

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

*25 лет со дня основания*

**ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

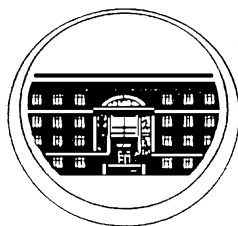
ТРУДЫ  
ИНСТИТУТА  
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 23

№ 4

2017



ЕКАТЕРИНБУРГ

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 23, № 4.** Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2017. 324 с.

*25 лет со дня основания*

ISSN 0134-4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

**Главный редактор** акад. РАН В. И. Бердышев

**Зам. гл. редактора** д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

**Научные редакторы** д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,  
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

#### **Редакционная коллегия**

д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Антонов, д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко,  
д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),  
канд. физ.-мат. наук М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,  
д-р физ.-мат. наук Х. Г. Гусейнов (Турция), д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов,  
д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий,  
канд. физ.-мат. наук П. Д. Лебедев, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,  
д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных, д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь),  
д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),  
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай,  
канд. физ.-мат. наук Н. В. Маслова (*отв. секретарь*)

#### **Редакционный совет**

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,  
акад. РАН А. Б. Куржанский, чл.-корр. РАН Н. Ю. Лукоянов,  
чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров, акад. РАН С. В. Матвеев,  
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,  
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,  
чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков, чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,  
чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

**Отв. редактор выпуска** д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев

© Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
Институт математики и механики  
им. Н. Н. Красовского  
Уральского отделения Российской  
академии наук, 2017



DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-5-6

## СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ МАТВЕЕВ

(К 70-летию юбилею)

Сергей Владимирович Матвеев родился 5 декабря 1947 г. в рабочем поселке Раевка в Башкирии. В 1966 г. он поступил в Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, а после его окончания в 1970 г. — в аспирантуру к Алексею Викторовичу Чернавскому. После защиты кандидатской диссертации в 1974 г. С.В. Матвеев уехал по распределению в Челябинск, где проработал несколько лет в Политехническом институте, а затем перешел во вновь образованный Челябинский государственный университет, где трудится и сейчас.

В конце 70-х — начале 90-х годов прошлого столетия Сергей Владимирович получил результаты, сыгравшие заметную роль в развитии современной топологии трехмерных многообразий. Им построена теория элементарных преобразований специальных полиэдров. Доказано, что ограничение классической гипотезы Зимана на случай специальных полиэдров эквивалентно объединению двух других классических гипотез: гипотезы Пуанкаре и гипотезы Эндрюса — Кертиса. Построена теория сложности трехмерных многообразий и классифицированы все трехмерные многообразия сложности не более 8. Построено замкнутое гиперболическое многообразие, которое имеет наименьшую сложность и наименьший объем. Полностью доказана теорема алгоритмической классификации достаточно больших трехмерных многообразий.

В 1988 г. Сергей Владимирович защитил в Московском университете докторскую диссертацию по теории сложности трехмерных многообразий, а в мае 1997 г. был избран членом-корреспондентом РАН по Отделению математики.

В 1999 г. в Институте математики и механики Уральского отделения РАН по инициативе академика Н. Н. Красовского, директора института академика А. Ф. Сидорова и его заместителя по научной работе В. И. Бердышева был организован отдел алгоритмической топологии под руководством С. В. Матвеева. Основное направление исследований отдела — разработка алгоритмических методов в топологии трехмерных многообразий, в том числе в теории узлов. Это включает как теоретическое изучение алгоритмической разрешимости различных геометрических проблем, так и разработку и компьютерную реализацию эффективных практических алгоритмов, в частности алгоритмов распознавания. Основными инструментами исследования служат теория сложности трехмерных многообразий и теория преобразований специальных спайнов, построенные С. В. Матвеевым. Сотрудники отдела разрабатывают эффективные алгоритмы перечисления и распознавания трехмерных многообразий, исследуют инварианты многообразий и узлов.

Важно отметить, что возглавляемая С. В. Матвеевым кафедра компьютерной топологии и алгебры Челябинского университета, функционирующая при ней учебно-научная лаборато-

рия компьютерной геометрии и отдел алгоритмической топологии составляют единый учебно-научный комплекс, что является уникальным примером интеграции науки и образования. За эти годы учениками Сергея Владимировича — сотрудниками кафедры и отдела — защищены одна докторская и восемь кандидатских диссертаций.

В последнее время развивается взаимодействие маломерной топологии с математической физикой, возрастает интерес к квантовой топологии. С 2014 г. эта тематика стала в отделе одной из главных благодаря получению мегагранта правительства Российской Федерации и создано в Челябинском университете лаборатории квантовой топологии. В этом направлении отдел тесно сотрудничает с учеными Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Математического института им. В. А. Стеклова РАН и его Санкт-Петербургского отделения, а также механико-математического факультета МГУ.

С. В. Матвеев проявил себя как блестящий организатор науки и педагог. Сергей Владимирович опубликовал свыше 90 научных работ, в том числе четыре монографии. Сформировавшаяся вокруг него научная школа по топологии трехмерных многообразий является всероссийским лидером по этому направлению. Коллектив научной школы неоднократно получал гранты РФФИ, РНФ и других российских и зарубежных фондов. С. В. Матвеев организовал ряд международных конференций высокого уровня: в Челябинском университете, в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН и в его Санкт-Петербургском отделении, в Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, в Институте математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН.

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, коллеги, ученики и друзья сердечно поздравляют Сергея Владимировича Матвеева с его славным юбилеем и от всей души желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов!

*Коллеги и ученики*

УДК 514.132

**ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТЕТРАЭДРА  
С ГРУППОЙ СИММЕТРИЙ  $S_4$ <sup>1</sup>****Н. В. Абросимов, Б. Вьонг Хьу**

Задача вычисления объема гиперболического тетраэдра общего вида была ранее решена в работах Г. Сфорца и других авторов. При этом, полученные формулы имеют достаточно громоздкий вид. Известно, что если многогранник имеет нетривиальную симметрию, то формула его объема существенно упрощается. Этот факт был обнаружен Лобачевским, который нашел объем идеального тетраэдра. Позже Дж. Милнор выразил соответствующий объем как сумму трех функций Лобачевского. В данной работе рассматриваются компактные гиперболические тетраэдры, имеющие группу симметрий  $S_4$ , которая порождается зеркально поворотной симметрией четвертого порядка. Указанная симметрия представляет собой композицию поворота на угол  $\pi/2$  вокруг оси, проходящей через середины двух противоположных ребер, и отражения относительно плоскости, перпендикулярной данной оси и проходящей через середины оставшихся четырех ребер. Для таких тетраэдров установлены необходимые и достаточные условия существования в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$ . Найдены соотношения между их двугранными углами и длинами ребер в форме теоремы косинусов. Получены точные интегральные формулы, выражающие гиперболический объем указанных тетраэдров через длины ребер.

Ключевые слова: гиперболический тетраэдр, группа симметрий, зеркальный поворот, гиперболический объем.

**N. V. Abrosimov, Vuong Huu Bao. The volume of a hyperbolic tetrahedron with symmetry group  $S_4$ .**

The problem of calculating the volume of a hyperbolic tetrahedron of general form was solved in a number of works by G. Sforza and other authors. The formulas obtained are rather cumbersome. It is known that if a polyhedron has nontrivial symmetry, then the volume formula is essentially simplified. This phenomenon was discovered by Lobachevsky, who found the volume of an ideal tetrahedron. Later, J. Milnor expressed the corresponding volume as the sum of three Lobachevsky functions. In this paper we consider compact hyperbolic tetrahedra having the symmetry group  $S_4$ , which is generated by a mirror-rotational symmetry of the fourth order. The latter symmetry is the composition of rotation by the angle of  $\pi/2$  about an axis passing through the middles of two opposite edges and reflection with respect to a plane perpendicular to this axis and passing through the middles of the remaining four edges. We establish necessary and sufficient conditions for the existence of such tetrahedra in  $\mathbb{H}^3$ . Then we find relations between their dihedral angles and edge lengths in the form of a cosine law. Finally, we obtain exact integral formulas expressing the hyperbolic volume of the tetrahedra in terms of the edge lengths.

Keywords: hyperbolic tetrahedron, symmetry group, reflection followed by a rotation, hyperbolic volume.

**MSC:** 52B15, 51M20, 51M25, 51M10

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-4-7-17

**Введение**

Вычисление объема многогранника — классическая геометрическая задача, которая и в настоящее время остается актуальной. Классификация трехмерных гиперболических многообразий — основная проблема современной маломерной топологии. Согласно теореме Тёрстона-Ёргенсена, все трехмерные гиперболические многообразия можно упорядочить по возрастанию их объемов. Начало этого списка известно. Многообразие минимального объема было независимо найдено С. В. Матвеевым и А. Т. Фоменко [1], а также Дж. Виксом [2]. Второе по объему многообразие построено У. Тёрстоном в [3] и так далее. В 2009 г. Д. Габаи, Р. Мейергоф

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00414) и Совета по грантам Президента РФ (проект МК-9572.2016.1).

и П. Майли [4] доказали, что многообразие Матвеева — Фоменко — Вика действительно имеет наименьший объем из возможных. С другой стороны, любое трехмерное гиперболическое многообразие может быть построено путем попарного отождествления конгруэнтных граней некоторого фундаментального многогранника. Объем гиперболического многообразия равен объему его фундаментального многогранника и является его важнейшим инвариантом.

Удобным инструментом для приблизительного вычисления объемов гиперболических многообразий служит разработанная Дж. Виксом компьютерная программа SnapPea. В то же время известны примеры, когда два различных многообразия имеют одинаковый объем. Для изучения подобных примеров необходимо находить точные формулы для гиперболических объемов. Точные формулы также требуются, чтобы попытаться найти решение проблемы, поставленной Тёрстоном и Милнором [5]: доказать, что объемы трехмерных гиперболических многообразий не всегда рационально связаны.

Первые частные результаты по вычислению неевклидовых объемов получены Н. И. Лобачевским, Я. Больяи и Л. Шлефли, которые нашли объемы гиперболического и сферического биортогональных тетраэдров (см., например, [5]). После пионерских работ Тёрстона и Милнора наметился большой прогресс в этом направлении. Начиная с конца 1980-х гг. получены точные формулы для объемов гиперболических и сферических многогранников во многих важных случаях.

Задача получения точных формул для объемов компактных гиперболических многогранников заданного комбинаторного типа весьма сложна. В настоящее время она решена только для тетраэдра общего вида. В 1999 г. Ю. Чо и Х. Ким [6] предложили формулу, которая была несимметрична относительно перестановки двугранных углов. Затем в 2005 г. Дж. Мураками и У. Яно [7] получили уже симметричную формулу, основываясь на квантовой теории б $\bar{j}$ -символов. В 2006 г. А. Ушиджима [8] предложил иное доказательство формулы Мураками — Яно, которое покрывало также случай усеченного гиперболического тетраэдра. Во всех указанных формулах объем тетраэдра выражается через шестнадцать дилогарифмических функций, аргументы которых в свою очередь являются корнями уравнения с комплексными коэффициентами. В 2005 г. Д. А. Деревнин и А. Д. Медных [9] получили интегральную формулу для объема компактного гиперболического тетраэдра общего вида.

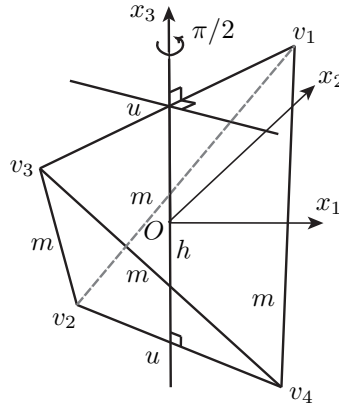
Тем более удивительно, что общая формула для объема компактного гиперболического тетраэдра была получена еще более 100 лет назад. Соответствующий результат принадлежит итальянскому математику Гаetano Сфорца и относится к 1906 г. К сожалению, работа Сфорца [10], опубликованная на итальянском языке, была до 2006 г. полностью забыта. В недавней статье [11] получены оригинальное современное доказательство формулы Сфорца и ее аналог для сферического тетраэдра. Отметим, что все упомянутые выше формулы довольно громоздки и выражают объем гиперболического тетраэдра через двугранные углы.

Известно, что если многогранник обладает симметрией, то формула его объема существенно упрощается. Это, в частности, показывает пример идеального тетраэдра, то есть гиперболического тетраэдра, все вершины которого лежат на абсолюте. Из определения следует, что двугранные углы при противоположных ребрах такого тетраэдра попарно равны друг другу, то есть он обладает симметрией. Его объем был известен еще Лобачевскому, а Дж. Милнор [5] в 1982 г. представил соответствующий результат в весьма простой и элегантной форме.

В настоящей работе рассматриваются компактные гиперболические тетраэдры, имеющие группу симметрий  $S_4$ . Для тетраэдров указанного типа будут установлены условия существования, найдены соотношения между двугранными углами и длинами ребер и получены точные формулы объема в терминах длин ребер. Будет использован подход, впервые предложенный в работе [12] для вычисления объема гиперболического октаэдра с  $\bar{3}$ -симметрией, при котором соответствующий евклидов многогранник помещается в проективную модель Кэли — Клейна гиперболического пространства.

Группа симметрии  $S_n$  ( $n$  четно) по классификации Шёнфлиса, или  $\bar{n}$  по классификации Германа — Могена, порождается единственным элементом — зеркально поворотной осевой




 Рис. 1. Тетраэдр с группой симметрии  $S_4$ .

симметрией  $n$ -го порядка  $C_n\sigma_h$  (см., например, [13, гл. 11]). Симметрия  $C_n\sigma_h$  — это композиция поворота на угол  $2\pi/n$  вокруг заданной оси и отражения в плоскости, перпендикулярной данной оси.

Рассмотрим сначала евклидов тетраэдр с группой симметрии  $S_4$ .

### 1. Тетраэдр с группой симметрий $S_4$ в $\mathbb{E}^3$

Введем прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  в 3-мерном евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^3$  со скалярным произведением  $\langle \cdot; \cdot \rangle_{\mathbb{E}}$ . Рассмотрим зеркально поворотную осевую симметрию  $C_4\sigma_h$ , которая является композицией поворота вокруг оси  $Ox_3$  на угол  $\pi/2$  и отражения в плоскости  $Ox_1x_2$ :

$$C_4\sigma_h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем координаты вершин тетраэдра в  $\mathbb{E}^3$  с группой симметрии  $S_4$ , порожденной элементом  $C_4\sigma_h$  (см. рис. 1):

$$\begin{aligned} v_1 &= \left( \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2} \right), & v_2 &= \left( -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2} \right), \\ v_3 &= \left( -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2} \right), & v_4 &= \left( \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2} \right). \end{aligned}$$

Действительно, группа симметрий  $S_4 = \langle C_4\sigma_h \rangle$  действует на множестве вершин такого тетраэдра как циклическая группа, порожденная подстановкой  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$ .

Вычислим квадраты длин ребер построенного тетраэдра:

$$\ell_{13}^2 = \ell_{24}^2 = u^2, \quad \ell_{12}^2 = \ell_{34}^2 = \ell_{14}^2 = \ell_{23}^2 = m^2 = \frac{u^2}{2} + h^2,$$

где  $\ell_{ij}$  — длина ребра, соединяющего вершины  $v_i$  и  $v_j$ .

Обозначим двугранные углы тетраэдра при ребрах длины  $u$  и  $m$  через  $U$  и  $M$  соответственно. Найдем косинусы двугранных углов, используя скалярные произведения векторов внешних нормалей к соответствующим граням:

$$\cos U = \frac{u^2 - 4h^2}{u^2 + 4h^2}, \quad \cos M = \frac{2u^2}{4h^2 + u^2}.$$

Вычислим объем  $V$  тетраэдра  $T$  с группой симметрии  $S_4$  в  $\mathbb{E}^3$  по формуле Сервуа (см., например, [14, с. 98]):  $V = 1/6 u^2 h$ .

Перейдем к рассмотрению тетраэдров в гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$ .

## 2. Правильный тетраэдр в $\mathbb{H}^3$

**Теорема 1.** Объем  $V$  правильного гиперболического тетраэдра  $T$  с ребрами длины  $a$  и двугранными углами, равными  $A$ , находится по формулам

$$V = -3 \int_{\arccos(1/3)}^A \operatorname{arch}\left(\frac{\cos A}{1 - 2 \cos A}\right) dA,$$

$$V = \int_0^a \frac{3a \operatorname{sh} a da}{(1 + 2 \operatorname{ch} a) \sqrt{(\operatorname{ch} a + 1)(3 \operatorname{ch} a + 1)}}.$$

**Доказательство.** Все грани тетраэдра  $T$  представляют собой правильные гиперболические треугольники со сторонами  $a$ . Обозначим углы в этих треугольниках через  $\alpha$ . По теореме косинусов для гиперболического треугольника имеем  $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a \cos \alpha$ , откуда

$$\cos \alpha = \frac{\operatorname{ch} a}{1 + \operatorname{ch} a}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим сечение тетраэдра  $T$  сферой достаточно малого радиуса с центром в любой вершине (см. рис. 2).

В сечении имеем правильный сферический треугольник с углами, равными  $A$ , и сторонами  $\alpha$ . По теореме косинусов для сферического треугольника имеем  $\cos \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos A$ , откуда

$$\cos A = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + 1}.$$

Подставляя (2.1) в последнее равенство, находим соотношения между длинами ребер  $T$  и его двугранными углами:

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a}{1 + 2 \operatorname{ch} a}, \quad (2.2)$$

$$a = \operatorname{arch}\left(\frac{\cos A}{1 - 2 \cos A}\right). \quad (2.3)$$

Заметим, что при  $a \rightarrow 0$  тетраэдр  $T$  вырождается в точку, при этом его объем  $V$  стремится к нулю, а двугранные углы  $A$  стремятся к  $\arccos(1/3)$ .

Выпишем дифференциал объема тетраэдра  $T$  по формуле Шлефли (см., например, [15, с. 127]):

$$dV = - \sum_{\theta} \frac{\ell_{\theta}}{2} d\theta = -3a dA.$$

Здесь суммирование ведется по всем двугранным углам  $T$ , где  $\ell_{\theta}$  — длина соответствующего ребра с углом  $\theta$ .

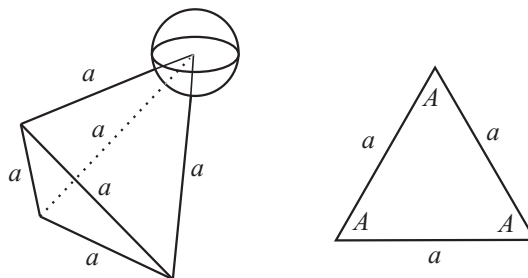


Рис. 2. Сечение правильного тетраэдра сферой с центром в вершине.

Подставляя формулу (2.3) в последнее равенство, выражаем объем через двугранные углы по формуле Ньютона — Лейбница:

$$V = -3 \int_{\arccos(1/3)}^A \operatorname{arch}\left(\frac{\cos A}{1 - 2 \cos A}\right) dA. \quad (2.4)$$

Из соотношения (2.2) имеем

$$\frac{dA}{da} = -\frac{\operatorname{sh} a}{(1 + 2 \operatorname{ch} a) \sqrt{(\operatorname{ch} a + 1)(3 \operatorname{ch} a + 1)}},$$

что позволяет найти объем из формулы Шлефли в терминах длин ребер

$$V = \int_0^a \frac{3 a \operatorname{sh} a da}{(1 + 2 \operatorname{ch} a) \sqrt{(\operatorname{ch} a + 1)(3 \operatorname{ch} a + 1)}}. \quad (2.5)$$

□

Выражение объема (2.4) можно получить как частный случай из формулы Деревнина — Медных [9]. Соотношение (2.5) потребуется нам в дальнейшем.

### 3. Тетраэдр с группой симметрий $S_4$ в $\mathbb{H}^3$

#### 3.1. Проективная модель Кэли — Клейна

Рассмотрим пространство Минковского  $\mathbb{R}_1^4$  со скалярным произведением

$$\langle X, Y \rangle = -x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

*Моделью Кэли — Клейна* называется множество векторов из  $\mathbb{R}_1^4$ , образующих единичный шар

$$K = \{(x_1, x_2, x_3, 1) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\},$$

лежащий в гиперплоскости  $x_4 = 1$ . Прямыми и плоскостями в этой модели служат пересечения шара  $K$  с евклидовыми прямыми и плоскостями, лежащими в гиперплоскости  $x_4 = 1$ .

Пусть  $V, W$  — два вектора из  $K$ . Положим  $V = (v, 1)$ ,  $W = (w, 1)$ . Тогда скалярное произведение указанных векторов в пространстве Минковского выражается через евклидово скалярное произведение по формуле  $\langle V, W \rangle = 1 - \langle v, w \rangle_{\mathbb{E}}$ .

Расстояние  $\rho(V, W)$  между векторами  $V, W$  в модели Кэли — Клейна определяется равенством

$$\operatorname{ch} \rho(V, W) = \frac{\langle V, W \rangle}{\sqrt{\langle V, V \rangle \langle W, W \rangle}}. \quad (3.1)$$

Плоскость в модели  $K$  можно определить как множество точек  $\mathcal{P} = \{V \in K : \langle V, N \rangle = 0\}$ , где  $N = (n, 1)$ ,  $\langle n, n \rangle_{\mathbb{E}} > 0$  — вектор нормали к плоскости  $\mathcal{P}$ . Точка  $(n, 1)$  называется *полосом*  $\mathcal{P}$  и лежит вне  $K$ .

В модели Кэли — Клейна рассмотрим плоскости  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  с нормальными векторами  $N, M$  соответственно. Каждый из четырех двугранных углов между плоскостями  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{Q}$  определяется соотношением

$$\cos(\widehat{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}) = \pm \frac{\langle N, M \rangle}{\sqrt{\langle N, N \rangle \langle M, M \rangle}}. \quad (3.2)$$

Пусть  $V_1 = (v_1, 1), V_2 = (v_2, 1), V_3 = (v_3, 1)$  — три некопланарных вектора в  $K$ . Тогда через них проходит единственная плоскость  $\mathcal{P} = \{V \in K : \langle V, N \rangle = 0\}$  с вектором нормали

$N = (n, 1)$ , где координаты вектора  $n$  однозначно определяются как решение системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}\langle v_1, n \rangle_{\mathbb{E}} - 1 &= 0, \\ \langle v_2, n \rangle_{\mathbb{E}} - 1 &= 0, \\ \langle v_3, n \rangle_{\mathbb{E}} - 1 &= 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

### 3.2. Длины ребер и условия существования

Рассмотрим гиперболический тетраэдр, имеющий группу симметрий  $S_4$  (см. рис. 1). Пусть гиперболические длины его ребер равны, соответственно,

$$\ell_{13} = \ell_{24} = a, \quad \ell_{14} = \ell_{23} = \ell_{12} = \ell_{34} = c.\tag{3.4}$$

**Теорема 2.** *Компактный гиперболический тетраэдр  $T(a, c)$  с группой симметрий  $S_4$  и заданными длинами ребер  $a, c$  (см. (3.4)) существует тогда и только тогда, когда  $1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c < 0$ .*

**Доказательство.** Симметрия  $S_4$  в  $\mathbb{E}^3$  естественным образом расширяется до симметрии  $S_4$  гиперболического пространства в модели Кэли — Клейна  $K$ . Последняя порождается композицией поворота на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $Ox_3$  и отражения в плоскости  $x_3 = 0, x_4 = 1$ . Запишем ее матричное представление:

$$C_4\sigma_h = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \overline{C_4\sigma_h} : (v, 1) \mapsto (C_4\sigma_h \cdot v, 1), \quad \overline{C_4\sigma_h} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поместим евклидов тетраэдр с группой симметрии  $S_4$  в  $K$ . Для этого каждой вершине соответствующего тетраэдра в  $\mathbb{E}^3$  добавим четвертую координату, равную единице:

$$\begin{aligned}V_1 &= \left( \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}, 1 \right), & V_2 &= \left( -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2}, 1 \right), \\ V_3 &= \left( -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, \frac{h}{2}, 1 \right), & V_4 &= \left( \frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{u}{2\sqrt{2}}, -\frac{h}{2}, 1 \right),\end{aligned}\tag{3.5}$$

при этом должно выполняться дополнительное условие

$$u^2 + h^2 < 4,\tag{3.6}$$

которое гарантирует, что все вершины  $V_i$  принадлежат  $K$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

По формуле (3.1) выразим длины ребер  $a, c$  через параметры  $u, h$ , связанные с выбором системы координат:

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} a &= \frac{4 + u^2 - h^2}{4 - u^2 - h^2}, \\ \operatorname{ch} c &= \frac{4 + h^2}{4 - u^2 - h^2}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Выполнение условий  $\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c \geq 1$  непосредственно следует из (3.7) и (3.6).

Разрешая систему уравнений (3.7) относительно  $u^2$  и  $h^2$ , получим следующие полезные соотношения:

$$\begin{aligned}u^2 &= \frac{8(\operatorname{ch} a - 1)}{1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch} c}, \\ h^2 &= -\frac{4(1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c)}{1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch} c}.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Последнее равенство означает, что длины ребер  $a$  и  $c$  гиперболического тетраэдра  $T(a, c)$ , допускающего симметрию  $S_4$ , не могут быть выбраны произвольно. Они должны удовлетворять неравенству

$$1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c < 0. \quad (3.9)$$

В предельном случае  $1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch} c = 0$  тетраэдр  $T(a, c)$  вырождается в плоский четырехугольник, который можно представить, если на рис. 1 параметр  $h$  взять равным нулю.

Отметим также, что в предположении (3.9) из равенств (3.8) следует выполнение условия (3.6). Поэтому неравенство (3.9) является необходимым и достаточным условием существования гиперболического тетраэдра  $T = T(a, c)$ , обладающего симметрией  $S_4$ .  $\square$

### 3.3. Двугранные углы

**Теорема 3.** Пусть гиперболический тетраэдр  $T(a, c)$  с группой симметрий  $S_4$  задан длинами ребер  $a, c$  (см. (3.4)). Его двугранные углы  $A, C$  выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{\operatorname{ch} a + \operatorname{ch}^2 a - 2 \operatorname{ch}^2 c}{1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch}^2 c}, \\ \cos C &= \frac{\operatorname{ch} c (1 - \operatorname{ch} a)}{1 + \operatorname{ch} a - 2 \operatorname{ch}^2 c}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

**Доказательство.** Используя координаты вершин (3.5), найдем квадраты косинусов двугранных углов тетраэдра  $T(a, c)$  по формулам (3.2) и (3.3)

$$\begin{aligned} \cos^2 A &= \left( \frac{(h^2 - 4)u^2 + 16h^2}{(4 - h^2)u^2 + 16h^2} \right)^2, \\ \cos^2 C &= \left( \frac{(h^2 + 4)u^2}{(4 - h^2)u^2 + 16h^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Согласно (3.7) частный случай правильного гиперболического тетраэдра реализуется при  $u^2 = 2h^2$ . В этом случае формулы (3.11) приобретают вид

$$\cos^2 A = \cos^2 C = \frac{(h^2 + 4)^2}{(12 - h^2)^2}.$$

С другой стороны, мы уже знаем из формул (2.2) и (3.7), что для правильного тетраэдра

$$\cos A = \frac{\operatorname{ch} a}{1 + 2 \operatorname{ch} a} = \frac{h^2 + 4}{12 - h^2}.$$

Это приводит к следующему выбору знаков при извлечении квадратных корней в (3.11):

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(h^2 - 4)u^2 + 16h^2}{(4 - h^2)u^2 + 16h^2}, \\ \cos C &= \frac{(h^2 + 4)u^2}{(4 - h^2)u^2 + 16h^2}. \end{aligned}$$

Подставляя соотношения (3.8) в последние два равенства, получаем искомые выражения для двугранных углов через длины ребер.  $\square$

### 3.4. Формулы для гиперболического объема

**Теорема 4.** Объем  $V$  гиперболического тетраэдра  $T(a, c)$  с группой симметрий  $S_4$ , заданного длинами ребер  $a, c$  (см. (3.4)), выражается любой из следующих формул:

$$V = \int_0^a \frac{a((1 + \operatorname{ch} a)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 c \operatorname{ch} a) + 4c \operatorname{sh} c \operatorname{ch} c \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}} da, \quad (3.12)$$

$$V = \int_{\operatorname{arch}(\operatorname{ch} a + 1)/2}^c \frac{2c(1 - \operatorname{ch} a)(1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch}^2 c) + 4a \operatorname{sh} c \operatorname{ch} c \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}} dc.$$

**Доказательство.** Рассмотрим гиперболический тетраэдр  $T(a, c)$  с группой симметрий  $S_4$ . Согласно теореме 2 область существования такого тетраэдра в системе координат  $\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c$  имеет вид  $\Omega = \{(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c) : \operatorname{ch} a > 1, \operatorname{ch} c > 1, 2 \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a - 1 > 0\}$  (см. рис. 3). Граница области  $\Omega$  состоит из двух лучей  $\{\operatorname{ch} a = 1, \operatorname{ch} c \geq 1\}$  и  $\{\operatorname{ch} a \geq 1, 2 \operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a + 1\}$ , на каждом из которых тетраэдр теряет размерность, вырождаясь в отрезок или плоский четырехугольник соответственно. Следовательно, на границе  $\Omega$  справедливо равенство  $V = V(T(a, c)) = 0$ .

Как известно (см., например, [8]), гиперболический тетраэдр однозначно определяется набором своих двугранных углов. Обозначим двугранные углы  $T(a, c)$  при ребрах  $a, c$  через  $A, C$  соответственно. Согласно теореме 3 двугранные углы однозначно определяются по длинам ребер. Дифференцируем объем как сложную функцию от длин ребер

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial a}, \quad \frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial V}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial C} \frac{\partial C}{\partial c}.$$

По формуле Шлефли (см., например, [15, с. 127]) дифференциал объема вычисляется как

$$dV = - \sum_{\theta} \frac{\ell_{\theta}}{2} d\theta = -a dA - 2c dC,$$

откуда

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -a, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -2c.$$

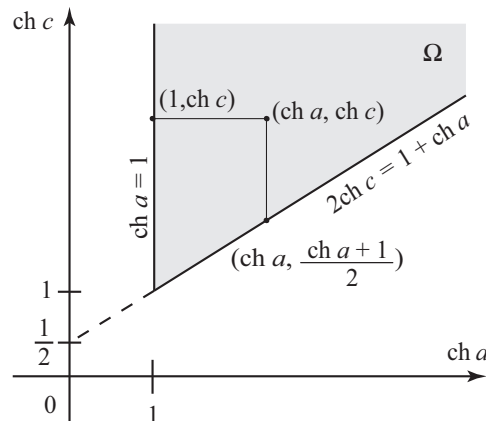


Рис. 3. Область существования гиперболического тетраэдра  $T(a, c)$  с группой симметрии  $S_4$ .

Из (3.10) находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial a} &= \frac{(1 + \operatorname{ch} a)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 c \operatorname{ch} a}{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} 2c) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}}, \\ \frac{\partial C}{\partial a} &= \frac{2 \operatorname{sh} c \operatorname{ch} c \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} 2c) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}}, \\ \frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{4 \operatorname{sh} c \operatorname{ch} c \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} 2c) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}}, \\ \frac{\partial C}{\partial c} &= \frac{(1 - \operatorname{ch} a)(1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch}^2 c)}{(\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} 2c) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}}.\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial a} &= \frac{a((1 + \operatorname{ch} a)^2 - 4 \operatorname{ch}^2 c \operatorname{ch} a) + 4c \operatorname{sh} c \operatorname{ch} c \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}}, \\ \frac{\partial V}{\partial c} &= \frac{2c(1 - \operatorname{ch} a)(1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch}^2 c) + 4a \operatorname{sh} c \operatorname{ch} c \operatorname{sh} a}{(\operatorname{ch} 2c - \operatorname{ch} a) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{ch} a)^2}}.\end{aligned}\tag{3.13}$$

Интеграл от дифференциальной формы

$$dV = \frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial c} dc\tag{3.14}$$

не зависит от пути интегрирования, а только от выбора начальной и конечной точек. Так как  $V = 0$  на границе области  $\Omega$ , то по формуле Ньютона — Лейбница объем равен интегралу от формы (3.14) по любой кусочно-гладкой кривой  $\gamma \subset \Omega$  с началом на границе  $\Omega$  и концом в точке с координатами  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c)$ . Подставляя выражения (3.13) в форму (3.14) и интегрируя ее по горизонтальному или вертикальному отрезку, соединяющему границу  $\Omega$  с точкой  $(\operatorname{ch} a, \operatorname{ch} c)$ , приходим к формулам (3.12).  $\square$

**З а м е ч а н и е.** В случае  $a = c$  последняя теорема приводит к уже известной формуле (2.5) для объема правильного гиперболического тетраэдра.

Действительно, из формул (3.14) и (3.13) полная производная функции  $V = V(a, c)$  по переменной  $a$  при условии  $a = c$  находится как

$$\frac{dV}{da} = \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial c} \frac{dc}{da} \Big|_{a=c} = \frac{3a \operatorname{sh} a}{(1 + 2 \operatorname{ch} a) \sqrt{(\operatorname{ch} a + 1)(3 \operatorname{ch} a + 1)}}.$$

Осталось заметить, что выражение справа совпадает с подынтегральной функцией в формуле (2.5).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Матвеев С.В., Фоменко А.Т.** Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 1. С. 5–22.
2. **Weeks J.** Hyperbolic structures on 3-manifolds. Ph. D. Thesis. Princeton: Princeton University, 1985.
3. **Thurston W.P.** The Geometry and topology of three-manifolds. Lecture Notes. Princeton: Princeton University, 1980. 502 p.
4. **Gabai D., Meyerhoff R., Milley P.** Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds // J. Amer. Math. Soc. 2009. Vol. 22. P. 1157–1215.

5. **Milnor J.** Hyperbolic geometry: the first 150 years // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1982. Vol. 6, iss. 1. P. 9–24.
6. **Cho Yu., Kim H.** On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // *Disc. Comp. Geom.* 1999. Vol. 22. P. 347–366.
7. **Murakami J., Yano M.** On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // *Comm. Anal. Geom.* 2005. Vol. 13. P. 379–200.
8. **Ushijima A.** Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra // *Non-Euclidean geometries* / eds. A. Prékopa, E. Molnár. 2006. P. 249–265. (Mathematics and Its Applications, vol. 581).
9. **Деревнин Д.А., Медных А.Д.** О формуле объема гиперболического тетраэдра // *Успехи мат. наук.* 2005. Т. 60, № 2. С. 159–160.
10. **Sforza G.** Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-proiettivi // *Modena Mem. Acc.* 1906. Ser. III, VIII (Appendice). P. 21–66 (in Italian).
11. **Abrosimov N.V., Mednykh A.D.** Volumes of polytopes in spaces of constant curvature // *Rigidity and Symmetry* / eds. R. Connelly, A. Ivić Weiss, W. Whiteley. N. Y.: Springer, 2014. P. 1–26. (Fields Institute Communications; vol. 70). doi: 10.1007/978-1-4939-0781-6\_1.
12. **Абросимов Н.В., Кудина Е.С., Медных А.Д.** Об объеме гиперболического октаэдра, допускающего  $\bar{3}$ -симметрию // *Тр. МИАН.* 2015. Т. 288. С. 7–15. doi: 10.1134/S037196851501001X.
13. **Johnson N.W.** *Geometries and transformations.* Cambridge: Cambridge University Press, 2017. 350 p. ISBN-10: 1107103401.
14. **Понарин Я.П.** *Элементарная геометрия: в 2-х томах. Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства.* М.: МЦНМО, 2015. 256 с.
15. **Винберг Э.Б.** *Геометрия 2. Современные проблемы математики. ВИНТИ (Итоги науки и техники).* Т. 29. 1988. 268 с.

Абросимов Николай Владимирович

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

Новосибирский государственный университет,

г. Новосибирск

e-mail: abrosimov@math.nsc.ru

Вьонг Хыу Бао

ведущий инженер

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

Новосибирский государственный университет,

г. Новосибирск

e-mail: vuonghuubao@live.com

Поступила 15.06.2017

## REFERENCES

1. Matveev S., Fomenko A. Isoenergetic surfaces of Hamiltonian systems, the enumeration of three-dimensional manifolds in order of growth of their complexity, and the calculation of the volumes of closed hyperbolic 3-manifolds. *Russian Math. Surveys*, 1988, vol. 43, no. 1, pp. 3–24. doi: 10.1070/RM1988v043n01ABEH001554.
2. Weeks J., Hyperbolic structures on 3-manifolds. *Ph. D. Thesis.* Princeton: Princeton University, 1985.
3. Thurston W.P. *The Geometry and topology of three-manifolds. Lecture notes.* Princeton, Princeton Univ., 1980, 502 p.
4. Gabai D., Meyerhoff R., Milley P. Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds. *J. Amer. Math. Soc.*, 2009, vol. 22, no. 4, pp. 1157–1215. doi: 10.1090/S0894-0347-09-00639-0.
5. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1982, vol. 6, no. 1, pp. 9–24. doi: 10.1090/S0273-0979-1982-14958-8.
6. Cho Yu., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra. *Disc. Comp. Geom.*, 1999, vol. 22, no. 3, pp. 347–366. doi: 10.1007/PL00009465.
7. Murakami J., Yano M. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron. *Comm. Anal. Geom.*, 2005, vol. 13, no. 2, pp. 379–400. doi: 10.4310/CAG.2005.v13.n2.a5.



8. Ushijima A. Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra. In: *Non-Euclidean geometries*, eds. A. Prékopa, E. Molnár. 2006, ser. Mathematics and Its Applications, vol. 581, pp. 249–265. doi: 10.1007/0-387-29555-0\_13.
9. Derevnin D.A., Mednykh A.D. A formula for the volume of a hyperbolic tetrahedron. *Russ. Math. Surv.*, 2005, vol. 60, no. 2, pp. 346–348. doi: 10.1070/RM2005v060n02ABEH000833.
10. Sforza G. Ricerche di estensionimetria differenziale negli spazi metrico-proiettivi. *Modena Mem. Acc.*, 1906. Ser. III, VIII (Appendice), pp. 21–66 (in Italian).
11. Abrosimov N.V., Mednykh A.D. Volumes of polytopes in spaces of constant curvature. In: *Rigidity and Symmetry*, eds. R. Connelly, A. Ivić Weiss, W. Whiteley. N. Y.: Springer, 2014, Ser. Fields Institute Communications, vol. 70, pp. 1–26. doi: 10.1007/978-1-4939-0781-6\_1.
12. Abrosimov N.V., Kudina E.S., Mednykh A.D. On the volume of hyperbolic octahedron with  $\bar{3}$ -symmetry. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 288, pp. 1–9. doi: 10.1134/S0081543815010010.
13. Johnson N.W. *Geometries and transformations*. Cambridge: Cambridge University Press, 2017, 350 p. ISBN-10: 1107103401.
14. Ponarin Ya.P. *Elementarnaya geometriya. Tom 2. Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva*. [Elementary geometry. Vol. 2: Stereometry, space transformation]. Moscow: Publ. MTsNMO, 2015, 256 p. ISBN: 978-5-4439-0369-9.
15. Alekseevskij D.V., Vinberg E.B., Solodovnikov A.S. *Geometry of Spaces of Constant Curvature*. In: *Geometry II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, vol. 29. ed. E. B. Vinberg, Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1993, pp. 1–138. doi: 10.1007/978-3-662-02901-5\_1.

The paper was received by the Editorial Office on June 15, 2017.

*Nikolai Vladimirovich Abrosimov*. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: abrosimov@math.nsc.ru.

*Vuong Huu Bao*, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: vuonghuubao@live.com.

УДК 515.162

**КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАЦЕПЛЕНИЙ МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ  
В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ<sup>1</sup>****А. А. Акимова, С. В. Матвеев, В. В. Таркаев**

В работе приводится полная таблица зацеплений в утолщенном торе  $T^2 \times I$ , минимальные диаграммы которых имеют не более 4 перекрестков. Метод построения таблицы заключается в следующем. Сначала перебираются все абстрактные четырехвалентные графы с не более чем 4 вершинами. Затем рассматриваются все неэквивалентные вложения этих графов в тор  $T^2$ . После этого каждая вершина каждого из полученных графов заменяется на перекресток одного из двух возможных типов, когда один участок графа проходит ниже или выше другого. Слова “выше” и “ниже” понимаются в смысле величины координаты соответствующей точки отрезка  $I$ . В результате этого процесса получается набор диаграмм зацеплений в  $T^2 \times I$ . Предложен ряд искусственных приемов, позволивших существенно сократить этот перебор и строго доказать полноту построенной таблицы. Различность полученных зацеплений доказывается с помощью обобщения полинома Кауффмана.

Ключевые слова: зацепление, утолщенный тор, таблица зацеплений.

**A. A. Akimova, S. V. Matveev, V. V. Tarkaev. Classification of links of small complexity in a thickened torus.**

The paper contains the table of links in the thickened torus  $T^2 \times I$  admitting diagrams with at most four crossings. The links are constructed by a three-step process. First we enumerate all abstract regular graphs of degree 4 with at most four vertices. Then we consider all nonequivalent embeddings of these graphs into  $T^2$ . After that each vertex of each of the obtained graphs is replaced by a crossing of one of the two possible types, when a segment of the graph lies lower or above another segment. The words “above” and “lower” are understood in the sense of the coordinate of the corresponding point in the interval  $I$ . As a result, we obtain a family of diagrams of knots and links in  $T^2 \times I$ . We propose a number of artificial tricks that essentially reduce the enumeration and offer a rigorous proof of the completeness of the table. A generalized version of the Kauffman polynomial is used to prove that all the links are different.

Keywords: link, thickened torus, link table.

MSC: 57M99

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-18-31

**Введение**

В последнее время все больше внимания уделяется изучению глобальных узлов, т.е. узлов в многообразиях, отличных от трехмерной сферы (см., например, [1–4]). Особый интерес вызывают узлы в утолщенных поверхностях (см. например, [5–8]). Объясняется это тем, что, как и в случае узлов в  $S^3$ , узлы в утолщенных поверхностях можно понимать как классы эквивалентности диаграмм. Это позволяет перенести на теорию узлов в утолщенных поверхностях понятия, задачи и подходы классической теории узлов. Вследствие этого новая теория является естественным обобщением классической.

В рамках диаграммного подхода возникает задача составления таблиц узлов и зацеплений в порядке возрастания их сложности, которая измеряется минимальным числом перекрестков задающих их диаграмм. В настоящей работе представлена полная таблица зацеплений в утолщенном торе  $T^2 \times I$ , минимальные диаграммы которых имеют не более четырех перекрестков. Метод построения таблицы заключается в следующем. Сначала перебираются все абстрактные четырехвалентные графы с не более чем 4 вершинами. Затем рассматриваются

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00690).

все неэквивалентные вложения этих графов в тор  $T^2$ . После этого каждая вершина каждого из полученных графов заменяется на перекресток одного из двух возможных типов, когда один участок графа проходит ниже или выше другого. Слова “выше” и “ниже” понимаются в смысле величины координаты соответствующей точки отрезка  $I$ .

В результате этого процесса мы получаем набор диаграмм зацеплений в  $T^2 \times I$ . Предложен ряд искусственных приемов, позволивших существенно сократить этот перебор и строго доказать полноту построенной таблицы. Различность полученных зацеплений доказывается с помощью обобщения полинома Кауффмана (см. [9; 10]).

Наш основной результат состоит в том, что всего в утолщенном торе существует не более 27 попарно неэквивалентных примарных зацеплений с двумя и более компонентами, обладающих диаграммами с не более чем 4 перекрестками (понятия эквивалентности и примарности определены далее). Зацепления с 1 компонентой в настоящей статье не рассматриваются, поскольку таблицы узлов малой сложности в утолщенном торе были построены нами ранее (см. [11–14]).

## 1. Используемые понятия

Понятия *m*-компонентного зацепления и его *диаграммы* в случае утолщенного тора вводятся так же, как и в классическом случае, с единственным отличием: диаграммы рассматриваются не на сфере  $S^2$ , а на торе  $T^2$ .

Зацепления  $L$  и  $L'$  в утолщенном торе  $\hat{T} = T^2 \times I$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм, переводящий пару  $\{\hat{T}, L\}$  в пару  $\{\hat{T}, L'\}$ .

*Проекцией зацепления* называется вложенный в тор регулярный четырехвалентный граф. Его вершины мы будем называть *перекрестками проекции*.

*Компонентой проекции*  $G \subset T^2$  называется замкнутый путь на графе  $G$ , проходящий через каждый перекресток по правилу “прямо вперед”.

*Гранью проекции*  $G \subset T^2$  называется компонента связности множества  $T^2 \setminus G$ .

Две *проекции эквивалентны*, если существует гомеоморфизм тора на себя, переводящий одну проекцию в другую.

Две *диаграммы зацеплений в утолщенном торе эквивалентны*, если одну в другую можно перевести при помощи конечной последовательности преобразований, состоящей из преобразований трех типов: гомеоморфизмов тора на себя, движений Рейдемейстера, одновременной смены типов всех перекрестков. Очевидно, что эквивалентным диаграммам могут отвечать неэквивалентные проекции и наоборот.

Диаграммы и проекции зацеплений мы будем изображать на квадрате, подразумевая, что его противоположные стороны отождествляются по параллельным переносам.

**О п р е д е л е н и е 1.** *Сложностью диаграммы или проекции* называется число ее перекрестков. Диаграмма зацепления  $L$  называется *минимальной*, если она имеет наименьшую сложность среди всех диаграмм зацепления  $L$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Зацепление в утолщенном торе называется *тривиальным*, если оно обладает диаграммой без перекрестков.

## 2. Типы зацеплений, не включаемые в таблицу

Перечислим пять типов зацеплений, которые мы не будем включать в таблицу.

Через  $\hat{T}$  обозначим утолщенный тор  $T^2 \times I$ .

**Локальные зацепления.** Зацепление  $L \subset \hat{T}$  называется *локальным*, если существует шар  $B \subset \hat{T}$  такой, что  $L \subset B$ . Локальные зацепления не включаются в таблицу, так как каждому локальному зацеплению в утолщенном торе отвечает зацепление в  $S^3$ .

**Кольцевые зацепления.** Зацепление  $L \subset \hat{T}$  называется *кольцевым*, если в  $\hat{T}$  существует неразбивающее собственное кольцо  $A$  такое, что  $A \cap L = \emptyset$ . Кольцевые зацепления не включаются в таблицу, так как каждому такому зацеплению отвечает зацепление в полнотории: разрезаем  $\hat{T}$  по кольцу  $A$ , получаем полноторие, содержащее исходное зацепление.

**Связная сумма зацепления в  $S^3$  и зацепления в утолщенном торе.** Классическое понятие связной суммы двух зацеплений в  $S^3$  очевидным образом обобщается на случай, когда одно из слагаемых — это зацепление в утолщенном торе, а другое — зацепление в  $S^3$ : удаляем в обоих слагаемых по шару, пересекающемуся с зацеплением по незаузленной дуге, и затем отождествляем образовавшиеся сферические компоненты края при помощи гомеоморфизма, переводящего выделенные точки в выделенные точки (под выделенными точками понимаются точки пересечения зацеплений с поверхностями удаляемых шаров). Зацепления, представимые в виде связной суммы, не включаются в таблицу, так как они однозначно определяются суммируемыми зацеплениями.

**Кольцевая связная сумма двух зацеплений в утолщенном торе** (понятие кольцевой суммы предложено С. В. Матвеевым (см. [15; 16])). Рассмотрим два зацепления, лежащие каждое в своем экземпляре утолщенного тора. Пусть в обоих утолщенных торах существуют неразбивающие собственные кольца, пересекающиеся с зацеплениями ровно в одной точке. Разрежем утолщенные торы по этим кольцам. Затем склеим получившиеся многообразия в новый утолщенный тор, отождествив экземпляры разрезающих колец, лежащие на краях склеиваемых многообразий. Склеивку выполним при помощи обращающих ориентацию гомеоморфизмов, отождествляющих выделенные точки, имеющиеся на краях склеиваемых многообразий. Зацепления, представимые в виде кольцевой суммы зацеплений в утолщенном торе, не включаются в таблицу, так как они однозначно определяются упорядоченным набором слагаемых, рассматриваемым с точностью до циклических перестановок (см. [15; 16]).

**Расщепляемые зацепления.** Зацепление  $L \subset \hat{T}$  называется *расщепляемым*, если существует поверхность  $F$ , вложенная в  $\hat{T}$ , обладающая следующими тремя свойствами:

- 1)  $F$  — это либо сфера, либо тор, параллельный  $\partial\hat{T}$ ;
- 2)  $F \cap L = \emptyset$ ;
- 3)  $F$  разделяет какие-то две компоненты зацепления  $L$ .

Расщепляемые зацепления не включаются в таблицу, так как они обладают диаграммами, являющимися результатом наложения более простых диаграмм. Диаграммы как бы рисуются каждая на своем прозрачном торе, а затем эти торы вкладываются один в другой.

Сформулируем очевидные и легко проверяемые достаточные условия того, что диаграмма задает зацепление одного из отбрасываемых типов.

**Лемма 1.** 1. Если проекция зацепления содержится в диске, то любая отвечающая ей диаграмма задает локальное зацепление.

2. Если на торе существует кольцо, содержащее проекцию зацепления, то любая отвечающая этой проекции диаграмма задает кольцевое зацепление.

3. Пусть проекция зацепления такова, что на торе имеется вложенная окружность  $l$ , обладающая следующими свойствами:  $l$  тривиальна,  $l$  трансверсально пересекается с проекцией ровно в двух точках,  $l$  делит проекцию на две части, в каждой из которых есть хотя бы один перекресток.

Тогда любая отвечающая этой проекции диаграмма либо неминимальна, либо задает зацепление, представимое в виде связной суммы нетривиального зацепления в утолщенном торе и нетривиального зацепления в  $S^3$ .

4. Пусть проекция зацепления такова, что на торе существуют две вложенные окружности  $l_1, l_2$ , обладающие следующими свойствами:  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ ,  $l_1$  и  $l_2$  нетривиальны, каждая из этих окружностей пересекается с проекцией трансверсально ровно в одной точке, и в совокупности они делят проекцию на две части, в каждой из которых имеется хотя бы один перекресток. Тогда любая диаграмма, отвечающая этой проекции, либо неминимальна, либо

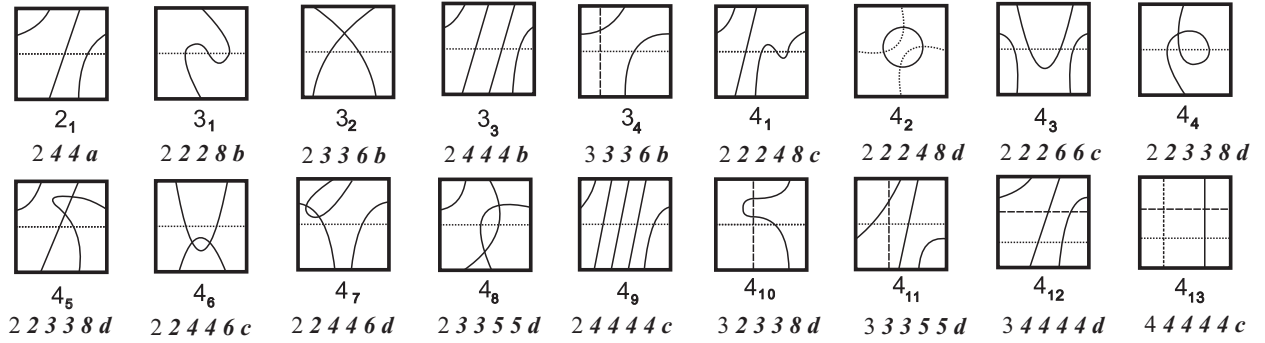


Рис. 1. Существенные проекции зацеплений на торе  $T^2$ .

задает зацепление, представимое в виде кольцевой суммы двух нетривиальных зацеплений в утолщенном торе.

5. Если проекция несвязна или одна из ее компонент пересекается с объединением остальных в единственной точке, то любая диаграмма, отвечающая этой проекции, задает расщепляемое зацепление.

6. Зацепление расщепляемо, если его компоненты можно разбить на два набора так, что на некоторой диаграмме рассматриваемого зацепления во всех перекрестках, где пересекаются компоненты из различных наборов, компоненты из первого набора проходят над компонентами из второго.

**О п р е д е л е н и е 3.** Проекция зацепления называется *существенной*, если она не является проекцией узла (т.е. число ее компонент больше 1) и к ней неприменим ни один из пп. 1–5 леммы 1.

### 3. Перечисление графов и проекций

**Теорема 1.** На торе имеется ровно 18 попарно неэквивалентных существенных проекций с не более чем 4 перекрестками (см. рис. 1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проведем в четыре этапа.

**Э т а п 1.** Перечисление абстрактных графов, вложения которых могут быть существенными проекциями.

**Лемма 2.** Любая существенная проекция зацепления с не более чем 4 перекрестками является вложением в тор одного из графов  $a, b, c, d$ , изображенных на рис. 2.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Убедимся в том, что любая существенная проекция одновременно обладает следующими тремя свойствами: она связна, на ней нет разбивающих пар ребер, на ней нет петель. Истинность доказываемой леммы будет обеспечена тем, что среди всех регулярных четырехвалентных графов с не более чем 4 вершинами имеется ровно 4 графа, которые одновременно обладают этими тремя свойствами. Это графы  $a, b, c, d$ , изображенные на рис. 2.

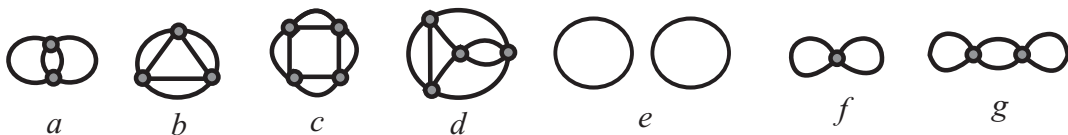


Рис. 2. Графы, используемые при построении существенных проекций.

Существенная проекция не может быть несвязной, так как в противном случае к ней был бы применим п. 5 леммы 1.

Предположим, что проекция  $G$  связна и на ней имеется разбивающая пара ребер  $\{e_1, e_2\}$ . Разрежем  $G$  по внутренним точкам ребер  $e_1, e_2$ , удалив из  $G$  малые окрестности точек разреза. Пара  $\{e_1, e_2\}$  разбивающая, следовательно, полученный в результате разрезания граф  $\bar{G}$  несвязен. Число его компонент связности равно двум, обозначим их через  $\bar{G}_1$  и  $\bar{G}_2$  (если бы компонент связности было три, то компоненты проекции, проходящие по ребрам  $e_1, e_2$ , не могли бы замкнуться, а больше трех компонент связности в результате разрезания двух ребер образоваться не может).

Компоненты связности множеств  $T^2 \setminus \bar{G}_1$  и  $T^2 \setminus \bar{G}_2$  могут быть либо дисками, либо кольцами с нетривиальными на торе осевыми линиями, либо торами с дыркой. По построению  $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \emptyset$ , следовательно, не может быть такого, чтобы каждый из этих графов разрезал тор на диски. Значит, возможны только две ситуации.

Первая, когда в дополнении хотя бы к одному из графов (пусть это  $\bar{G}_1$ ) присутствует тор с дыркой. Тогда  $\bar{G}_1$  содержится в диске. Рассмотрим окружность  $l \subset T^2 \setminus \bar{G}$ , изотопную краю этого диска. Если  $l \cap G = \emptyset$ , то к исходной проекции применим п. 1 леммы 1. Если  $l \cap G \neq \emptyset$ , то найдется изотопная  $l$  окружность  $l'$ , трансверсально пересекающаяся с  $G$  ровно в двух точках, лежащих внутри ребер  $e_1$  и  $e_2$ . В этом случае к  $G$  применим п. 3 леммы 1.

Вторая, когда торов с дыркой нет ни в  $T^2 \setminus \bar{G}_1$ , ни в  $T^2 \setminus \bar{G}_2$ . В этом случае в дополнениях обоих графов есть кольца с нетривиальными на торе осевыми линиями. Значит, тор является объединением двух колец таких, что  $\bar{G}_1$  содержится во внутренности одного, а  $\bar{G}_2$  — во внутренности второго. Тогда на торе существуют две параллельные нетривиальные окружности, изотопные краевым окружностям этих колец, трансверсально пересекающиеся с  $G$ , одна — во внутренней точке ребра  $e_1$ , другая — во внутренней точке ребра  $e_2$ . Значит, к  $G$  применим п. 4 леммы 1.

Следовательно, разбивающих пар ребер на существенной проекции быть не может.

Предположим, что на проекции  $G$  имеется петля  $e$ . Инцидентный петле перекресток обозначим через  $v$ . Возможны три ситуации:  $e$  ограничивает диск,  $e$  нетривиальна и подходит к  $v$  с противоположных сторон,  $e$  нетривиальна и подходит к  $v$  с неположенных сторон. Разберем эти ситуации.

Пусть  $e$  ограничивает диск. Если отличное от  $e$  ребро, инцидентное  $v$ , тоже является петлей, то проекция  $G$  либо несвязна, либо (когда вторая петля тривиальна) локальна, либо (когда вторая петля нетривиальна) является кольцевой. Во всех этих случаях проекция несущественна. Если отличные от  $e$  ребра, инцидентные перекрестку  $v$ , различны, то они составляют разбивающую пару, что, как установлено выше, противоречит существенности проекции  $G$ .

Пусть  $e$  образует нетривиальную окружность, подходящую к  $v$  с противоположных сторон. Тогда  $e$  является компонентой проекции, которая пересекается с остальными в единственной точке  $v$ . В этом случае к  $G$  применим п. 5 леммы 1.

Если окружность, образуемая петлей  $e$ , нетривиальна и подходит к  $v$  с неположенных сторон, то на  $T^2$  существует нетривиальная окружность, параллельная  $e$  и не имеющая с  $G$  общих точек. В этом случае к  $G$  применим п. 2 леммы 1.

Лемма 2 доказана.

Э т а п 2. Построение существенных проекций без двуугольных граней.

**Лемма 3.** *На торе существует ровно 9 проекций с числом перекрестков не более 4, которые существенны и не обладают двуугольными гранями.*

*Это проекции  $\mathbf{2}_1, \mathbf{3}_2, \mathbf{3}_3, \mathbf{3}_4, \mathbf{4}_8, \mathbf{4}_9, \mathbf{4}_{11}, \mathbf{4}_{12}, \mathbf{4}_{13}$  (см. рис. 1).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно лемме 2 существенная проекция  $G$  является вложением одного из графов  $a, b, c, d$ , изображенных на рис. 2. Разберем эти возможности.

*Проекция  $G$  является вложением графа  $a$  (см. рис. 2). На  $G$  нет двуугольных граней, значит, любая пара ребер проекции  $G$  является нетривиальной окружностью. То есть  $G$  —*

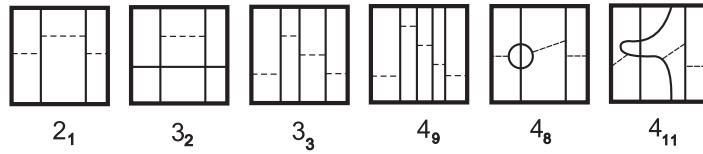


Рис. 3. Построение проекций применением  $M^{-1}$  вдоль пунктирных дуг.

это две нетривиальные окружности, пересекающиеся в двух точках. Следовательно, с точностью до гомеоморфизма  $G$  является объединением меридиана тора и кривой типа  $(1, 2)$ . Это проекция  $2_1$  (см. рис. 1).

Проекция  $G$  является вложением графа  $b$  (см. рис. 2). На проекции нет двуугольных граней, значит, каждое из двойных ребер является нетривиальной окружностью. При этом любые две из этих окружностей имеют единственную общую точку. Если все три окружности изотопны, то имеем проекцию  $3_3$  (см. рис. 3). Если две окружности изотопны друг другу и неизотопны третьей (два касающихся меридиана и пересекающая их параллель), то имеем проекцию  $3_2$  (см. рис. 3). Если все три окружности неизотопны (меридиан, параллель и кривая типа  $(1, 1)$ ), то имеем проекцию  $3_4$  (см. рис. 1).

Проекция  $G$  является вложением графа  $c$  (см. рис. 2). Двуугольников на проекции нет, значит, все двойные ребра являются нетривиальными окружностями. При этом они разбиты на две пары, каждая из которых состоит из двух окружностей, не пересекающихся между собой. Если окружности, входящие в разные пары, не изотопны, то имеем проекцию  $4_{13}$ . Если все четыре окружности попарно изотопны, то имеем проекцию  $4_9$  (см. рис. 3).

Проекция  $G$  является вложением графа  $d$  (см. рис. 2). На  $G$  есть два двойных ребра, не имеющих общих точек. В силу отсутствия двуугольников они являются непересекающимися нетривиальными окружностями, обозначим их через  $c_1$  и  $c_2$ . Оставшиеся 4 ребра проекции образуют окружность, обозначим ее через  $c_3$ . Окружность  $c_3$  пересекается по два раза и с  $c_1$ , и с  $c_2$ . Причем при обходе окружности  $c_3$  точки ее пересечения с другими окружностями чередуются. Если окружность  $c_3$  тривиальна, то имеем проекцию  $4_8$  (см. рис. 3). Если окружность  $c_3$  нетривиальна и неизотопна  $c_1$  и  $c_2$ , то имеем проекцию  $4_{12}$ . Если все три окружности попарно изотопны, то имеем проекцию  $4_{11}$  (см. рис. 3).

Лемма 3 доказана.

Э т а п 3. Построение существенных проекций с двуугольной гранью.

Обозначим через  $L$  преобразование проекций, аналогичное второму движению Рейдемейстера (см. рис. 2). На месте удаленного при помощи преобразования  $L$  двуугольника проведем точечную дугу с концами на разведенных кривых. Эту точечную дугу будем использовать для обозначения места применения обратного преобразования  $L^{-1}$ . Преобразование  $L$  уничтожает двуугольную грань проекции и уменьшает на 2 число ее перекрестков. Преобразование  $L^{-1}$  создает двуугольную грань и увеличивает на 2 число перекрестков.

Через  $M$  обозначим преобразование проекции, устраняющее один ее перекресток (см. рис. 4). При выполнении преобразования  $M$  проекция разрезается по устраняемому перекрестку, при этом объединяются две грани, содержащие пару инцидентных удаленному перекрестку вертикальных углов. Место выполнения преобразования  $M$  будем помечать пунктирной дугой. Пунктирная дуга, как и точечная, будет использоваться на рисунках для обозначения места выполнения обратного преобразования  $M^{-1}$ .

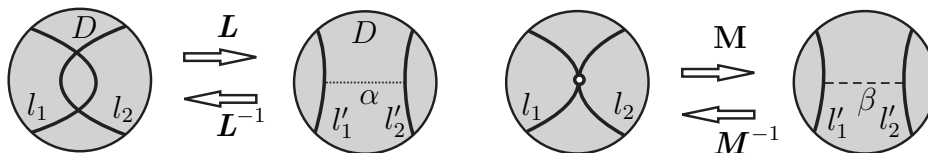


Рис. 4. Преобразования  $L$  и  $M$ .

Пусть на проекции  $G$  имеется хотя бы одна двуугольная грань. Через  $F(G)$  обозначим вложенный в  $T^2$  граф, получаемый из  $G$  в результате устранения всех имеющихся на  $G$  двуугольных граней, при помощи преобразования  $L$ .

**Лемма 4.** Пусть проекция  $G$ , обладающая хотя бы одной двуугольной гранью, существенна и ее сложность не превосходит 4. Тогда граф  $F(G)$  является вложением в тор одного из графов  $a$ ,  $e$ ,  $f$  и  $g$ , изображенных на рис. 2.

**Доказательство.** Согласно лемме 2 проекция  $G$  является вложением в тор одного из графов  $a, b, c, d$  (см. рис. 2). Разберем эти возможности.

$G$  является вложением графа  $a$ . В этом случае  $F(G)$  является вложением в тор графа  $e$  (см. рис. 2).

$G$  является вложением графа  $b$ . В этом случае  $F(G)$  является вложением графа  $f$  (см. рис. 2).

$G$  является вложением графа  $c$ . Если на проекции  $G$  имеется одна двуугольная грань или две двуугольные грани с общей вершиной, то получаем граф  $F(G)$ , являющийся вложением графа  $a$ . Если на проекции  $G$  имеются две двуугольные грани без общих вершин, то в результате двукратного применения преобразования  $L$  получаем граф  $F(G)$ , являющийся вложением графа  $e$  (см. рис. 2).

$G$  является вложением графа  $d$ . Если на проекции  $G$  имеется одна двуугольная грань, то в результате ее устранения получаем вложение графа  $g$ , если две, то получаем вложение окружности. Но преобразование  $L$  не изменяет числа компонент проекции, следовательно, исходная проекция в последнем случае является проекцией узла, что противоречит ее существенности.

Лемма 4 доказана.

Пусть на вложенном в тор графе проведены точечные дуги (одна или две) такие, что вершины графа (если они имеются) не являются концами этих дуг. Будем называть точечную дугу или пару точечных дуг *подходящей*, если отвечающее ей преобразование  $L^{-1}$  дает существенную проекцию.

**Лемма 5.** Пусть проекция  $G$ , обладающая хотя бы одной двуугольной гранью, существенна и ее сложность не превосходит 4. Тогда

1. Объединение графа  $F(G)$  и точечных дуг разбивает тор на диски.
2. Если граф  $F(G)$  содержит петлю, то на этой петле лежит один из концов точечной дуги.
3. Если граф  $F(G)$  снабжен одной точечной дугой, то либо концы точечной дуги располагаются на разных ребрах, либо она подходит к одному и тому же ребру с разных сторон.
4. Если граф  $F(G)$  снабжен парой точечных дуг, то сформулированное в предыдущем пункте условие выполняется хотя бы для одной из дуг.

**Доказательство.** В случае, если не выполняется условие 1, проекция  $G$  является локальной или кольцевой. Если не выполняются свойства 2–4, то проекция  $G$  обладает петлями.

Лемма 5 доказана.

**Лемма 6.** На торе существуют ровно 9 проекций с числом перекрестков не более чем 4, которые существенны и обладают хотя бы одной двуугольной гранью.

Это проекции  $3_1$ ,  $4_1$ – $4_7$ ,  $4_{10}$  (см. рис. 1).

**Доказательство.** Согласно лемме 4 граф  $F(G)$  является вложением одного из графов  $a, e, f, g$ , изображенных на рис. 2. Разберем эти возможности.



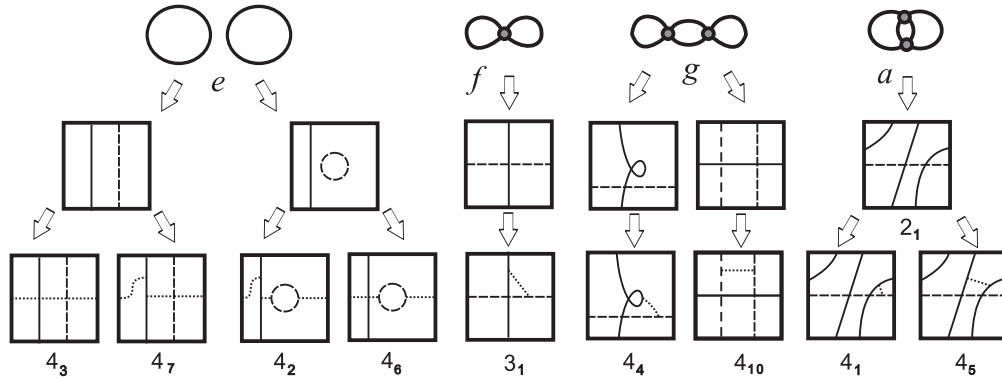


Рис. 5. Вложения в тор графов  $e$ ,  $f$ ,  $g$  и  $a$ . Точечные дуги показывают место выполнения преобразований  $L^{-1}$ .

$F(G)$  является вложением графа  $a$  (см. рис. 2). Граф  $F(G)$  — это две окружности, пересекающиеся в двух точках. Двугольных граней на  $F(G)$  нет (напомним, что граф  $F(G)$  получен в результате устранения всех двугольников), значит, обе окружности, составляющие  $F(G)$ , нетривиальны. Причем они и неизотопны, так как в противном случае имелась бы двугольная грань. Следовательно, с точностью до гомеоморфизма  $F(G)$  — это меридиан и кривая типа  $(1, 2)$ .

Все ребра рассматриваемой проекции равноправны. Поместим на какое-то из них один конец точечной дуги  $\alpha$ . Подходить к тому же ребру с другой стороны  $\alpha$  не может, так как  $F(G)$  разрезает тор на диски. Значит, второй конец дуги  $\alpha$  может располагаться либо на ребре, входящем в ту же окружность, что и ребро, на котором расположен первый конец, либо на ребре, входящем в другую окружность. Применив преобразование  $L^{-1}$ , получим соответственно проекции  $4_1$  и  $4_5$  (см. рис. 5).

$F(G)$  является вложением графа  $e$  (см. рис. 2). Согласно п. 1 леммы 5 объединение  $F(G)$  и точечных дуг делит тор на диски. Если обе окружности тривиальны, то обеспечить это нельзя. Значит, хотя бы одна из окружностей нетривиальна. Если обе окружности нетривиальны, то имеется два варианта проведения точечных дуг. В результате выполнения соответствующих преобразований  $L^{-1}$  получаются проекции  $4_3$  и  $4_7$ . Если одна окружность тривиальна, а другая нет, то имеются тоже два варианта проведения точечных дуг, дающие проекции  $4_2$  и  $4_6$  (см. рис. 5).

$F(G)$  является вложением графа  $f$  (см. рис. 2). Если хотя бы одна из петель ограничивает диск, то на графе  $F(G)$  и, следовательно, на  $G$  будет всего одна компонента, что противоречит существенности проекции  $G$ . Значит, обе петли нетривиальны. В силу п. 2 леммы 5 необходимо, чтобы точечная дуга имела концы на различных петлях. В результате выполнения соответствующего такой дуге преобразования  $L^{-1}$  получим проекцию  $3_1$ .

$F(G)$  является вложением графа  $g$  (см. рис. 2). На графе  $F(G)$  имеется две петли, значит, в силу п. 2 леммы 5 концы точечной дуги лежат на различных петлях. Двугольных граней на  $F(G)$  нет, значит, двойное ребро составляет нетривиальную окружность. Если обе петли тривиальны, то на графе  $F(G)$  имеется всего одна компонента, следовательно, проекция  $G$  является в этом случае проекцией узла, т. е. несущественна. Пусть одна петля тривиальна, а другая нет. Тогда нетривиальные окружности, образуемые двойным ребром и петлей, могут быть изотопными или неизотопными. Если они изотопны (два касающихся меридиана), то на  $F(G)$  опять имеется единственная компонента. Если неизотопны, то в результате выполнения преобразования  $L^{-1}$  получим проекцию  $4_4$ . Пусть обе петли нетривиальны. Тогда  $F(G)$  — это два меридиана, пересеченные параллелью. В этом случае получим проекцию  $4_{10}$  (см. рис. 5).

Лемма 6 доказана.

Э т а п 4. Доказательство различности построенных существенных проекций.

Докажем, что все проекции на рис. 1 попарно неэквивалентны. Грани проекции являются многоугольниками. Сопоставим каждой проекции строку  $\{m i_1 i_2 \dots i_k x\}$ , в которой в начале стоит число компонент проекции, затем располагаются упорядоченные по неубыванию числа углов ее граней, и в конце стоит тип графа проекции  $x \in \{a, b, c, d\}$ . Строки, отвечающие построенным проекциям, приведены на рис. 1. Таких строк достаточно, чтобы различить любые две проекции на рис. 1, за исключением пары  $(4_4, 4_5)$ . Но проекции  $(4_4, 4_5)$  неэквивалентны, потому что в первом случае треугольные грани имеют общее ребро, а во втором не имеют.

Теорема 1 доказана.

#### 4. Основной результат

О п р е д е л е н и е 4. *Зацепление*  $L \subset T^2 \times I$  называется *условно примарным*, если его минимальная диаграмма реализуется на существенной проекции.

**Теорема 2.** *В утолщенном торе существует ровно 27 различных условно примарных зацеплений, сложность которых не превосходит 4. Задающие их диаграммы изображены на рис. 6.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для построения полного списка условно примарных зацеплений в утолщенном торе, сложность которых не превосходит 4, достаточно рассмотреть все существенные проекции, построенные при доказательстве теоремы 1 (см. рис. 1), и на каждой из них перебрать все возможные варианты типов перекрестков (т. е. выбора верхней и нижней дуги). Приводимые ниже соображения позволили нам избежать полного перебора всех вариантов, не потеряв ни одной минимальной диаграммы.

1. Каждая компонента зацепления содержит оба типа перекрестков (т. е. в каком-то перекрестке она проходит сверху, а в каком-то снизу). В противном случае согласно п. 6 леммы 1 зацепление является расщепляемым.

2. При рассмотрении каждой проекции тип одного перекрестка можно зафиксировать, в силу чего для проекции с  $n$  перекрестками достаточно рассмотреть  $2^{n-1}$  вариантов.

3. Перекрестки в вершинах двугольной грани должны быть такими, чтобы второе преобразование Рейдемейстера было к этому двугольнику неприменимо.

Выполнив перебор и отбросив очевидные дубликаты, мы получили набор, состоящий из 27 диаграмм, изображенных на рис. 6.

Различность всех зацеплений на рис. 6 можно показать, используя обобщенный полином Кауффмана (см. [9–12]). Напомним его определение.

Пусть  $L$  — зацепление в утолщенном торе и  $D$  — его диаграмма. Тогда

$$K(L, a, x) = (-a)^{-3w(D)} \sum_s a^{\alpha(s)-\beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta(s)},$$

где

- сумма, как и в случае зацеплений в  $S^3$ , берется по всем состояниям диаграммы  $D$ , т. е. по всем возможным вариантам расстановки маркеров типа  $a$  и типа  $b$  в ее перекрестках;
- $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  обозначают соответственно число маркеров типа  $A$  и типа  $B$  в состоянии  $s$ ;  $\gamma(s)$  и  $\delta(s)$  обозначают соответственно число тривиальных и нетривиальных окружностей, полученных в результате разрешения всех перекрестков диаграммы; выбор способа разрешения перекрестка определяется маркером, сопоставленным этому перекрестку в состоянии  $S$ ;
- $w(D)$  обозначает число скручивания диаграммы  $D$ .

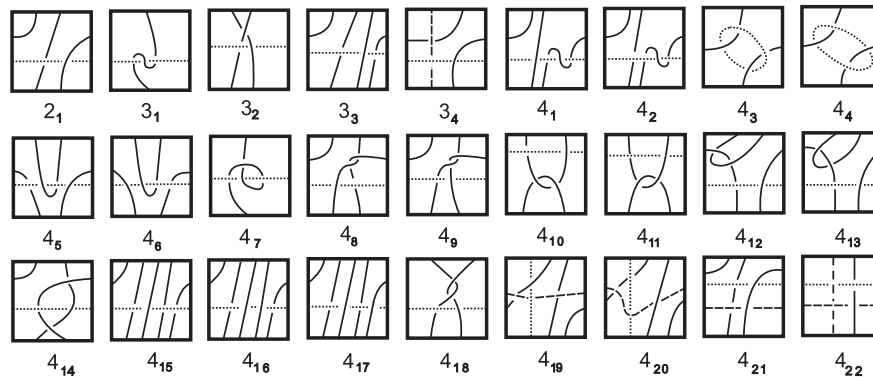


Рис. 6. Условно примарные зацепления в  $T^2 \times I$  сложности, не превосходящей 4.

Значения полиномов Кауффмана, приведенные в табл. 1, были получены путем прямого вычисления. Все полиномы оказались различными. Следовательно, все зацепления, приведенные на рис. 6, попарно неэквивалентны.

Теорема 2 доказана.

Будем говорить, что зацепление  $L \subset T^2 \times I$  имеет тип  $(m; n)$ , если  $L$  состоит из  $m$  компонент и его минимальная диаграмма имеет точно  $n$  перекрестков, и что проекция  $G \subset T^2$  имеет тип  $(m; n)$ , если на ней имеется точно  $m$  компонент и  $n$  перекрестков. В табл. 2 приведено количество проекций и зацеплений типа  $(m; n)$ , где число компонент  $m = 2, 3, 4$  и число перекрестков  $n = 2, 3, 4$ . Зацепления типов  $(m; 1)$ , где  $m \geq 2$ , и  $(m; n)$ , где  $m \geq 5, n \leq 4$ , существуют, но, как несложно проверить, являются расщепляемыми и по этой причине были отброшены.

### 5. О примарности табличных зацеплений

**О п р е д е л е н и е 5.** Зацепление в утолщенном торе называется *составным*, если оно не представимо ни в виде связной суммы нетривиальных зацеплений в  $\mathbb{S}^3$  и в утолщенном торе, ни в виде кольцевой суммы двух нетривиальных зацеплений в утолщенном торе. Зацепление в утолщенном торе называется *примарным*, если оно не является ни локальным, ни кольцевым, ни расщепляемым, ни составным.

**Теорема 3.** В утолщенном торе существует не более чем 27 примарных зацеплений, сложность которых не превосходит 4.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Ясно, что примарное зацепление является условно примарным (см. определение 4). Следовательно, число примарных зацеплений сложности не более 4 не превосходит числа условно примарных зацеплений.

Теорема 3 доказана.

Вопрос о том, содержит ли построенная таблица непримарные зацепления, остается открытым. Мы можем утверждать только то, что ни одно из построенных зацеплений не относится к четырем из пяти отбрасываемых типов (кроме представимости в виде кольцевой суммы). Для доказательства этого достаточно убедиться, что на их дополнительных пространствах имеется гиперболическая структура. Действительно, если зацепление локальное или расщепляемое, то в его дополнительном пространстве имеется существенная сфера или существенный тор. Если зацепление кольцевое или представимое в виде связной суммы зацепления в  $S^3$  и зацепления в утолщенном торе, то в его дополнительном пространстве имеется существенное кольцо. Во всех этих случаях дополнительное пространство гиперболической структурой не обладает.

При помощи компьютерной программы “SnapPy” (см. [17]) была проведена проверка наличия гиперболической структуры на дополнительных пространствах зацеплений, включенных

**Полиномы примарных зацеплений в  $T^2 \times I$ ,  
минимальные диаграммы которых имеют  $n \leq 4$  перекрестков,  
представленных на рис. 6**

- 2<sub>1</sub>:  $(-a^{-4} - 2 - a^4) + 2x^2$   
 3<sub>1</sub>:  $(-a^{-16} + a^{-12} - a^{-8} - a^{-6})x$   
 3<sub>2</sub>:  $(a^{-8} - a^{-4} - 2a^{-2})x$   
 3<sub>3</sub>:  $(a^{-8} + a^{-4} - a^{-2} + 1)x - a^{-4}x^3$   
 3<sub>4</sub>:  $(-a^{-10} + a^{-6} + 3a^{-2} + a^2) - 3a^{-2}x^2$   
 4<sub>1</sub>:  $(-a^{-16} - 2a^{-4} - 1) + (a^{-12} - a^{-8} + 2a^{-4})x^2$   
 4<sub>2</sub>:  $(-a^{-20} - a^{-12} - 2a^{-8}) + (a^{-20} - a^{-16} + a^{-12} + a^{-8})x^2$   
 4<sub>3</sub>:  $(-a^{-18} - a^{-16} + 2a^{-12} - a^{-8} - a^{-6})x$   
 4<sub>4</sub>:  $(a^{-8} - 2a^{-4} - 2a^{-2} + 1 + a^2 - a^6)x$   
 4<sub>5</sub>:  $(a^{-8} - 2 + a^8) + (-a^{-4} + 3 - a^4)x^2$   
 4<sub>6</sub>:  $(2a^{-16} - 2a^{-8}) + (a^{-20} - 2a^{-16} + a^{-12} + a^{-8})x^2$   
 4<sub>7</sub>:  $(a^{-8} - 2a^{-4} - a^{-2} + 1 + a^2 - a^4 - a^6)x$   
 4<sub>8</sub>:  $(a^{-12} - 2a^{-8} - 3a^{-4}) + (-a^{-12} + a^{-8} + 2a^{-4})x^2$   
 4<sub>9</sub>:  $(-a^{-16} + a^{-12} - 3a^{-4} - 1) + (-a^{-8} + 3a^{-4})x^2$   
 4<sub>10</sub>:  $(-a^{-6} - 2a^{-4} - a^{-2} + 2 + a^2 - a^6)x$   
 4<sub>11</sub>:  $(-a^{-18} + a^{-14} + 2a^{-12} - a^{-10} - 2a^{-8} - a^{-6})x$   
 4<sub>12</sub>:  $(-2a^{-4} - 1 + 2a^4 + a^8) + (a^{-4} + 2 - 2a^4)x^2$   
 4<sub>13</sub>:  $(a^{-20} + a^{-16} - 2a^{-12} - a^{-8} + a^{-4}) + (-2a^{-16} + 3a^{-12})x^2$   
 4<sub>14</sub>:  $(a^{-8} - a^{-4} - 4 - a^4 + a^8) + (-a^{-4} + 4 - a^4)x^2$   
 4<sub>15</sub>:  $(a^{-12} - a^{-4}) + (-a^{-12} - 2a^{-8})x^2 + a^{-8}x^4$   
 4<sub>16</sub>:  $(-a^{-4} - 1 - a^4)x^2 + x^4$   
 4<sub>17</sub>:  $(a^{-8} - 2 + a^8) + (-2a^{-4} + 1 - 2a^4)x^2 + x^4$   
 4<sub>18</sub>:  $(a^{-14} - a^{-10} + 2a^{-6} + 2a^{-4})x$   
 4<sub>19</sub>:  $(a^{-14} - 2a^{-10} + 2a^{-4} - a^{-2})x + a^{-6}x^3$   
 4<sub>20</sub>:  $(-a^{-6} - a^{-2} + 2)x + a^{-2}x^3$   
 4<sub>21</sub>:  $(-a^{-6} + a^{-2} + 4 + a^2 - a^6)x$   
 4<sub>22</sub>:  $(a^{-8} - 2a^{-4} - 6 - 2a^4 + a^8) + 6x^2$

**Количество проекций и зацеплений типа  $(m; n)$  на торе**

Компонент	Перекрестки	Проекции	Зацепления
2	2	1	1
	3	3	3
	4	9	17
3	3	1	1
	4	3	4
4	4	1	1
Всего		13	27

в таблицу. Ответ во всех случаях оказался положительным. Следовательно, все табличные зацепления не являются ни локальными, ни кольцевыми, ни расщепляемыми, ни представимыми в виде связной суммы зацепления в утолщенном торе с зацеплением в  $S^3$ .

Вопрос о непредставимости табличных зацеплений в виде кольцевой суммы на настоящий момент остается открытым.

В табл. 3 приведены изометрические сигнатуры и величины гиперболических объемов дополнительных пространств табличных зацеплений. Изометрическая сигнатура (см. [18]) — это один из способов описания триангуляции многообразия. Приведенные сигнатуры получены при помощи компьютерной программы “3-Manifold Recognizer” (см. [19]). Величины гиперболических объемов были вычислены при помощи компьютерной программы “SnapPy” (см. [17]).

Т а б л и ц а 3

**Изометрические сигнатуры и гиперболические объемы дополнительных пространств табличных зацеплений**

Имя	Изометрическая сигнатура	Гиперболический объем
2 <sub>1</sub> :	<i>ivLAPQcdefehgghhbbabaabb</i>	7.32772475342
3 <sub>1</sub> :	<i>mLvwwAQQQcgfhhkikjlllaaaaaaaaa</i>	7.3277247534
3 <sub>2</sub> :	<i>mLvLAzAQQcegfgiikjllklaaaacccaaccc</i>	7.327724753
3 <sub>3</sub> :	<i>mLvwwAQQQcgfhhjjikklllaaaaaaaaa</i>	8.9293178231
3 <sub>4</sub> :	<i>mvLAzPwQQdefeghhjkllklbbabbbbaaaab</i>	10.1494160641
4 <sub>1</sub> :	<i>qvLALLPzPAQkdefhkhimlonlppnopbbaabbbbaaaabbbb</i>	10.6669791338
4 <sub>2</sub> :	<i>qLLvwPvAAQQkcefjhiiolmnlppoppaaacccaaccccccc</i>	8.9293178231
4 <sub>3</sub> :	<i>qLvwwAzAMQQkcgjggnlompklmoppoaaacccaacccaaccccc</i>	10.1494160641
4 <sub>4</sub> :	<i>qLvwwAzAAQQkcgjggnlmmklppoppoaaacccaacccaaccccc</i>	10.991587130
4 <sub>5</sub> :	<i>qvLALLzAPAQkdefgkhimlonlppnopbbaabbbbaaaabbbb</i>	12.1792992769
4 <sub>6</sub> :	<i>qLvwwAMAPAQkcgjgihhmnklopoppoaaacccaacccaacccaac</i>	10.666979134
4 <sub>7</sub> :	<i>qLvwwALwQQQkcgfgnlpjkmkonpnopaacccaacccaaccccc</i>	10.149416064
4 <sub>8</sub> :	<i>qLLvwLAzQPQkcefijlnkjonmtpoppoaaacccaacccaaccccc</i>	7.32772475342
4 <sub>9</sub> :	<i>qvLALvPQMLQkdefghjijmlnmpoopppbaabbbbaaaabbbb</i>	11.7518361653
4 <sub>10</sub> :	<i>qLvLwAzAQQkcfjggljkpompnopppaaacccaacccaaccccc</i>	10.149416064
4 <sub>11</sub> :	<i>qLvLwAzAQQkcfjggljkpompnopppaaacccaacccaaccccc</i>	10.1494160641
4 <sub>12</sub> :	<i>qLLvwLAzAQQkcefijlnkjonmtpoppoaaacccaacccaaccccc</i>	10.1494160641
4 <sub>13</sub> :	<i>qvLALvPQMLQkdefghjijmlnmpoopppbaabbbbaaaabbbb</i>	12.8448530047
4 <sub>14</sub> :	<i>qvLALvPQMLQkdefhhiijmlnmpoopppbaabbbbaaaabbbb</i>	13.9396856802
4 <sub>15</sub> :	<i>qLLvwPvAAQQkcefjhiiolmnlppoppoaaacccaaccccccc</i>	9.4918896866
4 <sub>16</sub> :	<i>qLvwwAMAPAQkcgkghhmlnkopnpopaacccaacccaacccaac</i>	11.147218226
4 <sub>17</sub> :	<i>qvLALLPzPAQkdefhkhimlonlppoopbbaabbbbaaaabbbb</i>	14.655449507
4 <sub>18</sub> :	<i>qLvwwAAMLQQkcgfhhkknmlomppoaaacccaacccaaccccc</i>	10.149416064
4 <sub>19</sub> :	<i>qLvwwAMQPPPkcgfhhikjjnmpoppoaaacccaacccaaccca</i>	12.709173114
4 <sub>20</sub> :	<i>qLvwwAMMMPQkcgfhhjknmkomppoaaacccaacccaaccccc</i>	10.149416064
4 <sub>21</sub> :	<i>qLvwwPzLQQQkcgfgpmlomknlmpopaacccaacccaaccccc</i>	7.328
4 <sub>22</sub> :	<i>qvLAzPwwQLQkdefeghhjnlmpoopppbabbbbaabaabaab</i>	14.655449507

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дроботухина Ю. В.** Аналог многочлена Джоунса для зацеплений в  $RP^3$  и обобщение теоремы Кауффмана — Мурасуги // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, № 3. С.171–191.
2. **Miyazaki Katura** Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 313, no. 2. P. 785–804.
3. **Gabrovšek Boštjan** Tabulation of prime knots in lens spaces // Mediterr. J. Math. 2017. Vol. 14, no. 2. Art. 88. 24 p.
4. **Costantino F.** Colored Jones invariants of links in  $\#_k S^2 \times S^1$  and the Volume Conjecture // J. Lond. Math. Soc. (2). 2007. Vol. 76, no. 2. P. 1–15.
5. **Kuperberg G.** What is a virtual link? // Algebr. Geom. Topol. 2003. Vol. 3. P. 587–591.
6. **Матвеев С.В.** Разложение гомологически тривиальных узлов в  $F \times I$  // Докл. АН. 2010. Т. 433, № 1. С. 13–15.
7. **Turaev V.** Cobordism of knots on surfaces // J. Topol. 2008. Vol. 1, no. 2. P. 285–305.
8. **Adams Colin, Fleming Thomas, Levin Michael, Turner Ari M.** Crossing number of alternating knots in  $S \times I$  // Pacific J. Math. 2002. Vol. 203, no. 1. P. 1–22.
9. **Kauffman L.H.** State models and the Jones polynomial // Topology. 1987. Vol. 26, no. 3. P. 395–407.
10. **Dye H. A., Kauffman, Louis H.** Minimal surface representations of virtual knots and links // Algebr. Geom. Topol. 2005. Vol. 5. P. 509–535.
11. **Акимова А.А., Матвеев С.В.** Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings // J. Knot Theory Ramifications. 2014. Vol. 23, no. 6, 1450031. 19 p.
12. **Акимова А.А., Матвеев С.В.** Классификация узлов малой сложности в утолщенном торе // Вестн. НГУ. Сер. “Математика. Механика. Информатика”. 2012. Т. 12, № 3. С. 10–21.
13. **Акимова А.А.** Классификация узлов в утолщенном торе, минимальные диаграммы которых не лежат в кольце и имеют пять перекрестков // Вестн. ЮУрГУ. Сер. “Математика. Механика. Физика”. 2013. Т. 5, № 1. С. 8–11.
14. **Акимова А.А.** Классификация узлов в утолщенном торе, минимальные октаэдральные диаграммы которых не лежат в кольце // Вестн. ЮУрГУ. Сер. “Математика. Механика. Физика”. 2015. Т. 7, № 1. С. 5–10.
15. **Matveev S.V.** Prime decompositions of knots in  $T \times I$  // Topol. Appl. 2011. Vol. 159, no. 7. P. 1820–1824.
16. **Korablev Ph., Matveev S.V.** Reductions of knots in thickened surfaces and virtual knots // Dokl. Math. 2011. Vol. 83, no. 2. P. 262–264.
17. SnapPy 2.5.4 documentation [e-resource]. URL: <http://www.math.uic.edu/t3m/SnapPy>.
18. **Burton B.** The pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations // Proc. of the Twenty-seventh annual symposium on computational geometry (SCG’11). NY: ACM, 2011. P. 153–162.
19. Atlas of 3-Manifolds [site] / Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University. URL: <http://www.matlas.math.csu.ru>.

Акимова Алена Андреевна

канд. физ.-мат. наук

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

e-mail: akimovaaa@susu.ru

Поступила 31.08.2017

Матвеев Сергей Владимирович

д-р физ.-мат. наук, профессор, академик РАН

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Челябинский государственный университет, Челябинск

e-mail: matveev@csu.ru

Таркаев Владимир Викторович

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

старший науч. сотрудник

Челябинский государственный университет, Челябинск

e-mail: v.tarkaev@gmail.com

## REFERENCES

1. Drobotukhina Yu.V. An analogue of the Jones polynomial for links in  $RP^3$  and a generalization of the Kauffman–Murasugi theorem. *Leningrad Math. J.*, 1991, vol. 2, no. 3, pp. 613–630.
2. Miyazaki Katura. Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1989, vol. 313, no. 2, pp. 785–804. doi: 10.1090/S0002-9947-1989-0997679-2.
3. Gabrovšek Boštjan. Tabulation of prime knots in lens spaces. *Mediterr. J. Math.*, 2017, vol. 14, no. 2, Art. 88, 24 p. doi: 10.1007/s00009-016-0814-5.
4. Costantino F. Colored Jones invariants of links in  $\#_k S^2 \times S^1$  and the volume conjecture. *J. Lond. Math. Soc.* (2), 2007, vol. 76, no. 2, pp. 1–15. doi: 10.1112/jlms/jdm029.
5. Kuperberg G. What is a virtual link? *Algebr. Geom. Topol.*, 2003, vol. 3, pp. 587–591.
6. Matveev S.V. Decomposition of homologically trivial knots in  $F \times I$ . 2010, *Dokl. Math.*, vol. 82, no. 1, pp. 511–513. doi: 10.1134/S1064562410040034.
7. Turaev V. Cobordism of knots on surfaces. *J. Topol.*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 285–305. doi: 10.1112/jtopol/jtn002.
8. Adams Colin, Fleming Thomas, Levin Michael, Turner Ari M. Crossing number of alternating knots in  $S \times I$ . *Pacific J. Math.*, 2002, vol. 203, no. 1, pp. 1–22.
9. Kauffman L.H. State models and the Jones polynomial. *Topology*, 1987, vol. 26, no. 3, pp. 395–407. doi: 10.1016/0040-9383(87)90009-7.
10. Dye H. A., Kauffman, Louis H. Minimal surface representations of virtual knots and links. *Algebr. Geom. Topol.*, 2005, vol. 5, pp. 509–535. doi: 10.2140/agt.2005.5.509.
11. Akimova A.A., Matveev S.V. Classification of genus 1 virtual knots having at most five classical crossings. *J. Knot Theory Ramifications*, 2014, vol. 23, no. 6, 1450031, 19 p. doi: 10.1142/S021821651450031X.
12. Akimova A.A., Matveev S.V. *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 202, no. 1, pp. 1–12. doi: 10.1007/s10958-014-2029-2.
13. Akimova A.A. Classification of knots in the thickened torus with minimal diagrams which are not in a circle and have five crossings. *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 8–11 (in Russian).
14. Akimova A.A. Classification of knots in a thickened torus with minimal octahedron diagrams which are not contained in an annulus. *Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz.*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 5–10 (in Russian).
15. Matveev S.V. Prime decompositions of knots in  $T \times I$ . *Topol. Appl.*, 2011, vol. 159, no. 7, pp. 1820–1824. doi: 10.1016/j.topol.2011.04.022.
16. Korablev Ph., Matveev S.V. Reductions of knots in thickened surfaces and virtual knots. *Dokl. Math.*, 2011, vol. 83, no. 2, pp. 262–264. doi: 10.1134/S1064562411020414.
17. SnapPy 2.5.4 documentation [e-resource]. Available at: <http://www.math.uic.edu/t3m/SnapPy>.
18. Burton B. The pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations. *Proc. of the Twenty-seventh annual symposium on computational geometry (SCG'11)*, NY, ACM, 2011, pp. 153–162. doi: 10.1145/1998196.1998220.
19. Atlas of 3-Manifolds [site], Laboratory of Quantum Topology of Chelyabinsk State University. Available at: <http://www.matlas.math.csu.ru>.

The paper was received by the Editorial Office on October 9, 2017.

*Alena Andreevna Akimova*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: akimovaaa@susu.ru.

*Sergei Vladimirovich Matveev*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RAS Academician, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: matveev@csu.ru.

*Vladimir Viktorovich Tarkaev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: v.tarkaev@gmail.com.

УДК 512.552.7

**ОПИСАНИЕ ГРУППЫ ЕДИНИЦ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ГРУППОВОГО КОЛЬЦА ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ПОРЯДКА 16<sup>1</sup>****Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко**

Работа посвящена описанию группы  $U$  единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка 16. Группы единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 2 и 4 тривиальны, а группа единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка 8 хорошо известна. Поэтому случай циклической группы порядка 16 является первым, для которого не проведено полное исследование строения группы единиц целочисленного группового кольца циклической 2-группы. При изучении групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп порядков более 16 обязательно возникнет потребность в информации о строении групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп меньших порядков, в частности, порядка 16. Таким образом, можно сказать, что случай группы порядка 16 является базисным для дальнейших исследований. Описание группы  $U$  получено в терминах локальных единиц, определяемых характеристиками циклической группы порядка 16 и единицами кольца целых кругового поля  $\mathbf{Q}_{16}$ , полученного присоединением к полю рациональных чисел примитивного корня из 1 степени 16. Поэтому потребовалось весьма подробное изучение строения группы единиц кольца целых кругового поля  $\mathbf{Q}_{16}$ . Кроме того в работе получены важные соотношения между коэффициентами произвольной единицы из  $U$ . Эти соотношения, очевидно, послужат образцами и примерами для получения подобных соотношений при исследовании единиц для случаев 2-групп порядков, больших 16. Наконец, отметим, что один из порождающих группы  $U$  является особой единицей, которая определяется двумя единицами кольца целых кругового поля  $\mathbf{Q}_{16}$ . Эта единица является произведением двух локальных единиц, каждая из которых не содержится в  $U$ .

Ключевые слова: циклическая группа, групповое кольцо, единица группового кольца, круговое поле, кольцо целых поля, единица кольца целых кругового поля, целочисленное групповое кольцо.

**R. Zh. Aleev, O. V. Mitina, T. A. Khanenko. Description of the unit group of the integral group ring of a cyclic group of order 16.**

The paper is devoted to the description of the group of units of the integral group ring of a cyclic group of order 16. The groups of units of the integral group rings of cyclic groups of orders 2 and 4 are trivial, and the group of units of the integral group ring of a cyclic group of order 8 is well known. Thus, the case of a cyclic group of order 16 is the first for which the structure of the group of units of the integral group ring of a cyclic 2-group has not been studied completely. When the groups of units of the integral group rings of cyclic 2-groups of orders greater than 16 are studied, it is necessary to have information on the structure of the groups of units of the integral group rings of cyclic 2-groups of lower orders, in particular, of order 16. Thus, we can say that the case of the group of order 16 is the basis for further research. We describe the group of units of the integral group ring of a cyclic group of order 16 in terms of local units defined by the characters of a cyclic group of order 16 and by the units of the ring of integers of the cyclotomic field  $\mathbf{Q}_{16}$  obtained by adjoining a primitive root of unity of degree 16 to the field of rational numbers. That is why we study in detail the structure of the group of units of the ring of integers of the cyclotomic field  $\mathbf{Q}_{16}$ . In addition, we derive important relations between the coefficients of an arbitrary unit of the integral group ring of a cyclic group of order 16. These relations will obviously serve as patterns and examples for obtaining similar relations in studying the units for the cases of 2-groups of orders greater than 16. Finally, we note that one of the generators of the group of units of the integral group ring of a cyclic group of order 16 is a singular unit defined by two units of the ring of integers of the cyclotomic field  $\mathbf{Q}_{16}$ . This unit is the product of the two local units, each of which is not contained in the integral group ring of a cyclic group of order 16.

Keywords: cyclic group, group ring, unit of a group ring, cyclotomic field, ring of integers of a field, unit of the ring of integers of a cyclotomic field, integral group ring.

MSC: 16S34

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-32-42

<sup>1</sup>Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (постановление №211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.A03.21.0011.



## Введение

Эта работа продолжает статьи [1;2] и в то же время открывает цикл работ, посвященных индуктивному подходу к описанию групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп. Многие результаты данной статьи легко переносятся на общий случай произвольных циклических 2-групп, но неизбежное в таких случаях усложнение формулировок и формул останавливает авторов от подобного шага.

## 1. Основные понятия и определения

### 1.1. Круговые поля

Обозначим через  $\mathbf{Q}(\alpha_{16}) = \mathbf{Q}_{16}$  круговое поле, полученное присоединением к полю рациональных чисел  $\mathbf{Q}$  примитивного корня  $\alpha = \cos(2\pi/16) + i \sin(2\pi/16)$  степени 16 из единицы. Аналогично определяются круговые поля  $\mathbf{Q}_8$  и  $\mathbf{Q}_4 = \mathbf{Q}(i)$ .

Кольцом целых кругового поля  $\mathbf{Q}_{16}$  является

$$\mathbf{Z}[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in \mathbf{Z}[t]\}$$

— множество значений от  $\alpha$  всех многочленов с целыми коэффициентами.

Также через  $\text{tr}_{\mathbf{Q}_{2^n}}$  обозначим след в поле  $\mathbf{Q}_{2^n}$  для  $n \in \{2, 3, 4\}$ .

Нам потребуется следующее небольшое уточнение леммы 1 из [2], которое, очевидно, получается из свойств следа.

**Лемма 1.** *Для любого  $\rho \in \mathbf{Z}[\alpha^{2^n}]$ , где  $n \in \{0, 1, 2\}$ , имеем  $\text{tr}_{\mathbf{Q}_{2^{4-n}}}(\rho) \equiv 0 \pmod{2^{3-n}}$ . Более точно, если*

$$\rho = \sum_{j=0}^{2^{3-n}-1} b_j \alpha^{2^n j}, \text{ где } \{b_0, \dots, b_{2^{3-n}-1}\} \subseteq \mathbf{Z},$$

то  $\text{tr}_{\mathbf{Q}_{2^{4-n}}}(\rho) = 2^{3-n} b_0 \equiv 0 \pmod{2^{3-n}}$ .

Обозначим через  $U(\mathbf{Z}[\alpha])$  группу единиц (обратимых элементов) кольца  $\mathbf{Z}[\alpha]$ , и вообще группу единиц всякого ассоциативного кольца  $K$  с единицей будем обозначать через  $U(K)$ .

Положим для  $k \in \{0, 1, 2\}$

$$t_{2k+1} = \alpha^{2(2k+1)} + \alpha^{2k+1} + 1 + \alpha^{-(2k+1)} + \alpha^{-2(2k+1)} \in \mathbf{Z}[\alpha + \alpha^{-1}].$$

**Лемма 2.** *Группы единиц колец целых круговых полей  $\mathbf{Q}_{2^n}$  для  $n \in \{2, 3, 4\}$  известны. Более точно имеем*

- 1)  $U(\mathbf{Z}[\alpha^4])$  тривиальна, т.е.  $U(\mathbf{Z}[\alpha^4]) = \{1, i, -1, -i\}$ ;
- 2)  $U(\mathbf{Z}[\alpha^2]) = \langle \alpha^2 \rangle \times \langle 1 + \sqrt{2} \rangle$ , где  $\sqrt{2} = \alpha^2 + \alpha^{-2}$ ;
- 3)  $U(\mathbf{Z}[\alpha]) = \langle \alpha \rangle \times \langle t_1 \rangle \times \langle t_3 \rangle \times \langle t_5 \rangle$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Утверждения 1 и 2 хорошо известны и нетрудно доказываются. Утверждение 3 — это следствие 2 в [1].

Лемма доказана.

Следующий результат является чисто техническим, он будет использоваться несколько раз.

**Лемма 3.** Группа  $U(\mathbf{Z}[\alpha^2])$  единиц кольца целых кругового поля  $\mathbf{Q}_8$  имеет следующие свойства.

1. Для любого целого числа  $r$  положим  $(1 + \sqrt{2})^r = c_r + d_r\sqrt{2}$ , где  $c_r$  и  $d_r$  — целые числа, тогда последовательность  $\{(c_r, d_r)\}_{r \in \mathbf{Z}}$  по модулю 4 является периодической с периодом 4. Более точно, для любого целого числа  $m$  имеем

$$\begin{cases} c_{4m} \equiv 1 \pmod{4} \\ d_{4m} \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}, \begin{cases} c_{4m+1} \equiv 1 \pmod{4} \\ d_{4m+1} \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}, \begin{cases} c_{4m+2} \equiv 3 \pmod{4} \\ d_{4m+2} \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}, \begin{cases} c_{4m+3} \equiv 3 \pmod{4} \\ d_{4m+3} \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}.$$

2. Пусть  $\beta = \alpha^{2s}(c_r + d_r\sqrt{2})$  — произвольный элемент группы  $U(\mathbf{Z}[\alpha^2])$ , где  $s \in \{0, 1, \dots, 7\}$  и  $r \in \mathbf{Z}$ . Пусть также  $\beta = b_0 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha^4 + b_3\alpha^6$  — разложение  $\beta$  по базису кругового поля  $\mathbf{Q}_8$ . Тогда коэффициенты  $b_0, b_1, b_2$  и  $b_3$  в зависимости от  $s$  находятся следующим образом:

$s$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
0	$c_r$	$d_r$	0	$-d_r$
1	$d_r$	$c_r$	$d_r$	0
2	0	$d_r$	$c_r$	$d_r$
3	$-d_r$	0	$d_r$	$c_r$

и

$s$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
4	$-c_r$	$-d_r$	0	$d_r$
5	$-d_r$	$-c_r$	$-d_r$	0
6	0	$-d_r$	$-c_r$	$-d_r$
7	$d_r$	0	$-d_r$	$-c_r$

**Доказательство.** 1. Действуем стандартно. Так как

$$(1 + \sqrt{2})^{r+1} = (c_r + d_r\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = (c_r + 2d_r) + (c_r + d_r)\sqrt{2},$$

то

$$\begin{cases} c_{r+1} = c_r + 2d_r, \\ d_{r+1} = c_r + d_r \end{cases} \iff \begin{pmatrix} c_{r+1} \\ d_{r+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_r \\ d_r \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристический многочлен получившейся матрицы

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 2 = \lambda^2 - 2\lambda - 1.$$

По теореме Гамильтона — Якоби

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{pmatrix} c_{r+2} \\ d_{r+2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} c_{r+1} \\ d_{r+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_r \\ d_r \end{pmatrix} \iff \begin{cases} c_{r+2} = 2c_{r+1} + c_r, \\ d_{r+2} = 2d_{r+1} + d_r \end{cases}$$

с начальными данными

$$(c_0, d_0) = (1, 0) \text{ и } (c_1, d_1) = (1, 1).$$

Получим, что последовательность  $\{c_r\}_{r \in \mathbf{Z}}$  состоит из нечетных чисел. Элементы последовательности  $\{c_r\}_{r=0}^{\infty}$  по модулю 4 таковы:

$$1, 1, 3, 3, 1, 1, \dots$$

Запишем элементы последовательности  $\{d_r\}_{r=0}^{\infty}$  по модулю 4:

$$0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots$$

Отметим, что в этой последовательности все элементы с четными номерами являются четными, а все элементы с нечетными номерами сравнимы с 1 по модулю 4.

Получим периодическую последовательность по модулю 4:

$$(c_r, d_r)_{r \in \mathbf{Z}} = \begin{cases} (1, 0) & \text{при } r \equiv 0 \pmod{4}, \\ (1, 1) & \text{при } r \equiv 1 \pmod{4}, \\ (3, 2) & \text{при } r \equiv 2 \pmod{4}, \\ (3, 1) & \text{при } r \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

2. Поскольку  $\alpha^{2(s+4)} = -\alpha^{2s}$ , то достаточно рассмотреть случай, когда  $s \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

Для  $s = 0$  имеем  $\beta = c_r \alpha^0 + d_r \alpha^{2+0} + d_r \alpha^{-2+0} = c_r + d_r \alpha^2 - d_r \alpha^6$ . Поэтому  $b_0 = c_r$ ,  $b_1 = d_r$ ,  $b_2 = 0$  и  $b_3 = -d_r$ .

Для  $s = 1$  имеем  $\beta = c_r \alpha^2 + d_r \alpha^{2+2} + d_r \alpha^{-2+2} = d_r + c_r \alpha^2 + d_r \alpha^4$ . Поэтому  $b_0 = d_r$ ,  $b_1 = c_r$ ,  $b_2 = d_r$  и  $b_3 = 0$ .

Для  $s = 2$  имеем  $\beta = c_r \alpha^4 + d_r \alpha^{2+4} + d_r \alpha^{-2+4} = a_r \alpha^2 + c_r \alpha^4 + d_r \alpha^6$ . Поэтому  $b_0 = 0$ ,  $b_1 = d_r$ ,  $b_2 = c_r$  и  $b_3 = d_r$ .

Для  $s = 3$  имеем  $\beta = c_r \alpha^6 + d_r \alpha^{2+6} + d_r \alpha^{-2+6} = -d_r + d_r \alpha^4 + c_r \alpha^6$ . Поэтому  $b_0 = -d_r$ ,  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = d_r$  и  $b_3 = c_r$ .

Лемма доказана.

## 1.2. Коэффициенты элементов группового кольца

Пусть  $G = \langle x \mid x^{16} = 1 \rangle$  — циклическая группа порядка 16.

Любой элемент  $u$  комплексной групповой алгебры  $\mathbf{C}G$  группы  $G$  может быть представлен в виде

$$u = \sum_{j=0}^{15} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{15} \gamma_k x^k,$$

где  $1, x, \dots, x^{15}$  — элементы группы  $G$ ;  $e_0, e_1, \dots, e_{15}$  — минимальные идемпотенты комплексной групповой алгебры  $\mathbf{C}G$ ; коэффициенты  $\beta_j, \gamma_k$  принадлежат  $\mathbf{C}$  для любых  $j, k \in \{0, 1, \dots, 15\}$ .

По таблице характеров для циклической группы порядка 16 получим согласно [3, § 37], что для любого  $k \in \{0, 1, \dots, 15\}$

$$\gamma_k = \frac{1}{16} \sum_{j=0}^{15} \alpha^{-jk} \beta_j \text{ и } \beta_k = \sum_{j=0}^{15} \alpha^{jk} \gamma_j.$$

Пусть  $V(\mathbf{Z}G)$  — нормализованная группа единиц кольца  $\mathbf{Z}G$ , т.е. группа таких единиц целочисленного группового кольца  $\mathbf{Z}$ , что при разложении их по элементам группы сумма всех коэффициентов разложения равна 1. Это равносильно тому, что  $\beta_0 = 1$ .

**Лемма 4.** Пусть

$$\sum_{j=0}^{15} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{15} \gamma_k x^k$$

— единица из группы  $V(\mathbf{Z}G)$  и

$$\beta_1 = \sum_{l=0}^7 a_l \alpha^l \text{ и } \beta_2 = \sum_{l=0}^3 b_l \alpha^{2l}.$$

Если  $a_0 + a_4$  — нечетное целое число, то выполняются следующие утверждения:

- 1)  $\beta_8 = \beta_4 = 1$ ;
- 2) если  $\beta_2 = \alpha^{2s}(c_r + d_r \sqrt{2})$ , где  $s \in \{0, 1, \dots, 7\}$  и  $r \in \mathbf{Z}$ , то  $b_2 = 0$  и либо  $s = 0$ ,  $r \equiv 0$ ,  $b_0 = c_r \equiv 1 \pmod{4}$  и  $b_1 = -b_3 = d_r \equiv 0 \pmod{4}$ , либо  $s = 4$ ,  $r \equiv 2$ ,  $b_0 = -c_r \equiv 1 \pmod{4}$  и  $b_1 = -b_3 = -d_r \equiv 2 \pmod{4}$ ;

3) имеем следующие выражения для коэффициентов  $\gamma_0, \dots, \gamma_{15}$  :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{4}(1 + b_0 + 2a_0), & \gamma_8 &= \gamma_0 - a_0, & \gamma_4 &= \frac{1}{4}(1 - b_0 + 2a_4), & \gamma_{12} &= \gamma_4 - a_4, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{2}a_2, & \gamma_{10} &= -\gamma_2, & \gamma_6 &= \frac{1}{2}a_6, & \gamma_{14} &= -\gamma_6, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{4}(b_1 + 2a_1), & \gamma_9 &= \gamma_1 - a_1, & \gamma_3 &= \frac{1}{4}(-b_1 + 2a_3), & \gamma_{11} &= \gamma_3 - a_3, \\ \gamma_5 &= \frac{1}{4}(-b_1 + 2a_5), & \gamma_{13} &= \gamma_5 - a_5, & \gamma_7 &= \frac{1}{4}(b_1 + 2a_7), & \gamma_{15} &= \gamma_7 - a_7. \end{aligned}$$

Доказательство. 1) По [4, лемма 6] для любого  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$  имеем

$$\gamma_k = \frac{1}{16} \left( 1 + \sum_{l=0}^3 \text{tr}_{\mathbf{Q}_{2^{4-l}}}(\alpha^{-k \cdot 2^l} \beta_{2^l}) \right).$$

Отсюда по лемме 1 получим

$$\gamma_0 = \frac{1}{16}(1 + \beta_8 + \text{tr}_{\mathbf{Q}_4}(\beta_4) + \text{tr}_{\mathbf{Q}_8}(\beta_2) + 8a_0), \quad \gamma_4 = \frac{1}{16}(1 + \beta_8 + \text{tr}_{\mathbf{Q}_4}(\beta_4) - \text{tr}_{\mathbf{Q}_8}(\beta_2) + 8a_4).$$

Следовательно,

$$\gamma_0 + \gamma_4 = \frac{1}{16}(2 + 2\beta_8 + 2\text{tr}_{\mathbf{Q}_4}(\beta_4) + 8(a_0 + a_4)) = \frac{1}{8}(1 + \beta_8 + 2\text{tr}_{\mathbf{Q}_4}(\beta_4) + 4(a_0 + a_4)).$$

Поскольку  $a_0 + a_4$  — нечетное целое число, то

$$B = 1 + \beta_8 + 2\text{tr}_{\mathbf{Q}_4}(\beta_4) \equiv 4 \pmod{8}.$$

Так как  $\beta_8 \in \{1, -1\}$ ,  $\beta_4 \in \{1, -1, i, -i\}$ ,  $\text{tr}_{\mathbf{Q}_4}(\beta_4) \in \{2, -2, 0\}$  и  $B \equiv 4 \pmod{8}$ , то

$$\beta_8 = \beta_4 = 1.$$

2) Простыми вычислениями с использованием утверждения 1) этой леммы и леммы [4, лемма 6] получим следующие выражения для коэффициентов  $\gamma_0, \dots, \gamma_{15}$  :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{4}(1 + b_0 + 2a_0), & \gamma_8 &= \gamma_0 - a_0, & \gamma_4 &= \frac{1}{4}(1 - b_0 + 2a_4), & \gamma_{12} &= \gamma_4 - a_4, \\ \gamma_2 &= \frac{1}{4}(b_2 + 2a_2), & \gamma_{10} &= \gamma_2 - a_2, & \gamma_6 &= \frac{1}{4}(-b_2 + 2a_6), & \gamma_{14} &= \gamma_6 - a_6, \\ \gamma_1 &= \frac{1}{4}(b_1 + 2a_1), & \gamma_9 &= \gamma_1 - a_1, & \gamma_3 &= \frac{1}{4}(b_3 + 2a_3), & \gamma_{11} &= \gamma_3 - a_3, \\ \gamma_5 &= \frac{1}{4}(-b_1 + 2a_5), & \gamma_{13} &= \gamma_5 - a_5, & \gamma_7 &= \frac{1}{4}(-b_3 + 2a_7), & \gamma_{15} &= \gamma_7 - a_7. \end{aligned}$$

Из этих выражений следует система сравнений по модулю 4

$$\begin{cases} b_0 \equiv -1 - 2a_0 \equiv 1 + 2a_4 \pmod{4}, \\ b_2 \equiv -2a_2 \equiv 2a_6 \pmod{4}, \\ b_1 \equiv -2a_1 \equiv 2a_5 \pmod{4}, \\ b_3 \equiv -2a_3 \equiv 2a_7 \pmod{4}. \end{cases}$$

Из этой системы, используя лемму 3, получаем нужное утверждение.

3) По [4, лемма 6] для любого  $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$  из утверждения 2) данной леммы нетрудно получить нужные выражения.

Лемма доказана.

### 1.3. Локальные единицы

Циклическая группа  $G = \langle x \rangle$  порядка 16 имеет 16 неприводимых комплексных характеров:  $\chi_0 = 1_G$  — главный характер,  $\chi_1, \dots, \chi_{15}$ , и для любых  $j, k \in \{0, 1, \dots, 15\}$  имеем

$$\chi_j(x^k) = \alpha^{jk}.$$

Хорошо известно, что группа Галуа поля  $\mathbf{Q}_{16}$  состоит из автоморфизмов  $\sigma_k$  поля  $\mathbf{Q}_{16}$ , продолжающих отображения  $\alpha \mapsto \alpha^{2k+1}$  для  $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$ . Поэтому для любого  $k \in \{0, 1, \dots, 7\}$  характер  $\chi_{2k+1}$  алгебраически сопряжен с характером  $\chi_1$ . Аналогично алгебраически сопряжены характеры  $\chi_2, \chi_6, \chi_{10}$  и  $\chi_{14}$ , а также характеры  $\chi_4$  и  $\chi_{12}$ .

По каждому характеру и любому элементу кольца целых поля этого характера можно согласно определению 1 из [5] построить единицу кольца целых рациональной групповой алгебры  $\mathbf{Q}G$ . Такие единицы будем называть *локальными*.

Определим локальные единицы более точно. Для каждой единицы  $\lambda_1 \in U(\mathbf{Z}[\alpha])$  можно определить элемент

$$u_1(\lambda_1) = \sum_{k=0}^7 \sigma_k(\lambda_1) e_{2k+1} + \sum_{k=0}^7 e_{2k},$$

принадлежащий группе единиц кольца целых рациональной групповой алгебры  $\mathbf{Q}G$ . Отметим, что при переходе к базису из элементов группы  $G$  такая единица имеет рациональные коэффициенты, которые не обязаны быть целыми.

Аналогично для каждой единицы  $\lambda_2 \in U(\mathbf{Z}[\alpha^2])$  определяется элемент

$$u_2(\lambda_2) = \sum_{k=0}^7 e_{2k+1} + \sum_{k=0}^3 \sigma_k(\lambda_2) e_{4k+2} + \sum_{k=0}^3 e_{4k},$$

принадлежащий группе единиц кольца целых рациональной групповой алгебры  $\mathbf{Q}G$ .

Также для каждой единицы  $\lambda_4 \in U(\mathbf{Z}[\alpha^4])$  имеем

$$u_4(\lambda_4) = \sum_{k=0}^7 e_{2k+1} + \sum_{k=0}^3 e_{4k+2} + \lambda_4 e_4 + \bar{\lambda}_4 e_{12} + e_0 + e_8.$$

В этом случае возникают всего 4 локальные единицы (следует из леммы 2)

$$u_4(1) = 1, \quad u_4(i), \quad u_4(-1) \quad \text{и} \quad u_4(-i).$$

Наконец, имеем две локальные единицы

$$u_8(\pm 1) = \sum_{k=0}^7 e_{2k+1} + \sum_{k=0}^3 e_{4k+2} + e_4 + e_{12} + e_0 + (\pm e_8).$$

С другой стороны, пусть дана единица

$$v = \sum_{j=0}^{15} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{15} \gamma_k x^k \in V(\mathbf{Z}G).$$

По [4, лемма 6] из мультипликативности минимальных идемпотентов  $e_0, e_1, \dots, e_{15}$  следует, что

$$v = u_1(\beta_1) u_2(\beta_2) u_4(\beta_4) u_8(\beta_8).$$

## 2. Группа единиц с $\beta_1 = 1$

В этом разделе мы рассмотрим единицы из  $V(\mathbf{Z}G)$ , у которых  $\beta_1 = 1$ , т.е. рассмотрим подмножество

$$W = \{v = u_2(\beta_2)u_4(\beta_4)u_8(\beta_8) \mid v \in V(\mathbf{Z}G)\}.$$

**Лемма 5.**  $W$  — подгруппа без кручения группы  $V(\mathbf{Z}G)$ .

**Доказательство.** Из мультипликативности минимальных идемпотентов следует, что  $W$  является подгруппой группы  $V(\mathbf{Z}G)$ . Отсутствие кручения следует из [2, предложение 1].

Лемма доказана.

**Лемма 6.** Пусть

$$\sum_{j=0}^{15} \beta_j e_j = \sum_{k=0}^{15} \gamma_k x^k$$

— единица из группы  $W$ . Тогда

- 1)  $\beta_8 = \beta_4 = 1$  и  $W = \{u_2(\beta_2) \in V(\mathbf{Z}G)\}$ ;
- 2)  $\beta_2 \in \langle (1 + \sqrt{2})^4 \rangle$ ;
- 3) если  $\beta_2 = c_r + d_r \sqrt{2}$  для  $r \equiv 0 \pmod{4}$ , то

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{4}(3 + c_r), \quad \gamma_8 = \gamma_0 - 1, & \gamma_4 = \gamma_{12} &= \frac{1}{4}(1 - c_r), \quad \gamma_2 = \gamma_{10} = \gamma_6 = \gamma_{14} = 0, \\ \gamma_1 = \gamma_9 = \gamma_3 = \gamma_{11} &= \frac{1}{4}(d_r), & \gamma_5 = \gamma_{13} = \gamma_7 = \gamma_{15} &= \frac{1}{4}(-d_r). \end{aligned}$$

**Доказательство.** 1) Очевидно, что выполняются условия леммы 4, откуда получим требуемое.

2) Пусть  $\beta_2 = \alpha^{2s}(c_r + d_r \sqrt{2})$ , где  $s \in \{0, 1, \dots, 7\}$  и  $r \in \mathbf{Z}$ . Тогда по лемме 4 получим, что надо исключить случай  $s = 4$ . Действительно, по лемме 4 при  $s = 4$  имеем  $d_r \equiv 2 \pmod{4}$ . Это противоречит тому, что тогда  $\gamma_1 = -d_r/4$ .

3) Указанные выражения легко получаются из леммы 4.

Лемма доказана.

**Предложение 1.** При введенных ранее обозначениях

$$W = \langle u_2 \left( (1 + \sqrt{2})^4 \right) \rangle,$$

где

$$\begin{aligned} u_2 \left( (1 + \sqrt{2})^4 \right) &= \sum_{k=0}^7 e_{2k+1} + \sum_{k=0}^3 e_{4k} + (1 + \sqrt{2})^4 (e_2 + e_{10}) + (1 - \sqrt{2})^4 (e_6 + e_{14}) \\ &= 5 + 3(x - x^3 - x^5 + x^7 + x^9 - x^{11} - x^{13} + x^{15}) + 4(-x^4 + x^8 - x^{12}). \end{aligned}$$

**Доказательство.** Из лемм 5 и 6 и мультипликативности минимальных центральных идемпотентов  $e_0, e_1, \dots, e_{15}$  следует, что

$$W = \left\{ u_2 \left( (1 + \sqrt{2})^4 \right) \right\} = \left\langle u_2 \left( (1 + \sqrt{2})^4 \right) \right\rangle.$$

Коэффициенты при минимальных центральных идемпотентах  $e_0, e_1, \dots, e_{15}$  легко вычисляются из определения локальной единицы  $u_2 \left( (1 + \sqrt{2})^4 \right)$ . В самом деле, так как  $(1 + \sqrt{2})^4 = 17 + 12\sqrt{2}$ , то по лемме 6 получим

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \frac{1}{4}(3 + 17) = 5, \quad \gamma_8 = \gamma_0 - 1 = 4, & \gamma_4 = \gamma_{12} &= \frac{1}{4}(1 - 17) = -4, \quad \gamma_2 = \gamma_{10} = \gamma_6 = \gamma_{14} = 0, \\ \gamma_1 = \gamma_9 = \gamma_3 = \gamma_{11} &= \frac{1}{4}(12) = 3, & \gamma_5 = \gamma_{13} = \gamma_7 = \gamma_{15} &= \frac{1}{4}(-12) = -3. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

### 3. Переход к группе единиц без кручения

Пусть  $t_1$ ,  $t_3$  и  $t_5$  — единицы кольца  $\mathbf{Z}[\alpha]$  (см. определение перед леммой 2). Для удобства положим

$$T = \langle t_1 \rangle \times \langle t_3 \rangle \times \langle t_5 \rangle,$$

тогда по лемме 2 имеем  $U(\mathbf{Z}[\alpha]) = \langle \alpha \rangle \times T$ .

Определим в группе  $V(\mathbf{Z}G)$  подмножество

$$V_0 = \{u_1(\beta_1)u_2(\beta_2)u_4(\beta_4)u_8(\beta_8) \in V(\mathbf{Z}G) \mid \beta_1 \in T\}.$$

**Предложение 2.** При введенных выше обозначениях имеем

- 1)  $V_0$  является подгруппой без кручения группы  $V(\mathbf{Z}G)$ ;
- 2)  $V(\mathbf{Z}G) = G \times V_0$ .

**Доказательство.** 1) Так как  $T$  — подгруппа группы  $U(\mathbf{Z}[\alpha])$ , то из мультипликативности минимальных центральных идемпотентов  $e_0, e_1, \dots, e_{15}$  следует, что  $V_0$  является подгруппой группы  $V(\mathbf{Z}G)$ . Отсутствие кручения в  $V_0$  следует из [2, предложение 1].

2) Пусть  $v = u_1(\beta_1)u_2(\beta_2)u_4(\beta_4)u_8(\beta_8)$  — произвольный элемент группы  $V(\mathbf{Z}G)$ . По лемме 2 имеем  $\beta_1 = \alpha^k t$ , где  $k \in \{0, 1, \dots, 15\}$  и  $t \in T$ . По [2, предложение 1] получим, что  $x^{-k} = u_1(\alpha^{-k})u_2(\alpha^{-2k})u_4(\alpha^{-4k})u_8(\alpha^{-k})$ . Так как  $\alpha^{-k}\beta_1 = t \in T$ , то

$$\begin{aligned} x^{-k}v &= u_1(\alpha^{-k})u_2(\alpha^{-2k})u_4(\alpha^{-4k})u_8(\alpha^{-k}) \cdot u_1(\beta_1)u_2(\beta_2)u_4(\beta_4)u_8(\beta_8) \\ &= u_1(\alpha^{-k}\beta_1)u_2(\alpha^{-2k}\beta_2)u_4(\alpha^{-4k}\beta_4)u_8(\alpha^{-k}\beta_8) \in T. \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение 2).

Предложение доказано.

Определим в группе  $V_0$  подмножество

$$V_1 = \{u_1(\beta_1) \in V(\mathbf{Z}G) \mid \beta_1 \in T\}.$$

Как в случае  $V_0$ , также вполне очевидно, что  $V_1$  — подгруппа в  $V_0$ .

**Лемма 7** [2, теорема 1]. Пусть

$$h_1 = x + x^{-1} - x^7 - x^{-7}, \quad h_2 = x^2 + x^{-2} - x^6 - x^{-6}, \quad h_3 = x^3 + x^{-3} - x^5 - x^{-5}.$$

Тогда при введенных выше обозначениях имеем  $V_1 = \langle v_1 \rangle \times \langle v_2 \rangle \times \langle v_3 \rangle$ , где

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1(t_1^4) = 42 + 38h_1 + 29h_2 + 16h_3 - 41x^8, \\ v_2 &= u_1(t_1^2 t_3^2) = 4 - 2h_1 - 4h_2 + 6h_3 - 3x^8, \\ v_3 &= u_1(t_3^3 t_5) = 6 - 2h_1 - 4h_2 + 5h_3 - 5x^8. \end{aligned}$$

Положим  $T_1 = \langle t_1^4 \rangle \times \langle t_1^2 t_3^2 \rangle \times \langle t_3^3 t_5 \rangle$ , тогда  $V_1 = \{u_1(t) \mid t \in T_1\}$ .

**Лемма 8.** Фактор-группа  $T/T_1$  имеет вид

$$T/T_1 = \langle t_1 T_1 \rangle \times \langle t_1 t_3 T_1 \rangle,$$

причем подгруппа  $\langle t_1 T_1 \rangle$  имеет порядок 4, а подгруппа  $\langle t_1 t_3 T_1 \rangle$  — порядок 2.

**Доказательство.** Пусть  $t_1^{k_1} t_3^{k_3} t_5^{k_5}$  — произвольный элемент группы  $T$  ( $k_1, k_3$  и  $k_5$  — целые числа). Так как  $t_1^{k_1} t_3^{k_3} t_5^{k_5} = t_1^{k_1} t_3^{k_3 - 3k_5} (t_3^3 t_5)^{k_5} \in t_1^{k_1} t_3^{k_3 - 3k_5} T_1$ , то достаточно рассматривать элементы  $t_1^{k_1} t_3^{k_3}$ .

Далее пусть  $k_3 = 2l + \delta$ , где  $\delta \in \{0, 1\}$ . Тогда

$$t_1^{k_1} t_3^{k_3} = t_1^{k_1 - 2l} t_3^\delta (t_1^2 t_3^2)^l \in t_1^{k_1 - 2l} t_3^\delta T_1.$$

Поскольку  $t_1^4 \in T_1$ , то фактор-группа имеет вид

$$T/T_1 = \left\{ t_1^{k_1} t_1^{k_2} T_1 \mid k_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, k_2 \in \{0, 1\} \right\}.$$

Так как  $(t_1 t_3)^2 = t_1^2 t_3^2 \in T_1$ , то элемент  $(t_1 t_3) T_1$  имеет порядок 2 и не принадлежит подгруппе  $\langle t_1 T_1 \rangle$  порядка 4. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма доказана.

**Лемма 9.** Пусть  $u_1(\beta_1)u_2(\beta_2)u_4(\beta_4)u_8(\beta_8)$  — произвольный элемент группы  $V(\mathbf{Z}G)$ . Тогда

$$\beta_1 \in \langle t_1^3 t_3 \rangle T_1.$$

**Доказательство.** По лемме 7 для любого  $t \in T_1$  локальная единица  $u_1(t)$  принадлежит  $V(\mathbf{Z}G)$ , поэтому ввиду леммы 8 достаточно, что

$$\beta_1 \notin \{t_1, t_1^2, t_1^3, t_1 t_3, t_1^2 t_3, t_3\}.$$

Далее, по лемме 8 квадраты всех элементов порядка 4 фактор-группы  $T/T_1$  равны  $t_1^2 T_1$ .

Поэтому, если существует элемент в  $V(\mathbf{Z}G)$  с коэффициентом  $\beta_1 \in \{t_1, t_1^3, t_1^2 t_3, t_3\}$ , то его квадрат равен

$$u_1(t_1^2)u_2(\beta_2^2)u_4(\beta_4^2)u_8(\beta_8^2) \in V(\mathbf{Z}G).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\beta_1 \notin \{t_1^2, t_1 t_3\}.$$

Докажем методом от противного. Поскольку

$$\begin{aligned} t_1^2 &= 5 + 4(\alpha + \alpha^{-1}) + 3(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + 2(\alpha^3 + \alpha^{-3}) = 5 + 4\alpha + 3\alpha^2 + 2\alpha^3 - 2\alpha^5 - 3\alpha^6 - 4\alpha^7, \\ t_1 t_3 &= -1 + (\alpha + \alpha^{-1}) + (\alpha^2 + \alpha^{-2}) - (\alpha^3 + \alpha^{-3}) = -1 + \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^5 - \alpha^6 - \alpha^7, \end{aligned}$$

то в обозначениях леммы 4 в обоих случаях  $a_2$  нечетно. Это противоречит тому, что  $\gamma_2 = a_2/2$  по утверждению 3) леммы 4.

Лемма доказана.

**Лемма 10.** Пусть  $\beta_1 = t_1^3 t_3$ . Тогда

$$u_1(t_1^3 t_3)u_2(-(1 + \sqrt{2})^2) \in V(\mathbf{Z}G).$$

Более точно

$$u_1(t_1^3 t_3)u_2(-(1 + \sqrt{2})^2) = 2 + (x^3 + x^4 + x^{12} + x^{13}) + 3(x + x^2 - x^6 - x^8 - x^{10} + x^{14} + x^{15}) - 4(x^7 + x^9).$$

**Доказательство.** Непосредственный подсчет дает

$$t_1^3 t_3 = 5 + 7(\alpha + \alpha^{-1}) + 6(\alpha^2 + \alpha^{-2}) + (\alpha^3 + \alpha^{-3}) = 5 + 7\alpha + 6\alpha^2 + \alpha^3 - \alpha^5 - 6\alpha^6 - 7\alpha^7.$$

В обозначениях леммы 4 имеем

$$a_0 = 5, a_1 = 7, a_2 = 6, a_3 = 1, a_4 = 0, a_5 = -1, a_6 = -6, a_7 = -7.$$

Поэтому выполнены условия леммы 4. Тогда в обозначениях этой леммы  $\gamma_1 = 1/4(b_1 + 14)$  и  $b_1 \equiv 2 \pmod{4}$ .

По утверждению 2) леммы 4 имеем  $\beta_2 = -(1 + \sqrt{2})^{4m+2}$ . По предложению 1 получим, что  $u_2((1 + \sqrt{2})^{4m}) \in V(\mathbf{Z}G)$ , поэтому достаточно взять  $\beta_2 = -(1 + \sqrt{2})^2 = -3 - 2\sqrt{2}$ . Используя утверждение 3) леммы 4, получим нужные выражения для коэффициентов  $u_1(t_1^3 t_3)u_2(-(1 + \sqrt{2})^2)$ .

Лемма доказана.



#### 4. Доказательство теоремы

**Теорема 1.** *Группа единиц  $U(\mathbf{Z}G)$  целочисленного группового кольца  $\mathbf{Z}G$  циклической группы  $G$  порядка 16 в определенных ранее обозначениях равна*

$$\langle -1 \rangle \times G \times \langle u_2((1 + \sqrt{2})^4) \rangle \times \langle u_1(t_1^4) \rangle \times \langle u_1(t_3^3 t_5) \rangle \times \langle u_1(t_1^3 t_3) u_2(-(1 + \sqrt{2})^2) \rangle.$$

**Доказательство.** Так как  $U(\mathbf{Z}G) = \langle -1 \rangle \times V(\mathbf{Z}G)$  и по предложению 2 имеем  $V(\mathbf{Z}G) = G \times V_0$ , то достаточно описать подгруппу  $V_0$ , определенную предложением 2. Из предложения 1, лемм 7, 9 и 10 следует, что  $V_0$  порождается элементами

$$u_2((1 + \sqrt{2})^4), u_1(t_1^4), u_1(t_1^2 t_3^2), u_1(t_3^3 t_5), u_1(t_1^3 t_3) u_2(-(1 + \sqrt{2})^2).$$

Так как

$$\left( u_1(t_1^3 t_3) u_2(-(1 + \sqrt{2})^2) \right)^2 = u_1(t_1^6 t_3^2) u_2((1 + \sqrt{2})^4) = u_1(t_1^2 t_3^2) u_1(t_1^4) u_2((1 + \sqrt{2})^4),$$

то  $u_1(t_1^2 t_3^2)$  можно исключить из списка порождающих, что завершает доказательство теоремы. Теорема доказана.

#### Заключение

Доказанная теорема будет служить основой для изучения групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп порядка  $2^n$  для  $n \geq 5$ . Кроме того, леммы и предложения этой работы содержат много полезной информации для изучения таких групп единиц.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алеев Р.Ж., Митина О.В., Христенко Е.А.** Сравнение по модулю 2 круговых единиц в полях  $Q_{16}$  и  $Q_{32}$  // Челябин. физ.-мат. журн. 2016. Т. 1, вып. 4. С. 8–29.
2. **Алеев Р.Ж., Митина О.В., Ханенко Т.А.** Нахождение единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32 // Челябин. физ.-мат. журн. 2016. Т. 1, вып. 4. С. 30–55.
3. **Кэртис Ч., Райнер И.** Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. М.: Наука, 1969. 668 с.
4. **Алеев Р.Ж.** Центральные элементы целочисленных групповых колец // Алгебра и логика. 2000. Т. 39, вып. 5. С. 513–525.
5. **Алеев Р.Ж.** Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Мат. тр. 2000. Т. 3, вып. 1. С. 3–37.

Алеев Рифхат Жалялович

Поступила 13.10.2017

д-р физ.-мат. наук, доцент

профессор кафедры системного программирования

Южно-Уральский государственный университет,

профессор кафедры компьютерной топологии и алгебры

Челябинский государственный университет

e-mail: aleevrz@susu.ru, aleev@csu.ru

Митина Ольга Викторовна

канд. физ.-мат. наук, доцент

Челябинский государственный университет,

Южно-Уральский государственный университет

e-mail: ovm@csu.ru

Ханенко Татьяна Александровна

студент математического факультета

Челябинский государственный университет

e-mail: tanja\_1110\_94@mail.ru

## REFERENCES

1. Aleev R.Zh., Mitina O.V., Khistenko E.A. Congruence modulo 2 of circular units in the fields  $Q_{16}$  and  $Q_{32}$ . *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2016, vol. 1, no. 4, pp. 8–29 (in Russian).
2. Aleev R.Zh., Mitina O.V., Khanenko T.A. Finding of units for integer group rings of orders 16 and 32 cyclic groups. *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2016, vol. 1, no. 4, pp. 30–55 (in Russian).
3. Curtis C.W., Reiner I. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Ser. Pure Appl. Math., vol. XI. N. Y.; London, Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, 689 p. ISBN: 978-0-8218-4066-5. Translated to Russian under the title *Teoriya predstavlenii konechnykh grupp i assotsiativnykh algebr*. Moscow, Nauka Publ., 1969, 668 p.
4. Aleev R.Zh. Central elements of integral group rings. *Algebra and Logic*, 2000, vol. 39, no. 5, pp. 293–300. doi: 10.1007/BF02681613.
5. Aleev R. Zh. Units of character fields and central units of integral group rings of finite groups. *Siberian Advances of Mathematics*, 2001, vol. 11, no. 1, pp. 1–33.

The paper was received by the Editorial Office on October 13, 2017.

*Rifkhat Zhalyalovich Aleev*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., South Ural State University, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: aleevrz@susu.ru, aleev@csu.ru.

*Ol'ga Viktorovna Mitina*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), South Ural State University, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: ovm@csu.ru.

*Tat'yana Aleksandrovna Khanenko*, student Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: tanja\_1110\_94@mail.ru.

УДК 512.7

ГРУППЫ УЗЛОВ И НИЛЬПОТЕНТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ<sup>1</sup>

В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим

В данной работе изучаются группы классических зацеплений, зацеплений со спайками, виртуальных зацеплений. Во-первых, для классических кос доказывается, что коса и ее автоморфный образ слабо эквивалентны. Отсюда следует положительный ответ о совпадении группы, построенной по косе и ее автоморфному образу. Далее в работе изучается проблема аппроксимируемости групп виртуальных узлов нильпотентными группами. Известно, что в группе классического узла коммутант совпадает с третьим членом нижнего центрального рядом, а потому факторизация по членам нижнего центрального ряда ничего не дает. В работе доказано, что для виртуальных узлов ситуация другая. Построен нетривиальный гомоморфизм группы виртуального трилистника на нильпотентную группу степени нильпотентности четыре. Используя конструкцию Магнуса представления свободной группы степенными рядами, строится гомоморфизм группы виртуального трилистника в некоторую конечномерную алгебру. Это приводит к нетривиальному линейному представлению группы виртуального трилистника унитарными матрицами порядка восемь.

Ключевые слова: виртуальные узлы, зацепления, группы.

**V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim. Knot groups and nilpotent approximability.**

We study groups of classical links, welded links, and virtual links. For classical braids, it is proved that a braid and its automorphic image are weakly equivalent. This implies the affirmative answer to the question of the coincidence of the groups constructed from a braid and from its automorphic image. We also study the problem of approximability of groups of virtual knots by nilpotent groups. It is known that in a classical knot group the commutator subgroup coincides with the third term of the lower central series, and hence the factorization by the terms of the lower central series yields nothing. We prove that the situation is different for virtual knots. A nontrivial homomorphism of the virtual trefoil group to a nilpotent group of class 4 is constructed. We use the Magnus representation of a free group by power series to construct a homomorphism of the virtual trefoil group to a finite-dimensional algebra. This produces the nontrivial linear representation of the virtual trefoil group by unitriangular matrices of order 8.

Keywords: virtual knots, links, groups.

MSC: 57M25, 57M27, 20F14

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-43-51

## Введение

В данной работе изучаются группы классических зацеплений, зацеплений со спайками, виртуальных зацеплений. При этом нас интересуют следующие вопросы.

**В о п р о с 1.** Пусть  $\beta$  — классическая коса (коса со спайками, виртуальная коса) из группы кос  $B_n$  (соответственно из  $WB_n, VB_n$ ),  $\widehat{\beta}$  — зацепление, полученное замыканием косы  $\beta$ ,  $G(\widehat{\beta})$  — группа зацепления,  $\varphi \in \text{Aut}(B_n)$  (соответственно  $\varphi \in \text{Aut}(WB_n), \text{Aut}(VB_n)$ ). Верно ли, что зацепление  $\widehat{\varphi(\beta)}$  слабо эквивалентно зацеплению  $\widehat{\beta}$ ? В частности, верно ли, что группа  $G(\widehat{\varphi(\beta)})$  изоморфна группе  $G(\widehat{\beta})$ ?

Для ответа на этот вопрос надо знать описание групп автоморфизмов  $\text{Aut}(B_n)$  (соответственно  $\text{Aut}(WB_n), \text{Aut}(VB_n)$ ). Полное описание группы  $\text{Aut}(B_n)$  хорошо известно [1], в то же время описание групп  $\text{Aut}(WB_n)$  и  $\text{Aut}(VB_n)$  далеко от завершения.

Напомним определение группы, аппроксимируемой нильпотентными группами. Пусть  $G$  — группа и

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \dots, \quad \gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G], \quad i = 1, 2, \dots,$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00414).

ее нижний центральный ряд. Обозначим пересечение  $\bigcap_{i=1}^{\infty} \gamma_i(G)$  всех членов нижнего центрального ряда через  $\gamma_{\omega}(G)$ . Говорят, что  $G$  *аппроксимируется нильпотентными группами*, если  $\gamma_{\omega}(G) = 1$ .

В следующем вопросе под зацеплением мы будем понимать либо классическое зацепление, либо зацепление со спайками, либо виртуальное зацепление. Под группой классического зацепления понимается фундаментальная группа дополнения зацепления в трехмерной сфере, для зацепления со спайками — группа, определенная Кауффманом [2], для виртуального зацепления — одна из групп, определенная в работах [3–6].

**В о п р о с 2.** Пусть  $L$  — зацепление,  $G(L)$  — его группа. Будет ли  $G(L)$  аппроксимироваться нильпотентными группами?

Интерес к этому вопросу продиктован следующими соображениями. Если  $L$  — классическое зацепление в трехмерной сфере  $S^3$ , то можно найти задание его группы  $G(L) = \pi_1(S^3 \setminus L)$  в виде системы порождающих и соотношений. Но, имея систему порождающих и соотношений некоторой группы, мы не всегда можем получить полную информацию о ее строении. В этом случае бывает полезным изучить гомоморфизмы нашей группы на группы из некоторого класса. Например, на конечные группы, на разрешимые группы, нильпотентные группы и т. д. Если таких гомоморфизмов оказывается много (группа аппроксимируется данным классом), то мы имеем некоторую информацию об исходной группе. Например, если группа аппроксимируется конечными группами, то в ней разрешима проблема равенства.

Проблема аппроксимируемости нильпотентными группами сводится к изучению фактор-групп по членам нижнего центрального ряда, которые являются инвариантами группы и не зависят от ее задания. Для групп классических узлов существуют только гомоморфизмы на бесконечную циклическую группу, а потому группы узлов не аппроксимируются нильпотентными группами. Более того, коммутант группы узла совпадает с третьим членом ее нижнего центрального ряда.

В настоящей работе мы покажем, что для группы узла со спайками ситуация аналогичная, т. е. для всякой группы узла со спайками ее коммутант совпадает с третьим членом нижнего центрального ряда. Более интересна ситуация для виртуальных узлов. Мы докажем, что для виртуального трилистника  $T_v$  и его группы  $G(T_v)$ , найденной в работах [6; 7], первые пять членов ее нижнего центрального ряда различны. Следовательно, существуют эпиморфизмы группы  $G(T_v)$  на нильпотентные группы ступеней 1, 2, 3, 4, 5. Таким образом, у нас возникает новая возможность построения инвариантов виртуальных узлов.

Отметим, что для групп классических зацеплений изучение членов нижнего центрального ряда приводит к построению инвариантов Милнора. Проблеме аппроксимируемости групп классических зацеплений посвящена работа [8].

Одним из первых результатов о нильпотентной аппроксимируемости был результат Магнуса о нильпотентной аппроксимируемости свободной группы (см., например, [9]). Для доказательства этого факта Магнус построил вложение свободной группы в кольцо формальных степенных рядов от некоммутирующих переменных. Используя представление Магнуса, мы построим гомоморфизм группы  $G(T_v)$  в некоторую конечномерную алгебру и, используя это представление, найдем линейное представление группы  $G(T_v)$ . Для классического трилистника представление Магнуса дает гомоморфизм на бесконечную циклическую группу.

**В о п р о с 3.** Какие инварианты виртуальных узлов можно построить, используя представление Магнуса?

Мы благодарим участников семинара “Эварист Галуа” за плодотворные дискуссии.

## 1. Группы кос и группы зацеплений

Все узлы и зацепления, рассматриваемые в настоящей работе, являются ручными. Два классических ориентированных (неориентированных) зацепления из  $S^3$  называются *экви-*

лентными (соответственно слабо эквивалентными), если существует гомеоморфизм  $\mathbb{S}^3$  на себя, сохраняющий ориентацию (соответственно произвольный гомеоморфизм), переводящий одно зацепление в другое. Эквивалентность виртуальных зацеплений (зацеплений со спайками) определяется как эквивалентность соответствующих диаграмм относительно обобщенных преобразований Рейдемейстера (более подробно см. [2]).

Группа виртуальных кос  $VB_n$  порождается группой классических кос  $B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \rangle$  и группой подстановок  $S_n = \langle \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ . Порождающие  $\sigma_i, i = 1, \dots, n - 1$ , удовлетворяют соотношениям группы  $B_n$

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 2, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i && \text{при } |i - j| \geq 2, \end{aligned}$$

а порождающие  $\rho_i, i = 1, \dots, n - 1$ , удовлетворяют соотношениям группы подстановок  $S_n$

$$\begin{aligned} \rho_i^2 &= 1 && \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 1, \\ \rho_i \rho_j &= \rho_j \rho_i && \text{при } |i - j| \geq 2, \\ \rho_i \rho_{i+1} \rho_i &= \rho_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

Остальные определяющие соотношения группы  $VB_n$  являются смешанными и имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_i \rho_j &= \rho_j \sigma_i && \text{при } |i - j| \geq 2, \\ \rho_i \rho_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \rho_i \rho_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

Группа кос со спайками  $WB_n$  порождается элементами  $\sigma_i, \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Группа, порожденная элементами  $\sigma_i$ , является классической группой кос  $B_n$ . Группа, порожденная элементами  $\alpha_i$ , является симметрической группой  $S_n$ , и при этом выполняются смешанные соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_i \sigma_j &= \sigma_j \alpha_i && \text{при } |i - j| \geq 2, \\ \alpha_i \alpha_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \alpha_i \alpha_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \alpha_i &= \alpha_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} && \text{при } i = 1, 2, \dots, n - 2. \end{aligned}$$

Сравнивая соотношения групп  $VB_n$  и  $WB_n$ , мы видим, что  $WB_n$  получается из  $VB_n$  введением дополнительных соотношений. Следовательно, существует эпиморфизм

$$\varphi_{VW} : VB_n \rightarrow WB_n,$$

переводящий  $\sigma_i$  в  $\sigma_i$  и  $\rho_i$  в  $\alpha_i$  при всех  $i$ .

Как хорошо известно [10], группа кос со спайками  $WB_n$  изоморфна группе сопрягающих автоморфизмов  $C_n$ , которая является подгруппой группы автоморфизмов  $\text{Aut}(F_n)$  свободной группы  $F_n$ . В свою очередь  $WB_n$  есть полупрямое произведение  $WB_n = WP_n \rtimes S_n$  группы  $WP_n$  крашенных кос со спайками и симметрической группы  $S_n$ . Группа  $WP_n$  изоморфна группе  $Cb_n$  сопрягающих базис автоморфизмов, которую изучал Маккул [11]. Как мы знаем, группа автоморфизмов классической группы кос почти совпадает с группой внутренних автоморфизмов.

Существует гомоморфизм группы  $B_n$  на группу подстановок  $S_n$ , переводящий порождающий  $\sigma_i$  в транспозицию  $(i, i + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ . Ядро этого гомоморфизма называется группой крашенных кос и обозначается через  $P_n$ . Группа  $P_n$  порождается элементами  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , которые выражаются через порождающие группы  $B_n$  следующим образом:

$$a_{i,i+1} = \sigma_i^2,$$

$$a_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_j^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

Группа  $P_n$  разлагается в полупрямое произведение свободных групп

$$P_n = U_n \rtimes (U_{n-1} \rtimes (\dots \rtimes (U_3 \rtimes U_2) \dots)),$$

где  $U_i \simeq F_{i-1}$  — свободная группа ранга  $n-1$ ,  $i = 2, 3, \dots, n$  (см. [12; 13]).

В работе [6] было определено представление  $\varphi_M : VB_n \rightarrow \text{Aut}(F_{n,2n+1})$  группы виртуальных кос, которое обобщает все известные ранее представления. Здесь  $F_{n,2n+1} = F_n * \mathbb{Z}^{2n+1}$  — свободное произведение свободной группы ранга  $n$  и свободной абелевой группы. Представление  $\varphi_M$  не является продолжением представления Артина  $B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$ , которое, как хорошо известно, является точным. Представление  $\varphi_M$  равносильно более простому представлению  $\tilde{\varphi}_M$ , которое является продолжением представления Артина. Чтобы его определить, положим  $F_{n,n} = F_n * \mathbb{Z}^n$ , где  $F_n = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle$  — свободная группа ранга  $n$ , а  $\mathbb{Z}^n = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$  — свободная абелева группа ранга  $n$ . Представление  $\tilde{\varphi}_M : VB_n \rightarrow \text{Aut}(F_{n,n})$ , заданное действием на порождающих

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_M(\sigma_i) : \begin{cases} y_i \mapsto y_i y_{i+1} y_i^{-1}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i, \end{cases} & \quad \tilde{\varphi}_M(\sigma_i) : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases} \\ \tilde{\varphi}_M(\rho_i) : \begin{cases} y_i \mapsto y_{i+1}^{v_i^{-1}}, \\ y_{i+1} \mapsto y_i^{v_{i+1}}, \end{cases} & \quad \tilde{\varphi}_M(\rho_i) : \begin{cases} v_i \mapsto v_{i+1}, \\ v_{i+1} \mapsto v_i, \end{cases} \end{aligned}$$

равносильно представлению  $\varphi_M$ , т. е.  $\varphi_M(\beta) = 1$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{\varphi}_M(\beta) = 1$ , где  $\beta \in VB_n$  [6].

В работе [6] описан общий подход, позволяющий по представлению группы виртуальных кос автоморфизмами некоторой группы строить инварианты зацеплений. Напомним его. Предположим, что у нас есть представление  $\varphi : VB_n \rightarrow \text{Aut}(H)$  группы виртуальных кос в группу автоморфизмов некоторой группы  $H = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \parallel \mathcal{R} \rangle$ , где  $\mathcal{R}$  — соотношения группы  $H$ . Сопоставим виртуальной косе  $\beta \in VB_n$  группу

$$G_\varphi(\beta) = \langle h_1, h_2, \dots, h_m \parallel \mathcal{R}, h_i = \varphi(\beta)(h_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \rangle.$$

Группа  $G_\varphi(\beta)$  будет инвариантом виртуального зацепления  $\hat{\beta}$ , если для любой другой косы  $\beta'$  такой, что зацепления  $\hat{\beta}$  и  $\hat{\beta}'$  эквивалентны, группа  $G_\varphi(\beta)$  изоморфна  $G_\varphi(\beta')$ . В работе [6] доказано, что группа  $G_{\tilde{M}}(\beta)$ , где  $\beta \in VB_n$ , является инвариантом зацепления  $\hat{\beta}$ .

## 2. Автоморфизмы группы кос и эквивалентность узлов

Настоящий раздел посвящен первому вопросу, сформулированному во введении. Для классических кос полный ответ дает следующее утверждение.

**Предложение 1.** Пусть  $\beta \in B_n$  и  $\varphi \in \text{Aut}(B_n)$ . Тогда  $\varphi(\beta)$  слабо эквивалентно  $\beta$  и, в частности,  $G(\widehat{\varphi(\beta)}) \cong G(\widehat{\beta})$ .

**Доказательство.** Как хорошо известно [1], произвольный автоморфизм  $\varphi \in \text{Aut}(B_n)$  представим в виде произведения

$$\varphi = \theta^\varepsilon \iota_g, \quad \varepsilon = 0, 1,$$

где  $\iota_g$  для  $g \in B_n$  — внутренний автоморфизм группы  $B_n$ , действующий следующим образом:

$$\iota_g(\beta) = g^{-1}\beta g, \quad \beta \in B_n.$$

Аutomорфизм  $\theta$  задается на порождающих  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  группы  $B_n$  формулой

$$\theta(\sigma_k) = \sigma_k^{-1}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Пусть  $\varepsilon = 0$ . Тогда  $\varphi(\beta) = g^{-1}\beta g$ , и по теореме Маркова [12] зацепление  $\widehat{\varphi(\beta)}$  эквивалентно (а потому и слабо эквивалентно) зацеплению  $\widehat{\beta}$ .

Пусть  $\varepsilon = 1$ . Тогда  $\varphi(\beta) = \theta(g^{-1}\beta g) = \theta(g)^{-1}\theta(\beta)\theta(g) = \theta(g)^{-1}\beta^{-1}\theta(g)$ . Опять по теореме Маркова  $\widehat{\varphi(\beta)}$  эквивалентно  $\widehat{\beta^{-1}}$ . По определению слабой эквивалентности  $\widehat{\varphi(\beta)}$  слабо эквивалентно  $\widehat{\beta^{-1}}$ . Осталось заметить, что если два зацепления слабо эквивалентны, то их группы изоморфны.

Предложение доказано.

Отметим, что заменить в этом утверждении слабую эквивалентность эквивалентностью нельзя. Действительно, замыкание косы  $\sigma^3$  является правым трилистником, а замыкание косы  $\sigma^{-3}$  — левым трилистником. Левый и правый трилистники не эквивалентны (но слабо эквивалентны). Тем не менее автоморфизм  $\theta$  группы  $\text{Aut}(B_2)$  переводит  $\sigma^3$  в  $\sigma^{-3}$ .

В “Коуровской тетради” [14] сформулирован следующий вопрос 10.24: Верно ли, что зацепления, получающиеся замыканием крашенных кос, эквивалентны тогда и только тогда, когда исходные косы сопряжены в группе кос?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Соответствующие примеры можно найти в книге [12].

Для ответа на первый вопрос в случае кос со спайками и виртуальных кос необходимо описать группы  $\text{Aut}(WB_n)$  и  $\text{Aut}(VB_n)$ . Мы предполагаем, что справедливы следующие гипотезы.

**Г и п о т е з ы.** 1) Группа  $\text{Aut}(WB_n)$ ,  $n \geq 3$ , совпадает с группой внутренних автоморфизмов группы  $WB_n$ .

2) Группа  $\text{Aut}(VB_n)$ ,  $n \geq 2$ , порождается группой внутренних автоморфизмов группы  $VB_n$  и автоморфизмом  $\theta$ , который переводит порождающие  $\sigma_i$  в обратные и оставляет порождающие  $\rho_i$  на месте.

### 3. Нильпотентная аппроксимируемость групп узлов

Настоящий раздел посвящен второму вопросу из введения. Вначале рассмотрим группы узлов со спайками. Каждому узлу со спайками Кауффман [2] сопоставил группу, которую назвал его фундаментальной группой. Для этих групп справедлива

**Теорема 1.** *Если  $K$  — узел со спайками, то его фундаментальная группа  $G(K)$  обладает свойством*

$$\gamma_2(G(K)) = \gamma_3(G(K)).$$

*В частности, группа  $G(K)$  не аппроксимируется нильпотентными группами.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Покажем вначале, что если  $K$  — узел со спайками, то  $G(K)^{ab} \cong \mathbb{Z}$ . Действительно, группа  $WB_n$  может быть отождествлена с подгруппой сопрягающих базис автоморфизмов свободной группы  $F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ .

Пусть  $K = \widehat{\beta}$ , где  $\beta \in WB_n$ . Известно, что  $\beta$  представляется в виде  $\beta = ps$ , где  $p \in WP_n$ ,  $s \in S_n$ . Так как  $K$  — узел, то  $s$  — цикл длины  $n$ . Используя, если надо, сопряжение, можно считать, что  $s = (12 \dots n)$ . Тогда  $\beta$  действует на свободной группе следующим образом:

$$\beta : x_1 \mapsto f_1^{-1}x_2f_1, \quad x_2 \mapsto f_2^{-1}x_3f_2, \dots, \quad x_n \mapsto f_n^{-1}x_1f_n,$$

где  $f_1, f_2, \dots, f_n \in F_n$ . Следовательно,  $G(K)^{ab} \cong \mathbb{Z}$ .

Для завершения доказательства покажем, что если  $G$  — произвольная группа, для которой  $G^{ab} \cong \mathbb{Z}$ , то  $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$ . Группа  $\gamma_2(G)/\gamma_3(G)$  лежит в центре группы  $G/\gamma_3(G)$ . Так как  $(G/\gamma_3(G))/(G/\gamma_2(G)) \cong \mathbb{Z}$ , то  $\gamma_2(G) \subseteq \gamma_3(G)$ .

Теорема доказана.

Так как всякий классический узел можно рассматривать как узел со спайками, то как следствие получаем хорошо известное утверждение для классических узлов.

**Следствие 1.** Если  $K$  — классический узел, то  $\gamma_2(G(K)) = \gamma_3(G(K))$ , где  $G(K) = \pi_1(S^3 \setminus K)$ .

Для виртуального трилистника  $T_v$  группа  $G_{\widetilde{M}}(T_v)$  была найдена в [6] (см. также [7]). Для простоты будем обозначать ее через  $H$ . Тогда

$$H = \langle y, v \mid y(y^{v^{-1}}y^v) = (y^{v^{-1}}y^v)y \rangle.$$

Преобразуем определяющее соотношение для  $H$ :

$$\begin{aligned} 1 &= y^{-1}y^{-v}y^{-v^{-1}}yy^{v^{-1}}y^v = [y, v y v^{-2} y v] = [y, y^{-2} v y v^{-2} y v] = [y, [y v^{-1}, v^{-1} y]^v] \\ &= [y, [y v^{-1}, v^{-1} y][y v^{-1}, v^{-1} y, v]] = [y, [y v^{-1}, v^{-1} y, v]] \cdot [y, [y v^{-1}, v^{-1} y]][y v^{-1}, v^{-1} y, v]. \end{aligned}$$

По модулю  $\gamma_4(H)$  имеем  $[y, [y v^{-1}, v^{-1} y]] \equiv [y, [y, v^{-1}][v^{-1}, y]] = 1$ .

Поэтому по модулю  $\gamma_5(H)$  соотношение принимает вид  $1 \equiv [y, [y v^{-1}, v^{-1} y]]$ . Далее по модулю  $\gamma_5(H)$  имеем

$$\begin{aligned} [y, [y v^{-1}, v^{-1} y]] &= [y, [y v^{-1}, y][y v^{-1}, v^{-1} y]] = [y, [v^{-1}, y][y v^{-1}, v^{-1}][y v^{-1}, v^{-1}, y]] \\ &\equiv [y, [v^{-1}, y][y v^{-1}, v^{-1}][y, v^{-1}, y]] = [y, [v^{-1}, y][y, v^{-1}][y, v^{-1}, v^{-1}][y, v^{-1}, y]] \\ &= [y, [y, v^{-1}, v^{-1}][y, v^{-1}, y]] \equiv [y, [y, v, v]] \cdot [y, [y, v, y]]^{-1}. \end{aligned}$$

Итак, по модулю  $\gamma_5(H)$  определяющее соотношение группы  $H$  имеет вид

$$[y, v, v, y] \equiv [y, v, y, y].$$

Так как базисные коммутаторы веса 4 свободной группы  $\langle y, v \rangle$  имеют вид  $[y, v, v, v]$ ,  $[y, v, v, y]$ ,  $[y, v, y, y]$ , то

$$\gamma_4(H)/\gamma_5(H) \cong \mathbb{Z}^2.$$

Таким образом, нами доказана

**Теорема 2.** Пусть  $H = G_{\widetilde{M}}(T_v)$  — группа виртуального трилистника. Тогда факторгруппа  $H/\gamma_5(H)$  является нильпотентной степени 4.

Так как факторы-группы по членам нижнего центрального ряда являются инвариантами группы, то мы получаем новую возможность для определения инвариантов виртуальных узлов.

**В о п р о с 4.** Какие виртуальные узлы, полученные замыканием 2-нитиевых виртуальных кос, можно различить, используя факторизацию по членам нижнего центрального ряда?

Заметим, что группу  $H$  виртуального трилистника можно представить как расширение свободного произведения с помощью бесконечной циклической группы.

Действительно, положим  $y_i = y^{v^i}$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ . Тогда имеет место разложение  $H = H_1 \rtimes \mathbb{Z}$ , где  $H_1 = \langle y_i \mid i \in \mathbb{Z} \rangle$  и  $\mathbb{Z} = \langle v \rangle$ .

В группе  $H_1$  имеют место соотношения  $[y_i, y_{i-1}y_{i+1}] = 1$ ,  $i \in \mathbb{Z}$ , и элемент  $v$  действует сдвигом  $y_i^v = y_{i+1}$ . Положим  $A_i = \langle y_i, y_{i-1}, y_{i+1} \mid [y_i, y_{i-1}y_{i+1}] = 1 \rangle$ ,  $B_i = \langle y_i, y_{i+1} \rangle$  для всех  $i \in \mathbb{Z}$ . Тогда группа  $H_1$  является бесконечным свободным произведением с объединением

$$H_1 = \dots *_{B_{-2}} A_{-1} *_{B_{-1}} A_0 *_{B_0} A_1 *_{B_1} \dots$$

Легко видеть, что подгруппы  $A_i$  изоморфны произведению  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) * \mathbb{Z}$  и по теореме Магнуса [9] подгруппы  $B_i$  являются свободными двупорожденными группами.

**Г и п о т е з а.** Группа виртуального узла, построенного по представлению  $\varphi_{\widetilde{M}}$ , является расширением либо 1) конечно порожденной свободной группы, либо 2) бесконечного свободного произведения с объединением вида

$$\dots *_{B_{-2}} A_{-1} *_{B_{-1}} A_0 *_{B_0} A_1 *_{B_1} \dots,$$

с помощью бесконечной циклической группы, где  $B_i$  для  $i \in \mathbb{Z}$  — свободные подгруппы конечного ранга.



#### 4. Представление Магнуса группы $G_{\widetilde{M}}(T_v)$

Рассмотрим кольцо  $\mathbb{Z}[[Y, V]]$  формальных степенных рядов с целыми коэффициентами от двух переменных  $Y, V$ , удовлетворяющих соотношениям  $Y^2 = V^2 = 0$ . Хорошо известно [11], что свободная группа  $\langle y, v \rangle$  имеет точное представление

$$y \mapsto 1 + Y, \quad v \mapsto 1 + V$$

в группу обратимых элементов кольца  $\mathbb{Z}[[Y, V]]$ . При этом  $y^{-1} \mapsto 1 - Y, \quad v^{-1} \mapsto 1 - V$ .

Найдем дополнительные соотношения на переменные  $Y$  и  $V$ , возникающие при продолжении отображения

$$\Phi : y \mapsto 1 + Y, \quad v \mapsto 1 + V$$

на группу  $G_{\widetilde{M}}(T_v)$ . Соотношение  $yy^{v^{-1}}y^v = y^{v^{-1}}y^vy$  после подстановки  $y = 1 + Y, v = 1 + V$  примет вид

$$(1 + Y)(1 + V)(1 + Y)(1 - 2V)(1 + Y)(1 + V) = (1 + V)(1 + Y)(1 - 2V)(1 + Y)(1 + V)(1 + Y).$$

Раскрывая скобки и пользуясь соотношениями  $Y^2 = V^2 = 0$ , получаем

$$(YV)^2(1 + YV) = (VY)^2(1 + VY).$$

Домножив это равенство на  $VY$ , имеем  $(VY)^3(1 + VY) = 0$ . Так как  $1 + VY$  — обратимый элемент кольца  $\mathbb{Z}[[Y, V]]$ , то  $(VY)^3 = 0$ . Аналогично,  $(YV)^3 = 0$  и соотношение принимает вид  $(YV)^2 = (VY)^2$ . Итак, доказано

**Предложение 2.** *Группа  $H = G_{\widetilde{M}}(T_v)$  допускает представление  $\Phi$  в группу обратимых элементов кольца  $\mathbb{Z}[[Y, V]]$  формальных степенных рядов с целыми коэффициентами от двух переменных  $Y, V$ , которые удовлетворяют соотношениям  $Y^2 = V^2 = (YV)^2 - (VY)^2 = 0$ .*

Так как  $\mathbb{Z}$ -алгебра  $A$ , порожденная элементами  $Y, V$  и заданная соотношениями

$$Y^2 = V^2 = (YV)^2 - (VY)^2 = 0,$$

конечномерна, то представление  $\Phi$  позволяет построить представление группы  $H$  целочисленными конечномерными матрицами.

Возьмем в качестве базиса алгебры  $A$  элементы  $1, Y, V, YV, VY, YVY, VYV, (YV)^2$ . Группа  $H = \langle y, v \rangle$  действует на алгебре  $A$  умножением справа, т.е.  $w \mapsto wg, w \in A, g \in H$ . При этом действию элементам  $y, v$  соответствуют матрицы

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что матрицы  $y_0, v_0$  порождают нильпотентную группу. Нами доказано

**Предложение 3.** *Существует линейное представление  $H \rightarrow UT_8(\mathbb{Z})$ .*

Аналогичные построения для группы классического трилистника  $G(T) = \langle y, v \mid yvy = v y v \rangle$  приводят к  $\mathbb{Z}$ -алгебре с порождающими  $Y, V$ , которые удовлетворяют соотношениям  $Y = V, Y^2 = 0$ . При этом матричное представление  $Y \mapsto y_0, V \mapsto v_0$ , где

$$y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

является эпиморфизмом группы  $G(T)$  на бесконечную циклическую группу.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dyer J., Grossman E.** The automorphism groups of the braid groups // *Amer. J. Math.* 1981. Vol. 103, no. 6. P. 1151–1169. doi: 10.2307/2374228.
2. **Kauffman L.H.** Virtual knot theory // *Eur. J. Comb.* 1999. Vol. 20, no. 7. P. 663–690. doi: 10.1006/eujc.1999.0314.
3. **Bardakov V.G.** Virtual and welded links and their invariants [e-resource] // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2005. Vol. 2. P. 196–199.
4. **Manturov V.O.** On the recognition of virtual braids // *Zap. Nauchn. Sem. S. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. POMI. (Geom. i Topol. 8)*. 2003. Vol. 299. P. 267–286 (in Russian).
5. **Carter J.S., Silver D., Williams S.** Invariants of links in thickened surfaces // *Algebr. Geom. Topol.* 2014. Vol. 14, no. 3. P. 1377–1394. doi: 10.2140/agt.2014.14.1377.
6. **Bardakov V.G., Mikhalechishina Yu.A., Neshchadim M.V.** Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups // *J. Knot Theory Ramifications*. 2017. Vol. 26, no. 1. 1750003. 17 p. doi: 10.1142/S0218216517500031.
7. **Bardakov V.G., Bellingeri P.** Groups of virtual and welded links // *J. Knot Theory Ramifications*. 2014. Vol. 23, no. 3. 1450014. 23 p. doi: 10.1142/S021821651450014X.
8. **Бардаков В.Г., Михайлов Р.В.** Об аппроксимационных свойствах групп зацеплений // *Сиб. мат. журн.* 2007. Т. 48, № 3. С. 485–495. doi: 10.1007/s11202-007-0042-0.
9. **Lyndon R.C., Schupp P.E.** *Combinatorial group theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1977. 339 p. ISBN: 3-540-07642-5.
10. **Fenn R., Rimanyi R., Rourke C.** The braid-permutation group // *Topology*. 1997. Vol. 36, no. 1. P. 123–135. doi: 10.1016/0040-9383(95)00072-0.
11. **McCool J.** On basis-conjugating automorphisms of free groups // *Can. J. Math.* 1986. Vol. 38, no. 6. P. 1525–1529. doi: 10.4153/CJM-1986-073-3.
12. **Birman J.S.** *Braids, links, and mapping class groups*. Princeton: Princeton University Press, 1974. 228 p. (Annals of Math. Studies; vol. 82). ISBN: 0691081492.
13. **Марков А.А.** Основы алгебраической теории кос // *Тр. МИАН*. 1945. Т. 16. С. 1–54.
14. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Институт математики СО РАН. 14-е изд. Новосибирск, 1999. 134 с.

Бардаков Валерий Георгиевич

Поступила 15.06.2017

д-р физ.-мат. наук, доцент

ведущий науч. сотрудник

Институт математики СО РАН им. С.Л.Соболева,

Новосибирский государственный университет,

Новосибирский государственный аграрный университет,

г. Новосибирск

e-mail: bardakov@math.nsc.ru

Нещадим Михаил Владимирович

д-р физ.-мат. наук, доцент

ведущий науч. сотрудник

Институт математики СО РАН им. С.Л.Соболева,

Новосибирский государственный университет,

г. Новосибирск

e-mail: neshch@math.nsc.ru

## REFERENCES

1. Dyer J., Grossman E. The automorphism groups of the braid groups. *Amer. J. Math.*, 1981, vol. 103, no. 6, pp. 1151–1169. doi: 10.2307/2374228.
2. Kauffman L.H. Virtual knot theory. *Eur. J. Comb.*, 1999, vol. 20, no. 7, pp. 663–690. doi: 10.1006/eujc.1999.0314.

3. Bardakov V.G. Virtual and welded links and their invariants. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2005, vol. 2, pp. 196–199 (electronic).
4. Manturov V.O. On the recognition of virtual braids. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2005, vol. 131, no. 1, pp. 5409–5419. doi: 10.1007/s10958-005-0415-5.
5. Carter J.S., Silver D., Williams S. Invariants of links in thickened surfaces. *Algebr. Geom. Topol.*, 2014, vol. 14, no. 3, pp. 1377–1394. doi: 10.2140/agt.2014.14.1377.
6. Bardakov V.G., Mikhailchishina Yu.A., Neshchadim M.V. Representations of virtual braids by automorphisms and virtual knot groups. *J. Knot Theory Ramifications*, 2017, vol. 26, no. 1, 1750003, 17 p. doi: 10.1142/S0218216517500031.
7. Bardakov V.G., Bellingeri P. Groups of virtual and welded links. *J. Knot Theory Ramifications*, 2014, vol. 23, no. 3, 1450014, 23 p. doi: 10.1142/S021821651450014X.
8. Bardakov V.G., Mikhailov R.V. On the residual properties of link groups. *Siberian Math. J.*, 2007, vol. 48, no. 3, pp. 387–394. doi: 10.1007/s11202-007-0042-0.
9. Lyndon R.C., Schupp P.E. *Combinatorial group theory*. Berlin, Springer-Verlag, 1977, 339 p. ISBN: 3-540-07642-5.
10. Fenn R., Rimanyi R., Rourke C. The braid-permutation group. *Topology*, 1997, vol. 36, no. 1, pp. 123–135. doi: 10.1016/0040-9383(95)00072-0.
11. McCool J. On basis-conjugating automorphisms of free groups. *Can. J. Math.*, 1986, vol. 38, no. 6, pp. 1525–1529. doi: 10.4153/CJM-1986-073-3.
12. Birman J.S. *Braids, links, and mapping class groups*. Princeton, Princeton University Press, 1974, Ser. Annals of Math. Studies, vol. 82. 228 p. ISBN: 0691081492.
13. Markov A.A. Fundamentals of algebraic theory of braid groups. *Trudy Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR*, 1945, vol. 16, pp. 1–54 (in Russian).
14. *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory*. Ed. by V. D. Mazurov and E. I. Khukhro. 14th augm. ed. Russian Academy of Sciences, Siberian Division, Institute of Mathematics, Novosibirsk, 1999, 134 p.

The paper was received by the Editorial Office on June 21, 2017.

*Valeriy Georgievich Bardakov*, Dr. Phys.-Math. Sci., docent, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090 Russian; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russian; Novosibirsk State Agrarian University, Novosibirsk, 630039 Russian, email: bardakov@math.nsc.ru.

*Mikhail Vladimirovich Neshchadim*, Dr. Phys.-Math. Sci., docent, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090 Russian; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russian, email: neshch@math.nsc.ru.

УДК 512.54

## КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЧЕТЫРЬМЯ КЛАССАМИ СОПРЯЖЕННЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП. I <sup>1</sup>

В. А. Белоногов<sup>2</sup>

Изучаются конечные группы, имеющие точно 4 класса сопряженных максимальных подгрупп. Группы с этим свойством названы  $4M$ -группами. В статье доказаны две теоремы. В теореме 1 приводится полный список конечных простых  $4M$ -групп. В этом списке, кроме некоторых линейных и унитарных групп, содержатся также группы Судзуки над полем порядка  $2^r$ , где  $r$  — простое число ( $r > 2$ ). В теореме 2 дано описание конечных неразрешимых  $4M$ -групп, не имеющих нормальных максимальных подгрупп. Таким образом, в статье описаны конечные неразрешимые  $4M$ -группы, совпадающие со своим коммутантом. При этом существенно используются ранние результаты автора о строении конечных групп, имеющих точно 3 класса сопряженных максимальных подгрупп и результаты Г. Паздерского о строении конечных групп, имеющих точно 2 класса сопряженных максимальных подгрупп.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, максимальная подгруппа.

**V. A. Belonogov. Finite simple groups with four conjugacy classes of maximal subgroups. I.**

We study the finite simple groups with exactly four conjugacy classes of maximal subgroups. The groups with this property are called  $4M$ -groups. We prove two theorems. Theorem 1 gives a complete list of finite simple  $4M$ -groups, which contains some linear and unitary groups as well Suzuki groups over the field of order  $2^r$ , where  $r$  is a prime ( $r > 2$ ). In Theorem 2 we describe finite nonsolvable  $4M$ -groups without normal maximal subgroups. Thus, the paper gives a description of finite nonsolvable  $4M$ -groups that coincide with their commutator group. This study uses the author's earlier results on the structure of finite groups with exactly three conjugacy classes of maximal subgroups and Pazderski's results on the structure of finite groups with exactly two conjugacy classes of maximal subgroups.

Keywords: finite group, simple group, maximal subgroup.

MSC: 20D05, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-52-62

### Введение

В настоящей статье изучаются конечные группы, имеющие точно 4 класса сопряженных максимальных подгрупп (см. теоремы 1 и 2 ниже).

Конечные группы, имеющие лишь один класс сопряженных максимальных подгрупп, очевидно, являются примарными циклическими. Конечные группы, имеющие точно два класса сопряженных максимальных подгрупп, были описаны в 1964 г. Г. Паздерским [1]; эти группы разрешимы и порядок любой такой группы является произведением степеней двух различных простых чисел.

Описание конечных (разрешимых и неразрешимых) групп с точно тремя классами сопряженных максимальных подгрупп было получено автором в 1986 г. в [2]. В частности, там доказано (см. [2, теорема 1]), что

*конечная неразрешимая группа  $G$  имеет точно 3 класса сопряженных максимальных подгрупп если и только если  $G/\Phi(G)$  есть простая группа, изоморфная  $PSL_2(7)$  или  $PSL_2(2^r)$ , где  $r$  — простое число.*

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы “Современные проблемы алгебры и комбинаторики” (госбюджетный проект 0387-2015-0060).

<sup>2</sup>25 лет назад вышла первая в нашем журнале статья Вячеслава Александровича:

Белоногов В. А. Новый метод вычисления  $p$ -блоков // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 1992. Т. 1. С. 3–12.

Конечная группа, имеющая точно  $n$  классов сопряженных максимальных подгрупп ( $n$  — натуральное число), называется  $nM$ -группой.

Таким образом, в силу работ [1] и [2] конечные  $nM$ -группы при  $n \leq 3$  известны.

Цель автора — изучить конечные  $4M$ -группы. В настоящей первой части работы доказываются следующие две теоремы.

**Теорема 1.** *Конечная простая группа  $G$  является  $4M$ -группой если и только если выполнено одно из следующих условий:*

- (1)  $G \cong PSL_2(11)$ ;
- (2)  $G \cong PSL_2(p)$ , где  $p$  — простое число,  $p > 3$  и  $p \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$ ;
- (3)  $G \cong PSL_2(p^{r^m})$ , где  $p, r$  — простые числа,  $r > 2$  при  $p > 2$ ,  $m \in \mathbb{N}$  и  $pm > 2$ ;
- (4)  $G \cong PSL_3(3)$ ;
- (5)  $G \cong PSU_3(q)$ , где  $q = 3$  или  $q = 2^{2^m}$ , где  $m \in \mathbb{N}$ ;
- (6)  $G \cong Sz(2^r)$ , где  $r$  — простое число ( $r > 2$ ).

**Теорема 2.** *Пусть  $G$  — конечная непростая группа без нормальных подгрупп простого индекса. Равносильны следующие утверждения:*

- (1)  $G$  —  $4M$ -группа и  $\Phi(G) = 1$ ;
- (2)  $G = P \rtimes M$ , где  $P$  — минимальная нормальная  $p$ -подгруппа в  $G$  при некотором простом  $p$ ,  $M/\Phi(M)$  изоморфна  $PSL_2(7)$  или  $PSL_2(2^r)$  при некотором простом  $r$ ,  $M_G = 1$  и любое дополнение к  $P$  в  $G$  сопряжено в  $G$  с  $M$ .

Таким образом, теоремы 1 и 2 описывают, по существу, конечные  $4M$ -группы, совпадающие со своим коммутантом.

Используемые далее обозначения, в основном, стандартны (см., например, [3–5]).  $\mathbb{N}$  есть множество всех натуральных чисел. Если  $m, n \in \mathbb{N}$ , то запись  $m \mid n$  означает, что  $m$  делит  $n$ . Через  $Z_n$ ,  $E_n$  и  $D_n$  обозначаются соответственно циклическая, элементарная абелева и диэдральная группы порядка  $n$ . Если  $H$  — подгруппа группы  $G$ , то  $\{H\}^G$  есть класс сопряженных подгрупп группы  $G$ , содержащий подгруппу  $H$ , и  $H_G$  — пересечение всех подгрупп группы  $G$ , сопряженных с  $H$  в  $G$  (ядро  $H$  в  $G$ ).  $m(G)$  обозначает число классов сопряженных максимальных подгрупп группы  $G$ . Классы сопряженных максимальных подгрупп мы будем называть также просто *классами максимальных подгрупп*.  $\Phi(G)$  — подгруппа Фраттини группы  $G$ .

Используются также следующие, несколько видоизмененные, обозначения из Атласа [6, с. XX]. Запись  $G \doteq A.B$  (читается: “ $G$  имеет тип  $A.B$ ” или “ $G$  есть группа типа  $A.B$ ”) означает, что группа  $G$  имеет нормальную подгруппу, изоморфную  $A$ , фактор-группа по которой изоморфна  $B$  (т. е.  $G$  есть расширение  $A$  с помощью  $B$ ). В случае расщепляемого расширения вместо точки может быть использован знак  $\rtimes$  (в частности, в настоящей статье) или знак  $:$  (в Атласе [6] и ряде других работ). Запись  $G \doteq A_1.A_2 \dots .A_n$  при  $n \geq 3$  означает, что  $G \doteq (\dots ((A_1.A_2).A_3) \dots .A_{n-1}).A_n$  и при любом  $i \leq n$  группа  $G$  имеет нормальную подгруппу  $N_i \doteq A_1.A_2 \dots .A_i$ . Обычно  $m, n$  — натуральные числа;  $G^m$  — прямое произведение  $m$  экземпляров группы  $G$ , и если  $E$  — элементарная абелева группа, то  $E^{m+n} := E^m.E^n$ . Если  $H$  есть единственная подгруппа индекса  $n$  группы  $G$ , то она может быть обозначена через  $\frac{1}{n}G$ .

Краткое сообщение о результатах настоящей статьи сделано в [7].

## 1. Доказательство теоремы 1

Пусть  $G$  — конечная простая  $4M$ -группа. Согласно классификации конечных простых групп [8]  $G$  есть либо циклическая группа простого порядка, либо знакопеременная группа, либо группа лиева типа, либо одна из 26 спорадических простых групп.

**Лемма 1.1.** *Конечная знакопеременная группа  $A_n$  при любом  $n \geq 1$  не является  $4M$ -группой.*

Т а б л и ц а 1

## Число классов максимальных подгрупп в спорадических группах

$G$	$M_{11}$	$M_{12}$	$M_{22}$	$M_{23}$	$M_{24}$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$HS$	$Suz$	$McL$	$Ru$
$m(G)$	5	11	8	7	9	7	9	9	13	12	17	12	15
$G$	$He$	$Ly$	$O'N$	$Co_1$	$Co_2$	$Co_3$	$Fi_{22}$	$Fi_{23}$	$Fi'_{24}$	$HN$	$Th$	$F_2$	$F_1$
$m(G)$	11	9	13	24	11	14	14	14	25	14	16	29	$\geq 43$

Т а б л и ц а 2

## Группы лиева типа и их лиевы ранги

$G$	$A_n(q)$	$B_n(q)$	$C_n(q)$	$D_n(q)$	$G_2(q)$	$F_4(q)$	$E_6(q)$	$E_7(q)$	$E_8(q)$
$l$	$n$	$n$	$n$	$n$	2	4	6	7	8
$G$	${}^2A_n(q)$	${}^2B_2(q)$	${}^2D_n(q)$	${}^3D_4(q)$	${}^2G_2(q)$	${}^2F_4(q)$	${}^2E_6(q)$	${}^2F_4(2)'$	
$l$	$\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$	1	$n-1$	2	1	2	4		

**Доказательство.** Пусть  $G = A_n$ . Предположим, что  $G$  является  $4M$ -группой. Тогда  $n \geq 5$ , так как при  $n \leq 4$  группа  $G$  имеет не более двух классов сопряженных максимальных подгрупп. Согласно уточнению теоремы О'Нэна — Скотта [9, теорема]  $G$  имеет максимальные подгруппы вида  $M = M_{m,k} \doteq (A_m \times A_k) \cdot Z_2$  ( $M = (S_m \times S_k) \cap A_n$ ) при любых натуральных  $m$  и  $k$  с  $n = m + k$  и  $m > k$ , а число  $r$  таких  $M$  равно  $(n-1)/2$  при нечетном  $n$  и  $(n-2)/2$  — при четном  $n$ . В любом случае  $r \geq (n-2)/2$ . Поскольку подгруппы  $M_{m,k}$  лежат в различных классах максимальных подгрупп группы  $G$  (они попарно не изоморфны), а  $G$  есть  $4M$ -группа, то должно быть  $4 \geq r \geq (n-2)/2$ , т.е.  $n \leq 10$ . Согласно Атласу [6, с. 2, 4, 10, 22, 37, 48] число классов сопряженных максимальных подгрупп в группах  $A_1, \dots, A_{10}$  соответственно равно 0,1,1,2, 3,5,5,6,8,24. А отсюда следует заключение леммы.  $\square$

**Лемма 1.2.** *Каждая конечная спорадическая простая группа имеет более четырех классов сопряженных максимальных подгрупп.*

**Доказательство** видно из табл. 1, которая непосредственно вытекает из списков максимальных подгрупп спорадических групп в Атласе [6] с некоторыми добавлениями из [10, гл. 5].  $\square$

Остается рассмотреть конечные простые группы лиева типа. Полный список таких групп приведен в табл. 2. В ней же для каждой группы  $G$  мы приводим ее лиев ранг  $l = l(G)$  (см., например, [4, с. 493, 494]).

Отметим имеющиеся изоморфизмы выписанных здесь групп лиева типа с линейными группами и группами Судзуки-Ри, и в скобках укажем необходимое и достаточное условие простоты группы (см. [6]):  $A_n(q) \cong PSL_{n+1}(q)$  ( $n \geq 1, (n, q) \notin \{(1, 2), (1, 3)\}$ ),  $B_n(q) \cong P\Omega_{2n+1}(q)$  ( $n \geq 2, (n, q) \neq (2, 2)$ ),  $C_n(q) \cong PSp_{2n}(q)$  ( $n \geq 2, (n, q) \neq (2, 2)$ ),  $D_n(q) \cong P\Omega_{2n}^+(q)$  ( $n \geq 3$ ),  ${}^2A_n(q) \cong PSU_{n+1}(q)$  ( $n \geq 2, (n, q) \neq (2, 2)$ ),  ${}^2B_2(q) \cong Sz(q)$  — группы Судзуки,  $q = 2^{2m+1}$  ( $q > 2$ ),  ${}^2D_n(q) \cong P\Omega_{2n}^-(q)$  ( $n \geq 2$ ),  ${}^2G_2(q) \cong R(q)$  — группы Ри характеристики 3,  $q = 3^{2m+1}$  ( $q > 3$ ),  ${}^2F_4(q)$  — группы Ри характеристики 2,  $q = 2^{2m+1}$  ( $q > 2$ ),  ${}^2F_4(2)'$   $\cong T$  — группа Титса.

**Лемма 1.3.** *Пусть  $G$  — конечная простая  $4M$ -группа лиева типа. Тогда  $l(G) \leq 4$ . В частности, выполнено одно из следующих условий:*

- (1)  $G \cong A_n(q) \cong PSL_{n+1}(q)$ , где  $n \leq 4$ ;
- (2)  $G \cong {}^2A_n(q) \cong PSU_{n+1}(q)$ , где  $n \leq 8$ ;
- (3)  $G \cong C_n(q) \cong PSp_{2n}(q)$ , где  $n \leq 4$ ;
- (4)  $G \cong B_n(q) \cong P\Omega_{2n+1}(q)$ , где  $n \leq 4$ ;

- (5)  $G \cong {}^2B_2(q) \cong Sz(q)$  ( $q = 2^{2m+1} > 2$ );
- (6)  $G \cong D_4(q) \cong P\Omega_8^+(q)$ ;
- (7)  $G \cong {}^2D_n(q) \cong P\Omega_{2n}^-(q)$ , где  $n \leq 5$ ;
- (8)  $G \cong {}^3D_4(q)$ ;
- (9)  $G \cong G_2(q)$ ;
- (10)  $G \cong {}^2G_2(q)$  ( $q = 3^{2n+1} > 3$ );
- (11)  $G \cong F_4(q)$ ;
- (12)  $G \cong {}^2F_4(q)$  ( $q = 2^{2m+1} > 2$ );
- (13)  $G \cong {}^2F_4(2)' \cong T(\text{группа Титса})$ ;
- (14)  $G \cong {}^2E_6(q)$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  — конечная простая группа лиева типа (нескрученная или скрученная) над полем характеристики  $p$ . Согласно [11, предложение 8.2.1; теорема 13.5.4]  $G$  обладает  $(B, N)$ -парой, где  $B$  — подгруппа Бореля группы  $G$  (нормализатор силовской  $p$ -подгруппы  $P$  из  $G$ ), а  $N$  — нормализует подгруппу Картана  $H$  из  $G$  ( $H$  — дополнение к  $P$  в  $B$ ). В более компактном виде этот результат приведен в [12, теорема 2.15]. При этом ранг  $l$  этой  $(B, N)$ -пары (т.е. ранг ее группы Вейля) называется *лиевым рангом* группы  $G$ .

Подгруппы группы  $G$ , содержащие подгруппу  $B$  или подгруппу сопряженную с ней, называются параболическими подгруппами группы  $G$ . Согласно [11, предложение 8.2.2, теорема 8.3.4] существует определенное множество  $I$  мощности  $l$  и взаимно однозначное отображение  $J \mapsto P_J$  множества всех подмножеств  $J$  из  $I$  на множество всех подгрупп  $P_J$  группы  $G$ , содержащих  $B$ , такое, что  $P_J \cap P_K = P_{J \cap K}$ , где  $K, J \subseteq I$ . Следовательно,  $G$  имеет точно  $l$  максимальных подгрупп, содержащих  $B$ . Кроме того, согласно [11, предложение 8.3.3] подгруппы  $P_J$  при различных  $J$  не сопряжены между собой в  $G$ .

Таким образом, группа  $G$  имеет точно  $l$  классов сопряженных параболических максимальных подгрупп, т.е. подгрупп  $P_J$  при различных  $J = I \setminus \{i\}$ , где  $i \in I$ .

Следовательно,  $l \leq 4$ .

Отсюда и из табл. 2 непосредственно следует второе утверждение леммы.  $\square$

Теперь нам нужно уточнить, какие именно из групп  $G$  пп. (1)–(14) леммы 1.3 являются  $4M$ -группами.

Рассмотрим сначала группы п. (1) леммы 1.3. Пусть  $G \cong A_n(q) \cong PSL_{n+1}(q)$ , где  $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ .

Далее без оговорок мы учитываем равенство  $m(PSL_n(q)) = m(SL_n(q))$  (поскольку  $PSL_n(q)$  равно  $SL_n(q)/\Phi(SL_n(q))$ ) и подобные равенства для унитарных, симплектических и ортогональных групп.

**Лемма 1.4.** *Группа  $G \cong PSL_2(q)$  является  $4M$ -группой тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

- (1)  $G \cong PSL_2(11)$ ;
- (2)  $G \cong PSL_2(p)$ , где  $p$  — простое число и  $p \equiv \pm 3, \pm 13 \pmod{40}$ ;
- (3)  $G \cong PSL_2(p^{r^m})$ , где  $p, r$  — простые числа,  $m \in \mathbb{N}$  и  $pm > 2$ .

**Доказательство.** Пусть  $G = PSL_2(q)$ , где  $q$  — степень простого числа. Тогда  $|G| = q(q^2 - 1)/d$ , где  $d := (2, q - 1)$ , и, следовательно,  $\pi(G) = \pi(q) \cup \pi(q - 1) \cup \pi(q + 1) = \pi(q) \dot{\cup} \pi((q - 1)/d) \dot{\cup} \pi((q + 1)/d)$ .

Из [13, разд. 2.1] и [14, табл. 8.1] непосредственно вытекает табл. 3, в которой  $E_q \lambda Z_{(q-1)/d}$  есть группа Фробениуса (см. [4, лемма 15.1.1]). В каждом из типов (i)–(viii) в 3-м столбце записано необходимое и достаточное условие существования указанной максимальной подгруппы, под *классом* понимается класс сопряженных подгрупп в  $G$  (легко заметить, что максимальные подгруппы типов v–viii имеются только при нечетных  $q$ ).

Из табл. 3 непосредственно видно, что при  $q \leq 11$  лемма 1.4 верна, а именно, число  $m(G)$  классов сопряженных максимальных подгрупп в  $G$ , равно 3 при  $q \leq 8$  равно 5 при  $q = 9$  и равно 4 при  $q = 11$ . Теперь пусть  $q > 11$ . Тогда согласно табл. 3  $G$  имеет максимальные

Т а б л и ц а 3

Максимальные подгруппы группы  $PSL_2(q)$ ,  $q \geq 4$

№. (тип)	Максимальная подгруппа	Условие существования максимальной подгруппы ( $q = p^a$ , $p$ простое, $a \in \mathbb{N}$ )	Число классов
i	$E_q \rtimes Z_{(q-1)/d}$	всегда существует	1
ii	$D_{2(q-1)/d}$	$q \notin \{5, 7, 9, 11\}$	1
iii	$D_{2(q+1)/d}$	$q \notin \{7, 9\}$	1
iv	$PSL_2(q_0)$	$q = q_0^r$ , где $q_0 \mid q$ , $q_0 \neq 2$ , $r$ — простое, и $r$ нечетно при нечетном $q$	1 при каждом $r$
v	$PGL_2(q_0)$	$q$ нечетно и $q = q_0^2$ , $q_0 \mid q$	2
vi	$S_4$	$q = p \equiv \pm 1 \pmod{8}$	2
vii	$A_4$	$q = p \equiv \pm 3, 5, \pm 13 \pmod{40}$	1
viii	$A_5$	$q = p \equiv \pm 1 \pmod{10}$ или $q = p^2$ , где $p \equiv \pm 3 \pmod{10}$	2

подгруппы типов i–iii, и поэтому она не имеет максимальных подгрупп типов v, vi и viii (иначе было бы  $m(G) \geq 5$ ). Пусть  $q = p^a$ , как в табл. 3.

Если  $q = p$ , то  $G$  может иметь еще лишь 1 класс максимальных подгрупп, а именно, типа vii, и, следовательно, есть группа типа (3) теоремы 1 (учитываем, что  $p \neq 5$ ).

Пусть, наконец,  $q \neq p$ , т.е.  $a \neq 1$ . Тогда  $G$  имеет максимальную подгруппу типа iv точно при одном  $r$ , т.е. либо  $p \neq 2$  и  $a = r^m$ , где  $r$  — простое нечетное число и  $m \in \mathbb{N}$ , либо  $p = 2$  и  $a = r^m$ , где  $r$  — простое число  $\geq 2$ ,  $m \in \mathbb{N}$  и  $m \neq 1$  (так как  $q_0 \neq 2$ ).  $\square$

**Лемма 1.5.** *Группа  $PSL_3(q)$  является 4M-группой тогда и только тогда, когда  $q = 3$ .*

**Доказательство.** Согласно [14, табл. 8.3] при  $q \geq 5$  группа  $SL_3(q)$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп:

- 2 класса максимальных подгрупп типа  $E_{q^2} \rtimes GL_2(q)$ ,
- 1 класс максимальных подгрупп типа  $E_q^{1+2} \rtimes Z_{(q-1)}^2$ ,
- 1 класс максимальных подгрупп типа  $GL_2(q)$ ,
- 1 класс максимальных подгрупп типа  $(Z_{q-1} \times Z_{q-1}) \rtimes S_3$ .

Следовательно,  $m(PSL_3(q)) \geq 5$  при  $q \geq 5$ .

Если же  $q < 5$ , то согласно [6, с. 3, 13, 23] число классов максимальных подгрупп равно 3 в  $PSL_3(2) (\simeq PSL_2(7))$ , 4 в  $PSL_3(3)$  (как в лемме) и 9 в  $PSL_3(4)$ .  $\square$

**Лемма 1.6.** *Группы  $PSL_4(q)$  и  $PSL_5(q)$  при любом  $q$  не являются 4M-группами.*

**Доказательство.** Группы  $PSL_4(q)$  и  $PSL_5(q)$  просты при любом  $q$ . Согласно [14, табл. 8.8] группа  $SL_4(q)$  при любом  $q$  имеет по крайней мере 5 классов максимальных подгрупп:

- 2 класса максимальных подгрупп типа  $E_q^3 \rtimes GL_3(q)$ ,
- 1 класс максимальных подгрупп типа  $E_q^4 \rtimes SL_2(q)^2 \rtimes Z_{q-1}$ ,
- 1 класс максимальных подгрупп типа  $E_q^{1+4} \rtimes (GL_2(q) \times Z_{q-1})$ ,
- 1 класс максимальных подгрупп типа  $GL_3(q)$ .

Согласно [14, табл. 8.18] группа  $SL_5(q)$  при любом  $q$  имеет по крайней мере 5 классов максимальных подгрупп:

- 2 класса максимальных подгрупп типа  $E_q^4 \rtimes GL_4(q)$ ,
- 2 класса максимальных подгрупп типа  $E_q^6 \rtimes (SL_2(q) \times SL_3(q)) \rtimes Z_{q-1}$ ,
- 1 класс максимальных подгрупп типа  $GL_4(q)$ .

$\square$



Рассмотрим теперь группы п. (2) леммы 1.3. Пусть  $G \cong PSU_n(q) \cong {}^2A_{n-1}(q)$ , где  $n \leq 9$ . Так как  $PSU_2(q) \simeq PSL_2(q)$ , то далее мы будем считать, что  $n \geq 3$ . Кроме того, при  $n \geq 3$  группа  $G$  непроста если и только если  $G \cong PSU_3(2) \doteq E_9 \rtimes Q_8$  (см. [6]).

**Лемма 1.7.** *Простая группа  $PSU_3(q)$  является 4M-группой тогда и только тогда, когда  $q = 3$  или  $q = 2^{2^m}$ , где  $m \in \mathbb{N}$ .*

**Доказательство.** Поскольку группа  $PSU_3(2) \doteq E_9 \rtimes Q_8$  непроста, то далее мы считаем, что  $q \geq 3$ . Пусть  $G \cong SU_3(q)$ . Если  $q < 7$ , то согласно [6, с. 14, 30, 34]  $m(G) = 4$  лишь при  $q \in \{3, 4\}$ . Пусть теперь  $q \geq 7$  и  $q = p^a$ , где  $p$  — простое число и  $a \in \mathbb{N}$ . Тогда согласно [14, табл. 8.5, 8.6] при любом таком  $q$  группа  $G$  имеет 4 класса максимальных подгрупп с представителями типов:  $E_q^{1+2} \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $GU_2(q)$ ,  $(Z_{q+1} \times Z_{q+1}) \cdot S_3$ ,  $Z_{q^2-q+1} \rtimes Z_3$ .

Кроме того,  $G$  имеет класс максимальных подгрупп типа  $SU_3(q_0) \cdot Z_{(\frac{q+1}{q_0+1}, 3)}$ , где  $q = q_0^r$ , если  $a$  имеет нечетный простой делитель  $r$ , и  $G$  имеет класс максимальных подгрупп типа  $Z_{(q+1, 3)} \times SO_3(q)$ , если  $q$  нечетно. Следовательно, если  $m(G) = 4$ , то должно быть  $a = 2^m$ , где  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  и  $p = 2$ , т. е. выполнены условия на  $q$  в доказываемой лемме.

Обратно, при этих условиях не могут существовать в  $G$  максимальные подгруппы из [14, табл. 8.5, 8.6], не упомянутые выше (условие существования любого из них противоречит условию  $q = 2^{2^m}$ ).  $\square$

**Лемма 1.8.** *Для простой группы  $G = PSU_n(q)$  при любом  $n \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  и любом  $q$   $m(G) \geq 5$ .*

**Доказательство.** Пусть  $G = PSU_4(q)$ . Понятно, что  $m(PSU_n(q)) = m(SU_n(q))$ . Согласно [6, с. 26, 52]  $m(G)$  равно 5 при  $q = 2$  и равно 16 при  $q = 3$ . Если же  $q \geq 4$ , то по [14, табл. 8.10] группа  $SU_4(q)$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^{1+4} \rtimes SU_2(q) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^4 \rtimes SL_2(q^2) \rtimes Z_{q-1}$ ,  $GU_3(q)$ ,  $Z_{q+1}^3 \cdot S_4$ ,  $Sp_4(q) \cdot Z_{(q+1, 2)}$ ). Таким образом,  $m(PSU_4(q)) \geq 5$  при любом  $q$ .

Далее, для  $n \in \{5, 6, 7, 8\}$  в табл. 8.20, 8.26, 8.37, 8.46 и 8.56 из [14] для  $SU_n(q)$  при произвольном  $q$  легко указать представителей пяти классов сопряженных максимальных подгрупп. Например,

для  $SU_5(q) - E_q^{1+6} \rtimes SU_3(q) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^{4+4} \rtimes GL_2(q^2)$ ,  $GU_4(q)$ ,  $(SU_3(q) \times SU_2(q)) \rtimes Z_{q+1}$ ,  $Z_{q+1}^4 \cdot S_5$ ;  
 для  $SU_6(q) - E_q^{1+8} \rtimes SU_4(q) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^{4+8} \rtimes (SL_2(q^2) \times SU_2(q)) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^9 \rtimes SL_3(q^2) \rtimes Z_{q-1}$ ,  $GU_5(q)$ ,  $(SU_4(q) \times SU_2(q)) \rtimes Z_{q+1}$ ;  
 для  $SU_7(q) - E_q^{1+10} \rtimes SU_5(q) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^{4+12} \rtimes (SL_2(q^2) \times SU_3(q)) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^{9+6} \rtimes GL_3(q^2)$ ,  $GU_6(q)$ ,  $(SU_5(q) \times SU_2(q)) \rtimes Z_{q+1}$ ;  
 для  $SU_8(q) - E_q^{1+12} \rtimes SU_6(q) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^{4+16} \rtimes (SL_2(q^2) \times SU_4(q)) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^{16} \rtimes SL_4(q^2) \rtimes Z_{q-1}$ ,  $GU_7(q)$ ,  $(SU_6(q) \times SU_2(q)) \rtimes Z_{q+1}$ ;  
 для  $SU_9(q) - E_q^{1+14} \rtimes SU_7(q) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^{4+20} \rtimes (SL_2(q^2) \times SU_5(q)) \rtimes Z_{q^2-1}$ ,  $E_q^{16+8} \rtimes GL_4(q^2)$ ,  $GU_8(q)$ ,  $(SU_6(q) \times SU_2(q)) \rtimes Z_{q+1}$ .  $\square$

Рассмотрим теперь группы п. (3) леммы 1.3. Пусть  $G \cong PSp_{2n}(q) \cong C_n(q)$ , где  $n \in \{2, 3, 4\}$ . Имеем:  $PSp_2(q) \simeq PSL_2(q)$ ;  $PSp_4(2) \simeq S_6$ , при  $q > 2$  группа  $PSp_4(q)$  проста; группы  $PSp_6(q)$  и  $PSp_8(q)$  просты при любом  $q$ ;  $m(PSp_{2n}(q)) = m(Sp_{2n}(q))$ .

**Лемма 1.9.** *Каждая из простых групп  $PSp_4(q)$ ,  $PSp_6(q)$  и  $PSp_8(q)$  при любом  $q$  имеет более четырех классов сопряженных максимальных подгрупп.*

**Доказательство.** Пусть  $G = PSp_4(q)$  и  $q > 2$  (при  $q = 2$  группа  $G$  не проста). Согласно [6, с. 26, 44]  $m(G)$  равно 5 при  $q = 3$  и равно 7 при  $q = 4$ . Пусть  $q \geq 5$ . Если  $q$  нечетно, то, как видно из [14, табл. 8.12], группа  $G$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^{1+2} \rtimes (Z_{q-1} \times Sp_2(q))$ ,  $E_q^3 \rtimes GL_2(q)$ ,  $Sp_2(q)^2 \rtimes Z_2$ ,  $GL_2(q) \cdot Z_2$ ,  $Sp_2(q^2) \rtimes Z_2$ ).

Если же  $q > 2$  четно, то согласно [14, табл. 8.14] группа  $G$  также имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^3 \rtimes GL_2(q)$  (2 класса),  $Sp_2(q) \wr Z_2$ ,  $Sp_2(q^2) \rtimes Z_2$ ,  $SO_4^+(q)$ ).

Пусть  $G = Sp_6(q)$ . Согласно [14, табл. 8.28] при любом  $q$  группа  $G$  имеет 4 класса сопряженных максимальных подгрупп с представителями типов  $E_q^{3+4} \rtimes (GL_2(q) \times Sp_2(q))$ ,  $E_q^6 \rtimes GL_3(q)$ ,  $Sp_2(q) \times Sp_4(q)$ ,  $Sp_2(q^3) \rtimes Z_3$ . Кроме того, в  $G$  имеется еще по крайней мере одна максимальная подгруппа, а именно, при нечетном  $q$  — подгруппа типа  $E_q^{1+4} \rtimes (Z_{q-1} \times Sp_4(q))$ , а при четном  $q$  — подгруппа типа  $E_q^5 \rtimes (Z_{q-1} \times Sp_4(q))$ .

Пусть  $G = Sp_8(q)$ . Согласно [14, табл. 8.48] при любом  $q$  группа  $G$  имеет 5 классов сопряженных максимальных подгрупп с представителями типов  $E_q^{3+8} \rtimes (GL_2(q) \times Sp_4(q))$ ,  $E_q^{6+6} \rtimes (GL_3(q) \times Sp_2(q))$ ,  $E_q^{10} \rtimes GL_4(q)$ ,  $Sp_6(q) \times Sp_2(q)$ ,  $Sp_4(q^2) \rtimes Z_2$ .  $\square$

Пусть теперь  $G \cong P\Omega_{2n+1}(q) \cong B_n(q)$  с  $n \in \{2, 3, 4\}$ , как в п. (4) леммы 1.3. Мы можем считать здесь, что  $n > 2$ , так как  $P\Omega_5(q) \simeq PSp_4(q)$ .

**Лемма 1.10.** *Каждая из простых групп  $P\Omega_7(q)$  и  $P\Omega_9(q)$  при любом  $q$  имеет более четырех классов сопряженных максимальных подгрупп.*

**Доказательство.** Поскольку  $P\Omega_{2m+1}(2^n) \cong PSp_{2m}(2^n)$  при всех  $m, n \in \mathbb{N}$ , то ввиду леммы 1.9 мы можем считать, что  $q$  нечетно. Тогда согласно [14, табл. 8.39] группа  $\Omega_7(q)$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^5 \rtimes (Z_{\frac{q-1}{2}} \times \Omega_5(q).Z_2)$ ,  $E_q^{1+6} \rtimes (\frac{1}{2}GL_2(q) \times \Omega_3(q)).Z_2$ ,  $E_q^{3+3} \rtimes (\frac{1}{2}GL_3(q))$ ,  $\Omega_6^+(q).Z_2$  и  $\Omega_6^-(q).Z_2$ ).

Согласно [14, табл. 8.58] группа  $\Omega_9(q)$  также имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^7 \rtimes (Z_{\frac{q-1}{2}} \times \Omega_7(q).Z_2)$ ,  $E_q^{1+10} \rtimes (\frac{1}{2}GL_2(q) \times \Omega_5(q)).Z_2$ ,  $E_q^{6+4} \rtimes (\frac{1}{2}GL_4(q))$ ,  $\Omega_8^+(q).Z_2$  и  $\Omega_8^-(q).Z_2$ ).  $\square$

**Лемма 1.11.** *Группа  $G = Sz(q)$  ( $q = 2^{2m+1} > 2$ ) является  $4M$ -группой если и только если  $q = 2^r$ , где  $r$  — простое число.*

**Доказательство.** Согласно [15] (см. также [14, табл. 8.16]) группа  $G$  имеет 4 класса сопряженных максимальных подгрупп с представителями типов  $E_q^{1+1} \rtimes Z_{q-1}$ ,  $D_{2(q-1)}$ ,  $Z_{(q-\sqrt{2q+1})} \rtimes Z_4$ ,  $Z_{(q+\sqrt{2q+1})} \rtimes Z_4$  и еще, возможно, лишь какие-либо подгруппы вида  $G(q_0) \cong Sz(q_0)$ , где  $q = q_0^r$ ,  $q_0 \mid q$  и  $r$  — простое число, делящее  $2m+1$ , причем  $q_0 \neq 2$ . Но отсюда непосредственно вытекает доказываемое утверждение.  $\square$

Рассмотрим группы пп. (6), (7) леммы 1.3. Заметим, что  $P\Omega_6^+(q) \simeq PSL_4(q)$ ,  $P\Omega_4^-(q) \simeq PSL_2(q^2)$  и  $P\Omega_6^-(q) \simeq PSU_4(q)$ . Следовательно, здесь нам остается рассмотреть лишь группы следующей леммы.

**Лемма 1.12.** *Группы  $P\Omega_8^+(q)$ ,  $P\Omega_8^-(q)$  и  $P\Omega_{10}^-(q)$  не являются  $4M$ -группами.*

**Доказательство.** Согласно [14, табл. 8.50] при любом  $q$  группа  $\Omega_8^+(q)$  имеет, в частности, 4 класса сопряженных максимальных подгрупп с представителями типа  $Z_2.\Omega_7(q)$  и 2 класса сопряженных максимальных подгрупп с представителями типа  $Sp_6(q)$ .

Согласно [14, табл. 8.52] группа  $\Omega_8^-(q)$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^6 \rtimes (Z_{\frac{q-1}{(q-1,2)}} \times \Omega_6^-(q)).Z_{(q-1,2)}$ ,  $E_q^{1+8} \rtimes (\frac{1}{(q-1,2)}GL_2(q) \times \Omega_4^-(q)).Z_{(q-1,2)}$ ,  $E_q^{1+6} \rtimes (\frac{1}{(q-1,2)}GL_3(q) \times \Omega_2^-(q)).Z_{(q-1,2)}$ ,  $(\Omega_2^-(q) \times \Omega_6^+(q)).E_{2(q-1,2)}$ ,  $(\Omega_4^+(q) \times \Omega_4^-(q)).E_{2(q-1,2)}$ ).

Согласно [14, табл. 8.68] при любом  $q$  группа  $\Omega_{10}^-(q)$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^8 \rtimes (Z_{\frac{q-1}{(q-1,2)}} \times \Omega_8^-(q)).Z_{(q-1,2)}$ ,  $E_q^{1+12} \rtimes (\frac{1}{(q-1,2)}GL_2(q) \times \Omega_6^-(q)).Z_{(q-1,2)}$ ,  $E_q^{3+12} \rtimes (\frac{1}{(q-1,2)}GL_3(q) \times \Omega_4^-(q)).Z_{(q-1,2)}$ ,  $(\Omega_2^-(q) \times \Omega_8^+(q)).E_{2(q-1,2)}$ ,  $(\Omega_4^+(q) \times \Omega_6^-(q)).E_{2(q-1,2)}$ ).  $\square$

В следующих леммах 1.3–1.16 мы рассмотрим группы пунктов (8)–(14) леммы 3.

**Лемма 1.13.** *Группа  ${}^3D_4(q)$  при любом  $q$  не является  $4M$ -группой.*

**Доказательство.** Согласно [14, табл. 8.50] группа  ${}^3D_4(q)$  при любом  $q$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^{1+8} \rtimes (Z_{q-1} \circ SL_2(q^3)).Z_{(q-1,2)}$ ,  $G_2(q)$ ,  $Z_{q^4-q^2+1}.Z_4$ ,  $Z_{q^4+q^2+1}.SL_2(3)$ ,

$Z_{q^4-q^2+1} \cdot SL_2(3)$ ). □

**Лемма 1.14.** Простые группы  $G_2(q)$  и  ${}^2G_2(q)$  не являются  $4M$ -группами.

**Доказательство.** Группа  $G_2(2)$  непростая. Списки максимальных подгрупп простых групп  $G = G_2(q)$ , где  $q$  — степень простого числа  $p$ , имеют различный вид при  $p = 2$ ,  $p = 3$  и  $p \geq 5$  (см. [10, табл. 4.1] или [14, табл. 8.30, 8.42, 8.41]). В любом случае  $G$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп. А именно, при любом  $p$  группа  $G$  имеет 4 класса подгрупп типов  $A \rtimes GL_2(q)$ , где  $|A| = q^5$ ,  $B \rtimes GL_2(q)$ , где  $|B| = q^5$  (с различными  $A$  и различными  $B$ ),  $SL_3(q) \rtimes Z_2$  и  $SU_3(q) \rtimes Z_2$ . Но группа  $G$  имеет еще класс сопряженных максимальных подгрупп с представителем типа  $SL_2(q) \circ SL_2(q)$  при  $p = 2$ , и с представителем типа  $(SL_2(q) \circ SL_2(q)) \cdot Z_2$  при любом  $p \geq 3$ .

Группа  $G = {}^2G_2(q)$  ( $q = 3^{2n+1} > 3$ ) согласно [16] (где впервые описаны максимальные подгруппы этих групп) или [14, табл. 8.43] имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $E_q^{1+1+1} \rtimes GL_2(q)$ ,  $Z_2 \times L_2(q)$ ,  $(E_4 \times D_{(q+1)/2}) \rtimes Z_3$ ,  $Z_{(q-\sqrt{3q+1})} \rtimes Z_6$ ,  $Z_{(q+\sqrt{3q+1})} \rtimes Z_6$ ) (при  $q = 3$  группа  $G$  непростая,  $G = {}^2G_2(3) \doteq L_2(8) \rtimes Z_3$ ). □

**Лемма 1.15.** Простые группы  $F_4(q)$ ,  ${}^2F_4(q)$  и  ${}^2F_4(2)'$  не являются  $4M$ -группами.

**Доказательство.** Пусть  $G = F_4(q)$ . Согласно табл. 2 лиев ранг группы  $G$  равен четырем и тогда, как уже отмечалось в лемме 1.3 (со ссылкой на [11, предложение 8.2.2, теорема 8.3.4, предложение 8.3.3] группа  $G$  имеет точно 4 класса сопряженных параболических максимальных подгрупп (порядок их силовских  $p$ -подгрупп равен  $q^{24}$ ). Однако согласно [17, теорема, табл. 5.1] (см. также [10, секция 4.8.9])  $G$  содержит еще по крайней мере одну непараболическую максимальную подгруппу: подгруппу типа  ${}^3D_4(q) \rtimes Z_3$  (порядок ее силовской  $p$ -подгруппы равен  $q^{12}$ ). Таким образом, группа  $G$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп.

Пусть  $G = {}^2F_4(q)$  ( $q = 2^{2m+1} > 2$ ). Согласно [10, теорема 4.5] группа  $G$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп (например, с представителями типов  $SU_3(q) \rtimes Z_2$ ,  $PGU_3(q) \rtimes Z_2$ ,  $Sz(q) \wr Z_2$ ,  $Sp_4(q) \rtimes Z_2$ ,  $Z_{q+1}^2 \rtimes GL_2(3)$ ). (Группа  ${}^2F_4(2)$  непроста.)

Группа  ${}^2F_4(2)'$  согласно [6, р. 75] имеет 8 классов сопряженных максимальных подгрупп. □

Наконец, нам остается рассмотреть группы последнего, 14-го, пункта леммы 1.3.

**Лемма 1.16.** Простая группа  ${}^2E_6(q)$  не является  $4M$ -группой.

**Доказательство.** Пусть  $G = {}^2E_6(q)$ , где  $q = p^m$  и  $p$  — простое число. Согласно табл. 2 лиев ранг группы  $G$  равен четырем и тогда, как уже отмечалось в лемме 1.3 (со ссылкой на [11, предложение 8.2.2, теорема 8.3.4, предложение 8.3.3] группа  $G$  имеет точно 4 класса сопряженных параболических максимальных подгрупп (порядок их силовских  $p$ -подгрупп равен  $q^{36}$ ). подгрупп (порядок их силовских  $p$ -подгрупп равен  $q^{36}$ ). Однако согласно [17, теорема, Table 5.1]  $G$  содержит еще по крайней мере одну непараболическую максимальную подгруппу: подгруппу типа  $PSU_3(q^3) \cdot (Z_e \times Z_3)$ , где  $e = (3, q + 1)$  (порядок ее силовской  $p$ -подгруппы равен  $q^9$ ). Таким образом,  $G$  имеет по крайней мере 5 классов сопряженных максимальных подгрупп. □

Из лемм 1.1–1.16 непосредственно вытекает теорема 1.

Теорема 1 доказана.

## 2. Лемма о непростых $4M$ -группах

Пусть  $G$  — конечная  $4M$ -группа. Теорема 1 описывает строение фактор-группы  $G/\Phi(G)$  в случае, когда она проста. Следующая лемма намечает две независимые части ее дальнейшего исследования в случае, когда она непроста.

**Лемма 2.1.** Пусть  $G$  — конечная  $4M$ -группа и  $G/\Phi(G)$  не проста. Пусть  $N$  — максимальная нормальная собственная подгруппа группы  $G$ , содержащая  $\Phi(G)$ . Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (1)  $G/N \cong Z_p$ , где  $p$  — простое число;
- (2)  $G/N$  — простая  $3M$ -группа, изоморфная  $PSL_2(7)$  или  $PSL_2(2^r)$ , где  $r$  — простое число.

**Доказательство.** Так как  $N$  — максимальная нормальная собственная подгруппа в  $G$ , то группа  $G/N$  проста. Число  $m$  классов максимальных подгрупп группы  $G/N$  меньше четырех, так как  $N > \Phi(G)$ . Таким образом,  $m \in \{1, 2, 3\}$ . Если  $m = 1$ , то, очевидно, выполнено условие (1) леммы.

Если  $m = 2$ , то по результату Г. Паздерского [1, теорема 6] порядок  $G/N$  есть произведение степеней двух различных простых чисел, но это противоречит тому, что группа  $G/N$  проста.

Следовательно,  $m = 3$  и, значит,  $G/N$  — простая группа с точно тремя классами максимальных подгрупп. Но отсюда по теореме 1 из [2] (протитированной на первой стр. настоящей статьи) следует справедливость условия (2) леммы.  $\square$

### 3. Доказательство теоремы 2

Пусть выполнено условие теоремы 2. Поскольку по условию группа  $G$  не имеет нормальных подгрупп простого индекса, то  $G$  неразрешима и каждая ее максимальная подгруппа не нормальна в  $G$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2): Пусть  $G$  —  $4M$ -группа и  $\Phi(G) = 1$ . Пусть  $N$  — максимальная нормальная собственная подгруппа в  $G$ . Согласно лемме 2.1 и теореме 1 из [2] группа  $G$  имеет точно 3 класса  $\{M_1\}^G, \{M_2\}^G, \{M_3\}^G$  максимальных подгрупп, содержащих  $N$ , и один класс  $\{M_4\}^G$  максимальных подгрупп, не содержащих  $N$ , причем

$$G = NM_4 \text{ и } G/N \text{ изоморфна } PSL_2(7) \text{ или } PSL_2(2^r), \text{ где } r \text{ — простое число.}$$

Пусть  $P$  — минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $N$  (в частности,  $P \subseteq M_1 \cap M_2 \cap M_3$ ). Тогда, очевидно,  $G = PM_4$  (иначе  $P \subseteq \Phi(G) = 1$ ).

Покажем, что подгруппа  $P$  примарна.

Предположим от противного, что  $\pi(P) = \{p_1, \dots, p_k\}$ , где  $k \geq 2$ , и пусть  $P_i$  — некоторая силовская  $p_i$ -подгруппа в  $P$ . Тогда при любом  $i \in \{1, \dots, k\}$  согласно аргументу Фраттини (см. [4, теорема 1.3.7])  $G = N_G(P_i)P$  и, следовательно,

либо (а)  $P_i \trianglelefteq G$ ,

либо (б)  $N_G(P_i)$  (а потому и  $P_i$ ) содержится в максимальной подгруппе  $M_4^{g_i}$  при некотором  $g_i \in G$ .

Если для всех номеров  $i$  выполнено условие (б), то  $M_4$  содержит некоторую силовскую  $p_i$ -подгруппу из  $P$  (именно, подгруппу  $P_i^{g_i^{-1}}$ ) при любом  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Но тогда  $M_4 \supseteq P$ , что противоречиво (тогда  $P \subseteq \Phi(G) = 1$ ). Следовательно, существует номер  $i$  со свойством (а), т. е.  $P_i \trianglelefteq G$ . Но этот факт противоречит тому, что  $P$  — минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ .

Поэтому подгруппа  $P$  примарна. Но тогда, будучи минимальной нормальной подгруппой группы  $G$ , она является элементарной абелевой группой. Так как  $P \trianglelefteq G$  и  $G = PM_4$ , то  $P \cap M_4 \trianglelefteq M_4$ . Но отсюда и из абелевости  $P$  получаем, что  $N_G(P \cap M_4) \supseteq \langle M_4, P \rangle = G$ , т. е.  $P \cap M_4 \trianglelefteq G$  и, следовательно,  $P \cap M_4 \subseteq \Phi(G) = 1$ . Таким образом,  $G = P \rtimes M_4$ ,  $M_4 \cong G/P$  имеет точно 3 класса сопряженных максимальных подгрупп и  $M_4$  неразрешима. Теперь по [2, теорема 1]  $M_4/\Phi(M_4)$  изоморфна  $PSL_2(7)$  или  $PSL_2(2^r)$ , где  $r$  — простое число.

Так как,  $(M_4)_G$  является нормальной подгруппой в группе  $G$  (и в  $M_4$ ), то, очевидно,  $(M_4)_G \subseteq \Phi(M_4)$  и, следовательно,  $(M_4)_G$  содержится в пересечении трех максимальных подгрупп группы  $G$ , содержащих  $P$ . Кроме того,  $(M_4)_G$ , будучи нормальной подгруппой в группе  $G$ , содержится также в каждой подгруппе, сопряженной с  $M_4$ . Следовательно,  $(M_4)_G \subseteq \Phi(G)$  и потому  $(M_4)_G = 1$ .

Понятно, что любое дополнение  $K$  к  $P$  в  $G$  является максимальной подгруппой в  $G$  и, следовательно,  $K$  должно быть сопряжено с  $M_4$ .

Утверждение (1)  $\Rightarrow$  (2) доказано.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Пусть выполнено утверждение (2). По [2, теорема 1] группа  $M$  имеет точно 3 класса максимальных подгрупп. Следовательно,  $G$  имеет точно 3 класса максимальных подгрупп, содержащих  $P$ ; пусть это будут классы  $\{M_1\}^G$ ,  $\{M_2\}^G$ ,  $\{M_3\}^G$ . Если же  $K$  — максимальная подгруппа в  $G$ , не содержащая  $P$ , то, очевидно,  $G = P \rtimes K$ , т. е.  $K$  есть дополнение к  $P$  в  $G$ , а тогда  $K$  сопряжена с  $M$  по утверждению (1). Таким образом,  $G$  есть  $4M$ -группа.

Понятно также, что  $\Phi(G) = M_G$ , и потому  $\Phi(G) = 1$ . Утверждение (2)  $\Rightarrow$  (1) доказано.

Теорема 2 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pazderski G.** Über maximal Untergruppen endlicher gruppen // Math. Nachr. 1964. Vol. 26, no. 6. P. 307–319.
2. **Белоногов В. А.** Конечные группы с тремя классами максимальных подгрупп // Мат. сб. 1986. Т. 131, № 2. С. 225–239.
3. **Холл М.** Теория групп. М.: Изд. иностр. лит. 1962. 468 p.
4. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper & Row, 1968. 527 p.
5. **Huppert B.** Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer, 1967. 793 S. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3.
6. Atlas of finite groups / J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, R.A. Wilson. Oxford: Clarendon Press., 1985. 252 p.
7. **Belonogov V.** Finite groups with four classes of conjugate maximal subgroups // Groups and Graphs, Metrics and Manifolds : Intern. Conf. and PhD-Master Summer School (Yekaterinburg, July 22-30, 2017): Abstracts. Yekaterinburg, 2017. P. 40. SBN: 978-5-8295-0529-5.
8. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. N. Y.: Amer. Math. Soc., 1994, 165 p. (Math. Surveys and Monographs; vol. 40, no. 1.) ISBN: 0821803344.
9. **Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.** The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. Vol. 111, no. 2. P. 365–383. doi: 10.1016/0021-8693(87)90223-7.
10. **Wilson R. A.** The finite simple groups. London: Springer, 2009. 298 p. doi: 10.1007/978-1-84800-988-2.
11. **Carter R. W.** Simple groups of Lie type. London: John Willey and Sons. 1972. 331 p. ISBN: 0471137359.
12. **Горенштейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. Москва: Мир, 1985. 352 с.
13. **King O.** The subgroup structure of finite classical groups interms of geometric configurations // Surveys in Combinatorics. 2005. P. 29–56. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; vol. 327.) doi: 10.1017/CBO9780511734885.003.
14. **Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser., 407.) ISBN: 9780521138604.
15. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. of Math. 1962. Vol. 75. P. 105–145.
16. **Левчук В. М., Нужин Я. Н.** О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. 24, № 1. С. 26–41.
17. **Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325.

Белоногов Вячеслав Александрович

д-р физ.-мат. наук, профессор

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург

e-mail: belonogov@imm.uran.ru

Поступила 1.09.2017

## REFERENCES

1. Pazderski G. Über maximal Untergruppen endlicher gruppen. *Math. Nachr.*, 1964, vol. 26, no. 6, pp. 307–319.
2. Belonogov V.A. Finite groups with three classes of maximal subgroups. *Math. USSR-Sb.*, 1988, vol. 59, no. 1, pp. 223–236. doi: 10.1070/SM1988v059n01ABEH003132.
3. Hall M. *The theory of groups*. New York, The Macmillan Co., 1959, 434 p. Translated to Russian under the title *Teoriya grupp*, Moscow, Izd. Inostr. Lit., 1962. 468 p.
4. Gorenstein D. *Finite groups*. New York: Harper & Row., 1968, 642 p.
5. Huppert B. *Endliche Gruppen*. I. Berlin, Springer, 1967, 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3.
6. Conway J. H., Curtis R. T., Norten S. P., Parker R. A., Wilson R. A. *Atlas of finite groups*. Oxford, Clarendon Press. 1985. 252 p. ISBN: 9780198531999.
7. Belonogov V. Finite groups with four classes of conjugate maximal subgroups. *Groups and Graphs, Metrics and Manifolds : Intern. Conf. and PhD-Master Summer School* (Yekaterinburg, July 22-30, 2017) : Abstracts, Yekaterinburg, 2017, pp. 40. ISBN: 978-5-8295-0529-5.
8. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. *The classification of the finite simple groups*. N. Y.: Amer. Math. Soc., 1994. 165 p. ISBN: 0821803344.
9. Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J. The classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups. *J. Algebra*, 1987, vol. 111, no. 2, pp. 365–383. doi: 10.1016/0021-8693(87)90223-7.
10. Wilson R. A. *The finite simple groups*. London: Springer, 2009, 298 p. doi: 10.1007/978-1-84800-988-2.
11. Carter R. W. *Simple groups of Lie type*. London, John Wiley and Sons, 1972, 331 p. ISBN: 0471137359.
12. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification*. N. Y., Plenum Publishing Corp., 1982, University Series in Mathematics, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5. Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu*, Moscow, Mir Publ., 1985, 52 p.
13. King O. The subgroup structure of finite classical groups interms of geometric configurations. *Surveys in Combinatorics*, 2005, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 327, pp. 29–56. doi: 10.1017/CBO9780511734885.003.
14. Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M. *The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups*. London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 407. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2013, 438 p. ISBN: 9780521138604.
15. Suzuki M. On a class of doubly transitive groups. *Ann. of Math.*, 1962, vol. 75, pp. 105–145.
16. Levchuk V.M., Nuzhin Ya. N. Structure of Ree groups. *Algebra i Logika*, 1985, vol. 24, pp. 26–41 (in Russian).
17. Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M. Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type. *Proc. London Math. Soc.* (3), 1992, vol. 65, no. 2, pp. 297–325.

The paper was received by the Editorial Office on September 1, 2017.

*Vyacheslav Aleksandrovich Belonogov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: belonogov@imm.uran.ru.

УДК 515.162.8

ПРОСТЫЕ ДУГИ В ПЛОСКИХ КРИВЫХ И В ДИАГРАММАХ УЗЛОВ<sup>1</sup>

Ю. С. Белоусов, А. В. Малютин

В настоящей работе изучаются простые дуги в плоских кривых и в минимальных диаграммах классических узлов. Обозначив через  $cr(K)$  число перекрестков узла  $K$ , основные результаты статьи можно сформулировать следующим образом: 1) В каждой минимальной диаграмме произвольного узла  $K$  найдется простая дуга, проходящая через  $\min\{cr(K), 6\}$  перекрестков. 2) У любого узла  $K$ , за исключением четырех простых узлов  $8_{16}$ ,  $8_{18}$ ,  $9_{40}$  и  $10_{120}$  в нумерации Рольфсена, найдется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через  $\min\{cr(K), 8\}$  перекрестков. Первое утверждение доказывается с использованием техники комбинаторики слов. Мы вводим новый язык для плоских кривых и их хордовых диаграмм. Символы этого языка отвечают длинам хорд. В результате утверждение сводится к вопросу из теории полноты и избегаемости множеств запрещенных слов: мы описываем множество запрещенных слов и доказываем, что язык, слова которого не содержат запрещенных подслов, конечен. Для доказательства второго факта использовались методы алгоритмической топологии: утверждение теоремы сводится к перебору кривых специального вида, после чего описывается компьютерный алгоритм, осуществляющий перебор, и приводится результат его работы.

Ключевые слова: узел, минимальная диаграмма узла, число перекрестков, флайп, плоская кривая, комбинаторика слов, алгоритмическая топология

**Yu. S. Belousov, A. V. Malyutin. Simple arcs in plane curves and knot diagrams.**

We study simple arcs in plane curves and in minimal diagrams of classical knots. The main results of the paper are as follows. (1) In each minimal diagram of an arbitrary knot  $K$ , there exists a simple arc passing through  $\min\{cr(K), 6\}$  crossings, where  $cr(K)$  denotes the crossing number of  $K$ . (2) For any knot  $K$  except for the four simple knots  $8_{16}$ ,  $8_{18}$ ,  $9_{40}$ , and  $10_{120}$  in the notation of the Rolfsen table, there is a minimal diagram with a simple arc passing through  $\min\{cr(K), 8\}$  crossings. The first claim is proved using the techniques of combinatorics on words. We introduce a new language for plane curves and their chord diagrams; the symbols of this language correspond to the lengths of the chords. As a result, the statement is reduced to a question in the theory of completeness and avoidability of sets of forbidden patterns: we describe a set of forbidden patterns and prove that the language with no words containing forbidden patterns is finite. To prove the second claim, methods of algorithmic topology are used: the statement reduces to a brute-force search for curves of a special type and then a computer algorithm is described that performs the search; we presents the results of its operation.

Keywords: knot, minimal knot diagram, crossing number, flype, plane curve, combinatorics on words, algorithmic topology.

MSC: 57M25, 57M99

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-63-76

## Введение

Комбинаторика плоских кривых и диаграмм узлов образует весьма своеобразную и разветвленную область исследований. К этой области относятся, к примеру, вопросы, касающиеся инвариантов Арнольда, движений Райдемайстера, гауссовых диаграмм и кодов, альтернированных узлов, гипотез Тейта и т. п. Эта область теснейшим образом связана с теориями квантовых инвариантов, виртуальных узлов, планарных графов. В настоящей работе изучаются простые дуги в плоских кривых и в минимальных диаграммах узлов (детальные определения

<sup>1</sup>Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта по. 17-01-00128 А.

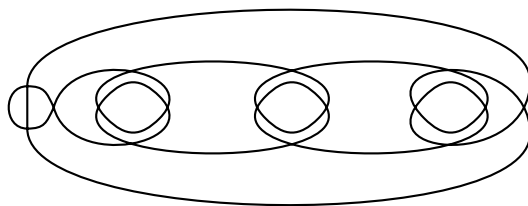


Рис. 1. Кривая, не содержащая простых дуг, проходящей через семь двойных точек.

приведены в разд. 1). Исходной мотивацией для исследования послужили вопросы, возникающие в теории узлов. Эти вопросы имеют следующую природу. Не так давно нами были получены доказательства ряда высказанных в [15] гипотез о меандрическом представлении узлов. Справедливость этих гипотез позволяет ввести серию новых инвариантов узлов. В частности, мы рассматриваем инварианты, сопоставляющие узлу минимальное количество перекрестков диаграммы, представляющей узел и составленной из фиксированного количества простых дуг (см. [5]). Для нас интересен вопрос о связи новых инвариантов с классическими. Доказательство некоторых относящихся к этому вопросу неравенств требует оценок на максимальное число перекрестков диаграммы, расположенных на одной и той же простой дуге диаграммы. Задача о такой оценке представляется довольно естественной (оценка применима при табулировании узлов, зацеплений, тэнглов, нотоидов, при вычислении инвариантов конечной степени по хордовым диаграммам и т. п.), однако, как оказалось, доказательства подобных оценок в литературе отсутствуют. Настоящая работа восполняет этот пробел. Основным ее результатом является следующая теорема (определения используемых в ее формулировке понятий даны в разд. 1).

**Теорема 1.** 1) В каждой минимальной диаграмме произвольного узла  $K$  найдется простая дуга, проходящая через  $\min\{cr(K), 6\}$  перекрестков, где  $cr(K)$  — число перекрестков.

2) У любого узла с числом перекрестков, большим десяти, найдется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через восемь перекрестков.

**Следствие 1.** У любого узла  $K$ , за исключением четырех простых узлов  $8_{16}$ ,  $8_{18}$ ,  $9_{40}$  и  $10_{120}$  в нумерации Рольфсена [16], найдется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через  $\min\{cr(K), 8\}$  перекрестков. У каждого из узлов  $8_{16}$ ,  $8_{18}$ ,  $9_{40}$  и  $10_{120}$  имеется минимальная диаграмма, содержащая простую дугу, проходящую через семь перекрестков.

Отметим, что оценки теоремы 1 точны в следующем смысле. Во-первых, существуют минимальные диаграммы узлов со сколь угодно большим числом перекрестков, не содержащие простых дуг, проходящих через семь перекрестков. Примерами здесь служат, как нетрудно проверить, простейшие «периодические» альтернированные диаграммы для связных сумм произвольного числа трилистников. (Минимальность альтернированных диаграмм без разбивающих<sup>2</sup> двойных точек утверждается первой гипотезой Тейта, доказанной в [10; 14; 17].) Бесконечная серия минимальных диаграмм *простых* узлов со сколь угодно большим числом перекрестков, не содержащих простых дуг, проходящих через семь перекрестков, возникает при альтернировании перекрестков в кривых приведенного на рис. 1 вида. (Простота альтернированных узлов, представленных неприводимыми<sup>3</sup> альтернированными диаграммами, доказана в [11].)

<sup>2</sup>Точка  $x$  диаграммы  $D$  называется *разбивающей*, если пространство  $D \setminus \{x\}$  несвязно.

<sup>3</sup>В некоторых случаях термин *неприводимая* в применении к диаграммам узлов и гипотезам Тейта используют для указания на отсутствие разбивающих двойных точек. В настоящей работе неприводимость понимается в смысле определения из разд.1.



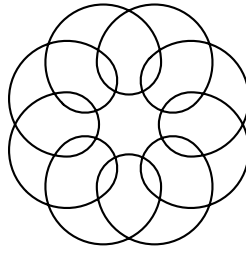


Рис. 2. Кривая, не допускающая флайпов и не содержащая простой дуги, проходящей через девять двойных точек.

Во-вторых, существуют узлы со сколь угодно большим числом перекрестков, у которых ни одна минимальная диаграмма не содержит простых дуг, проходящих через девять перекрестков. Бесконечная серия таких узлов получается альтернированием диаграмм с периодической структурой приведенного на рис. 2 вида. Альтернированная диаграмма подобного вида (рассматриваемая с точностью до автодиффеоморфизма содержащей ее сферы) является единственным минимальным представителем соответствующего узла в силу третьей гипотезы Тейта, доказанной в [12; 13].

## 1. Предварительные сведения

**О п р е д е л е н и я.** (Плоские кривые.) В настоящей работе под *замкнутой плоской кривой* понимаются гладкое погружение окружности  $S^1$  в плоскость  $\mathbb{R}^2$  (или в сферу  $S^2$ ) и его образ. Под *незамкнутой плоской кривой* понимаются гладкое погружение отрезка в плоскость  $\mathbb{R}^2$  (или в сферу  $S^2$ ) и его образ. Все рассматриваемые кривые находятся в *общем положении*, т. е. не имеют точек самопересечения кратности, большей двух, не имеют точек самокасания, число двойных точек у каждой кривой конечно, во всех этих точках ветви кривой пересекаются трансверсально. Если дана плоская кривая, то *дугой* на ней мы называем сужение погружения (и образ этого сужения) на некоторое подмножество, гомеоморфное отрезку. Кривая (в частности — дуга) называется *простой*, если она является вложением. *Петлей* называется дуга с совпадающими концами. Петля называется *простой*, если она (ее образ) гомеоморфна окружности. *Характеристикой* дуги  $J$  на кривой  $C$  мы называем количество точек самопересечения кривой  $C$ , содержащихся во внутренности дуги. Кривая  $C$  называется *приводимой* (или *составной*), если на ней найдется такая пара точек  $x_1, x_2$ , что пространство  $C \setminus \{x_1, x_2\}$  несвязно и все его компоненты связности содержат точки самопересечения кривой. В противном случае кривая называется *неприводимой*.

**О п р е д е л е н и я.** (Узлы.) Мы используем стандартную терминологию теории узлов. Достаточно полную систему определений можно найти, например, в [4; 7; 16]. В настоящей работе *узлом* называются гладкое вложение окружности  $S^1$  в трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$  (или трехмерную сферу  $S^3$ ) и его образ, рассматриваемый с точностью до (не обязательно сохраняющего ориентацию) автодиффеоморфизма объемлющего пространства. *Диаграммой* узла называют плоскую кривую общего положения, являющуюся проекцией узла на плоскость или на двумерную сферу и снабженную дополнительной информацией о *проходах* и *переходах* в двойных точках (их называют *перекрестками* диаграммы). Диаграмма узла называется *минимальной*, если ни одна другая диаграмма, представляющая тот же узел, не имеет меньшего числа перекрестков, чем данная. *Числом перекрестков* узла называется число перекрестков в его минимальной диаграмме. Для числа перекрестков узла  $K$  используется обозначение  $sg(K)$ . Узел  $K \subset S^3$  называется *тривиальным*, если он лежит на некоторой сфере  $S^2 \subset S^3$ . Узел  $K \subset S^3$  называется *составным*, если найдется сфера  $S^2 \subset S^3$ , которая пересекает  $K$  трансверсально в двух точках, причем ни одна из пар  $(B_1, B_1 \cap K)$  и  $(B_2, B_2 \cap K)$ , где  $B_1$  и  $B_2$  —

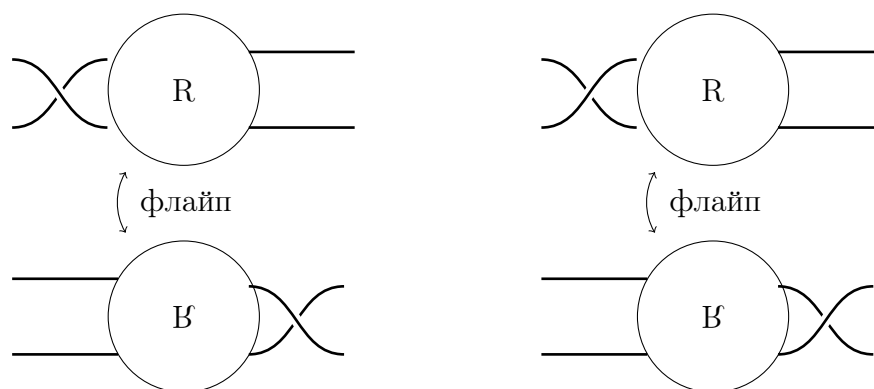


Рис. 3. Флайп.

пары, на которые  $S^2$  разрезает  $S^3$ , не диффеоморфна паре (шар, диаметр). Узел называется *простым*, если он не является ни составным, ни тривиальным. Диаграмма узла называется *альтернированной*, если проходы-переходы чередуются (под-над-под-над...) при обходе вдоль кривой диаграммы. Узел называется *альтернированным*, если у него имеется альтернированная диаграмма. *Флайпами* (или *переворотами*) называются преобразования диаграмм узлов, при которых участок диаграммы изменяется изображенным на рис. 3 образом.

**Т е р м и н о л о г и я.** (Слова и строки.) Мы без дополнительных оговорок будем использовать стандартную терминологию комбинаторной теории групп и полугрупп и теории алгоритмов на строках (см., например, [2; 9]). В частности, рассматривая конечные и бесконечные последовательности элементов некоторого множества, мы называем это множество *алфавитом*, его элементы — *символами* или *буквами*, а последовательности — *словами* или *строками* над этим алфавитом. При записи слов мы, как правило, опускаем запятые и скобки, обычные для записи последовательностей.

**О п р е д е л е н и я.** (Гауссов код.) *Хордовая диаграмма* степени  $n$  (или порядка  $n$ ) — это ориентированная окружность, в которой проведены  $n$  хорд, все концы которых различны (см. [1]). Хордовые диаграммы рассматриваются с точностью до сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности. С такой точки зрения хордовая диаграмма — это то же самое, что слово длины  $2n$  над алфавитом из  $n$  букв, в котором каждая буква встречается ровно два раза и рассматривается с точностью до циклических перестановок и замены алфавита (и перестановок букв в алфавите). Такие классы слов называют также *циклическими словами*. На множестве букв циклического слова в качестве канонической рассматривается максимальная метрика, в которой расстояние между соседними буквами равняется единице. *Длиной хорды* в хордовой диаграмме называют расстояние между представляющими хорду буквами в отвечающем диаграмме циклическом слове с канонической метрикой. Пусть  $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — плоская гладкая кривая общего положения. Соединив хордами прообразы двойных точек кривой  $\gamma$ , мы получаем *хордовую диаграмму кривой  $\gamma$* ; отвечающие этой хордовой диаграмме слова называют *гауссовым кодом* кривой  $\gamma$ .

Отметим, что для диаграмм узлов традиционно рассматриваются *гауссовы диаграммы* (это хордовые диаграммы с ориентированными от перехода к проходу хордами), а символы гауссова кода снабжаются дополнительными знаками в соответствии с ориентацией хорд. В настоящей работе эти дополнительные данные не понадобятся.

## 2. Теорема о простой дуге характеристики шесть

В настоящем разделе доказывается следующая теорема (влекущая первое утверждение теоремы 1).

**Теорема 2.** *Каждая замкнутая плоская гладкая кривая общего положения с  $k$  двойными точками содержит либо простую петлю нулевой характеристики, либо простую дугу характеристики  $\min\{k, 6\}$ .*

Введем некоторые определения и обозначения.

Пусть  $W = w_1 w_2 \dots w_m$  — слово длины  $m$  над каким-нибудь алфавитом. Для числа  $p \in \{1, \dots, m\}$  положим

$$M_p := \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid w_{(p-k) \bmod m} = w_{(p+k+1) \bmod m}\}.$$

Определим слово  $W' = w'_1 w'_2 \dots w'_m$  над алфавитом  $A := \{\epsilon, d_0, d_2, d_4, \dots\}$ , полагая

$$w'_p := \begin{cases} \epsilon, & \text{если } M_p(W) = \emptyset, \\ d_{2 \cdot \min M_p}, & \text{если } M_p(W) \neq \emptyset. \end{cases}$$

Слово  $W'$ , рассматриваемое с точностью до циклических перестановок, назовем *дистанционным кодом* слова  $W$ . *Дистанционным кодом кривой* будем называть дистанционный код соответствующей хордовой диаграммы.

При  $m < 10$  в дистанционном коде будем писать  $m$  вместо  $d_m$ .

**П р и м е р ы.**

Слово	Дистанционный код
ww	00
aabb	0 $\epsilon$ 0 $\epsilon$
0 $\epsilon$ 0 $\epsilon$	$\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon$
123123	222222

**З а м е ч а н и я.** 1. Приведем геометрическую интерпретацию дистанционного кода хордовой диаграммы. Пусть задана хордовая диаграмма степени  $n$ . Расположим окружность диаграммы на плоскости в виде геометрически правильной окружности длины  $2n$  так, чтобы концы хорд делили ее на равные дуги единичной длины (эти  $2n$  дуг будем называть *единичными*), а хорды диаграммы реализуем отрезками. Сопоставим каждой единичной дуге символ алфавита  $A = \{\epsilon, d_0, d_2, d_4, \dots\}$  следующим образом. Если в диаграмме имеются хорды, параллельные хорде  $h_d$ , соединяющей концы единичной дуги  $d$ , сопоставим дуге  $d$  символ  $d_{2r}$ , где  $r$  — расстояние (во внутренней метрике окружности) от дуги  $d$  до множества концевых точек указанных хорд; в противном случае сопоставим дуге  $d$  символ  $\epsilon$ . Двигаясь по окружности в направлении выбранной ориентации и записывая символы, отвечающие встречающимся единичным дугам, мы получаем дистанционный код заданной хордовой диаграммы.

2. Если  $2r + 1 \leq n$ , то символу  $d_{2r}$  в дистанционном коде хордовой диаграммы степени  $n$  отвечает хорда длины  $2r + 1$ . Дистанционный код хордовой диаграммы не учитывает хорд четной длины; из теоремы Жордана вытекает, что хордовая диаграмма замкнутой плоской гладкой кривой общего положения не содержит хорд четной длины.

Для доказательства теоремы понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

**Лемма 1.** *Если  $y$  замкнутой плоской гладкой кривой общего положения число двойных точек превышает сумму  $m + n + 1$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа, то в дистанционном коде этой кривой символы  $d_{2m}$  и  $d_{2n}$  не могут находиться ни на расстоянии  $|m - n|$ , ни на расстоянии  $m + n + 1$  друг от друга.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** вытекает из того факта, что в хордовой диаграмме концы различных хорд не совпадают. □

В дальнейшем символы  $*$  и  $\sigma$  используются следующим образом. Замену символа в том или ином слове на символ  $*$  назовем *специальной*. Замену символа в том или ином слове на символ  $\sigma$  назовем *допустимой*, если заменяемый символ лежит в множестве  $\{\epsilon, d_6, d_8, \dots\}$ . Будем говорить, что в слове  $W$  *имеется подслово вида  $V$* , если в  $W$  имеется подслово, из которого слово  $V$  получено цепочкой специальных и/или допустимых замен.

**Лемма 2.** *Если у замкнутой плоской гладкой кривой  $C$  общего положения число двойных точек превышает четыре, то в ее дистанционном коде не встречаются ни подслова вида  $2*2*2*2$ , ни подслова вида  $2*4*2*4$  и  $4*2*4*2$ .*

**Доказательство.** Из определения хордовых диаграмм следует, что в случае, если бы дистанционный код кривой  $C$  содержал подслово вида  $2*2*2*2$  или подслово вида  $2*4*2*4$ , петли кривой, отвечающие двойкам, стоящим на первой и пятой позициях в этих подсловах, пересекались бы лишь в одной точке (хорда этого единственного пересечения отвечала бы символу, стоящему в этих подсловах на третьей позиции), а это невозможно по теореме Жордана. Случай подслов вида  $4*2*4*2$  следует из соображений симметрии.  $\square$

Заметим, что, как показывает рассуждение из доказательства леммы 2, в дистанционных кодах плоских кривых с достаточно большим числом двойных точек не встречаются подслова вида  $2*2*2**4$ ,  $2*2*2***6$ ,  $2***6***2***8$  и т. п.

**Лемма 3.** *Если замкнутая плоская гладкая кривая  $C$  общего положения с не менее чем  $\ell/2$  двойными точками не содержит простых дуг характеристики  $\ell$ , а  $w_1 \dots w_{\ell-1}$  — подслово в дистанционном коде кривой  $C$ , то для некоторого  $i \in \{1, 2, \dots, \ell-1\}$  выполняется условие  $w_i = d_{2r}$  с  $r \leq 2 \cdot \min\{i-1, \ell-1-i\}$ .*

**Доказательство.** Условие леммы означает, что в гауссовом коде кривой  $C$  любое подслово длины  $\ell$  содержит хотя бы одну хорду (пару одинаковых символов). Из теоремы Жордана вытекает, что хордовая диаграмма замкнутой плоской гладкой кривой общего положения не содержит хорд четной длины. Отсюда в силу определения дистанционного кода следует требуемое, поскольку хорды нечетной длины учитываются дистанционным кодом.  $\square$

**Следствие 2.** *Если кривая  $C$  удовлетворяет условиям леммы 3 и вдобавок не содержит простых петель нулевой характеристики, а  $w_1 \dots w_{\ell-3}$  — подслово в дистанционном коде кривой  $C$ , то для некоторого  $i \in \{1, 2, \dots, \ell-3\}$  выполняется условие  $w_i = d_{2r}$  с*

$$r \leq 2 \cdot \min\{i, \ell-2-i\}.$$

**Доказательство** вытекает из леммы 3, поскольку предположение об отсутствии петель нулевой характеристики означает, что дистанционный код не содержит символа  $d_0$  (0), а всякое подслово длины  $\ell-3$  лежит в центре подслова длины  $\ell-1$ .  $\square$

**Предложение 1.** *Если замкнутая плоская гладкая кривая общего положения имеет более пяти двойных точек и не содержит ни простых петель нулевой характеристики, ни простых дуг характеристики шесть, то дистанционный код этой кривой не содержит подслов следующих видов:*

(A1) 24, 42,	(E1) $4\sigma 4, \sigma\sigma\sigma, 4\sigma\sigma, \sigma\sigma 4,$	(H1) 44444,
(A2) $2**2,$	(E2) $\sigma\sigma,$	(H2) 4444,
(A3) $2***4, 4***2,$	(E3) 222,	(H3) 444,
(A4) $4****4,$	(E4) 22,	(H4) 44.

**Доказательство** пунктов (A1)–(A4) прямо следует из леммы 1.

(E1). Вытекает из следствия 2 (случай  $\ell = 6$ ).

(E2). Из (E1) следует, что (с учетом рассматриваемых ограничений) подслово вида  $\sigma\sigma$  должно быть частью подслова вида  $2\sigma\sigma 2$ . Однако такие подслова исключены леммой 1 (см. (A2)).

(E3). Следующая таблица демонстрирует, что все варианты продолжения слова 222 содержат запрещенные подслова:

Вариант продолжения	Запрещенное подслово	Метка правила
222 $\sigma\sigma$	$\sigma\sigma$	(E2)
222 $\sigma 4$	2***4	(A3)
222 $\sigma 2$	2**2	(A2)
2224	24	(A1)
2222	2**2	(A2)

(E4). Переберем возможные продолжения подслова 22:

Вариант продолжения	Запрещенное подслово	Метка правила
22 $\sigma\sigma$	$\sigma\sigma$	(E2)
22 $\sigma 4$	–	–
22 $\sigma 2$	2**2	(A2)
224	24	(A1)
222	222	(E3)

Остается лишь возможность 22 $\sigma 4$ . Отсюда из соображений симметрии следует, что (с учетом рассматриваемых ограничений) подслово вида 22 должно быть частью подслова вида 4 $\sigma$ 22 $\sigma 4$ . Однако последние исключены правилом (A4).

(H1). Переберем возможные продолжения:

Вариант продолжения	Запрещенное подслово	Метка правила
44444 $\sigma\sigma$	$\sigma\sigma$	(E2)
44444 $\sigma 4$	4 $\sigma 4$	(E1)
44444 $\sigma 2$	4***2	(A3)
444444	4****4	(A4)
444442	42	(A1)

(H2). Продолжение 44444 исключено правилом (H1), остальные варианты продолжений исключаются так же, как в доказательстве пункта (H1).

(H3). Продолжение 4444 исключено правилом (H2), остальные варианты продолжений исключаются так же, как в доказательстве пункта (H1).

(H4). Переберем возможные продолжения подслова 44:

Вариант продолжения	Запрещенное подслово	Метка правила
44 $\sigma\sigma$	$\sigma\sigma$	(E2)
44 $\sigma 4$	4 $\sigma 4$	(E1)
44 $\sigma 2\sigma\sigma$	$\sigma\sigma$	(E2)
44 $\sigma 2\sigma 4$	4****4	(A4)
44 $\sigma 2\sigma 2$	4***2	(A3)
44 $\sigma 24$	24	(A1)
44 $\sigma 22$	4***2	(A3)
444	444	(H3)
442	42	(A1)

Предложение 1 доказано.

**Теорема 3.** *Если замкнутая плоская гладкая кривая общего положения имеет более пяти двойных точек, то она содержит либо простую петлю нулевой характеристики, либо простую дугу характеристики шесть.*

**Доказательство.** Желая прийти к противоречию, допустим, что найдется кривая  $C$  указанного вида, не содержащая ни петли нулевой характеристики, ни простой дуги характеристики шесть, и воспользуемся предложением 1. В силу предложения 1 дистанционный код кривой  $C$  не содержит подслов вида  $\sigma\sigma$ , 44, 22, 24, 42, 4 $\sigma$ 4. Если бы в этом коде встретился символ 4 ( $d_4$ ), то в силу запрета на слова 44 и 42 он содержался бы в подслове вида 4 $\sigma$ , которое содержалось бы в подслове вида 4 $\sigma$ 2 (в силу запретов на подслово вида  $\sigma\sigma$  и 4 $\sigma$ 4), которое, в свою очередь, содержалось бы в подслове вида 4 $\sigma$ 2 $\sigma$  (запреты на 22 и 24), далее — 4 $\sigma$ 2 $\sigma$ 4 (запрет на  $\sigma\sigma$  и 4\*\*\*2). Подслово 4 $\sigma$ 2 $\sigma$ 4 оканчивается символом 4 и, повторяя приведенные рассуждения, мы приходим к слову периодического вида 4 $\sigma$ 2 $\sigma$ 4 $\sigma$ 2 $\sigma$ 4 $\sigma$ 2 $\sigma$ 4... , запрещенного леммой 2. Если же код не содержит символов 4, то запрет на подслово 22 и  $\sigma\sigma$  приводит нас к периодическому слову 2 $\sigma$ 2 $\sigma$ 2 $\sigma$ ..., исключаемому той же леммой 2. Теорема 3 доказана.

**Предложение 2.** *Если замкнутая плоская гладкая кривая  $C$  общего положения имеет не более шести двойных точек, то  $C$  содержит либо простую петлю нулевой характеристики, либо простую дугу, проходящую через все двойные точки кривой.*

**Доказательство.** Желая прийти к противоречию, допустим, что найдется кривая  $C$  указанного вида, не содержащая ни петли нулевой характеристики, ни простой дуги, проходящей через все двойные точки кривой.

В случае кривой с шестью двойными точками получаем противоречие с теоремой 3.

В случае кривой с пятью двойными точками из следствия 2 вытекает, что в каждую пару соседних букв дистанционного кода кривой  $C$  должен входить символ 2. Если при этом условии дистанционный код содержит подслово 22, то он содержит более пяти букв 2, что невозможно, поскольку имеется всего пять хорд, а каждая из них может давать лишь один символ 2 в хордовой диаграмме степени более трех. Если же дистанционный код не содержит подслово 22, он содержит подслово вида 2\*2\*2\*2, что противоречит лемме 2.

В случае кривой с четырьмя двойными точками из следствия 2 получаем, что дистанционный код кривой  $C$  состоит из символов 2, что входит в противоречие с леммой 1.

Случай, когда число двойных точек кривой не превосходит трех, очевиден; при двух и трех двойных точках имеем также противоречие с леммой 3. Предложение 2 доказано.

**Доказательство** теоремы 2 прямо вытекает из теоремы 3 и предложения 2.

Отметим, что оценка теоремы 2 точна в следующем смысле: существуют замкнутые плоские гладкие кривые общего положения со сколь угодно большим числом двойных точек, не содержащие ни простых петель нулевой характеристики, ни простых дуг характеристики выше шести (см. рис. 1).

### 3. Теорема о простой дуге характеристики восемь

Оценку теоремы 3 можно усилить, сузив множество рассматриваемых кривых и перейдя к классам кривых, связанных флайпами.

Будем говорить, что две кривые связаны *элементарным флайпом*, если их гауссовы коды связаны заменой вида

1)  $XabcaYbcZ \rightarrow XbcYabcaZ$  или 2)  $XabcaYcbZ \rightarrow XbcYacbaZ$ , где  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — некоторые строки.

**Теорема 4.** *Если замкнутая плоская гладкая кривая  $\alpha$  общего положения неприводима и имеет более десяти двойных точек, то она связана элементарными флайпами с кривой  $\beta$ , содержащей простую дугу, проходящую через восемь двойных точек кривой  $\beta$ .*

Основная идея доказательства заключается в последовательном рассмотрении (для  $n = 1, 2, \dots$ ) множеств  $M_n$ , состоящих из строк (слов) длины  $n$ , являющихся подстроками в гауссовом коде тех или иных плоских замкнутых неприводимых кривых. Отбрасывая из  $M_n$  те строки, которые элементарными флайпами переводятся в строки, содержащие 8 подряд стоящих попарно различных символов, мы получаем множество  $M'_n$  и обнаруживаем, что, во-первых, ни при каком  $n > 20$  множество  $M'_n$  не содержит полные гауссовы коды, а во-вторых, начиная с некоторого  $n$ ,  $M'_n$  оказывается пустым, что и доказывает теорему.

Перебор вариантов был осуществлен компьютерными методами. С технической реализацией программы можно ознакомиться в [6], а далее мы опишем ключевые моменты примененного алгоритма. Нам потребуется ряд определений.

*Преддиаграммой* будем называть незамкнутую гладкую кривую на сфере, находящуюся в общем положении, с конечным числом отмеченных на кривой точек, причем все отмеченные точки отличны от двойных и концевых. Преддиаграммы рассматриваются с точностью до автодиффеоморфизма сферы.

*Кодом преддиаграммы* будем называть слово, полученное следующим образом. Промаркируем все двойные и отмеченные точки преддиаграммы символами некоторого алфавита так, чтобы различным точкам соответствовали различные символы. Запишем слово, которое дают эти символы при обходе кривой в направлении ее ориентации. Затем снабдим символы, соответствующие двойным точкам, знаком в зависимости от того, положительно или отрицательно ориентирована упорядоченная пара касательных векторов, отвечающих первому и второму проходу через эту точку.

Отметим, что преддиаграмма однозначно задается своим кодом.

Будем говорить, что две преддиаграммы связаны *элементарным флайпом*, если код одной из них получается из кода другой в результате одной из замен следующего вида:

- 1)  $XabcaYbcZ \rightarrow XbcYabcaZ$ , 2)  $XabcaYcbZ \rightarrow XbcYacbaZ$ , 3)  $XabpaYbZ \rightarrow XbpYqbZ$ ,
- 4)  $XarcaYcZ \rightarrow XpcYqcZ$ , 5)  $XarqaY \rightarrow XpqY$ .

Здесь  $a, b, c$  — двойные точки (с произвольными знаками),  $p, q$  — отмеченные, а  $X, Y$  и  $Z$  — некоторые строки.

Будем говорить, что преддиаграмма  $\gamma$  *реализуется* замкнутой плоской кривой  $\alpha$ , если  $\gamma$  содержится в  $\alpha$  как подмножество, объединение  $A$  отмеченных и двойных точек преддиаграммы  $\gamma$  является подмножеством в множестве  $A'$  двойных точек кривой  $\alpha$ , а  $A \setminus A' \subset \alpha \setminus \gamma$ . Преддиаграмму назовем *реализуемой*, она реализуется некоторой замкнутой плоской кривой.

Будем говорить, что преддиаграмма  $\gamma$  *приводима*, если ее код содержит собственную подстроку, где каждый символ встречается дважды. В противном случае преддиаграмма называется *неприводимой*.

Преддиаграмму назовем *специальной*, если она не связана элементарными флайпами ни с какой преддиаграммой, содержащей в своем коде 8 подряд стоящих различных символов.

Неприводимую реализуемую специальную преддиаграмму будем называть *допустимой*.

*Полной* преддиаграммой будем называть преддиаграмму без отмеченных точек.

Будем говорить, что преддиаграмма  $\gamma'$  является *продолжением* преддиаграммы  $\gamma$ , если  $\gamma$  содержится в  $\gamma'$  как подмножество, объединение  $A$  отмеченных и двойных точек преддиаграммы  $\gamma$  является подмножеством объединения  $A'$  отмеченных и двойных точек преддиаграммы  $\gamma'$ , а  $A' \setminus A \subset \gamma' \setminus \gamma$ . Продолжение  $\gamma'$  преддиаграммы  $\gamma$  называется *инкрементальным*, если длина кода преддиаграммы  $\gamma'$  на единицу больше длины кода преддиаграммы  $\gamma$ .

Теперь перейдем непосредственно к описанию элементов алгоритма.

**Базовая процедура алгоритма** принимает на вход код  $S$  преддиаграммы  $\gamma$  и останавливается, если  $\gamma$  не прошла проверку (вообще говоря, неполную, см. ниже) на допустимость. Если остановки не произошло, процедура рекурсивно вызывается от кодов  $T$  всех инкрементальных продолжений преддиаграммы  $\gamma$ .

**Основной тип объекта** в программе — это пара, состоящая из кода  $S$  преддиаграммы  $\gamma$  и дополнительного набора данных, называемых *атласом*. Атлас описывает множество областей, на которые  $\gamma$  разбивает сферу. Дополнительно в атласе для каждой области хранится описывающая ее границу информация, представляющая собой упорядоченную вдоль одного из возможных направлений обхода последовательность соседних областей и отмеченных точек, а также концевых точек, если они встречаются на границе данной области.

Перейдем к обсуждению функций, входящих в основную процедуру.

**Исключение части недопустимых преддиаграмм.** Процедура исключения преддиаграмм отсеивает все приводимые, часть нереализуемых и часть неспециальных преддиаграмм. Для проверки неприводимости достаточно убедиться в том, что в строке  $S$  не имеется собственных подстрок, где каждый элемент встречается дважды. При отсеивании нереализуемых преддиаграмм алгоритм проверяет лишь нечетность расстояний<sup>4</sup> между совпадающими символами кода (у реализуемой преддиаграммы все эти расстояния нечетны, поскольку по теореме Жордана аналогичное свойство выполнено для гауссовых кодов замкнутых плоских кривых), и, если диаграмма полна, то проверяется, что концевые точки лежат на границе одной и той же области. Априори такое исключение затрагивает не все нереализуемые преддиаграммы, однако позволяет существенно сократить перебор. Функция по частичной проверке специальности получает на вход код  $S$  преддиаграммы  $\gamma$  и целое число  $i$ . Сначала проверяется, имеется ли в коде  $S$  восемь подряд идущих попарно различных символов. Если такой подстроки не оказалось, то, начиная с  $i$ -го элемента, в  $S$  ищутся подстроки вида  $abca$  (без учета знака). Если такой подстроки не оказалось (или  $i$  больше длины строки  $S$ ), функция прекращает работу. Если же такая подстрока нашлась, мы создаем код  $S'$  преддиаграммы  $\gamma'$ , получающейся в результате соответствующего элементарного флайпа, и возвращаем конъюнкцию двух рекурсивных вызовов функции: от  $S'$  и индекса  $i + 1$ , а также от  $S$  и индекса  $i + 1$ . В данной процедуре рассматриваются не все возможные цепочки флайпов, однако этого хватает для проверки утверждения теоремы.

**Построение продолжений преддиаграммы.** На вход функция получает код  $S$  преддиаграммы  $\gamma$  и возвращает множество кодов преддиаграмм, являющихся инкрементальными продолжениями преддиаграммы  $\gamma$ , которые строятся либо добавлением новой отмеченной точки, либо прохождением через одну из отмеченных точек, расположенных на границе области, в которой находится хвост преддиаграммы. При этом новые точки добавляются, только если граница области, в которой находится хвост, содержит более одной отмеченной точки (в противном случае мы получим либо нереализуемую, либо приводимую преддиаграмму).

Описанный выше алгоритм позволяет для произвольного натурального  $n$  сформировать список всех допустимых преддиаграмм с кодом длины не более  $n$ . Реализуя данный алгоритм, мы обнаруживаем, что с некоторого  $n$  этот список перестает увеличиваться, а так как продолжение недопустимой преддиаграммы тоже является недопустимой преддиаграммой, это означает, что множество допустимых преддиаграмм конечно и алгоритм сформировал перечень, содержащий все допустимые преддиаграммы. Ясно, что для каждой замкнутой плоской гладкой кривой  $\alpha$  существует полная преддиаграмма, которая реализуется кривой  $\alpha$ . Рассмотрим в множестве всех допустимых преддиаграмм полные, мы убеждаемся, что не существует полных допустимых преддиаграмм с кодом длиннее 20 символов, что полностью доказывает теорему.

**З а м е ч а н и я.** 1. Корректность алгоритма нетрудно проверить, основываясь на свойствах, которые прямо следуют из определений. Приведем два таких свойства:

– Строка  $S$  входит в гауссов код некоторой замкнутой плоской гладкой (неприводимой) кривой  $\alpha$  если и только если существует расстановка знаков у повторяющихся символов в  $S$ , делающая эту строку кодом некоторой преддиаграммы, реализуемой кривой  $\alpha$ .

<sup>4</sup>Под расстоянием между двумя символами кода понимается увеличенное на единицу количество символов между ними.



– Если кривая  $\alpha$  является реализацией неспециальной преддиаграммы  $\gamma$ , то  $\alpha$  связана элементарными флайпами с кривой, содержащей простую дугу характеристики 8.

2. Оценка теоремы 4 точна в следующем смысле: во-первых, существуют неприводимые замкнутые плоские гладкие кривые общего положения со сколь угодно большим числом двойных точек, не допускающие флайпов и не содержащие простых дуг характеристики девять (рис. 2); во-вторых, существует неприводимая замкнутая плоская гладкая кривая общего положения с десятью двойными точками, не допускающая элементарных флайпов и не содержащая ни одной простой дуги характеристики восемь (эта кривая представлена минимальной диаграммой узла  $10_{120}$  в таблице Рольфсена [16]).

#### 4. Доказательство теоремы 1 и следствия 1

Первое утверждение теоремы 1 прямо следует из теоремы 2, поскольку минимальные диаграммы узлов не содержат петель нулевой характеристики.

Для доказательства второго утверждения теоремы 1 введем в рассмотрение следующее преобразование для (составных) диаграмм узлов.

**О п р е д е л е н и е.** Пусть  $D$  — диаграмма узла на сфере  $S^2$ , а  $B_1$  и  $B_2$  — непересекающиеся замкнутые диски на  $S^2$ , край каждого из которых пересекает диаграмму  $D$  трансверсально в двух точках (не являющихся перекрестками). Вырежем диски  $B_1$  и  $B_2$  из  $S^2$  и, поменяв их местами, вклеим обратно таким образом, чтобы снова получить некоторую диаграмму, причем не нарушая ориентаций сферы и диаграммы. Как следует из легкой части теоремы о преобразованиях Райдемайстера, в результате мы получим диаграмму того же узла, причем, очевидно, с тем же числом перекрестков. (Проверка сводится к случаю, когда один из дисков высекает из диаграммы простую дугу.) Преобразование описанного вида будем называть *рокировкой*. На уровне гауссова кода рокировке соответствует перестановка, меняющая местами два подслово, каждое из которых полно в том смысле, что составлено из пар одинаковых букв.

**Предложение 3.** *Если среди минимальных диаграмм узла  $K$  имеются составные, то хотя бы одна из них содержит простую дугу, проходящую через  $\min\{\text{cr}(K), 9\}$  перекрестков.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если составная диаграмма  $D$  узла  $K$  распадается на  $k \geq 3$  нетривиальных компонент, выберем на замыкании<sup>5</sup> каждой из этих компонент простую дугу характеристики три, и, применяя рокировки, совместим отвечающие выбранным дугам замыканий дуги диаграммы  $D$ , образовав тем самым простую дугу характеристик  $3 \cdot k \geq 9$ .

Если диаграмма  $D$  узла  $K$  распадается на две неприводимые компоненты  $D_1$  и  $D_2$ , то в силу теоремы 2 на замыканиях этих компонент найдутся простые дуги характеристик  $\min\{\text{cr}(D_1), 6\}$  и  $\min\{\text{cr}(D_2), 6\}$  соответственно. Отсюда следует, что, применяя рокировки, мы имеем возможность перейти к минимальной диаграмме, содержащей простую дугу характеристики

$$\min\{\text{cr}(D_1), 6\} + \min\{\text{cr}(D_2), 6\} \geq \min\{\text{cr}(D_1) + \text{cr}(D_2), \text{cr}(D_1) + 6, \text{cr}(D_2) + 6, 12\}.$$

Поскольку  $\text{cr}(D_1) + \text{cr}(D_2) = \text{cr}(K)$ , а  $\text{cr}(D_i) \geq 3$ , отсюда следует требуемое.

Предложение 3 доказано.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** второго утверждения теоремы 1. Если у узла имеется составная минимальная диаграмма, утверждение прямо следует из предложения 3. Если у узла имеется неприводимая минимальная диаграмма, а число перекрестков превышает десять, утверждение следует из теоремы 4, поскольку цепочка (элементарных) флайпов между кривыми однозначно

<sup>5</sup>Пусть  $D$  — диаграмма узла на сфере  $S^2$ , а  $\mathcal{C}$  — набор попарно непересекающихся вложенных в  $S^2$  окружностей, каждая из которых пересекает  $D$  трансверсально в двух точках, не являющихся перекрестками. Разрезав сферу  $S^2$  по окружностям из  $\mathcal{C}$  и склеив компоненты края полученных поверхностей в точки, мы получаем замыкания компонент, на которые набор  $\mathcal{C}$  разбивает диаграмму  $D$ .

поднимается на уровень диаграмм узлов, а две диаграммы, связанные флайпом, представляют один и тот же узел (и имеют одинаковое число перекрестков).

Теорема 1 доказана.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** следствия 1. Теорема 1 охватывает случаи узлов с числом перекрестков не из множества  $\{7, 8, 9, 10\}$ . Предложение 3 охватывает случай узлов с составными минимальными диаграммами. Остается рассмотреть случай узлов с неприводимыми минимальными диаграммами и числом перекрестков от семи до десяти. В силу первой и третьей гипотез Тейта, доказанных в [10; 12–14; 17], и результата Менэско [11] о составных и простых альтернированных узлах, с точностью до флайпов и расстановки проходов-переходов все минимальные неприводимые диаграммы (необязательно простых) узлов с  $k$  перекрестками можно найти в таблице минимальных диаграмм простых альтернированных узлов, если таблица содержит хотя бы одну минимальную диаграмму для каждого *простого* альтернированного узла с  $k$  перекрестками. Просмотр таблиц Рольфсена показывает, что среди диаграмм альтернированных простых узлов с числом перекрестков от семи до десяти имеется лишь четыре диаграммы, у которых в классе флайп-эквивалентных нет диаграмм, содержащих простую дугу, проходящую через восемь перекрестков. Это диаграммы узлов  $8_{16}$ ,  $8_{18}$ ,  $9_{40}$  и  $10_{120}$ . Таким образом, у узла  $K$  не имеется минимальной диаграммы, содержащей простую дугу, проходящую через  $\min\{cr(K), 8\}$  перекрестков, если и только если все его минимальные диаграммы с точностью до расстановки проходов-переходов совпадают с диаграммами узлов  $8_{16}$ ,  $8_{18}$ ,  $9_{40}$  и  $10_{120}$  в таблице Рольфсена. Прямая проверка, сокращаемая симметриями диаграмм, показывает, что список таких узлов узлами  $8_{16}$ ,  $8_{18}$ ,  $9_{40}$ ,  $10_{120}$  исчерпывается. Заметим, что для подобной проверки не требуется перебор всех возможных расстановок проходов-переходов в указанных диаграммах. Достаточно проанализировать, какие дополнительные минимальные проекции имеются у узла, если в проекции, совпадающей с одной из диаграмм  $8_{16}$ ,  $8_{18}$ ,  $9_{40}$  и  $10_{120}$ , в паре соседних перекрестков нарушить альтернированность. С учетом симметрий, для диаграммы  $8_{16}$  достаточно рассмотреть 9 случаев (пар соседних перекрестков), для диаграммы  $8_{18}$  — три случая, для диаграммы  $9_{40}$  — 5 случаев, для  $10_{120}$  — 6. Кроме того, можно учесть, что если на одном из ребер диаграммы альтернированность нарушается, а  $Q$  — область диаграммы, в границу которой входит это ребро, то альтернированность нарушается и еще как минимум на одном ребре диаграммы, входящем в границу области  $Q$ . Это соображение позволяет сократить перебор еще существеннее. Второе утверждение следствия проверяется непосредственно.

**З а м е ч а н и я.** 1. Оценка предложения 3, в отличие от оценок теоремы 1, неточна. Можно показать, что если среди минимальных диаграмм узла  $K$  имеются составные, то хотя бы одна из них содержит простую дугу, проходящую через  $\min\{cr(K), 10\}$  перекрестков. Кроме того, из второго пункта теоремы 1 выводится следующее утверждение: если число перекрестков узла  $K$  (с составными минимальными диаграммами) превышает 13, то хотя бы одна из его минимальных диаграмм содержит простую дугу, проходящую через 11 перекрестков.

2. У простого узла все минимальные диаграммы, очевидно, неприводимы. Насколько известно авторам, вопрос о том, существуют ли составные узлы, не имеющие минимальных составных диаграмм, остается открытым. Как нетрудно убедиться, известная гипотеза об аддитивности числа перекрестков при связанном суммировании узлов неверна, если и только если найдется составной узел, не имеющий составных минимальных диаграмм.

3. Пусть  $D$  — ориентированная диаграмма узла, расположенная на сфере  $S^2$ . Обозначим через  $\mathcal{E}(D)$  количество диаграмм (рассматриваемых с точностью до изоморфизма), связанных с  $D$  цепочками рокировок. Будем говорить, что  $D$  допускает нетривиальный автоморфизм, если найдется сохраняющий ориентации сферы, диаграммы и всех ее перекрестков автоморфизм пары  $(S^2, D)$ , при котором не все ребра диаграммы переходят в себя. Пусть диаграмма  $D$  распадается на  $m$  неприводимых частей, замыкания которых попарно неизоморфны и не допускают нетривиальных автоморфизмов. Пусть  $k_1, \dots, k_m$  — числа перекрестков этих неприводимых частей. Можно показать, что при указанных условиях в случае  $m = 2$  чис-

ло  $\mathcal{E}(D)$  задается формулой  $k_1 k_2$ , а в случае  $m = 3$  — формулой  $k_1 k_2 k_3 (k_1 + k_2 + k_3 - 1)$ . Как нетрудно проверить, при указанных условиях выполняется равенство

$$\mathcal{E}(D) = \frac{\prod_{i=1}^m k_i}{\sum_{i=1}^m k_i} \cdot \mathcal{N}(k_1, k_2, \dots, k_m),$$

где  $\mathcal{N}(k_1, k_2, \dots, k_m)$  есть число тех раскрасок вершин  $(\sum_{i=1}^m k_i)$ -угольника в  $m$  цветов, которые удовлетворяют следующим условиям: (1) в цвет  $i$  раскрашено в точности  $k_i$  вершин; (2) пары вершин одного цвета не разделяют пары вершин другого цвета (в том смысле, что диагональ, соединяющая пару вершин одного цвета, не пересекает диагоналей с концами одинакового другого цвета). Как известно, число  $\mathcal{N}(2, \dots, 2)$  есть число Каталана (см. [3]). Небезынтересно проверить, имеется ли простая зависимость между числами  $\mathcal{E}(D)$  и обобщенными числами Каталана (см., например, [8], а также [3] и приведенные там ссылки).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дужин С. В.** Комбинаторные аспекты теории инвариантов Васильева: дис. ... д-р физ.-мат. наук / С.-Петербургское отд. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. Санкт-Петербург, 2011. 167 с.
2. **Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.** Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974. 455 с.
3. **Стенли Р.** Перечислительная комбинаторика. Т. 2. Деревья, производящие функции и симметрические функции: Пер. с англ. М.: Мир, 2009. 767 с.
4. **Adams C. C.** The Knot Book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots. N. Y.: W. H. Freeman, 1994. 306 p.
5. **Belousov Yu. S., Malyutin A. V.** Estimates on the semi-meandric crossing number of classical knots // Abstracts of The International Conference "Polynomial Computer Algebra". 2017. P. 21–23. ISBN: 978-5-9651-1057-5.
6. **Belousov Yu. S.** Program for processing Gaussian codes and codes for pre-diagrams [e-resource]. 2017. URL: <https://github.com/YuryBelousov/curves>.
7. **Burde G., Zieschang H.** Knots. 2nd ed. Berlin: Walter de Gruyter & Co., 2003. 559 p. (de Gruyter Studies in Mathematics; vol. 5.) ISBN: 3-11-017005-1.
8. **Hilton P. J., Pedersen J.** Catalan numbers, their generalization, and their uses // Math. Intelligencer. 1991. Vol. 13, no. 2. P. 64–75. doi: 10.1007/BF03024089.
9. **Hopcroft J. E., Ullman J. D.** Introduction to automata theory, languages, and computation. Boston: Addison-Wesley Publ. Co., 1979. 418 p. ISBN: 020102988X.
10. **Kauffman L. H.** State models and the Jones polynomial // Topology. 1987. Vol. 26, no. 3. P. 395–407. doi: 10.1016/0040-9383(87)90009-7.
11. **Menasco W.** Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements // Topology. 1984. Vol. 23, no. 1. P. 37–44. doi: 10.1016/0040-9383(84)90023-5.
12. **Menasco W., Thistlethwaite M.** The Tait flyping conjecture // Bull. Amer. Math. Soc. 1991. Vol. 25, no. 2. P. 403–412. doi: 10.1090/S0273-0979-1991-16083-0.
13. **Menasco W., Thistlethwaite M.** The classification of alternating links // Ann. Math. 1993. Vol. 138, no. 1. P. 113–171. doi: 10.2307/2946636.
14. **Murasugi K.** The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory // Topology. 1987. Vol. 26, no. 3. P. 187–194. doi: 10.1016/0040-9383(87)90058-9.
15. **Radovic L., Jablan S.** Meander knots and links // Filomat. 2015. Vol. 29, no. 10. P. 2381–2392. doi: 10.2298/FIL1510381R.
16. **Rolfen D.** Knots and links. Berkeley, Calif.: Publish or Perish Press, 1976. 439 p. ISBN: 0-914098-16-0.
17. **Thistlethwaite M. B.** A spanning tree expansion of the Jones polynomial // Topology. 1987. Vol. 26, no. 3. P. 297–309. doi: 10.1016/0040-9383(87)90003-6.

Белоусов Юрий Станиславович  
студент

Санкт-Петербургский государственный университет,  
г. Санкт-Петербург  
e-mail: bus99@yandex.ru

Поступила 30.09.2017

Малютин Андрей Валерьевич  
 д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник  
 Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,  
 Санкт-Петербургский государственный университет,  
 г. Санкт-Петербург  
 e-mail: malyutin@pdmi.ras.ru

## REFERENCES

1. Duzhin S.V. *Combinatorial aspects of the theory of Vassiliev invariants*. Dr. Sc. (Phys.-Math.) thesis, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute RAS, St. Petersburg, 2011, 167 p. (in Russian).
2. Magnus W., Karras A., Solitar D. *Combinatorial group theory*. N. Y., Interscience Publ., 1966, 415 p. Translated to Russian under the title *Kombinatornaya teoriya grupp*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 455 p.
3. Stanley R. *Enumerative combinatorics*, vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. Ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 594 p. ISBN: 0521789877. Translated to Russian under the title *Perechislitel'naya kombinatorika. T. 2. Derev'ya, proizvodnyashchie funktsii i simmetricheskie funktsii*, Moscow, Mir Publ., 2009, 767 p.
4. Adams C.C. *The Knot Book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. N. Y.: W. H. Freeman, 1994, 306 p. ISBN: 978-0716723936.
5. Belousov Yu.S., Malyutin A.V. *Estimates on the semi-meandric crossing number of classical knots*. Abstracts of The International Conference "Polynomial Computer Algebra", 2017, pp. 21–23. ISBN: 978-5-9651-1057-5.
6. Belousov Yu.S. Program for processing Gaussian codes and codes for pre-diagrams. Available at: <https://github.com/YuryBelousov/curves>, 2017.
7. Burde G., Zieschang H. *Knots*. Berlin, Walter de Gruyter & Co., 2003, Ser. de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 5, 559 p. ISBN: 3-11-017005-1.
8. Hilton P.J., Pedersen J. Catalan numbers, their generalization, and their uses. *Math. Intelligencer*, 1991, vol. 13, no. 2, pp. 64–75. doi: 10.1007/BF03024089.
9. Hopcroft J.E., Ullman J.D. *Introduction to automata theory, languages, and computation*. Boston: Addison-Wesley Publ. Co., 1979, 418 p. ISBN: 020102988X.
10. Kauffman L.H. State models and the Jones polynomial. *Topology*, 1987, vol. 26, no. 3, pp. 395–407. doi: 10.1016/0040-9383(87)90009-7.
11. Menasco W. Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements. *Topology*, 1984, vol. 23, no. 1, pp. 37–44. doi: 10.1016/0040-9383(84)90023-5.
12. Menasco W., Thistlethwaite M. The Tait flyping conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1991, vol. 25, no. 2, pp. 403–412. doi: 10.1090/S0273-0979-1991-16083-0.
13. Menasco W., Thistlethwaite M. The classification of alternating links. *Ann. Math.*, 1993, vol. 138, no. 1, pp. 113–171. doi: 10.2307/2946636.
14. Murasugi K. The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory. *Topology*, 1987, vol. 26, no. 3, pp. 187–194. doi: 10.1016/0040-9383(87)90058-9.
15. Radovic L., Jablan S. Meander knots and links. *Filomat*, 2015, vol. 29, no. 10, pp. 2381–2392. doi: 10.2298/FIL1510381R.
16. Rolfsen D. *Knots and links*. Berkeley, Calif.: Publish or Perish Press, 1976, 439 p. ISBN: 0-914098-16-0.
17. Thistlethwaite M.B. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology*, 1987, vol. 26, no. 3, pp. 297–309. doi: 10.1016/0040-9383(87)90003-6.

The paper was received by the Editorial Office on September 30, 2017.

*Yurii Stanislavovich Belousov*, student, St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: bus99@yandex.ru.

*Andrei Valer'evich Malyutin*, Dr. Phys.-Math. Sci., St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, 191023 Russia, St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: malyutin@pdmi.ras.ru.

УДК 512.54

## О КОММУТАНТАХ КОНЕЧНЫХ 2-ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ИНВОЛЮЦИЯМИ

**Б. М. Веретенников**

Для конечной группы  $G$  минимальное число порождающих обозначается через  $d(G)$ . Под  $G'$  мы понимаем коммутант группы  $G$ . А. Д. Устюжанинов в 1975 г. опубликовал без доказательства список конечных 2-групп, порожденных тремя инволюциями, с элементарным абелевым коммутантом. В частности,  $d(G') \leq 5$  для такой группы  $G$ . В продолжение этой темы интересно классифицировать все конечные 2-группы, порожденные  $n$  инволюциями (для любого  $n \geq 2$ ), с элементарным абелевым коммутантом. В статье доказывается, что если конечная 2-группа  $G$  порождается  $n$  инволюциями и  $d(G) = n$ , то

$$d(G') \leq \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n},$$

для любого  $n \geq 2$ , причем верхняя граница достигается. Кроме того, для любого  $n \geq 2$  строится конечная 2-группа, порожденная  $n$  инволюциями с элементарным абелевым коммутантом ранга

$$\binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n}.$$

Метод построения этой группы аналогичен методу, используемому автором в ряде работ для построения конечных групп Альперина. Мы получим нашу группу как последовательное полупрямое произведение групп порядка 2. Приводится также пример бесконечной 2-группы, порожденной инволюциями, с бесконечным элементарным абелевым коммутантом, полученным из построенных конечных 2-групп.

Ключевые слова: 2-группа, порождение инволюциями, коммутант группы.

**B. M. Veretennikov. On the commutator subgroups of finite 2-groups generated by involutions.**

For a finite group  $G$  we denote by  $d(G)$  the minimum number of its generators and by  $G'$  the commutator group of  $G$ . In 1975 Ustyuzhaninov published without proof the list of finite 2-groups generated by three involutions with elementary abelian commutator subgroup. In particular,  $d(G') \leq 5$  for such a group  $G$ . Continuing this research, we pose the problem of classifying all finite 2-groups generated by  $n$  involutions (for any  $n \geq 2$ ) with elementary abelian commutator subgroup. For a finite 2-group  $G$  generated by  $n$  involutions with  $d(G) = n$ , we prove that

$$d(G') \leq \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n}$$

for any  $n \geq 2$  and that the upper bound is attainable. In addition, we construct for any  $n \geq 2$  a finite 2-group generated by  $n$  involutions with elementary abelian commutator subgroup of rank  $\binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n}$ . The method of constructing this group is similar to the method used by the author in a number of papers for the construction of Alperin's finite groups. We obtain  $G$  as the consecutive semidirect product of groups of order 2. We also give an example of an infinite 2-group generated by involutions with infinite elementary abelian commutator subgroup; the example is obtained from the constructed finite 2-groups.

Keywords: 2-group, generation by involutions, commutator subgroup.

MSC: 20D15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-77-84

### Введение

А. Д. Устюжанинов в [1] рассматривал конечные 2-группы, порожденные тремя инволюциями, с элементарным абелевым коммутантом. В частности, он анонсировал, что если конечная 2-группа  $G$  порождается инволюциями  $a, b$  и  $c$ , то  $G'$  порождается коммутаторами

$$[a, b], [a, c], [b, c], [a, b, c], [a, c, b].$$

На самом деле, в [1] приведен список таких групп, но доказательство полноты списка не было опубликовано.

В предлагаемой статье получен следующий результат.

**Теорема.** Пусть  $G$  — конечная 2-группа,  $d(G) = n \geq 2$  и  $G$  порождается  $n$  инволюциями. Тогда

$$d(G') \leq \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n},$$

причем верхняя граница достигается.

В разд. 1 статьи доказывается неравенство для  $d(G')$ , а в разд. 2 для любого  $n \geq 2$  строится конечная 2-группа  $G$  с элементарным абелевым коммутантом, которая удовлетворяет условию теоремы и для которой верхняя граница для  $d(G')$ , указанная в теореме, достигается. В конце статьи приводится также пример бесконечной 2-группы, порожденной инволюциями, с бесконечным элементарным абелевым коммутантом, полученным из построенных конечных 2-групп.

Используемые в статье обозначения и понятия являются стандартными (см., например, [2, гл. 1]). В частности,  $d(G)$  — минимальное число порождающих группы  $G$ , метабелевость группы  $G$  означает равенство  $G'' = 1$ ,  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  — число сочетаний из  $n$  по  $k$ .

В вычислениях автор использует основные коммутаторные тождества  $[ab, c] = [a, c]^b [b, c]$ ,  $[a, bc] = [a, c][a, b]^c$  и тождество Витта  $[a, b, c][b, c, a][c, a, b] = 1$ , справедливое в любой метабелевой группе.

Кроме того, будем использовать тот факт, что в любой метабелевой группе  $G$  для любых  $x \in G$ ,  $t \in G'$  и любого целого числа  $n$  верно  $[t, x]^n = [t^n, x]$ .

Договоримся также под  $i_1, i_2, \dots, \widehat{i_m}, \dots, i_k$  понимать последовательность всех указанных индексов  $i_1, \dots, i_k$  без индекса  $i_m$ . Для упрощения записи часто в последовательности  $i_1, \dots, i_k$  будем опускать запятые:  $i_1 \dots i_k$ .

Отметим также еще четыре важных вспомогательных утверждения.

**Лемма 1.** Пусть  $G$  — группа. Если  $x^2 \in Z(G)$ , то для любого  $y \in G$  справедливо равенство  $[y, x]^x = [y, x]^{-1}$ , т. е.  $[y, x, x] = [y, x]^{-2}$ .

**Доказательство.** Имеем  $1 = [y, x^2] = [y, x][y, x]^x$ , откуда следует требуемое.  $\square$

**Лемма 2.** Если  $G$  — метабелева группа, то для любого  $x \in G$  и любых  $y_1, \dots, y_m$  из  $G$  значение коммутатора  $[x, y_1, \dots, y_m]$  не меняется при любой перестановке местами элементов  $y_1, \dots, y_m$  в этом коммутаторе.

**Доказательство.** При  $m = 2$  имеем  $[x, y_1, y_2][y_1, y_2, x][y_2, x, y_1] = 1$ . Ввиду того, что  $[y_1, y_2, x] = 1$ , получаем  $[x, y_2, y_1] = [y_2, x, y_1]^{-1} = [x, y_1, y_2]$ , что и требовалось.

Общий случай доказывается индукцией по  $m$ .  $\square$

**Лемма 3.** Если  $G$  — метабелева группа,  $G'$  — элементарный абелев коммутант,  $a_1, \dots, a_n$  — инволюции из  $G$ , не все попарно различные, то  $[a_1, a_2, \dots, a_n] = 1$ .

**Доказательство.** Если среди  $a_3, \dots, a_n$  есть два одинаковых элемента, равных  $c$ , то в силу леммы 2 имеем  $[a_1, \dots, a_n] = [a_1, a_2, c, c, \dots] = 1$ , так как  $[a_1, a_2, c, c] = [a_1, a_2, c]^{-2} = 1$  по лемме 1.

Если, например,  $a_1 = a_j = c$  при  $j > 2$ , то  $[a_1, \dots, a_n] = [c, a_2, c, \dots] = 1$ , так как  $[c, a_2, c] = [c, a_2]^{-2} = 1$ .  $\square$

**Лемма 4** [3, лемма 2]. Пусть  $H$  — конечная группа, заданная образующими  $b_1, \dots, b_n$  и определяющими соотношениями  $w_i(b_1, \dots, b_n) = 1$ , где  $1 \leq i \leq s$ . Пусть далее  $k$  — натуральное число и группа  $K$  задана образующими  $b_1, \dots, b_n$  и  $b$ , определяющими соотношениями

группы  $H$  и добавленными определяющими соотношениями  $b_i^b = v_i(b_1, \dots, b_n)$ , где  $1 \leq i \leq n$ , а также  $b^k = 1$ . Пусть, кроме того, выполнены следующие условия для группы  $H$ :

- 1)  $\langle v_1(b_1, \dots, b_n), \dots, v_n(b_1, \dots, b_n) \rangle = H$ ;
  - 2)  $b$  сохраняет все определяющие соотношения группы  $H$  в том смысле, что для любого  $i = \overline{1, s}$   $w_i(v_1(b_1, \dots, b_n), \dots, v_n(b_1, \dots, b_n)) = 1$  — верное равенство в группе  $H$ ;
  - 3)  $k$ -я степень автоморфизма  $\psi$  группы  $H$ , индуцированного отображением  $b_i \mapsto v_i(b_1, \dots, b_n)$ , где  $1 \leq i \leq n$ , равна  $id_H$ .
- Тогда  $K = H \rtimes \langle b \rangle$ , где  $|b| = k$ .

### 1. Доказательство первой части теоремы

При доказательстве теоремы можно считать, что  $G'$  — элементарная абелева группа. Тогда при  $n = 3$  любой коммутатор веса  $\geq 4$ , составленный из  $a_1, a_2, a_3$ , содержит одинаковые элементы и потому равен 1 по лемме 3. Таким образом,  $G'$  порождается коммутаторами  $[a_1, a_2]$ ,  $[a_1, a_3]$ ,  $[a_2, a_3]$ ,  $[a_1, a_2, a_3]$ ,  $[a_2, a_3, a_1]$  и  $[a_3, a_1, a_2]$ . Но так как произведение трех последних коммутаторов равно 1, то  $d(G') \leq 5 = \binom{3}{1} + 2 \binom{3}{2}$ .

**Лемма 5.** Пусть  $k \geq 3$ . Тогда для любого набора  $i_1, i_2, \dots, i_k$  попарно различных целых индексов из  $[1, n]$ , такого что  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ , коммутаторы веса  $k$ , составленные из  $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ , выражаются в виде произведений коммутаторов

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}], [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}, a_{i_4}, \dots, a_{i_k}], [a_{i_1}, a_{i_4}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_k}], \dots, [a_{i_1}, a_{i_k}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k-1}}],$$

где в каждом коммутаторе нет повторяющихся элементов и индексы элементов, стоящих на местах, начиная с третьего, образуют строго возрастающую последовательность.

**Доказательство.** Используем индукцию по  $k$ . При  $k = 3$  утверждение верно, так как в силу тождества Витта имеем

$$[a_{i_2}, a_{i_3}, a_{i_1}] = [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}][a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}].$$

Пусть теперь  $k > 3$ . Тогда любой коммутатор  $[b_1, \dots, b_k]$ , составленный из  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ , в котором  $a_{i_k}$  находится на месте с номером, большим 2, равен коммутатору  $[c_1, \dots, c_k]$ , составленному из тех же элементов, где  $c_k = a_{i_k}$ . По предположению индукции  $[c_1, \dots, c_k]$  выражается в виде произведения коммутаторов

$$[a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k-1}}, a_{i_k}], [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}, a_{i_k}], \dots, [a_{i_1}, a_{i_{k-1}}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-2}}, a_{i_k}],$$

где в каждом коммутаторе индексы элементов, стоящих на местах, начиная с третьего, образуют строго возрастающую последовательность.

Далее, коммутатор  $[a_{i_1}, a_{i_k}, d_3, \dots, d_k]$ , составленный из тех же элементов  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ , равен  $[a_{i_1}, a_{i_k}, a_{i_2}, \dots, a_{i_{k-1}}]$ , а коммутатор  $[a_{i_s}, a_{i_k}, \dots]$ , составленный из тех же элементов при  $s \neq 1$ , преобразуем с помощью тождества Витта в метабелевой группе следующим образом:

$$[a_{i_s}, a_{i_k}, a_{i_1}, \dots] = [a_{i_k}, a_{i_1}, a_{i_s}, \dots][a_{i_1}, a_{i_s}, a_{i_k}, \dots] = [a_{i_1}, a_{i_k}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots][a_{i_1}, a_{i_s}, a_{j_3}, \dots, a_{j_k}],$$

где все коммутаторы состоят из тех же элементов  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$  и в возрастающей последовательности индексов  $j_3, \dots, j_k$ , отличных от  $i_1$  и  $i_s$ , индекс  $j_k$  равен  $i_k$ . Таким образом, доказано, что при любом расположении элементов  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$  в коммутаторе  $[b_1, \dots, b_k]$  этот коммутатор выражается через  $[a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}], [a_{i_1}, a_{i_3}, a_{i_2}, a_{i_4}, \dots, a_{i_k}], \dots, [a_{i_1}, a_{i_k}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots, a_{i_{k-1}}]$ , что и требовалось.  $\square$

Далее, при любом  $k \in [3, n]$  число наборов целых индексов  $i_1, \dots, i_k \in [1, n]$  таких, что  $i_1 < \dots < i_k$ , равно  $\binom{n}{k}$ , и по лемме 5 коммутаторы веса  $k$ , составленные из  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ , выражаются через  $(k-1)$  коммутаторов, указанных в лемме 5. Поэтому с учетом порождающих коммутаторов  $[a_i, a_j]$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , все коммутаторы весов от 2 до  $n$ , составленные из  $a_1, \dots, a_n$ , могут быть выражены через

$$\binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n}$$

коммутаторов, описанных для любого их веса  $k$  в лемме 5.  $\square$

## 2. Доказательство второй части теоремы

Пусть  $n = 3$ . Введем символы  $a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123}, a_{132}$ . Далее рассмотрим элементарную абелеву группу  $H = \langle a_{12} \rangle \times \langle a_{13} \rangle \times \langle a_{23} \rangle \times \langle a_{123} \rangle \times \langle a_{132} \rangle$  порядка 32. Пусть

$$G = ((H \langle a_1 \rangle) \langle a_2 \rangle) \langle a_3 \rangle,$$

где

$$[a_{12}, a_1] = [a_{13}, a_1] = 1, [a_{23}, a_1] = a_{123},$$

$$[a_{12}, a_2] = [a_{23}, a_2] = 1, [a_{13}, a_2] = a_{132},$$

$$[a_{13}, a_3] = [a_{23}, a_3] = 1, [a_{12}, a_3] = a_{123},$$

$$[a_1, a_2] = a_{12}, [a_1, a_3] = a_{13}, [a_2, a_3] = a_{23}, |a_1| = |a_2| = |a_3| = 2.$$

С помощью леммы 4 непосредственно можно проверить, что  $G = ((H \times \langle a_1 \rangle) \times \langle a_2 \rangle) \times \langle a_3 \rangle$ , в частности,  $G$  — группа порядка  $2^8$ , порожденная инволюциями  $a_1, a_2, a_3$ , в которой  $G' = H$  и  $|G'| = 2^5$ .

Пусть теперь  $n \geq 4$ . Построим конечную 2-группу  $G$ , порожденную инволюциями  $a_1, \dots, a_n$ , в которой  $G'$  — элементарная абелева группа ранга

$$\binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n}.$$

Для этого при любом натуральном  $k \geq 2$  и любом наборе  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  целых индексов из  $[1, n]$  введем  $k-1$  символов  $a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}, a_{i_1 i_3 i_2 i_4 \dots i_k}, \dots, a_{i_1 i_k i_2 i_3 \dots i_{k-1}}$ , индексированных последовательностями указанных индексов, в которых, начиная с третьего места, все индексы расположены в порядке строгого возрастания и не совпадают с первыми двумя индексами.

Кроме того, символ  $a_{j_1 \dots j_k}$  считаем равным 1 при условии совпадения каких-либо индексов в последовательности  $j_1 \dots j_k$ .

Для большей прозрачности вычислений при фиксированных  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  эти символы разобьем на три группы, в двух из которых по одному символу:

а)  $a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}$ ,

б)  $a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}$ , где  $3 \leq m \leq k-1$ ,

с)  $a_{i_1 i_k i_2 i_3 \dots i_{k-1}}$ .

Заметим, что при  $k = 2$  имеем лишь символ  $a_{i_1 i_2}$ , который относится к группе а), а при  $k = 3$  имеем лишь два символа  $a_{i_1 i_2 i_3}$  и  $a_{i_1 i_3 i_2}$ , относящиеся к а) и с).

Пусть

$$H = \prod_{\substack{2 \leq k \leq n \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n}} (\langle a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k} \rangle \times \langle a_{i_1 i_3 i_2 \dots i_k} \rangle \times \dots \times \langle a_{i_1 i_k i_2 i_3 \dots i_{k-1}} \rangle)$$



есть прямое произведение групп, где каждый множитель имеет порядок 2.

Тогда, как показано в доказательстве леммы 5,  $H$  — элементарная абелева группа ранга

$$\binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n}.$$

К группе  $H$  последовательно за  $n$  шагов с помощью соотношений, указанных ниже, присоединим инволюции  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Пусть  $1 \leq r \leq n$  и  $2 \leq k \leq n$ . Тогда определим коммутаторы элементов в пунктах а), б), в) с элементом  $a_r$  следующим образом.

1) При  $i_1 < r$  положим

$$[a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}, a_r] = a_{i_1 i_2 j_2 \dots j_k}, \quad (1)$$

где возрастающая последовательность  $j_2, \dots, j_k$  состоит из индексов  $i_3, \dots, i_k$  без индекса  $i_2$  и включает в себя  $r$ .

При  $r < i_1$  положим

$$[a_{i_1 i_2 i_3 \dots i_k}, a_r] = a_{r i_1 i_2 \dots i_k} a_{r i_2 i_1 i_3 \dots i_k}. \quad (2)$$

2) При  $3 \leq m \leq k-1$  и  $i_1 < r$  положим

$$[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r] = a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k}, \quad (3)$$

где возрастающая последовательность  $j_2, \dots, j_k$  состоит из индексов  $i_2, \dots, i_k$  без  $i_m$  и включает в себя  $r$ .

При  $3 \leq m \leq k-1$  и  $r < i_1$  положим

$$[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r] = a_{r i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k} a_{r i_m i_1 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}. \quad (4)$$

3) При  $i_1 < r$  положим

$$[a_{i_1 i_k i_2 \dots i_{k-1}}, a_r] = a_{i_1 i_k j_2 \dots j_k}, \quad (5)$$

где возрастающая последовательность  $j_2, \dots, j_k$  состоит из индексов  $i_2, \dots, i_{k-1}$  и  $r$ .

При  $r < i_1$  положим

$$[a_{i_1 i_k i_2 \dots i_{k-1}}, a_r] = a_{r i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k} a_{r i_k i_1 i_2 \dots i_{k-1}}. \quad (6)$$

4) При условии, что в последовательности  $i_1 \dots i_k$  есть индекс, совпадающий с  $r$ , считаем, что

$$[a_{i_1 \dots i_k}, a_r] = 1.$$

И, наконец, при  $s < r$  коммутатор  $[a_s, a_r]$  определим равным  $a_{sr}$ .

Таким образом, на первом шаге присоединим инволюцию  $a_1$  с помощью соотношений (1)–(6) при  $r = 1$ . Полученную группу  $H \langle a_1 \rangle$  обозначим через  $H_1$ .

На втором шаге к  $H_1$  присоединим инволюцию  $a_2$  с помощью соотношений (1)–(6) при  $r = 2$  и соотношения  $[a_1, a_2] = a_{12}$ . Полученную группу  $H_1 \langle a_2 \rangle$  обозначим через  $H_2$ .

На третьем шаге к  $H_2$  присоединим инволюцию  $a_3$  с помощью соотношений (1)–(6) при  $r = 3$  и соотношений  $[a_1, a_3] = a_{13}$  и  $[a_2, a_3] = a_{23}$ . Полученную группу  $H_2 \langle a_3 \rangle$  обозначим через  $H_3$ . Продолжая процесс, на  $n$ -м шаге получим группу  $H_n$ , которую обозначим через  $G$ .

Заметим далее, что в равенствах (1)–(6) при заменах  $a_r$  на  $a_r^2$  получатся единицы, так как в силу п. 4) имеем для любой допустимой последовательности  $j_1 \dots j_{k+1}$ , содержащей  $r$

$$(a_{j_1 \dots j_{k+1}})^{a_r} = a_{j_1 \dots j_{k+1}} [a_{j_1 \dots j_{k+1}}, a_r] = a_{j_1 \dots j_{k+1}}.$$

Также в равенстве  $[a_s, a_r]$  при замене  $a_r$  на  $a_r^2$  получим  $[a_s, a_r^2] = a_{sr} a_{sr}^r = a_{sr}^2 = 1$ .

Поэтому в соответствии с леммой 4 для обоснования того, что на  $n$ -м шаге получится группа  $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ , в которой имеется нормальный ряд подгрупп

$$H < H_1 = H \rtimes \langle a_1 \rangle < \dots < H_r = H_{r-1} \rtimes \langle a_r \rangle < \dots < H_n = G = H_{n-1} \rtimes \langle a_n \rangle$$

с фактор-группами порядка 2, требуется проверить для любого  $r \in [1, n]$  сохранение всех равенств, указанных в пп. 1)–3) выше, а также равенств вида  $[a_s, a_r] = a_{sr}$  при  $s < r$  под действием любого элемента  $a_t$ , где  $r < t$ .

Рассмотрим сначала в силу наибольшей общности п. 2) сохранение равенств, указанных в этом пункте.

Пусть  $1 \leq r < t \leq n$ . Проверим сохранение равенства (3) под действием  $a_r$  при  $i_1 < r$ . Нужно доказать, что при  $3 \leq m \leq n - 1$  верно равенство

$$[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r]^{a_t} = a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k}^{a_t}, \quad (7)$$

где возрастающая последовательность  $j_2, \dots, j_k$  состоит из индексов  $i_2, \dots, i_k$  без  $i_m$  и включает в себя  $r$ . Заметим, что  $i_1 < r$  влечет  $i_1 < t$ .

Преобразуем параллельно левую и правую части данного равенства. Получим

$$\begin{aligned} [a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}^{a_t}, a_r^{a_t}] &= a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k}^{a_t}, \\ [a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} [a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_t], a_r a_{rt}] &= a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k} [a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k}, a_t], \\ [a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} a_{i_1 i_m s_2 \dots s_k}, a_r a_{rt}] &= a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k} a_{i_1 i_m l_2 \dots l_{k+1}}, \end{aligned}$$

где возрастающая последовательность  $s_2, \dots, s_k$  состоит из индексов  $i_2, \dots, i_k$  без  $i_m$  и включает в себя индекс  $t$ , а возрастающая последовательность  $l_2, \dots, l_{k+1}$  состоит из индексов  $i_2, \dots, i_k$  без  $i_m$  и включает в себя  $r$  и  $t$ .

И, наконец, преобразуя левую часть последнего равенства, имеем

$$\begin{aligned} [a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r] [a_{i_1 i_m s_2 \dots s_k}, a_r] &= a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k} a_{i_1 i_m l_2 \dots l_{k+1}}, \\ a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k} a_{i_1 i_m p_2 \dots p_{k+1}} &= a_{i_1 i_m j_2 \dots j_k} a_{i_1 i_m l_2 \dots l_{k+1}}, \end{aligned}$$

где возрастающая последовательность  $p_2, \dots, p_{k+1}$  состоит из индексов  $s_2, \dots, s_k$  и  $r$ , т. е. она состоит из индексов  $i_2, \dots, i_k$  без  $i_m$ , а также включает в себя  $t$  и  $r$ . Таким образом, равенство (7) верно, что означает сохранение равенства (3) под действием  $a_t$ .

Пусть снова  $1 \leq r < t \leq n$ ,  $i_1 > r$ . Проверим сохранение равенства (4) под действием  $a_t$ . Нужно доказать при  $3 \leq m \leq n - 1$ , что

$$[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r]^{a_t} = a_{r i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k}^{a_t} a_{r i_m i_1 i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}^{a_t},$$

т. е.

$$\begin{aligned} &[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} [a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_t], a_r a_{rt}] \\ &= a_{r i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k} [a_{r i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k}, a_t] a_{r i_m i_1 i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} [a_{r i_m i_1 i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_t]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь придется рассмотреть два случая:

- а)  $r < t < i_1$ ,
- б)  $r < i_1 < t$ .

В случае а) равенство (8) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} a_{t i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k} a_{t i_m i_1 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r a_{rt}] \\ &= a_{r i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k} a_{r i_1 j_2 \dots j_{k+1}} a_{r i_m i_1 i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} a_{r i_m p_2 \dots p_{k+1}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где возрастающая последовательность  $j_2 \dots j_{k+1}$  состоит из индексов  $i_2, \dots, i_m, \dots, i_k$  и индекса  $t$ , а возрастающая последовательность  $p_2 \dots p_{k+1}$  состоит из индексов  $i_1, i_2, \dots, i_k$  без  $i_m$  и включает в себя индекс  $t$ . Преобразуем теперь левую часть равенства (9):

$$[a_{i_1 i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r] [a_{t i_1 i_2 \dots i_m \dots i_k}, a_r] [a_{t i_m i_1 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r]$$

$$\begin{aligned} &= a_{ri_1i_2\dots i_m\dots i_k} a_{ri_m i_1 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} a_{rti_1i_2\dots i_m\dots i_k} a_{ri_1ti_2\dots i_k} a_{rti_1\dots i_m\dots i_k} a_{ri_mti_1\dots \widehat{i_m} \dots i_k} \\ &= a_{ri_1i_2\dots i_m\dots i_k} a_{ri_m i_1 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} a_{ri_1ti_2\dots i_k} a_{ri_mti_1\dots \widehat{i_m} \dots i_k}. \end{aligned}$$

Сопоставляя полученное выражение и правую часть равенства (9), получаем, что они равны. Таким образом,  $a_t$  сохраняет (4) при  $r < t < i_1$ .

Рассмотрим теперь случай б):  $r < i_1 < t$ . В этом случае равенство (8) преобразуется следующим образом:

$$[a_{i_1i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_{i_1i_m j_2 \dots j_k}, a_r a_{rt}] = a_{ri_1i_2\dots i_m\dots i_k} a_{ri_1p_2\dots p_{k+1}} a_{ri_m i_1 i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} a_{ri_m q_2 \dots q_{k+1}}, \quad (10)$$

где возрастающая последовательность  $j_2 \dots j_k$  состоит из индексов  $i_2, \dots, i_k$  без  $i_m$  и включает в себя индекс  $t$ , возрастающая последовательность  $p_2 \dots p_{k+1}$  состоит из индексов  $i_2, \dots, i_k$  и  $t$ , возрастающая последовательность  $q_2 \dots q_{k+1}$  состоит из индексов  $i_1, \dots, i_k$  без  $i_m$  и включает в себя индекс  $t$ .

Преобразуем теперь левую часть равенства (10):

$$[a_{i_1i_m i_2 \dots \widehat{i_m} \dots i_k}, a_r][a_{i_1i_m j_2 \dots j_k}, a_r] = a_{ri_1i_2\dots i_m\dots i_k} a_{ri_m i_1 \dots \widehat{i_m} \dots i_k} a_{ri_1s_2\dots s_{k+1}} a_{ri_m v_2 \dots v_{k+1}},$$

где возрастающая последовательность  $s_2 \dots s_{k+1}$  состоит из  $i_2, \dots, i_m, \dots, i_k, t$ , а возрастающая последовательность  $v_2 \dots v_{k+1}$  состоит из  $i_1, \dots, i_m, \dots, i_k$  без индекса  $i_m$  и включает в себя  $t$ .

Сопоставляя полученное выражение и правую часть равенства (10), получаем истинное равенство.

Доказательство сохранения равенств (1), (2), (5), (6) под действием  $a_t$  при  $t > r$  расписывать не будем, так как оно проводится аналогично рассмотренному выше доказательству сохранения равенств (3) и (4) под действием  $a_t$  при  $t > r$ .

Рассмотрим теперь равенство

$$[a_s, a_r] = a_{sr}, \quad (11)$$

где  $s < r$  и  $t > r$ . Тогда под действием элемента  $a_t$  на это равенство имеем  $[a_s a_{st}, a_r a_{rt}] = a_{sr} a_{srt}$ , что равносильно равенству  $[a_s, a_{rt}][a_s, a_r][a_{st}, a_r] = a_{sr} a_{srt}$ , т. е.  $[a_{rt}, a_s]^{-1} a_{sr} a_{str} = a_{sr} a_{srt}$ , что, в свою очередь, означает  $a_{srt} a_{str} a_{sr} a_{str} = a_{sr} a_{srt}$ . Получили верное равенство, что означает сохранение равенства (11) под действием элемента  $a_t$  при  $t > r$ .

Итак, группа  $G$  имеет строение

$$G = (\dots ((G' \times \langle a_1 \rangle) \times \langle a_2 \rangle) \dots) \times \langle a_n \rangle,$$

где

$$d(G') = \binom{n}{2} + 2 \binom{n}{3} + \dots + (n-1) \binom{n}{n}$$

и все  $a_i$  — инволюции. □

Обозначим через  $G_n$ , где  $n \geq 3$ , группу, построенную выше. Тогда  $G_3 \subset G_4 \subset \dots \subset G_n \subset \dots$ , и если  $G = \bigcup_{n=3}^{\infty} G_n$ , то  $G$  порождается инволюциями  $a_1, \dots, a_n, \dots$  и имеет элементарный абелев коммутант

$$\begin{aligned} &\prod_{1 \leq i_1 < i_2} \langle a_{i_1 i_2} \rangle \times \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3} (\langle a_{i_1 i_2 i_3} \rangle \times \langle a_{i_1 i_3 i_2} \rangle) \\ &\times \dots \times \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k} (\langle a_{i_1 i_2 \dots i_k} \rangle \times \langle a_{i_1 i_3 i_2 \dots i_k} \rangle \times \dots \times \langle a_{i_1 i_k i_2 i_3 \dots i_{k-1}} \rangle) \times \dots, \end{aligned}$$

где все произведения прямые (не декартовы).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Устюжанинов А.Д.** Конечные 2-группы, порожденные точно тремя инволюциями. // Всесоюз. алгебр. симпозиум (1975): тез. докл. Ч. I. Гомель, 1975. С. 72.
2. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. М.: Наука, 1977. 240 с.
3. **Веретенников Б.М.** О конечных 2-группах Альперина с циклическими вторыми коммутантами // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 3. С. 326–350.

Веретенников Борис Михайлович

Поступила 10.04.2017

канд. физ.-мат. наук, доцент

Уральский федеральный университет,

г. Екатеринбург

e-mail: boris@veretennikov.ru

## REFERENCES

1. Ustyuzhaninov A.D. Finite 2-groups generated by exactly three involutions. *All-union algebr. symposium (1975)*, Abstracts, part I, Gomel, 1975, p. 72 (in Russian).
2. Kargapolov M.I., Merzljakov J.I. *Fundamentals of the Theory of Groups*. New York: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0. Original Russian text published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp*. Moscow, Nauka Publ, 1977, 240 p.
3. Veretennikov B.M. Finite Alperin 2-groups with cyclic second commutants. *Algebra Logic*, 2011, vol. 50, pp. 226–244. doi: 10.1007/s10469-011-9137-6.

The paper was received by the Editorial Office on April 10, 2017.

*Boris Mihajlovich Veretennikov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: boris@veretennikov.ru.

УДК УДК 514.132+515.162

## МНОГООБРАЗИЯ БРИСКОРНА, ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ СИРАДСКИ И НАКРЫТИЯ ЛИНЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВ<sup>1</sup>

А. Ю. Веснин, Т. А. Козловская

Многообразие Брискорна  $\mathcal{B}(p, q, r)$  является  $r$ -листным разветвленным циклическим накрытием трехмерной сферы  $S^3$  с ветвлением вдоль торического узла  $T(p, q)$ . Обобщенными группами Сирадски  $S(m, p, q)$  называют группы с  $m$ -циклическим представлением  $G_m(w)$ , где слово  $w$  имеет специальный вид, зависящий от  $p$  и  $q$ . В частности,  $S(m, 3, 2) = G_m(w)$  есть группа с  $m$  порождающими  $x_1, \dots, x_m$  и  $m$  определяющими соотношениями  $w(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = 1$ , где  $w(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = x_i x_{i+2} x_{i+1}^{-1}$ . Циклические представления групп  $S(2n, 3, 2)$  в виде  $G_n(w)$  исследовались Дж. Хоуи и Г. Вильямсом: они показали, что  $n$ -циклические представления являются геометрическими, то есть соответствуют спайнам замкнутых трехмерных многообразий. В данной работе аналогичный факт устанавливается для групп  $S(2n, 5, 2)$ . Показано, что в обоих случаях многообразия являются  $n$ -листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств. Для классификации некоторых из построенных многообразий была использована разработанная С. В. Матвеевым компьютерная программа “Распознаватель”.

Ключевые слова: трехмерное многообразие, многообразие Брискорна, группа с циклическим представлением, группа Сирадски, линзовое пространство, разветвленное накрытие.

**A. Yu. Vesnin, T. A. Kozlovskaya. Brieskorn manifolds, generalized Sieradski groups, and coverings of lens spaces.**

The Brieskorn manifold  $\mathcal{B}(p, q, r)$  is the  $r$ -fold cyclic covering of the three-dimensional sphere  $S^3$  branched over the torus knot  $T(p, q)$ . The generalised Sieradski groups  $S(m, p, q)$  are groups with  $m$ -cyclic presentation  $G_m(w)$ , where the word  $w$  has a special form depending on  $p$  and  $q$ . In particular,  $S(m, 3, 2) = G_m(w)$  is the group with  $m$  generators  $x_1, \dots, x_m$  and  $m$  defining relations  $w(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = 1$ , where  $w(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = x_i x_{i+2} x_{i+1}^{-1}$ . Cyclic presentations of  $S(2n, 3, 2)$  in the form  $G_n(w)$  were investigated by Howie and Williams, who showed that the  $n$ -cyclic presentations are geometric, i.e., correspond to the spines of closed three-dimensional manifolds. We establish an analogous result for the groups  $S(2n, 5, 2)$ . It is shown that in both cases the manifolds are  $n$ -fold branched cyclic coverings of lens spaces. For the classification of the constructed manifolds, we use Matveev’s computer program “Recognizer.”

Keywords: three-dimensional manifold, Brieskorn manifold, cyclically presented group, Sieradski group, lens space, branched covering.

MSC: 57M05, 20F05, 57M50

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-85-97

*Академику С. В. Матвееву к его семидесятилетию*

### 1. Трехмерные многообразия с циклической симметрией

#### 1.1. Примеры многообразий с циклической симметрией

В работе исследуется связь между трехмерными замкнутыми многообразиями Брискорна и обобщенными группами Сирадски. Многообразие Брискорна  $\mathcal{B}(p, q, r)$  [1] является  $r$ -листным разветвленным циклическим накрытием трехмерной сферы  $S^3$  с ветвлением вдоль торического узла  $T(p, q)$ . Обобщенными группами Сирадски  $S(m, p, q)$  [2] называют группы с циклическим представлением  $G_m(w)$ , где слово  $w$  имеет указанный ниже специальный вид, зависящий от положительных целых  $p$  и  $q$ , где  $p = 1 + dq$  и  $d \geq 1$ . В частности,  $S(m, 3, 2) = G_m(w)$  есть группа

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант N 15-01-07906).

с  $m$  порождающими  $x_1, \dots, x_m$  и  $m$  определяющими соотношениями  $w(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = 1$ , где  $w(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = x_i x_{i+2} x_{i+1}^{-1}$ .

Циклические представления групп  $S(2n, 3, 2)$  (случай  $q = 2, d = 1$ ) в виде  $G_n(w)$  исследовались Дж. Хоуи и Г. Вильямсом в [3]. А именно, они показали, что  $n$ -циклические представления  $S(2n, 3, 2) = G_n(x_i x_{i+2} x_{i+1}^{-1})$  являются *геометрическими*, то есть соответствуют спайнам замкнутых трехмерных многообразий. В данной работе аналогичный факт устанавливается для групп  $S(2n, 5, 2)$  (случай  $q = 2, d = 2$ ). А именно, в теореме 4 показывается, что  $n$ -циклические представления

$$S(2n, 5, 2) = G_n(x_i x_{i+1} x_{i+2}^2 x_{i+3} x_{i+4} x_{i+3}^{-1} x_{i+2}^{-1} x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}^{-1} x_{i+1}^{-1})$$

являются геометрическими. В предложениях 2 и 3 устанавливается, что в обоих случаях многообразия являются  $n$ -листными разветвленными циклическими накрытиями линзовых пространств.

Напомним, что топологические и геометрические свойства трехмерных многообразий являются предметом многочисленных исследований с различных точек зрения. В зависимости от поставленной задачи, используются подходы к построению и описанию трехмерных многообразий, основанные на триангуляциях, разбиениях Хегора, хирургиях, разветвленных накрытиях и других методах. Каждый из подходов имеет свои сильные стороны. Основные определения и понятия теории трехмерных многообразий можно найти в книге Дж. Хемпеля [4]. Весьма плодотворным оказалось представление трехмерных многообразий их спайнами. Теория спайнов трехмерных многообразий была развита в работах С. В. Матвеева, его коллег и учеников. Основные результаты теории спайнов изложены и систематизированы в монографии [5]. Методы и результаты табулирования трехмерных многообразий представлены также в обзоре [6]. Представление трехмерных многообразий спайнами используется в программном комплексе “*Распознаватель трехмерных многообразий*” [7], созданном и развиваемом под руководством С. В. Матвеева. Этот программный комплекс содержит как оригинальные программные средства для распознавания и исследования трехмерных многообразий, так и огромную базу трехмерных многообразий, представленных своими спайнами. Так разработанные программные средства позволяют во многих частных случаях исследовать группы симметрий трехмерных многообразий и выяснять вопросы о накрытиях многообразий.

В данной работе мы будем обсуждать связанные замкнутые ориентируемые трехмерные многообразия, обладающие циклической симметрией, которая действует на многообразии с неподвижными точками. Более того, нас будут интересовать те случаи, когда циклическая симметрия соответствует представлению многообразия как разветвленного циклического накрытия трехмерной сферы  $S^3$  или линзового пространства  $L(p, q)$ . К настоящему времени примеры таких многообразий хорошо известны. Напомним некоторые из них.

- Сферическое и гиперболическое додекаэдральные пространства, построенные К. Вебером и Г. Зейфертом в 1931 г. в работе [8]: первое из них является 3-листным циклическим накрытием  $S^3$ , разветвленным над узлом трилистник, а второе является 5-листным циклическим накрытием  $S^3$ , разветвленным над двухкомпонентным зацеплением Уайтхеда.
- Наименьшее по объему замкнутое ориентируемое трехмерное гиперболическое многообразие, обнаруженное С. В. Матвеевым и А. Т. Фоменко [9] и независимо Дж. Виксом [10], является 3-листным циклическим накрытием  $S^3$ , разветвленным над двухмостовым узлом  $7/3$  [11].
- Многообразия Фибоначчи, построенные Х. Хеллингом, А. Ч. Кимом и Й. Меннике в работе [12], являются  $n$ -листными накрытиями  $S^3$ , разветвленными над узлом восьмерка.
- Многообразия Сирадски, определенные А. Сирадски в [13], как установлено А. Кавикиоли, Ф. Хагенбартом и А. Ч. Кимом [2], являются  $n$ -листными циклическими накрытиями  $S^3$ , разветвленными над узлом трилистник.

Хорошо известно, что узел трилистник принадлежит к семейству торических узлов (как торический узел трилистник имеет обозначение  $T(3, 2)$ ). Таким образом, многообразия Сирадски из [2; 13] принадлежат к более широкому классу многообразий, известных как многообразия Брискорна.

## 1.2. Многообразия Брискорна

Напомним, что Э. Брискорн [1] (см. также монографию Дж. Милнора [14]) инициировал исследование следующих объектов. Для целых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1} \geq 2$  рассмотрим многочлен вида

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = (z_1)^{\alpha_1} + (z_2)^{\alpha_2} + \dots + (z_{n+1})^{\alpha_{n+1}}.$$

Очевидно, начало координат является его единственной критической точкой.

Многообразием Брискорна  $\mathcal{B}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$  называется пересечение комплексной гиперповерхности  $V = f^{-1}(0)$  с  $(2n + 1)$ -мерной сферой единичного радиуса

$$S^{2n+1} = \{(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}.$$

Многообразие Брискорна является гладким многообразием размерности  $2n - 1$ . Интерес к исследованию этих многообразий связан, в частности, со следующим удивительным фактом, доказанным Дж. Милнором [14]: многообразия Брискорна, соответствующие многочленам

$$f(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2$$

для  $k = 1, 2, \dots, 28$ , представляют 28 попарно недиффеоморфных экзотических сфер, каждая из которых гомеоморфна обычной семимерной сфере.

Нас будет интересовать случай, когда многообразия Брискорна являются трехмерными. Следуя Дж. Милнору [15], для целых  $p, q, r \geq 2$  обозначим

$$\mathcal{B}(p, q, r) = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1^p + z_2^q + z_3^r = 0, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 1\}.$$

Как показано в лемме 1.1 из работы [15], многообразия  $\mathcal{B}(p, q, r)$  являются  $r$ -листным циклическим накрытием сферы  $S^3$ , разветвленным над торическим зацеплением  $T(p, q)$ . В силу того, что в определении многообразия  $\mathcal{B}(p, q, r)$  параметры  $p, q$  и  $r$  входят симметрично, оно также является  $q$ -листным циклическим накрытием  $S^3$  с ветвлением вдоль  $T(r, p)$  и  $p$ -листным циклическим накрытием  $S^3$  с ветвлением вдоль  $T(q, r)$ .

Напомним, что торическое зацепление  $T(p, q)$  может быть определено как множество точек  $(z_1, z_2)$  на единичной трехмерной сфере, которые удовлетворяют уравнению  $z_1^p + z_2^q = 0$ . Это зацепление имеет  $d$  компонент, где  $d$  — наибольший общий делитель чисел  $p$  и  $q$ . Компонента с номером  $n$ ,  $1 \leq n \leq d$ , может быть параметризована следующим образом:

$$z_1 = \exp(2\pi it/p), \quad z_2 = \exp(2\pi i(t + n + 1/2)/q)$$

для  $0 \leq t \leq pq/d$ .

Другое описание торических зацеплений может быть дано на языке теории кос. Пусть  $B_p$  — группа геометрических кос на  $p$  нитях со стандартными порождающими  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$ . Тогда замыкание косы  $(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{p-1})^q$  является торическим зацеплением  $T(p, q)$ .

В [15] показано, что многообразия Брискорна  $\mathcal{B}(p, q, r)$  являются сферическим, если  $1/p + 1/q + 1/r > 1$ ; нильпотентным, если  $1/p + 1/q + 1/r = 1$ , и  $\widetilde{\text{SL}}(2, \mathbb{R})$ -многообразием, если  $1/p + 1/q + 1/r < 1$ .

## 2. Группы с циклическим представлением

### 2.1. Циклическое представление и определяющее слово

Напомним [16], что группа  $G$  называется *группой с циклическим представлением*, если при некоторых  $m$  и  $w$  она допускает представление вида

$$G = G_m(w) = \langle x_1, \dots, x_m \mid w = 1, \eta(w) = 1, \dots, \eta^{m-1}(w) = 1 \rangle,$$

где  $\eta : \mathbb{F}_m \rightarrow \mathbb{F}_m$  — автоморфизм свободной группы  $\mathbb{F}_m = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$  ранга  $m$ , определенный по правилу  $\eta(x_i) = x_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , и  $\eta(x_m) = x_1$ , а  $w = w(x_1, \dots, x_m)$  — циклически приведенное слово в  $\mathbb{F}_m$ . Слово  $w$  будем называть *определяющим словом*.

Естественно возникает вопрос о том, какие группы с циклическим представлением являются фундаментальными группами трехмерных гиперболических многообразий? Ниже мы напомним примеры групп с циклическим представлением, возникающих как фундаментальные группы трехмерных многообразий, а также покажем, что некоторые семейства групп с циклическим представлением не могут быть реализованы как группы трехмерных гиперболических орбиформов конечного объема.

### 2.2. Группы Фибоначчи

Начнем обсуждение с групп, соответствующих определяющему слову  $w(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3^{-1}$ . Группы с циклическим представлением

$$F(2, m) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2}, \quad i = 1, \dots, m \rangle,$$

где индексы берутся по модулю  $m$ , называются *группами Фибоначчи*. Если число порождающих четно,  $m = 2n$ , то, как доказали Х. Хеллинг, А.Ч. Ким и Й. Меннике [12], при  $n \geq 4$  группы  $F(2, 2n)$  реализуются как фундаментальные группы трехмерных гиперболических многообразий. Эти многообразия были названы *многообразиями Фибоначчи*. Таким образом, при четном  $m \geq 8$  группы  $F(2, m)$  являются бесконечными и не содержат элементов конечного порядка. В случае нечетного  $m$  ситуация иная. Как показано в [17], группы  $F(2, m)$  с нечетным числом порождающих содержат элементы конечного порядка. А именно, произведение порождающих  $v = x_1 x_2 \dots x_m$  является элементом второго порядка в  $F(2, m)$ . Таким образом, группа  $F(2, m)$  с нечетным  $m$  не может быть фундаментальной группой гиперболического многообразия. Более того, как показал К. Маклачлан [18], она не может быть группой трехмерного гиперболического орбиформа конечного объема. Вместе с тем Дж. Хоуи и Г. Вильямс показали [3], что если  $m \geq 3$  нечетно, то  $F(2, m)$  является группой трехмерного многообразия тогда и только тогда, когда  $m = 3, 5, 7$ . Во всех этих случаях группа является конечной циклической.

Как естественное обобщение групп  $F(2, m)$  в [19] были введены группы  $F(r, m)$ , где  $r \geq 2$  и  $m \geq 3$ , задаваемые представлением

$$F(r, m) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \dots x_{i+r-1} = x_{i+r}, \quad i = 1, \dots, m \rangle,$$

где все индексы берутся по модулю  $m$ . Группы  $F(r, m)$  также обычно называют *группами Фибоначчи*. Обзор результатов о конечности этих групп приведен в [16]. Естественно возникает вопрос о том, реализуются ли эти группы как фундаментальные группы трехмерных многообразий, в частности, гиперболических? Используя метод из [18], А. Щепанский [20] установил, что если  $r$  четно и  $m \geq r$  нечетно, то группа Фибоначчи  $F(r, m)$  не может быть группой трехмерного гиперболического орбиформа конечного объема.



### 2.3. Группы Сирадски

Еще один интересный класс групп с циклическим представлением соответствует определяющему слову  $w(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3 x_2^{-1}$ . Группы с циклическим представлением

$$S(m) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+2} = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m \rangle,$$

где все индексы берутся по модулю  $m$ , были введены А. Сирадски в работе [13]. В работе [2] эти группы были названы *группами Сирадски*. Определенные в работе [2] группы

$$S(m, p, q) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+q} \cdots x_{i+(q-1)dq-q} x_{i+(q-1)dq} = x_{i+1} x_{i+q+1} \cdots x_{i+(q-1)dq-q+1}, \quad i = 1, \dots, m \rangle$$

будем называть *обобщенными группами Сирадски*. Здесь все индексы берутся по модулю  $m$ , а  $p$  и  $q$  — такие взаимно простые положительные числа, что  $p = 1 + dq$ ,  $d \in \mathbb{Z}$ . А. Кавикиоли, Ф. Хегенбарт и А.С. Ким установили следующий результат.

**Теорема 1** [2, Main Theorem]. *Циклическое представление  $S(m, p, q)$  соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия, которое является  $m$ -листным циклическим накрытием  $S^3$ , разветвленным над торическим узлом  $T(p, q)$ , то есть спайну многообразия Брискорна  $\mathcal{B}(m, p, q)$ .*

В частности, циклическое представление группы Сирадски  $S(m) = S(m, 3, 2)$  соответствует спайну многообразия  $\mathcal{B}(m, 3, 2)$ , которое  $m$ -листно циклически накрывает трехмерную сферу разветвленно над узлом трилистник  $T(3, 2)$ .

Далее нас будут интересовать обобщенные группы Сирадски с параметром  $q = 2$ . В этом случае  $p = 1 + 2d$  и

$$S(m, 2d + 1, 2) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+2} \cdots x_{i+2d} = x_{i+1} x_{i+3} \cdots x_{i+2d-1}, \quad i = 1, \dots, m \rangle.$$

### 2.4. Обобщенные группы Фибоначчи

Рассмотрим два введенных в [21] семейства групп, которые авторы называли *обобщенными группами Фибоначчи*. Группы первого семейства  $F(r, m, k)$ , где  $r \geq 2$ ,  $m \geq 3$ ,  $k \geq 1$ , имеют циклическое представление

$$F(r, m, k) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \cdots x_{i+r-1} = x_{i+r-1+k}, \quad i = 1, \dots, m \rangle,$$

где индексы берутся по модулю  $m$ . Очевидно, что  $F(r, m, 1) = F(r, m)$ .

Следующее утверждение является обобщением аналогичных результатов, полученных в [18] и [20] для групп  $F(2, m)$  и  $F(r, m)$  соответственно.

**Теорема 2** [22, Theorem]. *Пусть  $r$  четно,  $m$  нечетно и  $(m, r + 2k - 1) = 1$ . Тогда обобщенная группа Фибоначчи  $F(r, m, k)$  не реализуется как группа трехмерного гиперболического орбифолда конечного объема.*

Обсудим некоторые группы  $F(r, m, k)$ , не удовлетворяющие условиям теоремы 2. Предположим, что

$$m = r + 2k - 1. \tag{2.1}$$

Полагая в (2.1)  $k = 1$ , имеем  $m = r + 1$ . Соответствующие группы  $F(m - 1, m, 1)$  являются группами Фибоначчи  $F(m - 1, m)$  с циклическим представлением

$$F(m - 1, m) = \langle x_1, x_2, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \cdots x_{i+m-2} = x_{i+m-1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \rangle.$$

Группы с более общим циклическим представлением были рассмотрены в [23], где *обобщенными группами Нойвирта* (как обобщение групп Нойвирта из [24]) были названы группы

$$\Gamma_m^\ell = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \dots x_{i+m-2} = x_{i+m-1}^\ell, \quad i = 1, 2, \dots, n \rangle,$$

для  $m \geq 3$  и  $\ell \geq 1$ . При этом  $\Gamma_m^1 = F(m-1, m)$ .

**Предложение 1** [23, Theorem 3.1]. *Группы  $\Gamma_m^\ell$  являются фундаментальными группами расслоенных пространств Зейферта  $\Sigma_m^\ell$  со следующими параметрами:*

$$\Sigma_m^\ell = (0 \circ 0 \mid -1; \underbrace{(\ell+1, 1), (\ell+1, 1), \dots, (\ell+1, 1)}_{m \text{ times}}).$$

Полагая в (2.1)  $r = 2$ , получаем группы

$$F(2, 2k+1, k) = \langle x_1, \dots, x_{2k+1} \mid x_i x_{i+1} = x_{i+1+k}, \quad i = 1, \dots, 2k+1 \rangle.$$

Нетрудно видеть [22], что группы  $F(2, 2k+1, k)$  и группы Сирадски

$$S(2k+1) = S(2k+1, 3, 2) = \langle a_1, a_2, \dots, a_{2k+1} \mid a_i a_{i+2} = a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, 2k+1 \rangle$$

изоморфны при следующем соответствии порождающих:

$$\left( \begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_{2k} & x_{2k+1} \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} & a_{2k+1} & a_2 & \dots & a_{2k-2} & a_{2k} \end{array} \right).$$

В силу теоремы 1 это влечет, что группы  $F(2, 2k+1, k)$  являются фундаментальными группами трехмерных многообразий, получаемых как  $(k+1)$ -листное циклическое накрытие  $S^3$ , разветвленное над узлом трилистник.

Рассмотрим второе семейство групп из работы [21]. Группы  $H(r, m, k)$ ,  $r \geq 2$ ,  $m \geq 3$ ,  $k \geq 1$ , имеют циклическое представление

$$H(r, m, k) = \langle x_1, \dots, x_m \mid x_i x_{i+1} \dots x_{i+r-1} = x_{i+r} \dots x_{i+r-1+k}, \quad i = 1, \dots, m \rangle,$$

где индексы берутся по модулю  $m$ . Очевидно,  $H(r, m, 1) = F(r, m)$ . Обсудим геометрические свойства групп  $H(r, m, k)$ . Сравним эти группы с обобщенными группами Сирадски  $S(m, 2k-1, 2)$ :

$$S(m, 2k-1, 2) = \langle a_1, \dots, a_m \mid a_i a_{i+2} \dots a_{i+2k-2} = a_{i+1} a_{i+3} \dots a_{i+2k-3}, \quad i = 1 \dots n \rangle.$$

Нетрудно видеть [22], что группы  $H(k, 2k-1, k-1)$  и  $S(2k-1, 2k-1, 2)$  изоморфны при следующем соответствии порождающих:

$$\left( \begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_k & x_{k+1} & x_{k+2} & \dots & x_{2k-1} \\ a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \end{array} \right).$$

Из теоремы 1 следует, что при  $k \geq 2$  группа  $H(k, 2k-1, k-1) \cong S(2k-1, 2k-1, 2)$  является фундаментальной группой замкнутого трехмерного многообразия, которое может быть получено как циклическое  $(2k-1)$ -листное накрытие трехмерной сферы, разветвленное над  $T(2k-1, 2)$ , то есть многообразия Брискорна  $\mathcal{B}(2k-1, 2k-1, 2)$ .

## 2.5. Группы Джонсона — Мавдеслея

В работе [25] Д. Джонсон и Х. Мавдеслей определили класс групп с циклическим представлением

$$G_n(m, k) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid x_i x_{i+m} = x_{i+k}, \quad i = 1, 2, \dots, n \rangle.$$

Нетрудно убедиться, что этот класс содержит обсуждавшиеся выше группы Фибоначчи и группы Сирадски, а именно,  $G_n(1, 2) = F(2, n)$  и  $G_n(2, 1) = S(n, 3, 2)$ . Строение групп  $G_n(m, k)$  исследовалось в [17], а свойства групп  $G_n(m, 1)$  изучались в [26]. В работе [3] за исключением двух случаев получен ответ на вопрос о том, когда группы  $G_n(m, k)$  являются группами трехмерных многообразий. Исключительными случаями являются группы  $G_9(4, 1)$  и  $G_9(7, 1)$  для которых вопрос остается открытым.

### 3. Геометричность представлений групп

#### 3.1. Циклическое представление группы $S(2n, 3, 2)$ с $n$ порождающими

Как отмечено выше, группа Фибоначчи  $F(2, 2n)$ ,  $n \geq 2$ , является фундаментальной группой трехмерного многообразия, которое представляется как  $n$ -листное циклическое накрытие сферы  $S^3$ , разветвленное над узлом восьмерка. Это многообразие является сферическим при  $n = 2$ , евклидовым при  $n = 3$  и гиперболическим при  $n \geq 4$ . Накрытие соответствует симметрии порядка  $n$ , определенной на порождающих соответствием  $x_i \rightarrow x_{i+2}$ , а не симметрией порядка  $2n$ , определенной соответствием  $x_i \rightarrow x_{i+1}$  на порождающих  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$  группы  $F(2, 2n)$ . Как отмечено в [27], указанному  $n$ -листному накрытию соответствует  $n$ -циклическое представление

$$F(2, 2n) \cong G_n(y_1^{-1}y_2^2y_3^{-1}y_2) = \langle y_1, y_2, \dots, y_n \mid y_i^{-1}y_{i+1}^2y_{i+2}^{-1}y_{i+1} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n \rangle,$$

где  $y_i = x_{2i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . При этом соответствие  $\sum_i y_i^{k_i} \rightarrow \sum_i k_i t^i$  переводит определяющее слово  $y_0^{-1}y_1^2y_2^{-1}y_1$  в полином  $-(t^2 - 3t + 1)$ , эквивалентный полиному Александра узла восьмерка  $\Delta(t) = t^2 - 3t + 1$ .

Аналогично рассмотрим обобщенную группу Сирадски с четным числом порождающих  $S(2n, 3, 2)$ . Нетрудно видеть, что эта группа допускает циклическое представление с  $n$  порождающими. А именно,

$$\begin{aligned} S(2n, 3, 2) &= G_{2n}(x_1x_3x_2^{-1}) \\ &= \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} \mid x_i x_{i+2} = x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, 2n \rangle \\ &= \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} \mid x_{2j} x_{2j+2} = x_{2j+1}, \quad x_{2j+1} x_{2j+3} = x_{2j+2}, \quad j = 1, \dots, n \rangle \\ &= \langle x_2, x_4, \dots, x_{2n} \mid (x_{2j} x_{2j+2})(x_{2j+2} x_{2j+4}) = x_{2j+2}, \quad j = 1, \dots, n \rangle \\ &= \langle y_1, y_2, \dots, y_n \mid y_j y_{j+1}^2 y_{j+2} = y_{j+1}, \quad j = 1, \dots, n \rangle \\ &= G_n(y_1 y_2^2 y_3 y_2^{-1}). \end{aligned}$$

Из теоремы 1 следует, что группа  $S(2n, 3, 2)$  является фундаментальной группой трехмерного многообразия  $\mathcal{B}(2n, 3, 2)$ , которое представимо как  $2n$ -листное циклическое накрытие  $S^3$ , разветвленное над узлом трилистник, и при этом представление  $S(2n, 3, 2)$  соответствует спайну многообразия.

Естественно возникает вопрос, является ли *геометрическим* циклическое представление  $G_n(x_1 x_2^2 x_3 x_2^{-1})$ , т. е. соответствует ли оно спайну многообразия?

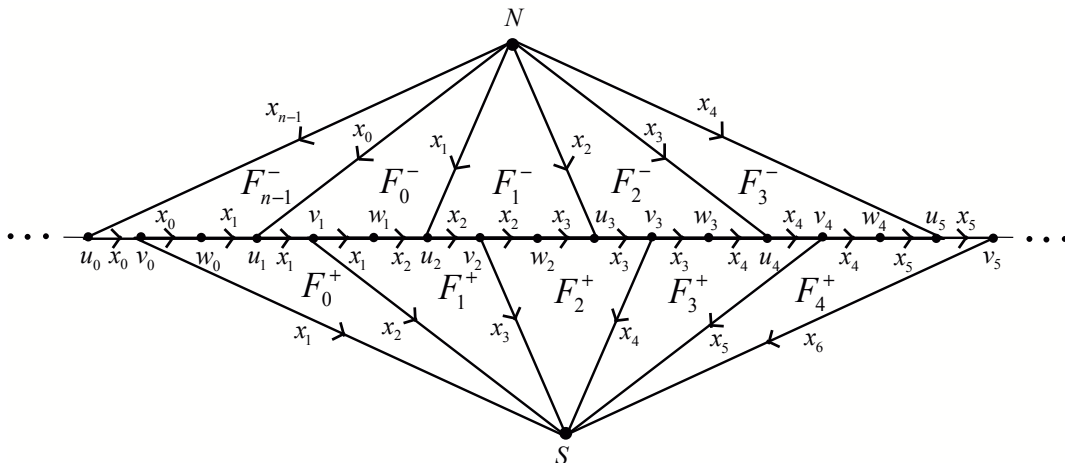


Рис. 1. Комплекс  $\mathcal{P}_n$ .

Положительно отвечая на этот вопрос, Дж. Хоуи и Г. Вильямс построили такой спайн в [3]. Для единообразия с обозначениями из [3] занумеруем порождающие следующим образом:  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ . Рассмотрим двумерный комплекс  $\mathcal{P}_n$ , изображенный на рис. 1. Он имеет  $2n$  двумерных клеток, каждая из которых является пятиугольником. Обозначим их через  $F_i^+, F_i^-, i = 0, \dots, n-1$ . Зададим на ребрах ориентацию и оснастим ребра метками  $x_0, x_2, \dots, x_{n-1}$ . Вершины обозначим через  $N, S, u_i, v_i, w_i$ , где  $i = 0, \dots, n-1$ . Поскольку  $\mathcal{P}_n$  является разбиением двумерной сферы на пятиугольники, далее мы будем называть его многогранником.

Зададим попарные отождествления  $F_i$  граней многогранника  $\mathcal{P}_n$ , полагая, что для каждого  $i = 0, \dots, n-1$  грани  $F_i^-$  и  $F_i^+$  отождествляются в соответствии с указанным порядком вершин:

$$F_i : F_i^- = (Nu_{i+1}v_{i+1}w_{i+1}u_{i+2}) \longrightarrow F_i^+ = (v_iw_iu_{i+1}v_{i+1}S).$$

Отождествление граней индуцирует разбиение множества ребер на классы эквивалентности. Например, в приведенных на рис. 1 обозначениях класс ребер с меткой  $x_3$  содержит ребра, которые мы опишем их начальными и конечными вершинами

$$(x_3) : [N, u_4] \xrightarrow{F_2} [v_2, S] \xrightarrow{F_1^-} [w_2, u_3] \xrightarrow{F_2^-} [u_3, v_3] \xrightarrow{F_2^-} [v_3, w_3] \xrightarrow{F_3^-} [N, u_4].$$

Имеет место следующее свойство.

**Теорема 3** [3, Theorem C]. *Циклическое представление  $G_n(x_0x_1^2x_2x_1^{-1})$  является геометрическим, то есть оно соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия.*

Построенный спайн  $\mathcal{P}_n$  имеет циклическую симметрию порядка  $n$ , восходящую к циклическому представлению  $G_n(x_0x_1^2x_2x_1^{-1})$ . Эта симметрия индуцирует циклическую симметрию порядка  $n$  на многообразии. Ниже мы опишем соответствующее фактор-пространство.

**Предложение 2.** *Для каждого  $n$  многообразие из теоремы 3 является разветвленным  $n$ -листным циклическим накрытием линзового пространства  $L(3, 1)$ .*

**Доказательство.** Обозначим замкнутое трехмерное многообразие, построенное по спайну  $\mathcal{P}_n$ , через  $\mathcal{S}(2n, 3, 2)$ . Для доказательства утверждения перейдем стандартным методом от описания многообразия  $\mathcal{S}(2n, 3, 2)$  через спайн  $\mathcal{P}_n$  к его представлению диаграммой Хегора. В результате получим диаграмму Хегора рода  $n$ , приведенную на рис. 2.

Эта диаграмма обладает вращательной симметрией порядка  $n$ , которая циклически переставляет диски:  $F_i^- \rightarrow F_{i+1}^-$  и  $F_i^+ \rightarrow F_{i+1}^+$ . Обозначим эту симметрию  $\rho$ , а ее ось вращения обозначим  $\ell$ . При факторизации по указанной симметрии получим трехмерный орбифолд, в котором образ оси вращения образует сингулярное множество. Применяя движение Зингера типа IV [28], приведенное на рис. 3, получаем каноническую диаграмму линзового пространства  $L(3, 1)$ . Таким образом, носителем орбифолда  $\mathcal{S}(2n, 3, 2)/\rho$  является линзовое пространство  $L(3, 1)$ . Следовательно, многообразие  $\mathcal{S}(2n, 3, 2)$  является разветвленным циклическим  $n$ -листным накрытием линзового пространства  $L(3, 1)$ . Утверждение доказано.

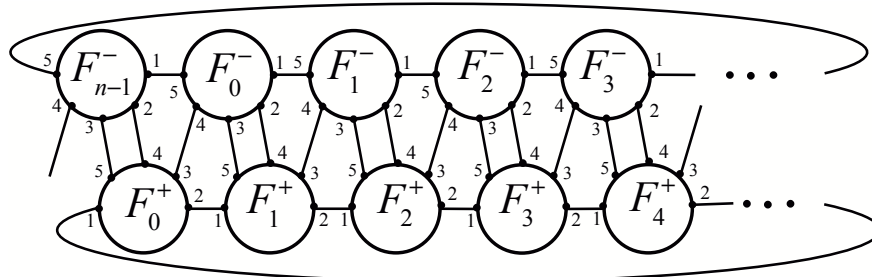


Рис. 2. Диаграмма Хегора многообразия  $\mathcal{S}(2n, 3, 2)$ .

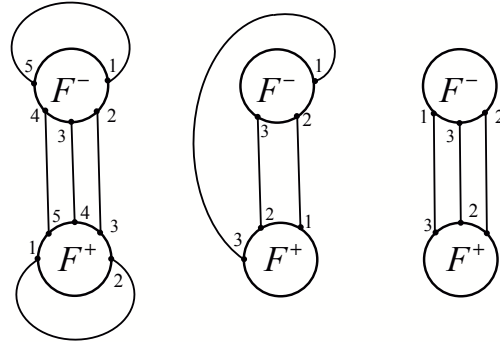


Рис. 3. Преобразования диаграммы Хегора многообразия  $\mathcal{S}(2n, 3, 2)/\rho$ .

### 3.2. Циклическое представление группы $S(2n, 5, 2)$ с $n$ порождающими

Рассмотрим теперь обобщенные группы Сирадски  $S(2n, 5, 2)$  с четным числом порождающих. От циклического представления с  $2n$  порождающими перейдем к циклическому представлению с  $n$  порождающими:

$$\begin{aligned}
 S(2n, 5, 2) &= G_{2n}(x_1 x_3 x_5 x_4^{-1} x_2^{-1}) \\
 &= \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} \mid x_{i+1} x_{i+3} x_{i+5} = x_{i+2} x_{i+4}, \quad i = 1, \dots, 2n \rangle \\
 &= \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} \mid x_{j+1} x_{j+3} x_{j+5} = x_{j+2} x_{j+4}, \\
 &\quad x_{j+2} x_{j+4} x_{j+6} = x_{j+3} x_{j+5}, \quad j = 2, 4, \dots, 2n \rangle \\
 &= \langle x_1, x_2, \dots, x_{2n} \mid x_{j+5} = (x_j x_{j+2} x_{j+4})^{-1} x_{j+2} x_{j+4}, \\
 &\quad x_j x_{j+2} x_{j+4} = x_{j+1} x_{j+3}, \quad j = 2, 4, \dots, 2n \rangle \\
 &= \langle x_2, x_4, \dots, x_{2n} \mid x_j x_{j+2} x_{j+4} (x_{j+2}^{-1} x_j^{-1} x_{j-2} x_j x_{j+2}) (x_j^{-1} x_{j-2}^{-1} x_{j-4} x_{j-2} x_j) = 1, \\
 &\quad j = 2, 4, \dots, 2n \rangle \\
 &= \langle y_1, y_2, \dots, y_n \mid y_i y_{i+1} y_{i+2} y_{i+1}^{-1} y_i^{-1} y_{i-1} y_{i+1} y_i^{-1} y_{i-1}^{-1} y_{i-2} y_{i-1} y_i = 1, \quad i = 1, \dots, n \rangle \\
 &= G_n(y_3 y_4 y_5 y_4^{-1} y_3^{-1} y_2 y_3 y_4 y_3^{-1} y_2^{-1} y_1 y_2 y_3) \\
 &= G_n(y_1 y_2 y_3 y_3 y_4 y_5 y_4^{-1} y_3^{-1} y_2 y_3 y_4 y_3^{-1} y_2^{-1}).
 \end{aligned}$$

Покажем, что полученное циклическое представление является геометрическим. В приведенном ниже утверждении для аналогии с теоремой 3 перенумеруем порождающие группы следующим образом:  $x_i = y_{i+1}$ , где  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ .

**Теорема 4.** *Циклическое представление  $G_n(x_0 x_1 x_2 x_2 x_3 x_4 x_3^{-1} x_2^{-1} x_1 x_2 x_3 x_2^{-1} x_1^{-1})$  является геометрическим, то есть оно соответствует спайну замкнутого трехмерного многообразия.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о** будет состоять в описании двумерного комплекса  $Q_n$ , имеющего  $2n$  двумерных клеток. При этом каждая двумерная клетка является 13-угольником, а на одномерных клетках расставлены метки  $x_i^{\pm 1}$  таким образом, чтобы чтение меток вдоль границ 13-угольников давало определяющее соотношение группы. При этом двумерные клетки разбиваются на пары противоположно ориентированных и соответствующих одному и тому же слову.

Поскольку для рассматриваемого циклического представления определяющее слово является достаточно большим, мы продемонстрируем строение двумерного комплекса на примере. Рассмотрим комплекс  $Q_4$ , как изображено на рис. 4. Он имеет восемь двумерных граней. Мы подразумеваем, что ребра левой и правой границ циклически отождествлены и что вертикальные линии, уходящие вверх, встречаются в одной точке и, аналогично, вертикальные линии,

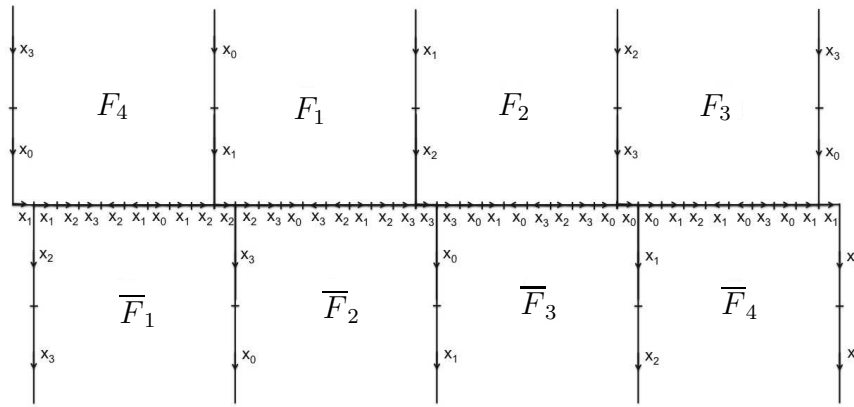


Рис. 4. Двумерный комплекс  $Q_4$ .

уходящие вниз, также встречаются в одной точке. Комплекс  $Q_4$  соответствует рассматриваемому циклическому соотношению для  $n = 4$ . В этом случае группа имеет четыре порождающих, которые нам удобно обозначить  $x_0, x_1, x_2$  и  $x_3$ , и четыре определяющих соотношения, которые мы перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_0x_1x_2x_2x_3x_0x_3^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1} &= 1, \\ x_1x_2x_3x_3x_0x_1x_0^{-1}x_3^{-1}x_2x_3x_0x_3^{-1}x_2^{-1} &= 1, \\ x_2x_3x_0x_0x_1x_2x_1^{-1}x_0^{-1}x_3x_0x_1x_0^{-1}x_3^{-1} &= 1, \\ x_3x_0x_1x_1x_2x_3x_2^{-1}x_1^{-1}x_0x_1x_2x_1^{-1}x_0^{-1} &= 1. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что указанные слова читаются вдоль границ двумерных клеток на рис. 4. В самом деле, первое слово читается вдоль границы клетки  $F_1$ , если ориентировать ее против часовой стрелки, и также вдоль границы клетки  $\overline{F}_1$ , если ориентировать ее по часовой стрелке. Оставшиеся три соотношения аналогичным образом соответствуют парам клеток  $F_2$  и  $\overline{F}_2$ ,  $F_3$  и  $\overline{F}_3$ ,  $F_4$  и  $\overline{F}_4$ .

Расставленные на ребрах метки и ориентация ребер задают попарные отождествления указанных двумерных клеток комплекса  $Q_4$ , которые в свою очередь индуцируют отождествления одномерных клеток и нульмерных клеток. В результате получим трехмерное замкнутое псевдомногообразие. Как нетрудно проверить, его Эйлера характеристика равна нулю. Следовательно, комплекс  $Q_4$  является спайном замкнутого трехмерного многообразия [29]. Приведенная конструкция комплекса и все рассуждения с очевидностью обобщаются для произвольного  $n$ . Теорема доказана.

Обозначим замкнутое трехмерное многообразие, построенное по двумерному комплексу  $Q_n$ , через  $\mathcal{S}(2n, 5, 2)$ . Для малых значений  $n$  многообразия  $\mathcal{S}(2n, 5, 2)$  могут быть классифицированы с помощью “Распознавателя трехмерных многообразий” [7]. Вычисления, проведенные нами для случая  $n = 4$ , показали, что  $\mathcal{S}(8, 5, 2)$  является многообразием Зейферта  $(S^2, (4, 1), (5, 2), (5, 2), (1, -1))$ .

По аналогии с предложением 2 имеет место следующий результат.

**Предложение 3.** *Для каждого  $n$  многообразие из теоремы 4 является разветвленным  $n$ -листным циклическим накрытием линзового пространства  $L(5, 1)$ .*

**Доказательство.** На рис. 5 приведена диаграмма Хегора рода четыре многообразия  $\mathcal{S}(8, 5, 2)$ , полученная из комплекса  $Q_4$ . По построению эта диаграмма обладает вращательной симметрией  $\rho$  четвертого порядка.

Аналогично доказательству предложения 2 нетрудно видеть, что фактор-пространством  $\mathcal{S}(8, 5, 2)/\rho$  многообразия  $\mathcal{S}(8, 5, 2)$  по действию этой симметрии является орбиформ с носите-

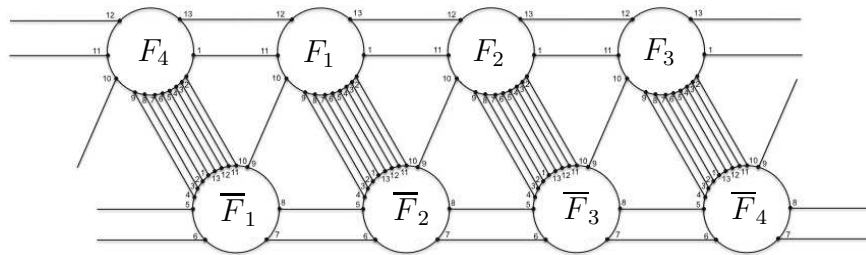


Рис. 5. Диаграмма Хегора для случая  $n = 4$ .

лем линзовое пространство  $L(5, 1)$ . Рассуждения для произвольного  $n$  проводятся аналогично. Утверждение доказано.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brieskorn E.** Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten // *Invent. Math.* 1966. Vol. 2, no. 1. P. 1–14. doi: /10.1007/BF01403388. Рус. пер.: Е. Брискорн. Примеры из дифференциальной топологии многообразий с особенностями // *Математика.* 1967. Vol. 11, № 6. С. 133–144.
2. **Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A.** On cyclic branched coverings of torus knots // *J. Geometry.* 1999. Vol. 64. P. 55–66. doi: 10.1007/BF01229212.
3. **Howie J., Williams G.** Fibonacci type presentations and 3-manifolds // *Topology Appl.* 2017. Vol. 215. P. 24–34. doi: 10.1016/j.topol.2016.10.012.
4. **Hempel J.** 3-manifolds. Princeton; N.J.: Princeton University Press. 1976. 195 p. (*Annals Math. Studies*; vol. 86). ISBN 978-0-8218-3695-8.
5. **Matveev S.** Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. 2nd ed. Berlin: Springer, 2007. 492 p. (*Algorithms Comput. Math.*; vol. 9). doi: 10.1007/978-3-540-45899-9.
6. **Матвеев С.В.** Табулирование трехмерных многообразий // *Успехи мат. наук.* 2005. Vol. 60, no. 4. P. 97–122.
7. Three-manifold Recognizer / The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University.
8. **Weber C., Seifert H.** Die Beiden Dodekaederäume // *Math. Z.* 1933. Vol. 37. 237–253. doi: 10.1007/BF01474572.
9. **Матвеев С.В., Фоменко А.Т.** Изоэнергетические поверхности гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий // *Успехи мат. наук.* 1988. Vol. 43, № 1. P. 5–22.
10. **Weeks J.** Hyperbolic structures on 3-manifolds. Thesis (Ph.D.)—Princeton University. Princeton: Princeton University, 1985. 83 p.
11. **Mednykh A., Vesnin A.** Visualization of the isometry group action on the Fomenko–Matveev–Weeks manifold // *J. Lie Theory.* 1998. Vol. 8, no. 1. 1998. P. 51–66.
12. **Helling H., Kim A., Mennicke J.** A geometric study of Fibonacci groups // *J. Lie Theory.* 1998. Vol. 8, no. 4. P. 1–23.
13. **Sieradski A.J.** Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups // *Invent. Math.* 1986. Vol. 84. P. 121–139.
14. **Milnor J.** Singular points of complex hypersurfaces. Princeton: Princeton University Press and Tokyo University Press, 1968. 130 p. (*Annals of Mathematics Studies*). ISBN: 9781400881819.  
Рус. пер.: Дж. Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971. 126 с.
15. **Milnor J.** On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $M(p, q, r)$  // *Knots, Groups and 3-Manifolds* / ed. L. P. Neuwirth. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1975. P. 175–225. (*Ann. of Math. Studies*; vol. 84).
16. **Johnson D.** Topics in the theory of group presentations. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. 320 p. (*London Math. Soc. Lect. Note Ser.*; vol. 42). ISBN: 978-0-521-23108-4.
17. **Бардаков В.Г., Веснин А.Ю.** Об обобщении групп Фибоначчи // *Алгебра и логика.* 2003. Vol. 42, no. 2. P. 131–160.

18. **Maclachlan C.** Generalizations of Fibonacci numbers, groups and manifolds // Combinatorial and Geometric Group Theory (Edinburgh, 1993). Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. P. 233–238. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 204). ISBN: 0521465958.
19. **Johnson D.J., Wamsley J.W., Wright D.** The Fibonacci groups // Proc. London Math. Soc. 1974. Vol. s3-29, no. 4. P. 577–592. doi: 10.1112/plms/s3-29.4.577.
20. **Szczepanski A.** High dimensional knot groups and HNN extensions of the Fibonacci groups // J. Knot Theory Ramifications. 1998. Vol. 7, no. 4. P. 503–508. doi: 10.1142/S0218216598000267.
21. **Campbell C.M., Robertson E.F.** A class of finitely presented groups of Fibonacci type // J. London Math. Soc. 1975. Vol. s2-11, no. 2. P. 249–255. doi: 10.1112/jlms/s2-11.2.249.
22. **Szczepanski A., Vesnin A.** On generalized Fibonacci groups with odd number of generators // Communications in Algebra. 2000. Vol. 28, no. 2. P. 959–965. doi: 10.1080/00927870008826872.
23. **Szczepanski A., Vesnin A.** Generalized Neuwirth Groups and Seifert fibered manifolds // Algebra Colloquium. 2000. Vol. 7, no. 3. P. 295–303. doi: 10.1007/s10011-000-0295-7.
24. **Neuwirth L.** An algorithm for the construction of 3-manifolds from 2-complexes // Proc. Camb. Philos. Soc. 1968. Vol. 64. P. 603–613. doi: 10.1017/S0305004100043279.
25. **Johnson D.L., Mawdesley H.** Some groups of Fibonacci type // J. Aust. Math. Soc. 1975. Vol. 20, no. 2. P. 199–204. doi: 10.1017/S1446788700020498.
26. **Gilbert N., Howie J.** LOG groups and cyclically presented groups // J. Algebra. 1995. Vol. 174, no. 1. P. 118–131. doi: 10.1006/jabr.1995.1119.
27. **Kim A.C., Vesnin A.** Cyclically presented groups and Takahashi manifolds // Analysis of discrete groups, II (Kyoto, 1996). RIMS Kokyuroku No. 1022. 1997. P. 200–212.
28. **Singer J.** Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 35, no. 1. P. 88–111. doi: 10.1090/S0002-9947-1933-1501673-5.
29. **Зейферт Г., Трельфалль В.** Топология. М.: Изд-во ОНТИ, 1938. 400 с.

Веснин Андрей Юрьевич

Поступила 07.08.2017

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

зав. лабораторией

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

профессор

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

e-mail: vesnin@math.nsc.ru

Козловская Татьяна Анатольевна

канд. физ.-мат. наук, доцент

Магаданский институт экономики, г. Магадан

e-mail: konus\_magadan@mail.ru

## REFERENCES

1. Brieskorn E. Beispiele zur Differentialtopologie von Singularitäten. *Invent. Math.*, 1966, vol. 2, no. 1, pp. 1–14. doi: /10.1007/BF01403388.
2. Cavicchioli A., Hegenbarth F., Kim A. On cyclic branched coverings of torus knots. *J. Geometry*, 1999, vol. 64, pp. 55–66. doi: 10.1007/BF01229212.
3. Howie J., Williams G. Fibonacci type presentations and 3-manifolds, *Topology Appl.*, 2017, vol. 215, pp. 24–34. doi: 10.1016/j.topol.2016.10.012.
4. Hempel J. *3-manifolds*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1976, Ser. Annals of Math. Studies, vol. 86, 195 p. ISBN 978-0-8218-3695-8.
5. Matveev S. *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*, 2nd ed., Berlin: Springer, 2007, Ser. Algorithms Comput. Math., vol. 9, 492 pp. doi: 10.1007/978-3-540-45899-9.
6. Matveev S.V. Tabulation of three-dimensional manifolds. *Russian Math. Surveys*, 2005, vol. 60, no. 4, pp. 673–698. doi: 10.1070/RM2005v060n04ABEH003673.
7. *Three-manifold Recognizer*. The computer program developed by the research group of S. Matveev in the department of computer topology and algebra of Chelyabinsk State University.
8. Weber C., Seifert H. Die Beiden Dodekaederäume. *Math. Z.*, 1933, vol. 37, pp. 237–253. doi: 10.1007/BF01474572.



9. Matveev S.V., Fomenko A.T. Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds. *Russian Math. Surveys*, 1988, vol. 43, no. 1, pp. 3–24. doi: 10.1070/RM1988v043n01ABEH001554.
10. Weeks J. *Hyperbolic structures on 3-manifolds*. Thesis (Ph.D.)—Princeton University, Princeton: Princeton University, 1985, 83 p.
11. Mednykh A., Vesnin A. Visualization of the isometry group action on the Fomenko–Matveev–Weeks manifold. *J. Lie Theory*, 1998, vol. 8, no. 1, pp. 51–66.
12. Helling H., Kim A., Mennicke J. A geometric study of Fibonacci groups. *J. Lie Theory*, 1998, vol. 8, no. 4, pp. 1–23.
13. Sieradski A.J. Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups. *Invent. Math.*, 1986, vol. 84, pp. 121–139.
14. Milnor J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. Princeton: Princeton University Press and Tokyo University Press, 1968. 130 p. (Annals of Mathematics Studies). ISBN: 9781400881819. Translated to Russian under the title Milnor Dzh. *Osobyе tochki kompleksnykh giperpoverkhnostei*. Moscow, Mir Publ., 1971. 126 p.
15. Milnor J. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds  $M(p, q, r)$ . In: *Knots, Groups and 3-Manifolds*. (Neuwirth L.P. Ed.), *Ann. of Math. Studies*, vol. 84, Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1975, pp. 175–225.
16. Johnson D. *Topics in the theory of group presentations*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 42, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1980. 320 p. ISBN: 978-0-521-23108-4.
17. Bardakov V.G., Vesnin A.Yu. A Generalization of Fibonacci Groups. *Algebra and Logic*, 2003, vol. 42, no. 2, pp. 73–91. doi: 10.1023/A:1023346206070.
18. MacLachlan C. *Generalizations of Fibonacci numbers, groups and manifolds*. In: *Combinatorial and Geometric Group Theory* (Duncan A.J., Gilbert N.D., Howie J. eds.), London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 204, 1995, pp. 233–238. ISBN: 0521465958.
19. Johnson D.J., Wamsley J.W., Wright D. The Fibonacci groups. *Proc. London Math. Soc.*, 1974, vol. 29, pp. 577–592. doi: 10.1112/plms/s3-29.4.577.
20. Szczepanski A. High dimensional knot groups and HNN extensions of the Fibonacci groups. *J. Knot Theory Ramifications*, 1998, vol. 7, pp. 503–508. doi: 10.1142/S0218216598000267.
21. Campbell C.M., Robertson E.F. A class of finitely presented groups of Fibonacci type. *J. London Math. Soc.*, 1975, vol. 11, pp. 249–255. doi: 10.1112/jlms/s2-11.2.249.
22. Szczepanski A., Vesnin A. On generalized Fibonacci groups with odd number of generators. *Communications in Algebra*, 2000, vol. 28, no. 2, pp. 959–965. doi: 10.1080/00927870008826872.
23. Szczepanski A., Vesnin A. Generalized Neuwirth Groups and Seifert fibered manifolds, *Algebra Colloquium*, 2000, vol. 7, no. 3, pp. 295–303. doi: 10.1007/s10011-000-0295-7.
24. Neuwirth L. An algorithm for the construction of 3-manifolds from 2-complexes. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1968, vol. 64, pp. 603–613. doi: 10.1017/S0305004100043279.
25. Johnson D.L., Mawdesley H. Some groups of Fibonacci type. *J. Aust. Math. Soc.*, 1975, vol. 20, pp. 199–204. doi: 10.1017/S1446788700020498.
26. Gilbert N., Howie J. LOG groups and cyclically presented groups. *J. Algebra*, 1995, vol. 174, no. 1, pp. 118–131. doi: 10.1006/jabr.1995.1119.
27. Kim A.C., Vesnin A. Cyclically presented groups and Takahashi manifolds. Analysis of discrete groups, II (Kyoto, 1996), *RIMS Kokyuroku*, 1997, vol. 1022, pp. 200–212.
28. Singer J. Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1933, vol. 35, no. 1, pp. 88–111. doi: 10.1090/S0002-9947-1933-1501673-5.
29. Seifert H., Threlfall W. *Lehrbuch Der Topologie*. Chelsea Publishing, New York. 1934, 353 p. Translated from German to Russian under the title Zeifert G., Trel'fall' V. *Topologiya* [Topology]. ONTI, 1938, 400 p.

The paper was received by the Editorial Office on August 7, 2017.

*Andrei Yur'evich Vesnin*, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630090 Russia; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: vesnin@math.nsc.ru.

*Tat'yana Anatol'evna Kozlovskaya*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Magadan Institute of Economics, Magadan, 685000 Russia, e-mail: konus\_magadan@mail.ru.

УДК 512.544

## О СТРУКТУРЕ ФИНИТАРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ

О. Ю. Дашкова, М. А. Салим, О. А. Шпырко

Пусть  $FL_\nu(K)$  — финитарная линейная группа степени  $\nu$  над кольцом  $K$ , где  $K$  — ассоциативное кольцо с единицей. В работе изучаются периодические подгруппы группы  $FL_\nu(K)$  в случаях, когда  $K$  — целостное кольцо (теорема 1) и коммутативное нетерово кольцо (теорема 2). В этих случаях доказано, что периодические подгруппы группы  $FL_\nu(K)$  локально конечны, и описана их нормальная структура. В теореме 3 описано нормальное строение конечно порожденных разрешимых подгрупп группы  $FL_\nu(K)$  в случаях, когда  $K$  — целостное кольцо, коммутативное нетерово кольцо и произвольное коммутативное кольцо. Показано, в последнем случае эта структура является наиболее сложной.

Ключевые слова: финитарная линейная группа, коммутативное нетерово кольцо, локально конечная группа.

**O. Yu. Dashkova, M. A. Salim, O. A. Shpyrko. On the structure of a finitary linear group.**

Let  $FL_\nu(K)$  be a finitary linear group of degree  $\nu$  over a ring  $K$ , and let  $K$  be an associative ring with the unit. We study periodic subgroups of  $FL_\nu(K)$  in the cases when  $K$  is an integral ring (Theorem 1) and a commutative Noetherian ring (Theorem 2). In both cases we prove that the periodic subgroups of  $FL_\nu(K)$  are locally finite and describe their normal structure. In Theorem 3 we describe the structure of finitely generated solvable subgroups of  $FL_\nu(K)$  if  $K$  is an integral ring, a commutative Noetherian ring, or an arbitrary commutative ring. We show that this structure is most complicated in the latter case.

Keywords: finitary linear group, commutative Noetherian ring, locally finite group.

**MSC:** 20F50

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-4-98-104

Пусть  $V$  — векторное пространство над полем  $F$ . Подгруппы группы  $GL(F, V)$  всех автоморфизмов пространства  $V$  называются *линейными группами*. Если  $V$  имеет конечную размерность над  $F$ , то  $GL(F, V)$  можно рассматривать как группу невырожденных  $(n \times n)$ -матриц, где  $n = \dim_F V$ . Эту группу принято обозначать через  $GL_n(F)$ . Конечномерные линейные группы играют важную роль в различных областях математики, физики и естественных наук и исследовались достаточно много. Если же  $V$  — бесконечномерное пространство над  $F$ , ситуация кардинально меняется. Исследование данного класса групп требует дополнительных ограничений. Этот класс групп интенсивно изучался в последние десятилетия. Следует отметить, что в данном направлении был получен ряд интересных результатов. Так в [1] авторами описана структура бесконечномерной линейной группы  $G$ , такой что фактор-группа  $G/Z$  конечна, где  $Z$  — верхний гиперцентр  $G$ . В [2] исследовались бесконечномерные линейные группы с ограничениями на подгруппы фундаментального идеала данных групп. Также изучались бесконечномерные линейные группы со слабым условием минимальности для некоторых подгрупп [3], бесконечномерные линейные группы с ранговыми ограничениями [4] и бесконечномерные линейные группы с условием минимальности и условием максимальности для заданного класса подгрупп [5; 6]. Бесконечномерные линейные группы с ограничениями на некоторые системы подгрупп исследовались в [7–9].

Другим важным направлением в алгебре является изучение группы  $GL_n(K)$  невырожденных  $(n \times n)$ -матриц, где  $K$  — ассоциативное кольцо с единицей. Ю.И. Мерзляков [10] рассматривал финитарные линейные группы степени  $\nu$  над кольцом  $K$ . Пусть  $K$  — ассоциативное кольцо с единицей,  $\nu$  — линейно упорядоченное множество с порядком  $\leq$ ,  $A$  — матрица

степени  $\nu$  над  $K$  с элементами  $m_{ij}(A)$ ,  $i \in \nu, j \in \nu$ . Рассматриваются всевозможные подмножества  $\nu' \subseteq \nu$  такие, что вне  $\nu' \times \nu'$  матрица  $A$  совпадает с единичной. Пересечение всех подмножеств  $\nu'$  с этим свойством само обладает данным свойством и поэтому является наименьшим подмножеством с этим свойством. Это множество называется *носителем матрицы*  $A$  и обозначается через  $\text{supp}(A)$ . Матрицы с конечными носителями называются *почти единичными* или *финитарными*. Финитарные матрицы  $A$  и  $B$  умножаются по обычному правилу  $m_{ij}(AB) = \sum_k m_{ik}(A)m_{kj}(B)$ . Сумма в правой части равенства содержит лишь конечное число ненулевых элементов. Следовательно,  $\text{supp}(AB) \subseteq \text{supp}(A) \cup \text{supp}(B)$ . Если матрица  $A$  обратима, то  $\text{supp}(A^{-1}) = \text{supp}(A)$ . Поэтому множество  $FL_\nu(K)$  всех обратимых финитарных матриц степени  $\nu$  над кольцом  $K$  является группой. Эта группа называется *финитарной линейной группой степени  $\nu$  над кольцом  $K$* . *Финитарной унитарной группой степени  $\nu$  над кольцом  $K$*  называется группа  $UT_\nu(K)$  всех финитарных матриц  $A$  степени  $\nu$  над  $K$  с дополнительным условием унитарности  $m_{ij}(A) = \delta_{ij}$  при  $i \geq j$ .

Исследование группы  $FL_\nu(K)$  было начато В. М. Левчуком в [11]. Ю. И. Мерзляковым в [10] было установлено, что ни для какого кольца  $K$  с единицей и ни для какого бесконечного линейно упорядоченного множества  $\nu$  финитарная унитарная группа  $UT_\nu(K)$  не удовлетворяет нормализаторному условию.

В настоящей работе продолжено изучение группы  $FL_\nu(K)$ . Периодические подгруппы конечномерной линейной группы локально конечны (см. [12, гл. 9]). В связи с этим естественно возникает вопрос о структуре периодических подгрупп группы  $FL_\nu(K)$ . Авторы изучают периодические подгруппы группы  $FL_\nu(K)$  в случаях, когда  $K$  — целостное кольцо (теорема 1) и  $K$  — коммутативное нетерово кольцо (теорема 2). Также авторы исследуют структуру конечно порожденных разрешимых подгрупп группы  $FL_\nu(K)$ , если  $K$  — целостное кольцо, коммутативное нетерово кольцо, а также произвольное коммутативное кольцо (теорема 3). Основными результатами работы являются теоремы 1–3.

При исследовании данного класса групп важную роль играют свойства групп автоморфизмов конечно порожденных модулей над коммутативными кольцами [12, гл. 13]. Напомним, что группа  $G$  называется *квазилинейной*, если  $G$  изоморфна подгруппе прямого произведения конечно числа конечномерных линейных групп [12, с. 186].

Доказательства основных теорем данной работы опираются на следующие два утверждения.

**Утверждение 1** [12, теорема 13.3]. *Пусть  $\mathbf{R}$  — коммутативное нетерово кольцо и  $M$  — конечно порожденный  $\mathbf{R}$ -модуль. Тогда группа автоморфизмов  $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(M)$  модуля  $M$  содержит нормальную подгруппу  $U$ , стабилизирующую конечный ряд подмодулей  $M$  и такую, что фактор-группа  $\text{Aut}_{\mathbf{R}}(M)/U$  квазилинейна. В частности,  $U$  унитарна и нильпотентна (как абстрактная группа).*

**Утверждение 2** [12, теорема 13.5]. *Пусть  $\mathbf{R}$  — коммутативное кольцо,  $M$  — конечно порожденный  $\mathbf{R}$ -модуль и  $G = \text{Aut}_{\mathbf{R}}(M)$ . Если  $\mathbf{R}$ -модуль  $M$  может быть порожден  $t$  элементами, то группа  $G$  содержит нормальную подгруппу  $N$  такую, что фактор-группа  $G/N$  вкладывается в декартово произведение линейных групп степени  $f \leq \left\lceil \frac{1}{2}(t^2 + 1) \right\rceil$  и  $N$  унитарна, локально нильпотентна и гиперабелева. Если  $M$  — свободный  $\mathbf{R}$ -модуль, то можно положить  $f = t$ , и тогда нильрадикал  $\mathfrak{n}$  кольца  $\mathbf{R}$  нильпотентен, и поэтому подгруппа  $N$  нильпотентна.*

Пусть  $A = \bigoplus_{\alpha=1}^{\nu} A_{\alpha}$ , если  $\nu$  — предельное порядковое число, и  $A = \bigoplus_{\alpha < \nu} A_{\alpha}$ , если  $\nu$  — предельное порядковое число, где для любого порядкового числа  $\alpha$  группа  $A_{\alpha}$  изоморфна аддитивной группе кольца  $K$ . Далее группу  $A$  будем рассматривать как  $KG$ -модуль, где  $G \leq FL_\nu(K)$ . Всюду полагаем, что  $G \neq C_G(A)$ .

**Лемма.** *Пусть  $B$  —  $KG$ -модуль,  $G$  — конечно порожденная подгруппа группы  $FL_\nu(K)$  и  $K$  — ассоциативное кольцо с единицей. Тогда  $G$  содержит нормальную абелеву подгруппу  $L$*

такую, что фактор-группа  $G/L$  изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов конечно порожденного модуля над кольцом  $K$ .

**Доказательство.** Пусть  $G = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ , где  $g_1, g_2, \dots, g_n$  — некоторые элементы группы  $G$  и  $\nu' = \text{supp}(g_1) \cup \text{supp}(g_2) \cup \dots \cup \text{supp}(g_n)$ . Ввиду строения элементов группы  $FL_{\nu'}(K)$  множество  $\nu'$  конечно. Отметим, что для любого элемента  $g \in G$  имеет место включение  $\text{supp}(g) \subseteq \nu'$ . Следовательно,  $G$  изоморфна некоторой подгруппе группы  $GL_{\nu'}(K)$ . Пусть  $B = \bigoplus_{i=1}^{\nu'} A_i$ , где для любого номера  $i$  группа  $A_i$  изоморфна аддитивной группе кольца  $K$ . Тогда  $B$  можно рассматривать как  $KG$ -модуль. Поскольку  $G \neq C_G(A)$ , то  $G \neq C_G(B)$ .

Пусть  $C = C_B(G)$ . Тогда  $B$  имеет ряд  $KG$ -подмодулей  $\langle 0 \rangle \leq C \leq B$ . Так как  $G \leq C_G(C)$ , то фактор-группа  $G/C_G(C)$  тривиальна. Пусть теперь  $L = C_G(C) \cap C_G(B/C)$ . Каждый элемент подгруппы  $L$  действует тривиально на каждом факторе ряда  $\langle 0 \rangle \leq C \leq B$ . По теореме Калужнина [13, с. 144] подгруппа  $L$  абелева. По теореме Ремака  $G/L \leq G/C_G(C) \times G/C_G(B/C)$ . Отсюда ввиду тривиальности группы  $G/C_G(C)$  вытекает, что фактор-группа  $G/L$  изоморфна некоторой подгруппе группы  $G/C_G(B/C)$ . Так как множество  $\nu'$  конечно,  $B$  можно рассматривать как конечно порожденный  $K$ -модуль. Следовательно,  $B/C$  также является конечно порожденным  $K$ -модулем, и поэтому  $G/L$  изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов конечно порожденного модуля  $B/C$  над кольцом  $K$ .  $\square$

**Теорема 1.** Если  $G$  — периодическая подгруппа  $FL_{\nu'}(K)$ , где  $K$  — целостное кольцо, то группа  $G$  локально конечна. Если множество  $\nu$  счетно, то  $G = \cup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ , где  $G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_i \leq \dots$ , и справедливы следующие утверждения:

- (1)  $G_i$  содержит нормальную нильпотентную подгруппу  $N_i$  такую, что фактор-группа  $G_i/N_i$  счетна для любого  $i \in \mathbb{N}$ ;
- (2)  $\prod_{i=1}^{\infty} N_i$  — подгруппа группы  $G$ ;
- (3) фактор-группа  $N_1 N_2 \dots N_i / N_i$  счетна для любого  $i \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Пусть  $g_1, g_2, \dots, g_n$  — некоторые элементы группы  $G$  и  $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ ,  $\nu' = \text{supp}(g_1) \cup \text{supp}(g_2) \cup \dots \cup \text{supp}(g_n)$ . Как и в лемме, устанавливаем, что  $H$  изоморфна некоторой подгруппе группы  $GL_{\nu'}(K)$ . Поскольку  $K$  — целостное кольцо, то  $K$  вкладывается в некоторое поле  $F$ . Отсюда вытекает, что  $H$  изоморфна некоторой подгруппе линейной группы  $GL_{\nu'}(F)$ . По [12, теорема 9.1 (i)] периодические подгруппы  $GL_{\nu'}(F)$  локально конечны, следовательно, подгруппа  $H$  конечна, и поэтому  $G$  — локально конечная группа.

Пусть теперь множество  $\nu$  счетно,  $i \in \mathbb{N}$  и  $G_i$  — наибольшая подгруппа группы  $G$  такая, что для любого элемента  $g \in G_i$  выполняется включение  $\text{supp}(g) \subseteq \{1, 2, \dots, i\}$ . Тогда  $G = \cup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ , где  $G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_i \leq \dots$ . По [12, теореме 9.5] группа  $G_i$  содержит нормальную нильпотентную подгруппу  $N_i$  такую, что фактор-группа  $G_i/N_i$  счетна. Тем самым п. (1) доказан.

Подгруппа  $N_2$  нормальна в  $G_2$ , следовательно,  $N_1 N_2$  — подгруппа в  $G_2$ . Подгруппа  $N_3$  нормальна в  $G_3$ , поэтому  $N_1 N_2 N_3$  — подгруппа в  $G_3$ . Продолжив наши рассуждения, на  $i$ -м шаге получим подгруппу  $N_1 N_2 \dots N_i$  группы  $G_i$ . Тем самым мы построили возрастающий ряд групп  $N_1 \leq N_1 N_2 \leq \dots \leq N_1 N_2 \dots N_i \leq \dots$ . Отсюда вытекает, что  $\langle N_1, N_2, \dots, N_i, \dots \rangle = \prod_{i=1}^{\infty} N_i$ . Справедливость п. (2) установлена.

Так как фактор-группа  $G_i/N_i$  счетна для любого  $i \in \mathbb{N}$ , то и ее подгруппа  $N_1 N_2 \dots N_i / N_i$  счетна для любого  $i \in \mathbb{N}$ , и тем самым п. (3) доказан.  $\square$

**Теорема 2.** Если  $G$  — периодическая подгруппа  $FL_{\nu'}(K)$ , где  $K$  — коммутативное нетерово кольцо, то группа  $G$  локально конечна. Если множество  $\nu$  счетно, то  $G = \cup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ , где  $G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_i \leq \dots$ , и справедливы следующие утверждения:

- (1)  $G_i$  имеет ряд нормальных подгрупп  $L_i \leq M_i \leq N_i \leq G_i$ , где для любого  $i \in \mathbb{N}$  подгруппа  $L_i$  абелева, фактор-группы  $M_i/L_i$  и  $N_i/M_i$  нильпотентны,  $G_i/N_i$  счетна;
- (2)  $\prod_{i=1}^{\infty} N_i$  — подгруппа группы  $G$ ;
- (3) фактор-группа  $N_1 N_2 \dots N_i / N_i$  счетна для любого  $i \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Пусть  $g_1, g_2, \dots, g_n$  — некоторые элементы группы  $G$  и  $H = \langle g_1, g_2, \dots, g_n \rangle$ ,  $\nu' = \text{supp}(g_1) \cup \text{supp}(g_2) \cup \dots \cup \text{supp}(g_n)$ . Как и в лемме выше, устанавливаем, что множество  $\nu'$  конечно и подгруппа  $H$  изоморфна некоторой подгруппе группы  $GL_{\nu'}(K)$ . Так как  $G \neq C_G(A)$ , достаточно рассмотреть случай, когда  $H \neq C_H(A)$ .

Пусть  $B = \bigoplus_{j=1}^{\nu'} A_j$ , где для любого  $j$  группа  $A_j$  изоморфна аддитивной группе кольца  $K$ . Тогда  $B$  можно рассматривать как  $KG$ -модуль. По лемме группа  $H$  содержит нормальную абелеву подгруппу  $L$  такую, что фактор-группа  $H/L$  изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов конечно порожденного модуля над кольцом  $K$ . Тогда по утверждению 1 фактор-группа  $H/L$  является расширением нильпотентной группы при помощи квазилинейной группы. Поскольку периодические линейные группы локально конечны (см. [12, теорема 9.1(i)]), то и периодические квазилинейные группы локально конечны. Отсюда с учетом теоремы Шмидта [14, § 53] вытекает, что фактор-группа  $H/L$  конечна и поэтому конечна подгруппа  $H$ . Следовательно,  $G$  — локально конечная группа.

Как и в теореме 1, устанавливаем, что если множество  $\nu$  счетно, то  $G = \cup_{i \in \mathbb{N}} G_i$ , где  $G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_i \leq \dots$ . Отсюда с учетом леммы и утверждения 1 следует, что группа  $G_i$  обладает нормальной абелевой подгруппой  $L_i$  такой, что фактор-группа  $G_i/L_i$  является расширением нильпотентной группы  $M_i/L_i$  при помощи квазилинейной группы  $(G_i/L_i)/(M_i/L_i)$ . Ввиду изоморфизма  $G_i/M_i \simeq (G_i/L_i)/(M_i/L_i)$  получаем, что фактор-группа  $G_i/M_i$  квазилинейна. Так как периодическая линейная группа является счетным расширением нильпотентной группы (см. [12, теорема 9.5]), то и периодическая квазилинейная группа — счетное расширение нильпотентной группы. Следовательно,  $G_i/M_i$  содержит нормальную нильпотентную подгруппу  $N_i/M_i$  такую, что фактор-группа  $G_i/N_i$  счетна. Тем самым справедливость утверждения (1) доказана.

Справедливость утверждений (2) и (3) устанавливается так же, как и в теореме 1.  $\square$

Рассмотрим теперь локальную структуру группы  $FL_{\nu}(K)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G$  — конечно порожденная разрешимая подгруппа группы  $FL_{\nu}(K)$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) если  $K$  — целостное кольцо, то  $G$  содержит ряд  $L \leq N \leq G$  нормальных подгрупп, где  $L$  — абелева группа,  $N/L$  — нильпотентная группа, а  $G/N$  — полициклическая группа;

(2) если  $K$  — коммутативное нетерово кольцо, то  $G$  содержит ряд  $L \leq N \leq G$  нормальных подгрупп, где  $L$  — абелева группа,  $N/L$  — метанильпотентная группа, а  $G/N$  — полициклическая группа;

(3) если  $K$  — коммутативное кольцо, то  $G$  содержит ряд  $L \leq M \leq N \leq G$  нормальных подгрупп, где  $L$  — абелева группа,  $M/L$  — локально нильпотентная группа,  $N/M$  — нильпотентная группа, а  $G/N$  — полициклическая группа.

**Доказательство.** Если  $K$  — целостное кольцо, то  $K$  вкладывается в некоторое поле  $F$ , и поэтому группа  $G$  изоморфна некоторой конечно порожденной подгруппе группы  $GL_n(F)$ . Из леммы, доказанной выше, и теоремы А.И. Мальцева (см. [12, теорема 3.6]) следует, что  $G$  обладает нормальной абелевой подгруппой  $L$  такой, что фактор-группа  $G/L$  имеет нормальную подгруппу конечного индекса, коммутант  $N/L$  которой нильпотентен. Так как группа  $G$  конечно порождена, то фактор-группа  $(G/L)/(N/L)$  полициклическая. Ввиду изоморфизма  $(G/L)/(N/L) \simeq G/N$  фактор-группа  $G/N$  также является полициклической. Следовательно,  $G$  содержит ряд  $L \leq N \leq G$  нормальных подгрупп, где  $L$  — абелева группа,  $N/L$  — нильпотентная группа, а  $G/N$  — полициклическая группа. Тем самым утверждение (1) доказано.

Если  $K$  — коммутативное нетерово кольцо, то из леммы и утверждения 1 следует, что  $G$  обладает нормальной абелевой подгруппой  $L$  такой, что фактор-группа  $G/L$  является расширением нильпотентной группы  $S/L$  при помощи квазилинейной группы  $(G/L)/(S/L)$ . Из

изоморфизма  $(G/L)/(S/L) \simeq G/S$  и строения конечно порожденной разрешимой квазилинейной группы вытекает, что  $G/S$  обладает нормальной нильпотентной подгруппой  $N/S$  такой, что фактор-группа  $(G/S)/(N/S)$  полициклическая. Отсюда следует, что фактор-группа  $G/N$  полициклическая. Так как фактор-группы  $N/S$  и  $S/L$  нильпотентны, то  $N/L$  метанильпотентна. Поэтому  $G$  содержит ряд  $L \leq N \leq G$  нормальных подгрупп, где  $L$  — абелева группа,  $N/L$  — метанильпотентная группа, а  $G/N$  — полициклическая группа. Утверждение (2) доказано.

Пусть теперь  $K$  — произвольное коммутативное кольцо. Тогда  $G$  изоморфна некоторой подгруппе конечномерной линейной группы  $GL_t(K)$ . По лемме и утверждению 2 группа  $G$  содержит нормальную абелеву подгруппу  $L$  такую, что фактор-группа  $G/L$  включает нормальную подгруппу  $M/L$ , для которой фактор-группа  $(G/L)/(M/L)$  вкладывается в декартово произведение  $\prod_{\alpha \in \mathcal{A}} G_\alpha$  конечномерных линейных групп  $G_\alpha$  степени  $f \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(t^2 + 1) \right\rfloor$ , и группа  $M/L$  унипотентна, локально нильпотентна и гиперабелева. Отметим, что  $(G/L)/(M/L) \simeq G/M$ . Проекция  $H_\alpha$  фактор-группы  $G/M$  на каждую подгруппу  $G_\alpha$  — разрешимая конечномерная линейная группа степени  $f$ . По теореме А. И. Мальцева [12, теорема 3.6] каждая группа  $H_\alpha$  содержит нормальную подгруппу  $R_\alpha$  такую, что  $|H_\alpha : R_\alpha| \leq \mu(f)$ , причем  $R_\alpha$  содержит нильпотентную подгруппу  $D_\alpha$  такую, что  $D_\alpha$  — нормальная подгруппа в  $G_\alpha$  и фактор-группа  $R_\alpha/D_\alpha$  абелева. Следовательно, группа  $H = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} H_\alpha$  содержит нормальную нильпотентную подгруппу  $D = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} D_\alpha$  ступени нильпотентности, не превосходящей числа  $f - 1$ . Фактор-группа  $H/D$  включает нормальную абелеву подгруппу  $R/D$ , где  $R = \prod_{\alpha \in \mathcal{A}} R_\alpha$ , такую, что  $(H/D)/(R/D)$  — локально конечная группа периода, не превосходящего числа  $\mu(f)!$ . Следовательно,  $H/R$  также является локально конечной группой конечного периода. Так как  $H/R$  конечно порождена, то  $H/R$  конечна. Отсюда вытекает, что группа  $G$  содержит ряд  $L \leq M \leq N \leq G$  нормальных подгрупп, где  $L$  — абелева группа,  $M/L$  — локально нильпотентная группа,  $N/L$  — нильпотентная группа, а  $G/N$  — полициклическая группа. Утверждение (3) доказано.  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Otal J. On the structure of some infinite dimensional linear groups // Comm. Algebra. 2017. Vol. 45, no. 1. P. 234–246. doi:10.1080/00927872.2016.1175593.
2. Kurdachenko L.A., Muñoz-Escolano J.M., Otal J. Antifinitary linear groups // Forum Math. 2008. Vol. 20, no. 1. P. 27–44. doi:10.1515/FORUM.2008.002.
3. Kurdachenko L.A., Muñoz-Escolano J.M., Otal J. Locally nilpotent linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. 2008. Vol. 52, no. 1. P. 151–169.
4. Dashkova O.Yu., Dixon M.R., Kurdachenko L.A. Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension // J. Pure Appl. Algebra. 2007. Vol. 208, no. 3. P. 785–795. doi: 10.1016/j.jpaa.2006.04.002.
5. Dixon M.R., Evans M.J., Kurdachenko L.A. Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. 2004. Vol. 277, no. 1. P. 172–186. doi: 10.1016/j.jalgebra.2004.02.029.
6. Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. 2006. Vol. 50, no. 1. P. 103–131.
7. Дашкова О.Ю. Разрешимые бесконечномерные линейные группы с ограничениями на неабелевы подгруппы бесконечных рангов // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1280–1295.
8. Дашкова О.Ю. Бесконечномерные линейные группы с ограничениями на подгруппы, не являющиеся разрешимыми  $A_3$ -группами // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 548–559.
9. Дашкова О.Ю. Локально разрешимые бесконечномерные линейные группы с ограничениями на неабелевы подгруппы бесконечных рангов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 601–616.
10. Мерзляков Ю.И. Эквиподгруппы унитарных групп: критерий самонормализуемости // Докл. АН. 1994. Т. 339, № 6. С. 732–735.
11. Левчук В.М. Некоторые локально нильпотентные кольца и их присоединенные группы // Мат. заметки. 1987. Т. 42, № 5. С. 631–641.
12. Wehrfritz B.A.F. Infinite linear groups. Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer-Verlag, 1973. 229 p. ISBN: 3-540-06132-0.

13. Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. Москва: Наука, 1972. 240 с.

14. Курош А.Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.

Дашкова Ольга Юрьевна

Поступила 20.09.2017

д-р физ.-мат. наук, профессор

Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,

г. Севастополь

e-mail: odashkova@yandex.ru

Мохамед Ахмед Салим

д-р физ.-мат. наук, профессор

Университет Объединенных Арабских Эмиратов,

г. Аль-Аин

e-mail: MSalim@uaeu.ac.ae

Шпырко Ольга Алексеевна

канд. физ.-мат. наук, доцент

Филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,

г. Севастополь

e-mail: shpyrko@mail.ru

## REFERENCES

1. Dixon M.R., Kurdachenko L.A., Otal J. On the structure of some infinite dimensional linear groups. *Commun. Algebra*, 2017, vol. 45, no. 1, pp. 234–246. doi:10.1080/00927872.2016.1175593.
2. Kurdachenko L.A., Muñoz-Escolano J.M., Otal J. Antifinitary linear groups. *Forum Math.*, 2008, vol. 20, no. 1, pp. 27–44. doi:10.1515/FORUM.2008.002.
3. Kurdachenko L.A., Muñoz-Escolano J.M., Otal J. Locally nilpotent linear groups with the weak chain conditions on subgroups of infinite central dimension. *Publ. Mat.*, 2008, vol. 52, no. 1, pp. 151–169.
4. Dashkova O.Yu., Dixon M.R., Kurdachenko L.A. Linear groups with rank restrictions on the subgroups of infinite central dimension. *J. Pure Appl. Algebra*, 2007, vol. 208, no. 3, pp. 785–795. doi: 10.1016/j.jpaa.2006.04.002.
5. Dixon M.R., Evans M.J., Kurdachenko L.A. Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension. *J. Algebra*, 2004, vol. 277, no. 1, pp. 172–186. doi: 10.1016/j.jalgebra.2004.02.029.
6. Kurdachenko L.A., Subbotin I.Ya. Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension. *Publ. Mat.*, 2006, vol. 50, no. 1, pp. 103–131.
7. Dashkova O. Yu. Solvable infinite-dimensional linear groups with restrictions on the nonabelian subgroups of infinite rank. *Sib. Math. J.*, 2008, vol. 49, no. 6, pp. 1023–1033. doi: 10.1007/s11202-008-0098-5.
8. Dashkova O. Yu. Infinite-dimensional linear groups with restrictions on subgroups that are not soluble  $A_3$ -groups. *Algebra Logic*, 2007, vol. 46, no. 5, pp. 297–302. doi: 10.1007/s10469-007-0030-2.
9. Dashkova O. Yu. Locally soluble infinite-dimensional linear groups with restrictions on nonabelian subgroups of infinite ranks. *Algebra Logic*, 2008, vol. 47, no. 5, pp. 340–347. doi: 10.1007/s10469-008-9025-x.
10. Merzlyakov Yu. I. Equisubgroups of unitriangular groups: A criterion for selfnormalizability. *Russ. Acad. Sci., Dokl., Math.*, 1995, vol. 50, no. 3, pp. 507–511.
11. Levchuk V.M. Some locally nilpotent rings and their adjoined groups. *Math. Notes*, 1987, vol. 42, no. 5, pp. 848–853. doi:10.1007/BF01137426.
12. Wehrfritz B.A.F. *Infinite linear groups*. Berlin, Heidelberg, N. Y., Springer-Verlag, 1973, 229 p. ISBN: 3-540-06132-0.
13. Kargapolov M.I., Merzljakov Ju.I. *Fundamentals of the theory of groups*. Transl. from the 2nd Russian ed., N. Y., Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1979, Ser. Graduate Texts in Math., vol. 62, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0. Original Russian text (1st ed.) published in M.I. Kargapolov, Yu.I. Merzlyakov *Osnovy teorii grupp*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 240 p.

14. Kurosh A.G. *Group theory*. Moscow: Nauka, 1967, 648 p. Transl. from the 2nd Russian ed., N. Y., Chelsea Publ. Co., 1960, vol. 1, 272 p. ISBN: 978-0828401074, vol. 2: 308 p. ISBN: 978-0821834770.

The paper was received by the Editorial Office on September 20, 2017.

*Olga Yurievna Dashkova*, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., the Branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov in Sevastopol, 299001 Russia, e-mail: odashkova@yandex.ru.

*Mohamed Ahmed Salim*, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., United Arab Emirates University, Al-Ain, 15551 United Arab Emirates, e-mail: MSalim@uaeu.ac.ae.

*Olga Alekseevna Shpyrko*, Cand. Phys.-Math. Sci, Associate Prof., the Branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov in Sevastopol, 299001 Russia, e-mail: shpyrko@mail.ru.



УДК 517.927

## ДИСКРЕТНОЕ ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ РИККАТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. Ф. Долгий, Р. И. Шевченко

Для периодических линейных систем дифференциальных уравнений с последействием задача оптимальной стабилизации описывается в функциональном пространстве. Используется процедура сужения класса допустимых управлений. Допустимые управления формируются по принципу обратной связи в функциональном пространстве состояний. Предполагается кусочно-постоянная периодическая зависимость управлений от времени. Точки разрыва не зависят от выбора состояний. Построена эквивалентная дискретная задача оптимальной стабилизации в функциональном пространстве. Решение неавтономного дискретного операторного уравнения Риккати определяет оптимальное стабилизирующее управление. Дискретная задача стабилизации автономна, если последовательность точек разрыва управлений периодична. Найдено представление решения автономного дискретного операторного уравнения Риккати. Для коэффициентов этого представления получена система интегральных уравнений. Выводится формула, определяющая оптимальное стабилизирующее управление в дискретной задаче.

Ключевые слова: периодическая линейная система с последействием, оптимальная стабилизация, дискретное операторное уравнение Риккати.

**Yu. F. Dolgii, R. I. Shevchenko. Discrete operator Riccati equation in an optimal stabilization problem for a periodic linear system with aftereffect.**

An optimal stabilization problem for linear periodic systems of differential equations with aftereffect is described in a function space. A procedure that narrows the class of admissible controls is used. Admissible feedback controls are formed in the function state space. We assume a piecewise constant periodic dependence of the controls on time. The breakpoints are independent of the choice of the states. An equivalent discrete problem of optimal stabilization in a function space is constructed. The solution of the nonautonomous discrete operator Riccati equation determines an optimal stabilizing control. The discrete stabilization problem is autonomous if the sequence of breakpoints of the controls is periodic. A representation of solutions of the autonomous discrete operator Riccati equation is found. A system of integral equations is obtained for the coefficients of this representation. A formula for the optimal stabilizing control in the discrete problem is derived.

Keywords: periodic linear system with aftereffect, optimal stabilization, discrete operator Riccati equation.

MSC: 34K06, 34K20, 34K35, 93C23, 93C57

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-105-118

### Введение

Проблеме оптимальной стабилизации линейных автономных систем дифференциальных уравнений с последействиями и квадратичными критериями качества посвящено большое число публикаций [1–5]. При решении задачи оптимальной стабилизации удобно использовать функциональное пространство состояний [2; 6]. Задача построения оптимального стабилизирующего управления сводится к нахождению решения автономного операторного уравнения Риккати [6]. Для конечномерных пространств состояний методы определения решения матричного уравнения Риккати описаны в монографии [7]. Проблема нахождения точных решений операторного уравнения Риккати обсуждалась в работе [8]. Возникшие трудности с интегрированием операторного уравнения Риккати стимулировали развитие аппроксимационных методов решения задачи оптимальной стабилизации для линейных автономных систем дифференциальных уравнений с последействиями и квадратичными критериями качества

[6; 9–11]. Проблема оптимальной стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействиями и квадратичными критериями качества недостаточно исследована. Ее решение связано с интегрированием неавтономного операторного уравнения Риккати [6]. При решении указанной задачи трудности возникают уже для конечномерных пространств состояний [7]. Для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействиями использование канонических аппроксимаций позволяет ее заменить приближенно периодической задачей оптимальной стабилизации системы дифференциальных уравнений в конечномерном пространстве состояний [12]. В данной работе предлагается при решении рассматриваемой задачи сузить класс допустимых управлений, формируемых по принципу обратной связи в функциональном пространстве состояний. Предполагается, что в заданном состоянии периодическая зависимость допустимого управления от времени является кусочно-постоянной, с фиксированными точками разрывов. Это сужение позволяет перейти от непрерывной задачи оптимальной стабилизации к дискретной задаче оптимальной стабилизации в бесконечномерном пространстве состояний. Указанный подход показал свою эффективность для специального класса дифференциальных уравнений с последействиями — линейных периодических дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами [13]. В [13] задача построения оптимального стабилизирующего управления сводилась к нахождению решения автономного дискретного матричного уравнения Риккати. Для конечномерных пространств состояний методы стабилизации систем с дискретным временем хорошо разработаны [14;15]. В настоящей работе строится дискретное операторное уравнение Риккати, решение которого определяет оптимальное стабилизирующее управление в рассматриваемом классе допустимых управлений. Изучается проблема разрешимости автономного дискретного операторного уравнения Риккати.

## 1. Постановка задачи

Объект стабилизации описывается периодической линейной системой дифференциальных уравнений с последействием запаздывающего типа

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 [d_{\vartheta}\eta(t, \vartheta)]x(t + \vartheta) + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty). \quad (1.1)$$

Здесь  $x : [-\tau, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ,  $0 < \tau \leq \omega$ ; матричнозначная функция  $\eta$   $\omega$ -периодична по первому аргументу,  $\eta(\cdot, 0) = 0$ , матричнозначная функция  $B$   $\omega$ -периодична и интегрируема по Лебегу на  $[0, \omega]$ . Полагаем, что функция  $\eta$  измерима по Лебегу на множестве  $[0, \omega] \times [-\tau, 0]$ , при фиксированном  $t \in [0, \omega]$  функция  $\eta(t, \cdot)$  имеет ограниченную вариацию на  $[-\tau, 0]$ , функция  $Var_{[-\tau, 0]}\eta(t, \cdot)$ ,  $t \in [0, \omega]$ , интегрируема по Лебегу на  $[0, \omega]$ .

Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1.1) и минимизирует критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} \left( x^\top(t)C_x(t)x(t) + u^\top(t)C_u(t)u(t) \right) dt, \quad (1.2)$$

где матричнозначные функции  $C_x$ ,  $C_u$  непрерывны и  $\omega$ -периодичны, а их значения — самосопряженные положительно определенные матрицы.

При решении задачи оптимальной стабилизации удобно использовать ее формализацию в гильбертовом пространстве состояний [2; 6]. Последнее возможно при выполнении условий, указанных в [16, теорема 1], которые обеспечивают принадлежность начальной функции  $\varphi(\vartheta)$ ,  $\vartheta \in [-\tau, 0]$ , и отрезков решений системы (1)  $x_t(\vartheta, \varphi) = x(t + \vartheta, \varphi)$ ,  $\vartheta \in [-\tau, 0]$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

гильбертову пространству состояний  $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$  со скалярным произведением  $\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathbb{H}} = \psi^\top(0)\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \psi^\top(\vartheta)\varphi(\vartheta)d\vartheta$ ,  $\varphi \in \mathbb{H}$ ,  $\psi \in \mathbb{H}$ .

Объект стабилизации описывается в пространстве  $\mathbb{H}$  периодическим линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_t + \mathbf{B}(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.3)$$

Здесь неограниченный оператор  $\mathbf{A}(t)$  задается формулами

$$(\mathbf{A}(t)\mathbf{x})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{A}(t)\mathbf{x})(0) = \int_{-r}^0 [d_s\eta(t, s)]\mathbf{x}(s)$$

и имеет область определения  $\mathfrak{D}(\mathbf{A}(t)) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{H} : \mathbf{x} \in \mathbb{W}_2^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)\}$ , а ограниченный оператор  $\mathbf{B}(t) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{H}$  — формулами

$$(\mathbf{B}(t)u)(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-\tau, 0), \quad (\mathbf{B}(t)u)(0) = B(t)u.$$

Критерий качества переходных процессов уравнения (1.3) имеет вид

$$\mathbf{J} = \int_0^{+\infty} \left( \langle \mathbf{C}_x(t)\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle_{\mathbb{H}} + u^\top(t)\mathbf{C}_u(t)u(t) \right) dt, \quad (1.4)$$

где линейный ограниченный самосопряженный положительный оператор  $\mathbf{C}_x(t) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  периодически зависит от  $t$  с периодом  $\omega$  и определяется формулами

$$(\mathbf{C}_x(t)\mathbf{x})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in [-r, 0), \quad (\mathbf{C}_x(t)\mathbf{x})(0) = C_x(t)\mathbf{x}(0),$$

линейный ограниченный самосопряженный положительно определенный оператор  $\mathbf{C}_u(t) : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  периодически зависит от  $t$  с периодом  $\omega$  и определяется формулой  $\mathbf{C}_u(t)u = C_u(t)u$ .

Множество допустимых управлений, для которого решается задача оптимальной стабилизации, состоит из линейных непрерывных отображений  $\mathbf{u}[t, \cdot] : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r$ , периодически зависящих от  $t \in \mathbb{R}^+$ . Если задача (1.3), (1.4) стабилизируема, то оптимальное стабилизирующее управление, определяется формулой [6]

$$u^0[t, \mathbf{x}] = -C_u^{-1}(t)B^\top(t)(\mathbf{U}(t)\mathbf{x})(0),$$

в которой  $\mathbf{U}$  — операторнозначное  $\omega$ -периодическое решение дифференциального операторного уравнения Риккати [6]

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{U}\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^*(t)\mathbf{U} + \mathbf{C}_x(t) - \mathbf{U}\mathbf{D}(t)\mathbf{U} = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

значения которого являются самосопряженными положительными операторами,  $\mathbf{D}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{C}_u(t)\mathbf{B}^*(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Сужение класса допустимых управлений позволяет перейти от непрерывной к дискретной задаче оптимальной стабилизации в бесконечномерном пространстве состояний. При этом дифференциальное уравнение Риккати с неограниченными операторами заменяется дискретным уравнением Риккати с ограниченными операторами.

## 2. Дискретная задача оптимальной стабилизации в функциональном пространстве состояний

Выберем периодическое разбиение числовой оси точками  $t_k = t_{k+p} - \omega$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{p-1} < t_p = \omega$ , и опишем сужение множества допустимых управлений, для которого решается задача оптимальной стабилизации в данной работе.

Множество допустимых управлений состоит из линейных непрерывных отображений  $u[t, \cdot] : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r$ , периодически зависящих от  $t$  с периодом  $\omega$ , которые являются кусочно-постоянными функциями аргумента  $t$  с фиксированными точками разрыва в точках заданного разбиения числовой оси, т.е.  $u[t, \mathbf{x}_t] = u_k[\mathbf{x}_{t_k}]$ ,  $t_k \leq t < t_{k+1}$ ,  $k \geq 0$ , где линейные отображения  $u_k[\cdot] : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $k \geq 0$ , непрерывны и периодически зависят от индекса с периодом  $p$ .

Для произвольного допустимого управления  $u[t, \cdot]$  система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^0 [d_\vartheta \eta(t, \vartheta)] x(t + \vartheta) + B(t) u[t, \mathbf{x}_t]$$

имеет единственное решение задачи Коши  $x(t, \varphi)$ ,  $t \geq -r$ ,  $\mathbf{x}_0(\varphi) = \varphi$ ,  $\varphi \in \mathbb{H}$ . При  $t_k \leq t < t_{k+1}$  имеем  $u[t, \mathbf{x}_t(\varphi)] = u_k[\mathbf{x}_{t_k}(\varphi)] = u_k$ ,  $k \geq 0$ . Используя формулу общего решения [16, формула 1.11], находим

$$\begin{aligned} x(t, \varphi) &= V(t, t_k) x(t_k, \varphi) + \int_{-\tau}^0 \hat{V}_k(t, s) x(t_k + s, \varphi) ds \\ &+ \int_{t_k}^t V(t, s) B(s) ds u_k, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь матричнозначная функция  $V(\cdot, \cdot)$  при каждом фиксированном значении второго аргумента  $s \in [0, +\infty)$  локально абсолютно непрерывна по первому аргументу  $t$  на  $[s, +\infty)$ , при каждом фиксированном значении первого аргумента  $t \in (0, +\infty)$  имеет конечную вариацию по второму аргументу  $s$  на  $[0, t]$ . Она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V(t, s)}{\partial t} = \int_{-\tau}^0 [d_\vartheta \eta(t, \vartheta)] V(t + \vartheta, s), \quad 0 \leq s < t < +\infty,$$

и начальным условиям  $V(t, s) = 0$ ,  $t \in [s - \tau, s)$ ,  $V(s, s) = I_n$ ,  $s \in \overline{\mathbb{R}}^+$ . При каждом фиксированном значении  $t \in (0, +\infty)$  с помощью формулы  $\eta(t, \vartheta) = \eta(t, -\tau)$  определены значения функции  $\eta$  при  $\vartheta \in (-\infty, -\tau)$ . Для единичной матрицы размерности  $n \times n$  используется обозначение  $I_n$ . Матричнозначные функции  $\hat{V}_k(\cdot, \cdot)$  определяются формулами

$$\hat{V}_k(t, s) = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^\tau V(t, t_k + z) \eta(t_k + z, s - z) dz, \quad -\tau \leq s \leq 0, \quad t_k \leq t < t_{k+1}, \quad k \geq 0.$$

Последовательность функций

$$\mathbf{x}_k(\vartheta, \varphi) = x(t_k + \vartheta, \varphi), \quad \vartheta \in [-\tau, 0], \quad k \geq 0, \quad (2.2)$$

определяет решение управляемого дискретного уравнения в гильбертовом пространстве состояний  $\mathbb{H}$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k u_k, \quad k \geq 0. \quad (2.3)$$

Здесь  $\mathbf{A}_k : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\mathbf{B}_k : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{H}$  — линейные ограниченные операторы, периодически зависящие от индекса  $k$  с периодом  $p$ , определяются формулами

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_k \mathbf{x})(\vartheta) &= \mathbf{x}(\vartheta + t_{k+1} - t_k), \quad -\tau \leq \vartheta \leq t_k - t_{k+1}, \\ (\mathbf{A}_k \mathbf{x})(\vartheta) &= V(t_{k+1} + \vartheta, t_k) \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{V}_k(t_{k+1} + \vartheta, s) \mathbf{x}(s) ds, \quad t_k - t_{k+1} \leq \vartheta \leq 0, \\ (\mathbf{B}_k u)(\vartheta) &= 0, \quad -\tau \leq \vartheta \leq t_k - t_{k+1}, \\ (\mathbf{B}_k u)(\vartheta) &= \int_{t_k}^{t_{k+1} + \vartheta} V(t_{k+1} + \vartheta, s) B(s) ds u, \quad t_k - t_{k+1} \leq \vartheta \leq 0. \end{aligned}$$

Для периодического дискретного уравнения (2.3) в качестве допустимых управлений будем выбирать линейные непрерывные отображения  $u_k[\cdot] : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $k \geq 0$ , периодически зависящие от индекса с периодом  $p$ .

Для любого допустимого управления  $u_k[\cdot]$ ,  $k \geq 0$ , дискретное уравнение

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k u_k[\mathbf{x}_k], \quad k \geq 0. \quad (2.4)$$

имеет единственное решение задачи Коши  $\mathbf{x}_k(\varphi)$ ,  $k \geq 0$ ,  $\mathbf{x}_0(\varphi) = \varphi$ ,  $\varphi \in \mathbb{H}$ . Если допустимое управление дискретного уравнения порождает выбранное выше допустимое управление системы с последствием и начальные функции решений дискретного уравнения и системы с последствием совпадают, то решение уравнения (2.4) совпадает с последовательностью функций (2.2). Поэтому для множества кусочно-постоянных управлений можно говорить о эквивалентности задач стабилизации для системы с последствием и дискретного уравнения.

Используя формулы (2.1), преобразуем критерий качества (1.2). Имеем

$$\mathbf{J}_d = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \langle \mathbf{C}_{xxk} \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle_H + 2u_k^\top \mathbf{C}_{xuk}^* \mathbf{x}_k + u_k^\top \mathbf{C}_{uuk} u_k \right). \quad (2.5)$$

Здесь  $\mathbf{C}_{xxk} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\mathbf{C}_{xuk}^* : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbf{C}_{uuk} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  — линейные ограниченные операторы, периодически зависящие от индекса  $k$  с периодом  $p$ ,  $\mathbf{C}_{xxk}$  — самосопряженные положительные операторы, а  $\mathbf{C}_{uuk}$  — самосопряженные положительно определенные операторы. Они определяются формулами

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{xxk} \mathbf{x})(\vartheta) &= \int_{t_k - t_{k+1}}^0 \hat{V}_k^\top(t_{k+1} + \alpha, \vartheta) C_x(t_{k+1} + \alpha) V(t_{k+1} + \alpha, t_k) d\alpha \mathbf{x}(0) \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t_k - t_{k+1}}^0 \hat{V}_k^\top(t_{k+1} + \alpha, \vartheta) C_x(t_{k+1} + \alpha) \hat{V}_k^\top(t_{k+1} + \alpha, s) d\alpha \mathbf{x}(s) ds, \quad -\tau \leq \vartheta < 0, \\ (\mathbf{C}_{xxk} \mathbf{x})(0) &= \int_{t_k - t_{k+1}}^0 V^\top(t_{k+1} + \alpha, t_k) C_x(t_{k+1} + \alpha) V(t_{k+1} + \alpha, t_k) d\alpha \mathbf{x}(0) \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{t_k - t_{k+1}}^0 V^\top(t_{k+1} + \alpha, t_k) C_x(t_{k+1} + \alpha) \hat{V}_k(t_{k+1} + \alpha, s) d\alpha \mathbf{x}(s) ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{xuk}^* \mathbf{x} &= \int_{t_k - t_{k+1}}^0 \int_{t_k}^{t_{k+1} + \alpha} B^\top(s) V^\top(t_{k+1} + \alpha, s) ds C_x(t_{k+1} + \alpha) \\
&\times \left( V(t_{k+1} + \alpha, t_k) \mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{V}_k(t_{k+1} + \alpha, s) \mathbf{x}(s) ds \right) d\alpha, \quad \mathbf{C}_{uuk} u = C_{uuk} u, \\
C_{uuk} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} C_u(t) dt + \int_{t_k - t_{k+1}}^0 \int_{t_k}^{t_{k+1} + \alpha} B^\top(s) V^\top(t_{k+1} + \alpha, s) ds C_x(t_{k+1} + \alpha) \int_{t_k}^{t_{k+1} + \alpha} V(t_{k+1} + \alpha, s) B(s) ds d\alpha.
\end{aligned}$$

Приведенные вычисления доказывают справедливость утверждения.

**Теорема 1.** При выполнении условий [16, теорема 1] задача оптимальной стабилизации системы с последствием (1.1), (1.2) с допустимым множеством кусочно-постоянных управлений эквивалентна задаче оптимальной стабилизации дискретного уравнения (2.3), (2.5).

**Теорема 2.** Пусть дискретная задача (2.3), (2.5) стабилизируема. Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулами

$$u_k^0[\mathbf{x}_k] = -(\mathbf{C}_{uuk} + \mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{B}_k)^{-1} (\mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{A}_k + \mathbf{C}_{xuk}^*) \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{x}_k \in \mathbb{H}, \quad k \geq 0, \quad (2.6)$$

в которых  $\mathbf{U}_k$ ,  $k \geq 0$ , — операторнозначное  $p$ -периодическое решение дискретного периодического операторного уравнения Риккати

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{A}_k^* \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{A}_k - (\mathbf{A}_k^* \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{B}_k + \mathbf{C}_{xuk}) \mathbf{L}_k^{-1} (\mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{A}_k + \mathbf{C}_{xuk}^*) + \mathbf{C}_{xxk}, \quad (2.7)$$

значения которого являются линейными ограниченными самосопряженными положительными операторами. Здесь обратимые операторы  $\mathbf{L}_k : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  определяются формулами

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{C}_{uuk} + \mathbf{B}_k^* \mathbf{U}_{k+1} \mathbf{B}_k, \quad k \geq 0.$$

**Доказательство.** Используется дискретное неавтономное уравнение Беллмана

$$\mathbf{V}_k(\mathbf{x}) = \min_{u \in \mathbb{R}^r} \{ \mathbf{V}_{k+1}(\mathbf{A}_k \mathbf{x} + \mathbf{B}_k u) + \langle \mathbf{C}_{xxk} \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2u^\top \mathbf{C}_{xuk}^* \mathbf{x} + u^\top \mathbf{C}_{uuk} u \}, \quad k \geq 0.$$

Функционал Беллмана — Ляпунова выбирается в виде квадратичной формы

$$\mathbf{V}_k(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{U}_k \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

порождаемой линейным ограниченным самосопряженным положительным оператором  $\mathbf{U}_k$ ,  $k \geq 0$ . Из уравнения Беллмана находим формулу, определяющую оптимальное стабилизирующее управление, в которой оператор  $\mathbf{U}_k$ ,  $k \geq 0$ , удовлетворяет дискретному уравнению Риккати (2.7). Для конечномерного пространства состояний (2.6), (2.7) совпадают с формулами, приведенными в [15, с. 63].  $\square$

### 3. Дискретное автономное операторное уравнение Риккати

Если при дискретизации задачи стабилизации выбрать специальное разбиение числовой оси точками  $t_k = k\omega$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , то получим автономную дискретную задачу оптимальной стабилизации для дискретной системы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A} \mathbf{x}_k + \mathbf{B} u_k, \quad k \geq 0, \quad (3.1)$$

с дискретным критерием качества

$$\mathbf{J}_{da} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \langle \mathbf{C}_{xx} \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k \rangle_H + 2u_k^\top \mathbf{C}_{xu}^* \mathbf{x}_k + u_k^\top \mathbf{C}_{uu} u_k \right). \quad (3.2)$$

Здесь  $\mathbf{A} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\mathbf{B} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{H}$  — линейные ограниченные операторы, определяемые формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = V(\omega + \vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{V}_0(\omega + \vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad -\tau \leq \vartheta \leq 0,$$

$$(\mathbf{B}u)(\vartheta) = \int_0^{\omega + \vartheta} V(\omega + \vartheta, s)B(s)dsu, \quad -\tau \leq \vartheta \leq 0.$$

В критерии качества  $\mathbf{C}_{xx} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\mathbf{C}_{xu}^* : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbf{C}_{uu} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  — линейные ограниченные операторы,  $\mathbf{C}_{xx}$  — положительный самосопряженный оператор, а  $\mathbf{C}_{uu}$  — положительно определенный самосопряженный оператор. Они определяются формулами

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_{xx}\mathbf{x})(\vartheta) &= \int_{-\omega}^0 \hat{V}_0^\top(\omega + \alpha, \vartheta)C_x(\alpha)V(\omega + \alpha, 0)d\alpha\mathbf{x}(0) \\ &+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\omega}^0 \hat{V}_0^\top(\omega + \alpha, \vartheta)C_x(\alpha)\hat{V}_0^\top(\omega + \alpha, s)d\alpha\mathbf{x}(s)ds, \quad -\tau \leq \vartheta < 0, \\ (\mathbf{C}_{xx}\mathbf{x})(0) &= \int_{-\omega}^0 V^\top(\omega + \alpha, 0)C_x(\alpha)V(\omega + \alpha, 0)d\alpha\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \int_{-\omega}^0 V^\top(\omega + \alpha, 0)C_x(\alpha)\hat{V}_0(\omega + \alpha, s)d\alpha\mathbf{x}(s)ds, \\ \mathbf{C}_{xu}^*\mathbf{x} &= \int_{-\omega}^0 \int_0^{\omega + \alpha} B^\top(s)V^\top(\omega + \alpha, s)dsC_x(\alpha) \left( V(\alpha, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\tau}^0 \hat{V}_0(\alpha, s)\mathbf{x}(s)ds \right) d\alpha, \\ \mathbf{C}_{uu}u &= C_{uu}u, \quad C_{uu} = \int_{-\omega}^0 \left( C_u(\alpha) + \int_0^{\omega + \alpha} B^\top(s)V^\top(\omega + \alpha, s)dsC_x(\alpha) \int_0^{\omega + \alpha} V(\omega + \alpha, s)B(s)ds \right) d\alpha. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Пусть дискретная задача (3.1), (3.2) стабилизируема. Тогда оптимальное стабилизирующее управление дискретной задачи определяется формулой

$$u^0[\mathbf{x}] = -(\mathbf{C}_{uu} + \mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{B})^{-1}(\mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{C}_{xu}^*)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad (3.3)$$

в которой  $\mathbf{U}$  — операторнозначное решение автономного дискретного операторного уравнения Риккати

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{A} - (\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{B} + \mathbf{C}_{xu})\mathbf{L}^{-1}(\mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{C}_{xu}^*) + \mathbf{C}_{xx}, \quad (3.4)$$

являющееся линейным ограниченным самосопряженным положительным оператором. Здесь обратимый оператор  $\mathbf{L} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  определяется формулой  $\mathbf{L} = \mathbf{C}_{uu} + \mathbf{B}^*\mathbf{U}\mathbf{B}$ .

**Доказательство.** При доказательстве утверждения используется автономное дискретное уравнение Беллмана

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \min_{u \in \mathbb{R}^r} \left\{ \mathbf{V}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u) + \langle \mathbf{C}_{xx}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2u^\top \mathbf{C}_{xu}^* \mathbf{x} + u^\top \mathbf{C}_{uu}u \right\}.$$

Функционал Беллмана — Ляпунова выбирается в виде квадратичной формы  $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{U}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle_H$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ , порождаемой положительным оператором  $\mathbf{U}$ . Для конечномерного пространства состояний (3.3), (3.4) совпадают с формулами, приведенными в [15, с. 64].  $\square$

#### 4. Периодическая линейная система с постоянным запаздыванием

Продолжим исследование дискретного автономного операторного уравнения Риккати для периодической линейной системы дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием следующего вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t - \omega) + B(t)u, \quad (4.1)$$

где матричнозначные функции  $A$ ,  $B$  непрерывны и  $\omega$ -периодичны.

Для системы (4.1) операторы дискретной задачи оптимизации в пространстве состояний  $\mathbb{H} = \mathbb{L}_2([-\omega, 0), \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n$ ,  $\tau = \omega$ , определяются формулами

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) = \mathbf{x}(0) + \int_{-\omega}^{\vartheta} A(s)\mathbf{x}(s)ds, \quad -\omega \leq \vartheta \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

$$(\mathbf{B}u)(\vartheta) = \widehat{B}(\vartheta)u, \quad -\omega \leq \vartheta \leq 0, \quad \mathbf{C}_{uu}u = C_{uu}u, \quad u \in \mathbb{R}^r,$$

$$(\mathbf{C}_{xx}\mathbf{x})(\vartheta) = C_{xx}(\vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\omega}^0 C_{xx}(\vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad -\omega \leq \vartheta \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

$$\mathbf{C}_{xu}^*\mathbf{x} = C_{xu}^*(0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\omega}^0 C_{xu}^*(s)\mathbf{x}(s)ds, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

Здесь

$$\widehat{B}(\vartheta) = \int_{-\omega}^{\vartheta} B(s)ds, \quad -\omega \leq \vartheta \leq 0; \quad C_{xx}(\vartheta, s) = C_{xx}^\top(s, \vartheta), \quad C_{xx}(0, 0) = \int_{-\omega}^0 C_x(\alpha)d\alpha,$$

$$C_{xx}(\vartheta, 0) = A^\top(\vartheta) \int_{\vartheta}^0 C_x(\alpha)d\alpha, \quad C_{xx}(\vartheta, s) = A^\top(\vartheta) \int_{\vartheta}^0 C_x(\alpha)d\alpha A(s), \quad -\omega \leq \vartheta, \quad s < 0;$$

$$C_{xu}^*(0) = \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(\alpha)C_x(\alpha)d\alpha, \quad C_{xu}^*(s) = \int_s^0 \widehat{B}^\top(\alpha)C_x(\alpha)d\alpha A(s), \quad -\omega \leq s < 0;$$

$$C_{uu} = \int_{-\omega}^0 C_x(\alpha)d\alpha + \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(\alpha)C_x(\alpha)\widehat{B}(\alpha)d\alpha.$$

Находим операторы, входящие в дискретное операторное уравнение Риккати (3.4):

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{y})(\vartheta) = A^\top(\vartheta) \left( \mathbf{y}(0) + \int_{\vartheta}^0 \mathbf{y}(s)ds \right), \quad -\omega \leq \vartheta < 0, \quad (\mathbf{A}^*\mathbf{y})(0) = \mathbf{y}(0) + \int_{\vartheta}^0 \mathbf{y}(s)ds, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H},$$

$$\mathbf{B}^*\mathbf{y} = \widehat{B}^\top(0)\mathbf{y}(0) + \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(s)\mathbf{y}(s)ds, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{H}, \quad (\mathbf{C}_{xu}u)(\vartheta) = C_{xu}^{*\top}(\vartheta)u, \quad -\omega \leq \vartheta \leq 0, \quad u \in \mathbb{R}^r,$$



**Лемма 1.** Пусть для системы (4.1) соответствующая дискретная задача (3.1), (3.2) стабилизируема. Тогда решение дискретного уравнения Риккати (3.4) определяет ограниченный самосопряженный положительный оператор, допускающий представление

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})(\vartheta) = K(\vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\omega}^0 K(\vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad -\omega \leq \vartheta \leq 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad (4.2)$$

удовлетворяющее условиям:

- 1)  $K^\top(0, 0) = K(0, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;
- 2) при фиксированном  $\vartheta \in [-\omega, 0)$  имеем  $K^\top(0, \vartheta) = K(\vartheta, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и функция  $K(\cdot, 0) \in \mathbb{C}([-\omega, 0], \mathbb{R}^{n \times n})$ ;
- 3) при фиксированных  $(\vartheta, s) \in [-\omega, 0) \times [-\omega, 0)$  имеем  $K^\top(s, \vartheta) = K(\vartheta, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и функция  $K(\cdot, \cdot) \in \mathbb{C}([-\omega, 0) \times [-\omega, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$ .

**Доказательство.** Из представлений операторов  $\mathbf{A}, \mathbf{A}^*, \mathbf{B}, \mathbf{B}^*, \mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{xi}, \mathbf{C}_{xu}^*, \mathbf{C}_{ui}$  и ограниченности оператора  $\mathbf{U}$  следуют конечномерность оператора  $\mathbf{L}$ , справедливость для каждого слагаемого в правой части дискретного уравнения Риккати формы представления (4.2) и выполнение для каждого оператора, входящего в сумму, условий 1)–3).  $\square$

Самосопряженный конечномерный оператор  $\mathbf{L} : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$  допускает представление  $\mathbf{L}u = Lu$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ , где матрица  $L$  размерности  $r \times r$ ,  $\det L \neq 0$  определяется формулой  $L = C_{uu} + \widehat{B}^\top(0)K(0, 0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 \left( \widehat{B}^\top(0)K(0, s)\widehat{B}(s) + \widehat{B}^\top(s)K(s, 0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(\vartheta)K(\vartheta, s)d\vartheta\widehat{B}(s) \right) ds$ .

**Теорема 4.** Пусть для системы (4.1) соответствующая дискретная задача (3.1), (3.2) стабилизируема. Тогда коэффициенты представления оператора (4.2) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} & K(\vartheta, s) - A^\top(\vartheta) \left[ K(0, 0) + \int_s^0 K(0, s_1)ds_1 + \int_\vartheta^0 K(s_1, 0)ds_1 \right. \\ & \left. + \int_\vartheta^0 \int_s^0 K(s_1, s_2)ds_2ds_1 \right] A(s) + \left( C_{xu}^{*\top}(\vartheta) + \widehat{A}(\vartheta) \right) L^{-1} \\ & \times \left( C_{xu}^*(s) + \widehat{A}^\top(s) \right) - A^\top(\vartheta) \int_\vartheta^0 \chi_{(s, 0)}(\alpha) C_x(\alpha) d\alpha A(s) = 0, \quad \vartheta, s \in [-\omega, 0), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & K(\vartheta, 0) - A^\top(\vartheta) \left[ K(0, 0) + \int_{-\omega}^0 K(0, s)ds + \int_\vartheta^0 \left( K(s, 0) + \int_{-\omega}^0 K(s, s_1)ds_1 \right) ds \right] \\ & + \left( C_{xu}^{*\top}(\vartheta) + \widehat{A}(\vartheta) \right) L^{-1} \left( C_{xu}^*(0) + \widehat{A}^\top(0) \right) - A^\top(\vartheta) \int_\vartheta^0 C_x(\alpha) d\alpha = 0, \quad \vartheta \in [-\omega, 0), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\omega}^0 \left( K(0, s) + K(s, 0) + \int_{-\omega}^0 K(s, s_1)ds_1 \right) ds + \int_{-\omega}^0 C_x(\alpha) d\alpha \\ & - \left( C_{xu}^{*\top}(0) + \widehat{A}(0) \right) L^{-1} \left( C_{xu}^*(0) + \widehat{A}^\top(0) \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь  $\chi_E(\cdot)$  — индикатор множества  $E$ ,

$$\begin{aligned}\widehat{A}(\vartheta) &= A^\top(\vartheta) \left( K(0,0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 K(0,s)\widehat{B}(s)ds \right) + A^\top(\vartheta) \int_{\vartheta}^0 \left( K(s,0)\widehat{B}(0) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\omega}^0 K(s,s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1 \right) ds, \quad -\omega \leq \vartheta < 0, \\ \widehat{A}(0) &= K(0,0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 \left( K(0,s)\widehat{B}(s) + K(s,0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 K(s,s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1 \right) ds.\end{aligned}$$

**Доказательство.** Используя представления операторов  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{A}^*$ , находим значения оператора

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{x})(\vartheta) &= A^\top(\vartheta) \left\{ \left[ K(0,0) + \int_{-\omega}^0 K(0,s)ds + \int_{\vartheta}^0 \left( K(s,0) + \int_{-\omega}^0 K(s,s_1)ds_1 \right) ds \right] \mathbf{x}(0) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\omega}^0 \left[ K(0,0) + \int_s^0 K(0,s_1)ds_1 + \int_{\vartheta}^0 \left( K(s_1,0) + \int_s^0 K(s_1,s_2)ds_2 \right) ds_1 \right] A(s)\mathbf{x}(s)ds \right\}, \quad -\omega \leq \vartheta < 0, \\ (\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{A}\mathbf{x})(0) &= \left[ K(0,0) + \int_{-\omega}^0 \left( K(0,s) + K(s,0) + \int_{-\omega}^0 K(s,s_1)ds_1 \right) ds \right] \mathbf{x}(0) \\ &\quad + \int_{-\omega}^0 \left[ K(0,0) + \int_s^0 K(0,s_1)ds_1 + \int_{-\omega}^0 \left( K(s_1,0) + \int_s^0 K(s_1,s_2)ds_2 \right) ds_1 \right] A(s)\mathbf{x}(s)ds.\end{aligned}$$

Используя представления операторов  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{B}$ , находим значения оператора

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{B}u)(\vartheta) &= A^\top(\vartheta) \left[ K(0,0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 K(0,s)\widehat{B}(s)ds + \int_{\vartheta}^0 \left( K(s,0)\widehat{B}(0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{-\omega}^0 K(s,s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1 \right) ds \right] u = \widehat{A}(\vartheta)u, \quad -\omega \leq \vartheta < 0, \\ (\mathbf{A}^*\mathbf{U}\mathbf{B}u)(0) &= \left[ K(0,0)\widehat{B}(0) \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\omega}^0 \left( K(0,s)\widehat{B}(s) + K(s,0)\widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 K(s,s_1)\widehat{B}(s_1)ds_1 \right) ds \right] u = \widehat{A}(0)u.\end{aligned}$$

Используя найденные представления операторов в операторном уравнении Риккати (3.4), получим определяющую систему уравнений (4.3)–(4.5).  $\square$

Рассмотрим гибридную систему уравнений, определяющую матричнозначные функции  $X_1(\cdot)$ ,  $X_2(\cdot)$  и матрицу  $K_0$ . Она содержит матричные интегральные уравнения

$$X_1(\vartheta) = A^\top(\vartheta) \left\{ \left[ K_0 + \int_{-\omega}^0 X_1^\top(s)ds + \int_{\vartheta}^0 \left( X_1(s) + X_3(s) + C_x(s) \right) ds \right] - \left[ K_0\widehat{B}(0) \right. \right.$$

$$+ \int_{\vartheta}^0 \left( X_1^\top(s) \widehat{B}(s) ds + X_{12}(s) \right) ds \Big] L^{-1} \left[ \widehat{B}^\top(0) K_0 + \int_{-\omega}^0 \left( X_{12}^\top(s) + \widehat{B}^\top(s) X_1(s) \right) ds \right] \Big\}, \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} X_2(\vartheta) = & A^\top(\vartheta) \int_{-\omega}^0 \left[ K_0 + \int_s^0 X_1^\top(s_1) ds_1 + \int_{\vartheta}^0 \left( X_1(s_1) + \chi_{(s,0)}(s_1) C_x(s_1) \right) ds_1 \right] A(s) \widehat{B}(s) ds \\ & - A^\top(\vartheta) \left[ K_0 \widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 X_1^\top(s) \widehat{B}(s) ds + \int_{\vartheta}^0 X_{12}(s_1) ds_1 \right] L^{-1} \int_{-\omega}^0 \left[ \widehat{B}^\top(0) K_0 + \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(s) X_1(s) ds \right. \\ & + \left. \int_s^0 X_{12}^\top(s_1) ds_1 \right] A(s) \widehat{B}(s) ds + A^\top(\vartheta) \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\omega}^0 \int_{\vartheta}^0 \int_s^0 A_m^\top(\vartheta, \zeta) \left\{ K_0 + \int_{\eta}^0 X_1^\top(s_1) ds_1 + \int_{\zeta}^0 \left( X_1(s_1) \right. \right. \\ & + \left. \left. \chi_{(\eta,0)}(s_1) C_x(s_1) \right) ds_1 - \left[ K_0 \widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 X_1^\top(s) \widehat{B}(s) ds + \int_{\zeta}^0 X_{12}(s_1) ds_1 \right] L^{-1} \left[ \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(s) X_1(s) ds \right. \right. \\ & \left. \left. + \widehat{B}^\top(0) K_0 + \int_{\eta}^0 X_{12}^\top(s_1) ds_1 \right] \right\} A_m(s, \eta) d\eta d\zeta A(s) \widehat{B}(s) ds, \quad \vartheta \in [-\omega, 0), \end{aligned} \quad (4.7)$$

и матричное уравнение

$$\begin{aligned} & \int_{-\omega}^0 \left( X_1^\top(s) + X_1(s) + X_3(s) + C_x(s) \right) ds - \left[ K_0 \widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 \left( X_1^\top(s) \widehat{B}(s) + X_{12}(s) \right) ds \right] L^{-1} \\ & \quad \times \left[ \widehat{B}^\top(0) K_0 + \int_{-\omega}^0 \left( \widehat{B}^\top(s) X_1(s) + X_{12}^\top(s) \right) ds \right] = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь  $A_1(s, \eta) = A(\eta)$ ,  $A_{m+1}(s, \eta) = \int_s^\eta A_m(s_1, \eta) A(s_1) ds_1$ ,  $s, \eta \in [-\omega, 0)$ ,  $m \geq 1$ ,  $L = C_{uu} + \widehat{B}^\top(0) K_0 \widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 \left( \widehat{B}^\top(0) X_1^\top(s) \widehat{B}(s) + \widehat{B}^\top(s) X_1(s) \widehat{B}(0) + \widehat{B}^\top(s) X_2(s) \right) ds$ , вспомогательные матричные функции  $X_{12}(\cdot)$ ,  $X_3(\cdot)$  выражаются через матричные функции  $X_1(\cdot)$ ,  $X_2(\cdot)$ , матрицу  $K_0$  и определяются формулами  $X_{12}(\vartheta) = C_x^\top(\vartheta) \widehat{B}(\vartheta) + X_1(\vartheta) \widehat{B}(0) + X_2(\vartheta)$ ,

$$\begin{aligned} X_3(\vartheta) = & A^\top(\vartheta) \int_{-\omega}^0 \left[ K_0 + \int_s^0 X_1^\top(s_1) ds_1 + \int_{\vartheta}^0 \left( X_1(s_1) + \chi_{(s,0)}(s_1) C_x(s_1) \right) ds_1 \right] A(s) ds \\ & - A^\top(\vartheta) \left[ K_0 \widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 X_1^\top(s) \widehat{B}(s) ds + \int_{\vartheta}^0 X_{12}(s_1) ds_1 \right] L^{-1} \int_{-\omega}^0 \left[ \widehat{B}^\top(0) K_0 + \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(s) X_1(s) ds \right. \\ & + \left. \int_s^0 X_{12}^\top(s_1) ds_1 \right] A(s) ds + A^\top(\vartheta) \sum_{m=1}^{\infty} \int_{-\omega}^0 \int_{\vartheta}^0 \int_s^0 A_m^\top(\vartheta, \zeta) \left\{ K_0 + \int_{\eta}^0 X_1^\top(s_1) ds_1 + \int_{\zeta}^0 \left( X_1(s_1) \right. \right. \\ & \left. \left. + \chi_{(\eta,0)}(s_1) C_x(s_1) \right) ds_1 - \left[ K_0 \widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 X_1^\top(s) \widehat{B}(s) ds + \int_{\zeta}^0 X_{12}(s_1) ds_1 \right] L^{-1} \left[ \widehat{B}^\top(0) K_0 \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(s) X_1(s) ds + \widehat{B}^\top(0) \int_{\eta}^0 X_{12}^\top(s_1) ds_1 \right\} A_m(s, \eta) d\eta d\zeta A(s) ds, \quad \vartheta \in [-\omega, 0).$$

**Лемма 2.** Пусть для системы (4.1) соответствующая дискретная задача (3.1), (3.2) стабилизируема. Тогда решение определяющей системы уравнений (4.3)–(4.5) задается формулами  $K(0, 0) = K_0$ ,  $K(\vartheta, 0) = X_1(\vartheta)$ ,

$$K(\vartheta, s) = A^\top(\vartheta) \left[ F(\vartheta, s) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\vartheta}^0 \int_s^0 A_m^\top(\vartheta, \zeta) F(\zeta, \eta) A_m(s, \eta) d\eta d\zeta \right] A(s), \quad \vartheta, s \in [-\omega, 0), \quad (4.9)$$

$$F(\vartheta, s) = K_0 + \int_s^0 X_1^\top(s_1) ds_1 + \int_{\vartheta}^0 \left( X_1^\top(s_1) + \chi_{(s,0)}(s_1) C_x(s_1) \right) ds_1 - \left[ K_0 \widehat{B}(0) + \int_{-\omega}^0 X_1^\top(s_1) \widehat{B}(s_1) ds_1 + \int_{\vartheta}^0 X_{12}(s_1) ds_1 \right] L^{-1} \left[ \widehat{B}^\top(0) K_0 + \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(s_1) X_1(s_1) ds_1 + \int_s^0 X_{12}^\top(s_1) ds_1 \right], \quad \vartheta, s \in [-\omega, 0). \quad (4.10)$$

Здесь матричнозначные функции  $X_1(\cdot)$ ,  $X_2(\cdot)$  и матрица  $K_0$  определяются системой уравнений (4.6)–(4.8).

**Доказательство.** Введем обозначения  $X_1(\vartheta) = K(\vartheta, 0)$ ,  $X_2(\vartheta) = \int_{-\omega}^0 K(\vartheta, s) \widehat{B}(s) ds$ ,  $X_3(\vartheta) = \int_{-\omega}^0 K(\vartheta, s) ds$ ,  $\vartheta \in [-\omega, 0)$ ,  $K_0 = K(0, 0)$ . Рассмотрим вспомогательное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$K(\vartheta, s) = A^\top(\vartheta) \left[ F(\vartheta, s) + \int_{\vartheta}^0 \int_s^0 K(s_1, s_2) ds_2 ds_1 \right] A(s), \quad \vartheta, s \in [-\omega, 0), \quad (4.11)$$

где  $F^\top(s, \vartheta) = F(\vartheta, s)$ , функция  $F(\cdot, \cdot) \in \mathbb{C}([-\omega, 0) \times [-\omega, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$ . Уравнение (4.11) имеет единственное решение. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что оно допускает представление (4.9). Уравнение (4.3) совпадает с (4.11), если функция  $F$  определяется формулой (4.10). Учитывая введенные обозначения, из уравнения (4.4) получим (4.6), а из (4.5)–(4.8). Учитывая определение функции  $X_2(\cdot)$  и формулу (4.9), получим уравнение (4.6).  $\square$

**Теорема 5.** Пусть для системы (4.1) соответствующая дискретная задача (3.1), (3.2) стабилизируема. Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой

$$u^0[\mathbf{x}] = -L^{-1} \left\{ \left[ \widehat{B}^\top(0) K_0 + \int_{-\omega}^0 \left( \widehat{B}^\top(s_1) X_1(s_1) + X_{12}^\top(s_1) \right) ds_1 \right] \mathbf{x}(0) + \int_{-\omega}^0 \left[ \widehat{B}^\top(0) K_0 + \int_{-\omega}^0 \widehat{B}^\top(s_1) X_1(s_1) ds_1 + \int_{\vartheta}^0 X_{12}^\top(s_1) ds_1 \right] A(\vartheta) \mathbf{x}(\vartheta) d\vartheta \right\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}. \quad (4.12)$$

Значение критерия качества (3.2) для оптимального управления (4.12) и решения системы (3.1) с начальной функцией  $\varphi$  определяется формулой  $\mathbf{J}_{da} = \langle \mathbf{U}\varphi, \varphi \rangle_{\mathbb{H}}$ .

**Доказательство.** При нахождении оптимального управления дискретной задачи используются формула (3.3) и представления операторов  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{B}^* \mathbf{U} \mathbf{A} + \mathbf{C}_{xu}^*$ .  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 39–51.
2. **Красовский Н.Н.** Об оптимальном регулировании в линейных системах с запаздыванием времени // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 295–302.
3. **Янушевский Р.Т.** Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 410 с.
4. **Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K.** Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 48–88. doi: 10.1137/0313004.
5. **Kushner H.J, Varnea D.I.** On the control of a linear functional-differential equation with quadratic cost // SIAM J. Control. 1970. Vol. 8, no. 2. P. 257–272. doi: 10.1137/0308019.
6. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optimiz. 1983. Vol. 21, no. 5. P. 95–135. doi: 10.1137/0321006.
7. **Егоров А.И.** Уравнения Риккати. М.: СОЛОН-Пресс, 2017. 447 р.
8. **Долгий Ю.Ф.** Точные решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последствием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 124–135.
9. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 716–724.
10. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
11. **Быков Д.С., Долгий Ю.Ф.** Оценка точности аппроксимаций оптимального стабилизирующего управления системы с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 38–47.
12. **Красовский Н.Н., Осипов Ю.С.** О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1963. № 6. С. 3–15.
13. **Долгий Ю.Ф., Кошкин Е.В.** Использование конечномерных аппроксимаций в задаче стабилизации периодических систем с последствием // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 29–45.
14. **Квакернаак Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 656 р.
15. **Фомин В.Н.** Методы управления линейными дискретными объектами. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1985. 336 р.
16. **Долгий Ю.Ф.** Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последствием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 85–96.

Долгий Юрий Филиппович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
Уральский федеральный университет им. Первого президента России Б. Н. Ельцина  
e-mail: yurii.dolgi@imm.uran.ru

Поступила 25.10.2017

Шевченко Роман Иванович  
аспирант  
Уральский федеральный университет  
e-mail: oma170@hotmail.com

## REFERENCES

1. Krasovskii N.N. On the analytic construction of an optimal control in a system with time lags. *J. Appl. Math. Mech.*, 1962, vol. 26, no. 1, pp. 50–67. doi: 10.1016/0021-8928(62)90101-6.
2. Krasovskii N.N. Optimum control in linear systems with time lag. *Select. Transl. Math. Stat. Probab.*, 1966, vol. 6, pp. 189–197.
3. Yanushevsky R.T. *Upravlenie ob"ektami s zapazdyvaniem* [Control of Plants with Time-Lag]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 410 p.

4. Delfour M.C., McCalla C., Mitter S.K. Stability and the infinite-time quadratic cost problem for linear hereditary differential systems. *SIAM J. Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 48–88. doi: 10.1137/0313004.
5. Kushner H.J., Barnea D.I. On the control of a linear functional-differential equation with quadratic cost. *SIAM J. Control*, 1970, vol. 8, no. 2, pp. 257–272. doi: 10.1137/0308019.
6. Gibson J.S. Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations. *SIAM J. Control optimiz.*, 1983, vol. 21, no. 1, pp. 95–139. doi: 10.1137/0321006.
7. Egorov A.I. *Riccati equations*. Sofia, Pensoft, 2007, Ser. Russian Acad. Monographs, no. 5, 383 p. ISBN: 9789546422965. Original Russian text (2nd ed.) published in A.I. Egorov *Uravneniya Rikkati*, Moscow, SOLON-Press, 2017, 448 p.
8. Dolgii Yu.F. Exact solutions of an optimal stabilization problem for systems of differential equations with aftereffect. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 124–135 (in Russian).
9. Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *J. Appl. Math. Mech.*, 1964, vol. 28, no. 4, pp. 876–885. doi: 10.1016/0021-8928(64)90073-5.
10. Osipov Yu.S. Stabilization of control systems with delays. *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 5, pp. 605–618 (in Russian).
11. Bykov D.S., Dolgii Yu.F. Error estimate for approximations of an optimal stabilizing control in a delay system. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2012, vol. 18, no. 2, pp. 38–47 (in Russian).
12. Krasovskii N.N., Osipov, Yu.S. On the stabilization of motions of a plant with delay in a control system. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1963, no. 6, pp. 3–15 (in Russian).
13. Dolgii Y.F., Koshkin E.V. Use of finite-dimensional approximations in a problem of stabilization of periodic systems with aftereffect. *Russ Math.*, 2015, vol. 59, no. 1, pp. 24–38. doi: 10.3103/S1066369X1501003X.
14. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear optimal control systems*. NY etc.: Wiley-Interscience, 1972, 575 p. ISBN: 0-471-51110-2. Translated to Russian under the title *Lineinye optimal'nye sistemy upravleniya*, Moscow, Mir Publ. 1977, 653 p.
15. Fomin V.N. *Discrete linear control systems*. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publ, 1991, 302 p. doi: 10.1007/978-94-011-3248-0.
16. Dolgii Yu.F. Characteristic equation in the problem of asymptotic stability in periodic systems with aftereffect. *Proc. Steklov Inst. Math.* (Suppl.), Dynamical Systems and Control Problems, 2005, suppl. 1, pp. S82–S94.

The paper was received by the Editorial Office on October 25, 2017.

*Yurii Filippovich Dolgii*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru .

*Roman Ivanovich Shevchenko*, doctoral student, Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: oma170@hotmail.com .

УДК 519.17

## АВТОМОРФИЗМЫ $AT_4(4, 4, 2)$ -ГРАФА И ОТВЕЧАЮЩИХ ЕМУ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ<sup>1</sup>

К. С. Ефимов

А. А. Махнев, Д. В. Падучих и М. М. Хамгокова классифицировали дистанционно регулярные локально  $GQ(5, 3)$ -графы. В частности, возникает  $AT_4(4, 4, 2)$ -граф с массивом пересечений  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$  на 644 вершинах. Эти же авторы доказали, что  $AT_4(4, 4, 2)$ -граф не является локально  $GQ(5, 3)$ -графом. Однако существование  $AT_4(4, 4, 2)$ -графа, являющегося локально псевдо- $GQ(5, 3)$ -графом, неизвестно. Антиподальное частное  $AT_4(4, 4, 2)$ -графа является сильно регулярным графом с параметрами  $(322, 96, 20, 32)$ . Оба этих графа являются локально псевдо- $GQ(5, 3)$ -графами. В работе найдены возможные автоморфизмы указанных графов. Оказалось, что группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$  действует интранзитивно на множестве его антиподальных классов.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

**K. S. Efimov. Automorphisms of an  $AT_4(4, 4, 2)$ -graph and of the corresponding strongly regular graphs.**

A.A.Makhnev, D.V.Paduchikh, and M.M.Khamgokova gave a classification of distance-regular locally  $GQ(5, 3)$ -graphs. In particular, there arises an  $AT_4(4, 4, 2)$ -graph with intersection array  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$  on 644 vertices. The same authors proved that an  $AT_4(4, 4, 2)$ -graph is not a locally  $GQ(5, 3)$ -graph. However, the existence of an  $AT_4(4, 4, 2)$ -graph that is a locally pseudo  $GQ(5, 3)$ -graph is unknown. The antipodal quotient of an  $AT_4(4, 4, 2)$ -graph is a strongly regular graph with parameters  $(322, 96, 20, 32)$ . These two graphs are locally pseudo  $GQ(5, 3)$ -graphs. We find their possible automorphisms. It turns out that the automorphism group of a distance-regular graph with intersection array  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$  acts intransitively on the set of its antipodal classes.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-119-127

### Введение

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в доказательствах теорем. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $a$ , т. е. подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех его вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Положим  $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ ,  $a^\perp = \{a\} \cup \Gamma(a)$ . Если граф  $\Gamma$  фиксирован, то вместо  $\Gamma(a)$  будем писать  $[a]$ . Для множества  $X$  вершин графа  $\Gamma$  через  $X^\perp$  обозначим  $\bigcap_{x \in X} x^\perp$ . Если не оговорено противное, то слово “подграф” будет означать “индуцированный подграф”.

Пусть  $\mathcal{F}$  — некоторый класс графов. Граф  $\Gamma$  назовем *локально  $\mathcal{F}$ -графом*, если  $[a]$  лежит в  $\mathcal{F}$  для любой вершины  $a$  графа  $\Gamma$ . Если при этом класс  $\mathcal{F}$  состоит из графов, изоморфных некоторому графу  $\Delta$ , то граф  $\Gamma$  назовем *локально  $\Delta$ -графом*.

*Степенью вершины* называется число вершин в ее окрестности. Граф  $\Gamma$  называется *регулярным* валентности  $k$ , если степень любой вершины из  $\Gamma$  равна  $k$ . Граф  $\Gamma$  назовем *реберно регулярным* с параметрами  $(v, k, \lambda)$ , если он содержит  $v$  вершин, регулярен валентности  $k$ , и

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 14-11-00061-П (теорема 3 и следствие), и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006 (теоремы 1 и 2).

каждое его ребро лежит ровно в  $\lambda$  треугольниках. Граф  $\Gamma$  — *вполне регулярный граф* с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$ , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и  $[a] \cap [b]$  содержит ровно  $\mu$  вершин для любых двух вершин  $a, b$ , находящихся на расстоянии 2 в  $\Gamma$ . Вполне регулярный граф называется *сильно регулярным графом*, если он имеет диаметр 2. Через  $K_{m_1, \dots, m_n}$  обозначим полный многодольный граф с долями  $M_1, \dots, M_n$  порядков  $m_1, \dots, m_n$  соответственно. Если  $m_1 = \dots = m_n = m$ , то указанный граф обозначается через  $K_{n \times m}$ .

Задача классификации локально  $GQ(s, t)$ -графов является классической. В работе [1] классифицированы дистанционно регулярные локально  $GQ(5, 3)$ -графы.

**Предложение.** Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом, в котором окрестность каждой вершины является обобщенным четырехугольником  $GQ(5, 3)$ . Тогда либо диаметр  $\Gamma$  равен 2 и  $\Gamma$  имеет параметры  $(322, 96, 20, 32)$ , либо диаметр  $\Gamma$  равен 4 и  $\Gamma$  — граф с массивом пересечений  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$  на 644 вершинах или с массивом пересечений  $\{96, 75, 24, 1; 1, 8, 75, 96\}$  на 1288 вершинах.

Графы диаметра 4 из предложения являются  $AT4(4, 4, r)$ -графами для  $r$ , равного 2 и 4 соответственно. Ввиду [2]  $AT4(4, 4, 4)$ -граф не существует, а по теореме из [3]  $AT4(4, 4, 2)$ -граф не является локально  $GQ(5, 3)$ -графом. Однако о существовании  $AT4(4, 4, 2)$ -графа, являющегося локально псевдо- $GQ(5, 3)$ -графом, неизвестно.

Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$ . Тогда его антиподальное частное  $\Gamma'$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(322, 96, 20, 32)$ . Оба этих графа являются локально псевдо- $GQ(5, 3)$ -графами. В работе найдены возможные автоморфизмы указанных графов.

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  является сильно регулярным графом с параметрами  $(96, 20, 4, 4)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5\}$  и верно одно из утверждений:

- (1)  $\Omega$  является пустым графом, либо  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 16s$ , либо  $p = 3$  и  $\alpha_1(g) = 24t$ ;
- (2)  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, либо  $p = 5$ ,  $n = 1$  и  $\alpha_1(g) = 40s + 20$  или  $n = 6$  и  $\alpha_1(g) = 40s$ , либо  $p = 3$ ,  $n = 3$  и  $\alpha_1(g) = 24t + 12$  или  $n = 6$  и  $\alpha_1(g) = 24t$ ;
- (3)  $\Omega$  является  $l$ -кокликкой,  $p = 2$ ,  $l$  чётно,  $4 \leq l \leq 16$  и  $\alpha_1(g) = 16t - 4l$ ;
- (4)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь и либо
  - (i)  $p = 3$ ,  $|\Omega| = 3t$ ,  $t = 3, 4, \dots, 8$ , причем в случае  $t = 3$  в  $\Omega$  найдется вершина  $a$  степени 8, для которой  $\Omega(a)$  является объединением изолированных ребер, либо
  - (ii)  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 2l$ ,  $l = 3, 4, \dots, 12$ , причем в случае  $l = 3$  граф  $\Omega$  — октаэдр.

**Теорема 2.** Пусть  $\Gamma$  является сильно регулярным графом с параметрами  $(322, 96, 20, 32)$ , в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами  $(96, 20, 4, 4)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$  и верно одно из утверждений:

- (1)  $\Omega$  является пустым графом, либо  $p = 23$  и  $\alpha_1(g) = 92$ , либо  $p = 7$  и  $\alpha_1(g) = 140l - 28$ , либо  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 40t - 8$ ;
- (2)  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, либо  $p = 3$ ,  $n = 1$  и  $\alpha_1(g) = 60t - 24$  или  $n = 4$  и  $\alpha_1(g) = 60t - 12$ , или  $n = 7$  и  $\alpha_1(g) = 60t$ , либо  $p = 5$ ,  $n = 2$  и  $\alpha_1(g) = 100s + 20$  или  $n = 7$  и  $\alpha_1(g) = 100s + 40$ ;
- (3)  $\Omega$  является  $l$ -кокликкой,  $p = 2$ ,  $l$  чётно,  $4 \leq l \leq 56$  и  $\alpha_1(g) = 20m + 12 + 4l$ ;
- (4)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь, степень любой вершины в  $\Omega$  не больше 24 и либо
  - (i)  $p = 3$ ,  $|\Omega| = 3n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots, 37$  и  $\alpha_1(g) = 60l + 12n$ , либо
  - (ii)  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 2m$ ,  $m = 4, 6, \dots, 56$  и  $\alpha_1(g) = 40s + 4|\Omega| - 8$ .

**Следствие 1.** Сильно регулярный граф с параметрами  $(322, 96, 20, 32)$ , в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами  $(96, 20, 4, 4)$ , не является вершинно транзитивным.



**Теорема 3.** Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$  и верно одно из утверждений:

- (1)  $\Omega$  — пустой граф, либо
- (i)  $p = 2$ ,  $\alpha_4(g) = 4l$ ,  $\alpha_2(g) = 20 - 20l - 80s$ ,  $\alpha_1(g) = 56m + 18l + 40s + 32$  и  $\alpha_3(g) = 592 + 2l + 40s - 56m$ , либо
  - (ii)  $p = 7$ ,  $\alpha_4(g) = 0$ ,  $\alpha_1(g) = 140 - 140l + 196t$ ,  $\alpha_2(g) = 280l + 140$  и  $\alpha_3(g) = 364 - 196t - 140l$ , либо
  - (iii)  $p = 23$ ,  $\alpha_4(g) = 0$ ,  $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 92$  и  $\alpha_2(g) = 460$ ;
- (2)  $\Omega$  является объединением двух изолированных  $t$ -клик, либо  $p = 3$ ,  $t = 1, 4, 7$  и  $\alpha_2(g) = 40s - 10t - 20$ , либо  $p = 5$ ,  $t = 2, 7$  и  $\alpha_2(g) = 200s - 10t + 20$ ;
- (3)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь,  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 4m - \alpha_4(g)$ ,  $\alpha_4(g) = 14e + 2s - 78 + 10n$ ,  $\alpha_1(g) = 8s$ ,  $\alpha_2(g) = 80n + 20 - 20m$  и  $\alpha_3(g) = 624 - 80n + 16m - 8s$ .

Ввиду теоремы 3 и следствия группа автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$  действует интранзитивно на множестве его антиподальных классов.

## 1. Вспомогательные результаты

В этом разделе приведены некоторые вспомогательные результаты, используемые в доказательствах теорем.

**Лемма 1.** Пусть  $\Gamma$  является сильно регулярным графом с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$  и неглавными собственными значениями  $r, s$ , где  $s < 0$ . Если  $\Delta$  — индуцированный регулярный подграф из  $\Gamma$  степени  $d$  на  $w$  вершинах, то

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из  $\Gamma - \Delta$  смежна точно с  $w(k-d)/(v-w)$  вершинами из  $\Delta$ .

Доказательство вытекает из [4, §2].

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф  $\Gamma$  рассматривается как симметричная схема отношений  $(X, \mathcal{R})$  с  $d$  классами, где  $X$  — множество вершин графа,  $R_0$  — отношение равенства на  $X$  и для  $i \geq 1$  класс  $R_i$  состоит из пар  $(u, w)$  таких, что  $d(u, w) = i$ . Для  $u \in \Gamma$  положим  $k_i = |\Gamma_i(u)|$  и  $v = |\Gamma|$ . Классу  $R_i$  отвечает граф  $\Gamma_i$  на множестве вершин  $X$ , в котором вершины  $u, w$  смежны, если  $(u, w) \in R_i$ . Пусть  $A_i$  — матрица смежности графа  $\Gamma_i$  для  $i > 0$  и  $A_0 = I$  — единичная матрица. Тогда  $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$  для чисел пересечений  $p_{ij}^l$  графа  $\Gamma$ .

Пусть  $P_i$  — матрица, в которой на месте  $(j, l)$  стоит  $p_{ij}^l$ . Тогда собственные значения  $p_1(0), \dots, p_1(d)$  матрицы  $P_1$  являются собственными значениями графа  $\Gamma$  кратностей  $m_0 = 1, \dots, m_d$  соответственно. Матрицы  $P$  и  $Q$ , у которых на месте  $(i, j)$  стоят  $p_j(i)$  и  $q_j(i) = m_j p_i(j)/n_i$  соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенствами  $PQ = QP = vI$ .

Пусть  $u_j$  и  $w_j$  — соответственно левый и правый собственные векторы матрицы  $P_1$ , отвечающие собственному значению  $p_1(j)$  и имеющие первую координату 1. Тогда кратность  $m_j$  собственного значения  $p_1(j)$  равна  $v/\langle u_j, w_j \rangle$ . Фактически  $w_j$  являются столбцами матрицы  $P$  и  $m_j u_j$  являются строками матрицы  $Q$ .

Подстановочное представление группы  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  на вершинах графа  $\Gamma$  обычным образом дает матричное представление  $\psi$  группы  $G$  в  $GL(v, \mathbf{C})$ . Пространство  $\mathbf{C}^v$  является ортогональной прямой суммой собственных подпространств  $W_0, W_1, \dots, W_d$  матрицы смежности  $A_1$  графа  $\Gamma$ . Для любого  $g \in G$  матрица  $\psi(g)$  перестановочна с  $A$ , поэтому подпространство  $W_i$  является  $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть  $\chi_i$  — характер представления  $\psi_{W_i}$ . Тогда (см. [5, §3.7]) для  $g \in G$  получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где  $\alpha_j(g)$  — число точек  $x$  из  $X$  таких, что  $d(x, x^g) = j$ .

**Лемма 2.** Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с  $i$ -м целочисленным собственным значением  $\theta_i$ ,  $\psi$  — мономиальное представление группы  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  в группу линейных преобразований пространства  $V = \mathbf{C}^v$ ,  $\chi_i$  — характер проекции  $\psi$  на подпространство  $W_i$  размерности  $m_i$ , порожденное собственными векторами матрицы смежности графа  $\Gamma$ , отвечающими  $\theta_i$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если  $Q$  — рациональная матрица, то для элемента  $g$  из  $G$  имеем  $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$  для любого  $l$ , взаимно простого с  $|g|$ ;
- (2) если  $g$  — элемент из  $G$  простого порядка  $p$ , то  $p$  делит  $m_i - \chi_i(g)$ ;
- (3) если  $g$  — элемент из  $G$  порядка  $p^2$ ,  $p$  — простое число, то  $p^2$  делит  $m_i - \chi_i(g^p)$ .

Доказательство вытекает из [6, лемма 1] и [7].

## 2. Автоморфизмы графа с параметрами (96, 20, 4, 4)

В этом разделе предполагается, что  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами (96, 20, 4, 4) и спектром  $20^1, 4^{45}, -4^{50}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . По [8, теорема 3.2.] имеем  $|\Omega| \leq 96 \cdot 4/16 = 24$ .

**Лемма 3.** Пусть  $\chi_1$  — характер проекции представления  $\psi$  на подпространство  $W_1$  размерности 45. Тогда

- (1)  $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/8 - 3$  и  $\chi_1(g) - 45$  делится на  $p$ ;
- (2) если  $\Omega$  является пустым графом, то либо  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 16s$ , либо  $p = 3$  и  $\alpha_1(g) = 24t$ ;
- (3) если  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, то либо  $p = 5$ ,  $n = 1$  и  $\alpha_1(g) = 40s + 20$  или  $n = 6$  и  $\alpha_1(g) = 40s$ , либо  $p = 3$ ,  $n = 3$  и  $\alpha_1(g) = 24t + 12$  или  $n = 6$  и  $\alpha_1(g) = 24t$ ;
- (4) если  $\Omega$  является  $l$ -кликкой, то  $p = 2$ ,  $l$  четно,  $4 \leq l \leq 16$  и  $\alpha_1(g) = 16t - 4l$ .

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 45 & 9 & -3 \\ 50 & -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\chi_1(g) = 1/32(15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_2(g))$ . Так как  $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$ , то  $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/8 - 3$ . Наконец,  $\chi_1(g) - 45$  делится на  $p$  по лемме 2.

Пусть  $\Omega$  является пустым графом. Тогда  $p \in \{2, 3\}$ . Если  $p = 2$ , то  $\chi_1(g)$  нечетно, поэтому  $\alpha_1(g) = 16s$ . Если  $p = 3$ , то  $\alpha_1(g) = 24t$ .

Пусть  $\Omega$  является  $n$ -кликкой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем  $n \leq 1 + k/m = 6$ . Если  $n = 1$ , то  $p$  делит 20 и 75, поэтому  $p = 5$ ,  $\chi_1(g) = (4 + \alpha_1(g))/8 - 3$  и  $\alpha_1(g) = 40s + 20$ . Если  $n \geq 2$ , то  $p$  делит  $6 - n$ , 15 и 60, поэтому либо  $p = 5$ ,  $n = 6$ ,  $\chi_1(g) = (24 + \alpha_1(g))/8 - 3$  и  $\alpha_1(g) = 40s$ , либо  $p = 3$  и  $n = 3, 6$ . Если  $n = 6$ , то  $\chi_1(g) = (24 + \alpha_1(g))/8 - 3$  и  $\alpha_1(g) = 24t$ . Если  $n = 3$ , то  $\chi_1(g) = (12 + \alpha_1(g))/8 - 3$  и  $\alpha_1(g) = 24t + 12$ .

Пусть  $\Omega$  является  $l$ -кликкой,  $l \geq 2$ . Ввиду границы Хофмана для клик имеем  $l \leq vt/(k+m) = 16$ . Далее,  $p$  делит 4, 16 и  $60-l$ , поэтому  $p = 2$ ,  $l$  четно,  $\chi_1(g) = (4l + \alpha_1(g))/8 - 3$  и  $\alpha_1(g) = 16t - 4l$ .

Пусть  $\Omega$  содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда  $p$  делит 4 и 15, противоречие.

Лемма доказана.

**Лемма 4.** Пусть  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь  $b, a, c$ . Тогда

(1) если  $\Gamma$  содержит собственный сильно регулярный подграф  $\Delta$  с параметрами  $(v', k', 4, 4)$ , то  $\Delta$  — треугольный граф  $T(6)$ ;

(2)  $p \leq 3$ ;

(3) если  $p = 3$ , то  $|\Omega| = 3t$ , где  $t = 3, 4, \dots, 8$ , причем в случае  $t = 3$  в  $\Omega$  найдется вершина  $a$  степени 8, для которой  $\Omega(a)$  является объединением изолированных ребер;

(4) если  $p = 2$ , то  $|\Omega| = 2l$ , где  $l = 3, 4, \dots, 12$ , причем в случае  $l = 3$  граф  $\Omega$  — октаэдр.

**Доказательство.** Допустим, что  $\Gamma$  содержит собственный сильно регулярный подграф  $\Delta$  с параметрами  $(v', k', 4, 4)$ . Тогда  $n^2 = 4(k' - 4)$ ,  $n = 2u$ ,  $k' = u^2 + 4$  и  $\Delta$  имеет неглавные собственные значения  $u, -u$ . Далее, кратность  $u$  равна  $f = (u - 1)(u^2 + 4)(u^2 + u + 4)/(8u)$ , поэтому  $u = 2$ ,  $f = 5$  и  $v' = 15$ .

Если  $p \geq 5$ , то  $\Omega$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(15, 8, 4, 4)$ , поэтому  $p$  делит 81 и  $p = 3$ , противоречие.

Пусть  $p = 3$ . Тогда  $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{1, 4\}$ ,  $|\Omega| = 3t$ ,  $t \leq 8$  и степени вершин в  $\Omega$  равны  $2, 5, \dots, 20$ . Если  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 20, то для любой вершины  $u \in \Gamma - a^\perp$  подграф  $[u] \cap \Omega$  содержит 4 вершины из  $[a]$ . Для  $u \notin \Omega$  получим  $[u] \cap \Omega = [u] \cap [a]$ . Если же  $u \in \Omega$ , то  $[u] - a^\perp$  содержит не более 3 вершин из  $\Omega$ , противоречие с тем, что  $u$  смежна с вершиной из  $\Gamma - (a^\perp \cup \Omega)$ . Значит,  $|\Omega| = 21$  и  $\alpha_1(g) = 0$  (иначе для вершины  $u$ , смежной с  $u^g$ , подграф  $[u] \cap [u^g]$  содержит  $u^g$  и 4 вершины из  $\Omega$ , противоречие). Но  $\chi_1(g) = (84 + \alpha_1(g))/8 - 3$  и  $\alpha_1(g) = 24l + 12$ , противоречие.

Пусть  $|\Omega| = 6$ . Тогда степени вершин  $b, c$  в  $\Omega$  равны 2 и  $\Omega(a)$  содержит единственную вершину степени 4, противоречие.

Пусть  $|\Omega| = 9$ . Если степень вершины  $a$  в  $\Omega$  равна 8, то  $\Omega(a)$  является объединением изолированных ребер, иначе  $\Delta = \Omega(a)$  — регулярный граф степени 4, поэтому  $\Delta$  — кореберно регулярный граф с  $\mu(\Delta) = 3$  и число ребер между  $\Delta(b)$  и  $\Delta_2(b)$  равно  $4 \cdot 3 = 9$ , противоречие. Если в  $\Omega$  нет вершин степени 8, то  $\Omega$  содержит вершину  $e$  степени 2. Для  $\Omega(e) = \{x, y\}$  вершины  $x, y$  смежны и каждая вершина из  $\Omega - e^\perp$  смежна точно с одной вершиной из  $\{x, y\}$ . Далее,  $\Omega(x) - \{e, y\}, \Omega(y) - \{e, x\}$  — трехвершинные графы степени 1, противоречие.

Пусть  $p = 2$ . Тогда  $\lambda_\Omega, \mu_\Omega \in \{0, 2, 4\}$ ,  $|\Omega| = 2l$ ,  $l \leq 12$  и степени вершин в  $\Omega$  равны  $0, 2, \dots, 20$ . Если  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 20, то получим противоречие, как и выше.

Если  $|\Omega| = 4$ , то  $\Omega$  — четырехугольник, противоречие. Если  $|\Omega| = 6$ , то либо  $\Omega$  — октаэдр, либо степени вершин в  $\Omega$  равны 0 или 2. В последнем случае получим противоречие.

Лемма доказана

Из лемм 3, 4 следует теорема 1.

### 3. Автоморфизмы графа с параметрами $(322, 96, 20, 32)$

В этом разделе предполагается, что  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(322, 96, 20, 32)$  и спектром  $96^1, 4^{252}, -16^{69}$ , в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами  $(96, 20, 4, 4)$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . По теореме 3.2. из [8] имеем  $|\Omega| \leq 322 \cdot 32 / 92 = 112$ , а применимо к графу  $\Gamma(a)$  для вершины  $a \in \Omega$ , степень любой вершины в графе  $\Omega$  не превосходит 24.

**Лемма 5.** Пусть  $\chi_2$  — характер проекции представления  $\psi$  на подпространство  $W_2$  размерности 69. Тогда

- (1)  $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/20 + 23/5$  и  $\chi_2(g) - 69$  делится на  $p$ ;
- (2) если  $\Omega$  является пустым графом, то либо  $p = 23$ ,  $\alpha_1(g) = 92$ , либо  $p = 7$  и  $\alpha_1(g) = 140l - 28$ , либо  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 40t - 8$ ;
- (3) если  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, то либо  $p = 3$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha_1(g) = 60t - 24$  или  $n = 4$ ,  $\alpha_1(g) = 60t - 12$ , или  $n = 7$ ,  $\alpha_1(g) = 60t$ , либо  $p = 5$ ,  $n = 2$ ,  $\alpha_1(g) = 100s + 20$  или  $n = 7$ ,  $\alpha_1(g) = 100s + 40$ ;
- (4) если  $\Omega$  является  $l$ -коккликкой, то  $p = 2$ ,  $l$  четно,  $4 \leq l \leq 46$  и  $\alpha_1(g) = 20m + 12 + 4l$ .

**Доказательство.** Для  $i > 1$  положим  $\alpha_i(g) = pw_i$ . Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 252 & 21/2 & -28/5 \\ 69 & -23/2 & 23/5 \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\chi_2(g) = 1/70(15\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g)/2 + \alpha_2(g))$ . Так как  $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$ , то  $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/20 + 23/5$ . Наконец,  $\chi_2(g) - 69$  делится на  $p$  по лемме 2.

Пусть  $\Omega$  является пустым графом. Тогда  $p \in \{2, 7, 23\}$ . Если  $p = 23$ , то  $\chi_2(g) = 23(-w_1(g) + 4)/20$ , поэтому  $\alpha_1(g) = 92$ . Если  $p = 7$ , то  $\chi_2(g) = (-7w_1 + 92)/20$  и  $\alpha_1(g) = 140l - 28$ . Если  $p = 2$ , то число  $\chi_2(g) = (-w_1 + 46)/10$  нечетно и  $\alpha_1(g) = 40t - 8$ .

Пусть  $\Omega$  является  $n$ -кликкой. Ввиду границы Хофмана для клик имеем  $n \leq 1 + k/m = 7$ . Если  $n = 1$ , то  $p$  делит 96 и 225, поэтому  $p = 3$ ,  $\chi_2(g) = 3(32 - w_1)/20$  и  $\alpha_1(g) = 60t - 24$ . Если  $n \geq 2$ , то  $p$  делит  $22 - n$  и 75, поэтому либо  $p = 5$ ,  $n = 2$ , число  $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/20 + 5$  сравнимо с 4 по модулю 5 и  $\alpha_1(g) = 100s + 20$  или  $n = 7$ , число  $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/20 + 6$  сравнимо с 4 по модулю 5 и  $\alpha_1(g) = 100s + 40$ , либо  $p = 3$  и  $n = 4, 7$ . Если  $n = 4$ , то  $\chi_2(g) = 3(36 - w_1)/20$  и  $\alpha_1(g) = 60t - 12$ . Если  $n = 7$ , то  $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/20 + 6$  и  $\alpha_1(g) = 60t$ .

Пусть  $\Omega$  является  $l$ -коккликкой,  $l \geq 2$ . Ввиду границы Хофмана для коклик имеем  $l \leq vt/(k + m) = 46$ . Далее,  $p$  делит 32 и  $162 - l$ , поэтому  $p = 2$ ,  $l$  четно, число  $\chi_2(g) = (l + 23 - \alpha_1(g)/4)/5$  нечетно и  $\alpha_1(g) = 20m + 12 + 4l$ .

Пусть  $\Omega$  содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда  $p$  делит 32 и 75, противоречие.

Лемма доказана.

**Лемма 6.** Пусть  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь  $b, a, c$ . Тогда

- (1)  $\Gamma$  не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами  $(v', k', 20, 32)$ ;
- (2) подграф  $[a]$  не содержится в  $\Omega$  для любой вершины  $a$ ;
- (3) если  $p = 3$ , то  $|\Omega| = 3n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots, 37$  и  $\alpha_1(g) = 60l + 12n$ ;
- (4) если  $p = 2$ , то  $|\Omega| = 2m$ ,  $m = 4, 6, \dots, 56$  и  $\alpha_1(g) = 40s + 4|\Omega| - 8$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $\Gamma$  содержит собственный сильно регулярный подграф  $\Delta$  с параметрами  $(v', k', 20, 32)$ . Тогда  $n^2 = 144 + 4(k' - 32)$ ,  $n = 2u$ ,  $k' = u^2 - 4$  и  $\Delta$  имеет неглавные собственные значения  $u - 6, -(u + 6)$ . Далее, кратность  $u - 6$  равна  $f = (u + 5)(u^2 - 4)(u^2 + u + 2)/(64u)$ , поэтому  $u = 5$ ,  $k = 21$ , противоречие.

Так как степень вершины в графе  $\Omega$  не превосходит 24, то  $[a]$  не содержится в  $\Omega$  для любой вершины  $a$ .

Ввиду теоремы 1 имеем  $p = 2, 3, 5$ .

Пусть  $p = 5$ . Тогда по теореме 1 подграф  $\Omega(a)$  является  $n$ -кликкой, противоречие.

Пусть  $p = 3$ . Тогда по теореме 1 имеем  $|\Omega(a)| = 3t$ ,  $t = 1, 2, \dots, 8$ ,  $\chi_2(g) = (4|\Omega| + 92 - \alpha_1(g))/20$  и  $\alpha_1(g) = 60l + 4|\Omega| - 8$ .

Пусть  $p = 2$ . Тогда по теореме 1 имеем  $|\Omega(a)| = 2l$ ,  $l = 2, 3, \dots, 12$ , число  $\chi_2(g) = (4|\Omega| + 92 - \alpha_1(g))/20$  нечетно и  $\alpha_1(g) = 40s + 4|\Omega| - 8$ .

Лемма доказана.

Из лемм 5, 6 следует теорема 2.

**Лемма 7.** Пусть группа  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  действует транзитивно на множестве вершин графа  $\Gamma$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) если  $f$  — элемент из  $G$  порядка 23, то  $C_G(f) = \langle f \rangle$ ;
- (2)  $S(G) = O_2(G)$ ;
- (3) если  $\bar{T}$  — цоколь группы  $\bar{G} = G/O_2(G)$ , то  $|\bar{T}|$  делится на 11.

**Доказательство.** Пусть  $f$  — элемент из  $G$  порядка 23 и  $g$  — элемент из  $C_G(f)$  порядка  $p < 23$ . По теореме 2  $\text{Fix}(f)$  — пустой граф и  $\alpha_1(f) = 92$ . Ввиду теоремы 2 из действия  $f$  на  $\Omega$  следует, что либо  $\Omega$  — пустой граф,  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 40t - 8$  делится на 23, либо  $p = 3$ ,  $|\Omega| = 3n + 2$ ,  $n = 7, 30$  и  $\alpha_1(g) = 60l + 12n$  делится на 23, либо  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 2m$ ,  $m = 23, 46$  и  $\alpha_1(g) = 40s + 4|\Omega| - 8$  делится на 23. В первом случае  $40t - 8$  не делится на 23. Во втором случае  $n = 7$  и  $60l + 84$  не делится на 23. В третьем случае  $40s - 8$  не делится на 23. В любом случае получаем противоречие.

Так как  $v = 2 \cdot 7 \cdot 23$ , то  $Q = O_p(G) \neq 1$  влечет  $p = 2, 7, 13$ . Ввиду утверждения (1) имеем  $p = 2$ . Далее, длины  $Q$ -орбит на множестве вершин графа  $\Gamma$  равны 2.

Положим  $\bar{G} = G/O_2(G)$ . Ввиду таблицы 1 из [9] порядок цокля  $\bar{T}$  группы  $\bar{G} = G/O_2(G)$  делится на 11.

Лемма доказана.

Так как по теореме 2  $|G|$  не делится на 11, то  $G$  действует интранзитивно на множестве вершин графа  $\Gamma$ . Следствие доказано.

#### 4. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$

До конца работы предполагается, что  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$  и спектром  $96^1, 24^{46}, 4^{252}, -4^{276}, -16^{69}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ .

**Лемма 8.** Пусть  $\chi_1$  — характер проекции представления  $\psi$  на подпространство  $W_1$  размерности 46,  $\chi_4$  — характер проекции представления  $\psi$  на подпространство  $W_4$  размерности 69. Тогда

- (1)  $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g))/56$  и  $\chi_1(g) - 46$  делится на  $p$ ;
- (2)  $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/40 - 23/2$  и  $\chi_4(g) - 69$  делится на  $p$ ;
- (3) если  $\Omega$  является пустым графом, то либо
  - (i)  $p = 2$ ,  $\alpha_4(g) = 4l$ ,  $\alpha_2(g) = 20 - 20l - 80s$ ,  $\alpha_1(g) = 56m + 18l + 40s + 32$  и  $\alpha_3(g) = 592 + 2l + 40s - 56m$ , либо
  - (ii)  $p = 7$ ,  $\alpha_4(g) = 0$ ,  $\alpha_1(g) = 140 - 140l + 196t$ ,  $\alpha_2(g) = 280l + 140$  и  $\alpha_3(g) = 364 - 196t - 140l$ , либо
  - (iii)  $p = 23$ ,  $\alpha_4(g) = 0$ ,  $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 92$  и  $\alpha_2(g) = 460$ .

**Доказательство.** Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 46 & 23/2 & 0 & -23/2 & -46 \\ 252 & 21/2 & -28/5 & 21/2 & 252 \\ 276 & -23/2 & 0 & 23/2 & -276 \\ 69 & -23/2 & 23/5 & -23/2 & 69 \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\chi_1(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 4\alpha_4(g))/56$  и  $\chi_1(g) - 46$  делится на  $p$ . Аналогично,  $\chi_4(g) = (6\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 2\alpha_2(g)/5 - \alpha_3(g) + 6\alpha_4(g))/56$ . Так как  $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$ , то  $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/40 - 23/2$ ,  $\chi_4(g) - 69$  делится на  $p$ .

Пусть  $\Omega$  является пустым графом. Тогда  $p \in \{2, 7, 23\}$ . Если  $p = 2$ , то  $\alpha_4(g) = 4l$ ,  $\chi_4(g) = (\alpha_2(g) + 20l - 460)/40$ , число  $\chi_4(g)$  нечетно и  $\alpha_2(g) = 20 - 20l - 80s$ . Далее,  $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 624 +$

$20l + 80s$  и число  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 312 - 18l - 40s)/28$  четно, поэтому  $\alpha_1(g) = 56m + 18l + 40s + 32$  и  $\alpha_3(g) = 592 + 2l + 40s - 56m$ .

Если  $p = 7$ , то  $\alpha_4(g) = 0$ ,  $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/40 - 23/2$  и  $\alpha_2(g) = 280l + 140$ . Далее,  $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 504 - 280l$ ,  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 252 + 140l)/28$  и число  $\chi_1(g)$  сравнимо с 4 по модулю 7, поэтому  $\alpha_1(g) = 140 - 140l + 196t$  и  $\alpha_3(g) = 364 - 196t - 140l$ .

Если  $p = 23$ , то  $\alpha_4(g) = 0$ ,  $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/40 - 23/2$  и  $\alpha_2(g) = 460$ . Далее,  $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 184$  и  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 92)/28$ , поэтому  $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 92$ .

Лемма доказана.

**Лемма 9.** *Элемент  $g$  индуцирует нетривиальный автоморфизм графа  $\Gamma'$  и выполняется одно из утверждений:*

- (1)  $\Omega$  — пустой граф;
- (2)  $\Omega$  является объединением двух изолированных  $t$ -клик, либо  $p = 3$ ,  $t = 1, 4, 7$  и  $\alpha_2(g) = 40s - 10t - 20$ , либо  $p = 5$ ,  $t = 2, 7$  и  $\alpha_2(g) = 200s - 10t + 20$ ;
- (3)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь,  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 4m - \alpha_4(g)$ ,  $\alpha_4(g) = 14e + 2s - 78 + 10n$ ,  $\alpha_1(g) = 8s$ ,  $\alpha_2(g) = 80n + 20 - 20m$  и  $\alpha_3(g) = 624 - 80n + 16m - 8s$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $g$  индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного  $\Gamma'$ , то  $p = 2$  и  $\alpha_4(g) = v$ . Противоречие с леммой 9.

По теореме 2 либо  $\Omega'$  — пустой граф и  $p = 2, 7, 23$ , либо  $\Omega'$  является кликой или  $2l$ -кликкой, либо  $\Omega'$  содержит геодезический 2-путь.

Если  $\Omega'$  — пустой граф, то и  $\Omega$  — пустой граф.

Если  $\Omega'$  является  $t$ -кликкой, то по теореме 2  $p = 3, 5$  и  $\Omega$  является объединением двух изолированных  $t$ -клик. В этом случае по теореме 2 имеем  $\alpha_4(g) = 0$  и либо  $p = 3$ ,  $t = 1, 4, 7$ , либо  $p = 5$  и  $t = 2, 7$ .

Если  $p = 3$ , то  $\chi_4(g) = (10t - 460 + \alpha_2(g))/40$ , поэтому  $\alpha_2(g) = 40s - 10t - 20$ , а если  $p = 5$ , то число  $\chi_4(g) = (10t - 460 + \alpha_2(g))/40$  сравнимо с 4 по модулю 5, поэтому  $\alpha_2(g) = 200s - 10t + 20$ .

Если  $\Omega'$  является  $2l$ -кликкой, то по теореме 2  $p = 2$ ,  $\alpha'_1(g) = 20m + 12 + 4l$  и  $|\Omega| = 4l - \alpha_4(g)$ . Далее, число  $\chi_4(g) = (20l - 460 + \alpha_2(g))/40$  нечетно, поэтому  $\alpha_2(g) = 80m - 20l + 20$ . Теперь  $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 564 + 16l - 80m$ , поэтому  $282 + 8l - 40m = 20m + 12 + 4l$ , противоречие.

Пусть  $\Omega'$  содержит геодезический 2-путь. Тогда по теореме 2 либо

- (i)  $[\bar{a}] \subset \Omega'$  для некоторой вершины  $\bar{a}$  и  $p = 3, 5$ , либо
- (ii)  $p = 3$ ,  $|\Omega'| = 3n + 1$ ,  $n = 1, 2, \dots, 37$ ,  $\alpha'_1(g) = 60l + 12n$ , либо
- (iii)  $p = 2$ ,  $|\Omega'| = 2m$ ,  $m = 4, 6, \dots, 56$ ,  $\alpha'_1(g) = 40s + 8m - 8$ .

В случае (i) для вершины  $u \in \Gamma_2(a)$  имеем  $|[u] \cap \Omega| = 32$ , противоречие. В случае (ii) имеем  $\alpha_4(g) = 0$ , число  $\chi_4(g) = (30n - 450 + \alpha_2(g))/40$  делится на 3, поэтому  $\alpha_2(g) = 120m - 30n - 30$ . С другой стороны,  $\alpha'_2(g) = 321 - 60l - 15n$  и  $60m - 15 = 321 - 60l$ , противоречие.

В случае (iii) имеем  $|\Omega| = 4m - \alpha_4(g)$ . Далее, число  $\chi_4(g) = (20m - 460 + \alpha_2(g))/40$  нечетно, поэтому  $\alpha_2(g) = 80n + 20 - 20m$  и  $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 624 - 80n + 16m$ . Теперь число  $\chi_1(g) = (16m + \alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 8\alpha_4(g))/56$  четно, поэтому  $2\alpha_1(g) - (624 - 80n) - 8\alpha_4(g) = -112e$ ,  $\alpha_1(g) = 8s$  и  $\alpha_4(g) = 14e + 2s - 78 + 10n$ .

Лемма доказана.

Из лемм 8, 9 следует теорема 3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М. О вполне регулярных локально  $GQ(5, 3)$ -графах // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 6. С. 744–747.
2. Jurisic A., Koolen J. Classification of the family  $AT_4(qs, q, q)$  of antipodal tight graphs // J. Comb. Theory. 2011. Vol. 118, no. 3. P. 842–852.
3. Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М. О локально  $GQ(5, 3)$ -графах // Тез. докл. Междунар. конф. “Алгебра и комбинаторика”, посвящен. 60-летию А.А. Махнева. Екатеринбург, 2013. С. 64–66.

4. Brouwer A.E., Haemers W.H. Spectra of graphs. NY: Springer, 2012. P. 1–20. doi: 10.1007/978-1-4614-1939-6\_1.
5. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Part of the Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete book series (MATHE3, vol. 18). Berlin: Springer, 1989. P. 391–412. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2\_13.
6. Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений  $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$  // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. MacKay M., Siran J. Search for properties of the missing Moore graph // Linear algebra and its applications. 2010. Vol. 432. P. 2381–2398.
8. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 2-3. P. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005.
9. Zavaritsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Ефимов Константин Сергеевич

канд. физ.-мат. наук

Уральский федеральный университет,

Уральский государственный экономический университет,

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург

e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com

#### REFERENCES

1. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Khamgokova M.M. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 82, no. 7, pp. 967–970. doi: 10.1134/S1064562410060335.
2. Jurisic A., Koolen J. Classification of the family  $AT_4(qs, q, q)$  of antipodal tight graphs. *J. Comb. Theory*, 2011, vol. 118, no. 3, pp. 842–852. doi: 10.1016/j.jcta.2010.10.001.
3. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Khamgokova M.M. On locally  $GQ(5, 3)$ -graphs. In: *Algebra and combinatorics: Abstr. internat. conf. dedicated to A.A. Makhnev's 60th Birthday*, Ekaterinburg, Russia, 2013 (UMTs-UI, Ekaterinburg, 2013), pp. 64–66 (in Russian).
4. Brouwer A.E., Haemers W.H. Graph Spectrum. In: *Spectra of Graphs*. Universitext. Springer, New York. 2012, pp. 1–20. doi: 10.1007/978-1-4614-1939-6\_1.
5. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Sporadic graphs. In: *Distance-regular graphs*. Part of the Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete book series (MATHE3, vol. 18), Berlin, Heidelberg, Springer, 1989, pp. 391–412. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2\_13.
6. Gavriluyuk A.L., Makhnev, A.A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array  $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ . *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282.
7. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, no. 2-3, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005.
8. Zavaritsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Siberian Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on September 1, 2017.

*Konstantin Sergeevich Efimov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia; Ural State University of Economics, Ekaterinburg, 620144 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: konstantin.s.efimov@gmail.com.

УДК 519.17+512.54

## АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ <sup>1</sup>

А. Х. Журтов, М. Х. Шерметова

Дистанционно регулярный граф  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$  является  $AT_4$ -графом. Его антиподальное частное  $\Gamma'$  имеет параметры  $(392, 115, 18, 40)$  и сильно регулярные первую и вторую окрестности вершин с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$  и  $(276, 75, 10, 24)$ . Более того, вторая окрестность вершины в  $\Gamma$  имеет массив пересечений  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$  и является 4-накрытием сильно регулярного графа с параметрами  $(276, 75, 10, 24)$ . Ранее А. А. Махнев, Д. В. Падучих и М. С. Самойленко нашли возможные автоморфизмы графа с параметрами  $(392, 115, 18, 40)$  и графа с массивом пересечений  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$ . В работе найдены автоморфизмы графа  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ . Доказано также, что группа автоморфизмов графа  $\Gamma$  действует интранзитивно на множестве его антиподальных классов.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

**A. Kh. Zhurtov, M. Kh. Shermetova. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ .**

A distance-regular graph  $\Gamma$  with intersection array  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$  is an  $AT_4$ -graph. The antipodal quotient  $\Gamma'$  has parameters  $(392, 115, 18, 40)$ , and its first and second neighborhoods of vertices are strongly regular with parameters  $(115, 18, 1, 3)$  and  $(276, 75, 10, 24)$ . Moreover, the second neighborhood of any vertex in  $\Gamma_2(u)$  has intersection array  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$  and is a 4-cover of a strongly regular graph with parameters  $(276, 75, 10, 24)$ . Earlier, Makhnev, Paduchikh, and Samoilenko found possible automorphisms of a graph with parameters  $(392, 115, 18, 40)$  and of a graph with intersection array  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$ . In this paper we find automorphisms of a graph with intersection array  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ . It is proved that the automorphism group of this graph acts intransitively on the set of its antipodal classes.

Keywords: distance-regular graph, automorphism of a graph.

MSC: 05B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-128-135

### Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим  $i$ -окрестность вершины  $a$ , т. е. подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Положим  $[a] = \Gamma_1(a)$  и  $a^\perp = \{a\} \cup [a]$ .

Граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве его вершин — совпадать или находиться на расстоянии  $d$  — является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются антиподальными. Антиподальное частное  $\Gamma'$  графа  $\Gamma$  в качестве вершин имеет антиподальные классы графа  $\Gamma$ , и классы  $u', w'$  смежны, если  $u'$  содержит вершину, смежную с вершиной из  $w'$ . Если каждый антиподальный класс содержит ровно  $r$  вершин, то  $r$  называется *индексом антиподальности*, а  $\Gamma$  —  $r$ -накрытием графа  $\Gamma'$ . Если  $v$  — число вершин в  $\Gamma$ , то  $\Gamma'$  содержит  $v/r$  вершин.

Если вершины  $u, w$  находятся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , то через  $b_i(u, w)$  (соответственно  $c_i(u, w)$ ) обозначим число вершин в пересечении  $\Gamma_{i+1}(u)$  (соответственно  $\Gamma_{i-1}(u)$ ) с  $[w]$ . Граф  $\Gamma$  диаметра  $d$  называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений*  $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$ ,

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект 14-11-00061-П.



если значения  $b_i(u, w)$  и  $c_i(u, w)$  не зависят от выбора вершин  $u, w$ , находящихся на расстоянии  $i$  в  $\Gamma$ , для любого  $i = 0, \dots, d$ . Положим  $a_i = k - b_i - c_i$ . Заметим, что для дистанционно регулярного графа  $b_0$  это степень графа, а  $c_1 = 1$  (см. [1]).

Для подмножества  $X$  автоморфизмов графа  $\Gamma$  через  $\text{Fix}(X)$  обозначается множество всех вершин графа  $\Gamma$ , неподвижных относительно любого автоморфизма из  $X$ . Далее, через  $p_{ij}^l(x, y)$  обозначим число вершин в подграфе  $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$  для вершин  $x, y$ , находящихся на расстоянии  $l$  в графе  $\Gamma$ . В дистанционно регулярном графе числа  $p_{ij}^l(x, y)$  не зависят от выбора вершин  $x, y$ , обозначаются через  $p_{ij}^l$  и называются числами пересечений графа  $\Gamma$ .

Пусть  $\Gamma$  является  $AT4(p, p + 2, r)$ -графом. По [2, предложение 2] число  $2p(p + 1)(p + 2)/r$  четно,  $r < p + 2$ ,  $r$  делит  $2(p + 1)$ ,  $\Gamma$  — граф с массивом пересечений  $\{(p^2 + 4p + 2)(p + 2), (p + 3)(p + 1)^2, (r - 1)2(p + 1)(p + 2)/r, 1; 1, 2(p + 1)(p + 2)/r, (p + 3)(p + 1)^2, (p^2 + 4p + 2)(p + 2)\}$ , и для любой вершины  $u \in \Gamma$  подграф  $\Gamma_2(u)$  является антиподальным дистанционно регулярным графом диаметра 4.

Если  $\Gamma$  —  $AT4(2, 4, 3)$ -граф с массивом пересечений  $\{56, 45, 24, 1; 1, 12, 45, 56\}$ , то  $\Gamma'$  имеет параметры  $(162, 56, 10, 24)$  и неглавные собственные значения 2,  $-16$ , первая и вторая окрестности вершины в  $\Gamma'$  сильно регулярны с параметрами  $(56, 10, 0, 2)$  и  $(105, 32, 4, 12)$ , вторая окрестность вершины в  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ . В [3] доказана единственность последнего графа.

Если  $\Gamma$  —  $AT4(4, 6, 5)$ -граф с массивом пересечений  $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ , то  $\Gamma'$  имеет параметры  $(800, 204, 28, 60)$  и неглавные собственные значения 4,  $-36$ , первая и вторая окрестности вершины в  $\Gamma'$  сильно регулярны с параметрами  $(204, 28, 2, 4)$  и  $(595, 144, 18, 40)$ , вторая окрестность вершины в  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$ . Автоморфизмы последнего графа найдены в [4].

Дистанционно регулярный граф  $\Gamma$  с массивом пересечений  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$  является  $AT4(3, 5, 4)$ -графом. Антиподальное частное  $\Gamma'$  имеет параметры  $(392, 115, 18, 40)$ , первая и вторая окрестности вершины в  $\Gamma'$  сильно регулярны с параметрами  $(115, 18, 1, 3)$  и  $(276, 75, 10, 24)$ , вторая окрестность вершины в  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$  (являющийся 4-накрытием сильно регулярного графа с параметрами  $(276, 75, 10, 24)$ ). В [5] (уточнено в [6, следствие 2]) найдены автоморфизмы графа с массивом пересечений  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 175\}$ . В [7] (уточнено в [6, теорема 3]) найдены автоморфизмы графа с параметрами  $(392, 115, 18, 40)$ .

В данной работе найдены возможные автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$  на  $v = 1104$  вершинах.

**Теорема.** Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$  на  $v = 304$  вершинах,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент из  $G$  простого порядка  $p$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$  и выполняется одно из следующих утверждений:

(1)  $g$  индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного  $\Gamma'$ ,  $p = 2$  и  $\alpha_4(g) = v$ ;

(2)  $\Omega$  — пустой граф,  $\alpha_0(g) = \alpha_4(g) = 0$ , и либо  $p = 23$ ,  $\alpha_1(g) = 92$ ,  $\alpha_2(g) = 736$  и  $\alpha_3(g) = 276$ , либо  $p = 3$ ,  $\alpha_1(g) = 60t + 15s + 3$ ,  $\alpha_2(g) = 1056 - 240s$  и  $\alpha_3(g) = -60t + 225s + 45$ , либо  $p = 2$ ,  $\alpha_1(g) = 40t + 40s - 8$ ,  $\alpha_2(g) = 1056 - 160s$  и  $\alpha_3(g) = -40t + 120s + 56$ ;

(3)  $\Omega'$  является  $n$ -кликкой, и либо  $\Omega$  — антиподальный класс,  $p = 5$ ,  $\alpha_1(g) = 100s + 100t + 20$ ,  $\alpha_2(g) = 800 - 400t$  и  $\alpha_3(g) = -100s + 300t + 280$ , либо  $p = 2$ ,  $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 16$ ,  $\alpha_1(g) = 40s + 40t + 24 - 5\alpha_0(g)$ ,  $\alpha_2(g) = 992 - 160t$  и  $\alpha_3(g) = 120t - 40s + 72 + 5\alpha_0(g)$ ;

(4)  $\Omega'$  является  $l$ -кликкой,  $3 \leq l \leq 48$ ,  $l$  делится на 3,  $p = 3$ ,  $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 4l$ ,  $\alpha_1(g) = 60s + 60t + 8l + 12 - 5\alpha_0(g)$ ,  $\alpha_2(g) = 1056 - 240t - 16l$  и  $\alpha_3(g) = 180t + 4l + 36 - 60s + 5\alpha_0(g)$ ;

(5)  $\Omega'$  содержит геодезический 2-путь, и либо

(i)  $p = 7$ ,  $|\Omega'| = 7l + 3$ ,  $l \in \{5, 6, 7, 8\}$ , либо

(ii)  $p = 5$ ,  $|\Omega'| = 5r + 1$ ,  $4 \leq r \leq 17$ , либо

(iii)  $p = 3$ ,  $|\Omega'| = 3s$ ,  $3 \leq s \leq 27$ , либо

(iv)  $p = 2$ ,  $|\Omega'| = 2t$ ,  $4 \leq t \leq 46$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ . Тогда группа  $\text{Aut}(\Gamma)$  действует интранзитивно на множестве антиподальных классов графа  $\Gamma$ .

Доказательство теоремы опирается на метод Г. Хигмена.

Подстановочное представление группы  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  на вершинах графа  $\Gamma$  с  $v$  вершинами обычным образом дает матричное представление  $\psi$  группы  $G$  в  $GL(v, \mathbf{C})$ . Пространство  $\mathbf{C}^v$  является ортогональной прямой суммой собственных подпространств  $W_0, \dots, W_d$  матрицы смежности  $A = A_1$  графа  $\Gamma$ . Для любого  $g \in G$  матрица  $\psi(g)$  перестановочна с  $A$ , поэтому подпространство  $W_i$  является  $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть  $\chi_i$  — характер представления  $\psi|_{W_i}$ . Тогда (см. [9, § 3.7]) для  $g \in G$  получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где  $\alpha_j(g)$  — число точек  $x$  из  $X$  таких, что  $d(x, x^g) = j$ .

## 1. Граф с параметрами (276, 75, 10, 24), вершинно симметричный случай

В [8] доказано следующее.

**Предложение 1.** Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами (276, 75, 10, 24),  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$ ,  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $|\Omega| \leq 92$ ,  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$  и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1)  $\Omega$  — пустой граф, и либо  $p = 23$ ,  $\alpha_1(g) = 92$ , либо  $p = 3$ ,  $\alpha_1(g) = 60s + 12$ , либо  $p = 2$ ,  $\alpha_1(g) = 40s + 12$ ;
- (2)  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, и либо  $n = 1$ ,  $p = 5$ ,  $\alpha_1(g) = 100t + 75$ , либо  $n = 4$ ,  $p = 2$ ,  $\alpha_1(g) = 40t + 24$ ;
- (3)  $\Omega$  является  $l$ -коккликкой,  $3 \leq l \leq 48$ ,  $l$  делится на 3,  $p = 3$ , и  $\alpha_1(g) = 60t + 3l + 12$ ;
- (4)  $\Omega$  содержит ребро и является объединением  $t$  изолированных клик,  $t \geq 2$ ,  $p = 2$ , и порядок максимальной клики в  $\Omega$  равен 2 или 4;
- (5)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь, и либо
  - (i)  $p = 7$  и  $|\Omega| \in \{38, 45, 52, 59\}$ , либо
  - (ii)  $p = 5$ ,  $|\Omega| = 5r + 1$ ,  $4 \leq r \leq 18$ , либо
  - (iii)  $p = 3$ ,  $|\Omega| = 3s$ ,  $3 \leq s \leq 30$ , либо
  - (iv)  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 2t$ ,  $4 \leq t \leq 46$ .

**Следствие 2.** Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами (276, 75, 10, 24). Тогда группа  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  действует интранзитивно на множестве его вершин.

В этом разделе  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами (276, 75, 10, 24), спектром  $75^1, 3^{230}, -17^{45}$ , и группа  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  действует транзитивно на множестве его вершин. По предложению 1 имеем  $\{2, 3, 23\} \subseteq \pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$ .

**Лемма 1.1.** Пусть  $U$  — трехвершинный подграф из  $\Gamma$ ,  $X_i$  — множество вершин из  $\Gamma - U$ , смежных точно с  $i$  вершинами из  $U$ ,  $x_i = |X_i|$ ; число  $x_0 + x_3$  равно 81, если  $U$  является кликой, равно 120, если  $U$  является коккликкой и равно 95, если  $U$  является геодезическим 2-путем.

**Доказательство.** Пусть  $U$  является кликой  $a, b, c$ . Тогда  $X_2$  содержит по  $9 - x_3$  вершин из  $[a] \cap [b]$ ,  $[b] \cap [c]$  и  $[a] \cap [c]$ . Далее,  $X_1$  содержит по  $55 + x_3$  вершин из  $[a]$ ,  $[b]$  и  $[c]$ . Отсюда  $x_0 + x_3 = 276 - 3 - 27 - 165 = 81$ . Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи.

Лемма доказана.

**Лемма 1.2** (см. [8, лемма 2]). Пусть  $\chi_1$  — характер, полученный при проектировании  $\psi(G)$  на подпространство размерности 230,  $g \in G$ . Тогда  $\chi_1(g) = (17\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 92)/20$ ,  $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^j)$  для любого  $j$ , взаимно простого с  $|g|$ , и если  $|g| = p$  — простое число, то число  $\chi_1(g) - 230$  делится на  $p$ .

**Лемма 1.3.** Пусть  $f$  — элемент порядка 23 из  $G$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p < 23$  из  $C_G(f)$ . Тогда  $Fix(f)$  — пустой граф,  $\alpha_1(f) = 92$  и выполняется одно из следующих утверждений:

(1)  $\Omega = Fix(g)$  — пустой граф,  $p = 2$  и  $\alpha_1(g) = 92$ ;

(2)  $\Omega$  содержит ребро и является объединением изолированных 2-клик или  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь,  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 46$  и  $\alpha_1(g) = 230$ .

**Доказательство.** По предложению 1 имеем  $Fix(f)$  — пустой граф и  $\alpha_1(f) = 92$ .

Если  $Fix(g)$  — пустой граф, то ввиду леммы 1.2 либо  $p = 3$ ,  $\alpha_1(g) = 60s + 12$  и  $s = 9$ , что противоречиво, либо  $p = 2$ ,  $\alpha_1(g) = 40s + 12$  и  $s = 2$ .

Если  $\Omega$  — непустой граф, то 23 делит  $|\Omega|$ , по предложению 1 имеем

(i) либо  $\Omega$  содержит ребро и является объединением изолированных клик,  $p = 2$ , и  $|\Omega| = 46, 92$ ;

(ii) либо  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь,  $p = 5$ ,  $|\Omega| = 5r + 1$ ,  $r = 9$  или  $p = 3$ ,  $|\Omega| = 3s$ ,  $s = 23$  или  $p = 2$ ,  $|\Omega| = 2t$ ,  $t = 23, 46$ .

В случае  $p = 5$  по лемме 1.2 число  $\chi_1(g) = 23(30 + \alpha_1(g)/23)/20$  делится на 5, противоречие.

В случае  $p = 3$  имеем  $\chi_1(g) = 23(47 + \alpha_1(g)/23)/20$  и  $\alpha_1(g) = 23(20l - 7)$ , противоречие.

Наконец, в случае  $p = 2$  число  $\chi_1(g)$  четно и либо  $\chi_1(g) = 23(30 + \alpha_1(g)/23)/20$ , и  $\alpha_1(g) = 23(40l + 10)$ , либо  $\chi_1(g) = (64 + \alpha_1(g)/23)/20$  и  $\alpha_1(g) = 23(40l + 16)$ , противоречие.

Лемма доказана.

**Лемма 1.4.** Выполняются следующие утверждения:

(1)  $O_{23'}(G) = O_2(G)$ ;

(2)  $G$  — расширение  $O_2(G)$  с помощью подгруппы из диэдральной группы порядка 46.

**Доказательство.** Допустим, что  $|O_{23'}(G)|$  делится на 3, и выберем силовскую 3-подгруппу  $R$  из  $O_{23'}(G)$ . Тогда  $|R : R_a| = 3$  и  $R_a$  фиксирует все три вершины из  $U = a^R$ . Далее,  $|Fix(R_a)| \leq 92$ , и для любой вершины  $b \in \Gamma - Fix(R_a)$  каждая вершина из  $U$  не смежна ни с одной вершиной или смежна с 3 вершинами из  $b^R = b^{R_a}$ . Отсюда  $X_0(U) \cup X_3(U)$  содержит не менее 181 вершин. Противоречие с леммой 1.1.

Так как  $v = 12 \cdot 23$ , то  $O_{23'}(G) = O_{2,3}(G)$ .

Если  $G$  — разрешимая группа, то ввиду леммы 1.3 группа  $G$  — расширение  $O_2(G)$  с помощью подгруппы из диэдральной группы порядка 46.

Пусть  $G$  — неразрешимая группа и  $\bar{T}$  — цоколь группы  $\bar{G} = G/O_{2,3}(G)$ . По [12, теорема 1] из того, что 23 делит  $|\bar{T}|$ , следует, что 11 делит  $|\bar{T}|$ , противоречие с тем, что  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 23\}$ .

Лемма доказана.

Из леммы 1.4 с учетом делимости  $|G|$  на 3, вытекает следствие 2.

## 2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$

Сначала приведем один вспомогательный результат.

**Лемма 2.1.** Пусть  $\Gamma$  — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{k, k - \lambda - 1, \mu(r - 1), 1; 1, \mu, k - \lambda - 1, k\}$  и спектром  $k^1 > n^e > t^f > (-m)^c > (-s)^h$ . Тогда вторая

матрица  $Q$  собственных значений графа  $\Gamma$  равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & en/k & 0 & -en/(k(r-1)) & -e/(r-1) \\ f & ft/k & -fr\mu(t+1)/(k(k-\lambda-1)) & ft/k & f \\ c & -cm/k & 0 & cm/(k(r-1)) & -c/(r-1) \\ h & -hs/k & hr\mu(s-1)/(k(k-\lambda-1)) & -hs/k & h \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Утверждение следует из доказательства леммы 3 в [10].

Пусть  $\Gamma$  является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений  $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$  и спектром  $75^1, 15^{207}, 3^{230}, -5^{621}, -17^{45}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент из  $G$  простого порядка  $p$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$  содержит по  $s$  вершин в  $t$  антиподальных классах. Тогда  $v = 1 + 75 + 800 + 225 + 3 = 1104 = 16 \cdot 3 \cdot 23$ .

**Лемма 2.2.** Пусть  $\chi_1$  — характер, полученный при проектировании  $\psi(G)$  на подпространство размерности 207, и  $\chi_4$  — характер, полученный при проектировании  $\psi(G)$  на подпространство размерности 45. Тогда  $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g))/80$ ,  $\chi_4(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 4\alpha_4(g))/80 - 51/5$ . Далее,  $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^j)$  для любого  $j$ , не кратного  $p$ , и числа  $\chi_1(g) - 207$ ,  $\chi_4(g) - 45$  делятся на  $p$ .

**Доказательство.** По лемме 2.1 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 207 & 207/5 & 0 & -69/5 & -69 \\ 230 & 46/5 & -69/15 & 46/5 & 230 \\ 621 & -207/5 & 0 & 69/5 & -207 \\ 45 & -51/5 & 18/5 & -51/5 & 45 \end{pmatrix}.$$

Поэтому  $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g))/80$ .

Аналогично,  $\chi_4(g) = (75\alpha_0(g) - 17\alpha_1(g) + 6\alpha_2(g) - 17\alpha_3(g) + 75\alpha_4(g))/(368 \cdot 5)$ . Подставляя в эту формулу значение  $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$ , получим  $\chi_4(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 4\alpha_4(g))/80 - 51/5$ .

Последнее утверждение леммы следует из леммы 1 в [11].

Лемма доказана.

**Лемма 2.3.** Если  $g$  индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного  $\Gamma'$ , то  $p = 2$  и  $\alpha_4(g) = v$ . Более того, порядок подгруппы из  $G$ , индуцирующей тривиальные автоморфизмы графа  $\Gamma'$ , делит 4.

**Доказательство.** По условию  $\alpha_i(g)$  может быть не равно 0 только для  $i = 0, 4$ . Если  $u = u^g$ , то  $[u]$  состоит из неподвижных относительно  $g$  вершин. Поэтому  $g$  оставляет неподвижной каждую вершину из  $\Gamma$ , противоречие. Значит,  $\alpha_4(g) = v$ . Так как  $r = 4$ , то порядок подгруппы из  $G$ , индуцирующей тривиальные автоморфизмы графа  $\Gamma'$ , делит 4.

Лемма доказана.

**Лемма 2.4.** Если  $g$  индуцирует нетривиальный автоморфизм графа  $\Gamma'$ , то выполняется одно из утверждений

(1)  $\Omega$  — пустой граф,  $\alpha_0(g) = \alpha_4(g) = 0$ , и либо  $p = 23$ ,  $\alpha_1(g) = 92$ ,  $\alpha_2(g) = 736$  и  $\alpha_3(g) = 276$ , либо  $p = 3$ ,  $\alpha_1(g) = 60t + 15s + 3$ ,  $\alpha_2(g) = 1056 - 240s$  и  $\alpha_3(g) = -60t + 225s + 45$ , либо  $p = 2$ ,  $\alpha_1(g) = 40t + 40s - 8$ ,  $\alpha_2(g) = 1056 - 160s$  и  $\alpha_3(g) = -40t + 120s + 56$ ;

(2)  $\Omega'$  является  $n$ -кликкой, и либо  $\Omega$  — антиподальный класс,  $p = 5$ ,  $\alpha_1(g) = 100s + 100t + 20$ ,  $\alpha_2(g) = 800 - 400t$  и  $\alpha_3(g) = -100s + 300t + 280$ , либо  $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 16$ ,  $p = 2$ ,  $\alpha_1(g) = 40s + 40t + 24 - 5\alpha_0(g)$ ,  $\alpha_2(g) = 992 - 160t$  и  $\alpha_3(g) = 120t - 40s + 72 + 5\alpha_0(g)$ ;

(3)  $\Omega'$  является  $l$ -кликкой,  $3 \leq l \leq 48$ ,  $l$  делится на 3,  $p = 3$ ,  $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 4l$ ,  $\alpha_1(g) = 60s + 60t + 8l + 12 - 5\alpha_0(g)$ ,  $\alpha_2(g) = 1056 - 240t - 16l$  и  $\alpha_3(g) = 180t + 4l + 36 - 60s + 5\alpha_0(g)$ ;

(4)  $\Omega'$  содержит геодезический 2-путь, и либо

(i)  $p = 7$ ,  $|\Omega'| = 7l + 3$ ,  $l \in \{5, 6, 7, 8\}$ , либо

(ii)  $p = 5$ ,  $|\Omega'| = 5r + 1$ ,  $4 \leq r \leq 17$ , либо

(iii)  $p = 3$ ,  $|\Omega'| = 3s$ ,  $3 \leq s \leq 27$ , либо

(iv)  $p = 2$ ,  $|\Omega'| = 2t$ ,  $4 \leq t \leq 46$ .

**Доказательство.** Заметим, что  $\Omega'$  — граф из заключения предложения 1.

Если  $\Omega'$  — пустой граф, то ввиду леммы 2.2 имеем  $\alpha_0(g) = \alpha_4(g) = 0$ ,  $\chi_1(g) = (3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/80$ ,  $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/80 - 51/5$ , и либо  $p = 23$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 92$ , либо  $p = 3$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 60s + 12$ , либо  $p = 2$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 40s + 12$ .

В случае  $p = 23$  имеем  $\bar{\alpha}_2(g) = 184 = \alpha_2(g)/4$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 92 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$ . Отсюда  $\chi_4(g) = -1$ ,  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 92)/20$  и  $\alpha_1(g) = 92$ .

В случае  $p = 3$  имеем  $\bar{\alpha}_2(g) = 264 - 60s = \alpha_2(g)/4$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 60s + 12 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$ . Отсюда  $\chi_4(g) = 3 - 3s$ ,  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 15s - 3)/20$ ,  $\alpha_1(g) = 60t + 15s + 3$  и  $\alpha_3(g) = -60t + 225s + 45$ .

В случае  $p = 2$  имеем  $\bar{\alpha}_2(g) = 264 - 40s = \alpha_2(g)/4$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 40s + 12 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$ . Отсюда  $\chi_4(g) = 3 - 2s$ , число  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 40s - 12)/20$  нечетно,  $\alpha_1(g) = 40t + 40s - 8$  и  $\alpha_3(g) = -40t + 120s + 56$ .

Если  $\Omega'$  является  $n$ -кликкой, то либо  $n = 1$ ,  $p = 5$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 100t + 75$ , либо  $n = 4$ ,  $p = 2$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 40t + 24$ .

В случае  $p = 5$  имеем  $\alpha_4(g) = 4$ ,  $\bar{\alpha}_2(g) = 200 - 100t = \alpha_2(g)/4$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 100t + 75 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$ . Отсюда  $\chi_4(g) = -5t$ , число  $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 100t - 80)/20$  сравнимо с 2 по модулю 5, поэтому  $\alpha_1(g) = 100s + 100t + 20$  и  $\alpha_3(g) = -100s + 300t + 280$ .

В случае  $p = 2$  имеем  $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 16$ ,  $\bar{\alpha}_2(g) = 248 - 40t = \alpha_2(g)/4$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 40t + 24 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$ . Отсюда  $\chi_4(g) = 3 - 2t$ , число  $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 40t - 44)/20$  нечетно,  $\alpha_1(g) = 40s + 40t + 24 - 5\alpha_0(g)$  и  $\alpha_3(g) = 120t - 40s + 72 + 5\alpha_0(g)$ .

Если  $\Omega'$  является  $l$ -кликкой,  $3 \leq l \leq 48$ ,  $l$  делится на 3, то  $p = 3$ , и  $\text{bar}\alpha_1(g) = 60t + 3l + 12$ . В этом случае  $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 4l$ ,  $\bar{\alpha}_2(g) = 264 - 60t - 4l = \alpha_2(g)/4$ ,  $\bar{\alpha}_1(g) = 60t + 3l + 12 = (\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/4$ . Отсюда  $\chi_4(g) = (15 - 15t)/5$ ,  $\chi_1(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_1(g) - 60t - 8l - 12)/20$ ,  $\alpha_1(g) = 60s + 60t + 8l + 12 - 5\alpha_0(g)$  и  $\alpha_3(g) = 180t + 4l + 36 - 60s + 5\alpha_0(g)$ .

Пусть  $\Omega'$  содержит геодезический 2-путь. Тогда либо

(i)  $p = 7$ ,  $|\Omega'| = 7l + 3$ ,  $l \in \{5, 6, 7, 8\}$ , либо

(ii)  $p = 5$ ,  $|\Omega'| = 5r + 1$ ,  $4 \leq r \leq 17$ , либо

(iii)  $p = 3$ ,  $|\Omega'| = 3s$ ,  $3 \leq s \leq 27$ , либо

(iv)  $p = 2$ ,  $|\Omega'| = 2t$ ,  $4 \leq t \leq 46$ .

Лемма доказана.

Из лемм 2.3, 2.4 следует теорема.

Следствие 1 вытекает из следствия 2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 3-540-50619-5.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Небольшие  $AT_4$ -графы и отвечающие им сильно регулярные подграфы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 220–230.
3. **Soicher L.H.** Uniqueness of a distance-regular graph with intersection array  $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$  and related topics [e-resource]. 2015. 11 с. URL: <https://arxiv.org/pdf/1512.05976.pdf>.
4. **Нирова М.С.** Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивами пересечений  $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$  // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 178–189.
5. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Самойленко М.С.** Автоморфизмы графа с массивом пересечений  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$  // Докл. АН. 2014. Т. 459, № 2. С. 149–153.

6. Махнев А.А., Нирова М.С. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивами пересечений  $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$  // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 3. С. 182–190.
7. Махнев А.А., Пономарев Д.Н. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами  $(392, 115, 18, 40)$  // Докл. АН. 2015. Т. 460, № 1. С. 18–21.
8. Махнев А.А., Самойленко М.С. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами  $(276, 75, 10, 24)$  // Докл. АН. 2014. Т. 457, № 5. С. 516–519.
9. Cameron P.J. *Permutation groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1999. (London Math. Soc. Student Texts; no. 45). 232 p.
10. Махнев А.А., Падучих Д.В., Циовкина Л.Ю. Дистанционно регулярные накрытия графов эрмитовых форм  $Herm(2, q^2)$  // Докл. АН. 2015. Т. 462, № 3. С. 268–273.
11. Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений  $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$  // Докл. АН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
12. Zavaritsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum // *Siberian. Electr. Math. Reports*. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Журтов Арчил Хазешович  
 д-р физ.-мат. наук,  
 зав. кафедрой  
 Кабардино-Балкарский госуниверситет,  
 г. Нальчик  
 e-mail: zhurtov\_a@mail.ru

Поступила 7.04.2017

Шерметова Марияна Хусейновна  
 аспирант  
 Кабардино-Балкарский госуниверситет,  
 г. Нальчик  
 e-mail: mariyana1992@mail.ru

## REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-Regular Graphs*. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p. ISBN: 3-540-50619-5.
2. Makhnev A.A., Paduchikh D.V. Small  $AT_4$ -graphs and strongly regular subgraphs corresponding to them. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2017, vol. 296, no. 1, pp. 164–174. doi: 10.1134/S0081543817020158.
3. Soicher L.H. Uniqueness of a distance-regular graph with intersection array  $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$  and related results [e-resource]. 2015. 11 c. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1512.05976.pdf>.
4. Nirova M.C. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array  $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$ . *Siberian. Electronic Mathematical Reports*, 2017, vol. 14, pp. 178–189. doi: 10.17377/semi.2017.14.018.
5. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Samoilenko M.S. Automorphisms of a graph with intersection array  $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ . *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 692–696. doi: 10.1134/S1064562414060131.
6. Makhnev A.A., Nirova M.S. Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array  $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$ . *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 3, pp. 182–190 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-182-190.
7. Makhnev A.A., Ponomarev D.N. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters  $(392, 115, 18, 40)$ . *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 1, pp. 12–15. doi: 10.1134/S1064562414070035.
8. Makhnev A.A., Samoilenko M.S. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters  $(276, 75, 10, 24)$ . *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 485–488. doi: 10.1134/S1064562414050238.
9. Cameron P.J. *Permutation Groups*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1999, Ser. London Math. Soc. Student Texts, vol. 45, 232 p. ISBN: 0-521-65302-9.
10. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Tsiiovkina L.Yu. Antipodal distance-regular covers of Hermitian form graphs  $Herm(2, q^2)$ . *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 304–308. doi: 10.1134/S106456241503014X.

11. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A., On automorphisms of distance-regular graph with the intersection array  $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ . *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282.
12. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Siberian. Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on April 7, 2017.

*Archil Khazeshovich Zhurtov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: zhurtov\_a@mail.ru.

*Mariyana Khusenovna Shermetova*, doctoral student, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia, e-mail: mariyana1992@mail.ru.

УДК 512.542

**О КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУППАХ  
НАД ПОЛЯМИ РАЗНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК,  
ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ. I <sup>1</sup>**

М. Р. Зиновьева

Пусть  $G$  — конечная группа,  $\pi(G)$  — множество простых делителей ее порядка,  $\omega(G)$  — множество порядков ее элементов. На  $\pi(G)$  определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины  $r$  и  $s$  из  $\pi(G)$  смежны тогда и только тогда, когда  $rs \in \omega(G)$ . Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля*, или *графом простых чисел* группы  $G$ , и обозначается через  $GK(G)$ . В ряде статей мы описываем условия совпадения графов простых чисел неизоморфных простых групп. Этот вопрос связан с вопросом А.В. Васильева 16.26 из "Коуровской тетради" о количестве неизоморфных простых групп с одинаковым графом простых чисел. Ранее автором были даны необходимые и достаточные условия совпадения графов простых чисел двух конечных простых групп лиева типа  $G$  и  $G_1$ , где  $G$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно одной характеристики. Пусть  $G$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно разных характеристик. Ранее автором получены необходимые условия совпадения графов простых чисел двух конечных простых групп лиева типа  $G$  и  $G_1$ . В настоящей статье уточняется последний результат в случае, когда одна из групп — простая линейная группа достаточно большого лиева ранга над полем порядка  $q$ . Доказано, что если  $G$  — простая линейная группа достаточно большого лиева ранга, то графы простых чисел групп  $G$  и  $G_1$  могут совпадать только при выполнении одного из девятнадцати случаев. В качестве следствия основного результата получены ограничения (при некоторых дополнительных условиях) на возможное число конечных простых групп с графом как у простой линейной группы.

Ключевые слова: конечная простая линейная группа, конечная простая унитарная группа, граф простых чисел, граф Грюнберга — Кегеля, спектр.

**M. R. Zinov'eva. On finite simple linear and unitary groups over fields of different characteristics with coinciding prime graphs. I.**

Suppose that  $G$  is a finite group,  $\pi(G)$  is the set of prime divisors of its order, and  $\omega(G)$  is the set of orders of its elements. We define a graph on  $\pi(G)$  with the following adjacency relation: different vertices  $r$  and  $s$  from  $\pi(G)$  are adjacent if and only if  $rs \in \omega(G)$ . This graph is called the *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph* of  $G$  and is denoted by  $GK(G)$ . In a series of papers we describe the coincidence conditions for the prime graphs of nonisomorphic simple groups. This issue is connected with Vasil'ev's Question 16.26 in the "Kourovka Notebook" about the number of nonisomorphic simple groups with the same prime graph. Earlier the author derived necessary and sufficient conditions for the coincidence of the prime graphs of two nonisomorphic finite simple groups of Lie type over fields of orders  $q$  and  $q_1$ , respectively, with the same characteristic. Let  $G$  and  $G_1$  be two nonisomorphic finite simple groups of Lie type over fields of orders  $q$  and  $q_1$ , respectively, with different characteristics. The author also obtained necessary conditions for the coincidence of the prime graphs of two nonisomorphic finite simple groups of Lie type. In the present paper the latter result is refined in the case when  $G$  is a simple linear group of sufficiently high Lie rank over a field of order  $q$ . If  $G$  is a simple linear group of sufficiently high Lie rank, then we prove that the prime graphs of  $G$  and  $G_1$  may coincide only in one of nineteen cases. As corollaries of the main result, we obtain constraints (under some additional conditions) on the possible number of simple groups whose prime graph is the same as the prime graph of a simple linear group.

Keywords: finite simple linear group, finite simple unitary group, prime graph, Gruenberg–Kegel graph, spectrum.

MSC: 05C25, 20D05, 20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-136-151

**Введение**

Пусть  $G$  — конечная группа,  $\pi(G)$  — множество простых делителей ее порядка,  $\omega(G)$  — *спектр* группы  $G$ , т. е. множество порядков ее элементов. На  $\pi(G)$  определяется граф со сле-

<sup>1</sup>Работа выполнена за счет гранта РФФИ (проект 15-11-10025).



дующим отношением смежности: различные вершины  $r$  и  $s$  в  $\pi(G)$  смежны тогда и только тогда, когда  $rs \in \omega(G)$ . Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля*, или *графом простых чисел* группы  $G$ , и обозначается через  $GK(G)$ .

В “Коуровской тетради” [1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 о количестве неизоморфных конечных простых групп с одинаковым графом простых чисел. С этим вопросом непосредственно связана проблема описания всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одним и тем же графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги [2] и М. А. Звездина [3] получили такое описание в случаях, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор в [4] решил этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики. В работе [5] получена теорема редукции в случае, когда заданы две конечные простые группы лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является классической группой.

В данной работе продолжается это исследование. Мы рассматриваем вопрос о совпадении графов простых чисел двух конечных простых групп лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является линейной группой, тем самым уточняя [5, теорема 2].

Мы рассматриваем только простые группы. Для  $\varepsilon \in \{+, -\}$  через  $A_{n-1}^\varepsilon(q)$  обозначается  $A_{n-1}(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$  при  $\varepsilon = +$  и  ${}^2A_{n-1}(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$  при  $\varepsilon = -$ , через  $D_n^\varepsilon(q)$  обозначается  $D_n(q)$  при  $\varepsilon = +$  и  ${}^2D_n(q)$  при  $\varepsilon = -$ .

Обозначим через  $\mathcal{M}$  множество конечных простых классических групп  $A_{n-1}^\pm(q)$ , где  $n \geq 7$ ;  $B_n(q)$ , где  $n \geq 5$ ;  $C_n(q)$ , где  $n \geq 5$ ;  $D_n^\pm(q)$ , где  $n \geq 5$ .

Согласно [6] если  $q$  — натуральное число,  $r$  — нечетное простое число и  $(r, q) = 1$ , то через  $e(r, q)$  обозначается минимальное натуральное число  $n$  с  $q^n \equiv 1 \pmod{r}$ . Если  $q$  нечетно, то  $e(2, q)$  равно 1 при  $q \equiv 1 \pmod{4}$  и 2 при  $q \equiv -1 \pmod{4}$ . Говорят, что простое число  $r$  с  $e(r, q) = n$  является *примитивным простым делителем* числа  $q^n - 1$ . Через  $r_n(q)$  обозначается некоторый примитивный простой делитель числа  $q^n - 1$ , а через  $R_n(q)$  — множество всех таких делителей.

Для натурального  $n$  через  $n_p$  обозначается  $p$ -часть числа  $n$ .

Пусть  $n$  — натуральное число. Введем обозначения:  $R_{1,n}^{(1)}(q) = \{2 \neq r_1(q) \in R_1(q) : n_{r_1(q)} < (q-1)_{r_1(q)}\}$ ;  $R_{1,n}^{(2)}(q) = \{2 \neq r_1(q) \in R_1(q) : n_{r_1(q)} = (q-1)_{r_1(q)}\}$ ;  $R_{1,n}^{(3)}(q) = \{2 \neq r_1(q) \in R_1(q) : n_{r_1(q)} > (q-1)_{r_1(q)}\}$ ;  $R_{2,n}^{(1)}(q) = \{2 \neq r_2(q) \in R_2(q) : n_{r_2(q)} < (q+1)_{r_2(q)}\}$ ;  $R_{2,n}^{(2)}(q) = \{2 \neq r_2(q) \in R_2(q) : n_{r_2(q)} = (q+1)_{r_2(q)}\}$ ;  $R_{2,n}^{(3)}(q) = \{2 \neq r_2(q) \in R_2(q) : n_{r_2(q)} > (q+1)_{r_2(q)}\}$ .

Используя сведения о графах простых чисел конечных простых групп из [6–9], мы получаем следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$ , где  $n \geq 9$ ,  $q = p^f$ ,  $q_1 = p_1^{f_1}$ ,  $p$  и  $p_1$  — различные простые числа,  $f, f_1 \in \mathbb{N}$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то  $n_1 = n$  и выполнено одно из следующих утверждений (с точностью до перестановки  $q$  и  $q_1$ ):

(1)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 1, 3 \pmod{6}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(2)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(3)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 0, 4 \pmod{6}$ ,  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1-1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(4)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1-1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(5)  $q$  нечетно,  $q_1$  четно,  $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$ ,  $n_2 = (q-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(6)  $q$  нечетно,  $q_1$  четно,  $n \equiv 8 \pmod{12}$ ,  $n_2 = (q-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

Кроме того,  $R_k(q) = R_k(q_1)$  для любого  $k$  такого, что  $4 \leq k < [(n+1)/2]$ .

Определяем, как в [6], функцию  $\nu(x)$  на множестве натуральных чисел:

$$\nu(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \equiv 0 \pmod{4}, \\ x/2 & \text{при } x \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2x & \text{при } x \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ , где  $n \geq 9$ ,  $q = p^f$ ,  $q_1 = p_1^{f_1}$ ,  $p$  и  $p_1$  — различные простые числа,  $f, f_1 \in \mathbb{N}$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то  $n_1 = n$  и выполнено одно из следующих утверждений:

(1)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 1, 9 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ ;

(2)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 3, 7 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ ;

(3)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 5 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ ;

(4)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 11 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ ;

(5)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$ ,  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1+1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(6)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 8 \pmod{12}$ ,  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1+1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(7)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 6, 10 \pmod{12}$ ,  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 \leq (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$ ;

(8)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 2 \pmod{12}$ ,  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 \leq (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$ ;

(9)  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 2 \pmod{12}$ ,  $(q-1)_2 = n_2 \leq (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n/2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n-2}(q_1)$ ;

(10)  $q$  нечетно,  $q_1$  четно,  $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$ ,  $n_2 = (q-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(11)  $q$  нечетно,  $q_1$  четно,  $n \equiv 8 \pmod{12}$ ,  $n_2 = (q-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(12)  $q$  четно,  $q_1$  нечетно,  $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$ ,  $n_2 = (q+1)_2$ ,  $\{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) = R_{1,n}^{(2)}(q)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(13)  $q$  четно,  $q_1$  нечетно,  $n \equiv 8 \pmod{12}$ ,  $n_2 = (q+1)_2$ ,  $R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

Кроме того,  $R_k(q) = R_{k_1}(q_1)$  для любого  $k$  такого, что  $4 \leq k < [(n+1)/2]$  и  $\nu(k_1) = k$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G = A_{n-1}(q)$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно, где  $n \geq 9$ ,  $q = p^f$ ,  $q_1 = p_1^{f_1}$ ,  $p$  и  $p_1$  — различные простые числа,  $f, f_1 \in \mathbb{N}$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то  $G_1 = A_{n-1}^\pm(q_1)$  и выполняется один из 19 случаев, указанных в теоремах 1 и 2.

Из теорем 1–3 вытекают следствия.

**Следствие 1.** Пусть  $G = A_{n-1}(q)$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно, где  $9 \leq n \not\equiv 2 \pmod{3}$ ,  $qq_1$  нечетно,  $q = p^f$ ,  $q_1 = p_1^{f_1}$ ,  $p$  и  $p_1$  — различные простые числа,  $f, f_1 \in \mathbb{N}$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то  $n$  делится на два различных нечетных простых числа.

**Следствие 2.** Пусть  $G = A_{n-1}(q)$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно с условием  $GK(G) = GK(G_1)$ , где  $9 \leq n \not\equiv 2 \pmod{3}$ ,  $n$  делится ровно на два различных нечетных простых числа,  $qq_1$  нечетно,  $q = p^f$ ,  $q_1 = p_1^{f_1}$ ,  $p$  и  $p_1$  — различные простые числа,  $f, f_1 \in \mathbb{N}$ . Тогда  $G_1$  либо не существует, либо единственна.

**Следствие 3.** Пусть  $G = A_{n-1}(q)$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно, где  $n \geq 9$ ,  $q = p^f$ ,  $q_1 = p_1^{f_1}$ ,  $p$  и  $p_1$  — различные простые числа,  $f, f_1 \in \mathbb{N}$ . Тогда число групп  $G$  с условием  $GK(G) = GK(G_1)$  конечно.

## 1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть  $G$  — конечная группа. Обозначим множество связанных компонент графа  $GK(G)$  через  $\{\pi_i \mid i = 1, \dots, s(G)\}$ , где  $s(G)$  — число связанных компонент в графе  $GK(G)$ ; если порядок  $G$  четен, считаем  $2 \in \pi_1$ . В [8; 9] описаны связанные компоненты графов простых чисел всех конечных простых групп. В [6; 7] получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Индукцированный подграф в графе называется его *кокликкой*, если его вершины попарно несмежны. Мощность (размер) кокликки называется ее *порядком*. *Максимальной кокликкой* будем называть кокликку, которая не содержится в другой кокликке. Пусть  $t(G)$  — наибольшее число вершин в кокликках графа  $GK(G)$ . Через  $t(q, G)$  обозначается наибольшее число вершин в кокликках графа  $GK(G)$ , содержащих простое число  $q$ .

**Лемма 1** (теорема Жигмонди [10]). Пусть  $q$  и  $n$  — неединичные натуральные числа. Существует простое число, делящее  $q^n - 1$  и не делящее  $q^i - 1$  при любом натуральном  $i < n$ , кроме следующих случаев:  $q = 2$  и  $n = 6$ ;  $q = 2^k - 1$  для некоторого простого числа  $k$  и  $n = 2$ .

По лемме 1 примитивный простой делитель  $r_n(q)$  существует, за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если  $q$  фиксировано, то  $r_n(q)$  обозначается через  $r_n$ .

Далее  $q = p^f$  и  $q_1 = p_1^{f_1}$ , где  $p, p_1$  — различные простые числа и  $f, f_1$  — натуральные числа.

**Лемма 2** [5, теорема 2]. Пусть  $G$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно. Если  $G \in \mathcal{M}$  и графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений:

- (1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}^\varepsilon(q), A_{n-1}^{\varepsilon_1}(q_1)\}$ , где  $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$  и  $\varepsilon, \varepsilon_1 \in \{+, -\}$ ;
- (2)  $\{G, G_1\}$  — одна из пар  $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$ ,  $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$ ,  $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$ , где либо  $n$  четно, либо  $n \equiv 3 \pmod{4}$  и  $qq_1$  нечетно;
- (3)  $\{G, G_1\} = \{D_n^\varepsilon(q), D_n^\varepsilon(q_1)\}$ , где  $n$  четно и  $\varepsilon \in \{+, -\}$ .

При доказательстве лемм 3–19 используются [6, предл. 2.1, 2.2, 4.1, 4.2, табл. 4, 6, 8].

**Лемма 3.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ , причем  $R_i(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_l(q_1)$ ,  $R_j(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_l(q_1)$ , где  $i, j, k, l \geq n/2$ ,  $i \neq j$ ,  $k \neq l$ ,  $(k, l), (i, j) \notin \{(n/2, n), (n, n/2)\}$  и  $GK(G) = GK(G_1)$ . Тогда либо  $R_i(q) \subseteq R_k(q_1)$  и  $R_j(q) \subseteq R_l(q_1)$ , либо  $R_i(q) \subseteq R_l(q_1)$  и  $R_j(q) \subseteq R_k(q_1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $r \in R_i(q)$ ,  $s \in R_j(q)$ . Заметим, что  $r$  и  $s$  несмежны в  $GK(G)$ . Предположим, что  $r \in R_k(q_1)$ . Если  $s \in R_k(q_1)$ , то  $r$  и  $s$  смежны в  $GK(G_1)$ ; противоречие. Значит,  $s \in R_l(q_1)$ . Пусть  $r_1 \neq r \in R_i(q) \cap R_l(q_1)$ . Тогда  $r$  и  $r_1$  смежны в  $GK(G)$  и несмежны в  $GK(G_1)$ ; противоречие. Таким образом, если  $r \in R_k(q_1)$ , то  $R_i(q) \subseteq R_k(q_1)$ ,  $R_j(q) \subseteq R_l(q_1)$ . Аналогично, если  $r \in R_l(q_1)$ , то  $R_i(q) \subseteq R_l(q_1)$ ,  $R_j(q) \subseteq R_k(q_1)$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ , причем  $R_i(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_l(q_1)$ ,  $R_j(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_l(q_1)$ , где  $i, j, \nu(k), \nu(l) \geq n/2$ ,  $i \neq j$ ,  $k \neq l$ ,  $(i, j), (\nu(k), \nu(l)) \notin \{(n/2, n), (n, n/2)\}$  и  $GK(G) = GK(G_1)$ . Тогда либо  $R_i(q) \subseteq R_k(q_1)$  и  $R_j(q) \subseteq R_l(q_1)$ , либо  $R_i(q) \subseteq R_l(q_1)$  и  $R_j(q) \subseteq R_k(q_1)$ .

**Доказательство** аналогично доказательству леммы 3.  $\square$

## 2. Доказательство теорем

**Лемма 5.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $n \geq 13$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнен один из следующих случаев:

- (1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;
- (2)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 1 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ ;
- (3)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 7 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ . Сравнивая максимальные циклы, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

Обозначим через  $A$  множество троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  и троек  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ . Обозначим через  $B$  множество троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$  и троек  $\{r_1(q_1),$

$r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Обозначим через  $C$  множество пар  $\{r_1(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$ , и пар  $\{r_2(q), r_n(q)\}$ . Обозначим через  $D$  множество пар  $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ , и пар  $\{r_2(q_1), r_n(q_1)\}$ .

Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Заметим, что любая тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ , или  $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Также любая тройка  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ , или  $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-2}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ .

По лемме 3 либо  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$  и  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ , либо  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$  и  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$ . Аналогично можно получить, что либо  $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$  и  $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ , либо  $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$  и  $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$ . Таким образом, либо  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ , либо  $R_{n-1}(q) = R_{n-2}(q_1)$  и  $R_{n-2}(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Так как  $\{r_6(q), r_{n-5}(q), r_{n-4}(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\} = \{r_6(q_1), r_{n-5}(q_1), r_{n-4}(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1)\}$ , то  $R_{n-2}(q) \subseteq R_6(q_1) \cup R_{n-5}(q_1) \cup R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$ . Отсюда  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$  и  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Заметим, что множество пар  $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$ , совпадает с множеством пар  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ . Отсюда  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ . Так как  $A = B$ , то  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Из равенства  $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1)\} = \{r_3(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$  следует, что  $R_3(q) = R_3(q_1)$ .

Случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  рассматривается аналогично с использованием леммы 4.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $q_1$  нечетно,  $n \equiv 3 \pmod{6}$ ,  $n \geq 9$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнен один из следующих случаев:

(1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(2)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 3 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ ;

(3)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 9 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{2n-4}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

Обозначим через  $A$  множество троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  и троек  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ . Обозначим через  $B$  множество троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$  и троек  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Обозначим через  $C$  множество пар  $\{r_1(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$ , и пар  $\{r_2(q), r_n(q)\}$ . Обозначим через  $D$  множество пар  $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ , и пар  $\{r_2(q_1), r_n(q_1)\}$ .

Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Заметим, что любая тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где

$r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1))$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$ . Аналогично  $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$ . Таким образом,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Заметим, что множество пар  $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$ , совпадает с множеством пар  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ . Отсюда  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ . Так как  $A = B$ , то  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Из равенства  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  следует, что  $R_{n-2}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q) \cap R_3(q_1)$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ . Аналогично  $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ . Таким образом,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ .

Случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  рассматривается аналогично.  $\square$

**Лемма 7.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $n \geq 11$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнен один из следующих случаев:

(1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(2)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 5 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ ;

(3)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 11 \pmod{12}$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{(n-1)/2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n}(q_1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

Обозначим через  $A$  множество троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , троек  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ , и троек  $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ . Обозначим через  $B$  множество троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , троек  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ , и троек  $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ . Обозначим через  $C$  множество пар  $\{r_1(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$ , и пар  $\{r_2(q), r_n(q)\}$ . Обозначим через  $D$  множество пар  $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ , и пар  $\{r_2(q_1), r_n(q_1)\}$ .

Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(1)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Заметим, что любая тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ , или  $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$ . Аналогично  $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$ . Таким образом,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Заметим, что множество пар  $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$ , совпадает с множеством пар  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ . Отсюда  $R_{1,n}^{(3)}(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ . Так как  $A = B$ , то  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ .

Случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  рассматривается аналогично.  $\square$

**Лемма 8.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 0 \pmod{6}$ ,  $n \geq 12$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнен один из следующих случаев:

(1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1-1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(2)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $2 < n_2 < (q_1+1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,

$R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(3)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n_2 < (q-1)_2$  и  $2 = n_2 \leq (q+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ .

Обозначим через  $A$  множество троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  и троек  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ . Обозначим через  $B$  множество троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$  и троек  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Обозначим через  $C$  множество пар  $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$ , и пар  $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$ . Обозначим через  $D$  множество пар  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ , и  $\{r_2(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ .

Предположим, что  $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ . По лемме 3 либо  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ , либо  $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Так как  $A = B$ , то  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Из равенства  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  следует, что  $R_{n-1}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Итак,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ ,  $R_n(q) = R_n(q_1)$  и  $R_{n-2}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q) \cap R_3(q_1)$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ . Аналогично  $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ . Таким образом,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ . Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Множество пар  $\{r_1(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$ , совпадает с множеством пар  $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ . Таким образом,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ .

Предположим, что  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_n(q_1)$ . Заметим, что множество пар  $\{r_1(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$ , совпадает с множеством пар  $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ . Таким образом,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ . Так как  $C = D$ , то  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-1}(q) \cap (R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1))$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 2$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$ . Аналогично  $R_{n-1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q)$ . Таким образом,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Так как  $A = B$ , то  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Из равенства  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  следует, что  $R_{n-2}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q) \cap R_3(q_1)$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ . Аналогично  $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ . Таким образом,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ .

Предположим, что  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Заметим, что тройка  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$  не совпадает с тройками  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ ; противоречие.

Предположим, что  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ , или  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2 = 2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Заметим, что тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$ . Если  $r \in R_n(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_n(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$ . Тройка  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,

$\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-2}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$ .

По лемме 3 либо  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) \subseteq R_n(q_1)$ , либо  $R_{n-2}(q) \subseteq R_n(q_1)$  и  $R_n(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ . Аналогично можно получить, что либо  $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$  и  $R_n(q) \subseteq R_n(q_1)$ , либо  $R_{n-2}(q) \subseteq R_n(q_1)$  и  $R_n(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ . Таким образом, либо  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ , либо  $R_{n-2}(q) = R_n(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n-2}(q_1)$ . Если  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ , то, рассуждая, как в лемме 5, можно получить, что  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ . Пусть  $R_{n-2}(q) = R_n(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n-2}(q_1)$ . Если  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , то  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} \neq \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ ; противоречие. Если  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , то  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} \neq \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ; противоречие.

Случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  рассматривается аналогично с использованием леммы 4.  $\square$

**Лемма 9.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 2 \pmod{6}$ ,  $n \geq 14$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнен один из следующих случаев:

- (1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1-1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;
- (2)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 2 \pmod{12}$ ,  $n_2 < (q-1)_2$  и  $2 = n_2 \leq (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n/2}(q_1)$ ;
- (3)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 2 \pmod{12}$ ,  $2 = (q-1)_2 = n_2 \leq (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n/2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{2n-2}(q_1)$ ;
- (4)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 8 \pmod{12}$ ,  $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $2 < n_2 < (q_1+1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ .

Обозначим через  $A$  множество троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , троек  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ , и троек  $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ . Обозначим через  $B$  множество троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , троек  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ , и троек  $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ . Обозначим через  $C$  множество пар  $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$ , и пар  $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$ . Обозначим через  $D$  множество пар  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ , и  $\{r_2(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ .

Предположим, что  $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ . По лемме 3 либо  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ , либо  $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Так как  $A = B$ , то  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ . Из равенства  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  следует, что  $R_{n-1}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Итак,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ ,  $R_n(q) = R_n(q_1)$ . Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Заметим, что множество пар  $\{r_1(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$ , совпадает с множеством пар  $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ . Отсюда  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ .

Предположим, что  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1-1)_2$ . Рассуждая, как в лемме 8, получаем, что  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .



Так как  $A = B$ , то  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ .

Предположим, что  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Но  $\{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\} \neq \{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$ ; противоречие.

Предположим, что  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ , или  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2 = 2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ .

Заметим, что тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_n(q_1)$ . Если  $r \in R_n(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_n(q) \subseteq R_n(q_1)$ . Аналогично  $R_n(q_1) \subseteq R_n(q)$ . Таким образом,  $R_n(q) = R_n(q_1)$ . Рассуждая, как в случае  $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$ , можно получить, что  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ .

Случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  рассматривается аналогично.  $\square$

**Лемма 10.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  нечетно,  $n \equiv 4 \pmod{6}$ ,  $n \geq 10$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнен один из следующих случаев:

(1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n_2 = (q-1)_2 = (q_1-1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $n_2 < (q_1-1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(2)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 4 \pmod{12}$ ,  $2 < n_2 = (q-1)_2 = (q_1+1)_2$ , или  $n_2 < (q-1)_2$  и  $2 < n_2 < (q_1+1)_2$ , или  $n_2 > (q-1)_2$  и  $n_2 > (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(3)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $n \equiv 10 \pmod{12}$ ,  $n_2 < (q-1)_2$  и  $2 = n_2 \leq (q_1+1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 8.

**Лемма 11.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ , где  $n \geq 9$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то  $R_k(q) = R_k(q_1)$  для любого  $k$  такого, что  $4 \leq k < [(n+1)/2]$ .

Доказательство. Так как  $k \geq 4$ , то  $\{r_k(q), r_{n-k+1}(q), \dots, r_j(q), \dots, r_n(q)\} = \{r_k(q_1), r_{n-k+1}(q_1), \dots, r_j(q_1), \dots, r_n(q_1)\}$ , где  $k$  не делит  $j$  и  $j \in \{n-k+1, \dots, n\}$ . Отсюда  $R_k(q) \subseteq R_k(q_1) \cup R_{n-k+1}(q_1) \cup \dots \cup R_n(q_1)$ . Если  $r \in R_k(q) \cap R_i(q_1)$ , где  $i \in \{n-k+1, \dots, n\}$ , и  $k$  не делит  $i$ , то  $k = t(r, G) \neq t(r, G_1) = [(n+1)/2]$ ; противоречие. Итак,  $R_k(q) \subseteq R_k(q_1)$ . Аналогично  $R_k(q_1) \subseteq R_k(q)$ . Таким образом,  $R_k(q) = R_k(q_1)$ .  $\square$

**Лемма 12.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ , где  $n \geq 9$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то  $R_k(q) = R_{k_1}(q_1)$  для любого  $k$  такого, что  $4 \leq k < [(n+1)/2]$  и  $\nu(k_1) = k$ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 11.  $\square$

**Лемма 13.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  нечетно,  $n$  нечетно,  $n_1 \neq n$ ,  $n \geq 9$ . Тогда  $GK(G) \neq GK(G_1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ . Так как  $(n+1)/2 = t(G) = t(G_1) = [(n_1+1)/2]$  и  $n_1 \neq n$ , то  $n_1 = n+1$ . Если  $2 < (n_1)_2 = (n+1)_2 = (q_1-1)_2$ , то  $3 = t(2, G_1) \neq t(2, G) = 2$ ; противоречие.

Предположим, что  $(n_1)_2 = (n+1)_2 < (q_1-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_{n+1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_{n+1}(q_1)$ . Если  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , то  $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} \neq \{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ ; противоречие. Значит  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Отсюда  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-2}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q) \cap R_4(q_1)$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 4$ ; противоречие. Отсюда  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$ . Аналогично  $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_n(q_1)$ . По лемме 3 либо  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$  и  $R_{n-3}(q) \subseteq R_n(q_1)$ , либо  $R_{n-2}(q) \subseteq R_n(q_1)$  и  $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ .

Заметим, что любая тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1, n+1}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$  при  $n \equiv 0 \pmod{3}$  или  $\{r_3(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$  при  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1, n+1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1) \cup R_n(q_1)$  при  $n \equiv 0 \pmod{3}$  и  $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1, n+1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_n(q_1)$  при  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ . Если  $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1, n+1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1) \cup R_n(q_1)$  при  $n \equiv 0 \pmod{3}$  и  $R_{n-1}(q) \subseteq R_n(q_1)$  при  $n \equiv 1, 2 \pmod{3}$ .

Пусть  $r \in R_{n-1}(q) \cap R_n(q_1)$ . Если  $R_{n-3}(q) \subseteq R_n(q_1)$ , то  $r$  и  $r_1 = r_{n-3}(q)$  несмежны в  $GK(G)$  и смежны в  $GK(G_1)$ ; противоречие. Если  $R_{n-2}(q) \subseteq R_n(q_1)$ , то  $r$  и  $r_1 = r_{n-2}(q)$  несмежны в  $GK(G)$  и смежны в  $GK(G_1)$ ; противоречие. Значит,  $R_{n-1}(q) \cap R_n(q_1) = \emptyset$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$  и  $n \equiv 0 \pmod{3}$ . Заметим, что любая тройка  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$  не совпадает с тройками  $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1, n+1}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ ; противоречие.

Предположим, что  $(n_1)_2 = (n+1)_2 > (q_1-1)_2$  или  $(n_1)_2 = (n+1)_2 = (q_1-1)_2 = 2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

Пусть  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Тогда  $\{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\} = \{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$ . Отсюда  $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_4(q) \cup R_{n-3}(q) \cup R_{n-2}(q)$ . Если  $r \in R_{n+1}(q_1) \cap R_4(q)$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G_1) = t(r, G) = 4$ ; противоречие. Итак,  $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-3}(q) \cup R_{n-2}(q)$ . Заметим, что любая тройка  $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ ,  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1, n}^{(2)}(q)$ ,  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_n(q)\}$  при  $n \equiv 1 \pmod{3}$  или  $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  при  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , поэтому  $R_{n+1}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R_{1, n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) \cup R_{n-2}(q) \cup R_{n-1}(q)$  при  $n \equiv 1 \pmod{3}$  и  $R_{n+1}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R_{1, n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) \cup R_{n-1}(q)$  при  $n \equiv 0, 2 \pmod{3}$ . Так как  $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-3}(q) \cup R_{n-2}(q)$ , то  $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$  и  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Любая тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1, n+1}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1, n+1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n+1}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-1}(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1, n+1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ ; противоречие.

Пусть  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Тогда  $\{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-1}(q) \cap R_4(q_1)$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 4$ ; противоречие. Отсюда  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Заметим, что любая тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1, n+1}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$  при  $n \equiv 2 \pmod{3}$  или  $\{r_3(q_1), r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$  при  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1, n+1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-1}(q_1) \cup R_{n+1}(q_1)$  при  $n \equiv 2 \pmod{3}$  и  $R_{n-1}(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1, n+1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n+1}(q_1)$  при  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ . Так как  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ , то  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$  и  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Любая тройка  $\{p_1, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ ,  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где

$r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ ,  $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , поэтому  $R_{n+1}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) \cup R_{n-1}(q)$ . Если  $r \in R_{n+1}(q_1) \cap (\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q))$ , то  $(n+1)/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n+1}(q_1) \subseteq R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-1}(q_1)$ ; противоречие.

В случае  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ , используя лемму 4, аналогично получаем противоречие.  $\square$

**Лемма 14.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  чётно,  $n$  нечётно,  $n_1 \neq n$ ,  $n \geq 9$ . Тогда  $GK(G) \neq GK(G_1)$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$ . Если  $G = A_8(2)$ , то по [5, лемма 6]  $GK(G) \neq GK(G_1)$ . Если  $q_1$  чётно и  $q$  нечётно, то  $3 = t(2, G_1) \neq t(2, G) = 2$ ; противоречие. Значит,  $q$  чётно и  $q_1$  нечётно. Так как  $[(n_1+1)/2] = t(G_1) = t(G) = (n+1)/2$ , то  $n_1 = n+1$ . Так как  $t(2, G) = 3 = t(2, G_1)$ , то  $2 < (n+1)_2 = (q_1-1)_2$  и  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Сравнивая максимальные кокклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_n(q_1), r_{n+1}(q_1)\}$ . По лемме 3 либо  $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n+1}(q_1)$ , либо  $R_{n-1}(q) = R_{n+1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ . Так как  $n \equiv 3 \pmod{4}$ , то  $\{r_4(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\} = \{r_4(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ ; противоречие.

В случае  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  аналогично получаем противоречие.  $\square$

**Лемма 15.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  нечётно,  $n$  чётно,  $n_1 \neq n$ ,  $n \geq 10$ . Тогда  $GK(G) \neq GK(G_1)$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$ . Так как  $[(n_1+1)/2] = t(G_1) = t(G) = n/2$ , то  $n_1 = n-1$ .

Обозначим через  $C$  множество пар  $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$ , и пар  $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$ . Обозначим через  $D$  множество пар  $\{r_1(q_1), r_{n-2}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n-1}^{(3)}(q_1)$ .

Предположим, что  $n_2 < (q-1)_2$ . Сравнивая максимальные кокклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$ . Если  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , то  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} \neq \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ ; противоречие. Значит,  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Отсюда  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-4}(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-1}(q) \cap R_4(q_1)$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 4$ ; противоречие. Отсюда  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$ . Так как  $C = D$ , то  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{1,n-1}^{(3)}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ ; противоречие с  $R_{n-1}(q) \subseteq R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$ .

Предположим, что  $n_2 > (q-1)_2$  или  $n_2 = (q-1)_2 = 2$ . Сравнивая максимальные кокклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ .

Пусть  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Тогда  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-4}(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_n(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$ . Если  $r \in R_n(q) \cap R_4(q_1)$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 4$ ; противоречие. Отсюда  $R_n(q) \subseteq R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$ . Заметим, что любая тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n-1}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  при  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , или  $\{r_3(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  при  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , поэтому  $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n-1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$  при  $n \equiv 2 \pmod{3}$  и  $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n-1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$  при  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ . Так как  $R_n(q) \subseteq R_{n-4}(q_1) \cup R_{n-3}(q_1)$ , то  $R_n(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$  и  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Любая тройка  $\{p_1, r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ ,  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ ,  $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , поэтому  $R_{n-2}(q_1) \subseteq \{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) \cup R_n(q)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q_1) \cap (\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q))$ , то  $n/2 = t(r, G_1) = t(r, G) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_n(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$ ; противоречие.

Пусть  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Тогда  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , поэтому  $R_{n-2}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q) \cap R_4(q_1)$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 4$ ; противоречие. Отсюда  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Аналогично

$R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . По лемме 3 либо  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$  и  $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$ , либо  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$  и  $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ . Заметим, что любая тройка  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  совпадает с одной из троек  $\{p_1, r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ ,  $\{r_1(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n-1}^{(2)}(q_1)$ ,  $\{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  при  $n \equiv 0 \pmod{3}$  или  $\{r_3(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  при  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , поэтому  $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n-1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$  при  $n \equiv 2 \pmod{3}$  и  $R_n(q) \subseteq \{p_1\} \cup R_{1,n-1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$  при  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ . Если  $r \in R_n(q) \cap (\{p_1\} \cup R_{1,n-1}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1))$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Отсюда  $R_n(q) \subseteq R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$  при  $n \equiv 2 \pmod{3}$  и  $R_n(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$  при  $n \equiv 0, 1 \pmod{3}$ .

Пусть  $r \in R_n(q) \cap R_{n-2}(q_1)$ . Если  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$  и  $r_1 = r_{n-2}(q)$ , то  $r$  и  $r_1$  несмежны в  $GK(G)$ ,  $r$  и  $r_1$  смежны в  $GK(G_1)$ ; противоречие. Если  $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$  и  $r_1 = r_{n-3}(q)$ , то  $r$  и  $r_1$  несмежны в  $GK(G)$ ,  $r$  и  $r_1$  смежны в  $GK(G_1)$ ; противоречие. Значит,  $R_n(q) \cap R_{n-2}(q_1) = \emptyset$ ,  $R_n(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$ . Пусть  $R_{n-3}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$ . Если  $r \in R_n(q)$  и  $r_1 \in R_{n-3}(q)$ , то  $r$  и  $r_1$  несмежны в  $GK(G)$ ,  $r$  и  $r_1$  смежны в  $GK(G_1)$ ; противоречие. Пусть  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-3}(q_1)$ . Если  $r \in R_n(q)$  и  $r_1 \in R_{n-2}(q)$ , то  $r$  и  $r_1$  несмежны в  $GK(G)$ ,  $r$  и  $r_1$  смежны в  $GK(G_1)$ ; противоречие.

Если  $2 < n_2 = (q-1)_2$ , то  $3 = t(2, G) \neq t(2, G_1) = 2$ ; противоречие.

В случае  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ , используя лемму 4, аналогично получаем противоречие.  $\square$

**Лемма 16.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  четно,  $n$  нечетно или  $n$  четно,  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $n \geq 9$ . Тогда  $GK(G) \neq GK(G_1)$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ . Если  $G = A_8(2)$ , то по [5, лемма 6]  $GK(G) \neq GK(G_1)$ . Без ограничения общности можно считать, что  $q_1$  четно и  $q$  нечетно. Тогда  $3 = t(2, G_1) \neq t(2, G) = 2$ ; противоречие. В случае  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  аналогично получаем противоречие.  $\square$

**Лемма 17.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  четно,  $n \equiv 0, 4 \pmod{12}$ ,  $n \geq 12$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнен один из следующих случаев:

(1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $q$  нечетно,  $q_1$  четно,  $2 < n_2 = (q-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(2)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $q$  нечетно,  $q_1$  четно,  $2 < n_2 = (q-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = R_{2,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(3)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $q$  четно,  $q_1$  нечетно,  $2 < n_2 = (q_1+1)_2$ ,  $\{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q) = R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_6(q_1)$ ,  $R_{n-2}(q) = R_{(n-2)/2}(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ , где  $q$  нечетно,  $q_1$  четно и  $n \equiv 0 \pmod{12}$ . Так как  $t(2, G_1) = 3 = t(2, G)$ , то  $2 < n_2 = (q-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ . По лемме 3 либо  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ , либо  $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$ .

Обозначим через  $A$  множество троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$  и троек  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ . Обозначим через  $B$  множество троек  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Обозначим через  $C$  множество пар  $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$ , и пар  $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$ . Обозначим через  $D$  множество пар  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ , и  $\{r_2(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ .

Заметим, что  $A = B$ . Отсюда  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) = R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ . Из равенства  $\{r_3(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_3(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  следует, что  $R_{n-1}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Итак,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ ,  $R_n(q) = R_n(q_1)$  и  $R_{n-2}(q) \subseteq R_3(q_1) \cup R_{n-2}(q_1)$ . Если  $r \in R_{n-2}(q) \cap R_3(q_1)$ , то  $n/2 = t(r, G) = t(r, G_1) = 3$ ; противоречие. Итак,  $R_{n-2}(q) \subseteq R_{n-2}(q_1)$ . Аналогично  $R_{n-2}(q_1) \subseteq R_{n-2}(q)$ . Таким образом,  $R_{n-2}(q) = R_{n-2}(q_1)$ ,  $R_3(q) = R_3(q_1)$ . Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Множество пар  $\{r_1(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$ , совпадает с множеством пар  $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ . Таким образом,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ .

Случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ , где  $n \equiv 4 \pmod{12}$ , и  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  рассматриваются аналогично с использованием лемм 3 и 4.  $\square$

**Лемма 18.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  четно,  $n \equiv 8 \pmod{12}$ ,  $n \geq 20$ . Если графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают, то выполнен один из следующих случаев:

(1)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $q$  нечетно,  $q_1$  четно,  $2 < n_2 = (q-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(2)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $q$  нечетно,  $q_1$  четно,  $2 < n_2 = (q-1)_2$ ,  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ ;

(3)  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ ,  $q$  четно,  $q_1$  нечетно,  $2 < n_2 = (q_1+1)_2$ ,  $R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = \{p_1\} \cup R_{2,n}^{(2)}(q_1) \cup R_6(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{2,n}^{(1)}(q_1)$ ,  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{2,n}^{(3)}(q_1) \cup R_1(q_1)$ ,  $R_{n-1}(q) = R_{2n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n-1}(q_1)\}$ , где  $q$  нечетно,  $q_1$  четно. Так как  $t(2, G_1) = 3 = t(2, G)$ , то  $2 < n_2 = (q-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ . По лемме 3 либо  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_n(q_1)$ , либо  $R_{n-1}(q) = R_n(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$ .

Обозначим через  $A$  множество троек  $\{p, r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , троек  $\{r_1(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(2)}(q)$ , и троек  $\{r_3(q), r_{n-1}(q), r_n(q)\}$ . Обозначим через  $B$  множество троек  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(2)}(q_1)$ , и троек  $\{r_3(q_1), r_{n-1}(q_1), r_n(q_1)\}$ . Обозначим через  $C$  множество пар  $\{r_1(q), r_{n-1}(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(3)}(q)$ , и пар  $\{r_2(q), r_{n-1}(q)\}$ . Обозначим через  $D$  множество пар  $\{r_1(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(3)}(q_1)$ , и  $\{r_2(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ .

Заметим, что  $A = B$ . Отсюда  $\{p\} \cup R_{1,n}^{(2)}(q) \cup R_3(q) = R_{1,n}^{(2)}(q_1) \cup R_3(q_1)$ . Из равенства  $\{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\} = \{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$  следует, что  $R_{n-1}(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_{n-3}(q_1) \cup R_{n-2}(q_1) \cup R_{n-1}(q_1)$ . Итак,  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$ ,  $R_n(q) = R_n(q_1)$ . Так как  $C = D$ , то  $R_{1,n}^{(3)}(q) \cup R_2(q) = R_{1,n}^{(3)}(q_1) \cup R_2(q_1)$ . Множество пар  $\{r_1(q), r_n(q)\}$ , где  $r_1(q) \in R_{1,n}^{(1)}(q)$ , совпадает с множеством пар  $\{r_1(q_1), r_n(q_1)\}$ , где  $r_1(q_1) \in R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ . Таким образом,  $R_{1,n}^{(1)}(q) = R_{1,n}^{(1)}(q_1)$ .

Случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$  рассматривается аналогично с использованием леммы 4.  $\square$

**Лемма 19.** Пусть  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}^\pm(q_1)\}$ , где  $qq_1$  четно,  $n$  четно,  $n_1 \neq n$ ,  $n \geq 10$ . Тогда  $GK(G) \neq GK(G_1)$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $GK(G) = GK(G_1)$ . Рассмотрим случай  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), A_{n_1-1}(q_1)\}$ . Так как  $[(n_1+1)/2] = t(G_1) = t(G) = n/2$ , то  $n_1 = n-1$ . Предположим, что  $q$  четно. Тогда  $3 = t(2, G) = t(2, G_1) = 2$ ; противоречие. Значит,  $q_1$  четно. Так как  $t(2, G_1) = 3 = t(2, G)$ , то  $2 < n_2 = (q-1)_2$ . Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$ , получаем  $\{2, r_{n-1}(q), r_n(q)\} = \{2, r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\}$ . По лемме 3

либо  $R_{n-1}(q) = R_{n-2}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n-1}(q_1)$ , либо  $R_{n-1}(q) = R_{n-1}(q_1)$  и  $R_n(q) = R_{n-2}(q_1)$ . Так как  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , то  $\{r_4(q_1), r_{n-3}(q_1), r_{n-2}(q_1), r_{n-1}(q_1)\} \neq \{r_4(q), r_{n-3}(q), r_{n-2}(q), r_{n-1}(q)\}$ ; противоречие.

В случае  $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}(q), {}^2A_{n-1}(q_1)\}$ , используя лемму 4, аналогично получаем противоречие.  $\square$

Из лемм 5–19 следует заключение теорем 1 и 2.

Теорема 3 следует из леммы 2 и теорем 1 и 2.

### 3. Доказательство следствий

Следствие 1 вытекает непосредственно из теорем 1 и 2.

Докажем следствие 2. Пусть  $G = A_{n-1}(q)$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно, где  $9 \leq n \not\equiv 2 \pmod{3}$ ,  $qq_1$  нечетно,  $q = p^f$ ,  $q_1 = p_1^{f_1}$ ,  $p$  и  $p_1$  — различные простые числа,  $f, f_1 \in \mathbb{N}$ ,  $n$  делится ровно на два различных нечетных простых числа и графы  $GK(G)$  и  $GK(G_1)$  совпадают. Так как  $n \not\equiv 2 \pmod{3}$ , то из теорем 1 и 2 следует, что  $\pi(q(q^2 - 1)) = \pi(q_1(q_1^2 - 1))$  и  $n$  делится на  $p$  и  $p_1$ . Так как  $p$  известно, то  $p_1$  известно, поэтому  $\pi(q_1^2 - 1)$  известно. Предположим, что существуют натуральные числа  $l$  и  $m$  такие, что  $l > m$  и  $\pi(p_1^{2l} - 1) = \pi(q_1^2 - 1) = \pi(p_1^{2m} - 1)$ . По лемме 1 существует  $t \in \pi(p_1^{2l} - 1) \setminus \pi(p_1^{2m} - 1)$ ; противоречие. Значит,  $q_1$  не может принимать два и более значений. Таким образом,  $G_1$  либо не существует, либо единственна.

Докажем следствие 3. Пусть  $G = A_{n-1}(q)$  и  $G_1$  — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков  $q$  и  $q_1$  соответственно, где  $9 \leq n \not\equiv 2 \pmod{3}$ ,  $qq_1$  нечетно,  $q = p^f$ ,  $q_1 = p_1^{f_1}$ ,  $p$  и  $p_1$  — различные простые числа,  $f, f_1 \in \mathbb{N}$ .

Пусть  $n \not\equiv 2 \pmod{3}$  и  $q$  нечетно. Из теорем 1 и 2 следует, что  $\pi(q(q^2 - 1)) = \pi(q_1(q_1^2 - 1))$ . Поскольку  $\pi(q(q^2 - 1))$  конечно, то число возможностей для  $p_1$  конечно. Если  $p_1$  фиксировано, то, рассуждая, как в доказательстве следствия 2, можно показать, что  $q_1$  либо не существует, либо единственно. Значит, число возможностей для  $q_1$  конечно.

Пусть  $n \not\equiv 2 \pmod{3}$  и  $q$  четно. Из теорем 1 и 2 следует, что  $\pi(q^2 - 1) = \pi(q_1(q_1^2 - 1))$ . Поскольку  $\pi(q(q^2 - 1))$  конечно, то число возможностей для  $p_1$  конечно. Если  $p_1$  фиксировано, то, рассуждая, как в доказательстве следствия 2, можно показать, что  $q_1$  либо не существует, либо единственно. Значит, число возможностей для  $q_1$  конечно.

Пусть  $n \equiv 2 \pmod{3}$  и  $q$  нечетно. Из теорем 1 и 2 следует, что  $\pi(q(q^2 - 1)(q^3 - 1)) = \pi(q_1(q_1^2 - 1)(q_1^3 - 1))$ . Если  $q$  известно, то число возможностей для  $p_1$  конечно и  $\pi(q_1(q_1^2 - 1)(q_1^3 - 1))$  известно. Пусть  $p_1$  фиксировано. Предположим, что существуют натуральные числа  $l$  и  $m$  такие, что  $l > m$  и  $\pi((p_1^{2l} - 1)(p_1^{3l} - 1)) = \pi((q_1^2 - 1)(q_1^3 - 1)) = \pi((p_1^{2m} - 1)(p_1^{3m} - 1))$ . По лемме 1 существует  $t \in \pi(p_1^{3l} - 1) \setminus \pi((p_1^{2m} - 1)(p_1^{3m} - 1))$ ; противоречие. Значит, если  $p_1$  фиксировано, то  $q_1$  не может принимать два и более значений. Итак, число возможностей для  $q_1$  конечно.

Пусть  $n \equiv 2 \pmod{3}$  и  $q$  четно. Из теорем 1 и 2 следует, что  $\pi((q^2 - 1)(q^3 - 1)) = \pi(q_1(q_1^2 - 1)(q_1^3 - 1))$ . Если  $q$  известно, то, рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем, что число возможностей для  $q_1$  конечно.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: <http://math.nsc.ru/alglog/18kt.pdf>.
2. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. V. 31, no. 9. P. 4405–4424.
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.
4. **Зиновьева М.Р.** Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 168–183.

5. **Зиновьева М.Р.** О конечных простых классических группах над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 101–116.
6. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
7. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
8. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
9. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513.
10. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.

Зиновьева Марианна Рифхатовна

Поступила 23.08.2017

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,

г. Екатеринбург

e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

#### REFERENCES

1. Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook. 18th Edition. Inst. Math. SO RAN. Novosibirsk, 2014. 253 p. URL: <http://math.nsc.ru/alglog/18kt.pdf>.
2. Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group. *Comm. Algebra.*, 2003, vol. 31, no. 9, pp. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800.
3. Zvezdina M. A. On nonabelian simple groups having the same prime graph as an alternating group. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 47–55. doi: 10.1134/S0037446613010072.
4. Zinov'eva M.R. Finite simple groups of Lie type over a field of the same characteristic with the same prime graph. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 168–183. (in Russian)
5. Zinov'eva On Finite Simple Classical Groups over Fields of Different Characteristics with Coinciding Prime Graphs. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, Suppl. 1, pp. 223–239. doi: 10.1134/S0081543817050248.
6. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. An Adjacency Criterion for the Prime Graph of a Finite Simple Group. *Algebra Logic*, 2005, vol. 44, no. 6, pp. 381–406. doi: 10.1007/s10469-005-0037-5.
7. Vasil'ev A.V. Vdovin E.P. Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group. *Algebra Logic*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 291–322. doi: 10.1007/s10469-011-9143-8.
8. Kondrat'ev A.S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363.
9. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0.
10. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444.

The paper was received by the Editorial Office on August 23, 2017.

*Marianna Rifkhatovna Zinov'eva*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru.

УДК 514+519.1

**ПРОБЛЕМА ШТЕЙНЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ГРОМОВА — ХАУСДОРФА:  
СЛУЧАЙ КОНЕЧНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ<sup>1</sup>****А. О. Иванов, Н. К. Николаева, А. А. Тужилин**

Изучается проблема Штейнера в пространстве Громова — Хаусдорфа, т. е. в пространстве компактных метрических пространств (рассматриваемых с точностью до изометрии) с расстоянием Громова — Хаусдорфа. Так как это пространство не является ограничено компактным, вопрос существования кратчайшей сети, соединяющей конечное множество точек в этом пространстве, открыт. В работе доказано, что каждое конечное семейство конечных метрических пространств соединяется некоторой кратчайшей сетью. Более того, оказалось, что в рассматриваемом случае среди кратчайших деревьев найдется дерево, все вершины которого суть конечные метрические пространства. Получена оценка числа элементов в этих пространствах. В качестве примера разобран случай трехточечных метрических пространств. Также показано, что пространство Громова — Хаусдорфа не реализует минимальные заполнения, т. е. кратчайшие деревья в нем не обязаны быть минимальными заполнениями своих границ.

Ключевые слова: проблема Штейнера, кратчайшая сеть, минимальное дерево Штейнера, минимальное заполнение, пространство Громова — Хаусдорфа, расстояние Громова — Хаусдорфа.

**A. O. Ivanov, N. K. Nikolaeva, A. A. Tuzhilin. Steiner's problem in the Gromov–Hausdorff space: the case of finite metric spaces.**

We study Steiner's problem in the Gromov–Hausdorff space, i.e., in the space of compact metric spaces (considered up to isometry) endowed with the Gromov–Hausdorff distance. Since this space is not boundedly compact, the problem of the existence of a shortest network connecting a finite point set in this space is open. We prove that each finite family of finite metric spaces can be connected by a shortest network. Moreover, it turns out that there exists a shortest tree all of whose vertices are finite metric spaces. A bound for the number of points in such metric spaces is derived. As an example, the case of three-point metric spaces is considered. We also prove that the Gromov–Hausdorff space does not realise minimal fillings, i.e., shortest trees in it need not be minimal fillings of their boundaries.

Keywords: Steiner's problem, shortest network, Steiner's minimal tree, minimal filling, Gromov–Hausdorff space, Gromov–Hausdorff distance.

**MSC:** 58E10, 49K35, 05C35, 05C10, 30L05

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-4-152-161

**Введение**

“Пространства подмножеств” интенсивно изучаются специалистами не только благодаря своей очевидной теоретической значимости, но и в силу важности таких приложений, как сравнение и распознавание образов, построение деформации одного геометрического объекта в другой и т. д. (см., например, [1]). Один из возможных подходов к изучению таких пространств — определить функцию расстояния между подмножествами как “меру несхожести” соответствующих объектов. В 1914 г. Ф. Хаусдорф [2] ввел в рассмотрение неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства  $X$ , равную точной нижней грани таких чисел  $r$ , что одно множество содержится в  $r$ -окрестности другого и наоборот. Эта функция превращает семейство замкнутых ограниченных подмножеств  $X$  в метрическое пространство. Позднее Д. Эдвардс [3] и независимо М. Громов [4] обобщили конструкцию Хаусдорфа на семейство всех метрических компактов, используя их

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16–01–00378) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-7962.2016.1).



изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства (см. определение ниже). Полученная функция называется расстоянием по Громову — Хаусдорфу, а соответствующее метрическое пространство метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, — пространством Громова — Хаусдорфа, или суперпространством и обозначается через  $\mathcal{M}$ . Геометрия этого пространства оказалась довольно причудливой и активно изучается в последнее время. Хорошо известно, что  $\mathcal{M}$  — линейно связное, полное, сепарабельное пространство, а также что  $\mathcal{M}$  не является ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию пространства Громова — Хаусдорфа можно найти в [5, гл. 7]. Недавно авторами было показано (см. [6]), что пространство  $\mathcal{M}$  является геодезическим, т. е. любые две его точки соединяет кратчайшая кривая, длина которой равна расстоянию между этими точками. В данной работе мы изучаем “разветвленные геодезические” в пространстве Громова — Хаусдорфа, т. е. кратчайшие, деревья, соединяющие конечные подмножества в  $\mathcal{M}$ .

Задачи об оптимальном соединении, к которым относится и проблема Штейнера о кратчайших деревьях, активно изучаются на протяжении многих лет не только благодаря своей математической красоте и нетривиальности, но и в силу очевидной прикладной значимости. Напомним, что проблема Штейнера в классической постановке требует найти кратчайшее дерево, соединяющее данное фиксированное конечное множество точек плоскости (при этом дерево может иметь дополнительные, не входящие в исходное множество, вершины). Уже эта классическая задача оказывается чрезвычайно сложной благодаря “комбинаторному взрыву” — экспоненциально быстро растущему числу возможных структур деревьев-кандидатов. Обобщенная проблема Штейнера о поиске кратчайших сетей в других метрических пространствах тем более нетривиальна. В частности, неизвестен общий критерий существования кратчайшей сети. Если объемлющее пространство ограниченно компактно, то теорема существования доказывается стандартными методами. В общем случае кратчайшее дерево может и не существовать. Например, в [7, гл. 7] построен пример трехточечного подмножества полного метрического пространства, для которого кратчайшего дерева не существует (в книге [7] также можно найти подробное введение в общую теорию минимальных сетей). По-видимому, первый такой пример для банаховых пространств был построен в [8] (см. также [9] и [10]). В данной работе изучается проблема Штейнера в пространстве Громова — Хаусдорфа, которое не является ограниченно компактным.

В работе показано, что если конечное подмножество  $M \subset \mathcal{M}$  состоит только из конечных метрических пространств, то  $M$  соединяется некоторым минимальным деревом Штейнера. Более того, в этом случае среди кратчайших деревьев существует такое, что все его дополнительные вершины также являются конечными метрическими пространствами, а также получена оценка сверху на возможное количество точек в них. В качестве примера разобран случай трехточечных метрических пространств. Также показано, что пространство Громова — Хаусдорфа не реализует минимальные заполнения, т. е. кратчайшие деревья в нем не обязаны быть минимальными заполнениями своих границ.

В случае общих метрических компактов авторами была решена проблема Штейнера только для двухэлементных границ [6], где она равносильна существованию кратчайших кривых, соединяющих произвольную пару точек пространства. Для большего числа граничных точек попытки применить предельный переход с использованием критерия предкомпактности Громова к успеху не привели.

Предварительная версия данной статьи была выложена в архиве библиотеки Корнельского университета (см. [11]). Также результаты работы были анонсированы в обзоре [12].

## 1. Необходимые определения и предварительные результаты

### 1.1. Пространство Громова — Хаусдорфа

Пусть  $X$  — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками  $x, y \in X$  будем обозначать через  $|xy|$ . Пусть  $\mathcal{P}(X)$  — семейство всех непустых подмножеств  $X$ .

Для  $A, B \in \mathcal{P}(X)$  положим

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |ab|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} |ab|\right\}.$$

Величина  $d_H(A, B)$  называется *расстоянием Хаусдорфа между  $A$  и  $B$* .

Отметим, что  $d_H(A, B)$  может равняться бесконечности (например, когда  $X = A = \mathbb{R}$  и  $B = \{0\} \subset \mathbb{R}$ ), а также нулю на неравных  $A$  и  $B$  (например, когда  $X = \mathbb{R}$ ,  $A = [a, b]$  и  $B = [a, b)$ ).

Пусть  $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}(X)$  обозначает множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств  $X$ . Хорошо известно (см., например, [5, гл. 7]), что  $d_H$  задает метрику на  $\mathcal{H}(X)$ .

Далее, пусть  $X$  и  $Y$  — метрические пространства. Тройку  $(X', Y', Z)$ , состоящую из метрического пространства  $Z$  и двух его подмножеств  $X'$  и  $Y'$ , изометричных соответственно  $X$  и  $Y$ , назовем *реализацией пары  $(X, Y)$* . Положим

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{r : \text{существует такая реализация } (X', Y', Z), \text{ что } d_H(X', Y') \leq r\}.$$

Величина  $d_{GH}(X, Y)$  называется *расстоянием Громова — Хаусдорфа между  $X$  и  $Y$* . Обозначим через  $\mathcal{M}$  множество всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Тогда (см., например [5, гл. 7]) расстояние  $d_{GH}$  является метрикой на  $\mathcal{M}$ .

Расстояние Громова — Хаусдорфа удобно изучать в терминах соответствий.

Пусть  $X$  и  $Y$  — произвольные непустые множества. Положим  $\mathcal{P}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$ . Элементы из  $\mathcal{P}(X, Y)$  называются *отношениями между  $X$  и  $Y$* . Если  $X' \subset X$  и  $Y' \subset Y$  — непустые подмножества, а  $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ , то положим

$$\sigma|_{X' \times Y'} = \{(x, y) \in \sigma : x \in X', y \in Y'\}.$$

Отметим, что  $\sigma|_{X' \times Y'}$  может оказаться пустым и тем самым не принадлежащим  $\mathcal{P}(X', Y')$ .

Пусть  $\pi_X : (x, y) \mapsto x$  и  $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$  — канонические проекции. Отношение  $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$  называется *соответствием*, если ограничения  $\pi_X$  и  $\pi_Y$  на  $\sigma$  сюръективны. Множество всех соответствий между  $X$  и  $Y$  обозначим через  $\mathcal{R}(X, Y)$ .

Если  $X$  и  $Y$  — метрические пространства, то для каждого отношения  $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$  определено его искажение

$$\text{dis } \sigma = \sup\{|xx'| - |yy'| : (x, y), (x', y') \in \sigma\}.$$

Хорошо известен следующий результат (см., например, [5, гл. 7]).

*Пусть  $X$  и  $Y$  — метрические пространства. Тогда  $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\{\text{dis } R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\}$ .*

Для метрического пространства  $X$  через  $\text{diam } X$  обозначим его диаметр:  $\text{diam } X = \sup\{|xy| : x, y \in X\}$ . Нам понадобится следующая оценка (см., например, [5, гл. 7]).

*Для любых метрических пространств  $X$  и  $Y$  таких, что диаметр по крайней мере одного из них конечен, имеем*

$$d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2} |\text{diam } X - \text{diam } Y|. \quad (1)$$

Соответствие  $R \in \mathcal{R}(X, Y)$  назовем *оптимальным*, если  $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{dis } R$ . Множество всех оптимальных соответствий между  $X$  и  $Y$  обозначим через  $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$ . Справедливо утверждение (см. [13, Theorem 2.6; 14]):

*Для  $X, Y \in \mathcal{M}$  имеем*

$$\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y) \neq \emptyset. \quad (2)$$

Пусть  $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$  состоит из всех конечных метрических пространств, каждое из которых состоит не более чем из  $n$  точек, а  $\mathcal{M}(d) \subset \mathcal{M}$  — из всех пространств, диаметры которых не больше  $d$ . Положим  $\mathcal{M}_n(d) = \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}(d)$ . Легко проверить, что имеет место следующий результат (см., например, [5, гл. 7]).

**Предложение 1.** *Пространство  $\mathcal{M}_n(d)$  компактно.*

### 1.2. Графы и сети. Минимальные деревья, минимальные заполнения

Напомним, что (простой) *граф*  $G = (V, E)$  — это совокупность непустого конечного множества вершин  $v_i \in V$  и множества ребер — двухэлементных подмножеств  $e = \{v_i, v_j\} \in E$  множества вершин. Будем обозначать ребро  $\{v_i, v_j\}$  через  $v_i v_j$ . Далее будем рассматривать только простые графы. Ребро  $e = v_1 v_2$  и вершина  $v_i, i = 1, 2$ , называются *инцидентными*; вершины  $v_1$  и  $v_2$ , инцидентные ребру  $e = v_1 v_2$ , называются *смежными*, а также *соединенными ребром  $e$* . *Степенью вершины* называется число инцидентных ей ребер графа. *Маршрутом* называется последовательность вершин  $v_1, \dots, v_n$ , в которой каждая пара последовательных вершин соединена ребром. *Циклом* называется маршрут, все ребра которого попарно различны и первая и последняя вершина совпадают. *Связным* называется граф, в котором любые две вершины соединены маршрутом. *Деревом* называется связный граф, не содержащий циклов.

Мы будем рассматривать граничные задачи, вводя ограничения на те или иные совокупности вершин изучаемых графов. Если некоторое такое семейство вершин выбрано, то его будем называть *границей графа*, а сам граф — *графом с границей*. Мы всегда будем предполагать, что у графа фиксирована некоторая граница (возможно, пустая). Как правило, границу графа  $G$  будем обозначать через  $\partial G$ . Вершины из  $\partial G$  будем называть *граничными*, а все остальные вершины графа  $G$  — *внутренними*. *Бинарным деревом* мы будем называть дерево с границей, степени вершин которого равны 1 или 3, а множество граничных вершин состоит из всех вершин степени 1.

Пусть  $M$  — произвольное конечное множество и  $G$  — связный граф. Будем говорить, что граф  $G$  (с границей  $\partial G$ ) *соединяет  $M$* , если  $\partial G = M$ . Определим *сеть  $\Gamma$  типа  $G = (V, E)$*  в множестве  $X$  как отображение  $\Gamma: V \rightarrow X$ ; граф  $G$  называется *параметризующим графом сети* или ее *топологией*. Ограничения отображения  $\Gamma$  на ребра, вершины (граничные, внутренние), границу параметризующего графа называются соответственно *ребрами, вершинами (граничными, внутренними), границей сети  $\Gamma$* . Границу сети  $\Gamma$  будем обозначать через  $\partial \Gamma$ . Если множество  $M \subset X$  является образом границы  $\partial \Gamma$  сети  $\Gamma$ , то говорят, что сеть  $\Gamma$  *соединяет множество  $M$  по отображению  $\partial \Gamma$* , и обозначают  $M \subset \Gamma$ .

Пусть теперь  $X$  — метрическое пространство и  $\Gamma$  — сеть типа  $G = (V, E)$  в  $X$ . Длина ребра  $\Gamma: \{v_i, v_j\} \rightarrow X$  сети  $\Gamma$  определяется как расстояние  $|\Gamma(v_i)\Gamma(v_j)|$ , а длина сети  $\Gamma$  — как сумма длин всех ее ребер:

$$|\Gamma| := \sum_{v_i v_j \in E} |\Gamma(v_i)\Gamma(v_j)|.$$

Сеть называется *невыврожденной*, если длины всех ее ребер отличны от нуля.

Пусть теперь  $M$  — подмножество в множестве  $X$  и граф  $G$  соединяет  $M$ . Условимся считать, что в этом случае все сети  $\Gamma$  типа  $G = (V, E)$  в  $X$  удовлетворяют следующему условию: ограничение  $\Gamma$  на  $M$  — тождественное отображение. Тем самым, каждая такая сеть  $\Gamma$  однозначно задается положением своих внутренних вершин. Поэтому если  $v_1, \dots, v_k$  — внутренние вершины параметризующего графа  $G$ , то сеть  $\Gamma$  типа  $G$ , соединяющая  $M \subset X$ , однозначно определяется множеством  $\{\Gamma(v_1), \dots, \Gamma(v_k)\}$ .

Пусть даны два графа  $G_1$  и  $G_2$ , соединяющие  $M \subset X$ , и сети  $\Gamma_i$  типа  $G_i, i = 1, 2$ . Назовем эти сети *равными*, если существует изоморфизм  $\nu: V_1 \rightarrow V_2$  графов  $G_i$ , тождественный на  $M$  и такой, что  $\Gamma_1 = \Gamma_2 \circ \nu$ . Отождествляя  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с помощью этого изоморфизма  $\nu$ , мы будем считать, что равные сети — это сети одного и того же типа, скажем,  $G_1$ .

Для фиксированной границы  $M$  в метрическом пространстве  $X$  рассмотрим связный граф  $G = (V, E)$ , соединяющий  $M$ . Обозначим через  $[G, M]$  множество всех сетей  $\Gamma$  типа  $G$  (в силу сделанного выше соглашения все сети  $\Gamma \in [G, M]$  удовлетворяют условию  $\Gamma|_{\partial G} = \text{id}$ ). Сеть из  $[G, M]$ , имеющая наименьшую возможную длину среди всех таких сетей, называется *минимальной параметрической сетью типа  $G$ , соединяющей  $M$* . Минимальная параметрическая сеть существует не всегда. Тем не менее точная нижняя грань величин  $|\Gamma|$  по всем сетям из  $\Gamma \in [G, M]$  всегда существует, называется *длиной минимальной параметрической сети* и

обозначается через  $\text{mpn}[G, M]$ .

Длиной минимального дерева Штейнера на  $M$  называется величина

$$\text{smt}(M) = \inf_{\Gamma: M \subset \Gamma} |\Gamma| = \inf_{G: \partial G = M} \text{mpn}[G, M],$$

где первый инфимум берется по всевозможным сетям, соединяющим  $M$ , а второй — по всем связным графам с границей  $M$ . Эти инфимумы могут не достигаться. Если же первый из них достигается на некоторой сети, то, как несложно показать (см., например, [7, гл. 1]), он достигается также и на невырожденной сети. Эта невырожденная сеть является деревом, имеющим не более  $n - 2$  внутренних вершин, и называется *минимальным деревом Штейнера на  $M$*  или *кратчайшим деревом на  $M$* . Множество всех кратчайших деревьев на  $M$  в метрическом пространстве  $X$  обозначим через  $\text{SMT}(M, X)$ . Также мы иногда будем писать  $\text{smt}(M, X)$  вместо  $\text{smt}(M)$ , явно указывая объемлющее пространство  $X$ .

Задачи, связанные с изучением минимальных деревьев Штейнера, объединяются под общим названием *проблема Штейнера*.

Техника, разработанная в [7, гл. 1] для римановых многообразий, легко обобщается на ограниченно компактные метрические пространства.

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — ограниченно компактное метрическое пространство. Тогда для любого его конечного подмножества  $M$  в пространстве  $X$  существует минимальное дерево Штейнера, соединяющее  $M$ , и для любого связного графа  $G$  с границей  $M$  существует соединяющая  $M$  минимальная параметрическая сеть типа  $G$  в  $X$ .

**Доказательство.** Мы приведем здесь краткую схему доказательства. Начнем с существования минимальной параметрической сети данного типа  $G$ . Длина каждой параметрической сети  $\Gamma$  типа  $G$  полностью определяется образами ее подвижных вершин, причем, так как расстояние  $|xy|$  между точками метрического пространства есть непрерывная функция от  $x$  и  $y$ , то длина  $\ell_\Gamma$  параметрической сети типа  $G$  есть непрерывная функция на  $X^k$ , где  $k$  — количество внутренних вершин графа  $G$ .

Далее, пусть  $O$  — некоторая точка из  $M$ . Конечное множество  $M$  содержится в некотором шаре  $B_r(O)$ . Длина параметрической сети  $\Gamma$  типа  $G$ , образы всех подвижных вершин которой расположены в этом шаре, не превосходит  $2rm$ , где  $m$  — количество ребер графа  $G$ . С другой стороны, если хотя бы одна вершина параметрической сети с границей  $M$  находится вне шара  $B_{2rm}(O)$ , то ее длина больше, чем  $2rm$ . Поэтому вне шара  $B = B_{2rm}(O)$  нет вершин минимальной параметрической сети типа  $G$ . Из сказанного вытекает, что минимальная параметрическая сеть типа  $G$  соответствует наименьшему значению функции  $\ell_\Gamma$  на компакте  $B^k$ . Это значение достигается по теореме Вейерштрасса, что и требовалось.

Перейдем к существованию кратчайшего дерева. Как отмечалось выше, длина кратчайшего дерева с границей  $M$  — это точная нижняя грань длин минимальных параметрических сетей с той же границей  $M$ , где инфимум берется по всевозможным связным графам с границей  $M$ , параметризующим эти сети. Ясно, что достаточно рассматривать невырожденные сети без циклов, т. е. невырожденные сети, параметризованные деревьями. Каждая такая невырожденная сеть-дерево может быть параметризована бинарным деревом (возможно, вырожденным), множество вершин степени 1 которого совпадает с  $M$ . Таких деревьев конечное число, поэтому длина кратчайшей сети с границей  $M$  представляет собой минимум длин минимальных параметрических бинарных деревьев с границей  $M$ , который достигается на некотором бинарном дереве  $G$ . Минимальное параметрическое дерево типа  $G$ , которое, как мы только что доказали, существует, и будет в этом случае кратчайшим деревом. Теорема доказана.

Следующий результат вытекает из предложения 1 и теоремы 1.

**Следствие 1.** Для любого непустого конечного множества  $M \subset \mathcal{M}_n(d)$  существует кратчайшее дерево в  $\mathcal{M}_n(d)$ , т. е.  $\text{SMT}(M, \mathcal{M}_n(d)) \neq \emptyset$ .

Оказывается, иногда длину кратчайшего дерева “можно уменьшить”, если разрешить менять объемлющее пространство. Соответствующая теория появилась в [15] как обобщение работ М. Громова о минимальных заполнениях римановых многообразий на случай конечных метрических пространств. В качестве аналога заполнений здесь выступают взвешенные графы, которые можно рассматривать как одномерные стратифицированные римановы многообразия.

Пусть  $M$  — конечное метрическое пространство. *Реализацией* пространства  $M$  назовем изометричное вложение  $\varphi: M \rightarrow X$  в некоторое метрическое пространство  $X$ . Величина

$$\text{mf}(M) = \inf \{t : \text{существует реализация } \varphi: M \rightarrow X \text{ такая, что } \text{smt}(\varphi(M), X) \leq t\}$$

называется *весом минимального заполнения* пространства  $X$ . Отметим, что в [15] дается комбинаторное определение на языке взвешенных графов. Там же показано, что эта точная нижняя грань достигается для любого конечного метрического пространства. Кратчайшие деревья из  $\text{SMT}(\varphi(M), X)$ , для которых  $\text{smt}(\varphi(M), X) = \text{mf}(M)$  (рассматриваемые как взвешенные деревья, веса ребер которых — суть расстояния между их концами в  $X$ ), называются *минимальными заполнениями* пространства  $M$ .

Встречаются метрические пространства  $X$ , в которых каждое конечное подмножество  $M$  соединяется кратчайшим деревом, и это дерево является минимальным заполнением своей границы  $M$  (здесь  $M$  рассматривается как конечное метрическое пространство с метрикой, индуцированной из  $X$ ). В этом случае говорят, что  $X$  *реализует минимальные заполнения*. Все банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения, были описаны в [16]. Оказалось, что среди конечных нормированных пространств этим свойством обладает только пространство  $\mathbb{R}_\infty^n$ , т.е. пространство  $\mathbb{R}^n$  с нормой  $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_i |x_i|$  (для пространства  $\mathbb{R}_\infty^n$ , а также для пространства  $\ell_\infty$  ограниченных последовательностей этот факт был впервые доказан З. Н. Овсянниковым в его курсовой работе, выполненной на механико-математическом факультете МГУ; см. также [17]). Отметим, что если пространство обладает указанным свойством, то поиск минимальной параметрической сети в нем можно свести к задаче линейного программирования (подробности см. в [15]).

## 2. Случай границ, состоящих из конечных метрических пространств

Как уже отмечалось выше, в пространстве Громова — Хаусдорфа  $\mathcal{M}$  теорема 1 не работает. Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема, гарантирующая существование кратчайших сетей в  $\mathcal{M}$  в специальном случае границ, состоящих из конечных метрических пространств.

**Теорема 2.** *Для каждого  $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subset \mathcal{M}_n$  выполняется*

$$\text{SMT}(M, \mathcal{M}) \neq \emptyset.$$

**Доказательство.** Положим  $r = \text{smt}(M, \mathcal{M})$ , и пусть  $\mathcal{T}(M)$  состоит из всех деревьев  $G$  на  $\mathcal{M}$ , соединяющих  $M$  и таких, что  $|G| \leq r + 1$ . По определению длины кратчайшего дерева имеем  $\mathcal{T}(M) \neq \emptyset$ , и  $\text{smt}(M, \mathcal{M}) = \inf\{|G| : G \in \mathcal{T}(M)\}$ .

**Лемма 1.** *Положим  $d = \max_i \{\text{diam } m_i\}$  и  $\hat{d} = 2r + d + 2$ . Тогда для произвольного  $G = (V, E) \in \mathcal{T}(M)$  имеем  $V \subset \mathcal{M}(\hat{d})$ .*

**Доказательство.** Если существует  $v \in V$ , диаметр которого больше  $\hat{d}$ , то согласно оценке (1) имеем  $|G| \geq d_{GH}(v, m_1) \geq \frac{1}{2}|\text{diam } v - \text{diam } m_1| > \frac{1}{2}(2r + d + 2 - d) = r + 1$ , противоречие. Лемма доказана.

**К о н с т р у к ц и я.** Рассмотрим произвольное дерево  $G = (V, E) \in \mathcal{T}(M)$ . Для каждого  $e = vw \in E$  выберем некоторое  $R_e \in \mathcal{R}_{\text{opt}}(v, w)$ , существующее в силу (2). Положим  $m = \sqcup_{i=1}^k m_k$ . Для каждого  $x \in m$  построим некоторое дерево  $T_x = (P_x, F_x)$  следующим образом. В том компакте  $m_i \in V$ , который содержит  $x$ , выберем саму точку  $x$  и обозначим через  $p_{m_i}$ . Далее в каждом компакте  $v \in V$  выберем по одной точке  $p_v$ , причем так, что для каждого  $vw \in E$  выполняется  $p_v p_w \in R_e$ . Легко видеть, что это можно сделать, начав с вершины  $m_i \ni x$  как с корневой вершины дерева  $G$  и последовательно переходя от уровня к уровню. Положим  $P_x = \{p_v : v \in V\}$  и  $F_x = \{p_v p_w : vw \in E\}$ . Отметим, что отображение  $v \mapsto p_v$  является изоморфизмом графов  $G$  и  $T_x$ . Дерево  $T_x$  назовем *нитью, вытущенной из  $x$* .

Обозначим через  $N$  число точек в  $m$ . Для каждого  $v \in V$  определим  $v' \subset v$  следующим образом:

$$v' = \{y \in v : \text{существует } x \in m, \text{ для которого } y \in P_x\}.$$

Отметим, что для каждого  $v \in V$  имеем  $v' \in \mathcal{M}_N$ .

Пусть  $V' = \{v' : v \in V\}$ . Через  $G' = (V', E')$  обозначим граф, в котором  $v'w' \in E'$  тогда и только тогда, когда  $vw \in E$ . Отображение  $v \mapsto v'$  является, очевидно, изоморфизмом графов  $G$  и  $G'$ . Кроме того, в силу сказанного выше  $G'$  — граф на  $\mathcal{M}_N$ .

Следующее свойство выбранных  $v' \subset v$  мгновенно вытекает из построения.

**Лемма 2.** *Для любого  $e = vw \in E$  имеем  $R_{e'} := R_e|_{v' \times w'} \in \mathcal{R}(v', w')$  и  $\text{dis } R_{e'} \leq \text{dis } R_e$ . В частности,  $|e'| \leq |e|$ , откуда  $|G'| \leq |G|$ , и, значит,  $G' \in \mathcal{T}(M)$ .*

Применим леммы 1 и 2.

**Следствие 2.** *Построенное выше  $G' \in \mathcal{T}(M)$  является деревом на  $\mathcal{M}_N(\hat{d})$ , и, значит,*

$$\text{smt}(M, \mathcal{M}) = \text{smt}(M, \mathcal{M}_N(\hat{d})).$$

Осталось применить следствие 1. Теорема полностью доказана.

**Следствие 3.** *Для каждого  $M = \{m_1, \dots, m_k\} \subset \mathcal{M}_n$  существует кратчайшее дерево для  $M$  в  $\mathcal{M}$ , все вершины которого являются конечными метрическими пространствами, количество точек в которых не превосходит  $N = \sum_{i=1}^k |m_i| - k + 1$ .*

### 3. Трехточечные метрические пространства и минимальные заполнения

В данном разделе на примере кратчайших деревьев, соединяющих треугольники в пространстве  $\mathcal{M}_3$ , мы продемонстрируем, как работает следствие 3.

Оказывается, множество классов изометрий трехточечных метрических пространств естественным образом вкладывается в нормированное пространство  $\mathbb{R}_{\infty}^3$ . А именно, в работе [18] доказано следующее утверждение.

**Утверждение 1.** *Множество классов изометрий трехточечных метрических пространств с метрикой Громова — Хаусдорфа изометрично многогранному конусу*

$$\{(a, b, c) : 0 < a \leq b \leq c \leq a + b\}$$

*в пространстве  $\mathbb{R}_{\infty}^3$ . Соответствующая изометрия  $h$  переводит треугольник со сторонами  $a \leq b \leq c$  в точку  $1/2(a, b, c)$ .*

В той же работе [18] показано, что если  $T$  — произвольный “невырожденный” треугольник, т. е. все неравенства треугольника выполняются строго, то любая достаточно малая его шаровая окрестность  $U(T)$  в пространстве  $\mathcal{M}_3$  реализует минимальные заполнения в следующем смысле: для каждого ее конечного подмножества  $M$  каждое кратчайшее дерево  $G \in$

$SMT(M, \mathcal{M})$  является минимальным заполнением. Однако для “больших” граничных множеств в  $\mathcal{M}_3$  кратчайшее дерево уже не обязано быть минимальным заполнением.

В качестве примера рассмотрим треугольник (трехточечное множество)  $M = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{M}_3$ , где классы изометрий треугольников  $A_i$  заданы упорядоченными наборами длин сторон:

$$A_1 = (8, 22, 29.5), \quad A_2 = (11.5, 18, 29), \quad A_3 = (12, 21.5, 33).$$

С помощью утверждения 1 легко сосчитать, что  $|A_i, A_j| = 2$ , т. е. треугольник  $M \subset \mathcal{M}$  правильный. Поэтому  $\text{mf}(M) = 3$  (в качестве минимального заполнения можно взять кратчайшее дерево  $G$  для  $h(M) \subset \mathbb{R}_\infty^3$  с единственной дополнительной вершиной  $S = 1/2(10, 20, 31)$ ). Легко проверить, что  $h^{-1}(S) = \emptyset$ , поэтому дереву  $G$  не соответствует никакая сеть в  $\mathcal{M}$ . Но, может быть, также существует дополнительная вершина  $P$  в  $\mathcal{M}$  такая, что  $\sum_i |A_i P| = 3$ ?

В силу следствия 3 достаточно искать вершину  $P$  в пространстве  $\mathcal{M}_7$ . Эта оценка позволяет перебрать все возможные соответствия между  $P$  и  $A_i$  и показать, что такой точки  $P \in \mathcal{M}$  не существует (см. подробности в [18]). Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 2.** *Пространство  $\mathcal{M}$  классов изометрий компактных метрических пространств с метрикой Громова — Хаусдорфа не реализует минимальные заполнения. В частности, кратчайшая сеть в  $\mathcal{M}$  для построенного выше треугольника  $M \subset \mathcal{M}$  не является минимальным заполнением.*

Авторы пользуются случаем поздравить Сергея Владимировича Матвеева с замечательным юбилеем, пожелать ему долгих, успешных и счастливых лет, а также поблагодарить его за внимание и интерес к нашей работе.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Memoli F.** On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison // Proc. Eurographics Symposium on Point Based Graphics 2007 / eds. M. Botsch, R. Pajarola, B. Chen, and M. Zwicker. Prague, 2007. P. 81–90. doi: 10.2312/SPBG/SPBG07/081-090.
2. **Hausdorff F.** Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig: Veit and Company, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949]. 476 p. ISBN: 978-0-8284-0061-9.
3. **Edwards D.** The structure of superspace // Studies in Topology / eds. N.M. Stavrakas, K.R. Allen. (Proc. Conf., Univ. North Carolina, Charlotte, N. C., 1974; dedicated to Math. Sect. Polish Acad. Sci.) N. Y.; London; San Francisco: Academic Press, Inc., 1975. P. 121–133. doi: 10.1016/B978-0-12-663450-1.50017-7.
4. **Gromov M.** Groups of polynomial growth and expanding maps // Publications Mathematiques I.H.E.S. 1981. Vol. 53, no. 1. P. 53–78. doi: 10.1007/BF02698687.
5. **Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.** Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2004. 512 с. ISBN: 5-93972-300-4.
6. **Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А.** Метрика Громова — Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 6. С. 947–950. doi: 10.4213/mzm11411.
7. **Иванов А.О., Тужилин А.А.** Теория экстремальных сетей. М., Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2003. 424 p. ISBN: 5-93972-292-X.
8. **Гаркави А.Л., Шматков В.А.** О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве // Мат. сб. 1974. Т. 95, № 2. С. 272–293.
9. **Бородин П.А.** Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 4. С. 514–518, doi: 10.4213/mzm8697.
10. **Беднов Б.Б., Стрелкова Н.П.** О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 1. С. 46–54. doi: 10.4213/mzm9228.
11. **Ivanov A., Nikolaeva N., Tuzhilin A.** Steiner problem in Gromov–Hausdorff space: the Case of finite metric spaces [e-resource]. 2016. 5 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1604.02170.pdf>.
12. **Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.** Minimal networks: A review // Advances in Dynamical Systems and Control / eds. V.A. Sadovnochiy, M.Z. Zgurovsky. Cham: Springer Switzerland, 2016. pp. 43–80. (Studies in Systems, Decision and Control; vol. 69). doi: 10.1007/978-3-319-40673-2\_4.

13. **Ivanov A., Iliadis S., Tuzhilin A.** Realizations of Gromov–Hausdorff distance [e-source]. 2016. 6 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1603.08850.pdf>.
14. **Chowdhury S., Memoli F.** Constructing geodesics on the space of compact metric spaces [e-source]. 2016. 5 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1603.02385.pdf>.
15. **Иванов А.О., Тужилин А.А.** Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 5. С. 65–118. doi: 10.4213/sm7777.
16. **Беднов Б.Б., Бородин П.А.** Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения // Мат. сб. 2014. Т. 205, № 4. С. 3–20. doi: 10.4213/sm8264.
17. Минимальные заполнения псевдометрических пространств / А.О. Иванов, А.А. Тужилин, А.Ю. Еремин, Е.С. Ероховец, А.С. Пахомова, О.В. Рублева, Н.П. Стрелкова, Е.И. Филоненко // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. 2011. Т. 27. С. 83–105.
18. **Ivanov A., Tuzhilin A.** Gromov – Hausdorff distance, irreducible correspondences, Steiner problem, and minimal fillings [e-resource]. 2016. 11 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1604.06116.pdf>.

Иванов Александр Олегович

Поступила 23.06.2017

д-р физ.-мат. наук

профессор механико-математического факультета

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

г. Москва

e-mail: [aoiva@mech.math.msu.su](mailto:aoiva@mech.math.msu.su)

Николаева Надежда Константиновна

преподаватель математики

СОШ НОУ “Православная Свято-Петровская школа”,

г. Москва

e-mail: [nadkostnik@mail.ru](mailto:nadkostnik@mail.ru)

Тужилин Алексей Августинovich

д-р физ.-мат. наук

профессор механико-математического факультета

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,

г. Москва

e-mail: [tuz@mech.math.msu.su](mailto:tuz@mech.math.msu.su)

## REFERENCES

1. Memoli F. On the use of Gromov–Hausdorff distances for shape comparison. In: *Proc. Eurographics Symposium on Point Based Graphics 2007*, ed. by M. Botsch, R. Pajarola, B. Chen, and M. Zwicker, Prague, 2007, pp. 81–90, doi: 10.2312/SPBG/SPBG07/081-090.
2. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig, Veit, 1914 [reprinted by AMS Chelsea in 1949], 476 p. ISBN: 978-0-8284-0061-9.
3. Edwards D. The structure of superspace. *Studies in Topology*, ed. by N.M. Stavrakas, K.R. Allen, Proc. Conf., Univ. North Carolina, Charlotte, N. C., 1974; dedicated to Math. Sect. Polish Acad. Sci., N. Y.; London; San Francisco: Acad. Press, Inc., 1975, pp. 121–133. doi: 10.1016/B978-0-12-663450-1.50017-7.
4. Gromov M. Groups of polynomial growth and expanding maps. In: *Publications Mathématiques I.H.E.S.*, 1981, vol. 53, no. 1, pp. 53–78. doi: 10.1007/BF02698687.
5. Burago D.Yu., Burago Yu.D., Ivanov S.V. *A course in metric geometry*, Ser. Graduate Studies in Mathematics, vol. 33, Providence: AMS, 2001, 415 p. ISBN: 0821821296. Translated to Russian under the title *Kurs metricheskoj geometrii*. Moscow, Izhevsk: Inst. Komp'yut. Issled. Publ., 2004, 512 p.
6. Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. The Gromov–Hausdorff metric on the space of compact metric spaces is strictly intrinsic. *Math. Notes*, 2016, vol. 100, no. 6, pp. 171–173. doi: 10.1134/S0001434616110298.
7. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Teoriya ekstremal'nykh setei* [Extreme Networks Theory]. Moscow, Izhevsk: Inst. Komp'yut. Issled. Publ., 2003, 424 p. ISBN: 5-93972-292-X.



8. Garkavi A.L., Shmatkov V.A. On the Lamé point and its generalizations in a normed space. *Math. USSR-Sb.*, 1974, vol. 24, no. 2, pp. 267–286. doi: 10.1070/SM1974v024n02ABEH002187.
9. Borodin P.A. An example of nonexistence of a Steiner point in a Banach space. *Math. Notes*, 2010, vol. 87, no. 3, pp. 485–488. doi: 10.1134/S0001434610030260.
10. Bednov B.B., Strelkova N.P. On the existence of shortest networks in Banach spaces. *Math. Notes*, 2013, vol. 94, no. 1, pp. 41–48. doi: 10.1134/S0001434613070043.
11. Ivanov A., Nikolaeva N., Tuzhilin A. Steiner problem in Gromov–Hausdorff space: the Case of finite metric spaces [e-resource]. 2016. 5 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1604.02170.pdf>.
12. Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Minimal networks: A review. In: *Advances in Dynamical Systems and Control* ed. by V.A. Sadovnochiy, M.Z. Zgurovsky. Cham: Springer Switzerland, 2016, Ser. Studies in Systems, Decision and Control, vol. 69, pp. 43–80. doi: 10.1007/978-3-319-40673-2\_4.
13. Ivanov A., Iliadis S., Tuzhilin A. Realizations of Gromov–Hausdorff distance [e-resource]. 2016. 6 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1603.08850.pdf>.
14. Chowdhury S., Memoli F. Constructing geodesics on the space of compact metric spaces. 2016. 5 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1603.02385.pdf>.
15. Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. One-dimensional Gromov minimal filling problem. *Sb. Math.*, 2012, vol. 203, no. 5, pp. 677–726. doi: 10.1070/SM2012v203n05ABEH004239.
16. Bednov B.B., Borodin P.A. Banach spaces that realize minimal fillings. *Sb. Math.*, 2014, vol. 205, no. 4, pp. 459–475. doi: 10.1070/SM2014v205n04ABEH004383.
17. A.O. Ivanov, A.A. Tuzhilin, A.Y. Yeremin, E.S. Erokhovets, A.S. Pakhomova, O.V. Rubleva, N.P. Strelkova, E.I. Filonenko. *Minimal'nye zapolneniya psevdometricheskikh prostranstv* [Minimum fillings of pseudometric spaces]. *Tr. seminarov po vektornomu i tenzornomu analizu s ikh prilozheniyami k geometrii, mekhanike i fizike* [Proc. Seminar on Vector and Tensor Analysis with their Applications to Geometry, Mechanics and Physics]. 2011, vol. 27, pp. 83–105. ISBN: 978-5-211-06253-5.
18. Ivanov A., Tuzhilin A. Gromov — Hausdorff distance, irreducible correspondences, Steiner problem, and minimal fillings. 2016. 11 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1604.06116.pdf>.

The paper was received by the Editorial Office on June 23, 2017.

*A. O. Ivanov.* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: [aoiva@mech.math.msu.su](mailto:aoiva@mech.math.msu.su).

*N. K. Nikolaeva.* Mathematics Teacher, SOSh NOU “Orthodox Saint-Peter School”, Moscow, 109028, Tessinskiy per., 3 Russia, e-mail: [nadkostnik@mail.ru](mailto:nadkostnik@mail.ru).

*A. A. Tuzhilin.* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Moscow, 119991 Russia, e-mail: [tuz@mech.math.msu.su](mailto:tuz@mech.math.msu.su).

УДК 517.518.28+517.518.862

**О ПОРЯДКЕ УБЫВАНИЯ РАВНОМЕРНЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ НА КЛАССАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  $H_p^l[\omega]$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$**

**Н. А. Ильясов**

С. Б. Стечкиным была поставлена задача: для заданных  $1 \leq p < q \leq \infty$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$  и  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$  найти точный порядок убывания  $L_q(\mathbb{T})$ -модуля гладкости  $k$ -го порядка  $\omega_k(f^{(r)}; \delta)_q$  на классах  $2\pi$ -периодических функций  $H_p^l[\omega] = \{f \in L_p(\mathbb{T}) : \omega_l(f; \delta)_p \leq \omega(\delta), \delta \in (0, \pi]\}$ , где  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ ,  $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$ ,  $\Omega_l(0, \pi]$  — класс функций  $\omega = \omega(\delta)$ , определенных на  $(0, \pi]$  и удовлетворяющих условиям:  $0 < \omega(\delta) \downarrow 0$  ( $\delta \downarrow 0$ ) и  $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow$  ( $\delta \uparrow$ ). Ранее автором получено решение указанной задачи в случае  $1 \leq p < q < \infty$ . В настоящей работе приводится решение в случае  $1 \leq p < q = \infty$ , а именно, имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $f \in L_p(\mathbb{T})$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $l > \sigma = r + 1/p$ ,  $\rho = l - (k + \sigma)$  и  $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}\omega_l(f; \pi/n)_p < \infty$ ; тогда  $f$  эквивалентна некоторой функции  $\psi \in C^r(\mathbb{T})$  и справедлива оценка  $\omega_k(\psi^{(r)}; \pi/n)_\infty \leq C_1(l, k, r, p) \left( \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1}\omega_l(f; \pi/\nu)_p + \chi(\rho)n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega_l(f; \pi/\nu)_p \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $C^r(\mathbb{T})$  — класс функций  $\psi \in C(\mathbb{T})$ , имеющих обычную производную  $r$ -го порядка  $\psi^{(r)} \in C(\mathbb{T})$  ( $\psi^{(0)} = \psi$ ,  $C^0(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ ),  $\chi(t) = 0$  при  $t \leq 0$  и  $\chi(t) = 1$  при  $t > 0$ .

Отметим, что приведенная оценка охватывает все возможные случаи соотношений между  $l$  и  $k + r$ .

**Теорема 2.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $l > \sigma = r + 1/p$ ,  $\rho = l - (k + \sigma)$ ,  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$  и  $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}\omega(\pi/n) < \infty$ ; тогда  $\sup\{\omega_k(\psi^{(r)}; \pi/n)_\infty : f \in H_p^l[\omega]\} \asymp \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1}\omega(\pi/\nu) + \chi(\rho)n^{-k} \times \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega(\pi/\nu)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , где  $\psi$  обозначает соответствующую функцию из  $C^r(\mathbb{T})$ , эквивалентную  $f \in H_p^l[\omega]$ .

В утверждениях теорем 1 и 2 наибольший интерес представляет случай  $l = k + \sigma = k + r + 1/p$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 0$ ), который возможен лишь при  $p = 1$ , поскольку  $r \in \mathbb{Z}_+$  и  $l, k \in \mathbb{N}$ . В этом случае при доказательстве оценки из теоремы 1 используется неравенство  $n^{-l}\|T_{n,1}^{(l)}(f; \cdot)\|_\infty \leq C_2(l)n\omega_{l+1}(f; \pi/n)_1$ , где  $T_{n,1}(f; \cdot)$  — полином наилучшего в метрике  $L_1(\mathbb{T})$  приближения функции  $f \in L_1(\mathbb{T})$ , которое в свою очередь выводится как следствие усиленного варианта неравенства разных метрик для производных произвольных тригонометрических полиномов  $\|t_n^{(l)}(\cdot)\|_\infty \leq 2^{-1}\pi\|t_n^{(l+1)}(\cdot)\|_1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Ключевые слова: модуль гладкости, наилучшее приближение, неравенства между модулями гладкости различных порядков в разных метриках, точный порядок убывания равномерных модулей гладкости на классе.

**N. A. Ilyasov. On the order of decrease of uniform moduli of smoothness for the classes of periodic functions  $H_p^l[\omega]$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ .**

S. B. Stechkin posed the following problem: for given  $1 \leq p < q \leq \infty$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ , and  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$ , find the exact order of decrease of the  $L_q(\mathbb{T})$ -modulus of smoothness of the  $k$ th order  $\omega_k(f^{(r)}; \delta)_q$  on the classes of  $2\pi$ -periodic functions  $H_p^l[\omega] = \{f \in L_p(\mathbb{T}) : \omega_l(f; \delta)_p \leq \omega(\delta), \delta \in (0, \pi]\}$ , where  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ ,  $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$ , and  $\Omega_l(0, \pi]$  is the class of functions  $\omega = \omega(\delta)$  defined on  $(0, \pi]$  and satisfying the conditions  $0 < \omega(\delta) \downarrow 0$  ( $\delta \downarrow 0$ ) and  $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow$  ( $\delta \uparrow$ ). Earlier the author solved this problem in the case  $1 \leq p < q < \infty$ . In the present paper, we give a solution in the case  $1 \leq p < q = \infty$ ; more exactly, we prove the following theorems.

**Theorem 1.** Suppose that  $1 \leq p < \infty$ ,  $f \in L_p(\mathbb{T})$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $l > \sigma = r + 1/p$ ,  $\rho = l - (k + \sigma)$ , and  $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}\omega_l(f; \pi/n)_p < \infty$ . Then  $f$  is equivalent to some function  $\psi \in C^r(\mathbb{T})$  and the following estimate holds:  $\omega_k(\psi^{(r)}; \pi/n)_\infty \leq C_1(l, k, r, p) \left\{ \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1}\omega_l(f; \pi/\nu)_p + \chi(\rho)n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega_l(f; \pi/\nu)_p \right\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , where  $\chi(t) = 0$  for  $t \leq 0$ ,  $\chi(t) = 1$  for  $t > 0$ , and  $C^r(\mathbb{T})$  is the class of functions  $\psi \in C(\mathbb{T})$  that have the usual  $r$ th-order derivative  $\psi^{(r)} \in C(\mathbb{T})$  (we assume that  $\psi^{(0)} = \psi$  and  $C^{(0)}(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ ).

Note that this estimate covers all possible cases of relations between  $l$  and  $k + r$ .

**Theorem 2.** Suppose that  $1 \leq p < \infty$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $l > \sigma = r + 1/p$ ,  $\rho = l - (k + \sigma)$ ,  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$ , and  $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1}\omega(\pi/n) < \infty$ . Then  $\sup\{\omega_k(\psi^{(r)}; \pi/n)_\infty : f \in H_p^l[\omega]\} \asymp \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1}\omega(\pi/\nu) + \chi(\rho)n^{-k} \times \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega(\pi/\nu)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , where  $\psi$  denotes the corresponding function from  $C^r(\mathbb{T})$  equivalent to  $f \in H_p^l[\omega]$ .

In Theorems 1 and 2, the case  $l = k + \sigma = k + r + 1/p$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 0$ ) is of the most interest. This case is possible only for  $p = 1$ , since  $r \in \mathbb{Z}_+$  and  $l, k \in \mathbb{N}$ . In this case, the proof of the estimate in Theorem 1 employs the inequality  $n^{-l}\|T_{n,1}^{(l)}(f; \cdot)\|_\infty \leq C_2(l)n\omega_{l+1}(f; \pi/n)_1$ , where  $T_{n,1}(f; \cdot)$  is a best approximation polynomial for the function  $f \in L_1(\mathbb{T})$ . The latter inequality is derived from the strengthened version of the inequality of

different metrics for derivatives of arbitrary trigonometric polynomials  $\|t_n^{(l)}(\cdot)\|_\infty \leq 2^{-1}\pi\|t_n^{(l+1)}(\cdot)\|_1, n \in \mathbb{N}$ .

Keywords: modulus of smoothness, best approximation, inequality between moduli of smoothness of different orders in different metrics, exact order of decrease for uniform moduli of smoothness on a class.

MSC: 42A10, 41A17, 41A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-162-175

### Введение

Пусть  $L_p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$ , — пространство всех измеримых  $2\pi$ -периодических функций  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  с конечной  $L_p(\mathbb{T})$ -нормой  $\|f\|_p = \left(\pi^{-1} \int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ ,  $L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$  — пространство всех непрерывных  $2\pi$ -периодических вещественнозначных функций с равномерной нормой  $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{T}\}$ , где  $\mathbb{T} = (-\pi, \pi]$ ;  $\omega_l(f; \delta)_p$  — модуль гладкости  $l$ -го порядка функции  $f \in L_p(\mathbb{T}), l \in \mathbb{N}, \delta \in [0, \infty) : \omega_l(f; \delta)_p = \sup\{\|\Delta_h^l f(\cdot)\|_p : h \in \mathbb{R}, |h| \leq \delta\}$ , где  $\Delta_h^l f(x) = \sum_{\nu=0}^l (-1)^{l-\nu} \binom{l}{\nu} f(x + \nu h)$ ,  $\binom{l}{\nu} = l! / (\nu!(l-\nu)!), \nu = \overline{0, l}; \Omega_l(0, \pi]$  — класс функций  $\omega = \omega(\delta)$ , определенных на  $(0, \pi]$  и удовлетворяющих условиям:  $0 < \omega(\delta) \downarrow 0 (\delta \downarrow 0)$  и  $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow); H_p^l[\omega]$  — класс функций  $f \in L_p(\mathbb{T})$ , для каждой из которых  $\omega_l(f; \delta)_p \leq \omega(\delta), \delta \in (0, \pi]$ , где  $1 \leq p < \infty, l \in \mathbb{N}$  и  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$ .

Ниже и всюду в дальнейшем  $C_j(l, k, r, p, \dots)$ , где  $j \in \mathbb{N}$ , обозначают положительные постоянные, зависящие только от указанных в скобках параметров, а  $\chi(t), t \in \mathbb{R}$ , обозначает функцию Хевисайда:  $\chi(t) = 0$  при  $t \leq 0$  и  $\chi(t) = 1$  при  $t > 0$ .

С. Б. Стечкиным была поставлена задача: для заданных  $1 \leq p < q \leq \infty, r \in \mathbb{Z}_+, l, k \in \mathbb{N}$  и  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$  найти точный порядок убывания  $\omega_k(f^{(r)}; \delta)_q$  на классах  $H_p^l[\omega]$ . Автором [1, теорема 2] получено решение этой задачи в случае  $1 \leq p < q < \infty$  (там же приведена соответствующая библиография), а именно, имеет место следующее утверждение: Пусть

$$1 \leq p < q < \infty, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad l, k \in \mathbb{N}, \quad l > \sigma = r + 1/p - 1/q, \quad \rho = l - (k + r), \quad \omega \in \Omega_l(0, \pi]$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1} \omega^q(\pi/n) < \infty;$$

тогда

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \omega_k \left( f^{(r)}; \frac{\pi}{n} \right)_q : f \in H_p^l[\omega] \right\} \\ & \asymp \left( \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1} \omega^q \left( \frac{\pi}{\nu} \right) \right)^{1/q} + \chi(\rho) n^{-k} \left( \sum_{\nu=1}^n \nu^{q(k+\sigma)-1} \omega^q \left( \frac{\pi}{\nu} \right) \right)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку  $0 < 1/p - 1/q < 1$ , то условие  $l > \sigma = r + 1/p - 1/q$  равносильно условию  $l > r$ , а соотношения  $\rho = l - (k + r) > 0 (\Rightarrow \chi(\rho) = 1)$  и  $\rho = l - (k + r) \leq 0 (\Rightarrow \chi(\rho) = 0)$  равносильны соответственно неравенствам  $l > k + \sigma$  и  $l < k + \sigma$ .

Напомним, что порядковое равенство  $\alpha_n \asymp \beta_n$  означает существование таких постоянных  $0 < C_2 \leq C_1$ , зависящих лишь от заданных в условии утверждения параметров (в данном случае  $l, k, r, p$  и  $q$ ), что  $C_2\beta_n \leq \alpha_n \leq C_1\beta_n$ .

В настоящей работе приводится решение указанной задачи в случае  $1 \leq p < q = \infty$ .

**Теорема 1.** Пусть  $1 \leq p < \infty, f \in L_p(\mathbb{T}), r \in \mathbb{Z}_+, l, k \in \mathbb{N}, l > \sigma = r + 1/p, \rho = l - (k + \sigma)$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} \omega_l \left( f; \frac{\pi}{n} \right)_p < \infty; \tag{0.1}$$

тогда  $f$  эквивалентна некоторой функции  $\psi \in C^r(\mathbb{T})$  и справедлива оценка

$$\omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty \leq C_1(l, k, r, p) \left( \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p + \chi(\rho) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (0.2)$$

где  $C^r(\mathbb{T})$  — класс функций  $\psi \in C(\mathbb{T})$ , имеющих обычную производную  $r$ -го порядка  $\psi^{(r)} \in C(\mathbb{T})$  ( $\psi^{(0)} = \psi$ ,  $C^{(0)}(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})$ ).

**З а м е ч а н и е 1.** 1) Условие  $l > \sigma = r + 1/p$ , равносильное неравенствам  $l \geq r + 1$  при  $p > 1$  и  $l \geq r + 2$  при  $p = 1$ , необходимо для сходимости ряда (0.1) для каждой функции  $f \in L_p(\mathbb{T})$  с  $\omega_l(f; \delta)_p \neq 0$ , поскольку в противном случае в силу известного свойства  $\omega_l(f; \delta)_p \geq (2\pi)^{-l} \omega_l(f; \pi)_p \delta^l$ ,  $\delta \in (0, \pi]$ , ряд (0.1) заведомо расходится. Если  $r = 0$  и  $l \leq \sigma = 1/p$ , что возможно лишь при  $p = 1$  и  $l = \sigma = 1$ , то даже наибольший порядок убывания модуля непрерывности  $\omega_1(f; \delta)_1 = O(\delta)$  ( $\delta \rightarrow 0$ ) функции  $f \in L_1(\mathbb{T})$  не гарантирует ее эквивалентность некоторой функции  $\psi \in C(\mathbb{T})$ , поскольку в этом случае условие  $\omega_1(f; \delta)_1 = O(\delta)$  равносильно эквивалентности  $f$  некоторой функции ограниченной вариации (см., например, [2, гл. III, п. 3.6.1] и [3, т. 1, гл. 4, различные теоремы и примеры, п. 8]).

2) Если  $l > k + \sigma = k + r + 1/p$ , то  $\rho = l - (k + \sigma) > 0$  и  $\chi(\rho) = 1$ ; этот случай сводится к равносильным неравенствам:  $l \geq k + r + 1$  при  $p > 1$  и  $l \geq k + r + 2$  при  $p = 1$ .

Если  $l < k + \sigma = k + r + 1/p$ , то  $\rho = l - (k + \sigma) < 0$  и  $\chi(\rho) = 0$ ; этот случай сводится к равносильному неравенству  $l \leq k + r$  при  $p \geq 1$ , причем  $k \geq 1$  при  $p > 1$  и  $k \geq 2$  при  $p = 1$ .

Если  $l = k + \sigma = k + r + 1/p$ , то  $\rho = l - (k + \sigma) = 0$  и  $\chi(\rho) = 0$ ; этот случай возможен лишь при  $p = 1$ , и, следовательно,  $l = k + r + 1$ .

Таким образом, оценка (0.2) охватывает все возможные случаи соотношений между  $l$  и  $k + r$ , где  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Формулировка теоремы 1 (в интегральной форме записи) для случая  $p = 1$  приведена автором в [4, замечание 4]. В случае  $p = 1$ ,  $r = 0$ ,  $l = k + \sigma = k + 1$  оценка (0.2) анонсирована в работе С. Ю. Тихонова [5, разд. 5, п. 4] как частный случай доказанной там же оценки (1.5) при  $p = 1$ ,  $q = \infty$ ,  $\alpha = k$  (см. разд. 1, часть (А) теоремы 1).

**Теорема 2.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $l > \sigma = r + 1/p$ ,  $\rho = l - (k + \sigma)$ ,  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) < \infty; \quad (0.3)$$

тогда

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty : f \in H_p^l[\omega] \right\} \\ & \asymp \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) + \chi(\rho) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (0.4)$$

где  $\psi$  обозначает соответствующую функцию из  $C^r(\mathbb{T})$ , эквивалентную  $f \in H_p^l[\omega]$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Условие (0.3) необходимо и достаточно для того, чтобы каждая функция  $f \in L_p(\mathbb{T})$  с  $\omega_l(f; \delta)_p = O(\omega(\delta))$ ,  $\delta \in (0, \pi]$ , была эквивалентна некоторой функции  $\psi \in C^r(\mathbb{T})$ . Достаточность следует из первой части утверждения теоремы 1; необходимость доказана в [6, § 4, теорема 5] при  $r = 0$ ,  $l = 1$ , [7, теорема 4] при  $r \geq 0$ ,  $l \geq 1$  (см. также пп. 1) и 2) леммы 5 в разд. 2 настоящей работы).

**З а м е ч а н и е 4.** Утверждение о справедливости порядкового равенства (0.4) в случае  $p = 1$  отмечено автором в [4, замечание 4].

### 1. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится ряд вспомогательных утверждений. Обозначим через  $E_n(f)_p$  и  $T_{n,p}(f; x)$  соответственно наилучшее приближение и полином наилучшего (в метрике  $L_p(\mathbb{T})$ ) приближения порядка  $n \in \mathbb{Z}_+$  функции  $f \in L_p(\mathbb{T})$ :  $\|f(\cdot) - T_{n,p}(f; \cdot)\|_p = E_n(f)_p$ .

**Предложение 1.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $f \in L_p(\mathbb{T})$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma = r + 1/p$  и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p < \infty. \tag{1.1}$$

Тогда  $f$  эквивалентна некоторой функции  $\psi \in C^r(\mathbb{T})$  и справедливы оценки:

- 1)  $E_n(\psi^{(r)})_{\infty} \leq \|\psi^{(r)}(\cdot) - T_{n,p}^{(r)}(f; \cdot)\|_{\infty} \leq C_3(r, p) \left( (n+1)^{\sigma} E_n(f)_p + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu}(f)_p \right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ ;
- 2)  $\omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty} \leq C_4(k, r, p) \left( \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

В случае  $r = 0$  оценка 1) является частным случаем неравенства разных метрик для наилучших приближений А. А. Конюшкова — С. Б. Стечкина, доказательство которого приведено в [8, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)]. В этой же работе (см. первый абзац после доказательства теоремы 2) отмечено, что имеет место также оценка 2). В случае  $r > 0$  доказательство оценки 1) проводится аналогично случаю  $r = 0$  (см., например, [2, гл. VI, доказательство теоремы 6.4.1]). Оценка 2) установлена в [2, гл. VI, теорема 6.4.1].

**Лемма 1.** Для любого  $l \in \mathbb{N}$  и произвольного полинома  $t_n(x) = a_0 + \sum_{\nu=1}^n (a_{\nu} \cos \nu x + b_{\nu} \sin \nu x)$ , где  $a_0, a_{\nu}, b_{\nu} \in \mathbb{R}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), справедлива оценка

$$\|t_n^{(l)}(\cdot)\|_{\infty} \leq 2^{-1} \pi \|t_n^{(l+1)}(\cdot)\|_1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

**Доказательство.** Положим  $\varphi(x) = (\pi - x)/2$ ,  $x \in [0, 2\pi]$  и  $\varphi(x) = \varphi(x + 2\pi)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Интегрируя по частям, имеем для любого  $\eta \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi-\eta} \varphi(y) t_n^{(l+1)}(x-y) dy &= - \int_0^{2\pi-\eta} \varphi(y) d(t_n^{(l)}(x-y)) = -\varphi(y) t_n^{(l)}(x-y) \Big|_0^{2\pi-\eta} + \int_0^{2\pi-\eta} t_n^{(l)}(x-y) d\varphi(y) \\ &= -\varphi(2\pi-\eta) t_n^{(l)}(x-2\pi+\eta) + \varphi(0) t_n^{(l)}(x) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi-\eta} t_n^{(l)}(x-y) dy, \end{aligned}$$

откуда, переходя к пределу при  $\eta \rightarrow 0$ , получаем

$$\int_0^{2\pi} \varphi(y) t_n^{(l+1)}(x-y) dy = -\varphi(2\pi-0) t_n^{(l)}(x-2\pi) + \varphi(0) t_n^{(l)}(x) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} t_n^{(l)}(x-y) dy,$$

и, следовательно,

$$t_n^{(l)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(y) t_n^{(l+1)}(x-y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t_n^{(l)}(x-y) dy. \tag{1.3}$$

Поскольку второе слагаемое в (1.3) равно  $(2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} t_n^{(l)}(z) dz = 0$  и  $|\varphi(z)| \leq \pi/2$ ,  $z \in \mathbb{R}$ , то из равенства (1.3) следует оценка

$$|t_n^{(l)}(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(y)| |t_n^{(l+1)}(x-y)| dy \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |t_n^{(l+1)}(x-y)| dy = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} |t_n^{(l+1)}(z)| dz = \frac{\pi}{2} \|t_n^{(l+1)}(\cdot)\|_1.$$

□

З а м е ч а н и е 5. 1) Равенство (1.3) и оценка (1.2) имеют место также и в случае  $l = 0$  при условии  $a_0 = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} t_n(y) dy = 0$ .

2) В личной беседе с автором С. Ю. Тихонов (январь 2010 г., г. Саратов), а позднее В. В. Жук (май 2010 г., г. Санкт-Петербург) предложили следующее доказательство оценки (1.2) (с постоянной  $\pi$  вместо  $\pi/2$ ) в случае  $l = 0$ : поскольку  $a_0 = 0$ , то найдется хотя бы одна точка  $x_0 \in \mathbb{T}$  такая, что  $t_n(x_0) = 0$ , и, следовательно,  $|t_n(x)| = |t_n(x) - t_n(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x t_n^{(1)}(y) dy \right| \leq \int_T |t_n^{(1)}(y)| dy = \pi \|t_n^{(1)}(\cdot)\|_1$ ,  $x \in \mathbb{T}$ . Аналогичные рассуждения позволяют доказать оценку (1.2) (с той же постоянной  $\pi$ ) и в случае  $l \in \mathbb{N}$ .

3) Недавно П. Ю. Глазырина (по инициативе ред. А. Г. Бабенко) сообщила автору, что неравенства типа П. Турана для тригонометрических полиномов исследовались И. Я. Тырыгиным. При условии, что все нули полинома вещественны, им найдена [9, следствие 1] точная константа  $D = D(p, n)$ , зависящая от  $p$  и  $n$ , в неравенстве  $\|t_n(\cdot)\|_\infty \leq D \|t_n^{(1)}(\cdot)\|_p$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , а также доказано, что экстремальными являются полиномы вида  $t_n^*(x) = c \left( \sin \frac{x - \gamma}{2} \right)^{2n}$ ,  $c, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $c \neq 0$ .

4) Утверждение о справедливости оценки (1.2) при  $l \geq 0$  с постоянной  $C_0$  вместо  $\pi/2$ , где  $C_0 = \sup\{\|\Phi_n(\cdot)\|_\infty : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ ,  $\Phi_n(x) = \sum_{\nu=1}^n \nu^{-1} \sin \nu x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , анонсировано автором в [4, неравенство (2) и замечание 1]. Появление  $C_0$  в оценке (1.2) связано лишь с методом доказательства, основанным на привлечении равенства (см. [4])

$$t_n^{(l)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y) \Phi_n(x-y) dy + (1 - \chi(l))a_0, \quad n \in \mathbb{N},$$

справедливость которого устанавливается простыми вычислениями

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y) \Phi_n(x-y) dy + (1 - \chi(l))a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y) \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu(x-y)}{\nu} dy + (1 - \chi(l))a_0 \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\sin \nu x}{\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y) \cos \nu y dy - \sum_{\nu=1}^n \frac{\cos \nu x}{\nu} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t_n^{(l+1)}(y) \sin \nu y dy + (1 - \chi(l))a_0 \\ &= \left\{ (-1)^{(l+1)/2} \sum_{\nu=1}^n \nu^l (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x) = t_n^{(l)}(x), \quad l - \text{нечетное}; \right. \\ &\quad \left. (-1)^{l/2} \sum_{\nu=1}^n \nu^l (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) + (1 - \chi(l))a_0 = t_n^{(l)}(x), \quad 0 \leq l - \text{четное} \right\}. \end{aligned}$$

5) Положим  $\varphi^*(x) = \varphi(x)$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ ,  $\varphi^*(0) = \varphi^*(2\pi) = 0$  и  $\varphi^*(x) = \varphi^*(x + 2\pi)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Поскольку (см., например, [3, т. 1, гл. 1, п. 2, формула (2.8)])  $\varphi^*(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1} \sin \nu x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , и  $S_n(\varphi^*; x) = \sum_{\nu=1}^n \nu^{-1} \sin \nu x = \Phi_n(x)$ , то  $|\varphi^*(x)| \leq |\varphi^*(x) - S_n(\varphi^*; x)| + |\Phi_n(x)| \leq |\varphi^*(x) - S_n(\varphi^*; x)| + C_0$ . Предельный переход при  $n \rightarrow \infty$  в правой части последнего неравенства приводит к оценке  $|\varphi^*(x)| \leq C_0$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ , откуда  $C_0 \geq \sup\{|\varphi^*(x)| : x \in [0, 2\pi]\} = \max\{|\varphi(x)| : x \in [0, 2\pi]\} = \pi/2$ .

З а м е ч а н и е 6. Оценка (1.2) является точной в смысле порядка на классе всех тригонометрических полиномов, а именно: существует полином  $G_n$  порядка не выше  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,

такой, что  $\|G_n^{(l+1)}\|_1 \leq C_5(l)\|G_n^{(l)}\|_\infty$ , где  $C_5(l) = 2(l+1)(l+2)$  при четном  $l$  и  $C_5(l) = 2^{l+2}(l+2)$  при нечетном  $l$ .

В случае четного  $l$  полагаем  $G_n(x) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^n (1 - \nu/(n+1)) \cos \nu x = F_n(x)$  — ядро Фейера порядка  $(n+1) \in \mathbb{N}$  ( $F_0(x) = 1/2$ ). В силу неравенства С. Н. Бернштейна (см., например, [2, гл. IV, п. 4.8.61, неравенство (26)]):  $\|t_n^{(l)}\|_p \leq n^l \|t_n\|_p$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , имеем ( $\|F_m\|_1 = 1$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ )  $\|G_n^{(l+1)}\|_1 \equiv \|F_n^{(l+1)}\|_1 \leq n^{l+1} \|F_n\|_1 = n^{l+1}$ . Далее, поскольку  $F_n^{(l)}(x) = (-1)^{l/2} \sum_{\nu=1}^n (1 - \nu/(n+1)) \nu^l \cos \nu x$ , то применение преобразования Абеля приводит к оценке

$$\begin{aligned} |F_n^{(l)}(0)| &= \sum_{\nu=1}^n \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \nu^l = (n+1)^{-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu^l + (n+1)^{-1} \sum_{\mu=1}^n \mu^l \\ &= (n+1)^{-1} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu^l \geq (l+1)^{-1} (n+1)^{-1} \sum_{\nu=1}^n \nu^{l+1} \\ &\geq (l+1)^{-1} (l+2)^{-1} (n+1)^{-1} n^{l+2} \geq (2(l+1)(l+2))^{-1} n^{l+1}, \end{aligned}$$

учитывая которую, получим  $\|F_n^{(l+1)}\|_1 \leq n^{l+1} \leq 2(l+1)(l+2)|F_n^{(l)}(0)| \leq 2(l+1)(l+2)\|F_n^{(l)}\|_\infty$ .

В случае нечетного  $l$  полагаем (см., например, [10, добавления к гл. 8, § 18])  $G_n(x) = \sin mx F_{m-1}(x) = (2m)^{-1} \left( \sum_{\nu=1}^m \nu \sin \nu x + \sum_{\nu=m+1}^{2m-1} (2m - \nu) \sin \nu x \right)$ , где  $m = [(n+1)/2]$ ,  $[t]$  — целая часть числа  $t$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Поскольку  $2m-1 = 2[(n+1)/2] - 1 \leq 2(n+1)/2 - 1 = n$ , то порядок полинома  $G_n(x)$  не превышает  $n$ . В силу неравенства С. Н. Бернштейна имеем

$$\|G_n^{(l+1)}\|_1 \leq n^{l+1} \|G_n\|_1 = n^{l+1} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin mx| |F_{m-1}(x)| dx \leq n^{l+1} \|F_{m-1}\|_1 = n^{l+1},$$

где  $m = [(n+1)/2]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . С другой стороны, так как

$$G_n^{(l)}(x) = (-1)^{(l+1)/2+1} (2m)^{-1} \left( \sum_{\nu=1}^m \nu^{l+1} \cos \nu x + \sum_{\nu=m+1}^{2m-1} \nu^l (2m - \nu) \cos \nu x \right),$$

то

$$\begin{aligned} |G_n^{(l)}(0)| &= (2m)^{-1} \left( \sum_{\nu=1}^m \nu^{l+1} + \sum_{\nu=m+1}^{2m-1} \nu^l (2m - \nu) \right) \geq (2m)^{-1} \sum_{\nu=1}^m \nu^{l+1} \geq (2m)^{-1} (l+2)^{-1} m^{l+2} \\ &= (2(l+2))^{-1} m^{l+1} = (2(l+2))^{-1} \left[ \frac{n+1}{2} \right]^{l+1} \geq (2(l+2))^{-1} \left( \frac{n}{2} \right)^{l+1} = (2^{l+2}(l+2))^{-1} n^{l+1}. \end{aligned}$$

Учитывая последнюю оценку, имеем

$$\|G_n^{(l+1)}\|_1 \leq n^{l+1} \leq (l+2)2^{l+2}|G_n^{(l)}(0)| \leq (l+2)2^{l+2}\|G_n^{(l)}\|_\infty.$$

**З а м е ч а н и е 7.** Утверждение о порядковой точности оценки (1.2) с указанной постоянной  $C_5(l)$  анонсировано автором в [4, замечание 2].

**Лемма 2.** Для любого  $l \in \mathbb{N}$  и произвольной функции  $f \in L_1(\mathbb{T})$  справедлива оценка

$$n^{-l} \|T_{n,1}^{(l)}(f; \cdot)\|_\infty \leq C_6(l) n \omega_{l+1} \left( f; \frac{\pi}{n} \right)_1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.4)$$

Доказательство. В силу оценки (1.2), неравенства Ф. Рисса — С. М. Никольского — С. Б. Стечкина (см., например, [2, гл. IV, п. 4.8.61]):  $\|t_n^{(l)}(\cdot)\|_p \leq 2^{-l}n^l \|\Delta_{\pi/n}^l t_n(\cdot)\|_p$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $l \in \mathbb{N}$ , и неравенства Джексона — Стечкина в  $L_p(\mathbb{T})$  (см., например, [2, гл. V, п. 5.1.32, неравенство (16), п. 5.11, неравенство (1)]):  $E_n(f)_p \leq C_7(l)\omega_l(f; \pi/(n+1))_p$ , где  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ , имеем

$$\begin{aligned} \|T_{n,1}^{(l)}(f; \cdot)\|_\infty &\leq 2^{-1}\pi \|T_{n,1}^{(l+1)}(f; \cdot)\|_1 \leq 2^{-1}\pi 2^{-(l+1)}n^{l+1} \|\Delta_{\pi/n}^{l+1} T_{n,1}(f; \cdot)\|_1 \\ &\leq 2^{-1}\pi 2^{-(l+1)}n^{l+1} \left( \|\Delta_{\pi/n}^{l+1}(T_{n,1}(f; \cdot) - f(\cdot))\|_1 + \|\Delta_{\pi/n}^{l+1} f(\cdot)\|_1 \right) \\ &\leq 2^{-1}\pi 2^{-(l+1)}n^{l+1} \left( 2^{l+1} \|T_{n,1}(f; \cdot) - f(\cdot)\|_1 + \omega_{l+1}\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_1 \right) \\ &= 2^{-1}\pi n^{l+1} \left( E_n(f)_1 + 2^{-(l+1)}\omega_{l+1}\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_1 \right) \leq 2^{-1}\pi \left( C_7(l+1) + 2^{-(l+1)} \right) n^{l+1} \omega_{l+1}\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_1, \end{aligned}$$

откуда следует оценка (1.4) с  $C_6(l) = 2^{-1}\pi \{C_7(l+1) + 2^{-(l+1)}\}$ .  $\square$

З а м е ч а н и е 8. Оценка (1.4) анонсирована автором в [4, замечание 3].

Доказательство теоремы 1. В силу неравенства Джексона — Стечкина в  $L_p(\mathbb{T})$  (см. доказательство леммы 2) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} E_{n-1}(f)_p \leq C_7(l) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p < \infty,$$

откуда следует сходимость ряда (1.1), обеспечивающая в силу предложения 1 эквивалентность  $f$  некоторой функции  $\psi \in C^r(\mathbb{T})$  и справедливость оценки (см. оценку 2 из предложения 1;  $l \in \mathbb{N}$ ,  $l > \sigma$ )

$$\begin{aligned} \omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty &\leq C_4(k, r, p) \left( \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} E_{\nu-1}(f)_p \right) \\ &\leq C_4(k, r, p) C_7(l) \left( \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p \right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если  $l > k + \sigma$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 1$ ), то (1.5) совпадает с требуемой оценкой (0.2). Далее, если  $l < k + \sigma$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 0$ ), то в силу свойств модулей гладкости  $\omega_l(f; \delta_1)_p \leq \omega_l(f; \delta_2)_p$  и  $\delta_2^{-l} \omega_l(f; \delta_2)_p \leq 2^l \delta_1^{-l} \omega_l(f; \delta_1)_p$ ,  $0 < \delta_1 < \delta_2 < +\infty$ , имеем оценки

$$\begin{aligned} n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p &\leq 2^l n^{l-k} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-l-1} \leq C_8(k + \sigma - l) 2^l n^\sigma \omega_l\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p, \\ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p &\geq \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p \geq \omega_l\left(f; \frac{\pi}{2n}\right)_p \sum_{\nu=n+1}^{2n} \nu^{\sigma-1} \geq 2^{-l} C_9(\sigma) n^\sigma \omega_l\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_p, \end{aligned}$$

учитывая которые в (1.5), получаем

$$\omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty \leq C_4(k, r, p) C_7(l) \left( 1 + 2^{2l} C_9^{-1}(\sigma) C_8(k + \sigma - l) \right) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p.$$

И, наконец, рассмотрим случай  $l = k + \sigma = k + r + 1/p$ , который возможен лишь при  $p = 1$ , поскольку  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ , и, следовательно,  $l = k + r + 1$ . В силу известных свойств модулей гладкости и оценки (1.4) для  $l = k + r$  имеем

$$\omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty \leq \omega_k\left(\psi^{(r)}(\cdot) - T_{n,1}^{(r)}(f; \cdot); \frac{\pi}{n}\right)_\infty + \omega_k\left(T_{n,1}^{(r)}(f; \cdot); \frac{\pi}{n}\right)_\infty$$



$$\begin{aligned} &\leq 2^k \|\psi^{(r)}(\cdot) - T_{n,1}^{(r)}(f; \cdot)\|_\infty + \pi^k n^{-k} \|T_{n,1}^{(r+k)}(f; \cdot)\|_\infty \\ &\leq 2^k \|\psi^{(r)}(\cdot) - T_{n,1}^{(r)}(f; \cdot)\|_\infty + \pi^k C_6(k+r) n^{r+1} \omega_{k+r+1}\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_1. \end{aligned}$$

Далее, применяя оценку 1) из предложения 1 при  $p = 1$  и неравенство Джексона — Стечкина в  $L_1(\mathbb{T})$ , получаем ( $\sigma = r + 1$ )

$$\begin{aligned} \omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty &\leq 2^k C_3(r, 1) \left( (n+1)^\sigma E_n(f)_1 + \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} E_\nu(f)_1 \right) + \pi^k C_6(k+r) n^{r+1} \omega_{k+r+1}\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_1 \\ &\leq 2^k C_3(r, 1) C_7(k+\sigma) \left( (n+1)^\sigma \omega_{k+\sigma}\left(f; \frac{\pi}{n+1}\right)_1 + \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \omega_{k+\sigma}\left(f; \frac{\pi}{\nu+1}\right)_1 \right) \\ &\quad + \pi^k C_6(k+r) n^\sigma \omega_{k+\sigma}\left(f; \frac{\pi}{n}\right)_1 \leq C_1(l, k, r, 1) \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \omega_{k+\sigma}\left(f; \frac{\pi}{\nu+1}\right)_1, \end{aligned}$$

откуда и следует требуемая оценка (0.2) в случае  $l = k + \sigma = k + r + 1$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 0$ ) с  $C_1(l, k, r, 1) = 2^k C_3(r, 1) C_7(l) + 2^l C_9^{-1}(r+1) (2^l C_3(r, 1) C_7(l) + \pi^k C_6(k+r))$ .

Теорема 1 доказана.

## 2. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 основывается на приведенных ниже утверждениях.

**Лемма 3.** Пусть  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma \in (0, \infty)$ ,  $l > \sigma$ . Для каждой функции  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$  существует последовательность  $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ , удовлетворяющая условиям:

- 1)  $0 < \varepsilon_n \leq \omega(\pi/n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $\varepsilon_n \downarrow 0$  ( $n \uparrow \infty$ );
- 2)  $(2l)^{-1} \omega(\pi/n) \leq n^{-l} \sum_{\nu=1}^n \nu^{l-1} \varepsilon_\nu \leq 3\omega(\pi/n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- 3)  $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1} \omega(\pi/n) \asymp \sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1} \varepsilon_n$ ;
- 4) если  $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1} \omega(\pi/n) < \infty$ , то

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \asymp \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \varepsilon_\nu + n^\sigma \omega\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N};$$

- 5) если  $l \neq k + \sigma$ , где  $k \in \mathbb{N}$ , и  $\rho = l - (k + \sigma)$ , то

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \asymp (1 - \chi(\rho)) n^\sigma \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) + \chi(\rho) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \varepsilon_\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** Построение последовательности  $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$ , удовлетворяющей условиям 1) и 2), проводится по схеме С.Б. Стечкина [11, § 3, лемма 2], случай  $l = 1$ . Схема была развита В.Э. Гейтом [12, лемма 1], случай  $l \geq 1$  (более подробную историю вопроса см. в [13, разд. 2, замечание 8]). Соотношения 3) и 4) доказываются с помощью 1) и 2) (см., например, [14, разд. 1, лемма 1]).

Докажем 5). При  $l < k + \sigma$  в силу  $\omega(\delta) \uparrow (\delta \uparrow)$  и  $\delta^{-l} \omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow)$  имеем

$$\begin{aligned} n^\sigma \omega(\pi/n) &\asymp \omega(\pi/n) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \leq n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega(\pi/\nu) \\ &\leq n^{-k} n^l \omega(\pi/n) \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-l-1} \asymp n^\sigma \omega(\pi/n); \end{aligned}$$

при  $l > k + \sigma$  в силу 1) и 2) получаем

$$\begin{aligned} n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \varepsilon_\nu &\leq n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega(\pi/\nu) \asymp n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-l-1} \sum_{\mu=1}^{\nu} \mu^{l-1} \varepsilon_\mu \\ &= n^{-k} \sum_{\mu=1}^n \mu^{l-1} \varepsilon_\mu \sum_{\nu=\mu}^n \nu^{k+\sigma-l-1} \leq C_{10}(\rho) n^{-k} \sum_{\mu=1}^n \mu^{k+\sigma-1} \varepsilon_\mu. \quad \square \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma = r + 1/p$ ; для любой последовательности  $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$  ( $0 < \varepsilon_n \downarrow 0$  при  $n \uparrow \infty$ ) существует функция  $g(x; p; \varepsilon) \in L_p(\mathbb{T})$  такая, что:

- 1)  $E_{n-1}(g)_p \leq C_{11}(p) \varepsilon_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- 2)  $g \in C^r(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1} \varepsilon_n < \infty$ ;
- 3) если  $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1} \varepsilon_n < \infty$ , то

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \varepsilon_\nu \leq C_{12}(r, p) \{E_n(g^{(r)})_\infty + n^\sigma \varepsilon_{n+1}\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

- 4) если  $g \in C^r(\mathbb{T})$ , то

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \varepsilon_\nu \leq C_{13}(k, r, p) \omega_k\left(g^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty, \quad n \in \mathbb{N};$$

- 5) если  $\sum_{n=1}^\infty n^{\sigma-1} \varepsilon_n < \infty$ , то

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \varepsilon_\nu + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \varepsilon_\nu \leq C_{14}(k, r, p) \omega_k\left(g^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство леммы 4 приведено в заметке автора [15, лемма 5]. Функция  $g(x; p; \varepsilon) \in L_p(\mathbb{T})$  определяется следующим образом. При  $p = 1$  полагаем  $g(x; 1; \varepsilon) = g_1(x; \varepsilon) + g_2(x; \varepsilon)$ , где  $g_1$  и  $g_2$  — функции, рассмотренные В. Э. Гейтом в [16, § 2, п. 1 и п. 2] и [17, § 2, п. 2 и п. 3]. Имеем

$$g_1(x; \varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty \Delta \varepsilon_n F_n(x) = \varepsilon_1/2 + \sum_{n=1}^\infty a_n(1; \varepsilon) \cos nx,$$

где  $\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$ ,  $a_n(1; \varepsilon) = \sum_{\nu=n}^\infty (1 - n/(\nu+1)) \Delta \varepsilon_\nu$ ,  $F_n(x)$  — ядро Фейера порядка  $(n+1) \in \mathbb{N}$  (см. разд. 1, замечание 6) и

$$g_2(x; \varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty \Delta \varepsilon_n G_n(x) = \sum_{n=1}^\infty b_n(\varepsilon) \sin nx,$$

где  $G_n(x) = \sin((m+1)x)F_m(x)$ ,  $m = [(n+1)/2] - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (см. разд. 1, замечание 6),

$$b_n(\varepsilon) = \sum_{\nu=n}^{2(n-1)} (1 - (n/2[(\nu+1)/2])) \Delta \varepsilon_\nu + n \sum_{\nu=2n-1}^\infty (1/2[(\nu+1)/2]) \Delta \varepsilon_\nu,$$

$n \in \mathbb{N}$  (при  $n = 1$  первое слагаемое в  $b_n(\varepsilon)$  считается равным нулю); при  $p > 1$  полагаем  $g(x; p; \varepsilon) = g_3(x; p; \varepsilon)$ , где  $g_3$  — функция, рассмотренная автором в [15, доказательство леммы 5]:

$$g_3(x; p; \varepsilon) = \sum_{n=1}^\infty n^{1/p-1} \Delta \varepsilon_n \sum_{\nu=1}^n (\cos \nu x + \sin \nu x) = \sum_{n=1}^\infty a_n(p; \varepsilon) (\cos nx + \sin nx),$$

$$a_n(p; \varepsilon) = \sum_{\nu=n}^\infty \nu^{1/p-1} \Delta \varepsilon_\nu, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Лемма 5.** Пусть  $1 \leq p < \infty$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $l > \sigma = r + 1/p$ ,  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$ ; существует функция  $f_0(x; p; \omega) \in L_p(\mathbb{T})$ , обладающая следующими свойствами:

- 1)  $\omega_l(f_0; \delta)_p \leq C_{15}(l, p)\omega(\delta)$ ,  $\delta \in (0, \pi]$ ;
- 2)  $f_0 \in C^r(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega(\pi/n) < \infty$ ;
- 3) если  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega(\pi/n) < \infty$ , то

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \leq C_{16}(l, r, p)\left(E_n(f_0^{(r)})_{\infty} + n^{\sigma}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$\leq C_{17}(l, k, r, p)\left(\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty}, l \geq k + \sigma; \omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty} + n^{\sigma}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right), l < k + \sigma\right), \quad n \in \mathbb{N};$$

- 4) если  $f_0 \in C^r(\mathbb{T})$  и  $l > k + \sigma$ , то

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \leq C_{18}(l, k, r, p)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** Положим  $f_0(x; p; \omega) = g(x; p; \varepsilon)$ , где  $g$  — функция из леммы 4, которая определена последовательностью  $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ , построенной для заданной функции  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$  согласно лемме 3. В силу неравенства (1) [2, гл. VI, п. 6.1.1], п. 1) леммы 4 и п. 2) леммы 3 имеем

$$\omega_l\left(f_0; \frac{\pi}{n}\right)_p \leq C_{19}(l, p)n^{-l} \sum_{\nu=1}^n \nu^{l-1}E_{\nu-1}(f_0)_p$$

$$\leq C_{19}(l, p)C_{11}(p)n^{-l} \sum_{\nu=1}^n \nu^{l-1}\varepsilon_{\nu} \leq 3C_{19}(l, p)C_{11}(p)\omega\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

откуда  $\omega_l(f_0; \pi/n)_p \leq C_{20}(l, p)\omega(\pi/n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и, следовательно,  $\omega_l(f_0; \delta)_p \leq 2^l C_{20}(l, p)\omega(\delta)$ ,  $\delta \in (0, \pi]$ .

Утверждение п. 2) является следствием п. 3) леммы 3 и п. 2) леммы 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{\sigma-1}\varepsilon_n < \infty \Leftrightarrow g \in C^r(\mathbb{T}) \Leftrightarrow f_0 \in C^r(\mathbb{T}),$$

а оценка в п. 4) следует из п. 5) леммы 3 и п. 4) леммы 4:

$$n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \asymp n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1}\varepsilon_{\nu} \leq C_{13}(k, r, p)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty}.$$

Докажем утверждение п. 3). В силу п. 4) леммы 3, п. 3) леммы 4 и п. 1) леммы 3 имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \leq C_{21}(l, r, p)\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\varepsilon_{\nu} + n^{\sigma}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$\leq C_{21}(l, r, p)\left(C_{12}(r, p)(E_n(g^{(r)})_{\infty} + n^{\sigma}\varepsilon_{n+1}) + n^{\sigma}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \leq C_{16}(l, r, p)\left(E_n(f_0^{(r)})_{\infty} + n^{\sigma}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right). \quad (2.1)$$

Отсюда, применяя неравенство Джексона — Стечкина к первому слагаемому в правой части (2.1), получим оценку в правой части п. 3) в случае  $l < k + \sigma$ :

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1}\omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \leq C_{16}(l, r, p)\left(C_7(k)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty} + n^{\sigma}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Далее, в силу  $\omega(\delta) \uparrow (\delta \uparrow) (\Leftrightarrow \omega(\pi/n) \downarrow (n \uparrow))$  и п. 4) настоящей леммы имеем оценку

$$n^\sigma \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq (k + \sigma)n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \leq (k + \sigma)C_{18}(l, k, r, p)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty,$$

учитывая которую в правой части (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) &\leq C_{16}(l, r, p)\left(E_n(f_0^{(r)})_\infty + n^\sigma \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \\ &\leq C_{16}(l, r, p)\left(C_7(k)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty + (k+\sigma)C_{18}(l, k, r, p)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty\right) \leq C_{17}(l, k, r, p)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty, \end{aligned}$$

откуда следует оценка в правой части п. 3) в случае  $l > k + \sigma$ .

Рассмотрим теперь случай  $l = k + \sigma = k + r + 1$  (см. п. 2) замечания 1). В силу левой оценки в п. 2) леммы 3 и оценки в п. 4) леммы 4 (случай  $p = 1$ ) имеем

$$n^\sigma \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \leq 2ln^{\sigma-l} \sum_{\nu=1}^n \nu^{l-1} \varepsilon_\nu = 2ln^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \varepsilon_\nu \leq 2lC_{13}(k, r, 1)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty.$$

Применяя последнюю оценку и неравенство Джексона — Стечкина в правой части (2.1), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) &\leq C_{16}(l, r, 1)\left(E_n(f_0^{(r)})_\infty + n^\sigma \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \\ &\leq C_{16}(l, r, 1)\left(C_7(k)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty + 2lC_{13}(k, r, 1)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty\right) \leq C_{17}(l, k, r, 1)\omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty, \end{aligned}$$

откуда следует оценка в правой части п. 3) в случае  $l = k + \sigma$ .  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma = r + 1$ ,  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$ ; существует функция  $\varphi(x; \omega) \in L_1(\mathbb{T})$  такая, что:

- 1)  $\omega_l(\varphi; \delta)_1 \leq C_{22}(l)\omega(\delta)$ ,  $\delta \in (0, \pi]$ ;
- 2) если  $\varphi \in C^r(\mathbb{T})$ , то  $n^\sigma \omega(\pi/n) \leq C_{23}(l, k, r)\omega_k(\varphi^{(r)}; \pi/n)_\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Полагаем  $\varphi(x; \omega) = g_1(x; \omega)$  при четном  $l$  и  $\varphi(x; \omega) = g_2(x; \omega)$  при нечетном  $l$ , где  $g_1$  и  $g_2$  — функции, указанные в первом абзаце после леммы 4,  $\omega = \{\omega(\pi/n)\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Так как  $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow)$ , то  $n^l\omega(\pi/n) \uparrow (n \uparrow)$ ; следовательно, в силу свойств функций  $g_1$  и  $g_2$ , установленных в [16, § 2, свойство e) функции  $f_1$  в п. 1 и свойство c) функции  $f_2$  в п. 2] и [17, § 2, свойство f) функции  $f_1$  в п. 2 и свойство d) функции  $f_2$  в п. 3] имеем  $\omega_l(\varphi; \pi/n)_1 \leq C_{24}(l)\omega(\pi/n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , откуда  $\omega_l(\varphi; \delta)_1 \leq 2^l C_{24}(l)\omega(\delta)$ ,  $\delta \in (0, \pi]$ , т.е. имеет место 1). Далее, автором [14, лемма 4, случай  $q = \infty$ ] при условии  $\varphi \in C^r(\mathbb{T})$  доказана оценка  $n^\sigma \omega(\pi/n) \leq C_{25}(l, r)E_{n-1}(\varphi^{(r)})_\infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , применяя в которой неравенство Джексона — Стечкина, получим требуемую оценку в п. 2).  $\square$

**Лемма 7.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $r \in \mathbb{Z}_+$ ,  $l, k \in \mathbb{N}$ ,  $\sigma = r + 1/p$ ,  $\omega \in \Omega_l(0, \pi]$ ; существует последовательность функций  $\{u_m(x; p; \omega)\}_{m=1}^\infty \subset L_p(\mathbb{T})$  такая, что:

- 1)  $\omega_l(u_m; \delta)_p \leq C_{26}(l, p)\omega(\delta)$ ,  $\delta \in (0, \pi]$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ;
- 2)  $m^\sigma \omega(\pi/m) \leq C_{27}(k, r)\omega_k(u_m^{(r)}; \pi/m)_\infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

**Доказательство.** Положим  $u_m(x; p; \omega) = m^{1/p-1}\omega(\pi/m)(D_m(x) + \tilde{D}_m(x))$ , где  $D_m(x) = 1/2 + \sum_{\nu=1}^m \cos \nu x$  — ядро Дирихле,  $\tilde{D}_m(x) = \sum_{\nu=1}^m \sin \nu x$  — сопряженное ядро Дирихле. В силу неравенства М. Рисса (см., например, [10, гл. 8, § 14]):  $\|\tilde{f}\|_p \leq C_{28}(p)\|f\|_p$ ,  $f \in L_p(\mathbb{T})$ ,  $1 < p < \infty$ , и известной оценки (см., например, [6, § 4, неравенство (4.17)]:  $\|D_m(\cdot)\|_p \leq C_{29}(p)m^{1-1/p}$ , имеем  $\|D_m(\cdot) + \tilde{D}_m(\cdot)\|_p \leq (1 + C_{28}(p))\|D_m(\cdot)\|_p \leq (1 + C_{28}(p))C_{29}(p)m^{1-1/p}$ , откуда

$\|u_m(\cdot; p; \omega)\|_p = m^{1/p-1}\omega\left(\frac{\pi}{m}\right)\|D_m(\cdot) + \tilde{D}_m(\cdot)\|_p \leq (1+C_{28}(p))C_{29}(p)\omega\left(\frac{\pi}{m}\right) \leq (1+C_{28}(p))C_{29}(p)\omega(\pi)$ , и, следовательно,  $\sup\{\|u_m(\cdot; p; \omega)\|_p : m \in \mathbb{N}\} < \infty$ , то есть  $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset L_p(\mathbb{T})$ .

Для доказательства оценки в п. 1) заметим, что при любом  $\delta \in (0, \pi]$  и каждом фиксированном  $m \in \mathbb{N}$  возможны два случая:  $\delta < \pi/m$  и  $\delta \geq \pi/m$ . При  $\delta < \pi/m$ , учитывая  $\delta^{-l}\omega(\delta) \downarrow (\delta \uparrow)$ , имеем  $\omega_l(u_m; \delta)_p \leq \delta^l \|u_m^{(l)}\|_p \leq \delta^l m^l \|u_m\|_p \leq \delta^l m^l C_{30}(p)\omega(\pi/m) \leq C_{30}(p)\delta^l m^l \pi^l m^{-l} \delta^{-l}\omega(\delta) = \pi^l C_{30}(p)\omega(\delta)$ , а при  $\delta \geq \pi/m$  с учетом  $\omega(\delta) \uparrow (\delta \uparrow)$  получаем  $\omega_l(u_m; \delta)_p \leq 2^l \|u_m\|_p \leq 2^l C_{30}(p) \times \omega(\pi/m) \leq 2^l C_{30}(p)\omega(\delta)$ , где  $C_{30}(p) = (1+C_{28}(p))C_{29}(p)$ . Таким образом, при любом  $\delta \in (0, \pi]$  справедлива оценка  $\omega_l(u_m; \delta)_p \leq (2^l + \pi^l)C_{30}(p)\omega(\delta)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , т. е. имеет место 1).

Докажем 2). В силу неравенства Рисса — Никольского — Стечкина (см. доказательство леммы 2) имеем

$$\begin{aligned} \pi^r m^{-r} \omega_k\left(u_m^{(r)}; \frac{\pi}{m}\right)_\infty &\geq \omega_{k+r}\left(u_m; \frac{\pi}{m}\right)_\infty \geq \|\Delta_{\pi/m}^{k+r} u_m(\cdot)\|_\infty \geq 2^{k+r} m^{-(k+r)} \|u_m^{(k+r)}(\cdot)\|_\infty \\ &\geq 2^{k+r} m^{-(k+r)} |u_m^{(k+r)}(0; p; \omega)| = 2^{k+r} m^{-(k+r)} m^{1/p-1} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right) |D_m^{(k+r)}(0) + \tilde{D}_m^{(k+r)}(0)| \\ &= 2^{k+r} m^{-(k+r)} m^{1/p-1} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right) \sum_{\nu=1}^m \nu^{k+r} \geq 2^{k+r} m^{-(k+r)} m^{1/p-1} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right) (k+r+1)^{-1} m^{k+r+1} \\ &= 2^{k+r} (k+r+1)^{-1} m^{1/p} \omega\left(\frac{\pi}{m}\right), \end{aligned}$$

откуда  $m^\sigma \omega(\pi/m) \leq 2^{-(k+r)} \pi^r (k+r+1) \omega_k(u_m^{(r)}; \pi/m)_\infty$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е 9.** Рассмотрение последовательности функций, подобной  $\{u_m(x; p; \omega)\}_{m=1}^\infty \subset L_p(\mathbb{T})$ , впервые предложено автором в [18, лемма 2] (см. также [1, лемма 2; 14, разд. 1, лемма 3]) при решении задачи о порядковой точности неравенства Джексона — Стечкина в  $L_p(\mathbb{T})$  на классах  $H_p^l[\omega]$  в случае  $1 < p < \infty$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 2. Оценка сверху в (0.4) следует из неравенства (0.2): если выполняется (0.3), то в силу теоремы 1 каждая функция  $f \in H_p^l[\omega]$  эквивалентна некоторой функции  $\psi \in C^r(\mathbb{T})$  и справедлива оценка

$$\begin{aligned} \omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty &\leq C_1(l, k, r, p) \left( \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p + \chi(\rho) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega_l\left(f; \frac{\pi}{\nu}\right)_p \right) \\ &\leq C_1(l, k, r, p) \left( \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) + \chi(\rho) n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \right), \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Оценка снизу в (0.4) реализуется при  $p \geq 1$  и  $l > k + \sigma$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 1$ ) посредством функции  $C_{15}^{-1}(l, p) f_0(\cdot; p; \omega) \in H_p^l[\omega]$  в силу п. 3) и п. 4) леммы 5:

$$\sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) + n^{-k} \sum_{\nu=1}^n \nu^{k+\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \leq C_{31}(l, k, r, p) \omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty, \quad n \in \mathbb{N};$$

при  $p = 1$  и  $l < k + \sigma$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 0$ ) — посредством функции  $C_{15}^{-1}(l, 1) f_0(\cdot; 1; \omega) \in H_1^l[\omega]$  в силу п. 3) леммы 5 и функции  $C_{22}^{-1}(l) \varphi(\cdot; \omega) \in H_1^l[\omega]$  в силу п. 2) леммы 6:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^\infty \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) &\leq C_{17}(l, k, r, 1) \left( \omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty + n^\sigma \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \\ &\leq C_{17}(l, k, r, 1) \left( \omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty + C_{23}(l, k, r) \omega_k\left(\varphi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty \right) \\ &\leq C_{32}(l, k, r) \sup \left\{ \omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_\infty : f \in H_1^l[\omega] \right\}; \end{aligned}$$

при  $p > 1$  и  $l < k + \sigma$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 0$ ) — посредством функции  $C_{15}^{-1}(l, p)f_0(\cdot; p; \omega) \in H_p^l[\omega]$  в силу п. 3) леммы 5 и семейства функций  $\{C_{26}^{-1}(l, p)u_n(\cdot; p; \omega)\}_{n=1}^{\infty} \subset H_p^l[\omega]$  в силу п. 2) леммы 7:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) &\leq C_{17}(l, k, r, p) \left( \omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty} + n^{\sigma} \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \right) \\ &\leq C_{17}(l, k, r, p) \left( \omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty} + C_{27}(k, r) \omega_k\left(u_n^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty} \right) \\ &\leq C_{33}(l, k, r, p) \sup \left\{ \omega_k\left(\psi^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty} : f \in H_p^l[\omega] \right\}; \end{aligned}$$

при  $l = k + \sigma$  ( $\Rightarrow \chi(\rho) = 0$  и  $p = 1$ ) — посредством функции  $C_{15}^{-1}(l, 1)f_0(\cdot; 1; \omega) \in H_1^l[\omega]$  в силу п. 3) леммы 5:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} \omega\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \leq C_{34}(l, k, r) \omega_k\left(f_0^{(r)}; \frac{\pi}{n}\right)_{\infty}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2 доказана.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильясов Н.А.** К неравенству между модулями гладкости различных порядков в разных метриках // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 2. С. 153–155.
2. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
3. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
4. **Ильясов Н.А.** К неравенству разных метрик для производных тригонометрических полиномов в  $L_p(\mathbb{T})$  // Теория приближений: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 90-летию С.Б. Стечкина. М.: Изд-во МИРАН, 2010. С. 36–37.
5. **Tikhonov S.** Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters // J. Fourier Anal. Appl. 2010. Vol. 16, no. 4. P. 590–608.
6. **Ульянов П.Л.** Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1967. Т. 72(114), № 2. С. 193–225.
7. **Ильясов Н.А.** Теоремы вложения для структурных и конструктивных характеристик функций: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1987. 150 с.
8. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.
9. **Тырыгин И.Я.** О неравенствах типа Турана в некоторых интегральных метриках // Укр. мат. журн. 1988. Т. 40, № 2. С. 256–260.
10. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
11. **Стечкин С.Б.** Об абсолютной сходимости рядов Фурье // Изв. АН СССР, Сер. мат. 1953. Т. 17, № 2. С. 87–98.
12. **Гейт В.Э.** Об условиях вложения классов  $H_{k,R}^{\omega}$  и  $\tilde{H}_{k,R}^{\omega}$  // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 169–178.
13. **Ильясов Н.А.** О порядке равномерной сходимости частных кубических сумм кратных тригонометрических рядов Фурье на классах функций  $H_{1,m}^l[\omega]$  // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 161–177.
14. **Ильясов Н.А.** К прямой теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Тр. МИРАН. 1997. Т. 219. С. 220–234.
15. **Ильясов Н.А.** К обратной теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Мат. заметки. 1992. Т. 52, № 2. С. 53–61.
16. **Гейт В.Э.** О точности некоторых неравенств в теории приближений // Мат. заметки. 1971. Т. 10, № 5. С. 571–582.
17. **Гейт В.Э.** О структурных и конструктивных свойствах функции и ее сопряженной в  $L$  // Изв. вузов. Математика. 1972. № 7(122). С. 19–30.
18. **Ильясов Н.А.** К неравенствам между наилучшими приближениями и модулями гладкости разных порядков периодических функций в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  // Сингулярные интегральные операторы: сб. статей. Баку: Изд-во Бакинского гос. ун-та, 1991. С. 40–52.

Ильясов Ниязи Аладдин оглы

Поступила 10.08.2017

канд. физ.-мат. наук, доцент

Бакинский государственный университет, г. Баку

e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com

## REFERENCES

1. Il'yasov N.A. On the inequality between moduli of smoothness of various orders in different metrics. *Math. Notes*, 1991, vol. 50, no. 2, pp. 877–879.
2. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables*. Oxford, London, NY, Pergamon Press, 1963, 655 p. This translation has been made from A.F. Timan's book entitled *Teoriya priblizheniya funktsii deystvitel'nogo peremennogo*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.
3. Zygmund A. *Trigonometric series*, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959; vol. I, 383 p.; vol. II, 354 p. Translated under the title *Trigonometricheskie ryady*. M.: Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p; vol. II, 538 p.
4. Il'yasov N.A. On the different-metrics inequality for derivatives of trigonometric polynomials in  $L_p(\mathbb{T})$ . Approximations theory: abstracts of Intern. conf., dedicated to the 90-th anniversary of S. B. Stechkin. Moscow, Steklov Inst. Math. Press, 2010, pp. 36–37 (In Russian).
5. Tikhonov S. Weak type inequalities for moduli of smoothness: the case of limit value parameters. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2010, vol. 16, no. 4, pp. 590–608.
6. Ul'yanov P.L. Absolute and uniform convergence of Fourier series. *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 169–197.
7. Il'yasov N.A. Embedding theorems for structural and constructive characteristics of functions: Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation, Baku, 1987, 150 p. (in Russian).
8. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 44(86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
9. Tyrygin I.Ya. Turan-type inequalities in certain integral metrics. *Ukrainian Math. J.*, 1988, vol. 40, iss. 2, pp. 256–260 (in Russian).
10. Bari N.K. *A treatise on trigonometric series*. Vols. I, II. Oxford, New York: Pergamon Press, 1964, vol. I, 533 p; vol. II, 508 p. Original Russian text published in *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Fiz.-Mat. Giz. Publ., 1961, 936 p.
11. Stechkin S.B. On absolute convergence of Fourier series. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1953, vol. 17, no. 2, pp. 87–98 (in Russian).
12. Gheit V.È. Imbedding conditions for the classes  $H_{k,R}^\omega$  and  $\tilde{H}_{k,R}^\omega$ . *Math. Notes*, 1973, vol. 13, no. 2, pp. 101–106.
13. Il'yasov N.A. On the order of uniform convergence of partial cubic sums of multiple trigonometric Fourier series on the function classes  $H_{1,m}^l[\omega]$ . *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 161–177 (in Russian).
14. Il'yasov N.A. On the direct theorem of approximation theory of periodic functions in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 215–230.
15. Il'yasov N.A. An inverse theorem of approximation theory of periodic functions in various metrics. *Math. Notes*, 1992, vol. 52, no. 2, pp. 791–798.
16. Gheit V.È. On the exactness of certain inequalities in approximation theory. *Math. Notes*, 1971, vol. 10, no. 5, pp. 768–776.
17. Gheit V.È. The structural and constructive properties of a function and its conjugate in  $L$ . *Izv. Vyssh. Ucheb. Zaved. Mat.*, 1972, no. 7(122), pp. 19–30 (in Russian).
18. Il'yasov N.A. On inequalities between best approximations and module of smoothness of different orders of periodic functions in  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Singular integral operators, Baku, Baku State Univ. Press, 1991, pp. 40–52 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on August 10, 2017.

N. A. Il'yasov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan,

e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com.

УДК 512.542

## ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ПОДГРУППЫ ФРАТТИНИ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

С. Ф. Каморников

Пусть  $G$  — конечная разрешимая группа,  $n$  — длина некоторого  $G$ -главного ряда группы  $F(G)/\Phi(G)$ , а  $k$  — число центральных  $G$ -главных факторов этого ряда. В статье доказано, что тогда в  $G$  существуют  $4n - 3k$  максимальные подгруппы, пересечение которых равно  $\Phi(G)$ . Это утверждение уточняет результат В. С. Монахова о том, что для любой конечной разрешимой ненильпотентной группы  $G$  ее подгруппа Фраттини  $\Phi(G)$  совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп  $M$  группы  $G$  таких, что  $MF(G) = G$ . Кроме того, в теореме 4.2 показывается, что в группе  $G$  существуют  $4(n - k)$  максимальные подгруппы, пересечение которых равно  $\delta(G)$ . Подгруппа  $\delta(G)$  определяется как пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы  $G$ , если группа не нильпотентна, и как  $G$ , если она нильпотентна.

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, максимальная подгруппа, подгруппа Фраттини.

**S. F. Kamornikov. On a characterization of the Frattini subgroup of a finite solvable group.**

Suppose that  $G$  is a finite solvable group,  $n$  is the length of a  $G$ -chief series of the group  $F(G)/\Phi(G)$ , and  $k$  is the number of central  $G$ -chief factors of this series. We prove that in this case  $G$  contains  $4n - 3k$  maximal subgroups whose intersection is  $\Phi(G)$ . This result refines V. S. Monakhov's statement that, for any finite solvable nonnilpotent group  $G$ , its Frattini subgroup  $\Phi(G)$  coincides with the intersection of all maximal subgroups  $M$  of the group  $G$  such that  $MF(G) = G$ . In addition, it is shown in Theorem 4.2 that the group  $G$  contains  $4(n - k)$  maximal subgroups whose intersection is  $\delta(G)$ . The subgroup  $\delta(G)$  is defined as the intersection of all abnormal maximal subgroups of  $G$  if  $G$  is not nilpotent and as  $G$  otherwise.

Keywords: finite solvable group, maximal subgroup, Frattini subgroup.

MSC: 20D10, 20D25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-176-180

### 1. Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Как известно, подгруппа Фраттини  $\Phi(G)$  группы  $G$  определяется как пересечение всех ее максимальных подгрупп. Из основного результата работы [1] следует, что для получения подгруппы  $\Phi(G)$  разрешимой группы  $G$  можно ограничиться пересечением лишь некоторых  $3n$  ее максимальных подгрупп, где  $n$  — число дополняемых факторов некоторого главного ряда группы  $G$ .

Другой подход, направленный на сокращение числа максимальных подгрупп, пересечение которых дает подгруппу Фраттини, предложен В. С. Монаховым в [2], где установлено, что для любой разрешимой группы  $G$  ее подгруппа Фраттини  $\Phi(G)$  совпадает с пересечением всех максимальных подгрупп  $M$  из  $G$  таких, что  $MF(G) = G$  (здесь  $F(G)$  — подгруппа Фиттинга группы  $G$ , т. е. наибольшая нормальная нильпотентная подгруппа группы  $G$ ).

В данной работе отмеченные подходы определенным образом объединяются. Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

**Теорема 1.1.** Пусть  $G$  — разрешимая группа,  $n$  — длина  $G$ -главного ряда группы  $F(G)/\Phi(G)$ , а  $k$  — число центральных  $G$ -главных факторов этого ряда. Тогда в  $G$  существуют  $4n - 3k$  максимальные подгруппы, пересечение которых равно  $\Phi(G)$ .



## 2. Основные определения и предварительные результаты

В статье используются определения и обозначения, принятые в [3].

Доказательство теоремы базируется на следующем известном результате Долфи.

**Лемма 2.1** [4, теорема 1.4]. Пусть  $G$  — разрешимая группа и  $V$  — конечный точный  $G$ -модуль. Если  $V$  вполне приводим, то существуют такие элементы  $v_1, v_2, v_3 \in V$ , для которых справедливо равенство  $C_G(v_1) \cap C_G(v_2) \cap C_G(v_3) = 1$ .

Через  $Core_G(H)$  далее обозначается ядро подгруппы  $H$  в группе  $G$ , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в подгруппе  $H$ .

**Лемма 2.2** [3, лемма A.16.3]. Пусть  $G = NH$  — полупрямое произведение нормальной подгруппы  $N$  и подгруппы  $H$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если  $n \in N$ , то  $H \cap H^n = C_H(n)$ ;
- 2)  $Core_G(H) = C_H(N)$ .

Напомним, что группа  $G$  называется примитивной, если она обладает такой максимальной подгруппой  $M$ , что  $Core_G(M) = 1$ . В этом случае подгруппа  $M$  называется примитиватором группы  $G$ .

**Лемма 2.3** [3, лемма A.15.4]. Если  $M$  — максимальная подгруппа группы  $G$ , то  $G/Core_G(M)$  — примитивная группа.

Следующий фундаментальный результат о примитивных группах, принадлежащий Бэру [5, следствия 1 и 2 леммы 2], мы приведем в виде леммы.

**Лемма 2.4.** Пусть  $G$  — примитивная группа и  $M$  — ее примитиватор. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- (1) группа  $G$  обладает единственной минимальной нормальной подгруппой  $N$ , подгруппа  $N$  является абелевой и  $M$  — дополнение к  $N$  в  $G$ ;
- (2) группа  $G$  обладает единственной минимальной нормальной подгруппой  $N$ , подгруппа  $N$  является неабелевой и  $M$  — добавление к  $N$  в  $G$ ;
- (3) группа  $G$  обладает двумя неабелевыми минимальными нормальными подгруппами  $N$  и  $N^*$  и  $M$  является дополнением в группе  $G$  к подгруппам  $N$  и  $N^*$ ;  $C_G(N) = N^*$ ,  $C_G(N^*) = N$  и  $N \simeq N^* \simeq NN^* \cap M$ ; если  $V$  — максимальная подгруппа группы  $G$  и  $VN = VN^* = G$ , то  $V \cap N = V \cap N^* = 1$ .

Из леммы 2.4, в частности, следует, что разрешимая группа  $G$  примитивна тогда и только тогда, когда она представима в виде полупрямого произведения  $G = NM$  минимальной нормальной подгруппы  $N$  и максимальной подгруппы  $M$ , причем  $C_G(N) = N$ .

**Лемма 2.5.** Пусть  $G$  — разрешимая примитивная группа и  $M$  — ее примитиватор. Тогда существуют такие элементы  $x, y, z \in G$ , для которых справедливо равенство  $M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = 1$ .

**Доказательство.** Ввиду леммы 2.4 группа  $G$  обладает единственной минимальной нормальной подгруппой  $N$ , причем  $N$  — абелева  $p$ -подгруппа для некоторого простого числа  $p$  и  $M$  — дополнение к  $N$  в  $G$ . Ясно, что  $N$  — неприводимый  $M$ -модуль над полем  $GF(p)$  из  $p$  элементов. Так как  $C_G(N) = N$ , то  $C_M(N) = 1$ , т. е.  $N$  — точный  $M$ -модуль.

Ввиду леммы 2.1 существуют такие элементы  $n_1, n_2, n_3 \in N$ , для которых справедливо равенство  $C_M(n_1) \cap C_M(n_2) \cap C_M(n_3) = 1$ . Отсюда ввиду леммы 2.2 имеем равенство  $M \cap M^{n_1} \cap M^{n_2} \cap M^{n_3} = 1$ . Лемма доказана.

**Лемма 2.6.** Пусть  $G$  — разрешимая группа и  $M$  — ее максимальная подгруппа. Тогда существуют такие элементы  $x, y, z \in G$ , для которых справедливо равенство  $M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = \text{Core}_G(M)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим группу  $G/\text{Core}_G(M)$  и ее максимальную подгруппу  $M/\text{Core}_G(M)$ . Ввиду леммы 2.3 группа  $G/\text{Core}_G(M)$  примитивна и  $M/\text{Core}_G(M)$  — ее примитиватор. Тогда на основании леммы 2.5 существуют такие элементы

$$x\text{Core}_G(M), y\text{Core}_G(M), z\text{Core}_G(M) \in G/\text{Core}_G(M),$$

для которых справедливо равенство

$$\begin{aligned} & (M/\text{Core}_G(M)) \cap (M/\text{Core}_G(M))^{x\text{Core}_G(M)} \\ & \cap (M/\text{Core}_G(M))^{y\text{Core}_G(M)} \cap (M/\text{Core}_G(M))^{z\text{Core}_G(M)} \\ & = \text{Core}_{G/\text{Core}_G(M)}(M/\text{Core}_G(M)). \end{aligned}$$

Так как  $\text{Core}_{G/\text{Core}_G(M)}(M/\text{Core}_G(M)) = 1$ , то  $M \cap M^x \cap M^y \cap M^z = \text{Core}_G(M)$ . Лемма доказана.

### 3. Доказательство теоремы

Пусть  $G$  — контрпример минимального порядка, для которого теорема не выполняется.

Рассмотрим группу  $G/\Phi(G)$  и ее подгруппу  $F(G/\Phi(G))$ . Так как  $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$  и  $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$ , то длина  $G/\Phi(G)$ -главного ряда группы  $F(G/\Phi(G))$  равна  $n$  и число центральных  $G/\Phi(G)$ -главных факторов этого ряда равно  $k$ . Если  $\Phi(G) \neq 1$ , то  $|G/\Phi(G)| < |G|$ , а значит, ввиду выбора группы  $G$  существуют максимальные подгруппы  $M_1/\Phi(G)$ ,  $M_2/\Phi(G)$ , ...,  $M_{4n-3k}/\Phi(G)$  группы  $G/\Phi(G)$ , пересечение которых равно 1. Отсюда следует, что  $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_{4n-3k} = \Phi(G)$ . Пришли к противоречию с выбором группы  $G$ .

Следовательно,  $\Phi(G) = 1$ . Тогда ввиду теоремы А.10.6 из [3] и леммы 7.9 из [6]  $F(G) = N_1 N_2 \dots N_n$  — произведение  $n$  дополняемых минимальных нормальных подгрупп  $N_1, N_2, \dots, N_n$  группы  $G$ . Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что подгруппы  $N_1, N_2, \dots, N_k$  центральны в  $G$ , а подгруппы  $N_{k+1}, \dots, N_n$  не лежат в центре  $Z(G)$  группы  $G$ . Рассмотрим  $G$ -главный ряд группы  $G$ :

$$1 = N_0 \subset N_1 \subset N_1 N_2 \subset \dots \subset N_1 N_2 \dots N_n = F(G).$$

Пусть  $M_i$  — максимальная подгруппа группы  $G$ , дополняющая главный фактор  $N_1 N_2 \dots N_i / N_1 N_2 \dots N_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Тогда, очевидно, подгруппа

$$F := \text{Core}_G(M_1) \cap \text{Core}_G(M_2) \cap \dots \cap \text{Core}_G(M_n)$$

изолирует каждый главный фактор  $N_1 N_2 \dots N_i / N_1 N_2 \dots N_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Это означает, что  $F \cap F(G) = F \cap N_1 N_2 \dots N_n \subseteq F \cap N_1 N_2 \dots N_{n-1} \subseteq \dots \subseteq F \cap N_0 = 1$ .

Предположим, что  $F \neq 1$  и  $N$  — минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $F$ . Ввиду теоремы А.10.6 из [3]  $F(G) = \text{Soc}(G)$ . Поэтому  $N \subseteq \text{Soc}(G) = F(G)$ . Пришли к противоречию с тем, что  $F \cap F(G) = 1$ .

Таким образом,  $F = 1$ , а значит,  $\text{Core}_G(M_1) \cap \text{Core}_G(M_2) \cap \dots \cap \text{Core}_G(M_n) = 1 = \Phi(G)$ .

Ввиду леммы 2.6 для каждого  $i = 1, 2, \dots, n$  существуют такие элементы  $x_i, y_i, z_i \in G$ , для которых справедливо равенство

$$M_i \cap M_i^{x_i} \cap M_i^{y_i} \cap M_i^{z_i} = \text{Core}_G(M_i).$$

Отметим, что подгруппы  $M_1, M_2, \dots, M_k$  нормальны в  $G$ . Поэтому  $Core_G(M_1) = M_1$ ,  $Core_G(M_2) = M_2, \dots, Core_G(M_k) = M_k$ . Отсюда следует, что

$$\Phi(G) = Core_G(M_1) \cap Core_G(M_2) \cap \dots \cap Core_G(M_n)$$

$$= M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k \cap (M_{k+1} \cap M_{k+1}^{x_{k+1}} \cap M_{k+1}^{y_{k+1}} \cap M_{k+1}^{z_{k+1}}) \cap \dots \cap (M_n \cap M_n^{x_n} \cap M_n^{y_n} \cap M_n^{z_n}),$$

т. е. подгруппа Фраттини  $\Phi(G)$  представима в виде пересечения  $4(n - k) + k = 4n - 3k$  максимальных подгрупп группы  $G$ . Снова пришли к противоречию с выбором группы  $G$ . Теорема доказана.

#### 4. Дополнения и замечания

В ряде случаев лемма 2.1 может быть уточнена. Так, в [7] доказано, что если  $G$  — группа нечетного порядка и  $V$  — конечный точный вполне приводимый  $G$ -модуль, то существуют такие элементы  $v_1, v_2 \in V$ , для которых справедливо равенство  $C_G(v_1) \cap C_G(v_2) = 1$ . Как отмечено в [8], такое же равенство имеет место и в случае, когда  $G$  — сверхразрешимая группа, но в общем случае это не так.

Следовательно, оценка числа максимальных подгрупп, приведенная в теореме 1.1, является точной, но в некоторых случаях она может быть существенно улучшена. В частности, по аналогии с теоремой 1.1 доказывается следующая

**Теорема 4.1.** Пусть  $G$  — группа нечетного порядка,  $n$  — длина  $G$ -главного ряда группы  $F(G)/\Phi(G)$ , а  $k$  — число центральных  $G$ -главных факторов этого ряда. Тогда в  $G$  существуют  $3n - 2k$  максимальные подгруппы, пересечение которых равно  $\Phi(G)$ .

В [9] В. Гашоц изучил свойства подгруппы  $\Delta(G)$ , которая определяется как пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы  $G$ , если группа ненильпотентна, и как  $G$ , если она нильпотентна.

В [10] В.С. Монахов показал, что для любой разрешимой ненильпотентной группы  $G$  подгруппа Гашоца  $\Delta(G)$  совпадает с пересечением всех абнормальных максимальных подгрупп  $M$  группы  $G$  таких, что  $MF(G) = G$ .

Из основного результата работы [11] следует, что для получения подгруппы  $\Delta(G)$  разрешимой группы  $G$  можно ограничиться пересечением лишь некоторых  $3n$  ее максимальных подгрупп, где  $n$  — число дополняемых эксцентральных факторов некоторого главного ряда группы  $G$ .

Объединяя подходы работ [10] и [11], по аналогии с теоремой 1.1 можно доказать следующую теорему.

**Теорема 4.2.** Пусть  $G$  — разрешимая ненильпотентная группа,  $n$  — длина  $G$ -главного ряда группы  $F(G)/\Phi(G)$ , а  $k$  — число центральных  $G$ -главных факторов этого ряда. Тогда в  $G$  существуют  $4(n - k)$ -максимальные подгруппы, пересечение которых равно  $\Delta(G)$ .

Отметим еще, что в [12] главные результаты работ [2] и [10] распространены на произвольные конечные группы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Каморников С.Ф.** Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups // Int. J. Group Theory. 2017. Vol. 6, no. 2. P. 1–5.
2. **Монахов В.С.** Замечание о максимальных подгруппах конечных групп // Докл. НАН Беларуси. 2003. Т. 47, no. 4. С. 31–33.
3. **Doerk K, Hawkes T.** Finite soluble groups Berlin; N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8.

4. Dolfi S. Large orbits in coprime actions of solvable groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* 2008. Vol. 360, no. 1. P. 135–152. doi: 10.1090/S0002-9947-07-04155-4.
5. Baer R. Classes of finite groups and their properties // *Illinois J. Math.* 1957. Vol. 1. P. 115–187.
6. Шеметков Л.А. Формации конечных групп М.: Наука, 1978. 272 с.
7. Dolfi S. Intersections of odd order Hall subgroups // *Bull. London Math. Soc.* 2005. Vol. 37. P. 61–66. doi: 10.1112/S0024609304003807.
8. Wolf T. Large orbits of supersoluble linear groups // *J. Algebra.* 1999. Vol. 215. P. 235–247. doi: 10.1006/jabr.1998.7730.
9. Gaschütz W. Über die  $\Phi$ -Untergruppen endlicher Gruppen // *Math. Z.* 1953. Bd. 58. S. 160–170. doi: 10.1007/BF01174137.
10. Монахов В.С. Замечание о пересечении ненормальных максимальных подгрупп конечных групп // *Изв. ГГУ им. Ф. Скорины.* 2004. № 6 (27). С. 81.
11. Каморников С.Ф. Об одной характеристике подгруппы Гашюца конечной разрешимой группы // *Фунд. и прикл. математика.* 2015. Т. 20, № 6. С. 65–75.
12. Васильев А.Ф., Васильева Т.И., Сыроковашин А.В. Заметка о пересечениях некоторых максимальных подгрупп конечных групп // *Проблемы физики, математики и техники.* 2012. № 2 (11). С. 62–64.

Каморников Сергей Федорович

Поступила 29.08.2017

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

e-mail: sfkamornikov@mail.ru

#### REFERENCES

1. Kamornikov S.F. Intersections of prefrattini subgroups in finite soluble groups. *Int. J. Group Theory*, 2017, vol. 6, no. 2, pp. 1–5.
2. Monakhov V.S. Remarks on maximal subgroups of finite groups. *Dokl. Nats. Akad. Nauk Belarusi*, 2003, vol. 47, no. 4, pp. 31–33 (in Russian).
3. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, New-York: Walter de Gruyter, 1992, 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8.
4. Dolfi S. Large orbits in coprime actions of solvable groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2008, vol. 360, no. 1, pp. 135–152. doi: 10.1090/S0002-9947-07-04155-4.
5. Baer R. Classes of finite groups and their properties. *Illinois J. Math.*, 1957, vol. 1, pp. 115–187.
6. Шеметков, Л.А. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Moscow, Nauka Publ. 1978, 272 p.
7. Dolfi S. Intersections of odd order Hall subgroups. *Bull. London Math. Soc.*, 2005, vol. 37, no. 1, pp. 61–66. doi: 10.1112/S0024609304003807.
8. Wolf T. Large orbits of supersoluble linear groups. *J. Algebra*, 1999, vol. 215, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1006/jabr.1998.7730.
9. Gaschütz W. Über die  $\Phi$ -Untergruppen endlicher Gruppen. *Math. Z.*, 1953, vol. 58, no. 1, pp. 160–170. doi: 10.1007/BF01174137.
10. Monakhov V.S. Remark on the intersection of abnormal maximal subgroups of finite groups. *Izv. Gomel. Gos. Univ. Im. F. Skoriny*, 2004, vol. 27, no. 6, pp. 81.
11. Kamornikov S.F. One characterization of the Gaschütz subgroup of a finite soluble group. *Fundam. Prikl. Mat.*, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 65–75.
12. Vasil'ev A.F., Vasil'eva T.I., Syrokvashin A.V. A note on intersections of some maximal subgroups of finite groups. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2012, no. 2(11), pp. 62–64.

The paper was received by the Editorial Office on August 29, 2017.

*Sergei Fedorovich Kamornikov*, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: sfkamornikov@mail.ru.

УДК 517.977

**ПРИМЕНЕНИЕ АЛЬТРУИСТИЧЕСКОГО И АГРЕССИВНОГО ТИПОВ ПОВЕДЕНИЯ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДВУХ ЛИЦ НА ПЛОСКОСТИ****А. Ф. Клейменов<sup>1</sup>**

Исследуется неантагонистическая позиционная дифференциальная игра двух лиц, в которой каждый из двух игроков помимо обычного, нормального (*nor*), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственного функционала, может использовать другие типы поведения. В частности, это альтруистический (*alt*), агрессивный (*agg*) и парадоксальный (*par*) типы. Предполагается, что по ходу игры игроки могут осуществлять переключения своего поведения с одного типа на другой. В рассматриваемой игре каждый игрок одновременно с выбором позиционной стратегии выбирает также индикаторную функцию, определенную на всем отрезке игры и принимающую значения в множестве  $\{nor, alt, agg, par\}$ . Индикаторная функция игрока показывает динамику изменения типа поведения, которой придерживается этот игрок. Вводится понятие *BT*-решения такой игры. На *BT*-решениях использование игроками типов поведения, отличных от нормального, приводит к исходам, более предпочтительным для них, чем в игре только с нормальным типом поведения. На примере игры с динамикой простого движения на плоскости и фазовыми ограничениями иллюстрируется процедура построения *BT*-решений.

Ключевые слова: неантагонистическая позиционная дифференциальная игра, терминальные показатели качества, типы поведения игроков, альтруистический и агрессивный типы поведения, решения нешевского типа.

**A. F. Kleimenov. Application of the altruistic and aggressive types of behavior in a two-person non-zero-sum positional differential game on the plane.**

A two-person non-zero-sum positional differential game is studied. In addition to the normal (*nor*) behavior aimed at maximizing the cost functional, each player can use other types of behavior, in particular, the altruistic (*alt*), aggressive (*agg*), and paradoxical (*par*) types. It is assumed that the players can switch between the types of behavior in the course of the game. Simultaneously with the choice of a positional strategy, each player also chooses an indicator function defined on the entire game interval and taking values in the set  $\{nor, alt, agg, par\}$ . The indicator function of each player shows the dynamics of behavior switchings of this player. The notion of *BT*-solution of the game is introduced. On *BT*-solutions, the application by a player of the behavior types different from normal produces a more favorable result for this player than a game with the normal behavior only. The procedure for constructing *BT*-solutions is exemplified by a planar game with simple motion dynamics and state constraints.

Keywords: non-zero-sum positional differential game, terminal cost functional, behavior types of the players, altruistic and aggressive types, Nash solution.

MSC: 20D10, 20D25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-181-191

**Введение**

В настоящей работе неантагонистическая позиционная дифференциальная игра двух лиц задается расширенным набором, состоящим из семи элементов. Первые три элемента описывают нормальную форму игры (см., например, [1; 2]), остальные доставляют дополнительную информацию, касающуюся, в частности, последовательности действий игроков, а также их возможностей (в одиночку или в составе коалиции) отклоняться от согласованного набора стратегий. В работе делается акцент на случае, когда каждый из двух игроков помимо обычного, *нормального* (*nor*), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственного

<sup>1</sup> 25 лет назад вышла первая в нашем журнале статья Анатолия Федоровича:

Клейменов А. Ф. Универсальное решение в неантагонистической позиционной игре с векторными критериями // Тр. Ин-та математики и механики УРО РАН. 1992. Т. 1. С. 97–105.

функционала, может использовать другие типы поведения, введенные в [3; 4], такие как *альтруистический* (*alt*), *агрессивный* (*agg*) и *парадоксальный* (*par*) типы. Допускается, что по ходу игры игроки могут осуществлять переключения своего поведения с одного типа на другой. Предполагается, что в игре каждый игрок одновременно с выбором позиционной стратегии выбирает также индикаторную функцию, определенную на всем отрезке игры и принимающую значения в множестве  $\{nor, alt, agg, par\}$ . Индикаторная функция игрока показывает динамику изменения типа поведения, которой придерживается этот игрок. Для каждой пары типов поведения игроков вводятся правила формирования управлений. Формализация позиционных стратегий в игре основана на формализации и результатах общей теории позиционных дифференциальных игр [5–7]. Вводится понятие *BT*-решения. Предложен пример игры с динамикой простого движения на плоскости и фазовым ограничением в двух вариантах. В первом варианте допускаем, что первый и второй игроки могут проявлять альтруизм по отношению к своему партнеру в течение некоторых промежутков времени. Во втором варианте помимо допущения об альтруизме игроков дополнительно допускаем, что каждый игрок может проявлять агрессию по отношению к другому игроку в течение некоторых промежутков времени, причем допускается случай взаимной агрессии. В обоих вариантах описаны множества *BT*-решений. Подробно приведены *BT*-решения, наилучшие для каждого из игроков. Настоящая статья является продолжением работ [8–10].

## 1. Расширенный набор элементов неантагонистической дифференциальной игры

Рассмотрим дифференциальную игру, заданную совокупностью следующих семи элементов 1°–7° [7]:

1°. Уравнения динамики, начальные условия, множество игроков — участников игры, ограничения на управления игроков.

2°. Формализация стратегий игроков и движений, порожденных стратегиями.

3°. Функционалы выигрыша игроков.

Отметим, что элементы 1°–3° описывают нормальную форму игры [1; 2]. Однако, как правило, для адекватного определения понятия решения игры требуется дополнительная информация об игре. В частности, эта информация может касаться возможностей отдельных игроков (или коалиций игроков) отклоняться от решения игры в те или иные моменты времени игры. Может также представить интерес характер реакции неотклонившихся игроков на состоявшееся отклонение. Далее, важна последовательность, в которой игроки осуществляют выбор своих стратегий.

Примем следующее определение.

**О п р е д е л е н и е 1.** Будем говорить, что имеет место отклонение какого-либо игрока (или коалиции игроков) от исходного набора стратегий, начиная с некоторого момента времени, если этот игрок (или коалиция игроков), начиная с этого момента, переключается на стратегию, отличную от стратегии в исходном наборе.

Перейдем теперь к описанию дополнительных элементов игры (элементы 4°–7°).

4°. Описание множества разрешенных коалиций отклонения (РКО) (т.е. коалиций, которым разрешается отклоняться) и для каждой РКО — множества разрешенных моментов отклонения (РМО).

5°. Описание реакции игроков, не вошедших в отклонившуюся коалицию, на отклонение этой коалиции.

Набор стратегий назовем *допустимым*, если ни одной РКО ни в один РМО невыгодно отклоняться от этого набора. Считаем, что отклонение игрока (или коалиции игроков) выгодно для него (или для нее), если отклонившийся игрок (или каждый член отклонившейся коалиции) получает в результате отклонения гарантированный выигрыш, больший, чем в игре

без отклонений. Гарантированный выигрыш вычисляется с учетом оговоренной в 5° реакции неотклонившихся игроков. Очевидно, что если набор стратегий не является допустимым, то он не может быть выбран в качестве решения игры. Обозначим множество допустимых наборов стратегий через  $D$ .

Например, если в игре двух лиц положить, что множество РКО состоит из одноэлементных коалиций  $\{1\}, \{2\}$ , а множество РМО является целым отрезком игры, то множество  $D$  совпадает с множеством равновесных по Нэшу решений [7]. Далее, если в игре двух лиц множество РКО состоит из единственной коалиции  $\{i\}, i \in \{1, 2\}$ , то наборы стратегий из получающегося множества  $D$ , наилучшие для игрока  $3 - i$ , представляют собою решения по Штакельбергу в игре с лидером — игроком  $3 - i$  [7].

Если же множество РКО — пустое множество, то на основе получающегося множества  $D$  можно строить различные типы кооперативных решений.

6°. Описание последовательности, в которой игроки осуществляют выбор своих стратегий.

7°. Описание дополнительных условий на допустимые наборы стратегий.

## 2. Неантагонистическая позиционная дифференциальная игра двух лиц. NE - и P(NE)-решения

В этом разделе зададим конкретные варианты элементов 1°–7°, определяющих неантагонистическую позиционную дифференциальную игру двух лиц (НПДИ).

1°. Динамика игры описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.1)$$

где  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in P \in \text{comp}(\mathbb{R}^p)$ ,  $v \in Q \in \text{comp}(\mathbb{R}^q)$ ;  $\vartheta$  — заданный момент окончания игры. Предполагается, что функция  $f$  непрерывна, липшицева по  $x$ , удовлетворяет условию подлиннейного роста по  $x$  а также условию седловой точки в маленькой игре [5]. Игрок 1 ( $P1$ ) и игрок 2 ( $P2$ ) распоряжаются выбором управлений  $u$  и  $v$  соответственно.

2°. Обоим игрокам доступна информация о текущей позиции игры  $\{t, x(t)\}$ . Используемая здесь формализация позиционных стратегий и порождаемых ими движений аналогична формализации, введенной в [5; 6], за исключением технических деталей [7].

Стратегия игрока 1 отождествляется с парой  $U = \{u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$ , где  $u(\cdot)$  — произвольная функция позиции  $(t, x)$  и положительного параметра точности  $\varepsilon$ , принимающая значения в множестве  $P$ . Функция  $\beta_1 : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  непрерывная монотонная и удовлетворяет условию  $\beta_1(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Для фиксированного  $\varepsilon$  величина  $\beta_1(\varepsilon)$  является верхней границей шага разбиения отрезка  $[t_0, \vartheta]$ , которое игрок 1 применяет при формировании пошаговых движений.

Аналогично стратегия игрока 2 определяется как  $V = \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$ .

Рассматриваются два типа движений, порожденные парой  $(U, V)$  из начальной позиции  $(t_0, x_0)$ : аппроксимационные (пошаговые) движения и идеальные (предельные) движения.

Аппроксимационное движение  $x_{\Delta}^{\varepsilon}[t] = x[t, t_0, x_0, U, \varepsilon_1, \Delta_1, V, \varepsilon_2, \Delta_2]$  определяется для фиксированных значений параметров точности  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , для фиксированных разбиений отрезка  $[t_0, \vartheta]$ :  $\Delta_1 = \{t_i^{(1)}\}$  и  $\Delta_2 = \{t_k^{(2)}\}$ , выбранных игроками и удовлетворяющих условиям  $\delta(\Delta_i) \leq \beta_i(\varepsilon_i)$ ,  $i = 1, 2$ , где  $\delta(\Delta_i) = \max_j (t_{j+1}^{(i)} - t_j^{(i)})$ .

Идеальное (предельное) движение  $x(t) = x(t, t_0, x_0, U, V)$  есть равномерный предел последовательности аппроксимационных движений

$$\{x_{\Delta^s}^{\varepsilon^s}[t, t_0^s, x_0^s, U, \varepsilon_1^s, \Delta_1^s, V, \varepsilon_2^s, \Delta_2^s]\}$$

где  $s \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon_i^s \rightarrow 0$ ,  $t_0^s \rightarrow t_0$ ,  $x_0^s \rightarrow x_0$ ,  $\delta(\Delta_i^s) \leq \beta_i(\varepsilon_i^s)$ ,  $i = 1, 2$ .

Законы управления  $(U, \varepsilon_1, \Delta_1)$  и  $(V, \varepsilon_2, \Delta_2)$  назовем *согласованными по параметру точности*, если  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Согласованные законы управления порождают согласованные аппроксимационные движения, последовательности которых порождают согласованные предельные движения.

Множество предельных движений  $X(t_0, x_0, U, V)$  есть компакт в пространстве  $C[t_0, \vartheta]$ .

3°. Функционал выигрыша игрока  $i$  берется в виде

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)), \quad i = 1, 2, \quad (2.2)$$

где  $\sigma_i$  — непрерывная функция.

4°. Множество разрешенных коалиций отклонения состоит из двух одноэлементных коалиций  $\{1\}, \{2\}$ ; для любой РКО множество разрешенных моментов отклонения есть отрезок  $[t_0, \vartheta]$ .

5°. Неотклонившийся игрок выбирает после отклонения какую угодно стратегию.

6°. Игроки выбирают свои стратегии одновременно.

7°. Дополнительные условия на допустимые наборы стратегий отсутствуют.

Заданное таким образом множество элементов 1°–7° определяет классическую неантагонистическую позиционную дифференциальную игру (НПДИ) [2; 7].

**З а м е ч а н и е 1.** Вместо описанных вариантов элементов 4° и 6° можно принять следующие:

4°. Множество РКО:  $\{\{2\}\}$ ; для этой РКО множество РМО:  $[t_0, \vartheta]$ .

6°. Игрок 1 выбирает свою стратегию первым.

В этом случае в результате полученное множество элементов 1°–7° определит иерархическую игру Штакельберга с лидером — первым игроком [7].

**О п р е д е л е н и е 2.** Пара стратегий  $(U^N, V^N)$  образует нэшевское решение ( $NE$ -решение) игры НПДИ, если для любого движения  $\bar{x}(\cdot) \in X(t_0, x_0, U^N, V^N)$ , любого  $\tau \in [t_0, \vartheta]$ , любых стратегий  $U$  и  $V$  выполнены следующие неравенства:

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \bar{x}(\tau), U, V^N)) \leq \min_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \bar{x}(\tau), U^N, V^N)), \quad (2.3)$$

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \bar{x}(\tau), U^N, V)) \leq \min_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \bar{x}(\tau), U^N, V^N)), \quad (2.4)$$

причем операции  $\min$  производятся по множеству согласованных движений, а операции  $\max$  — по соответствующим множествам всех движений.

**О п р е д е л е н и е 3.**  $NE$ -решение  $(U^P, V^P)$ , неулучшаемое по Парето относительно величин  $I_1, I_2$  (2.2), называется  $P(NE)$ -решением НПДИ.

Введем вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Динамика обеих игр описывается уравнением (2.1). В игре  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , игрок  $i$  максимизирует свой функционал  $I_i$  (2.2), а игрок  $3 - i$  противодействует ему. В [5; 6] показано, что обе игры  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  имеют универсальные седловые точки

$$u^{(i)}(t, x, \varepsilon), \quad v^{(i)}(t, x, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \quad (2.5)$$

и непрерывные функции цены  $\gamma_i(t, x)$ ,  $i = 1, 2$ .

Свойство универсальности стратегий (2.5) означает, что они являются оптимальными не только для фиксированной начальной позиции  $(t_0, x_0)$ , но и для любой позиции  $(t_*, x_*)$ , рассматриваемой в качестве начальной.

Нетрудно видеть, что величина  $\gamma_i(t, x)$  представляет собою гарантированный выигрыш игрока  $i$  в позиции  $(t, x)$  игры.

В [7] установлена структура  $NE$ - и  $P(NE)$ -решений, а именно показано, что все  $NE$ - и  $P(NE)$ -решения игры могут быть найдены в классе пар стратегий  $(U, V)$ , порождающих единственное предельное движение (траекторию). Решающие стратегии, составляющие такую пару и порождающие траекторию  $x^*(\cdot)$ , имеют вид

$$U^0 = \{u^0(t, x, \varepsilon), \beta_1^0(\varepsilon)\}, \quad V^0 = \{v^0(t, x, \varepsilon), \beta_2^0(\varepsilon)\}, \quad (2.6)$$



$$u^0(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} u^*(t, \varepsilon), & \text{если } \|x - x^*(t)\| < \varepsilon\varphi(t), \\ u^{(2)}(t, x, \varepsilon), & \text{если } \|x - x^*(t)\| \geq \varepsilon\varphi(t), \end{cases} \quad (2.7)$$

$$v^0(t, x, \varepsilon) = \begin{cases} v^*(t, \varepsilon), & \text{если } \|x - x^*(t)\| < \varepsilon\varphi(t), \\ v^{(1)}(t, x, \varepsilon), & \text{если } \|x - x^*(t)\| \geq \varepsilon\varphi(t) \end{cases}$$

для всех  $t \in [t_0, \vartheta], \varepsilon > 0$ . В (2.6), (2.7) через  $u^*(t, \varepsilon)$ ,  $v^*(t, \varepsilon)$  обозначены семейства программных управлений, порождающих траекторию  $x^*(t)$ . Функция  $\varphi(\cdot)$  вместе с функциями  $\beta_1^0(\cdot)$  и  $\beta_2^0(\cdot)$  выбираются таким образом, что ломаные Эйлера, порожденные парой  $(U^0, V^0)$  из начальной позиции  $(t_0, x_0)$ , не выходят за пределы  $\varepsilon\varphi(t)$ -окрестности траектории  $x^*(t)$ . Функции  $u^{(2)}(\cdot, \cdot, \cdot)$  и  $v^{(1)}(\cdot, \cdot, \cdot)$  определены в (2.5).

Далее, для каждой  $NE$ - и  $P(NE)$ - траектории  $x^*(t)$  имеет место следующее свойство.

**С в о й с т в о А.** Точка  $t = \vartheta$  является точкой максимума функции гарантированного выигрыша игрока  $i$ , вычисленной вдоль этой траектории, т. е.

$$\max_{t \in [t_0, \vartheta]} \gamma_i(t, x^*(t)) = \gamma_i(\vartheta, x^*(\vartheta)), \quad i = 1, 2. \quad (2.8)$$

### 3. Новый вариант элемента 7°: типы поведения

Рассмотрим теперь новый вариант элемента 7°.

7°. Дополнительно предполагаем, что помимо обычного, *нормального* (*nor*), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственных функционалов выигрыша (2.2), игроки могут использовать другие типы поведения, а именно *альтруистический*, *агрессивный* и *парадоксальный* типы ([3; 4]).

Эти три типа поведения могут быть формализованы следующим образом:

**О п р е д е л е н и е 4.** Скажем, что игрок 1 придерживается на отрезке  $[t_*, t^*]$  альтруистического (*alt*) типа поведения по отношению к игроку 2, если на этом отрезке действия игрока 1 направлены на максимизацию функционала  $I_2$  игрока 2.

**О п р е д е л е н и е 5.** Скажем, что игрок 1 придерживается на отрезке  $[t_*, t^*]$  агрессивного (*agg*) типа поведения по отношению к игроку 2, если на этом отрезке действия игрока 1 направлены на минимизацию функционала  $I_2$  игрока 2.

**О п р е д е л е н и е 6.** Скажем, что игрок 1 придерживается на отрезке  $[t_*, t^*]$  парадоксального (*par*) типа поведения, если на этом отрезке действия игрока 1 направлены на минимизацию собственного функционала  $I_1$ .

Аналогично определяются альтруистический и агрессивный типы поведения игрока 2 по отношению к игроку 1, а также парадоксальный тип поведения игрока 2. Заметим, что агрессивный тип поведения игроков фактически используется в НПДИ в форме стратегий наказания, содержащихся в структуре решений игры (см., например, [7]).

Приведенные определения характеризуют экстремальные типы поведения игроков. В действительности же реальные индивидуумы ведут себя, как правило, частично нормально, частично альтруистично, частично агрессивно и частично парадоксально. Другими словами, смешанные типы поведения, по-видимому, больше согласуются с реальностью.

Если каждого игрока ограничить “чистыми” типами поведения, то в рассматриваемой игре двух лиц (2.1) с функционалами  $I_1$  и  $I_2$  (2.2) существует 16 возможных пар типов поведения: (*nor, nor*), (*nor, alt*), (*nor, agg*), (*nor, par*), (*alt, nor*), (*alt, alt*), (*alt, agg*), (*alt, par*), (*agg, nor*), (*agg, alt*), (*agg, agg*), (*agg, par*), (*par, nor*), (*par, alt*), (*par, agg*), (*par, par*). При этом в следующих четырех парах (*nor, alt*), (*alt, nor*), (*agg, par*) и (*par, agg*) интересы игроков совпадают и игроки решают командные задачи управления. В следующих четырех парах (*nor, agg*), (*alt, par*), (*agg, nor*) и (*par, alt*) игроки имеют противоположные интересы и, следовательно,

разыгрываются антагонистические дифференциальные игры. Остальные 8 пар определяют неантагонистические дифференциальные игры.

Идея использования игроками возможности переключения по ходу игры своего поведения с одного типа на другой была применена для игры с кооперативной динамикой в работе [4] и для повторяющейся биматричной  $2 \times 2$  игры в работе [8], что позволило получить новые решения в этих играх.

Распространение указанного подхода на неантагонистические позиционные дифференциальные игры приводит к новым постановкам задач. В частности, представляет интерес, как трансформируются выигрыши игроков, получаемые на нэшевских решениях. Актуальной становится задача минимизации времени “ненормального” поведения при условии достижения результата, более хорошего, чем при нормальном поведении игроков.

#### 4. Формализация игры НПДИсТП. BT-решение игры

Таким образом, игроки могут по ходу игры переключаться с одного типа поведения на другой. Такую игру будем называть *неантагонистической позиционной дифференциальной игрой с типами поведения игроков* (НПДИсТП).

Далее будем полагать, что одновременно с выбором позиционной стратегии каждый игрок выбирает также свою индикаторную функцию, определенную на отрезке  $t \in [t_0, \vartheta]$  и принимающую значение в множестве  $\{nor, alt, agg, par\}$ . Обозначим индикаторную функцию игрока  $i$  символом  $\alpha_i : [t_0, \vartheta] \rightarrow \{nor, alt, agg, par\}$ ,  $i = 1, 2$ . Если индикаторная функция какого-то игрока принимает значение, скажем, *alt* на некотором отрезке времени, то этот игрок действует на этом отрезке как альтруист по отношению к своему партнеру по игре. Заметим также, что если индикаторные функции обоих игроков тождественно равны значению *nor* на всем промежутке игры, то имеем классическую НПДИ.

Таким образом, в рассматриваемой игре с различными типами поведения игроков игрок 1 управляет выбором пары действий {позиционная стратегия, индикаторная функция}:  $(U, \alpha_1(\cdot))$ , а игрок 2 управляет выбором пары действий  $(V, \alpha_2(\cdot))$ .

Как упоминалось в разд. 3, при выборе игроками различных типов поведения могут сложиться три вида задач принятия решений: задача командного управления, антагонистическая игра, неантагонистическая игра. Будем считать, что игроки в каждой из трех указанных ситуаций руководствуются следующим правилом.

**П р а в и л о 1.** Если на промежутке  $(\tau_1, \tau_2) \subset [t_0, \vartheta]$  индикаторные функции игроков сгенерировали неантагонистическую игру, то на этом промежутке игроки выбирают одно из  $P(NE)$ -решений сложившейся игры. Если сложилась антагонистическая игра, то в качестве решения игроки реализуют седловую точку. Наконец, если сложилась задача командного управления, то игроки выбирают одну из пар управлений, обеспечивающих неубывание вдоль траектории функции цены  $\gamma_i$ , где  $i$  — номер игрока, функционал которого максимизируется.

Вообще говоря, один и тот же кусок траектории может быть отслежен несколькими парами типов поведения игроков, причем эти пары могут отличаться друг от друга временем использования *ненормальных* типов. Естественно ввести следующее правило.

**П р а в и л о 2.** При наличии нескольких пар типов поведения, отслеживающих некоторую часть траектории, игроки выбирают ту из них, которая минимизирует время использования ненормальных типов поведения.

Введем теперь определение понятия решения игры НПДИсТП. Отметим, что множество движений, порожденных парой действий  $\{(U, \alpha_1(\cdot)), (V, \alpha_2(\cdot))\}$ , совпадает с множеством движений, порожденных парой  $(U, V)$  в соответствующей НПДИ.

**О п р е д е л е н и е 7.** Пара  $\{(U^0, \alpha_1^0(\cdot)), (V^0, \alpha_2^0(\cdot))\}$ , согласованная с правилом 1, образует *BT*-решение игры НПДИсТП, если найдется порожденная парой траектория  $x^{BT}(\cdot)$  и

найдется  $P(NE)$ -решение в соответствующей игре НПДИ, порождающее траекторию  $x^P(\cdot)$ , такие, что выполнены неравенства

$$\sigma_i(x^{BT}(\vartheta)) \geq \sigma_i(x^P(\vartheta)), \quad i = 1, 2, \quad (4.1)$$

причем по крайней мере одно из неравенств строгое.

**О п р е д е л е н и е 8.**  $BT$ -решение  $\{(U^P, \alpha_1^P(\cdot)), (V^P, \alpha_2^P(\cdot))\}$ , неуплощаемое по Парето относительно величин  $I_1, I_2$  (2.2), назовем  $P(BT)$ -решением игры НПДИсТП.

**З а д а ч а 1.** Найти множество  $BT$ -решений.

**З а д а ч а 2.** Найти множество  $P(BT)$ -решений.

В общем случае задачи 1 и 2 решений не имеют. Однако вполне ожидаемо, что использование игроками в игре НПДИсТП типов поведения, отличных от нормального, может в ряде случаев привести к исходам, более предпочтительным для них, чем в соответствующей игре НПДИ только с нормальным типом поведения. Пример такого рода приводится в следующем разделе.

### 5. Пример

Пусть динамика (2.1) имеет вид

$$\dot{x} = u + v, \quad x, u, v \in \mathbb{R}^2, \quad \|u\| \leq 1, \quad \|v\| \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \vartheta, \quad x(0) = x_0, \quad (5.1)$$

а функционалы выигрыша (2.2) суть

$$I_i = 20 - \|x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad i = 1, 2, \quad (5.2)$$

т. е. игрок  $i$  стремится привести точку  $x(\vartheta)$  как можно ближе к своей целевой точке  $a^{(i)}$ .

Зададим следующие значения параметров игры:

$$\vartheta = 5.0, \quad x_0 = (0, 0), \quad a^{(1)} = (-11, 9), \quad a^{(2)} = (11, 9). \quad (5.3)$$

В задаче имеется следующее фазовое ограничение в плоскости  $(x_1, x_2)$ : траекториям системы (5.1) запрещается заходить во внутренность множества  $S$ , которое получается удалением из четырехугольника  $Oabc$  двухзвенной ломаной  $Oeg$  (см. рисунок). Множество  $S$  состоит из двух частей  $S_1$  и  $S_2$ , т. е.  $S = S_1 \cup S_2$ .

Координаты точек, задающих фазовое ограничение, следующие:

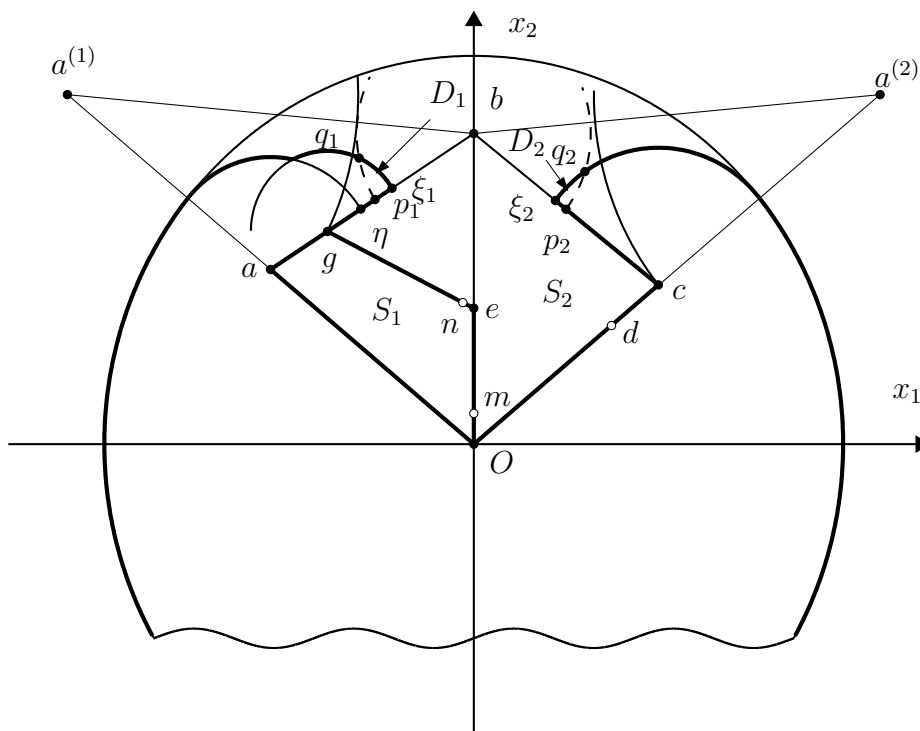
$$a = (-5.5, 4.5), \quad b = (0, 8), \quad c = (5, 4.1), \quad O = (0, 0), \quad e = (0, 3.5), \quad g = (-3.96, 5.48). \quad (5.4)$$

Можно проверить, что точка  $a$  лежит на отрезке  $Oa^{(1)}$ , а точка  $g$  — на отрезке  $ab$ . Отметим также, что точка  $c$  лежит чуть выше отрезка  $Oa^{(2)}$ .

Множество достижимости системы (5.1), построенное для момента  $\vartheta = 5.0$ , состоит из точек круга радиуса 10, расположенных не выше трехзвенника  $aOc$  и ограниченных также двумя дугами, соединяющими большую окружность со сторонами  $ab$  и  $bc$  четырехугольника (см. рисунок). При этом первая (составная) дуга состоит из дуги окружности с центром в точке  $a$  и радиусом  $r_1 = |a\eta|$  и дуги окружности с центром в точке  $g$  и радиусом  $r = |g\xi_1|$ . Вторая дуга есть дуга окружности с центром в точке  $c$  и радиусом  $r_2 = |c\xi_2|$ .

Результаты приближенных вычислений:  $r = 2.0726$ ,  $r_1 = 2.8937$ ,  $r_2 = 3.5335$ ,  $\eta = (-3.0587, 6.0536)$ ,  $x_{i1} = (-2.2114, 6.5927)$ ,  $\xi_2 = (2.2135, 6.2735)$ . Кроме того, имеем (приближенно)  $|Oa^{(1)}| = |Oa^{(2)}| = 14.2127$  и  $|a^{(1)}b| = |a^{(2)}b| = 11.0454$ .

На рисунке пунктирными линиями изображены дуги окружности  $L$  с центром в точке  $b$  и радиусом  $r_3 = 3.1673 = 14.2127 - 11.0454$ . Они пересекают стороны  $ab$  и  $bc$  в точках  $p_1$  и  $p_2$



Множество достижимости.

соответственно с координатами  $p_1 = (-2.6721, 6.2995)$ ,  $p_2 = (2.4974, 6.0520)$ . По построению длины двузвеньев  $a^{(1)}bp_2$  и  $a^{(2)}bp_1$  равны между собой и равны длине отрезков  $Oa^{(1)}$  и  $Oa^{(2)}$ .

Функции цены  $\gamma_1(t, x)$  и  $\gamma_2(t, x)$ ,  $0 \leq t \leq \vartheta$ ,  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus S$ , (2.5) вспомогательных антагонистических игр  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  в данном примере будут

$$\gamma_i(t, x) = \begin{cases} 20 - \|x - a^{(i)}\|, & \text{если } xa^{(i)} \cap \text{int}S = \emptyset, \\ 20 - \rho_S(x, a^{(i)}) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.5)$$

Здесь  $i = 1, 2$ , а через  $\rho_S(x, a^{(i)})$  обозначено наименьшее из двух расстояний от точки  $x$  до точки  $a^{(i)}$ , одно из которых вычисляется при обходе множества  $S$  по часовой стрелке, а другое — при обходе  $S$  против часовой стрелки.

Нетрудно проверить, что в игре НПДИ с нормальным типом поведения игроков траектория  $x(t) \equiv 0$ ,  $t \in [0, 5]$ , (точка  $O$ ) будет нэшевской траекторией. Далее, траектории, построенные вдоль ломаной  $Oeg$ , нэшевскими не являются, поскольку ни для одной из них не выполняется условие (2.8). Это подтверждается и тем, что окружность радиуса  $|a^{(1)}g|$  с центром в точке  $a^{(1)}$  не имеет общих точек с окружностью  $L$  (см. рисунок). Не являются нэшевскими и все траектории, огибающие множество  $S_2$  справа, поскольку окружность радиуса  $|a^{(2)}c|$  с центром в точке  $a^{(2)}$  также не имеет общих точек с окружностью  $L$ . Очевидно, не являются нэшевскими и все траектории, огибающие множество  $S_1$  слева. В итоге получается, что упомянутая траектория является единственной нэшевской траекторией, а, следовательно, и единственной  $P(NE)$ -траекторией; выигрыши игроков на ней определяются как  $I_1 = I_2 = 5.7873$ .

Перейдем теперь к игре НПДИсТП, в которой будем рассматривать два варианта.

**В а р и а н т I.** Полагаем, что игроки 1 и 2 могут проявлять альтруизм по отношению к своему партнеру в течение некоторых промежутков времени.

**В а р и а н т II.** Помимо допущения об альтруизме игроков дополнительно полагаем, что каждый игрок может проявлять агрессию по отношению к другому игроку в течение некоторых промежутков времени, причем допускается случай взаимной агрессии.

В множестве достижимости найдем все точки  $x$ , для которых выполнены неравенства

$$\sigma_i(x) \geq \sigma_i(O), \quad i = 1, 2, \quad \sigma_1(x) + \sigma_2(x) > \sigma_1(O) + \sigma_2(O) \quad (5.6)$$

Такие точки составят два множества  $D_1$  и  $D_2$  (см. рисунок). Множество  $D_1$  ограничено отрезком  $p_1\xi_1$ , а также дугами  $p_1q_1$  и  $q_1\xi_1$  упомянутых выше окружностей. Множество  $D_2$  ограничено отрезком  $p_2\xi_2$ , а также дугами  $\xi_2q_2$  и  $q_2p_2$  упомянутых окружностей. При этом на дуге  $p_1q_1$  нестрогое неравенство (5.6) при  $i = 2$  превращается в равенство, а на дуге  $p_2q_2$  нестрогое неравенство (5.6) превращается в равенство при  $i = 1$ . В остальных точках множеств  $D_1$  и  $D_2$  нестрогие неравенства (5.6) при  $i \in \{1, 2\}$  будут строгими.

В рамках варианта  $I$  построим  $BT$ -решение, приводящее в точку  $\xi_2 \in D_2$ .

Рассмотрим траекторию  $Oc\xi_2$ ; выигрыши игроков на ней составляют  $I_1 = 6.1474$ ,  $I_2 = 10.8002$ , т. е. каждый игрок выигрывает больше, чем на единственной  $P(NE)$ -траектории. Как следует из вышесказанного, траектория  $Oc\xi_2$  не является нэшевской. Однако если удастся построить индикаторные функции-программы игроков, обеспечивающие движение по этой траектории, то тем самым будет построено  $BT$ -решение.

На стороне  $Oc$  найдем точку  $d$ , равноудаленную от точки  $a^{(1)}$  как при обходе множества  $S$  по часовой стрелке, так и при обходе  $S$  против часовой стрелки. Получим  $d = (3.7271, 3.0562)$ . Далее, если двигаться по траектории  $Oc\xi_2$  с максимальной скоростью при  $t \in [0, 5]$ , то время попадания в точку  $d$  будет  $t = 2.4100$ , а в точку  $c$  будет  $t = 3.2330$ . При этом можно убедиться, что при движении на промежутке  $t \in [0, 2.4100]$  функция  $\gamma_1(t, x)$  (5.5) монотонно убывает, а функция  $\gamma_2(t, x)$  монотонно возрастает; при движении на промежутке  $t \in [2.4100, 3.2330]$  обе функции  $\gamma_1(t, x)$  и  $\gamma_2(t, x)$  монотонно возрастают; наконец, при движении на оставшемся промежутке  $t \in [3.2330, 5.0]$  функция  $\gamma_1(t, x)$  монотонно возрастает, а функция  $\gamma_2(t, x)$  убывает.

Проверяем, что на участке  $Od$  траектории пара  $(alt, nor)$ , определяющая командную задачу управления, является единственной парой типов поведения, осуществляющей движение на участке в соответствии с правилом 1; это будет максимальный сдвиг в направлении точки  $a^{(2)}$ . На следующем участке  $dc$  будут уже четыре пары “кандидатов”  $(nor, nor)$ ,  $(alt, nor)$ ,  $(nor, alt)$  и  $(alt, alt)$ , однако согласно правилу 2 три последних пары отбрасываются; оставшаяся пара определяет неантагонистическую игру, и движение на этом участке будет порождено  $P(NE)$ -решением игры. Наконец, на последнем участке  $c\xi_2$  единственной парой типов поведения, осуществляющей движение на участке в соответствии с правилом 1, будет пара  $(nor, alt)$ , определяющая командную задачу управления; движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки  $\xi_2$ .

Таким образом, построены индикаторные функции-программы игроков

$$\alpha_1^{(1)}(t) = \{alt, t \in [0, 2.4100]; \quad nor, t \in [2.4100, 5]\}, \quad (5.7)$$

$$\alpha_2^{(1)}(t) = \{nor, t \in [0, 3.2330]; \quad alt, t \in [3.2330, 5]\}. \quad (5.8)$$

Обозначим через  $(U^{(1)}, V^{(1)})$  пару стратегий игроков, порождающую предельное движение  $Oc\xi_2$  при  $t \in [0, 5]$  и согласованную с построенными индикаторными функциями. Дополнительно учтем, что  $\xi_2$  — ближайшая к  $a^{(1)}$  точка множества  $D_2$ , а также то обстоятельство, что в область  $D_1$  не удастся попасть, применяя только нормальный и альтруистический типы поведения. Тогда получаем следующее утверждение.

**У т в е р ж д е н и е 1.** В варианте  $I$  пара действий  $\{(U^{(1)}, \alpha_1^{(1)}(\cdot)), (V^{(1)}, \alpha_2^{(1)}(\cdot))\}$  (5.7), (5.8) доставляет  $P(BT)$ -решение.

Переходим к варианту  $II$ , в котором помимо предположения об альтруизме игроков дополнительно предполагается, что игроки могут использовать агрессивный тип поведения. Построим  $BT$ -решение, приводящее в точку  $\xi_1 \in D_1$ .

Найдем точку  $m$ , равноудаленную от точки  $a^{(1)}$  как при обходе множества  $S_1$  по часовой стрелке, так и при обходе  $S_1$  против часовой стрелки. Найдем также точку  $n$ , равноудаленную

от точки  $a^{(2)}$  как при обходе множества  $S_2$  по часовой стрелке, так и при обходе  $S_2$  против часовой стрелки. Результаты вычислений:  $m = (0, 0.7928)$ ,  $n = (-0.2925, 3.6462)$ .

Рассмотрим траекторию  $Oeg\xi_1$ ; выигрыши игроков на ней составляют  $I_1 = 10.8840$ ,  $I_2 = 6.5359$ , т. е. выигрыши обоих игроков на этой траектории больше, чем на единственной  $P(NE)$ -траектории. Как следует из вышесказанного, траектория  $Oeg\xi_1$  не является нэшевской. Поэтому если удастся построить индикаторные функции-программы игроков, обеспечивающие движение по этой траектории, то тем самым будет построено  $BT$ -решение.

Прежде всего отметим, что при движении по траектории  $Oeg\xi_1$  с максимальной скоростью при  $t \in [0, 5]$  время попадания в точку  $m$  будет  $t = 0.3964$ , в точку  $n$  будет  $t = 1.9135$ , а в точку  $g$  будет  $t = 3.9620$ . Нетрудно проверить, что при таком движении по траектории  $Oeg\xi_1$  на промежутке  $t \in [0, 0.3964]$  обе функции  $\gamma_1(t, x)$  и  $\gamma_2(t, x)$  монотонно убывают; при движении на промежутке  $t \in [0.3964, 1.9135]$  функция  $\gamma_2(t, x)$  продолжает убывать, а функция  $\gamma_1(t, x)$  возрастает; при движении на промежутке  $t \in [1.9135, 3.9620]$  обе функции возрастают; наконец, на оставшемся промежутке  $t \in [3.9620, 5]$  функция  $\gamma_2(t, x)$  продолжает возрастать, а функция  $\gamma_1(t, x)$  убывает.

Проверяем, что на участке  $Om$  траектории пара  $(agg, agg)$ , определяющая неантагонистическую игру, является единственной парой типов поведения, осуществляющей движение на участке в соответствии с правилом 1; это будет движение, порожденное  $P(NE)$ -решением игры, наилучшим для обоих игроков. На следующем участке  $mn$  две пары осуществляют движение в соответствии с правилом 1, а именно  $(nor, alt)$  и  $(agg, alt)$ , однако согласно правилу 2 остается только пара  $(nor, alt)$ ; она определяет командную задачу управления, в которой движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки  $n$ . На участке  $ng$  будут уже четыре пары "кандидатов"  $(nor, nor)$ ,  $(alt, nor)$ ,  $(nor, alt)$  и  $(alt, alt)$ , однако согласно правилу 2 три последние пары отбрасываются; оставшаяся пара определяет неантагонистическую игру и движение на этом участке будет порождено  $P(NE)$ -решением игры. Наконец, на последнем участке  $g\xi_1$  единственной парой типов поведения будет пара  $(alt, nor)$ , определяющая командную задачу управления; движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки  $\xi_2$ .

Таким образом, построены индикаторные функции-программы игроков

$$\alpha_1^{(2)}(t) = \{agg, t \in [0, 0.3964]; \quad nor, t \in [0.3964, 3.9620]; \quad alt, t \in [3.9620, 5]\}, \quad (5.9)$$

$$\alpha_2^{(2)}(t) = \{agg, t \in [0, 0.3964]; \quad alt, t \in [0.3964, 1.9135]; \quad nor, t \in [1.9135, 5]\}. \quad (5.10)$$

Обозначим через  $(U^{(2)}, V^{(2)})$  пару стратегий игроков, порождающую предельное движение  $Oc\xi_1$  при  $t \in [0, 5]$  и согласованную с построенными индикаторными функциями.

**У т в е р ж д е н и е 2.** В варианте II пара действий  $\{(U^{(2)}, \alpha_1^{(2)}(\cdot)), (V^{(2)}, \alpha_2^{(2)}(\cdot))\}$  (5.9), (5.10) доставляет  $P(BT)$ -решение.

**З а м е ч а н и е 2.** Очевидно, что утверждение 1 справедливо и для варианта II.

Следуя схеме доказательств утверждений 1 и 2 (и учитывая также замечание 2), приходим к следующим утверждениям.

**У т в е р ж д е н и е 3.** В варианте I множество  $D_2$  состоит из тех и только тех точек, которые являются концами траекторий, порожденных  $BT$ -решениями игры.

**У т в е р ж д е н и е 4.** В варианте II множества  $D_1$  и  $D_2$  состоят из тех и только тех точек, которые являются концами траекторий, порожденных  $BT$ -решениями игры.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. 230 с.
2. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

3. Клейменов А.Ф. О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 739–746.
4. Kleimenov A.F., Kryazhimskii A.V. Normal behavior, altruism and aggression in cooperative game dynamics. Laxenburg: IIASA, 1998. Interim Report IR-98-076. 47 p.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. Красовский Н.Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 p.
7. Клейменов А.Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
8. Kleimenov A.F. An approach to building dynamics for repeated bimatrix  $2 \times 2$  games involving various behavior types // Dynamic and Control / ed. G. Leitman. London: Gordon and Breach, 1998. P. 195–204.
9. Клейменов А.Ф. Альтруистическое поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, вып. 4. С. 40–55.
10. Клейменов А.Ф. Агрессивное поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8, вып. 4. С. 63–78.

Клейменов Анатолий Федорович

Поступила 10.09.2017

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики УрО РАН им. Н. Н. Красовского,

г. Екатеринбург

e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

#### REFERENCES

1. Owen G. *Game theory*. NY: Saunders (W.B.) Co., Ltd., 1968, 228 p. ISBN: 0721670288. Translated to Russian under the title *Teoriya igr*, Moscow, Mir Publ., 1971, 230 p.
2. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teoriya igr* [Game theory]. Saint Petersburg, BKhV-Peterburg Publ., 2012, 432 p. ISBN: 978-5-9775-0484-3.
3. Kleimenov A.F. On solutions in a nonantagonistic positional differential game. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 717–723. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00094-4.
4. Kleimenov, A.F., Kryazhimskii A.V. *Normal behavior, altruism and aggression in cooperative game dynamics*. Interim Report IR-98-076, Laxenburg: IIASA, 1998, 47 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. This book is substantially revised version of the monograph N.N. Krasovskii, A.I. Subbotin, *Pozitsionnye differentsial'nye igrы*, Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p.
6. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi. Zadacha o minimume garantirovannogo rezul'tata*. [Control of a dynamic system. The problem of minimum guaranteed result]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 516 p.
7. Kleimenov, A.F. *Nonantagonistic positional differential games* [Neantagonisticheskie pozitsionnye differentsial'nye igrы]. Ekaterinburg, Nauka Publ., 1993, 185 p. ISBN: 5-7691-0353-1.
8. Kleimenov A.F. An approach to building dynamics for repeated bimatrix  $2 \times 2$  games involving various behavior types. In: *Dynamics and Control*, ed. G. Leitman, London, Gordon and Breach, 1999, pp. 195–204. ISBN: 90-5699-172-8.
9. Kleimenov A.F. Altruistic behavior in a nonantagonistic positional differential game. *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 4, pp. 762–769. doi: 10.1134/S0005117917040178.
10. Kleimenov A.F. Aggressive behavior in a non-antagonistic positional differential game. *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 63–78 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on September 10, 2017.

Anatolii Fedorovich Kleimenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: kleimenov@imm.uran.ru.

УДК 512.54 +519.17

## СИММЕТРИЧЕСКИЕ 2-РАСШИРЕНИЯ 2-МЕРНОЙ РЕШЕТКИ. II

Е. А. Коновальчик<sup>1</sup>, К. В. Костусов

Исследование симметрических  $q$ -расширений  $d$ -мерной кубической решетки  $\Lambda^d$  представляет интерес для теории групп и теории графов. Для небольших  $d \geq 1$  и  $q > 1$  (особенно для  $q = 2$ ) исследование симметрических  $q$ -расширений решетки  $\Lambda^d$  актуально также в связи с молекулярной кристаллографией и некоторыми физическими теориями. Ранее в работе В.И. Трофимова доказана конечность числа симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^d$  для произвольного целого положительного  $d$ . Настоящая статья представляет собой вторую и завершающую часть работы, посвященной описанию всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  (мы доказываем, что имеются 162 такие реализации). В опубликованной ранее первой части нашей работы были перечислены все, с точностью до эквивалентности, реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$ , такие что лишь единичный их автоморфизм оставляет на месте все блоки системы импримитивности (87 реализаций). В настоящей, второй части, работы перечисляются остальные реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$ .

Ключевые слова: симметрическое расширение графа,  $d$ -мерная решетка.

**E. A. Konoval'chik, K. V. Kostousov. Symmetrical 2-extensions of the 2-dimensional grid. II.**

The investigation of symmetrical  $q$ -extensions of a  $d$ -dimensional cubic grid  $\Lambda^d$  is of interest both for group theory and for graph theory. For small  $d \geq 1$  and  $q > 1$  (especially for  $q = 2$ ), symmetrical  $q$ -extensions of  $\Lambda^d$  are of interest for molecular crystallography and some physical theories. Earlier V. Trofimov proved that there are only finitely many symmetrical 2-extensions of  $\Lambda^d$  for any positive integer  $d$ . This paper is the second and concluding part of our work devoted to the description of all, up to equivalence, realizations of symmetrical 2-extensions of  $\Lambda^2$  (we show that there are 162 such realizations). In the first part of our work, which was published earlier, we found all, up to equivalence, realizations of symmetrical 2-extensions of  $\Lambda^2$  such that only the trivial automorphism fixes all blocks of the imprimitivity system (87 realizations). In the present paper, we find the remaining realizations of symmetrical 2-extensions of  $\Lambda^2$ .

Keywords: symmetrical extension of a graph,  $d$ -dimensional grid.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-192-211

## 1. Введение

Под  $d$ -мерной решеткой  $\Lambda^d$  для целого положительного числа  $d$  далее понимается  $d$ -мерная кубическая решетка, т. е. граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы  $(a_1, \dots, a_d)$  из  $d$  целых чисел, причем две вершины  $(a'_1, \dots, a'_d)$  и  $(a''_1, \dots, a''_d)$  смежны тогда и только тогда, когда  $|a'_1 - a''_1| + \dots + |a'_d - a''_d| = 1$ . Следуя [1], назовем связный граф  $\Gamma$  симметрическим расширением решетки  $\Lambda^d$  посредством графа  $\Delta$ , если существуют такая вершинно-транзитивная группа  $G$  автоморфизмов графа  $\Gamma$  и такая система импримитивности  $\sigma$  группы  $G$  на множестве  $V(\Gamma)$  вершин графа  $\Gamma$ , что имеется изоморфизм  $\varphi$  факторграфа  $\Gamma/\sigma$  на решетку  $\Lambda^d$  и блоки  $\sigma$  порождают в  $\Gamma$  подграфы, изоморфные  $\Delta$ . Для целого положительного числа  $q$  граф  $\Gamma$  называется симметрическим  $q$ -расширением решетки  $\Lambda^d$ , если  $\Gamma$  является симметрическим расширением решетки  $\Lambda^d$  посредством некоторого графа  $\Delta$ , такого что  $|V(\Delta)| = q$ . Четверка  $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  с указанными компонентами называется реализацией симметрического расширения  $\Gamma$  решетки  $\Lambda^d$  посредством графа  $\Delta$  или, соответственно,  $q$ -расширения  $\Gamma$  решетки  $\Lambda^d$ , а  $\Gamma$  мы будем называть графом этой реализации. Наряду с чисто

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке молодежного гранта ИММ УрО РАН за 2013 г.



математическим интересом симметрические  $q$ -расширения решетки  $\Lambda^d$  для небольших  $d \geq 1$  и  $q > 1$  представляют интерес для молекулярной кристаллографии и некоторых физических теорий (см. [2]). При этом для кристаллографии из всех симметрических  $q$ -расширений решеток  $\Lambda^d$  наибольший интерес представляют, по-видимому, симметрические 2-расширения. Они естественным образом возникают при рассмотрении “молекулярных” кристаллов, “молекулы” которых состоят из двух “атомов” или, более общо, имеют выделенную ось.

Естественно рассматривать реализации симметрических  $q$ -расширений решетки  $\Lambda^d$  ( $q$  и  $d$  — целые положительные числа) с точностью до определяемой следующим образом эквивалентности (см. [3]). Назовем две реализации  $R_1 = (\Gamma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$  и  $R_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$  эквивалентными и будем писать  $R_1 \sim R_2$ , если найдется изоморфизм графа  $\Gamma_1$  на граф  $\Gamma_2$ , переводящий  $\sigma_1$  в  $\sigma_2$ . Реализацию  $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  симметрического  $q$ -расширения решетки  $\Lambda^d$  назовем максимальной, если  $G = \text{Aut}_\sigma(\Gamma)$  — группа всех автоморфизмов графа  $\Gamma$ , сохраняющих разбиение  $\sigma$ . Ясно, что каждая реализация симметрического  $q$ -расширения решетки  $\Lambda^d$  имеет эквивалентную ей максимальную реализацию.

В [3, теорема 2] В.И. Трофимовым доказана конечность числа реализаций симметрических 2-расширений  $d$ -мерной решетки, с точностью до эквивалентности, для произвольного целого положительного числа  $d$ , а также предложен алгоритм для построения всех, с точностью до эквивалентности, таких реализаций. Данная работа посвящена описанию всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$ . В первой части работы (см. [5]) были перечислены все, с точностью до эквивалентности, реализации  $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$ , такие что лишь единичный автоморфизм графа  $\Gamma$  оставляет на месте все блоки системы импримитивности  $\sigma$ . Во второй части работы перечислены остальные реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$ . По предложению 4 из [3] такое разбиение всех реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  на два класса совпадает с определенным следующим образом разбиением на классы I и II соответственно.

Для произвольной реализации  $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  и произвольной пары смежных вершин  $B_1, B_2$  графа  $\Gamma/\sigma$  множество ребер графа  $\Gamma$ , один конец которых лежит в  $B_1$ , а другой — в  $B_2$ , будем называть *связью*. Возможны следующие типы связей: *тип 1* — четыре ребра; *тип 2* — два ребра, не имеющие общих концов; *тип 3* — одно ребро; *тип 3̄* — три ребра; *тип 4* — два ребра, имеющие общий конец. Реализациями *класса I* назовем реализации, которые обязательно содержат связи типов, отличных от 1 и 2. Реализациями *класса II* назовем реализации, связи в которых исчерпываются связями типов 1 и 2.

Как в [5], реализацию симметрического расширения решетки  $\Lambda^2$  посредством графа  $K_2$  (полного графа на двух вершинах) будем называть *насыщенной* реализацией симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$ . Соответственно реализацию симметрического расширения решетки  $\Lambda^2$  посредством графа, дополнительного к  $K_2$ , будем называть *ненасыщенной* реализацией симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$ .

В [5] нами показано, что, с точностью до эквивалентности, существует в точности 87 реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса I, из которых 49 — насыщенные и 38 — ненасыщенные (см. теорему 1 и следствие 1 из [5]). Среди графов насыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса I имеется в точности 46 попарно неизоморфных; среди графов ненасыщенных реализаций класса I имеется в точности 36 попарно неизоморфных; а среди всех графов реализаций класса I имеется в точности 78 попарно неизоморфных (см. следствие 2 и следствие 3 из [5]). В части II работы нами показано, что, с точностью до эквивалентности, существует в точности 75 реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II, из которых 38 насыщенные и 37 ненасыщенные (см. теорему 1 и следствие 1). Графы всех этих 75 реализаций являются попарно неизоморфными (см. следствие 2). Очевидно, что реализация симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  класса I не может быть эквивалентна реализации класса II. Однако существует единственная, с точностью до эквивалентности, реализация класса I, граф которой изоморфен графу реализации класса II (см. следствие 2). Таким образом, всего среди графов реализаций симметрических

2-расширений решетки  $\Lambda^2$  имеется в точности 152 попарно неизоморфных графов. Среди них в точности 84 графа изоморфны графам насыщенных реализаций и 73 графа изоморфны графам ненасыщенных реализаций.

В [5] для каждой, с точностью до эквивалентности, реализации симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  класса I была найдена эквивалентная ей кристаллографическая реализация. В части II работы мы не занимаемся построением кристаллографических реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II, поскольку не для всех таких реализаций существуют эквивалентные им кристаллографические реализации. Нетрудно показать, например, что для реализации  $R_{\Sigma_1, \gamma_2}$  (вторая реализация в табл. 3) не существует эквивалентной ей кристаллографической реализации.

Статья структурирована следующим образом. В разд. 3 приведено описание реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II (теорема 1 и следствие 1). Оно получено посредством комбинаторных соображений в разд. 4 и независимо с помощью алгоритма из [3], реализованного в пакете GAP, в разд. 5. В разд. 2 содержатся предварительные результаты.

## 2. Предварительные результаты

В [5] приведена система представителей  $\mathbf{H} = \{H_1, \dots, H_{35}\}$  всех классов сопряженных вершинно-транзитивных подгрупп группы  $\text{Aut}(\Lambda^2)$ . Для реализации  $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  произвольный элемент  $g$  группы  $G$  индуцирует подстановку на  $\sigma$ , которая обозначается через  $g^\sigma$ , и соответственно группа  $G$  индуцирует на  $\sigma$  группу подстановок, которая обозначается через  $G^\sigma$  и является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа  $\Gamma/\sigma$ . Группа  $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$  сопряжена в  $\text{Aut}(\Lambda^2)$  с некоторой группой  $H \in \mathbf{H}$ . В описанной ситуации будем говорить, что группа  $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$  *соответствует* реализации  $R$ .

Каждой насыщенной реализации  $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  класса II следующим образом сопоставим подграф  $\Sigma = \Sigma(R)$  решетки  $\Lambda^2$ , который назовем *подграфом связей типа 2 реализации R*. Множество вершин графа  $\Sigma$  совпадает с  $V(\Lambda^2)$ , и две вершины  $v_1, v_2 \in V(\Sigma)$  смежны в графе  $\Sigma$  тогда и только тогда, когда в реализации  $R$  между блоками  $\varphi^{-1}(v_1)$  и  $\varphi^{-1}(v_2)$  имеется связь типа 2. Ясно, что при этом граф  $\Sigma$  является допустимым относительно группы  $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ , сопряженной в  $\text{Aut}(\Lambda^2)$  с некоторой группой  $H \in \mathbf{H}$ .

Подграф  $\Sigma$  решетки  $\Lambda^2$  будем называть *допустимым*, если  $V(\Sigma) = V(\Lambda^2)$  и он является допустимым относительно некоторой вершинно-транзитивной подгруппы группы  $\text{Aut}(\Lambda^2)$ . Два допустимых подграфа  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  решетки  $\Lambda^2$  назовем *эквивалентными*, если один из них переходит в другой под действием некоторого автоморфизма из  $\text{Aut}(\Lambda^2)$ . Очевидно, что подграфы связей типа 2 эквивалентных насыщенных реализаций класса II сами являются эквивалентными.

Непосредственно проверяется, что допустимые подграфы решетки  $\Lambda^2$ , с точностью до эквивалентности, исчерпываются графами  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{18}$ , естественным образом изображенными в табл. 1. Под изображением подграфа  $\Sigma_i$  приводится список групп  $H \in \mathbf{H}$ , таких что  $\Sigma_i$  является допустимым относительно подгруппы, сопряженной с  $H$  в  $\text{Aut}(\Lambda^2)$ . Переменные  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$ , имеющиеся на изображениях, нам понадобятся ниже для нахождения реализаций с такими подграфами связей типа 2.

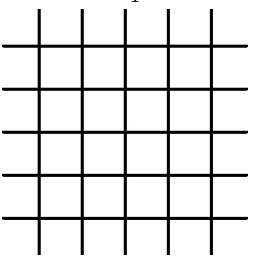
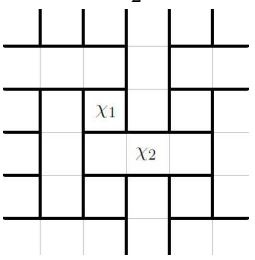
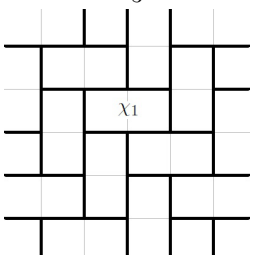
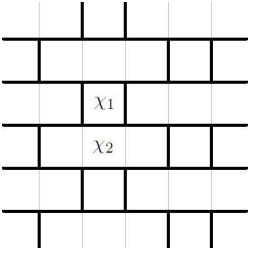
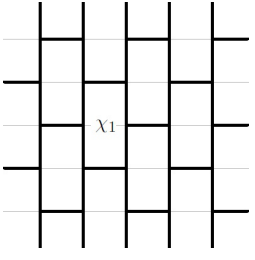
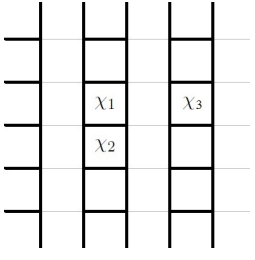
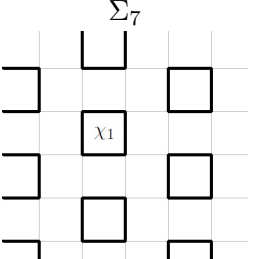
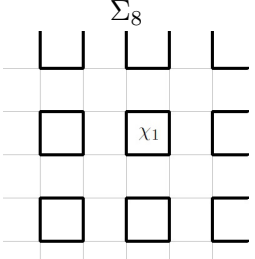
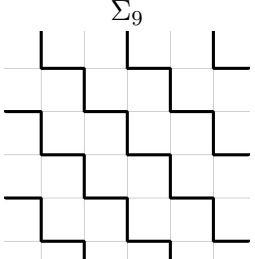
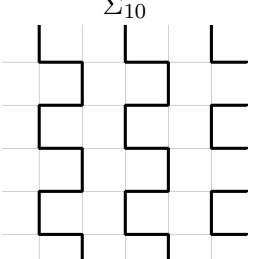
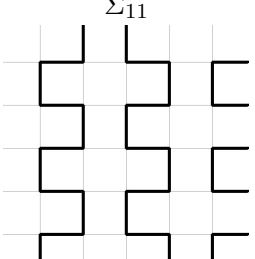
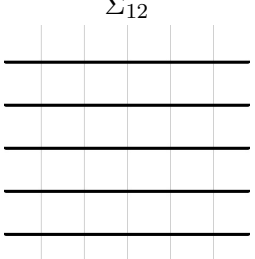
Для произвольных целых чисел  $i, j$  подграф решетки  $\Lambda^2$ , порожденный множеством вершин  $\{(i, j), (i+1, j), (i+1, j+1), (i, j+1)\}$ , будем называть *клеткой* решетки  $\Lambda^2$ .

Множество клеток решетки  $\Lambda^2$  будем называть *допустимым*, если оно является допустимым относительно некоторой вершинно-транзитивной подгруппы группы  $\text{Aut}(\Lambda^2)$ . Два допустимых множества клеток назовем *эквивалентными*, если одно из них переходит в другое под действием некоторого автоморфизма из  $\text{Aut}(\Lambda^2)$ . Непосредственно проверяется, что в табл. 2 приводятся все, с точностью до эквивалентности, допустимые множества клеток решетки  $\Lambda^2$  (клетки, входящие в множество, помечены черным цветом). Под каждым изображением допу-

стимого множества клеток приводится список групп  $H \in \mathbf{H}$ , таких что это множество клеток является допустимым относительно подгруппы, сопряженной с  $H$  в  $\text{Aut}(\Lambda^2)$ .

Т а б л и ц а 1

Допустимые подграфы решетки  $\Lambda^2$

$\Sigma_1$  $H_1, \dots, H_{35}$	$\Sigma_2$  $H_{24}$	$\Sigma_3$  $H_9$
$\Sigma_4$  $H_{15}$	$\Sigma_5$  $H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}$	$\Sigma_6$  $H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16},$ $H_{17}, H_{25}, H_{26}$
$\Sigma_7$  $H_{15}$	$\Sigma_8$  $H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$	$\Sigma_9$  $H_7, H_8, H_9, H_{30}$
$\Sigma_{10}$  $H_{14}$	$\Sigma_{11}$  $H_{15}$	$\Sigma_{12}$  $H_3, H_5, H_6, H_8, H_{10},$ $H_{11}, H_{12}, H_{13}, H_{14}, H_{15},$ $H_{16}, H_{17}, H_{20}, H_{21}, H_{22},$ $H_{25}, H_{26}, H_{34}, H_{35}$

Т а б л и ц а 1 (окончание)

Допустимые подграфы решетки  $\Lambda^2$

$\Sigma_{13}$  $H_9$	$\Sigma_{14}$  $H_{24}$	$\Sigma_{15}$  $H_{15}$
$\Sigma_{16}$  $H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}$	$\Sigma_{17}$  $H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{25}, H_{26}$	$\Sigma_{18}$  $H_1, \dots, H_{35}$

Т а б л и ц а 2

Допустимые множества клеток решетки  $\Lambda^2$

$\gamma_1$  $H_1, \dots, H_{35}$	$\gamma_2$  $H_1, \dots, H_{35}$	$\gamma_3$  $H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{25}, H_{26}$	$\gamma_4$  $H_{15}$
$\gamma_5$  $H_{15}$	$\gamma_6$  $H_{19}, H_{20}, H_{22}, H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{31}, H_{32}, H_{33}$	$\gamma_7$  $H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$	$\gamma_8$  $H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}$

### 3. Основной результат

По [3, предложение 5] задача описания всех, с точностью до эквивалентности, симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  сводится к задаче описания всех насыщенных симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$ . А именно, каждую ненасыщенную реализацию симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  можно получить из некоторой насыщенной реализации путем удаления в ее графе всех ребер, содержащихся внутри блоков. В результате такой операции для произвольной насыщенной реализации либо ее граф остается связным, и мы получаем ненасыщенную реализацию, либо же ее граф становится несвязным. При этом получающиеся ненасыщенные реализации эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны исходные насыщенные реализации.

**Теорема.** *В табл. 3 (см. ниже) приведены все, с точностью до эквивалентности, насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II (все приведенные в табл. 3 реализации попарно неэквивалентны).*

Полное изображение каждой из приведенных в табл. 3 реализаций получается путем периодического продолжения (с периодом 4 по обоим направлениям) приведенного фрагмента. На фрагментах изображений пары близких вершин образуют блоки из  $\sigma$ , центральный блок соответствует вершине  $(0, 0)$  решетки  $\Lambda^2$ , блок справа от него соответствует вершине  $(1, 0)$ , блок сверху — вершине  $(0, 1)$ . В качестве группы автоморфизмов берется группа всех автоморфизмов изображенного графа, сохраняющих блоки. Под изображением перечислены группы из  $\mathbf{H}$ , сопряженные в  $\text{Aut}(\Lambda^2)$  с гомоморфными образами (возникающими при естественном отображении изображенного графа на решетку  $\Lambda^2$ ) всех вершинно-транзитивных подгрупп этой группы. Реализации в таблице 3 обозначаются через  $R_{\Sigma, \gamma}$  или  $R_{\Sigma(\dots)}$ , где  $\Sigma$  — допустимый подграф решетки  $\Lambda^2$  из табл. 1, являющийся подграфом связей типа 2 данной реализации,  $\gamma$  (если есть) — допустимое множество клеток из табл. 2, которому соответствует данная реализация (в смысле леммы 3 и абзаца перед ней в разд. 4). Аргументы в скобках после  $\Sigma$  (если есть) означают типы расширений циклов графа  $\Sigma$  (см. замечание 2 и абзац перед ним в разд. 4).

Теорема доказывается посредством комбинаторных соображений в разд. 4 и, независимо, с помощью алгоритма из [3], реализованного в пакете GAP, в разд. 5.

**Следствие 1.** *С точностью до эквивалентности существует 38 насыщенных и 37 ненасыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II.*

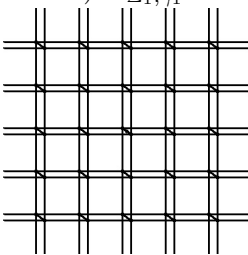
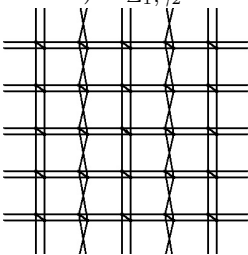
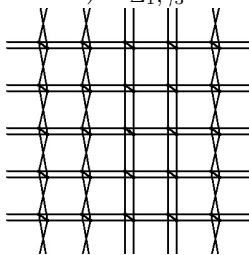
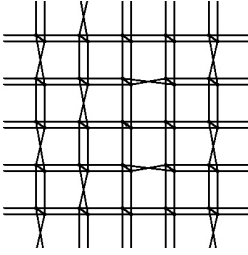
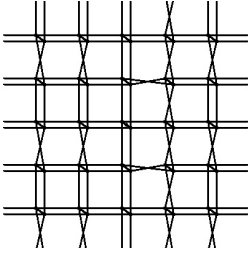
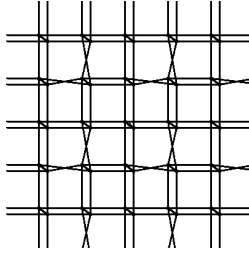
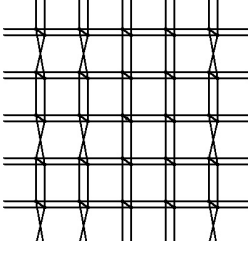
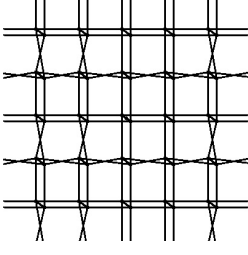
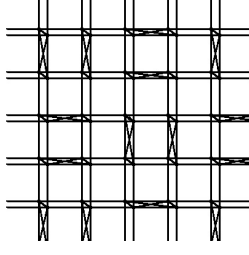
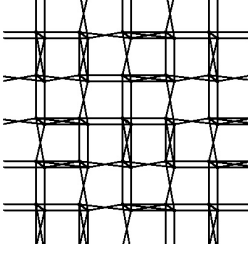
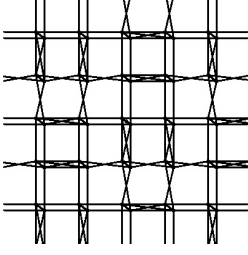
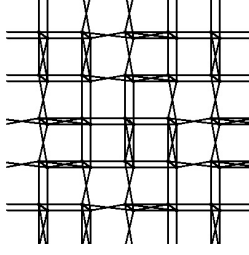
**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Каждой насыщенной реализации симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda_2$  из табл. 3 сопоставим реализацию, в графе которой внутри каждого блока убрано ребро (см. начало настоящего раздела). При этом только граф первой реализации потеряет связность.  $\square$

**Следствие 2.** *Графы всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II являются попарно неизоморфными (75 графов). Среди них есть единственный граф — граф реализации 1)  $R_{\Sigma_1, \gamma_1}$  из табл. 3 — изоморфный графу реализации симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  класса I — графу  $\bar{\Gamma}_{\beta_1(\bar{3}, 2), H_3}$ , см. [5, рис. 1b].*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Изоморфизм между двумя указанными графами легко строится непосредственно. Для доказательства остальных утверждений следствия 2 при помощи GAP для каждого из 75 графов реализаций класса II из следствия 1, а также для каждого из 78 графов реализаций класса I (см. следствие 2 и следствие 3 из [5]) был построен подграф, порожденный множеством вершин, удаленных от некоторой произвольно выбранной вершины на расстояние  $\leq 4$ . Среди полученных 153 конечных графов изоморфными оказались только два, соответствующие указанным в формулировке следствия графам.  $\square$

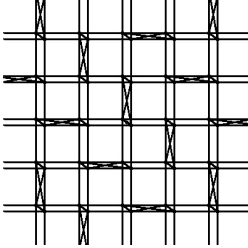
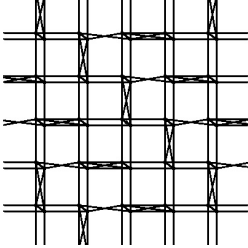
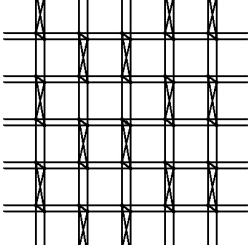
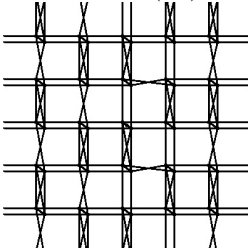
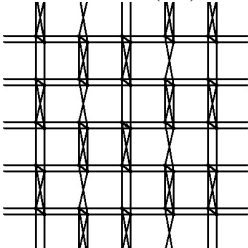
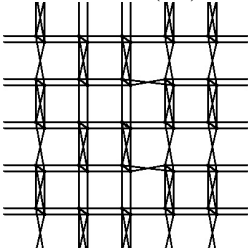
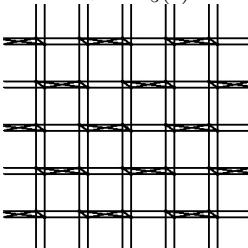
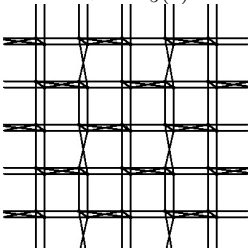
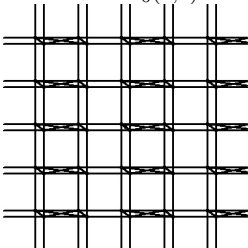
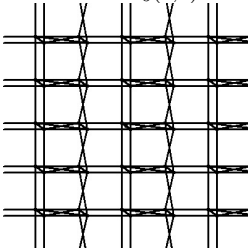
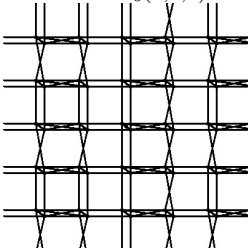
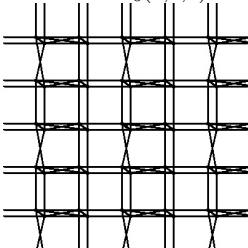
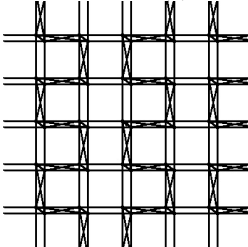
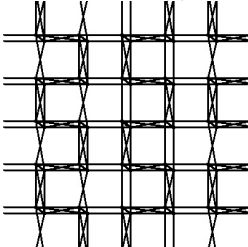
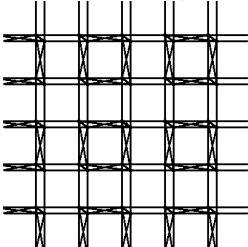
Т а б л и ц а 3

Насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II

<p>1) <math>R_{\Sigma_1, \gamma_1}</math></p>  <p><math>H_1, \dots, H_{35}</math></p>	<p>2) <math>R_{\Sigma_1, \gamma_2}</math></p>  <p><math>H_1, \dots, H_{35}</math></p>	<p>3) <math>R_{\Sigma_1, \gamma_3}</math></p>  <p><math>H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16},</math> <math>H_{17}, H_{25}, H_{26}</math></p>
<p>4) <math>R_{\Sigma_1, \gamma_4}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>5) <math>R_{\Sigma_1, \gamma_5}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>6) <math>R_{\Sigma_1, \gamma_6}</math></p>  <p><math>H_{19}, H_{20}, H_{22}, H_{23},</math> <math>H_{24}, H_{25}, H_{31}, H_{32}, H_{33}</math></p>
<p>7) <math>R_{\Sigma_1, \gamma_7}</math></p>  <p><math>H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}</math></p>	<p>8) <math>R_{\Sigma_1, \gamma_8}</math></p>  <p><math>H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}</math></p>	<p>9) <math>R_{\Sigma_2(0,0)}</math></p>  <p><math>H_{24}</math></p>
<p>10) <math>R_{\Sigma_2(1,0)}</math></p>  <p><math>H_{24}</math></p>	<p>11) <math>R_{\Sigma_2(0,1)}</math></p>  <p><math>H_{24}</math></p>	<p>12) <math>R_{\Sigma_2(1,1)}</math></p>  <p><math>H_{24}</math></p>

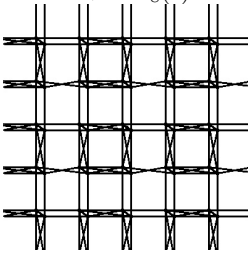
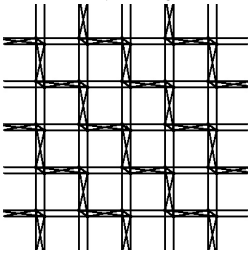
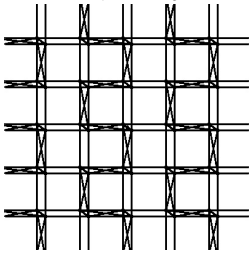
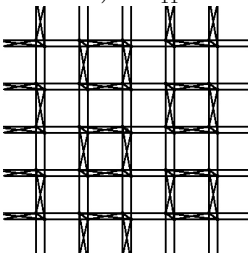
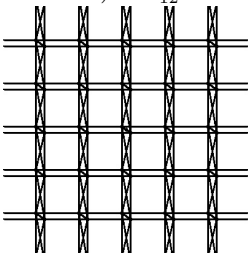
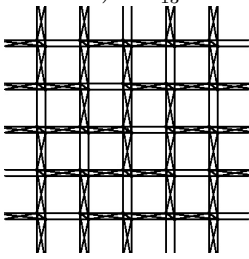
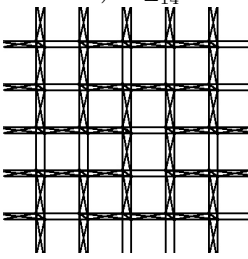
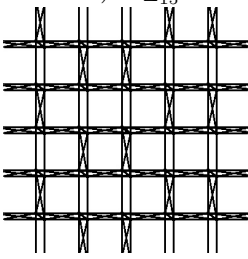
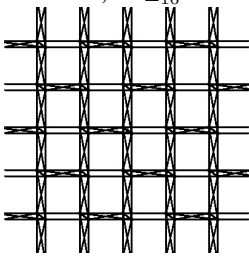
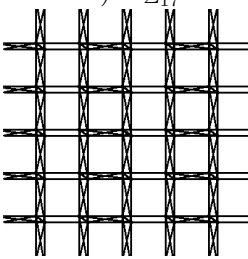
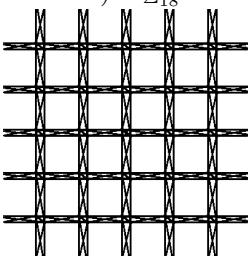
Т а б л и ц а 3 (продолжение)

Насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II

<p>13) <math>R_{\Sigma_3(0)}</math></p>  <p><math>H_9</math></p>	<p>14) <math>R_{\Sigma_3(1)}</math></p>  <p><math>H_9</math></p>	<p>15) <math>R_{\Sigma_4(0,0)}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>
<p>16) <math>R_{\Sigma_4(1,0)}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>17) <math>R_{\Sigma_4(1,1)}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>18) <math>R_{\Sigma_4(0,1)}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>
<p>19) <math>R_{\Sigma_5(0)}</math></p>  <p><math>H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}</math></p>	<p>20) <math>R_{\Sigma_5(1)}</math></p>  <p><math>H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}</math></p>	<p>21) <math>R_{\Sigma_6(0,0)}</math></p>  <p><math>H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{25}, H_{26}</math></p>
<p>22) <math>R_{\Sigma_6(1,1)}</math></p>  <p><math>H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{25}, H_{26}</math></p>	<p>23) <math>R_{\Sigma_6(0,1,1)}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>24) <math>R_{\Sigma_6(0,1,0)}</math></p>  <p><math>H_{25}</math></p>
<p>25) <math>R_{\Sigma_7(0)}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>26) <math>R_{\Sigma_7(1)}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>27) <math>R_{\Sigma_8(0)}</math></p>  <p><math>H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}</math></p>

Т а б л и ц а 3 (продолжение)

Насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II

<p>28) <math>R_{\Sigma_8(1)}</math></p>  <p><math>H_{23}, H_{24}, H_{25}, H_{33}</math></p>	<p>29) <math>R_{\Sigma_9}</math></p>  <p><math>H_7, H_8, H_9, H_{30}</math></p>	<p>30) <math>R_{\Sigma_{10}}</math></p>  <p><math>H_{14}</math></p>
<p>31) <math>R_{\Sigma_{11}}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>32) <math>R_{\Sigma_{12}}</math></p>  <p><math>H_3, H_5, H_6, H_8, H_{10},</math> <math>H_{11}, H_{12}, H_{13}, H_{14}, H_{15},</math> <math>H_{16}, H_{17}, H_{20}, H_{21}, H_{22},</math> <math>H_{25}, H_{26}, H_{34}, H_{35}</math></p>	<p>33) <math>R_{\Sigma_{13}}</math></p>  <p><math>H_9</math></p>
<p>34) <math>R_{\Sigma_{14}}</math></p>  <p><math>H_{24}</math></p>	<p>35) <math>R_{\Sigma_{15}}</math></p>  <p><math>H_{15}</math></p>	<p>36) <math>R_{\Sigma_{16}}</math></p>  <p><math>H_6, H_8, H_{12}, H_{14}, H_{22}</math></p>
<p>37) <math>R_{\Sigma_{17}}</math></p>  <p><math>H_{13}, H_{14}, H_{15}, H_{16},</math> <math>H_{17}, H_{25}, H_{26}</math></p>	<p>38) <math>R_{\Sigma_{18}}</math></p>  <p><math>H_1, \dots, H_{35}</math></p>	

## 4. Комбинаторное доказательство теоремы

Всюду в этом разделе под реализацией  $R$  понимается насыщенная реализация симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  класса II.

Пусть имеется некоторая реализация  $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ , и  $\Sigma$  — граф ее связей типа 2. Без ограничения общности мы будем считать, что  $\Sigma$  совпадает с одним из графов в таблице 1.



Цикл графа  $\Sigma$  будем называть *элементарным*, если на изображении графа  $\Sigma$  в таблице 1 он ограничивает один из прямоугольников, на которые разбивается плоскость. Цикл  $y_0, y_1, \dots, y_l = y_0$  графа  $\Gamma$ , такой что  $y_i^\sigma \neq y_{i+1}^\sigma$  для каждого  $i = 0, \dots, l-1$  и все  $y_1, \dots, y_l$  различны, будем называть *расширением элементарного цикла*  $x_0, x_1, \dots, x_m = x_0$  графа  $\Sigma$  (относительно данной реализации  $R$ ), если  $\varphi(y_i^\sigma) = x_{i+k \pmod{m}}$  для некоторого целого  $k$  и любого  $i = 0, \dots, l-1$ . Справедливо следующее очевидное утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $R$  — реализация,  $\Sigma$  — граф ее связей типа 2 и  $x_0, x_1, \dots, x_m = x_0$  — элементарный цикл графа  $\Sigma$ . Тогда этот цикл либо имеет единственное с точностью до циклических перестановок и обращения порядка входящих в него вершин расширение, причем это расширение имеет длину  $2m$ , либо имеет ровно два с точностью до циклических перестановок и обращения порядка входящих в них вершин расширения, причем оба они имеют длину  $m$  и не имеют общих вершин.

Следующее утверждение является ключевым для доказательства теоремы.

**Лемма 2.** Пусть  $R_1, R_2$  — насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II, такие что  $\Sigma(R_1) = \Sigma(R_2) = \Sigma$ , и для каждого элементарного цикла графа  $\Sigma$  в  $R_1$  и  $R_2$  реализуется одна и та же возможность из леммы 1 (для разных циклов, возможно, разная). Тогда  $R_1 \cong R_2$ .

**Доказательство.** Пусть  $R_1 = (\Gamma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$  и  $R_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$ .

Если  $\Sigma \in \{\Sigma_9, \dots, \Sigma_{18}\}$  то эквивалентность  $R_1$  и  $R_2$  очевидна.

Предположим поэтому, что  $\Sigma \in \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_8\}$ . Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_m = x_0$  — некоторый элементарный цикл графа  $\Sigma$ , и пусть  $y_0, y_1, \dots, y_l = y_0$  — его расширение относительно реализации  $R_1$ , а  $y'_0, y'_1, \dots, y'_l = y'_0$  — его расширение относительно реализации  $R_2$ . По условию имеем  $l' = l$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\varphi_1(y_0^{\sigma_1}) = \varphi_2((y'_0)^{\sigma_2}) = x_0$ ,  $\varphi_1(y_1^{\sigma_1}) = \varphi_2((y'_1)^{\sigma_2}) = x_1$ . Начнем строить изоморфизм  $\psi$  между графами реализаций  $R_1$  и  $R_2$ , полагая  $\psi(y_i) = y'_i$  для  $i = 0, \dots, l-1$ . Если  $l = m$ , то аналогичное соответствие устанавливаем между оставшимися расширениями элементарного цикла  $x_0, x_1, \dots, x_m$  в  $R_1$  и  $R_2$ .

Если  $\Sigma \notin \{\Sigma_7, \Sigma_8\}$ , то пусть  $z_0, z_1, \dots, z_n = z_0$  — еще один элементарный цикл графа  $\Sigma$ , имеющий общие ребра с циклом  $x_0, x_1, \dots, x_m$ . Пусть, без ограничения общности,  $z_0, z_1, \dots, z_k \in \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$  и  $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n \notin \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ . Пусть  $w_0, w_1, \dots, w_p = w_0$  — расширение этого цикла относительно реализации  $R_1$ , а  $w'_0, w'_1, \dots, w'_{p'} = w'_0$  — его расширение относительно реализации  $R_2$ . По условию имеем  $p' = p$ . Без ограничения общности будем считать, что  $\varphi_1(w_0^{\sigma_1}) = \varphi_2((w'_0)^{\sigma_2}) = z_0$ ,  $\varphi_1(w_1^{\sigma_1}) = \varphi_2((w'_1)^{\sigma_2}) = z_1$ . Циклически сдвигая на  $m$ , если нужно, обозначения вершин цикла  $w'_0, w'_1, \dots, w'_{p'}$ , будем считать, что  $\psi(w_0) = w'_0$  (и, следовательно,  $\psi(w_i) = w'_i$  для  $i = 1, \dots, k$ ). Продолжим строить изоморфизм  $\psi$ , полагая  $\psi(w_i) = w'_i$  для  $i = k+1, \dots, p-1$ . Если  $n = p$ , то аналогичное соответствие устанавливаем между вторыми расширениями элементарного цикла  $z_0, z_1, \dots, z_n$  в  $R_1$  и  $R_2$ . Продолжим подобным образом строить изоморфизм  $\psi$ , выбирая последующие элементарные циклы графа  $\Sigma$  так, чтобы выполнялись следующие два условия. Во-первых, чтобы пересечение множества вершин каждого последующего цикла с объединением множеств вершин предыдущих циклов являлось собственным подмножеством вершин некоторого подпути этого цикла. Во-вторых, чтобы в объединение вершин выбираемых циклов рано или поздно вошла каждая вершина из компоненты связности графа  $\Sigma$ , содержащей вершину  $x_0$ . Легко видеть, что эти два условия могут быть выполнены.  $\square$

Таким образом мы построим изоморфизм между подграфами графов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , являющимися симметрическими 2-расширениями компоненты связности графа  $\Sigma$ , содержащей вершину  $x_0$ . Повторяя, если нужно (т. е. в случае  $\Sigma \in \{\Sigma_6, \Sigma_7, \Sigma_8\}$ ), подобное построение для каждой компоненты связности графа  $\Sigma$ , получим искомым изоморфизм  $\psi$  между графами  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

Будем говорить, что реализация  $R$  *соответствует* допустимому подмножеству клеток  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, 8$ ), если множество клеток, содержащих элементарные циклы длины 4, для которых

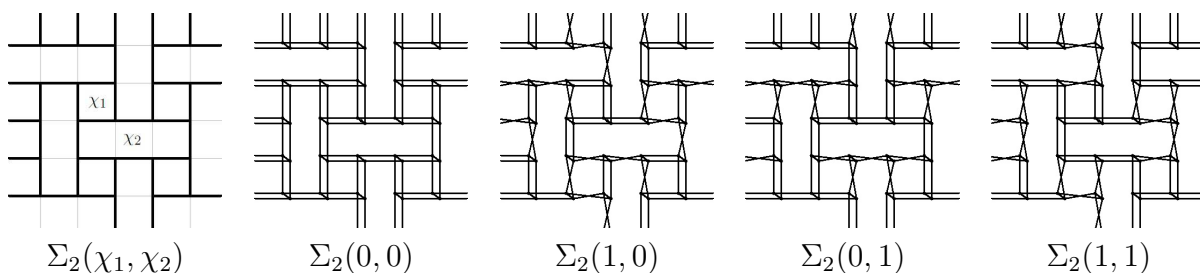


Рис. 1

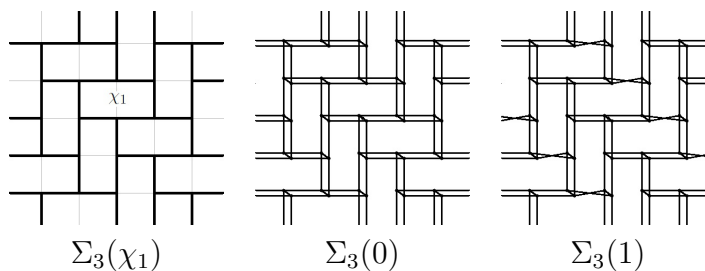


Рис. 2

реализуется первая возможность из леммы 1, переводится в  $\gamma_i$  некоторым автоморфизмом решетки  $\Lambda^2$ . В табл. 3 реализации, у которых подграф связей типа 2 совпадает с  $\Sigma_1$  и которые соответствуют допустимому подмножеству клеток  $\gamma$  решетки  $\Lambda^2$ , обозначаются через  $R_{\Sigma_1, \gamma}$ . Из леммы 2 вытекает следующее утверждение.

**Лемма 3.** Пусть  $R$  — реализация и  $\Sigma(R) = \Sigma_1$ . Тогда

- (1) если каждое расширение каждого элементарного цикла графа  $\Sigma_1$  является циклом длины 4, то  $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_1}$ ;
- (2) если каждое расширение каждого элементарного цикла графа  $\Sigma_1$  является циклом длины 8, то  $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_2}$ ;
- (3) если не выполняются условия первых двух случаев, то либо  $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_3}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_4}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_5}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_6}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_7}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_1, \gamma_8}$ .

В графах  $\Sigma_2, \dots, \Sigma_8$  снабдим определенные элементарные циклы переменными  $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \{0, 1\}$ , как показано в табл. 1. Теперь для каждой реализации, у которой граф связей типа 2 совпадает с одним из этих графов, значения переменных  $\chi_i$  отражают, какая реализуется возможность из упоминаемых в лемме 1: значение 0 соответствует второй возможности, а значение 1 соответствует первой возможности. Таков принцип обозначения реализаций 9-28 в табл. 3.

**Лемма 4.** Если  $\Sigma(R) = \Sigma_2$ , то либо  $R \sim R_{\Sigma_2(0,0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_2(1,0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_2(0,1)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_2(1,1)}$ .

**Доказательство.** Элементарные циклы графа  $\Sigma_2$  имеют длины 4 и 8. Из вершинной симметричности графа реализации  $R$  легко следует, что для всех элементарных циклов длины 4 графа  $\Sigma_2$  реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной  $\chi_1$ , а для всех элементарных циклов длины 8 — переменной  $\chi_2$ . Из леммы 2 следует, что, придавая переменным  $\chi_1, \chi_2$  значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, четыре реализации, изображенные на рис. 1.  $\square$

**Лемма 5.** Если  $\Sigma(R) = \Sigma_3$ , то либо  $R \sim R_{\Sigma_3(0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_3(1)}$ .

**Доказательство.** Элементарные циклы графа  $\Sigma_3$  имеют длину 6. Из вершинной симметричности графа реализации  $R$  легко следует, что для всех элементарных циклов

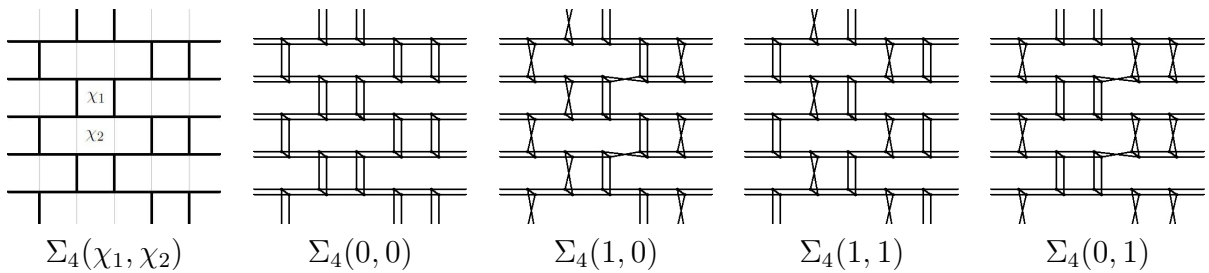


Рис. 3

графа  $\Sigma_3$  реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной  $\chi_1$ . Из леммы 2 следует, что, придавая переменной  $\chi_1$  значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, две реализации, изображенные на рис. 2.  $\square$

**Лемма 6.** Если  $\Sigma(R) = \Sigma_4$ , то либо  $R \sim R_{\Sigma_4(0,0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_4(1,0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_4(1,1)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_4(0,1)}$ .

**Доказательство.** Элементарные циклы графа  $\Sigma_4$  имеют длину 4 или 8. Из вершинной симметричности графа реализации  $R$  легко следует, что для всех элементарных циклов длины 4 графа  $\Sigma_4$  реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной  $\chi_1$ , а для всех элементарных циклов длины 8 — переменной  $\chi_2$ . Из леммы 2 следует, что, придавая переменным  $\chi_1, \chi_2$  значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, четыре реализации, изображенные на рис. 3.  $\square$

**Лемма 7.** Если  $\Sigma(R) = \Sigma_5$ , то либо  $R \sim R_{\Sigma_5(0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_5(1)}$ .

**Доказательство.** Элементарные циклы графа  $\Sigma_5$  имеют длину 6. Из вершинной симметричности графа реализации  $R$  легко следует, что для всех элементарных циклов графа  $\Sigma_5$  реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной  $\chi_1$ . Из леммы 2 следует, что, придавая переменной  $\chi_1$  значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, две реализации, изображенные на рис. 4.  $\square$

**Лемма 8.** Если  $\Sigma(R) = \Sigma_6$ , то либо  $R \sim R_{\Sigma_6(0,0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_6(1,1)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_6(0,1,1)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_6(0,1,0)}$ .

**Доказательство.** Приводимое ниже доказательство сопроводим рис. 5. Элементарные циклы графа  $\Sigma_6$  имеют длину 4. Положим сначала  $\chi_1 = \chi_2 = 0$ . В силу вершинной симметричности графа реализации  $R$  из леммы 2 следует, что  $R \cong R_{\Sigma_6(0,0)}$ .

Положим теперь  $\chi_1 = \chi_2 = 1$ . В силу вершинной симметричности графа реализации  $R$  из леммы 2 следует, что  $R \cong R_{\Sigma_6(1,1)}$ .

Положим далее  $\chi_1 = 0, \chi_2 = 1$ . В силу вершинной транзитивности реализации  $R$  имеем либо  $\chi_3 = \chi_2$ , либо  $\chi_3 = \chi_1$ . В первом случае реализация может соответствовать только разбиению на клетки  $\gamma_5$  (см. табл. 2), и из леммы 2 следует  $R \cong R_{\Sigma_6(0,1,1)}$ . Во втором случае

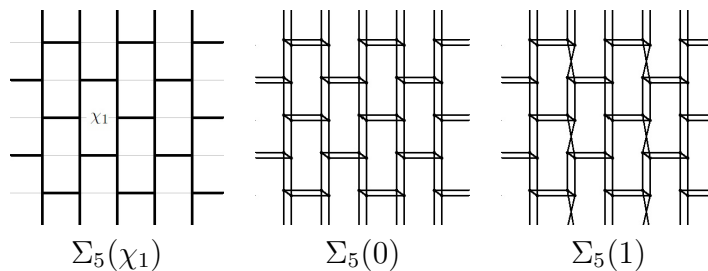


Рис. 4

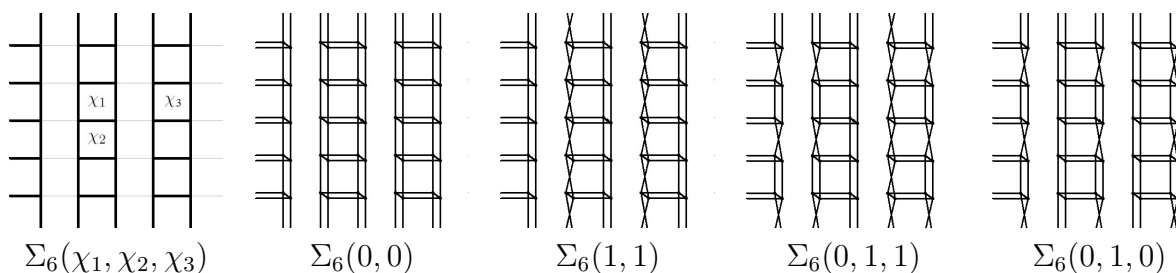


Рис. 5

реализация может соответствовать только разбиению на клетки  $\gamma_7$ , и из леммы 2 следует  $R \cong R_{\Sigma_6(0,1,0)}$ .

Наконец, полагая  $\chi_1 = 1, \chi_2 = 0$ , мы получим реализации, эквивалентные только что рассмотренным.  $\square$

**Лемма 9.** Если  $\Sigma(R) = \Sigma_7$ , то либо  $R \sim R_{\Sigma_7(0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_7(1)}$ .

**Доказательство.** Элементарные циклы графа  $\Sigma_7$  имеют длину 4. Из вершинной симметричности графа реализации  $R$  легко следует, что для всех элементарных циклов графа  $\Sigma_7$  реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной  $\chi_1$ . Из леммы 2 следует, что, придавая переменной  $\chi_1$  значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, две реализации, изображенные на рис. 6.  $\square$

**Лемма 10.** Если  $\Sigma(R) = \Sigma_8$ , то либо  $R \sim R_{\Sigma_8(0)}$ , либо  $R \sim R_{\Sigma_8(1)}$ .

**Доказательство.** Элементарные циклы графа  $\Sigma_8$  имеют длину 4. Из вершинной симметричности графа реализации  $R$  легко следует, что для всех элементарных циклов графа  $\Sigma_8$  реализуется та же возможность из леммы 1, что и для цикла, снабженного переменной  $\chi_1$ . Из леммы 2 следует, что, придавая переменной  $\chi_1$  значения 0, 1, мы получим, с точностью до эквивалентности, две реализации, изображенные на рис. 7.  $\square$

Наконец, из леммы 2 следует, что для каждого  $i \in \{9, \dots, 18\}$ , если  $\Sigma(R) = \Sigma_i$ , то  $R \sim R_{\Sigma_i}$ . Перебрав все варианты для  $\Sigma \in \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{18}\}$ , мы получили все реализации из табл. 3. Теорема доказана.  $\square$

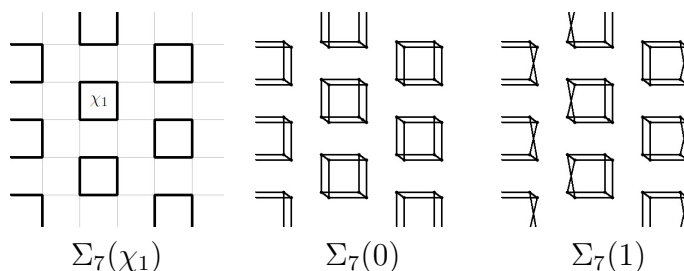


Рис. 6

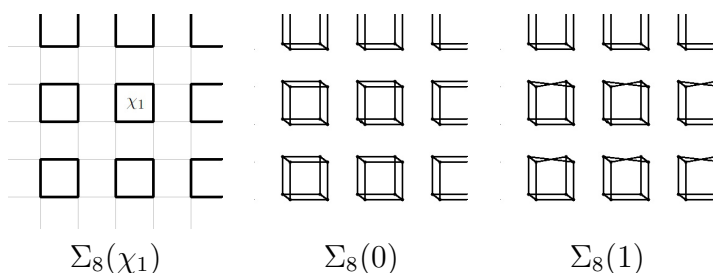


Рис. 7

### 5. Доказательство теоремы, использующее компьютерную реализацию подхода из [3]

В этом разделе будет дано другое доказательство теоремы, основанное на компьютерной реализации подхода, предложенного в [3], и условно называемого координатизацией симметрических расширений графов. Этот подход представляется применимым для описания реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^d$  и в случае  $d > 2$ .

Пусть  $G$  — группа и  $L$  — ее подгруппа. Пусть, кроме того,  $\mathcal{P}$  — некоторое множество двухэлементных подмножеств вида  $\{L, aL\}$ ,  $a \in G$ , множества  $G/L$  левых смежных классов  $G$  по  $L$ . Тогда через  $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$  обозначается граф с множеством вершин  $G/L$  и множеством ребер  $\{\lambda_{G/L}(g)(P) : P \in \mathcal{P}, g \in G\}$ , где  $\lambda_{G/L}$  — действие группы  $G$  на  $G/L$  левыми сдвигами. При этом  $\lambda_{G/L}(G)$  является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа  $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$ .

Пусть теперь  $H$  — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов решетки  $\Lambda^2$  и  $G$  — центральное расширение группы  $H$  посредством группы  $\langle c' \rangle$  порядка 2. Пусть  $K \leq G$  — прообраз  $H_{(0,0)}$  при естественном гомоморфизме  $G \rightarrow H$  (в частности,  $c' \in K$ ). Пусть  $L$  — подгруппа  $K$  индекса 2, не содержащая  $c'$  (откуда следует  $K = L \cup c'L$ ). Тогда  $\sigma := \{\lambda_{G/L}(g)(\{L, c'L\}) : g \in G\}$  есть система импримитивности группы  $\lambda_{G/L}(G)$  на  $G/L$ . Через  $\varphi$  обозначим взаимнооднозначное отображение  $\sigma$  на  $V(\Lambda^2)$ , такое что  $\varphi(\lambda_{G/L}(g)(\{L, c'L\}))$  совпадает с  $\bar{g}((0,0))$ , где  $\bar{g}$  — образ  $g$  при естественном гомоморфизме  $G \rightarrow H$ , для всех  $g \in G$ . Пусть, кроме того,  $\mathcal{P}$  — некоторое множество двухэлементных подмножеств вида  $\{L, aL\}$ ,  $a \in G$ . Если граф  $\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}$  связан, то четверка  $(\Gamma_{G,L,\mathcal{P}}, \lambda_{G/L}(G), \sigma, \varphi)$  является реализацией симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  класса II, которую мы будем называть *универсальной реализацией*, соответствующей  $G, L, \mathcal{P}$ , и для краткости обозначать через  $R_{G,L,\mathcal{P}}$ .

Пусть даны допустимый подграф  $\Sigma$  решетки  $\Lambda^2$  и группа  $H \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$ , являющаяся вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа  $\Sigma$ . Пусть  $h_1, h_2, h_3, h_4$  — такой набор элементов группы  $H$ , что  $h_1((0,0)) = (1,0)$ ,  $h_2((0,0)) = (-1,0)$ ,  $h_3((0,0)) = (0,1)$ ,  $h_4((0,0)) = (0,-1)$ . Положим  $J_\Sigma := \{j \in \{1,2,3,4\} : h_j((0,0)) \in \Sigma((0,0))\}$ , где  $\Sigma((0,0))$  — окрестность  $(0,0)$  в графе  $\Sigma$ . Через  $\Sigma^{(0,0)}$  обозначим компоненту связности графа  $\Sigma$ , содержащую  $(0,0)$ . Пусть  $Q$  — ограничение стабилизатора множества вершин  $V(\Sigma^{(0,0)})$  в группе  $H$  на множество  $V(\Sigma^{(0,0)})$ . Для каждой компоненты связности  $\Sigma^*$  графа  $\Sigma$ , отличной от  $\Sigma^{(0,0)}$ , выберем в  $H$  элемент, переводящий  $\Sigma^{(0,0)}$  в  $\Sigma^*$ . Получающийся в результате этого конечный или счетный набор элементов группы  $H$  обозначим через  $T$ .

Пусть  $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  — произвольная реализация, такая что  $\Sigma(R) = \Sigma$  и  $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = H$ . Пусть  $\tilde{\Sigma}^{(0,0)}$  — подграф графа  $\Gamma$ , порожденный множеством вершин  $\bigcup_{u \in V(\Sigma^{(0,0)})} \varphi^{-1}(u)$ . Пусть  $\tilde{Q}$  — ограничение стабилизатора множества вершин  $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$  в группе  $G$  на множество  $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$ . Выберем  $v \in \varphi^{-1}((0,0))$  и положим  $L$  равным ограничению стабилизатора  $G_v$  на множество  $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$ . Очевидно, что  $\tilde{Q}$  действует транзитивно на  $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$ . отождествим множество левых смежных классов  $\tilde{Q}/L$  с  $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$ , сопоставляя произвольной вершине  $u \in V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$  смежный класс  $gL$ , где  $g$  — некоторый элемент группы  $\tilde{Q}$ , переводящий  $v$  в  $u$ . Пусть  $N$  — набор представителей всех смежных классов из  $\tilde{Q}/L$ , отождествленных с вершинами из  $\tilde{\Sigma}^{(0,0)}$ . Пусть  $X$  — некоторое подмножество множества  $N$  и  $\mathcal{P} := \{\{L, gL\} : g \in X\}$ . Если граф  $\Gamma_{\tilde{Q},L,\mathcal{P}}$  связан, то мы построили реализацию симметрического 2-расширения  $R_{\tilde{Q},L,\mathcal{P}}$  графа  $\Sigma^{(0,0)}$  (симметрическое 2-расширение произвольного связного локально-конечного графа определяется аналогично симметрическому 2-расширению решетки  $\Lambda^d$ , см. [3]). Из [3, предложение 6] следует, что  $\Gamma_{\tilde{Q},L,\mathcal{P}} \cong \tilde{\Sigma}^{(0,0)}$ . Используя выбранный ранее набор элементов  $T$  группы  $H$  мы следующим образом достроим эту реализацию до реализации  $R' = (\Gamma', G', \sigma', \varphi')$ , эквивалентной  $R$ .

Отождествим  $V(\tilde{\Sigma}^{(0,0)})$  с подмножеством  $V_0$  множества  $V = \{(i, j, k) : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \{0,1\}\}$  следующим образом. Вершине  $u$  поставим в соответствие тройку  $(i, j, k)$ , в которой  $(i, j) = \varphi(u^\sigma)$ , а  $k$  выбрано произвольно. При этом множество левых смежных классов  $\tilde{Q}/L$  тоже отождествится с  $V_0$ . Построим граф  $\Gamma'$  с множеством вершин  $V$  на основе графа реализации  $R_0 = R_{\tilde{Q},L,\mathcal{P}}$  с множеством вершин  $V_0$  следующим образом. Для произвольных  $u =$

$(i_1, j_1, k_1), w = (i_2, j_2, k_2) \in V$  есть следующие три возможности 1)–3).

1)  $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in \Sigma^{(0,0)}$ . Если между блоками реализации  $R_0$ , содержащими эти вершины, имеется ровно 2 ребра, то вершины  $u, w$  полагаем смежными в  $\Gamma'$  тогда и только тогда, когда они смежны в  $\Gamma_{\tilde{Q}, L, \mathcal{P}}$ . В противном случае  $u, w$  полагаем смежными в  $\Gamma'$  тогда и только тогда, когда  $(i_1, j_1)$  и  $(i_2, j_2)$  смежны в  $\Lambda^2$ .

2)  $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$  лежат в некоторой компоненте связности  $\Sigma^*$  графа  $\Sigma$ , отличной от  $\Sigma^{(0,0)}$ . Это значит, что  $(i_1, j_1) = t((i'_1, j'_1))$  и  $(i_2, j_2) := t((i'_2, j'_2))$  для некоторых  $(i'_1, j'_1), (i'_2, j'_2) \in V(\Sigma^{(0,0)})$  и некоторого  $t \in T$ . Полагаем  $u, w$  смежными в  $\Gamma'$  тогда и только тогда, когда  $(i'_1, j'_1, k_1)$  и  $(i'_2, j'_2, k_2)$  смежны в  $\Gamma'$ .

3)  $(i_1, j_1), (i_2, j_2)$  лежат в разных компонентах связности графа  $\Sigma$ . Полагаем  $u, w$  смежными в  $\Gamma'$  тогда и только тогда, когда  $(i_1, j_1)$  и  $(i_2, j_2)$  смежны в  $\Lambda^2$ .

Легко видеть, что  $\Gamma' \cong \Gamma$ . Пусть  $G' = \psi G \psi^{-1}$ , где  $\psi$  — изоморфизм графа  $\Gamma$  на граф  $\Gamma'$ . Полагая  $\sigma' = \{(i, j, 0), (i, j, 1)\} : i, j \in \mathbb{Z}$  и  $\varphi'((i, j)^{\sigma'}) = (i, j)$  для всех  $i, j \in \mathbb{Z}$ , получаем  $(\Gamma', G', \sigma', \varphi') \cong (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ . Построенную таким образом реализацию  $R' = (\Gamma', G', \sigma', \varphi')$  мы будем называть *гибридной реализацией, соответствующей  $\tilde{Q}, L, \mathcal{P}$  и  $T$* .

С использованием этого построения был реализован следующий алгоритм, который генерирует все, с точностью до эквивалентности, насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II.

**Алгоритм 1.** Генерация всех (с точностью до эквивалентности) насыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II.

**Выход:** Список реализаций  $R_i, i = 1, \dots, n$ .

**Описание.** 1. Перебираем всевозможные  $\Sigma$  из табл. 1.

2. Перебираем всевозможные вершинно-транзитивные подгруппы  $H$  группы  $\text{Aut}(\Lambda^2)$ , относительно которых  $\Sigma$  является инвариантным.

3. Строим группу  $Q$ , как описано выше. Перебираем всевозможные центральные расширения  $\tilde{Q}$  группы  $Q$  посредством группы  $\langle c \rangle$  порядка 2. Для того, чтобы найти все такие расширения, мы строим полициклическое представление группы  $Q$  (см. [8]; если  $\Sigma^{(0,0)} = \Sigma$ , то строим при помощи вызова процедуры `IsomorphismPcpGroup(H)` из GAP-пакета `Cryst` [6; 7], в остальных случаях — вручную). Затем берем множество порождающих элементов  $g_1, \dots, g_s$  и соответствующих соотношений  $W_1(g_1, \dots, g_s), \dots, W_r(g_1, \dots, g_s)$  этого полициклического представления. К порождающим добавляем еще один элемент  $c$ , а множество определяющих соотношений расширяем  $2^r$  способами, как это описывается в доказательстве теоремы 1 из [3]. Получившиеся претенденты на полициклические представления расширения  $\tilde{Q}$ , проходят проверку на корректность при помощи процедуры `IsConfluent` из GAP-пакета `Polycyclic` [8].

4. Пусть  $K$  — прообраз группы  $Q_{(0,0)}$  в  $\tilde{Q}$  при естественном гомоморфизме  $\tilde{Q} \rightarrow Q$ . Перебираем всевозможные подгруппы  $L$  индекса 2 группы  $K$ , не содержащие  $c$ .

5. Перебираем всевозможные подмножества  $X$  множества  $N$  (см. выше), и выбираем те из них, для которых граф  $\Gamma_{\tilde{Q}, L, \mathcal{P}}$  связан (см. выше). Если  $\Sigma^{(0,0)} \neq \Sigma$ , то проверяем имеет ли граф  $\Gamma'$  вершинно-транзитивную группу автоморфизмов  $G$ , индуцирующую группу  $H$  на решетке  $\Lambda^2$  (см. замечание 1 ниже). Если это так, то записываем получившуюся реализацию в выходной список.  $\square$

**З а м е ч а н и е 1.** Нам во всех случаях удалось показать существование группы  $G$ , являющейся центральным расширением группы  $H$  посредством группы  $\langle c' \rangle$ , где  $c'$  — автоморфизм графа  $\Gamma'$ , меняющий местами вершины в каждом из блоков. Таким образом, во всех случаях удалось достроить гибридную реализацию до универсальной (см. табл. 5, в строках 1-20  $c' = c$ ).

Введем обозначения для следующих автоморфизмов  $\Lambda^2$ :

$$\begin{aligned} r_{\frac{\pi}{2}} : (a, b) &\mapsto (b, -a), & r_{\pi} : (a, b) &\mapsto (-a, -b), & r_{-\frac{\pi}{2}} : (a, b) &\mapsto (-b, a), \\ m_{/} : (a, b) &\mapsto (b, a), & m_{\setminus} : (a, b) &\mapsto (-b, -a), & m_{|} : (a, b) &\mapsto (-a, b), \\ m_{-} : (a, b) &\mapsto (a, -b), & x : (a, b) &\mapsto (a + 1, b), & y : (a, b) &\mapsto (a, b + 1), \end{aligned} \quad \text{где } a, b \in \mathbb{Z}.$$

Для описания алгоритма 2, проверяющего реализации на эквивалентность, нам понадобится следующее определение из [2]. Реализация  $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  удовлетворяет условию  $[p_x, p_y]$ -периодичности, где  $p_x, p_y$  — положительные целые числа, если найдутся  $g_1, g_2 \in G$ , такие что  $[g_1, g_2] = 1$  и  $\varphi g_1^\sigma \varphi^{-1} = x^{p_x}$ ,  $\varphi g_2^\sigma \varphi^{-1} = y^{p_y}$ . Следующее утверждение помогает находить  $p_x$  и  $p_y$ .

**Лемма 11.** Пусть  $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$  — реализация симметрического 2-расширения решетки  $\Lambda^2$  класса II, такая что граф  $\Sigma(R)$  связан. Пусть  $n$  — наименьшее натуральное число, такое что  $x^n \in \varphi G \varphi^{-1}$  и  $m$  — наименьшее натуральное число, такое что  $y^m \in \varphi G \varphi^{-1}$ . Тогда  $R$  удовлетворяет условию  $[n, m]$ -периодичности или условию  $[2n, m]$ -периодичности.

**Доказательство.** По условию найдутся  $g_1, g_2 \in G$ , такие что  $\varphi g_1^\sigma \varphi^{-1} = x^n$ ,  $\varphi g_2^\sigma \varphi^{-1} = y^m$ . Если  $[g_1, g_2] \neq 1$ , то  $[g_1, g_2] = c'$  и, следовательно  $[g_1^2, g_2] = 1$ .  $\square$

**З а м е ч а н и е 2.** Было проверено, что каждая из сгенерированных при помощи алгоритма 1 реализаций  $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ , таких что граф  $\Sigma(R)$  несвязен, удовлетворяет условию  $[n, m]$ -периодичности (числа  $n, m$  определяются, как лемме 11).

Пусть  $R_i = (\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2$ , — две из сгенерированных при помощи алгоритма 1 реализации. Опишем алгоритм, позволяющий определить, являются ли они эквивалентными. Если реализации эквивалентны, то между их графами существует изоморфизм  $\psi$ , сохраняющий блоки и, переводящий  $\varphi_1^{-1}((0, 0))$  в  $\varphi_2^{-1}((0, 0))$ . Пусть  $\psi^{\sigma_1}$  — подстановка  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ , которую индуцирует  $\psi$ . Полагая  $\bar{\psi} := \varphi_2 \psi^{\sigma_1} \varphi_1^{-1}$ , имеем  $\bar{\psi} \in \text{Aut}(\Lambda^2)_{(0,0)}$ . Нижеописанный алгоритм 2 позволяет определить эквивалентность реализаций в предположении  $\bar{\psi} = 1$ . В общем случае для проверки реализаций  $R_i$ ,  $i = 1, 2$ , на эквивалентность нужно перебрать всевозможные  $h \in \text{Aut}(\Lambda^2)_{(0,0)}$  (8 вариантов), и для каждого  $h$  сопоставить при помощи алгоритма 2 реализацию  $R_1$  и реализацию  $R'_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, h\varphi_2)$ . Если хотя бы для какого-то  $h$  реализации  $R_1$  и  $R'_2$  окажутся эквивалентными, то  $R_1 \cong R_2$ .

**Алгоритм 2.** Проверка двух реализаций на эквивалентность в предположении  $\bar{\psi} = 1$ .

**Вход:** Реализации  $R_i = (\Gamma_i, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$ ,  $i = 1, 2$ .

**Выход:** Заключение об их эквивалентности или неэквивалентности.

**Описание.** Если  $\Sigma(R_1) \neq \Sigma(R_2)$ , то  $R_1 \neq R_2$ . В противном случае, используя лемму 11 и замечание 2 после нее, найдем пару  $(n, m)$  положительных целых чисел, такую что обе реализации удовлетворяют условию  $[n, m]$ -периодичности. Пусть  $F_i$ ,  $i = 1, 2$ , — подграф в  $\Gamma_i$ , порожденный множеством вершин

$$\bigcup_{\substack{k \in \{0, \dots, n\}, \\ l \in \{0, \dots, m\}}} \varphi_i^{-1}((k, l)).$$

Перебирая биекции между блоками  $\varphi_1^{-1}(k, l)$  и  $\varphi_2^{-1}(k, l)$  для всех  $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ,  $l \in \{0, \dots, m-1\}$ , можно построить  $2^{nm}$  биекций между множествами вершин подграфов  $F_1$  и  $F_2$  (биекция между блоками  $\varphi_1^{-1}(n, l)$  и  $\varphi_2^{-1}(n, l)$  для  $l \in \{0, \dots, m-1\}$  и между блоками  $\varphi_1^{-1}(k, m)$  и  $\varphi_2^{-1}(k, m)$  для  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  устанавливается автоматически из условия периодичности). Если среди них найдется биекция, задающая изоморфизм подграфов  $F_1$  и  $F_2$ , то она по периодичности продолжается до изоморфизма графов  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$ , и, следовательно, данные реализации эквивалентны. Если же такого соответствия не найдется, то данные реализации неэквивалентны. Перебор  $2^{nm}$  соответствий вершин подграфов убыстряется за счет использования перебора с возвратом.  $\square$

Список реализаций, сгенерированный при помощи алгоритма 1 и прореженный с помощью алгоритма 2, содержит 38 реализаций, эквивалентных реализациям, приведенным в табл. 3. Мы приводим этот список ниже в табл. 4 и 5. В табл. 4 приведены гибридные представления тех реализаций из этого списка, у которых подграф связей типа 2 несвязен. В табл. 5 приведены универсальные представления для всех реализаций из этого списка.

В табл. 4 для каждой гибридной реализации, соответствующей  $\tilde{Q}, L, \mathcal{P}$  и  $T$  мы приводим соответствующую ей группу  $H \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$ , гомоморфные образы порождающих группы  $\tilde{Q}$  (за исключением  $c$ ) в  $Q$  (для упрощения обозначений мы приводим их прообразы при естественном гомоморфизме  $H \rightarrow Q$ ), определяющие соотношения группы  $\tilde{Q}$ , группу  $L$ , множество  $X \subset \tilde{Q}$ , такое что  $\mathcal{P} = \{\{L, gL\} : g \in X\}$ , и набор элементов  $T$  группы  $H$ .

В табл. 5 для каждой универсальной реализации  $R_{G,L,\mathcal{P}}$  мы приводим соответствующую ей группу  $H \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$ , гомоморфные образы порождающих группы  $G$  (за исключением  $c'$ ) в  $H$ , определяющие соотношения группы  $G$ , группу  $L$  и множество  $X \subset G$ , такое что  $\mathcal{P} = \{\{L, gL\} : g \in X\}$ .

В табл. 4 и 5 каждое множество  $X$  разбито на четыре части тремя символами ";". Первая часть — элементы, гомоморфные образы которых в группе  $H$  отображают  $(0, 0)$  в  $(1, 0)$ ; вторая часть — в  $(0, 1)$ ; третья часть — в  $(-1, 0)$ ; четвертая часть — в  $(0, -1)$ . В частности, запись ";;" означает, что соответствующая из четырех частей пуста.

В табл. 4 для реализации 22) из пяти порождающих соотношений  $g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2, g_4^{g_1} = cg_4$  и  $g_4^{g_2} = g_4^{-1}$  приведено только четвертое, поскольку остальные четыре такие же, как у реализации 21). Четвертое соотношение отличается множителем  $c$  в правой части. Во всех реализациях табл. 4 и 5, где мы прибегаем к подобному сокращению, мы приводим только соотношения, отличающиеся наличием множителя  $c$  (или  $c'$ ) в правой части соотношений для указанных похожих реализаций.

Т а б л и ц а 4

Реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II.  
Гибридные представления

$H$	образы порождающих $\tilde{Q}$	соотношения $\tilde{Q}$	$L$	$X$	$T \cup \{1\}$
1)-20)	$\tilde{Q} = G$ (см. табл. 5)	см. табл. 5	см. табл. 5	см. табл. 5	$\{1\}$
21) $H_{13}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = m_-,$ $\bar{g}_4 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$ $g_4^{g_1} = cg_4, g_4^{g_2} = g_4^{-1}$	$\langle g_2 \rangle$	$\{; g_4; g_1; g_4^{-1}\}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = x^2$
22)	Все так же, как в 21), кроме	$g_4^{g_1} = cg_4$			
23) $H_{15}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$ $g_3^{g_1} = cg_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	1	$\{; g_2; g_1; g_3^{-1}g_2\}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = yx^2$
24) $H_{25}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$ $g_3^{g_1} = cg_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	1	$\{; g_2; g_1; cg_3^{-1}g_2\}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = x^2$
25) $H_{15}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_1, \bar{g}_2 = ym_-$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$	1	$\{; g_2; g_1; \}$	$\{t_1^{t_2^i} : i, j \in \mathbb{Z}\},$ где $t_1 = y^2, t_2 = yx^2$
26)	Все так же, как в 25), кроме	$g_2^{g_1} = cg_2$			
27) $H_{23}$	$\bar{g}_1 = xm_1, \bar{g}_2 = yxm_-,$ $\bar{g}_3 = m_/\$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_3^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_3, g_3^{g_1} = g_2,$ $g_3^{g_2} = g_3$	$\langle g_3 \rangle$	$\{g_1; g_3g_1; ; \}$	$\{t_1^{t_2^i} : i, j \in \mathbb{Z}\},$ где $t_1 = x^2, t_2 = y^2$
28)	Все так же, как в 27), кроме	$g_3^{g_2} = cg_3$			
29) $H_7$	$\bar{g}_1 = ym_-, \bar{g}_2 = m_/,$ $\bar{g}_3 = yx^{-1}$	$g_1^2 = g_3, g_2^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_2g_3, g_3^{g_1} = g_3,$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1^{-1}; g_1; ; \}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = y^2$
30) $H_{14}$	$\bar{g}_1 = ym_-, \bar{g}_2 = xr\pi,$ $\bar{g}_3 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_3g_2, g_3^{g_1} = g_3^{-1},$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	1	$\{g_2; g_1; ; \}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = x^2$
31) $H_{15}$	$\bar{g}_1 = xm_1, \bar{g}_2 = ym_-,$ $\bar{g}_3 = y^2$	$g_1^2 = g_3, g_2^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_3g_2, g_3^{g_1} = g_3,$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	1	$\{g_2g_1; g_2; ; \}$	$\{t^i : i \in \mathbb{Z}\},$ где $t = x^2y$
32) $H_3$	$\bar{g}_1 = m_-, \bar{g}_2 = m_1,$ $\bar{g}_3 = x$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_1^{g_2} = g_2, g_3^{g_1} = g_3,$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}$	$\langle g_1, g_2 \rangle$	$\{g_3; ; g_3^{-1}; \}$	$\{y^i : i \in \mathbb{Z}\}$
33) $H_9$	$\bar{g}_2 = xr\pi$	$g_2^2 = 1$	1	$\{g_2; ; ; \}$	$\{t_2^{t_1^i} h^k : i, j \in \mathbb{Z},$ $k \in \{0, 1\}\},$ где $h = y^{-1}m_-,$ $t_1 = y^3x, t_2 = y^4$
34) $H_{24}$	$\bar{g}_3 = xm_1$	$g_3^2 = 1$	1	$\{g_3; ; ; \}$	$\{t_2^{t_1^i} h^k : i, j \in \mathbb{Z},$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}\},$ где $h = y^{-1}x^2r,$ $t_1 = y^2x^2, t_2 = y^4$



Т а б л и ц а 4 (окончание)

**Реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II.  
Гибридные представления**

$H$	образы порождающих $Q$	соотношения $Q$	$L$	$X$	$T \cup \{1\}$
35) $H_{15}$	$\bar{g}_2 = ym_-$	$g_2^2 = 1$	1	$\{g_2; ; ;\}$	$\{t_2^j t_1^k h^k : i, j \in \mathbb{Z}, k \in \{0, 1\}\}$ , где $h = x^{-1}m_+$ , $t_1 = y^2, t_2 = yx^2$
36) $H_6$	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_-$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1; ; ;\}$	$\{t_2^j t_1^i : i, j \in \mathbb{Z}\}$ , $t_1 = yx, t_2 = y^2$
37) $H_{13}$	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_-$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1; ; ;\}$	$\{t_2^j t_1^i : i, j \in \mathbb{Z}\}$ , $t_1 = x^2, t_2 = y$
38) $H_1$	$\bar{g}_1 = m_+, \bar{g}_2 = r,$ $\bar{g}_3 = r_\pi$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = g_3, g_3^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2^{-1}, g_3^{g_1} = g_3$	$\langle g_1, g_2 \rangle$	$\{; ; ;\}$	$\{y^j x^i : i, j \in \mathbb{Z}\}$

Т а б л и ц а 5

**Реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II.  
Универсальные представления**

$H$	образы порожд. $G$	соотношения группы $G$	$L$	$X$
1) $H_1$	$\bar{g}_1 = m_+, \bar{g}_2 = r,$ $\bar{g}_3 = r_\pi, \bar{g}_4 = x,$ $\bar{g}_5 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = g_3, g_3^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2^{-1},$ $g_3^{g_1} = g_3, g_4^{g_1} = g_5, g_5^{g_1} = g_4, g_3^{g_2} = g_3,$ $g_4^{g_2} = g_5, g_5^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4^{-1},$ $g_5^{g_3} = g_5^{-1}, g_5^{g_4} = g_5$	$\langle g_1, g_2 \rangle$	$\{g_4; g_5; g_4^{-1}; g_5^{-1}\}$
2) Все так же, как в 1), кроме		$g_5^{g_4} = c'g_5$		
3) $H_{13}$	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_-,$ $\bar{g}_3 = x^2, \bar{g}_4 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2, g_3^2 = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4, g_3^{g_2} = g_3, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = c'g_4$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1; g_4; g_3^{-1}g_1; g_4^{-1}\}$
4) $H_{15}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_+,$ $\bar{g}_2 = xr_\pi,$ $\bar{g}_3 = yx^2, \bar{g}_4 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_4g_3^{-2}g_2, g_3^{g_1} = g_4g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = c'g_4, g_3^{g_2} = g_3^{-1}, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = c'g_4$	1	$\{g_2; g_4g_3^{-1}g_2g_1;$ $g_1; g_3^{-1}g_2g_1\}$
5) Все так же, как в 4), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_4g_3^{-1}, g_3^{g_2} = c'g_3^{-1}$		
6) $H_{19}$	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_+,$ $\bar{g}_3 = m_+, \bar{g}_4 = xy,$ $\bar{g}_5 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_3^2 = 1, g_2^{g_1} = c'g_5^{-1}g_4g_3,$ $g_3^{g_1} = g_4g_2, g_4^{g_1} = g_5g_4^{-1}, g_5^{g_1} = c'g_5,$ $g_2^{g_2} = g_3, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_5^{g_2} = g_5g_4^{-2},$ $g_4^{g_3} = c'g_4, g_5^{g_3} = g_5^{-1}g_4, g_5^{g_4} = c'g_5$	$\langle g_2, g_3 \rangle$	$\{g_1; g_5g_4^{-1}g_1;$ $g_5g_4^{-2}g_1; g_4^{-1}g_1\}$
7) $H_{23}$	$\bar{g}_1 = xm_+,$ $\bar{g}_2 = yxm_+,$ $\bar{g}_3 = m_+, \bar{g}_4 = x^2,$ $\bar{g}_5 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_3^2 = 1, g_2^{g_1} = g_3,$ $g_3^{g_1} = g_2, g_4^{g_1} = g_4^{-1}, g_5^{g_1} = g_5,$ $g_3^{g_2} = g_3, g_4^{g_2} = g_5^{-1}, g_5^{g_2} = g_4^{-1},$ $g_4^{g_3} = g_5, g_5^{g_3} = g_4, g_5^{g_4} = c'g_5$	$\langle g_3 \rangle$	$\{g_1; g_3g_1;$ $g_4^{-1}g_1; g_5^{-1}g_3g_1\}$
8) Все так же, как в 7), кроме		$g_3^{g_2} = c'g_6$		
9) $H_{24}$	$\bar{g}_1 = y^{-1}x^2r,$ $\bar{g}_2 = yx^{-2}m_-,$ $\bar{g}_3 = xm_+,$ $\bar{g}_4 = y^2x^2, \bar{g}_5 = y^4$	$g_1^2 = g_3g_2, g_2^2 = g_5g_4^{-2}, g_3^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_5^{-1}g_4g_3, g_3^{g_1} = g_5^{-1}g_4g_2, g_4^{g_1} = g_5g_4^{-1}$ $g_5^{g_1} = g_5g_4^{-2}, g_3^{g_2} = g_5g_4^{-2}g_3, g_4^{g_2} = g_5^{-1}g_4,$ $g_5^{g_2} = g_5^{-1}, g_4^{g_3} = g_5g_4^{-1}, g_5^{g_3} = g_5, g_5^{g_4} = g_5$	1	$\{g_3; g_5g_4^{-1}g_1;$ $g_4^{-1}g_3g_2g_1;$ $g_5^{-1}g_4g_2, c'g_5^{-1}g_4g_2\}$
10) Все так же, как в 9), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_5^{-1}g_4g_2, g_4^{g_1} = c'g_5g_4^{-1},$ $g_5^{g_1} = c'g_5g_4^{-2}, g_3^{g_2} = c'g_5g_4^{-2}g_3,$ $g_4^{g_3} = c'g_5g_4^{-1}$		
11) Все так же, как в 9), кроме		$g_2^2 = c'g_5g_4^{-2}, g_5^{g_1} = c'g_5g_4^{-2},$ $g_3^{g_2} = c'g_5g_4^{-2}g_3, g_4^{g_2} = c'g_5^{-1}g_4$		
12) Все так же, как в 9), кроме		$g_2^2 = c'g_5g_4^{-2}, g_3^{g_1} = c'g_5^{-1}g_4g_2,$ $g_4^{g_1} = c'g_5g_4^{-1}, g_4^{g_2} = c'g_5^{-1}g_4,$ $g_4^{g_3} = c'g_5g_4^{-1}$		
13) $H_9$	$\bar{g}_1 = y^{-1}m_+,$ $\bar{g}_2 = xr_\pi,$ $\bar{g}_3 = y^3x, \bar{g}_4 = y^4$	$g_1^2 = g_4^{-1}g_3, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_3^{-1}g_2, g_3^{g_1} = g_4^2g_3^{-3}, g_4^{g_1} = g_4^3g_3^{-4},$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_2; g_4g_3^{-1}g_2,$ $c'g_4g_3^{-1}g_2;$ $g_4g_3^{-1}g_1; g_1\}$
14) Все так же, как в 13), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_4^2g_3^{-3}, g_4^{g_1} = c'g_4^3g_3^{-4}, g_4^{g_2} = c'g_4^{-1}$		
15) $H_{15}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m_+,$ $\bar{g}_2 = xr_\pi,$ $\bar{g}_3 = yx^2, \bar{g}_4 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_4g_3^{-2}g_2,$ $g_3^{g_1} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_1} = g_4, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_2; g_4g_3^{-1}g_2g_1; g_1;$ $g_3^{-1}g_2g_1, c'g_3^{-1}g_2g_1\}$
16) Все так же, как в 15), кроме		$g_4^{g_1} = c'g_4, g_4^{g_3} = c'g_4$		
17) Все так же, как в 15), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_4g_3^{-1}, g_3^{g_2} = c'g_3^{-1}$		
18) Все так же, как в 15), кроме		$g_3^{g_1} = c'g_4g_3^{-1}, g_4^{g_1} = c'g_4,$ $g_3^{g_2} = c'g_3^{-1}, g_4^{g_3} = c'g_4$		
19) $H_6$	$\bar{g}_1 = xm_+, \bar{g}_2 = m_-,$ $\bar{g}_3 = yx, \bar{g}_4 = y^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1, g_2^{g_1} = g_2,$ $g_3^{g_1} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_1} = g_4, g_3^{g_2} = g_4^{-1}g_3,$ $g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1; g_4g_3^{-1}g_1;$ $g_4g_3^{-2}g_1,$ $c'g_4g_3^{-2}g_1; g_3^{-1}g_1\}$

Т а б л и ц а 5 (окончание)

**Реализации симметрических 2-расширений решетки  $\Lambda^2$  класса II.  
Универсальные представления**

$H$	образы порожд. $G$	соотношения группы $G$	$L$	$X$
20)	Все так же, как в 19), кроме	$g_4^{g_1} = c'g_4, g_3^{g_2} = c'g_4^{-1}g_3, g_4^{g_3} = c'g_4$		
21) $H_{13}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m , \bar{g}_2 = m-,$ $\bar{g}_3 = x^2, \bar{g}_4 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = g_3^{-1}, g_4^{g_1} = g_4,$ $g_3^{g_2} = g_3, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_3g_1, c'g_3g_1;$ $g_4; g_1; g_4^{-1}\}$
22)	Все так же, как в 21), кроме	$g_4^{g_1} = c'g_4$		
23) $H_{15}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m , \bar{g}_2 = ym-,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = yx^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = c'g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}g_3, g_4^{g_2} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_3} = c'g_4$	1	$\{g_4g_3^{-1}g_2g_1,$ $c'g_4g_3^{-1}g_2g_1;$ $g_2; g_1; g_3^{-1}g_2\}$
24) $H_{25}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m , \bar{g}_2 = ym-,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = x^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = c'g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}, g_4^{g_2} = g_4, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_4g_1, c'g_4g_1;$ $g_2; g_1; c'g_3^{-1}g_2\}$
25) $H_{15}$	$\bar{g}_1 = x^{-1}m , \bar{g}_2 = ym-,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = yx^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}g_3, g_4^{g_2} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_4g_3^{-1}g_2g_1,$ $c'g_4g_3^{-1}g_2g_1;$ $g_2; g_1;$ $g_3^{-1}g_2, c'g_3^{-1}g_2\}$
26)	Все так же, как в 25), кроме	$g_2^{g_1} = c'g_2$		
27)	Все так же, как в 7), кроме	$g_5^{g_4} = g_5$ и		$\{g_1; g_3g_1;$ $g_4^{-1}g_1, c'g_4^{-1}g_1;$ $g_5^{-1}g_3g_1, c'g_5^{-1}g_3g_1\}$
28)	Все так же, как в 27), кроме	$g_3^{g_2} = c'g_3$		
29) $H_7$	$\bar{g}_1 = ym , \bar{g}_2 = m ,$ $\bar{g}_3 = yx^{-1}, \bar{g}_4 = y^2$	$g_1^2 = g_3, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2g_3, g_3^{g_1} = g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}g_3^2, g_4^{g_2} = g_4g_3^{-2}, g_4^{g_3} = g_4$	$\langle g_2 \rangle$	$\{g_1^{-1}; g_1;$ $g_4^{-1}g_3g_1, c'g_4^{-1}g_3g_1;$ $g_1g_4^{-1}, c'g_1g_4^{-1}\}$
30) $H_{14}$	$\bar{g}_1 = ym-, \bar{g}_2 = xr\pi,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = x^2$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_3g_2, g_3^{g_1} = g_3^{-1}, g_3^{g_2} = g_3^{-1}$ $g_4^{g_1} = g_4, g_4^{g_2} = g_4^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_2; g_1;$ $g_2g_4^{-1}, c'g_2g_4^{-1};$ $g_1g_3^{-1}, c'g_1g_3^{-1}\}$
31) $H_{15}$	$\bar{g}_1 = xm , \bar{g}_2 = ym-,$ $\bar{g}_3 = y^2, \bar{g}_4 = yx^2$	$g_1^2 = g_3, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_3g_2, g_3^{g_1} = g_3, g_3^{g_2} = g_3^{-1},$ $g_4^{g_1} = g_4^{-1}g_3, g_4^{g_2} = g_4g_3^{-1}, g_4^{g_3} = g_4$	1	$\{g_2g_1; g_2;$ $g_1, c'g_1;$ $g_3^{-1}g_2, c'g_3^{-1}g_2\}$
32) $H_3$	$\bar{g}_1 = m-, \bar{g}_2 = m ,$ $\bar{g}_3 = x, \bar{g}_4 = y$	$g_1^2 = 1, g_2^2 = 1,$ $g_2^{g_1} = g_2, g_3^{g_1} = g_3, g_4^{g_1} = g_4^{-1},$ $g_3^{g_2} = g_3^{-1}, g_4^{g_2} = g_4, g_4^{g_3} = g_4$	$\langle g_1, g_2 \rangle$	$\{g_3; g_4, c'g_4;$ $g_3^{-1}; g_4^{-1}, c'g_4^{-1}\}$
33)	Все так же, как в 13), кроме			$\{g_2; g_4g_3^{-1}g_2,$ $c'g_4g_3^{-1}g_2; g_4g_3^{-1}g_1,$ $c'g_4g_3^{-1}g_1; g_1, c'g_1\}$
34)	Все так же, как в 9), кроме			$\{g_3; g_5g_4^{-1}g_1,$ $c'g_5g_4^{-1}g_1;$ $g_4^{-1}g_3g_2g_1,$ $c'g_4^{-1}g_3g_2g_1;$ $g_5^{-1}g_4g_2, c'g_5^{-1}g_4g_2\}$
35)	Все так же, как в 15), кроме			$\{g_2, c'g_2; g_4g_3^{-1}g_2g_1;$ $g_1, c'g_1;$ $g_3^{-1}g_2g_1, c'g_3^{-1}g_2g_1\}$
36)	Все так же, как в 19), кроме			$\{g_1; g_4g_3^{-1}g_1,$ $c'g_4g_3^{-1}g_1;$ $g_4g_3^{-2}g_1, c'g_4g_3^{-2}g_1;$ $g_3^{-1}g_1, c'g_3^{-1}g_1\}$
37)	Все так же, как в 3), кроме	$g_4^{g_3} = g_4$ и		$\{g_1; g_4, c'g_4; g_3^{-1}g_1,$ $c'g_3^{-1}g_1; g_4^{-1}, c'g_4^{-1}\}$
38)	Все так же, как в 1), кроме			$\{g_4, c'g_4; g_5, c'g_5;$ $g_4^{-1}, c'g_4^{-1};$ $g_5^{-1}, c'g_5^{-1}\}$

Авторы благодарны В.И. Трофимову за полезное обсуждение результатов данной статьи.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Трофимов В.И.** Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 316–320.
2. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** Симметрические расширения графов // Изв. РАН. Сер. математическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 175–206.

3. Трофимов В.И. Конечность числа симметрических 2-расширений  $d$ -мерной решетки и сходных с ней графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 290–303.
4. Трофимов В.И. Несколько замечаний о симметрических расширениях графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 284–293.
5. Коновальчик Е.А., Костюсов К.В. Симметрические 2-расширения 2-мерной решетки. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 159–179.
6. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra. Ver. 4.5.7: [e-resource]. 2012. URL: <http://www.gap-system.org>.
7. Bettina Eick, Franz Gahler, Werner Nickel. GAP package Cryst – Computing with crystallographic groups Cryst. Ver. 4.1: [e-resource]. 2013. URL: <https://www.gap-system.org/Packages/cryst.html>.
8. Bettina Eick, Max Horn, Werner Nickel. GAP package Polycyclic. Ver. 2.11: [e-resource]. 2013. URL: <https://www.gap-system.org/Packages/polycyclic.html>.

Коновальчик Елена Александровна

Поступила 12.01.2017

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург

старший преподаватель кафедры высшей математики ФГБОУ ВО

Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова,

г. Магнитогорск

e-mail: [nega-le@yandex.ru](mailto:nega-le@yandex.ru)

Костюсов Кирилл Викторович

канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

[kkostousov@gmail.com](mailto:kkostousov@gmail.com)

## REFERENCES

1. Trofimov V.I. Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*. 2012, **279**, suppl. 1, pp. 107–112. doi: 10.1134/S0081543812090088.
2. Neganova E.A., Trofimov V.I. Symmetrical extensions of graphs. *Izv. Math.* 2014, vol. 78, no. 4, pp. 809–835. doi: 10.1070/IM2014v078n04ABEH002707.
3. Trofimov V.I. The finiteness of the number of symmetrical 2-extensions of the  $d$ -dimensional lattice and similar graphs. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*. 2014, **285**, suppl. 1, pp. 169–182. doi: 10.1134/S0081543814050198.
4. Trofimov V.I. Some remarks on symmetrical extensions of graphs. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*. 2015, **289**, suppl. 1, pp. 199–208. doi: 10.1134/S0081543815050181.
5. Konovalchik E.A., Kostousov K.V. Symmetrical 2-extensions of a 2-dimensional grid. I. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*. 2016, vol. 22, no. 1, pp. 159–179 (in Russian).
6. GAP – Groups, Algorithms, Programming – a System for Computational Discrete Algebra. Ver. 4.5.7: [e-resource]. 2012. Available at: <http://www.gap-system.org>.
7. Bettina Eick, Franz Gahler, Werner Nickel. *GAP package Cryst – Computing with crystallographic groups Cryst*, Ver. 4.1, e-resource, 2013. Available at: <https://www.gap-system.org/Packages/cryst.html>.
8. Bettina Eick, Max Horn, Werner Nickel. *GAP package Polycyclic*. Ver. 2.11, [e-resource, 2013. Available at: <https://www.gap-system.org/Packages/polycyclic.html>.

The paper was received by the Editorial Office on January 12, 2017.

*Elena Aleksandrovna Konoval'chik*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Nosov Magnitogorsk State Technical University, Magnitogorsk, 455000 Russia, e-mail: [asmi@imm.uran.ru](mailto:asmi@imm.uran.ru).

*Kirill Viktorovich Kostousov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: [asmi@imm.uran.ru](mailto:asmi@imm.uran.ru).

УДК 515.162.8

КВАЗОИДЫ В ТЕОРИИ УЗЛОВ<sup>1</sup>

Ф. Г. Кораблёв

Статья посвящена определению и построению примеров квазоидов — алгебраических объектов, каждый из которых порождает инвариант ориентированных узлов и зацеплений. Этот инвариант может быть выражен в терминах числа правильных раскрасок областей, на которые диаграмма узла разбивает двумерную сферу. Правильность раскраски элементами множества  $X$  означает, что в окрестности каждой двойной точки диаграммы цвета всех четырёх областей согласованы посредством функции  $Q: X \times X \times X \rightarrow X$ . Такая функция  $Q$  называется квазоидом над множеством  $X$ . В статье строятся примеры двух бесконечных серий квазоидов. Первую серию образуют линейные квазоиды над конечными кольцами. Вторая серия состоит из квазоидов, порожденных конечными биквазилями. Инварианты узлов и зацеплений, порождаемые квазоидами, нетривиальны и могут быть использованы для различения узлов. В статье показывается, что все узлы и зацепления, допускающие диаграммы с не более, чем шестью двойными точками, различаются линейными квазоидами над  $\mathbb{Z}_n$ , где  $n \leq 11$ . Приводятся результаты компьютерного перебора всех различных квазоидов над множествами, мощность которых не превосходит 4.

Ключевые слова: узел, квазоид, биквазиль, инвариант.

**F. G. Korablev. Quazoids in knot theory.**

This paper is devoted to the definition and construction of quazoids, which are algebraic objects generating invariants of oriented knots and links. Such an invariant can be described in the terms of the number of proper colorings of the regions into which the diagram of a knot decomposes a 2-sphere. A coloring by elements of a set  $X$  is proper if the color diagrams of all four regions are matched by means of a function  $Q: X \times X \times X \rightarrow X$  in the neighborhood of each double point. This function is called a quazoid over the set  $X$ . In the paper we construct two infinite series of quazoids. The first series is formed by linear quazoids over finite rings. The second series consists of quazoids generated by finite biquasiles. The invariants of knots and links generated by quazoids are nontrivial and can be used to distinguish knots. We show that all knots and links admitting diagrams with at most six double points are distinguished by linear quazoids over  $\mathbb{Z}_n$ , where  $n \leq 11$ . We give results of the computer enumeration of all different quazoids over sets whose cardinality does not exceed 4.

Keywords: knot, quazoid, biquasile, invariant.

MSC: 57M25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-212-221

## Введение

Статья посвящена определению квазоидов и построению их примеров над конечными множествами. Квазоиды представляют собой алгебраические объекты, подобные биквандам (см. [1]). Каждый квазоид порождает инвариант узлов, который может быть выражен в терминах числа правильных раскрасок областей, на которые диаграмма узла разбивает двумерную сферу. Правильность раскраски элементами конечного множества означает, что в окрестности каждой двойной точки диаграммы цвета всех четырех областей должны быть согласованы. Понятие квазоида тесно связано с понятием биквазиля, предложенным С. Нельсоном в работе [2]. Фактически квазоиды являются обобщениями биквазилей.

В разд. 1 дается определение квазоида над конечным множеством. Доказывается, что число правильных раскрасок диаграммы узла (или зацепления) является корректно определенным инвариантом ориентированных узлов и зацеплений. Раздел 2 посвящен построению примера одной бесконечной серии квазоидов. Эти квазоиды рассматриваются над конечными кольцами

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00690).

и называются линейными. Первая половина разд. 3 посвящена описанию того, как каждый конечный биквазиль порождает квазоид. Фактически это дает еще один способ построения квазоидов. Во второй половине разд. 3 описываются результаты эксперимента по различению узлов и зацеплений, допускающих диаграммы с не более, чем шестью двойными точками. Оказалось, что все эти узлы и зацепления различаются линейными квазоидами над  $\mathbb{Z}_n$ , где  $n \leq 11$ . С помощью компьютерного перебора были найдены все различные квазоиды над множествами, мощность которых не превосходит 4. С точностью до естественной эквивалентности существует всего 2 квазоида над множеством мощности 2, ровно 7 квазоидов над множеством мощности 3 и 37 квазоидов над множеством мощности 4. Приводятся примеры всех квазоидов над множеством мощности 4, которые не порождаются никакими биквазилями.

### 1. Понятие квазоида

Пусть  $K$  — ориентированный узел (или зацепление) в  $S^3$  и  $D$  — его диаграмма на сфере  $S^2$ . Обозначим  $\Delta = \{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$  — множество областей, на которые диаграмма  $D$  разбивает сферу  $S^2$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $X$  — конечное множество и  $Q, \bar{Q}: X \times X \times X \rightarrow X$  — два отображения. Раскраской диаграммы  $D$  элементами множества  $X$  называется отображение  $\xi: \Delta \rightarrow X$ . Раскраска  $\xi$  называется *правильной*, если в каждой положительной двойной точке диаграммы  $D$  выполняется соотношение

$$Q(\xi(\Delta_i), \xi(\Delta_j), \xi(\Delta_k)) = \xi(\Delta_l),$$

а в каждой отрицательной двойной точке — соотношение

$$\bar{Q}(\xi(\Delta_i), \xi(\Delta_j), \xi(\Delta_k)) = \xi(\Delta_l).$$

Здесь  $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$  и  $\Delta_l$  — области, подходящие к двойной точке так, как изображено на рис. 1 (слева — для положительной двойной точки, справа — для отрицательной).



Рис. 1. Области диаграммы в окрестности двойной точки (положительной слева и отрицательной справа).

Удобно представлять множество  $X$  как о множество цветов, которыми красятся области диаграммы узла на двумерной сфере. Естественный вопрос состоит в том, каким соотношениям должны удовлетворять отображения  $Q$  и  $\bar{Q}$ , чтобы число правильных раскрасок диаграммы  $D$  элементами множества  $X$  не зависело от диаграммы  $D$ , а определялось лишь самим узлом  $K$ .

**Теорема 1.** Пусть  $X$  — конечное множество и  $Q: X \times X \times X \rightarrow X$  — отображение, удовлетворяющее двум следующим свойствам:

(Q1) Уравнение  $Q(x, a, b) = y$  однозначно разрешимо по каждому из трех аргументов  $x, a, b$ ;

(Q2)  $\forall x, y, a, b \in X$  выполняются два соотношения:

$$Q(Q(x, a, b), a, Q(b, Q(x, a, b), y)) = Q(x, a, Q(b, x, y)),$$

$$Q(b, Q(x, a, b), y) = Q(Q(b, x, y), Q(x, a, Q(b, x, y)), y).$$

Зададим отображение  $\bar{Q}: X \times X \times X \rightarrow X$  правилом

$$\forall x, a, b \in X \text{ значение } \bar{Q}(x, a, b) \text{ совпадает с таким } y \in X, \text{ что } Q(y, a, b) = x.$$

Тогда число правильных раскрасок элементами множества  $X$  любых двух диаграмм одного ориентированного узла (или зацепления) совпадают.

**З а м е ч а н и е 1.** Свойство (Q1) означает, что

- 1)  $\forall a, b, y \in X \exists! x \in X: Q(x, a, b) = y;$
- 2)  $\forall x, b, y \in X \exists! a \in X: Q(x, a, b) = y;$
- 3)  $\forall x, a, y \in X \exists! b \in X: Q(x, a, b) = y.$

В частности, отображение  $\bar{Q}$  в формулировке теоремы 1 определено корректно. Более того, уравнение  $\bar{Q}(x, a, b) = y$  также однозначно разрешимо по каждому из трех аргументов  $x, a, b$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы 1. В силу [3, теорема 1.2] достаточно проверить, что число правильных раскрасок диаграммы ориентированного узла (или зацепления) не меняется при каждом из пяти ориентированных движений Рейдемейстера R1.1, R1.2, R2.1, R2.2 и R3 (рис. 2).

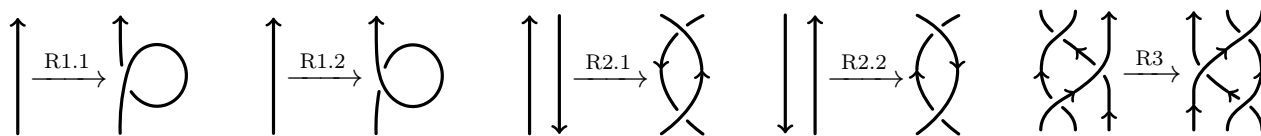


Рис. 2. Ориентированные движения Рейдемейстера.

**Движение R1.1.** Пусть диаграмма  $D''$  некоторого узла получается из диаграммы  $D'$  того же узла в результате движения R1.1. Покажем, что существует естественная биекция между множествами правильных раскрасок диаграмм  $D'$  и  $D''$ . Пусть  $\Delta_i, \Delta_k$  — области диаграммы  $D'$ , участвующие в движении R1.1, а  $\Delta_j$  — новая область диаграммы  $D''$  (см. рис. 3). Пусть  $\xi'$  — правильная раскраска диаграммы  $D'$ . Построим правильную раскраску  $\xi''$  диаграммы  $D''$ . Для этого все области диаграммы  $D''$ , отличные от  $\Delta_i, \Delta_j$  и  $\Delta_k$ , покрасим теми же элементами множества  $X$ , что и соответствующие им области диаграммы  $D'$ . Положим  $\xi''(\Delta_i) = \xi'(\Delta_i)$ ,  $\xi''(\Delta_k) = \xi'(\Delta_k)$  и  $\xi''(\Delta_j) = a$ , где цвет  $a \in X$  выберем так, чтобы выполнялось равенство  $Q(\xi''(\Delta_i), a, \xi''(\Delta_k)) = \xi''(\Delta_i)$ . В силу свойства (Q1) цвет  $a$  этим правилом определяется однозначно при любых комбинациях цветов  $\xi''(\Delta_i)$  и  $\xi''(\Delta_k)$ . Следовательно, сопоставление  $\xi' \mapsto \xi''$  является биекцией.

**Движение R1.2.** Этот случай аналогичен предыдущему. Биективность сопоставления  $\xi' \mapsto \xi''$  следует из однозначной разрешимости уравнения  $\bar{Q}(x, a, b) = y$  по аргументу  $a$ .

**Движение R2.1.** Пусть диаграмма  $D''$  получается из диаграммы  $D'$  в результате движения R2.1 и  $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_l$  — области диаграммы  $D'$ , участвующие в этом движении. Обозначим

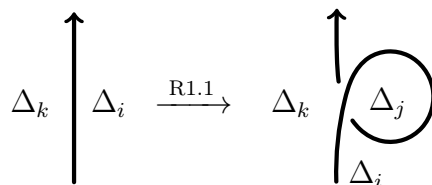


Рис. 3. Области диаграммы  $D'$  (слева) и получающейся в результате движения R1.1 диаграммы  $D''$  (справа).

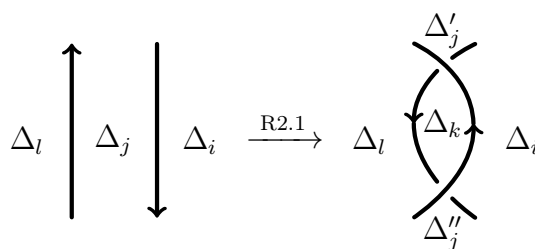


Рис. 4. Области диаграммы  $D'$  (слева) и получающейся в результате движения R2.1 диаграммы  $D''$  (справа).

через  $\Delta_k$  новую область диаграммы  $D''$  и через  $\Delta'_j, \Delta''_j$  — области, на которые разбивается область  $\Delta_j$  при движении R2.1 (см. рис. 4). Пусть  $\xi'$  — правильная раскраска диаграммы  $D'$ . Построим правильную раскраску  $\xi''$  диаграммы  $D''$ . Как и в предыдущих случаях, все области диаграммы  $D''$ , отличные от  $\Delta_i, \Delta'_j, \Delta''_j, \Delta_k$  и  $\Delta_l$ , покрасим теми же элементами множества  $X$ , что и соответствующие им области диаграммы  $D'$ . Положим  $\xi''(\Delta_i) = \xi'(\Delta_i)$ ,  $\xi''(\Delta_l) = \xi'(\Delta_l)$  и  $\xi''(\Delta'_j) = \xi'(\Delta_j)$ . Для правильности раскраски  $\xi''$  достаточно, чтобы цвета  $\xi''(\Delta_i), \xi''(\Delta'_j), \xi''(\Delta''_j), \xi''(\Delta_k)$  и  $\xi''(\Delta_l)$  удовлетворяли системе уравнений

$$\begin{cases} Q(\xi''(\Delta_i), \xi''(\Delta'_j), \xi''(\Delta_k)) = \xi''(\Delta_l), \\ \overline{Q}(\xi''(\Delta_l), \xi''(\Delta''_j), \xi''(\Delta_k)) = \xi''(\Delta_i). \end{cases}$$

В силу свойства (Q1) значение  $\xi''(\Delta_k)$  однозначно определяется первым уравнением, а в силу взаимосвязи между отображениями  $Q$  и  $\overline{Q}$  значения  $\xi''(\Delta'_j)$  и  $\xi''(\Delta''_j)$  совпадают. Следовательно, сопоставление  $\xi' \mapsto \xi''$  является биекцией.

*Движение R2.2.* Этот случай аналогичен предыдущему. Биективность сопоставления  $\xi' \mapsto \xi''$  следует из однозначной разрешимости уравнения  $Q(x, a, b) = y$  по аргументу  $a$  и взаимосвязи между отображениями  $Q$  и  $\overline{Q}$ .

*Движение R3.* Пусть диаграмма  $D''$  получается из диаграммы  $D'$  в результате движения R3. Обозначим через  $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k, \Delta_l, \Delta_p, \Delta_q, \Delta_r$  области диаграммы  $D'$  и через  $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k, \Delta_l, \Delta'_p, \Delta'_q, \Delta'_r$  области диаграммы  $D''$ , участвующие в этом движении (см. рис. 5). Пусть  $\xi'$  — правильная раскраска диаграммы  $D'$ . Построим правильную раскраску  $\xi''$  диаграммы  $D''$ . Как и в предыдущих случаях, все области диаграммы  $D''$ , отличные от  $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k, \Delta_l, \Delta'_p, \Delta'_q$  и  $\Delta'_r$ , покрасим теми же элементами множества  $X$ , что и соответствующие им области диаграммы  $D'$ . Положим  $\xi''(\Delta_i) = \xi'(\Delta_i)$ ,  $\xi''(\Delta_j) = \xi'(\Delta_j)$ ,  $\xi''(\Delta_k) = \xi'(\Delta_k)$  и  $\xi''(\Delta_l) = \xi'(\Delta_l)$ . Заметим, что значения  $\xi'(\Delta_r)$  и  $\xi'(\Delta_q)$  однозначно определяются значениями  $\xi'(\Delta_i), \xi'(\Delta_j), \xi'(\Delta_k)$  и  $\xi'(\Delta_l)$ . Аналогичным образом значения  $\xi''(\Delta'_r)$  и  $\xi''(\Delta'_q)$  однозначно определяются значениями  $\xi''(\Delta_i), \xi''(\Delta_j), \xi''(\Delta_k)$  и  $\xi''(\Delta_l)$ . Поэтому для биективности сопоставления  $\xi' \mapsto \xi''$  достаточно проверить, что  $\xi'(\Delta_q) = \xi''(\Delta'_q)$  и  $\xi'(\Delta_r) = \xi''(\Delta'_r)$ . Непосредственные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \xi'(\Delta_q) &= Q\left(\xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_l), Q(\xi'(\Delta_j), \xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_i))\right), \\ \xi'(\Delta_r) &= Q\left(Q(\xi'(\Delta_j), \xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_i)), Q(\xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_l), Q(\xi'(\Delta_j), \xi'(\Delta_k), \xi'(\Delta_i)))\right), \xi'(\Delta_i)), \\ \xi''(\Delta'_q) &= Q\left(Q(\xi''(\Delta_k), \xi''(\Delta_l), \xi''(\Delta_j)), \xi''(\Delta_l), Q(\xi''(\Delta_j), Q(\xi''(\Delta_k), \xi''(\Delta_l), \xi''(\Delta_j)), \xi''(\Delta_i)))\right), \\ \xi''(\Delta'_r) &= Q\left(\xi''(\Delta_j), Q(\xi''(\Delta_k), \xi''(\Delta_l), \xi''(\Delta_j)), \xi''(\Delta_i)\right). \end{aligned}$$

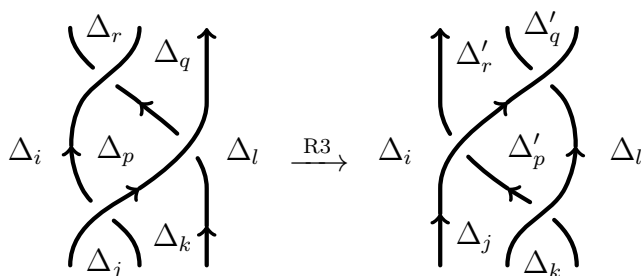


Рис. 5. Области диаграммы  $D'$  (слева) и получающейся в результате движения R3 диаграммы  $D''$  (справа).

Требуемые равенства следуют из свойства (Q2) подстановкой  $\xi'(\Delta_k) = \xi''(\Delta_k) = x, \xi'(\Delta_i) = \xi''(\Delta_i) = y, \xi'(\Delta_l) = \xi''(\Delta_l) = a$  и  $\xi'(\Delta_j) = \xi''(\Delta_j) = b$ . Теорема доказана.

**О п р е д е л е н и е 2.** Пусть  $X$  — конечное множество. Отображение  $Q: X \times X \times X \rightarrow X$  называется *квазоидом над  $X$* , если оно удовлетворяет свойствам (Q1) и (Q2) из формулировки теоремы 1.

**З а м е ч а н и е 2.** Пусть  $K$  — ориентированный узел (или зацепление) и  $Q: X \times X \times X \rightarrow X$  — квазоид над конечным множеством  $X$ . Обозначим через  $\mathcal{C}_{X,Q}(K)$  число правильных раскрасок диаграммы узла  $K$  элементами множества  $X$ . Из теоремы 1 следует, что это число является корректно определенным инвариантом узла. Отображение  $\bar{Q}: X \times X \times X \rightarrow X$  при этом определяется так, как описано в формулировке теоремы 1. В работе [4] строится другой инвариант узлов, основанный на тех же идеях, что использовались при построении квазоидов.

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть  $Q_1, Q_2: X \times X \times X \rightarrow X$  — два квазоида над множеством  $X$ . Они называются *эквивалентными*, если существует такая биекция  $h: X \rightarrow X$ , что для любых  $x, a, b \in X$  верно равенство  $Q_1(h(x), h(a), h(b)) = h(Q_2(x, a, b))$ .

Из определения инварианта  $\mathcal{C}_{X,Q}$  следует, что если квазоиды  $Q_1$  и  $Q_2$  над множеством  $X$  эквивалентны, то для любого узла (или зацепления)  $K$  верно равенство  $\mathcal{C}_{X,Q_1}(K) = \mathcal{C}_{X,Q_2}(K)$ .

## 2. Примеры квазоидов

**П р и м е р 1.** Пусть  $X = \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ . Отображение  $Q(x, a, b) = x - a + b$  является квазоидом над  $\mathbb{Z}_3$ . Легко вычислить, что в этом случае  $\bar{Q}(x, a, b) = x + a - b$ .

**П р и м е р 2.** Пусть  $Q$  — квазоид над  $\mathbb{Z}_3$  из примера 1. Значение инварианта  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_3,Q}$  для узла “восьмерка” (узел  $4_1$  на рис. 8) равно 9. Все девять правильных раскрасок диаграммы изображены на рис. 6.

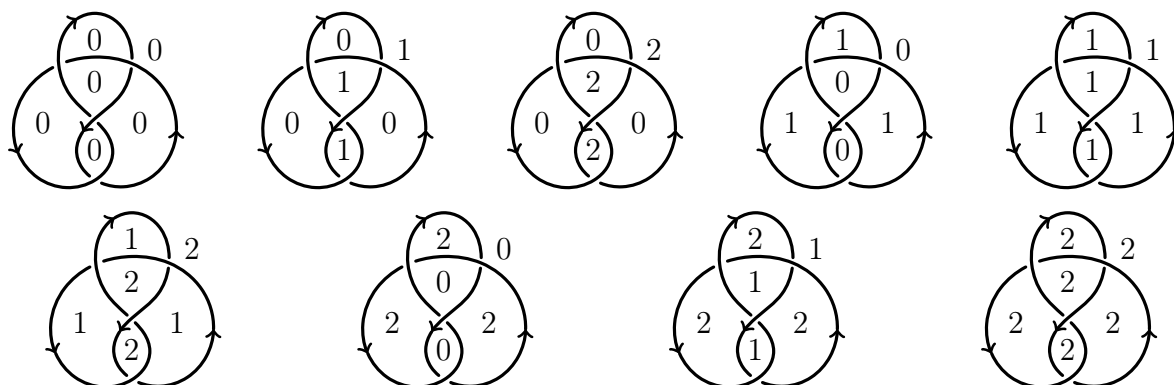


Рис. 6. Все 9 правильных раскрасок узла “восьмерка” квазоидом из примера 1.



Следующая теорема дает обобщение квазоида из примера 1.

**Теорема 2.** Пусть  $X$  — произвольное конечное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей и  $\alpha, \beta \in X$  — два обратимых элемента. отображение  $Q: X \times X \times X \rightarrow X$ , заданное формулой

$$Q(x, a, b) = \alpha\beta \cdot x - \alpha \cdot a + \beta \cdot b,$$

является квазоидом над кольцом  $X$ .

**Доказательство.** Разрешимость уравнения  $Q(x, a, b) = y$  по каждому из аргументов  $x, a, b$  следует из обратимости элементов  $\alpha, \beta \in X$ . В самом деле, если  $\alpha\beta \cdot x - \alpha \cdot a + \beta \cdot b = y$ , то

$$x = \frac{1}{\alpha\beta} \cdot y + \frac{1}{\beta} \cdot a - \frac{1}{\alpha} \cdot b, \quad a = \beta \cdot x - \frac{1}{\alpha} \cdot y + \frac{\beta}{\alpha} \cdot b, \quad b = -\alpha \cdot x + \frac{1}{\beta} \cdot y + \frac{\alpha}{\beta} \cdot a.$$

Справедливость свойства (Q2) устанавливается прямой подстановкой:

$$\begin{aligned} Q(Q(x, a, b), a, Q(b, Q(x, a, b), y)) &= Q(x, a, Q(b, x, y)) = -\alpha \cdot a + \alpha\beta^2 \cdot b + \beta^2 \cdot y, \\ Q(b, Q(x, a, b), y) &= Q(Q(b, x, y), Q(x, a, Q(b, x, y)), y) = \alpha^2 \cdot a - \alpha^2\beta \cdot x + \beta \cdot y. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**О п р е д е л е н и е 4.** Квазоид из формулировки теоремы 2 называется *линейным*. Каждый линейный квазоид над кольцом  $X$  однозначно задается выбором двух обратимых элементов  $\alpha, \beta \in X$ . Такой квазоид будем обозначать через  $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ .

**З а м е ч а н и е 3.** Пусть  $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$  — линейный квазоид над конечным кольцом  $X$  и  $D$  — диаграмма ориентированного узла (или зацепления). Каждой двойной точке диаграммы сопоставим уравнения

$$\alpha\beta \cdot \Delta_i - \alpha \cdot \Delta_j + \beta \cdot \Delta_k - \Delta_l = 0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\alpha\beta} \cdot \Delta_i + \frac{1}{\beta} \Delta_j - \frac{1}{\alpha} \cdot \Delta_k - \Delta_l = 0$$

в зависимости от того, является эта точка положительной или отрицательной соответственно. В этих уравнениях  $\Delta_i, \Delta_j, \Delta_k$  и  $\Delta_l$  являются формальными неизвестными, отвечающими областям диаграммы  $D$  и подходящими к двойным точкам так, как указано на рисунке 1. Значение инварианта  $\mathcal{C}_{X, \mathcal{L}_{\alpha, \beta}}(D)$  совпадает с числом решений построенной системы уравнений над кольцом  $X$ .

В работе [5] при определении полинома Александра для узлов каждой двойной точке диаграммы сопоставляется уравнения

$$t \cdot \Delta_k - t \cdot \Delta_i + \Delta_j - \Delta_l = 0 \quad \text{или} \quad t \cdot \Delta_l - t \cdot \Delta_k + \Delta_i - \Delta_j = 0$$

в зависимости от того, является эта точка положительной или отрицательной соответственно. Для одной и той же диаграммы узла матрица Александра и матрица коэффициентов системы уравнений, построенной по линейному квазоиду  $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ , совпадают при  $\alpha = \beta = t = -1$ .

### 3. Связь квазоидов с биквазилями

Существует тесная связь между квазоидами и *биквазилями* (*biquasiles*), предложенными С. Нельсоном в работе [2]. Фактически понятие квазоида является обобщением понятия биквазиля.

**О п р е д е л е н и е 5.** Пусть  $X$  — множество, на котором заданы две бинарные алгебраические операции  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  и  $\cdot$ :  $X \times X \rightarrow X$ , каждая из которых обладает правой и левой обратимостью. Множество  $X$  называется *биквазилем*, если для любых  $a, b, x, y \in X$  выполняются два соотношения

$$\begin{aligned}x * (a \cdot (b * (x \cdot y))) &= (x * (a \cdot b)) * (a \cdot (b * ((x * (a \cdot b)) \cdot y))), \\b * ((x * (a \cdot b)) \cdot y) &= (b * (x \cdot y)) * ((x * (a \cdot (b * (x \cdot y)))) \cdot y).\end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е 4.** Правая и левая обратимость операций  $*$ ,  $\cdot$ :  $X \times X \rightarrow X$  означает, что выполняются следующие свойства:

- 1)  $\forall a, c \in X \exists! b \in X: a * b = c$ . Будем обозначать  $b = a \setminus^* c$ ;
- 2)  $\forall b, c \in X \exists! a \in X: a * b = c$ . Будем обозначать  $a = c /^* b$ ;
- 3)  $\forall a, c \in X \exists! b \in X: a \cdot b = c$ . Будем обозначать  $b = a \setminus c$ ;
- 4)  $\forall b, c \in X \exists! a \in X: a \cdot b = c$ . Будем обозначать  $a = c / b$ .

Если  $X$  — биквазиль, то для любых  $x, y \in X$

$$(x * y) /^* y = x = y \setminus^* (y * x) \text{ и } (x \cdot y) / y = x = y \setminus (y \cdot x).$$

**Теорема 3.** Пусть  $X$  — конечный биквазиль с двумя бинарными алгебраическими операциями  $*$ ,  $\cdot$ :  $X \times X \rightarrow X$ . отображение  $Q: X \times X \times X \rightarrow X$ , заданное формулой

$$Q(x, a, b) = x * (a \cdot b),$$

является квазоидом над  $X$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Справедливость свойства (Q1) следует из правой и левой обратимости операций  $*$  и  $\cdot$ . В самом деле, если  $x * (a \cdot b) = y$ , то  $x = y /^* (a \cdot b)$ ,  $a = (x \setminus^* y) / b$ ,  $b = a \setminus (x \setminus^* y)$ .

Справедливость свойства (Q2) проверяется непосредственной подстановкой:

$$\begin{aligned}Q(x, a, Q(b, x, y)) &= x * (a \cdot (b * (x \cdot y))) = (x * (a \cdot b)) * (a \cdot (b * ((x * (a \cdot b)) \cdot y))) \\&= Q(Q(x, a, b), a, Q(b, Q(x, a, b), y)), \\Q(b, Q(x, a, b), y) &= b * ((x * (a \cdot b)) \cdot y) = (b * (x \cdot y)) * ((x * (a \cdot (b * (x \cdot y)))) \cdot y) \\&= Q(Q(b, x, y), Q(x, a, Q(b, x, y)), y).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е 5** Если квазоид  $Q: X \times X \times X \rightarrow X$  над множеством  $X$  задан так, как описано в теореме 3, то отображение  $\bar{Q}: X \times X \times X \rightarrow X$ , необходимое для вычисления инварианта  $C_{X,Q}$ , задается формулой  $\bar{Q}(x, a, b) = x /^* (a \cdot b)$ .

Пусть  $\mathcal{B} = (X, *, \cdot)$  — конечный биквазиль и  $Q_{\mathcal{B}}: X \times X \times X \rightarrow X$  — квазоид над  $X$ , построенный так, как описано в теореме 3. В этом случае будем говорить, что квазоид  $Q_{\mathcal{B}}$  порожден биквазилом  $\mathcal{B}$ . Сопоставление каждому конечному биквазилю порожденный им квазоид не является инъективным. Это следует из того, что существует 72 различных биквазиля мощности 3 и только 12 различных квазоидов, образующих 7 классов эквивалентностей (см. определение 3), над множеством из трех элементов. Более того, это сопоставление не является сюръективным. С помощью компьютерного перебора были найдены все различные квазоиды над множеством из четырех элементов. Таких квазоидов ровно 168, и они разбиваются на 37 классов эквивалентностей. С другой стороны, существует 2880 различных биквазилей мощности 4, но они порождают всего 120 различных квазоидов, которые разбиваются на 29 классов эквивалентностей. Оставшиеся 48 квазоидов, образующие 8 классов эквивалентностей, не порождаются никакими биквазилями.

**П р и м е р 3.** В табл. 1 приведены примеры неэквивалентных квазоидов над множеством  $X = \{0, 1, 2, 3\}$ , которые не порождаются никакими биквазилями мощности 4. Каждый из квазоидов  $Q(x, a, b)$  задается таблицей  $4 \times 4$ . Строки этой таблицы отвечают различным значениям параметра  $x \in X$ , столбцы отвечают различным значениям параметра  $a \in X$ . При фиксированных  $x, a \in X$  отображение  $Q(x, a, b)$  является биекцией на множестве  $X$ . В ячейках таблицы

Т а б л и ц а 1

Примеры квазоидов над множеством  $\{0, 1, 2, 3\}$ ,  
которые не порождаются никакими биквазилями

	0	1	2	3		0	1	2	3
0	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)	0	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)
1	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)	1	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)
2	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	2	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)
3	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	3	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)	0	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)
1	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)	1	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)
2	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)	2	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(1, 0, 3, 2)	(0, 1, 2, 3)
3	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)	3	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(0, 1, 2, 3)	(1, 0, 3, 2)
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)	0	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)
1	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)	1	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)
2	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	2	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)
3	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	3	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)
	0	1	2	3		0	1	2	3
0	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)	0	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)
1	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	(3, 2, 1, 0)	(2, 3, 0, 1)	1	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	(2, 3, 0, 1)	(3, 2, 1, 0)
2	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)	2	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(0, 1, 3, 2)	(1, 0, 2, 3)
3	(2, 3, 1, 0)	(3, 2, 0, 1)	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)	3	(3, 2, 0, 1)	(2, 3, 1, 0)	(1, 0, 2, 3)	(0, 1, 3, 2)

указаны соответствующие биекции, заданные упорядоченными последовательностями элементов из множества  $X$ .

**З а м е ч а н и е 6.** Пусть  $X$  — произвольное конечное ассоциативное кольцо с единицей (с операциями  $+$ ,  $\cdot$ ),  $\alpha, \beta \in X$  — два обратимых элемента и операции  $*_X: X \times X \rightarrow X$  и  $\cdot_X: X \times X \rightarrow X$  заданы формулами

$$a *_X b = \alpha\beta \cdot a - \alpha \cdot b \text{ и } a \cdot_X b = a - \frac{\beta}{\alpha} \cdot b.$$

Непосредственно проверяется, что  $\mathcal{B}_X = (X, *_X, \cdot_X)$  является биквазилем. Квазоид  $Q_{\mathcal{B}_X}: X \times X \times X \rightarrow X$ , порожденный этим биквазилем  $\mathcal{B}_X$ , является линейным квазоидом  $\mathcal{L}_{\alpha, \beta}$ . В самом деле

$$Q_{\mathcal{B}_X}(x, a, b) = x *_X (a \cdot_X b) = \alpha\beta \cdot x - \alpha \cdot \left( a - \frac{\beta}{\alpha} \cdot b \right) = \alpha\beta \cdot x - \alpha \cdot a + \beta \cdot b.$$

В частности, это означает, что если квазоид не порождается никаким биквазилем, то он не является линейным.



Рис. 7. Правильная раскраска областей диаграммы биквазилем в окрестности двойной точки (положительной слева и отрицательной справа).

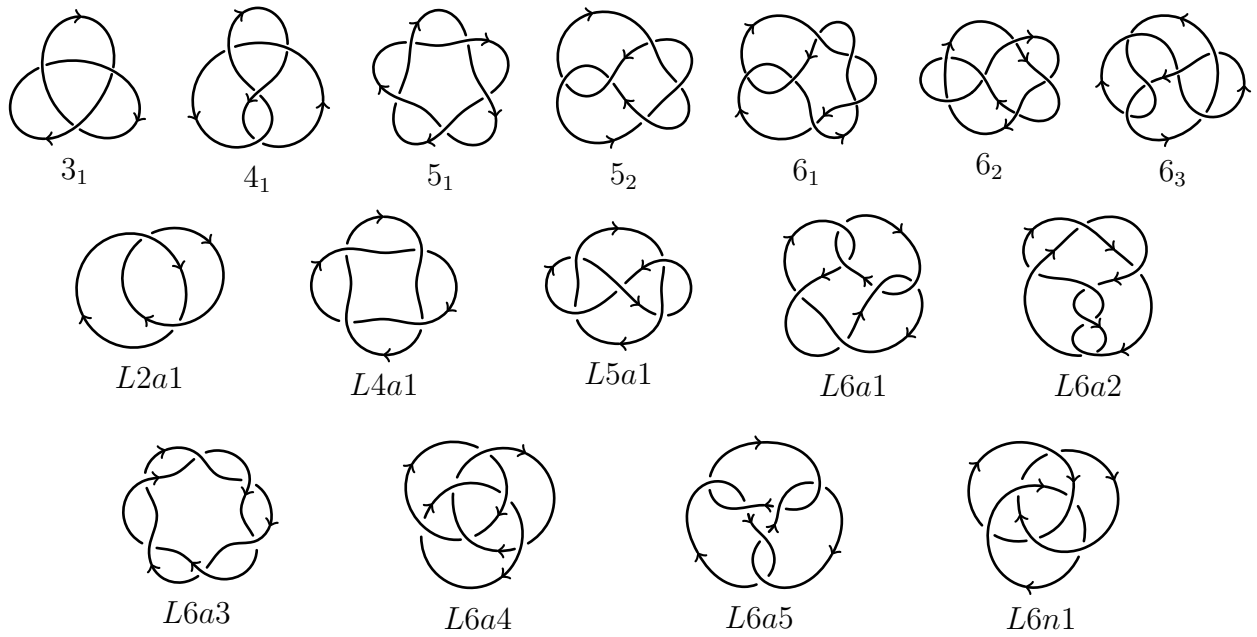


Рис. 8. Ориентированные узлы и зацепления, допускающие диаграммы с не более чем шестью двойными точками.

Т а б л и ц а 2  
Значения инварианта  $C_{\mathbb{Z}_n, \mathcal{L}_{\alpha, \beta}}$  для узлов

	$3_1$	$4_1$	$5_1$	$5_2$	$6_1$	$6_2$	$6_3$
$\mathbb{Z}_3, \mathcal{L}_{1,1}$	27	9	9	9	27	9	9
$\mathbb{Z}_4, \mathcal{L}_{1,1}$	16	16	16	16	16	16	16
$\mathbb{Z}_5, \mathcal{L}_{1,1}$	25	125	125	25	25	25	25
$\mathbb{Z}_5, \mathcal{L}_{1,2}$	25	25	25	25	125	25	25
$\mathbb{Z}_6, \mathcal{L}_{1,1}$	108	36	36	36	108	36	36
$\mathbb{Z}_7, \mathcal{L}_{1,1}$	49	49	49	343	49	49	49
$\mathbb{Z}_{11}, \mathcal{L}_{1,1}$	121	121	121	121	121	1331	121
$\mathbb{Z}_{11}, \mathcal{L}_{1,2}$	121	1331	121	121	121	121	121

Т а б л и ц а 3  
Значения инварианта  $C_{\mathbb{Z}_n, \mathcal{L}_{\alpha, \beta}}$  для зацеплений

	$L2a1$	$L4a1$	$L5a1$	$L6a1$	$L6a2$	$L6a3$	$L6a4$	$L6a5$	$L6n1$
$\mathbb{Z}_3, \mathcal{L}_{1,1}$	9	9	9	27	9	27	9	27	9
$\mathbb{Z}_4, \mathcal{L}_{1,1}$	32	64	64	64	32	32	256	64	64
$\mathbb{Z}_5, \mathcal{L}_{1,1}$	25	25	25	25	125	25	25	25	25
$\mathbb{Z}_5, \mathcal{L}_{1,2}$	25	125	25	25	25	25	25	25	25
$\mathbb{Z}_6, \mathcal{L}_{1,1}$	72	72	72	216	72	216	144	432	144
$\mathbb{Z}_7, \mathcal{L}_{1,1}$	49	49	49	49	49	49	49	49	49
$\mathbb{Z}_{11}, \mathcal{L}_{1,1}$	121	121	121	121	121	121	121	121	121
$\mathbb{Z}_{11}, \mathcal{L}_{1,2}$	121	121	121	121	121	121	121	121	121

В работе [2] С. Нельсон строит инвариант ориентированных зацеплений  $\Phi_{\mathcal{B}}^{\mathbb{Z}}(D)$ , равный числу правильных раскрасок диаграммы  $D$  элементами биквазиля  $\mathcal{B} = (X, *, \cdot)$ . Этот инвари-

ант аналогичен инварианту  $\mathcal{C}_{X,Q}$ . Отличие состоит в том, что в случае использования биквазиля раскраска диаграммы считается правильной, если в окрестности каждой двойной точки цвета областей таковы, как изображено на рис. 7. Из теоремы 3 следует, что инварианты  $\Phi_B^{\mathbb{Z}}$  и  $\mathcal{C}_{X,Q_B}$  совпадают.

Был проведен эксперимент по вычислению значений инварианта  $\mathcal{C}_{X,Q}$  для ориентированных узлов и зацеплений, допускающих диаграммы с не более чем шестью двойными точками. Все эти узлы и зацепления с фиксированными ориентациями изображены на рис. 8 (используются те же обозначения, что и в “Атласе узлов” [6]). Оказалось, что для различения всех рассмотренных узлов и зацеплений достаточно нескольких линейных квазоидов над кольцами, мощность которых не превосходит 11. Результаты вычислений значений инварианта  $\mathcal{C}_{X,Q}$  представлены в табл. 2 и 3. Столбцы этих таблиц отвечают различным узлам и зацеплениям, строки — различным кольцам и линейным квазоидам над ними. В ячейке, стоящей на пересечении строки, отвечающей квазоиду  $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}$  над кольцом  $\mathbb{Z}_n$ , и столбца, отвечающего узлу (или зацеплению)  $K$ , стоит значение  $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_n, \mathcal{L}_{\alpha,\beta}}(K)$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Fenn R., Jordan-Santana M, Kauffman L.** Biquandles and virtual links // *Topology Appl.* 2004. Vol. 145, no. 1–3. P. 157–175.
2. **Needell D., Nelson S.** Biquasiles and dual graph diagrams // *J. Knot Theory Ramifications.* 2017. Vol. 26, no. 8. 1750048. 18 p. doi: 10.1142/S0218216517500481.
3. **Polyak M.** Minimal generating sets of Reidemeister moves // *Quantum Topology.* 2010. Vol. 1, no. 4. P. 399–411. doi: 10.4171/QT/10.
4. **Yang Z.** Regional knot invariants // *J. Knot Theory Ramifications.* 2017. Vol. 26, no. 6. 1742006. doi: 10.1142/S0218216517420068.
5. **Alexander J. W. Alexander J. W.** Topological invariants of knots and links // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1928. Vol. 30, no. 2. P. 275–306.
6. Knot Allas [site]. URL: [http://katlas.org/wiki/Main\\_Page](http://katlas.org/wiki/Main_Page).

Кораблёв Филипп Глебович

Поступила 31.08.2017

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

доцент кафедры компьютерной топологии и алгебры

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: [korablev@csu.ru](mailto:korablev@csu.ru)

### REFERENCES

1. Fenn R., Jordan-Santana M, Kauffman L. Biquandles and virtual links. *Topology Appl.*, 2004, vol. 145, no. 1–3, pp. 157–175.
2. Needell D., Nelson S. Biquasiles and dual graph diagrams. *J. Knot Theory Ramifications*, 2017, vol. 26, no. 8, 1750048, 18 p. doi: 10.1142/S0218216517500481.
3. Polyak M. Minimal generating sets of Reidemeister moves. *Quantum Topology*, 2010, vol. 1, no. 4, pp. 399–411. doi: 10.4171/QT/10.
4. Yang Z. Regional knot invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 2017, vol. 26, no. 6, 1742006. doi: 10.1142/S0218216517420068.
5. Alexander J. W. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1928, vol. 30, no. 2, pp. 275–306.
6. Knot Allas [site]. Available at: [http://katlas.org/wiki/Main\\_Page](http://katlas.org/wiki/Main_Page).

The paper was received by the Editorial Office on August 31, 2017.

*Filipp Glebovich Korablev*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: [korablev@csu.ru](mailto:korablev@csu.ru).

УДК 515.126.27+517.988.523

## О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК РАЗЛОЖИМЫХ МОНОТОННЫХ СУБОДНОРОДНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Вл. Д. Мазуров, А. И. Смирнов

Анализируется структура множества нетривиальных равновесий монотонной субоднородной дискретной динамической системы на неотрицательном ортанте конечномерного евклидова пространства при возможно более слабых дополнительных предположениях. При этом используется введенное авторами понятие локальной неразложимости нелинейного отображения. Показано, что необходимыми условиями существования положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на различных лучах, выходящих из начала координат, являются разложимость отображения хотя бы в одной из них и положительная однородность части компонент отображения на содержащих положительные неподвижные точки участках этих лучей. В частности, для вогнутых отображений это означает разложимость отображения в нуле. Как следствие, получено обобщение теоремы о единственности луча, содержащего положительные неподвижные точки такого отображения, использующее в качестве дополнительного условия лишь неразложимость отображения на множестве его положительных неподвижных точек. В этом случае множество всех положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения образует сплошную часть некоторого луча, выходящего из начала координат.

Ключевые слова: монотонное отображение, субоднородное отображение, локальная неразложимость отображения, неподвижные точки.

**VI. D. Mazurov, A. I. Smirnov. The structure of the fixed point set of a reducible monotone subhomogeneous mapping.**

We analyze the structure of the set of nontrivial equilibria for a monotone subhomogeneous discrete-time dynamical system on the nonnegative orthant of a finite-dimensional Euclidean space under as weak additional assumptions as possible. We use the notion of local irreducibility of a nonlinear mapping introduced by the authors. It is shown that, if a monotone subhomogeneous mapping has positive fixed points lying on different rays starting at the origin, then this mapping is reducible at at least one of them and a part of the components of the mapping are positively homogeneous on segments of these rays containing the positive fixed points. In particular, for concave mappings, this means the reducibility of the mapping at zero. As a result, we obtain a generalization of the theorem on the uniqueness of the ray containing the positive fixed points of such a mapping with the only additional assumption that the mapping is irreducible on the set of its positive fixed points. In this case, the set of all positive fixed points of a monotone subhomogeneous mapping forms a continuous part of some ray starting at the origin.

Keywords: monotone mapping, subhomogeneous mapping, local irreducibility of a mapping, fixed points.

**MSC:** 47N05, 37N25, 37N40

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-4-222-231

### 1. Постановка задачи и основные определения

Рассматривается итерационный процесс

$$x_{t+1} = F(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

на неотрицательном ортанте  $\mathbb{R}_+^q$  пространства  $\mathbb{R}^q$ . Предполагается, что отображение  $F$  имеет нулевую неподвижную точку:  $F(0) = 0$ . Асимптотические свойства итерационного процесса (1) для некоторых классов нелинейных отображений изучены для монотонных положительно однородных отображений в работах [1; 2], для монотонных субоднородных отображений в банаховых пространствах — в работе [3] (соответствующие определения будут даны ниже; обзор результатов по субоднородным отображениям можно найти в работах [3–7]). В частности, известно, что при достаточно сильных предположениях имеет место сходимость итерационного процесса (1) к положительной неподвижной точке отображения  $F$  в случае ее существования.

Условия существования ненулевой неподвижной точки монотонного субоднородного отображения изучались в работе [5]; в частности, получен критерий ее существования и единственности. Здесь же изучена структура множества неподвижных точек глобально неразложимого монотонного субоднородного отображения в ситуации, когда ненулевая неподвижная точка не является единственной.

Равенство  $F(\alpha x) = \alpha F(x)$  ( $0 < \alpha \neq 1$ ), выполненное для ненулевой неподвижной точки  $x$ , означает существование еще по крайней мере одной ненулевой неподвижной точки отображения  $F$  на бесконечном луче  $R_x = \{\alpha x : \alpha \in [0, +\infty)\}$ , содержащем точку  $x$ , который далее будем кратко называть просто *луч*. Поэтому при характеристике структуры множества неподвижных точек субоднородного отображения имеет смысл прежде всего рассмотреть случай, когда они лежат на одном луче.

Для некоторых классов отображений эта ситуация не имеет альтернативы: при некоторых дополнительных предположениях можно показать отсутствие положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на *разных* лучах, т. е. на лучах, имеющих только одну общую точку — начало координат. Это свойство первоначально было получено для класса монотонных субоднородных примитивных сепарабельных преобразований неотрицательного ортанта евклидова пространства [8], в работах [9; 10] оно установлено для сильно монотонной дискретной динамической системы в банаховом пространстве. В работе [3] для доказательства соответствующего утверждения помимо условий монотонности и субоднородности используется условие типа локальной примитивности отображения. В работе [5] для доказательства единственности луча, содержащего неподвижные точки, использовалось более слабое условие глобальной неразложимости.

Таким образом, необходимым условием существования положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на разных лучах, является условие его разложимости. В связи с этим возникает необходимость более тонкого анализа самого понятия глобальной неразложимости для того, чтобы получить более содержательные необходимые условия существования положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на разных лучах. Для решения этой задачи оказывается полезным введенное в работе [11] понятие локальной неразложимости отображения.

Цель данной работы — получение необходимых условий существования неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, лежащих на разных лучах, в терминах локальной неразложимости отображения, а также исследование структуры множества положительных неподвижных точек этого класса отображений при возможно более слабых дополнительных требованиях к отображению.

Будем использовать следующие обозначения:  $x \leq y$  означает  $y - x \in \mathbb{R}_+^q$ ,  $x < y$  означает  $y - x \in \text{int } \mathbb{R}_+^q$ ; пишем  $x \leq y$  в случае  $x \leq y$ ,  $x \neq y$ .

Векторы  $x = (x_1, x_2, \dots, x_q)$  и  $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x))$  будут кратко записываться в виде  $x = (x_i)$  и  $F(x) = (f_i(x))$  соответственно. Итерации отображения  $F$  обозначаются  $F^t(x)$  ( $t = 1, 2, \dots$ ),  $F^0(x) \equiv x$ . Для числа элементов конечного множества  $M$  используется обозначение  $|M|$ .

Используемые далее термины и понятия определены в работе [12]. Приведем здесь только определение основного требования к отображению  $F$ , которым в данной работе является свойство его субоднородности. Отображение  $F \in \{\mathbb{R}_+^q \mapsto \mathbb{R}_+^q\}$  называется *субоднородным*, если выполнено условие

$$F(\alpha x) \geq \alpha F(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+^q, \alpha \in [0, 1]). \quad (2)$$

Нетрудно показать, что субоднородность отображения равносильна свойству

$$F(\beta x) \leq \beta F(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+^q, \beta \in [1, +\infty)). \quad (3)$$

Заметим, что вогнутое на  $\mathbb{R}_+^q$  отображение является монотонным и субоднородным.

## 2. Понятие локальной неразложимости нелинейного отображения

Существуют различные обобщения понятия неразложимости (irreducibility, indecomposability) матрицы для нелинейных отображений (их обзор и некоторые свойства приведены в работах [11; 12]). В настоящее время классическим является определение неразложимости М. Моришимы [1]. Удобно ввести это определение с использованием следующих обозначений:

$$\begin{aligned} I^+(x, y) &= \{j \in \overline{1, q} : x_j > y_j\}, & I^0(x, y) &= \{j \in \overline{1, q} : x_j = y_j\}, \\ I^+(x) &= \{i \in \overline{1, q} : x_i > 0\}, & I^0(x) &= \{i \in \overline{1, q} : x_i = 0\}. \end{aligned}$$

Отображение  $F \in \{\mathbb{R}_+^q \mapsto \mathbb{R}_+^q\}$  называется *разложимым*, если

$$\exists x, y \in \mathbb{R}_+^q : \quad x \geq y, \quad I^0(x, y) \neq \emptyset, \quad I^0(x, y) \subseteq I^0(F(x), F(y)).$$

Соответственно отображение  $F$  называется *неразложимым*, если оно не является разложимым. Для монотонного отображения это означает следующее:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^q : \quad x \geq y, \quad I^0(x, y) \neq \emptyset \Rightarrow I^0(x, y) \cap I^+(F(x), F(y)) \neq \emptyset. \quad (4)$$

Поскольку далее используется также понятие неразложимости отображения в точке, будем называть неразложимое в смысле (4) отображение *глобально неразложимым* на  $\mathbb{R}_+^q$ .

Как уже отмечалось выше, наряду с классическим определением понятия глобальной неразложимости существует его локальный аспект [11]. Отображение  $F \in \{\mathbb{R}_+^q \mapsto \mathbb{R}_+^q\}$  называется *разложимым в точке*  $y \in \mathbb{R}_+^q$ , если

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^q : \quad x \geq y, \quad I^0(x, y) \neq \emptyset, \quad I^0(x, y) \subseteq I^0(F(x), F(y)). \quad (5)$$

Отображение, разложимое в каждой точке множества  $M$ , называется *разложимым на*  $M$ .

Соответственно монотонное отображение  $F$  является *неразложимым в точке*  $y$ , если

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^q : \quad x \geq y, \quad I^0(x, y) \neq \emptyset \Rightarrow I^0(x, y) \cap I^+(F(x), F(y)) \neq \emptyset.$$

Отображение, неразложимое в каждой точке множества  $M$ , называется *неразложимым на*  $M$ .

Отдельно рассмотрим случай неразложимости отображения в точке  $y = 0$ . Отображение  $F \in \{\mathbb{R}_+^q \mapsto \mathbb{R}_+^q\}$  называется *разложимым в нуле*, если

$$\exists x \in \mathbb{R}_+^q : \quad x \geq 0, \quad I^0(x) \neq \emptyset, \quad I^0(x) \subseteq I^0F(x). \quad (6)$$

Соответственно монотонное отображение  $F$  является *неразложимым в нуле*, если

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^q : \quad x \geq 0, \quad I^0(x) \neq \emptyset \Rightarrow I^0(x) \cap I^+F(x) \neq \emptyset.$$

Понятно, что глобальная неразложимость отображения означает неразложимость в любой точке  $\mathbb{R}_+^q$  и, в частности, неразложимость в нуле. Условия локальной неразложимости субоднородных отображений и их свойства рассмотрены в работе [12], как и некоторые условия совпадения понятий неразложимости в нуле и глобальной неразложимости.

Для монотонных субоднородных отображений неразложимость в нуле является более слабым свойством по сравнению с примитивностью в нуле [5, лемма 2.1.12]. Тем не менее неразложимость в нуле также гарантирует положительность ненулевых неподвижных точек.

Это важное свойство справедливо для любых неразложимых в нуле отображений. Действительно, предположив  $I^0(\bar{x}) \neq \emptyset$  для некоторого вектора  $\bar{x} \geq 0$ , из равенств  $f_i(\bar{x}) = \bar{x}_i$  получаем  $I^0(\bar{x}) \subseteq I^0(F(\bar{x}))$ , что в соответствии с (6) означает разложимость отображения  $F$  в нуле. Поэтому  $I^0(\bar{x}) = \emptyset$ , т. е.  $\bar{x} > 0$ .



### 3. Характеристика структуры множества неподвижных точек субоднородных монотонных отображений

В дополнение к требованиям монотонности и субоднородности предположим выполненным следующее естественное требование, исключающее возможность наличия тождественно нулевых компонент отображения  $F(x) = (f_i(x))$ :

$$\forall i \in \overline{1, q} \quad \exists x \in \mathbb{R}_+^q : f_i(x) > 0.$$

Это свойство всегда выполнено, например, для неразложимых в нуле отображений. Как показано в работе [12, замечание], это предположение гарантирует положительность образа всякого положительного вектора при монотонном субоднородном преобразовании:  $F(\text{int } \mathbb{R}_+^q) \subseteq \text{int } \mathbb{R}_+^q$ , что дает возможность использовать так называемую метрику Биркгофа—Томпсона [3; 13; 14]. Эта метрика, заданная на внутренности положительного конуса, весьма эффективна в исследованиях субоднородных динамических систем (см. обзоры [3; 5]). Субоднородное монотонное отображение является нерасширяющим в метрике Биркгофа—Томпсона (и, следовательно, непрерывно) на внутренности положительного конуса в банаховом пространстве [3, lemma 2.1.7]. Более того, субоднородное монотонное отображение всегда имеет непрерывное расширение, в данном случае, на весь конус  $\mathbb{R}_+^q$  [3, theorem 5.1.2], поэтому можно считать субоднородное монотонное отображение непрерывным на всем  $\mathbb{R}_+^q$ .

Пусть  $N_F$  обозначает множество ненулевых неподвижных точек отображения  $F$ ,  $N_F^+$  — множество положительных неподвижных точек отображения  $F$ , множество  $N_F^0 = N_F \cup \{0\}$  содержит все его неподвижные точки, включая нулевую. Как мы видели выше, для неразложимых в нуле отображений справедливо равенство  $N_F = N_F^+$ .

Далее нам понадобятся следующие свойства субоднородных функций [5, теорема 2.1.1], определенных на  $\mathbb{R}_+^q$  ( $f(0) = 0$ ):

$$f(\alpha_0 x) = \alpha_0 f(x), \quad 0 < \alpha_0 < 1 \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (\forall \alpha \in [\alpha_0, 1]), \quad (7)$$

$$f(\beta_0 x) = \beta_0 f(x), \quad \beta_0 > 1 \Rightarrow f(\beta x) = \beta f(x) \quad (\forall \beta \in [1, \beta_0]). \quad (8)$$

Для вогнутой на  $\mathbb{R}_+^q$  функции  $f(x)$  ( $f(0) = 0$ ) справедливо более сильное свойство:

$$f(\alpha_0 x) = \alpha_0 f(x), \quad 0 < \alpha_0 \neq 1 \Rightarrow f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad (\forall \alpha \in [0, \alpha_0]). \quad (9)$$

Следующее утверждение дает необходимые условия существования положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения на разных лучах. Напомним, что под лучом, определяемым точкой  $x \neq 0$ , понимается множество  $R_x = \{\alpha x : \alpha \in [0, +\infty)\}$ .

**Теорема.** Пусть отображение  $F \in \{\mathbb{R}_+^q \mapsto \mathbb{R}_+^q\}$  является монотонным и субоднородным,  $F(0) = 0$ . Если существуют положительные неподвижные точки  $\bar{x}, \bar{y}$  отображения  $F$ , лежащие на разных лучах, то отображение  $F$  разложимо хотя бы в одной из этих неподвижных точек и часть его компонент имеет участки положительной однородности на лучах  $R_{\bar{x}}, R_{\bar{y}}$ :

$$\exists I, \emptyset \neq I \neq \overline{1, q} : \quad f_i(\alpha x) = \alpha f_i(x) \quad (\forall i \in I, x \in \{\bar{x}, \bar{y}\}, \alpha \in \Delta_x), \quad (10)$$

где  $\Delta_x$  — некоторый интервал числовой оси.

Более того, если отображение  $F$  разложимо в точке  $x \in \{\bar{x}, \bar{y}\}$ , то оно разложимо также и на всем множестве  $H_x = \{\alpha x : \alpha \in \Delta_x\}$ .

**Доказательство.** Введем величины

$$a = \max\{\alpha : \bar{y} \geq \alpha \bar{x}\}, \quad b = \max\{\beta : \bar{x} \geq \beta \bar{y}\}. \quad (11)$$

В силу положительности векторов  $\bar{x}, \bar{y}$  эти величины также положительны. Справедливы также неравенства  $\bar{y} \geq a\bar{x}, \bar{x} \geq b\bar{y}$ , причем  $\emptyset \neq I^0(\bar{y}, a\bar{x}) \neq \overline{1, q}, \emptyset \neq I^0(\bar{x}, b\bar{y}) \neq \overline{1, q}$ , по

определению величин  $a, b$  и в силу предположения  $R_{\bar{x}} \cap R_{\bar{y}} = \{0\}$ . Хотя бы одна из этих величин, очевидно, строго меньше единицы.

Если  $a \in (0, 1)$ , то из неравенства  $\bar{y} \geq a\bar{x}$  в силу монотонности и субоднородности отображения  $F$ , благодаря неравенству (3), для всех  $i \in I = I^0(\bar{y}, a\bar{x})$  получаем

$$\bar{x}_i = a^{-1}\bar{y}_i = a^{-1}f_i(\bar{y}) \geq f_i(a^{-1}\bar{y}) \geq f_i(\bar{x}) = \bar{x}_i,$$

т. е.  $f_i(a^{-1}\bar{y}) = f_i(\bar{x})$  и  $f_i(a^{-1}\bar{y}) = a^{-1}f_i(\bar{y})$ . Первое равенство означает, согласно (5), разложимость отображения  $F$  в точке  $\bar{x}$ , второе, в силу свойства (8), — положительную однородность компонент  $f_i(x)$  ( $i \in I$ ) на участке со  $\{\bar{y}, a^{-1}\bar{y}\}$  луча  $R_{\bar{y}}$ , т. е. свойство (10) выполнено для точки  $x = \bar{y}$  при  $\Delta_{\bar{y}} = (1, a^{-1})$ .

Далее, точно так же используя монотонность и субоднородность отображения  $F$ , с учетом неравенства (2) получаем цепочку неравенств

$$\bar{y}_i = a\bar{x}_i = af_i(\bar{x}) \leq f_i(a\bar{x}) \leq f_i(\bar{y}) = \bar{y}_i.$$

Отсюда следуют равенства  $f_i(\bar{y}) = f_i(a\bar{x})$  и  $f_i(a\bar{x}) = af_i(\bar{x})$ , означающие разложимость отображения  $F$  в точке  $a\bar{x}$  и, на этот раз в силу свойства (7), положительную однородность компонент  $f_i(x)$  ( $i \in I$ ) отображения  $F$  на участке со  $\{a\bar{x}, \bar{x}\}$  луча  $R_{\bar{x}}$ , так что свойство (10) выполнено и для точки  $x = \bar{x}$  при  $\Delta_{\bar{x}} = (a, 1)$ .

Покажем разложимость отображения  $F$  также в точках  $\tilde{x} = \alpha\bar{x}$  при  $\alpha \in (a, 1)$ . Действительно, для вектора  $\tilde{y} = \beta\bar{y}$ , где  $\beta = \alpha a^{-1} \in [1, a^{-1}]$ , имеем  $I^0(\tilde{x}, \tilde{y}) = I^0(a\bar{x}, \bar{y}) = I$ . Для всех  $i \in I$ ,  $\alpha \in (a, 1)$  с учетом доказанных равенств  $f_i(\alpha\bar{x}) = \alpha f_i(\bar{x})$ ,  $f_i(\beta\bar{y}) = \beta f_i(\bar{y})$ ,  $f_i(\bar{x}) = f_i(a^{-1}\bar{y})$  получаем

$$f_i(\tilde{x}) = f_i(\alpha\bar{x}) = \alpha f_i(\bar{x}) = \alpha f_i(a^{-1}\bar{y}) = \alpha a^{-1} f_i(\bar{y}) = \beta f_i(\bar{y}) = f_i(\beta\bar{y}) = f_i(\tilde{y}),$$

т. е.  $f_i(\tilde{x}) = f_i(\tilde{y})$  и, следовательно,  $I^0(\tilde{x}, \tilde{y}) \subseteq I^0(F(\tilde{x}), F(\tilde{y}))$ . С учетом неравенства  $\tilde{y} \geq \tilde{x}$  это означает, согласно (5), разложимость отображения  $F$  в точке  $\tilde{x} \in H_{\bar{x}} = \{\alpha\bar{x} : \alpha \in (a, 1)\}$ .

Аналогично в случае  $b \in (0, 1)$  из неравенства  $\bar{x} \geq b\bar{y}$  следует разложимость отображения  $F$  в точках  $\bar{y}$ ,  $b\bar{y}$ , справедливость свойства (10) для точек  $x = \bar{x}$  (при  $\Delta_{\bar{x}} = (1, b^{-1})$ ) и  $x = \bar{y}$  (при  $\Delta_{\bar{y}} = (b, 1)$ ), а также разложимость отображения  $F$  на множестве  $H_{\bar{y}} = \{\beta\bar{y} : \beta \in (b, 1)\}$ .

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что если для положительной неподвижной точки  $\bar{x}$  существует положительная неподвижная точка  $\bar{y}$ , которая либо несравнима с ней, либо является ее минорантой, то для величины  $a$  из (11) справедливо неравенство  $a < 1$ , которое имеет следствием разложимость отображения  $F$  в точке  $\bar{x}$ . Это означает, что монотонное субоднородное отображение  $F \in \{\mathbb{R}_+^q \mapsto \mathbb{R}_+^q\}$  ( $F(0) = 0$ ) всегда разложимо на множестве

$$D_F^+ = \{x \in N_F^+ \mid \exists y \in N_F^+, y \notin R_x : y \not\leq x\}.$$

Множество положительных неподвижных точек монотонного положительно однородного отображения наряду с каждой положительной неподвижной точкой  $y$  содержит весь определяемый ею луч  $R_y$ , поэтому для такого отображения  $D_F^+ = N_F^+$ . Таким образом, справедливо

**Следствие 1.** *Монотонное положительно однородное отображение, имеющее положительные неподвижные точки, лежащие на разных лучах, разложимо на всем множестве положительных неподвижных точек  $N_F^+$ .*

Заметим, что всякое монотонное субоднородное отображение, имеющее бесконечную ветвь положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах, такую, что для каждой положительной неподвижной точки существует лежащая на другом луче меньшая положительная неподвижная точка, также разложимо на всем множестве положительных неподвижных точек. Далее будет приведен пример, иллюстрирующий теорему, описывающий такую ситуацию для вогнутого отображения.

Обозначим через  $S_x$  множество точек отрезка, соединяющего начало координат с точкой  $x$ :  $S_x = \text{co}\{0, x\}$ . Уточним заключение теоремы для класса вогнутых отображений.

**Следствие 2.** Пусть вогнутое на  $\mathbb{R}_+^q$  отображение  $F$  ( $F(0) = 0$ ) имеет положительные неподвижные точки  $\bar{x}, \bar{y}$ , лежащие на разных лучах. Тогда это отображение разложимо хотя бы на одном из отрезков  $S_{\bar{x}}, S_{\bar{y}}$  лучей  $R_{\bar{x}}, R_{\bar{y}}$  и часть его компонент положительно однородна на этих отрезках:

$$\exists I, \emptyset \neq I \neq \overline{1, q}: \quad f_i(\alpha x) = \alpha f_i(x) \quad (\forall i \in I, x \in \{\bar{x}, \bar{y}\}, \alpha \in [0, 1]).$$

В частности, отображение  $F$  является разложимым в нуле.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Вогнутое на  $\mathbb{R}_+^q$  отображение является субоднородным, поэтому для него справедливо заключение доказанной выше теоремы. В частности, согласно свойствам (7)–(9), каждое из множеств  $\Delta_{\bar{x}}, \Delta_{\bar{y}}$  содержит отрезок  $[0, 1]$ , поскольку отображение  $F$  положительно однородно на отрезках  $S_{\bar{x}}, S_{\bar{y}}$ , где  $\tilde{x} = a^{-1}\bar{y}$ .

Доказательство разложимости отображения хотя бы на одном из множеств  $H_{\bar{x}}, H_{\bar{y}}$ , где  $H_x = \{\alpha x : \alpha \in (0, 1)\}$ , аналогично соответствующему в теореме; осталось показать разложимость отображения  $F$  в нуле. Как и выше, приведем доказательство для случая  $a \in (0, 1)$ , где  $a$  определено в (11).

Как доказано в теореме, отображение  $F$  разложимо в точке  $\bar{x}$ , поскольку  $\tilde{x} \geq \bar{x}$  и  $f_i(\tilde{x}) = f_i(\bar{x})$  для всех  $i \in I = I^0(\tilde{x}, \bar{x})$ . Имеет место также положительная однородность компонент  $f_i(x)$  ( $\forall i \in I$ ) отображения  $F$  на отрезке  $S_{\tilde{x}}$ :  $f_i(\alpha \tilde{x}) = \alpha f_i(\tilde{x})$  ( $\forall i \in I, \alpha \in [0, 1]$ ). В силу вогнутости отображения  $F$  имеем:  $f_i((\tilde{x} - \bar{x})/2 + \bar{x}/2) \geq [f_i(\tilde{x} - \bar{x}) + f_i(\bar{x})]/2$ . Отсюда получаем  $0 \leq f_i(\tilde{x} - \bar{x}) \leq 2f_i(\tilde{x}/2) - f_i(\bar{x}) = f_i(\tilde{x}) - f_i(\bar{x}) = 0$  ( $\forall i \in I$ ). Поэтому для вектора  $y = \tilde{x} - \bar{x}$  имеем  $y \geq 0, f_i(y) = 0$  ( $\forall i \in I$ ),  $I = I^0(y)$ , что, согласно (6), означает разложимость отображения  $F$  в нуле.

Следствие доказано.

Полученное данным следствием свойство разложимости в нуле монотонного субоднородного отображения (и вогнутого отображения, в частности) достаточно легко проверяемо. Его проверка, как показано в работе [12], может быть сведена к более простой проверке наличия этого свойства у некоторого положительно однородного отображения, сопутствующего исходному субоднородному отображению; так, для сепарабельных монотонных субоднородных отображений разложимость в нуле означает разложимость некоторой матрицы.

Для иллюстрации доказанных выше утверждений рассмотрим вогнутое на  $\mathbb{R}_+^2$  отображение  $F_a(x) = (x_1/(1 + x_1) + x_2, \min\{ax_1, x_2\})$ , зависящее от параметра  $a \in (0, 1]$ . Это отображение разложимо на множестве  $K_1(a) = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_2 \leq ax_1\}$  (в том числе разложимо в нуле) и неразложимо на множестве  $K_2(a) = \{x = (x_1, x_2) : x_2 > ax_1 \geq 0\}$ .

В частности, отображение  $F_1$  разложимо на множестве  $K_1 = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_2 \leq x_1\}$  и неразложимо на множестве  $K_2 = \{x = (x_1, x_2) : x_2 > x_1 \geq 0\}$ . Множество его неподвижных точек имеет вид  $N_1 = \{x = (x_1, \varphi(x_1)) : x_1 \in [0, +\infty)\}$ , где  $\varphi(x_1) = x_1^2/(1 + x_1)$ . Поскольку  $\varphi(x_1) \leq x_1$ , отображение  $F_1$  разложимо в каждой своей неподвижной точке и, более того, разложимо на любом луче, содержащем положительную неподвижную точку, что соответствует выводам следствия 2.

Заметим, что каждый такой луч содержит единственную положительную неподвижную точку отображения  $F_1$ .

Множество положительных неподвижных точек отображения  $F_a$  при  $a \in (0, 1)$  имеет вид  $N_a = \{x = (x_1, \varphi(x_1)) : 0 < x_1 \leq a/(1 - a)\}$ . Нетрудно заметить, что  $N_a = N_1 \cap K_1(a)$ , т.е. множество неподвижных точек отображения  $F_a$  получается из множества неподвижных точек отображения  $F_1$  удалением тех точек, в которых отображение  $F_a$  неразложимо. Таким образом, в полном соответствии с заключением следствия 2 при уменьшении параметра  $a$  от единицы до нуля (не достигая последнего) множество неподвижных точек отображения  $F_a$ , лежащих на разных лучах, сокращается на ту его часть, где отображение  $F_a$  становится неразложимым.

Согласно предыдущему утверждению вогнутое на  $\mathbb{R}_+^q$  отображение, имеющее положительные неподвижные точки  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  на разных лучах, обязательно разложимо в нуле. С другой стороны ненулевые неподвижные точки неразложимого в нуле отображения  $F$  положительны. Поэтому справедливо

**Следствие 3.** *Вогнутое на  $\mathbb{R}_+^q$  неразложимое в нуле отображение  $F$  ( $F(0) = 0$ ) не может иметь ненулевых неподвижных точек, лежащих на разных лучах:  $R_x = R_y$  ( $\forall x, y \in N_F$ ).*

Заметим, что это следствие вполне согласуется с тем фактом, что неразложимость лишь в нуле положительно однородного вогнутого отображения приводит к его неразложимости на всем  $\mathbb{R}_+^q$ , т.е. к глобальной неразложимости отображения, имеющей следствием единственность луча положительных неподвижных точек [5, теорема 2.2.2].

Используя теорему, требование глобальной неразложимости в указанном выше утверждении об единственности луча положительных неподвижных точек можно существенно ослабить. Справедливо следующее обобщение теоремы 2.2.2 из [5].

**Следствие 4.** *Если монотонное субоднородное отображение  $F \in \{\mathbb{R}_+^q \mapsto \mathbb{R}_+^q\}$  ( $F(0) = 0$ ) неразложимо в точках  $x \in N_F^+$ ,  $y \in N_F^+$ , то  $R_x = R_y$ .*

Таким образом, для единственности луча, содержащего множество положительных неподвижных точек субоднородного монотонного отображения, достаточно его неразложимости лишь на этом множестве. В частном случае положительно однородного отображения данное утверждение является обобщением классической теоремы об единственности собственного луча, — луча, содержащего собственные векторы положительно однородного отображения, соответствующие доминирующему собственному вектору [2, теорема 10.4].

Неразложимость отображения в нуле, если она имеется, гарантирует положительность его ненулевых неподвижных точек. Но здесь следствие 4 применимо, в отличие от вышеупомянутых результатов из [5], и для разложимых в нуле отображений, ненулевые неподвижные точки которых заведомо положительны. Универсальным примером таких отображений является класс монотонных субоднородных отображений, неразложимых на множестве  $\mathbb{R}_+^q \setminus \{0\}$ . Этот класс, в частности, содержит положительно однородные сильно монотонные отображения с компонентами вида  $f_i(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_q^{\alpha_q}$ , где  $\alpha_j \geq 0$  ( $\forall j \in \overline{1, q}$ ),  $\sum_{j=1}^q \alpha_j = 1$ . Такие отображения имеют единственный собственный луч, хотя не удовлетворяют предположениям соответствующих классических утверждений, требующих глобальной неразложимости отображения. Следствие 4 показывает, что понятие локальной неразложимости позволяет прояснить причины этой ситуации.

Существенность требования неразложимости в следствии 4, согласно следствию 1, демонстрирует любое монотонное положительно однородное отображение, разложимое на всем множестве положительных неподвижных точек при существовании хотя бы двух лучей, содержащих часть этих точек. Для иллюстрации существенности требования неразложимости можно привести также пример отображения, которое не является ни положительно однородным, ни вогнутым. Рассмотрим субоднородное монотонное отображение  $F$  с компонентами

$$f_1(x) = \min\{\sqrt{(x_1 + x_2)/2}, (x_1 + x_2)/2\}, \quad f_2(x) = \max\{x_1, x_2\}.$$

Множество неподвижных точек этого отображения состоит из части луча  $S = S_{\bar{x}}$ , где  $\bar{x} = (1, 1)$ , и части кривой  $T = \{(x_1, \varphi(x_1)) : x_1 \in (1, +\infty)\}$ , где  $\varphi(x_1) = 2x_1^2 - x_1$ . Данное отображение неразложимо на множестве  $K_1 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_2 \leq x_1\}$ , в том числе неразложимо в нуле, и разложимо на множестве  $K_2 = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 < x_2\}$ . Как видно,  $N_F^+ \cap K_1 = S$ ,  $N_F^+ \cap K_2 = T$ , т.е. часть множества положительных неподвижных точек, лежащая в области неразложимости отображения, лежит на луче  $R_{\bar{x}}$ , а другая его часть, лежащая в области разложимости отображения, содержит неподвижные точки, принадлежащие разным лучам.

#### 4. Заключение

Доказанная теорема демонстрирует эффективность понятия локальной неразложимости отображения при анализе последствий существования положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах. Оказывается, полученная в [5] глобальная разложимость отображения обусловлена его разложимостью хотя бы в одной из этих неподвижных точек.

Другим интересным и в какой-то степени неожиданным заключением теоремы, еще требующим своего осмысления, является положительная однородность части компонент отображения на отрезках лучей, содержащих положительные неподвижные точки.

Хотя в теореме речь идет лишь о существовании положительных неподвижных точек, в которых имеет место разложимость отображения, как показывают следствие 1 и приведенные примеры, возможны ситуации, когда отображение разложимо на всем множестве положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах. Примечательно, что это справедливо, в частности, для всякого монотонного положительно однородного отображения.

Для вогнутого на  $\mathbb{R}_+^q$  отображения следствием существования положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах, является разложимость отображения в нуле (следствие 2). Последнее свойство замечательно тем, что не требует какой-либо информации о самих положительных неподвижных точках, нахождение которых на разных лучах приводит к этому свойству. Это свойство приводит к простому достаточному условию единственности луча положительных неподвижных точек — неразложимость отображения в нуле (следствие 3).

В качестве еще одного следствия теоремы получено обобщение вышеупомянутого результата из [5] — достаточное условие единственности луча положительных неподвижных точек монотонного субоднородного отображения, предполагающее неразложимость лишь на множестве этих точек (следствие 4). По-видимому, это предположение является максимально возможным ослаблением требования глобальной неразложимости, сохраняющим справедливость свойства единственности луча положительных неподвижных точек, в классе монотонных субоднородных отображений.

Вместе с тем, ситуация существования положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах, требует дальнейшего изучения. Открытыми остаются многие вопросы, в том числе вопрос о числе положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах: может ли множество таких точек при каких-либо условиях быть конечным или, как в приведенных примерах, всегда имеется бесконечная ветвь положительных неподвижных точек, лежащих на разных лучах, в случае существования хотя бы двух таких точек. Решение этих вопросов потребует дальнейшего развития аппарата локально неразложимых отображений.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Моришима М.** Равновесие, устойчивость, рост. М.: Наука, 1972. 280 с.
2. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 518 с.
3. **Lemmens B., Nussbaum R. D.** Nonlinear Perron–Frobenius Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012. 323 p. (Cambridge Tracts in Math.; vol. 189).
4. **Krause U.** Positive dynamical systems in discrete time: theory, models and applications. Berlin; Munich; Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2015. 363 p.
5. **Смирнов А. И.** Равновесие и устойчивость субоднородных монотонных дискретных динамических систем. Екатеринбург: Изд-во УИЭУиП, 2016. 318 с.
6. **Смирнов А. И.** Субоднородные монотонные отображения в мультипликативной и аддитивной нелинейной теории Перрона — Фробениуса // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 2(35). С. 8–25.
7. **Смирнов А. И.** Субоднородные отображения в теории монотонных динамических систем // Вестн. УИЭУиП. 2016. № 1 (34). С. 68–80.
8. **Смирнов А. И.** Анализ развития популяции в условиях нестационарной среды // Методы для нестационарных задач математического программирования / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. С. 94–103.

9. Takač P. Asymptotic behavior of discrete-time semigroups of sublinear, strongly increasing mappings with applications to biology // *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.* 1990. Vol. 14(1). P. 35–42.
10. Hirsch M. W., Smith H. L. Monotone Dynamical Systems // *Handbook of Differential Eqns: Ordinary Differential Eqns.* / eds. A. Canada, P. Drabek, A. Fonda, B. V. Elsevier Amsterdam, 2005. Vol. II. P. 239–357.
11. Смирнов А. И. О некоторых ослаблениях понятия неразложимости // *Вестн. УИЭУиП.* 2016. № 2(35). С. 26–30.
12. Мазуров Вл. Д., Смирнов А. И. Условия неразложимости и примитивности монотонных субоднородных отображений // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2016. Т. 22, № 3. С. 169–177. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-169-177.
13. Lemmens B., Roelands M. Unique geodesics for Thompson’s metric // *Ann. Institut Fourier.* 2015. Vol. 65, № 1. P. 315–348.
14. Опойцев В. И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977. 245 с.

Мазуров Владимир Данилович

Поступила 15.03.2017

д-р физ.-мат. наук

вед. науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург

e-mail: mazurov@imm.uran.ru

Смирнов Александр Иванович

канд. физ.-мат. наук

ст. науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург

e-mail: asmi@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Morishima M. *Equilibrium, Stability and Growth: A Multi-Sectoral Analysis.* Oxford University Press. 1964. 240 p. ISBN: 0-19-828145-5. Translated to Russian under the title *Ravnovesie, ustoychivost', rost.* Moscow, Nauka Publ. 1972. 280 p.
2. Nikaido H. *Convex Structures and Economic Theory.* Mathematics in Science and Engineering. Vol. 51. New York, Academic Press. 1968. 405 p. ISBN: 1483253287. Translated to Russian under the title *Vypuklye struktury i matematicheskaya ekonomika.* Moscow, Mir Publ. 1972. 518 p.
3. Lemmens B., Nussbaum R. D. *Nonlinear Perron–Frobenius Theory.* Cambridge Tracts in Mathematics. Vol. 189. Cambridge, Cambridge Univ. Press. 2012. 323 p. doi: 10.1017/CBO9781139026079.
4. Krause U. *Positive dynamical systems in discrete time: theory, models and applications.* Berlin; Munich; Boston: Walter de Gruyter GmbH. 2015. 363 p. ISBN: 9783110369755.
5. Smirnov A.I. *Ravnovesie i ustoychivost' subodnorodnykh monotonykh diskretnykh dinamicheskikh sistem* (Equilibrium and stability of subhomogeneous monotone discrete dynamical systems). Ekaterinburg, Izdvo Ural'skogo instituta ekonomiki upravleniya i prava. 2016. 318 p.
6. Smirnov A.I. The use of subhomogeneous monotone maps in multiplicative and additive nonlinear Perron–Frobenius theory. *Vestn. Ural. inst. ekon. upr. i prava*, 2016, no. 2(35), pp. 8–25. (in Russian)
7. Smirnov A.I. Subhomogeneous maps in the theory of monotone dynamical systems. *Vestn. Ural. inst. ekon. upr. i prava*, 2016, no. 1(34), pp. 68–80. (in Russian)
8. Smirnov A.I. Analysis of population development in conditions of non-stationary medium. In: *Methods for non-stationary problems of mathematical programming.* Sverdlovsk, IMM UNTs AN SSSR. 1979. pp. 94–103. (in Russian)
9. Takač P. Asymptotic behavior of discrete-time semigroups of sublinear, strongly increasing mappings with applications to biology. *Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.*, 1990, vol. 14(1), pp. 35–42.
10. Hirsch M.W., Smith H.L. Monotone Dynamical Systems. In: *Handbook of Differential Eqns: Ordinary Differential Eqns.* Canada A., Drabek P., Fonda A. (Eds.) Amsterdam, Elsevier. 2005, vol. 2, pp. 239–357. doi: 10.1016/S1874-5725(05)80006-9.

11. Smirnov A.I. Some generalizations of the concept of irreducibility for subhomogeneous mappings. *Vestn. Ural. Inst. Ekon. Upr. i Prava*, 2016, no. 2(35), pp. 26–30 (in Russian).
12. Mazurov V.D., Smirnov A.I. Conditions for the irreducibility and primitivity of monotone subhomogeneous mappings. *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 3, pp. 169–177 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-169-177.
13. Lemmens B., Roelands M. Unique geodesics for Thompson’s metric. *Ann. Institut Fourier*, 2015, vol. 65, no. 1, pp. 315–348. doi: 10.5802/aif.2932.
14. Opoitsev V.I. *Ravnovesie i ustoychivost’ v modelyakh kollektivnogo povedeniya* [Equilibrium and stability in models of collective behavior]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 245 p.

The paper was received by the Editorial Office on August 10, 2017.

*Vladimir Danilovich Mazurov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,  
e-mail: mazurov@imm.uran.ru .

*Aleksandr Ivanovich Smirnov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,  
e-mail: asmi@imm.uran.ru .

УДК 519.17+512.54

**АВТОМОРФИЗМЫ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА  
С ПАРАМЕТРАМИ (1305, 440, 115, 165)<sup>1</sup>**

**А. А. Махнев, Д. В. Падучих, М. М. Хамгокова**

Граф  $\Gamma$  называется  $t$ -изорегулярным, если для любого  $i \leq t$  и любого  $i$ -вершинного подмножества  $S$  число  $|\Gamma(S)|$  зависит только от изоморфного типа подграфа, индуцированного  $S$ . Граф  $\Gamma$  на  $v$  вершинах называется *абсолютно изорегулярным*, если он является  $(v-1)$ -изорегулярным. Известно, что каждый 5-изорегулярный граф является абсолютно изорегулярным, и такие графы полностью описаны. Каждый точно 4-изорегулярный граф является псевдогеометрическим графом для  $\text{pG}_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$  или дополнителем графом к нему. Через  $\text{Izo}(r)$  обозначим псевдогеометрический граф для  $\text{pG}_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$ . Для бесконечного множества значений  $r$  ( $r = 3, 4, 6, 10, \dots$ ) графы  $\text{Izo}(r)$  не существуют. Существование  $\text{Izo}(5)$  неизвестно. В данной работе найдены возможные автоморфизмы окрестности ребра из  $\text{Izo}(5)$ .

Ключевые слова: изорегулярный граф, сильно регулярный граф, псевдогеометрический граф.

**A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh, and M. M. Khamgokova. Automorphisms of strongly regular graphs with parameters (1305, 440, 115, 165).**

A graph  $\Gamma$  is called  $t$ -isoregular if, for any  $i \leq t$  and any  $i$ -vertex subset  $S$ , the number  $|\Gamma(S)|$  depends only on the isomorphism class of the subgraph induced by  $S$ . A graph  $\Gamma$  on  $v$  vertices is called *absolutely isoregular* if it is  $(v-1)$ -isoregular. It is known that each 5-isoregular graph is absolutely isoregular, and such graphs have been fully described. Each exactly 4-isoregular graph is either a pseudogeometric graph for  $\text{pG}_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$  or its complement. By  $\text{Izo}(r)$  we denote a pseudogeometric graph for  $\text{pG}_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$ . Graphs  $\text{Izo}(r)$  do not exist for an infinite set of values of  $r$  ( $r = 3, 4, 6, 10, \dots$ ). The existence of  $\text{Izo}(5)$  is unknown. In this work we find possible automorphisms for the neighborhood of an edge from  $\text{Izo}(5)$ .

Keywords: isoregular graph, strongly regular graph, pseudogeometric graph.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-232-242

### Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины  $a$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma_i(a)$  обозначим подграф, индуцированный  $\Gamma$  на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии  $i$  от  $a$ . Подграф  $[a] = \Gamma_1(a)$  называется *окрестностью вершины  $a$* . Для подмножества вершин  $S$  графа  $\Gamma$  через  $\Gamma(S)$  обозначим  $\bigcap_{a \in S} ([a] - S)$ .

Через  $k_a$  обозначим *степень вершины  $a$* , т.е. число вершин в  $[a]$ . Граф  $\Gamma$  называется *регулярным степени  $k$* , если  $k_a = k$  для любой вершины  $a$  из  $\Gamma$ . Граф  $\Gamma$  называется *реберно регулярным с параметрами  $(v, k, \lambda)$* , если  $\Gamma$  — регулярный граф степени  $k$  на  $v$  вершинах, в котором каждое ребро лежит точно в  $\lambda$  треугольниках. Граф  $\Gamma$  называется *сильно (вполне) регулярным с параметрами  $(v, k, \lambda, \mu)$* , если  $\Gamma$  — реберно регулярный граф с соответствующими параметрами и для любых двух несмежных (находящихся на расстоянии 2) вершин  $a, b$  верно равенство  $|[a] \cap [b]| = \mu$ . Пересечение окрестностей двух вершин  $[a] \cap [b]$  во вполне регулярном графе назовем  $\lambda$ -подграфом, если вершины  $a, b$  смежны и назовем  $\mu$ -подграфом, если  $d(a, b) = 2$ .

Через  $K_{m \times n}$  обозначим полный двудольный граф с  $m$  долями порядка  $n$ . Граф на множестве пар  $X \times Y$  называется  $p \times q$ -решеткой, если  $|X| = p$ ,  $|Y| = q$ , а пары  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025 (теорема), а также соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006 (следствие).



смежны тогда и только тогда, когда  $x_1 = x_2$ , или  $y_1 = y_2$ . Через  $mK_n$  обозначается объединение  $m$  изолированных полных подграфов  $K_n$ .

Для автоморфизма  $g$  графа  $\Gamma$  через  $\alpha_i(g)$  обозначим число вершин  $u \in \Gamma$  таких, что  $d(u, u^g) = i$ .

Система инцидентности  $(X, \mathcal{L})$ , где  $X$  — множество точек и  $\mathcal{L}$  — множество прямых, называется  $\alpha$ -частичной геометрией порядка  $(s, t)$ , если каждая прямая содержит ровно  $s + 1$  точку, каждая точка лежит ровно на  $t + 1$  прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке), и для любой точки  $a$ , не лежащей на прямой  $l$ , найдется точно  $\alpha$  прямых, проходящих через  $a$  и пересекающих  $l$  (обозначение  $\text{pG}_\alpha(s, t)$ ).

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на общей прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии  $\text{pG}_\alpha(s, t)$  сильно регулярен с параметрами  $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$ ,  $k = s(t + 1)$ ,  $\lambda = (s - 1) + (\alpha - 1)t$ ,  $\mu = \alpha(t + 1)$ . Сильно регулярный граф, параметры которого можно представить в таком виде для некоторых натуральных чисел  $\alpha, s, t$ , называется псевдогеометрическим графом для  $\text{pG}_\alpha(s, t)$ .

Граф  $\Gamma$  называется  $t$ -изорегулярным, если для любого  $i \leq t$  и любого  $i$ -вершинного подмножества  $S$  число  $|\Gamma(S)|$  зависит только от изоморфного типа подграфа, индуцированного  $S$ .  $t$ -изорегулярный граф  $\Gamma$  называется точно  $t$ -изорегулярным, если он не является  $(t + 1)$ -изорегулярным. Граф  $\Gamma$  на  $v$  вершинах называется абсолютно изорегулярным, если он является  $(v - 1)$ -изорегулярным.

Камерон [1, теорема 8.21] доказал, что каждый 5-изорегулярный граф  $\Gamma$  является абсолютно изорегулярным и, с точностью до перехода к дополнительному графу,  $\Gamma$  — полный многодольный граф  $K_{m \times n}$ , пятиугольник или  $3 \times 3$ -решетка; далее, каждый точно 4-изорегулярный граф является псевдогеометрическим графом для  $\text{pG}_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$  или дополнительным графом к нему. Через  $\text{Izo}(r)$  обозначим псевдогеометрический граф для  $\text{pG}_r(2r, 2r^3 + 3r^2 - 1)$ . При  $r = 1$  получим точечный граф единственного обобщенного четырехугольника порядка  $(2, 4)$ , а при  $r = 2$  — граф Маклафлина.

Для любой вершины  $a$  графа  $\text{Izo}(r)$  подграф  $\Sigma = [a]$  является псевдогеометрическим графом для  $\text{pG}_{r-1}(2r - 1, r^3 + r^2 - r - 1)$ . Существование графа  $\text{Izo}(r)$  равносильно существованию плотной 5-схемы в евклидовой сфере  $S^{n-1}$  размерности  $n - 1$ , где  $n = (2r + 1)^2$  (см. [2]). Из результатов [2] и [3] следует несуществование графов  $\text{Izo}(r)$  для бесконечного множества значений  $r$ , в частности, для  $r = 3, 4, 6, 10, 12, 22, 28, 30, 34, 42, 46, \dots$ . В [4] доказано, что граф с параметрами окрестности вершины в графе  $\text{Izo}(3)$  не существует. Возможные автоморфизмы локальных подграфов графа  $\text{Izo}(4)$  найдены в [5].

Наиболее важной на данный момент представляется проблема существования графа  $\text{Izo}(5)$ .

Граф  $\text{Izo}(5)$  имеет параметры (7139, 3250, 1305, 1625) и для любой вершины  $a$  подграф  $\Sigma = [a]$  является псевдогеометрическим графом для  $\text{pG}_4(9, 144)$  с параметрами (3250, 1305, 440, 580). Далее, для любой вершины  $b \in \Sigma$  подграф  $\Delta = \Sigma(b)$  является псевдогеометрическим графом для  $\text{pG}_3(8, 54)$  и имеет параметры (1305, 440, 115, 165). Существование сильно регулярных графов с указанными параметрами неизвестно. В данной работе найдены возможные автоморфизмы графа с параметрами (1305, 440, 115, 165).

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  является сильно регулярным графом с параметрами (1305, 440, 115, 165),  $G$  — группа автоморфизмов графа  $\Gamma$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ . Тогда  $\pi(G) \subseteq \{2, 3, \dots, 53\}$ ,  $29^2$  не делит  $|G|$  и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1)  $\Omega$  — пустой граф, либо  $p = 29$  и  $\alpha_1(g) = 435$ , либо  $p = 5$  и  $\alpha_1(g) = 75(4l + 1)$ , либо  $p = 3$  и  $\alpha_1(g) = 45(4l - 1)$ ;
- (2)  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, либо  $p = 3$ ,  $n = 3t$ ,  $t \leq 3$  и  $\alpha_1(g) = 3(60l + 5t - 15)$ , либо  $p = 2$ ,  $n = 2t + 1$ ,  $t \leq 4$  и  $\alpha_1(g) = 2(60l + 5t - 20)$ ;
- (3)  $\Omega$  является  $l$ -кликкой,  $2 \leq l \leq 145$ ,  $p = 11$ ,  $l = 11t + 7$  и  $\alpha_1(g) = 55(12m + 2 + t)$  либо  $p = 5$ ,  $l = 5s$  и  $\alpha_1(g) = 5(60m + 5s + 27)$ ;

(4)  $\Omega$  является объединением изолированных клик,  $p = 3$ , и порядок любой максимальной клики из  $\Omega$  равен 3 или 6;

(5)  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь и  $p \leq 53$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(1305, 440, 115, 165)$ , неразрешимая группа автоморфизмов  $G$  графа  $\Gamma$  действует транзитивно на множестве его вершин и  $\bar{\Gamma}$  — цоколь группы  $\bar{G} = G/S(G)$ . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(1)  $S(G)$  содержит элемент  $f$  порядка 29, группа  $\bar{\Gamma}$  изоморфна  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $\text{PSp}_4(3)$  и фиксирует некоторую вершину  $a$ ;

(2)  $S(G) = O_{3,5}(G)$ , группа  $\bar{\Gamma}$  изоморфна  $A_{29}$  и  $\bar{\Gamma}_a \cong A_{28}$ .

В любом случае граф  $\Gamma$  не является реберно симметричным.

## 1. Предварительные результаты

Приведем сначала два вспомогательных результата.

**Лемма 1.1** [6]. Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с собственными значениями  $k, r, s$ ,  $s < 0$ , на  $v$  вершинах. Если  $\Gamma$  содержит индуцированный регулярный подграф  $\Delta$  степени  $d$  на  $w$  вершинах, то  $s \leq d - (k - d)w/(v - w) \leq r$ , причем в случае равенства каждая вершина из  $\Gamma - \Delta$  смежна точно с  $(k - d)w/(v - w)$  вершинами из  $\Delta$ .

**Лемма 1.2.** Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(1305, 440, 115, 165)$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если  $W$  является трехвершинным подграфом из  $\Gamma$ ,  $x_i$  — число вершин из  $\Gamma - W$ , смежных точно с  $i$  вершинами из  $W$ , то число  $x_0 + x_3$  равно 330, если  $W$  является кликой; равно 390, если  $W$  является 2-путем; равно 429, если  $W$  является объединением изолированной вершины и ребра; равно 477, если  $W$  является кокликкой;

(2) если  $g$  — автоморфизм простого порядка  $p$  графа  $\Gamma$ , то число  $\alpha_0(g)$  не больше  $480 - p$  в случае  $\alpha_1(g) = 0$ , не больше 390 в случае  $\alpha_1(g) > 0$  и не больше 330 в случае  $\alpha_2(g) < \alpha_1(g)$ .

**Доказательство.** Пусть  $X_i$  — множество вершин из  $\Gamma - W$ , смежных точно с  $i$  вершинами из  $W$ . Если  $W$  является 2-путем  $a, b, c$ , то  $X_2$  содержит  $164 - x_3$  вершин из  $[a] \cap [c]$ , и по  $115 - x_3$  вершин из  $[a] \cap [b]$ ,  $[b] \cap [c]$ . Далее,  $X_1$  содержит  $208 + x_3$  вершин из  $[b]$  и по  $160 + x_3$  вершин из  $[a]$ ,  $[c]$ . Поэтому  $x_0 + x_3 = 1302 - (394 - 3x_3) - (528 + 3x_3) = 390$ .

Если  $W$  является объединением изолированной вершины  $a$  и ребра  $\{b, c\}$ , то  $X_2$  содержит  $115 - x_3$  вершин из  $[b] \cap [c]$  и по  $165 - x_3$  вершин из  $[a] \cap [b]$ ,  $[a] \cap [c]$ . Далее,  $X_1$  содержит  $110 + x_3$  вершин из  $[a]$  и по  $159 + x_3$  вершин из  $[b]$ ,  $[c]$ . Поэтому  $x_0 + x_3 = 1302 - (445 - 3x_3) - (428 + 3x_3) = 429$ .

Аналогично рассматриваются случаи клики и коклики для  $W$ .

Если  $u^{(g)}$  — кокликовая орбита длины  $p$  и  $W$  является трехвершинным подграфом из  $u^{(g)}$ , то  $X_0 \cup X_3$  содержит  $\alpha_0(g)$  вершин из  $\text{Fix}(g)$  и  $p - 3$  вершин из  $u^{(g)}$ , поэтому  $\alpha_0(g) \leq 480 - p$ .

Если  $\alpha_1(g) > 0$ , то можно считать, что  $u^{(g)}$  содержит 2-путь и  $X_0 \cup X_3$  содержит  $\alpha_0(g) \leq 390$  вершин.

Покажем, что если  $\alpha_2(g) < \alpha_1(g)$ , то  $\alpha_0(g) \leq 330$ . Так как число орбит, в которых вершина не смежна с ее образом под действием  $g$ , равно  $\alpha_2(g)$ , и число орбит, в которых вершина не смежна с ее образом под действием  $g^2$ , также равно  $\alpha_2(g)$ , то найдется орбита  $u^{(g)}$ , в которой  $W = \{u, u^g, u^{g^2}\}$  является треугольником. Отсюда  $X_0 \cup X_3$  содержит  $\Omega$  и  $\alpha_0(g) \leq 330$ .

Лемма доказана.

Если  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(1305, 440, 115, 165)$ , то ввиду леммы 1.1 порядок коклики в  $\Gamma$  не больше 145, а порядок клики не больше 9.

Доказательство теоремы опирается на метод Г. Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [7]. При этом графу  $\Gamma$  соответствует симметричная схема отношений  $(X, \{R_0, R_1, R_2\})$ , где  $R_0$  — отношение равенства на множестве вершин  $X$  графа  $\Gamma$ ,  $R_1$  — отношение смежности в  $\Gamma$ ,  $R_2$  — отношение смежности в дополнительном графе  $\bar{\Gamma}$ . Если  $P$  и  $Q$  — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v - k - 1 & -r - 1 & -s - 1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$ . Здесь  $v$  — число вершин,  $k, r, s$  — собственные значения графа  $\Gamma$  кратностей  $1, f, v - f - 1$  соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы  $Q$ ).

Подстановочное представление группы  $G = \text{Aut}(\Gamma)$  на вершинах графа  $\Gamma$  обычным образом дает матричное представление  $\psi$  группы  $G$  в  $\text{GL}(v, \mathbb{C})$ . Пусть  $W_i$  —  $i$ -е собственное подпространство из  $\mathbb{C}^v$  матрицы смежности  $A$  графа  $\Gamma$ . Так как  $A$  перестановочна с любой матрицей из  $\psi(G)$ , то подпространство  $W_i$  является  $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть  $\chi_i$  — характер представления  $\psi|_{W_i}$ . Тогда для любого  $g \in \text{Aut}(\Gamma)$  верно равенство  $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^2 Q_{ij} \alpha_j(g)$ .

## 2. Автоморфизмы графа с параметрами (1305, 440, 115, 165)

Пусть  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами (1305, 440, 115, 165) и спектром  $440^1, 5^{1188}, -55^{116}$ ,  $G = \text{Aut}(\Gamma)$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p$  из  $G$  и  $\Omega = \text{Fix}(g)$ .

**Лемма 2.1.** *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 116, равно  $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/60 + 29/4$  и  $\chi_2(g) - 116$  делится на  $p$ ;
- (2) если  $f$  — элемент порядка  $p^2$  и  $g = f^p$ , то  $\chi_2(g) - 116$  делится на  $p^2$ ;
- (3) если  $\Omega$  — пустой граф, то либо  $p = 29$  и  $\alpha_1(g) = 435$ , либо  $p = 5$  и  $\alpha_1(g) = 75(4l + 1)$ , либо  $p = 3$  и  $\alpha_1(g) = 45(4l - 1)$ .

**Доказательство.** Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1188 & 27/2 & -33/4 \\ 116 & -29/2 & 29/4 \end{pmatrix}$$

и  $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g)/2 + \alpha_2(g)/4)/45$ . Подставляя в эту формулу значение  $\alpha_2(g) = 1305 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$ , получим  $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/60 + 29/4$ .

Последнее замечание из утверждения (1) леммы следует из [8, лемма 1].

Утверждение (2) следует из [9].

Пусть  $\Omega$  — пустой граф,  $\alpha_i(g) = pw_i$ . Так как  $1305 = 45 \cdot 29$ , то  $p \in \{3, 5, 29\}$ .

Пусть  $p = 29$ . Тогда  $\chi_2(g) = 29(-w_1 + 15)/60$  и  $\alpha_1(g) = 435$ .

Пусть  $p = 5$ . Тогда число  $\chi_2(g) = (87 - w_1)/12$  сравнимо с 1 по модулю 5 и  $\alpha_1(g) = 5(60l + 15)$ .

Пусть  $p = 3$ . Тогда число  $\chi_2(g) = (145 - w_1)/20$  сравнимо с 2 по модулю 3 и  $\alpha_1(g) = 3(60l - 15)$ .

**Лемма 2.2.** *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) если  $\Omega$  является  $n$ -кликкой, то либо  $p = 3$ ,  $n = 3t \leq 9$  и  $\alpha_1(g) = 3(60l + 5t - 15)$ , либо  $p = 2$ ,  $n = 2t + 1 \leq 9$  и  $\alpha_1(g) = 2(60l + 5t - 20)$ ;
- (2) если  $\Omega$  является  $l$ -коккликкой,  $l \geq 2$ , то  $p = 11$ ,  $l = 11t + 7$ ,  $t \leq 12$  и  $\alpha_1(g) = 55(12m + 1 + t)$  или  $p = 5$ ,  $l = 5s$ ,  $s \leq 29$  и  $\alpha_1(g) = 5(60m + 5s + 27)$ ;
- (3) если  $\Omega$  является объединением изолированных клик, то  $p = 3$  и порядок любой максимальной клики из  $\Omega$  равен 3 или 6.

**Доказательство.** Пусть  $\Omega$  является  $n$ -кликкой. Если  $n = 1$ , то  $p$  делит 440 и 864, поэтому  $p = 2$ , число  $\chi_2(g) = (440 - \alpha_1(g))/60$  четно и  $\alpha_1(g) = 120l - 40$ .

Пусть  $n \geq 2$  и  $a, b \in \Omega$ . Так как  $g$  действует полурегулярно на  $[a] - b^\perp$  и на  $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp)$ , то  $p$  делит 324, 540 и  $117 - n$ , поэтому  $p = 2, 3$ . В случае  $p = 3$  имеем  $n = 3t$ , число  $\chi_2(g) = (145 + 5t - w_1)/20$  сравнимо с 2 по модулю 3 и  $\alpha_1(g) = 3(60l + 5t - 15)$ . В случае  $p = 2$  имеем  $n = 2t + 1$ , число  $\chi_2(g) = (220 + 5t - w_1)/30$  четно и  $\alpha_1(g) = 2(60l + 5t - 20)$ .

Пусть  $\Omega$  является  $l$ -кокликкой,  $l \geq 2$ , и  $a, b \in \Omega$ . Так как  $g$  действует полурегулярно на  $[a] \cap [b]$  и на  $[a] - b^\perp$ , то  $p$  делит 165, 275 и  $590 - l$ , поэтому  $p = 5, 11$ . В случае  $p = 11$  имеем  $l = 11t + 6$ , число  $\chi_2(g) = (475 + 55t - \alpha_1(g))/60$  сравнимо с 7 по модулю 11 и  $\alpha_1(g) = 660m + 55 + 55t$ . В случае  $p = 5$  имеем  $l = 5s$ , число  $\chi_2(g) = (5s - w_1 + 87)/12$  сравнимо с 1 по модулю 5 и  $\alpha_1(g) = 5(60m + 5s + 27)$ .

Если  $\Omega$  содержит ребро и является объединением изолированных клик, то  $p$  делит 324 и 165, поэтому  $p = 3$  и порядок любой максимальной клики из  $\Omega$  делится на 3. Но если этот порядок равен 9, то любая вершина из  $\Gamma$  смежна с 3 вершинами этой клики, противоречие.

Лемма доказана.

Ввиду лемм 2.1, 2.2 можно считать, что  $\Omega$  содержит геодезический 2-путь  $b, a, c$ .

**Лемма 2.3.** *Выполняются следующие утверждения:*

- (1) если  $[a]$  содержится в  $\Omega$  для некоторой вершины  $a \in \Omega$ , то  $p = 2, 3$  и  $\Omega = a^\perp$ ;
- (2) верно неравенство  $p \leq 53$ .

**Доказательство.** Допустим, что  $[a] \subset \Omega$ . Тогда для  $u \in \Gamma - \Omega$  подграф  $[u] \cap \Omega$  содержит 165 вершин из  $[a]$ , поэтому  $\alpha_1(g) = 0$  и  $\Omega = a^\perp$ . Далее,  $\chi_2(g) = 528/12 = 44$  и  $116 - \chi_2(g) = 72$  делится на  $p$ , поэтому  $p = 2, 3$ .

В случае  $p > 165$  граф  $\Omega$  является сильно регулярным с параметрами  $(v', k', 115, 165)$  и собственными значениями  $(-50 \pm n)/2$ , где  $n^2 = 2500 + 4(k' - 165)$ . Поэтому  $n = 2u$ ,  $k' = u^2 - 460$  и кратность  $u - 25$  равна  $(u + 24)(u^2 - 460)(u^2 + u - 435)/(330u)$ , противоречие.

Если  $115 < p < 165$ , то  $p = 127$ ,  $\alpha_0(g) = 35$ ,  $\alpha_1(g) = 1270$  и любая  $\langle g \rangle$ -орбита является кликой, противоречие.

Для  $31 \leq p \leq 113$  получим следующие возможности.

Если  $p = 113$ , то  $\alpha_0(g) = 62$ ,  $\alpha_1(g) = 565$  или  $\alpha_0(g) = 175$ ,  $\alpha_1(g) = 1130$ . В последнем случае любая  $\langle g \rangle$ -орбита является кликой. В первом случае степень вершины в  $\Omega$  равна 101, 214 или 327, противоречие.

Если  $p = 109$ , то  $\alpha_0(g) = 106$ ,  $\alpha_1(g) = 545$  или  $\alpha_0(g) = 215$ ,  $\alpha_1(g) = 1090$ . В последнем случае любая  $\langle g \rangle$ -орбита является кликой. В первом случае степень вершины в  $\Omega$  равна 113, 222 или 331, противоречие.

Если  $p = 107$ , то  $\alpha_0(g) = 21$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 128$ ,  $\alpha_1(g) = 535$ . Далее, степень вершины в  $\Omega$  равна 12 или 119. В первом случае  $\mu_\Omega \geq 58$ , а во втором  $\lambda_\Omega = 79$ ,  $\mu_\Omega = 58$  и  $\Omega$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(128, 119, 79, 58)$ . В любом случае имеем противоречие.

Если  $p = 103$ , то  $\alpha_0(g) = 69$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 172$ ,  $\alpha_1(g) = 515$ . Далее, степень вершины  $a$  в  $\Omega$  равна 28 или 131. В первом случае  $\mu_\Omega \geq 62$ , а во втором либо  $\lambda_\Omega = 12$ , либо  $\lambda_\Omega = 115$  и  $\Omega(a)$  — регулярный граф степени 115 на 127 вершинах. В любом случае имеем противоречие.

Если  $p = 101$ , то  $\alpha_0(g) = 93$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 194$ ,  $\alpha_1(g) = 505$ . Далее,  $\lambda_\Omega = 14, 115$ ,  $\mu_\Omega = 64, 165$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 137. Поэтому  $\Omega(a)$  — регулярный граф степени 115 на 137 вершинах, противоречие.

Если  $p = 97$ , то  $\alpha_0(g) = 141$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 238$ ,  $\alpha_1(g) = 485$ . Теперь  $\lambda_\Omega = 18, 115$ ,  $\mu_\Omega = 68, 165$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 149. Отсюда  $\Omega(a)$  — регулярный граф степени 115 на 149 вершинах, противоречие.

Пусть  $p = 89$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 237$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 326$ ,  $\alpha_1(g) = 445$ . Далее,  $\lambda_\Omega = 26, 115$ ,  $\mu_\Omega = 76, 165$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 84, 173 или 262.

Если  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 262, то  $|\Omega - a^\perp| = 63$  и  $\Omega - a^\perp$  — регулярный граф степени 8. Отсюда  $a$  — единственная вершина степени 262 в  $\Omega$ , и число ребер между  $\Omega(a)$  и  $\Omega - a^\perp$  равно  $146x + 57(262 - x) = 165y + 76(63 - y)$ . Теперь  $89(y - x) = 38(393 - 126)$  и  $(y - x) = 108$ , противоречие с тем, что  $y \leq 63$ .

Если  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 84, то  $|\Omega - a^\perp| = 152, 330$ . Далее, число ребер между  $\Omega(a)$  и  $\Omega - a^\perp$  равно  $146x + 57(84 - x) = 76|\Omega - a^\perp|$ . Если  $|\Omega - a^\perp| = 152$ , то  $89x = 76(152 - 63)$  и  $x = 76$ . Для двух вершин  $b, c \in \Omega(a)$ , смежных с 146 вершинами из  $\Omega - a^\perp$ , подграф  $[b] \cap [c]$  содержит не менее  $146 + 146 - 152$  вершин из  $\Omega - a^\perp$ , и вершины  $b, c$  не смежны. Противоречие с тем, что  $\Omega(a)$  содержит 76-кликлу. Если  $|\Omega - a^\perp| = 330$ , то  $89x = 76(330 - 63)$  и  $x = 228$ , противоречие.

Значит,  $\Omega$  — регулярный граф степени 173 на 326 вершинах, и по лемме 1.1 имеем  $-55 \leq 173 - 267 \cdot 326/979 \leq 5$ , противоречие.

Пусть  $p = 83$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 309, \alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 392, \alpha_1(g) = 415$ . Далее,  $\lambda_\Omega = 32, 115, \mu_\Omega = 82, 165$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 108, 191, 274 или 357.

Если  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 357, то  $|\Omega - a^\perp| = 34$ , противоречие с тем, что вершина  $b$  из  $\Omega(a)$  смежна по крайней мере с 75 вершинами из  $\Omega - a^\perp$ .

Пусть  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 274. Тогда  $|\Omega - a^\perp| = 117$ , и число ребер между  $\Omega(a)$  и  $\Omega - a^\perp$  равно  $75 \cdot 274 = 165y + 82(117 - y)$ . Теперь  $83y = 75 \cdot 274 - 82 \cdot 117$ , и  $y = 132$ , противоречие с тем, что  $y \leq 117$ .

Пусть  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 108. Тогда  $|\Omega - a^\perp| = 200, 283$ , и число ребер между  $\Omega(a)$  и  $\Omega - a^\perp$  равно  $158x + 75(108 - x) = 82|\Omega - a^\perp|$ . В случае  $|\Omega - a^\perp| = 200$  имеем  $83x = 100(164 - 81)$  и  $x = 100$ . Теперь для двух вершин  $b, c \in \Omega(a)$ , смежных с 158 вершинами из  $\Omega - a^\perp$ , подграф  $[b] \cap [c]$  содержит не менее  $158 + 158 - 200 = 116$  вершин из  $\Omega - a^\perp$ , в частности, вершины  $b, c$  не смежны. Противоречие с тем, что  $\Omega(a)$  содержит 100-кликлу. В случае  $|\Omega - a^\perp| = 283$  имеем  $83x = (82 \cdot 283 - 108 \cdot 75)$  и  $x = 182$ , противоречие.

Значит,  $\Omega$  — регулярный граф степени 191 на 392 вершинах, и по лемме 1.1 имеем  $-55 \leq 191 - 249 \cdot 392/913 \leq 5$ , противоречие.

Пусть  $p = 79$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 357, \alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 436, \alpha_1(g) = 395$ . Однако, ввиду леммы 1.2 имеем  $\alpha_0(g) \leq 400$ . Далее,  $\lambda_\Omega = 36, 115, \mu_\Omega = 7, 86, 165$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 45, 124, 203 или 282. Так как  $|\Omega| = 357$ , то  $|\Gamma - \Omega| = 79 \cdot 12$ .

Если  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 45, то  $\Omega(a)$  — регулярный граф степени 36, и по лемме 1.1 имеем  $36 - 202 \cdot 9/126 \leq 5$ , противоречие.

Если  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 282, то  $|\Omega - a^\perp| = 74$  — регулярный граф степени 38 и по лемме 1.1 имеем  $38 - 402 \cdot 74/1231 \leq 5$ , противоречие.

Если  $\Omega$  содержит вершину  $a$  степени 203, то  $|\Omega - a^\perp| = 153$ , и число ребер между  $\Omega(a)$  и  $\Omega - a^\perp$  равно  $87x + 8(203 - x) = 165y + 86z + 7(153 - y - z)$ . Отсюда  $79(2y + z - x) = 1624 - 1071 = 7 \cdot 79$  и  $2y + z - x = 7$ . Теперь  $y + z \leq 153, x - y \leq 146$  и  $203 - x \geq 57 + y$ . Отсюда число вершин степени, не большей 124 в  $\Omega$ , не меньше  $57 + y + z + (153 - y - z)$ .

Если  $u^{(g)}, w^{(g)}$  — две орбиты длины 79, то для степени  $d$  подграфа  $u^{(g)} \cup w^{(g)}$  имеем  $-55 \leq d - (440 - d)158/1147 \leq 5$  и  $5 \leq d \leq 65$ . Пусть  $W$  — трехвершинный подграф из  $u^{(g)}$ ,  $X_i$  — множество вершин из  $\Gamma - W$ , смежных точно с  $i$  вершинами из  $W$ , и  $x_i = |X_i|$ . Тогда  $X_0 \cup X_3$  содержит 357 вершин из  $\Omega$  и 76 вершин из  $u^{(g)}$ . Значит,  $X_0 \cup X_3$  содержит 43 вершины из  $\Gamma - (\Omega \cup u^{(g)})$  и  $d \geq 12$ .

Вершина  $u \in \Gamma - \Omega$  смежна не более чем со 165 вершинами из  $\Omega$  и по крайней мере с 25 вершинами из некоторой орбиты  $w^{(g)}$ . Тогда имеется  $25 \cdot 12 \cdot 79$  2-путей с концами в  $u^{(g)}$  и средней вершиной в  $w^{(g)}$ , и некоторая пара вершин из  $u^{(g)}$  смежна по крайней мере с  $100/13$  вершинами из  $w^{(g)}$  и не более чем со 157 вершинами из  $\Omega$ .

Минимум числа 2-путей с концами в  $u^{(g)}$  и средней вершиной в  $\Gamma - (\Omega \cup u^{(g)})$  достигается в случае, когда  $u$  смежна с 26 вершинами в восьми орбитах и с 25 вершинами в трех  $\langle g \rangle$ -орбитах длины 79, и равен  $79(13 \cdot 25 \cdot 8 + 36 \cdot 25)$ . Поэтому некоторая пара вершин из  $u^{(g)}$  смежна по крайней мере с  $25(52 + 18)/39$  вершинами из  $\Gamma - \Omega$  и не более чем с 120 вершинами из  $\Omega$ .

Повторив это рассуждение несколько раз, получим, что некоторая пара вершин из  $u^{(g)}$  смежна по крайней мере с 65 вершинами из  $\Gamma - \Omega$  и не более чем с 100 вершинами из  $\Omega$ . Итак, число ребер между  $\Omega$  и  $\Gamma - \Omega$ , разделенное на 79, не больше  $12 \cdot 100 = 1200$ , но не меньше  $210 \cdot 4 + 147 \cdot 3$ , противоречие.

Пусть  $p = 73$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 429$  и  $\alpha_1(g) = 0$ . Противоречие с леммой 1.2.

Пусть  $p = 71$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 453$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 524$ ,  $\alpha_1(g) = 355$ . В любом случае получим противоречие с леммой 1.2.

Пусть  $p = 67$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 501$ ,  $\alpha_1(g) = 0$ . Ввиду леммы 1.2 имеем  $\alpha_0(g) \leq 413$ , противоречие.

Пусть  $p = 61$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 24$  и  $\alpha_1(g) = 915$ . Далее,  $\lambda_\Omega = 54, 115$ , противоречие.

Пусть  $p = 59$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 7$ ,  $\alpha_1(g) = 590$  или  $\alpha_0(g) = 66$ ,  $\alpha_1(g) = 885$ . Далее,  $\lambda_\Omega = 56, 115$ ,  $\mu_\Omega = 47, 106, 165$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 27, противоречие.

Лемма доказана.

**Лемма 2.4.** *Если  $p > 29$ , то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1)  $p = 53$ ,  $\alpha_0(g) = 86$ ,  $\alpha_1(g) = 265$  или  $\alpha_0(g) = 139$ ,  $\alpha_1(g) = 530$ , или  $\alpha_0(g) = 192$ ,  $\alpha_1(g) = 795$ ;

(2)  $p = 47$ ,  $\alpha_0(g) = 177$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 224$ ,  $\alpha_1(g) = 235$ , или  $\alpha_0(g) = 271$ ,  $\alpha_1(g) = 470$ , или  $\alpha_0(g) = 318$ ,  $\alpha_1(g) = 705$ ;

(3)  $p = 43$ ,  $\alpha_0(g) = 273$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 316$ ,  $\alpha_1(g) = 215$ , или  $\alpha_0(g) = 359$ ,  $\alpha_1(g) = 430$ ;

(4)  $p = 41$ ,  $\alpha_0(g) = 321$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 362$ ,  $\alpha_1(g) = 205$ ;

(4)  $p = 37$ ,  $\alpha_0(g) = 417$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 121$ ,  $\alpha_1(g) = 740$ , или  $\alpha_0(g) = 158$ ,  $\alpha_1(g) = 925$ ;

(5)  $p = 31$ ,  $\alpha_0(g) = 189$ ,  $\alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 220$ ,  $\alpha_1(g) = 155$ , или  $\alpha_0(g) = 251$ ,  $\alpha_1(g) = 310$ , или  $\alpha_0(g) = 282$ ,  $\alpha_1(g) = 465$ , или  $\alpha_0(g) = 313$ ,  $\alpha_1(g) = 620$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $p = 53$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 33$ ,  $\alpha_1(g) = 0$ ;  $\alpha_0(g) = 86$ ,  $\alpha_1(g) = 265$ ;  $\alpha_0(g) = 139$ ,  $\alpha_1(g) = 530$  или  $\alpha_0(g) = 192$ ,  $\alpha_1(g) = 795$ . Далее,  $\lambda_\Omega = 9, 62, 115$ ,  $\mu_\Omega = 6, 59, 112, 165$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 16, 69, 122, 175.

Если  $|\Omega| = 33$ , то  $\Omega$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(33, 16, 9, 6)$ , собственными значениями 5, -2 и кратностью 5, равной  $16 \cdot 18/42$ , противоречие.

В случае  $p = 47$  получим параметры из заключения леммы.

В случае  $p = 43$  либо получим параметры из заключения леммы, либо  $\alpha_0(g) = 402$ ,  $\alpha_1(g) = 645$ . Но в этом случае по лемме 1.2 имеем  $\alpha_0(g) \leq 400$ .

В случае  $p = 41$  либо получим параметры из заключения леммы, либо  $\alpha_0(g) = 403$ ,  $\alpha_1(g) = 410$ , либо  $\alpha_0(g) = 444$ ,  $\alpha_1(g) = 615$ , либо  $\alpha_0(g) = 34$ . В последнем случае имеем  $\lambda_\Omega = 33$ , противоречие. В первых двух случаях по лемме 1.2 имеем  $\alpha_0(g) \leq 400$ .

В случае  $p = 37$  либо получим параметры из заключения леммы, либо  $\alpha_0(g) = 454$ ,  $\alpha_1(g) = 185$ , либо  $\alpha_0(g) = 491$ ,  $\alpha_1(g) = 370$ , либо  $\alpha_0(g) = 10, 47$ , либо  $\alpha_0(g) = 84$ . В первых двух случаях по лемме 1.2 имеем  $\alpha_0(g) \leq 400$ . В следующих двух случаях имеем  $\lambda_\Omega = 4$ ,  $\mu_\Omega = 17$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 33. В случае  $\alpha_0(g) = 47$  граф  $\Omega$  является регулярным степени 33, противоречие. Наконец, в случае  $\alpha_0(g) = 84$  степень вершины  $a$  в  $\Omega$  равна 33 или 70,  $\lambda_\Omega \in \{4, 41\}$  и  $\mu_\Omega \in \{17, 54\}$ . Если степень вершины  $a$  в  $\Omega$  равна 33, то число ребер между  $\Omega(a)$  и  $\Omega - a^\perp$  равно  $33 \cdot 28 = 40 \cdot 17$ , противоречие. Если же  $\Omega$  — регулярный граф степени 70, то число ребер между  $\Omega(a)$  и  $\Omega - a^\perp$  не меньше  $70 \cdot 28$ , но не больше  $13 \cdot 54$ , противоречие.

В случае  $p = 31$  либо получим параметры из заключения леммы, либо  $\alpha_0(g) = 344$ ,  $\alpha_1(g) = 775$ , либо  $\alpha_0(g) = 3, 34$ . В первом случае некоторая  $\langle g \rangle$ -орбита длины 31 содержит треугольник, и по лемме 1.2 имеем  $\alpha_0(g) \leq 330$ .

Пусть  $\alpha_0(g) = 3, 34$ . Заметим, что  $\lambda_\Omega = 22$ ,  $\mu_\Omega = 10$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 6, 37. В случае  $\alpha_0(g) = 34$  граф  $\Omega$  является сильно регулярным с параметрами  $(34, 6, 22, 10)$ , противоречие.

**Лемма 2.5.** *Если  $g$  — элемент порядка 29 из  $G$ , то выполняются следующие утверждения:*

(1)  $\alpha_0(g) = 261, \alpha_1(g) = 0$  или  $\alpha_0(g) = 290, \alpha_1(g) = 145$ , или  $\alpha_0(g) = 319, \alpha_1(g) = 290$ , или  $\alpha_0(g) = 348, \alpha_1(g) = 435$ , или  $\alpha_0(g) = 87, \alpha_1(g) = 870$ , или  $\alpha_0(g) = 116, \alpha_1(g) = 1015$ ;

(2)  $|G|$  не делится на  $29^2$ .

**Доказательство.** В случае  $p = 29$  либо получим параметры из заключения леммы, либо  $\alpha_0(g) = 406, \alpha_1(g) = 725$ , либо  $\alpha_0(g) = 377, \alpha_1(g) = 580$ , либо  $\alpha_0(g) = 29, 58$ . В первом случае по лемме 1.2 имеем  $\alpha_0(g) \leq 400$ . В последних двух случаях  $\lambda_\Omega = 28, 57, \mu_\Omega = 20, 49$ , и степень вершины в  $\Omega$  равна 34, 63. Отсюда  $\Omega$  — реберно регулярный граф с параметрами (58,34,28), противоречие с тем, что  $58 \cdot 34 \cdot 28$  не делится на 3. В случае  $\alpha_0(g) = 377$  ввиду леммы 1.2 имеем  $\alpha_0(g) \leq 330$ .

Допустим, что  $G$  содержит элемент  $f$  порядка  $29^2, g = f^{29}$ . Тогда  $|G - \Omega|$  делится на  $29^2$ , поэтому  $|\Omega| = 1305 - 841 = 464$ , противоречие с утверждением (1).

Пусть  $U$  является элементарной абелевой подгруппой из  $G$  порядка  $29^2, g_i (i \in \{1, 2, \dots, 30\})$  порождают различные подгруппы порядка 29 из  $U, \Omega^i = \text{Fix}(g_i), \Omega^0 = \text{Fix}(U)$  и  $a, b$  — две вершины из  $\Omega^0$ .

Если на  $\Gamma$  имеется  $U$ -орбита  $w^U$  длины 841, то  $|\bigcup_i \Omega^i| = 464$ . В этом случае  $|\Omega^0| \neq 0$ , иначе  $|\bigcup_i \Omega^i| \geq 30 \cdot 87$ , противоречие. Далее,  $[a] \cap [b]$  содержит 28, 57, 86 или 115 вершин из  $\Omega^0$ , если  $a, b$  смежны и 20, 49, 78, 107, 136 или 165 вершин из  $\Omega^0$ , если  $a, b$  не смежны. Пусть  $c \in \Omega^0(a) \cap [b], X_0$  — множество вершин из  $\Gamma$ , не смежных с вершинами из  $\{a, b, c\}$ . Тогда  $X_0$  содержит  $w^U$ , противоречие с тем, что по лемме 1.2 имеем  $|X_0| \leq 400$ .

Значит, на  $\Gamma$  нет  $U$ -орбит длины 841 и  $|\bigcup_i \Omega^i| = 1305$ . Теперь  $|\Omega^0| > 29$ , иначе  $|\bigcup_i \Omega^i| \geq 30 \cdot 58$ , противоречие. Пусть  $\Omega \neq \Omega^0$  и  $u \in \Omega - \Omega^0$ . Тогда для любой орбиты  $w^U$  на  $\Gamma - \Omega$  вершина  $u$  смежна либо с нулем вершин из  $w^U$ , либо со всеми вершинами из  $w^U$ . Зафиксируем трехвершинный подграф  $W$  из  $u^U$ .

Если  $|\Omega^0| = 58$ , то  $[a] \cap [b]$  содержит 28 вершин из  $\Omega^0$ , если  $a, b$  смежны и 20 или 49 вершин из  $\Omega^0$ , если  $a, b$  не смежны. Далее, степень вершины в  $\Omega^0$  равна 34, и  $\Omega^0$  — сильно регулярный граф с параметрами (58,34,28,20), противоречие.

Если  $|\Omega^0| = 87$ , то  $[a] \cap [b]$  содержит 28 или 57 вершин из  $\Omega^0$ , если  $a, b$  смежны, и 20, 49 или 78 вершин из  $\Omega^0$ , если  $a, b$  не смежны. Далее, степень вершины в  $\Omega^0$  равна 34 или 63.

Пусть степень вершины  $a$  в графе  $\Omega^0$  равна 63. Тогда число ребер между  $\Omega^0(a)$  и  $\Omega^0 - a^\perp$  равно  $5 \cdot 63 = 49z + 20(23 - z)$ , противоречие. Значит,  $\Omega^0$  — регулярный граф степени 34, и число ребер между  $\Omega^0(a)$  и  $\Omega^0 - a^\perp$  равно  $5 \cdot 34 = 20 \cdot 52$ , противоречие.

Если  $|\Omega^0| = 116$ , то  $|G - \Omega^0| = 41 \cdot 29$ . Далее, подграф  $X_0(W) \cup X_3(W)$  содержит не менее  $116 + 29(41 - 8)$  вершин, противоречие с леммой 1.2.

Если  $116 < |\Omega^0| \leq 203$ , то  $|\bigcup_i \Omega^i| \geq 30 \cdot 58$ , противоречие. Пусть  $|\Omega^0| = 232$ . Тогда  $|G - \Omega^0| = 37 \cdot 29$ , и подграф  $X_0(W) \cup X_3(W)$  содержит не менее  $232 + 29(37 - 4)$  вершин, противоречие с леммой 1.2.

Аналогичное противоречие получим в случае  $|\Omega^0| > 232$ .

Лемма доказана.

Из лемм 2.1–2.5 следует теорема.

### 3. Граф с параметрами (1305, 440, 115, 165), вершинно симметричный случай

До конца работы будем предполагать, что неразрешимая группа  $G$  действует транзитивно на множестве вершин графа  $\Gamma$ . Тогда  $|G : G_a| = 1305 = 9 \cdot 5 \cdot 29$ , и 29 не делит  $|G_a|$ . Через  $\bar{\Gamma}$  обозначим цоколь группы  $G/S(G)$ .

**Лемма 3.1.** *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если  $f$  — элемент порядка 29 из  $G$  и  $C_G(f)$  содержит элемент  $g$  простого порядка  $p \neq 29$ , то  $\alpha_1(f) = 435$ , и либо*

- (i)  $\alpha_1(g) = 0$ ,  $\alpha_0(g) = 261$  и  $p = 2, 3$ , либо  
(ii)  $p = 5$ ,  $\alpha_1(g) = 145$ ,  $\alpha_0(g) = 290$  или  $\alpha_1(g) = 1160$ ,  $\alpha_0(g) = 145$ , либо  
(iii)  $p = 3$ ,  $\alpha_1(g) = 870$ ,  $\alpha_0(g) = 87$ , либо  
(iv)  $p = 2$ ,  $\alpha_1(g) = 290$ ,  $\alpha_0(g) = 319$  или  $\alpha_1(g) = 580$ ,  $\alpha_0(g) = 29, 377$ , или  $\alpha_1(g) = 870$ ,  
 $\alpha_0(g) = 435, 87$ , или  $\alpha_1(g) = 1160$ ,  $\alpha_0(g) = 145$ ;  
(2) либо  $S(G) = O_{3,5,29}(G)$ , группа  $\bar{T}$  изоморфна  $A_5$ ,  $A_6$  или  $\text{PSp}_4(3)$ , либо  $S(G) = O_{3,5}(G)$ , группа  $\bar{T}$  изоморфна  $L_2(29)$ ,  $A_{29}$  или  $A_{30}$ , в случаях  $L_2(29)$ ,  $A_{30}$  группа  $V = S(G)$  является элементарной абелевой 3-группой,  $|V : V_a| = 3$ , и группа  $\bar{T}$  действует неприводимо на  $V$ .

**Доказательство.** Пусть  $f$  — элемент порядка 29 из  $G$ ,  $g$  — элемент простого порядка  $p \neq 29$  из  $C_G(f)$  и  $\Sigma = \text{Fix}(f)$ . Тогда  $\Sigma$  — пустой граф,  $\alpha_1(f) = 435$ , 29 делит  $|\Omega|$  и  $\alpha_i(g)$ . Ввиду леммы 2.4 имеем  $p \leq 23$ .

Так как  $\chi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/60 + 29/4$ , то  $\alpha_1(g)$  делится на 5. Если  $p \neq 5$ , то  $\alpha_1(g)$  делится на  $145p$ . Если  $\alpha_1(g) = 0$ , то  $\alpha_0(g)$  делится на 29, поэтому  $p = 3$ ,  $\alpha_0(g) = 261$  или  $p = 2$ ,  $\alpha_0(g) = 261$ .

Если  $\alpha_1(g) \neq 0$ , то  $5p \leq 45$  и  $p \leq 7$ . В случае  $p = 7$  имеем  $\alpha_1(g) = 1015$  и  $\alpha_0(g) = 248, 164, 80$ , противоречие. В случае  $p = 5$  число  $\alpha_1(g)$  делится на 145, и либо  $\alpha_1(g) = 145$ ,  $\alpha_0(g) = 290$ , либо  $\alpha_1(g) = 1160$ ,  $\alpha_0(g) = 145$ . Утверждение (1) доказано.

Допустим, что  $h$  — элемент порядка 9 из  $C_G(f)$ ,  $g = h^3$ . Тогда  $\alpha_0(g) = 261$  и  $\chi_2(g) - 116 = 29 - 116$  не делится на 9, противоречие с леммой 2.1.

Допустим, что  $h$  — элемент порядка 25 из  $C_G(f)$ ,  $g = h^5$ . Тогда  $\alpha_1(g)$  не делится на 25, противоречие.

Так как  $v = 9 \cdot 5 \cdot 29$ , то  $S(G) = O_{3,5,29}(G)$ . Если  $f$  — элемент порядка 29 из  $S(G)$ , то  $\pi(\bar{T}) = \{2, 3, 5\}$  и группа  $\bar{T}$  изоморфна  $A_5$ ,  $A_6$  или  $\text{PSp}_4(3)$ . Далее, силовская 2-подгруппа из  $\bar{T}_a$  и элементы порядка 3 и 5 из  $\bar{T}$  фиксируют некоторую вершину, поэтому  $\bar{T}$  фиксирует  $a^{(f)}$ .

Пусть  $R$  — силовская 3-подгруппа из  $G$ , допускающая  $f$ ,  $R_0 = R \cap S(G)$  и  $R_1 = C_G(f) \cap R_0$ . Так как  $|R : R_a| = 9$ , то  $\Phi(P_0)$  фиксирует каждую вершину из  $\Gamma$  и, следовательно,  $R_0$  — элементарная абелева 3-группа.

Пусть  $P$  — силовская 5-подгруппа из  $G$ , допускающая  $f$ ,  $P_0 = P \cap S(G)$  и  $P_1 = C_G(f) \cap P_0$ . Так как  $|P : P_a| = 5$ , то  $\Phi(P_0)$  фиксирует каждую вершину из  $\Gamma$  и, следовательно,  $P_0$  — элементарная абелева 5-группа.

Если  $G$  содержит элемент простого порядка, большего 29, то ввиду [10, табл. 1] группа  $\bar{T}$  изоморфна  $A_n$ ,  $n = 31, 32, \dots, 35$  или  $J_4$ . Противоречие с тем, что  $\bar{T}_a$  — подгруппа из  $\bar{T}$  индекса, делящего  $45 \cdot 29$ .

Пусть  $G$  не содержит элементов простого порядка, большего 29. Ввиду [10, таблица 1] группа  $\bar{T}$  изоморфна  $L_2(29)$ ,  $L_2(17^2)$ ,  $\text{PSp}_4(17)$ ,  $U_4(17)$ ,  $\text{Ru}$ ,  $\text{Fi}'_{24}$ ,  $A_{29}$  или  $A_{30}$ . Так как  $\bar{T}_a$  — подгруппа из  $\bar{T}$  индекса, делящего  $45 \cdot 29$ , то либо  $\bar{T} \cong L_2(29)$  и  $\bar{T}_a$  — диэдральная группа порядка 28, либо  $\bar{T} \cong A_{29}$  и  $\bar{T}_a \cong A_{28}$ , либо  $\bar{T} \cong A_{30}$  и  $\bar{T}_a \cong S_{28}$ .

В случаях  $L_2(29)$ ,  $A_{30}$  имеем  $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 45 \cdot 29$ , поэтому группа  $V = S(G)$  является элементарной абелевой 3-группой,  $|V : V_a| = 3$ , и группа  $\bar{T}$  действует неприводимо на  $V$ .

Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия. Пусть  $G$  является расширением элементарной абелевой 3-группы  $V$  с помощью группы  $L \cong L_2(29)$ . Поскольку  $L_a \cong D_{28}$  для любой вершины  $a$ , и в  $L$  есть только один сопряженный класс подгрупп, изоморфных  $D_{28}$ , то для фиксированной вершины  $a$  группа  $L_a$  оставляет неподвижной вершину в каждой из  $L$ -орбит, т. е. набор длин орбит  $L_a$ , лежащих в заданной  $L$ -орбите, не зависит от выбора  $L$ -орбиты и равен  $\{1^1, 7^2, 14^{12}, 28^9\}$ . Всего имеется три  $L$ -орбиты длины 435. Таким образом,  $[a]$  содержит не больше двух вершин, фиксируемых  $L_a$ , остальные вершины из  $[a]$  принадлежат  $L_a$ -орбитам, длины которых кратны 7. Противоречие с тем, что  $|[a]| = 440 \equiv 6 \pmod{7}$ . Итак, граф не существует.

Пусть  $G$  является расширением элементарной абелевой 3-группы  $V$  с помощью группы  $L \cong A_{30}$ . Однако, в  $A_{30}$  есть только один сопряженный класс подгрупп, изоморфных  $S_{28}$ . При



действию  $A_{30}$  на 435 точках  $S_{28}$  имеет орбиты длин 1, 56, 378, которые нужно повторить 3 раза: по разу для каждой  $L$ -орбиты. Как и выше, число  $|[a]| = 440$  не раскладывается в сумму длин орбит  $L_a$ . Граф не существует.

Если группа  $G$  действует транзитивно на множестве дуг (упорядоченных ребер) графа  $\Gamma$ , то для вершины  $b \in [a]$  имеем  $|G_a : G_{a,b}| = 440$ . Допустим, что 3 делит  $|S(G)|$ , и выберем силовскую 3-подгруппу  $R$  из  $S(G)$ . Тогда  $R_a$  фиксирует некоторую вершину из  $[a]$ . Отсюда  $R_a$  фиксирует каждую вершину из  $[a]$ . Так как  $|\Gamma - a^\perp| = 864$  и  $R_a$  действует полурегулярно на  $\Gamma - a^\perp$ , то  $|R_a|$  не делится на 81, противоречие. Значит, 3 не делит  $|S(G)|$ , противоречие.

Следствие доказано.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cameron P., Van Lint J.** Designs, graphs, codes and their links. ISBN: 0521423856.
2. **Bannai E., Munemasa A., Venkov B.** The nonexistence of certain tight spherical designs // Algebra and Analysis. 2004. Vol. 16, no. 4. P. 1–23.
3. **Nebe G., Venkov B.** On tight spherical designs // Algebra and Analysis. 2012. Vol. 24, no. 3. P. 163–171.
4. **Makhnev A.A.** On nonexistence of strongly regular graphs with parameters (486, 165, 36, 66) // Ukrainskii Mat. Zh. 2002. V. 54, № 7. P. 941–949.
5. **Махнев А.А., Хамгокова М.М.** Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (532, 156, 30, 52) // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 930–939.
6. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // European J. Combin. 1993. Vol. 14, no. 3. P. 397–407.
7. **Cameron P.J.** Permutation Groups Cambridge: Cambridge University Press. 1999. 220 p. doi: 10.1017/CBO9780511623677.
8. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {56, 45, 1; 1, 9, 56} // Докл. РАН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
9. **MacKay M., Siran J.** Search for properties of the missing Moore graph // Linear Algebra Appl. 2010. Vol. 432, no. 9. P. 2381–2398. doi: 10.1016/j.laa.2009.07.018.
10. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Махнев Александр Алексеевич  
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН,  
зав. отделом

Поступила 24.04.2017

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
Уральский федеральный университет,  
г. Екатеринбург  
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович  
д-р физ.-мат. наук,  
главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

Хамгокова Мадина Мухадиновна  
канд. физ.-мат. наук,  
науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН  
e-mail: hamgokova.madina@yandex.ru

### REFERENCES

1. Cameron P., Van Lint J. *Designs, graphs, codes and their links*. Cambridge: Cambridge University Press, 1981, 240 p. ISBN: 0521423856.

2. Bannai E., Munemasa A., Venkov B. The nonexistence of certain tight spherical designs. *St. Petersburg Math. J.*, 2005, vol. 16, no. 4, pp. 609–625. doi: 10.1090/S1061-0022-05-00868-X.
3. Nebe G., Venkov B. On tight spherical designs *St. Petersburg Math. J.*, 2013, vol. 24, no. 3, pp. 485–491. doi: 10.1090/S1061-0022-2013-01249-0.
4. Makhnev A.A. On nonexistence of strongly regular graphs with parameters  $(486, 165, 36, 66)$ . *Ukrainian Mathematical Journal*, 2002, vol. 54, no. 7, pp. 1137–1146. doi: 10.1023/A:1022066425998.
5. Makhnev A.A., Khamgokova M.M. Automorphisms of strongly regular graph with parameters  $(532, 156, 30, 52)$ . *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, vol. 12, pp. 930–939. doi: 10.17377/semi.2015.12.078.
6. Brouwer A.E., Haemers W.H. The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra. *European J. Combin.*, 1993, vol. 14, no. 5, pp. 397–407. doi: 10.1006/eujc.1993.1044.
7. Cameron P.J. *Permutation groups*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999, 220 p. doi: 10.1017/CBO9780511623677.
8. Gavrilyuk A.L., Makhnev A.A., On automorphisms of distance-regular graph with the intersection array  $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ . *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282.
9. MacKay M., Siran J. Search for properties of the missing Moore graph. *Linear Algebra Appl.*, 2010, vol. 432, no. 9, pp. 2381–2398. doi: 10.1016/j.laa.2009.07.018.
10. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

The paper was received by the Editorial Office on April 24, 2017.

*A. A. Makhnev.* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,  
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

*D. V. Paduchikh.* Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,  
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

*M. M. Hamgokova.* Kand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,  
e-mail: hamgokova.madina@yandex.ru

УДК 519.177+517.545

О ТЕОРЕМАХ ОИКАВЫ И АРАКАВЫ ДЛЯ ГРАФОВ<sup>1</sup>

А. Д. Медных, И. А. Медных, Р. Неделя

Настоящая статья посвящена дальнейшему развитию дискретной теории римановых поверхностей, начатой в начале века в работах М. Бейкера и С. Норина и их последователей. Аналогами римановых поверхностей в этой теории выступают конечные графы, а роль голоморфных отображений играют их разветвленные накрытия. Родом графа назовем ранг его фундаментальной группы. Главным объектом исследования статьи являются группы автоморфизмов графов, действующие без неподвижных точек на множестве полурёбер графа. Они представляют из себя дискретные аналоги групп конформных автоморфизмов римановой поверхности. Знаменитая теорема Гурвица (1893) утверждает, что компактная риманова поверхность рода  $g > 1$  не может иметь более чем  $84(g - 1)$  автоморфизмов. Полученные позже теоремы К. Оикавы и Т. Аракавы уточняют эту оценку для групп, оставляющих инвариантными несколько конечных подмножеств заданной мощности. Основное содержание этой публикации состоит в доказательстве дискретных версий указанных теорем. Получен также дискретный аналог теоремы Э. Бухананса и Г. Громадски, улучшающей один из результатов Аракавы.

Ключевые слова: риманова поверхность, формула Римана — Гурвица, граф, группа автоморфизмов, гармоническое отображение.

**A. D. Mednykh, I. A. Mednykh, R. Nedelya. On the Oikawa and Arakawa theorems for graphs.**

The present paper is devoted to the further development of the discrete theory of Riemann surfaces, which was started in the papers by M. Baker and S. Norine at the beginning of the century. This theory considers finite graphs as analogs of compact Riemann surfaces and branched coverings of graphs as holomorphic maps. The genus of a graph is defined as the rank of its fundamental group. The main object of investigation in the paper is automorphism groups of a graph acting freely on the set of arcs. These groups are discrete analogs of groups of conformal automorphisms of a Riemann surface. The celebrated Hurwitz theorem (1893) states that the order of the group of conformal automorphisms of a compact Riemann surface of genus  $g > 1$  does not exceed  $84(g - 1)$ . Later, K. Oikawa and T. Arakawa refined this bound in the case of groups that fix several finite sets of prescribed cardinalities. This paper provides proofs of discrete versions of the mentioned theorems. In addition, a graph-theoretic version of the E. Bujalance and G. Gromadzki result improving the Arakawa theorem is obtained.

Keywords: Riemann surface, Riemann–Hurwitz formula, graph, automorphism group, harmonic map.

MSC: 05C10, 57M12

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-243-252

*Посвящается 70-летию нашего друга  
и коллеги академика С. В. Матвеева*

## Введение

В последнее десятилетие появилось значительное количество работ, посвященных дискретной теории римановых поверхностей. В качестве дискретных аналогов римановых поверхностей в этой теории выступают конечные графы, а роль голоморфных отображений играют их разветвленные накрытия. Для графов установлены различные версии формулы Римана —

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-07906 и 16-31-00138). Исследования Р. Недели частично поддержаны проектом L01506 Министерства Образования, Молодежи и Спорта Чешской Республики и проектом P202/12/G061 Чешского Научного Фонда (The research of R. Nedela was partially supported by the project L01506 of the Czech Ministry of Education, Youth and Sports and by the project P202/12/G061 of Czech Science Foundation).

Гурвица [1–4] и доказаны аналоги теоремы Римана — Роха [1]. Многие другие теоремы классической теории римановых поверхностей также были перенесены на дискретный случай. В частности, в работе [2] установлены оценки порядка группы, действующей гармонично (то есть без неподвижных полуребер) на графе заданного рода. Этот результат можно рассматривать как дискретный аналог известной теоремы Гурвица [5], дающей точную верхнюю оценку порядка группы автоморфизмов римановой поверхности через ее род. Напомним, что классическая оценка Гурвица имеет вид  $|\text{Aut}(S_g)| \leq 84(g - 1)$ , где  $S_g$  — произвольная риманова поверхность рода  $g > 1$ , а  $\text{Aut}(S_g)$  — группа ее конформных автоморфизмов. В работах [6–9] установлены дискретные версии теорем Фаркаша и Акколы, описывающих свойства разветвленных накрытий с заданными симметриями. В работе [10] получена точная верхняя оценка порядка циклической группы, действующей гармонично на графе рода, большего единицы.

В данной работе изучаются порядки групп автоморфизмов, действующих гармонично на графе заданного рода. *Графом* называется связный конечный мультиграф без петель. *Родом* графа будем называть ранг его фундаментальной группы.

Цель настоящей работы — установить дискретные версии теорем К. Оикавы [11] и Т. Аракавы [12], уточняющих верхнюю оценку Гурвица для различных классов групп, действующих на римановой поверхности заданного рода. Также будет получена дискретная версия теоремы Э. Бухалансе и Г. Громадски [13], улучшающая одну из теорем Аракавы в ряде частных случаев. Часть результатов настоящей статьи была предварительно анонсирована в работе авторов [14].

## 1. Предварительные сведения

Обозначим через  $V(X)$  и  $E(X)$  множества вершин и ребер графа  $X$  соответственно. Пусть  $X'$  — барицентрическое подразбиение графа  $X$ . Рассмотрим  $X'$  как двудольный граф с белыми вершинами в серединах ребер графа  $X$  и черными в вершинах графа  $X$ . Для геометрической наглядности отождествим множество ребер  $E(X')$  с множеством полуребер  $D(X)$  графа  $X$ . Таким образом, полуребро графа  $X$  — это ребро графа  $X'$  (всякое ребро этого графа имеет одну белую и одну черную вершину). Существует естественное взаимнооднозначное соответствие между полуредрами и ориентированными ребрами графа  $X$ . Отметим, что каждый автоморфизм графа  $X$  однозначно продолжается до автоморфизма графа  $X'$ .

Пусть  $X$  и  $Y$  — графы. Отображение  $\phi : V(X) \cup E(X) \rightarrow V(Y) \cup E(Y)$  называется *морфизмом*  $X$  в  $Y$ , если  $\phi(V(X)) \subseteq V(Y)$ , а для любых  $x \in V(X)$  и  $e \in E(X)$  таких, что  $x$  инцидентна  $e$ , имеем:  $\phi(x)$  инцидентна  $\phi(e)$ . Для краткости в этом случае будем писать  $\phi : X \rightarrow Y$ . Далее, биективный морфизм  $\phi$  называется *изоморфизмом*, а изоморфизм  $\phi : X \rightarrow X$  называется *автоморфизмом*.

Основным в данной работе является следующее определение. Морфизм  $\phi : X \rightarrow Y$  называется *гармоническим отображением* (или *разветвленным накрытием*), если для всех  $x \in V(X)$  и всех  $y \in V(Y)$  таких, что  $y = \phi(x)$ , величина  $|\{e \in E(X) : x \in e, \phi(e) = e'\}|$  одна и та же для всех ребер  $e' \in E(Y)$ , инцидентных  $y$ . Это определение с незначительными модификациями было введено ранее в [1].

Мы говорим, что группа автоморфизмов  $G$  графа  $X$  действует на нем *гармонично*, если она действует свободно (то есть всякий ее неединичный элемент действует без неподвижных точек) на множестве его полуребер  $D(X)$ . Эквивалентно,  $G$  действует свободно на множестве ребер двудольного графа  $X'$ , сохраняя окраску его вершин. Заметим, что в этом случае фактор-множество  $X'/G$  — корректно определенный двудольный граф. При этом каноническое отображение  $X' \rightarrow X'/G$  переводит вершины и ребра графа  $X'$  соответственно в вершины и ребра графа  $X'/G$  и является гармоническим отображением в указанном выше смысле. Ребро  $e = \{x, \bar{x}\}$ , состоящее из полуребер  $x$  и  $\bar{x}$ , называется *обратимым*, если существует элемент группы  $G$ , переводящий  $x$  в  $\bar{x}$ , а  $\bar{x}$  в  $x$ . Отметим, что образ обратимого ребра графа  $X$  в  $X'/G$  — это ребро с белой вершиной валентности один. Определим фактор-граф  $X/G$  как граф, полу-

ченный из  $X'/G$  удалением его белых двухвалентных вершин. При этом образами обратимых ребер будут ребра с белыми вершинами валентности один. Мы будем их называть полуредрами графа  $X/G$ . Детальное изложение теории графов с полуредрами приводится в [15].

Пусть  $G$  — конечная группа, действующая гармонично на графе  $X$ . Заменяя, если потребуется, граф  $X$  на его барицентрическое подразбиение  $X'$ , в дальнейшем, без ограничения общности, будем считать, что  $G$  действует на  $X$  без обратимых ребер. Обозначим через  $\varphi$  каноническую проекцию графа  $X$  на фактор-граф  $X/G$ . Для вершины  $\tilde{v} \in V(X)$  обозначим через  $G_{\tilde{v}}$  стабилизатор вершины  $\tilde{v}$  в группе  $G$ . Каждой вершине  $v$  фактор-графа  $X/G$  припишем величину  $m_v = |G_{\tilde{v}}|$ . Поскольку  $G$  действует транзитивно на каждом слое отображения  $\varphi$ , числа  $m_v$  определены корректно. Пусть  $m_1, \dots, m_r$ , где  $2 \leq m_1 \leq \dots \leq m_r$ , — все отличные от 1 элементы множества  $\{m_v\}_{v \in V(X/G)}$ . Обозначим через  $\gamma$  род фактор-графа  $X/G$  и назовем набор чисел  $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$  *сигнатурой* фактор-графа  $X/G$ . В то же время пару  $(\gamma; \{m_v\}_{v \in V(X/G)})$  будем называть *полной сигнатурой* фактор-графа  $X/G$ .

Нам потребуется следующая версия формулы Римана — Гурвица, доказательство которой можно найти в [1; 3; 4]:

*Пусть  $G$  — конечная группа, действующая гармонично на графе  $X$  рода  $g$ . Тогда справедлива формула*

$$g - 1 = |G|(\gamma - 1 + \sum_{v \in V(X/G)} (1 - 1/m_v)), \tag{1}$$

где  $(\gamma; \{m_v\}_{v \in V(X/G)})$  — полная сигнатура фактор-графа  $X/G$ .

## 2. Основные результаты

### 2.1. Теорема Оикавы

В 1956 г. Котаро Оикава [11] предложил следующее уточнение верхней оценки Гурвица. Пусть  $G$  — группа конформных автоморфизмов римановой поверхности рода  $g$ , оставляющая инвариантным конечное множество  $A$ , состоящее из  $|A| = k \geq 1$  элементов. Предположим, что выполнено неравенство  $2g - 2 + k > 0$ , тогда справедлива следующая оценка порядка группы  $G$ :  $|G| \leq 12(g - 1) + 6k$ . Оценка точная и достигается для бесконечного числа пар  $(g, k)$ .

Основным результатом настоящего раздела является следующая теорема, представляющая дискретную версию теоремы Оикавы для графов. Она уточняет полученную ранее авторами теорему 3 из работы [14].

**Теорема 1.** *Пусть  $X$  — граф рода  $g$ , а  $G$  — группа его автоморфизмов, действующая на нем гармонично. Предположим, что  $G$  оставляет инвариантным подмножество  $A$  вершин графа  $X$ , состоящее из  $s \geq 1$  элементов. Тогда  $|G| \leq 2(g - 1) + 2s$ .*

*Полученная оценка точна и достигается для  $s = 2$  и любого  $g \geq 0$ .*

**Доказательство.** Нам потребуются следующий результат, установленный в [14, предложение 2]:

*Пусть  $G$  — конечная группа, действующая гармонично на графе  $X$  рода  $g$ . Обозначим через  $A$  непустое  $G$ -инвариантное подмножество вершин графа  $X$ . Положим  $s = |A|$  и  $p = |A/G|$ . Тогда справедлива формула*

$$g - 1 + s = |G| \left( \gamma - 1 + \sum_{v \in V(X/G) - A/G} \left(1 - \frac{1}{m_v}\right) + p \right), \tag{2}$$

где  $(\gamma; \{m_v\}_{v \in V(X/G)})$  — полная сигнатура фактор-графа  $X/G$ .

Рассмотрим все вершины  $v \in V(X/G) - A/G$ , для которых  $m_v > 1$ . Предположим, что имеется ровно  $r \geq 0$  таких вершин. А именно,  $v_1, v_2, \dots, v_r$ . Положим  $m_i = m_{v_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

Согласно (2) имеем

$$g - 1 + s = |G| \left( \gamma - 1 + \sum_{i=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_i} \right) + p \right).$$

Из условия теоремы следует, что

$$S = \gamma - 1 + \sum_{i=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_i} \right) + p > 0.$$

Поскольку  $|G| = (g - 1 + s)/S$ , максимум величины  $|G|$  достигается при минимуме величины  $S$ , при условии  $S > 0$ . Рассмотрим два возможных случая.

1°.  $\gamma \geq 1, p \geq 1$ . Тогда  $S \geq 0 + 0 + p \geq 1$  и минимум величины  $S = 1$  достигается при  $\gamma = 1, p = 1, r = 0$ . В этом случае  $X$  является регулярным накрытием графа рода 1, разветвленным над одной точкой.

2°.  $\gamma = 0, p \geq 1$ . Тогда  $S \geq \sum_{i=1}^r \left( 1 - \frac{1}{m_i} \right) \geq \frac{1}{2}$ . Минимум величины  $S = \frac{1}{2}$  достигается при  $\gamma = 0, p = 1, r = 1$  и  $m_1 = 2$ . Здесь  $X$  — регулярное накрытие дерева, разветвленное над двумя точками с порядками ветвления 2 и  $|G|/s$ . Следовательно,  $S \geq \frac{1}{2}$  и  $|G| = (g - 1 + s)/S \leq 2(g - 1) + 2s$ .

Точность полученной оценки следует из рассмотрения примера 1, приведенного ниже. Более точно, равенство  $|G| = 2(g + s - 1)$  достигается при  $s = 2$  для группы  $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{g+1}$ , действующей гармонично на графе  $X = K_{2,g+1}$  по правилу, описанному в указанном примере.  $\square$

## 2.2. Теоремы Аракавы

Т. Аракава [12] доказал две теоремы, обобщающие теорему Оикавы на случай двух и трех инвариантных подмножеств. Первая из них утверждает, что порядок конечной группы  $G$  конформных автоморфизмов римановой поверхности  $X$  рода  $g > 1$ , имеющей непересекающиеся инвариантные подмножества  $A$  и  $B$  такие, что  $|A| \geq |B| \geq 1$ , удовлетворяет неравенству  $|G| \leq 8(g - 1) + |A| + 4|B|$ . Вторая теорема устанавливает, что для трех  $G$ -инвариантных непересекающихся подмножеств  $A, B, C$  поверхности  $X$  таких, что  $|A| \geq |B| \geq |C| \geq 1$ , справедлива оценка порядка группы  $G$ :  $|G| \leq 2(g - 1) + |A| + |B| + |C|$ . В работе Э. Бухалансе и Г. Грамадски [13] приведена более тонкая формулировка первой теоремы Аракавы в случае, когда мощности множеств  $A$  и  $B$  строго меньше  $|G|$ .

В данном разделе будут доказаны дискретные версии двух теорем Аракавы [12] и установлен дискретный аналог теоремы 3.2 из [13].

Пусть  $G$  — конечная группа, действующая на некотором множестве  $X$ . *Орбитой* группы  $G$  называется множество вида  $\{g(x), g \in G\}$ , где  $x$  — фиксированный элемент  $X$ . Орбита называется *собственной*, если ее порядок строго меньше  $|G|$ . Любое  $G$ -инвариантное подмножество  $X$  представляется как дизъюнктивное объединение орбит группы  $G$  (не обязательно собственных).

Следующее утверждение переносит результаты первой теоремы Аракавы на графы и обобщает теорему 4 из работы авторов [14].

**Теорема 2.** Пусть  $X$  — граф рода  $g \geq 2$ , а  $A$  и  $B$  — два непересекающиеся подмножества вершин  $X$ , мощности которых удовлетворяют неравенствам  $|A| \geq |B| \geq 1$ . Предположим, что конечная группа  $G$  действует гармонично на  $X$  и оставляет множества  $A$  и  $B$  инвариантными. Тогда имеет место неравенство  $|G| \leq \frac{1}{2}(s(g - 1) + t|A| + u|B|)$ , справедливое для любого набора чисел  $s, t, u$ , удовлетворяющих соотношениям  $u \geq s \geq 3, 2 \geq t \geq 0$  и  $s + t \geq 4$ .

В случае  $u = s$  и  $s + t = 4$  полученная оценка является точной и достигается для любого рода  $g$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим сигнатуру  $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$  фактор-графа  $X/G$ . Здесь  $\gamma \geq 0$ ,  $r \geq 0$  и  $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_r$ . Тогда, по формуле Римана — Гурвица  $|G| = (g - 1)/S$ , где  $S = \gamma - 1 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i})$ .

По предположению теоремы мы имеем  $g - 1 > 0$  и  $|G| \geq 1$ . Следовательно,  $S > 0$ . Поэтому для нахождения верхней границы  $|G|$  достаточно найти нижнюю границу  $S$  при условии  $S > 0$ . В следующих трех случаях нижняя оценка на  $S$  находится относительно легко.

1°.  $\gamma \geq 2$ . Тогда  $S \geq 1 + 0 \geq 1$ , и минимальное значение  $S = 1$  достигается при  $\gamma = 2$ ,  $r = 0$ . Поскольку  $u \geq s \geq 2$ , а  $t$  неотрицательно, имеем

$$|G| = \frac{(g - 1)}{S} \leq g - 1 < \frac{1}{2}(s(g - 1) + t|A| + u|B|).$$

2°.  $\gamma = 1$ ,  $r \geq 2$ . В этом случае  $S \geq \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Минимум  $S = 1$  достигается при  $\gamma = 1$ ,  $r = 2$ ,  $m_1 = m_2 = 2$ . Аналогично предыдущему получим  $|G| \leq g - 1 < \frac{1}{2}(s(g - 1) + t|A| + u|B|)$ .

3°.  $\gamma = 0$ ,  $r \geq 4$ . Здесь  $S \geq -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . По-прежнему,  $|G| < \frac{1}{2}(s(g - 1) + t|A| + u|B|)$ .

В вышеуказанных трех случаях утверждение теоремы справедливо. Для рассмотрения оставшихся случаев нам потребуется следующая лемма, приведенная в работе [14] без доказательства.

**Лемма.** Пусть фактор-граф  $X/G$  имеет сигнатуру  $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$ . Тогда  $|G| \leq \frac{3}{2}(g - 1)$  за исключением следующих случаев:

- (i)  $\gamma = 1$ ,  $r = 1$ ,  $m_1 = 2$ ;
- (ii)  $\gamma = 0$ ,  $r = 3$ ,  $(m_1, m_2, m_3) = (2, 2, 2)$ ;
- (iii)  $\gamma = 0$ ,  $r = 2$ ,  $(m_1, m_2) = (5, m)$ ,  $m \geq 5$ ;
- (iv)  $\gamma = 0$ ,  $r = 2$ ,  $(m_1, m_2) = (4, m)$ ,  $m \geq 4$ ;
- (v)  $\gamma = 0$ ,  $r = 2$ ,  $(m_1, m_2) = (3, m)$ ,  $m \geq 3$ ;
- (vi)  $\gamma = 0$ ,  $r = 2$ ,  $(m_1, m_2) = (2, m)$ ,  $m \geq 3$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** (i) Пусть  $\gamma = 1$ . В силу 2° мы можем считать, что  $r = 1$ . Случай  $r = 0$  невозможен в силу неравенства  $g \geq 2$ . Пусть теперь  $m_1 \geq 3$ . Тогда  $S \geq 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ . Отсюда  $|G| \leq \frac{3}{2}(g - 1)$ .

В оставшихся случаях (ii)–(vi) мы имеем  $\gamma = 0$ . При этом  $r \geq 2$ , иначе  $S < 0$ . Предположим, что  $r \geq 4$ . Тогда  $S \geq -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  и  $|G| \leq (g - 1) < \frac{3}{2}(g - 1)$ .

(ii) Пусть  $r = 3$  и  $m_3 \geq 3$ . Тогда  $S \geq -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$  и  $|G| \leq \frac{3}{2}(g - 1)$ . Поскольку  $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq m_3$ , остается ровно один случай  $(m_1, m_2, m_3) = (2, 2, 2)$ .

В заключение рассмотрим случай  $\gamma = 0$  и  $r = 2$ . Тогда

$$S = -1 + \sum_{i=1}^2 (1 - \frac{1}{m_i}) = 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}.$$

Если  $m_1 \geq 6$ , то в силу  $m_2 \geq m_1$  имеем  $S \geq -1 + \frac{5}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$ . В результате получаем  $|G| \leq \frac{3}{2}(g - 1)$ . Поэтому исключительными случаями будут (iii)–(vi). □

Продолжим доказательство теоремы 2. Для его завершения достаточно рассмотреть случаи (i)–(vi). Иначе, в силу условий  $u \geq s \geq 3$  и  $t \geq 0$  имеем

$$|G| \leq \frac{3}{2}(g-1) < \frac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|).$$

Покажем, что теорема справедлива в каждом из указанных случаев.

(i) Здесь  $|G| = 2(g-1)$ . По предположению множества  $A$  и  $B$  состоят из попарно непересекающихся орбит группы  $G$ , образованных вершинами графа  $X$ . Поскольку  $r = 1$  и  $m_1 = 2$ , существует единственная орбита длины  $g-1$ , а остальные орбиты имеют длину  $2(g-1)$ . Напомним, что  $|A| \geq |B|$ . Поэтому  $|A| \geq 2(g-1)$  и  $|B| \geq g-1$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|) &\geq \frac{1}{2}(s(g-1) + 2t(g-1) + u(g-1)) \\ &\geq \frac{1}{2}(3(g-1) + 0(g-1) + 3(g-1)) > 2(g-1) = |G|, \end{aligned}$$

и утверждение теоремы доказано.

(ii) В этом случае  $|G| = 2(g-1)$ . Поскольку  $(m_1, m_2, m_3) = (2, 2, 2)$ , длины двух минимальных орбит группы  $G$  равны  $g-1$ . Следовательно,  $|A| \geq g-1$ ,  $|B| \geq g-1$  и  $\frac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|) \geq \frac{3+0+3}{2}(g-1) > |G|$ .

(iii)–(vi) В указанных случаях по формуле Римана — Гурвица (1) получим

$$g-1 = \left(1 - \frac{1}{j} - \frac{1}{m}\right)|G|,$$

где  $j = 2, 3, 4, 5$  и  $m \geq j$  за исключением случая  $j = 2$ , где  $m \geq 3$ . Длины двух наименьших орбит группы  $G$  равны  $|G|/m$  и  $|G|/j$ . Отсюда  $|A| \geq |G|/j$  и  $|B| \geq |G|/m$ . Тогда последовательно учитывая, что  $u - s \geq 0$ ,  $s \geq 4 - t$ ,  $2 - t \geq 0$  и  $j \geq 2$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|) &\geq \frac{1}{2}\left(s\left(1 - \frac{1}{j} - \frac{1}{m}\right) + \frac{t}{j} + \frac{u}{m}\right)|G| \\ &= \frac{1}{2}\left(s\left(1 - \frac{1}{j}\right) + \frac{t}{j} + \frac{u-s}{m}\right)|G| \geq \frac{1}{2}\left(s\left(1 - \frac{1}{j}\right) + \frac{t}{j}\right)|G| \geq \frac{1}{2}\left((4-t)\left(1 - \frac{1}{j}\right) + \frac{t}{j}\right)|G| \\ &= \left(2 - \frac{t}{2} - \frac{2-t}{j}\right)|G| \geq \left(2 - \frac{t}{2} - \frac{2-t}{2}\right)|G| = |G|. \end{aligned}$$

Точность полученной оценки для любого  $g$  следует из примера 2, описанного ниже. При этом  $X = K_{2,g+1}$  и  $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{g+1}$  те же, что и в доказательстве теоремы 1,  $A$  — множество двухвалентных вершин графа  $X$ , а множество  $B$  образовано вершинами графа  $X$  валентности  $g+1$ . Поскольку  $|G| = 2g+2$ ,  $|A| = g+1$  и  $|B| = 2$ , из соотношений  $s+t = 4$  и  $u = s$  непосредственно следует равенство  $|G| = \frac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|)$ .  $\square$

Э. Бухалансе и Г. Громадски [13, теорема 3.2] предложили следующее уточнение первой теоремы Аракавы. Предположим, что группа  $G$  конформных автоморфизмов римановой поверхности  $S$  рода больше 1 имеет две собственные орбиты порядков  $k$  и  $l$ . Тогда либо  $|G| \leq 2(g-1) + k + l$ , либо  $|G| = \frac{m}{m-1}(2(g-1) + k + l)$  для некоторого целого числа  $m \geq 2$ . В последнем случае фактор-поверхность  $S/G$  является сферой, а каноническое отображение  $S \rightarrow S/G$  разветвлено ровно над тремя коническими точками порядков  $|G|/k$ ,  $|G|/l$  и  $m$ . Следующая теорема представляет собой дискретную версию указанного результата.



**Теорема 3.** Пусть  $X$  — граф рода  $g \geq 2$ . Предположим, что конечная группа  $G$  действует гармонично на  $X$ , а  $A$  и  $B$  — две собственные орбиты группы  $G$  на множестве вершин  $X$ . Положим  $k = |A|$  и  $l = |B|$ . Тогда либо порядок группы  $G$  удовлетворяет неравенству  $|G| \leq \frac{2}{3}(g - 1 + k + l)$ , либо имеет место равенство  $|G| = g - 1 + k + l$ . В последнем случае фактор-граф  $X/G$  является деревом, а каноническое отображение  $X \rightarrow X/G$  разветвлено ровно над двумя коническими точками порядков  $|G|/k$  и  $|G|/l$ .

**Доказательство.** Пусть фактор-граф  $X/G$  имеет сигнатуру  $(\gamma; m_1, m_2, \dots, m_r)$ , где  $m_1, m_2, \dots, m_r \geq 2$ . По условию группа  $G$  имеет две собственные орбиты. Следовательно,  $r \geq 2$ . Без ограничения общности можем считать, что при отображении  $X \rightarrow X/G$  орбиты  $A$  и  $B$  переходят в конические точки порядков  $m_1 = |G|/k$  и  $m_2 = |G|/l$  соответственно. По формуле Римана — Гурвица (1) имеем  $|G| = (g - 1)/S$ , где  $S = \gamma - 1 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i})$ .

Рассмотрим несколько случаев.

1°.  $\gamma \geq 1$ . Тогда  $S \geq 2 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}$ , или, эквивалентно,

$$\frac{g - 1}{|G|} \geq 2 - \frac{k}{|G|} - \frac{l}{|G|}.$$

Отсюда  $|G| \leq \frac{1}{2}(g - 1 + k + l)$ .

2°.  $\gamma = 0$ ,  $r \geq 3$ . Учитывая, что  $m_3 \geq 2$ , имеем

$$\frac{g - 1}{|G|} = \gamma - 1 + \sum_{i=1}^r (1 - \frac{1}{m_i}) \geq 0 - 1 + \sum_{i=1}^3 (1 - \frac{1}{m_i}) \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}.$$

Повторяя рассуждения из предыдущего случая, получим  $|G| \leq \frac{2}{3}(g - 1 + k + l)$ .

3°  $\gamma = 0$ ,  $r = 2$ . Имеем

$$\frac{g - 1}{|G|} = 1 - \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2} = 1 - \frac{k}{|G|} - \frac{l}{|G|}.$$

Последнее эквивалентно равенству  $|G| = g - 1 + k + l$ . □

Нижеследующий результат, установленный нами в [14, теорема 5], можно рассматривать как дискретный аналог второй теоремы Аракавы.

**Теорема 4.** Пусть  $X$  — граф рода  $g \geq 2$ , а  $A, B$  и  $C$  — три попарно непересекающиеся подмножества вершин  $X$ , мощности которых удовлетворяют неравенствам  $|A| \geq |B| \geq |C| \geq 1$ . Предположим, что конечная группа  $G$  действует гармонично на  $X$  и оставляет множества  $A, B$  и  $C$  инвариантными. Тогда порядок группы  $G$  удовлетворяет неравенству  $|G| \leq \frac{1}{2}(g - 1 + |A| + |B| + |C|)$ .

В приведенных ниже примерах (см. пример 4) мы покажем, что полученная здесь верхняя оценка является точной и достигается для бесконечного числа значений  $g$ .

**Примеры.** Следующие примеры показывают, что верхние оценки, полученные в теоремах 1–4, достигаются для бесконечно многих значений рода  $g$ . Пусть  $K_{2,g+1}$  — полный двудольный граф с вершинами  $v_1, v_2, w_1, w_2, \dots, w_{g+1}$  и ребрами  $v_i w_j$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, g + 1$ . Рассмотрим группу  $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{g+1}$  порядка  $2g + 2$  как прямое произведение циклических групп  $\mathbb{Z}_2 = \langle x \mid x^2 = 1 \rangle$  и  $\mathbb{Z}_{g+1} = \langle y \mid y^{g+1} = 1 \rangle$ . Определим действие группы  $G$  на графе  $K_{2,g+1}$ , считая, что ее порождающие  $x$  и  $y$  действуют на вершинах графа подстановками  $x = (v_1 v_2)$  и  $y = (w_1 w_2 \dots w_{g+1})$ . Нетрудно проверить, что группа  $G$  действует на графе  $K_{2,g+1}$  гармонично, а фактор-граф  $K_{2,g+1}/G$  представляет собой отрезок с вершинами  $v, w$  и единственным

ребром  $vw$ . Каноническое отображение  $K_{2,g+1} \rightarrow K_{2,g+1}/G$  переводит вершины  $v_1, v_2$  в  $v$ , а  $w_1, w_2, \dots, w_{g+1}$  — в  $w$ . При этом вершинам  $v$  и  $w$  приписаны группы  $\mathbb{Z}_2$  и  $\mathbb{Z}_{g+1}$  соответственно, а сигнатура полученного фактор-графа имеет вид  $(0; 2, g+1)$ . Отметим, что род графа  $X = K_{2,g+1}$  равен  $g$ , а  $|G| = 2g+2$ .

1. Для доказательства точности верхней оценки в теореме 1 выберем  $A = \{v_1, v_2\}$ . Тогда  $|G| = 2(g-1) + 2|A|$ .

2. В теореме 2 в качестве инвариантных множеств возьмем  $A = \{w_1, w_2, \dots, w_{g+1}\}$  и  $B = \{v_1, v_2\}$ . Тогда  $|A| = g+1$ ,  $|B| = 2$  и  $|G| = 2g+2$ . При  $s = u$  и  $s+t = 4$  имеем  $\frac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|) = \frac{1}{2}(s(g-1) + t(g+1) + 2s) = \frac{1}{2}(s+t)(g+1) = 2g+2$ . Откуда  $|G| = \frac{1}{2}(s(g-1) + t|A| + u|B|)$ . Следовательно, верхняя оценка в указанной теореме достигается для любого значения  $g$ .

3. В теореме 3 в качестве собственных орбит группы  $G = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{g+1}$  выберем множества  $A = \{w_1, w_2, \dots, w_{g+1}\}$  и  $B = \{v_1, v_2\}$ . Для них реализуется равенство  $|G| = g-1 + |A| + |B|$ , описанное второй возможностью в теореме 3.

4. Для установления точности оценки в теореме 4 рассмотрим барицентрическое подразбиение, полученное добавлением к каждому ребру  $v_i w_j$  его середины  $m_{i,j}$ . Группа  $G$  по-прежнему действует гармонично на  $X'$ . Полагая  $A = \{w_1, w_2, \dots, w_{g+1}\}$ ,  $B = \{v_1, v_2\}$  и  $C = \{m_{i,j}, i = 1, 2, j = 1, 2, \dots, g+1\}$ , получим  $|A| = g+1$ ,  $|B| = 2$ ,  $|C| = 2(g+1)$ . Отсюда имеем равенство  $|G| = \frac{1}{2}(g-1 + |A| + |B| + |C|)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Baker M., Norine S.** Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs // Int. Math. Res. Notes. 2009. Vol. 15. P. 2914–2955. doi: 10.1093/imrn/rnp037.
2. **Corry S.** Genus bounds for harmonic group actions on finite graphs // Int. Math. Res. Not. 2011. Vol. 19. P. 4515–4533. doi: 10.1093/imrn/rnq261.
3. **Медных А.Д.** On the Riemann–Hurwitz formula for graph coverings [e-resource]. 2015. 8 p. URL: <https://arxiv.org/pdf/1505.00321.pdf>.
4. **Медных А.Д., Неделя Р.** Гармонические отображения графов и теорема Римана — Гурвица // Докл. АН. 2016. Т. 466, № 2. С. 144–147. doi: 10.7868/S0869565216020079.
5. **Hurwitz A.** Uber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich // Math. Ann. 1893. Vol. 41. P. 403–442.
6. **Медных И.А.** О теоремах Фаркаша и Акколы для графов // Докл. АН. 2013. Т. 448, № 4. С. 387–391. doi: 10.7868/S0869565213040063.
7. **Медных И.А.** Дискретные аналоги теорем Фаркаша и Акколы о гиперэллиптичности накрытий над римановой поверхностью рода два // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 1. С. 69–81. doi: 10.4213/mzm9381.
8. **Limonov M.P.** Non-regular graph coverings and lifting the hyperelliptic involution // Siberian Elect. Math. Rep. 2015. Vol. 12. P. 372–380. doi: 10.17377/semi.2015.12.031.
9. **Limonov M.P.** Accola theorem on hyperelliptic graphs // Ars Mathematica Contemporanea. 2016. Vol. 11, iss. 1. P. 91–99.
10. **Медных А., Медных И.** On Wiman’s theorem for graphs // Discrete Math. 2015. Vol. 338. P. 1793–1800. doi: 10.1016/j.clineuro.2015.03.003.
11. **Oikawa K.** Note on conformal mapping of a Riemann surface onto itself // Kodai Math. Sem. Rep. 1956. Vol. 8. P. 23–30.
12. **Arakawa T.** Automorphism groups of compact Riemann surfaces with invariant subsets // Osaka J. Math. 2000. Vol. 37. P. 823–846.
13. **Bujalance E., Gromadzki G.** On automorphisms Of Klein surfaces with invariant subsets // Osaka J. Math. 2013. Vol. 50. P. 251–269.

14. Медных А.Д., Медных И.А., Неделя Р. О некоторых обобщениях теоремы Гурвица для групп, действующих на графе // Докл. АН. 2015. Т. 460, № 5. С. 520–524. doi: 10.7868/S0869565215050072.
15. Malnic A., Nedela R., Skoviera M. Lifting graph automorphisms by voltage assignments // European J. Combin. 2000. Vol. 21, iss. 7. P. 927–947. doi: 10.1006/eujc.2000.0390.

Медных Александр Дмитриевич  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
зав. лабораторией  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
г. Новосибирск  
e-mail: smedn@mail.ru

Поступила 14.06.2017

Медных Илья Александрович  
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
г. Новосибирск,  
e-mail: ilyamednykh@mail.ru

Роман Неделя  
д-р естественных наук, профессор  
Университет Восточной Богемии, факультет прикладных наук,  
ул. Университетская 8, Пилзень, Чешская Республика,  
Университет Матея Бела, ул. Таховского 40, Банька Быстрица, Словакия,  
e-mail: roman.nedela@umb.sk; nedela@ntis.zcu.cz; nedela@savbb.sk

## REFERENCES

1. Baker M., Norine S. Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs. *Int. Math. Res. Notes*, 2009, vol. 15, pp. 2914–2955. doi: 10.1093/imrn/rnp037.
2. Corry S. Genus bounds for harmonic group actions on finite graphs. *Int. Math. Res. Not.*, 2011, vol. 19, pp. 4515–4533. arXiv:1006.0446v2. doi: 10.1093/imrn/rnq261.
3. Mednykh A.D. On the Riemann–Hurwitz formula for graph coverings [e-resource]. 2015. 8 p. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1505.00321.pdf>.
4. Mednykh A.D., Nedela R. Harmonic mappings of graphs and Riemann-Hurwitz theorem. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 1, pp. 23–26. doi: 10.1134/S1064562416010105.
5. Hurwitz A. Uber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. *Math. Ann.*, 1892, vol. 41, pp. 403–442. doi: 10.1007/BF01443420.
6. Mednykh I.A. On the Farkas and Accola theorems for graphs. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 87, no. 1, pp. 65–68. doi: 10.1134/S1064562413010250.
7. Mednykh I. Discrete analogs of Farkas and Accolas theorems on hyperelliptic coverings of a Riemann surface of genus 2. *Math. Notes*, 2014, vol. 96, no. 1, pp. 84–94. doi: 10.1134/S0001434614070074.
8. Limonov M.P. Non-regular graph coverings and lifting the hyperelliptic involution. *Siberian Elect. Math. Rep.*, 2015, vol. 12, pp. 372–380. doi: 10.17377/semi.2015.12.031.
9. Limonov M.P. Accola theorem on hyperelliptic graphs. *Ars Mathematica Contemporanea*, 2016, vol. 11, no. 1, pp. 91–99.
10. Mednykh A., Mednykh I. On Wiman’s theorem for graphs. *Discrete Math.*, 2015, vol. 338, pp. 1793–1800. doi: 10.1016/j.disc.2015.03.003.
11. Oikawa K. Note on conformal mapping of a Riemann surface onto itself. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 1956, vol. 8, no. 1, pp. 23–30. doi: 10.2996/kmj/1138843714.
12. Arakawa T. Automorphism groups of compact Riemann surfaces with invariant subsets. *Osaka J. Math.*, 2000, vol. 37, pp. 823–846.
13. Bujalance E., Gromadzki G. On automorphisms of Klein surfaces with invariant subsets. *Osaka J. Math.*, 2013, vol. 50, pp. 251–269.

14. Mednykh A.D., Mednykh I.A., Nedela R. A Generalization of Hurwitz' theorem for groups acting on a graph. *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 91, no. 1, pp. 87–90. doi: 10.1134/S1064562415010275 .
15. Malnic A., Nedela, R., Skoviera M. Lifting graph automorphisms by voltage assignments. *European J. Combin.*, 2000, vol. 21, no. 7, pp. 927–947. doi: 10.1006/eujc.2000.0390 .

The paper was received by the Editorial Office on June 14, 2017.

*Aleksandr Dmitrievich Mednykh*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,  
e-mail: smedn@mail.ru .

*Il'ya Aleksandrovich Mednykh*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,  
e-mail: ilyamednykh@mail.ru .

*Roman Nedela*, Dr. Sci., Prof. RNDr., University of West Bohemia, NTIS FAV, Universitni 8, Pilsen, Czech Republic, Matej Bel University, Tajovskeho 40, Banska Bystrica, Slovakia,  
e-mail: roman.nedela@umb.sk; nedela@ntis.zcu.cz; nedela@savbb.sk .

УДК 512.542

## КРИТЕРИЙ МЕТАНИЛЬПОТЕНТНОСТИ КОНЕЧНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ

В. С. Монахов

Через  $|x|$  обозначим порядок элемента  $x$  в группе. Примарным называют элемент группы, порядок которого есть целая неотрицательная степень некоторого простого числа. Если  $a$  и  $b$  — примарные элементы взаимно простых порядков группы, то коммутатор  $a^{-1}b^{-1}ab$  называется  $\star$ -коммутатором. Пересечение всех нормальных подгрупп группы, фактор-группы по которым нильпотентны, называется нильпотентным корадикалом группы. Устанавливается, что нильпотентный корадикал конечной группы порождается коммутаторами примарных элементов взаимно простых порядков. Доказывается, что нильпотентный корадикал конечной разрешимой группы нильпотентен тогда и только тогда, когда  $|ab| \geq |a||b|$  для любых  $\star$ -коммутаторов  $a$  и  $b$  взаимно простых порядков.

Ключевые слова: конечная группа, формация, корадикал, нильпотентная группа, коммутатор.

**V. S. Monakhov. A metanilpotency criterion for a finite solvable group.**

Denote by  $|x|$  the order of an element  $x$  of a group. An element of a group is called primary if its order is a nonnegative integer power of a prime. If  $a$  and  $b$  are primary elements of coprime orders of a group, then the commutator  $a^{-1}b^{-1}ab$  is called a  $\star$ -commutator. The intersection of all normal subgroups of a group such that the quotient groups by them are nilpotent is called the nilpotent residual of the group. It is established that the nilpotent residual of a finite group is generated by commutators of primary elements of coprime orders. It is proved that the nilpotent residual of a finite solvable group is nilpotent if and only if  $|ab| \geq |a||b|$  for any  $\star$ -commutators of  $a$  and  $b$  of coprime orders.

Keywords: finite group, formation, residual, nilpotent group, commutator.

MSC: 20D15, 20F12, 20F17

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-253-256

### Введение

Используемая терминология и обозначения стандартны и соответствуют [1]. Группа  $G$  называется метанильпотентной, если в ней имеется нильпотентная нормальная подгруппа  $K$  такая, что фактор-группа  $G/K$  нильпотентна. Через  $|x|$  обозначается порядок элемента  $x$  в группе. Примарным называют элемент, порядок которого есть целая неотрицательная степень некоторого простого числа.

Развивая результат Бастоса и Шумяцкого [2], автор в [3, Theorem 2.2] получил следующий критерий нильпотентности коммутанта конечной группы: *коммутант конечной группы  $G$  тогда и только тогда является нильпотентной группой, когда  $|ab| \geq |a||b|$  для любых примарных коммутаторов  $a$  и  $b$  взаимно простых порядков группы  $G$ .*

Пусть  $\mathfrak{F}$  — формация и  $G$  — конечная группа. Пересечение всех нормальных подгрупп группы  $G$ , фактор-группы по которым принадлежат  $\mathfrak{F}$ , обозначается через  $G^{\mathfrak{F}}$  и называется  $\mathfrak{F}$ -корадикалом группы  $G$ . Из свойств коммутанта следует, что он является  $\mathfrak{A}$ -корадикалом группы, где  $\mathfrak{A}$  — формация всех абелевых групп. Для формации  $\mathfrak{N}$  всех нильпотентных групп  $\mathfrak{N}$ -корадикал  $G^{\mathfrak{N}}$  называют нильпотентным корадикалом группы  $G$ . Для его характеристики введем следующее определение.

Если  $a$  и  $b$  — примарные элементы взаимно простых порядков группы, то коммутатор  $[a, b]$  назовем  $\star$ -коммутатором.

В настоящей статье доказываются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Нильпотентный корадикал  $G^{\mathfrak{N}}$  конечной группы  $G$  порождается всеми  $\star$ -коммутаторами группы  $G$ .

**Теорема 2.** Конечная разрешимая группа  $G$  метанильпотентна тогда и только тогда, когда  $|ab| \geq |a||b|$  для любых  $\star$ -коммутаторов  $a$  и  $b$  группы  $G$  взаимно простых порядков.

## 1. Используемые определения и результаты

Запись  $X \leq Y$  означает, что  $X$  является подгруппой группы  $Y$ ; если  $X$  нормальна в  $Y$ , то пишем  $X \trianglelefteq Y$ . Полупрямое произведение двух подгрупп  $A$  и  $B$  с нормальной подгруппой  $A$  записывается через  $A \rtimes B$ . Символ  $\square$  означает окончание доказательства.

Группой Шмидта называют конечную нильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Начало изучения таких групп положила работа О. Ю. Шмидта [4]. Обзор результатов о группах Шмидта и перспективы их приложений в теории групп содержится в [5].

**Лемма.** Пусть  $S$  — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1)  $S = P \rtimes \langle y \rangle$ , где  $P$  — нормальная силовская  $p$ -подгруппа, а  $\langle y \rangle$  — ненормальная силовская  $q$ -подгруппа в  $S$ ,  $y^q \in Z(S)$ ,  $p$  и  $q$  — различные простые числа;
- (2)  $P/\Phi(P)$  — минимальная нормальная в  $G/\Phi(P)$  подгруппа,  $\Phi(P) = P' \leq Z(G)$ ;
- (3)  $G' = G^{\mathfrak{N}} = P$ .

**Доказательство.** Утверждения (1) и (2) получены в [4]. Равенство  $G' = P$  установил С. А. Чунихин [6]. Поскольку  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{N}$ , то  $G^{\mathfrak{N}} \subseteq G' \subseteq P$ . Предположим, что  $G^{\mathfrak{N}} < P$ . Тогда

$$G^{\mathfrak{N}}\Phi(P)/\Phi(P) < P/\Phi(P), \quad G^{\mathfrak{N}}\Phi(P)/\Phi(P) \triangleleft G/\Phi(P).$$

Из утверждения (2) следует, что  $G^{\mathfrak{N}} \leq \Phi(P) \leq Z(G)$ . Так как  $G/G^{\mathfrak{N}}$  нильпотентна, то  $G$  нильпотентна, противоречие. Поэтому предположение неверно и  $G^{\mathfrak{N}} = P$ .  $\square$

Если  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{Y}$  — наследственные формации, то их произведение

$$\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \{ G \in \mathfrak{E} \mid G^{\mathfrak{Y}} \in \mathfrak{X} \}$$

согласно [7, с. 337] является наследственной формацией. Здесь  $\mathfrak{E}$  — класс всех конечных групп. Класс всех метанильпотентных групп совпадает с произведением  $\mathfrak{N}\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^2$ .

Совокупность всех примарных элементов группы  $G$  обозначим через  $A(G)$ . Для подгрупп  $A$  и  $B$  группы  $G$  положим  $[A, B] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B \rangle$ . Подгруппу  $[A, B]$  называют *взаимным коммутантом* подгрупп  $A$  и  $B$ .

## 2. Доказательство теоремы 1

Фактически надо доказать равенство

$$G^{\mathfrak{N}} = \langle [x, y] \mid x, y \in A(G), (|x|, |y|) = 1 \rangle.$$

Пусть  $W = \langle [x, y] \mid x, y \in A(G), (|x|, |y|) = 1 \rangle$ . Ясно, что подгруппа  $W$  нормальна в  $G$ . Так как  $G/G^{\mathfrak{N}}$  нильпотентна, то для любых  $x, y \in A(G)$  таких, что  $(|x|, |y|) = 1$ , получаем

$$1 = [xG^{\mathfrak{N}}, yG^{\mathfrak{N}}] = [x, y]G^{\mathfrak{N}}, \quad [x, y] \in G^{\mathfrak{N}},$$

поэтому  $W \leq G^{\mathfrak{N}}$ . Проверим обратное включение. Пусть  $P$  и  $Q$  — силовские  $p$ - и  $q$ -подгруппы группы  $G$ ,  $p \neq q$ . Тогда  $PW/W$  и  $QW/W$  — силовские  $p$ - и  $q$ -подгруппы фактор-группы  $G/W$  соответственно,  $[P, Q] \leq W$  и  $[P, Q] \trianglelefteq \langle P \cup Q \rangle$  по [1, IV.1.6]. Если  $x \in P$ ,  $y \in Q$ ,  $w \in W$ , то

$$(xy)w = yx[x, y]w \in QPW, \quad PQW \leq QPW.$$

Аналогично,  $QPW \leq PQW$ , поэтому  $PQW$  — подгруппа группы  $G$ . Так как  $[P, Q] \leq W$ , то  $PQW/W$  — нильпотентная подгруппа группы  $G/W$ . Поскольку  $P$  и  $Q$  — произвольные силовские подгруппы, то  $G/W$  нильпотентна и  $G^{\mathfrak{N}} \leq W$ . Следовательно,  $G^{\mathfrak{N}} = W$ .  $\square$

### 3. Доказательство теоремы 2

Пусть конечная группа  $G$  метанильпотентна,  $a$  и  $b$  —  $\star$ -коммуторы группы  $G$  взаимно простых порядков. Согласно теореме 1 элементы  $a$  и  $b$  принадлежат  $G^{\mathfrak{N}}$ . Так как  $G^{\mathfrak{N}}$  нильпотентна и элементы  $a$  и  $b$  имеют взаимно простые порядки, то  $ab = ba$ , поэтому  $|ab| = |a||b|$ .

Обратно, пусть в конечной разрешимой группе  $G$  для любых  $\star$ -коммуторов  $a$  и  $b$  взаимно простых порядков выполняется неравенство  $|ab| \geq |a||b|$ . Докажем, что подгруппа  $G^{\mathfrak{N}}$  нильпотентна. Предположим противное и пусть  $G$  — контрпример наименьшего порядка. По индукции все собственные подгруппы группы  $G$  имеют нильпотентный  $\mathfrak{N}$ -коррадикал, поэтому  $G$  — разрешимая минимальная не  $\mathfrak{N}^2$ -группа. Согласно [8, Proposition 1]  $G^{\mathfrak{N}^2} := Q$  есть  $q$ -группа класса не выше 2 для простого числа  $q$ , и  $G/Q$  есть группа Шмидта. Пусть  $L$  — минимальное добавление к подгруппе  $Q$  в  $G$ . Тогда  $Q \cap L \leq \Phi(L)$  по [7, A.9.2] и  $G^{\mathfrak{N}}Q = L^{\mathfrak{N}}Q$  по [7, IV.1.17]. Фактор-группа  $\overline{G} = G/Q = \overline{P} \rtimes \langle \overline{y} \rangle$  является группой Шмидта, где  $\overline{P}$  — силовская  $p$ -подгруппа в  $\overline{G}$ ,  $p \neq q$ , а  $\langle \overline{y} \rangle$  — циклическая  $r$ -подгруппа для простых чисел  $p$  и  $r$ ,  $r \neq p \neq q$ , см. п. (1) леммы. Здесь случай  $r = q$  не исключается. Из п. (3) леммы следует, что  $\overline{G}^{\mathfrak{N}} = \overline{P}$ . По [7, IV.1.17]

$$\overline{P} = \overline{G}^{\mathfrak{N}} = (G/Q)^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}}Q/Q = L^{\mathfrak{N}}Q/Q,$$

поэтому порядок  $L^{\mathfrak{N}}$  делится на порядок силовской  $p$ -подгруппы группы  $G$ . Поскольку  $L$  —  $p$ -замкнутая подгруппа по [7, A.9.2], то  $L^{\mathfrak{N}} = P$  для некоторой силовской  $p$ -подгруппы  $P$  из группы  $G$ . Теперь по теореме 1 подгруппа  $P$  порождается  $\star$ -коммуторами группы  $L$ .

Пусть  $x \in P$ ,  $x$  —  $\star$ -коммутор,  $y$  — произвольный элемент из  $Q$ . Так как  $[x, y] \in Q$ , то  $[x, y]$  является  $\star$ -коммутором и порядок  $[x, y]$  взаимно прост с порядком  $x$ . По условию  $|x[x, y]| \geq |x||[x, y]|$ . Поскольку  $x[x, y] = y^{-1}xy$ , то  $|x[x, y]| = |x|$ . Теперь  $[x, y] = 1$  и  $x \in C_G(H)$ . Это верно для любого  $\star$ -коммутора из  $P$ , значит,  $QP = Q \times P$  и группа  $G$  метанильпотентна.  $\square$

В связи с теоремой 2 вполне естественно возникает следующий вопрос: *будет ли разрешимой конечная группа  $G$ , если  $|ab| \geq |a||b|$  для любых  $\star$ -коммуторов  $a$  и  $b$  группы  $G$  взаимно простых порядков?*

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Huppert В.** Endliche Gruppen I. Berlin etc.: Springer, 1967. 793 s.
2. **Бастон Р., Шумяцкий П.** Достаточное условие нильпотентности коммутанта // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 978–980.
3. **Monakhov V.S.** The nilpotency criterion for the derived subgroup of a finite group // Проблемы физики, математики и техники. 2017, № 3(32). Р. 58–60.
4. **Шмидт О. Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. Р. 366–372.
5. **Монахов В. С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса. Секция 1. 2001. Киев: Изд-во Института математики, 2002. Р. 81–90.
6. **Чунихин С. А.** О специальных группах // Мат. сб. 1929. Т. 4, № 3. Р. 512–530.
7. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin, N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8.
8. **Beidleman J., Heineken H.** Minimal non- $\mathfrak{F}$ -groups // Ricerche Mat. 2009. Vol. 58. Р. 33–41.

Монахов Виктор Степанович  
д-р физ.-мат. наук, профессор  
профессор кафедры алгебры и геометрии  
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины  
e-mail: victor.monakhov@gmail.com

Поступила 30.08.2017

## REFERENCES

1. Huppert B. *Endliche Gruppen I*. Berlin etc.: Springer, 1967. 793 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3.
2. Bastos R., Shumyatsky P. A sufficient condition for nilpotency of the commutator subgroup. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 762–763. doi: 10.1134/S0037446616050037.
3. Monakhov V.S. The nilpotency criterion for the derived subgroup of a finite group [e-resource]. 2017. Preprint available at <https://arxiv.org/abs/1704.01746>.
4. Schmidt O.Yu. Groups whose all subgroups are special. *Mat.Sb.*, 1924, vol. 31, pp. 366–372.
5. Monakhov V.S. *Podgruppy Shmidta, ikh sushchestvovanie i nekotorye prilozheniya* [The Schmidt subgroups, its existence, and some of their applications]. Tr. Ukrain. Mat. Congr., Kiev, 2002, Section 1, pp. 81–90.
6. Tschunichin S. Über spezielle Gruppen. *Mat. Sb.*, 1929, vol. 36, no. 2, pp. 135–137 (in Russian).
7. Doerk K., Hawkes T. *Finite soluble groups*. Berlin, N. Y.: Walter de Gruyter, 1992. 891 p. ISBN: 978-3-11-087013-8.
8. Beidleman J., Heineken H. Minimal non- $\mathfrak{F}$ -groups. *Ricerche Mat.*, 2009, vol. 58, no. 1, pp. 33-41. doi: 10.1007/s11587-009-0044-2.

The paper was received by the Editorial Office on August 30, 2017.

*Viktor Stepanovich Monakhov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: [victor.monakhov@gmail.com](mailto:victor.monakhov@gmail.com).



УДК 515.162

ВИРТУАЛЬНЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ СЛОЖНОСТИ 1 и 2<sup>1</sup>

Е. А. Сбродова, В. В. Таркаев, Е. А. Фоминых, Е. В. Шумакова

В 2009 г. С. В. Матвеев ввел понятие виртуального трехмерного многообразия, обобщающее понятие классического трехмерного многообразия. Виртуальное многообразие есть класс эквивалентности так называемых специальных полиэдров. Каждое виртуальное многообразие определяет трехмерное многообразие с непустым краем и  $\mathbb{R}P^2$ -особенностями. Многие инварианты многообразий, например, инварианты Тураева — Виро, допускают продолжение на множество виртуальных многообразий. Сложность виртуального трехмерного многообразия равна  $k$ , если его класс эквивалентности содержит специальный полиэдр с  $k$  истинными вершинами и не содержит специальных полиэдров с меньшим числом истинных вершин. В данной работе приводится полный список виртуальных многообразий сложности 1 и даны двусторонние оценки на число виртуальных многообразий сложности 2. Вопрос о полной классификации виртуальных многообразий сложности 2 по-прежнему остается открытым.

Ключевые слова: виртуальные трехмерные многообразия, классификация, сложность.

**E. A. Sbrodova, V. V. Tarkaev, E. A. Fominykh, E. V. Shumakova. Virtual 3-manifolds of complexity 1 and 2.**

Matveev in 2009 introduced the notion of virtual 3-manifold, which generalizes the classical notion of 3-manifold. A virtual manifold is an equivalence class of so-called special polyhedra. Each virtual manifold determines a 3-manifold with nonempty boundary and  $\mathbb{R}P^2$ -singularities. Many invariants of manifolds, such as Turaev–Viro invariants, can be extended to virtual manifolds. The complexity of a virtual 3-manifold is  $k$  if its equivalence class contains a special polyhedron with  $k$  true vertices and contains no special polyhedra with a smaller number of true vertices. In this paper we give a complete list of virtual 3-manifolds of complexity 1 and present two-sided bounds for the number of virtual 3-manifolds of complexity 2. The question of the complete classification for virtual 3-manifolds of complexity 2 remains open.

Keywords: virtual 3-manifold, classification, complexity.

MSC: 57N10, 57M27

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-257-264

*Посвящается 70-летию юбилею  
академика РАН  
Сергея Владимировича Матвеева*

### Введение

С. В. Матвеев [1] определил виртуальное трехмерное многообразие как специальный полиэдр, рассматриваемый с точностью до обратимого преобразования  $T$ . Это определение мотивировано тем, что любое компактное трехмерное многообразие полностью задается утолщаемым специальным полиэдром (своим спайном), причем любые два специальных спайна одного и того же многообразия (с двумя и более истинными вершинами) можно всегда связать цепочкой преобразований  $T$  и  $T^{-1}$ . Каждое виртуальное многообразие определяет трехмерное многообразие с непустым краем и  $\mathbb{R}P^2$ -особенностями. Таким образом, суть обобщения заключается в переходе к более широкому классу многообразий с особенностями за счет отказа от утолщаемости полиэдров. Отметим, что многие инварианты трехмерных многообразий — группы гомологий и когомологий, а также различные квантовые инварианты (например, инварианты Тураева — Виро) — продолжают на виртуальные многообразия.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00609).

Как и в классическом случае, сложность виртуального многообразия равна  $k$ , если его можно задать специальным полиэдром с  $k$  истинными вершинами, но нельзя задать полиэдром с меньшим числом истинных вершин [2]. В настоящей работе полностью классифицированы виртуальные многообразия сложности 1 и установлены двусторонние оценки на число виртуальных многообразий сложности 2.

## 1. Предварительные сведения

Напомним основные факты теории простых и специальных полиэдров, разработанной С. В. Матвеевым (см. [3, гл. 1]). Двумерный компактный полиэдр  $P$  называется *простым*, если линк каждой точки  $x \in P$  гомеоморфен либо окружности (такая точка  $x$  называется *неособой*), либо графу, состоящему из двух вершин и трех соединяющих их ребер (такая точка  $x$  называется *тройной*), либо полному графу  $K_4$  с четырьмя вершинами (такая точка  $x$  называется *истинной вершиной*). Компоненты связности объединения всех тройных точек и объединения всех неособых точек называются соответственно *тройными линиями* и *2-компонентами* полиэдра  $P$ . Множество особых точек полиэдра  $P$  (т. е. объединение истинных вершин и тройных линий) называется его *особым графом*. Простой полиэдр естественным образом стратифицирован: каждый страт размерности 2 (*2-компонента*) — это связная компонента множества неособых точек; страты размерности 1 — это открытые или замкнутые тройные линии; страты размерности 0 — это истинные вершины.

Простой полиэдр называется *специальным*, если каждый его одномерный страт является открытой 1-клеткой, а каждая 2-компонента является открытой 2-клеткой. Особый граф специального полиэдра имеет по крайней мере одну истинную вершину и является 4-регулярным графом. Поэтому тройные линии специального полиэдра естественно называть *ребрами*.

Для каждого специального полиэдра  $P$ , имеющего хотя бы две истинные вершины, определено *преобразование*  $T$ , состоящее в удалении собственного подполиэдра  $E_T \subset P$  (рис. 1 слева) и замене его на собственный подполиэдр  $E'_T$  (рис. 1 справа). Отметим, что преобразование  $T$  увеличивает на единицу как число истинных вершин, так и число 2-компонент специального полиэдра, в то время как обратное преобразование  $T^{-1}$  уменьшает их на единицу.

Будем говорить, что два специальных полиэдра *эквивалентны*, если один может быть переведен в другой с помощью конечной последовательности преобразований  $T^{\pm 1}$ . Класс эквивалентности  $[P]$  специального полиэдра  $P$  будем называть *виртуальным трехмерным многообразием* [1].

Компактный трехмерный полиэдр  $W$  называется *трехмерным многообразием с особенностями*, если линк любой точки из  $W$  является замкнутой связной поверхностью или диском. Если линк любой точки из  $W$  гомеоморфен двумерной сфере, проективной плоскости или диску, то полиэдр  $W$  называется *трехмерным многообразием с  $\mathbb{R}P^2$ -особенностями*. Точки,

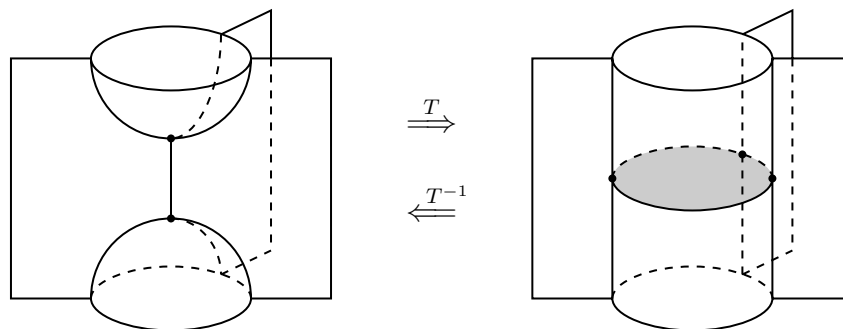


Рис. 1. Преобразования  $T$  и  $T^{-1}$ .

линки которых гомеоморфны диску, образуют край  $\partial W$  многообразия  $W$ .

Каждый специальный полиэдр  $P$  определяет трехмерное многообразие  $W_P$  с непустым краем и  $\mathbb{R}P^2$ -особенностями (см. [1; 3, § 1.1.5]). Опишем конструкцию многообразия  $W_P$ . Напомним, что для любой 2-компоненты  $\xi$  специального полиэдра  $P$  имеет место характеристическое отображение  $f : D^2 \rightarrow P$ , которое гомеоморфно отображает внутренность диска  $D^2$  на  $\xi$  и ограничение которого на  $S^1 = \partial D^2$  является локальным вложением. Кривая  $f|_{\partial D^2} : \partial D^2 \rightarrow P$  (и ее образ  $f|_{\partial D^2}(\partial D^2)$ ) называется *граничной кривой* 2-компоненты  $\xi$  и обозначается через  $\partial\xi$ . Внутри каждой 2-компоненты  $\xi$  полиэдра  $P$  выберем точку  $a_\xi$ , а внутри каждого ребра  $e$  этого полиэдра — точку  $b_e$ . Каждую точку  $a_\xi$  соединим непересекающимися дугами, лежащими в  $\xi$ , со всеми теми точками  $b_e$ , которые принадлежат граничной кривой  $\partial\xi$ . При этом каждому проходу граничной кривой  $\partial\xi$  по ребру отвечает своя дуга. Разрежем полиэдр  $P$  по всем построенным дугам. Мы получим набор полиэдров  $R_1, \dots, R_n$  ( $n$  — число истинных вершин полиэдра  $P$ ), каждый из которых гомеоморфен конусу над полным графом  $K_4$  с четырьмя вершинами. Каждый полиэдр  $R_j$  отождествим с объединением линков всех четырех вершин тетраэдра  $\Delta_j$  в его первом барицентрическом подразделении. Обратно, полиэдр  $P$  получается склейкой полиэдров  $R_1, \dots, R_n$ . Эта склейка определяет схему  $\mathcal{D}_P$  отождествления тетраэдров  $\Delta_j$ , т. е. разбиение множества всех граней тетраэдров  $\Delta_j$  на пары и выбор аффинных гомеоморфизмов между гранями каждой пары. Отождествим теперь все грани тетраэдров  $\Delta_j$  по выбранным гомеоморфизмам. Полученный полиэдр  $\widehat{W}_P$  является многообразием с особенностями. Каждая особая точка многообразия  $\widehat{W}_P$  получается отождествлением либо вершин, либо барицентров ребер тетраэдров. Вырежем из многообразия  $\widehat{W}_P$  окрестности всех точек, получающихся отождествлением вершин тетраэдров. В результате мы получим трехмерное многообразие  $W_P$  с непустым краем и  $\mathbb{R}P^2$ -особенностями.

**Теорема 1** [1, теорема 3]. *Соответствие  $P \rightarrow W_P$  индуцирует корректно определенную сюръекцию  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  множества  $\mathcal{V}$  всех виртуальных трехмерных многообразий на множество  $\mathcal{W}$  всех компактных трехмерных многообразий с непустым краем и  $\mathbb{R}P^2$ -особенностями.*

Как было отмечено в [1], многие инварианты трехмерных многообразий продолжаются на виртуальные многообразия. В дальнейшем мы будем использовать следующие инварианты виртуального многообразия  $[P]$ :

- эйлерову характеристику  $\chi(P)$ ;
- значения инвариантов Тураева — Виро (см. [4]);
- первую группу гомологий  $H_1(P)$ ;
- край  $\partial W_P$  многообразия  $W_P$ ;
- число  $\text{sing}(W_P)$  особых точек многообразия  $W_P$ ;
- ориентируемость многообразия  $W_P$ .

Отметим, что любое многообразие, имеющее  $\mathbb{R}P^2$ -особенности, является неориентируемым, если под этим, как и в случае обычного многообразия, понимать наличие обращаемого ориентацию замкнутого пути. Разумеется, путь не должен проходить через особые точки.

## 2. Табулирование виртуальных многообразий

### 2.1. Перечисление специальных полиэдров

Будем табулировать связные виртуальные трехмерные многообразия в порядке возрастания их сложности. Напомним, что *сложность*  $cv[P]$  виртуального трехмерного многообразия  $[P]$  равна  $k$ , если класс эквивалентности  $[P]$  содержит специальный полиэдр с  $k$  истинными вершинами и не содержит специальных полиэдров с меньшим числом истинных вершин [2].

Идея перечисления специальных полиэдров такова. Сначала для каждого  $k \geq 1$  мы перечисляем все связные регулярные графы валентности 4 с  $k$  вершинами. Для  $k = 1, 2, 3, 4$  число

таких графов равно 1, 2, 4 и 10 соответственно (см. рис. 2). Затем для каждого связного регулярного графа  $\Gamma$  валентности 4 мы перечисляем все специальные полиэдры, особые графы которых изоморфны графу  $\Gamma$ . Более подробное описание построения специальных полиэдров с заданным особым графом см. в [3, гл. 2].

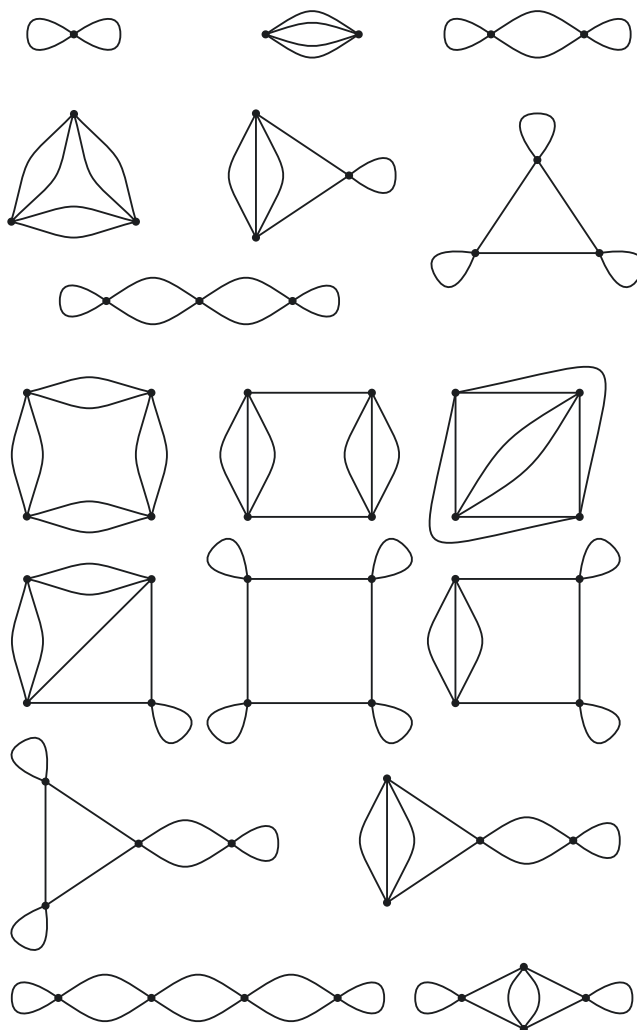


Рис. 2. Регулярные графы валентности 4 с  $\leq 4$  вершинами.

Приведем результаты компьютерного перечисления специальных полиэдров для  $k \leq 4$ .

**Теорема 2.** Число  $n(k)$  связных специальных полиэдров с  $k \leq 4$  истинными вершинами задается табл. 1:

Т а б л и ц а 1

$k$	1	2	3	4
$n(k)$	11	169	5959	405607

## 2.2. Виртуальные многообразия сложности 1

**Теорема 3.** Существует ровно 11 связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 1.

Т а б л и ц а 2  
Виртуальные многообразия сложности 1

	$\sigma(P)$	$\chi(P)$	$sing(W_P)$	$W_P$	$\partial W_P$
1	$bkaajj$	1	0	$L_{4,1} \setminus D^3$	$S^2$
2	$bkaagj$	1	0	$D^3$	$S^2$
3	$bkaajn$	1	0	$L_{5,2} \setminus D^3$	$S^2$
4	$bkaagb$	2	0	$S^2 \times [0, 1]$	$S^2 \sqcup S^2$
5	$bkaaid$	0	0	$N1_1$	$T^2$
6	$bkaaij$	0	1		$\#3\mathbb{R}P^2$
7	$bkaahd$	1	2		$\#2\mathbb{R}P^2$
8	$bkaagd$	1	1		$\mathbb{R}P^2$
9	$bkaahj$	2	3		$\mathbb{R}P^2$
10	$bkaagh$	2	1		$S^2 \sqcup \mathbb{R}P^2$
11	$bkaahh$	3	2		$S^2 \sqcup S^2$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу [2, лемма 2] класс эквивалентности  $[P]$  любого специального полиэдра  $P$  с одной истинной вершиной совпадает с множеством  $\{P\}$ . Поэтому утверждение теоремы прямо следует из теоремы 2. В табл. 2 для каждого связного виртуально-трехмерного многообразия  $[P]$  сложности 1 приведены значения следующих инвариантов: сигнатура  $\sigma(P)$  схемы  $\mathcal{D}_P$  отождествления тетраэдров  $\Delta_j$  (подробнее см. в [5]), эйлерова характеристика  $\chi(P)$ , число особых точек  $sing(W_P)$  многообразия  $W_P$ , имя многообразия  $W_P$  и его край  $\partial W_P$ . Эти данные были получены с помощью компьютерной программы 3-Manifold Recognizer [6].

### 2.3. Виртуальные многообразия сложности 2

Разобьем множество  $\mathcal{V}$  всех виртуальных трехмерных многообразий на три непересекающихся подмножества  $\mathcal{V}_{or}, \mathcal{V}_{nor}, \mathcal{V}_{sing}$ . Виртуальное многообразие  $[P]$  лежит в  $\mathcal{V}_{or}$ , если соответствующее ему многообразие  $W_P$  ориентируемо и не имеет  $\mathbb{R}P^2$ -особенностей. Виртуальное многообразие  $[P]$  лежит в  $\mathcal{V}_{nor}$ , если многообразие  $W_P$  является неориентируемым и не имеет  $\mathbb{R}P^2$ -особенностей. Если же многообразие  $W_P$  имеет  $\mathbb{R}P^2$ -особенности, то виртуальное многообразие  $[P]$  лежит в  $\mathcal{V}_{sing}$ .

**Теорема 4.** 1. Множество  $\mathcal{V}_{or}$  содержит ровно 29 связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2.

2. Число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве  $\mathcal{V}_{nor}$ , находится в пределах от 10 до 23.

3. Число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве  $\mathcal{V}_{sing}$ , находится в пределах от 73 до 98.

**Д о к а з а т е л ь с т в о** теоремы является конструктивным и получено с использованием компьютера. Как было замечено в [2, лемма 2], если специальный полиэдр  $P$  имеет ровно две истинные вершины, то  $sv[P] = 2$ . Поэтому для классификации всех связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2 достаточно разбить множество  $X^2$  всех связных специальных полиэдров с двумя истинными вершинами (их 169 согласно теореме 2) на классы эквивалентности.

Первый этап доказательства заключается в разбиении множества  $X^2$  на три непересекающихся подмножества  $X_{or}^2, X_{nor}^2, X_{sing}^2$  по тому же самому правилу, что и разбиение множества  $\mathcal{V}$  всех виртуальных трехмерных многообразий на подмножества  $\mathcal{V}_{or}, \mathcal{V}_{nor}, \mathcal{V}_{sing}$ . Данное разбиение было выполнено при помощи компьютерной программы 3-Manifold Recognizer [6], моди-

фицированной авторами для выполнения этой задачи. В результате оказалось, что множество  $X_{or}^2$  содержит 34, множество  $X_{nor}^2$  — 26 и множество  $X_{sing}^2$  — 109 специальных полиэдров.

Рассмотрим ограничение отображения  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$  на объединение множеств  $\mathcal{V}_{or}$  и  $\mathcal{V}_{nor}$ , из которых исключены все виртуальные многообразия сложности 1. Из [3, теорема 1.1.13 и теорема 1.2.5] следует, что это ограничение является биекцией на множество всех компактных трехмерных многообразий с непустым краем. Поэтому задача классификации виртуальных многообразий, лежащих в множествах  $\mathcal{V}_{or}$  и  $\mathcal{V}_{nor}$ , эквивалентна задаче классификации соответствующих компактных трехмерных многообразий с непустым краем.

Второй этап доказательства заключается в классификации всех ориентируемых трехмерных многообразий с краем, задаваемых специальными полиэдрами из множества  $X_{or}^2$ . Классификация была выполнена с помощью компьютерных программ 3-Manifold Recognizer [6], SnapPy [7] и работы [8]. Оказалось, что 34 специальных полиэдра из множества  $X_{or}^2$  задают 29 трехмерных многообразий с краем:

- 8 гиперболических многообразий с геодезическим краем, описанных в работе [8];
- 2 гиперболических многообразия  $M_{2,1}$ ,  $M_{2,2}$  с каспами из списка [9], одно из которых является дополнительным пространством узла восьмерки;
- 4 многообразия, получающиеся из сферы  $S^3$  удалением  $k$  открытых шаров,  $k = 1, 2, 3, 4$ ;
- 4 многообразия, получающиеся из проективного пространства  $\mathbb{R}P^3$  и линзового пространства  $L_{3,1}$  удалением одного или двух открытых шаров;
- 4 многообразия, получающиеся из многообразий  $L_{5,1}$ ,  $L_{7,2}$ ,  $L_{8,3}$  и  $S^2 \times S^1$  удалением одного открытого шара;
- 2 многообразия: полноторие и полноторие с удаленным открытым шаром;
- 3 многообразия Зейферта с базой диск  $D^2$  и двумя особыми слоями каждое:  $(D^2, (2, 1), (3, 1))$ ,  $(D^2, (3, 1), (3, 1))$  и  $(D^2, (3, 1), (3, -1))$ ;
- многообразии Зейферта  $(D^2, (2, 1), (2, 1), (2, -1))$  с удаленным открытым шаром;
- граф-многообразии Вальдхаузена, получающиеся склейкой двух многообразий Зейферта  $(A^2, (2, 1))$  и  $(D^2, (2, 1), (3, -2))$ , где  $A^2$  — кольцо, по гомеоморфизму, задаваемому матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Поскольку все вышеперечисленные многообразия различны, множество  $\mathcal{V}_{or}$  содержит ровно 29 связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2.

Третий этап доказательства заключается в установлении двусторонних оценок на число виртуальных многообразий, определяемых специальными полиэдрами из множества  $X_{nor}^2$ . Нами была написана компьютерная программа, которая по заданному числу  $n$  и специальному полиэдру  $P$  строит множество всех эквивалентных ему специальных полиэдров, получающихся из полиэдра  $P$  последовательным применением не более чем  $n$  преобразований  $T$  и  $T^{-1}$ . С помощью этой программы (при  $n = 6$ ) была установлена эквивалентность трех пар специальных полиэдров из множества  $X_{nor}^2$ . Тем самым было доказано, что число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве  $\mathcal{V}_{nor}$ , не превосходит 23. Далее для каждого специального полиэдра  $P$  из множества  $X_{nor}^2$  мы вычислили значения всех инвариантов, перечисленных в конце разд. 2 (инварианты Тураева — Виро вычислялись до порядка 8 включительно). Совместное использование этих инвариантов оказалось не слишком эффективным: удалось доказать только, что число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве  $\mathcal{V}_{nor}$ , не меньше 10.

Четвертый этап доказательства аналогичен третьему этапу и заключается в нахождении двусторонних оценок на число виртуальных многообразий, определяемых специальными полиэдрами из множества  $X_{sing}^2$ . Было установлено, что число связных виртуальных трехмерных многообразий сложности 2, лежащих в множестве  $\mathcal{V}_{sing}$ , находится в пределах от 73 до 98.

Прделанное нами исследование показало, что имеющийся набор инвариантов не позволяет провести полную классификацию виртуальных трехмерных многообразий сложности 2 и больше.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Matveev S.V.** Virtual 3-manifolds // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 518–521.
2. **Веснин А.Ю., Тураев В.Г., Фоминых Е.А.** Сложность виртуальных трехмерных многообразий // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 11. С. 4–24. doi: 10.4213/sm8700.
3. **Matveev S.** Algorithmic topology and classification of 3-manifolds. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag. 2007. 492 p. (Algorithms and Computation in Mathematics; vol. 9.) doi: 10.1007/978-3-540-45899-9.
4. **Turaev V.G., Viro O.Y.** State sum invariants of 3-manifolds and quantum  $6j$ -symbols // Topology. 1992. Vol. 31, iss. 4. P. 865–902. doi: 10.1016/0040-9383(92)90015-A.
5. **Burton B.** The Pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations // Proc. of the Twenty-Seventh Annual Symposium on Computational Geometry (SCG'11). N.Y.: ACM, 2011. P. 153–162. doi: 10.1145/1998196.1998220.
6. Atlas of 3-Manifolds [site]: A free software 3-manifold recognizer. URL: <http://matlas.math.csu.ru/> (дата обращения: 15.09.2017).
7. **Culler M., Dunfield N., Goerner M., Weeks J.** SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds [e-resource]. URL: <http://snappy.computop.org/> (дата обращения: 15.09.2017).
8. **Fujii M.** Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra // Tokyo J. Math. 1990. Vol. 13, iss. 2. P. 353–373. doi: 10.3836/tjm/1270132267.
9. **Callahan P., Hildebrand M., Weeks J.** A census of cusped hyperbolic 3-manifolds // Mathematics of Computation. 1999. Vol. 68, iss. 225. P. 321–332. doi: 10.1090/S0025-5718-99-01036-4.

Сбродова Елена Александровна

Поступила 30.09.2017

канд. физ.-мат. наук

декан

Челябинский государственный университет

e-mail: sbrodova@csu.ru

Таркаев Владимир Викторович

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

старший науч. сотрудник

Челябинский государственный университет

e-mail: v.tarkaev@gmail.com

Фоминых Евгений Анатольевич

д-р физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Челябинский государственный университет

e-mail: efominykh@gmail.com

Шумакова Екатерина Валерьевна

старший преподаватель

Челябинский государственный университет

e-mail: shumakova\_kate@mail.ru

## REFERENCES

1. Matveev S.V. Virtual 3-manifolds. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 518–521.
2. Vesnin A.Yu., Turaev V.G., Fominykh E.A. Complexity of virtual 3-manifolds. *Sb. Math.*, 2016, vol. 207, no. 11, pp. 1493–1511. doi: 10.1070/SM8700.
3. Matveev S. *Algorithmic topology and classification of 3-manifolds*. Berlin; Heidelberg: Springer, 2007. Ser. Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 9, 492 p. doi: 10.1007/978-3-540-45899-9.

4. Turaev V.G., Viro O.Y. State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols. *Topology*, 1992, vol. 31, no. 4, pp. 865–902. doi: 10.1016/0040-9383(92)90015-A.
5. Burton B. *The Pachner graph and the simplification of 3-sphere triangulations*. Proceedings of the twenty-seventh annual symposium on Computational geometry (SCG'11), ACM, New York. 2011, pp. 153–162. doi: 10.1145/1998196.1998220.
6. *Atlas of 3-Manifolds* [site]: A free software 3-manifold recognizer. Available at: <http://matlas.math.csu.ru/> (Access date: 15.09.2017).
7. Culler M., Dunfield N., Goerner M., Weeks J. *SnapPy, a computer program for studying the geometry and topology of 3-manifolds*. Available at: <http://snappy.computop.org/> (Access date: 15.09.2017).
8. Fujii M. Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra. *Tokyo J. Math.*, 1990, vol. 13, no. 2, pp. 353–373. doi: 10.3836/tjm/1270132267.
9. Callahan P., Hildebrand M., Weeks J. A census of cusped hyperbolic 3-manifolds. *Mathematics of Computation*, 1999, vol. 68, no. 225, pp. 321–332. doi: 10.1090/S0025-5718-99-01036-4.

The paper was received by the Editorial Office on September 30, 2017.

*Elena Aleksandrovna Sbrodova*, Cand. Sci.(Phys.-Math.), Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: sbrodova@csu.ru.

Vladimir Viktorovich Tarkaev, Cand. Sci.(Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: v.tarkaev@gmail.com.

*Evgeny Anatol'evich Fominykh*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: efominykh@gmail.com.

*Ekaterina Valer'evna Shumakova*, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: shumakova\_kate@mail.ru.



УДК 517.977

**ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕЗУЛЬТАТ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ  
С КУСОЧНО МОНОТОННОЙ ДИНАМИКОЙ<sup>1</sup>****Н. Н. Субботина<sup>2</sup>, Н. Г. Новоселова**

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для детерминированной нелинейной системы с кусочно монотонной динамикой. Рассматриваемая математическая модель появляется при описании процесса химиотерапии злокачественной опухоли. Данные исследования позволяют изучить влияние характера немонотонности на структуру оптимального управления. В работе исследуется случай, когда функция терапии, описывающая влияние лекарства на скорость роста клеток, имеет два максимума. Приводятся сравнения с результатами для изученного ранее случая одного максимума у функции терапии в данной модели. Работа посвящена построению функции цены для рассматриваемой задачи оптимального управления. Как известно, функция цены является основой для построения оптимального синтеза, т.е. оптимальной позиционной стратегии терапии. Конструкция функции цены использует то, что она является единственным минимаксным (вязкостным) решением задачи Коши для основного уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ). С помощью непрерывной склейки конечного числа гладких функций, построенных с помощью метода характеристик Коши для вспомогательных уравнений ГЯБ, конструируется непрерывная функция  $\varphi$ . Новым элементом конструкции является линия негладкой склейки с помощью условий Ранкина — Гюгонио. Эта линия играет ключевую роль для оптимальной стратегии управления, так как определяет линию ее разрыва. В работе приводится обоснование совпадения построенной функции  $\varphi$  с минимаксным решением задачи Коши для основного уравнения ГЯБ.

Ключевые слова: оптимальное управление, линия Ранкина — Гюгонио, уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, метод характеристик Коши.

**N. N. Subbotina, N. G. Novoselova. Optimal result in a control problem with piecewise monotone dynamics.**

We consider an optimal control problem for a deterministic nonlinear system with piecewise monotone dynamics. The mathematical model under consideration describes the process of a chemotherapy treatment of a malignant tumor. The research makes it possible to analyze the influence of the type of nonmonotonicity on the structure of the optimal control. We consider the case when the therapy function, which describes the effect of the drug on the cell growth rate, has two maxima. Comparisons are made with the results for the previously studied case of a single maximum of the therapy function in this model. This paper is devoted to the construction of the value function for the optimal control problem under consideration. As is known, the value function is the basis for constructing an optimal synthesis, i.e., an optimal feedback strategy in the therapy. We use the fact that the value function is the unique minimax (viscosity) solution of the Cauchy problem for the basic Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) equation. By means of the continuous gluing of a finite number of smooth functions obtained by the Cauchy method of characteristics for auxiliary HJB equations, a continuous function  $\varphi$  is constructed. A new element of the construction is the line of nonsmooth gluing with the use of the Rankin–Hugoniot conditions. This line plays a key role for the optimal feedback strategy, because it determines its discontinuity line. We prove that the constructed function  $\varphi$  coincides with the minimax solution of the Cauchy problem for the basic HJB equation.

Keywords: optimal control, Rankin–Hugoniot line, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, Cauchy method of characteristics.

**MSC:** 47N05, 37N25, 37N40

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-4-265-280

<sup>1</sup>Работа подготовлена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00074) и программы Президиума РАН № 01 “Фундаментальная математика и ее приложения” (проект PRAS-18-01).

<sup>2</sup>25 лет назад вышла первая в нашем журнале статья Нины Николаевны:

Субботина Н. Н. Унифицированные условия оптимальности в задачах управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1992. Т. 1. С. 147–159.

## Введение

Данная работа посвящена построению функции цены в задаче оптимального управления для математической модели с нелинейностью, которая имеет вид кусочно монотонной функции. Мотивацией к изучению этой модели послужило исследование описанной в работах [1; 2] математической модели химиотерапии злокачественной опухоли для немонотонной функции терапии, показывающей степень эффективности воздействия химиотерапевтического средства на клетки. Математическая модель имеет вид системы из двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [1; 2] построена оптимальная позиционная стратегия лечения в случае немонотонной функции терапии, имеющей один максимум, который определяет критический порог для содержащегося в клетке лекарства. Цель настоящей работы состоит в исследовании данной математической модели для немонотонной функции терапии, имеющей два глобальных максимума.

В задачах оптимального управления основой конструкции позиционной оптимальной стратегии (оптимального синтеза) является функция цены, которая каждой исходной позиции (начальному моменту времени и начальному фазовому состоянию системы) ставит в соответствие оптимальный результат (оптимальное значение функционала качества управляемого процесса) [3–5]. Как известно [6], непрерывная негладкая функция цены совпадает с единственным минимаксным или вязкостным [7] решением задачи Коши для соответствующего основного уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана (ГЯБ).

В данной работе приводится конструкция функции цены в задаче оптимальной терапии в математической модели с кусочно монотонной динамикой, определяемой функцией терапии, имеющей два глобальных максимума. С помощью склейки конечного числа гладких функций, построенных на основе метода характеристик Коши для соответствующих вспомогательных уравнений ГЯБ, конструируется непрерывная функция  $\varphi$ . Новым элементом конструкции является построение линии негладкой склейки с помощью условий Ранкина — Гюгонио [8; 9]. Приводится обоснование совпадения построенной функции  $\varphi$  с минимаксным решением задачи Коши для основного уравнения ГЯБ, а следовательно, и с функцией цены  $V$  рассматриваемой задачи оптимального управления.

## 1. Математическая модель

Пусть

$m$  — число злокачественных клеток;

$h$  — количество химиотерапевтического средства, способного убивать клетки опухоли;

$f(h)$  — функция терапии, описывающая воздействие лекарства на клетки опухоли;

$u(t)$  — количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени (управление).

Процесс взаимодействия клеток опухоли и химиотерапевтического средства описывается следующей известной моделью [1; 2], где время изменяется в пределах  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -mf(h), & m(t_0) = m_0, \\ \frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), & h(t_0) = h_0, \quad \alpha - \text{const} > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $T$  — фиксированный конечный момент времени,

$$t_0 \in [0, T], \quad 0 < m_0 < M, \quad 0 \leq h_0 \leq L.$$

Здесь  $M$  — максимальное количество злокачественных клеток в организме, совместимое с жизнью;  $L$  — максимальное допустимое количество химиотерапевтического средства в организме.

Обозначим через  $Q$  — максимальное количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени. Предполагается, что количество химиотерапевтического средства, вводимого в опухоль в единицу времени, ограничено:

$$0 \leq u(t) \leq Q. \tag{1.2}$$

### 1.1. Функция терапии

Рассмотрим кусочно монотонную, непрерывно дифференцируемую функцию терапии  $f(h)$  со следующими свойствами:

A1.  $f(h) > 0$ ,  $0 < h < L$ , и ее производная  $f'(h) = \frac{df(h)}{dh}$  имеет три различных действительных корня

$$0 < \hat{h}_1 < \hat{h}_2 < \hat{h}_3 < L, \quad f'(\hat{h}_i) = 0.$$

A2. Если  $h < \hat{h}_1$ , то  $f'(h) > 0$ , и если  $h > \hat{h}_3$ , то  $f'(h) < 0$ .

A3.  $0 < \alpha \hat{h}_i < Q$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

A4.  $f(\hat{h}_1) = f(\hat{h}_3)$ .

Рассмотрим в качестве допустимых управлений кусочно постоянные функции

$$u(\cdot) : [t_0, T] \mapsto [0, Q].$$

Нетрудно увидеть, что при сделанных предположениях решения системы (1.1) продолжимы до момента времени  $T$ .

### 1.2. Постановка задачи об оптимальной терапии

Задача оптимального управления состоит в построении допустимого управления, минимизирующего терминальную функцию платы:

$$\sigma(m(T)) = m^2(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) \rightarrow \inf_{u(\cdot)}, \tag{1.3}$$

$m(t) = m(t; t_0, m_0, h_0, u(\cdot))$ ,  $t \in [t_0, T]$  — решение системы (1.1) с начальными условиями  $(t_0, m_0, h_0)$ , выработанное под воздействием допустимого управления  $u(t)$ .

В дальнейших работах будет показано, что в данной задаче существует допустимое оптимальное управление  $u^0(\cdot)$  в классе кусочно постоянных функций, на котором этот  $\inf$  достигается.

### 1.3. Частные случаи

Отметим, что случай немонотонной функции терапии, для которой  $f'(h) = h - \hat{h}_1$ , т.е. функции  $f'(h)$  имеет ровно один корень, разобран в работах [1; 2], где  $f(h) = h(h - 2)$  и оптимальная позиционная стратегия лечения имеет вид

$$u^0(h) = \begin{cases} Q, & h < \hat{h}_1 = 1, \\ 0, & h > \hat{h}_1 = 1, \\ \alpha \hat{h}_1, & h = \hat{h}_1 = 1. \end{cases}$$

Здесь  $\hat{h}_1 = 1$  является критическим порогом для стратегии терапии.

Если  $f'(h)$  имеет два корня и выполняются условия A1–A4, то возможны случаи, когда  $f'(h) > 0$  на  $h \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$  или  $f'(h) < 0$  на  $h \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$ . В первом случае критическим порогом является корень  $\hat{h}_2$ , во втором случае —  $\hat{h}_1$ . Любой из этих двух случаев сводится к ситуации с одним критическим порогом.

В данной работе исследуется влияние немонотонности функции терапии на структуру оптимального синтеза в случае, когда  $f'(h)$  меняет знак на интервале  $(\hat{h}_1, \hat{h}_3)$ .

Пусть в рассматриваемой задаче (1.1)–(1.3) выполняются условия A1–A4. Далее исследуем ситуацию, когда

$$\{f'(h) < 0, h \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)\} \cup \{f'(h) > 0, h \in (\hat{h}_2, \hat{h}_3)\}. \quad (1.4)$$

Из условия (1.4) и A2 следует, что корни  $\hat{h}_1$  и  $\hat{h}_3$  — точки максимума, а корень  $\hat{h}_2$  — точка минимума для функции терапии  $f(h)$ .

## 2. Функция цены

Как известно, основой построения оптимального синтеза является функция цены, которая каждому начальному состоянию системы  $(t_0, h_0, m_0) \in [0, T] \times [0, L] \times [0, M]$  ставит в соответствие оптимальный результат  $Val(t_0, h_0)$  согласно (1.3).

Из уравнений динамики (1.1) получаем, что

$$\sigma(m(T)) = m^2(T; t_0, m_0, h_0, u(\cdot)) = m_0^2 e^{-2 \int_{t_0}^T f(h(\tau)) d\tau},$$

где  $h(t) = h(t; t_0, h_0, u(\cdot))$  — решение второго уравнения системы (1.1). Таким образом, нахождение оптимального результата в задаче (1.1)–(1.3) можно редуцировать к следующей задаче:

$$\frac{dh}{dt} = -\alpha h + u(t), \quad h(t_0) = h_0, \quad (2.1)$$

$$J_{t_0, h_0}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T f(h(t; t_0, h_0, u^0(\cdot))) dt \rightarrow \sup. \quad (2.2)$$

(Авторы благодарят за идею редукции задачи (1.1)–(1.3) к виду (2.1), (2.2) анонимного рецензента своей предыдущей неопубликованной статьи.)

Как известно [6, гл. II, п. 6; 7], в задаче (2.1), (2.2) функция цены

$$V(t_0, h_0) = \sup J_{t_0, h_0}(u(\cdot)) \quad \forall (t_0, h_0)$$

является обобщенным (минимаксным, вязкостным) решением следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial V(t, h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial V(t, h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} u \frac{\partial V(t, h)}{\partial h} = 0, \\ V(T, h) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

В точках, где  $V(t, h)$  дифференцируема, функция цены удовлетворяет этому основному уравнению ГЯБ. В тех точках, где  $V(t, h)$  не дифференцируема, ее субдифференциал непуст,  $D^-V(t, h) \neq \emptyset$  [6; 9] и выполняется следующее условие:

$$\forall (s_t, s_h) \in D^-V(t, h) \Rightarrow s_t - \alpha h s_h + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} u s_h \leq 0. \quad (2.4)$$

## 3. Построение функции цены

Построим на множестве  $\Pi_T = \{[0, T] \times [0, L]\}$ ,  $(t, h) \in \Pi_T$  непрерывную функцию  $\varphi(t, h)$  и покажем, что она является функцией цены  $V(t, h)$ .

### 3.1. Функция $\varphi_1(\cdot)$

Определим функцию  $\varphi_1(\cdot)$  на множестве  $G_1 = \{(t, h) : t \in [0, T], h = \hat{h}_1\}$ .

Как было отмечено выше,  $\hat{h}_1$  — точка максимума функции терапии. Тогда для любого начального состояния  $(t_0, \hat{h}_1) \in G_1$  оптимальным поведением будет  $h(t) = h(t; t_0, \hat{h}_1, u^0(\cdot)) \equiv \hat{h}_1$ , которое можно обеспечить с помощью управления  $u^0(t) \equiv \alpha \hat{h}_1$ , удовлетворяющего условию АЗ. Оптимальный результат задачи (2.1), (2.2) в точке  $(t_0, \hat{h}_1) \in G_1$  определяется как

$$V(t_0, h_0) = J(u^0(\cdot)) = \int_{t_0}^T f(h(t; t_0, h_0, u^0(\cdot))) dt = f(\hat{h}_1)(T - t_0). \quad (3.1)$$

Решим следующую систему с краевыми условиями

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\alpha h + \alpha \hat{h}_1, \\ \frac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(\hat{h}_1), \\ \frac{dz}{dt} = -f(\hat{h}_1), \end{cases} \quad \begin{cases} h(T) = \hat{h}_1, \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Для любых точек  $(t_0, \hat{h}_1) \in G_1$  получим решение

$$\begin{cases} h(t_0) = \hat{h}_1, \\ s_h(t_0) = 0, \\ z(t_0) = f(\hat{h}_1)(T - t_0) \end{cases}$$

и определим функции  $\varphi_1(t_0, \hat{h}_1)$  и  $s_h(t_0)$  для всех  $t_0 \in [0, T]$  как

$$\varphi_1(t_0, \hat{h}_1) = z(t_0) \equiv f(\hat{h}_1)(T - t_0), \quad s_h(t_0) = 0. \quad (3.2)$$

Согласно (3.1) и (3.2) получаем, что  $\varphi_1(t_0, \hat{h}_1) = V(t_0, \hat{h}_1)$  и  $s_h(t_0) = 0$  на множестве  $G_1$ .

### 3.2. Функция $\varphi_2(\cdot)$

Определим функцию  $\varphi_2(\cdot)$  на множестве  $G_2 = \{(t, h) : t \in [0, T], h = \hat{h}_3\}$ .

Как было отмечено выше,  $\hat{h}_3$  — точка максимума функции терапии. Тогда для любой точки  $(t_0, \hat{h}_3) \in G_2$  оптимальным поведением будет  $h(t) = h(t; t_0, \hat{h}_3, u^0(\cdot)) \equiv \hat{h}_3$ , которое можно обеспечить с помощью управления  $u^0(t) \equiv \alpha \hat{h}_3$ , удовлетворяющего условию АЗ. Оптимальный результат задачи (2.1), (2.2) в точке  $(t_0, \hat{h}_3) \in G_2$  определяется как

$$V(t_0, h_0) = J(u^0(\cdot)) = \int_{t_0}^T f(h(t; t_0, h_0, u^0(\cdot))) dt = f(\hat{h}_3)(T - t_0). \quad (3.3)$$

Решим следующую систему с краевыми условиями

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\alpha h + \alpha \hat{h}_3, \\ \frac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(\hat{h}_3), \\ \frac{dz}{dt} = -f(\hat{h}_3), \end{cases} \quad \begin{cases} h(T) = \hat{h}_3, \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Для любых точек  $(t_0, \hat{h}_3) \in G_2$  получим решение

$$\begin{cases} h(t_0) = \hat{h}_3, \\ s_h(t_0) = 0, \\ z(t_0) = f(\hat{h}_3)(T - t_0) \end{cases}$$

и определим функции  $\varphi_2(t_0, \hat{h}_3)$  и  $s_h(t_0)$  для всех  $t_0 \in [0, T]$  как

$$\varphi_2(t_0, \hat{h}_3) = z(t_0) \equiv f(\hat{h}_3)(T - t_0), \quad s_h(t_0) = 0. \quad (3.4)$$

Согласно (3.3) и (3.4) получаем, что  $\varphi_2(t_0, \hat{h}_3) = V(t_0, \hat{h}_3)$  и  $s_h(t_0) = 0$  на множестве  $G_2$ .

### 3.3. Функция $\varphi_3(\cdot)$

Определим функцию  $\varphi_3(\cdot)$  в области  $\Pi_1 = [0, T] \times [0, \hat{h}_1]$ . Введенное ранее множество  $G_1$  является частью границы этой области  $\Pi_1$ . Полагаем, что на множестве  $G_1$  справедливо:

$$\varphi_3(t_0, \hat{h}_1) = \varphi_1(t_0, \hat{h}_1) = V(t_0, \hat{h}_1), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial h}(t_0, \hat{h}_1) = 0. \quad (3.5)$$

Рассмотрим множество  $G_3 = \{(t, h) : t = T, h \in [0, \hat{h}_1]\}$ , которое является другой частью границы области  $\Pi_1$ , где полагаем

$$\varphi_3(T, h) = V(T, h) = J(u(\cdot)) = \int_T^T f(h(t); T, h, u(\cdot)) dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial h}(T, h) = 0. \quad (3.6)$$

Построим в области  $\Pi_1$  классическое решение линейного вспомогательного уравнения ГЯБ

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t} + \mathbb{H}^Q \left( h, \frac{\partial \varphi_3}{\partial h} \right) := \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_3}{\partial h} + f(h) + Q \frac{\partial \varphi_3}{\partial h} = 0 \quad (3.7)$$

с краевым условием, определенным формулой (3.5) на множестве  $G_1$  и формулой (3.6) на множестве  $G_3$ . Используя метод характеристик Коши, построим это решение с помощью характеристической системы

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\alpha h + Q, \\ \frac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(h), \\ \frac{dz}{dt} = -f(h), \end{cases}$$

с краевыми условиями, когда  $(t_1, h(t_1)) = \hat{h}_1 \in G_1$

$$\begin{cases} h(t_1) = \hat{h}_1, \\ s_h(t_1) = 0, \\ z(t_1) = f(\hat{h}_1)(T - t_1), \end{cases}$$

и с краевыми условиями, когда  $(T, h(T)) \in G_3$

$$\begin{cases} h(T) = \gamma_1, \quad \gamma_1 \in [0, \hat{h}_1], \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы для точек  $(t_0, h_0) \in \Pi_1$ , через которые проходят характеристики с краевыми условиями для множества  $G_1$ , имеет вид

$$\begin{cases} h(t_0) = (\hat{h}_1 - \frac{Q}{\alpha}) e^{\alpha(t_1 - t_0)} + \frac{Q}{\alpha}, \\ s_h(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\alpha(\tau - t_1)} f'(h(\tau)) d\tau, \\ z(t_0) = f(\hat{h}_1)(T - t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f(h(\tau)) d\tau, \end{cases}$$

а для точек  $(t_0, h_0) \in \Pi_1$ , через которые проходят характеристики с краевыми условиями для множества  $G_3$ , можно представить как

$$\begin{cases} h(t_0) = (\gamma_1 - \frac{Q}{\alpha})e^{\alpha(T-t_0)} + \frac{Q}{\alpha}, \\ s_h(t_0) = \int_{t_0}^T e^{\alpha(\tau-T)} f'(h(\tau))d\tau, \\ z(t_0) = \int_{t_0}^T f(h(\tau))d\tau. \end{cases}$$

В точках  $(t_0, h_0) \in \Pi_1$ , через которые проходят характеристики с краевыми условиями для  $G_1$  и  $G_3$ , согласно методу Коши решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.7) в области  $\Pi_1$  имеет вид

$$\varphi_3(t_0, h_0) = z(t_0), \quad h(t_0) = h_0.$$

**З а м е ч а н и е 1.** Из условия A2, т. е.  $f'(h) > 0$ ,  $h \in [0, \hat{h}_1]$ , вытекает, что

$$s_h(t_0) = \frac{\partial \varphi_3(t_0, h_0)}{\partial h} > 0$$

во внутренних точках области  $\Pi_1$ . Следовательно, функция  $\varphi_3(t, h)$  в области  $\Pi_1$  удовлетворяет основному уравнению ГЯБ (2.3)

$$\frac{\partial \varphi_3(t, h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_3(t, h)}{\partial h} + f(h) + Q \frac{\partial \varphi_3(t, h)}{\partial h} = \frac{\partial \varphi_3(t, h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_3(t, h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} \frac{\partial \varphi_3(t, h)}{\partial h} = 0,$$

и  $s_h(t_0) = \frac{\partial \varphi_3(t_0, h_0)}{\partial h} = 0$  при  $(t_0, h_0) \in G_1 \cup G_3$ .

### 3.4. Функция $\varphi_4(\cdot)$

Определим функцию  $\varphi_4(\cdot)$  в области  $\Pi_2 = [0, T] \times [\hat{h}_3, L]$ . Введенное ранее множество  $G_2$  является частью границы этой области  $\Pi_2$ . Полагаем, что на множестве  $G_2$  справедливо

$$\varphi_4(t_0, \hat{h}_3) = \varphi_2(t_0, \hat{h}_3) = V(t_0, \hat{h}_3), \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial h}(t_0, \hat{h}_3) = 0. \tag{3.8}$$

Рассмотрим множество  $G_4 = \{(t, h) : t = T, h \in [\hat{h}_3, L]\}$ , которое является другой частью границы области  $\Pi_2$ , где полагаем

$$\varphi_4(T, h) = V(T, h) = J(u(\cdot)) = \int_T^T f(h(t; T, h, u(\cdot)))dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial h}(T, h) = 0. \tag{3.9}$$

Построим в области  $\Pi_2$  классическое решение линейного вспомогательного уравнения ГЯБ

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial t} + \mathbb{H}^0\left(h, \frac{\partial \varphi_4}{\partial h}\right) := \frac{\partial \varphi_4}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_4}{\partial h} + f(h) + 0 \cdot \frac{\partial \varphi_4}{\partial h} = 0 \tag{3.10}$$

с краевым условием, определенным формулой (3.8) на множестве  $G_2$  и формулой (3.9) на множестве  $G_4$ . Используя метод характеристик Коши, построим это решение с помощью характеристической системы

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\alpha h, \\ \frac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(h), \\ \frac{dz}{dt} = -f(h) \end{cases}$$

с краевыми условиями, когда  $(t_2, h(t_2) = \hat{h}_3) \in G_2$ :

$$\begin{cases} h(t_2) = \hat{h}_3, \\ s_h(t_2) = 0, \\ z(t_2) = f(\hat{h}_3)(T - t_2), \end{cases}$$

и с краевыми условиями, когда  $(T, h(T)) \in G_4$ :

$$\begin{cases} h(T) = \gamma_2, \quad \gamma_2 \in [\hat{h}_3, L], \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы для точек  $(t_0, h_0) \in \Pi_2$ , через которые проходят характеристики с краевыми условиями для  $G_2$ , имеет вид

$$\begin{cases} h(t_0) = \hat{h}_3 e^{\alpha(t_2 - t_0)}, \\ s_h(t_0) = \int_{t_0}^{t_2} e^{\alpha(\tau - t_2)} f'(h(\tau)) d\tau, \\ z(t_0) = f(\hat{h}_3)(T - t_2) + \int_{t_0}^{t_2} f(h(\tau)) d\tau, \end{cases}$$

а для точек  $(t_0, h_0) \in \Pi_2$ , через которые проходят характеристики с краевыми условиями для  $G_4$ , имеет вид:

$$\begin{cases} h(t_0) = \gamma_2 e^{\alpha(T - t_0)}, \\ s_h(t_0) = \int_{t_0}^T e^{\alpha(\tau - T)} f'(h(\tau)) d\tau, \\ z(t_0) = \int_{t_0}^T f(h(\tau)) d\tau. \end{cases}$$

В точках  $(t_0, h_0) \in \Pi_2$ , через которые проходят характеристики с краевыми условиями для  $G_2$  и  $G_4$ , согласно методу Коши, решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.10) в области  $\Pi_2$  имеет вид

$$\varphi_4(t_0, h_0) = z(t_0), \quad h(t_0) = h_0.$$

**З а м е ч а н и е 2.** Из условия A2, а именно  $f'(h) < 0$ ,  $h \in [\hat{h}_3, L]$ , вытекает, что

$$s_h(t_0) = \frac{\partial \varphi_4(t_0, h_0)}{\partial h} < 0$$

во внутренних точках области  $\Pi_2$ . Следовательно, функция  $\varphi_4(t, h)$  в области  $\Pi_2$  удовлетворяет основному уравнению ГЯБ (2.3)

$$\frac{\partial \varphi_4(t, h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_4(t, h)}{\partial h} + f(h) + 0 \cdot \frac{\partial \varphi_4(t, h)}{\partial h} = \frac{\partial \varphi_4(t, h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_4(t, h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} \frac{\partial \varphi_4(t, h)}{\partial h} = 0,$$

и  $s_h(t_0) = \frac{\partial \varphi_4(t_0, h_0)}{\partial h} = 0$  при  $(t_0, h_0) \in G_2 \cup G_4$ .



### 3.5. Функция $\varphi_5(\cdot)$

Определим функцию  $\varphi_5(\cdot)$  в области  $\Pi = [0, T] \times [\hat{h}_1, \hat{h}_3]$ . Введенное ранее множество  $G_1$  является частью границы этой области  $\Pi$ . Полагаем, что на множестве  $G_1$  справедливо

$$\varphi_5(t_0, \hat{h}_1) = \varphi_1(t_0, \hat{h}_1) = V(t_0, \hat{h}_1), \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial h}(t_0, \hat{h}_1) = 0. \quad (3.11)$$

Рассмотрим множество  $G_5 = \{(t, h) : t = T, h \in [\hat{h}_1, \hat{h}_2]\}$ , которое является частью границы области  $\Pi$ , где полагаем

$$\varphi_5(T, h) = V(T, h) = J(u(\cdot)) = \int_T^T f(h(t; T, h, u(\cdot))) dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi_5}{\partial h}(T, h) = 0. \quad (3.12)$$

Построим в области  $\Pi$  классическое решение линейного вспомогательного уравнения ГЯБ

$$\frac{\partial \varphi_5}{\partial t} + \mathbb{H}^0\left(h, \frac{\partial \varphi_5}{\partial h}\right) := \frac{\partial \varphi_5}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_5}{\partial h} + f(h) + 0 \cdot \frac{\partial \varphi_5}{\partial h} = 0 \quad (3.13)$$

с краевым условием, определенным формулой (3.11) на множестве  $G_1$  и формулой (3.12) на множестве  $G_5$ . Используя метод характеристик Коши, построим это решение с помощью характеристической системы

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\alpha h, \\ \frac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(h), \\ \frac{dz}{dt} = -f(h) \end{cases}$$

с краевыми условиями, когда  $(t_1, h(t_1)) = \hat{h}_1 \in G_1$ :

$$\begin{cases} h(t_1) = \hat{h}_1, \\ s_h(t_1) = 0, \\ z(t_1) = f(\hat{h}_1)(T - t_1), \end{cases}$$

и с краевыми условиями, когда  $(T, h(T)) \in G_5$ :

$$\begin{cases} h(T) = \xi_1, \quad \xi_1 \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2), \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы для точек  $(t_0, h_0) \in \Pi$ , лежащих на графиках фазовых характеристик  $(t, h(t))$ , с краевыми условиями на  $G_1$ , имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{h}(t_0) = \hat{h}_1 e^{\alpha(t_1 - t_0)}, \\ s_h^5(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\alpha(\tau - t_1)} f'(\tilde{h}(\tau)) d\tau, \\ z^5(t_0) = f(\hat{h}_1)(T - t_1) + \int_{t_0}^{t_1} f(\tilde{h}(\tau)) d\tau, \end{cases}$$

а для точек  $(t_0, h_0) \in \Pi$ , лежащих на графиках фазовых характеристик  $(t, h(t))$ , с краевыми условиями на  $G_5$ , может быть представлено как

$$\begin{cases} \tilde{h}(t_0) = \xi_1 e^{\alpha(T-t_0)}, \\ s_h^5(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\alpha(\tau-t_1)} f'(\tilde{h}(\tau)) d\tau, \\ z^5(t_0) = \int_{t_0}^T f(\tilde{h}(\tau)) d\tau. \end{cases}$$

**З а м е ч а н и е 3.** Согласно методу Коши решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.13) в подобласти области  $\Pi$ , покрытой графиками фазовых характеристик  $(t, h(t))$  с краевыми условиями на  $G_1 \cup G_5$ , имеет вид

$$\varphi_5(t_0, h_0) = z^5(t_0), \quad \frac{\partial \varphi_5(t_0, h_0)}{\partial h} = s_h^5(t_0), \quad h(t_0) = h_0.$$

Используя (1.4), получаем, что в точках области  $(t, h) \in [0, T] \times (\hat{h}_1, \hat{h}_2]$ , покрытой графиками фазовых характеристик  $(t, h(t))$  с краевыми условиями на  $G_1 \cup G_5$ , справедливо  $\frac{\partial \varphi_5(t, h)}{\partial h} = s_h^5(t) < 0$ .

### 3.6. Функция $\varphi_6(\cdot)$

Определим функцию  $\varphi_6(\cdot)$  в области  $\Pi = [\hat{h}_1, \hat{h}_3] \times [0, T]$ . Введенное ранее множество  $G_2$  является частью границы этой области  $\Pi$ . Полагаем, что на множестве  $G_2$  справедливо

$$\varphi_6(t_0, \hat{h}_3) = \varphi_2(t_0, \hat{h}_3) = V(t_0, \hat{h}_3), \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial h}(t_0, \hat{h}_3) = 0. \quad (3.14)$$

Рассмотрим множество  $G_6 = \{(t, h) : t = T, h \in [\hat{h}_2, \hat{h}_3]\}$ , которое является частью границы области  $\Pi$ , где полагаем

$$\varphi_6(T, h) = V(T, h) = J(u(\cdot)) = \int_T^T f(h(t; T, h, u(\cdot))) dt = 0, \quad \frac{\partial \varphi_6}{\partial h}(T, h) = 0. \quad (3.15)$$

Построим в области  $\Pi$  классическое решение линейного вспомогательного уравнения ГЯБ

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial t} + \mathbb{H}Q\left(h, \frac{\partial \varphi_6}{\partial h}\right) := \frac{\partial \varphi_6}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi_6}{\partial h} + f(h) + Q \frac{\partial \varphi_6}{\partial h} = 0 \quad (3.16)$$

с краевым условием, определенным формулой (3.14) на множестве  $G_2$  и формулой (3.15) на множестве  $G_6$ . Используя метод характеристик Коши, построим это решение с помощью характеристической системы

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = -\alpha h + Q, \\ \frac{ds_h}{dt} = \alpha s_h - f'(h), \\ \frac{dz}{dt} = -f(h) \end{cases}$$

с краевыми условиями, когда  $(t_2, h(t_2)) = \hat{h}_3 \in G_2$ :

$$\begin{cases} h(t_2) = \hat{h}_3, \\ s_h(t_2) = 0, \\ z(t_2) = f(\hat{h}_3)(T - t_2), \end{cases}$$

и с краевыми условиями, когда  $(T, h(T)) \in G_6$ :

$$\begin{cases} h(T) = \xi_2, & \xi_2 \in (\hat{h}_2, \hat{h}_3), \\ s_h(T) = 0, \\ z(T) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы для точек  $(t_0, h_0) \in \Pi$ , лежащих на графиках фазовых характеристик  $(t, h(t))$  с краевыми условиями для  $G_2$ , может быть представлено как

$$\begin{cases} \bar{h}(t_0) = (\hat{h}_3 - \frac{Q}{\alpha})e^{\alpha(t_2-t_0)} + \frac{Q}{\alpha}, \\ s_h^6(t_0) = \int_{t_0}^{t_2} e^{\alpha(\tau-t_2)} f'(\bar{h}(\tau)) d\tau, \\ z^6(t_0) = f(\hat{h}_3)(T - t_2) + \int_{t_0}^{t_2} f(\bar{h}(\tau)) d\tau, \end{cases}$$

а для точек  $(t_0, h_0) \in \Pi$ , лежащих на графиках фазовых характеристик  $(t, h(t))$  с краевыми условиями для  $G_6$ , имеет вид

$$\begin{cases} \bar{h}(t_0) = (\xi_2 - \frac{Q}{\alpha})e^{\alpha(T-t_0)} + \frac{Q}{\alpha}, \\ s_h^6(t_0) = \int_{t_0}^T e^{\alpha(\tau-T)} f'(\bar{h}(\tau)) d\tau, \\ z^6(t_0) = \int_{t_0}^T f(\bar{h}(\tau)) d\tau. \end{cases}$$

**З а м е ч а н и е 4.** Согласно методу Коши, решение рассматриваемой краевой задачи для уравнения (3.16) в подобласти области  $\Pi$ , покрытой графиками фазовых характеристик  $(t, h(t))$  с краевыми условиями на  $G_2 \cup G_6$ , имеет вид

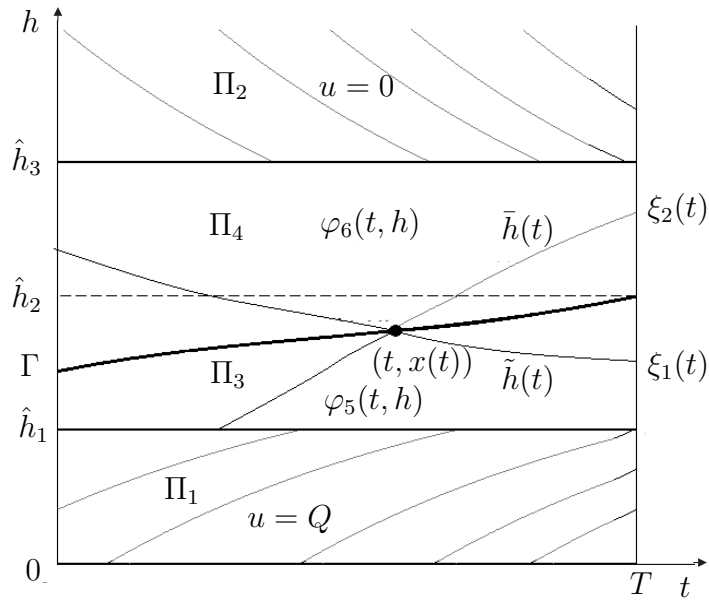
$$\varphi_6(t_0, h_0) = z^6(t_0), \quad \frac{\partial \varphi_6(t_0, h_0)}{\partial h} = s_h^6(t_0), \quad h(t_0) = h_0.$$

Используя (1.4), получаем, что во всех точках области, где  $(t, h) \in [0, T] \times [\hat{h}_2, \hat{h}_3]$ , покрытой графиками фазовых характеристик  $(t, h(t))$  с краевыми условиями на  $G_2 \cup G_6$ , справедливо  $\frac{\partial \varphi_6(t, h)}{\partial h} = s_h^6(t) > 0$ .

#### 4. Построение функции $\varphi(\cdot)$ в области $\Pi$

Построенные функции  $\varphi_5$  и  $\varphi_6$  пересекаются в полосе  $\Pi$ . Точки, в которых значения функций совпадают, образуют линию  $\Gamma = \{(t, x(t)) : t \in [0, T], x(T) = \hat{h}_2\}$ . Исходя из непрерывности склейки этих функций и проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в работах [8, гл. 4; 9, гл. 6], мы можем утверждать, что уравнение линии склейки  $\Gamma$  удовлетворяет условию Ранкина — Гюгонио с краевым условием  $x(T) = \hat{h}_2$  и имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\mathbb{H}^Q(x, s_h^6) - \mathbb{H}^0(x, s_h^5)}{s_h^6 - s_h^5} = -\alpha x(t) + Q \frac{s_h^6}{s_h^6 - s_h^5}.$$



Рисунок

Введем на области  $\Pi$  функцию  $\varphi(t, h)$ :

$$\varphi(t, h) = \begin{cases} \varphi_5(t, h), & (t, h) \in \Pi_3 = [0, T] \times [\hat{h}_1, x(t)], \\ \varphi_6(t, h), & (t, h) \in \Pi_4 = [0, T] \times [x(t), \hat{h}_3], \\ 0, & t = T, h \in [\hat{h}_1, \hat{h}_3]. \end{cases}$$

**Лемма 1.** Для всех точек  $(t, h) \in \Pi$ , где одновременно определены  $\varphi_5$  и  $\varphi_6$ , справедливо

$$\varphi(t, h) = \max\{\varphi_5(t, h), \varphi_6(t, h)\}. \tag{4.1}$$

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную точку  $(t, x(t)) \in \Gamma, t < T$  (см. рисунок), где

$$\begin{aligned} \varphi_5(t, x(t)) &= \varphi_6(t, x(t)), & x(t) &= \tilde{h}(t, \xi_1(t)) = \bar{h}(t, \xi_2(t)), \\ \hat{h}_1 &\leq \xi_1(t) < \hat{h}_2, & \hat{h}_2 &< \xi_2(t) \leq \hat{h}_3. \end{aligned}$$

Введем следующие функции:

$$\tilde{h}(\tau) = \tilde{h}(\tau, \xi_1(t)), \quad \omega(\tau) := \varphi_6(\tau, \tilde{h}(\tau)) - \varphi_5(\tau, \tilde{h}(\tau)), \quad \tau \in [\bar{t}, t], \quad \bar{t} = \begin{cases} t_* \geq 0, & \tilde{h}(t_*) = \hat{h}_3, \\ 0, & \tilde{h}(0) < \hat{h}_3. \end{cases}$$

Вычислим  $\frac{d\omega(\tau)}{d(-\tau)}$ , используя замечания 3,4 и формулы (3.13), (3.16):

$$\begin{aligned} \frac{d\omega(\tau)}{d(-\tau)} &= -\left[ \frac{\partial \varphi_6(\tau, \tilde{h}(\tau))}{\partial \tau} - \frac{\partial \varphi_5(\tau, \tilde{h}(\tau))}{\partial \tau} \right] - \frac{d\tilde{h}(\tau)}{d\tau} \left[ \frac{\partial \varphi_6(\tau, \tilde{h}(\tau))}{\partial h} - \frac{\partial \varphi_5(\tau, \tilde{h}(\tau))}{\partial h} \right] \\ &= \mathbb{H}^Q(\tilde{h}(\tau), s_h^6(\tau)) - \mathbb{H}^0(\tilde{h}(\tau), s_h^5(\tau)) - \frac{d\tilde{h}(\tau)}{d\tau} (s_h^6(\tau) - s_h^5(\tau)) \\ &= -\alpha \tilde{h}(\tau) s_h^6(\tau) + Q s_h^6(\tau) + f(\tilde{h}(\tau)) + \alpha \tilde{h}(\tau) s_h^5(\tau) - f(\tilde{h}(\tau)) + \alpha \tilde{h}(\tau) (s_h^6(\tau) - s_h^5(\tau)) = Q s_h^6(\tau). \end{aligned}$$

Если  $x(t) \geq \hat{h}_2$ , то  $s_h^6(\tau) > 0$  согласно замечанию 4. Если  $x(t) < \hat{h}_2$ , то найдем момент времени  $\tau_* < t$  такой, что  $\tilde{h}(\tau_*) = \hat{h}_2$ . Тогда, согласно замечанию 4  $s_h^6(\tau_*) > 0$ . Для всех  $\tau \in [\tau_*, t]$ ,  $\tilde{h}(\tau) \in (\hat{h}_1, \hat{h}_2)$  справедливо  $f'(\tilde{h}(\tau)) < 0$  и

$$\frac{ds_h^6(\tau)}{d\tau} = \alpha s_h^6(\tau) - f'(\tilde{h}(\tau)) > 0,$$

откуда вытекает, что  $s_h^6(\tau) > 0, \tau \in [\tau_*, t]$ . Таким образом, суммируя сказанное,  $s_h^6(\tau) > 0, \tau \in [\bar{t}, t]$ .

Из того, что  $\omega(t) = 0$  и  $\frac{d\omega(\tau)}{d(-\tau)} = Qs_h^6(\tau) > 0, \tau \leq t$ , получаем

$$\omega(\tau) = \varphi_6(\tau, \tilde{h}(\tau)) - \varphi_5(\tau, \tilde{h}(\tau)) > 0, \quad \tau \in [\bar{t}, t]. \quad (4.2)$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что для  $\bar{h}(\tau) = \bar{h}(\tau, \xi_2(t))$

$$\omega(\tau) = \varphi_5(\tau, \bar{h}(\tau)) - \varphi_6(\tau, \bar{h}(\tau)) > 0, \quad \tau \in [\bar{t}, t], \quad \bar{t} = \begin{cases} t_* \geq 0, & \bar{h}(t_*) = \hat{h}_1, \\ 0, & \bar{h}(0) > \hat{h}_1. \end{cases} \quad (4.3)$$

Подобными рассуждениями можно убедиться в справедливости неравенств (4.2) и (4.3) вдоль фазовых характеристик с краевыми условиями на  $G_1$  и  $G_2$  соответственно.

Таким образом, для всех точек  $(\tau, h) \in \Pi$ , где одновременно определены  $\varphi_5(\tau, h)$  и  $\varphi_6(\tau, h)$  и через которые проходит пара характеристик  $\tilde{h}(\tau) = \bar{h}(\tau) = h$ , справедлива формула (4.1).  $\square$

**Следствие 1.** Согласно лемме 1

$$\frac{\partial \varphi(t, h)}{\partial h} = \frac{\partial \varphi_5(t, h)}{\partial h} = s_h^5(t, h) < 0, \quad (t, h) \in \Pi_3,$$

$$\frac{\partial \varphi(t, h)}{\partial h} = \frac{\partial \varphi_6(t, h)}{\partial h} = s_h^6(t, h) > 0, \quad (t, h) \in \Pi_4.$$

Следовательно в области  $\Pi \setminus \Gamma$  функция  $\varphi(t, h)$  удовлетворяет основному уравнению ГЯБ (2.3)

$$\frac{\partial \varphi(t, h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi(t, h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} \left( u \frac{\partial \varphi(t, h)}{\partial h} \right) = 0,$$

а в точках кривой  $\Gamma$  она субдифференцируема, причем ее субдифференциал имеет вид [6]

$$D^- \varphi(t, h) = \text{co} \left\{ \left( \frac{\partial \varphi_5}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_5}{\partial h} \right); \left( \frac{\partial \varphi_6}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_6}{\partial h} \right) \right\}, \quad (4.4)$$

где символ  $\text{co}$  обозначает выпуклую оболочку.

**Лемма 2.** Для любой точки  $(\tilde{t}, x(\tilde{t}))$  на кривой  $\Gamma$  и для всех элементов  $(s_t, s_h)$  из супердифференциала  $D^- \varphi(t, h)$  справедливо следующее неравенство:

$$s_t - \alpha h s_h + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} u s_h \leq 0. \quad (4.5)$$

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{t} \in [0, T]$ . Напомним, что  $\frac{\partial \varphi_5}{\partial h}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = s_h^5(\tilde{t})$  и  $\frac{\partial \varphi_6}{\partial h}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = s_h^6(\tilde{t})$ . Найдем  $\frac{\partial \varphi_5}{\partial t}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = s_t^5(\tilde{t})$  и  $\frac{\partial \varphi_6}{\partial t}(\tilde{t}, x(\tilde{t})) = s_t^6(\tilde{t})$  из уравнений ГЯБ (3.13), (3.16):

$$s_t^5(\tilde{t}) - \alpha x(\tilde{t}) s_h^5(\tilde{t}) + f(x(\tilde{t})) = 0,$$

$$s_t^6(\tilde{t}) - \alpha x(\tilde{t}) s_h^6(\tilde{t}) + f(x(\tilde{t})) + Q s_h^6(\tilde{t}) = 0.$$

Получим соответственно

$$s_t^5(\tilde{t}) = \alpha x(\tilde{t}) s_h^5(\tilde{t}) - f(x(\tilde{t})),$$

$$s_t^6(\tilde{t}) = \alpha x(\tilde{t}) s_h^6(\tilde{t}) - f(x(\tilde{t})) - Q s_h^6(\tilde{t}).$$

Согласно (4.4) для каждого элемента  $(s_t, s_h)$  из супердифференциала существует такое значение  $\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1$ , что справедливо

$$\lambda s_t^5(\tilde{t}) + (1 - \lambda)s_t^6(\tilde{t}) = s_t, \quad \lambda s_h^5(\tilde{t}) + (1 - \lambda)s_h^6(\tilde{t}) = s_h.$$

Для этих элементов проверим неравенство (4.5)

$$\lambda s_t^5(\tilde{t}) + (1 - \lambda)s_t^6(\tilde{t}) - \alpha x(\tilde{t})(\lambda s_h^5(\tilde{t}) + (1 - \lambda)s_h^6(\tilde{t})) + f(x(\tilde{t})) + \max u(\lambda s_h^5(\tilde{t}) + (1 - \lambda)s_h^6(\tilde{t})). \quad (4.6)$$

Преобразуя (4.6), получим

$$-(1 - \lambda)Qs_h^6 + \max_{u \in [0, Q]} (u(\lambda s_h^5(\tilde{t}) + (1 - \lambda)s_h^6(\tilde{t}))). \quad (4.7)$$

Учитывая, что  $s_h^5(\tilde{t}) < 0$  и  $s_h^6(\tilde{t}) > 0$ , можно утверждать, что для всех  $\lambda \in [0, 1]$  выражение (4.7) будет неположительным. Значит, неравенство (4.5) выполняется.  $\square$

## 5. Основной результат

**Теорема.** Функция  $\varphi(\cdot)$ , имеющая вид

$$\varphi(t, h) = \begin{cases} \varphi_1, & (t, h) \in G_1, \\ \varphi_2, & (t, h) \in G_2, \\ \varphi_3, & (t, h) \in \Pi_1, \\ \varphi_4, & (t, h) \in \Pi_2, \\ \varphi_5, & (t, h) \in \Pi_3, \\ \varphi_6, & (t, h) \in \Pi_4, \end{cases} \quad (5.1)$$

совпадает с функцией цены  $V(t, h)$  в задаче (2.1), (2.2) на всей области  $\Pi_T$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В точке  $\hat{h}_1$  для любых  $t \in [0, T]$  по построению справедливо

$$\varphi_3(t, \hat{h}_1) = \varphi_5(t, \hat{h}_1) = \varphi(t, \hat{h}_1), \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial h}(t, \hat{h}_1) = \frac{\partial \varphi_5}{\partial h}(t, \hat{h}_1) = 0.$$

Тогда из уравнений (3.7), (3.13) следует, что в точке  $(t, \hat{h}_1)$  верно

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial t}(t, \hat{h}_1) = \frac{\partial \varphi_5}{\partial t}(t, \hat{h}_1) = 0.$$

Значит, функции  $\varphi_3(\cdot)$ ,  $\varphi_5(\cdot)$  склеиваются гладко и для  $\varphi(t, \hat{h}_1)$  справедливо уравнение

$$\frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_1)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_1)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} \left( u \frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_1)}{\partial h} \right) = 0.$$

В точке  $\hat{h}_3$  для любых  $t \in [0, T]$  по построению справедливо

$$\varphi_4(t, \hat{h}_3) = \varphi_6(t, \hat{h}_3) = \varphi(t, \hat{h}_3), \quad \frac{\partial \varphi_4}{\partial h}(t, \hat{h}_3) = \frac{\partial \varphi_6}{\partial h}(t, \hat{h}_3) = 0.$$

Тогда из уравнений (3.10), (3.16) следует, что в точке  $(t, \hat{h}_3)$  верно

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial t}(t, \hat{h}_3) = \frac{\partial \varphi_6}{\partial t}(t, \hat{h}_3) = 0.$$

Значит, функции  $\varphi_4(\cdot), \varphi_6(\cdot)$  склеиваются гладко и для  $\varphi(t, \hat{h}_3)$  справедливо уравнение

$$\frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_3)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_3)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} \left( u \frac{\partial \varphi(t, \hat{h}_3)}{\partial h} \right) = 0.$$

Функции  $\varphi_5(t, h)$  и  $\varphi_6(t, h)$  равны на  $\Gamma$ , но градиенты этих функций не совпадают на  $\Gamma$ , отсюда следует, что эти функции склеиваются не гладко на кривой  $\Gamma$ .

Из замечаний 1, 2 и следствия 1 вытекает, что функция  $\varphi(t, h)$  вида (5.1) непрерывно дифференцируема в области  $(t, h) \in \Pi_T \setminus \Gamma$  и удовлетворяет основному уравнению ГЯБ (2.3)

$$\frac{\partial \varphi(t, h)}{\partial t} - \alpha h \frac{\partial \varphi(t, h)}{\partial h} + f(h) + \max_{u \in [0, Q]} \left( u \frac{\partial \varphi(t, h)}{\partial h} \right) = 0, \quad (5.2)$$

а в точках  $(\tilde{t}, x(\tilde{t})) \in \Gamma$  согласно лемме 2 она субдифференцируема и все элементы из субдифференциала удовлетворяют неравенству (2.4)

$$s_t(\tilde{t}) - \alpha x(\tilde{t}) s_h(\tilde{t}) + f(x(\tilde{t})) + \max_{u \in [0, Q]} u s_h(\tilde{t}) \leq 0.$$

Тогда согласно теории минимаксных решений [6;9] построенная функция  $\varphi(t, h)$  является единственным минимаксным решением уравнения (5.2) с краевым условием  $\varphi(T, h) = 0$  и совпадает с функцией цены  $V(t, h)$  в задаче (2.1), (2.2), что и требовалось доказать.  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чумерина Е.С.** Синтез оптимального управления в математических моделях химиотерапии опухоли, растущей по закону Гомперца и логистическому закону: дис. ... канд. физ.-мат. наук / МИИТ. Москва, 2009.
2. **Братусь А.С., Чумерина Е.С.** Синтез оптимального управления в задаче выбора лекарственного воздействия на растущую опухоль // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, вып. 6. С. 946–966.
3. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1961. 392 с.
4. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2003. 336 р.
7. Crandall, M.G., Evans, L.C., Lions, P.-L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. Vol. 282., no 2. P. 487–502.
8. **Горицкий А.Ю., Кружков С.Н., Чечкин Г.А.** Уравнения с частными производными первого порядка: уч. пос. Москва: Изд-во МГУ им. Ломоносова, 1999. 96 с.
9. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во РИО УрО РАН, 2013. 244 с.

Субботина Нина Николаевна  
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН  
главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,  
г. Екатеринбург,  
профессор  
Уральский федеральный университет,  
г. Екатеринбург  
e-mail: subb@uran.ru

Поступила 2.09.2017

Новоселова Наталья Геннадьевна

математик

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

г. Екатеринбург,

магистрант

Уральский федеральный университет,

г. Екатеринбург,

e-mail: n.g.novoselova@gmail.com

## REFERENCES

1. Chumerina E.S. *Synthesis of optimal control in mathematical models of chemotherapy of a tumor growing according to Gompertz law and logistic law*. Cand. Phys.-Math. Sci. Dissertation. Moscow, MIIT Publ., 2009 (in Russian).
2. Bratus' A.S., Chumerina E.S. Optimal control synthesis in therapy of solid tumor growth. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 6, pp. 892–911. doi: 10.1134/S096554250806002X.
3. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya Teoriya Optimal'nykh Protsessov*, Moscow, Nauka Publ., 1961, 392 p.
4. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. NY, Springer. 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective*. Basel, Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1. Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled. Publ., 2003, 336 p.
7. Crandall M.G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, no. 1, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8.
8. Goritsky A.Yu., Kruzhkov S.N., Chechkin G.A. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka: Uchebnoe posobie* [Partial differential equations of the first order: Textbook]. Moscow, Moscow State University Publ., 1999. 96 p.
9. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniya Gamil'tona-Yakobi-Bellmana* [The method of characteristics for Hamilton-Jacobi-Bellman equations]. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2013, 244 p.

The paper was received by the Editorial Office on September 2, 2017.

*Nina Nikolaevna Subbotina*, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: subb@uran.ru.

*Natal'ya Gennad'evna Novoselova*, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: n.g.novoselova@gmail.com.



УДК 514.8, 515.12

## О ДЕНДРИТАХ, ЗАДАНЫХ СИСТЕМАМИ ПОЛИЭДРОВ, И ИХ ТОЧКАХ ВЕТВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

А. В. Тетенев, М. Самуэль, Д. А. Ваулин

В статье изучаются методы задания и геометрические свойства самоподобных дендритов в пространстве  $\mathbb{R}^d$  — вопросы, еще не разработанные в теории самоподобных фракталов. Для этого строятся и исследуется класс  $P$ -полиэдральных дендритов в  $\mathbb{R}^d$ . Такие дендриты  $K$  мы определяем как аттракторы систем  $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  сжимающих подобий в  $\mathbb{R}^d$ , переводящих заданный полиэдр  $P \subset \mathbb{R}^d$  в полиэдры  $P_i \subset P$ , попарные пересечения которых либо пусты, либо одноточечны и являются общими вершинами этих полиэдров, а гиперграф попарных пересечений полиэдров  $P_i$  ацикличесок. Мы доказываем, что для счетного плотного в  $K$  множества  $G_S(V_P)$  локальная структура окрестности всякой его точки  $x$  задается некоторым набором непересекающихся телесных углов с вершиной в  $x$ , конгруэнтных углам при вершинах  $P$ . Из этого утверждения мы получаем, что все точки ветвления  $P$ -полиэдрального дендрита  $K$  имеют конечный порядок, верхняя оценка которого зависит только от полиэдра  $P$ . Нами доказано, что геометрия и размерность множества  $CP(K)$  разбивающих точек дендрита  $K$  определяются его главным деревом — минимальным подконтинуумом в  $K$ , содержащим все вершины  $P$ , а потому размерность  $\dim_H CP(K)$  множества  $CP(K)$  меньше размерности  $\dim_H(K)$  дендрита  $K$  и совпадает с последней тогда и только тогда, когда  $K$  — жорданова дуга.

Ключевые слова: самоподобное множество, дендрит, полиэдральная система, главное дерево, точка ветвления, хаусдорфова размерность.

**A. V. Tetenov, M. Samuel, D. A. Vaulin. On dendrites generated by polyhedral systems and their ramification points.**

The methods of construction of self-similar dendrites in  $\mathbb{R}^d$  and their geometric properties are considered. These issues have not yet been studied in the theory of self-similar fractals. We construct and analyze a class of  $P$ -polyhedral dendrites  $K$  in  $\mathbb{R}^d$ , which are defined as attractors of systems  $S = \{S_1, \dots, S_m\}$  of contracting similarities in  $\mathbb{R}^d$  sending a given polyhedron  $P$  to polyhedra  $P_i \subset P$  whose pairwise intersections either are empty or are singletons containing common vertices of the polyhedra, while the hypergraph of pairwise intersections of the polyhedra  $P_i$  is acyclic. We prove that there is a countable dense subset  $G_S(V_P) \subset K$  such that for any of its points  $x$  the local structure of a neighbourhood of  $x$  in  $K$  is defined by some disjoint family of solid angles with vertex  $x$  congruent to the angles at the vertices of  $P$ . Therefore, the ramification points of a  $P$ -polyhedral dendrite  $K$  have finite order whose upper bound depends only on the polyhedron  $P$ . We prove that the geometry and dimension of the set  $CP(K)$  of the cutting points of  $K$  are defined by its main tree, which is a minimal continuum in  $K$  containing all vertices of  $P$ . That is why the dimension  $\dim_H CP(K)$  of the set  $CP(K)$  is less than the dimension  $\dim_H(K)$  of  $K$  and  $\dim_H CP(K) = \dim_H(K)$  if and only if  $K$  is a Jordan arc.

Keywords: self-similar set, dendrite, polyhedral system, main tree, ramification point, Hausdorff dimension.

MSC: 28A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-281-291

### Введение

Хотя топологические свойства дендритов изучаются специалистами по общей топологии более 75 лет (см. [5]), исследования геометрических свойств самоподобных дендритов сводятся лишь к нескольким эпизодам.

В 1985 г. М. Хата [7], исследуя вопросы связности самоподобных множеств, показал, что если дендрит является аттрактором системы слабо сжимающих отображений, то множество его концов бесконечно. В 1990 г. К. Бандт в своем неопубликованном препринте [2] доказал, что

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00414).

жордановы дуги, связывающие пары точек посткритически конечного самоподобного дендрита, являются самоподобными множествами, а их возможные размерности пробегают конечное множество значений. При построении гармонического анализа на фракталах Д. Кигами [8; 9] получил ряд результатов, связанных с метриками на дендритах, Д. Кройдон [6] построил семейство случайных деревьев и получил для него оценки ядра оператора теплопроводности.

В разных работах [3; 4; 13] приводятся различные примеры самоподобных дендритов, но до сих пор не были исследованы явные алгоритмы их построения, не были указаны справедливые для них топологические ограничения, не ставился вопрос о свойствах морфизмов самоподобных дендритов и их классификации.

В нашей работе для решения этих вопросов мы исходим из простейших и самых очевидных конструкций. Мы рассматриваем системы  $\mathcal{S}$  сжимающих подобий пространства  $\mathbb{R}^d$ , определяемые некоторым полиэдром  $P \subset \mathbb{R}^d$ , которые называем *стягиваемыми  $P$ -полиэдральными системами*. Такой подход применял Р. Стричарц [10] для исследования изопериметрической задачи в частном случае полигаскетов. В значительно более общей форме он изложен работах К. Бандта [2; 3], но, к сожалению, не получил затем должного развития.

Мы доказываем, что аттрактор всякой такой системы есть дендрит  $K$  в  $\mathbb{R}^d$  (теорема 4), что проколотые окрестности каждой точки  $x$  в  $K$  распадаются в конечные дизъюнктные объединения подмножеств телесных углов  $\Omega_l$ , равных телесным углам при вершинах  $P$  (теорема 3); показываем, что порядки ветвления точек  $x \in K$  ограничены сверху константой, зависящей только от полиэдра  $P$  (теорема 6), и что хаусдорфова размерность множества  $CP(K)$  разбивающих точек дендрита  $K$ , отличного от жордановой дуги, не превосходит размерности множества  $EP(K)$  его концов (теорема 7).

## 1. Предварительные сведения

**Дендриты.** *Дендритом* называется локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых дуг.

Порядок  $Ord(p, X)$  точки  $p$  относительно континуума  $X$  в случае дендритов равен числу связных компонент множества  $X \setminus \{p\}$ . При этом точки порядка 1 называются *концами* в  $X$ , а разбивающие точки делятся на обычные точки, если  $Ord(p, X) = 2$ , и *точки ветвления*, если  $Ord(p, X) \geq 3$ .

Следуя замечательному обзору Я. Харатоника и В. Харатоника, перечислим несколько свойств топологических дендритов, которыми мы будем пользоваться [5, Theorem 1.1]. Для континуума  $X$  следующие свойства эквивалентны:  $X$  — дендрит; любые две различные точки в  $X$  разделяются третьей; всякая точка  $p \in X$  — либо конец, либо разбивающая точка; всякий невырожденный подконтинуум в  $X$  содержит несчетное множество разбивающих точек в  $X$ ; для любого  $p \in X$  число компонент в  $X \setminus p$  равно  $Ord(x, P)$  (если одно из них конечно); пересечение любых двух связных подмножеств в  $X$  связно;  $X$  односвязно, и для любых двух точек  $x, y \in X$  существует единственная кривая  $\gamma$ , соединяющая  $x$  и  $y$ .

**Самоподобные множества.** Пусть  $(X, d)$  — полное метрическое пространство.

Отображение  $F : X \rightarrow X$  называется *сжимающим*, если  $Lip F < 1$ . Отображение  $S : X \rightarrow X$  называется *подобием*, если  $d(S(x), S(y)) = rd(x, y)$  для любых  $x, y \in X$  и некоторого  $r > 0$ .

**О п р е д е л е н и е 1.** Пусть  $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  — система инъективных сжимающих отображений полного метрического пространства  $(X, d)$ . Непустой компакт  $K \subset X$  называется *инвариантным множеством* системы  $\mathcal{S}$ , если  $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$ .

Множество  $K \subset X$  называют также *самоподобным* относительно  $\mathcal{S}$ .

В данной статье  $X$  — пространство  $\mathbb{R}^d$  и отображения  $S_i \in \mathcal{S}$  являются подобиями.

**О б о з н а ч е н и я.**  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  — множество индексов,  $I^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$  — множество состоящих из них конечных слов, или мультииндексов,  $\mathbf{j} = j_1 j_2 \dots j_n \in I^*$ , где  $\mathbf{j}$  означает

конкатенацию соответствующих мультииндексов; пишут, что  $\mathbf{i} \sqsubset \mathbf{j}$ , если  $\mathbf{i} = i_1 \dots i_n$  — начальный отрезок в  $\mathbf{j} = j_1 \dots j_{n+k}$  или  $\mathbf{j} = \mathbf{ik}$  для некоторого  $\mathbf{k} \in I^*$ ; если  $\mathbf{i} \not\sqsubset \mathbf{j}$  и  $\mathbf{j} \not\sqsubset \mathbf{i}$ , то  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  не сравнимы; мы будем записывать  $S_{\mathbf{j}} = S_{j_1 j_2 \dots j_n} = S_{j_1} S_{j_2} \dots S_{j_n}$  и для множества  $A \subset X$  обозначать  $S_{\mathbf{j}}(A)$  через  $A_{\mathbf{j}}$ ; при этом  $G_{\mathcal{S}} = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^*\}$  — полугруппа, порожденная  $\mathcal{S}$ ;  $I^\infty = \{\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots, \alpha_i \in I\}$  — индексное пространство, и  $\pi : I^\infty \rightarrow K$  — индексное отображение, сопоставляющее последовательности  $\alpha$  точку  $\bigcap_{n=1}^\infty K_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Система  $\mathcal{S}$  удовлетворяет *условию открытого множества* (OSC), если существует такое непустое открытое множество  $O \subset X$ , что все  $S_i(O)$ ,  $1 \leq i \leq m$ , содержатся в  $O$  и попарно не пересекаются.

Мы говорим, что самоподобное множество  $K$ , определенное системой  $\mathcal{S}$ , удовлетворяет *свойству одноточечного пересечения*, если для любых  $i \neq j$  пересечение  $S_i(K) \cap S_j(K)$  содержит не более одной точки.

Мы используем следующий критерий связности аттрактора системы  $\mathcal{S}$  [7; 9].

**Теорема 1** [9, теорема 1.6.2]. Пусть  $K$  — инвариантное множество системы сжимающих отображений  $\mathcal{S}$  в полном метрическом пространстве  $(X, d)$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) для любых  $i, j \in I$  существуют такие  $\{i_0, i_1, \dots, i_n\} \subset I$ , что  $i_0 = i$ ,  $i_n = j$  и  $S_{i_k}(K) \cap S_{i_{k+1}}(K) \neq \emptyset$  для любых  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ;
- 2)  $K$  линейно связно;
- 3)  $K$  связно.

**Предложение 1** [9, предложение 1.6.4]. Если самоподобное множество  $K$  связно, то оно локально связно.

**Ципперы и мультиципперы.** Наиболее простой способ построения самоподобных кривых состоит в том, чтобы выбрать некоторую ломаную и последовательно заменять ее сегменты на уменьшенные копии этой ломаной; эта конструкция была изучена В. В. Асеевым в [1] и называется циппером.

**О п р е д е л е н и е 3.** Пусть  $X$  — полное метрическое пространство. Система  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  сжимающих отображений  $X$  в себя называется *циппером* с вершинами  $\{z_0, \dots, z_m\}$  и сигнатурой  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ ,  $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ , если  $S_i(z_0) = z_{i-1+\varepsilon_i}$  и  $S_i(z_m) = z_{i-\varepsilon_i}$  для  $i = 1 \dots m$ .

Более общий подход к построению самоподобных кривых и континуумов дает граф-ориентированный вариант конструкции ципперов [11].

**О п р е д е л е н и е 4.** Пусть  $\{X_u, u \in V\}$  — набор пространств, изоморфных  $\mathbb{R}^d$ . Пусть в каждом  $X_u$  задано конечное семейство точек  $\{x_0^{(u)}, \dots, x_{m_u}^{(u)}\}$ . Предположим, что для каждого  $u \in V$  и  $0 \leq k \leq m_u$  заданы такие  $v(u, k) \in V$ ,  $\varepsilon(u, k) \in \{0, 1\}$  и отображения  $S_k^{(u)} : X_v \rightarrow X_u$ , что  $S_k^{(u)}(x_0^{(v)}) = x_{k-1}^{(u)}$  или  $x_{k-1}^{(u)}$  и  $S_k^{(u)}(x_{m_v}^{(v)}) = x_k^{(u)}$  или  $x_{k-1}^{(u)}$  (в зависимости от сигнатуры  $\varepsilon(u, k)$ ). Граф-ориентированная система функций (IFS), определенная отображениями  $S_k^{(u)}$ , называется *мультициппером*  $\mathcal{Z}$ .

*Аттрактор мультициппера*  $\mathcal{Z}$  — набор связных и линейно связных компактных множеств  $K_u \subset X_u$ , удовлетворяющих системе уравнений

$$K_u = \bigcup_{k=1}^{m_u} S_k^{(u)}(K_v(u, k)), \quad u \in V.$$

Множества  $K_u$  называются *компонентами аттрактора*  $\mathcal{Z}$ .

Компоненты  $K_u$  аттрактора мультициппера  $\mathcal{Z}$  являются жордановыми дугами при выполнении следующих условий:

**Теорема 2** [12, теорема 2.2.4]. Пусть  $\mathcal{Z}_0 = \{S_k^{(u)}\}$  — мультициппер с узловыми точками  $x_k^{(u)}$  и сигнатурой  $\varepsilon = \{(v(u, k), \varepsilon(u, k)), u \in V, k = 1, \dots, t_u\}$ . Если для любого  $u \in V$  и любых  $i, j \in \{1, 2, \dots, t_u\}$  пересечение  $K_{(u,i)} \cap K_{(u,j)}$  пусто при  $|i - j| > 1$  и является одноточечным множеством при  $|i - j| = 1$ , то всякая линейная параметризация  $\{f_u : I_u \rightarrow K_u\}$  есть гомеоморфизм и каждое множество  $K_u$  есть жорданова дуга с концами  $x_0^{(u)}, x_m^{(u)}$ .

## 2. Стягиваемые полиэдральные системы

Пусть  $P$  — конечный гомеоморфный  $d$ -мерному шару полиэдр в  $\mathbb{R}^d$  и  $V_P = \{A_1, \dots, A_{n_P}\}$  — множество его вершин,  $\Omega(P, A_i)$  — телесные углы в вершинах  $P$ , а  $\theta(\Omega(P, A_i))$  обозначает  $(d - 1)$ -мерную лебегову меру угла  $\Omega(P, A_i)$ . Рассмотрим систему подобий  $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$  в  $\mathbb{R}^d$ , задающих полиэдры  $P_i = S_i(P)$ , которые удовлетворяют следующим условиям:

(D1)  $P_i \subset P$  для любого  $i \in I$ ;

(D2) для любых  $i, j \in I, i \neq j$ , пересечение  $P_i \cap P_j$  либо пусто, либо является общей вершиной полиэдров  $P_i$  и  $P_j$ ;

(D3)  $V_P \subset \bigcup_{i \in I} S_i(V_P)$ ;

(D4) множество  $\tilde{P} = \bigcup_{i=1}^m P_i$  стягиваемо.

**О п р е д е л е н и е 5.** Система  $\mathcal{S}$ , удовлетворяющая условиям (D1)–(D4), называется *стягиваемой  $P$ -полиэдральной системой подобий*.

Все подобия  $S_i \in \mathcal{S}$  являются сжимающими, поэтому система  $\mathcal{S}$  обладает аттрактором  $K$ ; система  $\mathcal{S}$  порождает полугруппу  $G_{\mathcal{S}} = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^*\}$  и тем самым задает множество полиэдров  $G_{\mathcal{S}}(P) = \{P_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^*\}$ . Свойства этой системы измельчающихся полиэдров определяют геометрические свойства аттрактора  $K$ . Перечислим те из них, которые вытекают только из условий (D1)–(D3). Обратим особое внимание на взаимное расположение телесных углов полиэдров  $P_{\mathbf{j}}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\mathcal{S}$  —  $P$ -полиэдральная система подобий. Справедливы следующие утверждения.

(a) Система  $\mathcal{S}$  удовлетворяет условию открытого множества (OSC).

(b)  $P_{\mathbf{j}} \subset P_{\mathbf{i}}$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{j} \sqsupset \mathbf{i}$ .

(c) Если  $\mathbf{i} \sqsubset \mathbf{j}$ , то  $S_{\mathbf{i}}(V_P) \cap P_{\mathbf{j}} \subset S_{\mathbf{j}}(V_P)$ .

(d) Для любых не сравнимых  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I^*$ ,  $\#(P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}}) \leq 1$  и  $P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}} = S_{\mathbf{i}}(V_P) \cap S_{\mathbf{j}}(V_P)$ .

(e) Множество  $G_{\mathcal{S}}(V_P)$  вершин полиэдров из  $C_{\mathcal{S}}(P)$  содержится в  $K$ .

(f) Если  $x \in K \setminus G_{\mathcal{S}}(V_P)$ , то  $\#\pi^{-1}(x) = 1$ .

(g) Для любого  $x \in G_{\mathcal{S}}(V_P)$  существует такое  $\varepsilon > 0$  и такая конечная система  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$ , где  $n = \#\pi^{-1}(x)$ , непересекающихся телесных углов с вершиной  $x$ , что если  $x \in P_{\mathbf{j}}$  и  $\text{diam } P_{\mathbf{j}} < \varepsilon$ , то  $\Omega(P_{\mathbf{j}}, x) = \Omega_k$  для некоторого  $k \leq n$ . Обратно, для любого  $\Omega_k$  существует такой мультииндекс  $\mathbf{j} \in I^*$ , что  $\Omega(P_{\mathbf{j}}, x) = \Omega_k$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** (a) Из условий (D1), (D2) следует, что таким открытым множеством для (OSC) служит внутренность полиэдра  $P$ .

(b) вытекает из (OSC).

(c) Заметим, что из условий (D2) и (D3) следует утверждение (D3a): для любого  $i \in I$ ,  $P_i \cap V_P \subset S_i(V_P)$ . В самом деле, если  $x \in P \setminus V_P$  и  $S_i(x) = A \in V_P$ , то, поскольку существует такое  $j \in I$ , что  $A \in S_j(V_P)$ ,  $P_i \cap P_j \notin S_i(V_P)$ , а это противоречит (D3).

Рассуждая по индукции, из (D3 a) мы получим, что  $P_{\mathbf{k}} \cap V_P \subset S_{\mathbf{k}}(V_P)$  для любого  $\mathbf{k} \in I^*$ .

Пусть теперь  $\mathbf{j} = \mathbf{ik}$  и  $A \in S_{\mathbf{i}}(V_P) \cap S_{\mathbf{i}}(P_{\mathbf{k}})$ . Это значит, что  $S_{\mathbf{i}}^{-1}(A) \in V_P \cap P_{\mathbf{k}}$ , и потому  $S_{\mathbf{i}}^{-1}(A) \in S_{\mathbf{k}}(V_P)$ , т. е.  $A \in S_{\mathbf{j}}(V_P)$ .

(d) Пару несравнимых мультииндексов представим в виде  $\mathbf{ki}, \mathbf{kj}$ , где  $i_1 \neq j_1$ . Так как  $P_{\mathbf{ki}} \cap P_{\mathbf{kj}} \neq \emptyset$ ,  $P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}} \neq \emptyset$ . Но  $P_{\mathbf{i}} \cap P_{\mathbf{j}} \subset P_{i_1} \cap P_{j_1}$ . Последнее пересечение непусто и потому является

общей вершиной полиэдров  $P_{i_1}$  и  $P_{j_1}$ , которая в силу (с) также является общей вершиной полиэдров  $P_i$  и  $P_j$ ; поэтому  $P_{\mathbf{k}i} \cap P_{\mathbf{k}j} = S_{\mathbf{k}i}(V_P) \cap S_{\mathbf{k}j}(V_P)$ .

(е) Для любой вершины  $A \in V_P$  существуют  $A_1 \in V_P$  и  $\alpha_1 \in I$  такие, что  $S_{\alpha_1}(A_1) = A$ . Рассуждая по индукции, получим, что для любого  $n$  существуют такие  $A_n \in V_P$  и  $\alpha_1 \dots \alpha_n \in I^n$ , что  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A_n) = A$ . В таком случае  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(P) = \{A\}$  и  $A \in K$ . Значит,  $V_P \subset K$ , а потому и  $G_S(V_P) \subset K$ .

(ф) Если  $\pi^{-1}(x)$  содержит два неравных элемента  $\alpha, \beta \in I^\infty$ , то для некоторого  $n$ ,  $\alpha_1 \dots \alpha_n$  и  $\beta_1 \dots \beta_n$  не сравнимы; поэтому  $x \in P_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \cap P_{\beta_1 \dots \beta_n}$  и  $x \in G_S(V_P)$ .

(г) Пусть сначала  $\alpha \in I^\infty$  и  $\pi(\alpha) = A \in V_P$ . Как и в утверждении (е), для любого  $n$ ,  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(A_n) = A$  и  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\Omega(P, A_n)) \subset \Omega(P, A)$ . Более того, телесные углы  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\Omega(P, A_n))$  образуют невозрастающую последовательность. Так как множество  $\{\Omega(P, B), B \in V_P\}$  конечно, существуют такие  $\Omega_\alpha$  и  $N \in \mathbb{N}$ , что  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(\Omega(P, A_n)) = \Omega_\alpha$  при  $n > N$ . При этом  $S_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(P) \subset \Omega_\alpha$ . Если  $\beta \neq \alpha$  и  $\pi(\beta) = A$  для некоторого  $\beta \in I^\infty$ , то в силу (д)  $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta = \{A\}$ . Таким образом, множество  $\pi^{-1}(A)$  однозначно отображается на семейство попарно непересекающихся телесных углов  $\Omega_k$  с вершиной в  $A$ .

Мера  $\theta(\Omega_k)$  угла  $\Omega_k$  больше или равна  $\theta_{\min} = \min\{\theta(\Omega(P, A)), A \in V_P\}$ , поэтому число различных  $\alpha \in I^\infty$  таких, что  $\pi(\alpha) = A$ , не превосходит  $\theta(\Omega(P, A))/\theta_{\min}$ , если  $A \in V_P$ , и  $\theta_F/\theta_{\min}$ , если  $A \in \dot{P}$ , где  $\theta_F$  — мера полного телесного угла в  $\mathbb{R}^d$ .  $\square$

Применяя оператор Хатчинсона  $T(A) = \bigcup_{i \in I} S_i(A)$  системы  $S$  к полиэдру  $P$ , получим множество  $\tilde{P} = \bigcup_{i \in I} P_i$ . Будем обозначать  $\tilde{P}^{(1)} = T(P)$ ,  $\tilde{P}^{(n+1)} = T(\tilde{P}^{(n)})$ . Тем самым мы получим убывающую последовательность  $\tilde{P}^{(1)} \supset \tilde{P}^{(2)} \supset \dots \supset \tilde{P}^{(n)} \supset \dots$  компактных множеств, в пересечении дающую  $K$ .  $\square$

Композиция стягиваемых  $P$ -полиэдральных систем является системой такого же вида.

**Лемма 1.** Пусть  $S$  и  $S'$  — стягиваемые  $P$ -полиэдральные системы подобий. Тогда  $S'' = \{S_i \circ S'_j, S_i \in S, S'_j \in S'\}$  — также стягиваемая  $P$ -полиэдральная система подобий.

**Доказательство.** (D1) очевидно, так как  $S_i \circ S'_j(P) \subset S_i(P) \subset P$ .

(D2) Пусть  $Q_1 = S_{i_1} \circ S'_{j_1}(P)$  и  $Q_2 = S_{i_2} \circ S'_{j_2}(P)$  — два полиэдра в  $S''$ . Рассмотрим их пересечение:

если  $i_1 \neq i_2$ , то  $Q_1 \cap Q_2 \subset P_{i_1} \cap P_{i_2}$ , где правая часть либо пуста, либо для некоторых  $A_1, A_2 \in V_P$   $P_{i_1} \cap P_{i_2} = \{S_{i_1}(A_1)\} = \{S_{i_2}(A_2)\}$ . Так как  $A_1 \in S'_{j_1}(V_P)$  и  $A_2 \in S'_{j_2}(V_P)$ ,  $Q_1 \cap Q_2 = S_{i_1} \circ S'_{j_1}(V_P) \cap S_{i_2} \circ S'_{j_2}(V_P)$ ;

если  $i_1 = i_2$ , то  $Q_1 \cap Q_2 = S_{i_1}(P'_{j_1} \cap P'_{j_2})$ , где правая часть — пустое или одноточечное подмножество в  $S'_{j_1}(V_P) \cap S'_{j_2}(V_P)$ .

(D3) выполняется, так как для любой вершины  $A \in V_P$  существуют такие  $A_1 \in V_P$  и  $S_{i_1} \in S$ , что  $S_{i_1}(A_1) = A$ ; в свою очередь, существуют такие  $S'_{i_2} \in S'$  и  $A_2 \in V_P$ , что  $S'_{i_2}(A_2) = A_1$ ; поэтому  $S_{i_1}S'_{i_2}(A_2) = A$ . Снова, если  $x \in P$  и  $S_{i_1}S'_{i_2}(x) = A$ , то  $S'_{i_2}(x) \in V_P$ , а значит, и  $x \in V_P$ .

(D4) Множества  $\tilde{P} = \bigcup_{i=1}^m P_i$  и  $\tilde{P}' = \bigcup_{i=1}^{m'} P'_i$  — сильные деформационные ретракты полиэдра  $P$ , содержащие множество  $V_P$ . Пусть  $\varphi' = \varphi'(X, t) : P \times [0, 1] \rightarrow P$  — деформационная ретракция из  $P$  в  $\bigcup_{i=1}^{m'} P'_i$ . Отображение  $\varphi'$  удовлетворяет следующим условиям:  $\varphi'(x, 0) = Id$ ,  $\varphi'(x, 1)(P) = \tilde{P}'$  и  $\varphi'(x, t)|_{\tilde{P}'} = Id_{\tilde{P}'}$  для любого  $t \in [0, 1]$ .

Определим отображение  $\varphi'_i : P_i \times [0, 1] \rightarrow P_i$  формулой

$$\varphi'_i(x, t) = S_i \circ \varphi'(S_i^{-1}(x), t).$$

Каждое отображение  $\varphi'_i$  является деформационной ретракцией из  $P_i$  в  $S_i(\tilde{P}')$ .

Заметим, что все вершины  $S_i(A_k)$  полиэдра  $P_i$  — неподвижные точки отображений  $\varphi'_i$  соответственно. Значит, мы можем определить сильную деформационную ретракцию  $\tilde{\varphi}(x, t) : \tilde{P} \times [0, 1] \rightarrow \bigcup_{i=1}^m S_i(\tilde{P}')$  формулой  $\tilde{\varphi}(x, t) = \varphi'_i(x, t)$  для  $x \in P_i$ . Отображение  $\tilde{\varphi}$  всюду определено и непрерывно, так как если  $P_i \cap P_j = \{S_i(A_k)\} = \{S_j(A_l)\}$  для некоторых  $k$  и  $l$ , то  $\varphi'_i(S_i(A_k), t) \equiv \varphi'_j(S_j(A_l), t) \equiv S_i(A_k)$ .

Более того,  $\tilde{\varphi}(x, 0) = x$  на  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{\varphi}(\tilde{P}, 1) \equiv \bigcup_{i=1}^m S_i(\tilde{P}')$  и  $\tilde{\varphi}(x, t)|_{\tilde{P}''} \equiv Id$ . Значит,  $\tilde{\varphi}(x, t)$  — сильная деформационная ретракция  $\tilde{P}$  на  $\tilde{P}''$ . Следовательно, множество  $\tilde{P}'' = \bigcup S_i \circ S'_j(P)$  стягиваемо.  $\square$

**Следствие 1.** Если  $\mathcal{S}$  — стягиваемая  $P$ -полиэдральная система, то это же верно и для  $\mathcal{S}^{(n)} = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in I^n\}$ .

Из стягиваемости множества  $\tilde{P}$  и условия **(D2)** следует, что всякая замкнутая жорданова кривая в  $\tilde{P}$  лежит в одном из полиэдров  $P_i$ . Чтобы убедиться в этом, докажем следующую лемму.

**Лемма 2.** Пусть  $B_i, i = 1, \dots, n$ , — такое конечное семейство топологических шаров, что для любых  $i, j$  пересечение  $B_i \cap B_j$  состоит не более чем из одной точки и множество  $X = \bigcup_{i=1}^n B_i$  односвязно. Тогда всякая замкнутая жорданова кривая в  $X$  лежит в одном из шаров  $B_i$ .

**Доказательство.** Выберем в каждом  $B_i$  точку  $O_i \in \dot{B}_i$  и для всех  $\{p_{ij}\} = B_i \cap B_j$  возьмем жорданову дугу  $\gamma_{ij}$  с концами  $O_i$  и  $p_{ij}$ . Пусть  $\Gamma$  — граф с вершинами  $O_i$  и  $p_{ij}, i, j = 1, \dots, n$ . Так как для всякого  $i$  объединение  $\bigcup_j \gamma_{ij}$  является сильным деформационным ретрактом шара  $B_i$ , граф  $\Gamma$  является сильным деформационным ретрактом  $X$ , и потому  $\Gamma$  является деревом.

Пусть  $l$  — некоторая жорданова кривая в  $X$ . Будем считать, что  $l$  находится в общем положении, и потому  $p_{ij} \in l$  тогда и только тогда, когда  $l \cap \dot{B}_i \neq \emptyset$  и  $l \cap \dot{B}_j \neq \emptyset$ . Каждая точка  $p_{ij}$  разбивает  $X$  на не менее чем две компоненты. Поэтому, если  $l \ni p_{ij}$ , то кривая  $l$  незамкнута. Значит, всякая простая замкнутая кривая в  $X$  лежит целиком в одном из шаров  $B_i$ .  $\square$

**Теорема 4.** Аттрактор  $K$  стягиваемой  $P$ -полиэдральной системы подобий  $\mathcal{S}$  является дендритом.

**Доказательство.** По следствию 1 множества  $\tilde{P}^{(n)}$  стягиваемы, компактны и удовлетворяют включениям  $\tilde{P}^{(1)} \supset \tilde{P}^{(2)} \supset \tilde{P}^{(3)} \dots$ . Диаметр связных компонент внутренности каждого из  $\tilde{P}^{(n)}$  не превосходит  $\text{diam} P \cdot q^n$ , где  $q = \max \text{Lip}(S_i)$ . Значит, множество  $K = \bigcap \tilde{P}^{(n)}$  связно и имеет пустую внутренность. Так как аттрактор  $K$  связан, он локально связан и линейно связан [9, теорема 1.6.2, предложение 1.6.4].

Пусть  $l$  — некоторая жорданова кривая в  $K$ . Поскольку  $l \subset \tilde{P}^{(n)}$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ , из леммы 2 следует, что если  $l$  имеет ненулевой диаметр, то она незамкнута. Таким образом,  $K$  является дендритом.  $\square$

Дендрит  $K$  лежит в полиэдре  $P$ . Вообще говоря, его пересечение с границей  $P$  может быть несчетно и даже содержать какие-то из ребер полиэдра  $P$ . Это также верно и для пересечения дендрита  $K$  с каждым подполиэдром  $S_{\mathbf{j}}(P), \mathbf{j} \in I^*$ . Тем не менее в силу условия **D2** подконтинуумы в  $K$  “проникают” в подполиэдры  $S_{\mathbf{j}}(P)$  только через их вершины, а именно справедливо

**Предложение 2.** Пусть  $\mathbf{j} \in I^*$  — мультииндекс. Для любого континуума  $L \subset K$ , пересечение которого как с  $P_{\mathbf{j}}$ , так и с его внешностью  $C P_{\mathbf{j}}$  непусто, имеем  $\overline{L \setminus P_{\mathbf{j}}} \cap P_{\mathbf{j}} \subset S_{\mathbf{j}}(V_P)$ .

**Доказательство.** Заметим, что для любого полиэдра  $P_j, j \in I^k$ , множество  $\tilde{P}^{(k)} \setminus S_j(V_P)$  несвязно и  $P_j \setminus S_j(V_P)$  — его связная компонента, пересечение которой с  $K$  совпадает с  $S_j(K \setminus S_j(V_P))$ . Значит, множество  $L \setminus S_j(V_P)$  также несвязно.

Континуум  $L$  содержится в  $\tilde{P}^{(k)}$ . Если  $L \cap (P_j \setminus S_j(V_P)) = \emptyset$ , то  $L \cap P_j \subset S_j(V_P)$  и  $L \cap P_j$  состоит из единственной вершины  $A$  полиэдра  $P_j$ , поэтому  $\overline{L \setminus P_j} \cap P_j = \{A\}$ .

Допустим теперь, что  $L \cap (P_j \setminus S_j(V_P)) \neq \emptyset$ . Так как  $L \setminus P_j \subset P_j^c$ , имеем

$$\overline{L \setminus P_j} \cap P_j \subset P_j^c \cap P_j \subset S_j(V_P).$$

Множество в левой части непусто, так как  $L$  пересекает и  $P_j \setminus S_j(V_P)$ , и  $\tilde{P}^{(k)} \setminus P_j$ . □

### 3. Главное дерево и точки ветвления

Так как аттрактор  $K$  — дендрит, для любых вершин  $A_i, A_j \in V_P$  существует единственная соединяющая их дуга  $\gamma_{ij} \subset K$ . Как было доказано К. Бандтом [2], эти дуги образуют аттрактор граф-ориентированной системы подобий. Покажем, что эта система является жордановым мультициппером (см. [11; 12]).

**Теорема 5.** *Дуги  $\gamma_{ij}$  являются компонентами инвариантного множества некоторого жорданова мультициппера  $\mathcal{Z}$ .*

**Доказательство.** Мы говорим, что полиэдры  $P_{i_1}, \dots, P_{i_s}, i_k \in I$ , образуют цепь, соединяющую точки  $x$  и  $y$ , если  $x \in P_{i_1}, y \in P_{i_s}$ , а пересечение  $P_{i_k} \cap P_{i_l}$  пусто при  $|l - k| > 1$ , и является общей вершиной полиэдров  $P_{i_k}$  и  $P_{i_l}$  при  $|l - k| = 1$ . Для вершин  $A_i, A_j$  существует единственная соединяющая их цепь подполиэдров в  $P$ -полиэдральной системе  $\mathcal{S}$ , которая состоит из тех  $P_k$ , для которых  $\#P_k \cap \gamma_{ij} \geq 2$ ; обозначим составляющие ее подполиэдры и отображения через  $P'_{ijk} = S'_{ijk}(P), k = 1, \dots, m_{ij}$ . При этом будем иметь в виду, что все отображения  $S'_{ijk} \in \mathcal{S}$ .

Пусть  $u(i, j, k)$  и  $v(i, j, k)$  — такие номера вершин полиэдра  $P$ , что  $S'_{ijk}(A_u) = P'_{ij(k-1)} \cap P'_{ijk} = z_{ij(k-1)}$  и  $S'_{ijk}(A_v) = P'_{ijk} \cap P'_{ij(k+1)} = z_{ijk}$  при  $1 < k < m_{ij}$  и  $u(i, j, 1) = A_i = z_{ij0}$  и  $v(i, j, m_{ij}) = A_j = z_{ijm_{ij}}$  при  $k = 1$  или  $k = m_{ij}$ . Тем самым для каждой тройки  $(i, j, k)$ , где  $1 \leq k \leq m_{ij}$ , заданы такие индексы  $u, v \in \{1, \dots, n_P\}$ , что  $S'_{ijk}(z_{uv0}) = z_{ij(k-1)}$  и  $S'_{ijk}(z_{uvm_{ij}}) = z_{ijk}$ .

Следовательно, система  $\{S'_{ijk}\}$  — мультициппер  $\mathcal{Z}$  с вершинами  $z_{ijk}$ .

При этом, поскольку выполняются соотношения

$$\gamma_{ij} = \bigcup_{i=1}^{m_{ij}} S'_{ijk}(\gamma_{u(i,j,k),v(i,j,k)}) = \bigcup_{i=1}^{m_{ij}} \gamma_{ijk},$$

дуги  $\gamma_{ij}$  образуют полный набор компонент аттрактора мультициппера  $\mathcal{Z}$ .

Так как каждая дуга  $\gamma_{ijk}$  лежит в  $P_{ijk}$ , имеем

$$\gamma_{ijk} \cap \gamma_{ijl} = \emptyset \text{ при } |k - l| > 1 \text{ и } \gamma_{ijk} \cap \gamma_{ijl} = \{z_{ijk}\} \text{ при } l = k \pm 1.$$

Поэтому система  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет условиям теоремы 2 и является жордановым мультициппером. □

Множество  $\hat{\gamma} = \bigcup_{i \neq j} \gamma_{ij}$  — подконтинуум дендрита  $K$  и потому является дендритом. Так как все концы множества  $\hat{\gamma}$  содержатся в  $V_P$ ,  $\hat{\gamma}$  является конечным дендритом, или топологическим деревом [5, А.17]. Пусть  $n_E$  — число концов множества  $\hat{\gamma}$ . Как было отмечено Кигами [8],  $\hat{\gamma}$  можно представить как объединение не более чем  $(n_E - 1)$  жордановых дуг, внутренности которых попарно не пересекаются.

**О п р е д е л е н и е 6.** Объединение  $\hat{\gamma} = \bigcup_{i \neq j} \gamma_{ij}$  называется *главным деревом* дендрита  $K$ . Точки ветвления дерева  $\hat{\gamma}$  называются *главными точками ветвления* дендрита  $K$ .

Следующее утверждение устанавливает соотношения между множествами вершин  $V_P$ , концов  $EP(\hat{\gamma})$  и разбивающих точек  $CP(\hat{\gamma})$  главного дерева  $\hat{\gamma}$ .

**Предложение 3.** Пусть  $x \in K$ . Справедливы следующие утверждения:

- (а)  $\hat{\gamma} \subset \bigcup_{A_j \in V_P} \gamma_{A_j x}$ , при этом, если  $\hat{\gamma} \subset \bigcup_{A_j \in V_P} \gamma_{A_j x}$ , то  $x \in \hat{\gamma}$ ;
- (б)  $EP(\hat{\gamma}) = V_P \setminus CP(\hat{\gamma})$ ;
- (в)  $x \in CP(\hat{\gamma})$  тогда и только тогда, когда найдутся вершины  $A_i, A_j$ , лежащие в разных компонентах множества  $K \setminus \{x\}$ ;
- (г) если  $x \in CP(K)$ , то  $Ord(x, K) = Ord(x, \hat{\gamma})$  тогда и только тогда, когда  $C_l \cap V_P \neq \emptyset$  для каждой компоненты  $C_l$  множества  $K \setminus \{x\}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для любых  $A_i, A_j \in V_P$  справедливо включение  $\gamma_{A_i A_j} \subset \gamma_{A_i x} \cup \gamma_{A_j x}$ , что сразу дает (а). Чтобы получить (б), заметим, что если  $x \in \hat{\gamma}$  не является вершиной, то  $x$  лежит внутри некоторой дуги  $\gamma_{A_i A_j}$ , значит,  $x$  является разбивающей точкой  $\hat{\gamma}$ , и потому  $x \notin EP(\hat{\gamma})$ .

(в) Так как  $\gamma_{A_i x} \cap \gamma_{A_j x} = \{x\}$ , имеем  $\gamma_{x A_i} \cup \gamma_{x A_j} = \gamma_{A_i A_j}$ . Значит,  $x$  — разбивающая точка дуги  $\gamma_{A_i A_j}$  и, следовательно, главного дерева  $\hat{\gamma}$ .

(г) Необходимость очевидна, докажем достаточность. Согласно (в),  $x \in CP(\hat{\gamma})$ . Так как число компонент в  $K \setminus \{x\}$  не превосходит  $n_P$ , порядок  $Ord(x, K)$  конечен. Пусть  $C_l$ , где  $l = 1, \dots, k$ , а  $k = Ord(x, K)$  — компоненты в  $K \setminus \{x\}$ . Из (в) также следует, что  $x \in \hat{\gamma}$  и две вершины  $A_i$  и  $A_j$  лежат в одной и той же компоненте  $C_l$  тогда и только тогда, когда  $x \notin \gamma_{A_i A_j}$ . Значит, все вершины полиэдра  $P$ , принадлежащие одной и той же компоненте  $C_l$  множества  $K \setminus \{x\}$ , также лежат в одной компоненте в  $\hat{\gamma} \setminus \{x\}$ . Следовательно,  $Ord(x, \hat{\gamma}) = Ord(x, K)$ .  $\square$

Чтобы оценить порядок  $Ord(x, K)$  точек  $x \in K$ , мы должны прежде получить оценки порядка  $Ord(A, K)$  для вершин  $A \in V_P$ . В следующем предложении мы покажем, что порядок вершины  $A$  связан с числом прообразов  $n_A = \#\pi^{-1}(A)$  точки  $A$  в индексном пространстве  $I^\infty$  и оценивается через меры телесных углов в вершинах полиэдра  $P$ .

Введем необходимые обозначения. Пусть  $\theta_A = \theta(\Omega(P, A))$  — мера телесного угла в вершине  $A$ ,  $\theta_{\max} = \max\{\theta_A, A \in V_P\}$ , а  $\theta_{\min} = \min\{\theta_A, A \in V_P\}$ . Для  $t \in \mathbb{R}$  обозначим через  $\lceil t \rceil$  величину  $Ceil(t)$ , т. е. наименьшее целое число, большее или равное  $t$ .

**Предложение 4.** Пусть  $A \in V_P$ . Справедливы следующие утверждения:

- (а) если  $\#\pi^{-1}(A) = 1$ , то существуют такие  $\mathbf{i} \in I^*$  и  $A' \in V_P$ , что  $A = S_{\mathbf{i}}(A')$  и  $Ord(A, K) = Ord(A', \hat{\gamma})$ ; при этом  $Ord(A, K) \leq n_P - 1$ ;
- (б) если  $n_A = \#\pi^{-1}(A) > 1$ , то существуют такие  $\mathbf{i}_k \in I^*$  и  $A'_k \in V_P$ , где  $k = 1, \dots, n_A$ , что  $A_k = S_{\mathbf{i}_k}(A'_k)$  и  $Ord(A, K) = \sum_{k=1}^{n_A} Ord(A'_k, \hat{\gamma})$ ; при этом

$$Ord(A, K) \leq (n_P - 1) \left( \left\lceil \frac{\theta_A}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1 \right) \leq (n_P - 1) \left( \left\lceil \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1 \right). \quad (1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\#\pi^{-1}(A) = 1$  и  $\{C_l, l = 1, \dots, k\}$  — некоторое множество компонент в  $K \setminus \{A\}$ . Так как  $\{A\}$  есть пересечение единственной последовательности полиэдров  $P_{j_1} \supset P_{j_1 j_2} \supset \dots \supset P_{j_1 \dots j_s}$ , существует такое  $s$ , что  $\text{diam } P_{j_1 \dots j_s} < \text{diam } C_l$  для любого  $l = 1, \dots, k$ . Поэтому ввиду предложения 2 каждая компонента  $C_l$  содержит вершину подполиэдра  $P_{j_1 \dots j_s}$ , отличную от  $A$ . Значит,  $k \leq n_P - 1$  и  $Ord(A, K) \leq n_P - 1$ .

Поскольку порядок  $Ord(A, K)$  конечен, мы можем полагать, что  $k = Ord(A, K)$ , а  $\{C_1, \dots, C_k\}$  — полный набор компонент  $K \setminus \{A\}$ .

Пусть  $\mathbf{j} = j_1 \dots j_s$  и  $A = S_{\mathbf{j}}(A')$ . Множество  $\{C_l \cap P_{\mathbf{j}}, l = 1, \dots, k\}$  совпадает с множеством всех компонент в  $K_{\mathbf{j}} \setminus \{A\}$ . Так как  $(K \cap P_{\mathbf{j}}) \setminus \{A\} = S_{\mathbf{j}}(K \setminus \{A'\})$ , множество  $K \setminus \{A'\}$  состоит из  $k$



компонент  $C'_l$  таких, что  $S_{\mathbf{j}}(C'_l) = C_l \cap P_{\mathbf{j}}$ . Так как каждая компонента  $C'_l$  содержит вершины  $P$ , из предложения 3(d) следует, что  $Ord(A', \hat{\gamma}) = Ord(A', K) = Ord(A, K) \leq n_P - 1$ .

Предположим, что  $n_A = \#\pi^{-1}(A) > 1$ . По теореме 3(g) существует семейство  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_{n_A}\}$  непересекающихся телесных углов с вершиной  $A$  и соответствующих им полиэдров  $P_{\mathbf{j}_k} \ni A$  таких, что  $P_{\mathbf{j}_k} \subset \Omega_k$  и  $\Omega(P_{\mathbf{j}_k}, A) = \Omega_k$ .

Обозначим через  $A_k$  ту вершину полиэдра  $P$ , для которой  $S_{\mathbf{j}_k}(A_k) = A$ . Обратим внимание на то, что  $\#\pi^{-1}(A_k) = 1$ . Рассуждая, как в (а), мы можем выбрать такие мультииндексы  $\mathbf{j}_k$  и вершины  $A'_k$ , что  $Ord(A', K) = Ord(A'_k, \hat{\gamma})$ , поэтому  $Ord(A, K_{\mathbf{j}_k}) = Ord(A_k, K) \leq n_P - 1$  и  $Ord(A, K) \leq n_A(n_P - 1)$ . Учитывая неравенство  $n_A \leq \left\lceil \frac{\theta_A}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1 \leq \left\lceil \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1$ , получаем неравенство (1).  $\square$

Теперь мы оценим порядки разбивающих точек в  $K$  и увидим, что каждая из них лежит в некотором образе  $S_{\mathbf{j}}(\hat{\gamma})$  главного дерева.

**Теорема 6.** Пусть  $y \in CP(K)$ . Справедливы следующие утверждения:

- (i) если  $y \notin G_S(V_P)$ , то существуют такие  $\mathbf{j} \in I^*$  и  $x \in CP(\hat{\gamma})$ , что  $y = S_{\mathbf{j}}(x)$  и  $Ord(y, K) = Ord(x, \hat{\gamma}) \leq n_P$ ;
- (ii) если  $y \in G_S(V_P)$ , то существуют такие наборы мультииндексов  $\{\mathbf{j}_k, k = 1, \dots, s\}$  и вершин  $\{A'_1, \dots, A'_s\}$ , что для любого  $k$ ,  $S_{\mathbf{j}_k}(A'_k) = y$  и для любого  $l \neq k$  пересечение  $S_{\mathbf{j}_k}(P) \cap S_{\mathbf{j}_l}(P)$  есть  $\{y\}$ , при этом

$$Ord(y, K) = \sum_{k=1}^s Ord(A'_k, \hat{\gamma}) \leq (n_P - 1) \left( \left\lceil \frac{\theta_F}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1 \right),$$

где  $\theta_F$  — мера полного телесного угла в  $\mathbb{R}^d$ ;

- (iii)  $CP(K) \subset G_S(\hat{\gamma})$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** (i) Пусть  $\{C_1, \dots, C_k\}$  — некоторый набор компонент в  $K \setminus \{y\}$ , а  $\rho$  — наименьший из диаметров компонент  $C_l$  этого набора. Выберем такой мультииндекс  $\mathbf{j} \in I^*$ , что  $y \in P_{\mathbf{j}}$  и  $\text{diam}(P_{\mathbf{j}}) < \rho$ .

Из предложения 2 следует, что для любого  $l$  пересечение  $C_l \cap S_{\mathbf{j}}(V_P)$  непусто, поэтому  $k \leq n_P$ . Значит,  $Ord(y, K) \leq n_P$ . Поскольку порядок точки  $y$  конечен, мы можем предполагать, что  $k = Ord(y, K)$  и  $\{C_1, \dots, C_k\}$  — множество всех компонент  $K \setminus \{y\}$ .

Пусть  $x = S_{\mathbf{j}}^{-1}(y)$ . Тогда множества  $C'_l = S_{\mathbf{j}}^{-1}(C_l \cap P_{\mathbf{j}})$ , где  $l = 1, \dots, k$ , дают полный набор компонент в  $K \setminus \{x\}$ , причем для любого  $l$  пересечение  $C'_l \cap V_P$  непусто. Поэтому из предложения 3 вытекает, что

$$Ord(x, \hat{\gamma}) = Ord(x, K) = Ord(y, K) \leq n_P.$$

- (ii) Пусть  $n_y = \#\pi^{-1}(y)$ . По теореме 3(g) существует семейство  $\{\Omega_1, \dots, \Omega_{n_y}\}$  непересекающихся телесных углов с вершиной  $y$  и соответствующих им полиэдров  $P_{\mathbf{j}_k} \ni y$  таких, что  $P_{\mathbf{j}_k} \subset \Omega_k$  и  $\Omega(P_{\mathbf{j}_k}, y) = \Omega_k$ .

Рассуждая, как и в предложении 4(b), мы получаем, что  $Ord(y, K) \leq n_y(n_P - 1)$ . Тогда, выбирая полиэдры  $P_{\mathbf{j}_k}$  достаточно малого диаметра, мы приходим к выводу, что  $y \in S_{\mathbf{j}_k}(\hat{\gamma})$  для любого  $k$ , причем  $Ord(y, K_{\mathbf{j}_k}) = Ord(y, S_{\mathbf{j}_k}(\hat{\gamma}))$ . Это дает оценку

$$Ord(y, K) \leq (n_P - 1) \left( \left\lceil \frac{\theta_F}{\theta_{\min}} \right\rceil - 1 \right).$$

- (iii) Как в случае (i), так и в случае (ii), имеем  $y \in G_S(\hat{\gamma})$ .  $\square$

Так как множество разбивающих точек дендрита  $K$  есть счетное объединение образов главного дерева, размерности множеств  $CP(K)$  и  $\hat{\gamma}$  совпадают. Следующая теорема показывает, что почти все точки невырожденного самоподобного дендрита являются его концами, а множество разбивающих точек является множеством нулевой меры в  $K$ .

**Теорема 7.** Пусть  $(P, S)$  — стягиваемая  $P$ -полиэдральная система и  $K$  — ее аттрактор.

(i)  $\dim_H(CP(K)) = \dim_H(\hat{\gamma}) \leq \dim_H(EP(K)) = \dim_H(K)$ .

(ii)  $\dim_H(CP(K)) = \dim_H(K)$  тогда и только тогда, когда  $K$  — жорданова дуга.

**Доказательство.** Так как  $CP(K) = G_S(\hat{\gamma})$ , имеем  $\dim_H(CP(K)) = \dim_H(\hat{\gamma})$ . Если дендрит  $K$  не является жордановой дугой, то множество его концов  $EP(K)$  бесконечно и поэтому содержит точку  $x \notin \hat{\gamma}$ . Заметим, что  $d(x, \hat{\gamma}) > 0$ . Пусть  $\varepsilon < d(x, \hat{\gamma})/2$ . Возьмем такое  $n$ , что для любого мультииндекса  $\mathbf{j} \in I^n$  диаметр  $P_{\mathbf{j}}$  меньше  $\varepsilon$ . Тогда множество  $\mathcal{J} = \{\mathbf{j} \in I^n : P_{\mathbf{j}} \cap \hat{\gamma} \neq \emptyset\}$  отлично от  $I^n$ , поскольку  $x \notin P_{\mathbf{j}}$  для любого  $\mathbf{j} \in \mathcal{J}$ . Пусть  $S' = \{S_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in \mathcal{J}\}$  и  $K'$  — аттрактор системы  $S'$ . Так как полиэдры  $\{P_{\mathbf{j}}, \mathbf{j} \in \mathcal{J}\}$  покрывают  $\hat{\gamma}$ , имеем  $K' \supset \hat{\gamma}$ . В то же время, размерность подобия  $\dim_s(S')$  системы  $S'$  строго меньше размерности подобия системы  $S^{(n)}$ . Кроме того,  $\dim_s(S^{(n)}) = \dim_s(S) = \dim_H(K)$ . Таким образом,  $\dim_H(\hat{\gamma}) \leq \dim_H(K') < \dim_H(K)$ . Так как  $EP(K) = K \setminus CP(K)$ , имеем  $\dim_H(EP(K)) = \dim_H(K)$ .  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асеев В.В., Тетенов А.В., Кравченко А.С.** О самоподобных жордановых кривых на плоскости // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, №3. С. 481–492.
2. **Bandt C., Keller K.** Self-similar sets 2. A simple approach to the topological structure of fractals // Math. Nachrichten. 1991. Vol. 154. P. 27–39. doi: 10.1002/mana.19911540104.
3. **Bandt C., Stahnke J.** Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals: preprint. Greifswald, 1990.
4. **Barnsley M.F.** Fractals everywhere. Boston: Acad. Press, 1988. 396 p. ISBN: 0-12-079062-9.
5. **Charatonik J., Charatonik W.** Dendrites // Aportaciones Mat. Comun. 1998. Vol. 22. P. 227–253.
6. **Croydon D.** Random fractal dendrites. Ph.D. Thesis, St. Cross College, University of Oxford. Trinity, 2006. 161 p.
7. **Hata M.** On the structure of self-similar sets // Japan. J. Appl. Math. 1985. Vol. 3. P. 381–414. doi: 10.1007/BF03167083.
8. **Kigami J.** Harmonic calculus on limits of networks and its application to dendrites // J. Funct. Anal. 1995. Vol. 128, no. 1. P. 48–86. doi: 10.1006/jfan.1995.1023.
9. **Kigami J.** Analysis on fractals. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2001, 226 p. (Cambridge Tracts in Math.; vol. 143). ISBN: 0-521-79321-1.
10. **Strichartz R. S.** Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals // Trans. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 351. P. 1705–1752. doi: 10.1090/S0002-9947-99-01999-6.
11. **Тетенов А.В.** Самоподобные жордановы дуги и граф-ориентированные системы подобий // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, №5. С. 1147–1159.
12. **Тетенов А.В.** Структурные теоремы в теории самоподобных фракталов : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Горно-Алтайск, 2010. 216 с.
13. **Zeller. R.** Branching dynamical systems and slices through fractals. Ph.D. Thesis. University of Greifswald, 2015.

Тетенов Андрей Викторович

д-р физ.-мат. наук, доцент

профессор кафедры математики и методики преподавания математики

Горно-Алтайского госуниверситета

e-mail: atet@mail.ru

Самуэль Мери

Бхарата Мата Колледж

Кочин, Керала, Индия

e-mail: marysamuel2000@gmail.com

Ваулин Дмитрий Алексеевич

ст. преподаватель кафедры математики и методики преподавания математики

Горно-Алтайского госуниверситета

e-mail: d\_warrant@mail.ru

Поступила 27.06.2017

## REFERENCES

1. Aseev V.V., Tetenov A.V., Kravchenko A.S. On self-similar Jordan curves on the plane. *Sib. Math. J.*, 2003, vol. 44, no. 3, pp. 379–386. doi: 10.1023/A:1023848327898.
2. Bandt C., Stahnke J. *Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals*. Preprint, Greifswald, 1990.
3. Bandt C., Keller K. Self-similar sets 2. A simple approach to the topological structure of fractals. *Math. Nachrichten*, 1991, vol. 154, pp. 27–39. doi: 10.1002/mana.19911540104.
4. Barnsley M.F. *Fractals Everywhere* Academic Press, 1988, 396 p. ISBN: 0-12-079062-9.
5. Charatonik J., Charatonik W. Dendrites. *Aportaciones Mat. Comun.*, 1998, vol. 22, pp. 227–253.
6. Croydon D. *Random fractal dendrites*. Ph.D. Thesis, St. Cross College, University of Oxford, Trinity, 2006. 161 p.
7. Hata M. On the structure of self-similar sets. *Japan. J. Appl. Math.*, 1985, vol. 3, pp. 381–414. doi: 10.1007/BF03167083.
8. Kigami J. Harmonic calculus on limits of networks and its application to dendrites. *J. Funct. Anal.*, 1995, vol. 128, no. 1, pp. 48–86. doi: 10.1006/jfan.1995.1023.
9. Kigami J. *Analysis on fractals*. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2001, Ser. Cambridge Tracts in Math., vol. 143, 226 p. ISBN: 0-521-79321-1.
10. Strichartz R.S. Isoperimetric estimates on Sierpinski gasket type fractals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1999, vol. 351, no. 5, pp. 1705–1752. doi: 10.1090/S0002-9947-99-01999-6.
11. Tetenov A. V. Self-similar Jordan arcs and the graph directed systems of similarities. *Siberian Math. J.*, 2006, vol. 47, no. 5, pp. 940–949. doi: 10.1007/s11202-006-0105-7.
12. Tetenov A. V. Structural theorems in the theory of self-similar fractals : Habilitation Thesis. Gorno-Altai state university, Gorno-Altai, 2011. 216 p.
13. Zeller. R. *Branching dynamical systems and slices through fractals*, Ph.D. Thesis, University of Greifswald, 2015.

The paper was received by the Editorial Office on June 27, 2017.

*Andrei Viktorovich Tetenov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, 649000 Russia, e-mail: atet@mail.ru.

*Mary Samuel*, Department of Mathematics, Bharata Mata College, Kochi, India, e-mail: marysamuel2000@gmail.com.

*Dmitrii Alekseevich Vaulin*, Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, 649000 Russia, e-mail: d\_warrant@mail.ru.

УДК 512.562, 515.124.4

**СОХРАНЕНИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ  
ПРИ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ  
ПАРЫ ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ****Т. Н. Фоменко**

В топологии известны результаты о сохранении в процессе гомотопии свойства отображения некоторых пространств в себя иметь неподвижную точку, если число Лefschetz исходного отображения отлично от нуля. Для класса сжимающих отображений метрических пространств и некоторых их обобщений известны результаты М. Фригон о сохранении при гомотопиях некоторого специального типа свойства сжимаемости отображения и, следовательно, свойства иметь неподвижную точку. В 1984 г. Дж. Волкер предложил дискретный аналог гомотопии отображений упорядоченного множества — порядковую изотонную гомотопию. Р. Стонг показал естественность такого понятия и связь его с обычной непрерывной гомотопией. Недавно автор и Д. А. Подоприхин обобщили понятие порядковой изотонной гомотопии Волкера и нашли достаточные условия для сохранения в процессе такой дискретной гомотопии (пары гомотопий) свойства отображения (пары отображений) упорядоченных множеств иметь неподвижную точку (точку совпадения). Данная статья содержит метрические аналоги этих результатов и некоторые их следствия. Используется метод упорядочения метрического пространства, предложенный в 1974 г. А. Брондстедом.

Ключевые слова: неподвижная точка, точка совпадения, порядок Брондстеда, порядковая гомотопия, дискретный аналог гомотопии.

**T. N. Fomenko. Preservation of the existence of coincidence points under some discrete transformations of a pair of mappings of metric spaces.**

In topology there are known results on the preservation under homotopy of the fixed point property of self-mappings in some spaces if the Lefschetz number of the initial mapping is nonzero. For the class of contracting mappings of metric spaces and for some of their generalizations, there are M. Frigon's known results on the preservation of the contraction property and hence of the fixed point property under homotopies of some special type. In 1984 J. W. Walker introduced a discrete counterpart of homotopy for mappings in an ordered set, which he called an order isotone homotopy. R. E. Stong showed the naturalness of this notion and its relation to the usual continuous homotopy. Recently, the author and D. A. Podoprikin have generalized Walker's notion of order isotone homotopy and suggested sufficient conditions for the preservation under such discrete homotopy (a pair of homotopies) of the property of a mapping (a pair of mappings) of ordered sets to have a fixed point (a coincidence point). This paper contains metric counterparts of the obtained results and some corollaries. The method of ordering a metric space proposed by A. Brøndsted in 1974 is used.

Keywords: fixed point, coincidence point, Brøndsted's order, order homotopy, discrete counterpart of homotopy.

MSC: 06A06, 54H25, 54E40

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-292-300

*Посвящается 70-летию юбилею  
выдающегося математика  
и замечательного человека  
академика РАН  
Сергея Владимировича Матвеева*

**Введение**

Для некоторых классов топологических пространств и их непрерывных отображений известны результаты о сохранении в процессе гомотопий свойства отображения иметь неподвижную точку. Например, известны результаты о сохранении таких свойств при любой гомотопии

отображения компактного полиэдра с ненулевым числом Лефшеца. Известны также результаты о сохранении при гомотопиях специального типа свойства сжимающих отображений и некоторых их обобщений иметь неподвижную точку (см., например, [1]).

В данной статье исследуется вопрос о возможности сохранения свойства пары отображений метрических пространств иметь точку совпадения при некоторых дискретных преобразованиях этой пары отображений. Более точно, пусть  $(X, d), (Y, \rho)$  — метрические пространства. В качестве дискретного аналога гомотопии между заданными отображениями  $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y$  рассматривается конечный упорядоченный набор  $h_i : X \rightarrow Y$  отображений  $\{h_i\}_{0 \leq i \leq n}$ ,  $h_0 = f, h_n = \tilde{f}$ , естественным образом связанных друг с другом и имеющих определенный набор свойств. Если заданы две пары  $(f, g)$  и  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  отображений и две таких дискретных гомотопии  $\{h_i\}, \{\tilde{h}_i\}$ , связывающих  $f$  с  $\tilde{f}$  и  $g$  с  $\tilde{g}$  соответственно, то возникает вопрос: как должны быть связаны между собой отображения  $h_i$  и  $\tilde{h}_i$ , чтобы из факта существования точки совпадения у исходной пары отображений  $(f, g)$  следовало существование точки совпадения у каждой из пар отображений  $(h_i, \tilde{h}_i), i = 1, \dots, n$ , и, в частности, у пары  $(\tilde{f}, \tilde{g})$ ? Основными результатами работы являются теоремы, в которых указаны достаточные условия, обеспечивающие наличие соответствующих точек совпадения. Предлагается два варианта таких достаточных условий. Отдельно рассматривается частный случай пары отображений  $f, Id : X \rightarrow X$  и вопрос о сохранении свойства отображения иметь неподвижную точку при описанном выше дискретном аналоге гомотопии отображения. Доказательства основаны на результатах, полученных недавно автором совместно с Д. А. Подоприхиным [2] для отображений упорядоченных множеств. Переход от метрических пространств к упорядоченным множествам осуществляется по методу А. Брондстеда, предложенному в работе [3].

### 1. Гомотопия в упорядоченном множестве

В [4] было введено следующее понятие гомотопии изотонных отображений между упорядоченными множествами. Напомним, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  упорядоченных множеств  $(X, \preceq_X), (Y, \preceq_Y)$  называется *изотонным*, если  $(x \preceq_X y) \implies (f(x) \preceq_Y f(y)), \forall x, y \in X$ .

**О п р е д е л е н и е 1** [4]. Пусть  $(X, \preceq_X)$  и  $(Y, \preceq_Y)$  — упорядоченные множества. Будем говорить, что задана *изотонная порядковая гомотопия* между изотонными отображениями  $f, g : X \rightarrow Y$ , если задан конечный набор изотонных отображений  $h_0, h_1, \dots, h_n : X \rightarrow Y$  таких, что  $f = h_0 \preceq h_1 \succeq h_2 \preceq \dots \succeq h_n = g$ , где  $h_i \preceq h_j \iff h_i(x) \preceq_Y h_j(x), \forall x \in X$ .

По поводу актуальности такого понятия можно сказать следующее.

В работе [5] показано, что упорядоченная изотонная гомотопия является частным случаем топологической непрерывной гомотопии для конечных упорядоченных множеств. В самом деле, пусть  $(X, \preceq_X), (Y, \preceq_Y)$  — упорядоченные множества. Для любого  $x \in X$  обозначим  $T_X(x) := \{y \in X \mid y \preceq_X x\}, T_X^*(x) := \{y \in X \mid y \succeq_X x\}$ . Аналогично определяются множества  $T_Y(z)$  и  $T_Y^*(z)$  для любого  $z \in Y$ . Зададим в  $X$  (аналогично в  $Y$ ) топологию, полагая открытыми множествами идеалы данного порядка (т. е. такие (непустые) подмножества  $I \subseteq X$ , что  $x \in I \implies T_X(x) \subseteq I$ ). Тогда все изотонные отображения становятся непрерывными. Если множество  $X$  конечно и отображения  $f, g : X \rightarrow Y$  изотонны, то  $f$  и  $g$  упорядоченно изотонно гомотопны в точности тогда, когда они топологически гомотопны.

### 2. Порядок Брондстеда и метрические аналоги теорем о совпадениях отображений упорядоченных множеств

**О п р е д е л е н и е 2.** *Порядком Брондстеда* [3] (см. также [6, гл. 18]) в метрическом пространстве  $(X, d)$  с заданным функционалом  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  назовем бинарное отношение  $\preceq_\varphi$ , определяемое правилом:  $\forall x, y \in X, (x \preceq_\varphi y) \iff (d(x, y) \leq \varphi(y) - \varphi(x))$ .

Легко видеть, что  $\preceq_\varphi$  есть частичный порядок. Отметим, что элементы  $x, y \in X$  *сравнимы* (не сравнимы) относительно порядка  $\preceq_\varphi$  тогда и только тогда, когда  $d(x, y) \leq |\varphi(y) - \varphi(x)|$  ( $d(x, y) > |\varphi(y) - \varphi(x)|$ ). Минимальность элемента  $a$  в подмножестве  $B \subseteq X$  относительно порядка  $\preceq_\varphi$  означает, что для любого элемента  $b \in B$  верно

$$\begin{cases} d(a, b) > \varphi(a) - \varphi(b), & \varphi(a) > \varphi(b); \\ d(a, b) \leq \varphi(b) - \varphi(a), & \varphi(a) \leq \varphi(b). \end{cases} \quad (1)$$

Максимальность элемента  $u$  в подмножестве  $B \subseteq X$  относительно порядка  $\preceq_\varphi$  означает, что для любого элемента  $b \in B$  верно

$$\begin{cases} d(u, b) \leq \varphi(u) - \varphi(b), & \varphi(u) > \varphi(b); \\ d(u, b) > \varphi(b) - \varphi(u), & \varphi(u) \leq \varphi(b). \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что минимальность элемента относительно порядка  $\preceq_\varphi$  означает его максимальность относительно двойственного порядка  $\preceq_\varphi^*$ , определяемого по правилу

$$(x \preceq_\varphi^* y) \iff (x \succeq_\varphi y) \iff (d(x, y) \leq \varphi(x) - \varphi(y)), \quad \forall x, y \in X.$$

Пусть  $(X, d), (Y, \rho)$  — метрические пространства и  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  — заданные функционалы. Введем частичные порядки Брондстеда  $\preceq_\varphi, \preceq_\psi$  в множествах  $X, Y$ , определяемые метриками  $d, \rho$  и функционалами  $\varphi, \psi$  соответственно.

**О п р е д е л е н и е 3.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  будем называть  $(\varphi, \psi)$ -*накрывающим отображением*  $g : X \rightarrow Y$  на множестве  $D \subseteq X$ , если для любого  $x \in D$  такого, что  $\rho(g(x), f(x)) \leq \psi(f(x)) - \psi(g(x))$ , найдется  $x' \in D, d(x, x') \leq \varphi(x) - \varphi(x')$ , для которого  $f(x') = g(x)$ . Если  $D = X$ , то выражение “на множестве  $D$ ” в этом определении будем опускать.

**О п р е д е л е н и е 4.** Отображение  $f : X \rightarrow Y$  будем называть  $(\varphi, \psi)$ -*изотонным*, если для любых  $x, x' \in X$ , для которых  $d(x, x') \leq \varphi(x) - \varphi(x')$ , верно, что  $\rho(f(x), f(x')) \leq \psi(f(x)) - \psi(f(x'))$ .

**О п р е д е л е н и е 5.** Множество  $Z$  в метрическом пространстве  $(X, d)$  с заданным функционалом  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  будем называть  $(\varphi, d)$ -*цепью*, если для любых  $x, y \in Z$  верно, что  $d(x, y) \leq |\varphi(x) - \varphi(y)|$ .

Если фиксирован элемент  $x_0 \in X$ , то будем обозначать

$$T_\varphi(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq \varphi(x_0) - \varphi(x)\}, \quad T_\varphi^*(x_0) := \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)\}.$$

**О п р е д е л е н и е 6.** Пусть, как выше,  $(X, d), (Y, \rho)$  — метрические пространства,  $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{R}$  — функционалы,  $f, g : X \rightarrow Y$  — отображения. Пусть  $Z$  — некоторая  $(\varphi, d)$ -цепь. Будем называть ее  $(f, g, \psi)$ -*специальной*, если для любого  $x \in Z$  выполнено неравенство  $\rho(f(x), g(x)) \leq \psi(f(x)) - \psi(g(x))$  и для любых  $x, x' \in Z$  верно следствие

$$(0 < d(x, x') \leq \varphi(x) - \varphi(x')) \implies (\rho(f(x'), g(x)) \leq \psi(g(x)) - \psi(f(x'))).$$

Обозначим множество всех  $(f, g, \psi)$ -специальных  $(\varphi, d)$ -цепей через  $\mathcal{S}(f, g, \varphi, \psi)$ . Если зафиксирован элемент  $x_0 \in X$ , то обозначим

$$\mathcal{S}(x_0, f, g, \varphi, \psi) := \{Z \in \mathcal{S}(f, g, \varphi, \psi) \mid Z \subseteq T_\varphi(x_0)\}.$$

Аналогично определим множество  $\mathcal{S}^*(f, g, \varphi, \psi)$  как множество таких  $(\varphi, d)$ -цепей  $Z \subseteq X$ , что для любого  $x \in Z$  выполнено неравенство  $\rho(f(x), g(x)) \leq \psi(g(x)) - \psi(f(x))$  и для любых  $x, x' \in Z$  верно следствие

$$(0 < d(x, x') \leq \varphi(x') - \varphi(x)) \implies (\rho(f(x'), g(x)) \leq \psi(f(x')) - \psi(g(x))).$$

Если зафиксирован элемент  $x_0 \in X$ , то обозначим  $\mathcal{S}^*(x_0, f, g, \varphi, \psi) := \{Z \in \mathcal{S}^*(f, g, \varphi, \psi) \mid Z \subseteq T_\varphi^*(x_0)\}$ .

Ниже нам понадобится следующее утверждение.

**Теорема 1.** Пусть заданы метрические пространства  $(X, d), (Y, \rho)$ , отображения  $f, g : X \rightarrow Y$  и функционалы  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ . Пусть выполнены следующие условия:

- 1) для некоторой точки  $x_0 \in X$  верно неравенство  $\rho(g(x_0), f(x_0)) \leq \psi(f(x_0)) - \psi(g(x_0))$ ;
- 2) отображение  $f$  является  $(\varphi, \psi)$ -накрывающим отображением  $g$  на множестве  $T_\varphi(x_0)$ ;
- 3) отображение  $g$  является  $(\varphi, \psi)$ -изотонным;
- 4) для любой цепи  $Z \in \mathcal{S}(x_0, f, g, \varphi, \psi)$  существует такой элемент  $w \in T_\varphi(x_0)$ , что  $\rho(g(w), f(w)) \leq \psi(f(w)) - \psi(g(w))$ , и для любого  $x \in Z$  верны неравенства:  $d(w, x) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$ ,  $\rho(f(w), f(x)) \leq \psi(f(x)) - \psi(f(w))$ ,  $\rho(g(w), g(x)) \leq \psi(g(x)) - \psi(g(w))$ .

Тогда множество  $T_\varphi(x_0) \cap \text{Coin}(f, g)$  непусто ( $\text{Coin}(f, g) := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ ), и в нем есть такой элемент  $a$ , что для  $a$  и любого  $x \in T_\varphi(x_0) \cap \text{Coin}(f, g)$  выполнено условие (1).

**Доказательство.** Если переформулировать эту теорему в терминах порядков Брондстеда  $\preceq_\varphi, \preceq_\psi$ , то получается следующее утверждение, которое является следствием [7, теоремы 3 и 4; 8, теоремы 3 и 4] при  $n = 2$  для двух однозначных отображений.

**Предложение 1.** Пусть заданы упорядоченные множества  $(X, \preceq_\varphi), (Y, \preceq_\psi)$ , отображения  $f, g : X \rightarrow Y$ , и выполнены следующие условия:

- 1) для некоторой точки  $x_0 \in X$   $g(x_0) \preceq_\psi f(x_0)$ ;
- 2) отображение  $f$  накрывает отображение  $g$  на множестве  $T_\varphi(x_0)$ , т. е. для любого  $x \in T_\varphi(x_0)$ , для которого  $g(x) \preceq_\psi f(x)$ , найдется такой  $x' \in T_\varphi(x_0), x' \preceq_\varphi x$ , что  $g(x) = f(x')$ ;
- 3) отображение  $g$  изотонно;
- 4) любая цепь  $Z \in \mathcal{S}(x_0, f, g, \varphi, \psi)$  имеет такую нижнюю границу  $w \in T_\varphi(x_0)$ , что  $g(w) \preceq_\psi f(w)$ , и значения  $f(w), g(w)$  есть нижние границы множеств  $f(Z), g(Z)$  соответственно. Тогда множество  $T_\varphi(x_0) \cap \text{Coin}(f, g)$  непусто, и в нем имеется минимальный элемент.

Справедливость этого утверждения завершает доказательство теоремы 1. □

В силу [7, замечание 1] (см. также [8]), предложение 1 является некоторым уточнением [9, теорема 1; 10, теорема 1]. Поясним это замечание более подробно. В самом деле, в отличие от условия 2) предложения 1, в теореме 1 из работы [9] (совпадающей с теоремой 1 из работы [10]) формулируется более сильное условие. А именно: отображение  $f$  упорядоченно накрывает множество  $g(T_X(x_0))$ . Согласно определению, данному в [9; 10], это означает, что для любого  $x \in X$  и любого  $y \preceq f(x), y \in g(T_X(x_0))$ , т. е.  $y = g(x_1)$  для некоторого  $x_1 \in X, x_1 \preceq x_0$ , существует такая точка  $x' \in T_X(x)$ , что  $y = g(x_1) = f(x')$ . Отметим, что здесь не требуется, чтобы  $x_1 = x$ , как в условии 2) предложения 1. В этом смысле предложение 1 является уточнением теоремы 1 из [9; 10].

Отметим также, что в случае, когда  $X = Y$  и отображение  $f$  тождественно, предложение 1 есть частный случай теоремы 2.3 из работы [11].

Следующие две теоремы представляют достаточные условия, при которых существование точки совпадения у исходной пары отображений метрических пространств обеспечивает существование точки совпадения у другой пары отображений, связанной с исходной определенными условиями.

**Теорема 2.** Пусть заданы метрические пространства  $(X, d), (Y, \rho)$ , отображения  $f, g : X \rightarrow Y$ , функционалы  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  и  $x_0 \in \text{Coin}(f, g)$ . Пусть также заданы отображения  $f_1, g_1 : X \rightarrow Y$ , причем  $f \preceq_\psi f_1, g_1 \preceq_\psi g$  на  $T_\varphi(x_0)$ , т. е. неравенства

$$\rho(f_1(x), f(x)) \leq \psi(f_1(x)) - \psi(f(x)), \quad \rho(g_1(x), g(x)) \leq \psi(g(x)) - \psi(g_1(x))$$

верны для любого  $x \in T_\varphi(x_0)$ . Предположим также, что отображение  $f_1$   $(\varphi, \psi)$ -накрывает отображение  $g_1$  на  $T_\varphi(x_0)$ , отображение  $g_1$  является  $(\varphi, \psi)$ -изотонным, для любой  $(\varphi, d)$ -цепи  $Z \in \mathcal{S}(x_0, f_1, g_1, \varphi, \psi)$  существует элемент  $w \in T_\varphi(x_0)$ , для которого  $\rho(g_1(w), f_1(w)) \leq \psi(f_1(w)) - \psi(g_1(w))$ , и для любого  $x \in Z$  выполнены неравенства  $d(w, x) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$ ,

$\rho(f_1(w), f_1(x)) \leq \psi(f_1(x)) - \psi(f_1(w))$ ,  $\rho(g_1(w), g_1(x)) \leq \psi(g_1(x)) - \psi(g_1(w))$ . Тогда множество  $T_\varphi(x_0) \cap \text{Coin}(f_1, g_1)$  непусто и в нем есть такой элемент  $a_1$ , что для  $a_1$  и любого  $x \in T_\varphi(x_0) \cap \text{Coin}(f_1, g_1)$  выполнены условия (1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из условия  $f(x_0) = g(x_0)$  и неравенств

$$\rho(f_1(x), f(x)) \leq \psi(f_1(x)) - \psi(f(x)), \quad \rho(g_1(x), g(x)) \leq \psi(g(x)) - \psi(g_1(x))$$

следует, что

$$\begin{aligned} \rho(f_1(x_0), g_1(x_0)) &\leq \rho(f_1(x_0), f(x_0)) + \rho(g_1(x_0), g(x_0)) \\ &\leq \psi(f_1(x_0)) - \psi(f(x_0)) + \psi(g(x_0)) - \psi(g_1(x_0)) = \psi(f_1(x_0)) - \psi(g_1(x_0)). \end{aligned}$$

Полученное неравенство в совокупности с остальными условиями теоремы 2 обеспечивает для отображений  $f_1, g_1$  выполнение всех условий теоремы 1, из которой следует доказываемое утверждение.  $\square$

**Теорема 3.** Пусть заданы метрические пространства  $(X, d), (Y, \rho)$ , отображения  $f, g : X \rightarrow Y$  и функционалы  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ , и для некоторой точки  $x_0 \in X$  верно, что  $f(x_0) = g(x_0)$ . Пусть также заданы отображения  $f_2, g_2 : X \rightarrow Y$ , причем

$$\rho(f_2(x), f(x)) \leq \psi(f(x)) - \psi(f_2(x)), \quad \rho(g_2(x), g(x)) \leq \psi(g_2(x)) - \psi(g(x)) \quad \forall x \in T_\varphi(x_0).$$

Предположим также, что отображение  $g_2$   $(\varphi, \psi)$ -накрывает отображение  $f_2$  на  $T_\varphi(x_0)$ , отображение  $f_2$   $(\varphi, \psi)$ -изотонно и для любой  $(\varphi, d)$ -цепи  $Z \in \mathcal{S}(x_0, g_2, f_2, \varphi, \psi)$  существует такой элемент  $w \in T_\varphi(x_0)$ , что  $\rho(g_2(w), f_2(w)) \leq \psi(g_2(w)) - \psi(f_2(w))$ . Кроме того, пусть для любого  $x \in Z$  верно, что  $d(w, x) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$  и  $\rho(g_2(w), g_2(x)) \leq \psi(g_2(x)) - \psi(g_2(w))$ ,  $\rho(f_2(w), f_2(x)) \leq \psi(f_2(x)) - \psi(f_2(w))$ . Тогда множество  $T_\varphi(x_0) \cap \text{Coin}(f_2, g_2)$  непусто, и в нем имеется такой элемент  $a_2$ , что для  $a_2$  и любого  $x \in T_\varphi(x_0) \cap \text{Coin}(f_2, g_2)$  выполнены условия (1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится вполне аналогично доказательству теоремы 2.  $\square$

### 3. Дискретный аналог гомотопии отображений метрических пространств

Введем теперь следующее понятие дискретного аналога гомотопии между двумя отображениями метрических пространств.

**О п р е д е л е н и е 7.** Пусть, как и выше,  $(X, d), (Y, \rho)$  — метрические пространства,  $f, \tilde{f} : X \rightarrow Y, \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  — заданные отображения и функционалы. Будем говорить, что задана *дискретная  $\psi$ -гомотопия* (ниже —  *$\psi$ -гомотопия*) между отображениями  $f$  и  $\tilde{f}$ , если для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  задан набор  $H = \{h_j\}_{j=0,1,\dots,n}$  отображений  $h_j : X \rightarrow Y, j = 0, 1, \dots, n$ , для которого выполнены условия  $f = h_0 \preceq_\psi h_1 \succeq_\psi h_2 \preceq_\psi \dots \succeq_\psi h_n = \tilde{f}$ , где соотношение  $h_j \preceq_\psi h_{j+1}$  ( $h_j \succeq_\psi h_{j+1}$ ) означает, что

$$\rho(h_j(x), h_{j+1}(x)) \leq \psi(h_{j+1}(x)) - \psi(h_j(x)) \quad (\rho(h_j(x), h_{j+1}(x)) \leq \psi(h_j(x)) - \psi(h_{j+1}(x))) \quad \forall x \in X.$$

Отметим, что это определение представляет собой метрический аналог определения дискретной гомотопии отображений упорядоченных множеств, введенного недавно автором и Д. А. Подоприхиным [2] и обобщающего понятие изотонной гомотопии, предложенное в 1984 г. Уолкером [4].

Легко видеть, что введенное понятие  $\psi$ -гомотопии между отображениями метрических пространств является отношением эквивалентности.

Сформулируем теперь общее утверждение о сохранении свойства пары отображений метрических пространств иметь точку совпадения, основанное на теоремах 2 и 3.



**Теорема 4.** Пусть  $(X, d), (Y, \rho)$  — метрические пространства,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  — заданные функционалы. Пусть заданы отображения  $f, g, \tilde{f}, \tilde{g} : X \rightarrow Y$  и дискретные  $\psi$ -гомотопии  $H = \{h_j\}_{j=0,1,\dots,n}$  и  $Q = \{q_j\}_{j=0,1,\dots,n}$ , соединяющие отображение  $f$  с  $\tilde{f}$  и  $g$  с  $\tilde{g}$  соответственно. Более точно,  $f = h_0 \preceq_\psi h_1 \succeq_\psi h_2 \preceq_\psi \dots \succeq_\psi h_n = \tilde{f}$  и  $g = q_0 \succeq_\psi q_1 \preceq_\psi q_2 \succeq_\psi \dots \preceq_\psi q_n = \tilde{g}$ . Пусть также выполнены следующие условия:

1) существует  $x_0 \in \text{Coin}(f, g)$ ;

2) при нечетном  $j, 1 \leq j \leq n$ , отображение  $h_j$   $(\varphi, \psi)$ -накрывает отображение  $q_j$ , отображение  $q_j$  является  $(\varphi, \psi)$ -изотонным, и для любой  $(\varphi, d)$ -цепи  $Z \in \mathcal{S}(h_j, q_j, \varphi, \psi)$  существует такой элемент  $w \in X$ , что  $\rho(h_j(w), q_j(w)) \leq \psi(h_j(w)) - \psi(q_j(w))$  и для любого  $x \in Z$  верно, что  $d(w, x) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$  и  $\rho(h_j(w), h_j(x)) \leq \psi(h_j(x)) - \psi(h_j(w)), \rho(q_j(w), q_j(x)) \leq \psi(q_j(x)) - \psi(q_j(w))$ ;

3) при четном  $j, 1 \leq j \leq n$ , отображение  $q_j$   $(\varphi, \psi)$ -накрывает отображение  $h_j$ , отображение  $h_j$  является  $(\varphi, \psi)$ -изотонным, и для любой цепи  $Z \in \mathcal{S}(q_j, h_j, \varphi, \psi)$  существует такой элемент  $w \in X$ , что  $\rho(q_j(w), h_j(w)) \leq \psi(q_j(w)) - \psi(h_j(w))$  и для любого  $x \in Z$  верно, что  $d(w, x) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$  и  $\rho(q_j(w), q_j(x)) \leq \psi(q_j(x)) - \psi(q_j(w)), \rho(h_j(w), h_j(x)) \leq \psi(h_j(x)) - \psi(h_j(w))$ .

Тогда  $\text{Coin}(h_j, q_j) \neq \emptyset, 1 \leq j \leq n$ . Кроме того, существует  $(\varphi, d)$ -цепь  $x_n \preceq_\varphi x_{n-1} \preceq_\varphi \dots \preceq_\varphi x_1 \preceq_\varphi x_0$ , где  $x_j \in \text{Coin}(q_j, h_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$ , и для  $x_j$  и для любого элемента  $y \in \text{Coin}(q_j, h_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$  выполнены условия (1),  $1 \leq j \leq n$ .

**Доказательство.** Справедливость этого утверждения доказывается с помощью последовательного применения к парам отображений  $h_j, q_j$  и точкам  $x_{j-1} \in \text{Coin}(h_{j-1}, q_{j-1})$  теоремы 2 при нечетном  $j$  и теоремы 3 при четном  $j$  для всех  $j, 1 \leq j \leq n$ .  $\square$

Ниже (теорема 5) предлагается еще один вариант теоремы о сохранении свойства пары отображений иметь точку совпадения при дискретных  $\psi$ -гомотопиях. При этом одна из гомотопий будет  $(\varphi, \psi)$ -изотонной. Отметим, что это утверждение является метрическим аналогом соответствующей теоремы автора и Д. А. Подоприхина [2] для отображений упорядоченных множеств.

Нам понадобится следующее понятие.

**Определение 8.** Будем говорить, что отображение  $f : X \rightarrow Y$   $(\varphi, \psi)$ -накрывает сверху отображение  $g : X \rightarrow Y$  на множестве  $D \subseteq X$ , если для любого  $x \in D$  такого, что  $\rho(g(x), f(x)) \leq \psi(g(x)) - \psi(f(x))$ , найдется такой элемент  $x' \in D$ , что  $d(x, x') \leq \varphi(x') - \varphi(x)$  и  $f(x') = g(x)$ . Если  $D = X$ , то будем называть отображение  $f$   $(\varphi, \psi)$ -накрывающим сверху отображение  $g$ .

**Теорема 5.** Пусть  $(X, d), (Y, \rho)$  — метрические пространства,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}, \psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$  — заданные функционалы. Пусть  $(f, g)$  и  $(\tilde{f}, \tilde{g})$  — две пары отображений из  $X$  в  $Y$  и заданы дискретные  $\psi$ -гомотопии  $H = \{h_j\}_{j=0,1,\dots,n}$  и  $Q = \{q_j\}_{j=0,1,\dots,n}$ , соединяющие отображение  $f$  с  $\tilde{f}$  и  $g$  с  $\tilde{g}$  соответственно. Более точно,  $f = h_0 \preceq_\psi h_1 \succeq_\psi h_2 \preceq_\psi \dots \succeq_\psi h_n = \tilde{f}$ ,  $g = q_0 \succeq_\psi q_1 \preceq_\psi q_2 \succeq_\psi \dots \preceq_\psi q_n = \tilde{g}$ . Пусть гомотопия  $H$  является  $(\varphi, \psi)$ -изотонной, т. е. отображения  $h_j$  являются  $(\varphi, \psi)$ -изотонными для всех  $j, 1 \leq j \leq n$ , существует  $x_0 \in \text{Coin}(f, g)$ , и выполнены следующие условия на гомотопию  $Q$ :

1) для любого нечетного  $j, 1 \leq j \leq n$ , отображение  $q_j$  является  $(\varphi, \psi)$ -накрывающим сверху отображение  $h_j$ , и для любой  $(\varphi, d)$ -цепи  $Z \in \mathcal{S}^*(q_j, h_j, \varphi, \psi)$  существует элемент  $\xi \in X$  такой, что  $\rho(h_j(\xi), q_j(\xi)) \leq \psi(h_j(\xi)) - \psi(q_j(\xi))$ , и для любого  $x \in Z$  верно, что  $d(\xi, x) \leq \varphi(x) - \varphi(\xi)$  и  $\rho(q_j(x), q_j(\xi)) \leq \psi(q_j(x)) - \psi(q_j(\xi)), \rho(h_j(x), h_j(\xi)) \leq \psi(h_j(x)) - \psi(h_j(\xi))$ ;

2) для любого четного  $j, 1 \leq j \leq n$ , отображение  $q_j$  является  $(\varphi, \psi)$ -накрывающим отображение  $h_j$ , и для каждой цепи  $Z \in \mathcal{S}(q_j, h_j, \varphi, \psi)$  найдется элемент  $\xi \in X$  такой, что  $\rho(h_j(\xi), q_j(\xi)) \leq \psi(q_j(\xi)) - \psi(h_j(\xi))$ , и для любого  $x \in Z$  верно, что  $d(\xi, x) \leq \varphi(x) - \varphi(\xi)$  и  $\rho(q_j(x), q_j(\xi)) \leq \psi(q_j(x)) - \psi(q_j(\xi)), \rho(h_j(x), h_j(\xi)) \leq \psi(h_j(x)) - \psi(h_j(\xi))$ .

Тогда существует последовательность  $\{x_j\}_{0 \leq j \leq n} \subseteq X$ , где  $x_0 \preceq_\varphi x_1 \succeq_\varphi x_2 \preceq_\varphi \dots \preceq_\varphi x_{n-1} \succeq_\varphi x_n$ , и  $x_j \in \text{Coin}(h_j, q_j)$ . Более точно, если  $j$  нечетно, то  $x_j \in \text{Coin}(h_j, q_j) \cap T_\varphi^*(x_{j-1})$  и

для  $x_j$  и любого элемента  $x \in \text{Coin}(h_j, q_j) \cap T_\varphi^*(x_{j-1})$  выполнено условие (2), а если  $j$  четно, то  $x_j \in \text{Coin}(h_j, q_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$  и для  $x_j$  и любого элемента  $x \in \text{Coin}(h_j, q_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$  выполнено условие (1).

**Доказательство** теоремы 5 вполне аналогично доказательству теоремы 4. Отличие состоит в том, что при нечетных значениях  $j$  для пары отображений  $(h_j, q_j)$  выполняются условия теоремы 1 относительно двойственных порядков Брондстеда  $\preceq_\varphi^*$ ,  $\preceq_\psi^*$  на  $X$  и  $Y$  соответственно.  $\square$

#### 4. Некоторые следствия

Естественно рассмотреть частный случай пары отображений метрического пространства в себя, когда одно из отображений тождественно, и применить к нему полученные выше результаты. Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  — заданный функционал.

Заметим, что для любого отображения  $f : X \rightarrow X$  тождественное отображение  $Id_X : X \rightarrow X$  является как  $(\varphi, \varphi)$ -накрывающим (ниже:  $\varphi$ -накрывающим), так и  $(\varphi, \varphi)$ -накрывающим сверху (ниже:  $\varphi$ -накрывающим сверху) отображение  $f$ . Кроме того, тождественное отображение, очевидно, является и  $(\varphi, \varphi)$ -изотонным (ниже:  $\varphi$ -изотонным).

Поэтому, применяя к описанной ситуации теорему 4, получим следующее утверждение.

**Следствие 1.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  — заданный функционал. Пусть заданы отображения  $f, \tilde{f} : X \rightarrow X$  и дискретная  $\varphi$ -гомотопия  $F = \{f_j\}_{1 \leq j \leq n}$  между ними. Более точно,  $f = f_0 \preceq_\varphi f_1 \succeq_\varphi f_2 \preceq_\varphi \dots \succeq_\varphi f_n = \tilde{f}$ . Пусть выполнены следующие условия:

- 1) существует  $x_0 \in \text{Fix}(f) := \{x \in X | x = f(x)\}$ ;
- 2) при нечетном  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , отображение  $f_j$  является  $\varphi$ -накрывающим тождественное отображение  $Id$ , т. е. для любого  $x \in X$ , где  $d(x, f(x)) \leq \varphi(f(x)) - \varphi(x)$ , существует  $x' \in T_\varphi(x)$  такой, что  $f(x') = x$ . Кроме того, для любой  $(\varphi, d)$ -цепи  $Z \in \mathcal{S}(f_j, Id, \varphi, \varphi)$  существует такой элемент  $w \in X$ , что  $d(f_j(w), w) \leq \varphi(f_j(w)) - \varphi(w)$ , и для любого  $x \in Z$  верно, что  $d(w, x) \leq \varphi(x) - \varphi(w)$  и  $d(f_j(w), f_j(x)) \leq \varphi(f_j(x)) - \varphi(f_j(w))$ ;
- 3) при четном  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , отображение  $f_j$  является  $\varphi$ -изотонным, и для любой цепи  $Z \in \mathcal{S}(Id, f_j, \varphi, \varphi)$  существует такой элемент  $w \in X$ , что  $\rho(w, f_j(w)) \leq \varphi(w) - \varphi(f_j(w))$ , и для любого  $x \in Z$  верно неравенство  $d(w, f_j(x)) \leq \varphi(f_j(x)) - \varphi(w)$ .

Тогда  $\text{Fix}(f_j) \neq \emptyset$ ,  $1 \leq j \leq n$ . Кроме того, существует  $(\varphi, d)$ -цепь  $x_n \preceq_\varphi x_{n-1} \preceq_\varphi \dots \preceq_\varphi x_1 \preceq_\varphi x_0$ , где  $x_j \in \text{Fix}(f_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$ , и для  $x_j$  и для любого элемента  $y \in \text{Fix}(f_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$  выполнены условия (1),  $1 \leq j \leq n$ .

Аналогично, применяя теорему 5 к описанной ситуации, получаем следующее утверждение, которое представляет собой метрический аналог результата Д. А. Подоприхина [12] о сохранении при порядковой гомотопии свойства отображения упорядоченного множества в себя иметь неподвижную точку.

**Следствие 2.** Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство,  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  — заданный функционал. Пусть  $f, \tilde{f} : X \rightarrow X$  — два отображения, и задана дискретная  $\varphi$ -гомотопия  $F = \{f_j\}_{j=0,1,\dots,n}$ , соединяющая отображения  $f$  с  $\tilde{f}$ . Более точно,  $f = f_0 \preceq_\varphi f_1 \succeq_\varphi f_2 \preceq_\varphi \dots \succeq_\varphi f_n = \tilde{f}$ . Пусть отображения  $f_j$  являются  $\varphi$ -изотонными для всех  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , существует  $x_0 \in \text{Fix}(f)$  и выполнены следующие условия:

- 1) для любого нечетного  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , и для любой  $(\varphi, d)$ -цепи  $Z \in \mathcal{S}^*(Id, f_j, \varphi, \varphi)$  существует элемент  $\xi \in X$  такой, что  $d(f_j(\xi), \xi) \leq \varphi(f_j(\xi)) - \varphi(\xi)$ , и для любого  $x \in Z$  верно неравенство  $d(f_j(x), \xi) \leq \varphi(\xi) - \varphi(f_j(x))$ ;
- 2) для любого четного  $j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , и для каждой цепи  $Z \in \mathcal{S}(Id, f_j, \varphi, \varphi)$  найдется элемент  $\xi \in X$  такой, что  $d(f_j(\xi), \xi) \leq \varphi(\xi) - \varphi(f_j(\xi))$ , и для любого  $x \in Z$  верно неравенство  $d(f_j(x), \xi) \leq \varphi(f_j(x)) - \varphi(\xi)$ .

Тогда существует последовательность  $\{x_j\}_{0 \leq j \leq n} \subseteq X$ , где  $x_0 \preceq_\varphi x_1 \succeq_\varphi x_2 \preceq_\varphi \dots \preceq_\varphi x_{n-1} \succeq_\varphi x_n$ ,  $x_j \in \text{Fix}(f_j)$ . Более точно, если  $j$  нечетно, то  $x_j \in \text{Fix}(f_j) \cap T_\varphi^*(x_{j-1})$  и для  $x_j$  и любого  $x \in \text{Fix}(f_j) \cap T_\varphi^*(x_{j-1})$  выполнено условие (2), а если  $j$  четно, то  $x_j \in \text{Fix}(f_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$  и для  $x_j$  и любого  $x \in \text{Fix}(f_j) \cap T_\varphi(x_{j-1})$  выполнено условие (1).

Приведенные результаты открывают новые возможности для решения вопроса о сохранении существования неподвижных точек (точек совпадения) отображений метрических пространств при некоторых их дискретных изменениях. Кроме того, с помощью неравенств устанавливаются связи между неподвижными точками (точками совпадения) промежуточных отображений (пар отображений). Представляет интерес разработка методов отыскания для конкретных метрических пространств наиболее эффективных функционалов, связанных с заданным отображением (парой отображений) и обеспечивающих выполнение условий приведенных теорем.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frigon M. On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings // *Recent Advances on Metric Fixed Point Theory*. Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996. P. 19–29.
2. Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н. Сохранение свойства неподвижной точки и свойства совпадения при гомотопии отображений упорядоченных множеств // Докл. АН. 2017. Т. 477, № 4. С. 402–405. doi: 10.7868/S0869565217340035.
3. Brøndsted A. On a lemma of Bishop and Phelps // *Pacific J. Math.* 1974. vol. 55, no. 2. P. 335–341.
4. Walker J.W. Isotone relations and the fixed point property for posets // *Discr. Math.* 1984. Vol. 48, no. 2–3. P. 275–288. doi: 10.1016/0012-365X(84)90188-2.
5. Stong R.E. Finite topological spaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966. Vol. 123, no. 2. P. 325–340.
6. Handbook of metric fixed point theory / eds. W.A. Kirk, B. Sims. NY: Springer Science & Business Media, 2001. 704 p. doi: 10.1007/978-94-017-1748-9.
7. Подоприхин Д.А., Фоменко Т.Н. О совпадениях семейств отображений упорядоченных множеств // Докл. РАН. Математика. 2016. Т. 471, №1. С. 16–18. doi: 10.7868/S0869565216310054.
8. Fomenko T.N., Podoprikin D. Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered set // *Topology Appl.* 2017. Vol. 221. P. 275–285. doi: 10.1016/j.topol.2016.07.024.
9. Арутюнов А.В., Жуковский Е.С., Жуковский С.Е. О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах // Докл. РАН. 2013. Т. 88, № 3. С. 710–713.
10. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., and Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces // *Topology Appl.* 2015. Vol. 179. P. 13–33.
11. Fomenko T.N., Podoprikin D.A. Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets // *J. Fixed Point Theory Appl.* 2016. Vol. 18, no. 4. P. 823–842. doi: 10.1007/s11784-016-0327-7.
12. Podoprikin D.A. Fixed points of mappings on ordered sets // *Lobachevskii J. Math.* 2017. Vol. 38, no. 6. P. 1069–1074.

Фоменко Татьяна Николаевна

д-р физ.-мат. наук, профессор

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

г. Москва

e-mail: tn-fomenko@yandex.ru

Поступила 15.06.2017

### REFERENCES

1. Frigon M. On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings. *Recent Advances on Metric Fixed Point Theory*, Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996, pp. 19–29.
2. Podoprikin D.A., Fomenko T.N. Preservation of the existence of fixed and coincidence points under homotopy of mappings of ordered sets. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 96, no. 3, p. 1–3. doi: 10.1134/S1064562417060199.
3. Brøndsted A. On a lemma of Bishop and Phelps. *Pacific J. Math.*, 1974, vol. 55, no. 2, pp. 335–341.

4. Walker J.W. Isotone relations and the fixed point property for posets. *Discr. Math.*, 1984, vol. 48, no. 2–3, pp. 275–288. doi: 10.1016/0012-365X(84)90188-2.
5. Stong R.E. Finite topological spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1966, vol. 123, no. 2, pp. 325–340. doi: 10.1090/S0002-9947-1966-0195042-2.
6. Kirk W.A., Sims B. (eds.) *Handbook of metric fixed point theory*. NY: Springer Science & Business Media, 2001. 704 p. doi: 10.1007/978-94-017-1748-9.
7. Podoprikin D.A., Fomenko T.N. On coincidences of families of mappings on ordered sets. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 3, pp. 620–622. doi: 10.1134/S106456241606003X.
8. Fomenko T.N., Podoprikin D. Common fixed points and coincidences of mapping families on partially ordered set. *Topology Appl.*, 2017, vol. 221, pp. 275–285. doi: 10.1016/j.topol.2016.07.024.
9. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. On coincidence points of mappings in partially ordered spaces. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 710–713. doi: 10.1134/S1064562413060239.
10. Arutyunov A.V., Zhukovskiy E.S., Zhukovskiy S.E. Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces. *Topology Appl.*, 2015, vol. 179, pp. 13–33. doi: 10.1016/j.topol.2014.08.013.
11. Fomenko T.N., Podoprikin D.A. Fixed points and coincidences of mappings of partially ordered sets. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 823–842. doi: 10.1007/s11784-016-0327-7.
12. Podoprikin D.A. Fixed points of mappings on ordered sets. *Lobachevskii J. Math.*, 2017, vol. 38, no. 6, pp. 1069–1074.

The paper was received by the Editorial Office on June 15, 2017.

*Tatiana Nikolaevna Fomenko*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: tn-fomenko@yandex.ru.

УДК 519.16 + 519.85

**НЕУЛУЧШАЕМАЯ ГАРАНТИРОВАННАЯ ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ  
ДЛЯ ЗАДАЧИ О  $k$  МЕДИАНАХ НА ОТРЕЗКЕ  $[0,1]$ <sup>1</sup>****М. Ю. Хачай, Д. М. Хачай, В. С. Панкратов**

Одномерная задача кластеризации  $k$ -medians рассматривается в контексте игры двух лиц с нулевой суммой. Множество стратегий первого игрока совпадает с совокупностью выборок фиксированной длины из отрезка  $[0, 1]$ . Стратегиями второго игрока являются всевозможные разбиения произвольной выборки данной длины на заданное число кластеров. В качестве платежной выступает функция, оценивающая качество кластеризации, значение которой численно совпадает с суммой отклонений элементов выборки от центров ближайших к ним кластеров. Как нетрудно убедиться, за исключением редких случаев данная игра не имеет цены. Для произвольных натуральных  $n$  и  $k$  строится верхняя оценка  $0.5n/(2k - 1)$  нижней цены игры. Обосновывается достижимость найденной оценки при  $k > 1$  и достаточно больших  $n = n(k)$ . Тем самым показывается, что для произвольной выборки длины  $n$  может быть построена кластеризация методом  $k$  медиан так, что значение платежной функции не превысит найденной оценки, причем данная оценка достижима при произвольном числе кластеров и выборок достаточно большой длины. Полученные результаты нашли применение в комбинаторной оптимизации при обосновании полиномиальной разрешимости подклассов труднорешаемых экстремальных задач

Ключевые слова: кластеризация, задача о  $k$  медианах, достижимая оценка точности.

**M. Yu. Khachai, D. M. Khachai, V. S. Pankratov. Attainable best guarantee for the accuracy of  $k$ -medians clustering in  $[0,1]$ .**

The scalar  $k$ -medians clustering problem is considered in the context of a two-player zero-sum game. The set of strategies of the first player coincides with a family of fixed-length samples from the interval  $[0, 1]$ . The strategies of the second player are all possible partitions of an arbitrary sample of a given length into a given number of clusters. The quality of the clustering is evaluated by the payoff function equal to the sum of deviations of the elements from the centers of clusters nearest to them. It is easy to see that the game has no value except for rare cases. For arbitrary positive integers  $n$  and  $k$ , we establish an upper bound  $0.5n/(2k - 1)$  for the lower value of the game and prove its attainability for  $k > 1$  and sufficiently large  $n = n(k)$ . Thus, we show that a clustering of an arbitrary sample of length  $n$  can be constructed by the  $k$  medians method so that the payoff does not exceed the obtained bound, and the bound is attainable for an arbitrary number of clusters and for sufficiently long samples. These results are applicable in combinatorial optimization in the proof of polynomial solvability of subclasses of intractable extremal problems.

Keywords: clustering,  $k$ -medians problem, attainable accuracy guarantee.

**MSC:** 90C27, 90C05, 62H30

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-4-301-310

**Введение**

Кластеризация, один из известных подходов к анализу данных, состоит в поиске разбиения исходного набора данных на заданное число непересекающихся подмножеств (*кластеров*), минимизирующем ту или иную функцию потерь (см., например, [1;3]). В большинстве известных постановок задачи кластеризации критерий оптимизации задается в виде функции отклонений элементов выборки от ближайших к ним центров кластеров.

Условие задачи о  $k$  медианах ( $k$ -medians) может быть задано следующим образом. Фиксируются натуральное число  $k > 1$  и метрическое пространство  $(X, \rho)$ . Для заданной конечной выборки  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in X$ , требуется найти разбиение множества  $\mathbb{N}_n = \{1, \dots, n\}$  на

<sup>1</sup>Исследования поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 16-07-00266 и 17-08-01385.

$k$  непустых подмножеств — кластеров  $C_1, \dots, C_k$  и для каждого  $j$ -го кластера указать точку  $c_j \in X$ , именуемую его *центром*, так что

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i \in C_j} \rho(x_i, c_j) = \sum_{i=1}^n \min\{\rho(x_i, c_1), \dots, \rho(x_i, c_k)\} \rightarrow \min. \quad (1)$$

Как следует из (1), для произвольной выборки и всякого  $j$  центр  $c_j$  удовлетворяет соотношению

$$c_j \in \arg \min \left\{ \sum_{i \in C_j} \rho(x_i, c) : c \in X \right\},$$

т. е. является *медианой* подвыборки  $\xi_j = (x_i : i \in C_j)$ .

Известно, что задача  $k$ -medians  $NP$ -трудна (при условии, что параметр  $k$  является частью ее условия) [5] даже для евклидовой метрики и не имеет PTAS при условии  $P \neq NP$ . Тем не менее в конечномерных евклидовых пространствах задача эффективно аппроксимируема. Так, в работе [9] для произвольных фиксированных числа кластеров  $k$  и размерности пространства  $d$  построена рандомизированная линейная приближенная схема с трудоемкостью  $O(2^{(k/\varepsilon)^{O(1)}} dn)$ . В статье [6] обосновывается рандомизированная приближенная схема, трудоемкость которой  $O(n + g(\varepsilon, d) \cdot (k \log n)^{O(1)})$ , где  $g(\varepsilon, d) = \exp(O((1 - \log \varepsilon)/\varepsilon)^{d-1})$ , полиномиально зависит от числа кластеров. Более того, известно что задача  $k$ -medians полиномиально разрешима на вещественной прямой. По-видимому, наиболее эффективный точный алгоритм для этой постановки задачи предложен в работе [4] и обладает трудоемкостью  $O(n \log n + kn)$ .

Наряду с алгоритмическими вопросами, связанными с разработкой методов кластеризации, позволяющих для каждой отдельно взятой выборки эффективно строить разбиение ее на кластеры, не менее важными с точки зрения приложений в анализе данных и вычислительной геометрии [2; 7] представляются вопросы обоснования универсальных оценок качества кластеризации, гарантированных для целого семейства постановок задачи  $k$ -medians. В данной статье находится такая оценка для задачи  $k$ -medians на вещественной прямой.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим антагонистическую игру двух лиц с нулевой суммой, порожденную задачей о  $k$  медианах. Зададимся натуральными числами  $n$  и  $k$ , большими единицы. Допустимыми стратегиями первого игрока являются выборки  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in [0, 1]$ . Стратегии второго игрока — конечные последовательности  $\sigma = (c_1, \dots, c_k)$ ,  $c_i \in [0, 1]$ . Платежная функция  $F(\xi, \sigma)$  задается соотношением  $F(\xi, \sigma) = \sum_{i=1}^n \min\{|x_i - c_1|, \dots, |x_i - c_k|\}$ . Пользуясь обычными обозначениями  $\Phi(\xi) = \inf_{\sigma \in [0, 1]^k} F(\xi, \sigma)$  и  $\Psi(\sigma) = \sup_{\xi \in [0, 1]^n} F(\xi, \sigma)$ , полагаем, что цели первого и второго игроков определяются с точки зрения принципа гарантированного результата и состоят в поиске нижней  $v_*(n, k) = \sup_{\xi \in [0, 1]^n} \Phi(\xi)$  и верхней  $v^*(n, k) = \inf_{\sigma \in [0, 1]^k} \Psi(\sigma)$  цены игры соответственно.

Нетрудно убедиться в том, что для любых  $k > 1$  и  $n > 0$  игра не имеет цены, т. е.  $v_*(n, k) < v^*(n, k)$ . По многим причинам, восходящим к приложениям в анализе данных, комбинаторной оптимизации и вычислительной геометрии, представляется важным построение верхних оценок для  $v_*(n, k)$ , позволяющих охарактеризовать гарантированную точность решения задачи  $k$ -medians для произвольной выборки длины  $n$ . Конечно в качестве такой оценки всегда может быть выбрана верхняя цена игры  $v^*(n, k)$ , однако при больших значениях  $n$  эта оценка становится слишком неточной.

В статье строится более точная верхняя оценка  $B(n, k) = 0.5n/(2k - 1)$  и обосновывается ее достижимость при произвольном  $k > 1$  и достаточно больших значениях  $n$ . Фактически нами

показывается, что произвольной выборке  $\xi \in [0, 1]^n$  может быть сопоставлена подходящая конечная последовательность  $\sigma_\xi = (c_1, \dots, c_k)$  центров кластеров так, что

$$\Phi(\xi) = \inf_{\sigma \in [0, 1]^k} F(\xi, \sigma) = F(\xi, \sigma_\xi) \leq B(n, k).$$

Более того, для произвольных числа кластеров  $k$  и достаточно большой длины выборки  $n = n(k)$  мы описываем метод построения выборок  $\xi^* = \xi^*(n, k)$  (являющихся оптимальными стратегиями первого игрока) таких, что  $F(\xi^*, \sigma_{\xi^*}) = B(n, k)$ .

## 2. Сведение к задаче линейного программирования

Для удобства изложения введем несколько предварительных допущений. Без ограничения общности всюду ниже будем полагать, что элементы произвольной выборки  $\xi = (x_1, \dots, x_n)$  упорядочены по возрастанию. Кроме того, будем полагать, что произвольный кластер  $C = \{i_1, \dots, i_m\} \subset \mathbb{N}_n$  наследует данное свойство, т. е.  $i_1 < \dots < i_m$  и  $x_{i_1} \leq \dots \leq x_{i_m}$ . Как следствие, сумма уклонений представителей кластера  $C$  от его медианы  $c$  может быть представлена в виде

$$W(C) = \sum_{l=1}^m |x_{i_l} - c| = \sum_{l=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} (c - x_{i_l}) + \sum_{l=\lfloor m/2 \rfloor + 1}^m (x_{i_l} - c) = - \sum_{l=1}^{\lfloor m/2 \rfloor} x_{i_l} + \sum_{l=\lfloor m/2 \rfloor + 1}^m x_{i_l}.$$

Подвыборки  $(x_{i_l} : 1 \leq l \leq \lfloor m/2 \rfloor)$  и  $(x_{i_l} : \lfloor m/2 \rfloor + 1 \leq l \leq m)$  договоримся называть *нижней* и *верхней* половинами кластера  $C$ .

Далее, для произвольного разбиения на кластеры  $C_1 \cup \dots \cup C_k = \mathbb{N}_n$  введем обозначение  $m_j = |C_j| > 0$  и договоримся для каждых  $j_1 < j_2$  и произвольных  $i_1 \in C_{j_1}$  и  $i_2 \in C_{j_2}$  полагать выполненным соотношение  $i_1 < i_2$  и, как следствие,  $x_{i_1} \leq x_{i_2}$ .

В наших предположениях значение  $\Phi(\xi)$  для произвольной выборки  $\xi$  может быть выражено исключительно в терминах разбиений  $C_1 \cup \dots \cup C_k = \mathbb{N}_n$  и задается соотношением

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = \min \left\{ \sum_{j=1}^k \sum_{i \in C_j} |x_i - c_j| : C_1 \cup \dots \cup C_k = \mathbb{N}_n \right\} = \min \left\{ \sum_{j=1}^k \left( - \sum_{i=1}^{\lfloor m_j/2 \rfloor} x_{i+m_1+\dots+m_{j-1}} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{i=\lfloor m_j/2 \rfloor + 1}^{m_j} x_{i+m_1+\dots+m_{j-1}} \right) : m_1, \dots, m_k > 0, m_1 + \dots + m_k = n \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомая нижняя цена игры  $v_*(n, k) = \sup_{\xi \in [0, 1]^n} \Phi(\xi)$  совпадает с оптимальным значением задачи линейного программирования (2)

$$v_*(n, k) = \max u :$$

$$\sum_{j=1}^k \left( - \sum_{i=1}^{\lfloor m_j/2 \rfloor} x_{i+m_1+\dots+m_{j-1}} + \sum_{i=\lfloor m_j/2 \rfloor + 1}^{m_j} x_{i+m_1+\dots+m_{j-1}} \right) \geq u \quad \left( \sum_{j=1}^k m_j = n \right), \quad (2)$$

$$0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1.$$

Задача (2) разрешима при произвольных рассматриваемых значениях параметров  $n$  и  $k$ . Ее система ограничений определена в пространстве  $n + 1$  переменных; число входящих в нее неравенств определяется количеством разбиений числа  $n$  на  $k$  (ненулевых) натуральных слагаемых, быстро растущим с ростом  $n$ . Опираясь на свойства симметрии и выпуклость множества оптимальных решений задачи ЛП, размерность задачи (2) удастся сократить, как, в частности показывается в следующей простой лемме.

**Лемма.** Для произвольных  $n, k > 1$  задача (2) обладает оптимальным решением, удовлетворяющим соотношению  $x_i + x_{n-i+1} = 1$ .

**Доказательство.** В самом деле, пусть  $[x', u']$ , где  $x' = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ , — произвольное оптимальное решение задачи (2). Очевидная симметрия влечет оптимальность решения  $[x'', u]$ , в котором  $x'' = [1 - x_n, 1 - x_{n-1}, \dots, 1 - x_1]$ . Следовательно, вектор  $[y, u]$ , где  $y = (x' + x'')/2$ , также является оптимальным решением в силу выпуклости оптимального множества задачи линейного программирования. Поскольку  $y$  удовлетворяет следующему простому соотношению  $y_{n-i+1} = (x_{n-i+1} + (1 - x_i))/2 = 1 - (x_i + (1 - x_{n-i+1}))/2 = 1 - y_i$ , решение  $[y, u]$  является искомым. Лемма доказана.

Данная лемма позволяет ограничиться рассмотрением только симметричных решений, удовлетворяющих соотношению  $x_i + x_{n-i+1} = 1$ , и, соответственно, сократить число переменных в задаче (2) вдвое. Опираясь на аналогичные соображения симметрии, без ограничения общности можно полагать выполненными соотношения  $m_i \leq m_{k-i+1}$  для произвольного  $i \leq k/2$ , что позволяет существенно сократить число ограничений задачи (2) и ускорить поиск точного значения нижней цены игры  $v_*(n, k)$ .

### 3. Верхняя оценка для $v_*(n, k)$

Для построения верхней оценки нижней цены игры  $v_*(n, k)$  мы воспользуемся соотношениями двойственности для задачи (2).

**Теорема 1.** Для произвольных  $k > 1, n > 1$  и выборки  $\xi = (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n$  существует конечная последовательность  $\sigma_\xi = (c_1, \dots, c_k) \in [0, 1]^k$ , для которой

$$F(\xi, \sigma_\xi) \leq \frac{n}{2(2k-1)}.$$

Частный случай теоремы 1 для  $k = 2$  опубликован ранее, например, в работе [8].

**Доказательство.** Рассуждения удобно проводить, рассматривая длину выборки  $n$  по модулю  $2k - 1$ . В самом деле, пусть  $n = (2k - 1)t + r$  для некоторого натурального  $t$  и остатка  $r \in [0, \dots, 2k - 2]$ . Покажем, что для произвольного значения  $r$  в системе ограничений задачи (2) удастся найти подходящие неравенства, неотрицательная линейная комбинация которых влечет соотношение  $u \leq B(n, k) = 0.5n/(2k - 1)$ . Мы остановимся на доказательстве для остатков  $r = 0$  и  $r = 1$ . Для других значений  $r$  доказательство может быть построено по аналогии.

**Случай  $r = 0$ .** Пусть  $n = (2k - 1)t$ . Полагая без ограничения общности  $t$  и  $k$  четными, рассмотрим неравенство

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{t/2} x_i + \sum_{i=t/2+1}^t x_i - \sum_{i=t+1}^{2t} x_i + \sum_{i=2t+1}^{3t} x_i - \dots - \sum_{i=(k-1)t+1}^{kt-t/2} x_i - \sum_{i=kt-t/2+1}^{kt} x_i \\ & + \sum_{i=kt+1}^{(k+1)t} x_i + \dots - \sum_{i=(2k-3)t+1}^{(2k-2)t} x_i + \sum_{i=(2k-2)t+1}^{(2k-1)t} x_i \geq u, \end{aligned} \quad (3)$$

соответствующее разбиению заданной выборки на кластеры мощности  $m_1 = t; m_2 = 2t; \dots; m_k = 2t$ . Пользуясь соотношением  $x_i + x_{n-i+1} = 1$ , преобразуем неравенство (3) к виду

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^{t/2} x_i + \sum_{i=t/2+1}^t x_i - \sum_{i=t+1}^{2t} x_i + \sum_{i=2t+1}^{3t} x_i - \dots - \sum_{i=(k-1)t+1}^{kt-t/2} x_i - \sum_{i=(k-1)t+1}^{kt-t/2} (1 - x_i) \\ & + \sum_{i=(k-2)t+1}^{(k-1)t} (1 - x_i) + \dots - \sum_{i=t+1}^{2t} (1 - x_i) + \sum_{i=1}^t (1 - x_i) \geq u. \end{aligned} \quad (4)$$



**Мощности кластеров, порождающих искомую подсистему**

$m_1$	$m_2$	$\dots$	$m_k$
$t+1$	$2t$	$\dots$	$2t$
$t$	$2t+1$	$\dots$	$2t$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$t$	$2t$	$\dots$	$2t+1$

После приведения подобных имеем

$$u + \sum_{i=1}^{t/2} x_i \leq t/2, \tag{5}$$

и, следовательно,

$$u \leq t/2 = \frac{n}{2(2k-1)} \tag{6}$$

ввиду неотрицательности переменных  $x_i$ .

С л у ч а й  $r = 1$ . Пусть  $n = (2k - 1)t + 1$ . Покажем, что для произвольных  $k > 1$  и  $t > 1$  подсистема из  $k$  неравенств, порождаемых кластеризациями, состоящих из кластеров, мощности которых приведены в таблице выше, влечет справедливость неравенства

$$u \leq \frac{(2k - 1)t + 1}{2(2k - 1)}. \tag{7}$$

Конкретнее, покажем, что неравенство (7) является следствием линейной комбинации неравенств данной подсистемы с коэффициентами  $1, 2, \dots, 2$  соответственно.

Доказательство проведем индукцией по  $k$ , как и ранее, без ограничения общности полагая  $t$  четным.

*База индукции.* При  $k = 2$  искомая подсистема состоит из неравенств

$$-\sum_{i=1}^{1/2} x_i + \sum_{i=t/2+2}^{t+1} x_i - \sum_{i=t+2}^{2t+1} x_i + \sum_{i=2t+2}^{3t+1} x_i \geq u, \tag{8}$$

$$-\sum_{i=1}^{1/2} x_i + \sum_{i=t/2+1}^t x_i - \sum_{i=t+1}^{2t} x_i + \sum_{i=2t+2}^{3t+1} x_i \geq u, \tag{9}$$

соответствующих кластеризациям  $m_1 = t + 1, m_2 = 2t$  и  $m_1 = t, m_2 = 2t + 1$  соответственно. Пользуясь соотношением  $x_i + x_{3t+1-i+1} = 1$  и проводя преобразования по аналогии с (3)–(6), приводим неравенства (8) и (9) к виду

$$u + 2 \sum_{i=1}^{1/2} x_i + x_{t/2+1} - 2x_{t+1} \leq t/2 - 1/2, \tag{10}$$

$$u + 2 \sum_{i=1}^{t/2} x_i + x_{t+1} \leq t/2 + 1/2. \tag{11}$$

Сворачивая подсистему (10), (11) с коэффициентами 1 и 2 соответственно, убеждаемся в том, что неравенство  $u \leq t/2 + 1/6 = (3t + 1)/6$  является ее следствием, чем завершаем обоснование базы индукции.

*Шаг индукции.* Допустим, для  $k$  предположение индукции верно. Докажем его истинность при  $k + 1$ . Проведенные ниже рассуждения предполагают четность  $k$  и легко могут быть адаптированы на случай нечетных значений параметра.

Рассмотрим подсистему, построенную на предыдущем шаге индукции. Через  $\mu$  обозначим номер кластера, содержащего центральный элемент  $kt - t/2 + 1$  множества индексов  $\{1, 2, \dots, (2k - 1)t + 1\}$  кластеризуемых точек. Нетрудно убедиться, что  $\mu = k/2 + 1$ . Зафиксируем произвольное неравенство рассматриваемой подсистемы, определяемое  $l$ -й строкой таблицы, приведенной выше, и порождаемой ей кластеризацией

$$|C_1| = t, \dots, |C_l| = 2t + 1, \dots, |C_k|. \quad (12)$$

Допустим  $l > \mu$  и, следовательно,  $|C_\mu| = 2t$ . Переходя к случаю  $k+1$ , представим произвольную выборку  $\xi$  длины  $(2k + 1)t + 1$  в виде

$$\xi = (x_1, \dots, x_{kt-t/2}, y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_t}, x_{kt-t/2+1}, y_{\alpha_{t+1}}, \dots, y_{\alpha_{2t}}, x_{kt-t/2+2}, \dots, x_{(2k-1)t+1}),$$

где  $\xi' = (x_1, \dots, x_{(2k-1)t+1})$  — порождающая ее выборка длины  $(2k-1)t+1$ . Кластеризации (12) выборки  $\xi'$  сопоставим кластеризацию выборки  $\xi$ , построенную по следующим правилам (см. рис. 1).

1. Кластеры  $C_1, \dots, C_{\mu-1}, C_{\mu+1}, \dots, C_k$  сохраняют прежние значения.
2. Кластер  $C_\mu$  замещается парой новых кластеров, назовем их  $C'_\mu$  и  $C''_\mu$ , где

$$C'_\mu = \{i \in C_\mu : (k-1)t + 1 \leq i \leq kt - t/2\} \cup \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\} \cup \{kt - t/2 + 1\} \cup \{\alpha_{t+1}, \dots, \alpha_{3t/2-1}\},$$

$$C''_\mu = \{\alpha_{3t/2}, \dots, \alpha_{2t}\} \cup \{i \in C_\mu : k - t/2 + 2 \leq i \leq (k+1)t\}.$$

По построению неравенство, соответствующее построенной кластеризации, обладает следующими свойствами:

- 1) коэффициенты при переменных  $x_1, \dots, x_{kt-t/2}, x_{kt-t/2+2}, \dots, x_{(2k-1)t+1}$  наследуются из исходного неравенства;
- 2) переменные  $y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_{2t}}$  симметричны относительно  $x_{kt-t/2+1}$  и, следовательно, удовлетворяют соотношению  $y_{\alpha_j} + y_{\alpha_{2t-j+1}} = 1$ ;
- 3) переменная  $x_{kt-t/2+1} = 1/2$  входит в верхнюю половину кластера  $C'_\mu$ , в то время как в исходной кластеризации она входила в нижнюю половину кластера  $C_\mu$ .

Опуская слагаемые, соответствующие переменным  $x_i$ , выпишем левую часть нового неравенства:

$$\begin{aligned} & \dots - \sum_{j=1}^{t/2} y_{\alpha_j} + \sum_{j=t/2+1}^t y_{\alpha_{j+1}} + \sum_{j=t+1}^{3t/2-1} y_{\alpha_j} - \sum_{j=3t/2}^{2t} y_{\alpha_j} + \dots \\ & = \dots - \sum_{j=1}^{t/2} y_{\alpha_j} + \sum_{j=t/2+1}^t y_{\alpha_j} + \sum_{j=t/2+2}^t (1 - y_{\alpha_j}) - \sum_{j=1}^{t/2+1} (1 - y_{\alpha_j}) + 1 \dots = \dots - 2y_{\alpha_{t/2+1}} \dots \end{aligned}$$

После приведения подобных имеем

$$u + \mathbf{lhs}(l) - 2y_{\alpha_{t/2+1}} \leq \mathbf{rhs}(l) - 1,$$

где  $u + \mathbf{lhs}(l)$  и  $\mathbf{rhs}(l)$  обозначают левую и правую части исходного  $l$ -го неравенства соответственно.

Проводя рассуждения по аналогии в случае  $l < \mu$ , получим неравенство

$$u + \mathbf{lhs}(l) + 2y_{\alpha_{t/2+1}} \leq \mathbf{rhs}(l) + 1.$$

Осталось рассмотреть случай  $l = \mu$ . Здесь  $|C_\mu| = 2t + 1$  и возможны два варианта: 1)  $|C'_\mu| = 2t$ ,  $|C''_\mu| = 2t + 1$  и 2)  $|C'_\mu| = 2t + 1$ ,  $|C''_\mu| = 2t$ .

Легко видеть, что вариант 1) аналогичен случаю  $l > \mu$ , и полученное неравенство после приведения подобных примет вид

$$u + \mathbf{lhs}(\mu) - 2y_{\alpha_{t/2+1}} \leq \mathbf{rhs}(\mu) - 1.$$

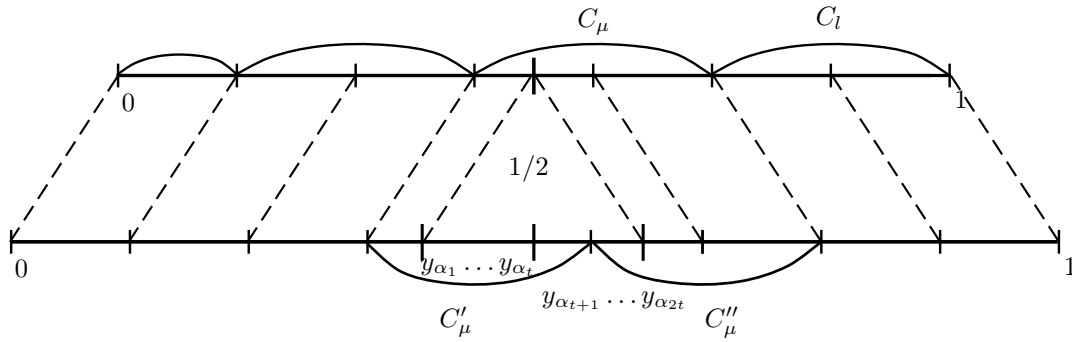


Рис. 1. Схема индуктивного перехода.

Вариант 2) заслуживает отдельного рассмотрения. Как показано выше, неравенство (3) соответствует разбиению выборки  $\xi' = (x_1, \dots, x_{(2k-1)t})$  на кластеры с мощностями  $m_1 = t, m_2 = \dots = m_k = 2t$ . Выборка  $\xi$  может быть получена из выборки  $\xi'$  путем пополнения ее  $2t + 1$  переменными

$$\xi = (x_1, \dots, x_{kt-t/2}, y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_t}, z = 1/2, y_{\alpha_{t+1}}, \dots, y_{\alpha_{2t}}, x_{kt-t/2+1}, \dots, x_{(2k-1)t}).$$

Учитывая эквивалентность неравенств (3) и (5) и проводя рассуждения по аналогии со случаем  $l > \mu$ , показываем, что рассматриваемому случаю соответствует неравенство

$$u + 2 \sum_{i=1}^{t/2} x_i + y_{\alpha_{t/2+1}} \leq t/2 + 1/2.$$

Таким образом, в системе ограничений задачи (2) для  $n = (2k+1)t + 1$  и  $k+1$  нами найдена подсистема из  $k+1$  неравенства

$$\begin{aligned} u + \mathbf{lhs}(l) + 2y_{\alpha_{t/2+1}} &\leq \mathbf{rhs}(l) + 1 & (1 \leq l \leq \mu - 1) \\ u + \mathbf{lhs}(\mu) - 2y_{\alpha_{t/2+1}} &\leq \mathbf{rhs}(\mu) - 1 \\ u + 2 \sum_{i=1}^{t/2} x_i + y_{\alpha_{t/2+1}} &\leq t/2 + 1/2 \\ u + \mathbf{lhs}(l) - 2y_{\alpha_{t/2+1}} &\leq \mathbf{rhs}(l) - 1 & (\mu + 1 \leq l \leq k). \end{aligned} \tag{13}$$

По предположению индукции линейная свертка подсистемы (13) с коэффициентами  $1, 2, \dots, 2$  примет вид

$$(2k+1)u + \sum_{i=1}^{kt-t/2} a_i x_i + b y_{\alpha_{t/2+1}} \leq t + (2k-1) \frac{(2k-1)t+1}{2(2k-1)} = ((2k+1)t+1)/2,$$

причем  $a_i \geq 0$ . Кроме того, нетрудно проверить, что  $b = 0$ . Тем самым

$$u \leq \frac{(2k+1)t+1}{2(2k+1)} = B((2k+1)t+1, k+1)$$

в силу неотрицательности переменных  $x_i$ , что завершает обоснование индукции и доказательство теоремы в целом.

#### 4. Достижимость

**Теорема 2.** Для произвольного  $k > 1$  и  $n \geq n_0(k)$  оценка  $B(n, k)$  достижима.

Доказательство проведем для простейшего нетривиального случая  $k = 3$ . При больших значениях  $k$  рассуждения могут быть проведены по аналогии. Для произвольного достаточно большого значения  $n$  мы укажем такую выборку  $\xi^*$  длины  $n$ , для которой справедливо соотношение  $F(\xi^*, \sigma_{\xi^*}) = B(n, 3)$ . Приведем возможные варианты построения искомого выборки, представляя их длину по модулю 6.

Случай  $n = 6q + 2s$  для  $0 \leq s \leq 2$ . Сконцентрируем элементы выборки  $\xi^*$  в позициях  $0, \frac{1}{5}, \dots, \frac{4}{5}, 1$  с кратностями  $q, q, q + s, q + s, q, q$  соответственно, как указано на рис. 2:

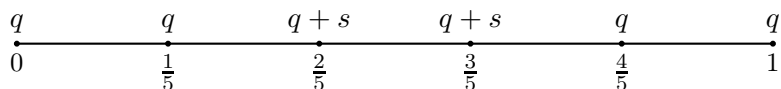


Рис. 2. Случай четных остатков.

К сожалению, для нечетных остатков общей схемы построения выборки найти не удастся. Рассмотрим каждый нечетный остаток в отдельности.

Случай  $n = 6q + 5$ . Как и для четных остатков разместим элементы выборки в фиксированном, независимом от  $q$ , множестве позиций (см. рис. 3):

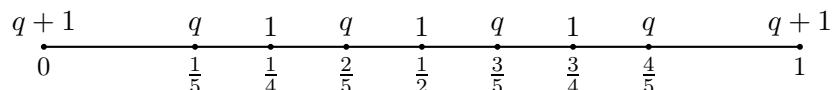


Рис. 3. Случай  $n = 6q + 5$ .

Случай  $n = 6q + 3$ . Как и в предыдущем случае, разместим элементы выборки, как указано на рис. 4:

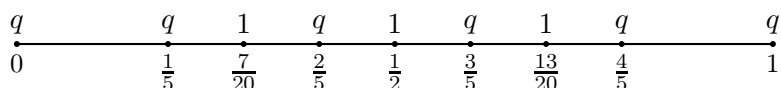


Рис. 4. Случай  $n = 6q + 3$ .

Случай  $n = 6q + 1$  удобно рассмотреть, разбив его на два подслучая, учитывающие четность  $q$ . При  $q = 2t$  разместим элементы выборки согласно рис. 5:

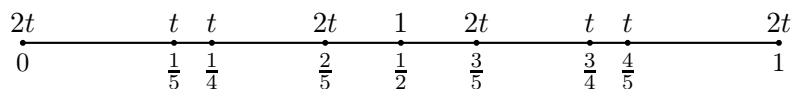


Рис. 5. Случай  $n = 6q + 1$  при четном  $q$ .

а при  $q = 2t + 1$  так, как указано на рис. 6:

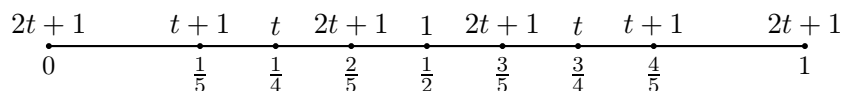


Рис. 6. Случай  $n = 6q + 1$  при нечетном  $q$ .

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что в каждом из рассмотренных случаев выполняется соотношение  $F(\xi, \sigma_{\xi}) = B(n, 3)$ , при произвольном  $n \geq 19$ . Более того,

можно показать, что число перебираемых вариантов определяется исключительно числом различных позиций и не изменяется с ростом  $n$ . А именно при обосновании того, что для произвольной кластеризации  $C_1, C_2, C_3$  с центрами  $\sigma = (c_1, c_2, c_3)$  выполняется соотношение  $F(\xi, \sigma) \geq B(n, 3)$ , достаточно ограничиться лишь теми вариантами, в которых каждая из указанных на рис. 2–6 точек входит (или не входит) в кластер в соответствии с ее кратностью.

В самом деле, пусть точка  $p$  имеет кратность  $q$  и входит в два граничащих друг с другом кластера, например,  $C_1$  и  $C_2$  с кратностями  $q_1$  и  $q_2$ , где  $q_1 + q_2 = q$ , соответственно. Обозначим через  $c_1$  и  $c_2$  медианы кластеров и предположим для определенности, что  $p - c_1 \geq c_2 - p$ . Перенеся точку  $p$  во второй кластер в размере ее кратности, имеем для полученных кластеров  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_2$

$$\begin{aligned} W(\tilde{C}_1) + W(\tilde{C}_2) &\leq \sum\{|x_i - c_1| : i \in C_1, x_i \neq p\} + \sum\{|x_i - c_2| : i \in C_2, x_i \neq p\} + q \cdot |c_2 - p| \\ &\leq \sum\{|x_i - c_1| : i \in C_1\} + \sum\{|x_i - c_2| : i \in C_2\} = W(C_1) + W(C_2). \end{aligned}$$

Следовательно, кластеризация  $C_1, C_2, C_3$  мажорирует кластеризацию  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, C_3$ .

Теорема доказана.

### Заключение

В статье для произвольных натуральных  $n$  и  $k$  построена верхняя оценка  $0.5n/(2k - 1)$  для нижней цены антагонистической игры двух лиц, порожденной задачей кластеризации методом  $k$  медиан, и обоснована ее достижимость при произвольном числе кластеров  $k > 1$  и достаточно большой длине выборки  $n = n(k)$ . Полученные результаты нашли приложение в задачах комбинаторной оптимизации, в частности при обосновании полиномиальной разрешимости одной геометрической постановки обобщенной задачи коммивояжера [7]. Открытым остается вопрос о распространении полученных результатов на случай пространств большей размерности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aggarwal C. C., Reddy C. K.** Data clustering: algorithms and applications. Bosa Roca: Taylor & Francis Inc., 2013. 652 p. (Chapman & Hall/CRC Data Mining and Knowledge Discovery Ser.) ISBN: 9781466558212.
2. **Ben-David S.** Computational feasibility of clustering under clusterability assumptions [e-resource]. CoRR abs/1501.00437, 2015. URL: <http://arxiv.org/abs/1501.00437>.
3. **Duda R. O., Hart P. E., Stork D. G.** Pattern classification. N. Y.: Wile, 2001. 680 p. ISBN: 978-0-471-05669-0.
4. Fast exact  $k$ -means,  $k$ -medians and bregman divergence clustering in 1d [e-resource] / A. Grönlund, K. G. Larsen, A. Mathiasen, J. S. Nielsen // CoRR abs/1701.07204, 2017. URL: <http://arxiv.org/abs/1701.07204>.
5. **Guruswami V., Indyk P.** Embeddings and non-approximability of geometric problems // Proc. of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '03). Philadelphia: Society for industrial and applied mathematics, 2003. P. 537–538. ISBN: 0-89871-538-5.
6. **Har-Peled S., Mazumdar S.** On coresets for  $k$ -means and  $k$ -median clustering // Proc. of the Thirty-Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '04). N. Y.: ACM, 2004. P. 291–300. doi: 10.1145/1007352.1007400.
7. **Khachay M., Neznakhina K.** Generalized pyramidal tours for the generalized traveling salesman problem // Lecture Notes in Computer Science. 2017. Vol. 10627. P. 265–277. doi: 10.1007/978-3-319-71150-8-23.
8. **Khachay M., Pankratov V., Khachay D.** Attainable best guarantee for the accuracy of  $k$ -medians clustering in  $[0,1]$  // 8<sup>th</sup> International Conf. Optimization and Applications (OPTIMA2017) / eds. Y. G. Evtushenko, et al. Aachen: CEUR Workshop Proceedings, 2017. P. 322–327.
9. **Kumar A., Sabharwal Y., Sen S.** Linear-time approximation schemes for clustering problems in any dimensions // J. ACM. Feb. 2010. Vol. 57(2). P. 5:1–5:32. doi: 10.1145/1667053.1667054.

Хачай Михаил Юрьевич

Поступила 22.09.17

д-р физ.-мат. наук, проф. РАН, зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет, Омский государственный технический университет

e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Хачай Даниил Михайлович

студент, математик

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: dmx@imm.uran.ru

Панкратов Василий Сергеевич

аспирант, математик

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: pankratov.vs@gmail.com

## REFERENCES

1. Aggarwal C. C., Reddy C. K. *Data clustering: algorithms and applications*. Bosa Roca: Taylor & Francis Inc., 2013, Chapman & Hall/CRC Data Mining and Knowledge Discovery Ser., 652 p. ISBN: 9781466558212.
2. Ben-David S. Computational feasibility of clustering under clusterability assumptions, CoRR abs/1501.00437, 2015, 27 p. Available at: <http://arxiv.org/abs/1501.00437>.
3. Duda R. O., Hart P. E., Stork D. G. *Pattern classification*. NY: Wile, 2001, 680 p. ISBN: 978-0-471-05669-0.
4. Grønlund A., Larsen K. G., Mathiasen A., Nielsen J. S. Fast exact  $k$ -means,  $k$ -medians and bregman divergence clustering in 1d. CoRR abs/1701.07204, 2017, 12 p. URL: <http://arxiv.org/abs/1701.07204>.
5. Guruswami V., Indyk P. Embeddings and non-approximability of geometric problems. *Proc. of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA '03)*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003, pp. 537–538. ISBN: 0-89871-538-5.
6. Har-Peled S., Mazumdar S. On coresets for  $k$ -means and  $k$ -median clustering. *Proc. of the Thirty-Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '04)*. NY: ACM, 2004, pp. 291–300. doi: 10.1145/1007352.1007400.
7. Khachay M., Neznakhina K. Generalized pyramidal tours for the generalized traveling salesman problem. *Lecture Notes in Computer Science*, 2017, vol. 10627, pp. 265–277. doi: 10.1007/978-3-319-71150-8-23.
8. Khachay M., Pankratov V., Khachay D. Attainable best guarantee for the accuracy of  $k$ -medians clustering in  $[0,1]$ . *8<sup>th</sup> International Conf. Optimization and Applications (OPTIMA2017)*, Y. G. Evtushenko, et al. eds., Aachen: CEUR Workshop Proceedings, 2017, pp. 322–327.
9. Kumar A., Sabharwal Y., Sen S. Linear-time approximation schemes for clustering problems in any dimensions. *J. ACM. Feb.*, 2010, vol. 57(2), pp. 5:1–5:32. doi: 10.1145/1667053.1667054.

The paper was received by the Editorial Office on September 22, 2017.

*Mikhail Yur'evich Khachai*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia; Omsk State Technical University, Omsk, 644050 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru.

*Daniil Mikhailovich Khachai*, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: dmx@imm.uran.ru.

*Vasily Sergeevich Pankratov*, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: pankratov.vs@gmail.com.

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ ЛОМАНЫМИ В  $L_p$ 

А. А. Шабозова

В статье рассматривается класс  $H^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m}$  параметрически заданных кривых в  $m$ -мерном евклидовом пространстве, координатные функции которых принадлежат классам  $H^{\omega_i}[0, L]$  ( $i = \overline{1, m}$ ) соответственно, т. е. имеют модуль непрерывности, мажорируемый функцией  $\omega_i$ . Решена задача отыскания верхней грани взаимного отклонения в норме пространства  $L_p[0, L]$  ( $1 \leq p < \infty$ ) двух кривых из этого класса при условии обязательного их пересечения в  $N$  ( $N \geq 2$ ) точках отрезка  $[0, L]$ . Также найдено точное значение верхней грани уклонения в метрике  $L_p$  кривой  $\Gamma$  из класса  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ , заданного выпуклыми вверх модулями непрерывности  $\omega_i(t)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , от вписанной в нее интерполяционной ломаной с  $N$  ( $N \geq 2$ ) точками интерполяции. Полученные результаты являются обобщением результата В. Ф. Сторчая о приближении непрерывных функций интерполяционными ломаными в метрике пространства  $L_p[0, L]$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

Ключевые слова: параметрически заданные кривые, модуль непрерывности, интерполяционные ломаные.

**A. A. Shabozova. Approximation of space curves by polygonal lines in  $L_p$ .**

We consider the class  $H^{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m}$  of parametric curves in the  $m$ -dimensional Euclidean space whose coordinate curves belong to the classes  $H^{\omega_i}[0, L]$  ( $i = \overline{1, m}$ ), respectively; i.e., their moduli of continuity are dominated by the functions  $\omega_i$ . We solve the problem of finding an upper bound for the mutual deviation in the norm of the space  $L_p[0, L]$  ( $1 \leq p < \infty$ ) of two curves from this class under the condition that they intersect at  $N$  ( $N \geq 2$ ) points of the interval  $[0, L]$ . We also find the exact value for the upper bound of the deviation in the  $L_p$  metric of a curve  $\Gamma$  belonging to a class  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$  defined by upper convex moduli of continuity  $\omega_i(t)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , from an interpolation polygonal line inscribed in this curve with  $N$  ( $N \geq 2$ ) interpolation nodes. The obtained results generalize V. F. Storchai's result on the approximation of continuous functions by interpolation polygonal lines in the metric of the space  $L_p[0, L]$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

Keywords: parametric curves, modulus of continuity, interpolation broken lines.

MSC: 41A63

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-4-311-318

## 1. Введение

В работе рассматривается вопрос о точном значении оценки погрешности приближения кривых, лежащих в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^m$ , вписанными в них ломаными в метрике  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Некоторые проблемы, связанные с приближением параметрически заданных кривых вписанными в них ломаными и сплайн-кривыми в различных пространствах ранее изучались, например, в монографиях [1; 2] и работах [3–9]. Точные оценки отклонения кривых от параметрических эрмитовых сплайнов в хаусдорфовой метрике найдены в работах [4–6]. Отметим, что в большинстве, посвященной этой тематике работ, получены порядковые оценки погрешности приближения. В [9] рассмотрен вопрос о точной верхней грани оценки погрешности приближения кривых  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ , заданных параметрическими уравнениями

$$x_i = \varphi_i(t), \quad 0 \leq t \leq L, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.1)$$

вписанными в них ломаными на некоторых классах кривых, задаваемых модулями непрерывности, в метрике пространства  $C[a, b]$ . Здесь мы изучаем аналогичную экстремальную задачу в норме пространства  $L_p[0, L]$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Приведем нужные для дальнейшего обозначения и определения. Пусть  $H^\omega[a, b]$  — класс функций  $f(t) \in C[a, b]$ , для любых двух точек  $t', t'' \in [a, b]$  удовлетворяющих условию

$$|f(t') - f(t'')| \leq \omega(|t' - t''|),$$

где  $\omega(t)$  — заданный на отрезке  $[0, b - a]$  модуль непрерывности, т.е. непрерывная, неубывающая и полуаддитивная на  $[0, b - a]$  функция, в нуле равная нулю. Если  $\omega(t) = Kt^\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1, K > 0$ ), то класс  $H^\omega[a, b]$  называют классом Липшица порядка  $\alpha$  с константой  $K$  и обозначают  $KH^{(\alpha)}[a, b]$ .

Через  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}[0, L]$  обозначим класс кривых  $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ , заданных параметрическими уравнениями (1.1) и таких, у которых координатные функции  $\varphi_i(t) \in H^{\omega_i}[0, L]$ , ( $i = \overline{1, m}$ ). В случае, когда  $\omega_i(t) \equiv \omega(t)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , соответствующий класс кривых обозначим через  $H^{\omega, m}[0, L]$ . Как обычно,  $L_p[a, b]$ ,  $1 \leq p < \infty$ , — пространство суммируемых на  $[a, b]$  в  $p$ -й степени функций  $f$  с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p[a, b]} = \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty.$$

## 2. Формулировка задач

Пусть кривая  $\Gamma$  задана параметрическими уравнениями (1.1), а кривая  $G$  — параметрическими уравнениями

$$y_i = \psi_i(t), \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \leq t \leq L,$$

причем всюду далее будем предполагать, что функции  $\varphi_i, \psi_i \in L_p[0, L] \cap C[0, L]$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Определим расстояние между кривыми  $\Gamma$  и  $G$  равенством

$$\rho(\Gamma, G)_p := \left( \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (2.1)$$

Убедимся, что формула (2.1) обладает всеми необходимыми свойствами расстояния:

а)  $\rho(\Gamma, G)_p \geq 0$ , причем  $\rho(\Gamma, G)_p = 0$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma \equiv G$ ;

б)  $\rho(\Gamma, G)_p = \rho(G, \Gamma)_p$ ;

в) Если  $\Gamma$ :  $x_i = \varphi_i(t)$ ,  $G$ :  $y_i = \psi_i(t)$ ,  $\mathcal{T}$ :  $z_i = \chi_i(t)$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $0 \leq t \leq L$ , — параметрически заданные кривые, у которых координатные функции  $\varphi_i, \psi_i, \chi_i \in L_p[0, L]$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $1 \leq p < \infty$ , то

$$\rho(\Gamma, \mathcal{T})_p \leq \rho(\Gamma, G)_p + \rho(G, \mathcal{T})_p.$$

В самом деле, свойства а) и б) сразу вытекают из формулы (2.1), а последнее неравенство следует из нижеприведенной леммы (формулы (3.1)), согласно которой запишем

$$\begin{aligned} \rho(\Gamma, \mathcal{T})_p &:= \left( \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - \chi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^m \int_0^L |\psi_i(t) - \chi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} = \rho(\Gamma, G)_p + \rho(G, \mathcal{T})_p. \end{aligned}$$

Пусть  $\Delta_N : 0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq L$  ( $N \geq 1$ ) — произвольное разбиение отрезка  $[0, L]$  и для координатных функций кривых  $\Gamma$  и  $G$  выполнены равенства

$$\varphi_i(t_k) = \psi_i(t_k), \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, N}. \quad (2.2)$$



Видно, что при выполнении равенств (2.2) кривые  $\Gamma$  и  $G$  в точках  $t_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ) пересекаются. Мы будем обозначать условие (2.2) через  $\Gamma|_{\Delta_N} = G|_{\Delta_N}$ .

Равномерное разбиение отрезка  $[0, L]$  обозначим через  $\overline{\Delta}_{N+1} = \{\overline{t}_k : \overline{t}_k = kL/N\}_{k=0}^N$ , а через  $\Delta_N^0$  — разбиение отрезка  $[0, L]$  точками  $t_k^0 := (2k - 1)L/(2N)$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Требуется найти величину

$$\mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \rho)_p := \inf_{\Delta_N} \mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}, \Delta_N; \rho)_p,$$

где

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N; \rho)_p := \sup \{ \rho(\Gamma, G)_p : \Gamma, G \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}, \Gamma|_{\Delta_N} = G|_{\Delta_N} \}.$$

Последнее соотношение означает, что верхняя грань берется только по тем кривым  $\Gamma$  и  $G$  из класса  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ , которые совпадают на сетке узлов  $\Delta_N$ .

### 3. Основные результаты

Имеет место следующее утверждение.

**Лемма.** Пусть функции  $\varphi_i, \psi_i \in L_p[a, b]$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $1 \leq p < \infty$ ). Тогда справедливо неравенство

$$\left( \sum_{i=1}^m \int_a^b |\varphi_i(t) + \psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^m \int_a^b |\varphi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^m \int_a^b |\psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (3.1)$$

**Доказательство.** Вполне вероятно, что неравенство (3.1) известно, однако мы в существующей литературе его не обнаружили, а потому приводим доказательство.

Так как  $\varphi_i, \psi_i \in L_p[a, b]$ , то в силу неравенства Минковского для интегралов запишем

$$\int_a^b |\varphi_i(t) + \psi_i(t)|^p dt \leq \left[ \left( \int_a^b |\varphi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left( \int_a^b |\psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} \right]^p.$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством Минковского для конечных сумм, имеем

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^m \int_a^b |\varphi_i(t) + \psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} &= \left( \sum_{i=1}^m \|\varphi_i + \psi_i\|_{L_p(a,b)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^m (\|\varphi_i\|_{L_p(a,b)} + \|\psi_i\|_{L_p(a,b)})^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^m \|\varphi_i\|_{L_p(a,b)}^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^m \|\psi_i\|_{L_p(a,b)}^p \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \int_a^b |\varphi_i(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^m \int_a^b |\psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство леммы.

**Теорема 1.** Какими бы ни были модули непрерывности  $\omega_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $0 \leq t \leq L$ ) при всех  $1 \leq p < \infty$ , имеют место равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \rho)_p &:= \inf_{\Delta_N} \mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N; \rho)_p \\ &= \mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N^0; \rho)_p = 2 \left( 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Доказательство. Пользуясь формулой расстояния (2.1) между кривыми  $\Gamma, G \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ , имеем

$$\rho(\Gamma, G)_p = \left( \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (3.2)$$

Возведя обе части неравенства (3.2) в степень  $p$  ( $1 \leq p < \infty$ ), запишем

$$[\rho(\Gamma, G)_p]^p = \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt. \quad (3.3)$$

Докажем, что

$$[\rho(\Gamma, G)_p]^p \leq 2^p \sum_{i=1}^m \int_0^L \left[ \min_{1 \leq k \leq N} \omega_i^p(|t - t_k|) \right] dt. \quad (3.4)$$

Разложим интеграл в формуле (3.3) по отдельным отрезкам

$$[\rho(\Gamma, G)_p]^p = \sum_{i=1}^m \left[ \int_0^{t_1} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt + \int_{t_N}^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \right].$$

Оценим сверху одно слагаемое  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt$ . Положим  $\varphi_i(t) - \psi_i(t) = h_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $0 \leq t \leq L$ ). Тогда ясно, что  $h_i \in L_p[0, L] \cap C[0, L]$  ( $1 \leq p < \infty$ ),  $h_i \in H^{2\omega_i}[0, L]$ . Кроме того,  $h_i(t_j) = 0$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{0, N+1}$ ). Пусть  $t \in [t_k, t_{k+1}]$ . Поскольку  $h_i(t_k) = 0$  и  $h_i(t_{k+1}) = 0$ , то получаем  $|h_i(t)| \leq 2\omega_i(|t - t_k|)$  и  $|h_i(t)| \leq 2\omega_i(|t - t_{k+1}|)$ , а потому в силу монотонности  $\omega_i$  имеем  $|h_i(t)| \leq \min_{j=k, k+1} 2\omega_i(|t - t_j|) = 2\omega_i(\min_{j=k, k+1} |t - t_j|)$ . Так как все остальные точки  $t_j$  лежат дальше от  $t$ , чем  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , то можно брать минимум и по этим точкам тоже, т. е.  $|h_i(t)| \leq 2\omega_i(\min_{1 \leq j \leq N} |t - t_j|)$ . Но тогда получаем

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} |h_i(t)|^p dt \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[ 2\omega_i \left( \min_{1 \leq j \leq N} |t - t_j| \right) \right]^p dt, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Аналогичные рассуждения приводят нас к таким же неравенствам для двух других слагаемых

$$\int_0^{t_1} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \leq \int_0^{t_1} \left[ 2\omega_i \left( \min_{1 \leq j \leq N} |t - t_j| \right) \right]^p dt,$$

$$\int_{t_N}^L |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|^p dt \leq \int_{t_N}^L \left[ 2\omega_i \left( \min_{1 \leq j \leq N} |t - t_j| \right) \right]^p dt.$$

Используя все эти оценки, в итоге мы получим, что

$$[\rho(\Gamma, G)_p]^p \leq 2^p \sum_{i=1}^m \int_0^L \left[ \omega_i \left( \min_{1 \leq k \leq N} |t - t_k| \right) \right]^p dt,$$

и тем самым неравенство (3.4) доказано.

Неравенство (3.4) точно на классе кривых  $H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ , в чем легко убедиться, если рассмотреть кривые  $\Gamma_0$  и  $G_0$  из этого класса с координатными функциями соответственно

$$\varphi_i^0(t) = -\psi_i^0(t) = \omega_i \left( \min_{1 \leq k \leq N} |t - t_k| \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad 0 \leq t \leq L.$$

Таким образом, мы нашли точную верхнюю грань уклонения для произвольной сетки  $\Delta_N$ :

$$\mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N; \rho) = 2 \left[ \sum_{i=1}^m \int_0^L \omega_i^p \left( \min_{1 \leq k \leq N} |t - t_k| \right) dt \right]^{1/p}. \quad (3.5)$$

Далее нам понадобится следующее утверждение (см. [10, с. 178]):

Пусть  $\psi(t)$  — неубывающая и неотрицательная для  $0 \leq t \leq b - a$  функция. При фиксированном  $N = 1, 2, \dots$ , вектору  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$  ( $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N \leq b$ ) сопоставим функцию  $\phi(T, t) = \min_{1 \leq k \leq N} \psi(|t - t_k|)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Тогда

$$\int_a^b \phi(T, t) dt \geq \int_a^b \phi(T_0, t) dt, \quad (3.6)$$

где вектор  $T_0$  определяется координатами  $t_k^0 = a + (2k - 1)(b - a)/(2N)$ ,  $k = \overline{1, N}$ .

Продолжим доказательство теоремы 1. Положив  $\psi(t) = [\omega_i(t)]^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ,  $0 \leq t \leq L$ ,  $i = \overline{1, m}$ ) и заметив, что

$$\omega_i^p \left( \min_{1 \leq k \leq N} |t - t_k^0| \right) = \omega_i^p \left( \left| t - \frac{(2k - 1)L}{2N} \right| \right) \quad \text{для} \quad \frac{(k - 1)L}{N} \leq t \leq \frac{kL}{N} \quad (k = \overline{1, N}),$$

из соотношения (3.5) в силу (3.6) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \rho)_p &= \inf_{\Delta_N} \mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N; \rho)_p \\ &= \mathcal{E}(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \Delta_N^0; \rho)_p = 2 \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)L/N}^{kL/N} \omega_i^p \left( \left| t - \frac{(2k - 1)L}{2N} \right| \right) dt \right]^{1/p} \\ &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^N \left[ \int_{(k-1)L/N}^{(2k-1)L/(2N)} \omega_i^p \left( \frac{(2k - 1)L}{2N} - t \right) dt + \int_{(2k-1)L/(2N)}^{kL/N} \omega_i^p \left( t - \frac{(2k - 1)L}{2N} \right) dt \right] \right\}^{1/p} \\ &= 2 \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^N \left( 2 \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right) \right]^{1/p} = 2 \left( 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

чем и завершаем доказательство теоремы 1.

**Следствие 1.** В условиях теоремы 1 справедливо равенство

$$\mathcal{E}_N(H^{m, \omega}; \rho)_p = 2 \left( 2mN \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

В частности, если  $\omega(t) = Kt^\alpha$  ( $K > 0$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ), то

$$\mathcal{E}_N(H^{m, \alpha}; \rho)_p = \frac{2 \sqrt[p]{m} K L^{\alpha+1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p + 1} (2N)^\alpha}.$$

**Теорема 2.** Пусть дана кривая  $\Gamma \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ . Пусть  $\Gamma_N$  есть вписанная в кривую  $\Gamma$  ломаная с вершинами в точках  $P_k := P(\varphi_1(kh), \dots, \varphi_m(kh))$ ,  $k = \overline{0, N}$ ,  $h = L/N$ , соответствующих точкам равномерного разбиения отрезка  $[0, L]$   $\overline{\Delta}_{N+1} = \{\bar{t}_k : \bar{t}_k = kL/N\}_{k=0}^N$ ,  $N \geq 1$ . В предположении, что  $\omega_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $0 \leq t \leq L$ ) — выпуклые вверх модули непрерывности, справедливо равенство

$$\begin{aligned} E(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \overline{\Delta}_{N+1}; \rho)_p &:= \sup \{ \rho(\Gamma, \Gamma_N)_p : \Gamma \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m} \} \\ &= \left( 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty. \end{aligned} \quad (3.7)$$

**Доказательство.** Параметрическое уравнение звена ломаной  $\Gamma_N$ , соединяющее точки  $P_k$  и  $P_{k+1}$ , имеет вид

$$s(\varphi_i; t) := \varphi_i(\bar{t}_k) + (t - \bar{t}_k)h^{-1} [\varphi_i(\bar{t}_{k+1}) - \varphi_i(\bar{t}_k)], \quad i = \overline{1, m}, \quad \text{где } \bar{t}_k \leq t \leq \bar{t}_{k+1}.$$

В [11] доказано, что при любом  $t \in [\bar{t}_k, \bar{t}_{k+1}]$  имеет место неравенство

$$\int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} |\varphi_i(t) - s(\varphi_i; t)|^p dt \leq 2 \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt, \quad 1 \leq p < \infty,$$

воспользовавшись которым получаем

$$\begin{aligned} \rho(\Gamma, \Gamma_N)_p &= \left( \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - s(\varphi_i; t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} |\varphi_i(t) - s(\varphi_i; t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left( 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Пользуясь последним неравенством, запишем

$$\begin{aligned} E(H^{\omega_1, \dots, \omega_m}; \overline{\Delta}_{N+1}; \rho)_p &:= \sup \{ \rho(\Gamma, \Gamma_N)_p : \Gamma \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m} \} \leq \left( 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Докажем, что существует кривая  $\Gamma \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ , для которой неравенство (3.8) обращается в равенство. Пусть  $\Gamma^*$  — кривая, у которой координатные функции определены на отрезке  $[0, L]$  равенствами

$$\varphi_i^*(t) := \begin{cases} \omega_i(t - \bar{t}_k), & \bar{t}_k \leq t \leq \bar{t}_k + L/(2N), \\ \omega_i(\bar{t}_{k+1} - t), & \bar{t}_k + L/(2N) \leq t \leq \bar{t}_{k+1}, \quad k = \overline{0, N-1}, \end{cases}$$

где  $\omega_i(t)$  ( $i = \overline{1, m}$ ) — выпуклые вверх модули непрерывности на отрезке  $[0, L]$ .

Очевидно, что кривая  $\Gamma^* \in H^{\omega_1, \dots, \omega_m}$ . Поскольку  $\varphi_i^*(\bar{t}_k) = 0$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , то  $S(\varphi_i^*, \bar{t}_k) \equiv 0$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ ,  $i = \overline{1, m}$ , а потому имеем

$$\begin{aligned} \rho(\Gamma^*, \Gamma_N^*)_p &:= \left( \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i(t) - s(\varphi_i^*; \bar{t}_k)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{i=1}^m \int_0^L |\varphi_i^*(t)|^p dt \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_{k+1}} |\varphi_i^*(t)|^p dt \right)^{1/p} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{k=0}^{N-1} \left( \int_{\bar{t}_k}^{\bar{t}_k + L/(2N)} \omega_i^p(t - \bar{t}_k) dt + \int_{\bar{t}_k + L/(2N)}^{\bar{t}_{k+1}} \omega_i^p(\bar{t}_{k+1} - t) dt \right) \right]^{1/p} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^N \left( 2 \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right) \right]^{1/p} = \left( 2N \sum_{i=1}^m \int_0^{L/(2N)} \omega_i^p(t) dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \end{aligned}$$

откуда и следует равенство (3.7). Теорема 2 доказана.

Отметим, что равенство (3.7) в определенном смысле является распространением известного результата В. Ф. Сторчая [11] об отклонении ломаных в метрике  $L_p[0, 1]$  ( $1 \leq p < \infty$ ) на случай отклонения пространственных кривых от вписанных в них интерполяционных ломаных в метрике  $L_p[0, L]$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

**Следствие 2.** В условиях теоремы 2 имеет место равенство

$$E(H^{m,\omega}; \bar{\Delta}_N; \rho)_p = \left( 2mN \int_0^{L/(2N)} \omega^p(t) dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и в частности, когда  $\omega(t) = Kt^\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1, K > 0$ ), имеет место равенство

$$E(KH^{m,\alpha}; \bar{\Delta}_N; \rho)_p = \frac{\sqrt[p]{m} K L^{\alpha+1/p}}{\sqrt[p]{\alpha p + 1} (2N)^\alpha}.$$

В завершение отметим, что интерполяционные ломаные, хорошо приближая кривую, одновременно могут хорошо приближать и производные ее координатных функций [12].

Автор благодарит рецензента за сделанные им ценные замечания в процессе подготовки статьи к печати.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сендов Бл. Хаусдорфовые приближения. София: Изд-во Болгарской АН, 1979. 372 с.
2. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
3. Мартынюк В.Т. О приближении ломаными кривых, заданных параметрическими уравнениями, в хаусдорфовой метрике // Укр. мат. журн. 1976. Т 286 № 1. С. 87–92.
4. Назаренко Н.А. О локальном восстановлении кривых с помощью параметрических сплайнов // Геометрическая теории функций и топология: сб. тр. Киев, 1981. С. 55–62.
5. Вакарчук С.Б. О приближении кривых, заданных параметрическом виде, при помощи сплайн-функций // Укр. мат. журн. 1983. Т 35, № 3. С. 352–355.
6. Вакарчук С.Б. Точные константы приближения плоских кривых полиномиальными кривыми и ломаными // Изв. Вузов. Математика. 1988. № 2. С. 14–19.
7. Корнейчук Н.П. Об оптимальном кодировании вектор-функций // Укр. мат. журн. 1988. Т 40, № 6. С. 737–743.
8. Корнейчук Н.П. Приближение и оптимальное гладких плоских кривых // Укр. мат. журн. 1989. Т 41, № 4. С. 492–499.

9. Шабозов М.Ш., Шабозова А.А. Приближение кривых ломаными // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2013. Вып 2. Сер. 1. С. 68–76.
10. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1986. 256 с.
11. Сторчай В.Ф. Об отклонении ломаных в метрике  $L_p$ . // Мат. заметки. 1969. Т. 5, № 1. С. 31–37.
12. Шабозова А.А. К полигональной интерполяции кривых в пространстве  $\mathbb{R}^m$  // Изв. ТулГУ. 2015. Вып. 4. С. 107–112.

Шабозова Адолат Азамовна  
математик, аспирант  
Таджикский национальный университет  
e-mail: shabozova91@mail.ru

Поступила 10.05.2017

#### REFERENCES

1. Sendov Bl. *Hausdorff Approximation*. NY etc., Springer Publ., 1990, 388 p.
2. Zavyalov Yu. S, Kvasov B. I., Miroshnichenko V. L. *Metodi spline funktsiy* [Methods of Spline-Functions], Moscow, Nauka Publ., 1980, 352 p.
3. Martynyuk V.T. Approximation by polygonal lines of curves given by parametric equations in the Hausdorff metric. *Ukr. Math. J.*, 1976, vol. 28, no. 1, pp. 68–72.
4. Nazarenko N. A. Local recovery curves by parametric splines. *Geometric theory of functions and topology*, Kiev, 1981, pp. 55–62 (in Russian).
5. Vakarchuk S. B. Approximation by spline-curves of curves given in parametric form. *Ukr. Math. J.*, 1983, vol. 35, no. 3, pp. 303–306.
6. Vakarchuk S.B. Exact constants for the approximation of plane curves by polynomial curves and polygonal lines. *Izvestiya VUZ. Matematika.*, 1988, vol. 32, no. 2, pp. 19–26.
7. Korneichuk N. P. Optimal coding of vector-functions. *Ukr. Math. J.*, 1988, vol. 40, no. 6, pp. 621–627.
8. Korneichuk N. P. Approximation and optimal coding of smooth plane curves. *Ukr. Math. J.*, 1989, vol. 41, no. 4, pp. 429–435.
9. Shabozov M. Sh., Shabozova A. A. Approximating curves by broken lines. *Vestkin St. Petersburg University*, ser. 1, iss. 2, pp. 68–76 (in Russian).
10. Nikolskiy S. M. *Kvadraturnye formuly* [Quadrature Formulae]. Moscow, Nauka Publ., 1986, 256 p.
11. Storchai V.F. The deviation of polygonal functions in the  $L_p$  metric. *Math. Notes*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 21–25.
12. Shabozova A.A. Polygonal interpolation of curves in the space  $\mathbb{R}^m$ . *Izvestiya TSU*, 2015, iss. 4, pp.107–112 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on May 10, 2017.

*Adolat Azamovna Shabozova*, doctoral student, Tajik National University, Dushanbe, 734025 Tajikistan, e-mail: shabozova91@mail.ru.

## СОДЕРЖАНИЕ

СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ МАТВЕЕВ (К 70-летию юбилею) .....	5
<b>Н. В. Абросимов, Б. Вьонг Хыу.</b> Объем гиперболического тетраэдра с группой симметрий $S_4$ .....	7
<b>А. А. Акимова, С. В. Матвеев, В. В. Таркаев.</b> Классификация зацеплений малой сложности в утолщенном торе .....	18
<b>Р. Ж. Алеев, О. В. Митина, Т. А. Ханенко.</b> Описание группы единиц целочисленного группового кольца циклической группы порядка 16 .....	32
<b>В. Г. Бардаков, М. В. Нецадим.</b> Группы узлов и нильпотентная аппроксимируемость .....	43
<b>В. А. Белоногов.</b> Конечные группы с четырьмя классами сопряженных максимальных подгрупп. I .....	52
<b>Ю. С. Белоусов, А. В. Малютин.</b> Простые дуги в плоских кривых и в диаграммах узлов .....	63
<b>Б. М. Веретенников.</b> О коммутантах конечных 2-групп, порожденных инволюциями .....	77
<b>А. Ю. Веснин, Т. А. Козловская.</b> Многообразия Брискорна, обобщенные группы Сирадски и накрытия линзовых пространств .....	85
<b>О. Ю. Дашкова, М. А. Салим, О. А. Шпырко.</b> О структуре финитарной линейной группы .....	98
<b>Ю. Ф. Долгий, Р. И. Шевченко.</b> Дискретное операторное уравнение Риккати в задаче оптимальной стабилизации периодической линейной системы с последствием .....	105
<b>К. С. Ефимов.</b> Автоморфизмы $AT_4(4, 4, 2)$ -графа и отвечающих ему сильно регулярных графов .....	119
<b>А. Х. Журтов, М. Х. Шерметова.</b> Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ .....	128
<b>М. Р. Зиновьева.</b> О конечных простых линейных и унитарных группах над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают. I .....	136
<b>А. О. Иванов, Н. К. Николаева, А. А. Тужилин.</b> Проблема Штейнера в пространстве Громова — Хаусдорфа: случай конечных метрических пространств .....	152
<b>Н. А. Ильясов.</b> О порядке убывания равномерных модулей гладкости на классах периодических функций $H_p^l[\omega]$ , $l \in \mathbb{N}$ , $1 \leq p < \infty$ .....	162
<b>С. Ф. Каморников.</b> Об одной характеристике подгруппы Фраттини конечной разрешимой группы .....	176
<b>А. Ф. Клейменов.</b> Применение альтруистического и агрессивного типов поведения в неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц на плоскости .....	181

<b>Е. А. Коновальчик, К. В. Костоусов.</b> Симметрические 2-расширения 2-мерной решетки. II .....	192
<b>Ф. Г. Кораблёв.</b> Квазоиды в теории узлов .....	212
<b>Вл. Д. Мазуров, А. И. Смирнов.</b> О структуре множества неподвижных точек разложимых монотонных субоднородных отображений .....	222
<b>А. А. Махнев, Д. В. Падучих, М. М. Хамгокова.</b> Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (1305, 440, 115, 165) .....	232
<b>А. Д. Медных, И. А. Медных, Р. Неделя.</b> О теоремах Оикавы и Аракавы для графов.....	243
<b>В. С. Монахов.</b> Критерий метанильпотентности конечной разрешимой группы.....	253
<b>Е. А. Сбродова, В. В. Таркаев, Е. А. Фоминых, Е. В. Шумакова.</b> Виртуальные трехмерные многообразия сложности 1 и 2.....	257
<b>Н. Н. Субботина, Н. Г. Новоселова.</b> Оптимальный результат в задаче управления системой с кусочно монотонной динамикой .....	265
<b>А. В. Тетенов, М. С. Самуэль, Д. А. Ваулин.</b> О дендритах, заданных системами полиэдров и их точках ветвления.....	281
<b>Т. Н. Фоменко.</b> Сохранение существования точки совпадения при некоторых дискретных преобразованиях пары отображений метрических пространств .....	292
<b>М. Ю. Хачай, Д. М. Хачай, В. С. Панкратов.</b> Неулучшаемая гарантированная оценка точности для задачи о $k$ медианах на отрезке $[0, 1]$ .....	301
<b>А. А. Шабозова.</b> Приближение пространственных кривых ломаными в $L_p$ .....	311



## CONTENTS

SERGEI VLADIMIROVICH MATVEEV .....	5
<b>N. V. Abrosimov, Vuong Huu Bao.</b> The volume of a hyperbolic tetrahedron with symmetry group $S_4$ .....	7
<b>A. A. Akimova, S. V. Matveev, V. V. Tarkaev.</b> Classification of links of small complexity in a thickened torus .....	18
<b>R. Zh. Aleev, O. V. Mitina, T. A. Khanenko.</b> Description of the unit group of the integral group ring of a cyclic group of order 16 .....	32
<b>V. G. Bardakov, M. V. Neshchadim.</b> Knot groups and nilpotent approximability .....	43
<b>V. A. Belonogov.</b> Finite simple groups with four conjugacy classes of maximal subgroups. I .....	52
<b>Yu. S. Belousov, A. V. Malyutin.</b> Simple arcs in plane curves and knot diagrams .....	63
<b>B. M. Veretennikov.</b> On the commutator subgroups of finite 2-groups generated by involutions .....	77
<b>A. Yu. Vesnin, T. A. Kozlovskaya.</b> Brieskorn manifolds, generalized Sieradski groups, and coverings of lens spaces .....	85
<b>O. Yu. Dashkova, M. A. Salim, O. A. Shpyrko.</b> On the structure of a finitary linear group .....	98
<b>Yu. F. Dolgii, R. I. Shevchenko.</b> Discrete operator Riccati equation in an optimal stabilization problem for a periodic linear system with aftereffect .....	105
<b>K. S. Efimov.</b> Automorphisms of an $AT_4(4, 4, 2)$ -graph and of the corresponding strongly regular graphs .....	119
<b>A. Kh. Zhurтов, M. Kh. Shermetova.</b> Automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$ .....	128
<b>M. R. Zinov'eva.</b> On finite simple linear and unitary groups over fields of different characteristics with coinciding prime graphs. I .....	136
<b>A. O. Ivanov, N. K. Nikolaeva, A. A. Tuzhilin.</b> Steiner's problem in the Gromov-Hausdorff space: the case of finite metric spaces .....	152
<b>N. A. Il'yasov.</b> On the order of decrease of uniform moduli of smoothness for the classes of periodic functions $H_p^l[\omega]$ , $l \in \mathbb{N}$ , $1 \leq p < \infty$ .....	162
<b>S. F. Kamornikov.</b> On a characterization of the Frattini subgroup of a finite solvable group .....	176
<b>A. F. Kleimenov.</b> Application of the altruistic and aggressive types of behavior in a two-person non-zero-sum positional differential game on the plane .....	181
<b>E. A. Konoval'chik, K. V. Kostousov.</b> Symmetrical 2-extensions of the 2-dimensional grid. II. ....	192

---

<b>F. G. Korablev.</b> Quazoids in knot theory .....	212
<b>VI. D. Mazurov, A. I. Smirnov.</b> The structure of the fixed point set of a reducible monotone subhomogeneous mapping .....	222
<b>A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh, and M. M. Khamgokova.</b> Automorphisms of strongly regular graphs with parameters (1305, 440, 115, 165) .....	232
<b>A. D. Mednykh, I. A. Mednykh, R. Nedelya.</b> On the Oikawa and Arakawa theorems for graphs .....	243
<b>V. S. Monakhov.</b> A metanilpotency criterion for a finite solvable group .....	253
<b>E. A. Sbrodova, V. V. Tarkaev, E. A. Fominykh, E. V. Shumakova.</b> Virtual 3-manifolds of complexity 1 and 2 .....	257
<b>N. N. Subbotina, N. G. Novoselova.</b> Optimal result in a control problem with piecewise monotone dynamics .....	265
<b>A. V. Tetenov, M. Samuel, D. A. Vaulin.</b> On dendrites generated by polyhedral systems and their ramification points .....	281
<b>T. N. Fomenko.</b> Preservation of the existence of coincidence points under some discrete transformations of a pair of mappings of metric spaces .....	292
<b>M. Yu. Khachai, D. M. Khachai, V. S. Pankratov.</b> Attainable best guarantee for the accuracy of $k$ -medians clustering in $[0,1]$ .....	301
<b>A. A. Shabozova.</b> Approximation of space curves by polygonal lines in $L_p$ .....	311

## ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале “Труды Института математики и механики УрО РАН” публикуются оригинальные работы теоретического характера по современным разделам математики и механики.

“Труды Института математики и механики УрО РАН” являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы в виде математических утверждений и доказаны (нетривиальность и новизна). В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В “Труды Института математики и механики” не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла “Трудов Института математики и механики”).

Для решения вопроса о целесообразности публикации в “Трудах Института математики и механики” редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей.

С 2000 г. статьи журнала (по решению редколлегии) выходят на английском языке в издательстве Pleiades Publishing, Ltd; МАИК “НАУКА/INTERPERIODICA” под названием “Selected articles from Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN” как приложение к “Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics”.

Автор представляет в редакцию электронный вариант статьи (tex-формат и pdf-формат).

К статье должны быть приложены:

- Сопроводительное письмо в отсканированном виде от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.
- Информация со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. В настоящее время также не взимается плата за публикацию рукописей и других авторов.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институту математики и механики Уральского отделения РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Правила оформления рукописей:

- В статье должны быть сформулированы и доказаны **НОВЫЕ** результаты в виде теорем, утверждений, предложений.
- Текст статьи должен быть набран в LATEX2 $\epsilon$  в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.
- Представляемая в “Труды Института математики и механики УРО РАН” статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов на русском и английском языках. Аннотация (не менее 10-15 предложений) должна быть информативной (не содержать общих слов), оригинальной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований), структурированной. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул. После аннотации должен быть указан код MSC от 1 до 5 значений (Mathematics Subject Classification).
- Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.
- Включение рисунков в статью теоретического характера носит исключительный характер и должно быть обосновано. Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.
- Файлы со статьями — tex-источник и pdf-вариант статьи — высылаются на адрес e-mail: trudy@imm.uran.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23

№ 4

2017

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору  
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;  
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения  
в связи с переименованием учредителя.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редакторы Н. Н. Моргунова, Е. Е. Понизовкина

TeX-редактор Г. Ф. Корнилова

Отв. за выпуск А. В. Коньгин, Н. А. Минигулов, А. Е. Эльберт

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

---

Подписано в печать 28.11.17. Формат 60 × 84<sup>1</sup>/<sub>8</sub>. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 37,6. Уч.-изд. л. 32,8 Тираж 200 экз.

---

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16  
Институт математики и механики УрО РАН  
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”  
тел. (343) 375-34-58  
e-mail: trudy@imm.uran.ru  
<http://journal.imm.uran.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО “Типография ДЛЯ ВАС”  
620026, г. Екатеринбург, ул. Розы Люксембург, 52а, оф. 3