

## АННОТАЦИИ НА РУССКОМ И АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКАХ

НИНА НИКОЛАЕВНА СУББОТИНА (К юбилею) .....	5
ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ УШАКОВ (К 70-летию юбилею) .....	8
<b>А. А. Азамов, М. А. Бекимов.</b> Дискретная модель процесса теплообмена во вращающихся регенеративных воздухоподогревателях .....	12

В работе предлагается математическая модель процесса теплообмена во вращающемся регенеративном воздухоподогревателе тепловых электростанций. Модель получена дискретизацией процесса в результате усреднения как временной, так и пространственных переменных. При наложении на процесс ряда упрощающих предположений составлена линейная дискретная система  $z(n+1) = Az(n) + r(n)$  порядка  $2m$  с мономиальной матрицей  $A = (a_{ij})$  размера  $(2m \times 2m)$ , в которой  $a_{ij} = \alpha_i$  при  $i = 1, j = 2m$  и при  $i = 2, \dots, 2m, j = i - 1$ , а все остальные элементы равны 0. С использованием соотношения  $A^{2m} = \left(\prod_{i=1}^{2m} \alpha_i\right)E$  и формулы Коши изучены устойчивость, периодичность, сходимости средних по Чезаро и другие свойства. Далее, рассмотрена задача идентификации системы, состоящая в определении коэффициентов  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, 2m$ , на основе значений  $z(1), z(2), \dots, z(2m)$ . В предположении  $r(n) = r = \text{const}$  при  $n = 1, 2, \dots, 2m$  она приведена к матричному уравнению  $AY = B$ , где квадратная матрица  $Y$  составлена из столбцов  $y_1 = t = r - (E - A)z_0, y_2 = Ay_1 + t, \dots, y_{2m} = Ay_{2m-1} + t$ , а  $B = [t - y_2, t - y_3, \dots, t - y_{2m-1}]$ . Выведена рекуррентная формула для  $\det Y$ . Установлено, что если  $\Delta = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m - \alpha_{m+1}\alpha_{m+2} \dots \alpha_{2m} \neq 0$ , то  $\det Y \neq 0$  и  $A = BY^{-1}$ .

Ключевые слова: процесс теплообмена, мономиальная матрица, усреднение, линейное дискретное уравнение, формула Коши, установившийся режим, периодический режим, средние Чезаро, задача идентификации.

A. A. Azamov, M. A. Bekimov. A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters.

We propose a mathematical model of the heat transfer process in a rotating regenerative air preheater of a thermal power plant. The model is obtained by discretizing the process as a result of averaging both temporal and spatial variables. Making a number of simplifying assumptions, we write a linear discrete system  $z(n+1) = Az(n) + r(n)$  of order  $2m$  with a monomial  $2m \times 2m$  matrix  $A = (a_{ij})$  in which  $a_{ij} = \alpha_i$  for  $i = 1, j = 2m$  and for  $i = 2, \dots, 2m, j = i - 1$ , whereas all the other elements are zero. Using the relation  $A^{2m} = \left(\prod_{i=1}^{2m} \alpha_i\right)E$  and the Cauchy formula, we study the stability, periodicity, and convergence of the Cesàro means and other properties. We also consider the identification problem consisting in finding unknown coefficients  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, 2m$ , from the values  $z(1), z(2), \dots, z(2m)$  of the trajectory. Under the assumption  $r(n) = r = \text{const}$  for  $n = 1, 2, \dots, 2m$ , we transform the problem to the matrix equation  $AY = B$ , where the square matrix  $Y$  is composed of the columns  $y_1 = t = r - (E - A)z_0, y_2 = Ay_1 + t, \dots, y_{2m} = Ay_{2m-1} + t$  and  $B = [t - y_2, t - y_3, \dots, t - y_{2m-1}]$ . A recurrence relation is derived for  $\det Y$ . It is proved that, if  $\Delta = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m - \alpha_{m+1}\alpha_{m+2} \dots \alpha_{2m} \neq 0$ , then  $\det Y \neq 0$  and  $A = BY^{-1}$ .

Keywords: heat transfer process, cyclic process, monomial matrix, averaging, linear discrete equation, Cauchy formula, steady state behavior, periodic mode, Cesàro mean, identification.

MSC: 65Q10, 65F40, 80A20, 97M50

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-12-19

**И. М. Ананьевский, Т. А. Ишханян.** Управление платформой с осцилляторами в присутствии сухого трения ..... 20

Исследуется локальная задача управления системой, состоящей из несущего твердого тела и нескольких прикрепленных к нему линейных диссипативных осцилляторов. Несущее тело перемещается по горизонтальной прямой с помощью горизонтальной управляющей силы. Рассматриваемая система представляет собой простое приближение к модели, описывающей управляемые перемещения сосуда с вязкой жидкостью. Состояние жидкости в сосуде в каждый момент времени неизвестно, поэтому физические параметры осцилляторов и их фазовые состояния также считаются неизвестными. Предполагается, что между несущим телом и прямой действует сила сухого трения, параметры которого неизвестны и непостоянны. Требуется остановить несущее тело в заданном терминальном положении и удерживать его там, при этом на поведение осцилляторов после остановки тела условий не накладывается. Предложен закон ограниченного по модулю управления в форме обратной связи, который приводит несущее тело из окрестности терминального положения в это положение за конечное время. Управление задается гладкой (аналитической) всюду, кроме терминального состояния, функцией, которая может трактоваться как линейная обратная связь с коэффициентами, зависящими от фазовых переменных. Эти коэффициенты бесконечно возрастают при приближении несущего тела к терминальному состоянию, однако управление остается ограниченным. Эффективность управления продемонстрирована с помощью численного моделирования.

Ключевые слова: линейная управляемая система, система осцилляторов, обратная связь, сухое трение.

I. M. Anan'evskii, T. A. Ishkhanyan. Control of a platform with oscillators under the action of dry friction.

We study a local control problem for a system consisting of a solid carrier and several linear dissipative oscillators attached to it. The carrier moves along a horizontal straight line under a horizontal steering force. The system is a simple approximation of a model describing controlled motions of a vessel with a viscous fluid. Since the state of the fluid in the vessel is unknown at any specific time, the physical parameters of the oscillators and their phase states are also considered unknown. It is assumed that a dry friction force acts between the carrier and the straight line, and the parameters of the dry friction are unknown and varying. It is required to bring the carrier to a stop at a given terminal position and to keep it at that position; no constraints are imposed on the behavior of the oscillators after the carrier stops. We propose a feedback control law with bounded absolute value that brings the carrier from a neighborhood of the terminal position to this position in a finite time. The control is given by a function that is smooth (analytic) everywhere except for the terminal position. This function can be interpreted as a linear feedback with coefficients depending on the state variables. Although the coefficients grow unboundedly as the carrier approaches the terminal position, the control remains bounded. The efficiency of the control is illustrated by means of numerical modelling.

Keywords: linear control system, system of oscillators, feedback, dry friction.

MSC: 93C41, 93C05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-20-26

**С. М. Асеев.** Оптимизация динамики управляемой системы при наличии факторов риска ..... 27

Рассматривается задача оптимизации динамики управляемой системы в ситуации, когда в фазовом пространстве  $\mathbb{R}^n$  задано некоторое множество  $M$  ("зона риска") нахождение в котором

возможно, но нежелательно с точки зрения безопасности системы или в силу неустойчивости ее функционирования. В классической теории оптимального управления наличие такого нежелательного множества  $M$  обычно моделируется при помощи задания дополнительного фазового ограничения, что означает запрет на нахождение траекторий системы в зоне риска  $M$ . В случае, когда динамика системы описывается автономным дифференциальным включением, а зона риска  $M$  — открытое множество, для соответствующей задачи оптимального управления при помощи метода аппроксимаций получены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме гамильтонова включения Кларка. Основная новизна полученного результата состоит в том, что он доказан для наиболее важного случая, когда множество  $M$  открыто. В этом случае имеется естественная связь рассматриваемой задачи с классической задачей оптимального управления с фазовым ограничением. Полученные необходимые условия оптимальности включают нестандартное дополнительное условие стационарности гамильтониана.

Ключевые слова: зона риска, фазовые ограничения, оптимальное управление, дифференциальное включение, гамильтоново включение, принцип максимума Понтрягина.

S. M. Aseev. Optimization of dynamics of a control system in the presence of risk factors.

The paper is concerned with the problem of optimization of dynamics of a control system in the situation when there is a set  $M$  (“risk zone”) in the state space  $\mathbb{R}^n$  which is unfavorable due to reasons of safety or instability of the system. In the classical setting the presence of such unfavorable set  $M$  is modeled usually via introducing an additional state constraint in the problem that means the ban on the presence of the trajectories in the risk zone  $M$ . Necessary optimality conditions in the form of Clarke’s Hamiltonian inclusion are developed for the corresponding optimal control problem in the case when the system’s dynamics is described by an autonomous differential inclusion and the risk zone  $M$  is an open set. The main novelty of the result is that it is proved in the most important case when the risk zone  $M$  is an open set. There is a natural relation of the problem under consideration to the classical optimal control problem with state constraints in this case. The result obtained involves an additional nonstandard stationarity condition for the Hamiltonian.

Keywords: risk zone, state constraints, optimal control, differential inclusion, Hamiltonian inclusion, Pontryagin maximum principle.

MSC: 49KXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-27-42

**А. Л. Багно, А. М. Тарасьев.** Свойства стабильности функции цены в задаче оптимального управления с бесконечным горизонтом. . . . . 43

В статье исследуется функция цены в задаче оптимального управления на бесконечном горизонте с подынтегральным индексом, входящим в функционал качества с дисконтирующим множителем. Проведен анализ ее свойств для случая, когда функционал платы управляемой системы содержит индекс качества, который представлен неограниченной функцией. Дана верхняя оценка роста функции цены. Получены необходимые и достаточные условия, при которых функция цены обладает свойствами стабильности в инфинитезимальной форме. Рассмотрен вопрос о совпадении функции цены с обобщенным минимаксным решением уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса. Показана единственность соответствующего минимаксного решения. Дано описание асимптотики роста функции цены для функционалов качества логарифмического, степенного и экспоненциального видов, встречающихся в экономическом и финансовом моделировании. Полученные результаты могут быть использованы для построения сеточных методов аппроксимации функции цены как обобщенного минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса. Эти методы являются эффективными средствами в моделировании процессов экономического роста.

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнение Гамильтона — Якоби, минимаксное решение, бесконечный горизонт, функция цены, свойства стабильности.

A. L. Bagno, A. M. Tarasyev. Stability properties of the value function in an infinite horizon optimal control problem.

Properties of the value function are examined in an infinite horizon optimal control problem with an integrand index appearing in the quality functional with a discount factor. The properties are analyzed in the case when the payoff functional of the control system includes a quality index represented by an unbounded function. An upper estimate is given for the growth rate of the value function. Necessary and sufficient conditions are obtained to ensure that the value function satisfies the infinitesimal stability properties. The question of coincidence of the value function with the generalized minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation is discussed. The uniqueness of the corresponding minimax solution is shown. The growth asymptotic behavior of the value function is described for the logarithmic, power, and exponential quality functionals, which arise in economic and financial modeling. The obtained results can be used to construct grid approximation methods for the value function as the generalized minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation. These methods are effective tools in the modeling of economic growth processes.

Keywords: optimal control, Hamilton–Jacobi equation, minimax solution, infinite horizon, value function, stability properties.

MSC: 49K15, 49L25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-43-56

**В. В. Васин, А. Ф. Скурыдина.** Двухэтапный метод построения регуляризующих алгоритмов для нелинейных некорректных задач ..... 57

Для уравнения с нелинейным дифференцируемым оператором, действующим в гильбертовом пространстве, исследуется двухэтапный метод построения регуляризующего алгоритма. А именно сначала используется схема регуляризации Лаврентьева, а затем к регуляризованному уравнению применяется метод Ньютона, либо нелинейные аналоги  $\alpha$ -процессов: метод минимальной ошибки, метод минимальной невязки и метод наискорейшего спуска. Для этих процессов устанавливается линейная скорость сходимости и свойство фейеровости итераций. Рассматриваются два случая: оператор задачи является либо монотонным, либо оператор - конечномерный, производная которого имеет неотрицательный спектр. Для двухэтапного метода с монотонным оператором дается оценка погрешности, оптимальная по порядку на классе истокообразно представимых решений. Для второго случая погрешность метода оценивается по невязке. Обсуждаются результаты численного эксперимента при реализации исследуемых методов и их модифицированных аналогов для трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии.

Ключевые слова: схема регуляризации Лаврентьева, метод Ньютона, нелинейные  $\alpha$ -процессы, двухэтапный метод, обратные задачи гравиметрии и магнитометрии.

V. V. Vasin, A. F. Skurydina. A two-stage method of construction of regularizing algorithms for nonlinear ill-posed problems.

For an equation with a nonlinear differentiable operator acting in a Hilbert space, we study a two-stage method of construction of a regularizing algorithm. First, we use Lavrientiev’s regularization scheme. Then, we apply to the regularized equation either Newton’s method or nonlinear analogs of  $\alpha$ -processes: the minimum error method, the minimum residual method, and the steepest descent method. For these processes we establish the linear convergence rate and the Fejér property of iterations. Two cases are considered: when the operator of the problem is monotone and when the operator is finite-dimensional and its derivative has nonnegative spectrum. For the two-stage method with a monotone operator, we give an error bound, which has optimal order on the class of sourcewise representable solutions. In the second case, the error of the method is estimated by means of the residual. The proposed methods and their modified analogs are implemented numerically for three-dimensional inverse problems of gravimetry and magnetometry. The results of the numerical

experiment are discussed.

Keywords: Lavrentiev regularization scheme, Newton's method, nonlinear  $\alpha$ -processes, two-stage algorithm, inverse gravimetry and magnetometry problems.

MSC: 65J15, 65J20, 45L05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-57-74

**М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов.** К вопросу численного решения дифференциальных игр для линейных систем нейтрального типа..... 75

В статье рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается линейными функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа, а показатель качества состоит из двух слагаемых: первое оценивает историю движения системы, сформировавшуюся к терминальному моменту времени, второе представляет собой интегрально-квадратичную оценку соответствующих реализаций управлений игроков. Для вычисления цены и построения оптимальных законов управления в этой дифференциальной игре предлагается подход, основанный на решении подходящей вспомогательной дифференциальной игры, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается уже при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, а показатель качества содержит оценку движения только в терминальный момент времени. Для нахождения цены и седловой точки во вспомогательной дифференциальной игре используется так называемый метод выпуклых сверху оболочек, который в рассматриваемом случае в силу определенной структуры показателя качества и геометрических ограничений на управляющие воздействия игроков приводит к эффективному решению. Работоспособность предложенного подхода иллюстрируется на примере, представлены результаты численных экспериментов. При этом построенные оптимальные законы управления сравниваются с разработанными авторами ранее процедурами оптимального управления с конечномерными аппроксимирующими поводьями.

Ключевые слова: дифференциальные игры, системы нейтрального типа, оптимальные стратегии управления, численные методы.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems.

The paper deals with a zero-sum differential game, in which the dynamic of a conflict-controlled system is described by linear functional differential equations of neutral type and the quality index is the sum of two terms: the first term estimates the history of motion of the system realized by the terminal time, and the second term is an integral-quadratic estimation of the corresponding realizations of the players' controls. To calculate the value and construct the optimal control laws in this differential game, we propose an approach based on solving a suitable auxiliary differential game, in which the motion of a conflict-controlled system is described by ordinary differential equations and the quality index contains an estimation of the motion at the terminal time only. To find the value and the saddle point in the auxiliary differential game, we apply the so-called upper convex hull method, which leads to an effective solution in the case under consideration due to the specific structure of the quality index and the geometric constraints on the control actions of the players. The efficiency of the approach is illustrated by an example, and the results of numerical simulations are presented. The constructed optimal control laws are compared with the optimal control procedures with finite-dimensional approximating guides, which were developed by the authors earlier.

Keywords: differential games, neutral-type systems, optimal control strategies, numerical methods.

MSC: 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-75-87

**В. В. Гороховик.** О представлении полунепрерывных сверху функций, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах, в виде нижних огибающих семейств выпуклых функций ..... 88

Известно, что вещественнозначная функция, определенная на метрическом пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) в том и только том случае, когда она является нижней (верхней) огибающей некоторого семейства непрерывных функций. В статье для функций, определенных на вещественных нормированных пространствах, этот классический результат уточняется следующим образом: ограниченная сверху (снизу) вещественнозначная функция, определенная на нормированном пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) тогда и только тогда, когда она может быть представлена как нижняя (верхняя) огибающая семейства выпуклых (вогнутых) функций, удовлетворяющих на всем пространстве условию Липшица. Показано, что для положительно однородных функций требование ограниченности сверху (снизу) может быть опущено: положительно однородная функция, определенная на нормированном пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) в том и только том случае, когда она является нижней (верхней) огибающей семейства непрерывных сублинейных (суперлинейных) функций. Данная характеристика распространяется на произвольные нормированные пространства аналогичное утверждение, ранее доказанное В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым для положительно однородных функций, определенных на конечномерных пространствах, и распространенное А. Удерзо на случай равномерно выпуклых банаховых пространств. Этот результат позволяет распространить на негладкие функции, определенные на нормированных пространствах, понятия верхнего и нижнего экзостеров, введенные в конечномерных пространствах В. Ф. Демьяновым.

Ключевые слова: полунепрерывные функции, верхние и нижние огибающие, выпуклые и вогнутые функции, условие Липшица, положительно однородные функции.

V. V. Gorokhovich. On the representation of upper semicontinuous functions defined on infinite-dimensional normed spaces as lower envelopes of families of convex functions.

It is well known that a real-valued function defined on a metric space is upper (lower) semicontinuous if and only if it is a lower (upper) envelope of a family of continuous functions. In this paper, for functions defined on real normed spaces, this classical result is refined as follows. An upper (lower) bounded real-valued function defined on a normed space is upper (lower) semicontinuous if and only if it can be represented as a lower (upper) envelope of a family of convex (concave) functions that satisfy the Lipschitz condition on the whole space. It is shown that the requirement of upper (lower) boundedness may be omitted for positively homogeneous functions: a positively homogeneous function defined on a normed space is upper (lower) semicontinuous if and only if it is a lower (upper) envelope of a family of continuous sublinear (superlinear) functions. This characterization extends to arbitrary normed spaces a similar statement proved earlier by V. F. Demyanov and A. M. Rubinov for positively homogeneous functions defined on finite-dimensional spaces and later extended by A. Uderzo to the case of uniformly convex Banach spaces. The latter result allows to extend the notions of upper and lower exhausters introduced by V. F. Demyanov in finite-dimensional spaces to nonsmooth functions defined on arbitrary real normed spaces.

Keywords: semicontinuous functions, upper and lower envelopes, convex and concave functions, Lipschitz continuity, positively homogeneous functions.

MSC: 49J52, 54C35, 26B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-88-102

**М. И. Гусев, И. В. Зыков.** Об экстремальных свойствах граничных точек множеств достижимости управляемых систем при интегральных ограничениях ..... 103

Известно, что управление, переводящее траекторию управляемой системы на границу множества достижимости, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Этот факт справед-

лив для систем с поточечными ограничениями на управление. В данной работе мы рассматриваем систему с интегральными квадратичными ограничениями. Рассматриваемая управляемая система нелинейна по фазовым переменным и линейна по управлению. Показано, что любое допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления с интегральным квадратичным функционалом, если соответствующая линеаризованная система вполне управляема. Доказательство данного факта опирается на теорему Грейвса для накрывающих отображений. Отсюда следует принцип максимума для управлений, ведущих на границу множества достижимости. В работе обсуждается также алгоритм построения множества достижимости, основанный на принципе максимума.

Ключевые слова: Управляемая система, интегральные ограничения, множество достижимости, принцип максимума.

M. I. Gusev, I. V. Zikov. On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints.

It is well known that any control that steers the trajectory of a control system to the boundary of the reachable set satisfies the Pontryagin maximum principle. This fact is valid for systems with pointwise constraints on the control. We consider a system with quadratic integral constraints on the control. The system is nonlinear in the state variables and linear in the control. It is shown that any admissible control that steers the system to the boundary of its reachable set is a local solution of some optimal control problem with integral quadratic functional if the corresponding linearized system is completely controllable. The proof of this fact is based on the Graves theorem on covering mappings. This implies the maximum principle for the controls that steer the trajectories to the boundary of the reachable set. We also discuss an algorithm for constructing the reachable set based on the maximum principle.

Keywords: control system, integral constraints, reachable set, maximum principle.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-103-115

**А. Гусейин, Н. Гусейин, Х. Г. Гусейнов.** Аппроксимация сечений множества траекторий управляемой системы с ограниченными ресурсами управлений ..... 116

Изучается аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Урысона. Предполагается, что ресурс управлений системой является ограниченным. Замкнутый шар пространства  $L_p$ ,  $p > 1$ , с радиусом  $r$  и центром в начале координат выбирается в качестве множества допустимых управлений. Шаг за шагом множество допустимых управлений заменяется множеством, которое состоит из конечного числа управляющих функций и порождает конечное число траекторий. Доказывается, что сечения множества траекторий могут быть аппроксимированы с сечениями множества, состоящего из конечного числа траекторий.

Интегральное уравнение Урысона, управляемая система, интегральное ограничение, множество траекторий, аппроксимация.

A. Huseyin, N. Huseyin, Kh. Guseinov. Approximation of sections of the set of trajectories for a control system with bounded control resources.

The approximation of the set of trajectories is studied for a control system described by the Urysohn integral equation. It is assumed that the system has limited control resources. The closed ball of the space  $L_p$ ,  $p > 1$ , with radius  $r$  centered at the origin is chosen as the set of admissible control functions. The set of admissible control functions is replaced step by step by a set that consists of a finite number of control functions and generates a finite number of trajectories. It is proved that sections of the set of trajectories can be approximated by sections of a set consisting of a finite number of trajectories.

Keywords: Urysohn integral equation, control system, integral constraint, set of trajectories, approximation.

MSC: 93B03, 49M25, 65R20, 45G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-116-127

**А. Р. Данилин.** Асимптотика решения сингулярной задачи оптимального распределенного управления в выпуклой области ..... 128

Рассматривается задача оптимального распределенного управления в плоской выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при старших производных эллиптического оператора. На границе области в этой задаче задано нулевое условие Дирихле, а управление аддитивно входит в неоднородность. В качестве множества допустимых управлений используется единичный шар в соответствующем пространстве функций, суммируемых с квадратом. Решение получающихся краевых задач рассматриваются в обобщенном смысле как элементы некоторого гильбертова пространства. В качестве критерия оптимальности выступает сумма квадрата нормы отклонения состояния от заданного и квадрата нормы управления с некоторым коэффициентом. Такая структура критерия оптимальности позволяет, при необходимости, усилить роль либо первого, либо второго слагаемого в этом критерии. В первом случае более важным является достижение заданного состояния, а во втором случае — минимизация ресурсных затрат. Подробно изучена асимптотика задачи, порожденная оператором Лапласа с малым коэффициентом, к которому прибавлен дифференциальный оператор первого порядка. Особенностью задачи является наличие характеристик предельного оператора, которые касаются границы области. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения задачи в случае, когда оптимальное управление есть внутренняя точка множества допустимых управлений.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin. Asymptotics of the solution to the singular problem of optimal distributed control in a convex domain.

We consider the problem of optimal distributed control in a planar convex domain with smooth boundary and a small parameter at the highest derivatives of an elliptic operator. A zero Dirichlet condition is given at the boundary of the domain, and the control enters the inhomogeneity additively. The set of admissible controls is the unit ball in the corresponding space of square integrable functions. The solutions of the obtained boundary value problems are considered in the generalized sense as elements of some Hilbert space. The optimality index is the sum of the squared norm of the deviation of the state from a given state and the squared norm of the control with some coefficient. This structure of the optimality index makes it possible to strengthen, if necessary, the role of either the first or the second term of the index. In the first case it is more important to attain the desired state, whereas in the second case it is more important to minimize the resource consumption. We present a detailed study of the asymptotics of the problem generated by the sum of the Laplace operator with a small coefficient and a first-order differential operator. A special feature of the problem is the presence of characteristics of the limiting operator that are tangent to the boundary of the domain. We obtain a complete asymptotic expansion of the solution in powers of the small parameter in the case where the optimal control is an interior point of the set of admissible controls.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

MSC: 35C20, 35B25, 76M45, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-128-142

**Л. В. Камнева, В. С. Пацко.** Построение множества разрешимости в дифференциальных играх с простыми движениями и невыпуклым терминальным множеством ..... 143

Рассматриваются антагонистические дифференциальные игры на плоскости с простыми движениями, фиксированным моментом окончания и многоугольным терминальным множеством. Геометрическое ограничение на управление каждого из игроков является выпуклым многоугольником или отрезком. Для выпуклого терминального множества известна явная формула, описывающая множество разрешимости задачи (множество уровня функции цены, максимальный  $u$ -стабильный мост, множество выживаемости). Соответствующий этой формуле алгоритм опирается на операции алгебраической суммы и геометрической разности (разности Минковского). В статье предлагается алгоритм точного построения множества разрешимости для случая многоугольного невыпуклого терминального множества. При этом не требуется дополнительного разбиения рассматриваемого промежутка времени и восстановления промежуточных множеств разрешимости в дополнительные моменты. Алгоритм заключается в формировании и последующей конечной рекурсивной обработке списка полупространств в трехмерном пространстве времени и фазовых координат. Список строится на основе многоугольного терминального множества с использованием нормалей многоугольных ограничений на управления игроков.

Ключевые слова: дифференциальные игры с простыми движениями на плоскости, множество разрешимости, понятная процедура.

L. V. Kamneva, V. S. Patsko. Construction of the solvability set in differential games with simple motions and nonconvex terminal set.

We consider planar zero-sum differential games with simple motions, fixed terminal time, and polygonal terminal set. The geometric constraint on the control of each player is a convex polygonal set or a straight line segment. In the case of a convex terminal set, an explicit formula is known for the solvability set (the level set of the value function, maximal  $u$ -stable bridge, viability set). The algorithm corresponding to this formula is based on the set operations of algebraic sum and geometric difference (the Minkowski difference). We propose an algorithm for the exact construction of the solvability set in the case of a nonconvex polygonal terminal set. The algorithm does not involve the additional partition of the time interval and the recovery of intermediate solvability sets at additional instants. A list of half-spaces in the three-dimensional space of time and state coordinates is formed and processed by a finite recursion. The list is based on the polygonal terminal set with the use of normals of the polygonal constraints on the controls of the players.

Keywords: differential games with simple motions in the plane, solvability set, backward procedure.

MSC: 49N70, 49M25, 93B03, 49L25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-143-157

**Е. А. Колпакова.** О решении системы уравнений Гамильтона — Якоби специального вида..... 158

Статья посвящена исследованию системы уравнений первого порядка типа Гамильтона — Якоби. Рассматривается сильно связанная иерархическая система: первое уравнение не зависит от второго, а гамильтониан второго уравнения зависит от градиента решения первого уравнения. Данная система допускает последовательное решение. Решение первого уравнения понимается в смысле теории минимаксных (вязкостных) решений и получается с использованием формулы Лакса — Хопфа. Подстановка решения первого уравнения во второе уравнение Гамильтона — Якоби приводит к уравнению Гамильтона — Якоби с разрывным гамильтонианом. Его решение основано на концепции  $M$ -решений, введенной А. И. Субботиным и выбирается в классе многозначных отображений. Таким образом, решение исходной системы является прямым произведением однозначного и многозначного отображений, удовлетворяющих первому и второму уравнениям в минимаксном смысле и в смысле  $M$ -решений. Для случая, когда решение первого уравнения недифференцируемо лишь вдоль одной линии Ранкино — Гюгонио доказаны теоремы существования и единственности. Для решения системы получена репрезентативная формула в терминах характеристик Коши. Исследованы свойства решения и их

зависимость от параметров задачи.

Ключевые слова: система уравнений Гамильтона — Якоби, минимаксное решение, M-решение, метод характеристик Коши.

E. A. Kolpakova. On the solution of a system of Hamilton–Jacobi equations of special form.

The paper is concerned with the investigation of a system of first-order Hamilton–Jacobi equations. We consider a strongly coupled hierarchical system: the first equation is independent of the second, and the Hamiltonian of the second equation depends on the gradient of the solution of the first equation. The system can be solved sequentially. The solution of the first equation is understood in the sense of the theory of minimax (viscosity) solutions and can be obtained with the help of the Lax–Hopf formula. The substitution of the solution of the first equation in the second Hamilton–Jacobi equation results in a Hamilton–Jacobi equation with discontinuous Hamiltonian. This equation is solved with the use of the idea of M-solutions proposed by A.I. Subbotin, and the solution is chosen from the class of set-valued mappings. Thus, the solution of the original system of Hamilton–Jacobi equations is the direct product of a single-valued and set-valued mappings, which satisfy the first and the second equations in the minimax and M-solution sense, respectively. In the case when the solution of the first equation is nondifferentiable only along one Rankine–Hugoniot line, existence and uniqueness theorems are proved. A representative formula for the solution of the system is obtained in terms of Cauchy characteristics. The properties of the solution and their dependence on the parameters of the problem are investigated.

Keywords: system of Hamilton–Jacobi equations, minimax solution, M-solution, Cauchy method of characteristics.

MSC: 35D35, 49J15, 49J53

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-158-170

**В. В. Костоусов, Д. С. Перевалов.** Морфологический проектор в метрике  $L_0$  и задача локализации структурных различий изображений..... 171

В работе рассматривается задача локализации структурных различий двух изображений, которые представлены борелевскими функциями на ограниченном подмножестве плоскости. Для случая конечнозначных изображений предложен новый алгоритм вычисления области различий, основанный на морфологической проекции в метрике  $L_0$ , и показано, что он дает точное решение для достаточно широкого класса структурных различий. Оказалось, что алгоритм, основанный на морфологической проекции в  $L_2$ , не дает точного решения в классе ограниченных структурных изменений. Для случая дискретных изображений, когда одно из них зашумлено дискретным независимым нормальным белым шумом, построен алгоритм вычисления области различий и показано, что симметрическая мера разности результата работы алгоритма и истинного множества различий стремится по вероятности к нулю при неограниченном росте отношения величины минимального скачка яркости к среднеквадратическому отклонению шума. Получена новая оценка положения точек глобального максимума гауссовой смеси специального вида.

Ключевые слова: морфологический анализ изображений, морфологический проектор, гауссова смесь, метрика  $L_0$ , структурные различия.

V. V. Kostousov, D. S. Perevalov. Morphological projector in the  $L_0$  metric and the problem of localization of structural differences between images.

We consider the problem of localization of structural differences between two images given by Borel functions on a bounded planar set. For the case of finite-valued images, we propose a new algorithm for the calculation of the difference domain based on the morphological projection in the  $L_0$  metric. It is shown that the algorithm gives an exact solution for a wide class of structural differences. It turned out that the algorithm based on the morphological projection in  $L_2$  does not give an exact solution in the class of bounded structural changes. For the case of discrete images,

when one of them is perturbed by a discrete independent normal white noise, we construct an algorithm for the calculation of the difference domain and show that the symmetric measure of the difference between the algorithm's output and the true difference set vanishes in probability under the unbounded growth of the ratio of the minimum jump to the standard deviation of the noise. We obtain a new estimate for the location of global maximum points for a Gaussian mixture of a special form.

Keywords: morphological analysis of images, morphological projector, Gaussian mixture, metric  $L_0$ , structural changes.

MSC: 62M40, 65D18, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-171-187

**А. А. Красовский, А. С. Платов.** Билинейная задача оптимального управления дискретной рубкой леса ..... 188

В предложенной математической модели управляющий лесом в каждый момент времени принимает решение о рубке деревьев определенного типа (породы) и возраста (возрастной группы) с целью максимизации прибыли. При планировании лесозаготовки управляющий ориентируется на ценовые прогнозы и учитывает экономические затраты. В работе для решения дискретно-временной задачи оптимального управления, возникающей в модели, применяется принцип максимума Л. С. Понтрягина. Решение получено в конструктивном виде без больших вычислительных затрат, связанных с высокой размерностью задачи. В статье представлены аналитические результаты, поясняющие оптимальное решение. Для достаточно общей постановки задачи получено условие оптимальности, отвечающее управлению релейного типа. Условие включает в себя дискретную динамику сопряженной переменной, трактуемой как теневая цена древесины. Полученное правило интерпретируется как динамическая оценка рациональности рубки древостоя определенного типа и возраста. Структурная гибкость предложенной математической модели способствует практическому применению в менеджменте леса. При доказательстве теоретических результатов в статье предложен метод, который не встречался авторам в литературе.

Ключевые слова: принцип максимума Понтрягина, дискретная модель управления лесом.

A. A. Krasovskii, A. S. Platov. Bilinear optimal control problem of a discrete logging.

In the proposed mathematical model a forest manager at each specified moment of time makes decisions on harvesting the trees of a certain type (species) and age (age group) in order to maximize their profit. When planning logging, the manager focuses on price projections and takes into account economic costs. The Pontryagin maximum principle is applied for solving the discrete-time optimal control problem arising in the model. A solution is derived in a constructive manner without computational costs associated with the problem's high-dimensionality. Analytical results, explaining the optimal solution, are provided. For a typically defined problem the optimality condition is derived, which determines the bang-bang solution. The condition includes the discrete dynamics of the adjoint variable, interpreted as the wood shadow price. The rule that is obtained is treated as the dynamic rationale for logging a certain type and age of forest. Structural flexibility of the proposed mathematical model facilitates its application in forest management. In proving theoretical results in the paper, the authors propose a method that they have not come across in the literature.

Keywords: Pontryagin's maximum principle, discrete forest management model.

MSC: 93C55, 49J30, 91B76

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-188-194

**В. И. Максимов.** Об одной задаче управления линейной системой при измерении части фазовых координат ..... 195

Рассматривается задача управления системой линейных обыкновенных дифференциаль-

ных уравнений. Ее суть состоит в построении процедуры формирования управления в виде обратной связи, обеспечивающего отслеживание скорости изменения части фазовых координат заданной системы скорости изменения части фазовых координат другой системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Предполагается, что измеряется часть фазовых координат каждой из заданных систем. Измерения происходят с ошибкой в дискретные моменты времени. В работе предлагается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения указанной задачи. Алгоритм основан на известном в теории гарантированного управления методе экстремального сдвига. В связи с неполнотой информации о фазовых координатах “классический” экстремальный сдвиг применить не удастся. Поэтому в работе предложена его модификация. Эта модификация использует элементы теории динамического обращения. Последняя основана на конструкциях теории некорректных задач. В заключительной части статьи указывается класс нелинейных по фазовым координатам систем, для которого применим описанный в работе алгоритм.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы.

V. I. Maksimov. On a control problem for a linear system with measurements of a part of phase coordinates.

We consider a control problem for a system of linear ordinary differential equations. It is required to design a feedback control procedure under which the velocity of a part of the phase coordinates of the system would track the velocity of a part of the phase coordinates of another system, which is subject to an unknown perturbation. It is assumed that a part of phase coordinates of each of the systems is measured with error at discrete times. We propose a solution algorithm that is stable to informational disturbances and computation errors. The algorithm is based on the extremal shift method known in the theory of guaranteed control. Since it is impossible to apply the “classical” extremal shift due to the incompleteness of the information on the phase coordinates, we propose a modification of this method that employs elements of the dynamic inversion theory. The latter is based on constructions from the theory of ill-posed problems. In the concluding section of the paper, we specify a class of systems nonlinear in the phase coordinates for which the algorithm is applicable.

Keywords: control, incomplete information, linear systems.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-195-205

**М. С. Никольский.** Одна нелинейная задача идентификации ..... 206

Рассматривается нелинейная динамическая система, в описание которой входит неизвестный векторный параметр. Предполагается, что наблюдатель на отрезке  $[0, T]$  может вычислять фазовый вектор системы с некоторой ошибкой, ограниченной по модулю малой величиной  $h > 0$ . Эту информацию о динамике системы желательно использовать для нахождения неизвестного вектора. В статье получены конструктивные достаточные условия, при которых искомый вектор можно восстановить тем точнее, чем меньше величина  $h > 0$ . При этом удастся ограничиться дискретными измерениями выхода системы.

Ключевые слова : идентификация, динамические системы, обратные задачи.

M. S. Nikol'skii. A nonlinear identification problem.

We consider a nonlinear dynamic system with an unknown vector parameter in its description. An observer can calculate the phase vector of this system on the interval  $[0, T]$  with an error whose modulus does not exceed a small value  $h > 0$ . This information on the dynamics of the system should be used to find the unknown vector. We obtain constructive sufficient conditions under which it is possible to restore the unknown vector with decreasing error as the value of  $h$  tends to zero. It turns out that it is sufficient to use discrete measurements of the output of the system.

Keywords: identification, dynamic systems, inverse problems.

MSC: 34K29, 49N45, 93B30

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-206-211

**Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева.** Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх . . . . . 212

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается линейная задача преследования группой преследователей одного убегающего с равными возможностями всех участников, описываемая системой вида

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i, v \in V,$$

где множество допустимых управлений  $V$  — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Предполагается, что фундаментальная матрица  $\Phi(t)$  однородной системы  $\dot{w} = A(t)w$ ,  $\Phi(t_0) = E$  является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена. Целью группы преследователей является поимка убегающего не менее чем  $r$  различными преследователями, причем терминальные множества — выпуклые компакты. Преследователи используют квазистратегии. В терминах начальных позиций получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Приведены примеры.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, рекуррентная функция.

N. N. Petrov, N. A. Solov'eva. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games.

In a finite-dimensional Euclidean space, we consider a linear nonstationary problem in which one evader is pursued by a group of players and all the participants have equal capabilities. The problem is described by the system

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i, v \in V,$$

where the set of admissible controls  $V$  is a strictly convex compact set with smooth boundary. It is assumed that the fundamental matrix  $\Phi(t)$  of the homogeneous system  $\dot{w} = A(t)w$ ,  $\Phi(t_0) = E$  is a Zubov recursive function and its derivative is uniformly bounded. The aim of the pursuing group is to capture the evader by at least  $r$  different pursuers. We assume that the terminal sets are convex and compact. The pursuers use quasistrategies. We obtain sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem in terms of the initial positions. Examples are given.

Keywords: differential game, group pursuit, recursive function.

MSC: 49N75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218

**Л. А. Петросян, Я. Б. Панкратова.** Построение сильно-динамически устойчивых подъядер в дифференциальных играх с предписанной продолжительностью . . . . . 219

В работе предложен новый сильно-динамически устойчивый принцип оптимальности кооперативной дифференциальной игры. Это делается путем построения некоторого подмножества ядра кооперативной игры. Предлагается считать это подмножество новым принципом оптимальности в рассматриваемом классе игр. Построение производится на основе введения функции  $\hat{V}$ , доминирующей значения классической характеристической функции по коалициям. Пусть  $V(S, \bar{x}(\tau), T - \tau)$  значение классической характеристической функции, вычисленной в подыгре с начальными условиями  $\bar{x}(\tau)$ ,  $T - \tau$  на кооперативной траектории. Определим функцию  $\hat{V}$  по формуле

$$\hat{V}(S; x_0, T - t_0) = \max_{t_0 \leq \tau \leq T} \frac{V(S; x^*(\tau), T - \tau)}{V(N; x^*(\tau), T - \tau)} V(N; x_0, T - t_0).$$

На основе функции  $\hat{V}(S; x_0, T - t_0)$  строится аналог классического ядра. В работе показано, что построенное таким образом ядро является подмножеством классического ядра. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать его как новый принцип оптимальности. Доказывается, что этот вновь построенный принцип оптимальности является сильно-динамически устойчивым.

Ключевые слова: кооперативная дифференциальная игра, сильно-динамическая устойчивость, ядро, подъядро, дележ.

L. A. Petrosyan, Ya. B. Pankratova. Construction of strongly time-consistent subcores in differential games with prescribed duration.

A new strongly time-consistent (dynamically stable) optimality principle is proposed in a cooperative differential game. This is done by constructing a special subset of the core of the game. It is proposed to consider this subset as a new optimality principle. The construction is based on the introduction of a function  $\hat{V}$  that dominates the values of the classical characteristic function in coalitions. Suppose that  $V(S, \bar{x}(\tau), T - \tau)$  is the value of the classical characteristic function computed in the subgame with initial conditions  $\bar{x}(\tau), T - \tau$  on the cooperative trajectory. Define

$$\hat{V}(S; x_0, T - t_0) = \max_{t_0 \leq \tau \leq T} \frac{V(S; x^*(\tau), T - \tau)}{V(N; x^*(\tau), T - \tau)} V(N; x_0, T - t_0).$$

Using this function, we construct an analog of the classical core. It is proved that the constructed core is a subset of the classical core; thus, we can consider it as a new optimality principle. It is proved also that the newly constructed optimality principle is strongly time-consistent.

Keywords: cooperative differential game, strong time consistency, core, subcore, imputation.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-219-227

**Д. А. Серков.** Трансфинитные последовательности в методе программных итераций. 228

Рассматривается задача удержания движений абстрактной динамической системы в заданном множестве ограничений. Конструкции метода программных итераций распространяются на задачи с динамикой не обладающей, вообще говоря, какими-либо топологическими свойствами. Указанная общность требований к системе преодолевается введением трансфинитных итераций оператора программного поглощения. В обосновании используется техника неподвижных точек отображений в индуктивных частично упорядоченных множествах. Итогом применения процедуры является построение множества успешной разрешимости задачи удержания в классе квазистратегий, “промежуток” управления не предполагается конечным.

Ключевые слова: метод программных итераций, трансфинитные итерации, квазистратегии, неподвижные точки, индуктивные множества.

D. A. Serkov. Transfinite sequences in the method of programmed iterations.

We consider the problem of retaining the motions of an abstract dynamic system in a given constraint set. Constructions from the method of programmed iterations are extended to problems whose dynamics, in general, does not possess any topological properties. The weaker requirements are compensated by introducing transfinite iterations of the programmed absorption operator. The technique of fixed points of mappings in inductive partially ordered sets is used in the proofs. The proposed procedure produces the set where the problem under consideration is successfully solved in the class of quasistrategies. The control interval is not assumed to be finite.

Keywords: method of programmed iterations, transfinite iterations, quasistrategies, fixed points, inductive posets.

MSC: 37N35, 65J15, 47J25, 52A01, 91A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-228-240

**А. А. Успенский.** Слабая инвариантность относительно управляемой системы цилиндрического множества с гладкой границей ..... 241

Рассматривается проблема построения множеств, разрешающих дифференциальную игру или задачу оптимального управления, исходя из знания динамики системы, ресурсов управления и краевых условий. Построение таких множеств, причем наибольших из возможных (максимального стабильного моста — в дифференциальной игре, множества управляемости — в задаче управления), является нетривиальной задачей. Это обусловлено сложной геометрией множеств, которым свойственны невыпуклость и негладкость границ. На практике при решении инженерных задач, имеющих определенные допуски и отклонения, зачастую считается приемлемым построение разрешающего множества, не обладающего свойством максимальности. При этом конструируемое множество может быть наделено характеристиками, в дальнейшем облегчающими формирование управляющих воздействий. Например, множество может иметь выпуклые сечения, гладкую границу. В рамках означенной направленности работ в статье изучено свойство стабильности (слабой инвариантности) для одного класса множеств, рассматриваемых в пространстве позиций дифференциальной игры. На основе введенного В.Н. Ушаковым понятия дефекта стабильности множества получен критерий слабой инвариантности относительно конфликтно управляемой динамической системы для цилиндрических множеств. В частном случае линейной управляемой системы выявлены легко проверяемые достаточные условия слабой инвариантности для цилиндрических множеств, имеющих эллипсоидальные сечения. Обоснование условий опирается на конструкции и факты субдифференциального исчисления. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: стабильное множество, слабая инвариантность, дифференциальная игра, гамильтониан, дефект стабильности, цилиндрическое множество, эллипсоид, субдифференциал.

A. A. Uspenskii. Weak invariance of a cylindrical set with smooth boundary with respect to a control system.

We consider the problem of constructing resolving sets for a differential game or an optimal control problem based on information on the dynamics of the system, control resources, and boundary conditions. The construction of largest possible sets with such properties (the maximal stable bridge in a differential game or the controllability set in a control problem) is a nontrivial problem due to their complicated geometry; in particular, the boundaries may be nonconvex and nonsmooth. In practical engineering tasks, which permit some tolerance and deviations, it is often admissible to construct a resolving set that is not maximal. The constructed set may possess certain characteristics that would make the formation of control actions easier. For example, the set may have convex sections or a smooth boundary. In this context, we study the property of stability (weak invariance) for one class of sets in the space of positions of a differential game. Using the notion of stability defect of a set introduced by V.N. Ushakov, we derive a criterion of weak invariance with respect to a conflict-controlled dynamic system for cylindrical sets. In a particular case of a linear control system, we obtain easily verified sufficient conditions of weak invariance for cylindrical sets with ellipsoidal sections. The proof of the conditions is based on constructions and facts of subdifferential calculation. An illustrating example is given.

Keywords: stable set, weak invariance, differential game, Hamiltonian, stability defect, cylindrical set, ellipsoid, subdifferential.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-241-250

**В. И. Ухоботов.** Линейная задача управления при наличии помехи с платой, зависящей от модуля линейной функции ..... 251

Рассматривается линейная задача управления в  $\mathbb{R}^m$  при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. Управляемый процесс происходит на заданном промежутке времени  $[t_0, p]$ . Возможные значения помехи принадлежат компакту. Управление ищется в виде произведения скалярной функции  $\phi(t) \in [\delta, \alpha]$  на векторную функцию  $\xi(t, x) \in M$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ . Отрезок  $[\delta, \alpha]$  и выпуклый симметричный компакт  $M$  заданы. Такое определение управления возникает в задачах управления механическими системами переменного состава. Возможен случай, когда закон изменения реактивной массы задается функцией времени  $t$ , а управлять можно направлением относительной скорости ее отделения. Терминальная часть платы зависит от модуля линейной функции от вектора  $x(p)$ . Задана функция  $g(t, \phi) \geq 0$  при  $t \in [t_0, p]$ ,  $\phi \in [\delta, \alpha]$ . Интегральная составляющая платы является интегралом на отрезке  $[t_0, p]$  от функции  $g(t, \phi(t))$ . Задача управления рассматривается в рамках теории оптимизации гарантированного результата. Доказана теорема существования оптимального управления с достаточно широкими ограничениями на рассматриваемый класс задач. Найдены достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным. Рассмотрен пример, который иллюстрирует найденные достаточные условия.

Ключевые слова: управление, помеха, плата, дифференциальная игра.

V. I. Ukhobotov. A linear control problem under interference with a payoff depending on the modulus of a linear function.

We consider a linear control problem in  $\mathbb{R}^m$  under the action of an uncontrolled interference. The control process occurs on a given time interval  $[t_0, p]$ . The possible values of the interference belong to a compact set. The control is sought as the product of a scalar function  $\phi(t) \in [\delta, \alpha]$  and a vector function  $\xi(t, x) \in M$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$ . The interval  $[\delta, \alpha]$  and the convex symmetric compact set  $M$  are given. This definition of the control arises in control problems for mechanical systems of variable composition. For example, the law of variation of a reaction mass is defined as a function of time  $t$ , and the control affects the direction of relative velocity in which the mass is separated. The terminal part of the payoff depends on the modulus of a linear function of the vector  $x(p)$ . The integral part of the payoff is the integral over the interval  $[t_0, p]$  of a given function  $g(t, \phi(t))$ , where  $g(t, \phi) \geq 0$  for  $t \in [t_0, p]$  and  $\phi \in [\delta, \alpha]$ . The control problem is considered within the theory of guaranteed result optimization. An optimal control existence theorem is proved under rather wide constraints on the class of problems. Sufficient conditions are found under which an admissible control is optimal. An example that illustrates the sufficient conditions is considered.

Keywords: control, interference, payoff, differential game.

MSC: 91A23, 91A24, 91A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-251-261

**Т. Ф. Филиппова.** Внешние оценки множеств достижимости управляемой системы с неопределенностью и комбинированной нелинейностью ..... 262

Рассматривается задача оценивания трубок траекторий нелинейной управляемой динамической системы с неопределенностью по начальным данным. Предполагается, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены определяются квадратичными формами по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями. Матрица линейных слагаемых в фазовых скоростях системы также точно не известна, но принадлежит известному компакту в соответствующем пространстве, т. е. динамика системы осложнена наличием билинейных составляющих в правых частях дифференциальных уравнений системы. В работе рассмотрен сложный случай, обобщающий ранее полученные автором результаты, когда предполагается одновременное наличие в динамике системы билинейных функций и квадратичных форм (без предположения об их положительной определенности), а также учитываются неопределенность по начальным данным и влияние управляющих воздействий, которые также могут трактоваться здесь как неопределенные аддитивные возмущения. При-

существование всех указанных факторов существенно усложняет исследование проблемы и требует адекватного анализа, что и составляет основную цель данного исследования. В работе приводятся алгоритмы оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой системы указанного типа, результаты иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, оценивание состояний, неопределенность.

T. F. Filippova. External estimates for reachable sets of a control system with uncertainty and combined nonlinearity.

The problem of estimating the trajectory tubes of a nonlinear control dynamic system with uncertainty in the initial data is studied. It is assumed that the dynamic system has a special structure in which the nonlinear terms are defined by quadratic forms in the state coordinates and the values of uncertain initial states and admissible controls are subject to ellipsoidal constraints. The matrix of the linear terms in the velocities of the system is not known exactly; it belongs to a given compact set in the corresponding space. Thus, the dynamics of the system is complicated by the presence of bilinear components in the right-hand sides of the differential equations of the system. We consider a complex case and generalize the author's earlier results. More exactly, we assume the simultaneous presence in the dynamics of the system of bilinear functions and quadratic forms (without the assumption of their positive definiteness), and we also take into account the uncertainty in the initial data and the impact of the control actions, which may also be treated here as undefined additive disturbances. The presence of all these factors greatly complicates the study of the problem and requires an adequate analysis, which constitutes the main purpose of this study. The paper presents algorithms for estimating the reachable sets of a nonlinear control system of this type. The results are illustrated by examples.

Keywords: control system, reachable set, state estimation, uncertainty.

MSC: 34A60, 49J53, 93B03, 93C41, 93C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-262-274

**А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов.** Дискретно-непрерывная задача маршрутизации с условиями предшествования ..... 275

Рассматривается задача последовательного обхода замкнутых множеств в компактном метрическом пространстве, осложненная ограничениями в виде условий предшествования и возможной зависимостью функций стоимости от списка заданий. Исследуется вариант аппроксимативной реализации экстремума посредством применения моделей, использующих задачи последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств). Данный вариант естественным образом вкладывается в более общую конструкцию, связанную с последовательным посещением конечной системы непустых замкнутых множеств (НЗМ) в метризуемом компакте. Само же пространство НЗМ оснащается метрикой Хаусдорфа, в терминах которой оценивается (при соответствующем условии непрерывности сечений функций стоимости) близость экстремумов упомянутой задачи последовательного обхода для двух любых систем НЗМ (подразумевается, что количество НЗМ в каждой системе одно и то же). При этом ограничения в виде условий предшествования сохраняются.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования.

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov. A discrete–continuous routing problem with precedence conditions.

We consider the problem of visiting closed sets in a compact metric space complicated by constraints in the form of precedence conditions and a possible dependence of the cost function on a list of tasks. We study a variant of the approximate realization of the extremum by applying models that involve problems of sequential visits to megalopolises (nonempty finite sets). This variant is naturally embedded into a more general construction that implements sequential visits to

nonempty closed sets (NCSs) from a finite system in a metrizable compactum. The space of NCSs is equipped with the Hausdorff metric, which is used to estimate (under the corresponding condition that the sections of the cost functions are continuous) the proximity of the extrema in the problem of sequential visits for any two systems of NCSs (it is assumed that the numbers or NCSs in the systems are the same). The constraints in the form of precedence conditions are preserved.

Keywords: route, path, precedence conditions.

MSC: 49L20, 90C39

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-275-292

**А. А. Чикрий.** Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики ..... 293

Рассматриваются игровые задачи о сближении траекторий нестационарной квазилинейной системы с переменным цилиндрическим терминальным множеством. Исследуется ситуация, когда не имеет места классическое условие Понтрягина. С помощью введения верхних и нижних разрешающих функций как селекторов специальных многозначных отображений получены достаточные условия разрешимости задач, которые отличаются от уже известных. Результаты иллюстрируются на модельном примере.

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, условие Понтрягина, интеграл Ауманна, разрешающая функция.

A. A. Chikrii. Upper and lower resolving functions in dynamic game problems.

The paper deals with game problems on the approach of trajectories of a nonstationary quasilinear system to a variable cylindrical terminal set. The case is studied when Pontryagin's classical condition fails. The notions of upper and lower resolving functions are introduced in the form of selections of special set-valued mappings. These functions are used to derive sufficient solvability conditions, which differ from the known ones. The results are illustrated with a model example.

Keywords: conflict-controlled process, set-valued mapping, Pontryagin's condition, Aumann's integral, resolving function.

MSC: 49N70, 91A25, 49N90, 91A23

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305

**Büyükköroğlu T., Çelebi G., V. Dzhafarov.** Stabilization of discrete time systems by reflection coefficients ..... 306

For single-input single-output discrete-time systems, we consider a stabilization problem by a fixed order controller. A number of examples show that such controller may not exist. It is assumed that the controller depends linearly on a stabilizing parameter. In this case, the stabilizing controller defines an affine subset in the parameter space. We use the well-known property of the Schur stability region in the parameter space. According to this property the closed convex hull of this region is a polytope with known vertices. Every stable vector has a preimage in the open cube  $(-1, 1)^n$ , and this preimage is called the reflection coefficient of this stable polynomial. By using reflection coefficients and polytopic properties of the stability region we obtain the stabilizability condition. This condition is expressed in terms of vertices of the stability region which is a multilinear image of the cube of reflection coefficients.

Keywords: discrete system, stability, affine stabilizer, reflection coefficient.

Т. Бююккөроглу, Г. Челеби, В. Джафаров. Стабилизация дискретных систем с использованием рефлексивных коэффициентов.

Рассматривается задача стабилизации дискретных систем с одним входом и одним выходом регулятором заданного порядка. Ряд примеров показывает, что такой регулятор может не су-

ществовать. Предполагается, что регулятор линейно зависит от стабилизирующих параметров. В этом случае стабилизирующий регулятор определяет аффинное подмножество в пространстве параметров. В этом пространстве замкнутая выпуклая оболочка области устойчивости по Шуру является многогранником с известными вершинами. Каждый стабильный вектор имеет прообраз в открытом кубе  $(-1, 1)^n$ , и этот прообраз называется рефлексивным коэффициентом соответствующего стабилизирующего полинома. На основе рефлексивных коэффициентов и свойств многогранной области устойчивости получено условие стабилизируемости. Это условие выражено в терминах вершин области устойчивости, которая является мультилинейным образом куба рефлексивных коэффициентов.

**MSC:** 93C55, 93D15

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-1-306-311