varepsilon} \leq \bar{\lambda},$$

то z_λ лежит на отрезке $[x, z_{\bar{\lambda}}]$ и, следовательно, $z_\lambda \in X$.

Рассмотрим траекторию $x(t) = x(t, x^0, u(\cdot))$, $x^0 \in X^0$, $u(t) \in P$, удовлетворяющую фазовым ограничениям в дискретные моменты времени: $x(\tau_k) \in X(\tau_k)$, $k = 1, \dots, N$. Так как $x(t)$ и $X(t)$ удовлетворяют условию Липшица на $[t_0, t_1]$, существует константа K_1 , не зависящая от $x(\cdot)$ такая, что $\text{dist}(x(t), X(t)) \leq K_1\sigma$, $t \in [t_0, t_1]$. Положим $\lambda = 1 - \frac{1}{\varepsilon}K_1\sigma$; не ограничивая общности, можно считать σ достаточно малым, таким, чтобы выполнялось неравенство $\lambda > 0$. Обозначим через $\hat{x}(t)$ траекторию, отвечающую управлению $\hat{u}(t) = \lambda u(t) + (1 - \lambda)u^*(t)$ и удовлетворяющую начальному условию $\hat{x} = \lambda x^0 + (1 - \lambda)x^*$, тогда $\hat{x}(t) = \lambda x(t) + (1 - \lambda)x^*(t)$. Так как $\lambda \leq 1 - \frac{1}{\varepsilon}\text{dist}(x(t), X(t))$, то из сказанного выше следует, что $\hat{x}(t) \in X(t)$. Кроме того,

$$|\hat{x}(t) - x(t)| \leq \frac{1}{\varepsilon}K_1\sigma|x(t) - x^*(t)| \leq \frac{2}{\varepsilon}K_1\sigma M,$$

где $M = \sup\{|x| : t \in [t_0, t_1], x \in X(t)\}$. Теорема доказана.

Подобная схема доказательства, базирующаяся на предположении о существовании “внутренней” траектории, часто используется для вывода оценок для областей достижимости и решений систем выпуклых неравенств (см., например, [12, 13]). Эти условия обеспечивают, как видно из приведенного доказательства, более сильное свойство — наличие оценки $O(\delta)$ для уклонения областей достижимости при возмущении фазовых ограничений на величину δ . Далее мы рассмотрим оценки погрешности областей достижимости при дискретных аппроксимациях фазовых ограничений в случае линейных фазовых ограничений типа равенства, для которых предположение о существовании внутренней траектории не выполняется.

Лемма 3.1. Пусть τ_1, \dots, τ_N — конечное подмножество отрезка $[t_0, t_1]$, $t_0 = \tau_1 < \dots < \tau_N = t_1$, и пусть $\sigma = \max_{1 \leq i \leq N-1} (\tau_{i+1} - \tau_i)$. Предположим, что функции $y_1(t)$, $y_2(t)$ на $[t_0, t_1]$ удовлетворяют условиям Липшица с константами L_1, L_2 , соответственно, и $\dot{y}_1(t) = y_2(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $y_1(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, N$. Тогда найдутся точки $\xi_i \in (\tau_i, \tau_{i+1})$ такие, что $y_2(\xi_i) = 0$, $i = 1, \dots, N - 1$, и выполняются следующие неравенства

$$|y_1(t)| \leq \frac{L_1}{2}\sigma, \quad |y_2(t)| \leq L_2\sigma, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (3.2)$$

Доказательство. Интегрируя обе части равенства $\dot{y}_1(t) = y_2(t)$ на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, получим $I_k(y_2(\cdot)) = y_1(\tau_{k+1}) - y_1(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, N - 1$. Так как $y_2(t)$ непрерывна, из последних равенств следует существование точек $\xi_k \in (\tau_{k+1}, \tau_k)$ таких, что $y_2(\xi_k) = 0$, $k = 1, \dots, N - 1$. Неравенства (3.2) тогда следуют из липшицевости функций y_1, y_2 , равенств $y_1(\tau_k) = 0$, $y_2(\xi_k) = 0$, и неравенств $\xi_{k+1} - \xi_k \leq 2\sigma$, $k = 1, \dots, N - 1$.

Рассмотрим линейную автономную систему в \mathbb{R}^n со скалярным входом

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(t), \quad (3.3)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f(t)$ — измеримая ограниченная функция на $[t_0, t_1]$. Пусть задан вектор $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$.

Лемма 3.2. Предположим, что пара матриц (A, B) вполне управляема. Для каждого $x^0 \in \mathbb{R}^n$ существует не более одного управления $u(t)$ такого, что траектория системы (3.3) с начальным вектором $x(t_0) = x^0$ удовлетворяет равенству $c^\top x(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Обозначим $m = \min\{i : c^\top A^i B \neq 0, 0 \leq i\}$ из управляемости системы (3.3) следует что $m \leq n - 1$. Предположим, что существует $u(t)$ такое, что $c^\top x(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$. Умножая обе части (3.3) на c^\top , получим тождество

$$0 = c^\top Ax(t) + c^\top Bu(t) + c^\top f(t), \quad \text{для п.в. } t \in [t_0, t_1]. \quad (3.4)$$

Если $m = 0$, то $c^\top B \neq 0$ и

$$u(t) = -(c^\top B)^{-1}(c^\top Ax(t) + c^\top f(t)).$$

Подставляя $u(t)$ в уравнение (3.3), получим, что $x(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения с заданным начальным условием, в силу теоремы о единственности решения $x(t)$ и $u(t)$ определяются однозначно. Пусть $m > 0$, и значит $c^\top B = 0$, тогда из (3.4) следует, что $c^\top f(t)$ почти всюду дифференцируема. Дифференцируя обе части данного тождества, получим

$$0 = c^\top A^2 x(t) + c^\top ABu(t) + c^\top Af(t) + \frac{d}{dt}c^\top f(t), \quad \text{для п.в. } t \in [t_0, t_1]. \quad (3.5)$$

Повторяя описанную процедуру $m - 1$ раз, приходим в итоге к равенству

$$c^\top A^{m+1}x(t) + c^\top A^m Bu(t) + g(t) = 0,$$

где

$$g(t) = c^\top A^m f(t) + \frac{d}{dt}c^\top A^{m-1}f(t) + \dots + \frac{d^m}{dt^m}c^\top f(t).$$

Таким образом, $u(t) = (c^\top A^m B)^{-1}(c^\top A^{m+1}x(t) + g(t))$, следовательно, $x(t)$ — единственное решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = (A - (c^\top A^m B)^{-1}c^\top A^{m+1})x(t) - (c^\top A^m B)^{-1}g(t),$$

и, значит, $u(t)$ определяется однозначно. Этим завершается доказательство леммы.

Заметим, что в случае $f(t) = 0$, $x^0 = 0$, управление $u(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$ является единственным управлением, обеспечивающим равенство $c^\top x(t) = 0$, $t \in [t_0, t_1]$.

Рассмотрим систему (3.3), предполагая, что управление $u(t)$ ограничено условием

$$u(t) \in P(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (3.6)$$

где $P(t)$ — непрерывное, ограниченное многозначное отображение.

Лемма 3.3. Пусть пара (A, B) вполне управляема, $f(t) \equiv 0$ и $c \neq 0$. Тогда найдется константа K такая, что для любого набора точек $t_0 = \tau_1 < \dots < \tau_N = t_1$ и любой траектории системы (3.3), (3.6) с нулевым начальным условием из равенств $c^\top x(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, N$, следует, что

$$|x(t)| \leq K\sigma, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (3.7)$$

где $\sigma = \max\{\tau_{k+1} - \tau_k : k = 1, \dots, N - 1\}$.

Доказательство. Вполне управляемая линейная автономная система со скалярным входом может быть невырожденным линейным преобразованием координат приведена к виду

$$\dot{x}_1 = x_2, \dots, \dot{x}_{n-1} = x_n, \quad \dot{x}_n = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + u. \quad (3.8)$$

Далее можно предполагать без потери общности, что система (3.3) уже имеет такой вид. Пусть $u(t) \in P(t)$ таково, что соответствующее решение системы (3.8) удовлетворяет условиям $x(t_0) = 0$, $c^\top x(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, N$. Умножив обе части (3.8) на c^\top получим

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n c_i x_i(t) = \sum_{i=1}^n d_i x_i(t) + c_n u(t), \quad (3.9)$$

где $d_1 = a_1 c_n$, $d_i = c_{i-1} + a_i c_n$, $i \geq 2$. Интегрируя последнее равенство на отрезке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, получим $\sum_{i=1}^n d_i I_k(x_i(\cdot)) + c_n I_k(u(\cdot)) = 0$. Если $c_n \neq 0$, то $I_k(u(\cdot)) = -\frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^n d_i I_k(x_i(\cdot))$. Из последнего равенства и уравнения (3.8) следует, что

$$x(\tau_{k+1}) - x(\tau_k) = \tilde{A} \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} x(\tau) d\tau,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_1 - \frac{d_1}{c_n} & a_2 - \frac{d_2}{c_n} & a_3 - \frac{d_3}{c_n} & \cdots & a_n - \frac{d_n}{c_n} \end{pmatrix}.$$

Любая траектория (3.8), отвечающая управлению $u(t) \in P(t)$, удовлетворяет условию Липшица с константой L , не зависящей от $u(t)$. Следовательно, $I_k(x(\cdot)) = (\tau_{k+1} - \tau_k)x(\tau_k) + y_k$, где $|y_k| \leq \frac{L}{2} |\tau_{k+1} - \tau_k|^2$. Таким образом, мы получаем разностные уравнения для $x(\tau_k)$

$$x(\tau_{k+1}) = (E + \sigma_k \tilde{A})x(\tau_k) + z^k \tag{3.10}$$

с начальным вектором $x(\tau_1) = 0$, где $\sigma_k = \tau_{k+1} - \tau_k$, $|z^k| \leq \frac{L}{2} \|\tilde{A}\| \sigma_k^2$. Отсюда нетрудно получить (см. доказательство леммы 2.1), что существует число K_1 такое, что $|x(\tau_k)| \leq K_1 \sigma$, $k = 1, \dots, N$; из последних неравенств получаем (3.7).

Далее рассмотрим случай $c_n = 0$. Обозначим $m = \max\{i : c_i \neq 0\}$, тогда $m < n$. Из (3.9) следует, что $I_k(x_{m+1}(\cdot)) = -\frac{1}{c_m} \sum_{i=1}^{m-1} c_i I_k(x_{i+1}(\cdot))$. Пусть $\bar{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$. Используя последние соотношения и уравнение (3.8), мы приходим к равенству $\bar{x}(\tau_{k+1}) - \bar{x}(\tau_k) = \bar{A} I_k(\bar{x}(\cdot))$, где матрица \bar{A} не зависит от k . Повторяя приведенные выше рассуждения, получим неравенство $|\bar{x}(t)| \leq K_1 \sigma$.

Остается доказать аналогичные оценки для $x_{m+1}(t), \dots, x_n(t)$. Рассмотрим функции

$$y_i(t) = c_1 x_i(t) + \cdots + c_m x_{i+m-1}(t), \tag{3.11}$$

$i = 1, \dots, n - m + 1$; эти функции удовлетворяют, очевидно, условию Липшица на $[t_0, t_1]$. Далее, имеют место равенства $\dot{y}_i(t) = y_{i+1}(t)$, $i = 1, \dots, n - m$, $y_i(\tau_k) = 0$, $k = 1, \dots, N$. Применяя к этим равенствам лемму 3.1, получим, что существует константа K_2 такая, что $|y_i(t)| \leq K_2 \sigma$, $t \in [t_0, t_1]$. Если $m = 1$, то $x_i(t) = \frac{1}{c_1} y_i(t)$, и мы получаем искомую оценку. Рассмотрим $m > 1$. В этом случае соотношение (3.11) может быть записано в виде $y(t) = C_1 z^1(t) + C_2 z^2(t)$, где $y(t) = (y_1(t), \dots, y_{n-m+1}(t))^T$, $z^1(t) = (x_1(t), \dots, x_{m-1}(t))^T$, $z^2(t) = (x_m(t), \dots, x_n(t))^T$; $(n - m + 1) \times (m - 1)$ -матрица C_1 и $(n - m + 1) \times (n - m + 1)$ -матрица C_2 определены равенствами

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-1} \\ 0 & c_1 & \cdots & c_{m-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} c_m & 0 & \cdots & 0 \\ c_{m-1} & c_m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & c_m \end{pmatrix}.$$

В силу невырожденности C_2 получим $z^2(t) = C_2^{-1}(y(t) - C_1 z^1(t))$, что вместе с неравенствами $|z^1(t)| \leq K_1 \sigma$, $|y_i(t)| \leq K_2 \sigma$, приводит к оценке $|z^2(t)| \leq K_3 \sigma$ для некоторого K_3 . Это завершает доказательство леммы.

Рассмотрим управляемую систему (3.3), (3.6) с фазовыми ограничениями, имеющими вид $c^\top x(t) = c_0(t)$, где $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ и $c_0(t)$ — заданная непрерывная функция на $[t_0, t_1]$. Пусть задан начальный вектор x^0 . Обозначим через $G_0(t_1)$ область достижимости системы с фазовыми ограничениями в каждый момент $t \in [t_0, t_1]$ и через $G_\sigma(t_1)$ область достижимости, отвечающую ограничениям $c^\top x(\tau_k) = c_0(\tau_k)$ в дискретные моменты времени $\tau_k \in T_\sigma$, $k = 1, \dots, N$.

Теорема 3.2. *Если $G_0(t_1) \neq \emptyset$, то существует $K > 0$ такое, что неравенство $d(G_0(t_1), G_\sigma(t_1)) \leq K\sigma$ имеет место для любого набора моментов времени $\tau_k \in T_\sigma$, $k = 1, \dots, N$, где $\sigma = \max_k(\tau_{k+1} - \tau_k)$.*

Доказательство. Без потери общности можно предполагать, что система (3.3) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_1 x_1 + A_2 x_2 + B_1 u + f_1(t), \\ \dot{x}_2 &= A_3 x_2 + f_2(t),\end{aligned}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in \mathbb{R}^m$, $x_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$, $m \leq n$, и пара (A_1, B_1) вполне управляема. Пусть $c^\top x = c_1^\top x_1 + c_2^\top x_2$. Так как $G_0(t_1) \neq \emptyset$, существует управление $u(t) \in P(t)$ такое, что соответствующая траектория $x(t)$ удовлетворяет тождеству $c_1^\top x_1(t) + c_2^\top x_2(t) = c_0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$.

Рассмотрим два различных случая. Вначале пусть $c_1 = 0$. Тогда $c_2^\top x_2(t) = c_0(t)$, где $x_2(t)$ не зависит от управления $u(t)$. Таким образом, равенство $c_1^\top x_1(t) + c_2^\top x_2(t) = c_0(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, имеет место для любого $u(t)$; следовательно, $G_0(t_1) = G_\sigma(t_1)$.

Пусть $c_1 \neq 0$, и предположим, что $\hat{u}(t)$ порождает траекторию $\hat{x}(t)$ такую, что $c^\top \hat{x}(\tau_k) = c_0(\tau_k)$. В силу равенства $\hat{x}_2(t) = x_2(t)$ имеем $c_1^\top y(\tau_k) = 0$, где $y(t) = \hat{x}_1(t) - x_1(t)$. Так как $y(t)$ — траектория вполне управляемой системы

$$\dot{y}(t) = A_1 y(t) + B_1 v(t),$$

где $v(t) = \hat{u}(t) - u(t) \in P(t) - P(t)$, из леммы 3.3 мы получаем оценку $|y(t_1)| \leq K\sigma$. Теорема доказана.

Если ограничения на $u(t)$ невыпуклы, сходимость областей достижимости может, вообще говоря, не иметь места даже в случае линейных автономных систем с линейными фазовыми ограничениями. В этом случае $G_\sigma(t_1)$ — выпуклое множество, однако $G_0(t_1)$ может не быть выпуклым (см., например, [14]). Для иллюстрации данного факта рассмотрим следующий пример. Пусть $n = 3$ и управляемая система описывается следующими уравнениями

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 + u_1 + u_2, \quad (3.12)$$

$x(0) = 0$. Пусть $u(t) \in U = U_1 \cup U_2$, $0 \leq t \leq 1$, где

$$U_1 = \{(u_1, u_2) : u_1 = -1, 0 \leq u_2 \leq 1\}, \quad U_2 = \{(u_1, u_2) : u_1 = 1, -1 \leq u_2 \leq 0\},$$

и пусть фазовые ограничения заданы равенством $x_3(t) = 0$, $0 \leq t \leq 1$.

Приравнявая \dot{x}_3 к нулю, получим $x_1 + u_1 + u_2 = 0$. Последнее уравнение имеет два решения из U :

$$\bar{u} = (-1, 1 - x_1) \quad \text{при} \quad -1 \leq x_1 \leq 0, \quad \hat{u} = (1, x_1 - 1) \quad \text{при} \quad 0 \leq x_1 \leq 1,$$

следовательно, есть только две траектории, удовлетворяющие фазовым ограничениям. Проекции траекторий на плоскость $L = \{x : x_3 = 0\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям: $\dot{x}_1 = -1$, $\dot{x}_2 = 1 - x_1$ и $\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = x_1 - 1$. Таким образом, $G_0(1) = \{v, -v\}$, где $v = \left(-1, 3/2, 0\right)$.

Обозначим через $R(b, a, Y)$ множество достижимости системы (3.12) без фазовых ограничений на отрезке $[a, b] \subset [t_0, t_1]$: $R(b, a, Y) = \{x(b, u(\cdot)) : x(a) \in Y, u(t) \in U\}$, тогда $R(b, a, Y)$ выпукло, если множество $Y \subset \mathbb{R}^3$ выпукло. Положим $R_0 = \{0\}$, $R_{k+1} = R(\tau_{k+1}, \tau_k, R_k \cap L)$, тогда $G_\sigma(1) = R_N \cap L$ — выпуклое подмножество L такое, что начало координат принадлежит относительной внутренней множеству $G_\sigma(1)$. Следовательно, $d(G_\sigma(1), G_0(1)) \geq |v|$, $\forall \sigma > 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamic solutions. Gordon and Breach, 1995.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О позиционном моделировании управления в динамических системах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
3. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН, 2000.
4. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997.
5. **Chernousko F.L.** State Estimation for Dynamical Systems. CRC Press. Boca Raton, Florida, 1994.
6. **Костоусова Е.К.** Об аппроксимации задачи выбора оптимального состава измерений в параболической системе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 9. С. 1294–1306.
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
8. **Мордухович Б.Ш.** Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988.
9. **Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппроксимации областей достижимости систем управления // Прикл. математика и механика. 1998. № 2. С. 179–186.
10. **Gusev M.I.** On Stability of Information Domains in Guaranteed Estimation Problems // Proc. of the Steklov Inst. of Math., Suppl. 1. 2000. P. S104–S118.
11. **Gusev M.I., Romanov S.A.** On stability of guaranteed estimation problems: error bounds for information domains and experimental design // Semi-Infinite Programming: Recent Advances / M.A. Goberna and M.A. Lopez (eds). Nonconvex Optim. Appl., 57, Kluwer Acad. Pub., 2001. P. 299–326.
12. **Filippova T.F.** A note on the evolution property of the assembly of viable solutions to a differential inclusion // Computers Math. Appl. 1993. V. 25, no. 2. P. 115–121.
13. **Robinson S.M.** An application of error bounds for convex programming in a linear space // SIAM J. Control Optim. 1975. No. 13. P. 271–273.
14. **Левитин А.В.** О задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями // Вест. Московского ун-та. 1971. № 3. С. 59–68.

УДК 517.929

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ САМОСОПРЯЖЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹

Ю. Ф. Долгий

Рассмотрена задача об определении условий асимптотической устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием. При решении этой задачи используется функциональное пространство состояний. Условия асимптотической устойчивости определяются в терминах спектра оператора монодромии. Для нахождения спектра строится специальная краевая задача для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучается движение собственных чисел этой задачи при изменении параметра. Условия устойчивости линейной периодической системы с запаздыванием меняются, когда собственное число краевой задачи пересекает единичную окружность. Предполагается, что в этот момент краевая задача обладает свойством самосопряженности. Приведены достаточные коэффициентные условия асимптотической устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-r), \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty). \quad (1.1)$$

Здесь $x : [-r, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$; A и B — матрицы-функции, элементы которых являются кусочно-непрерывными ω -периодическими функциями. В работе предполагается, что кусочно-непрерывные на отрезке функции имеют конечное число точек разрыва первого рода.

В функциональном пространстве состояний $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^m)$ введем оператор монодромии $(U\varphi)(\vartheta) = x(\omega + \vartheta, \varphi)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, $\varphi \in C$, где $x(\omega + \cdot, \varphi)$ — отрезок решения системы (1.1) с начальным моментом $t_0 = 0$ и начальной функцией $\varphi \in C$ [1, 2]. Для асимптотической устойчивости системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии были меньше единицы по модулю. Если существует собственное число с модулем, большим единицы, то система (1.1) неустойчива. В критическом случае, когда отсутствует собственное число с модулем, большим единицы, и все собственные числа оператора монодромии с модулями, равными единице, простые, система (1.1) устойчива [2]. Системы (1.1) рассматриваются при исследовании устойчивости периодических решений в нелинейных динамических системах с запаздываниями [3–14]. При этом неавтономные периодические колебания могут быть асимптотически устойчивыми, а автономные — только устойчивыми.

Пусть запаздывание r рационально соизмеримо с периодом ω , т.е. для некоторых натуральных чисел M, N и положительного числа τ имеем $r = M\tau$ и $\omega = N\tau$. Тогда задачу нахождения ненулевых собственных чисел оператора монодромии системы (1.1) можно свести к задаче нахождения собственных чисел краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений [15–17]. Для асимптотической устойчивости системы (1.1) необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа краевой задачи были больше единицы по модулю. Здесь мы будем изучать краевые задачи, которые возникают при исследовании устойчивости периодических колебаний в неавтономных системах. Для периодических решений автономных систем

¹Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 13 “Математические методы в нелинейной динамике” и РФФИ (проект 06-01-00399).

соответствующие краевые задачи имеют критические собственные числа. Они изучались в работах [12–14].

Дальнейшее сужение класса исследуемых систем связано с приведением краевой задачи к специальному виду

$$i^{-1}G \frac{d\psi}{d\vartheta} = zH(\vartheta)\psi, \quad (1.2)$$

$$\psi(-\tau) = zR\psi(0), \quad (1.3)$$

где $\psi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{C}^n$; \mathbb{C}^n — линейное пространство размерности n над полем комплексных чисел; $i = \sqrt{-1}$; $z \in \mathbb{C}$. Здесь G — неособая эрмитова матрица; $H(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, and $H_c = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau}^0 H(\vartheta) d\vartheta$ — эрмитовы матрицы с неотрицательными и положительными собственными числами соответственно (H — кусочно-непрерывная матрица-функция на $[-\tau, 0]$); R — G -унитарная матрица, т.е. $R^*GR = G$, где значок * означает операцию перехода к матрице, эрмитово сопряженной к исходной. Частные виды таких краевых задач рассматривались в работах [18–24] при нахождении условий асимптотической устойчивости и неустойчивости линейных периодических дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Для нахождения собственных чисел краевой задачи (1.2), (1.3) можно использовать характеристическое уравнение

$$\det(I_n - zR\Phi(0, z)) = 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (1.4)$$

Здесь $\Phi(\cdot, \cdot)$ — фундаментальная матрица системы (1.2), удовлетворяющая условию $\Phi(-\tau, z) = I_n$, $z \in \mathbb{C}$, I_n — единичная матрица размерности $n \times n$. Таким образом, проблема устойчивости сводится к задаче определения расположения корней уравнения (1.4) на комплексной плоскости относительно единичной окружности $\{z : |z| = 1, z \in \mathbb{C}\}$.

2. Поведение корней характеристического уравнения вблизи единичной окружности

Введем однопараметрическое семейство краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i^{-1}G \frac{d\psi}{d\vartheta} = \mu z H(\vartheta)\psi, \quad (2.1)$$

$$\psi(-\tau) = zR\psi(0), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Краевая задача (1.2), (1.3) принадлежит этому семейству при $\mu = 1$. Характеристическое уравнение краевой задачи (2.1), (2.2) имеет вид

$$D(z, \mu) = \det(I_n - zR\Phi(0, \mu z)) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Лемма 1. *При $\mu = \mu_0 \neq 0$ число z , $|z| = 1$, является собственным числом краевой задачи (2.1), (2.2) тогда и только тогда, когда либо $z = 1$, либо $z = -1$.*

Доказательство. Краевая задача

$$i^{-1}G \frac{d\psi}{d\vartheta} = \lambda H(\vartheta)\psi, \quad \psi(-\tau) = zR\psi(0), \quad |z| = 1,$$

является самосопряженной, а $\lambda = \mu_0 z \neq 0$ — вещественное число [25, гл. 3, разд. 4]. \square

Теорема 1. Пусть уравнение $D(z_0, \mu) = 0$, где либо $z_0 = 1$, либо $z_0 = -1$, имеет ненулевой вещественный корень μ_0 . Тогда при малых значениях $\bar{\mu} = \mu - \mu_0$ корни уравнения (2.3) вблизи единичной окружности определяются асимптотическими формулами

$$z = z_0 - iz_0^2 (\lambda_k + i\mu_0 z_0)^{-1} \bar{\mu} + O(\bar{\mu}^2), \quad (2.4)$$

где $\lambda_k, k = \overline{1, d}$, — вещественные числа.

Доказательство. Полагаем $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$, $z = z_0 + z_1 \bar{\mu}$, $\lambda = \mu z = \lambda_0 + \lambda_1 \bar{\mu}$. Здесь $\lambda_0 = \mu_0 z_0$, $\lambda_1 = z_0 + \mu_0 z_1$. Справедлива асимптотическая формула

$$\Phi(\vartheta, \lambda) = \Phi_0(\vartheta) + \Phi_1(\vartheta) (\lambda - \lambda_0) + O(|\lambda - \lambda_0|^2),$$

где Φ_0 — фундаментальная матрица системы

$$i^{-1} G \frac{d\psi}{d\vartheta} = \lambda_0 H(\vartheta) \psi, \quad (2.5)$$

удовлетворяющая условию $\Phi_0(-\tau) = I_n$,

$$\Phi_1(\vartheta) = i\Phi_0(\vartheta) \int_{-\tau}^{\vartheta} \Phi_0^{-1}(s) G^{-1} H(s) \Phi_0(s) ds, \quad \vartheta \in [-r, 0]. \quad (2.6)$$

В силу вещественности числа λ_0 , система (2.5) гамильтонова и ее фундаментальная матрица удовлетворяет тождеству [25, гл. 2, разд. 3]

$$\Phi_0^*(\vartheta) G \Phi_0(\vartheta) \equiv G, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

Учитывая это тождество, преобразуем формулу (2.6). Имеем

$$\Phi_1(\vartheta) = i\Phi_0(\vartheta) G^{-1} \int_{-\tau}^{\vartheta} \Phi_0^*(s) H(s) \Phi_0(s) ds, \quad \vartheta \in [-r, 0].$$

В результате получим следующее представление характеристического уравнения (2.3)

$$\det \left(z_0 R \Phi_0(0) - I_n + R \Phi_0(0) (z_1 I_n + iz_0(z_0 + \mu_0 z_1) G^{-1} D) \bar{\mu} + O(\bar{\mu}^2) \right) = 0, \quad z_1 \in \mathbb{C},$$

где

$$D = \int_{-\tau}^0 \Phi_0^*(s) H(s) \Phi_0(s) ds.$$

Используя методы теории возмущений [25, гл. 4, разд. 1], преобразуем полученное уравнение к виду

$$\det \left(\|b_m^* R \Phi_0(0) (z_1 I_n + iz_0(z_0 + \mu_0 z_1) G^{-1} D) a_k\|_1^d + O(\bar{\mu}) \right) = 0, \quad z_1 \in \mathbb{C}, \quad (2.7)$$

где $\|a_m\|_1^d$ и $\|b_m\|_1^d$ — линейно независимые решения уравнений

$$(z_0 R \Phi_0(0) - I_n) a = 0, \quad (z_0 \Phi_0^*(0) R^* - I_n) b = 0$$

соответственно. Используя определения матриц R и $\Phi_0(0)$, находим $b_m = G a_m$, $m = \overline{1, d}$. В результате характеристическое уравнение преобразуется к виду

$$\det (z_1 B + iz_0 (z_0 + \mu_0 z_1) A + O(\bar{\mu})) = 0,$$

где $A = \|a_m^* D a_k\|_1^d$, $B = \|a_m^* G a_k\|_1^d$ — эрмитовы матрицы, причем A имеет положительные собственные числа. Матрицы $B - \lambda A$ определяют регулярный пучок квадратичных форм, чьи характеристические числа λ_k ($k = \overline{1, d}$) вещественны [26, гл. 10, разд. 6]. Тогда корни уравнения (2.7) определяются следующими формулами: $z_1 = -iz_0^2 (\lambda_k + i\mu_0 z_0)^{-1} + O(\bar{\mu})$, $k = \overline{1, d}$. \square

Из аналитичности функций $D(1, \mu)$ и $D(-1, \mu)$, $\mu \in \mathbb{C}$, следует, что их вещественные нули μ_0 не имеют конечных точек накопления.

Лемма 2. *При $\mu = 0$ число z , $|z| = 1$, является собственным числом краевой задачи (2.1), (2.2) тогда и только тогда, когда \bar{z} — собственное число матрицы R .*

Доказательство. Так как $\Phi(\vartheta, 0) \equiv I_n$, $\vartheta \in [-r, 0]$, то уравнение (2.3) принимает вид $\det(I_n - zR) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. \square

Обозначим через E^{ρ_0} линейную оболочку множества собственных векторов, соответствующих собственному числу ρ_0 . Собственное число ρ_0 , $|\rho_0| = 1$, матрицы R называется собственным числом первого (второго) рода, если для любого ненулевого вектора $a \in E^{\rho_0}$ имеем $a^* G a > 0$ ($a^* G a < 0$). Собственные числа первого и второго рода называются дефинитными [25, гл. 3, разд. 1]. Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть собственные числа ρ_0 , $|\rho_0| = 1$, матрицы R дефинитные. Тогда при малых значениях μ корни уравнения (2.3) вблизи единичной окружности определяются асимптотическими формулами*

$$z = \bar{\rho}_0 - i\nu \hat{\lambda}_k \bar{\rho}_0^2 \mu + O(\mu^2), k = \overline{1, d}. \quad (2.8)$$

Здесь $\hat{\lambda}_k$, $k = \overline{1, d}$, — положительные числа; $\nu = +1$, если ρ_0 — собственное число первого рода; $\nu = -1$, если ρ_0 — собственное число второго рода.

3. Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости

Доказанные в предыдущем разделе теоремы позволяют определять расположение корней уравнения (2.3) относительно единичной окружности.

Теорема 3. *Если матрица R имеет собственное число с модулем, отличным от единицы, то характеристическое уравнение (2.3) при $\mu \in \mathbb{R}$ имеет корень с модулем, меньшим единицы. Если матрица R имеет дефинитное собственное число с модулем, равным единице, для которого $\text{Im}(\rho_0) \neq 0$, то характеристическое уравнение (2.3) при $\nu \text{Im}(\rho_0) \mu > 0$ имеет корень с модулем, меньшим единицы.*

Доказательство. Пусть G -унитарная матрица R имеет собственное число с модулем, отличным от единицы. Тогда она имеет собственное число с модулем, меньшим единицы. Если при изменении параметра μ соответствующий ему корень уравнения (2.3) выходит при $\mu_0 \neq 0$ на единичную окружность, то справедлива формула (2.4). Из нее находим $|z| = 1 - \mu_0 (\lambda_k^2 + \mu_0^2)^{-1} \bar{\mu} + O(\bar{\mu}^2)$, $k = \overline{1, d}$, и убеждаемся, что выход на окружность рассматриваемого корня невозможен. Следовательно, он остается внутри единичного круга. Пусть G -унитарная матрица R имеет собственное число с модулем, равным единице. При малых значениях параметра μ справедлива формула (2.8). Из нее находим $|z| = 1 - \nu \hat{\lambda}_k \text{Im}(\rho_0) \mu + O(\mu^2)$, $k = \overline{1, d}$, и убеждаемся, что корень при малом изменении параметра μ , удовлетворяющем условию $\nu \text{Im}(\rho_0) \mu > 0$, сходит с окружности вовнутрь единичного круга. При дальнейшем изменении параметра μ , удовлетворяющем условию $\nu \text{Im}(\rho_0) \mu > 0$, как показано выше, он не может выйти из единичного круга. \square

Расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости в случае недефинитных собственных чисел матрицы R изучалось в работах [18, 19, 23].

Теорема 4. Пусть все собственные числа ρ_0 матрицы R дефинитные и по модулю равны единице, а числа $\alpha = \nu \operatorname{Im}(\rho_0)$ одного знака. Тогда существует ненулевое вещественное число $\mu(H, R)$ такое, что все корни характеристического уравнения (2.3) при $\alpha\mu(H, R) < \alpha\mu < 0$ по модулю больше единицы. В случае конечного числа $\mu(H, R)$ при $\alpha\mu < \alpha\mu(H, R)$ существует корень характеристического уравнения, по модулю меньший единицы.

Доказательство. При малых значениях параметра μ , удовлетворяющих условию $\alpha\mu < 0$, из формулы (2.8) следует, что все корни уравнения (2.3) по модулю больше единицы. Если при своем движении они не выходят на единичную окружность, то $\alpha\mu(H, R) = -\infty$ и при выполнении условия $-\infty < \alpha\mu < 0$ все корни уравнения (2.3) по модулю больше единицы. Если при изменении параметра μ в области $\alpha\mu < 0$ корень уравнения (2.3) выходит на единичную окружность, то число $\mu(H, R)$ конечно и равно ненулевому значению μ_0 параметра, при котором первый раз один из корней выходит на единичную окружность. Согласно формуле (2.4), при дальнейшем изменении параметра этот корень попадает во внутреннюю область единичного круга. \square

Число $\mu(H, R)$ можно определить как значение параметра μ в области $\alpha\mu < 0$ с наименьшим модулем, при котором одна из краевых задач

$$i^{-1}G \frac{d\psi}{d\vartheta} = \mu H(\vartheta)\psi, \quad \psi(-\tau) = R\psi(0), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

$$i^{-1}G \frac{d\psi}{d\vartheta} = -\mu H(\vartheta)\psi, \quad \psi(-\tau) = -R\psi(0), \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

имеет нетривиальное решение.

Для краевой задачи (2.1), (2.2) при $n = 1$ пусть G — ненулевое вещественное число, $R = \exp(i\beta)$, $0 < |\beta| < \pi$, β — вещественное число. Находим $\rho_0 = \exp(i\beta)$, $\nu = \operatorname{sign} G$, $\alpha = \operatorname{sign} G \sin \beta$. Решая краевые задачи (3.1), (3.2), получим

$$\mu(H, R) = \frac{G}{\tau H_c} \left(\frac{\pi}{2} - \left| \frac{\pi}{2} - |\beta| \right| \right).$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда величина $\mu(H, R)$ монотонна по H , т.е. при $0 < H_1(\vartheta) \leq H_2(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, имеем $\alpha\mu(H_2, R) \leq \alpha\mu(H_1, R)$.

Доказательство. Рассмотрим однопараметрическое семейство краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений

$$i^{-1}G \frac{d\psi}{d\vartheta} = z(\mu H_1(\vartheta) + (1 - \mu)H_2(\vartheta))\psi, \quad (3.3)$$

$$\psi(-\tau) = zR\psi(0), \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

Характеристическое уравнение этой краевой задачи имеет вид

$$\det(I_n - zR\Phi(0, z, \mu)) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.4)$$

где $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ — фундаментальная матрица системы (3.3), удовлетворяющая условию $\Phi(-\tau, z, \mu) = I_n$, $z \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Предполагая, что все корни характеристического уравнения (3.4) по модулю больше единицы при $\mu = 0$, покажем, что это так и при $\mu = 1$. В противном случае $H_1 \neq H_2$ и найдется значение $\mu_0 \in (0, 1)$, $\alpha\mu_0 < 0$, при котором корень уравнения (3.4) попадает на единичную окружность. Используя свойства самосопряженных краевых задач, находим точки $z_0 = \pm 1$, в которых могут находиться корни уравнения (3.4) при $\mu = \mu_0$. Полагаем $\mu = \mu_0 + \bar{\mu}$, $z = z_0 + z_1\bar{\mu}$. Используя методы теории возмущений, преобразуем уравнение (3.4) вблизи единичной окружности

$$\det(z_1(D_2 + iD_1) - iz_0D_0 + O(\bar{\mu}^2)) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

где $D_j = \|a_m^* P_j a_k\|_1^d > 0$, $j = 0, 1$, $D_2 = z_0 \|a_m^* G a_k\|_1^d$. Здесь a_k , $k = \overline{1, d}$, — линейно независимые решения уравнения $(z_0 R \Phi_0(0) - I_n) a = 0$; $\Phi_0(\vartheta) = \Phi(\vartheta, z_0, \mu_0)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$;

$$P_0 = \int_{-\tau}^0 \Phi_0^*(s) (H_2(s) - H_1(s)) \Phi_0(s) ds, \quad P_1 = \int_{-\tau}^0 \Phi_0^*(s) (\mu_0 H_2(s) + (1 - \mu_0) H_1(s)) \Phi_0(s) ds.$$

Если уравнение (3.5) имеет решение, то существует такой вектор $c \in \mathbb{R}^d$, $|c| = 1$, что $z_1 = iz_0 \gamma_0 (\gamma_2 + i\gamma_1)^{-1} + O(\overline{\mu})$. Здесь $\gamma_j = c^* D_j c$, $j = \overline{0, 2}$; $\gamma_k > 0$, $k = 0, 1$. Вычисляем модуль корня $|z| = 1 + \gamma_0 \gamma_1 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1} \overline{\mu} + O(\overline{\mu}^2)$ уравнения (3.4). Следовательно, при изменении параметра μ корень этого уравнения не может приблизиться к единичной окружности. Получили противоречие. Тогда $\alpha \mu(H_2, R) \leq \alpha \mu(H_1, R)$, что доказывает теорему. \square

4. Признаки асимптотической устойчивости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} + B(t)x(t - \tau) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.1)$$

Здесь $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$; B — матрица-функция, элементы которой являются кусочно-непрерывными функциями, $B(t)$, $t \in [0, \tau]$, — симметрические положительно определенные матрицы.

Системе (4.1) в случае, когда элементы матрицы-функции B являются τ -периодическими функциями, соответствует краевая задача (1.2), (1.3) при $n = m$, $G = I_m$, $H(\vartheta) = B(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $R = -iI_m$. Матрица R имеет единственное кратное собственное число $\rho_0 = -i$ первого рода. Следовательно, $\alpha = -1$ и $\mu(H, R) > 0$. Для нахождения достаточных условий асимптотической устойчивости воспользуемся теоремой 5.

Утверждение 1. Система дифференциальных уравнений с запаздыванием (4.1) асимптотически устойчива, если элементы матрицы-функции B являются τ -периодическими функциями, а собственные числа $\lambda_k(\vartheta)$, $k = \overline{1, m}$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, матриц $B(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, удовлетворяют условиям:

$$\int_{-\tau}^0 \lambda_k(\vartheta) d\vartheta < \pi/2, \quad k = \overline{1, m}.$$

Доказательство. Возьмем матрицу-функцию $\hat{H}(\vartheta) = h(\vartheta)I_m$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, где h — кусочно-непрерывная положительная функция, и найдем число $\mu(\hat{H}, R)$. Характеристическое уравнение краевой задачи (2.1), (2.2) для нее имеет вид

$$\det \left(iz \exp(iz\mu\tau\hat{H}_c) + I_m \right) = \left(1 + iz \exp(iz\mu\tau h_c) \right)^m = 0.$$

Находим $\mu(\hat{H}, R) = \pi/(2\tau h_c)$, где $h_c = \tau^{-1} \int_{-\tau}^0 h(\vartheta) d\vartheta$. Из теоремы 5 следует, что системы (4.1)

с матрицами-функциями B , удовлетворяющими условиям $B(\vartheta) \leq \hat{H}(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, асимптотически устойчивы, если $\mu(\hat{H}, R) > 1$. Следовательно, должны выполняться неравенства: $\lambda_k(\vartheta) < h(\vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $k = \overline{1, m}$, и $h_c < \pi/(2\tau)$. \square

При $m = 2$ симметрические матрицы $B(t)$, $t \in [0, \tau]$, положительно определены, если выполнены следующие условия: $\inf\{\det(B(t)) : t \in [0, \tau]\} > 0$ и $\inf\{\text{Tr}(B(t)) : t \in [0, \tau]\} > 0$.

Здесь Tr обозначает след матрицы. Собственные числа матриц $B(t)$, $t \in [0, \tau]$, определяются формулами:

$$\lambda_{1,2}(t) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(B(t)) \pm \sqrt{(\text{Tr}(B(t))^2 - 4 \det(B(t)))}), \quad t \in [0, \tau].$$

Из утверждения 1 следует, что при выполнении условия

$$\sup \left(\text{Tr}(B(t)) + \sqrt{\text{Tr}(B(t))^2 - 4 \det(B(t))} : t \in [0, \tau] \right) < \pi/\tau$$

система (4.1) асимптотически устойчива. Последнее условие можно заменить двумя неравенствами

$$\sup\{\text{Tr}(B(t)) : t \in [0, \tau]\} < \pi/\tau, \quad \inf \left\{ \frac{\pi^2}{\tau^2} + 2\frac{\pi}{\tau}\text{Tr}(B(t)) + 4 \det(B(t)) : t \in [0, \tau] \right\} > 0.$$

Рассмотрим систему (4.1) в случае, когда элементы матрицы-функции B являются 2τ -периодическими функциями. Этой системе соответствует краевая задача (1.2), (1.3) при $n = 2m$, $G = iJ_{2m}$, $H(\vartheta) = B(\vartheta)\dot{+}B(\tau + \vartheta)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, $R = J_{2m}$. Напомним, что блочная матрица $J_{2m} = \left\| J_{2m}^{ij} \right\|_1^2$ размерности $2m \times 2m$ определяется формулами: $J_{2m}^{11} = J_{2m}^{22} = 0_m$, $J_{2m}^{21} = -J_{2m}^{12} = I_m$, где 0_m — нулевая матрица размерности $m \times m$. Матрица R имеет два кратных собственных числа $\rho_0 = \pm i$. Им отвечают собственные векторы $a = (\pm ic, c)^\top$, $c \in \mathbb{C}^m$. Вычисления показывают, что собственное число $\rho_0 = i$ — второго рода, а собственное число $\rho_0 = -i$ — первого рода. Следовательно, $\alpha = -1$ и $\mu(H, R) > 0$. Для нахождения достаточных условий асимптотической устойчивости воспользуемся теоремой 5.

Утверждение 2. Пусть элементы матрицы-функции B являются 2τ -периодическими функциями. Тогда система дифференциальных уравнений с запаздыванием (4.1) асимптотически устойчива, если для некоторой симметричной положительно определенной матрицы \hat{B} размерности $m \times m$ матрица-функция B удовлетворяет условиям:

$$B(\vartheta) \leq \hat{B}, \quad \vartheta \in [-2\tau, 0], \quad \max \left\{ \hat{\lambda}_k : k = \overline{1, m} \right\} < \pi/(2\tau).$$

Здесь $\hat{\lambda}_k$, $k = \overline{1, m}$, — собственные числа матрицы \hat{B} .

Доказательство. Возьмем матрицу-функцию $\hat{H}(\vartheta) = \hat{B}\dot{+}\hat{B}$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, и найдем число $\mu(\hat{H}, R)$. Фундаментальная матрица системы (2.1) для матрицы-функции \hat{H} определяется формулой

$$\Phi(\vartheta, \mu z) = \begin{pmatrix} \cos(\mu z \hat{B}(\vartheta + \tau)) & \sin(\mu z \hat{B}(\vartheta + \tau)) \\ -\sin(\mu z \hat{B}(\vartheta + \tau)) & \cos(\mu z \hat{B}(\vartheta + \tau)) \end{pmatrix}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad z \in \mathbb{C}.$$

Характеристическое уравнение краевой задачи (2.1), (2.2) для матрицы-функции \hat{H} имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} I_n - z \sin(\mu z \hat{B}\tau) & z \cos(\mu z \hat{B}\tau) \\ -z \cos(\mu z \hat{B}\tau) & I_n - z \sin(\mu z \hat{B}\tau) \end{pmatrix} = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$\det \left((1 + z^2) I_n - 2z \sin(\mu z \hat{B}\tau) \right) = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Оно эквивалентно системе уравнений

$$1 + z^2 - 2z \sin(\mu z \hat{\lambda}_k \tau) = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad k = \overline{1, m}.$$

Находим $\mu(\hat{H}, R) = \min \left\{ \pi / (2\tau \hat{\lambda}_k) : k = \overline{1, m} \right\}$. Из теоремы 5 следует, что системы (4.1) с матрицами-функциями B , удовлетворяющими условию $B(\vartheta) \leq \hat{B}$ ($\vartheta \in [-2\tau, 0]$), асимптотически устойчивы, если $\mu(\hat{H}, R) > 1$. Следовательно, должно выполняться неравенство $\max \{ \hat{\lambda}_k : k = \overline{1, m} \} < \pi / (2\tau)$. \square

Утверждение 3. В скалярном случае дифференциальное уравнение (4.1) с запаздыванием и 2τ -периодической функцией B асимптотически устойчиво, если выполнено условие

$$\frac{\hat{B}_1 + \hat{B}_2}{2\sqrt{\hat{B}_1\hat{B}_2}} \sin \left(\tau \sqrt{\hat{B}_1\hat{B}_2} \right) < 1,$$

где $\hat{B}_1 = \sup(B(\vartheta) : \vartheta \in [-\tau, 0])$, $\hat{B}_2 = \sup(B(\tau + \vartheta) : \vartheta \in [-\tau, 0])$.

Доказательство. Возьмем матрицу-функцию $\hat{H}(\vartheta) = \text{diag}(\hat{h}_1, \hat{h}_2)$, $\vartheta \in [-\tau, 0]$, где \hat{h}_1, \hat{h}_2 — положительные постоянные, и найдем число $\mu(\hat{H}, R)$. Характеристическое уравнение краевой задачи (2.1), (2.2) для матрицы-функции \hat{H} имеет вид

$$z^2 - z \frac{\hat{h}_1 + \hat{h}_2}{\sqrt{\hat{h}_1\hat{h}_2}} \sin \left(\mu\tau z \sqrt{\hat{h}_1\hat{h}_2} \right) + 1 = 0.$$

Учитывая определение числа $\mu(\hat{H}, R)$, находим

$$\mu(\hat{H}, R) = \frac{1}{\tau \sqrt{\hat{h}_1\hat{h}_2}} \arcsin \left(\frac{2\sqrt{\hat{h}_1\hat{h}_2}}{\hat{h}_1 + \hat{h}_2} \right).$$

Из теоремы 5 следует, что системы (4.1) с матрицами-функциями H , удовлетворяющими условию $H(\vartheta) \leq \hat{H}(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-\tau, 0]$), асимптотически устойчивы, если $\mu(\hat{H}, R) > 1$. Учитывая определение H , выбираем $\hat{h}_j = \hat{B}_j$, $j = 1, 2$. \square

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$J_{2k} \frac{dx(t)}{dt} = H_1(t)x(t) + H_2(t)x(t - \tau) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.2)$$

Здесь $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$; H_1, H_2 — матрицы-функции, элементы которых являются кусочно-непрерывными τ -периодическими функциями; $H_1(t), H_2(t), t \in [0, \tau]$, — симметрические матрицы.

Системе (4.2) соответствует краевая задача (1.2), (1.3) при $n = 2k$, $G = iJ_{2k}$, $R = \Phi_1(0)$ и

$$H(\vartheta) = \Phi_1^*(\vartheta)H_2(\vartheta)\Phi_1(\vartheta), \quad \vartheta \in [-\tau, 0],$$

где Φ_1 — фундаментальная матрица канонической системы

$$J_{2k} \frac{dx}{dt} = H_1(t)x, \quad (4.3)$$

удовлетворяющая условию $\Phi_1(-\tau) = I_{2k}$. Матрица R является матрицей монодромии, а ее собственные числа — мультипликаторы этой системы. Множество сильно устойчивых систем (4.3) распадается на счетное число областей [25, гл. 3, разд. 5]. Согласно теореме 4 для асимптотической устойчивости системы (4.2) достаточно, чтобы канонические системы

$$J_{2k} \frac{dx}{dt} = (H_1(t) - H_1(t))x, \quad J_{2k} \frac{dx}{dt} = (H_1(t) + H_1(t))x,$$

принадлежали одной области сильной устойчивости, для канонических систем которой все мультипликаторы первого рода лежат на нижней полуокружности. С учетом свойств выделенной области сильной устойчивости [24, 27] можно получить достаточные условия асимптотической устойчивости.

Утверждение 4 ([28]). Пусть $H_2(t) > 0$, $t \in [0, \tau]$. Тогда для асимптотической устойчивости системы (4.2) достаточно, чтобы нашлось такое целое число n , что

$$\pi(2n + 1) < \int_0^\tau h_{\min}^{(-)}(s) ds < \int_0^\tau h_{\max}^{(+)}(s) ds < 2\pi(n + 1),$$

где $h_{\min}^{(-)}(t)$ — наименьшее собственное число матрицы $H_1(t) - H_2(t)$, а $h_{\max}^{(+)}(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $H_1(t) + H_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для формулировки следующего признака введем обозначения:

$$H_1(t) + H_2(t) = \begin{pmatrix} H_{11}^{(+)}(t) & H_{12}^{(+)}(t) \\ H_{21}^{(+)}(t) & H_{22}^{(+)}(t) \end{pmatrix}, \quad H_1(t) - H_2(t) = \begin{pmatrix} H_{11}^{(-)}(t) & H_{12}^{(-)}(t) \\ H_{21}^{(-)}(t) & H_{22}^{(-)}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$A_{ij} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau H_{ij}^{(+)}(s) ds, \quad B_{ij} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau H_{ij}^{(-)}(s) ds, \quad i, j = 1, 2,$$

где $H_{ij}^{(\pm)}(t)$, $i, j = 1, 2$, $t \in \mathbb{R}$, — матрицы размерности $k \times k$.

Утверждение 5 ([28]). Система (4.2) с матрицами $H_2(t) > 0$, $H_1(t) + H_2(t) < 0$, $t \in [0, \tau]$, асимптотически устойчива, если

$$\tau^2 \text{Tr}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < 2, \quad \tau^2 \text{Tr}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) < 2.$$

Для четных матриц-функций H_1 и H_2 система (4.2) асимптотически устойчива, если

$$\tau^2 \text{Tr}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) < 4, \quad \tau^2 \text{Tr}(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) < 4.$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + P_1(t)y(t) + P_2(t)y(t - \tau) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (4.4)$$

Здесь $y : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^k$; P_1, P_2 — матрицы-функции, элементы которых являются кусочно-непрерывными τ -периодическими функциями, $P_1(t), P_2(t)$, $t \in [0, \tau]$, — симметрические матрицы. Система принадлежит к классу систем (4.2).

Утверждение 6 ([28]). Пусть $P_2(t) < 0$, $t \in [0, \tau]$, и для любого $c \in \mathbb{R}^k$ найдутся числа a , $0 < a < \pi/\tau$, и b , $0 < b < \pi/\tau$, такие, что для всех $t \in [0, \tau]$ выполняются неравенства:

$$([P_1(t) + P_2(t)]c, c) \geq a^2(c, c), \quad ([P_1(t) - P_2(t)]c, c) \geq b^2(c, c).$$

Тогда система (4.4) асимптотически устойчива, если

$$\tau \int_0^\tau \text{Tr}(P_1(t) + P_2(t)) dt < 4 + (k - 4/\pi^2) a^2, \quad \tau \int_0^\tau \text{Tr}(P_1(t) - P_2(t)) dt < 4 + (k - 4/\pi^2) b^2.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
2. **Шиманов С.Н.** К теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. 1963. Т. 27, вып. 3. С. 450–458.
3. **Борисович Ю.Г., Субботин В.Ф.** Оператор сдвига по траекториям эволюционных уравнений и периодические решения // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 5. С. 9–12.
4. **Клейменов А.Ф.** Существование и устойчивость периодических решений систем с запаздыванием, близких к системам Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1431–1440.
5. **Колесов Ю.С., Швитра Д.И.** Автоколебания в системах с запаздыванием. Вильнюс: Мокслас, 1979.
6. **Зубов В.И.** Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л.: Судпромиздат, 1962.
7. **Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
8. **Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.** Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев: Вища школа, 1979.
9. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
10. **Шиманов С.Н.** Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием // Пятая летняя мат. школа. Киев: Ин-т математики АН УССР. 1968. С. 473–549.
11. **Dormayer P.** The stability of special symmetric solutions $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ with small amplitudes // Nonlinear Analysis, Methods and Applications. 1990. V. 14, no. 8. P. 701–715.
12. **Долгий Ю.Ф., Николаев С.Г.** Устойчивость периодического решения нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 5. С. 592–601.
13. **Dolgii Yu.F., Zakharov A.V.** A delay effect upon periodic oscillations in a conservative system // Proc. of the Steklov Inst. of Math., Suppl. 2. 2003. P. S24–S44.
14. **Долгий Ю.Ф., Нидченко С.Н.** Бифуркационный метод исследования устойчивости решения дифференциального уравнения с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1289–1301.
15. **Гасилов Г.Л.** О характеристическом уравнении системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1972. № 4. С. 60–66.
16. **Зверкин А.М.** К теории дифференциально-разностных уравнений с запаздываниями, соизмеримыми с периодом коэффициентов // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 9. С. 1481–1492.
17. **Долгий Ю.Ф.** Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: УрГУ, 1996.
18. **Долгий Ю.Ф.** Неустойчивость аналога уравнения Хилла с запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1984. С. 30–36.
19. **Долгий Ю.Ф.** Неустойчивость аналога гамильтоновой системы с запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1986. С. 13–21.
20. **Долгий Ю.Ф., Шиманов С.Н.** Существование зоны устойчивости для одного уравнения с запаздыванием // Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1988. С. 11–18.
21. **Долгий Ю.Ф.** Устойчивость одной периодической системы с постоянным запаздыванием // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь: ППИ, 1988. С. 131–136.
22. **Долгий Ю.Ф.** Об устойчивости одной периодической системы с запаздыванием // Краевые задачи. Пермь: ППИ, 1989. С. 16–21.
23. **Долгий Ю.Ф., Николаев С.Г.** Неустойчивость одной периодической системы с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 4. С. 465–470.
24. **Долгий Ю.Ф., Николаев С.Г.** Об устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 10. С. 1330–1336.
25. **Якубович В.А., Старжинский В.М.** Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
26. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988.
27. **Крейн М.Г.** О признаках устойчивой ограниченности решений периодических канонических систем // Прикл. математика и механика. 1955. Т. 19, вып. 6. С. 641–680.
28. **Николаев С.Г.** Устойчивость линейных периодических систем с постоянным запаздыванием. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2000.

УДК 519.63

**РЕКОНСТРУКЦИЯ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ
ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ВЫСОКОВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ¹****А. И. Короткий, Д. А. Ковтунов**

Рассматривается задача реконструкции граничных режимов в модели свободной конвекции высоковязкой жидкости. Для решения рассматриваемой обратной задачи предлагаются вариационный метод и метод квазиобращения. Вариационный метод основан на сведении исходной обратной задачи к некоторой равносильной вариационной задаче на минимум подходящего целевого функционала и нахождении минимума этого функционала градиентным методом. При реализации градиентного метода нахождения минимизирующего элемента целевого функционала организуется итерационный процесс, который фактически сводит исходную задачу к серии прямых корректных задач. В методе квазиобращения исходная дифференциальная модель модифицируется путем введения в нее специальных дополнительных дифференциальных слагаемых более высокого порядка с малыми параметрами при этих дополнительных слагаемых. Полученная возмущенная задача становится корректной, что позволяет ее решать обычными методами. Подходящий выбор малых параметров позволяет получить приемлемые качественные и количественные результаты при решении обратной задачи. Проводится сравнение указанных методов решения обратной задачи на модельных примерах.

Введение

В работе рассматривается задача реконструкции граничных режимов в модели свободной конвекции высоковязкой несжимаемой неоднородной теплопроводной жидкости. Эта задача относится к классу граничных обратных задач [1–13]. Такие задачи часто возникают на практике, например, в геофизике и теплотехнике, когда прямые измерения каких-либо искомым величин невозможны на какой-то части границы объекта, но известна некоторая дополнительная информация об объекте на другой части границы этого объекта, по которой и требуется осуществить идентификацию неизвестных граничных режимов. Для решения рассматриваемой обратной задачи предлагаются вариационный метод и метод квазиобращения.

В вариационном методе организуется соответствующая итерационная процедура, позволяющая свести исходную задачу к серии прямых корректных задач. Эта итерационная процедура основана на сведении исходной обратной задачи к некоторой равносильной вариационной задаче на минимум подходящего целевого функционала и нахождении минимизирующего элемента этого функционала каким-либо вариантом градиентного метода.

В методе квазиобращения исходная дифференциальная модель модифицируется введением в нее подходящих дополнительных дифференциальных слагаемых более высокого порядка с малыми параметрами (параметрами регуляризации) при этих дополнительных слагаемых. Возмущенная задача становится, как правило, корректной. Ожидается, что при подходящих значениях параметров регуляризации решение возмущенной задачи будет близко к решению невозмущенной задачи. Метод квазиобращения подробно изложен в [13]. Существует много возможных реализаций этого метода. В данной работе рассматривается одна из реализаций, не требующая привлечения дополнительных граничных условий для возмущенной задачи.

Основное внимание в работе сосредоточено на разработке и сравнении численных подходов к решению рассматриваемой обратной задачи.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00098) и Программы фундаментальных исследований Президиума РАН по направлению “Фундаментальные проблемы нелинейной динамики”.

1. Постановка задачи

В области $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается движение высоковязкой несжимаемой неоднородной теплопроводной жидкости, находящейся под воздействием гравитационного и теплового полей. Математическая модель установившихся движений такой жидкости представлена следующими безразмерными уравнениями в приближении Буссинеска

$$\mu \Delta \mathbf{u} = \nabla p - \text{Ra} T \mathbf{e}_2, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\Delta T = \mathbf{u} \nabla T, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

где x — точка пространства с декартовыми координатами (x_1, x_2) , $\mathbf{u} = (u^{(1)}(x), u^{(2)}(x))$ — вектор скорости движения жидкости, $p = p(x)$ — давление, $T = T(x)$ — температура, μ — вязкость, Ra — число Рэлея, \mathbf{e}_2 — орт на оси Ox_2 .

Граница Γ области Ω считается неподвижной и непроницаемой. Для скорости \mathbf{u} на этой границе будем рассматривать стандартное условие прилипания

$$\mathbf{u}|_{\Gamma} = 0. \quad (1.4)$$

Для температуры T на боковой границе $\Gamma_s = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : (x_1 = 0) \vee (x_1 = l_1)\}$ прямоугольника Ω задается условие теплоизолированности

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_s} = 0. \quad (1.5)$$

На верхней границе $\Gamma_t = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : x_2 = l_2\}$ прямоугольника Ω задается температура

$$T|_{\Gamma_t} = w. \quad (1.6)$$

Допустим, что на верхней границе Γ_t наблюдается (замеряется) поток тепла

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma_t} = \varphi. \quad (1.7)$$

Задача состоит в том, чтобы по результатам этих наблюдений найти температурный режим на нижней границе $\Gamma_b = \{(x_1, x_2) \in \Gamma : x_2 = 0\}$ прямоугольника Ω , т.е. требуется найти решение краевой задачи (1.1)–(1.7), а затем по этому решению найти его след v на нижней границе Γ_b прямоугольника Ω

$$T|_{\Gamma_b} = v. \quad (1.8)$$

Отметим, что краевая задача (1.1)–(1.7) поставлена, вообще говоря, некорректно. Даже если w и φ — согласованная пара функций, т.е. пара функций, для которой существует решение $\{\mathbf{u}, T\}$ краевой задачи (1.1)–(1.7), эта задача может, вообще говоря, не иметь решения для пары функций $w + \varepsilon_1$ и $\varphi + \varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 — произвольные сколь угодно малые функции. Вычислительные эксперименты показывают, что прямое численное решение задачи (1.1)–(1.7) неустойчиво. Кроме того, здесь может возникнуть проблема взятия следа (1.8).

Основное внимание здесь будет сосредоточено на разработке подходов устойчивой численной реализации методов решения обратной задачи (1.1)–(1.8), которые будут рассматриваться в следующих параграфах.

2. Вариационный метод решения задачи

Обсудим в этом пункте вариационный метод решения поставленной задачи. Нахождение теплового режима v на Γ_b можно свести к вариационной задаче следующим образом. Пусть наблюдаемый режим $\varphi = \partial T / \partial n$ на Γ_t соответствует некоторому априори неизвестному тепловому режиму $T = v_*$ на Γ_b , т.е. если T_* — компонента решения прямой краевой задачи (1.1)–(1.6), (1.8) с $v = v_*$, то для этого решения $\partial T_*/\partial n = \varphi$ на Γ_t . Пусть известно, что $v_* \in V$, где V — некоторое множество допустимых граничных режимов на Γ_b . Далее для простоты будем считать, что $V = L_2(0, l_1)$. Для искомого граничного режима $v_* \in V$ следующий функционал качества

$$J(v) = \int_{\Gamma_t} \left(\frac{\partial T_v}{\partial n} - \varphi \right)^2 d\Gamma = \int_0^{l_1} \left(\frac{\partial T(x_1, l_2; v)}{\partial x_2} - \varphi(x_1) \right)^2 dx_1$$

должен принимать нулевое значение ($J(v_*) = 0$). Здесь $T_v = T(x; v)$ — компонента решения $\{\mathbf{u}_v, T_v\}$ прямой задачи (1.1)–(1.6), (1.8). Таким образом, искомый граничный режим $v_* \in V$ является минимизирующим элементом в экстремальной задаче

$$J(v) \rightarrow \min : v \in V, \quad (2.1)$$

т.е. $v_* \in V_* = \arg \min \{J(v) : v \in V\}$. Для решения задачи (2.1) удобно воспользоваться каким-нибудь из градиентных методов минимизации [14–16].

Для нахождения точки минимума в задаче (2.1) воспользуемся простейшим вариантом градиентного метода, который состоит в том, что если найден градиент ∇J функционала J , то итерационный процесс

$$v_{k+1} = v_k - \beta_k \nabla J(v_k), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

при надлежащем выборе начального приближения $v_0 \in V$ и параметров $\beta_k \in (0, \infty)$, может сходиться в том или ином смысле к какой-нибудь точке минимума из множества V_* .

Градиент функционала, используемый в итерационном процессе (2.2), вычислен в [17]

$$\nabla J(v) = \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\Gamma_b} = -\frac{\partial \omega(x_1, 0)}{\partial x_2}, \quad 0 \leq x_1 \leq l_1,$$

где ω — компонента решения $\{\mathbf{z}, \omega\}$ следующей сопряженной задачи

$$\mu \Delta \mathbf{z} + \omega \nabla T_v = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{z} = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$\Delta \omega + \mathbf{u}_v \nabla \omega - \operatorname{Ra} \mathbf{z} e_2 = 0, \quad x \in \Omega, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{z}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n} \Big|_{\Gamma_s} = 0, \quad \omega|_{\Gamma_b} = 0, \quad \omega|_{\Gamma_t} = 2 \left(\frac{\partial T_v}{\partial n} - \varphi \right). \quad (2.6)$$

Опишем кратко схему численного решения поставленной обратной задачи вариационным методом. На каждой итерации последовательно выполняются следующие четыре шага.

1. Известное $v = v_k \in V$ подставляем в граничное условие (1.8) прямой краевой задачи (1.1)–(1.6), (1.8) и находим решение $\{\mathbf{u}_v, T_v\}$ этой задачи (давление p_v не используется).
2. Подставляем $\{\mathbf{u}_v, T_v\}$ в сопряженную задачу (2.3)–(2.6) и находим ее решение $\{\mathbf{z}, \omega\}$ (\mathbf{z} далее не используется).

3. Вычисляем $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ на Γ_b , это дает градиент $\nabla J(v) = -\frac{\partial \omega}{\partial x_2}(x_1, 0)$, $0 \leq x_1 \leq l_1$.

4. Подставляем полученное значение градиента в (2.2) и находим новое приближение решения v_{k+1} .

Вычисления останавливаем при выполнении условия

$$J(v_k) + \|\nabla J(v_k)\|^2 < \varepsilon,$$

где ε — некоторое заданное положительное число. Найденный элемент v_k , удовлетворяющий этому условию, принимается за приближение к искомому граничному режиму.

Для упрощения исходных систем уравнений в прямой и сопряженной задачах использовался переход от естественных переменных «скорость, давление» к переменным «функция тока, вихрь скорости» [11, 18]. Это позволило исключить из рассмотрения уравнения (1.2) и (2.4). Таким образом, если ввести следующую замену переменных

$$u^{(1)} = \partial \psi / \partial x_2, \quad u^{(2)} = -\partial \psi / \partial x_1, \quad \text{rot } \boldsymbol{\xi} = (0, 0, \eta), \quad \eta = \partial u^{(2)} / \partial x_1 - \partial u^{(1)} / \partial x_2,$$

где ψ — функция тока, η — третья компонента вихря расширенного вектора скорости $\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{u}, 0) = (u^{(1)}, u^{(2)}, 0)$, то прямая задача (1.1)–(1.6), (1.8) преобразуется к виду

$$-\mu \Delta \eta = \text{Ra} \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad -\Delta \psi = \eta, \quad \Delta T = \frac{D(T, \psi)}{D(x_1, x_2)}, \quad x \in \Omega, \quad (2.7)$$

$$\psi|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma_s} = 0, \quad T|_{\Gamma_t} = w, \quad T|_{\Gamma_b} = v. \quad (2.8)$$

Для численного решения прямой и сопряженной задач воспользуемся безусловно устойчивой линейаризованной разностной схемой [11]. На множестве сеточных функций, обращающихся в нуль на границе расчетной сетки, определим сеточный оператор Лапласа

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = -y \bar{x}_1 x_1 - y \bar{x}_2 x_2.$$

Для унификации записи конвективных слагаемых в разностной схеме введем специальный сеточный дифференциальный оператор со следующей центрально-разностной аппроксимацией

$$V(\mathbf{u})T = V_1(u_1)T + V_2(u_2)T, \quad V_k(u_k)T = \frac{1}{2} \left((u_k T)_{x_k}^{\circ} + u_k T_{x_k}^{\circ} \right), \quad k = 1, 2.$$

Тогда разностная схема для задачи (2.7), (2.8), (1.5), (1.6), (1.8) запишется в следующем виде

$$\frac{\eta_{n+1/2} - \eta_n}{\tau} + \mu \Lambda \eta_{n+1/2} + \sigma(x) \psi_n - \text{Ra} (T_{n+1})_{x_1}^{\circ} = 0,$$

$$\frac{\Lambda \psi_{n+1} - \eta_{n+1/2}}{\tau} + \sigma(x) (\psi_{n+1} - \psi_n) = 0,$$

$$\eta_{n+1} = \Lambda \psi_{n+1},$$

$$\frac{T_{n+1} - T_n}{\tau} + V(\mathbf{u}_n)T_{n+1} + \Lambda T_{n+1} = 0,$$

$$\sigma(x) = \sigma_1(x_1) + \sigma_2(x_2), \quad \sigma_k(x_k) = \begin{cases} 0, & h_k < x_k < l_k - h_k, \\ 2/h_k^4, & x_k = h_k, l_k - h_k, \end{cases} \quad k = 1, 2.$$

Для вихря скорости на границе области будет использоваться известное условие Тома [11, 19]. Сопряженная задача (2.3)–(2.6) дискретизируется и решается аналогичным способом.

При решении сеточных эллиптических задач, получающихся при разностной дискретизации исходных уравнений, воспользуемся методом приближенной факторизации [11, 18], поскольку он является достаточно эффективным для матриц с сильно разреженной структурой. В качестве реализации градиентного метода (2.2) был выбран метод сопряженных градиентов Флетчера — Ривса [16], поскольку он не накладывает жестких ограничений на выбор начального приближения и показывает хорошую скорость сходимости по сравнению, например, с методом наискорейшего спуска [14–16].

Результаты численного моделирования приведены ниже.

3. Метод квазиобращения решения задачи

Обсудим в этом пункте метод решения поставленной обратной задачи на основе метода квазиобращения. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу, в которой модель движения жидкости включает в себя регуляризованное уравнение теплового баланса

$$\mu \Delta \mathbf{u}_\alpha = \nabla p_\alpha - \text{Ra } T_\alpha \mathbf{e}_2, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$\text{div } \mathbf{u}_\alpha = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\Delta T_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \nabla T_\alpha + \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}, \quad x \in \Omega, \quad (3.2)$$

при этом граничные условия для искомым функций оставляем прежними, т.е. для искомым функций \mathbf{u}_α и T_α рассматриваем граничные условия типа (1.4)–(1.7). Вспомогательная задача будет устойчивой при всех достаточно малых $\alpha > 0$ (по крайней мере в классе решений с ограниченными первыми производными, это следует из псевдогиперболичности уравнения (3.2) и эллиптичности системы (3.1)). Теоретически установить сходимость $T_\alpha(\cdot, 0) \rightarrow T(\cdot, 0) = v(\cdot)$ при $\alpha \rightarrow 0$ довольно трудно. Проведем соответствующие вычислительные эксперименты, которые позволят оценить реальную обусловленность предлагаемого метода численного решения задачи. Исследуем также зависимость построенного решения от параметра регуляризации.

Рассмотрим сначала краевую задачу (1.3), (1.5)–(1.7) при известном поле скоростей \mathbf{u} . В этой задаче на Γ_t заданы температура и поток тепла. Поэтому ее можно рассматривать как задачу продолжения температурного поля с Γ_t во всю область Ω , т.е. как эволюционную задачу по пространственной переменной x_2 . Переобозначим переменные в уравнении (1.3). Эволюционную переменную обозначим через t (аналог времени), $t = l_2 - x_2$, и пусть $x = x_1$. Тогда уравнение (1.3) переписется в виде ($l = l_1$, $\vartheta = l_2$)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + u^{(2)} \frac{\partial T}{\partial t} = u^{(1)} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < t < \vartheta, \quad 0 < x < l.$$

Граничные условия (1.5)–(1.7) примут вид

$$T(x, 0) = w, \quad \frac{\partial T}{\partial t}(x, 0) = -\varphi(x), \quad 0 < x < l; \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = 0, \quad 0 < t < \vartheta.$$

Возмущенное псевдогиперболическое уравнение (3.2) в новых переменных будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial t^2} + u_\alpha^{(2)} \frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^4 T_\alpha}{\partial x^2 \partial t^2} + u_\alpha^{(1)} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x} - \frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial x^2}, \quad 0 < t < \vartheta, \quad 0 < x < l. \quad (3.3)$$

Это уравнение дополняется начальными и граничными условиями, следующими из (1.5)–(1.7)

$$T_\alpha(x, 0) = w, \quad \frac{\partial T_\alpha}{\partial t}(x, 0) = -\varphi(x), \quad 0 < x < l; \quad \frac{\partial T_\alpha}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial T_\alpha}{\partial x}(l, t) = 0, \quad 0 < t < \vartheta. \quad (3.4)$$

Для нахождения приближенного решения $\{\mathbf{u}_\alpha, T_\alpha\}$ краевой задачи (1.1)–(1.7) начально-краевая задача (3.3), (3.4) дополняется краевой задачей для определения поля скоростей, выраженной в переменных «функция тока, вихрь скорости»

$$-\mu \Delta \eta_\alpha = \text{Ra} \frac{\partial T_\alpha}{\partial x_1}, \quad -\Delta \psi_\alpha = \eta_\alpha, \quad \psi_\alpha|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial n} \Big|_\Gamma = 0, \quad (3.5)$$

$$u_\alpha^{(1)} = \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_2}, \quad u_\alpha^{(2)} = -\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x_1}, \quad \eta_\alpha = \frac{\partial u_\alpha^{(2)}}{\partial x_1} - \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_2}. \quad (3.6)$$

Опишем кратко схему численного решения поставленной обратной задачи методом квазиобращения. Для решения возмущенной краевой задачи организуем итерационный процесс, в

котором это решение будет находиться установлением, т.е. в результате стабилизации этого итерационного процесса. Зададимся сначала некоторым начальным приближением для поля скоростей \mathbf{u}_α (например, положим $\mathbf{u}_\alpha = 0$). На каждой итерации при фиксированном α последовательно выполняются следующие два шага.

1. Находим температуру T_α в результате решения задачи (3.3), (3.4) при некотором уже известном приближении вектора скорости \mathbf{u}_α и подставляем T_α в задачу (3.5), (3.6).
2. Находим новое приближение вектора скорости \mathbf{u}_α в результате решения задачи (3.5), (3.6) при уже найденном на предыдущем шаге приближении температуры T_α .

В итерационном процессе последовательно выполняются шаги 1 и 2. Вычисления завершаются при установлении организованного итерационного процесса. След $T_\alpha(\cdot, 0)$ компоненты T_α установившегося решения принимается за приближение к искомому граничному режиму.

Перейдем к рассмотрению разностных схем для расчета задачи. Как и в градиентном методе, задача (1.1), (1.2), (1.4) сводится к задаче (3.5), (3.6) и для ее численного решения используется аналогичная разностная схема. Для аппроксимации одномерного оператора конвекции-диффузии в правой части уравнения (3.3) применим регуляризованную безусловно монотонную разностную схему второго порядка аппроксимации с направленными разностями [11]

$$b(x)y_x - (1 + R + |\xi(x)|)y_{\bar{x}x} = 0,$$

где

$$b(x) = b^+(x) + b^-(x), \quad b^+(x) = \frac{1}{2}(b(x) + |b(x)|), \quad b^-(x) = \frac{1}{2}(b(x) - |b(x)|),$$

$$\xi(x) = \frac{b(x)h}{2}, \quad 1 + R = \frac{1}{1 + |\xi(x)|}.$$

Приведем итоговую конечно-разностную аппроксимацию уравнения (3.3) (для сокращения записи опустим индекс α у T и \mathbf{u})

$$\begin{aligned} & \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{\tau^2} + u_{i,j}^{(2)} \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\tau} - \frac{\alpha}{\tau^2 h^2} (T_{i-1,j-1} - 2T_{i,j-1} + T_{i+1,j-1}) \\ & + \frac{2\alpha}{\tau^2 h^2} (T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}) - \frac{\alpha}{\tau^2 h^2} (T_{i-1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1}) \\ & = - \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{(1 + 0.5|u_{i,j}^{(1)}|h)h^2} + \frac{|u_{i,j}^{(1)}|}{h} T_{i,j} + \frac{u_{i,j}^{(1)} - |u_{i,j}^{(1)}|}{2h} T_{i+1,j} - \frac{u_{i,j}^{(1)} + |u_{i,j}^{(1)}|}{2h} T_{i-1,j}, \\ & i = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Для определения значений искомой функции при $j \in \{0, 1\}$ и при $i \in \{0, n\}$ используется аппроксимация граничных условий (3.4).

Параметр регуляризации α должен согласовываться с погрешностью входных данных и величинами шагов разбиений τ (отрезка $[0, \vartheta]$) и h (отрезка $[0, l]$). Чем меньше погрешность, тем меньше берется параметр регуляризации. Однако, параметр регуляризации нельзя брать слишком малым, т.к. при его уменьшении растет погрешность и проявляется некорректность задачи. Таким образом, нужно так выбирать параметр регуляризации, чтобы погрешность приближенного решения была минимальна. Существуют разные способы выбора параметра регуляризации. Например, хорошо зарекомендовал себя метод невязки [12], в котором используется заданная точность вычислительного эксперимента. Однако, оценки погрешности задания входных данных обычно не известны. Поэтому на практике часто пользуются нахождением квазиоптимального значения параметра регуляризации [12], которое напрямую не связано с уровнем погрешности. Для этого организуется последовательность

$$\alpha_k = \alpha_0 q^k, \quad 0 < q < 1, \quad k = \overline{0, M},$$

и для нахождения приемлемого значения параметра регуляризации минимизируется норма

$$\|v_{\alpha_{k+1}} - v_{\alpha_k}\|_{L_2(0,1)} \rightarrow \min : k = \overline{0, M}, \quad v_\alpha = T_\alpha(\cdot, 0).$$

Результаты численного моделирования приведены ниже.

4. Результаты расчетов модельных примеров

В качестве модельных примеров рассмотрим три обратные задачи реконструкции граничных режимов с функциями v разных степеней гладкости на нижней границе квадрата $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Дополнительную информацию на верхней границе области определим из решения соответствующих прямых задач. При расчете выбиралась сетка 51×51 узлов и фиксировались параметры $\mu = 10^5$, $\text{Ra} = 1$. На верхней границе области использовалось условие $w = 0$. Итак, решалась обратная граничная задача (1.1)–(1.7) с указанными параметрами, в которой необходимо было восстановить один из следующих граничных режимов:

1) гладкий режим $v^{(1)} = v^{(1)}(x_1) = \cos(2\pi x_1)$;

2) кусочно-гладкий режим $v^{(2)} = v^{(2)}(x_1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_1 \leq 0.25, \\ 4(x_1 - 0.25), & 0.25 \leq x_1 \leq 0.5, \\ 4(0.75 - x_1), & 0.5 \leq x_1 \leq 0.75, \\ 0, & 0.75 \leq x_1 \leq 1; \end{cases}$

3) разрывный режим $v^{(3)} = v^{(3)}(x_1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x_1 \leq 0.25, \\ 1, & 0.25 \leq x_1 \leq 0.75, \\ 0, & 0.75 \leq x_1 \leq 1. \end{cases}$

На рис. 1–6 приведены результаты восстановления указанных выше граничных режимов вариационным методом и методом квазиобращения. Помимо отображения нескольких приближений к точному решению здесь показана эволюция значений среднеквадратичной нормы разности точного и приближенного решений (сплошная линия), а также значение среднеквадратичной нормы разности соседних приближений (пунктирная линия) в случае метода квазиобращения. При формировании последовательности $\{\alpha_k\}$ для выбора параметра регуляризации в методе квазиобращения использовались параметры $\alpha_0 = 0.01$, $q = 0.75$, $M = 10$.

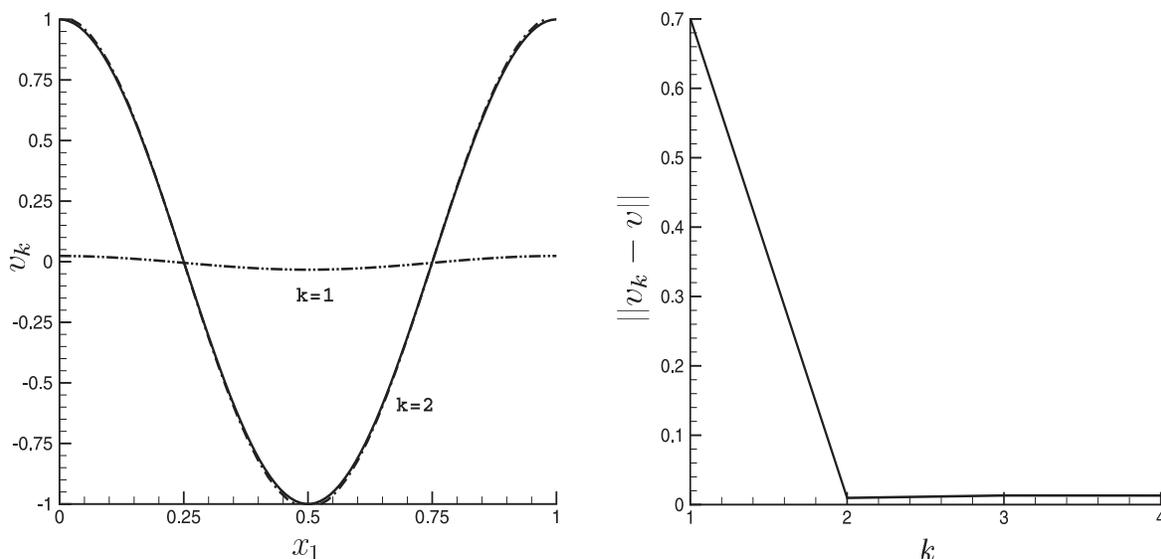


Рис. 1. Восстановление гладкого граничного режима вариационным методом.

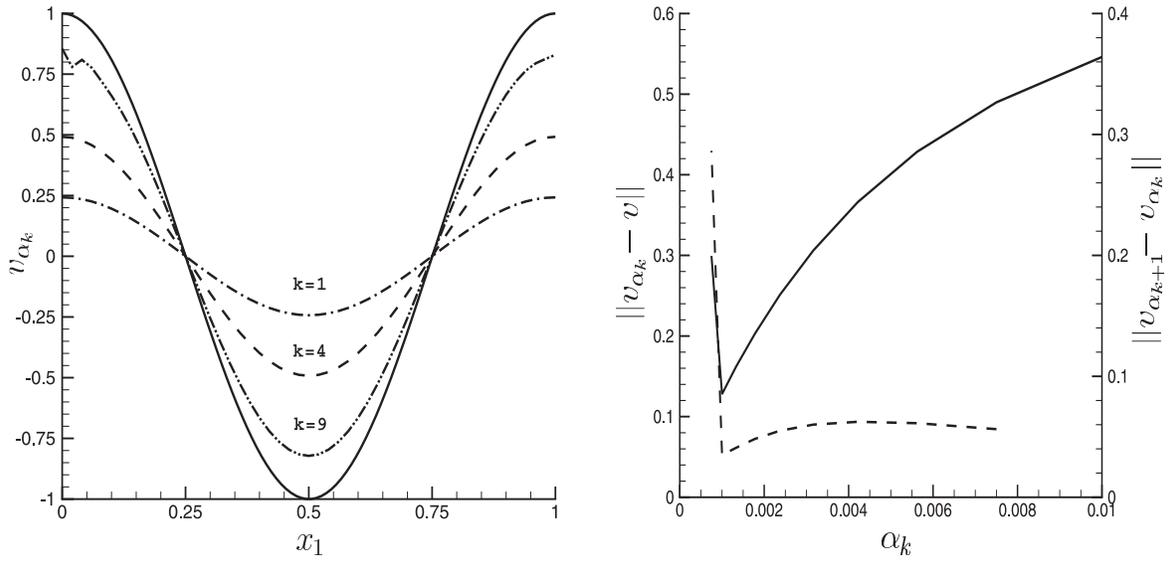


Рис. 2. Восстановление гладкого граничного режима методом квазиобращения.

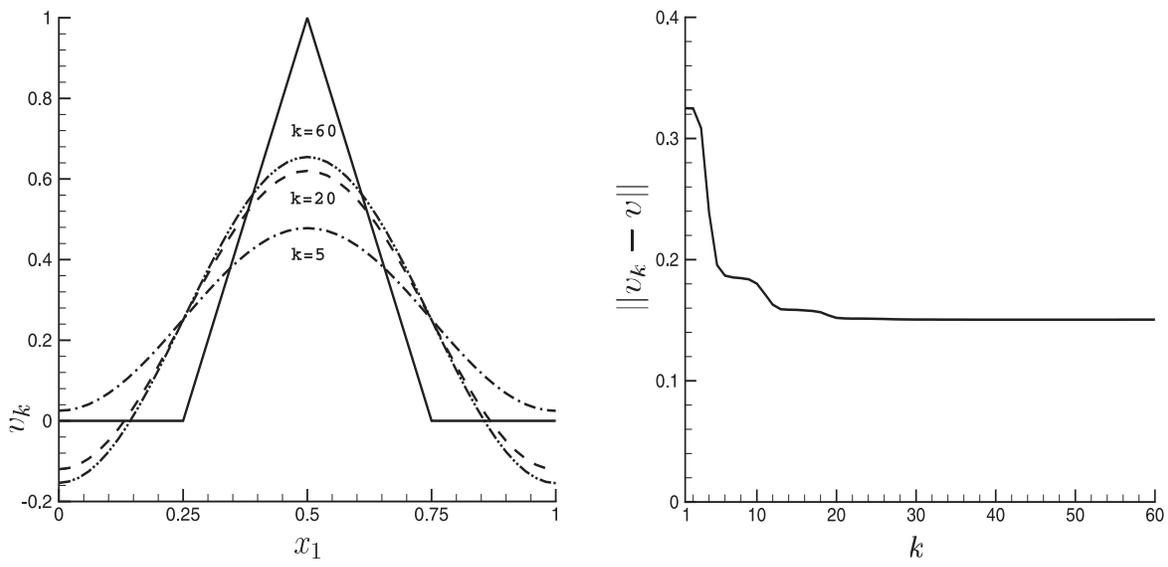


Рис. 3. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима вариационным методом.

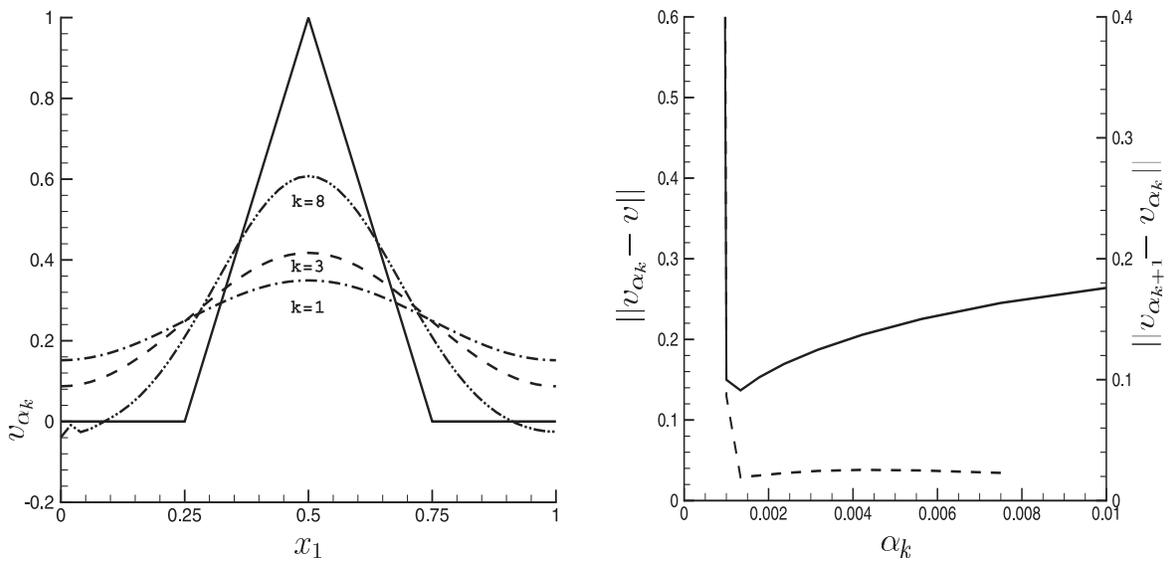


Рис. 4. Восстановление кусочно-гладкого граничного режима методом квазиобращения.

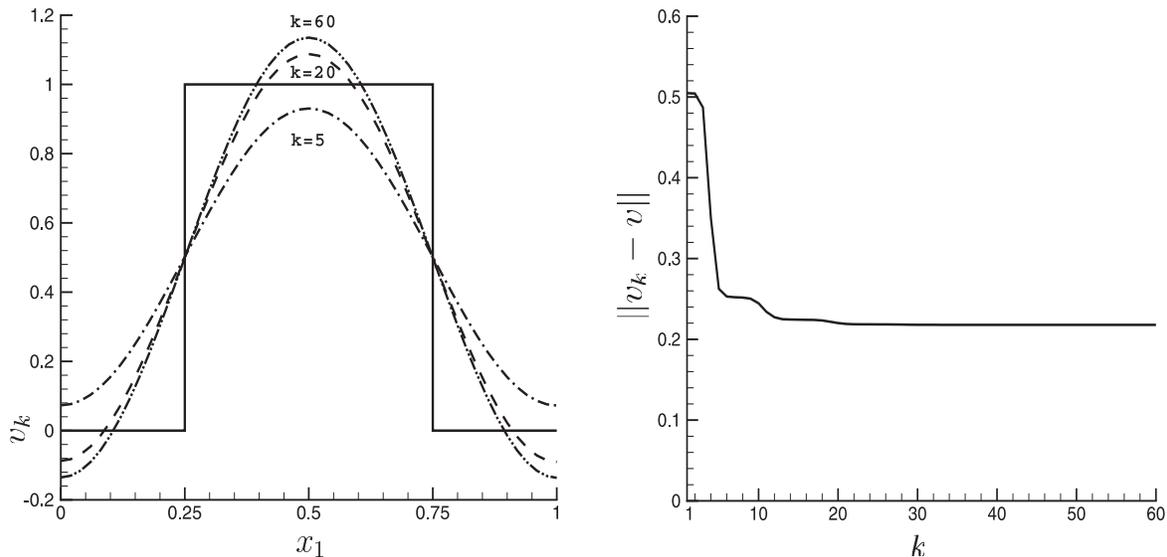


Рис. 5. Восстановление разрывного граничного режима вариационным методом.

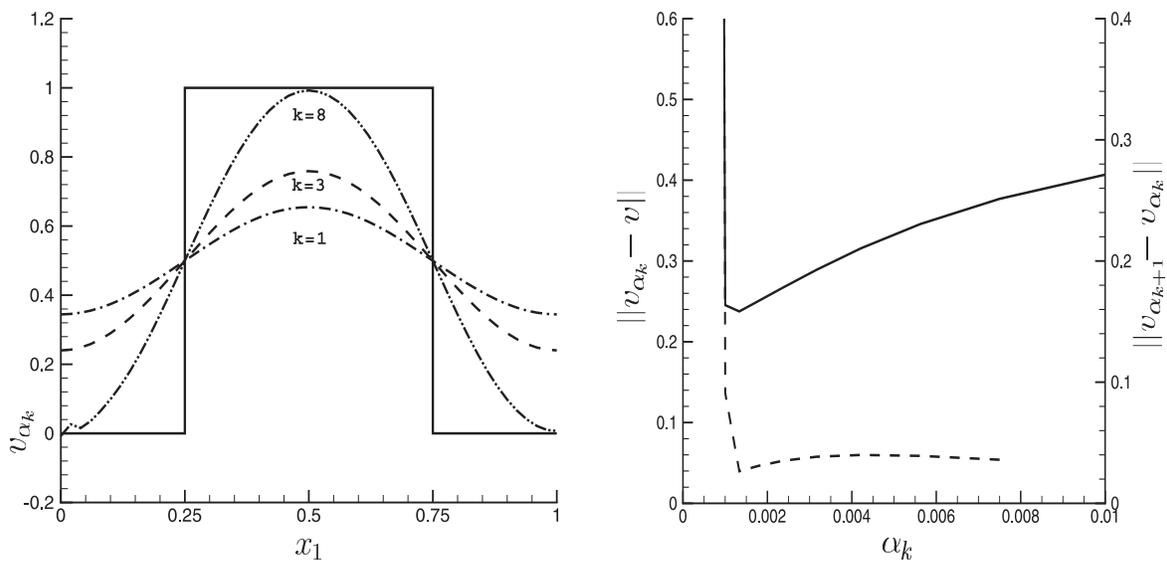


Рис. 6. Восстановление разрывного граничного режима методом квазиобращения.

Приведенные результаты показывают применимость выбранных методов для численного решения поставленной обратной задачи. В случае восстановления гладкого граничного режима (рис. 1–2) вариационный метод дает более точное решение, чем метод квазиобращения. В случае восстановления кусочно-гладкого и разрывного режимов (рис. 3–6) оба метода дают схожие результаты, но при этом вариационный метод сходится медленно. Отметим, что оба метода использовались при одинаковых входных данных. Что касается вычислительных затрат, то метод квазиобращения требует гораздо меньших вычислительных мощностей, чем вариационный метод, в котором на каждом шаге нужно решать сопряженную задачу для определения градиента минимизируемого функционала, а затем решать серию прямых задач для определения оптимального шага спуска. Вычислительные затраты в методе квазиобращения напрямую зависят от количества M перебираемых значений параметра регуляризации.

Заключение

В работе численно решалась задача восстановления тепловых граничных режимов на одной из частей границы области, в которой движется высоковязкая теплопроводная жидкость, по дополнительной информации на другой части границы этой области. Эта задача решалась вариационным методом и методом квазиобращения. Результаты расчетов модельных примеров показывают, что выбранные методы обладают устойчивостью и некоторой «сходимостью». Вариационный метод показывает хорошую сходимость и точность при восстановлении гладких граничных режимов. Метод квазиобращения дает схожие с вариационным методом результаты как в случае восстановления гладких граничных режимов, так и в случае восстановления кусочно-гладких и разрывных граничных режимов, но гораздо менее требователен к вычислительным ресурсам. В [20, 21] разрабатывались методы решения обратных ретроспективных задач для моделей высоковязкой жидкости и рассматривались некоторые геофизические приложения.

Поступила 30.05.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
2. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
3. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
4. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.
5. **Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во МГУ, 1999.
6. **Романов В.Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
7. **Романов В.Г., Кабанихин С.И.** Обратные задачи геоэлектрики. М.: Наука, 1991.
8. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988.
9. **Денисов А.М.** Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
10. **Prilepko F.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.** Methods for solving inverse problems in mathematical physics // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 1994. V. 231.
11. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003.
12. **Самарский А.А., Вабищевич П.Н.** Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
13. **Латгес Р., Лионс Ж.-Л.** Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
14. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
15. **Сea Ж.** Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.
16. **Полак Э.** Численные методы оптимизации. Общий подход. М.: Мир, 1974.
17. **Короткий А.И., Ковтунов Д.А.** Реконструкция граничных режимов // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби (CGS'2005): Тр. Междунар. семинара, посвященного 60-летию академика А.И. Субботина. Екатеринбург: УрО РАН, 2006. Т. 2. С. 76–85.
18. **Булеев Н.И.** Пространственная модель турбулентного обмена. М.: Наука, 1989.
19. **Weinan E., Liu J.-G.** Vorticity boundary condition and related issues for finite difference schemes // J. Computational Physics. 1996. No. 124. P. 368–382.
20. **Ismail-Zadeh A.T., Schubert G., Tsepelev I.A., Korotkii A.I.** Inverse problem of thermal convection: numerical approach and application to mantle plume restoration // Physics of the Earth and Planetary Interiors. 2004. V. 145. P. 99–114.
21. **Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Talbot C., Korotkii A.** Three-dimensional forward and backward modelling of diapirism: Numerical approach and its applicability to the evolution of salt structures in the Pricaspian basin // Tectonophysics. 2004. V. 387, no. 1-4. P. 81–103.

УДК 519.8

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ И СИНТЕЗ УСТОЙЧИВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ОДНИМ КЛАССОМ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В. М. Кунцевич

На основе сформулированного в работе достаточного условия устойчивости линейных нестационарных дискретных систем проведен анализ устойчивости специального класса дискретных систем с нестационарной линейной частью, для параметров которой заданы их множественные оценки, и со скалярной нелинейной функцией, удовлетворяющей линейным или нелинейным ограничениям. Для этого же класса объектов решена задача параметрического синтеза робастно устойчивых систем управления. Полученные результаты обобщены на класс нестационарных систем с многими нелинейностями того же типа.

Введение

Более полувека тому назад была опубликована ставшая очень скоро классической работа А.И. Лурье и В.Н. Постникова [1], посвященная анализу устойчивости системы, состоящей из линейной части и нелинейности, удовлетворяющей линейным ограничениям. Впоследствии эта работа вызвала огромный поток публикаций, среди которых в первую очередь следует отметить работы М.А. Айзермана и Ф.Р. Гантмахера, а также работы В.А. Якубовича и Р. Калмана. Следующим серьезным толчком в развитии исследований этого класса нелинейных систем, послужила работа В.М. Попова, автора ставшего широко известным частотного критерия абсолютной устойчивости. Я.З. Цыпкиным был предложен дискретный аналог этого критерия для анализа устойчивости дискретных систем этого класса, а Е. Джури был проведен анализ дискретных систем с многими нелинейностями этого же класса.

Во всех упомянутых выше работах и последовавших за ними многочисленных публикациях, развивавших и углублявших исследование устойчивости этого класса нелинейных систем, линейная часть системы принималась стационарной. В настоящей работе проанализирована устойчивость этого же класса дискретных систем, состоящих из линейной части и нелинейного элемента, но линейная часть принимается нестационарной. Кроме задачи анализа устойчивости этого класса систем, рассмотрена также и задача параметрического синтеза робастно устойчивых систем управления такими объектами.

1. Достаточные условия устойчивости нелинейных нестационарных систем с линейными ограничениями

Рассмотрим сначала простейший класс нестационарных систем со скалярной нелинейной функцией

$$X_{n+1} = A(n)X_n + B(n)\varphi(\sigma_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1)$$

где $\sigma_n = C^T X_n$, $C \in \mathbb{R}^m$ — заданный вектор, $X_n \in \mathbb{R}^m$.

Здесь $(m \times m)$ -матрица $A(n)$ и вектор $B(n) \in \mathbb{R}^m$ имеют каноническую структуру:

$$A(n) = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & \mathbf{I} \\ 0 & \\ \hline & A_m^T(n) \end{array} \right\|; \quad B(n) = b(n) \overset{*}{B}; \quad \overset{*}{B} = \left\| \begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline 1 \end{array} \right\|; \quad (1.2)$$

$\varphi(\sigma_n)$ — скалярная однозначная непрерывная функция, удовлетворяющая линейным ограничениям, которые для краткости запишем в виде

$$\underline{k} |\sigma| \leq |\varphi(\sigma)| \leq \bar{k} \sigma, \quad (1.3)$$

где $\underline{k} > 0$ и $\bar{k} > \underline{k}$ — заданные числа.

Для вектора $A_m(n)$ и скаляра $b(n)$ заданы их множественные оценки

$$A_m(n) \in \mathbf{A}, \quad b(n) \in \mathbf{b}, \quad n \in [0; \infty),$$

где \mathbf{A} и \mathbf{b} — выпуклые множества.

Из очевидных соображений принимаем, что $0 \notin \mathbf{b}$.

Требуется определить соотношения между характеристиками множеств \mathbf{A} и \mathbf{b} и числами \underline{k} , \bar{k} , при которых класс систем (1.1)–(1.3) асимптотически устойчив.

Введем обозначение

$$H(n, k) = A(n) + k B(n) C^T \quad (1.4)$$

и перепишем уравнение (1.1) в виде

$$X_{n+1} = H(n, k) X_n, \quad \text{где } \underline{k} \leq k \leq \bar{k}. \quad (1.5)$$

Под нормой матрицы A будем понимать $\|A\| = \max_{i=1; \overline{m}} \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$, а под нормой вектора (столбца или строки) — сумму модулей его компонент.

Из структуры матрицы Фробениуса $H(n, k)$ следует, что если для ее m -й строки $H_m(n, k) = A_m(n) + k b(n) C$ ($\|H_m(n, k)\| = \sum_{j=1}^m |h_{mj}(n, k)|$) справедливы неравенства

$$\max_{\underline{k} \leq k \leq \bar{k}} \{ \|H_m(n, k)\| \} \leq q < 1, \quad n \in [0; \infty), \quad (1.6)$$

то, на первый взгляд, кажется, что даже в этом случае о достаточных условиях асимптотической устойчивости системы (1.5) не может быть и речи, поскольку при этом $\|H(n, k)\| = 1$. Однако более глубокий анализ показывает, что такой вывод был бы поспешным. Ниже будет показано, что неравенство (1.6) является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (1.5). Для этого приведем сначала вспомогательное утверждение, которое мы сформулируем в более общей форме, чем в [4].

Лемма 1. *Норма матрицы*

$$P_m = A(L_m) A(L_{m-1}) \cdots A(L_1),$$

равной произведению квадратных $(m \times m)$ -матриц Фробениуса, имеющих структуру вида (1.2) и зависящих от параметров L_k ($k = \overline{1; m}$) таких, что для m -й строки $A_m(L_k)$ матрицы $A(L_k)$ справедливы соотношения

$$\|A_m(L_k)\| = \sum_{j=1}^m |a_{mj}(L_k)| \leq q < 1 \quad \forall k = \overline{1; m},$$

удовлетворяет неравенству

$$\|P_m\| \leq q. \quad (1.7)$$

Покажем, что необходимое условие справедливости неравенства (1.7), а именно, что ни один из элементов $p_{ij}^{(m)}$ ($i, j = \overline{1; m}$) матрицы $P_m(\cdot)$ не равен тождественно единице, выполняется. Действительно, нетрудно убедиться в том, что из структуры матриц $A(L_1)$, $A(L_2)$ следует, что $(m-1)$ -я строка $P_{m-1}^{(2)}$ матрицы $P_2 = A(L_2)A(L_1)$ равна $P_{m-1}^{(2)} = A_m(L_1)$. Теперь, зная значение строки $P_{m-1}^{(2)}$, нетрудно проверить, что $(m-2)$ -я строка $P_{m-2}^{(3)}$ матрицы $P_3(L_1, L_2, L_3) = A(L_3)A(L_2)A(L_1)$ равна $P_{m-2}^{(3)}(L_1, L_2, L_3) = A_m(L_1)$. Продолжая эти вычисления, придем к тому, что ни один из элементов $p_{ij}^{(m)}$ матрицы $P_m(\cdot)$ не равен тождественно единице.

Получить достаточное условие выполнения неравенства (1.7) для матрицы P_m произвольной размерности в аналитической форме не представляется возможным. Для того, чтобы убедиться в том, что при выполнении неравенств (1.6) неравенство (1.7) имеет место, необходимо определение элементов $p_{ij}^{(m)}$ всех строк $P_k^{(m)}$ матрицы P_m . В [4] для значений $m = 3$ и $m = 4$ выписаны выражения для матриц P_3 и P_4 , из которых следует справедливость неравенства (1.7), а далее при $m > 4$ необходимо уже воспользоваться методом индукции.

Обозначим правую часть уравнения (1.5) через $F(X_n, n)$ и выберем функцию Ляпунова в виде $v_n = \|X_n\|$. Тогда, получим, что

$$v_{n+1} = \|X_{n+1}\| = F\|(X_n, n)\|. \quad (1.8)$$

Из (1.5) и (1.8) имеем

$$\|F(X_n, n)\| \leq \max_{\underline{k} \leq k \leq \bar{k}} \|H(n, k) X_n\| \leq \max_{\underline{k} \leq k \leq \bar{k}} \{ \|H(n, k)\| \|X_n\| \}, \quad (1.9)$$

откуда получаем, что

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = [\|H(n, k) - 1\|] \|X_n\|. \quad (1.10)$$

Для определения достаточных условий, при которых система (1.5) асимптотически устойчива, сформулируем, на основании леммы 1, в которой в качестве вектора параметров L_k в матрицах $A(L_k)$ могут выступать векторы состояния, дискретное время и т.п., следующее утверждение.

Теорема 1. *Неравенство (1.6) является достаточным условием асимптотической устойчивости системы (1.5).*

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Введем обозначение

$$w(n) = k b(n) \quad (1.11)$$

и перепишем (1.6) в виде¹

$$\max_{\substack{w(n) \in \mathbf{w} \\ A_m(n) \in \mathbf{A}}} \{ \psi(\cdot) = \|A_m(n) + w(n)C\| \}, \quad (1.12)$$

где

$$\mathbf{w} = \{ w(n) : \underline{w} \leq w(n) \leq \bar{w} \}, \quad \underline{w} = \underline{k} \underline{b}, \quad \bar{w} = \bar{k} \bar{b},$$

или

$$\mathbf{w} = \text{conv}_{\ell=1;2} \{ w_1 = \underline{w}; w_2 = \bar{w} \}.$$

¹Далее выражение вида $\{ \psi(\cdot) = \dots \}$ будет применяться также для обозначения других максимизируемых функций.

Рассмотрим подробнее решение задачи (1.12) для того случая, когда \mathbf{A} — выпуклый многогранник

$$\mathbf{A} = \operatorname{conv}_{s=1;S} \{A^{(s)}\},$$

где $A^{(s)}$ — вершина \mathbf{A} , а S — число этих вершин.

Так как функция $\psi(\cdot)$ выпуклая, то ее максимум достигается в одной из вершин множества $(\mathbf{A} \times \mathbf{w})$. Поэтому решение задачи (1.12) сводится к решению задачи

$$\max_{\substack{s=1;S \\ \ell=1;2}} \left\{ \psi(\cdot) = \|A^{(s)} + w_\ell C\| \right\} = \psi^*. \quad (1.13)$$

Принимая во внимание невысокую размерность этой оптимизационной задачи, ее решение целесообразно определить с помощью полного перебора всех вариантов.

Если множества \mathbf{A} , \mathbf{b} и \mathbf{k} таковы, что $\psi^* \leq q < 1$, то класс нелинейных нестационарных систем (1.5), (1.3) асимптотически устойчив.

Если выпуклый многогранник \mathbf{A} представить в центрированной форме

$$\mathbf{A} = \mathring{A} + \delta\mathbf{A}; \quad \delta\mathbf{A} = \operatorname{conv}_{s=1;S} \left\{ \Delta A^i = A^i - \mathring{A} \right\},$$

где \mathring{A} — центр сферы минимального радиуса, описанной вокруг \mathbf{A} ,² то определение величины ψ^* в задаче (1.13), а точнее, в общем случае ее оценки сверху, может быть осуществлено без численного решения задачи (1.13).

Действительно, введем обозначения

$$\begin{aligned} H_m \in \mathbf{H}_m = \mathring{H}_m + \delta\mathbf{H}_m, \quad \mathring{H}_m = \mathring{A} + \mathring{w}C; \quad \mathring{w} = 0.5(\bar{w} + \underline{w}); \\ \delta\mathbf{H}_m = \delta\mathbf{A} + \delta\mathbf{w}C = \operatorname{conv}_{\substack{i=1;m \\ s=1;2}} \left\{ \Delta H_m^{is} = H_m^i - \mathring{H}_m + \Delta w_s C \right\}, \end{aligned}$$

$$\Delta w = \bar{w} - \mathring{w}; \quad \Delta w_1 = \Delta \mathring{w}, \quad \Delta w_2 = -\Delta \mathring{w}.$$

Тогда из простых геометрических представлений следует, что

$$\max_{H_m \in \mathbf{H}_m} \|H_m\| = \|\mathring{H}_m\| + \rho_A + \mathring{w}\|C\| = \bar{\psi} \geq \psi^*, \quad (1.14)$$

где ρ_A — радиус множества \mathbf{A} , определяемый как

$$2\rho_A = \max_{A_m \in \mathbf{A}} \|A\|.$$

В том частном случае, когда векторы \mathring{A} и C коллинеарны и один из векторов $\Delta H_m^{(is)}$ коллинеарен вектору \mathring{H}_m , мы имеем $\bar{\psi} = \psi^*$.

Рассмотренный выше метод анализа устойчивости класса нестационарных систем с одной нелинейностью очевидным образом может быть обобщен на класс нестационарных систем со многими нелинейностями того же типа, описываемых разностным уравнением

$$X_{n+1} = A(n)X_n + B(n)\Phi(X_n), \quad (1.15)$$

²В [2] описан алгоритм определения \mathring{A} . В том частном случае, когда \mathbf{A} — интервальное множество, определение вектора \mathring{A} тривиально.

где $X_n \in \mathbb{R}^m$; $A(n)$ и $B(n) — (m \times m)$ -матрицы общего вида, элементы которых $a_{ij}(n)$ и $b_{de}(n) —$ функции времени; $\Phi(X_n) — m$ -мерная нелинейная вектор-функция, i -й элемент которой $\varphi_i(\sigma_{in})$ удовлетворяет как наложенным выше на функцию $\varphi(\sigma)$ общим ограничениям, так и линейным ограничениям

$$\underline{k}_i \leq \varphi_i(\sigma_i) \leq \bar{k}_i; \quad \sigma_i = C_i^\top X; \quad i = \overline{1; m}.$$

Здесь $\underline{k}_i > 0$, $\bar{k}_i > \underline{k}_i —$ заданные числа, $C_i —$ заданные m -мерные векторы, а для i -й строки $A_i(n)$ матрицы $A(n)$ и d -й строки $B_d(n)$ матрицы $B(n)$ заданы их множественные оценки

$$A_i(n) \in \mathbf{A}_i; \quad \forall n \in [0; \infty); \quad i = \overline{1; m};$$

$$B_d(n) \in \mathbf{B}_d; \quad \forall n \in [0; \infty); \quad d = \overline{1; m}.$$

2. Синтез робастно устойчивых систем управления нелинейными нестационарными объектами с линейными ограничениями

Задан класс в общем случае неустойчивых нестационарных линейных объектов, описываемых векторно-матричным уравнением

$$X_{n+1} = A(n)X_n + B(n)v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где $A(n)$ и X_n имеют тот же смысл, что и выше, $B(n) —$ вектор, а $v_n —$ скалярная переменная.

Как и выше, примем, что матрица $A(n)$ и вектор $B(n)$ имеют канонические структуры (1.2) и для m -й строки $A_m(n)$ матрицы $A(n)$ и скаляра $b(n)$ заданы их множественные оценки $A_m(n) \in \mathbf{A}$, $b(n) \in \mathbf{b}$, $n \in [0; \infty)$.

Примем, что вектор состояния X_n измеряется полностью и без помех и что управление объектами заданного класса осуществляется с помощью линейной обратной связи

$$u_n = C^\top X_n, \quad (2.2)$$

где вектор C подлежит определению.

Управление u_n передается непосредственно на вход объекта управления через нелинейный усилитель мощности, описываемый уравнением

$$v_n = \xi(u_n). \quad (2.3)$$

Не вводя в рассмотрение неизбежного в реальных условиях “насыщения” в характеристике усилителя (2.3), примем, что в некоторой ограниченной области Ω фазового пространства системы (2.1) нелинейная функция $\xi(C^\top X_n)$ удовлетворяет линейным ограничениям, аналогичным (1.3), т.е.

$$\underline{k}(C^\top X_n) \leq \xi(C^\top X_n) \leq \bar{k}(C^\top X_n), \quad \text{где } \underline{k} > 0 \text{ и } \bar{k} > \underline{k} — \text{ заданные числа.} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2), (2.3) в (2.1), получим уравнение замкнутой системы

$$X_{n+1} = A(n)X_n + B(n)\xi(C^\top X_n). \quad (2.5)$$

Поставим целью определение такого вектора C в уравнении обратной связи (2.2), который обеспечивает робастную устойчивость классу систем (2.4), (2.5), если это возможно для заданных множественных оценок \mathbf{A} и \mathbf{b} .

С учетом отличия в обозначениях между уравнениями (1.1) и (2.5) запишем неравенство, аналогичное неравенству (1.9):

$$\begin{aligned} \|A(n)X_n + B(n)\xi(C^\top X_n)\| &\leq \max_{\underline{k} \leq k \leq \bar{k}} \|[A(n) + kB(n)C^\top]X_n\| \\ &\leq \max_{\underline{k} \leq k \leq \bar{k}} \{\|A(n) + kB(n)C^\top\| \|X_n\|\}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Вектор C будем искать как решение очевидного обобщения задачи (1.12)

$$\min_C \max_{\substack{k \in \mathbf{k}, b(n) \in \mathbf{b} \\ A_m(n) \in \mathbf{A}}} \{\psi(\cdot) = \|A_m(n) + kb(n)C\|\}. \quad (2.7)$$

Для определения $C^* = \arg \min \max \psi(\cdot)$ запишем множества \mathbf{A} , \mathbf{b} в центрированной форме

$$\mathbf{A} = \mathring{A}_m + \delta \mathbf{A}; \quad \delta \mathbf{A} = \text{conv}_{S=\bar{1}; \bar{S}} \left\{ \Delta A^{(s)} = A^{(s)} - \mathring{A} \right\},$$

где \mathring{A}_m — центр сферы минимального радиуса, описанной вокруг \mathbf{A} ,

$$\mathbf{b} = \mathring{b} + \delta \mathbf{b}; \quad \mathring{b} = 0.5(\bar{b} + \underline{b}); \quad \delta \mathbf{b} = \left\{ \Delta b : |\Delta b| \leq (\bar{b} - \mathring{b}) \right\}.$$

Приняв во внимание эти обозначения, а также обозначение (1.11), перепишем (2.7) в виде

$$\min_C \max_{\substack{\Delta w \in \delta \mathbf{w} \\ \Delta A_m(n) \in \delta \mathbf{A}}} \left\| \mathring{A}_m + \Delta A_m + (\mathring{w} + \Delta w)C \right\|, \quad (2.8)$$

где

$$\mathbf{w} = \mathring{w} + \delta \mathbf{w}; \quad \mathring{w} = 0.5(\bar{w} + \underline{w}); \quad \delta \mathbf{w} = \left\{ \Delta w : |\Delta w| \leq (\bar{w} - \mathring{w}) \right\}. \quad (2.9)$$

Решение задачи (2.8) с точностью до обозначений совпадает с решением задачи, рассмотренной в [3], где сформулировано утверждение, которое для удобства читателя приведем здесь полностью.

Теорема 2. *Решением задачи (2.8) является вектор*

$$C^* = \arg \min \max \psi(\cdot) = -\frac{1}{\mathring{w}} \mathring{A}_m. \quad (2.10)$$

Заметим, что теорема 2 легко доказывается от противного.

Подставим (2.10) в (2.8) и определим величину

$$\psi^* = \max_{\substack{\Delta A_m(n) \in \delta \mathbf{A} \\ \Delta w \in \delta \mathbf{w}}} \left\{ \psi(\cdot) = \|\Delta A_m - \Delta w \mathring{w}^{-1} \mathring{A}_m\| \right\}. \quad (2.11)$$

Поскольку функция $\psi(\cdot)$ выпукла, ее максимум достигается на границах множеств $\delta \mathbf{A}_m$ и $\delta \mathbf{w}$. Из (2.11) следует, что $\Delta \mathring{A}_m^* = \arg \max \psi(\cdot)$ есть вектор, коллинеарный вектору \mathring{A}_m , т.е. $\Delta \mathring{A}_m^* = \alpha \mathring{A}_m$. Следовательно, $\Delta \mathring{A}_m^* = \rho_{\mathbf{A}} \mathring{A}_m$, где $\mathring{A}_m = \left\| \mathring{A}_m \right\|^{-1} \cdot \mathring{A}_m$, а $\rho_{\mathbf{A}}$ — радиус множества \mathbf{A} .

Из сказанного и из (2.11) следует, что $\Delta w^* = \arg \max \psi(\cdot) = -(\bar{w} - \mathring{w})$. Подставив полученные значения $\Delta \mathring{A}_m^*$ и Δw^* в (2.11), находим

$$\psi^* = \left\| \left[\rho_{\mathbf{A}} \frac{1}{\left\| \mathring{A}_m \right\|} + \frac{(\bar{w} - \mathring{w})}{0.5(\bar{w} + \underline{w})} \right] \mathring{A}_m \right\| = \left(\frac{\rho_{\mathbf{A}}}{\left\| \mathring{A}_m \right\|} + \frac{(\bar{w} - \underline{w})}{(\bar{w} + \underline{w})} \right) \left\| \mathring{A}_m \right\|.$$

Если $\psi^* \leq q < 1$, то класс систем (2.5), (2.4) при $C = C^*$ асимптотически устойчив.

3. Анализ устойчивости нелинейных нестационарных систем с нелинейными ограничениями

Рассмотрим тот же класс нелинейных нестационарных систем (1.1), (1.2), но с нелинейной функцией $\varphi(\sigma_n)$, удовлетворяющей нелинейным ограничениям

$$\underline{k} |\tilde{\varphi}(\sigma)| \leq |\varphi(\sigma)| \leq \bar{k} |\tilde{\varphi}(\sigma)|, \quad (3.1)$$

где $\tilde{\varphi}(\sigma)$ — заданная нелинейная однозначная монотонная функция такая, что $\tilde{\varphi}(0) = 0$; $\underline{k} > 0$, $\bar{k} > \underline{k}$ — заданные числа.

Из (1.1), (1.2) и (3.1) следует, что m -я строка нелинейной вектор-функции $F(X_n, n)$ имеет вид

$$f_m(X_n, n) = A_m(n) + b(n) \varphi(C^\top X_n) C. \quad (3.2)$$

Умножив и разделив второе слагаемое в (3.2) на величину $\sigma_n = C^\top X_n$, запишем уравнение (1.1) в квазилинейной форме

$$X_{n+1} = F(X_n, n, k) = H(X_n, n, k) X_n, \quad (3.3)$$

где

$$H(X_n, n, k) = \left\| \begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{I} \\ \vdots & \\ 0 & \\ \hline & H_m^\top(X_n, n, k) \end{array} \right\|, \quad (3.4)$$

$$H_m(X_n, n, k) = A_m(n) + k b(n) \xi(C^\top X_n) C, \quad \xi(\sigma) = \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma}. \quad (3.5)$$

Для анализа устойчивости класса систем (3.3)–(3.5), (3.1), (1.4) нам понадобится очевидное обобщение леммы 1.

Лемма 2. Для последовательности матриц Фробениуса $H(X_n, n, k)$ размерности $m \times m$ с коэффициентами, удовлетворяющими неравенствам

$$\max_{\substack{\underline{k} \leq k \leq \bar{k}, A_m \in \mathbf{A}, \\ b_n \in \mathbf{b}, X_n \in \Omega}} \left\| H_m(X_n, n, k) = A_m(n) + k b(n) \xi(C^\top X_n) C \right\| \leq q < 1 \quad \forall n \in [0, \infty), \quad (3.6)$$

где $X_n \in \Omega \subset \mathbb{R}^m$ — заданная область функционирования системы, и для матрицы $\mathbf{H}_m(\cdot)$, равной

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_m \left[\tilde{\mathbf{X}}_{n,m}, A_m(n), b(n), k \right] &= \\ &= H(X_{n+m}, n+m, k) H(X_{n+m-1}, n+m-1, k) \dots H(X_n, n, k), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$\tilde{\mathbf{X}}_{n,m}^\top = (X_n^\top, X_{n+1}^\top, \dots, X_{n+m}^\top),$$

справедливо неравенство

$$\max_{\substack{\underline{k} \leq k \leq \bar{k}, A_m(n) \in \mathbf{A} \\ b(n) \in \mathbf{b}, \tilde{\mathbf{X}}_{n,m} \in \tilde{\Omega}}} \left\{ \left\| \mathbf{H}_m \left[\tilde{\mathbf{X}}_{n,m}, A_m(n), b(n), k \right] \right\| \right\} \leq q < 1 \quad \forall n \in [0, \infty). \quad (3.8)$$

Здесь $\tilde{\Omega} = \underbrace{\Omega \times \Omega \times \dots \times \Omega}_m$.

Теперь на основе леммы 2 сформулируем очевидное обобщение теоремы 1.

Теорема 3. *Класс дискретных систем (1.1), (1.2), (3.1) с матрицей Фробениуса $H(X_n, n, k)$ (3.5), элементы которой удовлетворяют неравенству (3.6), асимптотически устойчив в области Ω .*

Так как теорема 3 является формальным обобщением теоремы 1, то ее доказательство строится по той же схеме, что и для теоремы 1, и поэтому здесь не приводится. Сделаем лишь одно замечание. При выполнении условия (3.6) с учетом неравенств

$$\|F(X_n, n, k)\| \leq \max_{k \leq k \leq \bar{k}} \|H(X_n, n, k) X_n\| \leq \max_{k \leq k \leq \bar{k}} \|H(X_n, n, k)\| \cdot \|X_n\|$$

в силу того, что $\|H(X_n, n, k) X_n\| = 1$ и, следовательно, $\|X_{n+1}\| = \|X_n\|$, для $(n+1)$ -го шага неравенство, аналогичное (3.6), также имеет место. Сказанное остается справедливым и для всех X_{n+k} , где $1 \leq k \leq m$.

С учетом введенного выше обозначения (1.11) перепишем (3.6) в виде

$$\max_{\substack{w(n) \in \mathbf{w}, X_n \in \Omega \\ A_m(n) \in \mathbf{A}}} \left\{ \left\| A_m(n) + w(n) \xi(C^\top X_n) C \right\| \right\} \leq q < 1. \quad (3.9)$$

Если, как и выше, множество \mathbf{A} — выпуклый многогранник, то решение задачи (3.9) строится по той же схеме, что и решение задачи (1.13), за исключением необходимости решения дополнительной задачи

$$\max_{X_n \in \mathbf{X}} \xi(C^\top X_n),$$

где функция $\xi(\cdot)$ определяется выражением (3.5).

Если свойства функции $\xi(\sigma) = \tilde{\varphi}(\sigma)/\sigma$ таковы, что

$$\max_{\sigma \in S} \xi(\sigma) \leq \rho < 1, \quad \text{где } S = \{\sigma : |\sigma| \leq r\}, \quad \sigma \in S,$$

то при определенном сочетании характеристик множеств \mathbf{A} , \mathbf{b} и \mathbf{k} класс систем (1.1), (1.2), (3.1) асимптотически устойчив в заданной области $\Omega = \{X : |\sigma| \leq r\}$, где $\sigma = C^\top X$.

Приложение: доказательство теоремы 1

Введем функцию Ляпунова

$$v_n = \|X_n\| \quad (\text{П.1})$$

и определим для системы (1.5) ее первую разность Δv_n :

$$\Delta v_n = v_{n+1} - v_n = \|X_{n+1}\| - \|X_n\| = \|H(n, k)X_n\| - \|X_n\| \leq [\|H(n, k) - 1\|] \|X_n\|. \quad (\text{П.2})$$

Так как при выполнении условия (1.6) $\|H(n, k)\| = 1$, то из (П.2) получаем, что $\Delta v_n = 0$, и, следовательно, система (1.5) устойчива по Ляпунову. Для доказательства справедливости теоремы 1 из последовательности

$$\|X_n\|, \|X_{n+1}\|, \dots, \|X_{n+m}\|, \|X_{n+m+1}\|, \dots, \|X_{n+2m}\|, \|X_{n+2m+1}\| \quad (\text{П.3})$$

выделим подпоследовательность

$$\|X_n\|, \|X_{n+m}\|, \|X_{n+2m}\|, \dots, \quad (\text{П.4})$$

динамика которой в силу (1.5) описывается уравнением

$$X_{n+m} = \mathbf{H}_m(\cdot)X_n, \quad (\text{П.5})$$

где

$$\mathbf{H}_m(\cdot) = H(n+m-1, k) H(n+m-2, k) \cdots H(n, k).$$

Для системы (П.5) определим первую разность функции Ляпунова (П.1)

$$\delta v_{n+m} = v_{n+m} - v_n = \|X_{n+m}\| - \|X_n\| = \|\mathbf{H}_m(\cdot)X_n\| - \|X_n\| \leq [\|\mathbf{H}_m(\cdot)\| - 1] \|X_n\|. \quad (\text{П.6})$$

При выполнении неравенства (1.6) в силу того, что $\|H(n, k)\| = 1$, имеем

$$\|X_{n+1}\| = \|X_n\| \quad (\text{П.7})$$

и, следовательно, неравенство, аналогичное неравенству (1.6), в силу (П.7) остается справедливым и для $(n+1)$ -го шага.

Сказанное остается справедливым и для любого $(n+k)$ -го шага, где $1 \leq k \leq m-1$, так как имеют место равенства

$$\|X_{n+k}\| = \|X_n\| \quad \text{при} \quad 1 \leq k \leq m-1. \quad (\text{П.8})$$

Поскольку условия леммы 1 выполняются, то из нее получаем, что для нормы матриц $\mathbf{H}_m(\cdot)$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{H}_m(\cdot)\| \leq q < 1 \quad \forall n \in [0; \infty). \quad (\text{П.9})$$

Тогда из (П.6) и (П.9) получаем, что

$$\delta v_{n+m} < 0. \quad (\text{П.10})$$

Из (П.10) следует, что подпоследовательность (П.4) сходится к нулю, а из этого с учетом равенств (П.8) следует и сходимость последовательности (П.3), т.е. выполнение условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n\| = 0,$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Из (П.8) следует, что для последовательности величин $\|X_n\|$ строго монотонная сходимость не имеет места.

Заключение

Реализация предложенной вычислительной схемы анализа устойчивости класса нелинейных нестационарных систем не требует существенных вычислительных затрат. Сказанное остается справедливым и относительно решения задачи параметрического синтеза для класса систем с одной нелинейностью, так как на основании теоремы 2 решение соответствующей минимаксной задачи в конечном счете сводится к численному решению задачи максимизации невысокой размерности.

Иначе обстоит дело при решении задачи параметрического синтеза для класса нестационарных систем со многими нелинейностями, когда требуется определение матрицы обратной связи. Несмотря на то, что при этом общая схема решения задачи синтеза строится как естественное обобщение описанной схемы для случая с одной нелинейностью, тем не менее, вычислительные затраты, необходимые для определения численного решения соответствующих минимаксных задач, подобных задаче (2.8), существенно возрастают.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лурье А.И., Постников В.Н.** К теории устойчивости регулируемых систем. Прикл. математика и телемеханика. 1944. Т. VIII, вып. 3.
2. **Shor N.Z., Berezovski O.A.** New algorithms for constructing optimal circumscribed and inscribed ellipsoid // Optimization Methods and Software. 1992. V. I. P. 283–299.
3. **Kuntsevich V.M., Kuntsevich A.V.** Analysis and synthesis of optimal and robustly optimal control systems under bounded disturbances // Proc. of the 14th IFAC World Congress, Beijing, China, 1999. V. F: Nonlinear Systems. P. 163–168.
4. **Кунцевич В.М.** Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006. 260 с.

УДК 517.977

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
ДЛЯ НЕГЛАДКОГО ФУНКЦИОНАЛА ЦЕНЫ
В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМАМИ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ¹**

Н. Ю. Лукоянов

Для задачи управления в условиях помех системой с последствием получены функциональные дифференциальные неравенства, однозначно описывающие величину оптимального гарантированного результата. Приведена конкретизация данных неравенств в типичных частных случаях.

Введение

В этой статье для динамических систем с последствием, функционирующих в условиях неконтролируемых помех, в рамках подхода [1–5] рассматривается задача об оптимизации гарантированного результата выбором позиционной стратегии управления с памятью — функции истории движения. Качество процесса управления оценивается на конечном промежутке времени заданным показателем. Величина оптимального гарантированного результата управления в такой задаче является функционалом начальной истории движения. В теории дифференциальных игр его называют функционалом цены. В тех редких случаях, когда этот функционал обладает подходящими свойствами гладкости, например, оказывается коинвариантно гладким (*сi*-гладким) [6], он однозначно описывается при помощи соответствующего функционального уравнения типа Гамильтона — Якоби — Айзекса — Беллмана [7–10]. В общем случае функционал цены гладким не является, поэтому для описания его инфинитезимальных свойств требуется привлекать конструкции негладкого анализа [11–13].

Ниже рассматриваются так называемые производные функционалов истории движения по многозначным направлениям [14]. На их основе получены дифференциальные неравенства, описывающие функционал цены в терминах гамильтониана управляемой системы. В гладком случае эти неравенства обращаются в вышеупомянутое функциональное уравнение с *сi*-производными. В общем (негладком) случае они определяют функционал цены как минимаксное [15, 16] решение этого уравнения. Наиболее конструктивный характер данные неравенства принимают для кусочно *сi*-гладких функционалов, а также для огибающих семейств *сi*-гладких функционалов. В случае отсутствия последствия полученные неравенства аналогичны неравенствам, известным ранее [17] в теории управления обыкновенными дифференциальными системами для производных функции цены по направлениям.

Статья примыкает к работам [14, 16, 18] по развитию и приложению теории обобщенных решений [8, 15, 19] уравнений Гамильтона — Якоби для задач управления наследственными динамическими системами.

1. Принятые обозначения и определения

Пусть $t_*, T \in \mathbb{R}$, $t_* < T$ и C — пространство непрерывных n -мерных функций $x[\cdot] = \{x_1[\cdot], x_2[\cdot], \dots, x_n[\cdot]\} : [t_*, T] \mapsto \mathbb{R}^n$. Посредством $x[t]$ обозначаем значение функции $x[\cdot]$ в точке

¹Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-8512.2006.1) и гранта МД-6133.2006.1.

$t \in [t_*, T]$, посредством $x[\alpha[\cdot]\beta]$ — сужение этой функции на $[\alpha, \beta] \subset [t_*, T]$ (в частности, $x[\cdot] = x[t_*[\cdot]T]$, $x[t[\cdot]t] = x[t]$). Соответственно через $C_{[\alpha,\beta]}$ обозначаем множество непрерывных n -мерных функций, определенных на $[\alpha, \beta]$, и стало быть, $C_{[\alpha,\beta]} = \{x[\alpha[\cdot]\beta] \mid x[\cdot] \in C\}$.

Символом \mathcal{G} обозначаем множество всех возможных пар $g = (t, x[t_*[\cdot]t])$, где $t \in [t_*, T]$, $x[t_*[\cdot]t] \in C_{[t_*,t]}$. Метрику на \mathcal{G} определяем следующим образом:

$$\rho(g_1, g_2) = \max_{i=0,1} \rho^*(g_{i+1}, g_{2-i}), \quad g_1 = (t_1, x^{(1)}[t_*[\cdot]t_1]), \quad g_2 = (t_2, x^{(2)}[t_*[\cdot]t_2]),$$

$$\rho^*(g_{i+1}, g_{2-i}) = \max_{\xi \in [t_*, t_{i+1}]} \min_{\eta \in [t_*, t_{2-i}]} \left((\xi - \eta)^2 + \|x^{(i+1)}[\xi] - x^{(2-i)}[\eta]\|^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь и всюду ниже символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора. По своей сути величина $\rho(g_1, g_2)$ является хаусдорфовым расстоянием между графиками функций $x^{(1)}[t_*[\cdot]t_1]$ и $x^{(2)}[t_*[\cdot]t_2]$. Далее для $\alpha, \beta \in [t_*, T]$, $\alpha < \beta$, полагаем $\mathcal{G}_{[\alpha,\beta]} = \{g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G} : \alpha \leq t < \beta\}$. Для $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*,T]}$ через $\text{Lip}(g)$ обозначаем множество функций $y[\cdot] \in C$, каждая из которых совпадает с $x[t_*[\cdot]t]$ на $[t_*, t]$ и является липшицевой на $[t, T]$.

Рассмотрим отображение $\mathcal{G} \ni g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \mapsto \psi = \psi(g) = \psi(t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что функционал ψ *кусочно-непрерывен*, если существует лишь конечное число точек разрыва $t_i : t_1 = t_*$, $t_i < t_{i+1}$, $i = 1, \dots, m$, $t_{m+1} = T$, таких, что для любого $i = 1, \dots, m$ сужение ψ на множество $\mathcal{G}_{[t_i, t_{i+1}]}$ непрерывно. Функционал ψ называем [6, 10] *коинвариантно дифференцируемым* (*си-дифференцируемым*), если для любой пары $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*,T]}$ существуют $\partial_t \psi(g) \in \mathbb{R}$ и $\nabla \psi(g) \in \mathbb{R}^n$ такие, что при всех $y[\cdot] \in \text{Lip}(g)$ справедливо равенство

$$\psi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \psi(g) = \partial_t \psi(g) \delta + \langle \nabla \psi(g), y[t + \delta] - x[t] \rangle + o_{y[\cdot]}(\delta), \quad 0 < \delta \leq T - t,$$

где $o_{y[\cdot]}(\delta)$ зависит от выбора $y[\cdot] \in \text{Lip}(g)$, $o_{y[\cdot]}(\delta)/\delta \rightarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$. Здесь и ниже символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов. Величины $\partial_t \psi$ и $\nabla \psi = \{\nabla_1 \psi, \nabla_2 \psi, \dots, \nabla_n \psi\}$ называем соответственно *си-производной* по t и *си-градиентом* функционала ψ .

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{y}[\tau] = f(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u[\tau], v[\tau]), \quad t_* \leq t \leq \tau \leq T, \quad y[\tau] \in \mathbb{R}^n, \quad u[\tau] \in \mathbb{P}, \quad v[\tau] \in \mathbb{Q} \quad (2.1)$$

при начальном условии

$$y[t_*[\cdot]t] = x[t_*[\cdot]t] \in C_{[t_*,t]}. \quad (2.2)$$

Здесь τ — текущее время; $y[\tau]$ и $\dot{y}[\tau] = dy[\tau]/d\tau = \{y_1[\tau]/d\tau, y_2[\tau]/d\tau, \dots, y_n[\tau]/d\tau\}$ — значение фазового вектора и, соответственно, скорость его изменения в момент времени τ ; $y[t_*[\cdot]\tau]$ — история движения, сложившаяся к моменту времени τ ; $u[\tau]$ — текущее воздействие управления; $v[\tau]$ — воздействие неконтролируемой помехи; \mathbb{P} и \mathbb{Q} — компакты конечномерных арифметических пространств; t_* и T фиксированы, t — момент начала процесса управления; $x[t_*[\cdot]t]$ — начальная история. Допустимыми являются измеримые по Борелю реализации управления $u[\cdot] : [t, T] \mapsto \mathbb{P}$ и помехи $v[\cdot] : [t, T] \mapsto \mathbb{Q}$. Движение системы (2.1) при начальном условии (2.2) есть функция $y[\cdot] \in C$, совпадающая с $x[t_*[\cdot]t]$ на $[t_*, t]$, абсолютно непрерывная на $[t, T]$ и при почти всех $\tau \in [t, T]$ вместе с $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$ удовлетворяющая уравнению (2.1). При этом история движения $y[t_*[\cdot]\tau]$ — сужение этой функции на $[t_*, \tau]$.

Тройку $\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$ называем реализацией процесса управления. Качество реализации оценивается показателем

$$\gamma = \gamma(\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}) = \sigma(y[\cdot]) - \int_t^T h(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u[\tau], v[\tau]) d\tau. \quad (2.3)$$

Цель управления — доставить этому показателю как можно меньшее значение. Действия помехи непредсказуемы и могут быть самыми неблагоприятными.

Мы предполагаем, что

(F1) отображения $f : \mathcal{G} \times \mathbb{P} \times \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}^n$, $h : \mathcal{G} \times \mathbb{P} \times \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$ и $\sigma : C \mapsto \mathbb{R}$ непрерывны;

(F2) для любых $(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) \in \mathcal{G}$, $u \in \mathbb{P}$ и $v \in \mathbb{Q}$ имеет место оценка

$$\left(\|f(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v)\|^2 + h^2(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v) \right)^{1/2} \leq \Lambda(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) = \left(1 + \max_{t_* \leq \xi \leq \tau} \|y[\xi]\| \right) c.$$

Обозначим

$$Y = Y(t, x[t_*[\cdot]t]) = \left\{ y[\cdot] \in \text{Lip}(t, x[t_*[\cdot]t]) : \|\dot{y}[\tau]\| \leq \Lambda(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) \text{ п. в. на } [t, T] \right\}. \quad (2.4)$$

В силу условия (F2) для любой возможной реализации $\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$ справедливо включение $y[\cdot] \in Y$. Предполагаем далее выполненным следующее условие (см. [18]):

(F3) существует неотрицательный, непрерывный и ci -дифференцируемый функционал

$$\mathcal{G} \ni g = (\tau, w[t_*[\cdot]\tau]) \mapsto \nu_\varepsilon = \nu_\varepsilon(g) = \nu_\varepsilon(\tau, w[t_*[\cdot]\tau]) \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

такой, что

- ci -производная $\partial_\tau \nu_\varepsilon$ и компоненты $\nabla_i \nu_\varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ci -градиента $\nabla \nu_\varepsilon$ этого функционала кусочно-непрерывны;
- имеет место оценка $\nu_\varepsilon(\tau, w[t_*[\cdot]\tau] \equiv 0) \leq \varepsilon$;
- для любых $K, \mu > 0$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $y[\cdot], z[\cdot] \in Y$ из условия $\nu_\varepsilon(T, w[t_*[\cdot]T]) < K$, где $w[\cdot] = y[\cdot] - z[\cdot]$, вытекает неравенство $|\sigma(y[\cdot]) - \sigma(z[\cdot])| < \mu$;
- при любых $\tau \in [t_*, T)$, $y[\cdot], z[\cdot] \in Y$ справедливо неравенство

$$\partial_\tau \nu_\varepsilon(\tau, w[t_*[\cdot]\tau]) + H(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], \nabla \nu_\varepsilon(\tau, w[t_*[\cdot]\tau])) - H(\tau, z[t_*[\cdot]\tau], \nabla \nu_\varepsilon(\tau, w[t_*[\cdot]\tau])) \leq 0,$$

где $w[\cdot] = y[\cdot] - z[\cdot]$ и

$$H(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], s) = \min_{u \in \mathbb{P}} \max_{v \in \mathbb{Q}} \left[\langle s, f(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v) \rangle - h(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v) \right]. \quad (2.5)$$

Условия (F1), (F2) обеспечивают существование движения $y[\cdot]$ системы (2.1), (2.2) при любых допустимых реализациях $u[\cdot]$ и $v[\cdot]$. Условие (F3) выполняется (см. [18]), например, для липшицевых систем с распределенным последствием, а также для линейных систем с сосредоточенными запаздываниями.

Стратегию управления отождествим с произвольной функцией $U = U(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) \in \mathbb{P}$. Процесс управления на базе стратегии U осуществляется в дискретной по времени схеме. Выбирается разбиение отрезка времени $[t, T]$: $\Delta^u = \{\tau_i^u : \tau_1^u = t, \tau_{i+1}^u > \tau_i^u, i = 1, \dots, N, \tau_{N+1}^u = T\}$, и последовательно по шагам этого разбиения в цепи обратной связи формируется реализация управления

$$u[\tau] = U(\tau_i^u, y[t_*[\cdot]\tau_i^u]), \quad \tau_i^u \leq \tau < \tau_{i+1}^u, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.6)$$

Символом $S^*(t, x[t_*[\cdot]t], U, \Delta^u)$ обозначим множество всех возможных реализаций рассматриваемого процесса управления, которые отвечают выбранной стратегии U и разбиению Δ^u . Таким образом, это множество состоит из троек $\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$ таких, что $v[\cdot] : [t, T] \mapsto \mathbb{Q}$ — измеримая по Борелю функция, $u[\cdot]$ — кусочно-постоянная функция вида (2.6), $y[\cdot] : [t_*, T] \mapsto \mathbb{R}^n$

— удовлетворяющая условию (2.2) непрерывная функция, которая на $[t, T]$ абсолютно непрерывна и почти всюду вместе с $u[\cdot]$, $v[\cdot]$ удовлетворяет уравнению (2.1).

Следуя принципу гарантированного результата, определим величину

$$\Gamma(t, x[t_*[\cdot]t], U, \Delta^u) = \sup \left\{ \gamma : \{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\} \in S^*(t, x[t_*[\cdot]t], U, \Delta^u) \right\}. \quad (2.7)$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом управления будет

$$\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) = \inf_{U, \Delta^u} \Gamma(t, x[t_*[\cdot]t], U, \Delta^u). \quad (2.8)$$

Величина (2.8) определяет функционал $\varphi : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$, который мы называем *функционалом цены* в задаче управления (2.1)–(2.3). При $t = T$ этот функционал удовлетворяет равенству

$$\varphi(T, x[t_*[\cdot]T]) = \sigma(x[\cdot]), \quad x[t_*[\cdot]T] = x[\cdot] \in C. \quad (2.9)$$

Ниже исследуются инфинитезимальные свойства этого функционала при $t_* \leq t < T$.

3. Формулировка результата

Пусть $\psi : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$, $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*, T]}$, \mathbb{F} — выпуклый компакт из \mathbb{R}^n , $\varepsilon > 0$, $[\mathbb{F}]^\varepsilon$ — замкнутая ε -окрестность \mathbb{F} в \mathbb{R}^n . Введем понятие *нижней* $d^- \{ \psi(g) | \mathbb{F} \}$ и *верхней* $d^+ \{ \psi(g) | \mathbb{F} \}$ *правых производных функционала ψ по многозначному направлению \mathbb{F}* (см. [14]):

$$\begin{aligned} d^- \{ \psi(g) | \mathbb{F} \} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \inf_{y[\cdot] \in \Omega(g, \mathbb{F}, \varepsilon)} \liminf_{\delta \downarrow 0} \left[\psi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \psi(g) \right] \delta^{-1}, \\ d^+ \{ \psi(g) | \mathbb{F} \} &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{y[\cdot] \in \Omega(g, \mathbb{F}, \varepsilon)} \limsup_{\delta \downarrow 0} \left[\psi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta]) - \psi(g) \right] \delta^{-1}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$\Omega(g, \mathbb{F}, \varepsilon) = \left\{ y[\cdot] \in \text{Lip}(g) : \dot{y}[\tau] \in [\mathbb{F}]^\varepsilon \text{ для п. в. } \tau \in [t, T] \right\}.$$

Отметим, что производные $d^- \{ \psi(g) | \mathbb{F} \}$ и $d^+ \{ \psi(g) | \mathbb{F} \}$ могут принимать несобственные значения $\pm\infty$.

Теорема 1. *При условиях (F1)–(F3) функционал цены $\varphi : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$ является единственным непрерывным функционалом, который удовлетворяет равенству (2.9) и паре следующих дифференциальных неравенств:*

$$d^- \{ \varphi(g) - \langle s, x[t] \rangle | \mathbb{B}(g) \} + H(g, s) \leq 0, \quad (3.2)$$

$$d^+ \{ \varphi(g) - \langle s, x[t] \rangle | \mathbb{B}(g) \} + H(g, s) \geq 0, \quad (3.3)$$

$$g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*, T]}, \quad s \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mathbb{B}(g) = \{ f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \leq \Lambda(g) \}$, величина Λ взята из условия (F2).

4. Схема доказательства

В силу условий (F1), (F2) гамильтониан $H(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], s)$, определяемый равенством (2.5), обладает следующими свойствами:

(H1) отображение $H : \mathcal{G} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ непрерывно;

(Н2) выполняется условие Липшица по s :

$$|H(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], s') - H(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], s'')| \leq \Lambda(\tau, y[t_*[\cdot]\tau) \|s' - s''\|, \quad (\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) \in \mathcal{G}, \quad s', s'' \in \mathbb{R}^n;$$

(Н3) справедлива оценка: $|H(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], 0)| \leq \Lambda(\tau, y[t_*[\cdot]\tau])$, $(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) \in \mathcal{G}$.

Согласно результатам работы [16] при этих условиях существуют полунепрерывный снизу функционал $\varphi^- : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$ и полунепрерывный сверху функционал $\varphi^+ : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$, которые, как и функционал цены φ , удовлетворяют равенству (2.9), а кроме того, связаны неравенством

$$\varphi^-(t, x[t_*[\cdot]t]) \leq \varphi^+(t, x[t_*[\cdot]t]), \quad (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}, \quad (4.1)$$

и обладают следующими свойствами:

(P⁻) для любых $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*, T]}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существует $y[\cdot] \in Y(t, x[t_*[\cdot]t])$ такая, что

$$\varphi^-(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) - \varphi^-(t, x[t_*[\cdot]t]) \leq \langle y[\tau] - x[t], s \rangle - \int_t^\tau H(\xi, y[t_*[\cdot]\xi], s) d\xi, \quad \tau \in [t, T];$$

(P⁺) для любых $(t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*, T]}$ и $s \in \mathbb{R}^n$ существует $y[\cdot] \in Y(t, x[t_*[\cdot]t])$ такая, что

$$\varphi^+(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) - \varphi^+(t, x[t_*[\cdot]t]) \geq \langle y[\tau] - x[t], s \rangle - \int_t^\tau H(\xi, y[t_*[\cdot]\xi], s) d\xi, \quad \tau \in [t, T].$$

Свойства (P⁻) и (P⁺) характеризуют функционалы φ^- и φ^+ соответственно как верхнее и нижнее обобщенные решения [15] уравнения типа Гамильтона–Якоби с *ci*-производными:

$$\partial_t \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) + H(t, x[t_*[\cdot]t], \nabla \varphi(t, x[t_*[\cdot]t])) = 0, \quad (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*, T]}. \quad (4.2)$$

В [16] также показано, что при условиях (Н1)–(Н3) для полунепрерывных снизу функционалов свойство (P⁻) эквивалентно дифференциальному неравенству (3.2), а для полунепрерывных сверху функционалов свойство (P⁺) эквивалентно неравенству (3.3). Таким образом, чтобы доказать теорему 1, достаточно установить равенство

$$\varphi^-(t, x[t_*[\cdot]t]) = \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) = \varphi^+(t, x[t_*[\cdot]t]), \quad (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}. \quad (4.3)$$

Для этого сначала рассмотрим стратегию U_ε^e экстремального прицеливания по функционалу φ^- в направлении *ci*-градиентов функционала ν_ε из условия (F3) (см. [18]):

$$U_\varepsilon^e(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) \in \arg \min_{u \in \mathbb{P}} \left\{ \max_{v \in \mathbb{Q}} \left[\langle s_\varepsilon^-, f(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v) \rangle - h(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v) \right] \right\},$$

где

$$s_\varepsilon^- = \nabla \nu_\varepsilon(\tau, w_\varepsilon^-[t_*[\cdot]\tau]), \quad w_\varepsilon^-[t_*[\cdot]\tau] = \left\{ w_\varepsilon^-[\xi] = y[\xi] - z_\varepsilon^-[\xi], \quad t_* \leq \xi \leq \tau \right\},$$

$$z_\varepsilon^-[\cdot] \in \arg \min_{z[\cdot] \in Y} \left[\varphi^-(\tau, z[t_*[\cdot]\tau]) + \nu_\varepsilon(\tau, w_\varepsilon^-[t_*[\cdot]\tau]) \right], \quad w_\varepsilon^-[t_*[\cdot]\tau] = \left\{ w_\varepsilon^-[\xi] = y[\xi] - z[\xi], \quad t_* \leq \xi \leq \tau \right\}.$$

Фигурирующее здесь множество $Y = Y(t, x[t_*[\cdot]t])$ определено согласно (2.4).

Опираясь на свойство (P⁻) и условие (F3), можно показать [18], что, каково бы ни было число $\zeta > 0$, всегда найдутся такие число $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ^u отрезка времени $[t, T]$, при которых для всякой реализации процесса управления $\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\} \in S^*(t, x[t_*[\cdot]t], U_\varepsilon^e, \Delta^u)$

будет выполняться неравенство $\gamma \leq \varphi^-(t, x[t_*[\cdot]t]) + \zeta$. Отсюда по определениям (2.7) и (2.8) величин Γ и φ имеем

$$\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) \leq \Gamma(t, x[t_*[\cdot]t], U_\varepsilon^e, \Delta^u) \leq \varphi^-(t, x[t_*[\cdot]t]). \quad (4.4)$$

Теперь, вновь используя правило прицеливания в направлении ci -градиентов вспомогательного функционала ν_ε , по функционалу φ^+ определим экстремальную контрстратегию помехи:

$$V_\varepsilon^e(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u) \in \arg \max_{v \in \mathbb{Q}} \left\{ \langle s_e^+, f(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v) \rangle - h(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u, v) \right\},$$

где

$$s_e^+ = \nabla \nu_\varepsilon(\tau, w_e^+[t_*[\cdot]\tau]), \quad w_e^+[t_*[\cdot]\tau] = \left\{ w_e^+[\xi] = z_e^+[\xi] - y[\xi], t_* \leq \xi \leq \tau \right\},$$

$$z_e^+[\cdot] \in \arg \max_{z[\cdot] \in Y} \left[\varphi^+(\tau, z[t_*[\cdot]\tau]) - \nu_\varepsilon(\tau, w^+[t_*[\cdot]\tau]) \right], \quad w^+[t_*[\cdot]\tau] = \left\{ w^+[\xi] = z[\xi] - y[\xi], t_* \leq \xi \leq \tau \right\}.$$

В силу известных теорем об измеримом выборе (см., например, [20, I.7]) можно считать, что для фиксированных $(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) \in \mathcal{G}$ отображение $\mathbb{P} \ni u \mapsto V_\varepsilon^e(\tau, y[t_*[\cdot]\tau], u) \in \mathbb{Q}$ измеримо по Борелю. Зададимся разбиением $\Delta^v = \{\tau_j^v : \tau_1^v = t, \tau_{j+1}^v > \tau_j^v, j = 1, \dots, M, \tau_{M+1}^v = T\}$ отрезка времени $[t, T]$. Пусть $S_*(t, x[t_*[\cdot]t], V_\varepsilon^e, \Delta^v)$ — множество всех возможных троек $\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}$ таких, что $u[\cdot] : [t, T] \mapsto \mathbb{P}$ — измеримая по Борелю функция, $v[\cdot]$ — функция вида

$$v[\tau] = V_\varepsilon^e(\tau_j^v, y[t_*[\cdot]\tau_j^v], u[\tau]), \quad \tau_j^v \leq \tau < \tau_{j+1}^v, \quad j = 1, \dots, M, \quad (4.5)$$

$y[\cdot] \in C$ удовлетворяет начальному условию (2.2), абсолютно непрерывна на $[t, T]$ и при почти всех $\tau \in [t, T]$ вместе с $u[\cdot], v[\cdot]$ удовлетворяет уравнению (2.1). Отметим, что при условиях (F1), (F2) множество $S_*(t, x[t_*[\cdot]t], V_\varepsilon^e, \Delta^v)$ непусто, а получаемая согласно (4.5) реализация помехи $v[\cdot] : [t, T] \mapsto \mathbb{Q}$ будет измеримой по Борелю, т.е. допустимой. Опираясь на свойство (P⁺) и условие (F3) и проводя с должными изменениями рассуждения из [18], можно показать, что для всякого $\zeta > 0$ за счет выбора параметра $\varepsilon > 0$ и разбиения Δ^v можно обеспечить неравенство

$$\gamma(\{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\}) \geq \varphi^+(t, x[t_*[\cdot]t]) - \zeta, \quad \{y[\cdot], u[\cdot], v[\cdot]\} \in S_*(t, x[t_*[\cdot]t], V_\varepsilon^e, \Delta^v).$$

Так как $S_*(t, x[t_*[\cdot]t], V_\varepsilon^e, \Delta^v) \cap S^*(t, x[t_*[\cdot]t], U, \Delta^u) \neq \emptyset$, каковы бы ни были стратегия управления U и разбиение Δ^u , то отсюда, если учесть (2.7), (2.8), выводим

$$\varphi^+(t, x[t_*[\cdot]t]) \leq \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]). \quad (4.6)$$

Неравенства (4.1), (4.4) и (4.6) доказывают равенство (4.3).

5. Частные случаи

Используя формулы, полученные в [14] для вычисления правых производных функционалов по многозначным направлениям, приведем конкретизацию дифференциальных неравенств (3.2) и (3.3) для типичных классов функционалов φ .

5.1. Коинвариантно дифференцируемые функционалы

Если функционал $\varphi : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$ является ci -дифференцируемым, то

$$d^\mp \{ \varphi(g) - \langle s, x[t] \rangle | \mathbb{B}(g) \} = \partial_t \varphi(g) \mp \Lambda(g) \| \nabla \varphi(g) - s \|, \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]),$$

откуда, учитывая свойство (H2) гамильтониана H , получаем, что для ci -дифференцируемых функционалов пара неравенств (3.2), (3.3) эквивалентна уравнению (4.2). Таким образом, неравенства (3.2), (3.3) являются естественным обобщением уравнения (4.2) на негладкий случай.

5.2. Кусочно ci -гладкие функционалы

Пусть функционал φ представим в виде:

$$\varphi(g) = \min_{i \in I} \max_{j \in J} \psi_{ij}(g), \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}, \quad (5.1)$$

где $\psi_{ij} : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывные ci -дифференцируемые функционалы, I и J — конечные множества. Обозначим

$$I_0(g) = \left\{ i_0 \in I : \max_{j \in J} \psi_{i_0 j}(g) = \varphi(g) \right\}, \quad J_0(g, i) = \left\{ j_0 \in J : \psi_{ij_0}(g) = \max_{j \in J} \psi_{ij}(g) \right\}.$$

Тогда неравенства (3.2), (3.3) обращаются соответственно в неравенства:

$$\begin{aligned} \min_{\|f\| \leq \Lambda(g)} \min_{i \in I_0(g)} \max_{j \in J_0(g, i)} \left[\partial_t \psi_{ij}(g) + \langle \nabla \psi_{ij}(g) - s, f \rangle \right] + H(g, s) &\leq 0, \\ \max_{\|f\| \leq \Lambda(g)} \min_{i \in I_0(g)} \max_{j \in J_0(g, i)} \left[\partial_t \psi_{ij}(g) + \langle \nabla \psi_{ij}(g) - s, f \rangle \right] + H(g, s) &\geq 0. \end{aligned}$$

Функционалы вида (5.1) не исчерпывают всего многообразия кусочно ci -гладких функционалов, однако и в более общих случаях также можно получить подобные формулы.

5.3. Огибающие семейства ci -гладких функционалов

Рассмотрим функционал

$$\varphi(g) = \max_{l \in \mathbb{L}} [\psi(g, l) + \mu(l)], \quad g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}. \quad (5.2)$$

Пусть \mathbb{L} — компакт конечномерного арифметического пространства, $\mu : \mathbb{L} \mapsto [-\infty, +\infty)$ — полунепрерывная сверху функция, $\psi : \mathcal{G} \times \mathbb{L} \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывный функционал, который обладает следующим свойством ci -дифференцируемости: для любых $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*, T)}$ и $l \in \mathbb{L}$ существуют ci -производная $\partial_t \psi(g, l) \in \mathbb{R}$ по t и ci -градиент $\nabla \psi(g, l) \in \mathbb{R}^n$ такие, что при любом выборе $y[\cdot] \in \text{Lip}(g)$ будет справедливо равенство

$$\psi(t + \delta, y[t_*[\cdot]t + \delta], l) - \psi(g, l) = \partial_t \psi(g, l) \delta + \langle \nabla \psi(g, l), y[t + \delta] - x[t] \rangle + o_{y[\cdot]}(\delta), \quad \delta \in (0, T - t],$$

причем $o_{y[\cdot]}(\cdot)$ зависит от $y[\cdot] \in \text{Lip}(g)$ и не зависит от $l \in \mathbb{L}$, $o_{y[\cdot]}(\delta)/\delta \rightarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, отображения $\mathbb{L} \ni l \mapsto \partial_t \psi(g, l) \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{L} \ni l \mapsto \nabla \psi(g, l) \in \mathbb{R}^n$ непрерывны.

Обозначим

$$\mathbb{L}^0(g) = \left\{ l^0 \in \mathbb{L} : \varphi(g) = \psi(g, l^0) + \mu(l^0) \right\}.$$

Тогда для функционала (5.2) дифференциальные неравенства (3.2), (3.3) эквивалентны соответственно неравенствам:

$$\min_{\|f\| \leq \Lambda(g)} \max_{l \in \mathbb{L}^0(g)} \left[\partial_t \psi(g, l) + \langle \nabla \psi(g, l) - s, f \rangle \right] + H(g, s) \leq 0, \quad (5.3)$$

$$\max_{\|f\| \leq \Lambda(g)} \max_{l \in \mathbb{L}^0(g)} \left[\partial_t \psi(g, l) + \langle \nabla \psi(g, l) - s, f \rangle \right] + H(g, s) \leq 0. \quad (5.4)$$

5.4. Функционалы, удовлетворяющие условию Липшица

Рассмотрим еще случай, когда функционал φ удовлетворяет следующему условию локальной липшицевости: для любого компакта $D \subset C$ найдется такое число $\lambda = \lambda(D) > 0$, что при всех $t \in [t_*, T]$, $x[\cdot], y[\cdot] \in D$ будет выполняться неравенство

$$|\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) - \varphi(t, y[t_*[\cdot]t])| \leq \lambda \left(\int_{t_*}^t \|x[\tau] - y[\tau]\|^2 d\tau + \|x[t] - y[t]\|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Покажем, что в этом случае в неравенствах (3.2) и (3.3) можно перейти от производных по многозначному направлению $\mathbb{B}(g)$ к производным по конечномерным направлениям $f \in \mathbb{B}(g)$. Обозначим

$$\begin{aligned} \partial^- \{\varphi(g)|f\} &= \liminf_{\delta \downarrow 0} [\varphi(t + \delta, y_f[t_*[\cdot]t + \delta]) - \varphi(g)] \delta^{-1}, \\ \partial^+ \{\varphi(g)|f\} &= \limsup_{\delta \downarrow 0} [\varphi(t + \delta, y_f[t_*[\cdot]t + \delta]) - \varphi(g)] \delta^{-1}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь $g = (t, x[t_*[\cdot]t]) \in \mathcal{G}_{[t_*, T]}$, $f \in \mathbb{R}^n$, функция $y_f[\cdot]$ определяется согласно равенству

$$y_f[\tau] = \begin{cases} x[\tau] & \text{при } \tau \in [t_*, t), \\ x[t] + (\tau - t)f & \text{при } \tau \in [t, T]. \end{cases}$$

Величины $\partial^- \{\varphi(g)|f\}$ и $\partial^+ \{\varphi(g)|f\}$ представляют собой нижнюю и верхнюю правые производные функционала φ по направлению f в точке g . Отметим, что при условии (5.5) отображения $\mathbb{R}^n \ni f \mapsto \partial^\mp \{\varphi(g)|f\} \in \mathbb{R}$ являются локально липшицевыми.

Обратимся к неравенству (3.2). Так как для любых $\varepsilon > 0$, $f \in \mathbb{B}(g)$ справедливо включение $y_f[\cdot] \in \Omega(g, \mathbb{B}(g), \varepsilon)$, то в соответствии с (3.1), (5.6) имеем

$$d^- \left\{ \varphi(g) - \langle s, x[t] \rangle | \mathbb{B}(g) \right\} \leq \min_{f \in \mathbb{B}(g)} \left[\partial^- \{\varphi(g)|f\} - \langle s, f \rangle \right]. \quad (5.7)$$

С другой стороны, из (3.1) вытекает, что найдутся такие последовательности $\varepsilon_k \downarrow 0$, $\delta_k \downarrow 0$ и $y_k[\cdot] \in \Omega(g, \mathbb{B}(g), \varepsilon_k)$, $k = 1, 2, \dots$, для которых будет выполняться равенство

$$d^- \left\{ \varphi(g) - \langle s, x[t] \rangle | \mathbb{B}(g) \right\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\varphi(t + \delta_k, y_k[t_*[\cdot]t + \delta_k]) - \varphi(g) - \langle s, y_k[t + \delta_k] - x[t] \rangle \right] \delta_k^{-1}. \quad (5.8)$$

Пусть $f_k = (y_k[t + \delta_k] - x[t]) \delta_k^{-1}$. Поскольку $\dot{y}_k[\tau] \in [\mathbb{B}(g)]^{\varepsilon_k}$ при почти всех $\tau \in [t, t + \delta_k]$, то по теореме о среднем значении вектор-функции [21, разд. 5, лемма 12] имеем $f_k \in [\mathbb{B}(g)]^{\varepsilon_k} \subset [\mathbb{B}(g)]^{\varepsilon_1}$. Следовательно, без ограничения общности рассуждений можно считать, что $f_k \rightarrow f_* \in \mathbb{B}(g)$, т.е. существуют такие $f_* \in \mathbb{B}(g)$ и $r_k \in \mathbb{R}^n$, что $f_k = f_* + r_k$ и $\|r_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Опираясь на условие (5.5), полагая при этом $D = \Omega(g, \mathbb{B}(g), \varepsilon_1)$, выводим оценку

$$\varphi(t + \delta_k, y_k[t_*[\cdot]t + \delta_k]) \geq \varphi(t + \delta_k, y_{f_*}[t_*[\cdot]t + \delta_k]) - \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \left(2(\Lambda(g) + \varepsilon_k) \sqrt{\delta_k} + \|r_k\| \sqrt{3 + \delta_k} \right) \delta_k. \quad (5.9)$$

Из (5.8), (5.9), учитывая (5.6) и равенство $y_k[t + \delta_k] - x[t] = (f_* + r_k)\delta_k$, получаем, что

$$d^- \left\{ \varphi(g) - \langle s, x[t] \rangle | \mathbb{B}(g) \right\} \geq \partial^- \{\varphi(g)|f_*\} - \langle s, f_* \rangle \geq \min_{f \in \mathbb{B}(g)} \left[\partial^- \{\varphi(g)|f\} - \langle s, f \rangle \right]. \quad (5.10)$$

Из (5.7), (5.10) заключаем, что имеет место равенство

$$d^- \left\{ \varphi(g) - \langle s, x[t] \rangle | \mathbb{B}(g) \right\} = \min_{f \in \mathbb{B}(g)} \left[\partial^- \{\varphi(g)|f\} - \langle s, f \rangle \right].$$

Итак, для функционалов φ , удовлетворяющих условию Липшица (5.5), неравенство (3.2) переписывается в следующем виде:

$$\min_{f \in \mathbb{B}(g)} \left[\partial^- \{ \varphi(g) | f \} - \langle s, f \rangle \right] + H(g, s) \leq 0. \quad (5.11)$$

Подобным образом из неравенства (3.3) выводим

$$\max_{f \in \mathbb{B}(g)} \left[\partial^+ \{ \varphi(g) | f \} - \langle s, f \rangle \right] + H(g, s) \geq 0. \quad (5.12)$$

Заметим, что неравенства (5.11) и (5.12) аналогичны неравенствам, известным [15, 17] для функции цены в задачах управления обыкновенными дифференциальными системами.

6. Пример

Пусть динамика системы, имеющей двумерный фазовый вектор $y = \{y_1, y_2\} \in \mathbb{R}^2$, описывается уравнениями

$$\dot{y}_1[\tau] = \int_0^\tau \ln(1 + \tau + \xi) y_2[\xi] d\xi + u[\tau], \quad \dot{y}_2[\tau] = v[\tau], \quad 0 \leq t \leq \tau \leq T, \quad |u[\tau]| \leq a, \quad |v[\tau]| \leq b \quad (6.1)$$

с начальным условием

$$y[\xi] = \{y_1[\xi], y_2[\xi]\} = \{x_1[\xi], x_2[\xi]\} = x[\xi], \quad 0 \leq \xi \leq t. \quad (6.2)$$

Показатель качества процесса управления имеет вид

$$\gamma = |y_1[T] + y_2[t^*]| - \int_t^T \sqrt{a^2 - u^2[\tau]} d\tau. \quad (6.3)$$

Постоянные $a, b > 0$, начальный момент $t \in [0, T)$ и начальная история $x[0[\cdot]t] \in C_{[0,t]}$, промежуточный момент времени $t^* \in [0, T)$ и терминальный момент $T > 0$ известны.

Согласно (2.5) определим гамильтониан системы (6.1), (6.3):

$$H(t, x[0[\cdot]t], s) = s_1 \int_0^t \ln(1 + t + \tau) x_2[\tau] d\tau - a \sqrt{1 + s_1^2} + b |s_2|. \quad (6.4)$$

Далее обозначим

$$\begin{aligned} \vartheta(t, \tau) &= \int_t^T \ln(1 + \tau + \xi) d\xi, & \omega_1(t) &= \int_t^T \int_t^\xi \ln(1 + \xi + \tau) d\tau d\xi, & \omega_2(t) &= \begin{cases} \omega_1(t) + 1, & t < t^*, \\ \omega_1(t), & t \geq t^*, \end{cases} \\ \omega_3(t) &= b \int_t^T \omega_2(\tau) d\tau, & \varrho(t, x[0[\cdot]t]) &= x_1[t] + \omega_1(t) x_2[t] + \int_0^t \vartheta(t, \tau) x_2[\tau] d\tau + \begin{cases} x_2[t], & t < t^*, \\ x_2[t^*], & t \geq t^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Для системы (6.1), (6.3) выполняются (см. [18]) условия (F1)–(F3), при этом в условии (F3) можно взять $\nu_\varepsilon(t, w[0[\cdot]t]) = (2\varepsilon)^{-1} \varrho^2(t, w[0[\cdot]t])$. Каковы бы ни были допустимые реализации $u[\cdot] : [t, T) \mapsto [-a, a]$ и $v[\cdot] : [t, T) \mapsto [-b, b]$, для соответствующей реализации $y[\cdot] = \{y_1[\cdot], y_2[\cdot]\} : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^2$ движения системы (6.1) при начальном условии (6.2) имеет место равенство

$$y_1[T] + y_2[t^*] = \varrho(t, x[0[\cdot]t]) + \int_t^T (\omega_2(\tau) v[\tau] + u[\tau]) d\tau.$$

Опираясь на это равенство, найдем величину программного максимина:

$$\varphi(t, x[0[\cdot]t]) = \max_{v[\cdot]} \min_{u[\cdot]} \gamma = \max_{|l| \leq 1} \left[\rho(t, x[0[\cdot]t]) l - (T-t) a \sqrt{1+l^2} + \omega_3(t)|l| \right]. \quad (6.5)$$

В общем случае программный максимин может оказаться меньше, чем величина оптимального гарантированного результата, однако в рассматриваемом частном случае (6.1), (6.3) эти величины совпадают. Чтобы в этом убедиться, воспользуемся теоремой 1. Пусть $g = (t, x[0[\cdot]t])$. Через $\psi(g, l)$ обозначим величину, стоящую в (6.5) в квадратных скобках. Тогда равенство (6.5) переписывается в виде $\varphi(g) = \max_{|l| \leq 1} \psi(g, l)$, причем функционал $\psi(g, l)$ удовлетворяет всем требованиям, перечисленным в разд. 5.3. Следовательно, достаточно проверить выполнение неравенств (5.3) и (5.4). Прямым вычислением с учетом равенства (6.4) получаем

$$\partial_t \psi(g, l) = -H(g, \nabla \psi(g, l)), \quad \nabla \psi(g, l) = \{l, \omega_2(t)l\}. \quad (6.6)$$

Пусть $\mathbb{L}^0(g)$ — множество тех значений $l = l^0$, на которых достигается максимум в (6.5). Выполнение неравенства (5.4) обосновывает следующая цепочка соотношений:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \max_{l \in \mathbb{L}^0(g)} \left[H(g, s) - H(g, \nabla \psi(g, l)) + \Lambda(g) \|\nabla \psi(g, l) - s\| \right] \\ &= \max_{\|f\| \leq \Lambda(g)} \max_{l \in \mathbb{L}^0(g)} \left[\partial_t \psi(g, l) + \langle \nabla \psi(g, l) - s, f \rangle \right] + H(g, s). \end{aligned}$$

Здесь неравенство имеет место в силу свойства (H2) гамильтониана (6.4). Обратимся к неравенству (5.3). Если $\varrho(g) \neq 0$, то в (6.5) существует единственное максимизирующее значение $l = l^0$, т. е. $\mathbb{L}^0(g) = \{l^0\}$. В этом случае, вновь в силу свойства (H2), имеем

$$\begin{aligned} 0 &\geq H(g, s) - H(g, \nabla \psi(g, l^0)) - \Lambda(g) \|\nabla \psi(g, l^0) - s\| \\ &= \min_{\|f\| \leq \Lambda(g)} \max_{l \in \mathbb{L}^0(g)} \left[\partial_t \psi(g, l) + \langle \nabla \psi(g, l) - s, f \rangle \right] + H(g, s). \end{aligned}$$

Если же $\varrho(g) = 0$, то $\mathbb{L}^0(g) = \{\pm \beta\}$, где $\beta \in [0, 1]$ однозначно определяется соотношением

$$\omega_3(t)\beta - (T-t)a\sqrt{1+\beta^2} = \max_{\alpha \in [0, 1]} \left[\omega_3(t)\alpha - (T-t)a\sqrt{1+\alpha^2} \right]. \quad (6.7)$$

Из (6.7) и свойств функций $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ вытекает, что справедливо равенство

$$\max_{|l| \leq \beta} \left[b\omega_2(t)|l| - a\sqrt{1+l^2} \right] = b\omega_2(t)\beta - a\sqrt{1+\beta^2}. \quad (6.8)$$

Учитывая (6.4), (6.6), (6.8) и свойство (H2), в случае $\varrho(g) = 0$ выводим

$$\begin{aligned} 0 &\geq \max_{|l| \leq \beta} \left[-l \int_0^t \ln(1+t+\tau)x_2[\tau]d\tau - \Lambda(g) \|\nabla \psi(g, l) - s\| \right] + a\sqrt{1+\beta^2} - b\omega_2(t)\beta + H(g, s) \\ &\geq \min_{\|f\| \leq \Lambda(g)} \max_{|l| = \beta} \left[-H(g, \nabla \psi(g, l)) + \langle \nabla \psi(g, l) - s, f \rangle \right] + H(g, s) \\ &= \min_{\|f\| \leq \Lambda(g)} \max_{l \in \mathbb{L}^0(g)} \left[\partial_t \psi(g, l) + \langle \nabla \psi(g, l) - s, f \rangle \right] + H(g, s). \end{aligned}$$

Итак, функционал (6.5) действительно удовлетворяет неравенствам (5.3) и (5.4). По теореме 1 он является функционалом цены в задаче управления (6.1)–(6.3). Соответствующие экстремальные стратегии U_ε^e и V_ε^e , обеспечивающие достижимость результата (6.5) (как для управления, так и для помехи), построены в [18].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
4. **Осипов Ю.С.** Дифференциальная игра наведения для систем с последствием // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 1. С.123–131.
5. **Осипов Ю.С.** Дифференциальные игры систем с последствием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
6. **Kim A.V.** Functional Differential Equations. Application of i -Smooth Calculus. Dordrecht: Kluwer, 1999.
7. **Soner H.M.** On the Hamilton–Jacobi–Bellman equations in Banach spaces // J. Optim. Theory and Appl. 1988. V. 57, no. 3. P. 429–437.
8. **Crandall M.G., Lions P.-L.** Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions, Part IV: Hamiltonians with unbounded linear terms // J. Funct. Anal. 1990. V. 90. P. 237–283.
9. **Wolenski P.R.** Hamilton–Jacobi theory for hereditary control problems // Nonlinear Anal. 1994. V. 22, no. 7. P. 875–894.
10. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения типа Гамильтона — Якоби и дифференциальные игры с наследственной информацией // Докл. РАН. 2000. Т. 371, № 4. С. 457–461.
11. **Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.** Nonsmooth Analysis and Control Theory. New York: Springer, 1998.
12. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.
13. **Пшеничный Б.Н.** Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.
14. **Лукоянов Н.Ю.** О свойствах функционала цены дифференциальной игры с наследственной информацией // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 375–384.
15. **Subbotin A.I.** Generalized Solutions of First-Order PDEs. Boston: Birkhäuser, 1995.
16. **Lukoyanov N.Yu.** Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci -derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. and Appl. 2003. V. 8, no. 3. P. 365–397.
17. **Субботин А.И.** Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.
18. **Лукоянов Н.Ю.** Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 4. С. 629–643.
19. **Crandall M.G., Ishii H., Lions P.-L.** Uniqueness of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations revisited // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39, no. 4. P. 581–596.
20. **Warga J.** Optimal Control of Differential and Functional Equations. New York: Acad. Press, 1972.
21. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

УДК 517.9

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ОДНОГО АЛГОРИТМА ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ¹

А. С. Мартьянов

В статье получены конструктивные (наиболее актуальные с точки зрения практического применения) оценки точности одного алгоритма динамической аппроксимации неизвестного входа. Для полного представления о действенности алгоритма целесообразно указать, помимо верхней оценки его точности, также и нижнюю оценку; при этом наиболее информативным является тот случай, когда верхняя и нижняя оценки совпадают по порядку (относительно показателя точности наблюдения). На выявление именно такого рода оценок нацелена данная работа.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, описываемую нелинейным дифференциальным уравнением

$$\dot{y}(t) = f(y(t)) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0, \quad (1.1)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}^q$ — фазовое состояние системы, B — $(q \times n)$ -мерная матрица, $f(\cdot)$ — q -мерная вектор-функция, удовлетворяющая условию Липшица. Задачу динамической реконструкции входа по неточным измерениям выхода [1] сформулируем следующим образом. Траектория системы $y(\cdot) = y(\cdot; y_0, u(\cdot))$ порождается некоторым меняющимся во времени входным воздействием $u(\cdot) \in U_T$. Здесь $U_T = L_2(T, \mathbb{R}^n)$ — множество допустимых входов. Изначально как $y(\cdot)$, так и $u(\cdot)$ не заданы. В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in \Delta$ ($\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_m = T$) производятся измерения состояния системы $y(\tau_i)$. Результат измерений — векторы $\eta^h(\tau_i) \in \mathbb{R}^q$ — неточен:

$$|\eta^h(\tau_i) - y(\tau_i)| \leq h. \quad (1.2)$$

Здесь величина h характеризует погрешность измерения. Введем множество h -точных результатов измерений $\Xi^h = \Xi^h(y(\cdot))$, т.е. множество всех кусочно-постоянных функций $\eta^h(\cdot)$ со значениями в \mathbb{R}^q , удовлетворяющих (1.2). Пусть $U(y(\cdot)) = \{u(\cdot) \in U_T : y(\cdot) = y(\cdot; y_0, u(\cdot))\}$ — совокупность управлений, порождающих движение $y(\cdot)$, и $u_*(\cdot) = \arg \min\{|u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)} : u(\cdot) \in U(y(\cdot))\}$ — единственно. Требуется указать алгоритм, позволяющий по результатам измерений выхода (1.2) осуществить процесс динамического восстановления входа $u_*(\cdot)$. Так как точное восстановление невозможно (из-за неточности и дискретности проводимых измерений $\eta^h(\cdot)$), то необходимо вычислять некоторое приближение $u^h(\cdot)$, которое должно быть тем лучше, чем меньше величина погрешности измерения и чем плотнее разбиение Δ промежутка T .

Сформулированная выше задача относится к классу задач динамического оценивания неизвестных характеристик по результатам измерений [1, 2]. В работе [3] предложен алгоритм решения поставленной задачи для случая, когда входное воздействие неограничено, является элементом пространства $L_2(T; \mathbb{R}^n)$. Там же при выполнении условия согласования параметров алгоритма

$$h \rightarrow 0, \quad \delta(h) \rightarrow 0, \quad \alpha(h) \rightarrow 0, \quad \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00359), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН №22 “Процессы управления” и Программы поддержки ведущих научных школ (проект НШ-7581.2006.1).

установлен факт сильной сходимости $u^h(\cdot)$ к $u_*(\cdot)$ в метрике пространства $L_2(T; \mathbb{R}^n)$, и получена верхняя оценка скорости сходимости:

$$|u^h(\cdot) - u_*(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2 \leq c_1 \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} + c_2(\alpha(h) + \delta(h) + h)^{1/2},$$

где c_1 и c_2 — некоторые постоянные, $\alpha(h) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ — параметр регуляризации. Видно, что установленная оценка имеет наивысший порядок точности при $\delta(h) = O(h)$, $\alpha(h) = O(h^{2/3})$ и этот порядок равен $O(h^{1/6})$.

В настоящей статье для данного алгоритма проведен анализ скорости сходимости с получением более тонких оценок точности (порядка $O(h^{1/4})$). Установлен класс корректности входов, для которого верхняя оценка является равномерной относительно этого класса, а также проведено исследование наиболее информативного случая, когда верхняя и нижняя оценки точности совпадают по порядку (относительно показателя точности наблюдения). Для других динамических алгоритмов реконструкции некоторые нижние оценки приведены в [4–7]. При этом в работах [4–6] рассмотрены случаи, когда управления стеснены “мгновенными” ограничениями, т.е. $u(t) \in P$, P — выпуклое замкнутое множество в \mathbb{R}^n . Статья [7] посвящена стационарным линейным параболическим уравнениям.

Опишем алгоритм решения сформулированной задачи, следуя [3]. Сначала выбирается семейство равномерных разбиений отрезка T :

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{m_h}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta(h), \quad \tau_{h,m_h} = T. \quad (1.4)$$

Затем вводится вспомогательная динамическая система M (называемая моделью). В нашем случае модель — это система вида

$$\dot{w}^h(t) = f(\eta_i^h) + B u^h(t) + \nu^h(t), \quad w^h(0) = y_0, \quad (1.5)$$

$$t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}) \quad (i = 0, 1, \dots, m_h - 1),$$

где $w^h(t) \in \mathbb{R}^q$ — фазовая траектория модели, $\eta_i^h = \eta^h(\tau_{h,i})$. После выбора модели указывается закон формирования управлений $u^h(\cdot)$ и $\nu^h(\cdot)$. Этот закон отождествляется с функцией \mathcal{U}_h , ставящей в соответствие каждой тройке $(\tau_{h,i}, \eta^h(\tau_{h,i}), w^h(\tau_{h,i}))$ ($i = 0, 1, \dots, m_h - 1$) пару векторов $\{u_i^h, \nu_i^h\} = \mathcal{U}_h(\tau_{h,i}, \eta^h(\tau_{h,i}), w^h(\tau_{h,i}))$ по правилу

$$u_i^h = \frac{B'(\eta_i^h - w^h(\tau_{h,i}))}{\alpha(h)}, \quad \nu_i^h = \frac{c\delta(h)(\eta_i^h - w^h(\tau_{h,i}))}{\alpha^2(h)}, \quad (1.6)$$

где c — положительная константа, значение которой выписывается явно, штрих означает транспонирование.

Работа алгоритма разбивается на $m_h - 1$ однотипных шагов. В течении i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $[\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, выполняются следующие операции. Сначала согласно (1.6) вычисляются векторы u_i^h и ν_i^h , затем на вход модели (1.5) подаются постоянные управления $u^h(t) = u_i^h$, $\nu^h(t) = \nu_i^h$, $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, под действием которых модель из фазового состояния $w^h(\tau_{h,i})$ переводится в $w^h(\tau_{h,i+1})$. Работа алгоритма заканчивается в момент T .

2. Вспомогательные утверждения

Укажем ряд известных теорем, приведенных, например, в [8], которые потребуются при доказательстве оценок скорости сходимости рассматриваемого алгоритма. Напомним, что квадратная матрица $V \in \mathbb{R}^{(q \times q)}$ называется ортогональной, если $VV' = I_q$, где I_q — $(q \times q)$ -мерная единичная матрица.

Теорема (i). *Всякая симметричная матрица $H \in \mathbb{R}^{(q \times q)}$ является ортогонально подобной вещественной диагональной матрице: $H = V \operatorname{diag}(\lambda_j^H) V'$, $\lambda_j^H \in \mathbb{R}$, $V \in \mathbb{R}^{(q \times q)}$ — ортогональная матрица ($j = 1, 2, \dots, q$); или (эквивалентно) имеет полную ортонормированную систему собственных векторов с вещественными характеристическими числами.*

Заметим, что для любой матрицы $B \in \mathbb{R}^{(q \times n)}$ матрицы $BB' = P \in \mathbb{R}^{(q \times q)}$ и $B'B = L \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$ являются симметричными и неотрицательно определенными.

Теорема (ii). *Если вещественная матрица $B \in \mathbb{R}^{(q \times n)}$ имеет ранг r , то матрицы P и L , определенные выше, имеют r положительных собственных значений, которые совпадают:*

$$\lambda_j^P = \lambda_j^L = \lambda_j > 0 \quad (j = 1, \dots, r),$$

$$\lambda_j^P = 0 \quad (j = r + 1, \dots, q), \quad \lambda_j^L = 0 \quad (j = r + 1, \dots, n).$$

Обозначим $\lambda^{\max} = \max_{j=1, \dots, r} \lambda_j$, $\lambda^{\min} = \min_{j=1, \dots, r} \lambda_j$. Введем матричную норму $|B|^2 = |P| = |L| = \lambda^{\max}$ [8]. Рассмотрим некоторые свойства управления $u_*(\cdot)$. Пусть $\operatorname{rank}(B) = r$. Введем систему векторов $\{\bar{b}_k\}_{k=1}^q$, составленную из строк матрицы B . Обозначим через $\mathcal{S}_r \subseteq \mathbb{R}^n$ линейное подпространство размерности r , натянутое на систему линейно независимых векторов $\{\bar{b}_{k_j}\}_{j=1}^r$. Введем ортогональное дополнение \mathcal{S}_{n-r}^\perp : $\mathcal{S}_r \oplus \mathcal{S}_{n-r}^\perp = \mathbb{R}^n$. Символом $\mathcal{U}_T = \{y(\cdot; y_0, u(\cdot)) : u(\cdot) \in U_T\}$ обозначим пучок траекторий системы (1.1). Справедливы следующие леммы.

Лемма 1. *Для произвольной траектории $y(\cdot) \in \mathcal{U}_T$ соответствующее управление $u_*(\cdot) \in U(y(\cdot))$ с минимальной $L_2(T; \mathbb{R}^n)$ -нормой принимает значения в подпространстве \mathcal{S}_r пространства \mathbb{R}^n .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространства \mathcal{S}_r , \mathcal{S}_{n-r}^\perp являются ортогональными, поэтому любое управление $u(\cdot) \in U(y(\cdot))$ представимо в виде $u(t) = v^1(t) + v^2(t)$, где $v^1(t) \in \mathcal{S}_r$, $v^2(t) \in \mathcal{S}_{n-r}^\perp$. Имеет место равенство: $Bu(t) = B(v^1(t) + v^2(t)) = Bv^1(t)$. Таким образом, действие любого управления $u(t) \in U(y(\cdot))$ на систему (1.1) эквивалентно действию на систему его проекции в \mathcal{S}_r . Следовательно, так как $|u(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2 = |v^1(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2 + |v^2(\cdot)|_{L_2(T; \mathbb{R}^n)}^2$ и элемент $u_*(\cdot) \in U(y(\cdot))$ имеет минимальную $L_2(T; \mathbb{R}^n)$ -норму, то $u_*(t) = v_*^1(t) \in \mathcal{S}_r$.

Лемма 2. *Управление $u^h(t)$ лежит в подпространстве \mathcal{S}_r , $t \in [0, T]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\zeta_i^h = \eta_i^h - w^h(\tau_{h,i})$. Из (1.6) при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ имеем

$$u^h(t) = u_i^h = \frac{1}{\alpha(h)} B' \zeta_i^h = \frac{1}{\alpha(h)} (\bar{b}_1 \zeta_{i,1}^h + \bar{b}_2 \zeta_{i,2}^h + \dots + \bar{b}_q \zeta_{i,q}^h) = \frac{1}{\alpha(h)} \sum_{j=1}^q \bar{b}_j \zeta_{i,j}^h,$$

где $\zeta_{i,j}^h$ — j -я координата вектора ζ_i^h . Таким образом, вектор u_i^h является линейной комбинацией системы векторов $\{\bar{b}_j\}_{j=1}^q$, откуда следует утверждение леммы.

Введем подкласс входов, ограниченных по величине и значению вариации на временном промежутке $[0, T]$:

$$U_T(a, b) = \left\{ u(\cdot) \in U_T : \operatorname{var}_{[0, T]} u(t) \leq a, |u(t)| \leq b, t \in [0, T] \right\}.$$

Всюду в дальнейшем полагаем $u_*(\cdot) \in U_T(a, b)$. Наряду с условиями (1.3), потребуем

$$\frac{\delta(h)}{\alpha(h)} \leq \frac{h}{\delta(h)} \leq \varkappa, \quad (2.1)$$

где \varkappa — положительная константа, вид которой явно выписывается в теореме 2.

3. Верхняя оценка скорости сходимости алгоритма

Опираясь на сформулированные утверждения, получим верхнюю оценку скорости сходимости рассматриваемого алгоритма.

Лемма 3. Пусть выполнены условия (1.3), (2.1). Тогда можно указать число $\tilde{h} \in (0, 1)$ такое, что при всех $h \in (0, \tilde{h}]$ справедливо неравенство

$$|w^h(\cdot) - y(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^q)} \leq d_1 \alpha(h). \quad (3.1)$$

Доказательство. Пусть $\{p_j\}_{j=1}^q$ — ортонормированная система собственных векторов матрицы $P = BB'$, $V = (p_1, \dots, p_q)$ — ортогональная матрица (см. теорему (i)). Обозначим $J^P = \text{diag}(\lambda_j^P)$. Оценим величину $z^h(t) = w^h(t) - y(t)$, $t \in [0, T]$. Согласно (1.5) и (1.6) при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ имеем

$$z^h(t) = \dot{w}^h(t) - \dot{y}(t) = f(\eta_i^h) + \left(P + \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} I_q \right) \frac{(\eta_i^h - w_i^h)}{\alpha(h)} - \dot{y}(t).$$

Введем обозначения:

$$E(h) = P + \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} I_q, \quad a(t) = \frac{w^h(t) - w_i^h}{\alpha(h)}, \quad b(t) = \frac{\eta_i^h - y(t)}{\alpha(h)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{z}^h(t) &= f(\eta_i^h) + E(h) \left(\frac{w^h(t) - w_i^h}{\alpha(h)} + \frac{\eta_i^h - y(t)}{\alpha(h)} - \frac{w^h(t) - y(t)}{\alpha(h)} \right) - \dot{y}(t) \\ &= -E(h) \frac{z^h(t)}{\alpha(h)} + f(\eta_i^h) + E(h)(a(t) + b(t)) - \dot{y}(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Рассмотрим функцию $a(t)$. Из (1.5) следует

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\alpha(h)} \left(w_i^h + \int_{\tau_{h,i}}^t \left(f(\eta_i^h) + Bu_i^h + \nu_i^h \right) ds - w_i^h \right) = \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} \left(f(\eta_i^h) + Bu_i^h + \nu_i^h \right) \\ &= \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} \left(f(\eta_i^h) + \left(P + \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} I_q \right) \frac{(\eta_i^h - w_i^h)}{\alpha(h)} \right) = \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} \left(f(\eta_i^h) + E(h) \left(a(t) + b(t) - \frac{z^h(t)}{\alpha(h)} \right) \right). \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\left(I_q - \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} E(h) \right) a(t) = \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} \left(f(\eta_i^h) - E(h) \frac{z^h(t)}{\alpha(h)} + E(h)b(t) \right). \quad (3.3)$$

Введем симметричную матричную функцию

$$Q(t, h) = I_q - \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} E(h).$$

Система векторов $\{p_j\}_{j=1}^q$ является собственной и для $Q(t, h)$. Отсюда находим спектр

$$s_j^Q(t, h) = 1 - \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} \left(\lambda_j^P + \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, q).$$

Нетрудно видеть, что $\tau_{h,i+1} = \arg \inf \{ s_j^Q(\tau, h) : \tau \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}) \}$. Выберем и зафиксируем некоторое $\varepsilon \in (0, 1)$ и соответствующее $\tilde{h} \in (0, 1)$ такие, что при всех $h \in (0, \tilde{h}]$ выполняется неравенство

$$\frac{\delta(h)}{\alpha(h)} \leq \frac{\sqrt{(\lambda^{\max})^2 + 4c(1 - \varepsilon)} - \lambda^{\max}}{2c} = \rho(\varepsilon); \quad (3.4)$$

тогда спектр $s_j^Q(t, h) \in [\varepsilon, 1)$ для $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ и $h \in (0, \tilde{h}]$. Следовательно, существует обратная к $Q(t, h)$ матричная функция $Q^{-1}(t, h)$, спектр которой определяется равенством

$$s_j^{Q^{-1}}(t, h) = \frac{1}{s_j^Q(t, h)} = \frac{\alpha^2(h)}{\alpha^2(h) - (t - \tau_{h,i}) \left(\alpha(h) \lambda_j^P + c\delta(h) \right)} \geq 1. \quad (3.5)$$

Разрешая уравнение (3.3) относительно функции $a(t)$, и подставляя полученное выражение в уравнение (3.2), получим

$$\dot{z}^h(t) = f(\eta_i^h) + E(h) \left\{ Q^{-1}(t, h) \left(f(\eta_i^h) + E(h) \left(b(t) - \frac{z^h(t)}{\alpha(h)} \right) \right) \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} + b(t) - \frac{z^h(t)}{\alpha(h)} \right\} - \dot{y}(t),$$

или

$$\dot{z}^h(t) = -A(t, h) \frac{z^h(t)}{\alpha(h)} + g(t, h), \quad z^h(0) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (3.6)$$

Здесь

$$A(t, h) = E(h) \left(I_q + \frac{(t - \tau_{h,i})}{\alpha(h)} Q^{-1}(t, h) E(h) \right), \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}),$$

$$g(t, h) = \frac{(t - \tau_{h,i})}{\alpha(h)} E(h) Q^{-1}(t, h) f(\eta_i^h) + A(t, h) b(t) + f(\eta_i^h) - \dot{y}(t), \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}).$$

Асимптотика решения системы (3.6) при $h \rightarrow 0$ определяется свойствами неоднородности $g(t, h)$ и спектром матричной функции $A(t, h)$. Найдем этот спектр. Система собственных векторов матрицы P является таковой и для матричной функции $A(t, h)$. Следовательно (см. теорему (i)), справедливо представление $A(t, h) = V J^A V'$, $J^A = \text{diag}(s_j^A(t, h))$, где

$$s_j^A(t, h) = \lambda_j^P + \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} + \frac{(t - \tau_{h,i}) s_j^{Q^{-1}}(t, h)}{\alpha(h)} \left(\lambda_j^P + \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} \right)^2, \quad t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1}) \quad (j = 1, \dots, q). \quad (3.7)$$

Для дальнейшего исследования свойств $z^h(t)$ сделаем замену

$$\tilde{z}^h(t) = V' z^h(t), \quad \tilde{B} = V' B, \quad \tilde{g}(t, h) = V' g(t, h).$$

В новых переменных система (3.6) распадается на q скалярных уравнений

$$\dot{\tilde{z}}_j^h(t) = -s_j^A(t, h) \frac{\tilde{z}_j^h(t)}{\alpha(h)} + \tilde{g}_j(t, h), \quad \tilde{z}_j^h(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, q),$$

решение каждого из которых имеет вид

$$\tilde{z}_j^h(t) = \exp\left(-\frac{\gamma_j^h(t, 0)}{\alpha(h)}\right) \tilde{z}_j^h(0) + \int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma_j^h(t, \tau)}{\alpha(h)}\right) \tilde{g}_j(\tau, h) d\tau, \quad (3.8)$$

$$\gamma_j^h(t, \tau) = \int_\tau^t s_j^A(l, h) dl \quad (j = 1, 2, \dots, q). \quad (3.9)$$

Рассмотрим функцию $\tilde{g}(t, h)$. Обозначим $J^{Q^{-1}}(t, h) = \text{diag}(s_j^{Q^{-1}}(t, h))$. Из (1.1) при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ следует

$$\tilde{g}(t, h) = \left(J^P + \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} I_q \right) J^{-Q}(t, h) V' f(\eta_i^h) + J^A(t, h) V' b(t) + V' \left(f(\eta_i^h) - f(y(t)) \right) - \tilde{B} u_*(t).$$

Каждому нулевому собственному значению матрицы P соответствует нулевая строка матрицы \tilde{B} . Действительно, пусть \tilde{b}_j — j -я строка матрицы \tilde{B} . Так как $\tilde{B}\tilde{B}' = V'BB'V = J^P$, то $|\tilde{b}_j|^2 = \lambda_j^P$. Отсюда, если $\lambda_j^P = 0$, то $\tilde{b}_j \equiv 0$. Строками ортогональной матрицы V' являются собственные векторы p_j . Расписывая $\tilde{g}(t, h)$ покоординатно, получим

$$\tilde{g}_j(t, h) = p_j \cdot \left[\left(\lambda_j^P + \frac{t - \tau_{h,i}}{\alpha(h)} \right) s_j^{Q^{-1}}(t, h) f(\eta_i^h) + s_j^A(t, h) \frac{\eta_i^h - y(t)}{\alpha(h)} + f(\eta_i^h) - f(y(t)) \right] - \tilde{b}_j u_*(t).$$

Оценим полученные функции. Пусть константы $b[f]$, $c[f]$, $c[y]$ такие, что $|f(\eta^h(t))| \leq b[f]$ для любой $\eta^h(\cdot) \in \Xi^h(y(\cdot))$, $|f(y^*) - f(y_*)| \leq c[f]|y^* - y_*|$, $|y(t^*) - y(t_*)| \leq c[y]|t^* - t_*|$ при $t^*, t_* \in [0, T]$. Из (3.4) и (3.5) следует $s_j^{Q^{-1}}(t, h) \leq 1/\varepsilon$ для $t \in [0, T]$. Далее, из (3.7) при $\lambda_j^P = 0$ (см. (3.4)), имеем

$$|s_j^A(t, h)| \leq \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} + \frac{c^2\delta^3(h)}{\varepsilon\alpha^3(h)} \leq \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} \left(1 + \frac{c\delta^2(h)}{\varepsilon\alpha^2(h)} \right) \leq \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} \left(1 + \frac{c\rho^2(\varepsilon)}{\varepsilon} \right) \leq b^0[A] \frac{\delta(h)}{\alpha(h)}. \quad (3.10)$$

В случае $\lambda_j^P \neq 0$ выполняется неравенство

$$|s_j^A(t, h)| \leq (\lambda^{\max} + c\rho(\varepsilon)) \left(1 + \frac{\rho(\varepsilon)(\lambda^{\max} + c\rho(\varepsilon))}{\varepsilon} \right) \leq b[A]. \quad (3.11)$$

Так как векторы $\{p_j\}_{j=1}^q$ нормированы и $|\eta_i^h - y(t)| \leq (h + c[y]\delta(h))$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, то справедливы следующие оценки. При $\lambda_j^P = 0$ (см. (3.10))

$$|\tilde{g}_j(t, h)| \leq \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} \left(\frac{b[f]}{\varepsilon} + b^0[A] \frac{(h + c[y]\delta(h))}{\alpha(h)} \right) + c[f](h + c[y]\delta(h)) \leq b^0[g] \left(h + \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} \right). \quad (3.12)$$

Если $\lambda_j^P \neq 0$, то (см. (3.11))

$$|\tilde{g}_j(t, h)| \leq (\lambda^{\max} + \rho(\varepsilon)) \frac{b[f]}{\varepsilon} + b[A] \frac{(h + c[y]\delta(h))}{\alpha(h)} + c[f](h + c[y]\delta(h)) + \sqrt{\lambda^{\max} b} \leq b[g]. \quad (3.13)$$

Рассмотрим функцию $\gamma_j^h(t, \tau)$ (см. (3.9)). Согласно (3.5), из (3.7) для $t, \tau \in [0, T]$, $t \geq \tau$ имеем $\gamma_j^h(t, \tau) \geq \left(\lambda_j^P + c\delta(h)/\alpha(h) \right) (t - \tau)$ ($j = 1, 2, \dots, q$). Тогда

$$\int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma_j(t, \tau)}{\alpha(h)}\right) d\tau \leq \int_0^t \exp\left(-\frac{(\lambda_j^P \alpha(h) + c\delta(h))}{\alpha^2(h)}(t - \tau)\right) d\tau \leq \frac{\alpha^2(h)}{(\lambda_j^P \alpha(h) + c\delta(h))}.$$

Вернемся к соотношению (3.8). Из полученной выше оценки и равенства $\tilde{z}_j^h(0) = 0$ получаем

$$|\tilde{z}_j^h(t)| \leq \int_0^t \exp\left(-\frac{\gamma_j(t, \tau)}{\alpha(h)}\right) |\tilde{g}_j(\tau, h)| d\tau \leq \frac{\alpha^2(h)}{(\lambda_j^P \alpha(h) + c\delta(h))} \max_{t \in [0, T]} |\tilde{g}_j(t, h)|.$$

В свою очередь из оценок (3.12) и (3.13) для любого $t \in [0, T]$ справедливы неравенства (см. (2.1))

$$\begin{aligned} |\tilde{z}_j^h(t)| &\leq b^0[g] \left(h + \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} \right) \frac{\alpha^2(h)}{c\delta(h)} \leq k\alpha(h) \quad \text{при } \lambda_j^P = 0, \\ |\tilde{z}_j^h(t)| &\leq \frac{b[g]\alpha^2(h)}{(\lambda_j^P \alpha(h) + c\delta(h))} \leq \frac{b[g]\alpha(h)}{\lambda^{\min}} \leq k\alpha(h) \quad \text{при } \lambda_j^P \neq 0, \end{aligned}$$

где $k = \max\left\{ b^0[g](\varkappa + 1)/c, b[g]/\lambda^{\min} \right\}$. Таким образом, имеем $|\tilde{z}^h(t)|^2 = \sum_{j=1}^q |\tilde{z}_j^h(t)|^2 \leq qk^2\alpha^2(h)$.

Так как матрица V ортогональная, то она сохраняет метрику пространства [8], следовательно,

$$|w^h(\cdot) - y(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^q)} = |z^h(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^q)} = |\tilde{z}^h(\cdot)|_{C(T; \mathbb{R}^q)} \leq \alpha(h)k\sqrt{q} \leq d_1\alpha(h).$$

Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть выполнены условия (1.3), (2.1). Тогда можно указать постоянную d_2 такую, что при всех $h \in (0, \tilde{h}]$ справедливо неравенство

$$\int_0^T |u^h(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u_*(t)|^2 dt + d_2 \left(\alpha(h) + \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \right). \quad (3.14)$$

Доказательство. Из (1.2), (3.1) и соотношения (1.6) следуют оценки

$$|u_i^h| \leq \left(\frac{h}{\alpha(h)} + d_1 \right) \sqrt{\lambda^{\max}} \leq c_u, \quad |\nu_i^h| \leq \left(\frac{h}{\alpha(h)} + d_1 \right) \frac{c\delta(h)}{\alpha(h)} \leq c_\nu \frac{\delta(h)}{\alpha(h)}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим функцию $\mu(t) = |w^h(t) - y(t)|^2 + \alpha(h) \int_0^t (|u^h(\tau)|^2 - |u_*(\tau)|^2) d\tau$. При $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$ имеет место равенство (см. (1.1), (1.5))

$$\mu(t) - \mu(\tau_{h,i}) = \left\{ \gamma_i^{(0)}(t; u^h(\cdot)) - \gamma_i^{(0)}(t; u_*(\cdot)) \right\} + \gamma_i^{(1)}(t) + \gamma_i^{(2)}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_i^{(0)}(t; v(\cdot)) &= \int_{\tau_{h,i}}^t \left(2 \left\langle Bv(s), w^h(\tau_{h,i}) - \eta_i^h \right\rangle + \alpha(h) |v(s)|^2 \right) ds, \\ \gamma_i^{(1)}(t) &= 2 \int_{\tau_{h,i}}^t \left\langle f(\eta_i^h) - f(y(s)) + \nu_i^h, w^h(s) - y(s) \right\rangle ds, \\ \gamma_i^{(2)}(t) &= 2 \int_{\tau_{h,i}}^t \left\langle B(u_i^h - u_*(s)), w^h(s) - w^h(\tau_{h,i}) + \eta_i^h - y(s) \right\rangle ds. \end{aligned}$$

Здесь и далее угловые скобки означают скалярное произведение. В силу правила выбора управления u_i^h (1.6), имеем

$$\gamma_i^{(0)}(t; u^h(\cdot)) \leq \gamma_i^{(0)}(t; u_*(\cdot)).$$

Из (3.15) следует $|w^h(t) - w^h(\tau_{h,i})| \leq c[w]\delta(h)$. Поэтому справедливы оценки (см. (3.1))

$$|\gamma_i^{(1)}(t)| \leq 2d_1 \left(c[f](h + c[y]\delta(h)) + \frac{c_\nu \delta(h)}{\alpha(h)} \right) \alpha(h) \delta(h),$$

$$|\gamma_i^{(2)}(t)| \leq 2\sqrt{\lambda^{\max}}(c_u + b) \left[(c[w] + c[y])\delta(h) + h \right] \delta(h).$$

Учитывая полученные соотношения, имеем

$$\mu(t) - \mu(\tau_{h,i}) \leq |\gamma_i^{(1)}(t)| + |\gamma_i^{(2)}(t)| \leq \delta(h) \left(c_1 h + c_2 \delta(h) + (c_3 h + c_4 \delta(h)) \alpha(h) \right),$$

$$c_1 = 2\sqrt{\lambda^{\max}}(c_u + b), \quad c_2 = c_1(c[w] + c[y]) + 2d_1 c_\nu, \quad c_3 = 2d_1 c[f], \quad c_4 = c_3 c[y].$$

Последнее неравенство выполнено для всех $i = 0, 1, \dots, m_h - 1$. Заметим, что $\mu(0) = 0$. Таким образом, при $t \in [0, T]$

$$\mu(t) \leq c_5 (h + \delta(h)) T, \quad c_5 = \max\{c_1 + c_3, c_2 + c_4\}.$$

Отсюда и из (3.1) вытекает оценка (3.14). Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (1.3), (2.1). Тогда при всех $h \in (0, \tilde{h}]$ имеет место равномерная относительно подкласса функций $U_T(a, b)$ верхняя оценка скорости сходимости

$$\int_0^T |u^h(t) - u_*(t)|^2 dt \leq d_3 \left(\alpha(h) + \frac{h + \delta(h)}{\alpha(h)} \right). \quad (3.16)$$

Доказательство теоремы проводится по стандартной схеме [1, 2] и основывается на результатах лемм 1–4. Отметим, что из лемм 1 и 2 следует $u_*(t) - u^h(t) = v(t) \in \mathcal{S}_r$ при $t \in [0, T]$, т.е. имеет место неравенство: $\left| \int_0^t B(u_*(\tau) - u^h(\tau)) d\tau \right| \geq \sqrt{\lambda^{\min}} \left| \int_0^t (u_*(\tau) - u^h(\tau)) d\tau \right|$.

4. Нижняя оценка скорости сходимости алгоритма

Пусть $\{l_j\}_{j=1}^n$ — ортонормированная система собственных векторов матрицы $L = B'B$. Тогда (см. теорему (i)) $L = WJ^LW'$, где $W = (l_1, \dots, l_n)$ — ортогональная матрица, $J^L = \text{diag}(\lambda_j^L)$, $\lambda_j^L \geq 0$.

Лемма 5. Если собственное значение $\lambda_j^L = 0$, то соответствующий собственный вектор l_j лежит в \mathcal{S}_{n-r}^\perp , а если $\lambda_j^L \neq 0$, то l_j лежит в \mathcal{S}_r .

Доказательство. Пусть \tilde{b}_j — j -я строка матрицы $\tilde{B} = W'B'$. Так как $W'B'BW = J^L$, то легко проверить: $\tilde{b}_j \equiv 0$, если $\lambda_j^L = 0$. С другой стороны, $\tilde{b}_j = (\langle l_j, \bar{b}_1 \rangle, \dots, \langle l_j, \bar{b}_q \rangle)$, т.е. $\langle l_j, \bar{b}_k \rangle = 0$ ($k = 1, \dots, q$). Следовательно, $l_j \in \mathcal{S}_{n-r}^\perp$. Далее, так как матрица L имеет $n - r$ нулевых собственных значений (см. теорему (ii)) и $\{l_j\}_{j=1}^n$ полная ортонормированная система пространства \mathbb{R}^n , то $l_j \in \mathcal{S}_r$, если $\lambda_j^L \neq 0$.

В дальнейшем полагаем, что существует пара векторов $\{y_0, u_*\}$, $u_* \in \mathcal{S}_r \subseteq \mathbb{R}^n$, $|u_*| = b$, доставляющая решение уравнению $f(y_0) + Bu_* = 0$. Тогда управление $u_*(t) = u_*$ порождает постоянную траекторию $y(t) = y_0$, $t \in [0, T]$, и имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия согласования параметров (1.3) и (2.1), тогда существует число $\tilde{h} \in (0, 1]$ такое, что для любого $h \in (0, \tilde{h}]$ справедлива оценка

$$\int_0^T |u^h(t) - u_*|^2 dt \geq d_4 \alpha(h). \quad (4.1)$$

Доказательство. Рассмотрим величину $v_i^h = u_i^h - u_*$ ($i = 0, 1, \dots, m_h$). Проведем следующие выкладки:

$$\begin{aligned} v_{i+1}^h - v_i^h &= -\frac{B'(w_{i+1}^h - w_i^h)}{\alpha(h)} + \frac{B'(\eta_{i+1}^h - \eta_i^h)}{\alpha(h)} \\ &= -\frac{B'}{\alpha(h)} \int_{\tau_{h,i}}^{\tau_{h,i+1}} \left(f(\eta_i^h) + Bu_i^h + \nu_i^h \right) dt + \frac{B'(\eta_{i+1}^h - \eta_i^h)}{\alpha(h)} \\ &= -\frac{\delta(h)}{\alpha(h)} B'B(u_i^h - u_*) + \frac{B'}{\alpha(h)} \left((\eta_{i+1}^h - \eta_i^h) - \delta(h) \left(f(\eta_i^h) + Bu_* + \nu_i^h \right) \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$v_{i+1}^h = \left(I_n - \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} L \right) v_i^h + \xi_i^h, \quad (4.2)$$

$$\xi_i^h = \frac{B'}{\alpha(h)} \left((\eta_{i+1}^h - \eta_i^h) - \delta(h) \left(f(\eta_i^h) - f(y_0) + \nu_i^h \right) \right).$$

Введем замену

$$E(h) = I_n - \frac{\delta(h)}{\alpha(h)} L, \quad \tilde{v}_i^h = W' v_i^h, \quad \tilde{\xi}_i^h = W' \xi_i^h.$$

Матрица $E(h)$ является симметричной, с собственными значениями $s_j^h = 1 - \lambda_j^L \delta(h) / \alpha(h)$ ($j = 1, 2, \dots, n$). Имеет место разложение: $E(h) = W J^E(h) W'$, $J^E(h) = \text{diag}(s_j^h)$. В новых переменных система (4.2) распадается на n разностных уравнений вида

$$\tilde{v}_{j,i+1}^h = s_j^h \tilde{v}_{j,i}^h + \tilde{\xi}_{j,i}^h \quad (j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m_h - 1),$$

решение каждого из которых имеет вид

$$\tilde{v}_{j,i}^h = (s_j^h)^i \tilde{v}_{j,0}^h + \sum_{k=0}^{i-1} (s_j^h)^k \tilde{\xi}_{j,i-k-1}^h, \quad i > 0. \quad (4.3)$$

Здесь индексом j обозначена соответствующая j -я координата. Сначала рассмотрим решения, отвечающие $\lambda_j^L = 0$. В этом случае $s_j^h = 1$ и соответствующая j -я строка матрицы $\tilde{B} = W' B'$ состоит из нулей, т.е.

$$\tilde{\xi}_{j,i}^h = \frac{\tilde{b}_j}{\alpha(h)} \left((\eta_{i+1}^h - \eta_i^h) - \delta(h) \left(f(\eta_i^h) - f(y_0) + \nu_i^h \right) \right) \equiv 0.$$

Следовательно, $\tilde{v}_{j,i+1}^h = \tilde{v}_{j,i}^h = \tilde{v}_{j,0}^h$. Так как $\tilde{v}_0^h = W' v_0^h = W'(u_0^h - u_*) = -W' u_*$, то (см. леммы 1 и 5) $\tilde{v}_{j,0}^h = -\langle l_j, u_* \rangle \equiv 0$.

Перейдем к случаю, когда $\lambda_j^L > 0$. Рассмотрим свойства собственных значений s_j^h ($j = 1, 2, \dots, n$). Обозначим

$$s^{\min} = \left(1 - \frac{\lambda^{\max} \delta(h)}{\alpha(h)} \right) \leq s_j^h \leq \left(1 - \frac{\lambda^{\min} \delta(h)}{\alpha(h)} \right) = s^{\max}. \quad (4.4)$$

Используя сумму элементов геометрической прогрессии, получим

$$\sum_{k=0}^{i-1} (s_j^h)^k = \frac{(1 - (s_j^h)^i)}{1 - s_j^h} \leq \frac{\alpha(h)}{\lambda_j^L \delta(h)}. \quad (4.5)$$

Отметим, что

$$(s^{\min})^{m_h} \leq \left(1 - \frac{\lambda^{\max} \delta(h)}{\alpha(h)} \right)^{\frac{T}{\delta(h)}} = \left(1 - \frac{\lambda^{\max} \delta(h)}{\alpha(h)} \right)^{-\frac{\alpha(h)}{\lambda^{\max} \delta(h)} \left(-\frac{T \lambda^{\max}}{\alpha(h)} \right)} \leq e^{-\frac{T \lambda^{\max}}{\alpha(h)}}. \quad (4.6)$$

Кроме того, справедлива оценка (см. (2.1), (3.15))

$$|\tilde{\xi}_{j,i}^h| \leq \frac{\sqrt{\lambda^{\max}}}{\alpha(h)} \left(2h + \delta(h) \left(c[f]h + \frac{c_\nu \delta(h)}{\alpha(h)} \right) \right) \leq b[\xi] \frac{h}{\alpha(h)}. \quad (4.7)$$

Рассмотрим квадрат нормы (4.3) (см. (4.4), (4.5), (4.7)):

$$\begin{aligned} |\tilde{v}_{j,i}^h|^2 &= \left[(s_j^h)^i \tilde{v}_{j,0}^h \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{i-1} (s_j^h)^k \tilde{\xi}_{j,i-k-1}^h \right]^2 + 2 (s_j^h)^i \tilde{v}_{j,0}^h \sum_{k=0}^{i-1} (s_j^h)^k \tilde{\xi}_{j,i-k-1}^h \\ &\geq \left[(s_j^h)^i \tilde{v}_{j,0}^h \right]^2 - 2 (s_j^h)^i |\tilde{v}_{j,0}^h| \sum_{k=0}^{i-1} (s_j^h)^k |\tilde{\xi}_{j,i-k-1}^h| \end{aligned}$$

$$\geq (s^{\min})^{2i} |\tilde{v}_{j,0}^h|^2 - (s^{\max})^i \frac{2b[\xi]|\tilde{v}_{j,0}^h|}{\lambda^{\min}} \frac{h}{\delta(h)}.$$

Полагая далее в (4.6) $\alpha(h) \leq T\lambda^{\max}/\ln 2$, просуммируем полученное неравенство по $i = 0, 1, \dots, m_h$

$$\begin{aligned} \int_0^T |\tilde{v}_j^h|^2 dt &= \sum_{i=0}^{m_h-1} |\tilde{v}_{j,i}^h|^2 \delta(h) \\ &\geq \delta(h) |\tilde{v}_{j,0}^h|^2 \sum_{i=0}^{m_h-1} (s^{\min})^{2i} - \frac{2b[\xi]|\tilde{v}_{j,0}^h|h}{\lambda^{\min}} \sum_{i=0}^{m_h-1} (s^{\max})^i \\ &\geq \delta(h) |\tilde{v}_{j,0}^h|^2 \frac{(1 - (s^{\min})^{2m_h})}{1 - (s^{\min})^2} - \frac{2b[\xi]|\tilde{v}_{j,0}^h|h}{\lambda^{\min}} \frac{(1 - (s^{\max})^{m_h})}{1 - (s^{\max})} \\ &\geq \left(\frac{3|\tilde{v}_{j,0}^h|^2}{8\lambda^{\max}} - \frac{2b[\xi]|\tilde{v}_{j,0}^h|h}{(\lambda^{\min})^2} \frac{h}{\delta(h)} \right) \alpha(h). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Матрица W является ортогональной, следовательно, она сохраняет метрику пространства и $|\tilde{v}_0^h|^2 = \sum_{j=1}^n |\tilde{v}_{j,0}^h|^2 = \sum_{k=1}^r |\tilde{v}_{j_k,0}^h|^2 = |u_*|^2$, где $\tilde{v}_{j_k,0}^h$ — компоненты, отвечающие положительным собственным значениям $\lambda_{j_k} > 0$, $k = 1, \dots, r$. В условии (2.1) положим

$$\varkappa = \frac{3(\lambda^{\min})^2 b}{32b[\xi]\lambda^{\max r}}.$$

Так как $\sum_{j=1}^n |\tilde{v}_{j,0}^h| = \sum_{k=1}^r |\tilde{v}_{j_k,0}^h| \leq |u_*| r$, то имеет место оценка (см. (4.8))

$$\int_0^T |u^h(t) - u_*|^2 dt = \sum_{j=1}^n \int_0^T |\tilde{v}_j^h(t)|^2 dt \geq \left(\frac{3|u_*|^2}{8\lambda^{\max}} - \frac{2b[\xi]|u_*|r}{(\lambda^{\min})^2} \frac{h}{\delta(h)} \right) \alpha(h) \geq \frac{3b^2 \alpha(h)}{16\lambda^{\max}}.$$

Отсюда при $d_4 = 3b^2/16\lambda^{\max}$ следует оценка (4.1). Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\alpha(h) = O(h^{1/2})$, $\delta(h) = O(h)$, то верхняя (3.16) и нижняя (4.1) оценки скорости сходимости алгоритма (1.4)–(1.6) имеют одинаковый порядок $O(h^{1/4})$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
2. **Kryazhimskii A.V., Osipov Yu.S.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.
3. **Максимов В.И., Пандолфи Л.** О реконструкции неограниченных управлений в нелинейных динамических системах // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, № 3. С. 385–390.
4. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Динамические обратные задачи для параболических систем // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 579–597.
5. **Короткий А.И., Цепелев И.А.** Верхняя и нижняя оценки точности в задаче динамического определения операторов // Тр. Ин-та математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН. 1996. Т. 4. С. 227–238.
6. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: УрО РАН. 2000. 304 с.
7. **Васильева Е.В.** Нижние оценки сходимости алгоритмов динамической реконструкции для систем с распределенными параметрами // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 5. С. 675–687.
8. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М: Наука, 1988. 552 с.

УДК 517.977

**НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ
РАЗЛИЧНОЙ СТРУКТУРЫ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ДУГИ¹****А. А. Меликян**

Задача оптимального управления со скалярным управлением характеризуется двумя гамильтонианами, соответствующими граничным значениям управляющего параметра. Промежуточные (внутренние) значения управления и соответствующие им особые траектории (дуги) могут быть построены с использованием скобок Пуассона в терминах этих двух гамильтонианов. На особой дуге второго порядка обращаются в нуль все повторные скобки Пуассона, использующие эти гамильтонианы 2, 3 и 4 раза, а скобки с пятью гамильтонианами, вообще говоря, отличны от нуля. Существуют шесть различных кратных скобок Пуассона с пятикратным участием гамильтонианов. Регулярная дуга в оптимальном фазовом портрете задачи соединяется с особой (сингулярной) дугой после одного, нескольких или бесконечного числа (явление Фуллера) переключений. В работе показано, что данным случаям соответствует различный набор знаков указанных шести величин — кратных скобок Пуассона. Существуют четыре различных набора знаков у совокупности шести скобок Пуассона. Особенность, включающая универсальную поверхность, изучена для общего случая, два других типа особенностей исследованы на конкретных примерах.

Введение

В теории оптимального управления [1] известны оптимальные траектории, построение которых требует дальнейшей модификации соотношений принципа максимума. Такие траектории называются особыми, или особыми дугами, а соответствующее управление — особым управлением [2]. Для получения формул, дающих выражение оптимального управления через фазовый и сопряженный векторы, необходимо дифференцирование по времени гамильтониана задачи. Обычно требуется четное число $m = 2d$ дифференцирований, чтобы в соотношениях возник ненулевой множитель при управлении. Число d называется порядком особой дуги, особого управления. Наиболее известным примером особой дуги первого порядка является траектория, лежащая на особой универсальной поверхности [3]. Особой дугой второго порядка является режим с учащающимися переключениями [4–6].

Для проверки оптимальности особых управлений часто используются необходимые условия оптимальности Келли (для дуги первого порядка) и Коппа — Мойера (для порядка два и выше) [2]. Эти условия были получены для нужд теории оптимального управления и неизменно ассоциировались с этой теорией. В работе [7] получена инвариантная форма условия Келли в терминах скобок Пуассона (или скобок Якоби — в случае зависимости гамильтониана, т.е. левой части уравнения в частных производных первого порядка, от функции Беллмана). Показано, что условие Келли выражает одно из свойств гладкого (классического) решения нелинейного уравнения в частных производных первого порядка с негладкой левой частью (гамильтонианом).

Вокруг отдельно взятой особой дуги второго порядка картина оптимальных траекторий в разных задачах может иметь различную структуру, не обязательно содержащую режим с учащающимися переключениями, но условия Коппа — Мойера для них выглядят единообразно. Однако если привлечь к рассмотрению скобки Пуассона (Якоби), то можно получить набор необходимых условий, индивидуальный для каждого из возможных оптимальных фазовых портретов. Другим эффективным аппаратом является применение скобок Ли [6], имеющих определенную связь со скобками Пуассона.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00610).

В данной работе рассматривается особая дуга второго порядка, включенная в фазовую картину трех различных типов. Рассмотрены необходимые условия в терминах кратных скобок Пуассона (Якоби). Показано, что скобки вплоть до определенной кратности обращаются в нуль, а знаки скобок следующего уровня определяют тип фазового портрета. Хотя часть рассмотрений и ведется применительно к конкретной задаче оптимального управления, необходимые условия сформулированы в общих терминах, применимых к нелинейному уравнению в частных производных первого порядка. При этом роль особой дуги выполняют обобщенные сингулярные характеристики уравнений первого порядка [7–9].

Сингулярные характеристики были найдены благодаря исследованиям в теории оптимального управления и дифференциальных игр [2, 3]. Известно, что регулярные характеристики для этой теории описываются гамильтоновыми системами — характеристическими системами уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса [3].

Особые траектории (дуги) во многих случаях описываются аналогичными системами с использованием особых управлений. Попытка исключить особые управления из этих уравнений привела к обнаружению сингулярных характеристик, которые оказались свойственны не только задачам оптимального управления и дифференциальных игр, но и нелинейным уравнениям в частных производных первого порядка общего вида. Благодаря сингулярным характеристикам, многие особые линии и поверхности, известные в теории оптимального управления и дифференциальных игр, получили инвариантное описание в терминах этих уравнений общего (абстрактного) вида.

1. Регулярные и сингулярные точки решения уравнения Гамильтона — Якоби

В работе рассматриваются особенности решения уравнения Гамильтона — Якоби с негладким гамильтонианом (левой частью уравнения) вида:

$$F(x, V, p) = \min[F_0(x, V, p), F_1(x, V, p)] = 0, \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \quad (p = \partial V / \partial x). \quad (1.1)$$

Данное уравнение рассматривается при некоторых граничных условиях на ∂D , которые, при необходимости, будут конкретизироваться. Функции F_i предполагаются дважды гладкими.

Регулярной точкой решения $V(x)$ называется внутренняя точка x^* области D такая, что в некоторой ее окрестности решение $V(x)$ является дважды гладким, а функция $F(x, V, p)$ является дважды гладкой в некоторой окрестности точки $(x^*, V(x^*), p(x^*))$ пространства \mathbb{R}^{2n+1} векторов (x, V, p) . Сингулярной называется точка, не являющаяся регулярной.

Рассмотрения данной работы относятся к случаю гладкого решения (которое тем самым может пониматься в классическом смысле), негладким является гамильтониан $F(x, V, p)$.

1.1. Особые дуги в задаче оптимального управления

Рассмотрим одну из формулировок задачи оптимального управления с нефиксированным временем:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^s, \quad t \in [0, T], \\ x(0) &= x^0, \quad x(T) \in M \subset \mathbb{R}^n, \\ J &= T + \Phi(x(T)) \rightarrow \min_u. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Множество $f(x, U)$ предполагается выпуклым. Введем гамильтониан принципа максимума H , а также “минимизированный” гамильтониан F :

$$H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle + 1, \quad p \in \mathbb{R}^n,$$

$$F(x, p) = \min_u H(x, p, u) = H(x, p, u^*),$$

$$u^* \in U^*[x, p] \subset U.$$

Здесь U^* — множество управляющих воздействий, доставляющих минимум. Известно, что оптимальная тройка функций $x(t), p(t), u(t)$ удовлетворяет гамильтоновой системе

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x,$$

включению

$$u(t) \in U^*[x(t), p(t)], \quad t \in [0, T],$$

и соответствующим граничным условиям. Принцип максимума Понтрягина в традиционной формулировке использует сопряженный вектор вида $\psi = -p$. В рассмотренных данной работы более удобным оказывается вектор p , представляющий градиент функции Беллмана $V(x)$.

Если для некоторого подынтервала времени $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ множество $U^*[x(t), p(t)]$ содержит более одной точки, то дуга (траектория) $x(t)$, управление $u(t)$, а также тройка функций $x(t), p(t), u(t), t \in [t_1, t_2]$ называются особыми. Вследствие выпуклости множества $f(x, U)$ множество $U^*[x(t), p(t)]$ для каждого $t \in [t_1, t_2]$ содержит прямолинейный отрезок из \mathbb{R}^s .

В регулярном случае, когда множество $U^*[x, p]$ содержит единственный элемент, а функция $H(x, p, u)$ дифференцируема, можно показать, что имеют место равенства

$$H_p = F_p, \quad H_x = F_x.$$

Это означает, что гамильтоновы уравнения принципа максимума являются уравнениями характеристик для уравнения Беллмана:

$$F(x, p) = 0,$$

где вектор p представляет собой градиент функции Беллмана. В особом (сингулярном) случае указанное равенство частных производных не имеет места, а функции $F(x, p), V(x)$ могут быть негладкими.

1.2. Особая дуга в линейной задаче

Пусть управляющий параметр u скалярный, а функция f в (1.2) линейна по u :

$$\dot{x} = g(x) + ur(x), \quad u_0 \leq u \leq u_1, \tag{1.3}$$

$$U = [u_0, u_1].$$

Предполагается, что $u_1 > u_0$. Для рассматриваемой задачи гамильтониан принципа максимума имеет вид

$$H(x, p, u) = G(x, p) + uR(x, p),$$

$$G(x, p) = \langle p, g(x) \rangle + 1, \quad R(x, p) = \langle p, r(x) \rangle,$$

а минимизированный гамильтониан описывается формулой

$$F(x, p) = \min[F_0(x, p), F_1(x, p)].$$

Функции F_0, F_1 и G, R связаны линейными соотношениями:

$$F_0 = G + u_0 R, \quad F_1 = G + u_1 R,$$

$$G = \frac{u_1 F_0 - u_0 F_1}{u_1 - u_0}, \quad R = \frac{F_1 - F_0}{u_1 - u_0}.$$

На особой дуге для системы (1.3) выполнено тождество:

$$R(x(t), p(t)) = 0, \quad U^*[x(t), p(t)] = U$$

на интервале времени $t \in [t_1, t_2]$. Поэтому, как функция времени, величина $R(x(t), p(t))$ вместе со всеми своими производными обращается в нуль на интервале $t \in [t_1, t_2]$. Для первых двух производных, используя скобки Пуассона, можно получить:

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \{RH\} = \{RG\} + u\{RR\} = \{RG\} = 0, \\ \ddot{R} &= \{\{RG\}H\} = \{\{RG\}G\} + u\{\{RG\}R\} = 0. \end{aligned}$$

Из второго равенства можно получить следующее выражение для особого управления u_σ в предположении, что $\{\{RG\}R\} \neq 0$:

$$u_\sigma = -\frac{\{\{RG\}G\}}{\{\{RG\}R\}}. \quad (1.4)$$

Вообще говоря, управление (1.4) может и не быть оптимальным. Одним из необходимых условий оптимальности управления u_σ является известное условие Келли, которое может быть представлено в виде (см. [2]):

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = \{\{RG\}R\} \leq 0. \quad (1.5)$$

Напомним, что из-за изменения знака сопряженной переменной, $\psi = -p$, знак данного неравенства изменен на противоположный.

1.3. Инвариантная форма условия Келли

Другим очевидным необходимым условием для особого управления (1.4) является удовлетворение ограничениям (1.3). Обычно эти ограничения предполагаются выполненными и не являются предметом специального анализа. Используя ограничения (1.3), выражение (1.4) для u_σ и условие Келли (1.5), можно получить следующий набор необходимых условий, включающий одно равенство и три неравенства:

$$\{RG\} = 0, \quad \{\{RG\}R\} \leq 0, \quad u_0 \leq -\frac{\{\{RG\}G\}}{\{\{RG\}R\}} \leq u_1. \quad (1.6)$$

В полученных соотношениях использованы кратные скобки Пуассона в терминах функций G, R . Заметного упрощения и симметризации этих соотношений можно достичь, перейдя в них к функциям F_i . Используя связь между F_i и R, G , можно получить следующие равенства:

$$\begin{aligned} (u_1 - u_0)\{RG\} &= -\{F_0F_1\}, \\ \{\{RG\}R\} &= \frac{A_0 + A_1}{(u_1 - u_0)^2}, \quad \{\{RG\}G\} = -\frac{u_0A_0 + u_1A_1}{(u_1 - u_0)^2}, \end{aligned}$$

в которых положено:

$$A_0 = \{\{F_1F_0\}F_1\}, \quad A_1 = \{\{F_0F_1\}F_0\}.$$

Использование этих равенств в (1.4) дает следующее симметричное представление для особого управления

$$u_\sigma = \frac{u_0A_0 + u_1A_1}{A_0 + A_1} \quad (A_0 + A_1 \neq 0). \quad (1.7)$$

В терминах новых переменных соотношения (1.6) принимают эквивалентную форму:

$$\{F_0F_1\} = 0, \quad \{\{F_1F_0\}F_1\} \leq 0, \quad \{\{F_0F_1\}F_0\} \leq 0, \quad (1.8)$$

в которой число неравенств уменьшается на единицу по сравнению с (1.6).

Особые траектории подчиняются гамильтоновым уравнениям принципа максимума, записанным в терминах гамильтониана $H = G + uR$ и управления $u = u_\sigma$. Подставив (1.7) в гамильтониан, можно получить следующие уравнения особых движений, записанные в терминах регулярных гамильтонианов F_0, F_1 :

$$\dot{x} = \frac{A_0 F_{0p} + A_1 F_{1p}}{A_0 + A_1}, \quad \dot{p} = -\frac{A_0 F_{0x} + A_1 F_{1x}}{A_0 + A_1}. \quad (1.9)$$

Нетрудно убедиться, что эта система не является системой классических характеристик уравнения Беллмана. Можно показать, что это — система сингулярных характеристик в смысле [7], соответствующая многообразию

$$W_3 : \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \{F_0 F_1\} = 0.$$

На этом многообразии левая часть уравнения Беллмана (гамильтониан) теряет гладкость.

Отметим следующие свойства необходимых условий (1.8), (1.9). Во-первых, в них не используется сингулярное управление u_σ , и они записаны в терминах регулярных управлений u_0, u_1 , входящих в выражения гамильтонианов F_0, F_1 . Во-вторых, два неравенства (1.8) влекут за собой справедливость трех неравенств, а именно: условия Келли (1.5) и двух ограничений на переменную управления: $u_0 \leq u_\sigma \leq u_1$. Это может быть удобным при разработке вычислительных алгоритмов.

Условия (1.6) используют линейную структуру правых частей уравнений динамики, которая может измениться при преобразованиях переменных, в то время как в соотношениях (1.8) участвуют только регулярные гамильтонианы и их скобки Пуассона (скобки Якоби в случае более общей зависимости $F(x, V, p)$). Эти скобки инвариантны при канонических (контактных) преобразованиях, каковыми являются точечные преобразования x -пространства. Таким образом, условия (1.8) имеют одну и ту же форму для разных координатных систем, т.е. являются инвариантными.

Ниже для нелинейного уравнения Гамильтона — Якоби дается вывод соотношений вида (1.8), (1.9) при некоторых предположениях о структуре оптимального фазового портрета. Это дает, в частности, новое доказательство условий Келли и Коппа — Мойера.

2. Особая универсальная поверхность

Рассмотрим более общее нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (уравнение Гамильтона — Якоби):

$$F(x, V(x), V_x(x)) = 0, \quad x \in D, \quad (2.1)$$

$$F(x, V, p) = \min[F_0(x, V, p), F_1(x, V, p)], \quad F_i \in C^2,$$

с непрерывным негладким гамильтонианом $F(x, V, p)$. Уравнение (2.1) рассматривается в общем математическом плане и не обязательно связано с задачей оптимального управления. Предположим, что данное уравнение имеет гладкое (классическое) решение $V(x)$ во всей области D . Сделаем предположение относительно поведения классических характеристик и структуры траекторий в окрестности универсальной особой поверхности в задаче оптимального управления.

Предположим, что существует гладкая поверхность Γ , разделяющая область D на две под-области, $D = D_0 + \Gamma + D_1$. Ограничение V_i решения $V(x)$ на подобласть D_i будем предполагать дважды гладким. Таким образом, функция $V_i(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$F(x, V_i(x), V_{ix}(x)) = \min[F_0, F_1] = F_i = 0, \quad x \in D_i. \quad (2.2)$$

Предположим далее, что регулярные характеристики из областей D_i подходят к поверхности Γ трансверсально (без касания). Гладкие продолжения ветвей $V_i(x)$ на всю область D (которые существуют при сделанных предположениях) также будем обозначать через $V_i(x)$.

При наличии зависимости от V , $F = F(x, V, p)$, вместо скобок Пуассона используются скобки Якоби

$$\{FG\} = \langle F_x + pF_V, G_p \rangle - \langle G_x + pG_V, F_p \rangle.$$

При $F_V = 0, G_V = 0$ они превращаются в скобки Пуассона.

Основной результат относительно свойств данной поверхности содержится в следующей теореме [7].

Теорема 1. Пусть поверхность Γ и функции F_i, V_i являются достаточно гладкими, и пусть минимальный порядок разрывных на Γ частных производных функции $V(x)$ равен $m+1$. Тогда m — четное число, $m = 2d$, $d \geq 1$, и выполнены следующие условия:

$$\{F_0 F_1\} = 0, \dots, \{\dots \{\{F_0 F_1\} F_{j_3}\} \dots F_{j_k}\} = 0, \quad k = 3, \dots, 2d, \quad (2.3)$$

$$(-1)^r \{\dots \{\{F_0 F_1\} F_{j_3}\} \dots F_{j_{m+1}}\} \leq 0.$$

Здесь индексы j_k принимают значения 0 или 1, а r — число нулей в наборе $(0, 1, j_3, \dots, j_{m+1})$.

Решение $V(x)$ представимо в виде: $V(x) = \max[V_0(x), V_1(x)]$.

Доказательство теоремы основано на двух вспомогательных утверждениях, которые ниже сформулированы в виде лемм. Поверхность Γ в леммах имеет частный вид, является координатной гиперплоскостью $x_1 = 0$, причем $D_0 = \{x \in D : x_1 \leq 0\}$, $D_1 = \{x \in D : x_1 \geq 0\}$. Тогда предположение о трансверсальном подходе характеристик к поверхности Γ можно записать в виде:

$$F_{0p_1}(x, V, p) > 0, \quad F_{1p_1}(x, V, p) < 0, \quad x \in \Gamma. \quad (2.4)$$

Подчеркнем, что эти неравенства гарантируют существование гладкого расширения функций $V_i(x) \in C^2(D)$ из области D_i в область D как решений уравнения $F_i = 0$ в области D .

Переход к поверхности общего вида основан на инвариантности скобок Якоби при точечных преобразованиях.

Лемма 1. Пусть функции F_i, V_i дифференцируемы достаточное число раз, а натуральное число $m \geq 1$ представляет собой порядок гладкости функции $V(x) \in C^m(D)$, т.е.

$$\frac{\partial^k \Delta(x)}{\partial x_1^k} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

$$\frac{\partial^{m+1} \Delta(x)}{\partial x_1^{m+1}} \neq 0, \quad x \in \Gamma, \quad \Delta(x) = V_1(x) - V_0(x).$$

Тогда m — четное число и справедливо неравенство

$$\frac{\partial^{m+1} \Delta(x)}{\partial x_1^{m+1}} > 0.$$

Разность $\Delta(x)$ — неубывающая функция первой компоненты фазового вектора x_1 в окрестности нуля, а функция V представима в виде

$$V(x) = \max[V_0(x), V_1(x)].$$

Следствие 1. Всякое гладкое решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условию (2.4), является дважды дифференцируемым, $V(x) \in C^2(D)$; если m — минимальный порядок разрывных на Γ частных производных решения V , то $m \geq 3$ и нечетно.

Следующее утверждение приводит необходимые условия предыдущей леммы к инвариантному виду.

Лемма 2. Пусть две функции $V_i(x) \in C^r(D)$, $r \geq 2$, имеют равные частные производные порядка $k = 0, 1, \dots, r-1$ в точках плоскости $\Gamma = \{x \in D : x_1 = 0\}$ и удовлетворяют уравнениям:

$$F_i(x, V_i(x), V_{ix}(x)) = 0, \quad x \in D, \quad i = 0, 1,$$

в которых $F_i(x, V, p) \in C^{r-1}$.

Тогда в точках плоскости Γ выполнено следующее равенство:

$$\{\dots \{\{F_0 F_1\} F_{j_3}\} \dots F_{j_r}\} + (F_{0p_1})^s (F_{1p_1})^{r-s} \frac{\partial^r (V_0 - V_1)}{\partial x_1^r} = 0.$$

Здесь индексы j_3, \dots, j_r принимают значения 0 или 1; s — число нулевых компонент целочисленного вектора $(0, 1, j_3, \dots, j_r)$; $F_{ip_1} \equiv \partial F_i / \partial p_1$; $\{\cdot \cdot\}$ — скобки Якоби.

Ситуации общего положения в теореме соответствует $d = 1$, когда соотношения (2.3) принимают форму:

$$\{F_0 F_1\} = 0, \quad \{\{F_0 F_1\} F_0\} \leq 0, \quad \{\{F_1 F_0\} F_1\} \leq 0, \quad (2.5)$$

совпадающую с соотношениями (1.8). Это дает основание утверждать, что условие Келли представляет собой просто одно из свойств классического решения уравнения Гамильтона — Якоби с негладким гамильтонианом вида (2.1).

2.1. Переменные различных уровней

Для целей данной работы больший интерес представляет случай, когда в теореме $d = 2$. Для этого случая полезно ввести следующую терминологию и обозначения. Переменными уровня $k = 1, 2, \dots$ будем называть скобки Якоби с участием k функций F_i с учетом кратности. Переменными первого уровня будут сами функции F_0, F_1 , переменные второго уровня — $\{F_0 F_1\}$, $\{F_1 F_0\}$, и т. д. Для краткости переменные выше первого уровня будем обозначать строкой из индексов; так, для переменной четвертого уровня имеем $\{\{\{F_0 F_1\} F_0\} F_0\} = F_0 F_1 F_0 F_0 = (0100)$. Число различных переменных данного уровня будем обозначать через N . Введем также буквенные обозначения для переменных уровня k (некоторые из обозначений уже использованы выше):

$$k = 3 \quad (N = 2) : \quad (2.6)$$

$$A_0 = \{\{F_1 F_0\} F_1\} = (101), \quad A_1 = \{\{F_0 F_1\} F_0\} = (010);$$

$$k = 4 \quad (N = 3) :$$

$$a = (1011), \quad b = (1010) = (1001), \quad c = (1000);$$

$$k = 5 \quad (N = 6) :$$

$$a_0 = \{a F_1\} = (10111), \quad a_1 = -\{a F_0\} = (01110), \quad b_0, b_1, c_0, c_1.$$

Два представления для переменной b в случае скобок Пуассона вытекают из тождества Якоби:

$$\{\{FG\}H\} + \{\{GH\}F\} + \{\{HF\}G\} = 0.$$

В случае скобок Якоби имеет место обобщенное тождество Якоби:

$$\{\{FG\}H\} + \{\{GH\}F\} + \{\{HF\}G\} = \{FG\}H_u + \{GH\}F_u + \{HF\}G_u.$$

Тогда два представления для b имеют место, когда исчезают переменные уровня 2. Переменные b_i, c_i в (2.6) определяются аналогично a_i .

Вернемся к случаю $d = 2$ в теореме. Тогда на поверхности Γ обращаются в нуль переменные уровней 1, 2, 3, 4, а для переменных уровня 5 теорема и леммы дают следующие 6 неравенств и 4 равенства:

$$\begin{aligned} a_0 &= (10111) < 0, & b_0 &= (10101) > 0, & c_0 &= (10001) < 0, \\ a_1 &= (01110) < 0, & b_1 &= (01100) > 0, & c_1 &= (01000) < 0, \\ \frac{a_0}{a_1} &= \frac{b_0}{b_1} = \frac{c_0}{c_1} > 0, & a_1 + b_0 &= 0, & b_1 + c_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отметим попарное совпадение знаков у величин a_i, b_i, c_i . Далее будут рассмотрены задачи с особенностью второго порядка, в которых знак переменных b_i сохраняется, а знаки переменных a_i, c_i зависят от типа особенности.

2.2. Сингулярные характеристики для особой поверхности

Соотношения (2.5) и уравнение $F = \min[F_0, F_1] = 0$ приводят к системе необходимых условий

$$W_3 : \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 0, \quad \{F_0 F_1\} = 0,$$

выполненных на поверхности Γ . Тогда, согласно методу сингулярных характеристик, следующая система сингулярных характеристик определяет поверхность Γ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_0 F_{0p} + \lambda_1 F_{1p}, & \dot{u} &= \lambda_0 \langle p, F_{0p} \rangle + \lambda_1 \langle p, F_{1p} \rangle, \\ \dot{p} &= -\lambda_0 (F_{0x} + p F_{0u}) - \lambda_1 (F_{1x} + p F_{1u}), \\ \lambda_0 &= \{\{F_1 F_0\} F_1\} / \mu, & \lambda_0 + \lambda_1 &= 1, \\ \mu &= \{\{F_1 F_0\} F_1\} + \{\{F_0 F_1\} F_0\}. \end{aligned}$$

Данная система является обобщением уравнений (1.9), полученных для задачи оптимального управления.

2.3. Пример

Рассмотрим задачу оптимального управления на плоскости (x, y) , иллюстрирующую существование особенностей, рассмотренных в теореме и леммах для четных $m = 2d = 2, 4, \dots$

Уравнения движения, ограничения на скалярное управление и функционал задаются в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -vy, & \dot{y} &= vx^{m-1}/(m-1)! - 1, & |v| &\leq 1; \\ y &\geq C, & y(T) &= C, & J &= T + \Phi(x(T)) \rightarrow \min_v, & \Phi(x) &= kx^m/m!, \end{aligned}$$

где C, k — положительные постоянные такие, что $kC > 1$. Средствами принципа максимума можно показать, что при четном m луч $y \geq C, x = 0$ является универсальной линией в данной задаче. При $m = 4$ прямые вычисления скобок Пуассона показывают, что переменные уровня ниже пятого обращаются в нуль при $x = 0$, а для переменных пятого уровня имеют место равенства:

$$-a_0 = -a_1 = b_0 = b_1 = -c_0 = -c_1 = 2y^2 > 0, \quad (2.8)$$

что соответствует условиям (2.7). Кроме того, дифференцируя гладкие ветви уравнения Беллмана

$$F_0(x, y, V_{0x}, V_{0y}) = 0, \quad F_1(x, y, V_{1x}, V_{1y}) = 0,$$

по переменным x и y , можно показать, что функция $V(x, y)$ имеет 4 непрерывные производные, а производная пятого порядка по x при $x = 0$ имеет пределы слева и справа, равные соответственно

$$-\frac{1}{y^3} \quad \text{и} \quad \frac{1}{y^3},$$

что согласуется с утверждениями теоремы и лемм.

3. Однопараметрическая задача оптимального управления

Управляемая система задается уравнениями движения, ограничениями и начальными и терминальными условиями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \quad \dot{y} = u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad |u| \leq 1, \\ x(0) &= x^0, \quad y(0) = y^0; \quad x(T) = 0, \quad y(T) = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь T — нефиксированный момент окончания процесса, u — скалярный управляющий параметр. На движениях системы (3.1) рассматривается функционал, включающий вещественный параметр L :

$$J = \int_0^T x^2(t)[Lu(t) + 1]dt, \quad |L| < 1. \quad (3.2)$$

Допустимыми управлениями считаются кусочно-непрерывные функции $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, удовлетворяющие ограничению (3.1), т.е. принимающие значения из интервала $[-1, 1]$. Рассматривается задача о минимизации функционала (3.2) в классе допустимых управлений и соответствующих движений системы (3.1).

При $L = 0$ получаем задачу Фуллера, исследованную ранее [4], [5]. Полное исследование задачи Фуллера и других задач оптимального управления с учащающимися переключениями можно найти в монографии [6].

Ограничение $|L| < 1$ на параметр L обеспечивает положительную определенность функционала (3.2). При других значениях L , $|L| > 1$, минимум функционала (3.2) не существует: можно построить последовательность допустимых управлений, на которых значение функционала (3.2) стремится к $-\infty$.

В вычислениях использовался и другой параметр, a , связанный с параметром L соотношениями

$$a = \frac{1+L}{1-L}, \quad -1 < L < 1; \quad L = \frac{a-1}{a+1}, \quad 0 < a < \infty. \quad (3.3)$$

При этом функционал (3.2) с точностью до положительного множителя $a+1$ представляется в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T x^2(t)[(1+u)a + 1 - u]dt. \quad (3.4)$$

Использование параметра L приводит к более симметричным соотношениям. Следует отметить, что достаточно рассмотреть только положительные значения параметра L , поскольку при $L < 0$ можно заменить x на $-x$, u на $-u$ в (3.1), а тогда можно взять $-L$ вместо L .

В терминах параметра a выражение для гамильтонианов задачи и их скобок Пуассона получаются более простыми.

В работе [10] решение сформулированной задачи построено на основе необходимых условий принципа максимума, затем оптимальность полученной картины синтеза доказана с помощью уравнения Беллмана. Доказано, что в зависимости от значения параметра задачи существуют два типа оптимальных фазовых портретов — портрет, содержащий режим с учащающимися переключениями, и портрет с двумя переключениями и особой дугой первого порядка.

3.1. Режим с учащающимися переключениями

Указанный режим возникает при следующих значениях параметра (L или a):

$$|L| < \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{5} < a < \frac{5}{3}.$$

В [10] доказано, что при этих значениях параметра в плоскости (x, y) существует кривая переключения, состоящая из двух (не симметричных друг другу) полупарабол. Найдены соотношения, из которых численно единственным образом определяются коэффициенты полупарабол. Фазовая траектория по часовой стрелке огибает начало координат, претерпевая счетное множество изломов (переключений управляющего параметра) до выхода за конечное время в начало координат. Подобная траектория в пространстве (x, y, t) показана на рис. 2. Особой дугой второго порядка является отрезок (вертикальной) оси времени:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad u = 0, \quad p = 0, \quad q = 0, \quad t \in (t_1, t_2).$$

Для проведения необходимых вычислений введем гамильтонианы:

$$H = py + \frac{1}{2}(a+1)x^2 + u(q + \frac{1}{2}(a-1)x^2) = G + uR,$$

$$F_0 = py - q + ax^2 \quad (u = -1),$$

$$F_1 = py + q + x^2 \quad (u = 1).$$

Прямые вычисления показывают, что на особой дуге все переменные от первого до четвертого уровня обращаются в нуль. Скобки Пуассона пятого уровня в терминах F_0, F_1 оказываются равными:

$$\begin{aligned} a_0 &= (10001) = a_1 = (01000) = 2(5a - 3), \\ b_0 &= (10011) = (10101) = b_1 = (01010) = (01100) = 2(a + 1), \\ c_0 &= (10111) = c_1 = (01110) = 2(5 - 3a). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Условия Келли — Коппа — Мойера имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H}{\partial u} = \{\{\{\{RG\}G\}G\}R\} = a + 1 > 0,$$

где правая часть с точностью до положительного множителя совпадает с переменной b_i .

Таким образом, для интервала значений параметра a , в котором имеет место режим с учащающимися переключениями, выполнены неравенства:

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i > 0 \quad \left(\frac{3}{5} < a < \frac{5}{3} \right). \tag{3.6}$$

Все переменные пятого уровня имеют одинаковый знак — положительный.

3.2. Режим с двумя переключениями и особой дугой первого порядка

На особой дуге первого порядка исчезают обе составляющие гамильтониана H :

$$R = q + Lx^2 = 0, \quad G = py + x^2 = 0,$$

а также их скобка Пуассона:

$$\{RG\} = 2Lxy - p = 0.$$

Из этих равенств следует, что особой дугой может быть парабола:

$$x = -2Ly^2.$$

Особое управление вычисляется по формуле (1.4) или (1.7) подразд. 1.2:

$$u_\sigma = -1/4L.$$

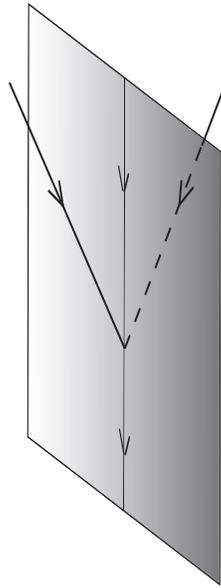


Рис. 1. Особая универсальная поверхность: $a_i < 0, b_i > 0, c_i < 0$.

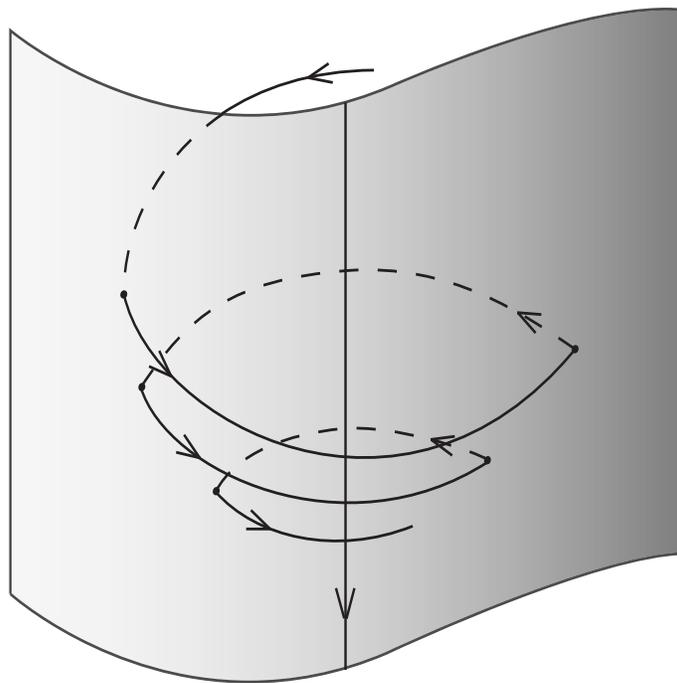


Рис. 2. Режим с учащающимися переключениями: $a_i > 0, b_i > 0, c_i > 0$.

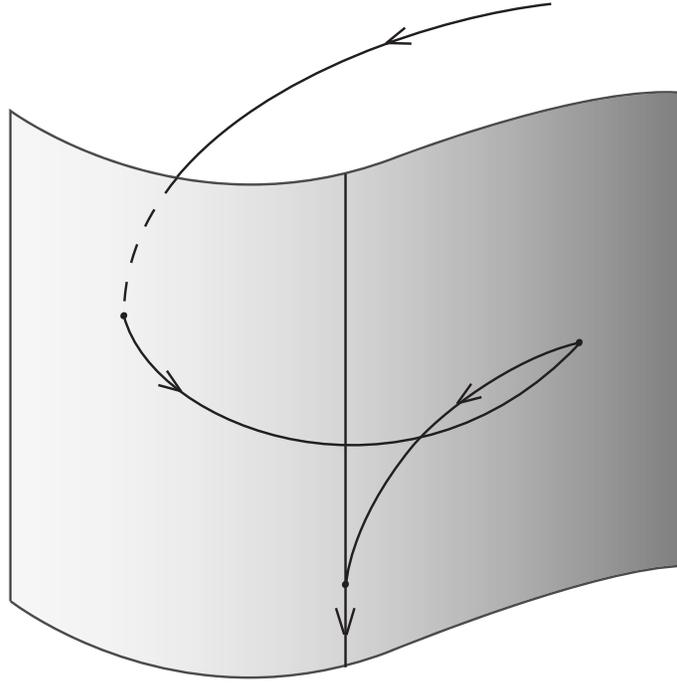


Рис. 3. Режим с двумя переключениями и особой дугой первого порядка:
 $a_i < 0, b_i > 0, c_i > 0$ ($0 < a < 3/5$); $a_i > 0, b_i > 0, c_i < 0$ ($5/3 < a < \infty$).

Используя гамильтониан и особое управление, можно показать, что условие Келли на особой параболе оказывается выполненным:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial H}{\partial u} = -8L^2 y^2 \leq 0.$$

Изменение знака неравенства здесь вызвано изменением знака сопряженных переменных.

Особое управление должно удовлетворять исходному ограничению $|u_\sigma| \leq 1$, откуда видно, что особый режим может существовать лишь при $|L| \geq 1/4$. Это условие выделяет два интервала значений параметра L и a :

$$-1 < L < -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} < L < 1; \quad 0 < a < \frac{3}{5}, \quad \frac{5}{3} < a < \infty.$$

Между этими интервалами лежит интервал, соответствующий режиму с учащающимися переключениями. Для правого интервала особая дуга первого порядка лежит во втором квадранте плоскости (x, y) , для левого интервала — в четвертом квадранте.

Для двух указанных интервалов переменные уровней 1–4 обращаются в нуль, а переменные пятого уровня, согласно вышеприведенным формулам (3.5), отличны от нуля и имеют следующие знаки:

$$a_i < 0, \quad b_i > 0, \quad c_i > 0 \quad (0 < a < \frac{3}{5}); \quad a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i < 0 \quad (\frac{5}{3} < a < \infty). \quad (3.7)$$

Таким образом, знаки переменных a_i, c_i позволяют различать, в каком квадранте расположена особая дуга первого порядка.

4. Заключение

Таким образом, в работе рассмотрены три типа структуры оптимальных траекторий в окрестности особой дуги (траектории) второго порядка, а именно: универсальная поверхность, режим с учащающимися переключениями, режим с двумя переключениями и особой дугой первого порядка. В последнем случае можно различать два подслучая в зависимости от расположения особой дуги первого порядка. Для всех случаев оказывается положительным параметр b_i . Это есть условие Коппа — Мойера. У двух других параметров a_i , c_i есть четыре возможности принять тот или иной знак: $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$. Все эти возможности реализуются и соответствуют различным фазовым портретам. Знаки этих коэффициентов доставляют дополнительные к условиям Коппа — Мойера необходимые условия, которые описывают не сами особые дуги, а оптимальную фазовую картину в их окрестности. Качественная картина оптимального портрета вместе со знаками переменных пятого уровня представлена на рис. 1–3.

Картина, связанная с универсальной поверхностью, исследована в общем случае в [7]. Свойства режима с учащающимися переключениями в контексте разрывных гамильтоновых систем изучены в [6]. Режим с двумя переключениями и особой дугой первого порядка исследован на основе одной конкретной задачи [10].

Одним из интересных открытых вопросов в данном направлении является дополнение условий (2.7), (3.6), (3.7) данной работы до достаточных условий существования той или иной оптимальной фазовой картины.

Поступила 21.06.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976. 392 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973. 256 с.
3. Isaacs R. Differential Games. Wiley, New York etc., 1965. (Перев. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.)
4. Fuller A.T. Study of an optimum non-linear control system // J. of Electronics and Control. 1963. V. 15, no. 1. P. 63–71.
5. Wonham W.M. Note on a problem in optimal non-linear control // J. of Electronics and Control. 1963. V. 15, no. 1. P. 59–62.
6. Zelikin M.I., Borisov V.F. Theory of Chattering Control with Applications to Astronautics, Robotics, Economics and Engineering. Boston: Birkhäuser, 1993. 256 p.
7. Melikyan A.A. Generalized Characteristics of First Order PDEs: Applications in Optimal Control and Differential Games. Boston: Birkhäuser, 1998. 320 p.
8. Меликян А.А. Сингулярные характеристики уравнений в частных производных первого порядка // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 1, С. 24–28.
9. Субботин А.И. Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. Москва — Ижевск: Ин-т компьютер. исслед. 2003. 335 с.
10. Алдакимов Ю.В., Меликян А.А., Наумов Г.В. Перестройка режима в однопараметрическом семействе задач оптимального управления // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 400–407.

УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ МОДЕЛЕЙ¹

М. С. Никольский

Рассматриваются три упрощенные модели разработки карьеров. Первая и третья модели являются экстремальными, а вторая модель описывается в терминах дифференциальной игры. Для каждой из моделей найдены достаточные условия на параметры задачи, при которых оптимальное управление имеет простой вид. Используются принцип максимума Понтрягина и теория позиционных дифференциальных игр, разработанная Н. Н. Красовским и его школой.

На кафедре оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ в рамках семинара по экономическому моделированию в 2005 году были разработаны и изучены упрощенные математические модели управления процессом добычи полезных ископаемых (см., например, [1, 2]). Рассматриваемые в настоящей статье модели используют некоторые идеи, заложенные в моделях [1, 2]. Для лучшего понимания прикладниками результатов статьи она написана весьма подробно.

Модель 1. Обозначим через $x(t)$ объем добытой породы к моменту t , выраженный в некоторых физических единицах (например, в кубометрах). Считая функцию $x(t)$ дифференцируемой, можно написать соотношение

$$\dot{x}(t) = u(t),$$

где $u(t)$ — скорость добычи породы в момент t . Обычно скорость $u(t)$ может меняться в некоторых пределах, диктуемых техническими возможностями рудника. Например, естественным является ограничение вида $u(t) \in [p_1, p_2]$, где $0 \leq p_1 < p_2$. В обозначениях теории оптимального управления (см. [3–5]) динамику переменной величины $x(t)$ можно описать уравнением

$$\dot{x} = u, \tag{1}$$

где

$$u \in [p_1, p_2], \quad 0 \leq p_1 < p_2. \tag{2}$$

Пусть фиксированы отрезок времени $[0, T]$, где $T > 0$, начальное и конечное условия:

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_1, \tag{3}$$

где $0 \leq x_0 < x_1$. Допустимые управления $u(t) \in [p_1, p_2]$, $t \in [0, T]$, будем рассматривать в классе измеримых по Лебегу функций, а решения $x(t)$ уравнения (1) — в классе абсолютно непрерывных функций, т.е. $x(t) = x_0 + \int_0^t u(s) ds$, где интеграл понимается в смысле Лебега.

Качество допустимого управления $u(\cdot)$ будем оценивать функционалом

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\nu s} g(x(s)) u(s) ds, \tag{4}$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-08034-офи-п, 05-01-00193).

где $\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования, $g(x)$ — удельная прибыль добывающей компании, когда уже добыто x единиц объема породы. Функция $g(x)$ считается непрерывно дифференцируемой на числовой оси, причем допускаются отрицательные значения функции $g(x)$. Величину $I(u(\cdot))$ можно назвать дисконтированной прибылью добывающей компании. Целью добывающей компании является максимизация функционала $I(u(\cdot))$.

В дальнейшем будем считать выполненным неравенство

$$x_0 + Tp_1 \leq x_1 \leq x_0 + Tp_2. \quad (5)$$

Это условие обеспечивает достижимость управляемым объектом (1), (2) финальной точки x_1 в момент T при выходе его из начальной точки x_0 . Используя известные теоремы существования оптимального управления (см. [4]), нетрудно обосновать существование оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, T]$ в рассматриваемой оптимизационной задаче. Для получения информации об оптимальном управлении $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, T]$, рассмотрим функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H(\psi_0, \psi, x, t, u) = \psi_0 e^{-\nu t} g(x)u + \psi u, \quad (6)$$

и сопряженное уравнение

$$\dot{\psi} = -\psi_0 e^{-\nu t} g'(\tilde{x}(t))\tilde{u}(t), \quad (7)$$

где $\tilde{x}(t) = x_0 + \int_0^t \tilde{u}(s) ds$. Согласно принципу максимума Понтрягина (см. [3–5]) найдется такая пара $(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}(t))$, где $\tilde{\psi}_0 \geq 0$ — константа, $\tilde{\psi}(t)$ — решение уравнения (7), что $|\tilde{\psi}_0| + |\tilde{\psi}(t)| > 0$ при $t \in [0, T]$ и почти всюду на $[0, T]$ (см. [6])

$$\max_{u \in [p_1, p_2]} H(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), t, u) = H(\tilde{\psi}_0, \tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), t, \tilde{u}(t)). \quad (8)$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $\tilde{\psi}_0 > 0$. Тогда можно считать, что $\tilde{\psi}_0 = 1$. Условие (8) теперь можно переписать так: почти всюду на $[0, T]$

$$\max_{u \in [p_1, p_2]} h(t)u = h(t)\tilde{u}(t), \quad (9)$$

где

$$h(t) = e^{-\nu t} g(\tilde{x}(t)) + \tilde{\psi}(t). \quad (10)$$

Функцию $h(t)$ естественно назвать функцией переключения. Используя формулы (1), (7), (10), получаем, что почти всюду на $[0, T]$

$$\dot{h}(t) = -\nu e^{-\nu t} g(\tilde{x}(t)). \quad (11)$$

Так как $u \in [p_1, p_2]$, где $p_1 \geq 0$, то $\tilde{x}(t)$ — монотонно растущая функция, и поэтому при $t \in [0, T]$

$$\tilde{x}(t) \in [x_0, x_1]. \quad (12)$$

Использование принципа максимума Понтрягина сильно упрощается при выполнении следующего условия:

$$(A) \quad g(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in [x_0, x_1].$$

Действительно, из (11), (12) и (A) вытекает, что функция $h(t)$ (см. (10)) строго монотонно убывает на $[0, T]$, и поэтому уравнение $h(t) = 0$ имеет не более одного корня на $[0, T]$. Отсюда следует в силу соотношения (9), что функция $\tilde{u}(t)$ при $t \in [0, T]$ эквивалентна кусочно-постоянной функции

$$u_{\text{opt}}(t) = \begin{cases} p_2 & \text{при} \quad t \in [0, \theta) \\ p_1 & \text{при} \quad t \in [\theta, T], \end{cases} \quad (13)$$

где константа $\theta \in [0, T]$. Для θ должно выполняться равенство

$$x_0 + p_2\theta + p_1(T - \theta) = x_1,$$

т.е.

$$\theta = \frac{x_1 - x_0 - p_1T}{p_2 - p_1}. \quad (14)$$

Случай 2: $\tilde{\psi}_0 = 0$. Тогда (см. (7)) $\tilde{\psi}(t)$ является ненулевой константой. Из условия максимума (8) получаем, что $\tilde{u}(t)$ эквивалентна на $[0, T]$ постоянной функции, равной либо p_1 , либо p_2 , при этом выполняется либо равенство $x_0 + Tp_1 = x_1$, либо равенство $x_0 + Tp_2 = x_1$ соответственно. Таким образом, функция $\tilde{u}(t)$ эквивалентна функции $u_{\text{opt}}(t)$ либо с $\theta = 0$, либо с $\theta = T$ соответственно.

Из приведенного анализа двух возможных случаев вытекает, что с точностью до эквивалентности оптимальное управление при выполнении условия (A) определяется однозначным образом (см. (13), (14)).

З а м е ч а н и е 1. Константа θ (см. (14)) при выполнении условия (A) не зависит от конкретного вида функции $g(x)$ и константы $\nu > 0$. Это обстоятельство представляется весьма неожиданным.

В заключение этого раздела остановимся на случае, когда функция $g(x)$ положительна и кусочно-постоянна при $x \in [x_0, x_1]$, т.е. существуют такие последовательности чисел τ_i , $i = 0, \dots, N$, $g_i > 0$, $i = 0, \dots, N - 1$ ($N \geq 1$), что

$$x_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N = x_1, \quad (15)$$

$$g(x) \equiv g_i > 0 \quad \text{при} \quad x \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i = 0, \dots, N - 1. \quad (16)$$

Положим

$$\begin{aligned} g(x_1) &= g_{N-1}, \\ g(x) &= g(x_0) \quad \text{при} \quad x < x_0, \\ g(x) &= g(x_1) \quad \text{при} \quad x > x_1. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что кусочно-постоянные функции $g(x)$ представляют определенный интерес для приложений, так как цены в экономике могут меняться скачкообразно и сохранять постоянное значение на временных полуинтервалах.

Здесь использовать принцип максимума в классической формулировке (см. [3–5]) нельзя. Но можно поступить так. Рассмотрим некоторую последовательность гладких на числовой оси и положительных на $[x_0, x_1]$ функций $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots$ со следующими свойствами:

(а) $g_j(x) = g(x)$ на множестве $[x_0, x_1] \setminus X_j$, где $X_j = \bigcup_{i=1}^{N-1} [\tau_i - \varepsilon_j, \tau_i + \varepsilon_j]$, $\varepsilon_j > 0$, причем последовательность ε_j монотонно стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$;

(б) каждая из функций $g_j(x)$ ограничена на $[x_0, x_1]$ константой

$$\gamma = \max_{i=0, \dots, N-1} g_i.$$

Отметим, что такую последовательность функций $g_j(x)$ нетрудно построить с помощью соболевского усреднения функции $g(x)$ (см., например, [6]).

Будем считать, что $p_1 > 0$ и что выполнено условие (5). Если фиксировать допустимое управление $\hat{u}(t)$, $t \in [0, T]$, то нетрудно видеть, что при $j \rightarrow \infty$

$$I_j(\hat{u}(\cdot)) \rightarrow I(\hat{u}(\cdot)),$$

где $I_j(u(\cdot))$ определяется формулой (4) с заменой $g(x)$ на $g_j(x)$. Используя это обстоятельство, можно доказать от противного, что управление $u_{\text{opt}}(t)$ (см. (13)) будет оптимальным и для кусочно-постоянной функции $g(x)$ (см. (15), (16)).

Модель 2. В модели 1 не учитывается возможность разного рода помех и флуктуаций, которые неизбежно появляются на практике. Одним из возможных способов учета возмущающих факторов является использование конфликтно-управляемых моделей, изучаемых в теории дифференциальных игр (см., например, [7]).

Здесь мы рассмотрим конфликтно-управляемый объект

$$\dot{x} = u - v, \quad (17)$$

где x по-прежнему означает объем добытой породы, $u \in [p_1, p_2]$, $v \in [q_1, q_2]$, причем

$$0 \leq p_1 < p_2, \quad q_1 \leq q_2, \quad (18)$$

$$p_1 - q_2 \geq 0. \quad (19)$$

В (17) параметр u означает скорость добычи, а v моделирует воздействие различных помех, возникающих при добыче. Будем пока считать, что $u = u(t)$, $v = v(t)$ — измеримые по Лебегу функции на $[0, T]$.

Пусть фиксированы краевые условия (3), где $0 \leq x_0 < x_1$. Качество допустимой пары $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ будем по аналогии с моделью 1 (см. (4)) оценивать функционалом

$$I_1(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^T e^{-\nu s} g(x(s))(u(s) - v(s)) ds, \quad (20)$$

где $\nu > 0$ и $g(x)$ — гладкая функция на числовой оси, причем выполнено условие (13). Игрок M (Mining company) управляет величиной $u(t)$, $t \in [0, T]$. Игрок N (Nature) управляет величиной $v(t)$, $t \in [0, T]$. Игрок M стремится к максимизации функционала (20). Важным является вопрос об информации, доступной игрокам. Будем считать, что игрок M знает динамические возможности конфликтно-управляемого объекта x (см. (17)), краевые условия (3), константу $\nu > 0$, функцию $g(x)$ в (20), а также при каждом $t \in [0, T]$ текущее значение $x(t)$. Относительно игрока N будем предполагать, что он до игры выбирает измеримую функцию $v(t)$ на $[0, T]$, причем она неизвестна игроку M .

Используя результаты и методы монографии [7], можно предложить следующий простой способ построения кусочно-постоянного управления $u_h(t)$ (параметр $h > 0$), обладающего целым рядом достоинств. Будем предполагать выполненными в дополнение к неравенствам (18), (19) следующие неравенства:

$$p_2 - p_1 > q_2 - q_1, \quad (21)$$

$$x_0 + T(p_1 - q_1) \leq x_1 \leq x_0 + T(p_2 - q_2).$$

При выполнении неравенств (18), (19), (21) множество

$$W = \bigcap_{v \in [q_1, q_2]} ([p_1, p_2] - v) \quad (22)$$

непусто и для него справедлива формула

$$W = [p_1 - q_1, p_2 - q_2], \quad (23)$$

где

$$0 \leq p_1 - q_1 < p_2 - q_2.$$

Сопоставим дифференциальной игре (17), (20) управляемый объект

$$\dot{y} = w, \quad (24)$$

$$y(0) = x_0, \quad y(T) = x_1, \quad (25)$$

где управление w стеснено ограничением $w \in W$ (см. (23)), и функционал (ср. (20))

$$I_2(w(\cdot)) = \int_0^T e^{-\nu s} g(y(s)) w(s) ds, \quad (26)$$

максимизируемый на измеримых функциях $w(t) \in W$, $t \in [0, T]$. Согласно результатам, полученным по модели 1, в оптимизационной задаче (24)–(26) оптимальным управлением является функция

$$\tilde{w}(t) = \begin{cases} p_2 - q_2 & \text{при } t \in [0, \tilde{\theta}), \\ p_1 - q_1 & \text{при } t \in [\tilde{\theta}, T], \end{cases} \quad (27)$$

где

$$\tilde{\theta} = \frac{x_1 - x_0 - (p_1 - q_1)T}{(p_2 - q_2) - (p_1 - q_1)}. \quad (28)$$

Обозначим $\tilde{y}(t) = x_0 + \int_0^t \tilde{w}(s) ds$. При произвольных x и $t \in [0, T]$ определим функцию

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} p_2, & \text{если } x \leq \tilde{y}(t), \\ p_1, & \text{если } x > \tilde{y}(t). \end{cases} \quad (29)$$

Отметим, что $\tilde{u}(x, t)$ — разрывная функция. Если ее и некоторую измеримую функцию $v(t) \in [q_1, q_2]$ подставить в (17), а затем попытаться решить полученное дифференциальное уравнение с начальным условием $x(0) = x_0$, то возникают трудности. В [7] подобные трудности преодолеваются в общем виде с помощью введения нового понятия решения — понятия движения — и рекомендуется на практике использовать соответствующие приближенные кусочно-постоянные управления $\tilde{u}_h(t)$ с малым шагом $h > 0$. Опишем построение $\tilde{u}_h(t)$. Фиксируем $h \in (0, T]$ и произвольное измеримое управление $v(t) \in [q_1, q_2]$, $t \geq 0$. При $t \in [0, h)$ решим уравнение (17) при $u \equiv \tilde{u}(x_0, 0)$, $v = v(t)$, с начальным условием $x(0) = x_0$. Получим при $t \in [0, h)$ решение $\hat{x}(t)$, которое по непрерывности доопределим при $t = h$. Обозначим $\xi_1 = \hat{x}(h)$. Если $h < T$, то продолжим решение $\hat{x}(t)$ уравнения (17) на $[h, 2h)$, подставляя в (17) $u \equiv \tilde{u}(\xi_1, h)$, $v = v(t)$ и используя начальное условие $\hat{x}(h) = \xi_1$. Доопределим $\hat{x}(t)$ при $t = 2h$ по непрерывности слева. Если $2h < T$, то аналогичным образом продолжим решение $\hat{x}(t)$ на $[2h, 3h)$ и т. д., пока не определим $\hat{x}(t)$ на всем отрезке $[0, T]$. Таким образом, при построении $\hat{x}(t)$ используется позиционное управление $\tilde{u}(x, t)$ в “замороженном” на полуинтервалах виде. В результате получаем кусочно-постоянное управление $u_h(t)$ (которое зависит от $(h, v(\cdot))$) и соответствующее решение $\hat{x}(t)$. Оказывается, с уменьшением $h > 0$ решение $\hat{x}(t)$ все точнее аппроксимирует решение $\tilde{y}(t)$ в метрике $C[0, T]$. Для обоснования этого факта проведем рассуждения, аналогичные рассуждениям [7, разд. 14], с очевидными упрощениями.

Рассмотрим при $t \in [0, T]$ функцию

$$\rho(t) = \hat{x}(t) - \tilde{y}(t). \quad (30)$$

Почти всюду при $t \in [0, T]$

$$\frac{d\rho^2(t)}{dt} = 2(\hat{x}(t) - \tilde{y}(t))(\tilde{u}_h(t) - v(t) - \tilde{w}(t)). \quad (31)$$

Рассмотрим некоторый полуинтервал $[kh, (k+1)h] \in [0, T]$, где k — неотрицательное целое число. Так как $\rho^2(t)$ — абсолютно непрерывная на $[0, T]$ функция, то с помощью (31) при $t \in [kh, (k+1)h]$ получаем неравенство

$$\rho^2(t) \leq \rho^2(kh) + 2(\hat{x}(kh) - \tilde{y}(kh)) \int_{kh}^t (\tilde{u}_h(s) - v(s) - \tilde{w}(s)) ds + l^2 h^2, \quad (32)$$

где через l обозначен максимум по (u, v, w) функции $|u - v - w|$ на множестве $[p_1, p_2] \times [q_1, q_2] \times W$. При получении неравенства (32) используется липшицевость функции $\hat{x}(t) - \tilde{y}(t)$ с константой l . Отметим, что

$$\tilde{u}_h(s) \equiv \tilde{u}(\hat{x}(kh), kh) \quad \text{при} \quad s \in [kh, (k+1)h]. \quad (33)$$

Используя определение множества W (см. (22), (23)) и определение $\tilde{u}(x, t)$, при $s \in [kh, (k+1)h]$ с помощью (33) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v(s) + \tilde{w}(s) &\in [p_1, p_2], \\ (\hat{x}(kh) - \tilde{y}(kh))(v(s) + \tilde{w}(s)) &\geq (\hat{x}(kh) - \tilde{y}(kh))\tilde{u}_h(s). \end{aligned} \quad (34)$$

Из (34) вытекает, что второй член в неравенстве (32) неположителен при $t \in [kh, (k+1)h]$. Таким образом, при $t \in [kh, (k+1)h]$

$$\rho^2(t) \leq \rho^2(kh) + l^2 h^2.$$

Отсюда и из равенства $\rho(0) = 0$ вытекает, что при $t \in [0, T]$

$$\rho^2(t) \leq l^2 h^2 \left(\frac{T}{h} + 1 \right). \quad (35)$$

Таким образом (см. (30), (35)), при $t \in [0, T]$ обосновано неравенство

$$|\hat{x}(t) - \tilde{y}(t)| \leq lh^{\frac{1}{2}}(T+h)^{\frac{1}{2}}, \quad (36)$$

причем правая часть не зависит от допустимого управления $v(\cdot)$. Теперь покажем, что при $h \rightarrow 0+$ равномерно по допустимым управлениям $v(\cdot)$ выполняется (см. (20), (26), (27), (28))

$$I_1(\tilde{u}_h(\cdot), v(\cdot)) \rightarrow I_2(\tilde{w}(\cdot)). \quad (37)$$

Из (20), (26), (36) и гладкости функции $g(x)$ вытекает, что для обоснования соотношения (37) достаточно показать, что величина

$$\Delta_h = \int_0^T e^{-\nu s} g(\tilde{y}(s)) \omega(s) ds,$$

где

$$\omega(s) = \tilde{u}_h(s) - v(s) - \tilde{w}(s), \quad (38)$$

стремится к нулю при $h \rightarrow 0+$ равномерно по допустимым управлениям $v(\cdot)$. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\Delta_h = e^{-\nu T} g(\tilde{y}(T)) \int_0^T \omega(r) dr - \int_0^T \left[\frac{d}{ds} (e^{-\nu s} g(\tilde{y}(s))) \int_0^s \omega(r) dr \right] ds. \quad (39)$$

Очевидно (см. (38)),

$$\int_0^s \omega(r) dr = \hat{x}(s) - \tilde{y}(s). \quad (40)$$

Из (36), (39), (40) получаем искомое соотношение (37).

Таким образом, при малых $h > 0$ кусочно-постоянное управление $\tilde{u}_h(t)$ гарантирует малость величины $|\hat{x}(T) - x_1| + |I_1(\tilde{u}_h(\cdot), v(\cdot)) - I_2(\tilde{w}(\cdot))|$ равномерно по допустимым управлениям $v(\cdot)$. Чтобы оценить важность позиционного управления $\tilde{u}(x, t)$ для исследуемой дифференциальной игры (17), (20) при сделанных выше предположениях, отметим следующее. С помощью результатов [7, разд. 51] можно построить такое позиционное управление $\tilde{v}(x, t)$, что позиционные стратегии $\tilde{u}(x, t)$, $\tilde{v}(x, t)$ образуют седловую точку в дифференциальной игре (17), (20) в классе позиционных стратегий с ценой игры $I_2(\tilde{w}(\cdot))$, если рассматривать не классические решения, а движения. Таким образом, кусочно-постоянное управление $\tilde{u}_h(t)$ обеспечивает малость величины $|\hat{x}(T) - x_1| + |I_1(\tilde{u}_h(\cdot), v(\cdot)) - I_2(\tilde{w}(\cdot))|$ при малых $h > 0$ и может рассматриваться как аппроксимация оптимальной (в смысле седловой точки) позиционной стратегии $\tilde{u}(x, t)$. Отметим также, что функцию $\tilde{y}(t)$, $t \in [0, T]$, естественно назвать магистральной кривой для игрока M в исследуемой дифференциальной игре: используя кусочно-постоянное управление $\tilde{u}_h(t)$ с малым $h > 0$, игрок M в силу неравенства (36) обеспечивает близость функций $\hat{x}(t)$, $\tilde{y}(t)$ в смысле метрики $C[0, T]$, а также близость $I_1(\tilde{u}_h(\cdot), v(\cdot))$ к величине $I_2(\tilde{w}(\cdot))$, которая является ценой игры в позиционных стратегиях.

Модель 3. Предыдущая модель учитывала возможность появления помех и возмущений в процессе добычи. При этом функция $g(x)$ (удельная прибыль) считалась независимой от возмущающих факторов. Однако в реальности функция $g(x)$ существенным образом зависит от цен на оборудование, на добываемые полезные ископаемые, на рабочую силу и т.д., которые могут меняться. По-видимому, одним из рациональных подходов, учитывающих непредсказуемость этих и других параметров производства, является использование языка и понятий теории вероятностей (см., например, [8]). Предлагаемая в этом пункте модель является некоторым вероятностным обобщением модели 1.

Пусть динамика переменной величины $x(t)$ описывается уравнением (1) с ограничением на управляющий параметр u вида (2) и краевыми условиями (3). Управляющие функции $u(t) \in [p_1, p_2]$, $t \in [0, T]$, измеримы по Лебегу. Рассмотрим функционал (ср. (4))

$$I_3(\xi, u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\nu s} g(\xi, x(s)) u(s) ds, \quad (41)$$

где

$$g(\xi, x) = g_1(x) + \xi g_2(x), \quad (42)$$

$\nu > 0$ — коэффициент дисконтирования, $g(\xi, x)$ — удельная прибыль, функции $g_1(x)$, $g_2(x)$ непрерывно дифференцируемы на числовой оси, $\xi = \xi(\omega)$ — случайная величина, определенная на измеримом пространстве (Ω, F) (см. [8, гл. II, разд. 4]). Будем считать, что $\xi(\omega) = \omega$, $\Omega = [\omega_1, \omega_2]$ — отрезок на числовой оси. Пусть далее на σ -алгебре F подмножеств Ω определена вероятностная мера P (см. [8, гл. II, разд. 1]) и для случайной величины ξ существуют математическое ожидание $M\xi = \int_{\Omega} \xi dP$ (см. [8, гл. II, разд. 6]) и дисперсия $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$ по

мере P . Отметим, что в (41) $x(s) = x_0 + \int_0^s u(s) ds$, где интеграл понимается в смысле Лебега.

Используя известные свойства математического ожидания и дисперсии (см. [8]), получаем при

фиксированном допустимом управлении $u(\cdot)$ (см. (41), (42))

$$MI_3(\xi, u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\nu s} g_3(x(s))u(s) ds, \quad (43)$$

$$DI_3(\xi, u(\cdot)) = D\xi \left(\int_0^T e^{-\nu s} g_2(x(s))u(s) ds \right)^2, \quad (44)$$

где

$$g_3(x) = g_1(x) + M\xi g_2(x). \quad (45)$$

Сформируем теперь новый функционал

$$I_4(u(\cdot)) = MI_3(\xi, u(\cdot)) - \alpha DI_3(\xi, u(\cdot)), \quad (46)$$

где $\alpha \geq 0$ — константа, называемая коэффициентом риска. Будем рассматривать задачу максимизации функционала $I_4(u(\cdot))$ на допустимых управлениях $u(\cdot)$ и соответствующих решениях уравнения (1) с краевыми условиями (3).

З а м е ч а н и е 3. Вид функционала I_4 (см. (45)) был предложен для более общей ситуации А. В. Кряжским.

Учитывая формулы (43)–(46), получаем

$$I_4(u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\nu s} g_3(x(s))u(s) ds - \alpha D\xi \left(\int_0^T e^{-\nu s} g_2(x(s))u(s) ds \right)^2.$$

Введем добавочное уравнение

$$\dot{y} = e^{-\nu t} g_2(x)u \quad (47)$$

с начальным условием $y(0) = 0$ и рассмотрим эквивалентную задачу максимизации по допустимым $u(\cdot)$ нового функционала

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T e^{-\nu s} g_3(x(s))u ds - \alpha D\xi \cdot y^2(T),$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решения уравнений (1), (47) с краевыми условиями (3) и $y(0) = 0$. Пусть выполнены неравенства (5). Применяя известные теоремы существования оптимального управления (см. [4]) к этой новой задаче максимизации, нетрудно обосновать для нее существование оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, T]$. Чтобы охарактеризовать свойства $\tilde{u}(t)$ на $[0, T]$, рассмотрим в соответствии с общим принципом максимума Понтрягина (см. [5]) функцию Гамильтона — Понтрягина

$$H(\psi, x, y, t, u) = \psi_0 e^{-\nu t} g_3(x)u + \psi_1 u + \psi_2 e^{-\nu t} g_2(x)u \quad (48)$$

и малый лагранжиан

$$l(x, y, \psi_0, a) = \psi_0 \alpha D\xi \cdot y^2 + a(x - x_1),$$

где $\psi_0 \geq 0$, a — число произвольного знака. Рассмотрим далее (см. [5]) сопряженную систему

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= (-\psi_0 e^{-\nu t} g'_3(\tilde{x}(t)) - \psi_2 e^{-\nu t} g'_2(\tilde{x}(t)))\tilde{u}(t), \\ \dot{\psi}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

(штрих означает дифференцирование по x) с краевыми условиями

$$\begin{aligned}\psi_1(T) &= -a, \\ \psi_2(T) &= -2\psi_0\alpha \cdot D\xi \cdot \tilde{y}(T).\end{aligned}\tag{50}$$

Из (49), (50) следует, что при $t \in [0, T]$ функция $\tilde{\psi}_2(t) \equiv \tilde{\psi}_2$, где

$$\tilde{\psi}_2 = -2\psi_0\alpha D\xi \cdot \tilde{y}(T).\tag{51}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, для оптимального управления $\tilde{u}(t)$, $t \in [0, T]$, существует такая пара чисел $(\tilde{\psi}_0, \tilde{a})$, причем $\tilde{\psi}_0 \geq 0$, $\tilde{\psi}_0 + |\tilde{a}| > 0$, и такое векторное решение $\tilde{\psi}(t)$ сопряженной системы (49) с краевыми условиями (50), где $a = \tilde{a}$, $\psi_0 = \tilde{\psi}_0$, что почти всюду на $[0, T]$ выполняется условие максимума

$$\max_{u \in [p_1, p_2]} H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), u) = H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), \tilde{u}(t)).\tag{52}$$

Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1: $\tilde{\psi}_0 > 0$. Здесь можно считать, что $\tilde{\psi}_0 = 1$, т.е.

$$H(\tilde{\psi}(t), \tilde{x}(t), \tilde{y}(t), u) = h(t)u,$$

где

$$h(t) = e^{-\nu t} g_3(\tilde{x}(t)) + \tilde{\psi}_1(t) + \tilde{\psi}_2 e^{-\nu t} g_2(\tilde{x}(t)).\tag{53}$$

Учитывая формулы (49), получим из (53), что почти всюду на $[0, T]$

$$\dot{h} = -\nu e^{-\nu t} (g_3(\tilde{x}(t)) + \tilde{\psi}_2 g_2(\tilde{x}(t))).\tag{54}$$

Анализ оптимального управления $\tilde{u}(t)$ сильно упрощается при условии (см. (45), (51), (54))

$$(B) \quad g_1(x) + (M\xi - 2\alpha D\xi \cdot \tilde{y}(T))g_2(x) > 0, \quad x \in [x_0, x_1].$$

При выполнении условия (B) функция $h(t)$ строго монотонно убывает на $[0, T]$ (см. (54)), и оптимальное управление $\tilde{u}(t)$, как и для модели 1 в случае 1, оказывается эквивалентным функции $u_{\text{opt}}(t)$ (см. (13), (14)).

Случай 2: $\tilde{\psi}_0 = 0$. В этом случае (см. (49), (50)) $\tilde{\psi}_1(t) \equiv -a \neq 0$, $\tilde{\psi}_2(t) \equiv 0$ и, как следует из условия максимума (52), оптимальное управление $\tilde{u}(t)$ оказывается эквивалентным на $[0, T]$ функции $u_{\text{opt}}(t)$: с $\theta = 0$, если $x_0 + Tp_1 = x_1$, и с $\theta = T$, если $x_0 + Tp_2 = x_1$.

Из приведенного анализа двух возможных случаев вытекает, что с точностью до эквивалентности оптимальное управление при выполнении условия (B) определяется однозначно (см. (13), (14)).

В условие (B) входят функции $g_1(x)$, $g_2(x)$, константы α , $M\xi$, $D\xi$ и величина $\tilde{y}(T)$. Нетрудно видеть, что условие (B) заведомо выполняется, если на $[x_0, x_1]$ функция $g_1(x) > 0$, функция $g_2(x) \geq 0$ и

$$M\xi \geq 2\alpha D\xi \cdot \tilde{y}(T).\tag{55}$$

Из соотношений (2), (12), (47), условия $y(0) = 0$ и из неотрицательности $g_2(x)$ на $[x_0, x_1]$ получаем для $\tilde{y}(T)$ оценку вида

$$0 \leq \tilde{y}(T) \leq \gamma = \beta p_2 \frac{1 - e^{-\nu T}}{\nu},$$

где через β обозначен максимум функции $g_2(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$. Отсюда вытекает, что при $g_2(x) \geq 0$ на $[x_0, x_1]$ достаточным для выполнения неравенства (55) является условие

$$M\xi \geq 2\alpha D\xi \cdot \gamma.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Аввакумов С.Н., Киселев Ю.Н., Орлов М.В.** Исследование одномерной оптимизационной модели MD1. Бесконечный горизонт. Конечный горизонт // Проблемы динамического управления: Сб. научн. тр. М.: Изд-во МГУ, 2005. Вып. 1. С. 111–136.
2. **Григоренко Н.Л., Камзолкин Д.В., Лукьянова Л.Н.** Решение одной задачи оптимального управления // Проблемы динамического управления: Сб. научн. тр. М.: Изд-во МГУ, 2005. Вып. 1. С. 137–144.
3. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.
4. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
5. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.
6. **Никольский С.М.** Курс математического анализа. М.: Наука, 1991. Т. 2.
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
8. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М.: Наука, 1980.

УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ УПРУГОСТИ¹

В. Г. Романов

Рассмотрена задача об определении плотности среды и одного из ее упругих модулей. Предполагается, что свойства упругой среды и внешние силы не зависят от координаты x_3 . В этом случае третья компонента вектора смещений удовлетворяет скалярному уравнению второго порядка, в которое входят в качестве коэффициентов плотность среды ρ и модуль упругости μ . Предполагается, что параметры ρ и μ являются известными положительными постоянными всюду вне некоторой компактной области $D \subset \mathbb{R}^2$, а внутри D — неизвестны. Рассматривается задача об определении этих коэффициентов в D по информации о решении двух прямых задач, заданной на границе области D для некоторого конечного временного интервала. Установлена оценка условной устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи.

1. Постановка задачи и основной результат

Рассмотрим систему линейных уравнений изотропной упругости с нулевыми начальными данными. Она может быть записана в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho F_i, \quad u_i|_{t<0} \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Здесь ρ — плотность среды, u_i — компоненты вектора смещений, F_i — массовые силы, а σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, связанные с u_i законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

в котором λ , μ — модули упругости среды. Предположим, что ρ , λ , μ и F_3 не зависят от координаты x_3 и $F_1 = F_2 = 0$. Тогда $u_1 = u_2 = 0$, а компонента $u_3 = u(x, t)$ является решением задачи Коши для уравнения второго порядка

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla \cdot (\mu \nabla u) + \rho F(x, t), \quad u|_{t<0} \equiv 0, \quad (1.2)$$

в котором $x = (x_1, x_2)$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2)$ и $F = F_3$.

В связи с этим двумерная обратная задача упругости может рассматриваться как задача об определении в уравнении (1.2) коэффициентов ρ и μ . Именно эта задача и рассматривается ниже при специальных предположениях о коэффициентах и функции $F(x, t)$.

Обратные задачи для системы уравнений теории упругости рассматривались в ряде работ (см., например, [1–9] и соответствующую литературу); практически все эти работы связаны с сильно переопределенными постановками задач, когда размерность задаваемой информации превосходит размерность искомых коэффициентов. В данной работе используется информация

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00171) и Сибирского отделения РАН (проект 2006 — № 57).

о решении некоторых прямых задач для уравнения (1.2), близкая к минимальной. Исследование основано на методе получения оценок условной устойчивости решения, первоначально предложенном в работах [10–12] и детально описанном в монографии [13].

Рассмотрим решение задачи (1.2) для случая, когда функция $F(x, t)$ имеет вид

$$F(x, t) = \delta'(t) \delta(x \cdot \nu). \quad (1.3)$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор, $x \cdot \nu$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, x_2)$ и ν . Решение задачи (1.2), (1.3) зависит от параметра ν , т.е., $u = u(x, t, \nu)$.

Предположим, что коэффициенты ρ и μ совпадают с положительными постоянными ρ_0 и μ_0 соответственно всюду вне круга $D = \{x \in \mathbb{R}^2: |x - x^0| < r\}$ радиуса r с центром в точке x^0 и область D содержится в полуплоскости $x \cdot \nu > 0$. Примем также, что $\rho(x)$ и $\mu(x)$ являются гладкими функциями во всей плоскости \mathbb{R}^2 (более подробно об этом см. ниже).

Обозначим через $c = \sqrt{\mu/\rho}$ скорость распространения упругих поперечных волн, а через $c_0 = \sqrt{\mu_0/\rho_0}$ — ее значение вне D . Введем функцию $\tau(x, \nu)$ как решение следующей задачи Коши для уравнения эйконала:

$$|\nabla\tau|^2 = c^{-2}(x), \quad \tau|_{x \cdot \nu = 0} = 0. \quad (1.4)$$

Анализ задачи (1.2), (1.3) показывает, что ее решение может быть представлено в виде (см. ниже лемму 2.1)

$$u(x, t, \nu) = \frac{1}{2} e^{\varphi(x, \nu)} [\delta(t - \tau(x, \nu)) + \bar{u}(x, t, \nu) \theta_0(t - \tau(x, \nu))],$$

в котором $\varphi(x, \nu)$, $\bar{u}(x, t, \nu)$ — некоторые гладкие функции, а $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$.

Пусть $G(\nu, \tau)$ — цилиндрическая область: $G(\nu, \tau) = \{(x, t): x \in D, \tau(x, \nu) < t < T + \tau(x, \nu)\}$, где T — некоторое положительное число. Боковую часть границы этой области обозначим через $S(\nu, \tau)$, а ее нижнее основание — через $\Sigma(\nu, \tau)$, т.е.

$$S(\nu, \tau) = \{(x, t): x \in \partial D, \tau(x, \nu) \leq t \leq T + \tau(x, \nu)\},$$

$$\Sigma(\nu, \tau) = \{(x, t): x \in D, t = \tau(x, \nu)\}, \quad \partial D = \{x \in \mathbb{R}^2: |x - x^0| = r\}.$$

Рассмотрим задачу об определении коэффициентов $\rho(x)$, $\mu(x)$ по следующей информации: для двух различных значений параметра $\nu = \nu^{(k)}$, $k = 1, 2$, таких, что $|\nu^{(1)} \times \nu^{(2)}| > 0$, задаются функции $\tau(x, \nu^{(k)}) = \tau^{(k)}(x)$, $\varphi(x, \nu^{(k)}) = \varphi^{(k)}(x)$ на ∂D и следы решения задачи (1.2), (1.3) и его нормальной производной на $S(\nu^{(k)}, \tau^{(k)}) = S_k$, т.е. считаются известными функции

$$\tau(x, \nu^{(k)}) = \tau^{(k)}(x), \quad \varphi(x, \nu^{(k)}) = \varphi^{(k)}(x), \quad x \in \partial D,$$

$$u(x, t, \nu^{(k)}) = f^{(k)}(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial n} u(x, t, \nu^{(k)}) = g^{(k)}(x, t), \quad (x, t) \in S_k, \quad k = 1, 2.$$

Требуется по функциям $\tau^{(k)}(x)$, $\varphi^{(k)}(x)$, $f^{(k)}(x, t)$, $g^{(k)}(x, t)$, $k = 1, 2$, найти $\rho(x)$ и $\mu(x)$ внутри D . Через n здесь обозначен единичный вектор внешней нормали к ∂D .

Заметим, что задание нормальной производной $\partial u / \partial n$ на S_k эквивалентно заданию третьей (и единственной ненулевой) компоненты вектора напряжений, действующего на касательной площадке к ∂D .

Пусть $\Lambda(\varepsilon_0, q_0, \tau_0, d)$ — множество функций (ρ, μ) , удовлетворяющих при некоторых фиксированных положительных числах $\varepsilon_0, q_0, \tau_0, d$ следующим условиям:

- (1) $\text{supp}(\rho(x) - \rho_0, \mu(x) - \mu_0) := \Omega \subset D, \quad \text{dist}(\partial D, \Omega) \geq d;$
- (2) $0 < \varepsilon_0 \rho_0 \leq \rho(x), \quad 0 < \varepsilon_0 \mu_0 \leq \mu(x), \quad 0 < \varepsilon_0 c_0 \leq c(x);$

(3) риманово пространство, определяемое метрикой $ds^2 = c^{-2}(x)(dx_1^2 + dx_2^2)$, имеет положительную кривизну, и область D содержится внутри некоторого риманова шара, диаметр которого не превосходит τ_0 ;

$$(4) \|\rho - \rho_0\|_{\mathbf{C}^{15}(\mathbb{R}^2)} \leq q_0, \quad \|\mu(x) - \mu_0\|_{\mathbf{C}^{15}(\mathbb{R}^2)} \leq q_0.$$

Заметим, что диаметр упомянутого выше риманова шара допускает оценку (довольно грубую) $\tau_0 \leq 2r/(c_0\varepsilon_0)$. Предположения (4) о высокой гладкости коэффициентов ρ , μ важны только при доказательстве леммы 2.1 и могут быть существенно ослаблены (до условия принадлежности пространству $\mathbf{C}^4(\mathbb{R}^2)$) при использовании иной техники оценок, требующей однако при своей реализации более детальных вычислений. С целью большей простоты изложения, для описания структуры решения задачи (1.2), (1.3) в статье использован метод энергетических оценок, применение которого загрубливает требования гладкости.

Основным содержанием настоящей работы являются следующие теоремы устойчивости и единственности решения обратной задачи.

Теорема 1.1. Пусть (ρ_j, μ_j) , $j = 1, 2$, и данные $\{\tau_j^{(k)}, \varphi_j^{(k)}, f_j^{(k)}, g_j^{(k)}\}$ соответствуют решению задачи (1.2), (1.3) при $\rho = \rho_j(x)$, $\mu = \mu_j(x)$ и $\nu = \nu^{(k)}$, $k = 1, 2$, $j = 1, 2$. Тогда найдутся положительные числа q_0 и C , зависящие от T , r , ε_0 , ρ_0 , μ_0 , d и $|\nu^{(1)} \times \nu^{(2)}|$, такие, что при выполнении условия $T > 2\tau_0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 \leq C \sum_{k=1}^2 \left(\|\hat{f}_1^{(k)} - \hat{f}_2^{(k)}\|_{\mathbf{H}^1(S')}^2 \right. \\ & \left. + \|\hat{g}_1^{(k)} - \hat{g}_2^{(k)}\|_{\mathbf{L}^2(S')}^2 + \|\varphi_1^{(k)} - \varphi_2^{(k)}\|_{\mathbf{H}^2(\partial D)}^2 + \|\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}\|_{\mathbf{H}^4(\partial D)}^2 \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

для любых $(\rho_j, \mu_j) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \tau_0, d)$, $j = 1, 2$. В этом неравенстве $S' = \partial D \times [0, T]$ и $\hat{f}_j^{(k)}(x, t) = f_j^{(k)}(x, t + \tau_j^{(k)}(x))$, $\hat{g}_j^{(k)}(x, t) = g_j^{(k)}(x, t + \tau_j^{(k)}(x))$.

Теорема 1.2. Пусть (ρ_j, μ_j) и $\{\tau_j^{(k)}, \varphi_j^{(k)}, f_j^{(k)}, g_j^{(k)}\}$ имеют тот же смысл, что и в теореме 1.1. Тогда найдется число $q_0 > 0$ такое, что для любых $(\rho_j, \mu_j) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \tau_0, d)$, $j = 1, 2$, из равенств

$$\begin{aligned} & \tau_1^{(k)}(x) = \tau_2^{(k)}(x), \quad \varphi_1^{(k)}(x) = \varphi_2^{(k)}(x), \quad x \in \partial D; \\ & f_1^{(k)}(x, t) = f_2^{(k)}(x, t), \quad (x, t) \in S(\nu^{(k)}, \tau_1^{(k)}), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

при условии $T > 2\tau_0$ следует, что $\rho_1(x) = \rho_2(x)$, $\mu_1(x) = \mu_2(x)$.

Теорема 1.1 доказана в разд. 3. Теорема 1.2 вытекает из теоремы 1.1 и установленной в статье [14] леммы 4.1, которая утверждает, что из выполнения условий (1.6) следует совпадение на $S(\nu^{(k)}, \tau_1^{(k)})$ функций $g_1^{(k)}(x, t)$ и $g_2^{(k)}(x, t)$, $k = 1, 2$. В разд. 2 доказана лемма 2.1, используемая при доказательстве теоремы 1.1.

2. Структура решения прямой задачи

Введем функцию $\psi(x) = \ln \mu(x)/2$ и запишем задачу (1.2), (1.3) в виде

$$u_{tt} - c^2(\Delta u + 2\nabla\psi \cdot \nabla u) = \delta(x \cdot \nu) \delta'(t), \quad u|_{t < 0} = 0. \quad (2.1)$$

Необходимые для дальнейшего свойства решения этой задачи устанавливаются следующей леммой.

Лемма 2.1. Для каждого $T_0 > 0$ существует положительное число $q_0 = q_0(T_0)$ такое, что для $(\rho, \mu) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \tau_0, d)$ решение задачи (2.1) в области $\{(x, t): t \leq T_0\}$ может быть представлено в виде

$$u(x, t, \nu) = \frac{1}{2} e^{\varphi(x, \nu)} [\delta(t - \tau(x, \nu)) + \bar{u}(x, t, \nu) \theta_0(t - \tau(x, \nu))], \quad (2.2)$$

в котором $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда, функция $\bar{u}(x, t, \nu) \in \mathbf{C}^2(K)$ при каждом фиксированном ν , $K = K(T_0, \nu) = \{(x, t): \tau(x, \nu) \leq t \leq T_0\}$, а функции $\varphi(x, \nu)$, $\beta(x, \nu) = u(x, \tau(x, \nu) + 0, \nu)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями в $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2: \tau(x, \nu) \leq T_0\}$ и удовлетворяют равенствам

$$2\nabla(\varphi + \psi) \cdot \nabla\tau + \Delta\tau = 0, \quad \varphi|_{\tau=0} = 0, \quad (2.3)$$

$$2\nabla\beta \cdot \nabla\tau - (\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2 + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\psi) = 0, \quad \beta|_{\tau=0} = 0. \quad (2.4)$$

Более того, существует положительное число C , зависящее только от T_0 , ε_0 , q_0 и такое, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(x, t, \nu)\|_{\mathbf{C}^2(K)} &\leq Cq_0, \quad \|\tau(x, \nu) - |x \cdot \nu|/c_0\|_{\mathbf{C}^2(D_0)} \leq Cq_0, \\ \|\varphi(x, \nu)\|_{\mathbf{C}^2(D_0)} &\leq Cq_0, \quad \|\beta(x, \nu)\|_{\mathbf{C}^2(D_0)} \leq Cq_0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Доказательство. Рассмотрим вначале задачу (1.4). Обозначим $p(x, \nu) = \nabla\tau(x, \nu)$. Без потери общности примем здесь, что $\nu = (1, 0)$. Тогда $\tau(x, \nu) = -x_1/c_0$ для $x_1 \leq 0$. Чтобы найти функцию $\tau(x, \nu)$ для $x_1 > 0$, рассмотрим уравнения для определения геодезических линий. Пусть функции $x = F(\tau, \gamma)$, $p = P(\tau, \gamma)$ дают решение следующей задачи Коши:

$$\frac{dx}{ds} = p c^2(x), \quad \frac{dp}{ds} = -\nabla \ln c(x), \quad x|_{s=0} = (0, \gamma), \quad p|_{s=0} = c_0^{-1}\nu, \quad (2.6)$$

где s — риманова длина, которая совпадает с временем пробега сигнала от точки x до прямой $\{\xi \in \mathbb{R}^2: \xi \cdot \nu = 0\}$. Равенство $x = F(s, \gamma)$ определяет уравнение геодезической, ортогонально пересекающей прямую $x_1 = 0$ в точке $(0, \gamma)$. Нетрудно показать, что для каждой области $D^* = \{(s, \gamma): 0 \leq s \leq s_0, |\gamma| \leq R\}$ с заданными $s_0 > 0$, $R > 0$ существует единственное решение $x = F(\tau, \gamma)$, $p = P(\tau, \gamma)$ задачи (2.6) в области D^* , причем функции $F(\tau, \gamma)$, $P(\tau, \gamma)$ из $\mathbf{C}^{14}(D^*)$, и, более того, можно найти положительную постоянную $C = C(q_0, s_0, R)$ такую, что выполняется следующая оценка:

$$\|F - (0, \gamma) - c_0\nu s\|_{\mathbf{C}^{14}(D^*)} \leq Cq_0, \quad \|P - c_0^{-1}\nu\|_{\mathbf{C}^{14}(D^*)} \leq Cq_0. \quad (2.7)$$

Это означает, что каждая геодезическая близка прямой линии и переменная p близка к $c_0^{-1}\nu$, если параметр q_0 мал. Выбирая $s_0 > 0$ и $R > 0$ достаточно большими и подбирая подходящее значение q_0 , можно доказать, что множество $\{x \in \mathbb{R}^2: x = F(s, \gamma), (s, \gamma) \in D^*\}$ содержит внутри себя априори заданную ограниченную область $D_0 \subset \mathbb{R}^2$.

Используя последнее неравенство, можно легко проверить, что для малых q_0 якобиан $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(s, \gamma)}$ не обращается в нуль в точках области D_0 . Поэтому равенство $x = F(\tau, \gamma)$ можно разрешить относительно s, γ , т. е., найти $s = s(x)$, $\gamma = \gamma(x)$ в $\mathbf{C}^{14}(D_0)$. Кроме того, так как $\nabla\tau(x) = p(x) = P(s(x), \gamma(x)) \in \mathbf{C}^{14}(D_0)$, то $\tau(x) \in \mathbf{C}^{15}(D_0)$. Заметим, что при заданной точке x геодезическая $\Gamma(x, \nu)$, проходящая через x и пересекающая ортогонально прямую $\{\xi \in \mathbb{R}^2: \xi \cdot \nu = 0\}$, задается равенством $\xi = F(s, \gamma(x))$, $s \in [0, s(x)]$. Оценка (2.5) для $\tau(x)$ немедленно следует из второго неравенства (2.7).

Представим решение задачи (2.1) в виде

$$u(x, t, \nu) = \sum_{k=-1}^3 \alpha_k(x, \nu) \theta_k(t - \tau(x, \nu)) + u_3(x, t, \nu), \quad (2.8)$$

в котором $\theta_{-1}(t) = \delta(t)$, $\theta_k(t) = t^k \theta_0(t)/(k!)$, $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда. Подставляя представление (2.8) в уравнение (2.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых особенностях, находим дифференциальные уравнения первого порядка для коэффициентов α_k :

$$\begin{aligned} 2\nabla\alpha_{-1} \cdot \nabla\tau + (2\nabla\psi \cdot \nabla\tau + \Delta\tau)\alpha_{-1} &= 0, \\ 2\nabla\alpha_k \cdot \nabla\tau + (2\nabla\psi \cdot \nabla\tau + \Delta\tau)\alpha_k - (\Delta\alpha_{k-1} + 2\nabla\alpha_{k-1} \cdot \nabla\psi) &= 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (2.9)$$

которые должны быть выполнены для всех значений $\tau > 0$. В области $\{(x, t): t + x \cdot \nu/c_0 < 2(x^0 \cdot \nu - r)\}$ решение уравнения (2.1) имеет вид $u(x, t, \nu) = \delta(t - |x \cdot \nu|/c_0)/2$. Поэтому к уравнениям (2.9) следует добавить дополнительные условия при $\tau = 0$:

$$\alpha_{-1}|_{\tau=0} = \frac{1}{2}, \quad \alpha_k|_{\tau=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (2.10)$$

Интегрируя соотношения (2.9) вдоль геодезических $\Gamma(x, \nu)$ с учетом данных (2.10), получаем явные формулы для коэффициентов $\alpha_k(x, \nu)$ в виде

$$\begin{aligned} \alpha_{-1}(x, \nu) &= \frac{1}{2} \exp(\varphi(x, \nu)), \quad \varphi(x, \nu) = -(\psi(x) - \psi(0)) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma(x, \nu)} c^2(\xi) \Delta\tau(\xi, \nu) ds, \\ \alpha_k(x, \nu) &= \frac{\alpha_0(x, \nu)}{2} \int_{\Gamma(x, \nu)} \frac{c^2(\xi)(\Delta\alpha_{k-1}(\xi, \nu) + 2\nabla\alpha_{k-1}(\xi, \nu) \cdot \nabla\psi(\xi))}{\alpha_0(\xi, \nu)} ds, \\ &k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь ds — элемент римановой длины, $ds = c^{-1}(x)(dx_1^2 + dx_2^2)^{1/2}$.

Функция $u_3(x, t, \nu)$ в представлении (2.8) является решением задачи

$$(u_3)_{tt} - c^2(\Delta u_3 + 2\nabla\psi \cdot \nabla u_3) = F_3(x, t, \nu), \quad u_3|_{t < 0} = 0, \quad (2.12)$$

в которой функция $F_3(x, t, \nu)$ определена формулой

$$F_3(x, t, \nu) = c^2(x)(\Delta\alpha_3 + 2\nabla\alpha_3 \cdot \nabla\psi) \theta_3(t - \tau(x, \nu)). \quad (2.13)$$

Так как $(\rho, \mu) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \tau_0, d)$, то из гладкости функций ρ, μ и формул (2.11) следует, что $\alpha_k(x, \nu) \in \mathbf{C}^{11-2k}(D_0)$, $k = -1, 0, \dots, 3$, $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2: \tau(x, \nu) \leq T_0\}$, а функция $F_3(x, t, \nu)$ принадлежит функциональному пространству $\mathbf{H}^3(\mathbb{R}^2 \times (0, T_0))$ при фиксированном ν и равна нулю для $t \leq \tau(x, \nu)$. Отсюда следует, что функция $u_3(x, t, \nu)$ также равна нулю для $t \leq \tau(x, \nu)$. Кроме того, из энергетических оценок для задачи (2.12), (2.13) вытекает, что $u_3(x, t, \nu) \in \mathbf{H}^4(\mathbb{R}^2 \times (0, T_0))$, следовательно, $u_3(x, t, \nu) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^2 \times (0, T_0))$.

Из определения множества $\Lambda(\varepsilon_0, q_0, \tau_0, d)$ и формул (2.11) следует, что справедливы оценки

$$\|\alpha_{-1}(x, \nu) - 1/2\|_{\mathbf{H}^{13}(D_0)} \leq Cq_0, \quad \|\alpha_k\|_{\mathbf{H}^{11-2k}(D_0)} \leq Cq_0, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$\|F_3\|_{\mathbf{H}^3(\mathbb{R}^2 \times (0, T_0))} \leq Cq_0,$$

с некоторой положительной постоянной $C = C(q_0, \varepsilon_0, T_0)$. Из энергетических оценок и теорем вложения следует, что для функции $u_3(x, t, \nu)$ справедлива оценка

$$\|u_3\|_{\mathbf{C}^2(\mathbb{R}^2 \times (0, T_0))} \leq Cq_0.$$

Запишем теперь решение задачи (2.1) в виде (2.2), положив $\alpha_{-1}(x, \nu) = e^{\varphi(x, \nu)}/2$. Тогда функция $\bar{u}(x, t, \nu)$ определена равенством

$$\bar{u}(x, t, \nu) = \left(\sum_{k=0}^3 \frac{1}{k!} \alpha_k(x, \nu) (t - \tau(x, \nu))^k + u_3(x, t, \nu) \right) \frac{1}{\alpha_{-1}(x, \nu)}, \quad t \geq \tau(x, \nu).$$

Из установленных фактов следует, что функция $\bar{u}(x, t, \nu)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $K = K(T_0, \nu) = \{(x, t): \tau(x, \nu) \leq t \leq T_0\}$ и удовлетворяет оценке $\|\bar{u}\|_{C^2(K)} \leq Cq_0$. Кроме того, функции $\varphi(x, \nu)$, $\beta(x, \nu) = u(x, \tau(x, \nu) + 0, \nu) = \alpha_0(x, \nu)/\alpha_{-1}(x, \nu)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями в $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2: \tau(x, \nu) \leq T_0\}$, а из равенств (2.9) вытекают равенства (2.3), (2.4). Выполнение неравенств (2.5) для функций $\varphi(x, \nu)$, $\beta(x, \nu)$, очевидно, следует из сказанного выше. Таким образом, лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $(\rho_j, \mu_j) \in \Lambda(\varepsilon_0, q_0, \tau_0, d)$, $j = 1, 2$. Обозначим отвечающие им функции $c(x)$, $\psi(x)$ через c_j , ψ_j , а через τ_j , u_j — решения соответствующих задач (1.4), (2.1) при $c = c_j$, $\psi = \psi_j$. Свойства функций $u_j(x, t, \nu)$, $j = 1, 2$, определяются леммой 2.1. Обозначим через $\varphi_j(x, \nu)$, $\beta_j(x, \nu) = u_j(x, \tau_j(x, \nu) + 0, \nu)$ функции, отвечающие представлению (2.2) для $u_j(x, t, \nu)$. В соответствии с леммой 2.1 функции $u_j(x, t, \nu)$, $j = 1, 2$, удовлетворяют равенствам

$$(u_j)_{tt} - c_j^2(\Delta u_j + 2\nabla\psi_j \cdot \nabla u_j) = 0, \quad t > \tau_j(x, \nu); \quad u_j|_{t=\tau_j(x, \nu)+0} = \beta_j(x, \nu),$$

а функции $\varphi_j(x, \nu)$, $\beta_j(x, \nu)$ — соотношениям

$$2\nabla(\varphi_j + \psi_j) \cdot \nabla\tau_j + \Delta\tau_j = 0, \quad (3.1)$$

$$2\nabla\beta_j \cdot \nabla\tau_j - (\Delta\varphi_j + |\nabla\varphi_j|^2 + 2\nabla\varphi_j \cdot \nabla\psi_j) = 0. \quad (3.2)$$

Обозначим $\tilde{\tau}(x, \nu) = \tau_1(x, \nu) - \tau_2(x, \nu)$ и введем в рассмотрение новую функцию $\hat{u}_2(x, t, \nu) = u_2(x, t - \tilde{\tau}(x, \nu), \nu)$. Эта функция является дважды непрерывно дифференцируемой при $t > \tau_1(x, \nu)$ и удовлетворяет равенствам

$$(\hat{u}_2)_{tt} - c_2^2[\Delta\hat{u}_2 + 2\nabla\psi_2 \cdot \nabla\hat{u}_2 + 2\nabla(\hat{u}_2)_t \cdot \nabla\tilde{\tau} + (\hat{u}_2)_t(\Delta\tilde{\tau} + 2\nabla\psi_2 \cdot \nabla\tilde{\tau})] = 0, \quad t > \tau_1(x, \nu);$$

$$\hat{u}_2|_{t=\tau_1(x, \nu)+0} = \beta_2(x, \nu).$$

Так как функции $u_1(x, t, \nu)$, $\hat{u}_2(x, t, \nu)$ являются гладкими в одной и той же области $t \geq \tau_1(x, \nu)$, их разность $\tilde{u}(x, \nu) = u_1(x, t, \nu) - \hat{u}_2(x, t, \nu)$ также является гладкой в этой области. Для нее выполнены соотношения

$$\tilde{u}_{tt} - c_1^2(\Delta\tilde{u} + 2\nabla\psi_1 \cdot \nabla\tilde{u}) = a_1\tilde{c} + a_2 \cdot \nabla\tilde{\psi} + a_3 \cdot \nabla\tilde{\tau} + a_4\Delta\tilde{\tau}, \quad t \geq \tau_1(x, \nu); \quad (3.3)$$

$$\tilde{u}|_{t=\tau_1(x, \nu)+0} = \tilde{\beta}(x, \nu),$$

в которых $\tilde{c} = c_1 - c_2$, $\tilde{\psi} = \psi_1 - \psi_2$ и

$$\begin{aligned} a_1 &= (c_1 + c_2)(\Delta\hat{u}_2 + 2\nabla\psi_1 \cdot \nabla\hat{u}_2), & a_2 &= 2c_2^2\nabla\hat{u}_2, \\ a_3 &= -2c_2^2\nabla(\psi_2 + (\hat{u}_2)_t), & a_4 &= -2c_2^2(\hat{u}_2)_t. \end{aligned}$$

В силу леммы 2.1 и сделанных выше предположений о коэффициентах уравнения (1.1), при любом $T_0 > 0$ в области $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^2: \tau(x, \nu) \leq T_0\}$ справедливы неравенства

$$\max_{1 \leq k \leq 4} \|a_k\|_{C(D_0)} \leq Cq_0, \quad \|\psi_1\|_{C^1(D_0)} \leq Cq_0 \quad (3.4)$$

с положительной постоянной C , зависящей от T_0 , ε_0 , q_0 и не возрастающей с уменьшением q_0 . Поэтому из соотношений (3.3), (3.4) следует неравенство

$$|\tilde{u}_{tt} - c_1^2 \Delta \tilde{u}|^2 \leq C q_0^2 \left(|\nabla \tilde{u}|^2 + |\tilde{c}|^2 + |\nabla \tilde{\psi}|^2 + |\nabla \tilde{\tau}|^2 + |\Delta \tilde{\tau}|^2 \right), \quad \tau_1(x, \nu) \leq t \leq T_0, \quad (3.5)$$

с некоторой новой постоянной C .

Выберем T_0 так, чтобы область $G(\nu, \tau_1)$ содержалась в $K(T_0)$. Тогда неравенство (3.5) верно в $G(\nu, \tau_1)$ и на $\Sigma(\nu, \tau_1)$ имеет место равенство

$$\tilde{u}(x, t, \nu) = \tilde{\beta}(x, \nu), \quad (x, t) \in \Sigma(\nu, \tau_1), \quad (3.6)$$

а на ее боковой стороне $S(\nu, \tau_1)$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t, \nu) &= u_1(x, t, \nu) - u_2(x, t - \tilde{\tau}(x, \nu)), \\ \nabla \tilde{u} \cdot n &= (\nabla u_1(x, t) - \nabla u_2(x, t')|_{t'=t-\tilde{\tau}(x, \nu)}) \cdot n \\ &\quad + (u_2)_t(x, t - \tilde{\tau}(x, \nu)) (\nabla \tilde{\tau}(x, \nu) \cdot n). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 3.1. Пусть $T > 2\tau_0$. Тогда найдется положительная постоянная C , зависящая только от T , r , ε_0 , q_0 и такая, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &\|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(G(\nu, \tau_1))}^2 + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Sigma(\nu, \tau_1))}^2 \\ &\leq C \left(q_0^2 (\|\tilde{c}\|_{\mathbf{L}^2(D)}^2 + \|\tilde{\psi}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\tilde{\tau}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2) + \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(S(\nu, \tau_1))}^2 + \|\nabla \tilde{u} \cdot n\|_{\mathbf{L}^2(S(\nu, \tau_1))}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эта лемма является прямым следствием неравенства (3.5), теоремы 3 из статьи [15] и предположений о рассматриваемом классе функций.

Из соотношений (3.6), (3.8) выводим, что справедливо неравенство

$$\|\tilde{\beta}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 \leq C \left(q_0^2 (\|\tilde{c}\|_{\mathbf{L}^2(D)}^2 + \|\tilde{\psi}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\tilde{\tau}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2) + \delta^2(\nu) \right), \quad (3.9)$$

в котором

$$\delta^2(\nu) = \|\tilde{u}\|_{\mathbf{H}^1(S(\nu, \tau_1))}^2 + \|\nabla \tilde{u} \cdot n\|_{\mathbf{L}^2(S(\nu, \tau_1))}^2. \quad (3.10)$$

Выпишем теперь соотношения для $\tilde{\beta}(x, t)$, $\tilde{\psi}(x, t)$, $\tilde{\varphi}(x, t) = \varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t)$, вытекающие из равенств (3.1), (3.2). Они имеют вид

$$\nabla(\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}) \cdot \nabla(\tau_1 + \tau_2) + \nabla(\varphi_1 + \psi_1 + \varphi_2 + \psi_2) \cdot \nabla \tilde{\tau} + \Delta \tilde{\tau} = 0, \quad (3.11)$$

$$2\nabla \tilde{\beta} \cdot \nabla \tau_1 + 2\nabla \beta_2 \cdot \nabla \tilde{\tau} - [\Delta \tilde{\varphi} + \nabla \tilde{\varphi} \cdot \nabla(\varphi_1 + \varphi_2 + 2\psi_1) + 2\nabla \varphi_2 \cdot \nabla \tilde{\psi}] = 0. \quad (3.12)$$

Из равенства (3.12) следует, что

$$\|\Delta \tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(D)}^2 \leq C \left(\|\tilde{\beta}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + q_0^2 (\|\tilde{\tau}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\tilde{\psi}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2) \right). \quad (3.13)$$

С другой стороны, в теории эллиптических уравнений хорошо известна оценка (см., например, [16]):

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 \leq C \left(\|\Delta \tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(D)}^2 + \sum_{|\gamma| \leq 2} \|D^\gamma \tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(\partial D)}^2 \right), \quad (3.14)$$

в которой использовано общепринятое обозначение для мультииндексной производной

$$D^\gamma \tilde{\varphi} = \frac{\partial^{|\gamma|} \tilde{\varphi}}{\partial x_1^{\gamma_1} \partial x_2^{\gamma_2}}, \quad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \quad |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Из неравенств (3.9), (3.13), (3.14) тогда вытекает, что при достаточно малых q_0 справедливо неравенство

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 \leq C \left(q_0^2 (\|\tilde{c}\|_{\mathbf{L}^2(D)}^2 + \|\tilde{\psi}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\tilde{\tau}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2) + \delta_1^2(\nu) \right), \quad (3.15)$$

в котором

$$\delta_1^2(\nu) = \delta^2(\nu) + \sum_{|\gamma| \leq 2} \|D^\gamma \tilde{\varphi}\|_{\mathbf{L}^2(\partial D)}^2.$$

Из уравнения эйконала (1.4) следует равенство:

$$\nabla \tilde{\tau} \cdot \nabla (\tau_1 + \tau_2) + \tilde{c} (c_1 + c_2) c_1^{-2} c_2^{-2} = 0. \quad (3.16)$$

Отсюда находим, что

$$\|\tilde{c}\|_{\mathbf{H}^1(D)} \leq C \|\tilde{\tau}\|_{\mathbf{H}^2(D)}. \quad (3.17)$$

Поэтому неравенство (3.15) можно переписать, исключив из него норму \tilde{c} , в следующем виде:

$$\|\tilde{\varphi}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 \leq C \left(q_0^2 (\|\tilde{\psi}\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\tilde{\tau}\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2) + \delta_1^2(\nu) \right). \quad (3.18)$$

Рассмотрим теперь соотношения (3.11), (3.16)–(3.18) для $\nu = \nu^{(k)}$, $k = 1, 2$. Обозначим $\tilde{\varphi}(x, \nu^{(k)}) = \tilde{\varphi}_k(x)$, $\tilde{\tau}(x, \nu^{(k)}) = \tilde{\tau}_k(x)$, $\tau_j(x, \nu^{(k)}) = \tau_{jk}(x)$, $\varphi_j(x, \nu^{(k)}) = \varphi_{jk}(x)$, $j = 1, 2$. Запишем равенство (3.11) для $\nu = \nu^{(k)}$ в виде

$$\nabla \tilde{\psi}(x) \cdot r_k(x) + \Delta \tilde{\tau}_k(x) = h_k(x), \quad k = 1, 2, \quad (3.19)$$

где

$$r_k(x) = \nabla (\tau_{1k} + \tau_{2k}), \quad h_k(x) = \nabla \tilde{\varphi}_k \cdot r_k + \nabla (\varphi_{1k} + \psi_1 + \varphi_{2k} + \psi_2) \cdot \nabla \tilde{\tau}_k. \quad (3.20)$$

Из неравенства (3.18) следует, что

$$\|h_k(x)\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 \leq C \left(q_0^2 (\|\tilde{\psi}(x)\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\tilde{\tau}_k(x)\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2) + \delta_1^2(\nu^{(k)}) \right), \quad k = 1, 2. \quad (3.21)$$

Далее, из равенства (3.16), записанного для $\nu = \nu^{(k)}$, $k = 1, 2$, находим, что

$$\nabla \tilde{\tau}_1(x) \cdot r_1(x) = \nabla \tilde{\tau}_2(x) \cdot r_2(x). \quad (3.22)$$

Рассмотрим следующее равенство, вытекающее из соотношений (3.19):

$$\nabla (\nabla \tilde{\psi} \cdot r_1) \cdot r_1 - \nabla (\nabla \tilde{\psi} \cdot r_2) \cdot r_2 = z(x), \quad (3.23)$$

в котором через $z(x)$ обозначена функция, вычисляемая по формуле

$$z(x) = -\nabla (\Delta \tilde{\tau}_1) \cdot r_1 + \nabla (\Delta \tilde{\tau}_2) \cdot r_2 + \nabla h_1(x) \cdot r_1 - \nabla h_2(x) \cdot r_2.$$

В силу соотношений (3.21), (3.22), функция $z(x)$ допускает оценку

$$\|z(x)\|_{\mathbf{L}^2(D)}^2 \leq C \left[q_0^2 \left(\|\tilde{\psi}(x)\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \sum_{k=1}^2 \|\tilde{\tau}_k(x)\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 \right) + \sum_{k=1}^2 \delta_1^2(\nu^{(k)}) \right]. \quad (3.24)$$

Из леммы 2.1 следует, что выполняются неравенства

$$\|\nabla\tau_k(x) - \nu^{(k)}\|_{\mathbf{C}^2(D)} \leq Cq_0, \quad k = 1, 2,$$

с некоторой постоянной $C = C(r, T, \varepsilon_0, q_0)$. Подобные соотношения имеют место и для функций $r_k(x)$, а именно:

$$\|r_k(x) - 2\nu^{(k)}\|_{\mathbf{C}^2(D)} \leq Cq_0, \quad k = 1, 2.$$

Так как, по предположению, $|\nu^{(1)} \times \nu^{(2)}| > 0$, то векторы $r_1(x)$ и $r_2(x)$ не коллинеарны в области D , по крайней мере, если параметр q_0 мал. Следовательно, левая часть равенства (3.23) представляет собой гиперболический оператор второго порядка. Поэтому для функции $\tilde{\psi}$ справедлива оценка

$$\|\tilde{\psi}(x)\|_{\mathbf{H}^1(D)} \leq C\|z(x)\|_{\mathbf{L}^2(D)}, \quad (3.25)$$

которая может быть получена с помощью обычного метода энергетических неравенств. Сопоставление двух неравенств (3.24), (3.25) позволяет сделать вывод, что для функции $\tilde{\psi}$ верна также, для достаточно малых q_0 , и оценка

$$\|\tilde{\psi}(x)\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 \leq C \left[q_0^2 \sum_{k=1}^2 \|\tilde{\tau}_k(x)\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 + \sum_{k=1}^2 \delta_1^2(\nu^{(k)}) \right]. \quad (3.26)$$

Вернемся теперь к равенствам (3.19). С учетом полученной оценки (3.26) заключаем, что для функций $\tilde{\tau}_k$ справедливы неравенства

$$\|\Delta\tilde{\tau}_k(x)\|_{\mathbf{L}^2(D)}^2 \leq C \left[q_0^2 \sum_{k=1}^2 \|\tilde{\tau}_k(x)\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 + \sum_{k=1}^2 \delta_1^2(\nu^{(k)}) \right], \quad k = 1, 2. \quad (3.27)$$

Используем для $\tilde{\tau}_k$ оценки типа (3.14). Тогда для малых q_0 находим из (3.27), что справедливы соотношения

$$\|\tilde{\tau}_k(x)\|_{\mathbf{H}^2(D)}^2 \leq C\delta^2, \quad k = 1, 2,$$

в которых

$$\delta^2 = \sum_{k=1}^2 \delta^2(\nu^{(k)}) + \sum_{|\gamma| \leq 2} \left(\|D^\gamma \tilde{\tau}_k(x)\|_{\mathbf{L}^2(\partial D)}^2 + \|D^\gamma \tilde{\varphi}_k(x)\|_{\mathbf{L}^2(\partial D)}^2 \right).$$

Из неравенств (3.17), (3.26) тогда следует оценка

$$\|\tilde{c}(x)\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\tilde{\psi}(x)\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 \leq C\delta^2,$$

которая приводит к аналогичной оценке разностей $\rho_1 - \rho_2$, $\mu_1 - \mu_2$, а именно:

$$\|\rho_1 - \rho_2\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 + \|\mu_1 - \mu_2\|_{\mathbf{H}^1(D)}^2 \leq C\delta^2. \quad (3.28)$$

Для получения отсюда окончательной оценки (1.5) остается оценить входящие в выражение для δ нормы граничных значений производных функций $\tilde{\varphi}_k$ и $\tilde{\tau}_k$ и разностей данных обратной задачи.

Оценим вначале значения функций $\tilde{\varphi}_k$, $\tilde{\tau}_k$ и их производных на ∂D . Так как, по предположению, $\text{supp}(\rho(x) - \rho_0, \mu(x) - \mu_0) = \Omega \subset D$ и $\text{dist}(\partial D, \Omega) \geq d$, то функции $\tilde{\varphi}_k$, $\tilde{\tau}_k$, при фиксированном k , обращаются в нуль вместе со всеми своими производными на ∂D всюду, кроме множества $\partial D_+(\nu^{(k)}) = \{x \in \partial D \mid \nu^{(k)} \cdot (x - x^0) > \sqrt{r^2 - (r-d)^2}\}$. Вне D функция $\tilde{\varphi}_k$ удовлетворяет уравнению $\nabla \tilde{\varphi}_k \cdot r_k + \nabla(\varphi_{1k} + \varphi_{2k}) \cdot \nabla \tilde{\tau}_k + \Delta \tilde{\tau}_k = 0$ (см. (3.11)), а функция $\tilde{\tau}_k -$

уравнению $\nabla \tilde{\tau}_k \cdot r_k = 0$. Поэтому все производные функций $\tilde{\tau}_k$ и $\tilde{\varphi}_k$ на $\partial D_+(\nu^{(k)})$ могут быть выражены через значения касательных производных на $\partial D_+(\nu^{(k)})$. Таким образом,

$$\sum_{|\gamma| \leq 4} \|D^\gamma \tilde{\tau}_k\|_{\mathbf{L}^2(\partial D)}^2 \leq C \|\tilde{\tau}_k\|_{\mathbf{H}^4(\partial D)}^2, \quad (3.29)$$

$$\sum_{|\gamma| \leq 2} \|D^\gamma \tilde{\varphi}_k\|_{\mathbf{L}^2(\partial D)}^2 \leq C \left(\|\tilde{\varphi}_k\|_{\mathbf{H}^2(\partial D)}^2 + \|\tilde{\tau}_k\|_{\mathbf{H}^4(\partial D)}^2 \right), \quad k = 1, 2.$$

Из определения (3.10) для $\delta^2(\nu)$, равенств (3.7) и первого из неравенств (2.5), записанного для $u_2(x, t, \nu^{(k)})$, следует оценка

$$\delta^2(\nu^{(k)}) \leq C \left(\|\hat{f}_1^{(k)} - \hat{f}_2^{(k)}\|_{\mathbf{H}^1(S')}^2 + \|\hat{g}_1^{(k)} - \hat{g}_2^{(k)}\|_{\mathbf{L}^2(S')}^2 + \|\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}\|_{\mathbf{H}^1(\partial D)}^2 \right),$$

в которой $\hat{f}_j^{(k)}(x, t) = f_j^{(k)}(x, t + \tau_j^{(k)}(x))$, $\hat{g}_j^{(k)}(x, t) = g_j^{(k)}(x, t + \tau_j^{(k)}(x))$ и $S' = \partial D \times [0, T]$. В результате получаем, что неравенство (3.28) эквивалентно неравенству (1.5). Тем самым, теорема 1.1 установлена.

Поступила 15.03.2006.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Благовещенский А.С.** Об обратной задаче теории распространения сейсмических волн // Проблемы мат. физики. Л.: ЛГУ, 1966. Вып. 1. С. 68–81.
2. **Алексеев А.С.** Обратные динамические задачи сейсмологии // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. М.: Наука, 1967. С. 9–84.
3. **Аниконов Ю.Е., Москвитин В.Н.** Об одной обратной задаче для системы динамических уравнений теории упругости // Докл. АН СССР. 1980. Т. 253, № 5. С. 1086–1087.
4. **Романов В.Г.** Обратная задача Лэмба в линейном приближении // Численные методы в сейсмических исследованиях. Новосибирск: Наука, 1983. С. 51–78.
5. **Романов В.Г.** Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
6. **Яхно В.Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990.
7. **Yakhno V.G.** Multidimensional inverse problems in ray formulation for hyperbolic equations // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1998. V. 6, no. 4. P. 373–386.
8. **Rachele L.** An inverse problem in elastodynamics: determination of the wave speeds in the interior // J. Diff. Eqs. 2000. V. 162, no. 2. P. 300–325.
9. **Rachele L.** Boundary determination for an inverse problem in elastodynamics // Comm. PDE. 2000. V. 25, no. 11&12. P. 1951–1996.
10. **Романов В.Г.** Об оценке устойчивости решения обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 436–449.
11. **Romanov V. G., Yamamoto M.** Multidimensional inverse hyperbolic problem with impulse input and single boundary measurement // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, no. 6. P. 573–588.
12. **Романов В.Г.** Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.
13. **Романов В.Г.** Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.
14. **Романов В.Г.** Оценка устойчивости решения в двумерной обратной задаче электродинамики // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 4. С. 837–850.
15. **Романов В.Г.** Оценки решения одного дифференциального неравенства, связанного с гиперболическим оператором второго порядка и данными Коши на времениподобной поверхности // Докл. РАН. 2006. Т. 406, № 3. С. 314–316.
16. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

УДК 517.984

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СЛЕДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

Рассмотрены неограниченные возмущения дискретных операторов. Получены формулы регуляризованных следов, использующие конечное число поправок теории возмущений. Получена точная связь между степенью подчиненности возмущения невозмущенному оператору и количеством поправок, необходимых для существования конечной формулы следа. Получены новые оценки ядерной нормы резольвенты дискретных операторов.

Введение

Исследования регуляризованных следов операторов с дискретным спектром было начато знаменитой работой И.М. Гельфанда и Б.М. Левитана [1], в которой авторы нашли след оператора в задаче Штурма — Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0. \quad (1)$$

При $q(x) \in C^1[0, \pi]$ и условии $\int_0^\pi q(x) dx = 0$ была получена формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \frac{1}{4}(q(0) + q(\pi)), \quad (2)$$

где μ_n — собственные числа оператора (1), а $\lambda_n = n^2$ — собственные числа такого же оператора с $q(x) \equiv 0$.

Настоящая работа продолжает цикл исследований [2–5], в которых мы изучали регуляризованные следы абстрактных дискретных операторов.

Регуляризованные следы дискретных операторов в абстрактной постановке изучались с конца 70-х годов, пионерской здесь была работа [6]. Наиболее сильный результат для конечномерных возмущений был получен в [7], где были охвачены некоторые классы неограниченных возмущений. Центральным направлением было исследование следов возмущений самосопряженных операторов с заданным поведением собственных чисел $\lambda_n \sim cn^\alpha$, а самые сильные результаты здесь были получены в работе [8], в которой при $\alpha > 1$ для ограниченного возмущения в зависимости от α и порядка следа было указано количество поправок теории возмущений, которые необходимо учесть при получении формул следа, в частности, формула следа с регуляризацией первой поправкой теории возмущений (μ_j — собственные числа возмущенного оператора)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0 \quad (3)$$

была доказана при $\alpha \geq 2$, а для возмущения типа Гильберта — Шмидта формула следа была доказана при $\alpha = 1$.

Исследования следов абстрактных операторов имеют содержательные приложения к конкретным операторам математической физики. Например, нам удалось [9, 10] получить формулу регуляризованного следа оператора Лапласа — Бельтрами на сфере с нечетным потенциалом q :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = -\frac{1}{8\pi} \int_{S^2} q^2(x) dS.$$

В настоящей работе мы развиваем некоторые результаты работы [5], в которой нам удалось доказать ряд теорем, охватывающих как случай невозмущенного оператора с ядерной¹ резольвентой и относительно компактным возмущением, так и малоизученный случай операторов с неядерной резольвентой. Приведем один результат этой работы. Если оператор B таков, что $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B)$, и при некоторых $\delta \in [0, 1)$ и $\omega \in [0, 1)$, $\omega + \delta < 1$, оператор $BA^{-\delta}$ продолжается до ограниченного, а $A^{-(1-\delta-\omega)}$ — ядерный оператор, то существует такая подпоследовательность номеров $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, что при $\omega \geq \delta/l$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{Tr} \left((BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right) = 0. \quad (4)$$

В частности, при $\omega \geq \delta$ верна формула (3). Доказанные в [5] теоремы для абстрактных операторов позволили получить новые результаты для обширных классов конкретных операторов математической физики, например, удалось доказать формулу для степени α оператора $-\Delta$ (Δ — оператор Лапласа), действующего в $L_2([0, \pi] \times [0, \pi])$ и возмущенного оператором умножения на ограниченную измеримую (комплекснозначную) функцию $q(x, y)$ с условиями Дирихле на границе квадрата. Так как в этой задаче $\lambda_n \sim n^\alpha$, то формула следа верна для $\alpha > 1$ с необходимым вычитанием одной поправки для потенциала $q(x, y) \in C^{1+\beta}$ с $\beta > 0$. При этих условиях имеем (исходная формула (3) верна для любого ограниченного измеримого потенциала, но гладкость нужна для абсолютного суммирования коэффициентов Фурье и существования значений на границе):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r_k < n^2 + m^2 < r_{k+1}} \left(\mu_{nm} - (n^2 + m^2)^\alpha - \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) dx dy \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x, y) dy \right) \cos 2nxdx + \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\int_0^\pi q(x, y) dx \right) \cos 2mydy \right) \\ & = \frac{1}{16} (q(\pi, \pi) + q(0, \pi) + q(\pi, 0) + q(0, 0)) \\ & - \frac{1}{8\pi} \left(\int_0^\pi (q(0, y) + q(\pi, y)) dy + \int_0^\pi (q(x, 0) + q(x, \pi)) dx \right) + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi q(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

В настоящей работе упомянутая выше теорема расширена за счет введения в условия логарифмических членов. Для иллюстрации приведем примеры оценок ядерной нормы некоторых операторов. Пусть оператор A_0 имеет собственные числа k^2 , возмущающий оператор B ограничен. Тогда результаты работы [5] позволяют утверждать, что

$$\|BR_0(k^2 + k)\|_1 = o(k^{-\alpha}), \quad k \rightarrow \infty,$$

для любого $0 < \alpha < 1$. Из результатов настоящей работы следует, что

$$\|BR_0(k^2 + k)\|_1 = o(k^{-1} \ln^{1+\beta} k), \quad k \rightarrow \infty,$$

¹См. определения и обозначения в следующем разделе.

для любого $\beta > 0$.

Результаты работы [5] обеспечивают лишь стремление к нулю ядерной нормы $\|BR_0(\lambda)\|_1$, если B — ограниченный оператор и A_0 имеет собственные числа $\lambda_n = n \ln^{1+\gamma} n$, $\gamma > 0$. Из результатов настоящей работы можно извлечь оценку (при $a_n = (\lambda_{n+1} + \lambda_n)/2$)

$$\|BR_0(a_k)\|_1 = o(\ln^{-\beta} k), \quad k \rightarrow \infty$$

для любого $0 < \beta < \gamma/2$.

1. Обозначения и предварительные сведения

Все рассматриваемые операторы действуют в сепарабельном гильбертовом пространстве \mathcal{H} , через $\mathcal{D}(\cdot) \subset \mathcal{H}$ обозначается область определения оператора. Через A_0 мы будем обозначать самосопряженный положительный дискретный оператор (его дробные степени также положительные операторы, определяемые по спектральной теореме), через $R_0(\lambda)$ всегда обозначается резольвента оператора A_0 , через $\{\lambda_n\}_{n=0}^{+\infty}$ — его собственные числа, занумерованные в порядке возрастания, через $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — базис из его собственных векторов. Более того, мы будем полагать все $\lambda_n \geq 3$, для того чтобы определяемый по спектральной теореме оператор $\ln A_0$ также был положительным, дробные степени $\ln^\varepsilon A_0$ были определены и положительны и при $\varepsilon < 0$ оператор $\ln^\varepsilon A_0$ был компактным. Через B мы всегда обозначаем возмущающий оператор, через $\{\mu_n\}_{n=0}^{+\infty}$ — собственные числа оператора $A_0 + B$ (условия на операторы всегда таковы, что их сумма плотно определена), занумерованные в порядке возрастания действительных частей, через $R(\lambda)$ — его резольвенту. Также мы одним и тем же символом c обозначаем различные положительные константы, конкретная величина которых несущественна для текущих рассуждений.

Мы начнем с некоторых сведений из теории симметрично-нормированных идеалов кольца ограниченных операторов, более подробное изложение которой можно найти в монографии [12]. Собственные числа $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ оператора $\sqrt{AA^*}$ называются сингулярными числами или s -числами компактного оператора A . Компактный оператор A принадлежит классу \mathfrak{S}_p , если $\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p < \infty$, где s_n — упорядоченные по убыванию s -числа оператора A . В частности,

оператор A называется ядерным, если $A \in \mathfrak{S}_1$. При $p \geq 1$ величина $\left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p\right)^{\frac{1}{p}}$ удовлетворяет аксиомам нормы. В этом случае класс \mathfrak{S}_p образует симметрично-нормированный идеал в нормированном кольце всех ограниченных операторов, норма обозначается $\|A\|_p$ и при $p = 1$ она называется ядерной. Симметричность нормы означает выполнение неравенства $\|B_1 S B_2\|_p \leq \|B_1\| \|S\|_p \|B_2\|$ для любых ограниченных операторов B_1 и B_2 . Также мы будем использовать неравенства

$$\|A\|_p^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A\chi_n\|^p, \quad (5)$$

верные при $p \leq 2$; здесь $\{\chi_n\}$ — произвольный ортонормированный базис пространства.

Ядерные операторы иначе называют операторами со следом, так как эти и только эти операторы имеют конечную сумму диагональных элементов матричного представления в некотором ортонормированном базисе $\sum_j (A\chi_j, \chi_j)$, не зависящую от выбора базиса и совпадающую со спектральным следом (теорема Лидского):

$$\sum_j (A\chi_j, \chi_j) = \sum_k \lambda_k. \quad (6)$$

Если оператор A ядерный, то корректно определена величина

$$\det(I + A) = \prod_k (1 + \lambda_k).$$

Для пары операторов A_0 и $A = A_0 + B$ таких, что $BR_0(\lambda)$ — ядерный, можно ввести так называемый определитель возмущения

$$D_{A/A_0}(\lambda) = \det[(A - \lambda I) \cdot (A_0 - \lambda I)^{-1}] = \det[I + BR_0(\lambda)].$$

Нам потребуются два соотношения для этого определителя:

$$\text{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) = \frac{d}{d\lambda}(\ln D_{A/A_0}(\lambda)), \quad (7)$$

$$\ln D_{A/A_0}(\lambda) = \text{Tr} \ln(I + BR_0(\lambda)). \quad (8)$$

В случае принадлежности оператора BA_0^{-1} классу Шаттена — фон Неймана \mathfrak{S}_p при некотором натуральном $p > 1$ для операторов A_0 и $A_0 + B$ можно ввести регуляризованный определитель возмущения:

$$D_p(\lambda) = \det_p(I + BR_0(\lambda)), \quad (9)$$

здесь для оператора $C \in \mathfrak{S}_p$ с собственными числами ν_n обозначено

$$\det_p(I + C) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \nu_n) \exp\left(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{k} \nu_n^k\right).$$

$D_p(\lambda)$ обладает следующим необходимым нам свойством:

$$\frac{d}{d\lambda} \ln D_p(\lambda) = (-1)^{p-1} \text{Tr}(R(\lambda) (BR_0(\lambda))^p). \quad (10)$$

Далее докажем несколько утверждений, которые мы будем часто использовать. Начнем с результата о возможности разбиения собственных чисел возмущенного и невозмущенного операторов в группы с одинаковым числом членов.

Лемма 1. Пусть оператор B таков, что $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$ и существует $\delta \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $BA_0^{-\delta}$ продолжается до ограниченного. Предположим также, что существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq c\lambda_{n_m+1}^\rho$, где $\rho > \delta$. Тогда существует последовательность действительных чисел $\{a_m\}$, $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$ такая, что внутри каждой окружности с центром в нуле и радиуса a_m содержится одинаковое количество собственных чисел операторов A_0 и $A_0 + B$.

Доказательство. Используем известное равенство [11] для резольвент операторов

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (BR_0(\lambda))^k = R_0(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(BA_0^{-\delta} A_0^\delta R_0(\lambda)\right)^k \quad (11)$$

и стандартную оценку (см., например, [11])

$$\|A_0^\delta R_0(\lambda)\| \leq \max_{1 \leq k < \infty} \frac{\lambda_k^\delta}{|\lambda_k - \lambda|}.$$

Из последней оценки мы немедленно получаем, что при $|\lambda| = a_m$ и $|\lambda_{n_m+1} - a_m| \geq c\lambda_{n_m+1}^\rho$, $|\lambda_{n_m} - a_m| \geq c\lambda_{n_m+1}^\rho$ верно

$$\max_{|\lambda|=a_m} \|A_0^\delta R_0(\lambda)\| \leq c\lambda_{n_m+1}^{\delta-\rho},$$

и тогда

$$\max_{|\lambda|=a_m} \left\| \left(BA_0^{-\delta} A_0^\delta R_0(\lambda)\right)^k \right\| \leq c^k \|BA_0^{-\delta}\|^k a_m^{-k(\rho-\delta)}, \quad (12)$$

и так как $\rho > \delta$, то ряд (11) сходится при $a_m^{\rho-\delta} > c \|BA_0^{-\delta}\|$, и, следовательно, все такие λ , что $|\lambda| = a_m$, принадлежат его резольвентному множеству. Сделанные предположения об операторах A_0 и B позволяют говорить о семействе операторов $A_0 + \tau B$ как о голоморфном семействе типа “А” [11, гл. VII], и результаты аналитической теории возмущений [11] приводят к утверждению, что собственные числа семейства операторов $A_0 + \tau B$ во всяком случае являются непрерывными функциями параметра τ , и так как все сделанные рассуждения верны и для возмущения τB при $\tau \in [0, 1]$, то все рассматриваемые λ остаются в резольвентном множестве этого семейства при всех $\tau \in [0, 1]$, и, следовательно, собственные числа семейства операторов $A_0 + \tau B$ не пересекают контура Γ_m при $\tau \in [0, 1]$.

Мы будем использовать преобразование Абеля для исследования (сходящихся) рядов в виде

$$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k b_k = \sum_{k=N}^{+\infty} A_k (b_k - b_{k+1}), \quad (13)$$

где $A_k = \sum_{l=N}^k a_l$ и ряды сходятся, если A_k — ограниченная последовательность, а b_k убывает к нулю.

Также мы будем пользоваться следующими двумя числовыми неравенствами.

Лемма 2. Для любых чисел $a, b \geq e$, $a \neq b$ и для любых $\delta, \omega \in [0, 1)$, $\delta + \omega < 1$, и для любого $\varepsilon \geq 0$ существует $c \geq 1$ такое, что верно неравенство

$$\frac{1}{|a - b|} < \frac{c(\ln^\varepsilon a + \ln^\varepsilon b)}{a^\delta b^\omega |a^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon a - b^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon b|}. \quad (14)$$

Доказательство. В работе [5] для любых $\delta, \omega \in [0, 1]$, $\delta + \omega \leq 1$, доказано неравенство

$$\left| \frac{a^\delta b^\omega (a^{1-\delta-\omega} - b^{1-\delta-\omega})}{a - b} \right| \leq 1, \quad (15)$$

и нам достаточно доказать неравенство

$$\frac{1}{|a^{1-\delta-\omega} - b^{1-\delta-\omega}|} < \frac{c(\ln^\varepsilon a + \ln^\varepsilon b)}{|a^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon a - b^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon b|}.$$

Докажем это неравенство вначале для $a, b > e^{\frac{\varepsilon}{1-\delta-\omega}}$ и $c = 1$. На этом множестве являются возрастающими функции $x^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon x$ и $\frac{x^{1-\delta-\omega}}{\ln^\varepsilon x}$, и мы, для определенности рассматривая случай $a > b$, имеем

$$\begin{aligned} (\ln^\varepsilon a + \ln^\varepsilon b)(a^{1-\delta-\omega} - b^{1-\delta-\omega}) &> a^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon a - b^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon b \\ \Leftrightarrow a^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon b - b^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon a &> 0 \Leftrightarrow \frac{a^{1-\delta-\omega}}{\ln^\varepsilon a} - \frac{b^{1-\delta-\omega}}{\ln^\varepsilon b} > 0, \end{aligned}$$

что верно при сделанных предположениях. На компакте $[e, e^{\frac{\varepsilon}{1-\delta-\omega}}]$ неравенство

$$c|\ln^\varepsilon a + \ln^\varepsilon b||a^{1-\delta-\omega} - b^{1-\delta-\omega}| > |a^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon a - b^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon b|$$

очевидно достигается выбором подходящего c , зависящего только от $\delta, \varepsilon, \omega$.

Лемма 3. Для любых чисел $a, b \geq e$, $a \neq b$ и для любых $\delta, \omega \in [0, 1)$, $\delta + \omega < 1$, и для любого $\varepsilon \geq 0$ существует $c \geq 1$ такое, что верно неравенство

$$\frac{1}{|a - b|} < \frac{c}{a^\delta b^\omega \ln^{\varepsilon/2} b \ln^{\varepsilon/2} a |a^{1-\delta-\omega} \ln^{-\varepsilon} a - b^{1-\delta-\omega} \ln^{-\varepsilon} b|}. \quad (16)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вновь используем неравенство (15), и нам достаточно доказать неравенство

$$c|a^{1-\delta-\omega} - b^{1-\delta-\omega}| > \ln^{\varepsilon/2} a \ln^{\varepsilon/2} b \left| \frac{a^{1-\delta-\omega}}{\ln^{\varepsilon} a} - \frac{b^{1-\delta-\omega}}{\ln^{\varepsilon} b} \right|.$$

Аналогично предыдущей лемме докажем это неравенство вначале для $a > b > e^{\frac{\varepsilon}{1-\delta-\omega}}$ и $c = 1$, с тем чтобы использовать возрастание $\frac{x^{1-\delta-\omega}}{\ln^{\varepsilon} x}$. Имеем

$$\begin{aligned} a^{1-\delta-\omega} - b^{1-\delta-\omega} &> a^{1-\delta-\omega} \frac{\ln^{\varepsilon/2} b}{\ln^{\varepsilon/2} a} - b^{1-\delta-\omega} \frac{\ln^{\varepsilon/2} a}{\ln^{\varepsilon/2} b} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^{1-\delta-\omega} \left(1 - \frac{\ln^{\varepsilon/2} b}{\ln^{\varepsilon/2} a} \right) > b^{1-\delta-\omega} \left(1 - \frac{\ln^{\varepsilon/2} a}{\ln^{\varepsilon/2} b} \right), \end{aligned}$$

и так как $\ln a > \ln b$, то левая часть здесь больше нуля, а правая меньше, и неравенство доказано при сделанных предположениях. На $[e, e^{\frac{\varepsilon}{1-\delta-\omega}}]$ доказываемое неравенство достигается выбором подходящего c (зависящего только от $\delta, \varepsilon, \omega$).

В работе [3] доказано следующее важное свойство одного типа числовых рядов.

Лемма 4. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ – последовательность комплексных чисел и при этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n|} < +\infty.$$

Тогда существует последовательность положительных чисел $\{a_m\}$, $a_m \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - a_m|} = 0. \quad (17)$$

Докажем одно свойство рядов, удовлетворяющих условию леммы 4, удобное для ее применения.

Лемма 5. В условиях леммы 4 для заданной последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и найденной последовательности $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ существует последовательность положительных чисел $\{\mu'_n\}_{n=1}^{+\infty}$ такая, что для номеров n_m , определяемых неравенствами $\mu'_{n_m} < a_m < \mu'_{n_m+1}$, верно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{\mu'_{n_m}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{\mu'_{n_m+1}} = 1,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu'_n - a_m|} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - a_m|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu'_n - a_m|}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале заметим, что так как

$$\frac{1}{|\mu_n - a|} \leq \frac{1}{||\mu_n| - a|},$$

то достаточно доказать лемму для положительной последовательности $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$, и далее мы так и будем полагать. Определим по лемме 4 для $\{\mu_n\}_{n=1}^{+\infty}$ последовательность $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ и соответствующую последовательность номеров $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, $\mu_{n_m} < a_m < \mu_{n_m+1}$. Тогда $|\mu_{n_m} - a_m| \rightarrow \infty$ и $|\mu_{n_m+1} - a_m| \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$ и всегда существуют числа b_m и b_{m+1} такие, что:

$$(i) \mu_{n_m} < b_m < a_m < b_{m+1} < \mu_{n_m+1},$$

(ii) $|b_m - a_m| \rightarrow \infty$ и $|b_{m+1} - a_m| \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$,

(iii) $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_{m+1}} = 1$.

Приведем одну из возможных прямых конструкций b_m . Так как

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_m}}{a_m} = 0, \quad \sqrt{a_m - \mu_{n_m}} < \sqrt{a_m},$$

то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{a_m - \sqrt{a_m - \mu_{n_m}}} = 1,$$

и так как $\sqrt{a_m - \mu_{n_m}} \rightarrow \infty$, то можно считать, что $\sqrt{a_m - \mu_{n_m}} > 1$, и можно положить $b_m = a_m - \sqrt{a_m - \mu_{n_m}} > \mu_{n_m}$. Аналогично можно определить и b_{m+1} .

Теперь определим новую последовательность $\{\mu'_n\}$ как занумерованное по возрастанию объединение множеств $\{\mu_n\} \cup \{b_n\}$. Для этой последовательности первое и третье из утверждаемых в лемме свойств выполнено по построению. Докажем второе. Так как в силу (i) для всех $k < m$ верно

$$\frac{1}{|b_k - a_m|} < \frac{1}{|\mu_{n_{k+1}} - a_m|},$$

а для всех $k > m + 1$ верно

$$\frac{1}{|b_k - a_m|} < \frac{1}{|\mu_{n_{k-1}} - a_m|},$$

то

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu'_n - a_m|} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - a_m|} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|b_n - a_m|} \\ &\leq \frac{1}{|b_m - a_m|} + \frac{1}{|b_{m+1} - a_m|} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_n - a_m|}, \end{aligned}$$

и в силу леммы 4 и (ii) второе утверждение доказано.

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть для операторов A_0 и B с $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_1$ и $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$ существуют числа $\delta \in [0, 1)$ и $\varepsilon \geq 0$ такие, что оператор $BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0$ продолжается до ограниченного и существует число $\omega \in [0, 1)$, $\omega + \delta < 1$, такое, что $(A_0^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon A_0)^{-1}$ — ядерный оператор. Тогда существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и последовательность контуров $\Gamma_m \in \mathbb{C}$ такая, что либо при $\varepsilon > 0$ и $\omega > \delta/l$, либо при $\varepsilon = 0$ и $\omega \geq \delta/l$ верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^{k-1}}{k} \operatorname{Tr} \left((BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right) = 0. \quad (18)$$

В частности, при $l = 1$ верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j - (B\varphi_j, \varphi_j)) = 0. \quad (19)$$

Доказательство. Мы начнем его со следующей леммы.

Лемма 6. *Существует бесконечно большая последовательность положительных чисел a_m такая, что*

$$\|BR_0(a_m)\|_1 = o(a_m^{-\omega} \ln^\varepsilon a_m)$$

при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство. Для оценки $\|BR_0(a_m)\|_1$ воспользуемся неравенством (5) при $p = 1$:

$$\|A\|_1 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A\chi_j\|,$$

где $\{\chi_j\}_{j=0}^{\infty}$ — произвольный ортонормированный базис пространства. Имеем

$$\begin{aligned} \|BR_0(\lambda)\|_1 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (BR_0(\lambda)\varphi_k, BR_0(\lambda)\varphi_k)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B\varphi_k, B\varphi_k)^{\frac{1}{2}}}{|\lambda_k - \lambda|} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_k, BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_k)^{\frac{1}{2}} \lambda_k^\delta}{|\lambda_k - \lambda| \ln^\varepsilon \lambda_k} \leq \|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k^\delta}{|\lambda_k - |\lambda|| \ln^\varepsilon \lambda_k}. \end{aligned} \quad (20)$$

Применяя (14) к неравенству (20), имеем

$$\begin{aligned} \|BR_0(\lambda)\|_1 &\leq \|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c\lambda_k^\delta (\ln^\varepsilon \lambda_k + \ln^\varepsilon |\lambda|)}{\lambda_k^\delta |\lambda|^\omega \ln^\varepsilon \lambda_k \left| \lambda_k^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_k - |\lambda|^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon |\lambda| \right|} \\ &= \frac{c\|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\|}{|\lambda|^\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1 + \left(\frac{\ln|\lambda|}{\ln\lambda_k}\right)^\varepsilon\right)}{\left| \lambda_k^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_k - |\lambda|^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon |\lambda| \right|} \\ &\leq \frac{c \ln^\varepsilon |\lambda| \|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\|}{|\lambda|^\omega} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left| \lambda_k^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_k - |\lambda|^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon |\lambda| \right|}. \end{aligned} \quad (21)$$

Сходимость ряда здесь обеспечена ядерностью оператора $A_0^{-(1-\delta-\omega)} \ln^{-\varepsilon} A_0$.

Воспользуемся далее результатом леммы 4 и выберем последовательность $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\left| \lambda_k^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_k - a_m^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon a_m \right|} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty,$$

и тогда из (21) следует

$$\|BR_0(a_m)\|_1 = o(a_m^{-\omega} \ln^\varepsilon a_m). \quad (22)$$

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству теоремы. Определим систему контуров Γ_m на комплексной плоскости как систему окружностей с центрами в нуле и радиусами $\{a_m\}$. Из доказательства леммы 1 и оценок леммы 6 немедленно следует, что внутри контуров Γ_m количество собственных чисел операторов A_0 и $A_0 + B$ совпадает при всех достаточно больших m .

Для доказательства теоремы заметим, что

$$\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda, \quad (23)$$

и исследуем правую часть этого равенства.

Из (23) интегрированием по частям с использованием формул (7) и (8) получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \operatorname{Tr}(R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \ln(I + BR_0(\lambda)) d\lambda. \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \left[\operatorname{Tr}(BR_0(\lambda)) + \operatorname{Tr} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) \right] d\lambda. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь равенство (8) использовано в форме степенного ряда для логарифма при $\|BR_0(\lambda)\| < 1$, т.е. в нашем случае при $\lambda \in \Gamma_m$ и достаточно большом m , см. (12).

Рассмотрим отдельно слагаемое с $\operatorname{Tr}(BR_0(\lambda))$. Так как $BR_0(\lambda)$ — ядерный оператор, то его след может быть вычислен как матричный в любом ортонормированном базисе (6), и при этом

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr}(BR_0(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_n \frac{(B\varphi_n, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} d\lambda = -\sum_{n=0}^{n_m} (B\varphi_n, \varphi_n). \quad (25)$$

Таким образом, равенство (23) с учетом (24) и (25) записывается в виде

$$\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l - (B\varphi_l, \varphi_l)) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda. \quad (26)$$

Теперь необходимо оценить члены ряда (26) при $k \geq 2$, и сначала с помощью (14) оценим норму оператора $BR_0(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \max_{\lambda \in \Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\| &\leq \|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\| \cdot \max_{\lambda \in \Gamma_m} \left(\max_n \frac{\lambda_n^\delta}{|\lambda_n - \lambda| \ln^\varepsilon \lambda_n} \right) \\ &\leq c \max_n \frac{\lambda_n^\delta}{|\lambda_n - a_m| \ln^\varepsilon \lambda_n} \leq c \max_n \frac{\ln^\varepsilon \lambda_n + \ln^\varepsilon a_m}{|\lambda_n^{1-\delta} \ln^\varepsilon \lambda_n - a_m^{1-\delta} \ln^\varepsilon a_m| \ln^\varepsilon \lambda_n} \\ &\leq \frac{c \ln^\varepsilon a_m}{\lambda_{n_m+1}^{1-\delta} \ln^\varepsilon \lambda_{n_m+1} - a_m^{1-\delta} \ln^\varepsilon a_m}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь $\{\lambda_{n_m}\}$ — та подпоследовательность собственных чисел, для которой $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, и без ограничения общности мы полагаем, что ближайшим к a_m является λ_{n_m+1} .

Запишем оценку (используемые свойства следа ядерного оператора см. в [12])

$$\left| \operatorname{Tr}((BR_0(\lambda))^k) \right| \leq \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} \cdot \|BR_0(\lambda)\|_1. \quad (28)$$

Тогда из (28) получим, что

$$\int_{\Gamma_m} \left| \operatorname{Tr}((BR_0(\lambda))^k) \right| |d\lambda| \leq \max_{\lambda \in \Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|_1 \cdot \int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} |d\lambda|. \quad (29)$$

Оценим интеграл в (29) при $k \geq 3$ на дуге $0 \leq \arg \lambda \leq \pi/2$, на остальных дугах аналогично:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \|BR_0(a_m e^{i\varphi})\|^{k-1} a_m |e^{i\varphi}| d\varphi &\leq c^{k-1} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\lambda_{n_m+1}^\delta}{|\lambda_{n_m+1} - a_m e^{i\varphi}| \ln^\varepsilon \lambda_{n_m+1}} \right)^{k-1} a_m d\varphi \\ &= \frac{c^{k-1} \lambda_{n_m+1}^{\delta(k-1)}}{\ln^{\varepsilon(k-1)} \lambda_{n_m+1}} \int_0^{\pi/2} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m+1} - a_m e^{i\varphi}|^{k-1}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Так как $|\lambda_{n_m+1} - a_m e^{i\varphi}| \geq |\lambda_{n_m+1} - a_m|$ и $|\lambda_{n_m+1} - a_m e^{i\varphi}| \geq a_m \sin \varphi$, то из (30) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \|BR_0(a_m e^{i\varphi})\|^{k-1} a_m |e^{i\varphi}| d\varphi &\leq \frac{c^{k-1} \lambda_{n_m+1}^{\delta(k-1)}}{\ln^{\varepsilon(k-1)} \lambda_{n_m+1}} \left(\int_0^{\varphi_m} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m+1} - a_m|^{k-1}} \right. \\ &+ \left. \int_{\varphi_m}^{\pi/2} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m+1} - a_m|^{k-3} a_m^2 \sin^2 \varphi} \right) \leq \frac{c^{k-1} \lambda_{n_m+1}^{\delta(k-1)}}{\ln^{\varepsilon(k-1)} \lambda_{n_m+1}} \left(\frac{a_m \varphi_m}{|\lambda_{n_m+1} - a_m|^{k-1}} \right. \\ &+ \left. \frac{c}{|\lambda_{n_m+1} - a_m|^{k-3} a_m \varphi_m} \right) \leq \frac{c^k \lambda_{n_m+1}^{\delta(k-1)}}{|\lambda_{n_m+1} - a_m|^{k-2} \ln^{\varepsilon(k-1)} \lambda_{n_m+1}}, \end{aligned}$$

здесь в последнем неравенстве сделан выбор $\varphi_m = \frac{|\lambda_{n_m} - a_m|}{a_m}$. Применяя неравенство (14), окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} |d\lambda| &\leq \frac{c^k \lambda_{n_m+1}^{\delta(k-1)}}{\ln^{\varepsilon(k-1)} \lambda_{n_m+1}} \cdot \frac{(\ln^{\varepsilon} \lambda_{n_m+1} + \ln^{\varepsilon} a_m)^{k-2}}{\lambda_{n_m+1}^{(\delta+\omega)(k-2)} \left(a_m^{1-\delta-\omega} \ln^{\varepsilon} a_m - \lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} \ln^{\varepsilon} \lambda_{n_m+1} \right)^{k-2}} \\ &\leq \frac{c^k \lambda_{n_m+1}^{\delta}}{\ln^{\varepsilon} \lambda_{n_m+1}} \cdot \frac{\ln^{\varepsilon(k-2)} a_m}{\lambda_{n_m+1}^{\omega(k-2)} \left(a_m^{1-\delta-\omega} \ln^{\varepsilon} a_m - \lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} \ln^{\varepsilon} \lambda_{n_m+1} \right)^{k-2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Тогда для остатка ряда (26) при $l \geq 3$ с учетом (31), (14) и (20) имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=l}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| &\leq \|BR_0(a_m)\|_1 \int_{\Gamma_m} \sum_{k=l}^{\infty} \|(BR_0(\lambda))^{k-1}\| |d\lambda| \\ &\leq \frac{\lambda_{n_m+1}^{\delta} \|BR_0(a_m)\|_1}{\ln^{\varepsilon} \lambda_{n_m+1}} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{c^{k-2} \ln^{\varepsilon(k-2)} a_m}{\lambda_{n_m+1}^{\omega(k-2)} \left(a_m^{1-\delta-\omega} \ln^{\varepsilon} a_m - \lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} \ln^{\varepsilon} \lambda_{n_m+1} \right)^{k-2}} \\ &\leq \frac{c \lambda_{n_m+1}^{\delta} \|BR_0(a_m)\|_1 \ln^{\varepsilon(l-2)} a_m}{\lambda_{n_m+1}^{\omega(l-2)} \left(a_m^{1-\delta-\omega} \ln^{\varepsilon} a_m - \lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} \ln^{\varepsilon} \lambda_{n_m+1} \right)^{l-2} \ln^{\varepsilon} \lambda_{n_m+1}} = o \left(\frac{\ln^{\varepsilon(l-2)} \lambda_{n_m+1}}{\lambda_{n_m+1}^{\omega(l-1)-\delta}} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Оценить аналогично вторую поправку нельзя: при $k = 2$ оценка части интеграла (30) в пределах $\varphi_m \leq \varphi \leq \pi/2$ содержит в знаменателе отрицательную степень. Проведем оценку этого слагаемого ряда (26) непосредственно:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(BR_0(\lambda)B\varphi_n, \varphi_n)}{\lambda_n - \lambda} d\lambda. \quad (33)$$

Разложим вектор $\psi_n = B\varphi_n$ по базису $\{\varphi_k\}_{k=0}^{+\infty}$: $\psi_n = \sum_{k=0}^{\infty} (\psi_n, \varphi_k) \varphi_k = \sum_{k=0}^{+\infty} (B\varphi_n, \varphi_k) \varphi_k$ и продолжим равенство (33):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} (BR_0(\lambda) b_{nk} \varphi_k, \varphi_n) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{(\lambda_n - \lambda)(\lambda_k - \lambda)} d\lambda. \quad (34)$$

Интегрируя (34) по контуре почленно, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda = \sum_{n=0}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n}. \quad (35)$$

Рассмотрим внутренний ряд и, используя неравенство (14) и преобразование Абеля (13), получим (сумма в квадратных скобках оценивается по неравенствам Коши и Бесселя)

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)|}{\lambda_k - \lambda_n} = \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{\lambda_n^\delta \lambda_k^\delta |(BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_n, \varphi_k)(BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_k, \varphi_n)|}{(\lambda_k - \lambda_n) \ln^\varepsilon \lambda_n \ln^\varepsilon \lambda_k} \\
& \leq c \lambda_n^{\delta-\omega} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_n, \varphi_k)(BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_k, \varphi_n)| (\ln^\varepsilon \lambda_k + \ln^\varepsilon \lambda_n)}{(\lambda_k^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_k - \lambda_n^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_n) \ln^\varepsilon \lambda_k \ln^\varepsilon \lambda_n} \\
& \leq c \lambda_n^{\delta-\omega} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{|(BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_n, \varphi_k)(BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_k, \varphi_n)|}{(\lambda_k^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_k - \lambda_n^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_n)} \\
& = c \lambda_n^{\delta-\omega} \sum_{k=n_m+1}^{\infty} \left[\sum_{l=n_m+1}^k |(BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0 \varphi_n, \varphi_l)(\varphi_l, (BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0)^* \varphi_n)| \right] \\
& \times \left(\frac{1}{\lambda_k^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_k - \lambda_n^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_{k+1}^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_{k+1} - \lambda_n^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_n} \right) \\
& \leq \frac{c \lambda_n^{\delta-\omega} \|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\|^2}{(\lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_{n_m+1} - \lambda_n^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_n)},
\end{aligned}$$

и тогда из (35), вновь применяя (14), получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda \right| = \left| \sum_{n=0}^{n_m} \sum_{k=n_m+1}^{+\infty} \frac{(B\varphi_n, \varphi_k)(B\varphi_k, \varphi_n)}{\lambda_k - \lambda_n} \right| \\
& \leq \sum_{n=0}^{n_m} \frac{\lambda_n^{\delta-\omega} \|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\|^2}{(\lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_{n_m+1} - \lambda_n^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_n)} \leq \lambda_{n_m}^{\delta-\omega} \sum_{n=0}^{n_m} \frac{\|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\|^2}{\lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_{n_m+1} - \lambda_n^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon \lambda_n}, \quad (36)
\end{aligned}$$

и так как $\lambda_{n_m+1} > a_m$, то по лемме 4 сумма в (36), как часть ядерной нормы резольвенты оператора $A_0^{1-\delta-\omega} \ln^\varepsilon A_0$, стремится к нулю. Таким образом, из (36)

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr}(BR_0(\lambda)BR_0(\lambda)) d\lambda \right| = o(\lambda_{n_m}^{\delta-\omega}),$$

и оценка (32) верна при $l \geq 2$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что так как любая степень логарифма растет медленнее любой степенной функции того же аргумента (с положительной степенью), то при $\varepsilon > 0$ и при $\omega > \delta/l$ в силу (32) стремится к нулю остаток ряда из правой части (26), начинающийся с слагаемого с номером $l+1$, и, перенося остальные слагаемые в (26) вправо, мы получаем формулу (18), а при $\varepsilon = 0$ тот же вывод верен при $\omega \geq \delta/l$.

Теорема 2. Пусть для операторов A_0 и B с $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_1$ и $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$ существуют числа $\delta \in [0, 1)$ и $\varepsilon > 0$ такие, что оператор $BA_0^{-\delta} \ln^{-\varepsilon/2} A_0$ продолжается до ограниченного, и существует число $\omega \in [0, 1)$, $\omega + \delta < 1$, такое, что $(A_0^{1-\delta-\omega} \ln^{-\varepsilon} A_0)^{-1}$ — ядерный оператор. Тогда существует подпоследовательность натурального ряда $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ и последовательность контуров $\Gamma_m \in \mathbb{C}$ такая, что при $\omega \geq \delta/l$ верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^{k-1}}{k} \text{Tr}((BR_0(\lambda))^k) d\lambda \right) = 0. \quad (37)$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы технически весьма близко предыдущему с той лишь разницей, что ключевую роль теперь играет применение неравенства леммы 3 и мы не будем воспроизводить доказательство целиком, выделив только важнейшие ключевые оценки. В рамках условий теоремы на соответствующей системе контуров верна следующая оценка ядерной нормы оператора $BR_0(\lambda)$:

$$\|BR_0(a_m)\|_1 = o(a_m^{-\omega} \ln^{-\varepsilon/2} a_m).$$

Оценка, аналогичная (31), имеет вид

$$\int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^{k-1} |d\lambda| \leq \frac{c^k \lambda_{n_m+1}^\delta \ln^{\varepsilon/2} \lambda_{n_m+1}}{\lambda_{n_m+1}^{\omega(k-2)} \ln^{\varepsilon(k-2)/2} a_m \left(\lambda_{n_m+1}^{1-\delta-\omega} \ln^{-\varepsilon} \lambda_{n_m+1} - a_m^{1-\delta-\omega} \ln^{-\varepsilon} a_m \right)^{k-2}}.$$

И ключевая оценка остатка ряда, аналогичная (32) (мы напишем сразу для $l \geq 1$), имеет вид

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| = o \left(\frac{\ln^{\varepsilon/2} \lambda_{n_m+1}}{\lambda_{n_m+1}^{\omega-\delta} \ln^{l\varepsilon/2} a_m} \right). \quad (38)$$

Для доказательства утверждения теоремы осталось заметить, что при $\omega = \delta/l$ оценка (38) так же обеспечивает стремление к нулю для всех $l \geq 1$ в силу леммы 5, так как мы всегда можем считать $\ln \lambda_{n_m+1} \sim \ln a_m$.

Далее мы рассматриваем в общем виде один частный случай распределения спектра, часто встречающийся в приложениях к операторам математической физики. Это случай, когда в последовательности собственных чисел невозмущенного оператора есть бесконечная подпоследовательность пар соседних собственных чисел с бóльшим расстоянием между ними, нежели расстояние, гарантированное главным членом асимптотики считающей функции $N_\lambda(x)$ (число тех n , для которых $\lambda_n \leq x$) данной последовательности собственных чисел $\lambda = \{\lambda_n\}$. Таким распределением собственных чисел обладают, например, многомерный гармонический осциллятор, оператор Лапласа на многомерных сферах и проективных пространствах.

Теорема 3. Пусть для операторов A_0 и B с $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_1$ и $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$ существуют числа $\delta \in [0, 1)$ и $\varepsilon \geq 0$ такие, что оператор $BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0$ продолжается до ограниченного и $A_0^{-1+\delta} \ln^{-\varepsilon} A_0 \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, где $p = 2, 3, \dots$ и $p \geq 2$, а $\omega \in [0, 1)$. Предположим также, что для подпоследовательности собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty}$, для которой $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_m+1}$, где $\{a_m\}$ выбрана по лемме 4 и $\|R_0(a_m)\|_1 \rightarrow 0$, выполняется неравенство $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c$ ($\delta < \rho < 1$). Тогда для целого числа q , ближайшего справа к величине

$$\frac{(p-1)(1-\rho) - \omega(1-\delta)}{\rho - \delta} = \min_{\delta < \rho_1 \leq \rho} \frac{(p-1)(1-\rho_1) - \omega(1-\delta)}{\rho_1 - \delta},$$

в случае выполнения неравенства $\delta < \rho_2(p+q-1)$, где $\rho_2 = \rho - \rho_1$, верна следующая формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p+q} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \text{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0, \quad (39)$$

а если $\delta \geq \rho_2(p+q-1)$, то при $l \geq 2$ и таком, что $\delta - \rho_2(p+q-1) - (\rho - \delta)(l-1) \leq 0$, верна формула

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=0}^{n_m} (\mu_j - \lambda_j) + \sum_{k=1}^{p+q+l-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \text{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda \right) = 0. \quad (40)$$

Отметим, что формулы (39) и (40) верны и при любом целом q , большем указанного.

Доказательство. Мы будем использовать одну формулу для регуляризованного определителя возмущения, доказанную нами в [5].

Лемма 7. Пусть $BA_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p$, тогда при $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что выполнено неравенство $\|BR_0(\lambda)\| < 1$, для логарифма регуляризованного определителя возмущения (9) верно представление

$$\ln D_p(\lambda) = \text{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right). \quad (41)$$

Теперь мы готовы приступить непосредственно к исследованию формулы следа. Условия теоремы (в силу того, что из $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c$ следует $\lambda_{n_m+1} - \lambda_{n_m} \geq c\lambda_{n_m+1}^\rho$) позволяют выбрать контур Γ_m в соответствии с результатом леммы 1 так, чтобы внутри контура количество собственных чисел A_0 и $A_0 + B$ было одинаково и так, что на Γ_m выполнено $\|BR_0(\lambda)\| < 1$. Тогда из (41) интегрированием по частям получаем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \ln D_p(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \frac{d}{d\lambda} \ln D_p(\lambda) d\lambda, \quad (42)$$

и, используя (10), продолжаем (42):

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{p-1}}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \text{Tr} (R(\lambda) (BR_0(\lambda))^p) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \lambda \text{Tr} \left(R_0(\lambda) - R(\lambda) + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k R_0(\lambda) (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (43)$$

Далее нам надо разбить интеграл (43) в сумму интегралов, но сделать это непосредственно нельзя, так как каждый из операторов по отдельности под знаком операции Tr в (43), вообще говоря, не ядерный. Однако оператор вида $\int_{\Gamma_m} \lambda R_0(\lambda) (BR_0(\lambda))^k d\lambda$ при $k \geq 0$ является конечномерным как сумма конечного числа вычетов в точках спектра оператора A_0 внутри контура, а разложение в ряд Лорана оператора $R_0(\lambda)$ в окрестности каждой из этих точек имеет в качестве коэффициентов главной части конечномерные проекторы, что обеспечивает конечномерность и всех возникающих композиций операторов — коэффициентов разложения. Таким образом, используя перестановочность вычисления следа и интегрирования по параметру семейства ядерных операторов, мы можем записать интеграл от следа суммы операторов (43) как сумму следов конечномерных операторов:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \text{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda (R_0(\lambda) - R(\lambda)) d\lambda + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \text{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda R_0(\lambda) (BR_0(\lambda))^k d\lambda \\ &= \sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \text{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda (BR_0(\lambda))^{k-1} BR_0^2(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k}{2\pi i} \text{Tr} \int_{\Gamma_m} \lambda (BR_0(\lambda))^{k-1} d(BR_0(\lambda)) \end{aligned}$$

$$= \sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda. \quad (44)$$

Цепочка равенств (42), (43) и (44) дает нам основное равенство

$$\sum_{l=0}^{n_m} (\mu_l - \lambda_l) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i k} \operatorname{Tr} \int_{\Gamma_m} (BR_0(\lambda))^k d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \operatorname{Tr} \left(\sum_{l=p}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l} (BR_0(\lambda))^l \right) d\lambda. \quad (45)$$

Приступим теперь к оценке слагаемых в правой части (45) и начнем с ядерной нормы оператора $(BR_0(\lambda))^{p+q}$, где q — некоторое целое неотрицательное число:

$$\begin{aligned} \max_{|\lambda|=a_m} \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 &\leq \|BA_0^{-\delta} \ln^\varepsilon A_0\|^{p+q} \max_{|\lambda|=a_m} \left\| \left(A_0^\delta \ln^{-\varepsilon} A_0 R_0(\lambda) \right)^{p+q} \right\|_1 \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q} \lambda_n^{\delta(p+q)}}{|\lambda_n - a_m|^{p+q} \ln^{\varepsilon(p+q)} \lambda_n}. \end{aligned} \quad (46)$$

Так как $A_0^{-1+\delta} \ln^{-\varepsilon} A_0 \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, то $A_0^{(-1+\delta)(p-\omega)} \ln^{-\varepsilon(p-\omega)} A_0 \in \mathfrak{S}_1$ и по лемме 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left| \lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} \lambda_n - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m \right|} \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty.$$

Тогда продолжим (46), применив (14)

$$\begin{aligned} \max_{|\lambda|=a_m} \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{p+q+1} \lambda_n^{\delta q}}{|\lambda_n - a_m|^{p+q-1}} \\ &\times \frac{\ln^{\varepsilon(p-\omega)} \lambda_n + \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m}{\left| \lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} \lambda_n - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m \right| \lambda_n^{1-p+\omega-\delta\omega} \ln^{\varepsilon(p+q)} \lambda_n}. \end{aligned} \quad (47)$$

Далее, так как $\lambda_{n_m+1}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c$, то тем более для любых n, m верно $|\lambda_n^{1-\rho} - a_m^{1-\rho}| \geq c$ и тогда для любых неотрицательных $\rho_1, \rho_2, \rho_1 + \rho_2 = \rho$ из неравенства (15) имеем

$$\frac{1}{|\lambda_n - a_m|} \leq \frac{1}{\lambda_n^{\rho_1} a_m^{\rho_2} |\lambda_n^{1-\rho} - a_m^{1-\rho}|} \leq \frac{c}{\lambda_n^{\rho_1} a_m^{\rho_2}} \quad (48)$$

и, используя (48), продолжаем неравенство (47):

$$\begin{aligned} \max_{|\lambda|=a_m} \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 &\leq \frac{c^{p+q+1}}{a_m^{\rho_2(p+q-1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^{\varepsilon(p-\omega)} \lambda_n + \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m}{\lambda_n^{1-p+\omega-\delta\omega} \lambda_n^{\rho_1(p+q-1)} \ln^{\varepsilon(p+q)} \lambda_n} \\ &\times \frac{\lambda_n^{\delta q}}{\left| \lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} \lambda_n - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m \right|} \\ &\leq \frac{c^{p+q+2} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m}{a_m^{\rho_2(p+q-1)}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^{-\rho_1(p+q-1)-1+p-\omega+\delta\omega+\delta q}}{\left| \lambda_n^{(1-\delta)(p-\omega)} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} \lambda_n - a_m^{(1-\delta)(p-\omega)} \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m \right|}. \end{aligned}$$

В последнем переходе использовано неравенство $\ln^{\varepsilon(p-\omega)} \lambda_n + \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m \leq c \ln^{\varepsilon(p+q)} \lambda_n \ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m$, легко достигаемое выбором константы c . Положим

$$\rho_1 = \frac{p-1-(1-\omega)\delta+\delta q}{p-1+q},$$

где q указано в формулировке теоремы. Тогда

$$q = \frac{(p-1)(1-\rho_1) - \omega(1-\delta)}{\rho_1 - \delta}$$

и $\delta < \rho_1 \leq \rho$.

Применяя теперь в (47) неравенство (48) с этим ρ_1 , мы получаем оценку

$$\|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 = o\left(\frac{\ln^{\varepsilon(p-\omega)} a_m}{a_m^{\rho_2(p+q-1)}}\right). \quad (49)$$

Тогда аналогично (30) и (31) имеем при $l \geq 2$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_m} \text{Tr} (BR_0(\lambda))^{p+q+l} d\lambda \right| &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 \int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\|^l |d\lambda| \\ &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 c^l \int_{\Gamma_m} \left(\frac{\lambda_{n_m}^\delta}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}| \ln^\varepsilon \lambda_{n_m}} \right)^l a_m d\varphi \\ &= o\left(a_m^{\delta - \rho_2(p+q-1) - (\rho-\delta)(l-1)} \ln^{\varepsilon(p-\omega) - \varepsilon(l-1)} a_m\right). \end{aligned} \quad (50)$$

И, таким образом, для остатка ряда (45) из (50) при $l \geq 2$ имеем

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} \text{Tr} \left(\sum_{k=p+q+l}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (BR_0(\lambda))^k \right) d\lambda \right| = o\left(a_m^{\delta - \rho_2(p+q-1) - (\rho-\delta)(l-1)} \ln^{\varepsilon(p-\omega) - \varepsilon(l-1)} a_m\right),$$

и для доказательства формулы (40) осталось заметить, что так как степенная функция растет быстрее логарифмической, то правая часть полученного неравенства всегда стремится к нулю при указанных в теореме для формулы (40) предположениях.

Для доказательства (39) нам необходимо оценить интеграл

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_m} \text{Tr} (BR_0(\lambda))^{p+q+1} d\lambda \right| &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 \int_{\Gamma_m} \|BR_0(\lambda)\| |d\lambda| \\ &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 c \frac{\lambda_{n_m}^\delta}{\ln^\varepsilon \lambda_{n_m}} \int_0^{\pi/2} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m e^{i\varphi}|} \\ &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 c \frac{\lambda_{n_m}^\delta}{\ln^\varepsilon \lambda_{n_m}} \left(\int_0^{\varphi_m} \frac{a_m d\varphi}{|\lambda_{n_m} - a_m|} + \int_{\varphi_m}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sin \varphi} \right) \\ &\leq \|(BR_0(\lambda))^{p+q}\|_1 c \frac{\lambda_{n_m}^\delta}{\ln^\varepsilon \lambda_{n_m}} \left(\frac{a_m \varphi_m}{\lambda_{n_m}^\rho} + \ln \frac{1}{\varphi_m} \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое стремится к нулю при выборе $\varphi_m = 1/a_m$, но второе не является ограниченным. Однако при выполнении условия $\delta < \rho_2(p+q-1)$ теоремы из (49) и того, что любая степень подавляет логарифмический рост, следует (39).

Мы опустим доказательство следующей теоремы, оно аналогично предыдущему и опирается на неравенство (16).

Теорема 4. Пусть для операторов A_0 и B с $A_0^{-1} \in \mathfrak{S}_1$ и $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(B)$, существует число $\delta \in [0, 1)$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что оператор $BA_0^{-\delta} \ln^{-\varepsilon/2} A_0$ продолжается до ограниченного, а оператор $A_0^{-1+\delta} \ln^\varepsilon A_0 \in \mathfrak{S}_{p-\omega}$, где p натуральное и $p \geq 2$, а $\omega \in [0, 1)$. Предположим также, что для подпоследовательности собственных чисел $\{\lambda_{n_m}\}_{m=1}^{+\infty}$, для которой $\lambda_{n_m} < a_m < \lambda_{n_{m+1}}$, где последовательность $\{a_m\}$ выбрана по лемме 4, а $\|R_0(a_m)\|_1 \rightarrow 0$, выполнено $\lambda_{n_{m+1}}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c$, где $\delta < \rho < 1$. Тогда при том же выборе параметра q и при тех же условиях, как и в теореме 3, выполнены соответственно формулы (39) или (40).

З а м е ч а н и е 1. В теоремах 3 и 4 не рассмотрен предельный случай $p = 1$, $\omega = 0$. Однако этот случай теперь может быть легко исследован: доказательство в точности совпадает с доказательством теоремы 1, в котором надо лишь везде вместо параметра ω (из формулировки теоремы 1) использовать параметр $\rho - \delta$ (из формулировки теорем 3 и 4). При этом полученная формула совпадет с формулами теорем 1 и 2 соответственно.

З а м е ч а н и е 2. В теоремах 3 и 4 мы во избежание еще большего загромождения формулировок и доказательств использовали условие на подпоследовательность собственных чисел вида: $\lambda_{n_{m+1}}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c$, где $\rho > \delta$. Так как степенная функция растет быстрее логарифмической, то вместо этого условия можно использовать без изменения результата условия вида $\lambda_{n_{m+1}}^{1-\rho} \ln^\alpha \lambda_{n_{m+1}} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \ln^\alpha \lambda_{n_m} \geq c$ или $\lambda_{n_{m+1}}^{1-\rho} - \lambda_{n_m}^{1-\rho} \geq c \ln^\alpha \lambda_{n_m}$, где $\rho > \delta$, и аналогичные.

Поступила 02.05.2006

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Докл. АН СССР. Т. 88. 1953. С. 593–596.
2. Садовничий В.А., Подольский В.Е. Регуляризованный след ограниченного возмущения оператора с ядерной резольвентой // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 34, № 4. С. 556–564.
3. Садовничий В.А., Конягин С.В., Подольский В.Е. Регуляризованный след оператора с ядерной резольвентой, возмущенного ограниченным // Докл. РАН. 2000. Т. 373, № 1. С. 26–28.
4. Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов с относительно ядерным возмущением // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 3. С. 1–2.
5. Садовничий В.А., Подольский В.Е. Следы операторов с относительно компактным возмущением // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 2. С. 129–152.
6. Садовничий В.А., Дубровский В.В. Об одной абстрактной теореме теории возмущений, о формулах регуляризованных следов и о дзета-функции операторов // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 7. С. 1264–1271.
7. Садовничий В.А., Любишкин В.А. Конечномерные возмущения дискретных операторов и формулы следов // Функциональный анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 3. С. 55–65.
8. Дубровский В.В. Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 12. С. 2164–2166.
9. Садовничий В.А., Дубровский В.В. Классическая формула регуляризованного следа для собственных чисел оператора Лапласа — Бельтрами с потенциалом на сфере S^2 // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 61–69.
10. Подольский В.Е. Формула регуляризованного следа оператора Лапласа — Бельтрами с нечетным потенциалом на сфере S^2 // Мат. заметки. 1994. Т. 56, вып. 1. С. 71–77.
11. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
12. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 448 с.

УДК 517.977

ДЕФЕКТ СТАБИЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ¹

В. Н. Ушаков, Я. А. Латушкин

В работе исследуется свойство стабильности в игровой задаче сближения конфликтно-управляемой системы с целевым множеством в фиксированный момент окончания. Для множеств в пространстве позиций игры вводится понятие дефекта стабильности.

1. Введение

В работе рассматривается конфликтно-управляемая система на конечном промежутке времени. Исследуются вопросы, относящиеся к одному из центральных понятий теории позиционных дифференциальных игр — свойству стабильности. Свойство стабильности было введено в конце 1960-х годов (см. [1–4]) и в первых работах выражалось в терминах управлений противоборствующих игроков.

В течение последующих десятилетий имела место эволюция в описании этого свойства.

В [5–8] стабильность представлена как свойство слабой инвариантности множества в пространстве позиций относительно некоторого семейства дифференциальных включений, связанных с динамикой конфликтно-управляемой системы. Эти дифференциальные включения содержат в качестве параметра вектор управления второго игрока.

В первой половине 1970-х годов конструкции, базирующиеся на стабильности, были применены при изучении новых задач, в частности игровой задачи сближения-уклонения с функциональным целевым множеством [9], а также задачи гарантированного управления в условиях неполной информации о состоянии управляемого объекта [10, 11].

В середине 1970-х годов появляется новая формулировка стабильности, и постепенно кристаллизуется новое направление, базирующееся на этой формулировке — унификация дифференциальных игр. В работах Н.Н. Красовского [12, 13] было дано определение унификационных моделей, изучены их свойства и указаны перспективы применения в различных игровых задачах динамики. Суть унификации заключается в том, что свойство стабильности формулируется в терминах векторов сопряженных переменных и гамильтониана конфликтно-управляемой системы. При унификации собственно вид конфликтно-управляемой системы — ее правая часть отступает на второй план; на передний план выступает гамильтониан системы. С позиций последующих лет становится ясно, что одна из важнейших особенностей унификации состоит в выражении свойства стабильности в форме, которая хорошо сочетается с конструкциями негладкого и выпуклого анализа. Унификация играет важную роль и при сравнении конфликтно-управляемых систем. Так, например, совершенно прозрачным становится тот факт, что две системы, имеющие одинаковые гамильтонианы, эквивалентны с точки зрения решения дифференциальной игры. Некоторым аспектам унификации посвящены также работы [14, 15].

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 05-01-00601-а, 04-01-96099урал_а) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-8512.2006.1).

Во второй половине 1970-х — начале 1980-х гг. велись в нескольких направлениях исследования, посвященные вопросам, связанным с построением стабильных мостов в игровых задачах. В работах [16–18] был предложен метод программных итераций для вычисления функции цены и стабильных мостов в дифференциальных играх. Активно разрабатывались методы и алгоритмы приближенного вычисления стабильных мостов [19–21]; для этого было очень важно выбрать удобное представление свойства стабильности, что существенно облегчало вычисления.

Следующий этап, связанный с представлением свойства стабильности, относится к началу 1980-х годов. К этому времени было рассмотрено несколько конкретных дифференциальных игр, в которых свойство стабильности допускало формулировки, не укладывающиеся в традиционные схемы. Для этих игр свойство стабильности можно было выразить, используя лишь конечное число дифференциальных включений.

Таким образом, к началу 1980-х годов налицо было несколько представлений при описании свойства стабильности, очень важного в дифференциальных играх. Хотя эти представления различны по форме, они выделяют одни и те же стабильные мосты и, значит, эквивалентны по существу.

В первой половине 1980-х годов появилась довольно общая формулировка свойства стабильности [22, 23], вобравшая в себя некоторые известные формулировки, в том числе и те, которые не укладывались в традиционные схемы. В этой формулировке, так же, как и в унификационной схеме [12, 13], присутствует явно гамильтониан конфликтно-управляемой системы.

Вслед за этим в середине 1980-х годов было получено инфинитезимальное представление свойства стабильности [24], выраженное в терминах конусов Булигана или правых производных соответствующего множества. Это представление, как показал А.И. Субботин [25], оказалось полезным не только при рассмотрении теоретических вопросов в дифференциальных играх, но и при разработке теории обобщенных (минимаксных и вязкостных) решений уравнений типа Гамильтона — Якоби. Несколько позже инфинитезимальные конструкции, связанные с конусами Булигана, были применены при исследовании более общих уравнений в частных производных первого порядка [26].

В настоящей работе показано, что конструкции, участвующие в инфинитезимальном представлении свойства стабильности, удобно использовать и для расширения понятия стабильности. Это влечет расширение сферы действия метода экстремального сдвига.

2. Постановка задачи конфликтного управления

Пусть поведение конфликтно-управляемой системы на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, описывается системой

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (2.1)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^m$ — фазовый вектор системы, u и v — управления первого и второго игроков, P и Q — компакты в пространствах \mathbb{R}^p и \mathbb{R}^q соответственно. Символ \mathbb{R}^n означает евклидово пространство размерности n .

Предполагается, что выполнены условия:

А. Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ определена и непрерывна по совокупности переменных (t, x, u, v) на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$ и для любого компакта $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ найдется такое $L = L(D) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leq L \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \quad (2.2)$$

для любых $(t, x^{(i)}, u, v) \in D \times P \times Q$, $i = 1, 2$.

В. Существует такое $\mu \in (0, \infty)$, что $\|f(t, x, u, v)\| \leq \mu(1 + \|x\|)$ для любых $(t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m \times P \times Q$.

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в соответствующем евклидовом пространстве.

Рассматриваемая нами дифференциальная игра является антагонистической и складывается из двух задач — задачи о сближении и задачи об уклонении [8]. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ системы (2.1) в момент ϑ на заданный компакт M в \mathbb{R}^m , каковы бы ни были при этом допустимые управления второго игрока. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления с поводырем первого игрока [8].

Задача об уклонении, стоящая перед вторым игроком, заключается в том, чтобы обеспечить уклонение движений $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ системы (2.1) в момент ϑ от некоторой замкнутой ε -окрестности M_ε компакта M , каковы бы ни были при этом допустимые управления первого игрока. Решение задачи требуется обеспечить в классе контр-позиционных процедур управления с поводырем второго игрока [8].

Для сформулированной дифференциальной игры справедлива альтернатива [8]: существует такое замкнутое множество $W^0 \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ (максимальный u -стабильный мост), что для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in W^0$ разрешима задача о сближении и для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in ([t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m) \setminus W^0$ разрешима задача об уклонении.

Согласно принципу экстремального сдвига [8] разрешающая процедура управления первого игрока может быть реализована для исходных позиций $(t_*, x_*) \in W^0$ как позиционная процедура управления с поводырем, нацеливающая движение $x(t)$ управляемой системы (2.1) на движение поводыря, идущее по мосту W^0 . При этом, как известно, основная трудность в решении задачи о сближении приходится на выделение моста W^0 в пространстве позиций (t_*, x_*) дифференциальной игры.

Задача о выделении W^0 в пространстве позиций — одна из основных и наиболее сложных задач, возникающих на пути построения решений дифференциальной игры. Определение моста W^0 не является непосредственным рецептом для его вычисления. Для вычисления W^0 необходимо эффективное аналитическое описание W^0 , которое, однако, возможно лишь в редких случаях. Это обстоятельство обуславливает необходимость разработки методов и алгоритмов приближенного построения моста W^0 . Такие алгоритмы разработаны для некоторых классов задач [20, 21, 23].

В результате приближенных построений мы получаем не мост W^0 , а некоторое другое множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, которое обозначим символом \mathcal{W}^0 . Множество \mathcal{W}^0 удовлетворяет краевому условию $\mathcal{W}^0(\vartheta) = M$, где $\mathcal{W}^0(t) = \{x \in \mathbb{R}^m : (t, x) \in \mathcal{W}^0\}$.

Для позиций $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}^0$ разрешима, вообще говоря, не исходная задача о сближении с M , а менее жесткая задача о сближении с некоторой ε -окрестностью M_ε множества M . При этом в качестве позиционной процедуры управления первого игрока, обеспечивающей приведение движения $x(t)$ системы (2.1) на M_ε , мы используем процедуру управления, нацеливающую движение $x(t)$ на некоторую ломаную, протянутую через \mathcal{W}^0 и упирающуюся в конечный момент ϑ в множество $\mathcal{W}^0(\vartheta) = M$. Эту ломаную можно трактовать как движение поводыря.

В следующих пунктах этой работы мы рассмотрим некоторое ограниченное замкнутое множество W^* из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, $W^*(\vartheta) = M$, в предположении, что оно удовлетворяет некоторым условиям (см. разд. 4). Для W^* и позиций $(t_*, x_*) \in W^*$ определим процедуру управления, аналогичную той, которая упоминалась для множества \mathcal{W}^0 . Эту процедуру, являющуюся по смыслу процедурой управления с поводырем, будем называть для краткости W^* -процедурой управления первого игрока. В разд. 5 мы достаточно аккуратно оценим ту ε -окрестность множества M , в которую гарантировано приведение всех движений $x(t)$ из точек $(t_*, x_*) \in W^*$ с помощью W^* -процедуры управления.

3. Стабильность множеств в пространстве позиций игры

Максимальный стабильный мост W^0 состоит из всех тех $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, из которых разрешима задача о сближении. Учитывая это и условие В, мы можем указать в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ достаточно большую ограниченную и замкнутую область D , содержащую мост W^0 и все движения, находящиеся в достаточно малой окрестности моста W^0 .

Однако в связи с тем, что в последующих пунктах мы будем рассматривать множества $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, не обязательно являющиеся стабильными мостами и могущие достаточно сильно отличаться от W^0 , упомянутого выше выбора области D нам недостаточно.

Зададим некоторый компакт $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, $W^*(\vartheta) \subset M$, свойства которого детализируются несколько позже, и уточним выбор области D .

Обозначим $h(W_2, W_1)$ — хаусдорфово отклонение множества W_2 от W_1 , где W_1 и W_2 из \mathbb{R}^m .

Пусть число $\varepsilon_* > 0$ выбрано удовлетворяющим неравенствам

$$\varepsilon_* > \sup_{t \in [t_0, \vartheta]} h(W^*(t), \{\mathbf{0}\}), \quad \varepsilon_* > \rho_* + \mu(\vartheta - t_0)e^{\mu(\vartheta - t_0)}.$$

Здесь $\mathbf{0}$ — нуль в \mathbb{R}^m , $\{\mathbf{0}\}$ — множество, состоящее из нуля, $\rho_* = h(M, \{\mathbf{0}\})$.

Тогда цилиндр $Z = \{(t, x) : t \in [t_0, \vartheta], \|x\| \leq \varepsilon_*\}$ в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ будет содержать как W^* , так и W^0 .

Цилиндр Z содержится в ограниченной и замкнутой области $D = \{(t, x) : t \in [t_0, \vartheta], \|x\| \leq (\varepsilon_* + \mu(t - t_0))e^{\mu(t - t_0)}\}$ из $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Область D есть интегральная воронка на $[t_0, \vartheta]$ дифференциального включения $\dot{x} \in U(x) = \{f \in \mathbb{R}^m : \|f\| \leq \mu(1 + \|x\|)\}$ с начальным множеством $D(t_0) = \{x^0 \in \mathbb{R}^m : \|x^0\| \leq \varepsilon_*\}$.

Пусть G — наибольший из шаров $U(x)$, $(t, x) \in D$ и ρ — его радиус.

Справедливо включение

$$F(t, x) \subset U(x), \quad (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m,$$

и, следовательно, все решения дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad (t_*, x(t_*)) = (t_*, x_*) \in Z$$

удовлетворяют включению $F(t, x) \subset G$, $(t, x) \in D$.

Полагаем

$$\Pi_l(t, x) = \{f \in \mathbb{R}^m : \langle l, f \rangle \leq H(t, x, l)\},$$

$$F_l(t, x) = F(t, x) \bigcap \Pi_l(t, x),$$

$$(t, x, l) \in D \times S, \quad S = \{l \in \mathbb{R}^m : \|l\| = 1\}.$$

Справедливо включение

$$F_l(t, x) \subset G, \quad (t, x, l) \in D \times S.$$

Определение стабильного моста W и максимального стабильного моста W^0 дадим теперь в терминах семейства $\mathcal{L} = \{(t, x) \mapsto F_l(t, x), l \in S\}$ отображений $(t, x) \mapsto F_l(t, x)$, $(t, x) \in D$, отвечающих векторам $l \in S$.

Этому определению предшествует определение оператора стабильного поглощения.

А именно, обозначим через $X_l(t^*; t_*, x_*)$ — множество всех $x^* \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих равенству $x(t^*) = x^*$, где $x(\cdot) = \{x(t) : t_* \leq t \leq t^*\}$ — некоторое решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F_l(t, x), \quad x(t_*) = x_*, \quad t \in [t_*, t^*],$$

$$X_l^{-1}(t^*; t^*, X^*) = \{x_* \in \mathbb{R}^m : X_l(t^*; t_*, x_*) \bigcap X^* \neq \emptyset\}$$

X^* — множество из \mathbb{R}^m .

О п р е д е л е н и е 3.1. *Оператором стабильного поглощения π в задаче о сближении назовем отображение $(t_*; t^*, X^*) \mapsto 2^{\mathbb{R}^m}$, заданное равенством*

$$\pi(t_*; t^*, X^*) = \bigcap_{l \in S} X_l^{-1}(t_*; t^*, X^*),$$

$$(t_*, t^*, X^*) \in \Delta \times 2^{\mathbb{R}^m}.$$

Здесь $\Delta = \{(t_*, t^*) : t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta\}$.

О п р е д е л е н и е 3.2. *Замкнутое множество $W \subset D$ назовем u -стабильным мостом, если*

$$W(\vartheta) \subset M;$$

$$W(t_*) \subset \pi(t_*; t^*, W(t^*)), \quad (t_*, t^*) \in \Delta.$$

Пусть W^0 — объединение всех u -стабильных мостов $W \subset D$. W^0 — максимальный (по включению) u -стабильный мост и представляет собой множество позиционного поглощения в рассматриваемой задаче о сближении (см. [8]).

Напомним также инфинитезимальную формулировку свойства стабильности, выраженную в терминах семейства \mathcal{L} (см. [24]). Представим эту инфинитезимальную формулировку в виде теоремы.

Теорема 1. *Непустое замкнутое множество $W \subset D$ есть u -стабильный мост тогда и только тогда, когда*

$$(1) \quad W(\vartheta) \subset M;$$

$$(2) \quad \vec{D}W(t, x) \cap F_l(t, x) \neq \emptyset, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (t, x, l) \in W \times S.$$

$$\text{Здесь } \vec{D}W(t, x) = \left\{ d \in \mathbb{R}^m : d = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{w_k - x}{t_k - t}, \quad (t_k, w_k) \in W \quad (k = 1, 2) \dots; \quad t_k \downarrow t \text{ при } k \rightarrow \infty, \right. \\ \left. \lim_{k \rightarrow \infty} (t_k, w_k) = (t, x) \right\}.$$

Очевидно, что для моста W^0 условие (1) в теореме 1 принимает вид $W^0(\vartheta) = M$. Кроме того, мост W^0 обладает T -свойством: из $t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta$ и $W^0(t_*) \neq \emptyset$ следует $W^0(t^*) \neq \emptyset$. T -свойство моста W^0 можно охарактеризовать как свойство непрерывности моста W^0 при возрастании времени t на $[t_0, \vartheta]$.

Далее, справедливо соотношение

$$X_l(t^*; t_*, x_*) \cap W^0(t^*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*, l) \in W^0 \times S,$$

и, значит, учитывая $X_l(t^*; t_*, x_*) \subset O_{(t^* - t_*)\rho}(x_*)$, получаем

$$W^0(t^*) \cap O_{(t^* - t_*)\rho}(x_*) \neq \emptyset, \quad (t_*, x_*) \in W^0.$$

Здесь $O_{(t^* - t_*)\rho}(x_*) = \{w \in \mathbb{R}^m : \|w - x_*\| \leq \rho(t^* - t_*)\}$.

Следовательно, справедливо соотношение

$$\vec{D}W^0(t_*, x_*) \cap G \neq \emptyset$$

при всех $(t_*, x_*) \in W^0$, $t_* \in [t_0, \vartheta]$.

4. Дефект стабильности множеств в пространстве позиций игры

В этом параграфе определим дефект стабильности множества, содержащегося в D .

Предполагаем, что множество $W^* \subset D$ из разд. 3 удовлетворяет условию $W^*(\vartheta) = M$ и обладает T -свойством.

Боле того, в усиление T -свойства множества W^* предполагаем, что выполнено условие

$$C. W^*(t^*) \cap O_{(t^*-t_*)\rho}(x_*) \neq \emptyset, (t_*, x_*) \in W^*, t_0 \leq t_* < t^* \leq \vartheta.$$

З а м е ч а н и е 4.1. Условие C означает, что многозначное отображение $t \mapsto W^*(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ меняется (в некотором смысле) не очень быстро в точках $(t_*, x_*) \in W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ при увеличении t .

Из условия C следует

$$\vec{D}W^*(t_*, x_*) \cap G \neq \emptyset, (t_*, x_*) \in \partial W^*, t_* \in [t_0, \vartheta);$$

здесь ∂W^* — граница множества W^* в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$.

Сопоставим каждой точке $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, число

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \sup_{l \in S} \rho(\vec{D}W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)) \geq 0.$$

Здесь обозначено $\rho(D^*, F^*) = \inf_{(d, f) \in D^* \times F^*} \|d - f\|$, где D^* и F^* — множества из \mathbb{R}^m .

Величину $\varepsilon(t_*, x_*)$ назовем дефектом стабильности множества W^* в точке $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$.

З а м е ч а н и е 4.2. При некоторых не очень ограничительных условиях на систему (2.1) супремум в выражении для $\varepsilon(t_*, x_*)$ достигается во всех точках $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$. Одним из таких условий является, например, условие

$$H_*(t_*, x_*, l) < H(t_*, x_*, l) < H^*(t_*, x_*, l),$$

$$(t_*, x_*) \in \partial W^*, t_* \in [t_0, \vartheta), l \in S;$$

здесь $H_*(t_*, x_*, l) = \min_{g \in F(t_*, x_*)} \langle l, g \rangle$, $H^*(t_*, x_*, l) = \max_{g \in F(t_*, x_*)} \langle l, g \rangle$.

Для последующих рассуждений нам удобно заменить множество $\vec{D}W^*(t_*, x_*)$, входящее в выражение для $\varepsilon(t_*, x_*)$, более узким, компактным, множеством. При этом значение $\varepsilon(t_*, x_*)$ сохраняется.

Введем в рассмотрение множество

$$\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) = \vec{D}W^*(t_*, x_*) \cap 3G,$$

где $3G = \{3g : g \in G\}$.

Так как $\vec{D}W^*(t_*, x_*) \cap G \neq \emptyset$, $F_l(t_*, x_*) \subset G$ при $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $l \in S$, то

$$\rho(\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)) = \rho(\vec{D}W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*))$$

при $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $l \in S$.

Поэтому верно представление

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \sup_{l \in S} \rho(\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), F_l(t_*, x_*)), (t_*, x_*) \in \partial W^*, t_* \in [t_0, \vartheta).$$

Полагаем при $t_* \in [t_0, \vartheta)$

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{(t_*, x_*) \in \Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*),$$

где $\Lambda(t_*) = \partial W^* \cap \Gamma_{t_*}$, $\Gamma_{t_*} = \{(t, x) : t = t_*\}$

Величину $\varepsilon(t_*)$ назовем *дефектом стабильности множества W^* в момент $t_* \in [t_0, \vartheta)$* . Вместе с тем возникает неотрицательная функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta)$, которую можно трактовать как некоторую характеристику степени нестабильности множества W^* .

Если W^* — u -стабильный мост, то по теореме 1 имеем

$$\vec{D}W^*(t_*, x_*) \cap F_l(t_*, x_*) \neq \emptyset,$$

$(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $l \in S$, и, следовательно,

$$\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) \cap F_l(t_*, x_*) \neq \emptyset,$$

$(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $l \in S$.

Значит, $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$, $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, а тогда $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta)$.

В свою очередь, из равенства $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta)$ следует

$$\vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*) \cap F_l(t_*, x_*) \neq \emptyset,$$

$(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $l \in S$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, т.е. W^* — u -стабильный мост.

Мы показали, что стабильность множества W^* эквивалентна равенству $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta)$. Значит, при $\varepsilon(t) = 0$ на $[t_0, \vartheta)$ правило экстремального сдвига на поводыря, идущего по W^* , гарантирует приведение движения $x(t)$ системы (2.1) на M , если $(t_*, x(t_*)) = (t_*, x_*) \in W^*$.

Это наводит на мысль, что в случае, когда множеству W^* отвечает малая функция $\varepsilon(t)$ на $[t_0, \vartheta)$, правило экстремального прицеливания на поводыря, идущего по W^* , гарантирует приведение движения $x(t)$ системы (2.1) в малую ε -окрестность множества M в момент ϑ .

Кроме того, интуитивно ясно, что ε может быть выражено через интеграл $\int_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(t) dt$ (в случае, если эта функция интегрируема на $[t_0, \vartheta]$).

Для обоснования этих положений наложим на W^* и $\varepsilon(t)$, $[t_0, \vartheta)$ дополнительные условия D. Существует такая скалярная функция $\varphi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, что

$$h(x_* + \delta \vec{D}^\nabla W^*(t_*, x_*), W^*(t_* + \delta)) \leq \delta \varphi^*(\delta)$$

при $t_* \in [t_0, \vartheta)$, $(t_*, x_*) \in \partial W^*$, $\delta \in (0, \vartheta - t_*)$

E. Функция $\varepsilon(t)$ интегрируема по Риману на $[t_0, \vartheta]$.

Здесь обозначено $x_* + \delta X_* = \{x_* + \delta f : f \in X_*\}$, X_* — множество из \mathbb{R}^m .

5. Позиционная процедура управления с поводырем первого игрока

Отличие этой процедуры от известных процедур управления [8] состоит в том, что она сконструирована для множества W^* , вообще говоря, не являющегося стабильным мостом.

Приступим к описанию этой W^* -процедуры управления первого игрока.

Пусть $(t_*, x_*) \in W^*$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ и $\Gamma_n = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \dots, \tau_{N(n)-1}, \tau_{N(n)} = \vartheta\}$ — некоторое разбиение из последовательности $\{\Gamma_n\}$ разбиений отрезка $[t_*, \vartheta]$ с диаметрами $\Delta^{(n)} \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Для простоты будем писать $\tau_{N(n)} = \tau_N$, $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Определим параллельно движение $x(t)$ системы (2.1) и некоторую вспомогательную ломаную $z(t)$ на $[t_*, \vartheta]$, $x(t_*) = z(t_*) = x_*$, отвечающие разбиению Γ_n . Будем конструировать эти движения $x(t)$ и $z(t)$ последовательно по шагам $[\tau_0, \tau_1]$, $[\tau_1, \tau_2]$, \dots , $[\tau_{N-1}, \tau_N]$.

Рассмотрим первый шаг $[\tau_0, \tau_1]$ и точку $x(\tau_0) = z(\tau_0) = x_*$.

Так как согласно В имеет место

$$W^*(\tau_0 + \Delta_0) \cap O_{\rho\Delta_0}(x_*) \neq \emptyset,$$

то выберем точку $z^*(\tau_1) \in W^*(\tau_0 + \Delta_0) \cap O_{\rho\Delta_0}(x_*)$. Точка $z^*(\tau_1)$ удовлетворяет неравенству

$$\|z^*(\tau_1) - z(\tau_0)\| \leq \rho\Delta_0. \quad (5.1)$$

Первый игрок выбирает на шаге $[\tau_0, \tau_1]$ в качестве управления любой вектор $u_0 \in P$: $u(t) = u_0, t \in [\tau_0, \tau_1]$.

Пусть при этом в системе (2.1) реализовалось некоторое допустимое управление $v(t), t \in [\tau_0, \tau_1]$, второго игрока. Тогда движение $x(t)$ на $[\tau_0, \tau_1]$ определится равенством

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad x(\tau_0) = x_*.$$

Если $x(\tau_1) \in W^*(\tau_1)$, то полагаем $z(\tau_1) = x(\tau_1)$.

Если $x(\tau_1) \notin W^*(\tau_1)$, то пусть $z(\tau_1)$ — ближайшая к $x(\tau_1)$ точка на $W^*(\tau_1) \cap [x(\tau_1), z^*(\tau_1)]$. В этом случае $z(\tau_1) \in \partial W^*(\tau_1)$ и, значит, $(\tau_1, z(\tau_1)) \in \partial W^*$.

Точки $z(\tau_0)$ и $z(\tau_1)$ определяют аффинную на $[\tau_0, \tau_1]$ функцию $z(t)$, которую назовем движением поводыря на $[\tau_0, \tau_1]$, отвечающим разбиению Γ_n .

Последние точки $z(\tau_1)$ и $x(\tau_1)$ движений $z(t)$ и $x(t)$ на $[\tau_0, \tau_1]$ являются исходными при конструировании движений $z(t)$ и $x(t)$ на следующий отрезок $[\tau_1, \tau_2]$ разбиения Γ_n .

В случае $x(\tau_1) \in W^*(\tau_1)$ имеем $x(\tau_1) = z(\tau_1)$ и поступаем при конструировании движений $z(t)$ и $x(t)$ на $[\tau_1, \tau_2]$ так, как это делалось в аналогичной ситуации на предыдущем промежутке $[\tau_0, \tau_1]$.

В случае $x(\tau_1) \notin W^*(\tau_1)$ имеем $x(\tau_1) \neq z(\tau_1)$, вычисляем вектор $s(\tau_1) = z(\tau_1) - x(\tau_1) \neq 0$ и рассматриваем множество $F_{l(\tau_1)}(\tau_1, z(\tau_1))$, где $l(\tau_1) = s(\tau_1) \|s(\tau_1)\|^{-1} \in S$.

Пусть вектор $f_{l(\tau_1)} \in F_{l(\tau_1)}(\tau_1, z(\tau_1))$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \rho\left(f_{l(\tau_1)}, \vec{D}^\nabla W^*(\tau_1, z(\tau_1))\right) &= \rho\left(F_{l(\tau_1)}(\tau_1, z(\tau_1)), \vec{D}^\nabla W^*(\tau_1, z(\tau_1))\right) \\ &\leq \sup_{l \in S} \rho\left(F_l(\tau_1, z(\tau_1)), \vec{D}^\nabla W^*(\tau_1, z(\tau_1))\right) = \varepsilon(\tau_1, z(\tau_1)) \leq \varepsilon(\tau_1). \end{aligned}$$

Пусть $d(\tau_1) \in \vec{D}^\nabla W^*(\tau_1, z(\tau_1))$ удовлетворяет соотношению

$$\rho(f_{l(\tau_1)}, d(\tau_1)) = \rho\left(f_{l(\tau_1)}, \vec{D}^\nabla W^*(\tau_1, z(\tau_1))\right) \quad (5.2)$$

и, следовательно,

$$\rho(f_{l(\tau_1)}, d(\tau_1)) \leq \varepsilon(\tau_1). \quad (5.3)$$

Здесь $\rho(f, d) = \|f - d\|$ для f, d из \mathbb{R}^m , $\rho(f, D) = \inf_{d \in D} \rho(f, d)$ для $D \subset \mathbb{R}^m$.

Согласно условию D имеем

$$h\left(z(\tau_1) + \Delta_1 \vec{D}^\nabla W^*(\tau_1, z(\tau_1)), W^*(\tau_2)\right) \leq \Delta_1 \varphi^*(\Delta_1), \quad (5.4)$$

и, значит, для вектора $d(\tau_2)$ найдется такая точка $z^*(\tau_2) \in W^*(\tau_2)$, что

$$\rho\left(z(\tau_1) + \Delta_1 d(\tau_1), W^*(\tau_2)\right) = \rho\left(z(\tau_1) + \Delta_1 d(\tau_1), z^*(\tau_2)\right) \leq \Delta_1 \varphi^*(\Delta_1). \quad (5.5)$$

Из (5.3) следует

$$\rho(z(\tau_1) + \Delta_1 f_{l(\tau_1)}, z(\tau_1) + \delta_1 d(\tau_1)) \leq \varepsilon(\tau_1) \Delta_1. \quad (5.6)$$

Из (5.5) и (5.6) следует

$$\rho(z(\tau_1) + \Delta_1 f_{l(\tau_1)}, z^*(\tau_2)) \leq \Delta_1 \varphi^*(\Delta_1) + \varepsilon(\tau_1) \Delta_1. \quad (5.7)$$

Первый игрок выбирает на втором шаге $[\tau_1, \tau_2]$ вектор $u_1 \in P$ из условия

$$\min_{v \in Q} \langle l(\tau_1), f(\tau_1, x(\tau_1), u_1, v) \rangle = H(\tau_1, x(\tau_1), l(\tau_1)) \quad (5.8)$$

и полагает $u(t) = u_1$, $t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Пусть при этом в системе (2.1) реализовалось некоторое управление $v(t)$, $t \in [\tau_1, \tau_2]$ второго игрока. Тогда движение $x(t)$ системы (2.1) на $[\tau_1, \tau_2]$ определяется равенством

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t))$$

с начальным значением $x(\tau_1)$.

Рассмотрим точку $x(\tau_2)$.

Если $x(\tau_2) \in W^*(\tau_2)$, то полагаем $z(\tau_2) = x(\tau_2)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x(\tau_2) \notin W^*(\tau_2)$. В этом случае рассмотрим, наряду с $x(\tau_2)$, точку $z^*(\tau_2) \in W^*(\tau_2)$.

Относительно числа $\rho_2 = \rho(z(\tau_1) + \Delta_1 d(\tau_1), z^*(\tau_2))$ представляются две возможности:

1. $\rho_2 = 0$;
2. $\rho_2 > 0$.

Допустим, реализовалась возможность 1. Тогда $z^*(\tau_2) = z(\tau_1) + \Delta_1 d(\tau_1) \in W^*(\tau_2)$. Пусть $z(\tau_2)$ — ближайшая к $x(\tau_2)$ точка на $W^*(\tau_2) \cap [x(\tau_2), z^*(\tau_2)]$. Ясно, что $z(\tau_2) \in \partial W^*(\tau_2)$ и, значит, $(\tau_2, z(\tau_2)) \in \partial W^*$.

Допустим, реализовалась возможность 2. В этом случае имеем $z^*(\tau_2) \in \partial W^*(\tau_2)$ и полагаем $z(\tau_2) = z^*(\tau_2)$.

Как в случае $x(\tau_2) \in W^*(\tau_2)$, так и в случае $x(\tau_2) \notin W^*(\tau_2)$ точки $z(\tau_1)$ и $z(\tau_2)$ определяют аффинную функцию $z(t)$ на $[\tau_1, \tau_2]$, которую назовем движением поводыря на $[\tau_1, \tau_2]$, отвечающим разбиению Γ_n .

Последние точки $z(\tau_2)$ и $x(\tau_2)$ движений $z(t)$ и $x(t)$ на $[\tau_1, \tau_2]$ являются исходными при построении движений на следующем шаге $[\tau_2, \tau_3]$.

В случае $x(\tau_2) \in W^*(\tau_2)$ имеем $x(\tau_2) = z(\tau_2)$ и поступаем при конструировании движений $z(t)$ и $x(t)$ на $[\tau_2, \tau_3]$ аналогично тому, как это делалось на начальном промежутке $[\tau_0, \tau_1]$, когда отправлялись от точки $x(\tau_0) = z(\tau_0) \in W^*(\tau_0)$.

Рассмотрим теперь случай $x(\tau_2) \notin W^*(\tau_2)$. В этом случае имеем $x(\tau_2) \neq z(\tau_2)$, вычисляем вектор $s(\tau_2) = z(\tau_2) - x(\tau_2) \neq 0$ и рассматриваем множество $F_{l(\tau_2)}(\tau_2, z(\tau_2))$, где $l(\tau_2) = s(\tau_2) \cdot \|s(\tau_2)\|^{-1} \in S$.

Пусть $f_{l(\tau_2)} \in F_{l(\tau_2)}(\tau_2, z(\tau_2))$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \rho\left(f_{l(\tau_2)}, \overrightarrow{D}^\nabla W^*(\tau_2, z(\tau_2))\right) &= \rho\left(F_{l(\tau_2)}(\tau_2, z(\tau_2)), \overrightarrow{D}^\nabla W^*(\tau_2, z(\tau_2))\right) \\ &\leq \sup_{l \in S} \rho\left(F_l(\tau_2, z(\tau_2)), \overrightarrow{D}^\nabla W^*(\tau_2, z(\tau_2))\right) = \varepsilon(\tau_2, z(\tau_2)) \leq \varepsilon(\tau_2), \end{aligned}$$

а $d(\tau_2) \in \overrightarrow{D}^\nabla W^*(\tau_2, z(\tau_2))$ — соотношению

$$\rho\left(f_{l(\tau_2)}, d(\tau_2)\right) = \rho\left(f_{l(\tau_2)}, \overrightarrow{D}^\nabla W^*(\tau_2, z(\tau_2))\right). \quad (5.9)$$

Следовательно,

$$\rho(f_{l(\tau_2)}, d(\tau_2)) \leq \varepsilon(\tau_2). \quad (5.10)$$

Согласно D имеем

$$h\left(z(\tau_2) + \Delta_2 \overrightarrow{D}^\nabla W^*(\tau_2, z(\tau_2)), W^*(\tau_3)\right) \leq \Delta_2 \varphi^*(\Delta_2),$$

и, значит, для вектора $d(\tau_2) \in \vec{D}^\nabla W^*(\tau_2, z(\tau_2))$ найдется такая точка $z^*(\tau_3) \in W^*(\tau_3)$, что

$$\rho\left(z(\tau_2) + \Delta_2 d(\tau_2), W^*(\tau_3)\right) = \rho\left(z(\tau_2) + \Delta_2 d(\tau_2), z^*(\tau_3)\right) \leq \Delta_2 \varphi^*(\Delta_2). \quad (5.11)$$

Из (5.10) следует

$$\rho\left(z(\tau_2) + \Delta_2 f_{l(\tau_2)}, z(\tau_2) + \Delta_2 d(\tau_2)\right) \leq \varepsilon(\tau_2) \Delta_2. \quad (5.12)$$

Из (5.11), (5.12) следует

$$\rho\left(z(\tau_2) + \Delta_2 f_{l(\tau_2)}, z^*(\tau_3)\right) \leq \Delta_2 \varphi^*(\Delta_2) + \varepsilon(\tau_2) \Delta_2. \quad (5.13)$$

Первый игрок выбирает на шаге $[\tau_2, \tau_3]$ вектор $u_2 \in P$ из условия

$$\min_{v \in Q} \langle l(\tau_2), f(\tau_2, x(\tau_2), u_2, v) \rangle = H(\tau_2, x(\tau_2), l(\tau_2)) \quad (5.14)$$

и полагает $u(t) = u_2$ на $[\tau_2, \tau_3]$.

Пусть при этом в системе (2.1) реализовалось некоторое допустимое управление $v(t)$, $t \in [\tau_2, \tau_3]$ второго игрока. Тогда движение $x(t)$ системы (2.1) на $[\tau_2, \tau_3]$ определится равенством

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t), v(t))$$

с начальным значением $x(\tau_2)$.

Рассмотрим конечную точку $x(\tau_3)$ движения $x(t)$ на $[\tau_2, \tau_3]$.

Если $x(\tau_3) \in W^*(\tau_3)$, то полагаем $z(\tau_3) = x(\tau_3)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x(\tau_3) \notin W^*(\tau_3)$. В этом случае рассмотрим наряду с $x(\tau_3)$ точку $z^*(\tau_3) \in W^*(\tau_3)$.

Относительно числа $\rho_3 = \rho(z(\tau_2) + \Delta_2 d(\tau_2), z^*(\tau_3))$ представляются возможности:

1. $\rho_3 = 0$;
2. $\rho_3 > 0$.

Допустим, реализовалась возможность 1. Тогда $z^*(\tau_3) = z(\tau_2) + \Delta_2 d(\tau_2) \in W^*(\tau_3)$. Пусть $z(\tau_3)$ — ближайшая к $x(\tau_3)$ точка из $W^*(\tau_3) \cap [x(\tau_3), z^*(\tau_3)]$. Ясно, что $z(\tau_3) \in \partial W^*(\tau_3)$ и, значит, $(\tau_3, z(\tau_3)) \in \partial W^*$.

Допустим, реализовалась возможность 2. В этом случае имеем $z^*(\tau_3) \in \partial W^*(\tau_3)$, и полагаем $z(\tau_3) = z^*(\tau_3)$.

Таким образом, в случае, когда $x(\tau_3) \notin W^*(\tau_3)$, во всех возможных ситуациях определяется такая точка $z(\tau_3)$, что $(\tau_3, z(\tau_3)) \in \partial W^*$.

Точки $z(\tau_2)$ и $z(\tau_3)$ определяют аффинную функцию $z(t)$ на $[\tau_2, \tau_3]$, которую назовем движением поводыря на $[\tau_2, \tau_3]$, отвечающим разбиению Γ_n .

Последние точки $z(\tau_3)$ и $x(\tau_3)$ движений $z(t)$ и $x(t)$ на $[\tau_2, \tau_3]$ являются исходными при построении движений на следующем шаге $[\tau_3, \tau_4]$.

Далее по такой же схеме конструируем движения $z(t)$ и $x(t)$ последовательно на промежутках $[\tau_3, \tau_4]$, $[\tau_4, \tau_5]$ и т.д.

В общем случае схема конструирования движений поводыря и системы (2.1) на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ выглядит так.

Пусть в момент τ_i ($0 \leq i \leq N-1$) реализовались в результате предыдущих построений две точки $z(\tau_i)$ и $x(\tau_i)$ движений поводыря и системы (2.1) соответственно.

В случае $x(\tau_i) \in W^*(\tau_i)$, ($x(\tau_i) = z(\tau_i)$) поступаем при конструировании движений $z(t)$ и $x(t)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ аналогично тому, как это делалось на начальном промежутке $[\tau_0, \tau_1]$, когда отправлялись от точки $x(\tau_0) = z(\tau_0) \in W^*(\tau_0)$, а именно: выбираем некоторую точку $z(\tau_{i+1}) \in W^*(\tau_{i+1}) \cap O_{r\Delta_i}(\tau_i)$. Для нее по аналогии с (5.1) верно неравенство

$$\|z^*(\tau_{i+1}) - z(\tau_i)\| \leq r\Delta_i. \quad (5.15)$$

Первый игрок выбирает на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ любой вектор $u \in P$ и полагает $u(t) = u_i$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Пусть при этом в системе (2.1) реализовалось некоторое допустимое управление $v(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ второго игрока.

Тогда движение $x(t)$ системы (2.1) на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ определится равенством

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t), v(t))$$

с начальным значением $x(\tau_i)$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x(\tau_i) \notin W^*(\tau_i)$. В этом случае имеем $x(\tau_i) \neq z(\tau_i)$; вычисляем вектор $s(\tau_i) = z(\tau_i) - x(\tau_i) \neq 0$ и рассматриваем множество $F_{l(\tau_i)}(\tau_i, x(\tau_i))$, где $l(\tau_i) = s(\tau_i) \cdot \|s(\tau_i)\|^{-1} \in S$.

Пусть $f_{l(\tau_i)} \in F_{l(\tau_i)}(\tau_i, z(\tau_i))$ удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} \rho\left(f_{l(\tau_i)}, \vec{D}^\nabla W^*(\tau_i, z(\tau_i))\right) &= \rho\left(F_{l(\tau_i)}(\tau_i, z(\tau_i)), \vec{D}^\nabla W^*(\tau_i, z(\tau_i))\right) \\ &\leq \sup_{l \in S} \rho\left(F_l(\tau_i, z(\tau_i)), \vec{D}^\nabla W^*(\tau_i, z(\tau_i))\right) = \varepsilon(\tau_i, z(\tau_i)) \leq \varepsilon(\tau_i). \end{aligned}$$

Пусть $d(\tau_i) \in \vec{D}^\nabla W^*(\tau_i, z(\tau_i))$ удовлетворяет равенству

$$\rho(f_{l(\tau_i)}, d(\tau_i)) = \rho\left(f_{l(\tau_i)}, \vec{D}^\nabla W^*(\tau_i, z(\tau_i))\right) \quad (5.16)$$

и, следовательно,

$$\rho(f_{l(\tau_i)}, d(\tau_i)) \leq \varepsilon(\tau_i). \quad (5.17)$$

Из неравенства (5.17) следует

$$\rho\left(z(\tau_i) + \Delta_i f_{l(\tau_i)}, z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i)\right) \leq \varepsilon(\tau_i) \Delta_i. \quad (5.18)$$

Имеем согласно D

$$h\left(z(\tau_i) + \Delta_i \vec{D}^\nabla W^*(\tau_i, z(\tau_i)), W^*(\tau_{i+1})\right) \leq \Delta_i \gamma^*(\Delta_i)$$

и, значит, для $d(\tau_i) \in \vec{D}^\nabla W^*(\tau_i, z(\tau_i))$ найдется такая точка $z^*(\tau_{i+1}) \in W^*(\tau_{i+1})$, что

$$\rho\left(z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i), z^*(\tau_{i+1})\right) = \rho\left(z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i), W^*(\tau_{i+1})\right) \leq \delta_i \gamma^*(\Delta_i). \quad (5.19)$$

Из (5.18), (5.19) следует

$$\rho\left(z(\tau_i) + \Delta_i f_{l(\tau_i)}, z^*(\tau_{i+1})\right) \leq \varepsilon(\tau_i) \Delta_i + \varphi^*(\Delta_i) \Delta_i. \quad (5.20)$$

Первый игрок выбирает на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ вектор $u_i \in P$ из условия

$$\min_{v \in Q} \langle l(\tau_i), f(\tau_i, x(\tau_i), u_i, v) \rangle = H(\tau_i, x(\tau_i), l(\tau_i)) \quad (5.21)$$

и полагает $u(t) = u_i$ на $[\tau_i, \tau_{i+1})$.

Пусть при этом в системе (2.1) реализовалось некоторое допустимое управление $v(t)$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ второго игрока. Тогда движение $x(t)$ системы (2.1) на $[\tau_i, \tau_{i+1})$ определится равенством

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t), v(t))$$

с начальным значением $x(\tau_i)$.

Рассмотрим конечную точку $x(\tau_{i+1})$ движения $x(t)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1})$.

Если $x(\tau_{i+1}) \in W^*(\tau_{i+1})$, то полагаем $z(\tau_{i+1}) = x(\tau_{i+1})$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x(\tau_{i+1}) \notin W^*(\tau_{i+1})$. В этом случае рассмотрим наряду с $x(\tau_{i+1})$ точку $z^*(\tau_{i+1}) \in W^*(\tau_{i+1})$.

Относительно числа $\rho_{i+1} = \rho(z(\tau_i) + \delta_i d(\tau_i), z^*(\tau_{i+1}))$ представляются возможности:

1. $\rho_{i+1} = 0$;
2. $\rho_{i+1} > 0$.

Допустим, реализовалась возможность 1. Имеем $z^*(\tau_{i+1}) = z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i) \in W^*(\tau_{i+1})$. Пусть $z(\tau_{i+1})$ ближайшая к $x(\tau_{i+1})$ точка на $W^*(\tau_{i+1}) \cap [x(\tau_{i+1}), z^*(\tau_{i+1})]$. Ясно, что $z(\tau_{i+1}) \in \partial W^*(\tau_{i+1})$ и, значит, $(\tau_{i+1}, z(\tau_{i+1})) \in \partial W^*$.

Допустим, реализовалась возможность 2. В этом случае имеем $z^*(\tau_{i+1}) \in \partial W^*(\tau_{i+1})$ и полагаем $z(\tau_{i+1}) = z^*(\tau_{i+1})$.

Таким образом, в случае, когда $x(\tau_{i+1}) \notin W^*(\tau_{i+1})$, во всех возможных ситуациях точка $z(\tau_{i+1})$ удовлетворяет включению $(\tau_{i+1}, z(\tau_{i+1})) \in \partial W^*$.

Точки $z(\tau_i)$ и $z(\tau_{i+1})$ определяют аффинную функцию $z(t)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, которую назовем движением поводыря на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, отвечающим разбиению Γ_n .

Последние точки $z(\tau_{i+1})$ и $x(\tau_{i+1})$ движений $z(t)$ и $x(t)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ являются исходными при построении движений $z(t)$ и $x(t)$ на следующем шаге разбиения Γ_n .

Вместе с тем W^* -процедура управления первого игрока полностью описана.

6. Оценка рассогласования между движениями $z(t)$ и $x(t)$ в момент ϑ

Предполагаем, что в результате применения W^* -процедуры управления на $[t_*, \vartheta]$ реализовались движения $z(t)$ и $x(t)$ ($z(t_*) = x(t_*) = x_* \in W^*(t_*)$) соответственно поводыря и управляемой системы (2.1).

Выведем оценку сверху рассогласования между движениями $z(t)$ и $x(t)$ в момент ϑ .

В начальный момент τ_0 разбиения Γ_n выполняется $x(\tau_0) \in W^*(\tau_0)$. При этом представляются возможности:

1. $x(\tau_N) \in W^*(\tau_N)$;
2. $x(\tau_N) \notin W^*(\tau_N)$.

В случае возможности 1 имеем $x(\tau_N) = z(\tau_N)$ и, значит, $\|s(\tau_N)\| = \|s(\vartheta)\| = 0$.

Допустим, реализовалась возможность 2.

Пусть k — натуральное число, при котором $x(\tau_k) \in W^*(\tau_k)$, $x(\tau_j) \notin W^*(\tau_j)$ при $j \in (k, N]$.

Рассмотрим в таком случае отрезок $[\tau_k, \tau_N] = [\tau_k, \vartheta]$.

Для нас здесь важно, что для моментов $\tau_{i+1} \in (\tau_k, \tau_N] = (\tau_k, \vartheta]$ поводырь $z(t)$ удовлетворяет включению $(\tau_{i+1}, z(\tau_{i+1})) \in \partial W^*$. Принимая это во внимание, оценим сверху величины $\|s(\tau_{i+1})\|$ через $\|s(\tau_i)\|$ при $i \in (k, N-1]$.

Сначала проведем оценку $\|s(\tau_{i+1})\|$ через $\|s(\tau_i)\|$ для случая, когда

$$\rho_{i+1} = \rho(z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i), W^*(\tau_{i+1})) > 0.$$

При каждом $i \in (k, N-1]$ справедливы равенства

$$x(\tau_{i+1}) = x(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t) dt,$$

$$z(\tau_{i+1}) = z(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l(\tau_i)} dt + h(\tau_i, \tau_{i+1}), \quad (6.1)$$

$$h(\tau_i, \tau_{i+1}) = z(\tau_{i+1}) - (z(\tau_i) + \Delta_i f_{l(\tau_i)}),$$

где $f(t) = f(t, x(t), u(t), v(t))$, $t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$; $f_{l(\tau_i)} \in F_{l(\tau_i)}(\tau_i, z(\tau_i))$; функция $u(t)$ определена после формулы (5.15).

Величина $s(t) = z(t) - x(t)$ удовлетворяет равенству

$$s(\tau_{i+1}) = s(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l(\tau_i)} dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t) dt + h(\tau_i, \tau_{i+1}). \quad (6.2)$$

Вектор $s^*(\tau_{i+1}) = s(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f_{l(\tau_i)} dt - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} f(t) dt$ удовлетворяет равенству

$$\|s^*(\tau_{i+1})\|^2 = \|s(\tau_i)\|^2 + 2 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \langle s(\tau_i), f_{l(\tau_i)} \rangle dt - 2 \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \langle s(\tau_i), f(t) \rangle dt + \gamma(\tau_i, \tau_{i+1}), \quad (6.3)$$

где $\gamma(\tau_i, \tau_{i+1}) = \left\| \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (f_{l(\tau_i)} - f(t)) dt \right\|^2$.

Из (6.3) с учетом определения вектора $f_{l(\tau_i)}$ и функции $f(t)$ на $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ выводится стандартными в теории дифференциальных игр методами (см. [8]) оценка

$$\|s^*(\tau_{i+1})\|^2 \leq e^{2L\Delta_i} \|s(\tau_i)\|^2 + \Delta_i \varphi^0(\Delta_i), \quad (6.4)$$

где скалярная функция $\varphi^0(\Delta) \downarrow 0$ при $\Delta \downarrow 0$ и не зависит от выбора точек $(\tau_i, z(\tau_i))$ и $(\tau_i, x(\tau_i))$. Следовательно,

$$\|s^*(\tau_{i+1})\| \leq \left\{ e^{2L\Delta_i} \|s(\tau_i)\|^2 + \Delta_i \varphi^0(\Delta_i) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (6.5)$$

Значит, выполняется неравенство

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leq \left\{ e^{2L\Delta_i} \|s(\tau_i)\|^2 + \Delta_i \varphi^0(\Delta_i) \right\}^{\frac{1}{2}} + \|h(\tau_i, \tau_{i+1})\|.$$

Учитывая неравенство

$$\begin{aligned} \|h(\tau_i, \tau_{i+1})\| &\leq \|z(\tau_{i+1}) - (z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i))\| + \|(z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i)) - (z(\tau_i) + \Delta_i f_{l(\tau_i)})\| \\ &= \|z^*(\tau_{i+1}) - (z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i))\| + \|\Delta_i (d(\tau_i) - f_{l(\tau_i)})\| \leq \Delta_i \varphi^*(\Delta_i) + \varepsilon(\tau_i) \Delta_i, \end{aligned}$$

получаем

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leq \left\{ e^{2L\Delta_i} \|s(\tau_i)\|^2 + \Delta_i \varphi^0(\Delta_i) \right\}^{\frac{1}{2}} + \Delta_i \varphi^*(\Delta_i) + \varepsilon(\tau_i) \Delta_i, \quad (6.6)$$

$i \in [k, N-1]$.

Относительно величины $\|s(\tau_i)\|$, отвечающей моменту $\tau_i \in [\tau_k, \tau_{N-1}]$, представляются возможности:

1. $\|s(\tau_i)\| > \varphi^0(\Delta_i)^{\frac{1}{2}}$;
2. $\|s(\tau_i)\| \leq \varphi^0(\Delta_i)^{\frac{1}{2}}$.

В случае, когда реализовалась возможность 1, имеем

$$\begin{aligned} \left\{ e^{2L\Delta_i} \|s(\tau_i)\|^2 + \Delta_i \varphi^0(\Delta_i) \right\}^{\frac{1}{2}} &\leq e^{L\Delta_i} \|s(\tau_i)\| + \frac{1}{2e^{L\Delta_i} \|s(\tau_i)\|} \Delta_i \varphi^0(\Delta_i) \\ &\leq e^{L\Delta_i} \|s(\tau_i)\| + \frac{1}{2\varphi^0(\Delta_i)^{1/2}} \Delta_i \varphi^0(\Delta_i) = e^{L\Delta_i} \|s(\tau_i)\| + \frac{1}{2} \Delta_i \varphi^0(\Delta_i)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Из (6.6), учитывая (6.7), получаем

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leq e^{L\Delta_i} \|s(\tau_i)\| + \kappa(\Delta_i) \Delta_i + \varepsilon(\tau_i) \Delta_i, \quad (6.8)$$

где $\kappa(\Delta) = \frac{1}{2}\varphi^0(\Delta)^{\frac{1}{2}} + \varphi^*(\Delta)$, $\Delta > 0$.

Теперь проведем локальную оценку величины $\|s(\tau_{i+1})\|$ через $\|s(\tau_i)\|$, $i \in [k, N-1]$ для случая, когда $\rho_{i+1} = \rho(z(\tau_i) + \Delta_i d(\tau_i), W^*(\tau_{i+1})) = 0$.

В этом случае справедлива оценка

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leq \|s^*(\tau_{i+1})\| + \varepsilon(\tau_i)\Delta_i,$$

где вектор $s^*(\tau_{i+1})$ определен после формулы (6.2) и, значит,

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leq \left\{ e^{2L\Delta_i} \|s(\tau_i)\|^2 + \Delta_i \varphi^0(\Delta_i) \right\}^{\frac{1}{2}} + \varepsilon(\tau_i)\Delta_i. \quad (6.9)$$

Относительно $s(\tau_i)$ представляются возможности:

1. $\|s(\tau_i)\| > \varphi^0(\Delta_i)^{\frac{1}{2}}$;
2. $\|s(\tau_i)\| \leq \varphi^0(\Delta_i)^{\frac{1}{2}}$.

В случае, когда реализовалась возможность 1, имеем

$$\left\{ e^{2L\Delta_i} \|s(\tau_i)\|^2 + \delta_i \varphi^0(\delta_i) \right\}^{\frac{1}{2}} \leq e^{L\Delta_i} \|s(\tau_i)\| + \kappa(\Delta_i)\Delta_i, \quad (6.10)$$

где $\kappa(\Delta) = \frac{1}{2}\varphi^0(\Delta)^{\frac{1}{2}}$, $\Delta > 0$.

Из (6.9), учитывая (6.10), получаем (6.8).

Итак, при выводе локальной оценки величины $\|s(\tau_{i+1})\|$ через $\|s(\tau_i)\|$ как в случае $\rho_{i+1} > 0$, так и в случае $\rho_{i+1} = 0$ справедлива одна и та же по форме оценка (6.8). Эти оценки различаются лишь структурой функции $\kappa(\Delta)$, $\Delta > 0$, что несущественно при выводе глобальной оценки.

Учтем локальную оценку величины $\|s(\tau_{i+1})\|$ при выводе глобальной оценки величины $\|s(\tau_N)\| = \|s(\vartheta)\|$.

Поскольку в начальный момент τ_k отрезка $[\tau_k, \tau_{N-1}]$ верно $x(\tau_k) \in W^*(\tau_k)$, то по построению поводяря имеем $x(\tau_k) = z(\tau_k)$ и, значит, $s(\tau_k) = z(\tau_k) - x(\tau_k) = 0$. Отсюда следует, что $\|s(\tau_i)\| \leq \varphi^0(\Delta_i)^{\frac{1}{2}}$ при $i = k$. Не исключено, что в некоторые следующие непосредственно за τ_k моменты τ_i это неравенство сохранится.

Пусть отрезки $[\tau_{k+1}, \tau_{q-1}]$ и $[\tau_q, \tau_l]$ из $[\tau_{k+1}, \tau_{N-1}]$ таковы, что в моменты $\tau_i \in [\tau_{k+1}, \tau_{q-1}]$ реализовалась возможность 2, а в моменты $\tau_i \in [\tau_q, \tau_l]$ реализовалась возможность 1 относительно $\|s(\tau_{i+1})\|$. Тогда

$$\|s(\tau_q)\| \leq \left\{ e^{2L\Delta_{q-1}} \|s(\tau_{q-1})\|^2 + \Delta_{q-1} \varphi^0(\Delta_{q-1}) \right\}^{\frac{1}{2}} + \varphi^*(\Delta_{q-1})\Delta_{q-1} + \varepsilon(\tau_{q-1})\Delta_{q-1}, \quad (6.11)$$

$$\|s(\tau_{i+1})\| \leq e^{L\Delta_i} \|s(\tau_i)\| + \Delta_i \kappa(\Delta_i) + \varepsilon(\tau_i)\Delta_i, \quad (6.12)$$

$i = q, \dots, l$.

Из этих оценок следует для $\tau_r \in [\tau_{q+1}, \tau_{l+1}]$

$$\begin{aligned} \|s(\tau_r)\| &\leq e^{L \sum_{i=q}^{r-1} \Delta_i} \left(\|s(\tau_q)\| + \sum_{i=q}^{r-1} (\kappa(\Delta_i)\Delta_i + \varepsilon(\tau_i)\Delta_i) \right) \\ &\leq e^{L \sum_{i=q}^{r-1} \Delta_i} \left(\left\{ e^{2L\Delta_{q-1}} \|s(\tau_{q-1})\|^2 + \Delta_{q-1} \varphi^0(\Delta_{q-1}) \right\}^{\frac{1}{2}} + \gamma^*(\Delta_{q-1})\Delta_{q-1} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(\tau_{q-1})\Delta_{q-1} + \sum_{i=q}^{r-1} (\kappa(\Delta_i)\Delta_i + \varepsilon(\tau_i)\Delta_i) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq e^{L \sum_{i=q}^{r-1} \Delta_i} \left(e^{L \Delta_{q-1}} \|s(\tau_{q-1})\| + (\Delta_{q-1} \varphi^0(\Delta_{q-1}))^{\frac{1}{2}} + \gamma^*(\Delta_{q-1}) \Delta_{q-1} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon(\tau_{q-1}) \Delta_{q-1} + \sum_{i=q}^{r-1} (\kappa(\Delta_i) \Delta_i + \varepsilon(\tau_i) \Delta_i) \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Учитывая неравенство $\|s(\tau_{q-1})\| \leq \varphi^0(\Delta_{q-1})^{1/2}$, из (6.13) получаем оценку при $\tau_r \in [\tau_{q+1}, \tau_{l+1}]$

$$\|s(\tau_r)\| \leq e^{L \sum_{i=q-1}^{r-1} \Delta_i} \left((\varphi^0(\Delta_{q-1}))^{\frac{1}{2}} + (\Delta_{q-1} \varphi^0(\Delta_{q-1}))^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=q-1}^{r-1} \kappa(\Delta_i) \Delta_i + \sum_{i=q-1}^{r-1} \varepsilon(\tau_i) \Delta_i \right). \quad (6.14)$$

Отсюда при $\tau_r \in [\tau_{q+1}, \tau_{l+1}]$ справедлива оценка

$$\|s(\tau_r)\| \leq e^{L(\vartheta-t_*)} \left((\varphi^0(\Delta^{(n)}))^{\frac{1}{2}} + (\Delta_n \varphi^0(\Delta^{(n)}))^{\frac{1}{2}} + (\vartheta - t_*) \kappa(\Delta^{(n)}) + \sum_{i=q-1}^{r-1} \varepsilon(\tau_i) \Delta_i \right). \quad (6.15)$$

Для совокупности моментов $\tau_i \in [\tau_{k+1}, \tau_N]$ справедливо следующее утверждение: либо $\|s(\tau_i)\| < \varphi^0(\Delta_i)^{\frac{1}{2}}$ для всех $\tau_i \in [\tau_{k+1}, \tau_N]$, либо существуют моменты $\tau_r \in [\tau_{k+1}, \tau_N]$, для которых $\|s(\tau_r)\| \geq \varphi^0(\Delta_r)^{\frac{1}{2}}$, и тогда для них верна оценка (6.15).

Принимая это во внимание, получаем, что для любого $\tau_r \in [\tau_{k+1}, \tau_N]$ верна оценка (6.15). В частности, имеем

$$\|s(\vartheta)\| \leq e^{L(\vartheta-t_*)} \left((\varphi^0(\Delta^{(n)}))^{\frac{1}{2}} + (\Delta^{(n)} \varphi^0(\Delta^{(n)}))^{\frac{1}{2}} + (\vartheta - t_*) \kappa(\Delta^{(n)}) \right) + e^{L(\vartheta-t_*)} \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(\tau_i) \Delta_i. \quad (6.16)$$

Далее, определим, что мы понимаем под движением $x(t)$ ($x(t_*) = x_* \in W(t_*)$) системы (2.1), порожденным W^* -процедурой управления.

О п р е д е л е н и е 6.1. Под движением $x(t)$ на $[t_*, \vartheta]$ ($x(t_*) = x_* \in W^*(t_*)$), порожденным W^* -процедурой управления первого игрока, понимается равномерный на $[t_*, \vartheta]$ предел последовательности $\{x^{(n)}(t)\}$ движений $x^{(n)}(t)$, $x^{(n)}(t_*) = x_*$, системы (2.1), порожденных W^* -процедурой управления и отвечающих разбиениям Γ_n из некоторой последовательности $\{\Gamma_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^{(n)} = 0$.

В связи с рассмотрением не одного разбиения Γ_n , а некоторой последовательности $\{\Gamma_n\}$, мы обозначаем через $x^{(n)}(t)$, $z^{(n)}(t)$ ($x^{(n)}(t_*) = z^{(n)}(t_*) = x_*$), $s^{(n)}(t) = z^{(n)}(t) - x^{(n)}(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, те движения системы (2.1), поводяря и их разность на $[t_*, \vartheta]$, которые отвечают разбиению Γ_n .

Учитывая это замечание, оценку (6.16) перепишем в виде

$$\|s(\vartheta)\| \leq e^{L(\vartheta-t_*)} \left((\varphi^0(\Delta^{(n)}))^{\frac{1}{2}} + (\Delta^{(n)} \varphi^0(\Delta^{(n)}))^{\frac{1}{2}} + (\vartheta - t_*) \kappa(\Delta^{(n)}) \right) + e^{L(\vartheta-t_*)} \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon(\tau_i) \Delta_i. \quad (6.17)$$

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что, наряду с $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(\vartheta) = x(\vartheta)$, существует также и $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(\vartheta) = z(\vartheta)$. Поскольку, по построению, $z^{(n)}(\vartheta) \in M$, а M — компакт в \mathbb{R}^m , то $z(\vartheta) \in M$. Значит, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} s^{(n)}(\vartheta) = s(\vartheta) = z(\vartheta) - x(\vartheta)$.

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, $\Delta^{(n)} \rightarrow 0$ в оценке (6.17), получаем

$$\|s(\vartheta)\| \leq e^{L(\vartheta-t_*)} \int_{t_*}^{\vartheta} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (6.18)$$

Отсюда следует утверждение

Теорема 2. Движение $x(t)$ ($x(t_*) = x_* \in W^*(t_*)$) на $[t_*, \vartheta]$, порожденное W^* -процедурой управления первого игрока, удовлетворяет включению

$$x(\vartheta) \in M_\varepsilon, \text{ где } \varepsilon = e^{L(\vartheta-t_0)} \int_{t_0}^{\vartheta} \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (6.19)$$

Число $\varepsilon = \varepsilon_{W^*}$ (6.19) можно также трактовать как меру нестабильности множества W^* . Назовем его *дефектом стабильности множества W^** .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Смешанное управление в дифференциальной игре // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 4. С. 745–747.
3. **Красовский Н.Н.** К теории дифференциальных игр // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, вып. 2. С. 197–207.
4. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1969. Т. 190, № 3. С. 523–526.
6. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Дифференциальная игра наведения // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 4. С. 579–591.
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Аппроксимация в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 197–204.
8. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 1. С. 3–13.
10. **Субботина Н.Н., Субботин А.И.** Игровая задача управления при неполной информации // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1977. № 5. С. 14–23.
11. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр с неполной информацией // Докл. АН СССР. 1974. Т. 215, № 4. С. 780–783.
12. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
13. **Красовский Н.Н.** Унификация дифференциальных игр // Тр. Ин-та математики и механики. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1977. Вып. 24: Игровые задачи управления. С. 32–45.
14. **Алексейчик М.И.** Дальнейшая формализация основных элементов антагонистической дифференциальной игры // Мат. анализ и его прил. Ростов Н/Д: Ростов. гос. ун-т., 1975. Т. 7. С. 191–199.
15. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
16. **Ченцов А.Г.** Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.
17. **Ченцов А.Г.** Итерационная программная конструкция для дифференциальной игры с фиксированным моментом окончания // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240, № 1. С. 796–800.
18. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления // М.: Наука, 1981. 288 с.
19. Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр / Под. ред. Субботина А.И., Пацко В.С. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. 295 с.
20. **Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С.** Построение стабильных мостов в линейной дифференциальной игре с фиксированным моментом окончания // Алгоритмы и программы решения линейных дифференц. игр / Под. ред. Субботина А.И., Пацко В.С. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1984. С. 127–158.

21. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** Алгоритмы построения стабильного моста в линейной задаче сближения с выпуклой целью // Исслед. задач минимаксного упр. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1985. С. 82–90.
22. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н.** О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения-уклонения. Свердловск, 1983. 61 с. Деп. в ВИНТИ, № 2454–83.
23. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Хрипунов А.П.** Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 2. С. 216–222.
24. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., and Ushakov V.N.** Derivatives for Multivalued Mappings with Applications to Game-Theoretical Problems of Control // Problems Control Inform. Theory. 1985. V. 14, no 6. P. 405–419.
25. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.:Наука, 1991. 216 с.
26. **Subbotin A.I.** Generalized Solutions of First-Order PDEs. The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.

УДК 519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫМИ L -СПЛАЙНАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ЛИНЕЙНОМУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ ВТОРОГО ПОРЯДКА¹

В. Т. Шевалдин

Для класса функций $W_\infty^{\mathcal{L}_2} = \{f : f' \in AC, \|\mathcal{L}_2(D)f\|_\infty \leq 1\}$, где $\mathcal{L}_2(D)$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка, характеристический многочлен которого имеет только действительные корни, построен неинтерполяционный линейный положительный метод экспоненциальной сплайн-аппроксимации, обладающий экстремальными и сглаживающими свойствами и наследующий локально свойства монотонности исходных данных (значений функции $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в точках равномерной сетки). Вычислена точно величина погрешности аппроксимации в равномерной метрике на этом классе.

Введение

В современной машинной графике и геометрическом дизайне основным аппаратом аппроксимации являются локальные сплайны одной или нескольких переменных, построенные на основе полиномиальных NURBSов (неравномерных рациональных B -сплайнов). В данной статье предлагается схема построения аналогов NURBSов на основе B - L -сплайнов. Это сплайны с равномерными узлами, соответствующие линейному дифференциальному оператору второго порядка, характеристический многочлен которого имеет только действительные корни. Схема обобщает и развивает результаты исследований [1–3]. Построенные одномерные локальные сплайны обладают формосохраняющими и сглаживающими свойствами, а в периодическом случае для формально самосопряженного линейного дифференциального оператора второго порядка — экстремальными свойствами в смысле поперечников по Колмогорову и по Коновалову. Обширную библиографию по данному вопросу см. в списках литературы к работам [1–3], а также в [4].

1. Формосохраняющие локальные L -сплайны

Следуя Х. Морше [5] (см. также [6, 7]), определим B -сплайны, соответствующие линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D)$ (D — символ дифференцирования) второго порядка с постоянными действительными коэффициентами, характеристический многочлен которого имеет только действительные корни. Для простоты изложения все построения и доказательства проведем в случае, если оператор \mathcal{L}_2 имеет вид

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D) = (D - \beta)(D - \gamma) \quad (\beta, \gamma \in \mathbb{R}; \beta \neq \gamma; \beta \neq 0; \gamma \neq 0).$$

Пусть $h > 0$, $m = m(\beta, \gamma, h)$ — некоторая константа, используемая в качестве нормирующего множителя, которую определим немного позже. B - L -сплайном с равномерными узлами,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00192), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-5120.2006.1) и Гранта поддержки научных исследований, выполняемых учеными УРО РАН совместно с СО РАН.

соответствующим линейному дифференциальному оператору \mathcal{L}_2 , называется функция вида

$$B(x) = m \cdot \begin{cases} \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta(\beta-\gamma)} e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} + \frac{1}{\gamma(\gamma-\beta)} e^{\gamma(x+\frac{3h}{2})}, & x \in \left[-\frac{3h}{2}, \frac{h}{2}\right], \\ -\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} + \frac{(e^{\gamma h} + 1) e^{\beta(x+\frac{h}{2})}}{\beta(\gamma-\beta)} + \frac{(e^{\beta h} + 1) e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}}{\gamma(\beta-\gamma)}, & x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], \\ e^{(\beta+\gamma)h} \left(\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x-\frac{3h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x-\frac{3h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right), & x \in \left[\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[-\frac{3h}{2}, \frac{3h}{2}\right]. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $B \in C^1(\mathbb{R})$. Пусть f — произвольная функция, определенная на всей числовой оси \mathbb{R} . Локальный L -сплайн S определим при $x \in \left[(l-\frac{1}{2})h, (l+\frac{1}{2})h\right]$ ($l \in \mathbb{Z}$) следующей формулой

$$\begin{aligned} S(x) = S(f, x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} y_j B(x - jh) = y_{l-1} B(x - (l-1)h) + y_l B(x - lh) + y_{l+1} B(x - (l+1)h) \\ &= m \left\{ y_{l-1} e^{(\beta+\gamma)h} \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x-lh-\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x-lh-\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \right. \\ &\quad + y_l \left[-\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} + \frac{(e^{\gamma h} + 1) e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}}{\beta(\gamma-\beta)} + \frac{(e^{\beta h} + 1) e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}}{\gamma(\beta-\gamma)} \right] \\ &\quad \left. + y_{l+1} \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $y_l = f((l+\varepsilon)h)$ ($l \in \mathbb{Z}$) — значения функции f в точках $(l+\varepsilon)h$. Теперь определим числа $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \gamma, h)$ и $m = m(\beta, \gamma, h)$. Пусть ε — решение уравнения

$$e^{(\beta-\gamma)(\varepsilon-\frac{1}{2})h} = \frac{\beta(e^{\gamma h} - 1)}{\gamma(e^{\beta h} - 1)} > 0, \quad (1.2)$$

т.е.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\beta-\gamma)h} \ln \frac{\beta(e^{\gamma h} - 1)}{\gamma(e^{\beta h} - 1)}.$$

Число m определим формулой

$$m = \frac{\beta(\beta-\gamma)}{e^{\beta(\varepsilon-\frac{1}{2})h} (e^{\beta h} - 1) (e^{\beta h} - e^{\gamma h})}. \quad (1.3)$$

Ясно, что при любых $\beta \neq \gamma$, $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ мы имеем: $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \gamma, h) = \varepsilon(\gamma, \beta, h)$, $m = m(\beta, \gamma, h) = m(\gamma, \beta, h) > 0$.

Лемма 1. При $\beta \neq \gamma$, $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ число $\varepsilon \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Доказательство. Пусть $\beta h = b$, $\gamma h = c$ ($b \neq c$, $b \neq 0$, $c \neq 0$). Рассмотрим функцию

$$g(x) = c(e^b - 1)e^{b(x-\frac{1}{2})} - b(e^c - 1)e^{c(x-\frac{1}{2})}.$$

С учетом (1.2) для доказательства леммы достаточно установить, что

$$g\left(\frac{1}{2}\right) g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0. \quad (1.4)$$

Имеем

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = bc\left(\frac{e^b - 1}{b} - \frac{e^c - 1}{c}\right), \quad g\left(-\frac{1}{2}\right) = bc\left(\frac{1 - e^{-b}}{b} - \frac{1 - e^{-c}}{c}\right).$$

Неравенство (1.4) следует из выписанных формул и того факта, что функция $\frac{e^t - 1}{t}$ монотонно возрастает, а функция $\frac{1 - e^{-t}}{t}$ монотонно убывает по t на всей числовой оси \mathbb{R} . Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Если $\beta = -\gamma$, то $\varepsilon = 0$.

Доказательство сводится к простым вычислениям.

Пусть AC — класс локально абсолютно непрерывных функций, $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R})$ — класс функций f , существенно ограниченных на \mathbb{R} с обычным определением нормы

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

$$W_\infty^{\mathcal{L}_2} = \{f : f' \in AC, \|\mathcal{L}_2(D)f\|_\infty \leq 1\}.$$

Для дифференциального оператора $\mathcal{L}_2 = (D - \beta)(D - \gamma)$ рассмотрим соответствующий разностный оператор (см., например, [8])

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_l = y_{l+2} - (e^{\beta h} + e^{\gamma h})y_{l+1} + e^{(\beta+\gamma)h}y_l, \quad (1.5)$$

определенный на пространстве числовых последовательностей $\{y_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$. Ясно, что если $f(x) = e^{\beta x}$ или $f(x) = e^{\gamma x}$ (функции из ядра оператора \mathcal{L}_2), то $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f((l + \varepsilon)h) = 0$ для любого $l \in \mathbb{Z}$ и для любого числа $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. Локальный сплайн $S(x) = S(f, x)$, определенный формулой (1.1), обладает следующими свойствами:

- 1° является гладкой функцией на всей числовой оси \mathbb{R} , т.е. $S \in C^1(\mathbb{R})$;
- 2° $S(e^{\beta x}, x) = e^{\beta x}$, $S(e^{\gamma x}, x) = e^{\gamma x}$ ($x \in \mathbb{R}$);
- 3° сохраняет локальную монотонность исходных данных $\{y_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ в том смысле, что:
 - (а) если $y_{l-1} \leq y_l \leq y_{l+1}$, то S не убывает на отрезке $[(l - \frac{1}{2})h, (l + \frac{1}{2})h]$,
 - (б) если $y_{l-1} \geq y_l \geq y_{l+1}$, то S не возрастает на отрезке $[(l - \frac{1}{2})h, (l + \frac{1}{2})h]$;
- 4° сохраняет локально знак исходных данных $\{y_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$, т.е. если $y_{l-1}, y_l, y_{l+1} \geq 0$ (≤ 0), то $S(x) \geq 0$ (≤ 0) при $x \in [(l - \frac{1}{2})h, (l + \frac{1}{2})h]$;
- 5° обладает свойством, близким к локальной выпуклости исходных данных $\{y_l\}_{l \in \mathbb{Z}}$ в том смысле, что если $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{l-1} \geq 0$ (≤ 0), то $\mathcal{L}_2(D)S(x) \geq 0$ (≤ 0) при $x \in ((l - \frac{1}{2})h, (l + \frac{1}{2})h)$;
- 6° $\sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}} \|\mathcal{L}_2(D)S\|_\infty = m \frac{(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma}$.

Доказательство.

1° После элементарных вычислений получаем

$$S\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)h\right) = m \left\{ y_l \left[\frac{e^{(\beta+\gamma)h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\gamma h}}{\beta(\beta - \gamma)} + \frac{e^{\beta h}}{\gamma(\gamma - \beta)} \right] + y_{l+1} \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta - \gamma} \left(\frac{e^{\beta h}}{\beta} - \frac{e^{\gamma h}}{\gamma} \right) \right] \right\},$$

$$\begin{aligned}
S\left(\left(l - \frac{1}{2}\right)h\right) &= m \left\{ y_{l-1} \left[\frac{e^{(\beta+\gamma)h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\gamma h}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\beta h}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \right. \\
&\quad \left. + y_l \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta-\gamma} \left(\frac{e^{\beta h}}{\beta} - \frac{e^{\gamma h}}{\gamma} \right) \right] \right\}, \\
S'\left(\left(l - \frac{1}{2}\right)h + 0\right) &= \frac{m}{\beta-\gamma} (e^{\beta h} - e^{\gamma h})(y_l - y_{l-1}), \\
S'\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)h - 0\right) &= \frac{m}{\beta-\gamma} (e^{\beta h} - e^{\gamma h})(y_{l+1} - y_l).
\end{aligned}$$

Из полученных формул и формулы (1.1) следует, что $S \in C^1(\mathbb{R})$.

2° Проверим первое равенство $S(e^{\beta x}, x) = e^{\beta x}$ ($x \in \mathbb{R}$). Из (1.1) при $x \in \left[\left(l - \frac{1}{2}\right)h, \left(l + \frac{1}{2}\right)h\right]$ ($l \in \mathbb{Z}$) имеем

$$\begin{aligned}
S(e^{\beta x}, x) &= m \left\{ e^{(l-1+\varepsilon)\beta h} e^{(\beta+\gamma)h} \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x-lh-\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x-lh-\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \right. \\
&\quad + e^{(l+\varepsilon)\beta h} \left[-\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}(e^{\gamma h} + 1)}{\beta(\gamma-\beta)} + \frac{e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}(e^{\beta h} + 1)}{\gamma(\beta-\gamma)} \right] \\
&\quad \left. + e^{(l+1+\varepsilon)\beta h} \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \right\} \\
&= m e^{\beta \varepsilon h} \left\{ \frac{1}{\beta\gamma} \left[e^{(\beta l + \gamma)h} - e^{\beta h(l+1)} - e^{(\beta l + \gamma)h} + e^{\beta h(l+1)} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\beta(\beta-\gamma)} \left[e^{\gamma h} e^{\beta(x-\frac{h}{2})} - e^{\beta(x+\frac{h}{2})}(e^{\gamma h} + 1) + e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\gamma(\gamma-\beta)} \left[e^{\beta l h + \gamma(x-lh+\frac{h}{2})} - e^{\beta(l+1)h + \gamma(x-lh+\frac{h}{2})} - e^{\beta l h + \gamma(x-lh+\frac{h}{2})} + e^{\beta(l+1)h + \gamma(x-lh+\frac{h}{2})} \right] \Big\} \\
&= \frac{1}{\beta(\beta-\gamma)} \left[e^{\gamma h} e^{\beta(x-\frac{h}{2})} - e^{\beta(x+\frac{h}{2})}(e^{\gamma h} + 1) + e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} \right].
\end{aligned}$$

Отсюда

$$S(e^{\beta x}, x) = \frac{m e^{\beta \varepsilon h}}{\beta(\beta-\gamma)} (e^{\beta h} - 1) \left(e^{\beta(x+\frac{h}{2})} - e^{\gamma h + \beta(x-\frac{h}{2})} \right) = \frac{m e^{\beta h(\varepsilon - \frac{1}{2})} (e^{\beta h} - 1)(e^{\beta h} - e^{\gamma h})}{\beta(\beta-\gamma)} e^{\beta x}.$$

В силу определения чисел m и ε выводим, что в выписанном выражении для $S(e^{\beta x}, x)$ множитель перед $e^{\beta x}$ равен 1. Поэтому $S(e^{\beta x}, x) = e^{\beta x}$. Второе равенство $S(e^{\gamma x}, x) = e^{\gamma x}$ следует из того, что все определенные выше величины, начиная с \mathcal{L}_2 , не меняются, если в них одновременно заменить β на γ , а γ на β .

3° Вычислим производную $S'(x)$. Из (1.1) при $x \in \left[\left(l - \frac{1}{2}\right)h, \left(l + \frac{1}{2}\right)h\right]$ имеем

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \frac{m}{\beta-\gamma} \left\{ y_{l-1} \left[e^{(\beta+\gamma)h + \beta(x-lh-\frac{h}{2})} - e^{(\beta+\gamma)h + \gamma(x-lh-\frac{h}{2})} \right] \right. \\
&\quad + y_l \left[e^{\beta h + \gamma(x-lh+\frac{h}{2})} + e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})} - e^{\gamma h + \beta(x-lh+\frac{h}{2})} - e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})} \right] \\
&\quad \left. + y_{l+1} \left[e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})} - e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})} \right] \right\} = m \{ (y_{l+1} - y_l) \alpha_1(x) + (y_l - y_{l-1}) \alpha_2(x) \},
\end{aligned}$$

где

$$\alpha_1(x) = \frac{1}{\beta - \gamma} \left[e^{\beta(x-lh+\frac{h}{2})} - e^{\gamma(x-lh+\frac{h}{2})} \right],$$

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{\beta - \gamma} \left[e^{\beta h + \gamma(x-lh+\frac{h}{2})} - e^{\gamma h + \beta(x-lh+\frac{h}{2})} \right].$$

Поскольку $m > 0$, то для доказательства свойства 3° достаточно показать, что функции $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ являются неотрицательными при $x \in [(l - \frac{1}{2})h, (l + \frac{1}{2})h]$. Данное утверждение является следствием неравенства

$$\frac{e^{\beta t} - e^{\gamma t}}{\beta - \gamma} \geq 0, \quad (1.6)$$

справедливого для любых $t \geq 0$ и $\beta \neq \gamma$. Свойство 3° доказано.

4° Справедливость данного свойства следует из равенства (1.1) и того факта, что $B(x) \geq 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

5° Из (1.1) и (1.5) следует, что при $x \in ((l - \frac{1}{2})h, (l + \frac{1}{2})h)$ справедливо следующее равенство

$$(D - \beta)(D - \gamma)S(x) = m\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{l-1}. \quad (1.7)$$

Поскольку $m > 0$, то из (1.7) выводим утверждение 5° теоремы 1.

6° Любое решение линейного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_2(D)f = (D - \beta)(D - \gamma)f = u$ ($u \in L_\infty$) может быть записано в виде

$$f(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{\gamma x} + \int_0^x \varphi(x-t)u(t) dt, \quad (1.8)$$

где $\varphi(t) = \frac{1}{\beta - \gamma}(e^{\beta t} - e^{\gamma t})$, C_1 и C_2 — произвольные константы. Вначале получим интегральное представление для разности $\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{l-1}$. Не ограничивая общности, можно принять, что $l = 0$. Из формулы (1.8) вычислим значения $y_j = f((j + \varepsilon)h)$ при $j = -1, 0, 1$ и подставим эти значения в формулу (1.5). Имеем

$$y_{-1} = f((\varepsilon - 1)h) = C_1 e^{\beta(\varepsilon-1)h} + C_2 e^{\gamma(\varepsilon-1)h} + \frac{1}{\beta - \gamma} \int_0^{(\varepsilon-1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon-1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon-1)h-t)} \right) u(t) dt,$$

$$y_0 = f(\varepsilon h) = C_1 e^{\beta \varepsilon h} + C_2 e^{\gamma \varepsilon h} + \frac{1}{\beta - \gamma} \int_0^{\varepsilon h} \left(e^{\beta(\varepsilon h-t)} - e^{\gamma(\varepsilon h-t)} \right) u(t) dt, \quad (1.9)$$

$$y_1 = f((\varepsilon + 1)h) = C_1 e^{\beta(\varepsilon+1)h} + C_2 e^{\gamma(\varepsilon+1)h} + \frac{1}{\beta - \gamma} \int_0^{(\varepsilon+1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) u(t) dt,$$

$$\begin{aligned} \Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{-1} &= y_1 - (e^{\beta h} + e^{\gamma h})y_0 + e^{(\beta+\gamma)h}y_{-1} \\ &= \frac{1}{\beta - \gamma} \left\{ \int_0^{(\varepsilon+1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) u(t) dt - (e^{\beta h} + e^{\gamma h}) \int_0^{\varepsilon h} \left(e^{\beta(\varepsilon h-t)} - e^{\gamma(\varepsilon h-t)} \right) u(t) dt \right. \\ &\quad \left. + e^{(\beta+\gamma)h} \int_0^{(\varepsilon-1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon-1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon-1)h-t)} \right) u(t) dt \right\}, \quad (1.10) \end{aligned}$$

поскольку неинтегральные слагаемые при подстановке значений y_{-1}, y_0, y_1 в (1.5) взаимно уничтожаются. Ранее уже отмечалось, что разность $\Delta_h^{\mathcal{L}_2}$ выбрана таким образом, что для любой функции $f \in \text{Ker } \mathcal{L}_2$ и произвольных $l \in \mathbb{Z}$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2} f((l + \varepsilon)h) = 0.$$

С учетом этого обстоятельства представление (1.10) для $\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{-1}$ может быть записано в более коротком виде

$$\begin{aligned} \Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{-1} &= \frac{1}{\beta - \gamma} \left\{ \int_{(\varepsilon-1)h}^{(\varepsilon+1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) u(t) dt \right. \\ &\quad \left. - (e^{\beta h} + e^{\gamma h}) \int_{(\varepsilon-1)h}^{\varepsilon h} \left(e^{\beta(\varepsilon h-t)} - e^{\gamma(\varepsilon h-t)} \right) u(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{\beta - \gamma} \left\{ \int_{\varepsilon h}^{(\varepsilon+1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) u(t) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{(\varepsilon-1)h}^{\varepsilon h} \left(e^{\beta h + \gamma(\varepsilon h-t)} - e^{\gamma h + \beta(\varepsilon h-t)} \right) u(t) dt \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $u(t) = \mathcal{L}_2(D)f(t)$. Оценим сверху выражение $|\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{-1}|$, принимая во внимание, что $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$. Ввиду неравенства (1.6) для любой функции $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ из (1.11) получаем оценку

$$\begin{aligned} |\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{-1}| &\leq \frac{1}{\beta - \gamma} \left\{ \int_{\varepsilon h}^{(\varepsilon+1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_{(\varepsilon-1)h}^{\varepsilon h} \left(e^{\beta h + \gamma(\varepsilon h-t)} - e^{\gamma h + \beta(\varepsilon h-t)} \right) dt \right\} = \frac{(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta \gamma}, \end{aligned}$$

которая является точной, причем неравенство заменяется равенством для функций f таких, что $\mathcal{L}_2(D)f(t) = 1$ для почти всех t из отрезка $[(\varepsilon-1)h, (\varepsilon+1)h]$. Аналогично выводится такая же оценка сверху для $|\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_l|$ и при других $l \in \mathbb{Z}$. Поэтому

$$\sup_l |\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_l| \leq \frac{(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta \gamma}. \quad (1.12)$$

Из (1.7) и (1.12) получаем точную оценку:

$$\|(D - \beta)(D - \gamma)S\|_\infty \leq m \frac{(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta \gamma}.$$

Теорема 1 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. В предлагаемой схеме ключевым моментом является выбор параметров m и ε . Если предположить, что на начальном этапе исследований они нам неизвестны, то формулы $S(e^{\beta x}, x) = e^{\beta x}$, $S(e^{\gamma x}, x) = e^{\gamma x}$, рассматриваемые как уравнения относительно неизвестных m и ε , позволяют однозначно их определить.

2. Локальные сплайны на отрезке

В предыдущем параграфе были приведены формулы для локальных формосохраняющих L -сплайнов на всей числовой оси, определенных для линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_2(D) = (D - \beta)(D - \gamma)$ ($\beta \neq \gamma$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$). Если же исходная функция f задана на отрезке, то предлагаемые формулы требуют уточнения вблизи концов этого отрезка, поскольку мы не хотим привлекать информацию о функции f вне отрезка.

Пусть числа $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и m определены формулами (1.2) и (1.3). Будем строить сплайн $S(x)$ на отрезке $[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$, считая известными значения y_k функции f в точках $\varepsilon h + kh$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Ясно, что после построения сплайна S на таком отрезке можно с помощью сдвигов и сжатия (или растяжения) получить формулы для L -сплайна и на любом отрезке. Разобьем указанный отрезок на части

$$\left[\varepsilon h, \frac{h}{2}\right], \quad \left[\frac{h}{2}, \frac{3h}{2}\right], \dots, \quad \left[\left(n - \frac{3}{2}\right)h, \left(n - \frac{1}{2}\right)h\right], \quad \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)h, \varepsilon h + nh\right].$$

При $x \in \left[\left(l - \frac{1}{2}\right)h, \left(l + \frac{1}{2}\right)h\right]$ ($l = 1, 2, \dots, n - 1$) сплайн S строим по формуле (1.1). Пусть также

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{y_1 - e^{\gamma h} y_0}{e^{\beta h} - e^{\gamma h}} e^{\beta(x - \varepsilon h)} + \frac{y_1 - e^{\beta h} y_0}{e^{\gamma h} - e^{\beta h}} e^{\gamma(x - \varepsilon h)} \quad \left(x \in \left[\varepsilon h, \frac{h}{2}\right]\right), \\ S(x) &= e^{\beta h} \frac{y_n - e^{\gamma h} y_n}{e^{\beta h} - e^{\gamma h}} e^{\beta(x - \varepsilon h - nh)} + e^{\gamma h} \frac{y_n - e^{\beta h} y_{n-1}}{e^{\gamma h} - e^{\beta h}} e^{\gamma(x - \varepsilon h - nh)} \\ &\quad \left(x \in \left[\left(n - \frac{1}{2}\right)h, nh + \varepsilon h\right]\right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отметим ряд свойств построенного на отрезке $[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$ сплайна S . Во-первых, из (2.1) ясно, что

$$S(\varepsilon h) = y_0 = f(\varepsilon h), \quad S(\varepsilon h + nh) = y_n = f(\varepsilon h + nh),$$

т.е. сплайн S интерполирует функцию f в концах отрезка. Во-вторых, на крайних отрезках $[\varepsilon h, \varepsilon h + \frac{h}{2}]$, $[(n - \frac{1}{2})h, nh + \varepsilon h]$ сплайн является линейной комбинацией не трех функций 1 , $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$, как это было на любом отрезке вида $[(l - \frac{1}{2})h, (l + \frac{1}{2})h]$ ($l = 1, 2, \dots, n - 1$), а только двух: $e^{\beta x}$ и $e^{\gamma x}$. Данное замечание позволяет сделать вывод, что для сплайна S на отрезке выполнены аналоги краевых условий второго рода (см., например, [8]).

Лемма 2. $S \in C^1[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$.

Доказательство. При доказательстве п. 1° теоремы 1 были отмечены следующие равенства:

$$\begin{aligned} S\left(\frac{h}{2}\right) &= m \left\{ y_0 \left[\frac{e^{(\beta+\gamma)h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\gamma h}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\beta h}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] + y_1 \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta-\gamma} \left(\frac{e^{\beta h}}{\beta} - \frac{e^{\gamma h}}{\gamma} \right) \right] \right\}, \\ S\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h\right) &= m \left\{ y_{n-1} \left[\frac{e^{(\beta+\gamma)h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\gamma h}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\beta h}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \right. \\ &\quad \left. + y_n \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta-\gamma} \left(\frac{e^{\beta h}}{\beta} - \frac{e^{\gamma h}}{\gamma} \right) \right] \right\}, \\ S'\left(\frac{h}{2} + 0\right) &= \frac{m}{\beta-\gamma} (e^{\beta h} - e^{\gamma h}) (y_1 - y_0), \\ S'\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h - 0\right) &= \frac{m}{\beta-\gamma} (e^{\beta h} - e^{\gamma h}) (y_n - y_{n-1}). \end{aligned}$$

Для доказательства леммы 2 требуется, используя формулы (2.1), проверить равенства

$$\begin{aligned} S\left(\frac{h}{2} - 0\right) &= S\left(\frac{h}{2}\right), & S\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h + 0\right) &= S\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h\right), \\ S'\left(\frac{h}{2} - 0\right) &= S'\left(\frac{h}{2} + 0\right), & S'\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h - 0\right) &= S'\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h + 0\right). \end{aligned}$$

В самом деле, из (2.1), используя (1.2) и (1.3), выводим

$$\begin{aligned} S\left(\frac{h}{2} - 0\right) &= \frac{1}{(e^{\beta h} - e^{\gamma h})e^{\beta h(\varepsilon - \frac{1}{2})}} \left[y_1 - e^{\gamma h} y_0 - e^{(\beta - \gamma)h(\varepsilon - \frac{1}{2})} (y_1 - e^{\beta h} y_0) \right] \\ &= \frac{1}{(e^{\beta h} - e^{\gamma h})e^{\beta h(\varepsilon - \frac{1}{2})}} \left[y_1 - e^{\gamma h} y_0 - \frac{\beta(e^{\gamma h} - 1)}{\gamma(e^{\beta h} - 1)} (y_1 - e^{\beta h} y_0) \right] \\ &= \frac{m}{\beta\gamma(\beta - \gamma)} \left[\gamma(e^{\beta h} - 1)(y_1 - e^{\gamma h} y_0) - \beta(e^{\gamma h} - 1)(y_1 - e^{\beta h} y_0) \right] \\ &= m \left\{ y_0 \left[\frac{e^{(\beta + \gamma)h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\gamma h}}{\beta(\beta - \gamma)} + \frac{e^{\beta h}}{\gamma(\gamma - \beta)} \right] + y_1 \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta - \gamma} \left(\frac{e^{\beta h}}{\beta} - \frac{e^{\gamma h}}{\gamma} \right) \right] \right\} = S\left(\frac{h}{2}\right). \end{aligned}$$

Из (2.1) также выводим, что

$$\begin{aligned} S'\left(\frac{h}{2} - 0\right) &= \frac{\beta}{(e^{\beta h} - e^{\gamma h})} (y_1 - e^{\gamma h} y_0) e^{\beta(\frac{1}{2} - \varepsilon)h} + \frac{\gamma(y_1 - e^{\beta h} y_0)}{e^{\gamma h} - e^{\beta h}} e^{\gamma(\frac{1}{2} - \varepsilon)h} \\ &= \frac{1}{(e^{\beta h} - e^{\gamma h})e^{\beta(\varepsilon - \frac{1}{2})h}} \left[(y_1 - e^{\gamma h} y_0)\beta - \gamma e^{(\beta - \gamma)(\varepsilon - \frac{1}{2})h} (y_1 - e^{\beta h} y_0) \right] \\ &= m \frac{e^{\beta h} - 1}{\beta(\beta - \gamma)} \left[(y_1 - e^{\gamma h} y_0)\beta - \gamma \frac{\beta(e^{\gamma h} - 1)}{\gamma(e^{\beta h} - 1)} (y_1 - e^{\beta h} y_0) \right] \\ &= \frac{m}{\beta - \gamma} (y_1 - y_0)(e^{\beta h} - e^{\gamma h}) = S'\left(\frac{h}{2} + 0\right). \end{aligned}$$

Аналогично проверяются равенства

$$S\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h + 0\right) = S\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h\right), \quad S'\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h - 0\right) = S'\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)h + 0\right).$$

Лемма 2 доказана.

3. Оценка погрешности аппроксимации локальными L -сплайнами

Теорема 2. Пусть $\beta \neq \gamma$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Для сплайна S , определенного формулой (1.1), имеет место равенство

$$E(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = \sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}} \|f - S\|_\infty = \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{m(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma} - 1 \right).$$

Доказательство. Получим интегральное представление для уклонения $f(x) - S(x)$. Не нарушая общности, будем считать, что $x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ (т.е. $l = 0$). Подставим (1.9) в представление (1.1) при $l = 0$. Вначале вычислим неинтегральную часть (обозначим ее через A) полученной формулы. Имеем

$$A = m \left\{ e^{(\beta+\gamma)h} \left(C_1 e^{\beta(\varepsilon-1)h} + C_2 e^{\gamma(\varepsilon-1)h} \right) \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x-\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x-\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \right. \\ + \left(C_1 e^{\beta\varepsilon h} + C_2 e^{\gamma\varepsilon h} \right) \left[-\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}(1+e^{\gamma h})}{\beta(\gamma-\beta)} + \frac{e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}(1+e^{\beta h})}{\gamma(\beta-\gamma)} \right] \\ \left. + \left(C_1 e^{\beta(\varepsilon+1)h} + C_2 e^{\gamma(\varepsilon+1)h} \right) \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \right\}.$$

Проводя в этом равенстве элементарные преобразования с учетом равенств (1.2) и (1.3), получаем

$$A = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{\gamma x}.$$

Для $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в силу (1.8) неинтегральные части в формулах для $f(x)$ и $S(x)$ совпадают. Обозначим $B = S(x) - A$. Имеем

$$B = \frac{m}{\beta-\gamma} \left\{ e^{(\beta+\gamma)h} \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x-\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x-\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \int_0^{(\varepsilon-1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon-1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon-1)h-t)} \right) u(t) dt \right. \\ + \left[-\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}(1+e^{\gamma h})}{\beta(\gamma-\beta)} + \frac{e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}(1+e^{\beta h})}{\gamma(\beta-\gamma)} \right] \int_0^{\varepsilon h} \left(e^{\beta(\varepsilon h-t)} - e^{\gamma(\varepsilon h-t)} \right) u(t) dt \\ \left. + \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right] \int_0^{(\varepsilon+1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) u(t) dt \right\}, \quad (3.1)$$

где $u(t) = \mathcal{L}_2(D)f(t) = (D-\beta)(D-\gamma)f(t)$.

Поскольку

$$f(x) - A = \frac{1}{\beta-\gamma} \int_0^x \left(e^{\beta(x-t)} - e^{\gamma(x-t)} \right) u(t) dt,$$

то из (3.1) при $x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ и последнего равенства получаем интегральное представление для разности $f(x) - S(x)$:

$$f(x) - S(x) = \int_0^x \varphi_1(x, t) u(t) dt - \int_0^{(1+\varepsilon)h} \varphi_2(x, t) u(t) dt \\ - \int_0^{\varepsilon h} \varphi_3(x, t) u(t) dt - \int_0^{(\varepsilon-1)h} \varphi_4(x, t) u(t) dt, \quad (3.2)$$

где

$$\varphi_1(x, t) = \frac{1}{\beta-\gamma} \left(e^{\beta(x-t)} - e^{\gamma(x-t)} \right), \\ \varphi_2(x, t) = \frac{m}{\beta-\gamma} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right],$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x, t) &= \frac{m}{\beta - \gamma} \left(e^{\beta(\varepsilon h - t)} - e^{\gamma(\varepsilon h - t)} \right) \left[-\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta \gamma} + \frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}(1 + e^{\gamma h})}{\beta(\gamma - \beta)} + \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}(1 + e^{\beta h})}{\gamma(\beta - \gamma)} \right], \\ \varphi_4(x, t) &= \frac{m e^{(\beta + \gamma)h}}{\beta - \gamma} \left(e^{\beta((\varepsilon - 1)h - t)} - e^{\gamma((\varepsilon - 1)h - t)} \right) \left[\frac{1}{\beta \gamma} + \frac{e^{\beta(x - \frac{h}{2})}}{\beta(\beta - \gamma)} + \frac{e^{\gamma(x - \frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma - \beta)} \right].\end{aligned}\quad (3.3)$$

С помощью элементарных преобразований формул (3.3) с учетом (1.2) и (1.3) проверяется равенство

$$\varphi_1(x, t) = \varphi_2(x, t) + \varphi_3(x, t) + \varphi_4(x, t) \quad (x, t \in \mathbb{R}). \quad (3.4)$$

Отметим, что равенство (3.4) по существу является также простым следствием равенств $S(e^{\beta x}, x) = e^{\beta x}$, $S(e^{\gamma x}, x) = e^{\gamma x}$. С помощью (3.4) равенство (3.2) можно упростить следующим образом:

$$\begin{aligned}f(x) - S(x) &= \int_{(\varepsilon - 1)h}^x \varphi_1(x, t) u(t) dt - \int_{(\varepsilon - 1)h}^{\varepsilon h} \varphi_3(x, t) u(t) dt \\ &\quad - \int_{(\varepsilon - 1)h}^{(\varepsilon + 1)h} \varphi_2(x, t) u(t) dt \quad \left(x \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right] \right).\end{aligned}\quad (3.5)$$

Напомним, что число ε определено формулой (1.2), а в силу леммы 1 имеем $\varepsilon \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Дальнейшее исследование равенства (3.5) проведем в двух случаях: (а) $-\frac{h}{2} \leq x \leq \varepsilon h$, (б) $\varepsilon h \leq x \leq \frac{h}{2}$.

(а) При $-\frac{h}{2} \leq x \leq \varepsilon h$ из (3.5) выводим, что

$$\begin{aligned}f(x) - S(x) &= \int_{(\varepsilon - 1)h}^x (\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t) - \varphi_3(x, t)) u(t) dt \\ &\quad + \int_x^{\varepsilon h} (-\varphi_2(x, t) - \varphi_3(x, t)) u(t) dt + \int_{\varepsilon h}^{(\varepsilon + 1)h} (-\varphi_2(x, t)) u(t) dt.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Для доказательства (б) потребуется

Лемма 3. При $x \leq \varepsilon h$ имеют место следующие неравенства:

- (1) $\varphi_2(x, t) \geq 0$ при $t \leq (\varepsilon + 1)h$, $x \geq -\frac{h}{2}$,
- (2) $\varphi_3(x, t) \geq 0$ при $t \leq \varepsilon h$, $-\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}$,
- (3) $\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t) - \varphi_3(x, t) \leq 0$ при $(\varepsilon - 1)h \leq t$, $-\frac{h}{2} \leq x \leq \varepsilon h$.

Доказательство.

(1) При $\beta \neq \gamma$ и $t \leq (\varepsilon + 1)h$ с учетом того, что $m > 0$, имеем

$$\frac{m}{\beta - \gamma} \left(e^{\beta((\varepsilon + 1)h - t)} - e^{\gamma((\varepsilon + 1)h - t)} \right) \geq 0. \quad (3.7)$$

Пусть $x + \frac{h}{2} = u$, $u \geq 0$ и $K(u) = \frac{1}{\beta \gamma} + \frac{e^{\beta u}}{\beta(\beta - \gamma)} + \frac{e^{\gamma u}}{\gamma(\gamma - \beta)}$. Имеем $K(0) = 0$, $K'(u) = \frac{1}{\beta - \gamma} (e^{\beta u} - e^{\gamma u}) > 0$ при $u > 0$. Следовательно, $K(u) \geq 0$ при $u \geq 0$. Из этого неравенства, неравенства (3.7) и определения функции $\varphi_2(x, t)$ выводим, что $\varphi_2(x, t) \geq 0$ при $t \leq (\varepsilon + 1)h$ и $x \geq -\frac{h}{2}$.

(2) При $\beta \neq \gamma$ и $t \leq \varepsilon h$ с учетом того, что $m > 0$, имеем

$$\frac{m}{\beta - \gamma} \left(e^{\beta(\varepsilon h - t)} - e^{\gamma(\varepsilon h - t)} \right) \geq 0. \quad (3.8)$$

Рассмотрим функцию

$$B(u) = -\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta \gamma} + \frac{e^{\beta u}(1 + e^{\gamma h})}{\beta(\gamma - \beta)} + \frac{e^{\gamma u}(1 + e^{\beta h})}{\gamma(\beta - \gamma)}.$$

Для доказательства п. 2 леммы 3, в силу определения функции $\varphi_3(x, t)$ и неравенства (3.8), достаточно проверить, что $B(u) \geq 0$ при $0 \leq u \leq h$. Легко заметить, что

$$B'(0) = \frac{1}{\beta - \gamma} \left(e^{\beta h} - e^{\gamma h} \right) > 0, \quad B'(h) = \frac{1}{\gamma - \beta} \left(e^{\beta h} - e^{\gamma h} \right) < 0.$$

Функция $B'(u)$ может иметь не более одного нуля и, в силу последних неравенств, имеет свой единственный нуль на интервале $(0, h)$. Функция $B(u)$ является выпуклой вверх на этом промежутке. Следовательно, для доказательства неравенства $B(u) \geq 0$ при $0 \leq u \leq h$ достаточно проверить, что $B(0) \geq 0$ и $B(h) \geq 0$. Имеем

$$B(0) = \frac{1}{\beta \gamma} + \frac{1}{\beta - \gamma} \left(\frac{e^{\beta h}}{\beta} - \frac{e^{\gamma h}}{\gamma} \right). \quad (3.9)$$

Обозначая функцию в правой части этого равенства через $\eta(h)$, замечаем, что $\eta(0) = 0$, $\eta'(h) = \frac{1}{\beta - \gamma} (e^{\beta h} - e^{\gamma h}) > 0$. Поэтому $\eta(h) > 0$ при $h > 0$, и, следовательно, $B(0) > 0$. Доказательство неравенства $B(h) > 0$ сведем к только что разобранным случаю. Имеем

$$B(h) = e^{(\beta + \gamma)h} \left[\frac{1}{\beta \gamma} + \frac{e^{-\gamma h}}{\gamma(\gamma - \beta)} + \frac{e^{-\beta h}}{\beta(\beta - \gamma)} \right].$$

Выражение в квадратных скобках в этом равенстве после замены $\beta = -\beta_1$, $\gamma = -\gamma_1$ равно выражению в правой части равенства (3.9) (с заменой в нем β на β_1 и γ на γ_1). Поэтому, в силу доказанного, получаем, что $B(h) > 0$, и, следовательно, $B(u) \geq 0$ при $0 \leq u \leq h$.

(3) Обозначим $\alpha(x, t) = \varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t) - \varphi_3(x, t)$. Функции $\varphi_j(x, t)$ ($j = 1, 2, 3$) представляют собой (см. (3.3)) линейные комбинации функций $e^{-\beta t}$ и $e^{-\gamma t}$. Поэтому функция $\alpha(x, t)$ представима в виде линейной функции по переменной $\theta = e^{(\beta - \gamma)t}$, а именно,

$$\alpha(x, t) = e^{-\beta t}(\alpha_1 + \alpha_2 \theta),$$

где функции $\alpha_1 = \alpha_1(x)$ и $\alpha_2 = \alpha_2(x)$ от t не зависят. Ясно, что для доказательства неравенства $\alpha(x, t) \leq 0$ при $(\varepsilon - 1)h \leq t \leq x$ и $-\frac{h}{2} \leq x \leq \varepsilon h$ достаточно проверить, что линейная функция $\alpha_1 + \alpha_2 \theta$ неотрицательна при двух значениях θ : $\theta_1 = e^{(\beta - \gamma)(\varepsilon - 1)h}$ (т.е. при $t = (\varepsilon - 1)h$) и $\theta_2 = e^{(\beta - \gamma)x}$ (т.е. при $t = x$).

Поскольку при $t = x$ функция $\varphi_1(x, t) = 0$, то

$$\alpha(x, x) = -\varphi_2(x, x) - \varphi_3(x, x).$$

Из доказанного в пп. 1, 2 леммы 3 выводим, что $\varphi_2(x, x) \geq 0$, $\varphi_3(x, x) \geq 0$ и поэтому $\alpha(x, x) \leq 0$ при $-\frac{h}{2} \leq x \leq \varepsilon h$.

Для доказательства п. 3 леммы 3 остается проверить справедливость неравенства

$$\alpha(x, (\varepsilon - 1)h) \leq 0 \quad \left(x \in \left[-\frac{h}{2}, \varepsilon h \right] \right). \quad (3.10)$$

Из равенств (3.3) с учетом (1.2) и (1.3) получаем

$$\begin{aligned}
\alpha(x, (\varepsilon - 1)h) &= \frac{1}{\beta - \gamma} \left(e^{\beta(x - (\varepsilon - 1)h)} - e^{\gamma(x - (\varepsilon - 1)h)} \right) \\
&\quad - \frac{m(e^{2\beta h} - e^{2\gamma h})}{\beta - \gamma} \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}}{\beta(\beta - \gamma)} + \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma - \beta)} \right] \\
&\quad - \frac{m(e^{\beta h} - e^{\gamma h})}{\beta - \gamma} \left[-\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}(1 + e^{\gamma h})}{\beta(\gamma - \beta)} + \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}(1 + e^{\beta h})}{\gamma(\beta - \gamma)} \right] \\
&= \frac{e^{\beta(\frac{1}{2} - \varepsilon)h}}{\beta - \gamma} \left\{ e^{\beta(x + \frac{h}{2})} - e^{\gamma(x + \frac{h}{2}) - \frac{\beta h}{2} + (\beta - \gamma)h} - \frac{\beta(e^{\beta h} + e^{\gamma h})}{e^{\beta h} - 1} \left[\frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}}{\beta} - \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}}{\gamma} \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\beta}{e^{\beta h} - 1} \left[\frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}(1 + e^{\gamma h})}{\beta} - \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}(1 + e^{\beta h})}{\gamma} \right] \right\} \\
&= \frac{e^{\beta(\frac{1}{2} - \varepsilon)h}}{(\beta - \gamma)(e^{\beta h} - 1)} \left\{ (e^{\beta h} - 1)e^{\beta(x + \frac{h}{2})} - \frac{\beta(e^{\gamma h} - 1)}{\gamma} e^{\gamma(x + \frac{h}{2})} \right. \\
&\quad \left. - \beta \left(e^{\beta h} + e^{\gamma h} \right) \left[\frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}}{\beta} - \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}}{\gamma} \right] - \beta \left[\frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}(1 + e^{\gamma h})}{\beta} - \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}(1 + e^{\beta h})}{\gamma} \right] \right\} \\
&= \frac{2e^{\beta(\frac{1}{2} - \varepsilon)h}}{(\beta - \gamma)\gamma(e^{\beta h} - 1)} \left\{ (1 + e^{\beta h})\beta e^{\gamma(x + \frac{h}{2})} - (1 + e^{\gamma h})\gamma e^{\beta(x + \frac{h}{2})} \right\}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Исследуем последнее выражение, сделав замену $x + \frac{h}{2} = u$ ($u \geq 0$) и обозначив

$$\lambda_1(u) = \frac{\beta(1 + e^{\beta h})e^{\gamma u} - \gamma(1 + e^{\gamma h})e^{\beta u}}{(\beta - \gamma)\gamma(e^{\beta h} - 1)}.$$

Имеем $\lambda_1(0) = 0$, $\lambda_1'(u) = \frac{(e^{\gamma u} - e^{\beta u})\beta}{(\beta - \gamma)(e^{\beta u} - 1)} < 0$ ($u > 0$). Следовательно, $\lambda_1(u) \leq 0$ при $u \geq 0$.

Поэтому из (3.11) выводим, что $\alpha(x, (\varepsilon - 1)h) \leq 0$ при $-\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}$, и, следовательно, $\lambda(x, t) \leq 0$ при $(\varepsilon - 1)h \leq t \leq x$, $-\frac{h}{2} \leq x \leq \varepsilon h$. Лемма 3 доказана.

Докажем теперь (b).

При $\varepsilon h \leq x \leq \frac{h}{2}$ из (3.5) выводим, что

$$\begin{aligned}
f(x) - S(x) &= \int_{(\varepsilon - 1)h}^{\varepsilon h} (\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t) - \varphi_3(x, t))u(t) dt \\
&\quad + \int_{\varepsilon h}^x (\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t))u(t) dt + \int_x^{(\varepsilon + 1)h} (-\varphi_2(x, t))u(t) dt. \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Лемма 4. При $x \geq \varepsilon h$ имеют место следующие неравенства:

(1) $\varphi_2(x, t) \geq 0$ при $t \leq (\varepsilon + 1)h$, $x \geq -\frac{h}{2}$,

(2) $\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t) \leq 0$ при $\varepsilon h \leq t \leq x \leq \frac{h}{2}$,

(3) $\varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t) - \varphi_3(x, t) \leq 0$ при $(\varepsilon - 1)h \leq t \leq \varepsilon h$, $-\frac{h}{2} \leq x \leq \frac{h}{2}$.

Доказательство. Пункт 1 леммы 4 доказан в п. 1 леммы 3. Сначала докажем п. 3.

(3) Пусть, как и раньше, $\alpha(x, t) = \varphi_1(x, t) - \varphi_2(x, t) - \varphi_3(x, t)$. С учетом доказанного в п. 3 леммы 3 замечаем, что неравенство $\alpha(x, t) \leq 0$ при $(\varepsilon - 1)h \leq t \leq \varepsilon h$, $-\frac{h}{2} < \varepsilon h \leq x \leq \frac{h}{2}$ будет доказано, если будут проверены два неравенства

$$\alpha(x, (\varepsilon - 1)h) \leq 0, \quad \alpha(x, \varepsilon h) \leq 0 \quad \left(x \in \left[\varepsilon h, \frac{h}{2} \right] \right). \quad (3.13)$$

Первое неравенство в (3.13) было установлено в ходе доказательства п. 3 леммы 3. Преобразуем теперь выражение $\alpha(x, \varepsilon h)$. Из (3.3) следует, что $\varphi_3(x, \varepsilon h) = 0$. Поэтому, с учетом равенств (1.2) и (1.3), получаем

$$\begin{aligned} \alpha(x, \varepsilon h) &= \varphi_1(x, \varepsilon h) - \varphi_2(x, \varepsilon h) \\ &= \frac{1}{\beta - \gamma} \left\{ e^{\beta(x - \varepsilon h)} - e^{\gamma(x - \varepsilon h)} - m \left(e^{\beta h} - e^{\gamma h} \right) \left[\frac{1}{\beta \gamma} + \frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}}{\beta(\beta - \gamma)} + \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma - \beta)} \right] \right\} \\ &= \frac{e^{\beta(\frac{1}{2} - \varepsilon)h}}{(\beta - \gamma)(e^{\beta h} - 1)} \left\{ (e^{\beta h} - 1) \left(e^{\beta(x - \frac{h}{2})} - e^{\beta(\varepsilon - \frac{1}{2})h} e^{\gamma(x - \varepsilon h)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \beta(\beta - \gamma) \left[\frac{1}{\beta \gamma} + \frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}}{\beta(\beta - \gamma)} + \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma - \beta)} \right] \right\} \\ &= \frac{e^{\beta(\frac{1}{2} - \varepsilon)h}}{(\beta - \gamma)(e^{\beta h} - 1)} \left\{ \frac{1}{\gamma} \left[e^{\beta(x - \frac{h}{2})} (e^{\beta h} - 1) \gamma - e^{\gamma(x - \frac{h}{2})} (e^{\gamma h} - 1) \beta \right] \right. \\ &\quad \left. - \beta(\beta - \gamma) \left[\frac{1}{\beta \gamma} + \frac{e^{\beta(x + \frac{h}{2})}}{\beta(\beta - \gamma)} + \frac{e^{\gamma(x + \frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma - \beta)} \right] \right\} \\ &= e^{\beta(\frac{1}{2} - \varepsilon)h} \left[- \frac{e^{\beta(x - \frac{h}{2})}}{(\beta - \gamma)(e^{\beta h} - 1)} - \frac{\beta e^{\gamma(x - \frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma - \beta)(e^{\beta h} - 1)} - \frac{1}{\gamma(e^{\beta h} - 1)} \right]. \quad (3.14) \end{aligned}$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в последнем равенстве через $\lambda_2(u)$, $u = x - \frac{h}{2}$, $u \in [-h, 0]$. Покажем, что $\lambda_2(u) \leq 0$ при $-h \leq u \leq 0$. Имеем

$$\lambda_2'(u) = \frac{\beta}{e^{\beta h} - 1} \cdot \frac{e^{\gamma u} - e^{\beta u}}{\beta - \gamma} \geq 0 \quad (u \in [-h, 0]), \quad \lambda_2(0) = 0.$$

Следовательно, $\lambda_2(u) \leq 0$ при $-h \leq u \leq 0$. Поэтому из (3.14) получаем, что $\lambda(x, \varepsilon h) \leq 0$ при $x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]$. Пункт 3 леммы 4 доказан. Докажем теперь п. 2.

(2) Ясно, что для доказательства данного пункта достаточно проверить два неравенства

$$\varphi_1(x, x) - \varphi_2(x, x) \leq 0, \quad \varphi_1(x, \varepsilon h) - \varphi_2(x, \varepsilon h) \leq 0 \quad \left(x \in \left[\varepsilon h, \frac{h}{2} \right] \right).$$

Первое неравенство следует из того, что $\varphi_1(x, x) = 0$, и из п. 1. Второе неравенство доказано выше в п. 3 леммы 4. Лемма 4 доказана.

Из лемм 3 и 4 следует, что в представлениях (3.6) и (3.12) для разности $f(x) - S(x)$ все функции в интегралах, являющиеся множителями перед функцией $u(t)$, неположительны. Это позволяет для оценки уклонения $|f(x) - S(x)|$ на классе функций $W_{\infty}^{\mathcal{L}^2}$ функцию $u(t)$ заменить на -1 и затем вычислить соответствующие интегралы, пользуясь, например, формулой (3.5). Имеем

$$|f(x) - S(x)| \leq J_1 + J_2 + J_3, \quad (3.15)$$

где

$$J_1 = - \int_{(\varepsilon-1)h}^x \varphi_1(x, t) dt, \quad J_2 = \int_{(\varepsilon-1)h}^{(\varepsilon+1)h} \varphi_2(x, t) dt, \quad J_3 = \int_{(\varepsilon-1)h}^{\varepsilon h} \varphi_3(x, t) dt.$$

С учетом (3.3) получаем

$$J_1 = -\frac{1}{\beta\gamma} - \frac{e^{\beta(x-(\varepsilon-1)h)}}{(\beta-\gamma)\beta} + \frac{e^{\gamma(x-(\varepsilon-1)h)}}{\gamma(\beta-\gamma)},$$

$$J_2 = \frac{m}{\beta-\gamma} \left(\frac{e^{2\beta h} - 1}{\beta} - \frac{e^{2\gamma h} - 1}{\gamma} \right) \left[\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}}{\beta(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}}{\gamma(\gamma-\beta)} \right],$$

$$J_3 = \frac{m}{\beta-\gamma} \left(\frac{e^{\beta h} - 1}{\beta} - \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma} \right) \left[-\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} + \frac{e^{\beta(x+\frac{h}{2})}(1+e^{\gamma h})}{\beta(\gamma-\beta)} + \frac{e^{\gamma(x+\frac{h}{2})}(1+e^{\beta h})}{\gamma(\beta-\gamma)} \right].$$

Следовательно,

$$|f(x) - S(x)| \leq J_1 + J_2 + J_3 = A_1 + A_2 e^{\beta x} + A_3 e^{\gamma x}, \quad (3.16)$$

где A_1, A_2, A_3 — константы, которые вычислим, исходя из полученных формул для J_1, J_2, J_3 . Имеем

$$A_1 = -\frac{1}{\beta\gamma} + \frac{m}{\beta-\gamma} \left(\frac{e^{\beta h} - 1}{\beta} - \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma} \right) \left(-\frac{e^{\beta h} + e^{\gamma h}}{\beta\gamma} \right)$$

$$+ \frac{m}{\beta-\gamma} \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{e^{2\beta h} - 1}{\beta} - \frac{e^{2\gamma h} - 1}{\gamma} \right) = \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma} m - 1 \right). \quad (3.17)$$

Вычислим числа A_2 и A_3 с учетом равенств (1.2) и (1.3).

$$A_2 = \frac{1}{\beta(\beta-\gamma)} \left\{ -e^{\beta(1-\varepsilon)h} - \frac{m}{\beta-\gamma} e^{\beta\frac{h}{2}}(1+e^{\gamma h}) \left(\frac{e^{\beta h} - 1}{\beta} - \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{m}{\beta-\gamma} e^{\beta\frac{h}{2}} \left(\frac{e^{2\beta h} - 1}{\beta} - \frac{e^{2\gamma h} - 1}{\gamma} \right) \right\} = \frac{1}{\beta(\beta-\gamma)} \left\{ -e^{\beta(1-\varepsilon)h} + \frac{m e^{\beta\frac{h}{2}}}{\beta(\beta-\gamma)} (e^{\beta h} - 1)(e^{\beta h} - e^{\gamma h}) \right\}$$

$$= \frac{1}{\beta(\beta-\gamma)} \left(-e^{\beta(1-\varepsilon)h} + \frac{e^{\beta h}}{e^{\beta\varepsilon h}} \right) = 0.$$

Аналогично получаем, что $A_3 = 0$. Следовательно, из (3.16) для любой функции $f \in W_{\infty}^{\mathcal{L}^2}$ при $x \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ выводим неравенство

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma} m - 1 \right). \quad (3.18)$$

Из доказательства теоремы 2 следует, что полученное неравенство является точным, причем знак равенства в нем реализует любая функция f , являющаяся решением линейного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_2(D)f(t) = -1$, $t \in [(\varepsilon-1)h, (\varepsilon+1)h]$, где число ε определено формулой (1.2). Отсюда, а также из того факта, что оценка в правой части неравенства (3.18) не зависит от x , выводим утверждение теоремы 2.

4. Аппроксимация на отрезке

В разд. 2 был построен локальный L -сплайн на отрезке $[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$. При этом на отрезках $[\varepsilon h, \frac{h}{2}]$, $[(n - \frac{1}{2})h, \varepsilon h + nh]$ он был определен формулами (2.1), а при остальных $x \in [\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$ — формулой (1.1) при $l = 1, 2, \dots, n - 1$. Пусть $W_\infty^{\mathcal{L}^2}[a, b] = \{f : f' \in AC[a, b], \|\mathcal{L}_2(D)f\|_{L_\infty[a, b]} \leq 1\}$.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}^2}[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]} \|f - S\|_\infty = \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{m(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma} - 1 \right).$$

Доказательство. С учетом теоремы 2 для доказательства теоремы 3 мы должны вычислить погрешность аппроксимации функций $f \in W_\infty^{\mathcal{L}^2}[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$ на крайних отрезках $[\varepsilon h, \frac{h}{2}]$ и $[(n - \frac{1}{2})h, \varepsilon h + nh]$. Пусть $x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]$ (случай $x \in [(n - \frac{1}{2})h, \varepsilon h + nh]$ рассматривается аналогично). Функция $f \in W_\infty^{\mathcal{L}^2}[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$ может быть записана в виде

$$f(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{\gamma x} + \frac{1}{\beta - \gamma} \int_{\varepsilon h}^x (e^{\beta(x-t)} - e^{\gamma(x-t)}) u(t) dt, \quad (4.1)$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы и функция $u(t) = \mathcal{L}_2(D)f(t) = (D - \beta)(D - \gamma)f(t)$. Из (4.1) имеем

$$y_0 = f(\varepsilon h) = C_1 e^{\beta \varepsilon h} + C_2 e^{\gamma \varepsilon h},$$

$$y_1 = f((\varepsilon + 1)h) = C_1 e^{\beta(\varepsilon+1)h} + C_2 e^{\gamma(\varepsilon+1)h} + \frac{1}{\beta - \gamma} \int_{\varepsilon h}^{(\varepsilon+1)h} (e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)}) u(t) dt.$$

Подставляя значения y_0 и y_1 в (2.1), вычислим сумму (обозначим ее через A) неинтегральных членов у функции $S(x)$ при $x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]$. Имеем

$$A = \frac{1}{e^{\beta h} - e^{\gamma h}} \left\{ e^{\beta(x-\varepsilon h)} \left[(C_1 e^{\beta(\varepsilon+1)h} + C_2 e^{\gamma(\varepsilon+1)h}) - e^{\gamma h} (C_1 e^{\beta \varepsilon h} + C_2 e^{\gamma \varepsilon h}) \right] + e^{\gamma(x-\varepsilon h)} \left[(C_1 e^{\beta(\varepsilon+1)h} + C_2 e^{\gamma(\varepsilon+1)h}) - e^{\beta h} (C_1 e^{\beta \varepsilon h} + C_2 e^{\gamma \varepsilon h}) \right] \right\} = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{\gamma x}.$$

Из последнего равенства и равенства (4.1) следует, что неинтегральные слагаемые у функций $f(x)$ и $S(x)$ совпадают. Поэтому из (2.1) и (4.1) получаем, что при $x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} f(x) - S(x) &= \frac{1}{\beta - \gamma} \left[\int_{\varepsilon h}^x (e^{\beta(x-t)} - e^{\gamma(x-t)}) u(t) dt - \frac{e^{\beta(x-\varepsilon h)} - e^{\gamma(x-\varepsilon h)}}{e^{\beta h} - e^{\gamma h}} \int_{\varepsilon h}^{(\varepsilon+1)h} (e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)}) u(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{(\beta - \gamma)(e^{\beta h} - e^{\gamma h})} \left[\int_{\varepsilon h}^x \psi_1(x, t) u(t) dt + \int_x^{(\varepsilon+1)h} (-\psi_2(x, t)) u(t) dt \right], \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\psi_1(x, t) = (e^{\beta h} - e^{\gamma h}) (e^{\beta(x-t)} - e^{\gamma(x-t)}) - (e^{\beta(x-\varepsilon h)} - e^{\gamma(x-\varepsilon h)}) (e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)}),$$

$$\psi_2(x, t) = \left(e^{\beta(x-\varepsilon h)} - e^{\gamma(x-\varepsilon h)} \right) \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right).$$

Ясно, что при $x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]$ и $t \in [x, (\varepsilon+1)h]$ имеют место равенства

$$\text{sign} \left(e^{\beta(x-\varepsilon h)} - e^{\gamma(x-\varepsilon h)} \right) = \text{sign} (\beta - \gamma),$$

$$\text{sign} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) = \text{sign} (\beta - \gamma).$$

Поэтому при указанных x и t функция $\psi_2(x, t) \geq 0$. Докажем теперь, что $\psi_1(x, t) \leq 0$ при $x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]$ и $t \in [\varepsilon h, x]$. Имеем

$$\begin{aligned} \psi_1(x, t) &= A_1(x)e^{-\gamma t} + A_2(x)e^{-\beta t}, \\ A_1(x) &= e^{\beta h + \gamma x} \left(e^{(\beta-\gamma)(x-(\varepsilon+1)h)} - 1 \right), \\ A_2(x) &= e^{\beta x + \gamma h} \left(e^{(\gamma-\beta)(x-(\varepsilon+1)h)} - 1 \right). \end{aligned}$$

Из данных формул следует, что $A_1(x)A_2(x) < 0$ и, значит, одно из чисел $A_1(x)$ или $A_2(x)$ является отрицательным. Пусть для определенности таким числом является $A_1(x)$. Представим функцию $\psi_1(x, t)$ следующим образом

$$\psi_1(x, t) = e^{-\beta t} [A_1(x)\theta + A_2(x)],$$

где $\theta = e^{(\beta-\gamma)t}$. В последнем выражении сумма в квадратных скобках является линейной функцией по переменной θ , причем эта функция по θ убывает на всей числовой прямой, так как $A_1(x) < 0$. Поскольку $\psi_1(x, \varepsilon h) = 0$, то отсюда следует, что $\psi_1(x, t) \leq 0$ при всех $t \in [\varepsilon h, x]$ и $x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]$.

Из доказанных свойств функций $\psi_1(x, t)$ и $\psi_2(x, t)$ и неравенства $(\beta - \gamma)(e^{\beta h} - e^{\gamma h}) > 0$ следует, что для оценки уклонения $|f(x) - S(x)|$ на классе функций $W_\infty^{\mathcal{L}_2}[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$ функцию $u(t)$, фигурирующую в (4.2), можно заменить на -1 и затем вычислить соответствующие интегралы. Имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - S(x)| &\leq \frac{1}{\beta - \gamma} \int_{\varepsilon h}^x \left(e^{\gamma(x-t)} - e^{\beta(x-t)} \right) dt \\ &+ \frac{e^{\beta(x-\varepsilon h)} - e^{\gamma(x-\varepsilon h)}}{(e^{\beta h} - e^{\gamma h})(\beta - \gamma)} \int_{\varepsilon h}^{(\varepsilon+1)h} \left(e^{\beta((\varepsilon+1)h-t)} - e^{\gamma((\varepsilon+1)h-t)} \right) dt \\ &= \frac{1}{\beta - \gamma} \left[\frac{1 - e^{\beta(x-\varepsilon h)}}{\beta} - \frac{1 - e^{\gamma(x-\varepsilon h)}}{\gamma} - \frac{e^{\beta(x-\varepsilon h)} - e^{\gamma(x-\varepsilon h)}}{e^{\beta h} - e^{\gamma h}} \left(\frac{1 - e^{\beta h}}{\beta} - \frac{1 - e^{\gamma h}}{\gamma} \right) \right], \\ &x \in \left[\varepsilon h, \frac{h}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Функцию в правой части неравенства (4.3) обозначим через $g(x)$. Ясно, что $g(\varepsilon h) = 0$, $g(x) \geq 0$ при $x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]$ и $g'(x)$ имеет на всей числовой оси \mathbb{R} не более одного нуля. Элементарные вычисления показывают, что

$$g\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{m(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma} - 1 \right).$$

Заметим, что последняя формула также следует из определения сплайна $S(x)$ на отрезке $[\varepsilon h, \varepsilon h + nh]$ и точного неравенства (3.18). Кроме того, с учетом (1.2) легко проверяется, что $g'(\frac{h}{2}) = 0$. Поэтому функция $g(x)$ не убывает на отрезке $[\varepsilon h, \frac{h}{2}]$ и имеет место равенство

$$\max_{x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]} g(x) = g\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{m(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma} - 1 \right). \quad (4.4)$$

Из (4.3) и (4.4) выводим точное неравенство

$$\max_{x \in [\varepsilon h, \frac{h}{2}]} |f(x) - S(x)| \leq \frac{1}{\beta\gamma} \left(\frac{m(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma} - 1 \right),$$

в котором знак равенства при $x = \frac{h}{2}$ реализует любая функция f , удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}_2(D)f(t) = -1$, $t \in [\varepsilon h, (\varepsilon + 1)h]$. Теорема 3 доказана.

5. Связь с поперечниками

Обозначим $\widetilde{W}_\infty^{\mathcal{L}_2} = \left\{ f : f' \in AC, \|\mathcal{L}_2(D)f\|_\infty \leq 1 \right\}$ — класс функций периода 1, и пусть, как обычно,

$$d_n(\widetilde{W}_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = \inf_{L_n: \dim L_n \leq n} \sup_{f \in \widetilde{W}_\infty^{\mathcal{L}_2}} \inf_{\varphi \in L_n} \|f - \varphi\|_\infty$$

— n -й поперечник по Колмогорову класса $\widetilde{W}_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в равномерной метрике. Здесь, как и раньше, $\mathcal{L}_2(D)$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными действительными коэффициентами, а внешний \inf берется по всем подпространствам L_n размерности не выше n . Из результатов М.Г. Крейна [9], автора [10, 11] (там же см. библиографию по поперечникам) и И.Н. Володиной [12] применительно к оператору $\mathcal{L}_2(D) = (D - \beta)(D - \gamma)$ ($\beta \neq \gamma$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$) в случае 1-периодических функций вытекает следующее равенство

$$d_{2n-1}(\widetilde{W}_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = d_{2n}(\widetilde{W}_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = \frac{\max_{t \in [0,1]} |P(t)|}{(e^{\beta h} + 1)(e^{\gamma h} + 1)}, \quad (5.1)$$

где $h = \frac{1}{2n}$, $P(t) = \sum_{j=0}^3 (-1)^j \sum_{s=j}^3 (-1)^{s+1} \mu_s \varphi((s-j+1-t)h)$, $\varphi(t) = \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta(\beta-\gamma)} e^{\beta t} + \frac{1}{\gamma(\gamma-\beta)} e^{\gamma t}$, $\mu_0 = e^{(\beta+\gamma)h}$, $\mu_1 = e^{(\beta+\gamma)h} + e^{\beta h} + e^{\gamma h}$, $\mu_2 = e^{\beta h} + e^{\gamma h} + 1$, $\mu_3 = 1$. Выражение в правой части равенства (5.1) обозначим через $C = C(\beta, \gamma)$. После элементарных преобразований функция $P(t)$ может быть записана в виде

$$P(t) = - \left[\frac{1}{\beta\gamma} (e^{\beta h} + 1)(e^{\gamma h} + 1) + \frac{2}{\beta(\beta-\gamma)} (e^{\gamma h} + 1) e^{\beta(1-t)h} + \frac{2(e^{\beta h} + 1)}{\gamma(\gamma-\beta)} e^{\gamma(1-t)h} \right], \quad t \in [0, 1]. \quad (5.2)$$

Из [11] следует, что эта функция удовлетворяет условию $P(1) = -P(0)$ и имеет только одну точку экстремума на отрезке $[0, 1]$ (обозначим ее через α). Приравнявая к нулю производную функции $P(t)$, находим, что указанное число α является корнем уравнения

$$e^{(\beta-\gamma)(1-\alpha)h} = \frac{e^{\beta h} + 1}{e^{\gamma h} + 1},$$

т.е. $\alpha = 1 - \frac{1}{h(\beta-\gamma)} \ln \frac{e^{\beta h} + 1}{e^{\gamma h} + 1}$. Значит,

$$C = \frac{|P(\alpha)|}{(e^{\beta h} + 1)(e^{\gamma h} + 1)} = \frac{1}{(e^{\beta h} + 1)(e^{\gamma h} + 1)} \left[\frac{2e^{\beta(1-\alpha)h}}{\beta(\beta-\gamma)} (e^{\gamma h} + 1) + \frac{2e^{\gamma(1-\alpha)h}}{\gamma(\gamma-\beta)} (e^{\beta h} + 1) \right] - \frac{1}{\beta\gamma} \quad \left(h = \frac{1}{2n} \right).$$

Подставляя в эту формулу явное выражение для числа α , приходим к равенству

$$C = \frac{1}{\beta\gamma} \left[2 \frac{(e^{\beta h} + 1)^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}}{(e^{\gamma h} + 1)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}} - 1 \right] \quad \left(h = \frac{1}{2n} \right). \quad (5.3)$$

Отметим, что для 1-периодических функций f при $h = \frac{1}{2n}$ множество локальных L -сплайнов S , определенных формулой (1.1), является подпространством размерности $2n$ в пространстве непрерывных 1-периодических функций. Сравнивая в этом случае выражение для $C = d_{2n-1}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = d_{2n}(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$ из формулы (5.3) с величиной $E(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$ погрешности приближения класса $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в равномерной метрике, найденной в теореме 2, убеждаемся в том, что в общем случае (при произвольных числах β и γ , удовлетворяющих условиям $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\beta \neq \gamma$) указанные величины, вообще говоря, не совпадают. В соответствии с определением поперечника имеют место соотношения

$$C = \frac{1}{\beta\gamma} \left[2 \frac{(e^{\beta h} + 1)^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}}{(e^{\gamma h} + 1)^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}} - 1 \right] \leq E(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = \frac{1}{\beta\gamma} \left[\frac{m(e^{\beta h} - 1)(e^{\gamma h} - 1)}{\beta\gamma} - 1 \right]$$

$$(h > 0, \beta \neq 0, \gamma \neq 0, \beta \neq \gamma).$$

Пусть теперь оператор $\mathcal{L}_2(D)$ является формально самосопряженным. Это означает, что выполнено равенство $\gamma = -\beta$. Величина погрешности $E(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$ приближения локальными L -сплайнами в этом случае вычислена ранее в работе [2] К.В. Костоусова и В.Т. Шевалдина. В [2] отмечалось, что в периодическом случае эта величина совпадает с колмогоровским поперечником класса $\widetilde{W}_\infty^{\mathcal{L}_2}$ в равномерной метрике. Выясним при этом значения констант ε , m , α и C , исходя из общей схемы, предложенной в настоящей работе.

При $\gamma = -\beta$ из (1.2) и (1.3) следует, что $\varepsilon = 0$ и число m равно

$$m = 2\beta^2 e^{\beta \frac{h}{2}} \left((e^{\beta h} - 1)(e^{\beta h} - e^{-\beta h}) \right)^{-1}.$$

Величина погрешности $E(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty$, вычисленная в теореме 2, преобразуется к виду

$$E(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_\infty = \frac{(e^{\beta \frac{h}{2}} - 1)^2}{\beta^2 (e^{\beta h} - 1)}.$$

С другой стороны, из результатов, приведенных в начале данного параграфа, получаем, что $\alpha = \frac{1}{2}$, и после элементарных преобразований приходим к равенству

$$C = \frac{(e^{\beta \frac{h}{2}} - 1)^2}{\beta^2 (e^{\beta h} - 1)}.$$

З а м е ч а н и е 2. При $\beta = \gamma = 0$ теоремы 1–3 доказаны Ю.Н. Субботиным [1].

З а м е ч а н и е 3. При $\beta = -\gamma$ теоремы 1–2 доказаны в работе [2] К.В. Костоусовым и В.Т. Шевалдиным.

З а м е ч а н и е 4. Результаты, подобные доказанным в теоремах 1–3, имеют место и в случаях $\beta = 0$, $\gamma = 0$ и $\beta = \gamma$. Соответствующие теоремы могут быть получены предельным переходом или доказаны непосредственно.

З а м е ч а н и е 5. При $\beta = i\alpha$, $\gamma = -i\alpha$ ($\alpha > 0$, i — мнимая единица) аналогичные результаты по локальной аппроксимации получены К.В. Костоусовым и В.Т. Шевалдиным [3].

З а м е ч а н и е 6. На основе B - L -сплайнов с равномерными узлами в периодическом случае по формуле

$$SR(x) = \sum_{j=0}^{2n-1} \frac{B(x-jh)w_j}{\sum_{k=0}^{2n-1} B(x-kh)w_k} y_j \quad \left(h = \frac{1}{2n}, w_j > 0, f((j+\varepsilon)h) = y_j \right)$$

для произвольной функции $f(x)$ могут быть построены локальные рациональные L -сплайны с равномерными узлами $\{jh\}_{j \in \mathbb{Z}}$, являющиеся обобщениями классических параболических NURBSов (определение и свойства см., например, в [13]).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
2. **Kostousov K.V., Shevaldin V.T.** Approximation by Local Exponential Splines // Proc. of the Steklov Inst. of Math., Suppl. 1. 2004. P. S147–S157.
3. **Костоусов К.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 3. С. 354–363.
4. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.
5. **ter Morsche H.G.** Interpolation and extremal properties of L -splines functions. Dissertation. Technische Hogeschool Eindhoven. Eindhoven, 1982.
6. **Schumaker L.L.** Spline Functions: Basic Theory. New York: Wiley Interscience, 1981.
7. **Квасов Б.И.** Изогеометрическая аппроксимация сплайнами. Учебн. пособие. Новосибирск: Новосибирский ун-т, 1998.
8. **Шарма А., Цимбаларио И.** Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Мат. заметки. 1977. Т. 21, № 2. С. 161–173.
9. **Крейн М.Г.** К теории наилучшего приближения периодических функций // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18, № 4–5. С. 603–607.
10. **Шевалдин В.Т.** L -сплайны и поперечники // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 5. С. 735–744.
11. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИ АН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.
12. **Volodina I.N.** Exact value of widths of certain class of solutions of linear differential equations // Analysis Math. 1985. V. 11, no. 1. P. 85–92.
13. **Piegl L., Tiller W.** The NURBS Book. Berlin: Springer, 1997.

S. N. Avvakumov, Yu. N. Kiselev. **Some Algorithms of Optimal Control.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 3–17.

In the first part of the paper, we describe the method of continuation with respect to a parameter in solution algorithms for nonlinear boundary value problems in ordinary differential equations. We present results of numerical experiments solving boundary value problems, including boundary value problems arising in optimal control theory. The parameter variation scheme (the continuation method) can be considered as a special development and modification of the classical Newton method. The basic idea of this approach can be shortly formulated as *reducing a boundary value problem to a Cauchy problem*. Regarding a Cauchy problem as an elementary operation, we arrive at a compact description of the algorithm of solving a boundary value problem by means of the method of continuation with respect to a parameter. The interest in this research area is related to studying numerical algorithms of solving the linear time-optimal control problem and is aimed at boundary problems of the maximum principle. We have developed a program BVP, which solves in the Maple environment regular boundary value problems for ordinary differential equations, some boundary value problems of the maximum principle arising in optimal control, problems of finding periodic solutions and limit cycles, and so on. In the second part of the paper, we describe a simple algorithm of constructing attainability (controllability) sets in plane linear controlled systems and give some examples of using it. The algorithm is based on parametric equations of the boundary of a plane strictly convex compact set given by its support function. This approach allows one to construct two-dimensional projections of attainability sets for multidimensional linear controlled systems. In the third part of the paper, we present sufficient optimality conditions for nonlinear controlled systems in terms of constructions of the Pontryagin maximum principle.

A. Yu. Vdovin, A. V. Kim, S. S. Rubleva. **On Asymptotic Accuracy in L_1 of a Dynamical Algorithm for Reconstructing a Disturbance** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 18–26.

In the paper, a modification of the dynamical algorithm by Yu.S. Osipov and A.V. Kryazhinskii is suggested. This modification possesses in the space L_1 an asymptotic order of accuracy arbitrarily close to $1/2$. A possibility to attain this order in the class of finite-step dynamical algorithms is considered.

R. Gabasov, N. M. Dmitruk, F. M. Kirillova. **Optimal Guaranteed Control of Delay Systems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 27–46.

A linear problem of optimal guaranteed control of a delay system is considered in which geometric constraints on control actions and terminal constraints on states are present. A new concept of a state of the problem that represents a finite-dimensional vector is introduced. Three kinds of optimal feedback are defined. We describe methods for implementing open-loop and closable optimal feedbacks. They are based on a fast dual method for the correction of optimal programs. The results are illustrated by examples.

I. V. Gaishun. **Asymptotic Estimation of States of Linear Nonautonomous Systems with Scalar Output.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 47–52.

For a linear nonautonomous system with one output, the existence conditions for an identifier that estimates the current state with exponential rate are established. An algorithm for constructing such an identifier is described and its dependence on small perturbations of coefficients is studied.

V. L. Gasilov, V. B. Kostousov, A. P. Kukushkin. **Identification of the State of a Moving Object by Observation of Geophysical Fields.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 53–63.

Problems of identification of the state of a moving object by observation of the geophysical fields are considered. To correct the errors accumulated in the inertial navigation system of the object, the extremal comparison of the information about the outer geophysical fields with the a priori information about them stored in the onboard computer is used (the correlation-extremal approach). The general principles for investigation of the systems for navigation of moving objects by the outer informational fields are described. A model of navigation by the geophysical field and a method for a priori estimation of the local informativeness of the field are suggested.

M. I. Gusev. **Error Bounds for Attainability Sets of Control Systems with Phase Constraints.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 64–77.

The problem of the error bounds for attainability sets of control systems described by ordinary differential equations under discretization of the phase constraints is studied. The peculiarity of the problems investigated in this paper is the phase constraints in the form of equality.

Yu. F. Dolgii. **Application of Self-Adjoint Boundary Value Problems to Investigation of Stability of Periodic Delay Systems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 13, no. 2. P. 78–87.

The problem on determining conditions for the asymptotic stability of linear periodic delay systems is considered. Solving this problem, we use the function space of states. Conditions for the asymptotic stability are determined in terms of the spectrum of the monodromy operator. To find the spectrum, we construct a special boundary value problem for ordinary differential equations. The motion of eigenvalues of this problem is studied as the parameter changes. Conditions of the stability of the linear periodic delay system change when an eigenvalue of the boundary value problem intersects the circumference of the unit disk. We assume that, at this moment, the boundary value problem is self-adjoint. Sufficient coefficient conditions for the asymptotic stability of linear periodic delay systems are given.

A. I. Korotkii, D. A. Kovtunov. **Reconstruction of Boundary Regimes in the Inverse Problem of Thermal Convection of a High-Viscosity Fluid.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 88–97.

A problem of reconstruction of boundary regimes in a model for free convection of a high-viscosity fluid is considered. A variational method and a quasi-inversion method are suggested for solving the problem in question. The variational method is based on the reduction of the original inverse problem to some equivalent variational minimum problem for an appropriate objective functional and solving this problem by a gradient method. When realizing the gradient method for finding a minimizing element of the objective functional, an iterative process actually reducing the original problem to a series of direct well-posed problems is organized. For the quasi-inversion method, the original differential model is modified by means of introducing special additional differential terms of higher order with small parameters as coefficients. The new perturbed problem is well-posed; this allows one to solve this problem by standard methods. An appropriate choice of small parameters gives an opportunity to obtain acceptable qualitative and quantitative results in solving the inverse problem. A comparison of the methods suggested for solving the inverse problem is made with the use of model examples.

V. M. Kuntsevich. **Analysis of Stability and Synthesis of Stable Control Systems for a Class of Nonlinear Nonstationary Systems.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 98–107.

On the basis of sufficient condition of the stability of linear nonstationary discrete systems stated in this paper, we carry out an analysis of stability for a special class of discrete systems with nonstationary linear part, whose parameters satisfy constraints in the form of sets, and with a scalar nonlinear function satisfying linear or nonlinear restrictions. The problem of parametric synthesis of robustly stable control systems is solved for the same class of objects. The obtained results are generalized to the class of nonstationary systems with many nonlinearities of the same type.

N. Yu. Lukoyanov. **Differential Inequalities for a Nonsmooth Value Functional in Control Systems with an Aftereffect.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 108–118.

Functional differential inequalities, uniquely describing the optimal guaranteed result, are obtained for a control system with aftereffect, in the presence of disturbances. Specific forms of these inequalities are given for typical particular cases.

A. S. Mart'yanov. **Estimates of the Convergence Rate for a Dynamical Reconstruction Algorithm.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 119–128.

For an algorithm of dynamical approximation of an unknown input, constructive (the most relevant in respect to practical application) accuracy estimates are obtained. To provide a complete idea of an algorithm's effectiveness, one should give not only an upper estimate of its accuracy, but also a lower estimate. The case when the upper and lower estimates have the same order (with respect to the indicator of observation accuracy) is the most informative. The aim of the paper is to obtain estimates of this kind.

A. A. Melikyan. **Necessary Optimality Conditions for Different Phase Portraits in a Neighborhood of a Singular Arc.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 129–141.

An optimal control problem with scalar control is characterized by two Hamiltonians related to boundary values of the control parameter. Intermediate (internal) values of the control and the corresponding singular trajectories (arcs) can be constructed in terms of these two Hamiltonians using Poisson brackets. All multiple Poisson brackets using these Hamiltonians two, three, and four times vanish on a singular arc of the second order and the brackets with five Hamiltonians in general differ from zero. There exist six different multiple Poisson brackets in which Hamiltonians are used five times. A regular arc in the optimal phase portrait is linked with a singular arc after one, several, or infinitely many (Fuller phenomenon) switchings. In the paper it is shown that various collections of the signs for these six quantities— multiple Poisson brackets— correspond to the above-mentioned cases. There exist four different collections of the signs for the set consisting of six Poisson brackets. The singularity including a universal surface is investigated for the general case, whereas two other types of singularities are studied in particular examples.

M. S. Nikol'skii. **Investigation of Some Control Models.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 142–151.

Three simplified models of quarrying are considered. The first and third models are extremal, and the second is described in terms of a differential game. For each of the models, sufficient conditions on the parameters of the problem are obtained that guarantee a simple form of the optimal control. Pontryagin's maximum principle and the theory of positional differential games, elaborated by N.N. Krasovskii and his school, are used.

V. G. Romanov. **Estimate of Solution Stability in a Two-Dimensional Inverse Problem for Elasticity Equations.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 152–161.

The problem of determining the density of the medium and one of its elasticity moduli is considered. Properties of the elastic medium and external forces are assumed to be independent of the coordinate x_3 . In this case, the third component of the displacement vector satisfies a scalar equation of the second order, which contains the density ρ of the medium and elasticity modulus μ as coefficients. The parameters ρ and μ are known to be positive and constant everywhere outside some compact domain $D \subset \mathbb{R}^2$, but they are unknown inside D . The problem of determining these coefficients in D via information, given on the boundary of the domain D for some finite time interval, about a solution of two direct problems is considered. An estimate of the conditional stability of a solution of the inverse problem under consideration is established.

V. A. Sadovnichii, V. E. Podol'skii. **Regularized Traces of Discrete Operators.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 162–177.

Unbounded perturbations of discrete operators are considered. Formulas for regularized traces are obtained, in which a finite number of corrections of the perturbation theory are used. An exact relation is established between the degree of subordination of a perturbation to the unperturbed operator and the number of corrections necessary for the existence of a finite formula of the trace. New estimates for the kernel norm of a resolvent of discrete operators are obtained.

V. N. Ushakov, Ya. A. Latushkin. **The Stability Defect of Sets in Game Control Problems** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 178–194.

The stability property in a game problem of the approach of a conflict-controlled system to a goal set at a fixed terminal moment is investigated. The notion of a stability defect is introduced for sets in the space of game positions.

V. T. Shevaldin. **Approximation by Local L -splines Corresponding to a Linear Differential Operator of the Second Order.** Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN. 2006. Vol. 12, no. 2. P. 195–213.

For the class of functions $W_\infty^{\mathcal{L}_2} = \{f : f' \in AC, \|\mathcal{L}_2(D)f\|_\infty \leq 1\}$, where $\mathcal{L}_2(D)$ is a linear differential operator of the second order whose characteristic polynomial has only real roots, we construct a noninterpolating linear positive method of exponential spline approximation possessing extremal and smoothing properties and locally inheriting the monotonicity of the initial data (the values of a function $f \in W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ at the points of a uniform grid). The approximation error is calculated exactly for this class of functions in the uniform metric.

Научное издание

ТРУДЫ
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Сборник научных трудов

*Рекомендовано к изданию Ученым советом
Института математики и механики
и НИСО Уральского отделения Российской академии наук*

ЛР № 020764 от 24.04.98

Ответственные за выпуск: В. И. Максимов, Б. В. Дигас

Оригинал-макет подготовлен в ИММ УрО РАН

НИСО УрО РАН № 17(07).
Подписано к печати 21.12.06. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 26,875. Уч.-изд. л. 16,25. Тираж 200 экз. Заказ 44.

Институт математики и механики УрО РАН
620219 г. Екатеринбург, ГСП-384, ул. С. Ковалевской, 16

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
“Уральский центр академического обслуживания”.
620219, г. Екатеринбург, ул. Первомайская, 91