РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

# ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 23, № 3 2017

# ТРУДЫ
# ИНСТИТУТА
# МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
# УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 23 № 3 2017

ЕКАТЕРИНБУРГ

**Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 23, № 3.** Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2017. 312 с.

ISSN 0134–4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

(Продолжение)

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.5

# ОЦЕНКИ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ КЛАССА ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ГЛАДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

**Г. Акишев**

В статье рассматривается $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — пространство Лоренца периодических функций $m$ переменных. Определено пространство Бесова функций с логарифмической гладкостью $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Основная цель статьи — найти точный порядок наилучшего приближения функций из класса $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ в различных соотношениях между параметрами $p,\tau,\theta$. Статья состоит из трех разделов. В первом разделе приведены некоторые известные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов и доказаны несколько вспомогательных утверждений. Во втором разделе установлены точные по порядку оценки наилучшего приближения функций из класса $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ в пространстве $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. В третьем разделе доказано неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов и установлено достаточное условие принадлежности функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в пространство $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < \tau_2 < \tau_1$ в терминах наилучшего приближения. В отличие от анизотропных пространств Лоренца это условие не зависит от количества переменных $m$. Получены точные по порядку оценки наилучшего приближения тригонометрическими полиномами функции класса Бесова $B^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ в пространстве $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < \tau_2 < \tau_1$.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класса Бесова, наилучшее приближение, логарифмическая гладкость.

**G. Akishev. Estimates for best approximations of functions from the logarithmic smoothness class in the Lorentz space.**

The Lorentz space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ of periodic functions of $m$ variables is considered. The Besov space $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ of functions with logarithmic smoothness is defined. The aim of the paper is to find the exact order of the best approximation of functions from the class $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ under different relations between the parameters $p$, $\tau$, and $\theta$. The paper consists of three sections. In the first section, known facts necessary for the proof of the main results are given and several auxiliary statements are proved. In the second section, order-exact estimates for the best approximation of functions from the class $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ are established in the space $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. In the third section, an inequality for different metrics of trigonometric polynomials is proved and a sufficient condition for the belonging of a function $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ to the space $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ in terms of the best approximation is established in the case $1 < \tau_2 < \tau_1$. In contrast to anisotropic Lorentz spaces, the condition is independent of the number $m$ of the variables. Order-exact estimates for the best approximation of functions from the Besov class $B^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ by trigonometric polynomials $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ are obtained in the case $1 < \tau_2 < \tau_1$.

Keywords: Lorentz space, Besov class, best approximation, logarithmic smoothness.

**MSC:** 41A10; 41A25; 42A10; 46E30; 46E35

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-3-21

## Введение

Пусть $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$, $\mathbb{I}^m = [0,1]^m$ и $p \in (1, \infty)$, $\tau \in [1, +\infty)$. Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют $2\pi$-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|^*_{p,\tau} = \left[\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t f^*(y)\,dy\right)^\tau t^{\tau(1/p-1)-1}\,dt\right]^{1/\tau} < +\infty$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013) и, частично, гранта 5129/ГФ4 Министерства образования и науки РК.

конечна, где $f^*(y)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1, с. 228]).

Известно, что $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ — банахово пространство и его норма $\|f\|^*_{p,\tau}$ эквивалентна величине (см. [1, с. 229])

$$\|f\|_{p,\tau} = \left(\frac{\tau}{p}\int\limits_0^1 (f^*(t))^\tau t^{\tau/p-1}\,dt\right)^{1/\tau}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \le \tau < \infty.$$

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$.

Для заданного натурального числа $M$ рассмотрим множество $\square_M = \{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m \colon |k_j| < M,\ j = 1, \ldots, m\}$. Рассмотрим кратное ядро Дирихле

$$D_{\square_M}(2\pi\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in\square_M} e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle}, \quad \bar{x} \in \mathbb{I}^m$$

и свертку функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$

$$\sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) = \int\limits_{I^m} f(2\pi\bar{y})\big(D_{\square_{2^s}}(2\pi\bar{x} - 2\pi\bar{y}) - D_{\square_{2^{s-1}}}(2\pi\bar{x} - 2\pi\bar{y})\big)d\bar{y},$$

где $s \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

В пространстве непрерывных функций $C[0, 2\pi]$ Б. С. Кашин и В. Н. Темляков [2] определили следующий класс:

$$LG^r = \big\{f \in C[0, 2\pi] \colon \|\sigma_s(f)\|_\infty \le (s+1)^{-r},\ s = 0, 1, \ldots\big\}, \quad r > 0.$$

В пространстве Лоренца рассмотрим аналогичный класс.

Пусть $1 \le \theta \le \infty$ и число $\alpha > 0$. Рассмотрим пространство всех функций $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f)\|^\theta_{p,\tau} < \infty.$$

Это пространство обозначается символом $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ и называется *пространством Никольского — Бесова логарифмической гладкости*. В этом пространстве рассмотрим единичный шар

$$\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta} = \Big\{f \in B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta} \colon \|f\|_{B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}} \le 1\Big\},$$

где норма

$$\|f\|_{B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}} = \|f\|_{p,\tau} + \left(\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f)\|^\theta_{p,\tau}\right)^{1/\theta}.$$

В случае $\tau = p$ пространство $B^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ определено в [3–5].

$E_M(f)_{p,\tau} \equiv E_{M,\ldots,M}(f)_{p,\tau} = \inf\limits_{T\in\mathfrak{F}_{\square_M}} \|f - T\|_{p,\tau}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ множеством $\mathfrak{F}_{\square_M}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $M - 1$ по каждой переменной. Для заданного класса $F \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ положим $E_M(F)_{p,\tau} = \sup\limits_{f\in F} E_M(f)_{p,\tau}$.

В случае $\tau_1 = p,\ \tau_2 = q$ для класса Никольского — Бесова $\mathbb{B}^r_{p,\theta}$ точные по порядку оценки наилучшего приближения в пространстве $L_q(\mathbb{T}^m)$ установил А. С. Романюк [6]. В случае $\tau = p$ оценки аппроксимативных характеристик класса $\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ получил С. А. Стасюк [7; 8]. Обзор результатов по теории приближений функций многих классов Соболева, Никольского, Бесова дан в [9].

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ и $L_{p,\theta_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$, если $1 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$.

Достаточное условие принадлежности функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в пространство $L_{q,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в терминах наилучшего приближения в случае $1 < p = \tau_1 < q < \infty$ найдено в [10], а в случае $q = p$, $1 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$ для функции одной переменной в [11].

Основная цель статьи — найти точный порядок величины $E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2}$ в различных соотношениях между параметрами $p, \tau_1, \tau_2, \theta$.

Статья состоит из трех разделов. В первом разделе приведены некоторые известные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов, и доказано несколько вспомогательных утверждений. Во втором разделе установлены оценки величины $E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2}$ в случае $\tau_1 = \tau_2$. Основным результатом этого раздела является теорема 2.1.

В третьем разделе установлены оценки величины $E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2}$ в случае $\tau_2 < \tau_1$. Основной результат — теоремы 3.1–3.4.

Для теорем, лемм, формул использована двойная нумерация. В дальнейшем $a_+ = \max\{a, 0\}$ и запись $A(y) \asymp B(y)$ означают, что существуют положительные числа $C_1, C_2$, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$ такие, что $C_1 A(y) \le B(y) \le C_2 A(y)$. Для краткости записи в случае выполнения неравенств $B \ge C_1 A$ или $B \le C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно.

## 1. Вспомогательные утверждения

Следующее утверждение хорошо известно (см. [12]): *Пусть* $1 < p < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ *выполняется следующее соотношение*:

$$\|f\|_p \asymp \Big\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p .$$

**Теорема 1.1.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *выполняется соотношение*

$$\|f\|_{p,\tau} \asymp \Big\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{p,\tau} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Рассмотрим оператор $P$:

$$P(f, 2\pi\bar{x}) = \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f, 2\pi\bar{x})|^2 \Big)^{1/2}, \quad \bar{x} \in \mathbb{I}^m .$$

Известно, что $P$ является сублинейным оператором. По утверждению, сформулированному в начале раздела, этот оператор ограниченно действует в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$. Поэтому в силу интерполяционной теоремы С. Янсона [13] этот оператор ограничен в пространстве $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$ т. е. $\|P(f)\|_{p,\tau} \le C_2(p,\tau)\|f\|_{p,\tau}$ для любой функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$.

Противоположное неравенство следует из принципа двойственности. Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$. Тогда в силу ортогональности $\sigma_s(f, 2\pi\bar{x})$ имеем

$$\int_{\mathbb{I}^m} f(2\pi\bar{x}) g(2\pi\bar{x})\, d\bar{x} = \int_{\mathbb{I}^m} \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) \sigma_s(g, 2\pi\bar{x})\, d\bar{x}.$$

Далее, применяя неравенства Гельдера для суммы и интеграла, получим

$$\Big| \int_{\mathbb{I}^m} f(2\pi\bar{x}) g(2\pi\bar{x})\, d\bar{x} \Big| \le \Big\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{p,\tau} \Big\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(g)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{p',\tau'}$$

для любой функции $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$. Следовательно, учитывая ограниченность оператора $P$, имеем

$$\|f\|_{p,\tau} \asymp \sup_{\|f\|_{p',\tau'}\le 1} \left| \int\limits_{I^m} f(2\pi\bar{x}) g(2\pi\bar{x})\, d\bar{x} \right| \ll \left\| \Big( \sum_{s=0}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{p,\tau}.$$

Теорема доказана. □

**Лемма 1.1.** *Пусть* $1 < p < \infty,\ 1 < \tau \le 2$. *Тогда для произвольной системы функций* $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \Big( \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{p,\tau} \le C \Big( \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{p,\tau}^{\tau} \Big)^{1/\tau},$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $\varphi_j$ *и* $n$.

**Лемма 1.2.** *Пусть* $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$. *Тогда для произвольной системы функций* $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *справедливо неравенство*

$$\left\| \Big( \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{p,\tau} \le C \Big( \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{p,\tau}^{2} \Big)^{1/2},$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $\varphi_j$ *и* $n$.

Доказательства лемм 1.1 и 1.2 в многомерном случае аналогичны доказательствам лемм 4.2, 4.3 из [14] для одномерного случая в весовом пространстве Лоренца.

**Лемма 1.3.** *Пусть* $1 < p < \infty,\ 1 < \tau \le 2$ *или* $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau} \ll \Big( \sum_{s=0}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}^{\tau_0} \Big)^{1/\tau_0},$$

*где* $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$.

Доказательство. Пусть $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Тогда по теореме 1.1 имеем

$$\left\| \sum_{s=0}^{n} \sigma_s(f) \right\|_{p,\tau} \ll \left\| \Big( \sum_{s=0}^{n} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{p,\tau}.$$

Из этого неравенства в силу лемм 1.1 и 1.2 следует

$$\left\| \sum_{s=0}^{n} \sigma_s(f) \right\|_{p,\tau} \ll \Big( \sum_{s=0}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}^{\tau_0} \Big)^{1/\tau_0} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Известно, что ряд Фурье функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ сходится к ней по норме $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Поэтому в неравенстве (1.1) переходя к пределу при $n \to \infty$, получим утверждение леммы 1.3.

**Лемма 1.4.** *Пусть* $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$. *Тогда для произвольной системы функций* $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *имеет место неравенство*

$$\Big( \sum_{j=1}^{n} \|\varphi_j\|_{p,\tau}^{\tau} \Big)^{1/\tau} \ll \left\| \Big( \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{p,\tau},$$

*где константа* $C$ *не зависит от* $\varphi_j$ *и* $n$.

Доказательство. Известно, что $(f^*)^\theta = (|f|^\theta)^*$ для числа $\theta > 0$. Поэтому

$$\left\| \Big( \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^2 \Big)^{1/2} \right\|_{p,\tau} = \left[ \int\limits_{0}^{2\pi} \Big( \sum_{j=1}^{n} |\varphi_j|^2 \Big)^{*\,\tau/2}(t)\, t^{\tau/p-1}\, dt \right]^{1/\tau}.$$

Так как $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$, то в силу ограниченности оператора Харди в пространстве $L_{p/2,\tau/2}(\mathbb{T}^m)$ (см. [1, с. 229]) отсюда получим

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau} \gg \Big\{\int\limits_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{t}\int\limits_0^t\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Big)^*(u)\,du\Big]^{\tau/2}t^{\frac{\tau}{p}-1}\,dt\Big\}^{1/\tau}. \tag{1.2}$$

Известна формула

$$\int\limits_0^t f^*(u)\,du = \sup_{E\subset\mathbb{I}^m,\ \mu E=t}\int\limits_E|f(\bar{x})|\,d\bar{x},$$

где $\mu E$ — мера Лебега множества $E$.

В этой формуле, полагая $f = \sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2$, имеем

$$\int\limits_0^t\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Big)^*(u)\,du = \sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t\varphi_j^{*^2}(u)\,du. \tag{1.3}$$

Теперь, учитывая, что функция $\varphi_j^*$ — невозрастающая функция и $\tau \ge 2$, из неравенств (1.2) и (1.3) получим

$$\Big\|\Big(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{p,\tau} \gg \Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big(\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_0^t\varphi_j^*(u)\,du\Big)^{\tau/2}t^{\tau/p-1}\,dt\Big]^{1/\tau}$$

$$\gg \Big[\int\limits_0^{2\pi}\Big(\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{*^2}(t)\Big)^{\tau/2}t^{\tau/p-1}\,dt\Big]^{1/\tau} \ge C\Big(\int\limits_0^{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^{*^\tau}(t)t^{\tau/p-1}\,dt\Big)^{1/\tau} = C\Big(\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

Лемма 1.4 доказана. □

**Лемма 1.5.** *Пусть* $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *имеет место неравенство*

$$\Big(\sum_{s=0}^{\infty}\|\sigma_s\|_{p,\tau}^{\tau}\Big)^{1/\tau} \ll \|f\|_{p,\tau}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теоремы 1.1 и леммы 1.4.

## 2. Оценки наилучших приближений функций логарифмической гладкости

Теперь докажем один из основных результатов статьи — теорему 2.1. Для этого сформулируем вспомогательное утверждение, которое будет доказано в разд. 3.

**Лемма 2.1.** *Пусть* $1 < q < \lambda < \infty,\ 1 < \tau < +\infty$. *Если функция* $f \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$, *то*

$$\|f\|_{q,\tau} \ge C\Big(\sum_{s=0}^{\infty}2^{sm(1/\lambda-1/q)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_p^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

**Теорема 2.1.** *Пусть* $1 \le \theta \le \infty,\ 1 < p < \infty,\ 1 < \tau \le 2$ *или* $2 < p < \infty,\ 2 \le \tau < \infty$, $\tau_0 = \min\{\tau, 2\}$. *Если* $\alpha > (1/\tau_0 - 1/\theta)_+$, *то*

$$E_M(\mathbb{B}_{p,\tau,\theta}^{0,\alpha})_{p,\tau} \asymp \big(\log(M+1)\big)^{-\alpha+(1/\tau_0-1/\theta)_+},$$

*где* $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ и натуральное число $n$ такое, что $2^{n-1} \le M < 2^n$. Тогда по теореме 1.1 и лемме 1.3 имеем

$$E_M(f)_{p,\tau} \le E_{2^n}(f)_{p,\tau} \le \Big\| f - \sum_{s=0}^{n} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau}$$

$$= \Big\| \sum_{s=n}^{\infty} \sigma_s(f) \Big\|_{p,\tau} \ll \Big\| \Big( \sum_{s=n}^{\infty} |\sigma_s(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{p,\tau} \ll \Big( \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_0}_{p,\tau} \Big)^{1/\tau_0}. \qquad (2.1)$$

Если $\theta \le \tau_0$, то, применяя неравенство Йенсена (см. [15, с. 125]), из (2.1) получим

$$E_{2^n}(f)_{p,\tau} \ll \Big( \sum_{s=n}^{\infty} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau} \Big)^{1/\theta} \le C(n+1)^{-\alpha}$$

для любой функции $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ в случае $\theta \le \tau_0$. Следовательно,

$$E_{2^n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau} \ll (n+1)^{-\alpha} \qquad (2.2)$$

в случае $\theta \le \tau_0$.

Пусть $\tau_0 < \theta$. Тогда, применяя неравенство Гельдера ($\beta = \theta/\tau_0 > 1,\ 1/\beta + 1/\beta' = 1$) из (2.1), имеем

$$E_{2^n}(f)_{p,\tau} \ll \Big( \sum_{s=n}^{\infty} (s+1)^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau} \Big)^{1/\theta} \Big( \sum_{s=n}^{\infty} (s+1)^{-\alpha\tau_0\beta'} \Big)^{1/(\tau_0\beta')} \ll (n+1)^{-\alpha+1/\tau_0-1/\theta}.$$

Следовательно,

$$E_{2^n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau} \ll (n+1)^{-\alpha+1/\tau_0-1/\theta}, \qquad (2.3)$$

в случае $\tau_0 < \theta$. Так как $2^{n-1} \le M < 2^n$, то из (2.2), (2.3) вытекают оценки сверху.

Докажем оценки снизу. Пусть $\tau_0 < \theta$. Рассмотрим функцию

$$f_0(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-1/\theta} \sum_{s=n+1}^{2n} (s+1)^{-\alpha} 2^{-sm(1-1/p)} \sum_{\bar{k} \in \square_{2^s} \setminus \square_{2^{s-1}}} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle}, \quad \bar{x} \in \mathbb{I}^m, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

В силу оценки нормы ядра Дирихле в пространстве Лоренца имеем

$$\Big\| \sum_{\bar{k} \in \square_{2^s} \setminus \square_{2^{s-1}}} e^{i\langle \bar{k}, 2\pi\bar{x}\rangle} \Big\|_{p,\tau} \asymp 2^{nm(1-1/p)}, \quad 1 < p, \quad \tau < \infty. \qquad (2.4)$$

Поэтому

$$\Big( \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f_0)\|^{\theta}_{p,\tau} \Big)^{1/\theta} = \Big( \sum_{s=n+1}^{2n} (s+1)^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f_0)\|^{\theta}_{p,\tau} \Big)^{1/\theta} \le C_0.$$

Таким образом, функция $C_0^{-1} f_0 \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$ для $1 < p, \tau < \infty,\ 1 \le \theta < \infty$.

Пусть $2 \le p < \infty,\ 1 < \tau \le 2$, т.е. $\tau_0 = \tau$. Выберем число $q \in (p, \infty)$. Теперь лемму 2.1 применяем к функции $C_0^{-1} f_0 \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Тогда, учитывая оценку нормы ядра Дирихле (соотношение (2.4) при $p = \tau = \lambda$), получим

$$E_{2^n}(C_0^{-1} f_0)_{p,\tau} = C_0^{-1} \|f_0\|_{p,\tau} \gg \Big( \sum_{s=n+1}^{2n} 2^{sm(1/q-1/p)\tau} \|\sigma_s(f_0)\|^{\tau}_{q,\tau_2} \Big)^{1/\tau}$$

$$\gg (n+1)^{-1/\theta} \Big( \sum_{s=n+1}^{2n} (s+1)^{-\alpha\tau} \Big)^{1/\tau} \ge C(n+1)^{-\alpha+1/\tau-1/\theta}.$$

Таким образом,
$$E_{2^n}(C_0^{-1}f_0)_{p,\tau} \gg (n+1)^{-\alpha+1/\tau-1/\theta}$$
при $1<p<\infty,\ 1<\tau<\infty$. Следовательно,
$$E_{2^n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau} \gg (n+1)^{-\alpha+1/\tau-1/\theta} \tag{2.5}$$
при $1<p<\infty,\ 1<\tau<\infty$. Это неравенство показывает точность оценки в теореме 2.1 при $1<\tau\le 2$, $\tau_0=\min\{\tau,2\}<\theta$, $1<p<\infty$.

Докажем оценку снизу в случае $2<p<\infty,\ 2\le\tau<\infty$. Рассмотрим функцию
$$f_1(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-1/\theta}\sum_{s=n+1}^{2n}(s+1)^{-\alpha}2^{-sm/2}\prod_{j=1}^{m}R_s(x_j),$$
где $R_s(x_j)=\sum_{k=2^{s-1}}^{2^s-1}\varepsilon_k e^{ik2\pi x}$ — полином Рудина — Шапиро и $\varepsilon_k=\pm1$. Известно, что $\|R_s\|_\infty\ll 2^{s/2}$. Поэтому
$$\|\sigma_s(f_1)\|_{p,\tau} = (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-\alpha}2^{-sm/2}\Big\|\prod_{j=1}^{m}R_s(x_j)\Big\|_{p,\tau}$$
$$\le (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-\alpha}2^{-sm/2}\prod_{j=1}^{m}\|R_s(x_j)\|_\infty \ll (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-\alpha}.$$
Следовательно,
$$\Big(\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_1)\|^\theta_{p,\tau}\Big)^{1/\theta} = \Big(\sum_{s=n+1}^{2n}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_1)\|^\theta_{p,\tau}\Big)^{1/\theta}\le C_1,$$
т. е. функция $C_1^{-1}f_1\in\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Так как $2<p<\infty,\ 2\le\tau<\infty$, то $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)\subset L_2(\mathbb{T}^m)$ и $\|f\|_2\le C\|f\|_{p,\tau},\ f\in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$. Поэтому, учитывая равенство Парсеваля, получим
$$E_{2^n}(C_1^{-1}f_1)_{p,\tau} = C_1^{-1}\|f\|_{p,\tau}\gg\|f_1\|_2\gg(n+1)^{-1/\theta}\Big(\sum_{s=n+1}^{2n}(s+1)^{-2\alpha}\Big)^{1/2}\gg(n+1)^{-\alpha+1/2-1/\theta} \tag{2.6}$$
при $2<\tau,\ p<\infty$.

Теперь докажем оценку снизу в случае $\theta\le\tau_0$. Рассмотрим функцию
$$f_2(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-\alpha}2^{-nm(1-1/p)}\sum_{\bar{k}\in\square_{2^{n+1}}\setminus\square_{2^n}}e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle},\quad \bar{x}\in\mathbb{I}^m,\quad n\in\mathbb{N}_0.$$
Тогда в силу (2.4) имеем
$$\Big(\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_n)\|^\theta_{p,\tau}\Big)^{1/\theta} = 2^{-nm(1-1/p)}\Big\|\sum_{\bar{k}\in\square_{2^{n+1}}\setminus\square_{2^n}}e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle}\Big\|_{p,\tau}\le C_1.$$
Следовательно, функция $C_2^{-1}f_2\in\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta}$. Теперь, пользуясь соотношением (2.4), будем иметь $E_{2^n}(C_2^{-1}f_2)_{p,\tau}=\|C_2^{-1}f_2\|_{p,\tau}\gg(n+1)^{-\alpha}$. Отсюда
$$E_{2^n}(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau}\gg(n+1)^{-\alpha} \tag{2.7}$$
в случае $\theta\le\tau_0$ для $1<p<\infty,\ 1<\tau<\infty$. Так как по выбору $2^{n-1}\le M<2^n$, то из (2.5)–(2.7) следует, что $E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau,\theta})_{p,\tau}\gg(\log(M+1))^{-\alpha+(1/\tau_0-1/\theta)_+}$ для $1<p<\infty,\ 1<\tau\le 2$ или $2<p<\infty,\ 2<\tau<\infty$, $1\le\theta<\infty$. Теорема доказана. □

З а м е ч а н и е 1. В случае $\tau=p$ из теоремы 2.1 следует результат С. А. Стасюка [7].

## 3. Оценки порядка приближений функций логарифмической гладкости в пространстве Лоренца в разных метриках

Рассмотрим кратный тригонометрический полином

$$T_{\bar n}(\bar x) = T_{n_1,\dots,n_m}(\bar x) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \dots \sum_{k_m=-n_m}^{n_m} a_{\bar k} e^{i\langle \bar k, \bar x\rangle},$$

где $n_j \in \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел и $j = 1,\dots,m$.

Для пространства Лоренца известно, что $L_{p,q_1}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,q_2}(\mathbb{T}^m)$, если $q_1 < q_2,\ 1 < p < \infty$.

В этом случае неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов в одномерном случае доказала Л. А. Шерстнева [11, лемма 10]. Докажем многомерный вариант ее результата [11, лемма 10 при $\psi(t) = t^{1/p}$].

**Лемма 3.1.** *Пусть $1 < q_1 < q_2 < \infty$, $1 < p < \infty$. Тогда для любого тригонометрического полинома $T_{\bar n}$ имеет место неравенство*

$$\|T_{\bar n}\|_{p,q_1} \ll \Big(\ln \prod_{j=1}^{m} (n_j + 1)\Big)^{1/q_1 - 1/q_2} \|T_{\bar n}\|_{p,q_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для пространства $L_{p,q_2}(\mathbb{T}^m)$ фундаментальная функция $\varphi(t) = t^{1/p}$, то по лемме 5 из [16] справедливо неравенство

$$\|T_{\bar n}\|_\infty = \max_{\bar x \in \mathbb{T}^m} |T_{\bar n}(\bar x)| \ll \Big(\prod_{j=1}^{m} (n_j+1)\Big)^{1/p} \|T_{\bar n}\|_{p,q_2}. \tag{3.1}$$

Пусть числа $\nu_j \in \mathbb{N}$ такие, что $2^{\nu_j - 1} \le n_j < 2^{\nu_j}$, $j = 1,\dots,m$. Введем обозначение $V = \sum_{j=1}^m \nu_j$. Тогда

$$\|T_{\bar n}\|_{p,q_1}^{q_1} = \int_0^1 (T_{\bar n}(t))^{q_1} t^{q_1/p - 1}\, dt = \int_0^{2^{-V}} (T_{\bar n}(t))^{q_1} t^{q_1/p-1}\, dt + \int_{2^{-V}}^1 (T_{\bar n}(t))^{q_1} t^{q_1/p-1}\, dt = I_1 + I_2. \tag{3.2}$$

Оценим $I_2$. Так как $\theta = q_2/q_1 > 1$, $\theta' = \theta/(\theta - 1)$, то, применяя неравенство Гельдера, получим

$$I_2 = \int_{2^{-V}}^1 (T_{\bar n}(t))^{q_1} t^{q_1/p - 1/\theta} t^{-1/\theta'}\, dt$$

$$= \Big(\int_{2^{-V}}^1 (T_{\bar n}(t))^{q_2} t^{q_2/p-1}\, dt\Big)^{q_1/q_2} \Big(\int_{2^{-V}}^1 t^{-1}\Big)^{1/\theta'} \le \|T_{\bar n}\|_{p,q_2}^{q_1} \big(\ln 2^V\big)^{1/\theta'}. \tag{3.3}$$

По выбору $2^{\nu_j - 1} \le n_j,\ j = 1,\dots,m$, следовательно, $\nu_j \le 1 + \log n_j,\ j = 1,\dots,m$. Поэтому из неравенства (3.3) вытекает

$$I_2 \le (\ln 2)^{1 - q_1/q_2} \Big(\log \Big(1 + \prod_{j=1}^m n_j\Big)\Big)^{1 - q_1/q_2} \|T_{\bar n}\|_{p,q_2}^{q_1}. \tag{3.4}$$

Оценим $I_1$. По свойству невозрастающей перестановки функции

$$T_{\bar n}^*(t) \le \frac{1}{t} \int_0^t T_{\bar n}^*(u)\, du = \frac{1}{t} \sup_{|e|=t} \int_e |T_{\bar n}(\bar x)|\, d\bar x \le \|T_{\bar n}\|_\infty,$$

в силу этого имеем

$$I_1 \le \|T_{\bar n}\|_\infty^{q_1} \int\limits_{2^{-V}}^{1} t^{q_1/p-1}\,dt = \frac{p}{q_1}\|T_{\bar n}\|_\infty^{q_1} 2^{-Vq_1/p}.$$

Далее, пользуясь неравенством (3.1) и учитывая, что $n_j \le 2^{\nu_j}$, $j = 1, \dots, m$, из (3.3) получим

$$I_1 \ll \Big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{q_1/p} \|T_{\bar n}\|_{p,q_2}^{q_1} 2^{-Vq_1/p}$$

$$\ll \Big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{q_1/p} \|T_{\bar n}\|_{p,q_2}^{q_1} \Big(\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{-q_1/p} \ll 2^{mq_1/p}\|T_{\bar n}\|_{p,q_2}^{q_1}. \qquad (3.5)$$

Теперь из неравенств (3.2), (3.4) и (3.5) вытекает, что

$$\|T_{\bar n}\|_{p,q_1} \ll \bigg[\bigg(\log\Big(1+\prod_{j=1}^m n_j\Big)\bigg)^{1/q_1-1/q_2} + 1\bigg]\|T_{\bar n}\|_{p,q_2} \ll \bigg[\Big(\log\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)\bigg]^{1/q_1-1/q_2}\|T_{\bar n}\|_{p,q_2}.$$

Лемма доказана. □

**Следствие.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < q_1 < q_2 < \infty$. *Тогда для любого числа* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо соотношение*

$$\sup_{T_{n,\dots,n}} \frac{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_1}}{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}} \asymp \big(\ln(n+1)\big)^{1/q_1-1/q_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $n_1 = \dots = n_m = n$, то по лемме 3.1 имеем

$$\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_1} \le Cm^{1/q_1-1/q_2}\big(\ln(n+1)\big)^{1/q_1-1/q_2}\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}. \qquad (3.6)$$

Следовательно,

$$\sup_{T_{n,\dots,n}} \frac{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_1}}{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}} \ll \big(\ln(n+1)\big)^{1/q_1-1/q_2}.$$

Для доказательства обратной оценки рассмотрим полином

$$D_{n,\dots,n}(2\pi\bar x) = \prod_{j=2}^m e^{in2\pi x_j} \sum_{k_1=1}^n \frac{\sin k_1 2\pi x_1}{k_1^{1-1/p}}$$

порядка $n$ по каждой переменной. Так как $|e^{in2\pi x}| = 1$, то

$$|D_{n,\dots,n}(2\pi\bar x)| = \bigg|\sum_{k_1=1}^n \frac{\sin k_1 2\pi x_1}{k_1^{1-1/p}}\bigg|$$

для всех $\bar x \in \mathbb{I}^m$. Таким образом,

$$\|D_{n,\dots,n}\|_{p,q} = \|D^*_{n,\dots,n}\|_{p,q} = \bigg\|\sum_{k_1=1}^n \frac{\sin k_1 2\pi x_1}{k_1^{1-1/p}}\bigg\|_{p,q} \qquad (3.7)$$

для $1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$. Л. А. Шерстневой [11, лемма 11 при $\psi(t) = t^{1/p}$] доказано соотношение

$$\bigg\|\sum_{k_1=1}^n \frac{\sin k_1 2\pi x_1}{k_1^{1-1/p}}\bigg\|_{p,q} \asymp \big(\ln(n+1)\big)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty.$$

Поэтому из равенства (3.7) следует, что

$$\|D_{n,\dots,n}\|_{p,q} \asymp \big(\ln(n+1)\big)^{1/q}, \quad 0<q<\infty.$$

Теперь, пользуясь этим соотношением, будем иметь

$$\sup_{T_{n,\dots,n}} \frac{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_1}}{\|T_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}} \geq \frac{\|D_{n,\dots,n}\|_{p,q_1}}{\|D_{n,\dots,n}\|_{p,q_2}} \gg \big(\ln(n+1)\big)^{1/q_1-1/q_2}.$$

Следствие доказано. □

З а м е ч а н и е 2. Это следствие показывает точность оценки в лемме 3.1 при $n_1=\dots=n_m=n$. Отметим, что при $m=1$ аналог следствия для обобщенного пространства Лоренца доказан Л. А. Шерстневой [11, лемма 10] и неравенство (3.6) приведено в [17, теорема 3.3].

**Лемма 3.2.** *Пусть $1<p<\infty$, $1<\tau_2<\tau_1<+\infty$ и $\{u_n\}$ — последовательность $2\pi$-периодических, неотрицательных измеримых на кубе $\mathbb{T}^m=[0,2\pi]^m$ функций, удовлетворяющих условиям*

1) $\|u_n\|_{p,\tau_1}\leq\lambda_n$, $\lambda_{n+1}\leq\beta\lambda_n$, $\beta\in(0,1)$, $n\in\mathbb{N}$;

2) *существует последовательность положительных чисел $\{\Delta_n\}$ такая, что для любого $\theta\in(0,\tau_1)$ имеет место неравенство $\|u_n\|_{p,\theta}\ll\Delta_n^{1/\theta-1/\tau_1}\lambda_n$, $n=1,2,3,\dots$. Тогда если $f(\bar{x})=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(\bar{x})$, то*

$$\|f\|_{p,\tau_2}\ll\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\Delta_n^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\lambda_n^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}.$$

Эта лемма доказывается как в одномерном случае повторением рассуждений леммы 13 из [11].

**Теорема 3.1.** *Пусть $1<p<\infty$, $1<\tau_2<\tau_1<\infty$. Если $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ и*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}E^{\tau_2}_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_1}<+\infty, \tag{3.8}$$

*то $f\in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ и*

$$\|f\|_{p,\tau_2}\ll\bigg[\|f\|_{p,\tau_1}+\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}E^{\tau_2}_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}\bigg], \tag{3.9}$$

$$E_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_2}\ll\bigg[(\ln(n+1))^{1/\tau_2-1/\tau_1}E_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_1}+\Big(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^{\tau_2/\tau_1}}E^{\tau_2}_{k,\dots,k}(f)_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}\bigg]. \tag{3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. Введем обозначение $E_{n,\dots,n}(f)_{p,\tau_1}\equiv\varepsilon_n$, $n\in\mathbb{N}$. Так как $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to+\infty$, то существует последовательность номеров $\{n_\nu\}$ такая, что

$$\varepsilon_{n_{\nu+1}}<1/2\,\varepsilon_{n_\nu}, \quad \varepsilon_{n_{\nu+1}-1}\geq 1/2\,\varepsilon_{n_\nu}, \quad \nu=1,2,\dots. \tag{3.11}$$

Поскольку $\varepsilon_n\downarrow 0$ при $n\to+\infty$ и по выбору номера $n_{\nu+1}$, $\varepsilon_{n_{\nu+1}-1}\geq 1/2\varepsilon_{n_\nu}$, то

$$\sum_{n=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}\varepsilon_n^{\tau_2}\geq\varepsilon^{\tau_2}_{n_{\nu+1}-1}\sum_{n=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}$$

$$\geq 2^{-\tau_2}\varepsilon^{\tau_2}_{n_\nu}\int\limits_{n_\nu}^{n_{\nu+1}}\frac{1}{x(\ln x)^{\tau_2/\tau_1}}\,dx=\frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}2^{-\tau_2}\varepsilon^{\tau_2}_{n_\nu}\Big[(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1}-(\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big].$$

Таким образом,

$$\sum_{n=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} \frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}\varepsilon_n^{\tau_2} \geq \frac{\tau_1}{\tau_1-\tau_2}2^{-\tau_2}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big[(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1} - (\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big]$$

для $\nu = 2, 3, \dots$. Следовательно,

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big[(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1} - (\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big] \leq 2^{\tau_2}\frac{\tau_1-\tau_2}{\tau_1}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}\varepsilon_n^{\tau_2}.$$

Поэтому в силу условия (3.8) ряд

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big[(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1} - (\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big] < \infty. \tag{3.12}$$

Применяя преобразование Абеля и (3.11), будем иметь

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}(\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1} \ll \Big[(\ln n_2)^{1-\tau_2/\tau_1}\varepsilon_{n_1}^{\tau_2} + \sum_{\nu=2}^{\infty}\Big((\ln n_{\nu+1})^{1-\tau_2/\tau_1} - (\ln n_\nu)^{1-\tau_2/\tau_1}\Big)\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big]. \tag{3.13}$$

Пусть $T_{n,\dots,n}(f,\bar{x}) \equiv T_n(f,\bar{x})$ — тригонометрический полином наилучшего приближения функции $f \in L_{p,\,\tau_1}(\mathbb{T}^m),\ 1 < p, \tau_1 < +\infty$. Рассмотрим ряд

$$T_{n_1}(f,\bar{x}) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\big(T_{n_{\nu+1}}(f,\bar{x}) - T_{n_\nu}(f,\bar{x})\big). \tag{3.14}$$

Докажем, что этот ряд сходится по норме пространства $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$. Положим $u_\nu(\bar{x}) = |T_{n_{\nu+1}}(f,\bar{x}) - T_{n_\nu}(f,\bar{x})|$, $\nu = 1, 2, \dots$. Тогда $\|u_\nu\|_{p,\tau_1} \leq 2\varepsilon_{n_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$, и по лемме 3.1 $\|u_\nu\|_{p,\theta} \leq C(\ln n_{\nu+1})^{1/\theta - 1/\tau_1}\varepsilon_{n_\nu}$, $\nu = 1, 2, \dots$, для любого $\theta \in (0, \tau_1)$. Следовательно, по лемме 3.2 получим

$$\Big\|\sum_{\nu=s+1}^{l}\big(T_{n_{\nu+1}}(f) - T_{n_\nu}(f)\big)\Big\|_{p,\tau_2} \leq \Big\|\sum_{\nu=s+1}^{l} u_\nu\Big\|_{p,\tau_2} \ll \Big(\sum_{\nu=s+1}^{l}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2} \tag{3.15}$$

для $l \in \mathbb{N},\ l > s = 0, 1, 2, \dots$.

В силу (3.12) и (3.13) из (3.15) вытекает, что последовательность $\{T_{n_\nu}(f)\} \subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ фундаментальна в пространстве $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$. Таким образом, в силу полноты пространства $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ существует функция $g \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ такая, что $\|g - T_{n_\nu}(f)\|_{p,\tau_2} \to 0$ при $\nu \to +\infty$, т. е. ряд (3.14) сходится. Этот же ряд сходится к функции $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. Поэтому $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$ почти всюду. Следовательно, $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Теперь в неравенстве (3.15), полагая $s = 0$, будем иметь

$$\big\|T_{n_{l+1}}(f) - T_{n_1}(f)\big\|_{p,\tau_2} \ll \Big(\sum_{\nu=1}^{l}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}.$$

Тогда по свойству нормы и лемме 3.1 выводим

$$\big\|T_{n_{l+1}}(f)\big\|_{p,\tau_2} \leq \big\|T_{n_{l+1}}(f) - T_{n_1}(f)\big\|_{p,\tau_2} + \big\|T_{n_1}(f)\big\|_{p,\tau_2}$$

$$\ll \Big[(\ln 2)^{1/\tau_2-1/\tau_1}\big\|T_{n_1}(f)\big\|_{p,\tau_1} + \Big(\sum_{\nu=1}^{l}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big]$$

$$\ll \Big[\|f\|_{p,\tau_1} + \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big]$$

для любого $l\in\mathbb{N}$. В этом неравенстве, переходя к пределу при $l\to+\infty$, получим

$$\|f\|_{p,\tau_2} \ll \Big[\|f\|_{p,\tau_1} + \Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}(\ln n_{\nu+1})^{\tau_2(1/\tau_2-1/\tau_1)}\varepsilon_{n_\nu}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big]. \tag{3.16}$$

Из неравенств (3.13), (3.16) следует, что

$$\|f\|_{p,\tau_2} \ll \Big[\|f\|_{p,\tau_1} + \Big((\ln n_2)^{1-\tau_2/\tau_1}E_{n_1}(f)_{p,\tau_1}^{\tau_2} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}E_n(f)_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big]$$

$$\ll \Big[\|f\|_{p,\tau_1} + \Big(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\tau_2/\tau_1}}E_n(f)_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}\Big].$$

Неравенство (3.9) доказано.

Теперь, применяя это неравенство к функции $f - T_n(f)\in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$, нетрудно доказать оценку (3.10). Теорема доказана. $\square$

**Теорема 3.2.** *Пусть* $1<p<\infty$, $1<\tau_2<\tau_1\le 2$ *или* $2\le p<\infty$, $1<\tau_2\le 2<\tau_1<\infty$. *Если* $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}<\infty,$$

*то* $f\in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau_2} \ll \Big[\sum_{s=0}^{\infty}(s+1)^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big]^{1/\tau_2}.$$

Доказательство. Пусть $f\in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. С учетом монотонности наилучшего приближения и свойства нормы нетрудно убедиться, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{-\tau_2/\tau_1}}{n}E_{n,\dots,n}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1} \le C\sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}E_{2^{2^\nu},\dots,2^{2^\nu}}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1}$$

$$\ll \sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big\|\sum_{l=\nu}^{\infty}\sum_{s=2^l+1}^{2^{l+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big(\sum_{l=\nu}^{\infty}\Big\|\sum_{s=2^l+1}^{2^{l+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}\Big)^{\tau_2}. \tag{3.17}$$

Так как $\tau_2<\tau_1$, то

$$\sum_{\nu=0}^{n}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2} \le C2^{n(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}, \quad n\in\mathbb{N}_0.$$

Исходя из этого в силу леммы 2.2 в [18] из (3.17) имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{-\tau_2/\tau_1}}{n}E_{n,\dots,n}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty}2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big\|\sum_{s=2^\nu}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}. \tag{3.18}$$

Если $1<p<\infty$, $1<\tau_1\le 2$, то по лемме 1.3

$$\Big\|\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1} \ll \Big(\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_1}\Big)^{1/\tau_1}.$$

Поэтому, учитывая, что $\tau_2 < \tau_1$, и, применяя неравенство Йенсена (см. [15, с. 125]), получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big\|\sum_{s=2^\nu}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big(\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_1}\Big)^{\tau_2/\tau_1}$$

$$\ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\sum_{s=2^\nu}^{2^{\nu+1}}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}. \tag{3.19}$$

Соответственно из неравенства (3.18) следует, что

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{-\tau_2/\tau_1}}{n}E_{n,\dots,n}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1} \ll \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \tag{3.20}$$

в случае $1 < p < \infty$, $1 < \tau_1 \le 2$.

Пусть $2 \le p < \infty$, $2 \le \tau_1 < \infty$. Тогда согласно лемме 1.3

$$\Big\|\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1} \ll \Big(\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{2}\Big)^{1/2}.$$

Поэтому, учитывая, что $\tau_2 \le 2$, и, применяя неравенство Йенсена, получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big\|\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big(\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{2}\Big)^{\tau_2/2}$$

$$\ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \ll \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}. \tag{3.21}$$

Таким образом, из формулы (3.18) будем иметь

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^{-\tau_2/\tau_1}}{n}E_{n,\dots,n}^{\tau_2}(f)_{p,\tau_1} \ll \sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} \tag{3.22}$$

в случае $2 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \le 2 \le \tau_1 < \infty$.

Теперь в силу неравенств (3.20) и (3.22) выполняется условие (3.8) теоремы 3.1. Следовательно, функция $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Докажем оценку нормы $\|f\|_{p,\tau_2}$. По свойству нормы и в силу неравенства Гельдера

$$\|f\|_{p,\tau_1} \le \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big\|\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_2} \ll \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\Big\|\sum_{s=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}}\sigma_s(f)\Big\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}.$$

Теперь, пользуясь неравенствами (3.19) и (3.21), отсюда получим

$$\|f\|_{p,\tau_1} \ll \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}. \tag{3.23}$$

Из формул (3.20)–(3.23) следует, что

$$\|f\|_{p,\tau_2} \ll \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2-1/\tau_1)\tau_2}\|\sigma_s(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}.$$

Теорема доказана. □

**Теорема 3.3.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $2 \le \tau < \infty$ *или* $1 < p < 2$, $1 < \tau \le 2$. *Если* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *и* $\lambda \in (1, \tau)$, *то имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau} \gg \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau - 1/\lambda)\tau} \|\sigma_s(f)\|_{p,\lambda}^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

Доказательство. По условию теоремы $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, $1 < p, \tau < +\infty$. Поэтому

$$\|f\|_{p,\tau} \ge \sup_{\|g\|_{p',\tau'} \le 1} \int\limits_{\mathbb{I}^m} f(2\pi\bar{x}) g(2\pi\bar{x})\, d\bar{x}, \tag{3.24}$$

где $1/p + 1/p' = 1$, $1/\tau + 1/\tau' = 1$. Пусть $g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)$ и

$$g(2\pi\bar{x}) \sim \sum_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(g) e^{i\langle \overline{n}, 2\pi\overline{x}\rangle}.$$

Тогда из формулы (3.24) в силу ортогональности $\{\sigma_s(f, 2\pi\bar{x})\}$ имеем

$$\|f\|_{p,\tau} \ge \sup_{\|g\|_{p',\tau'} \le 1} \int\limits_{\mathbb{I}^m} \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) \sigma_s(g, 2\pi\bar{x})\, d\bar{x}. \tag{3.25}$$

Рассмотрим множество $G_{p',\lambda'}(\varepsilon) = \big\{g \in L_{p',\tau'}(\mathbb{T}^m)\colon \|\sigma_s(f)\|_{p',\lambda'} \le \varepsilon_s,\ s \in \mathbb{N}_0\big\}$, где $1/\lambda + 1/\lambda' = 1$ и числовая последовательность $\{\varepsilon_s\}$ удовлетворяет условию

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau' - 1/\lambda')\tau'} \varepsilon_s^{\tau'}\Big)^{1/\tau'} \le 1.$$

Множество таких последовательностей $\{\varepsilon_s\}$ обозначим через $\Lambda$. Тогда по теореме 3.2 $\|g\|_{p',\lambda'} \le 1$. Поэтому из формулы (3.25) следует, что

$$\|f\|_{p,\tau} \ge \sup_{\{\varepsilon_s\} \in \Lambda} \sup_{g \in G_{p',\lambda'}(\varepsilon)} \int\limits_{\mathbb{I}^m} \sum_{s=0}^{\infty} \sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) \sigma_s(g, 2\pi\bar{x})\, d\bar{x}$$

$$= \sup_{\{\varepsilon_s\} \in \Lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \sup_{g \in G_{p',\lambda'}(\varepsilon)} \int\limits_{\mathbb{I}^m} \sigma_s(f, 2\pi\bar{x}) \sigma_s(g, 2\pi\bar{x})\, d\bar{x} = \sup_{\{\varepsilon_s\} \in \Lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau}$$

$$= \sup_{\{\varepsilon_s\} \in \Lambda} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{(1/\tau' - 1/\lambda')} \varepsilon_s (s+1)^{(1/\tau - 1/\lambda)} \|\sigma_s(f)\|_{p,\tau} = \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau - 1/\lambda)\tau} \|\sigma_s(f)\|_{p,\lambda}^{\tau}\Big)^{1/\tau}.$$

Теорема доказана. □

**Теорема 3.4.** *Пусть* $1 \le \theta < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 < \tau_1 \le 2$ *или* $2 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \le 2 < \tau_1 < \infty$. *Если* $\alpha > \big(1/\tau_2 - 1/\tau_1\big) + \big(1/\tau_2 - 1/\theta\big)_+$, *то*

$$E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2} << (\log(M+1))^{-\alpha + (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)_+},\ M \in \mathbb{N}.$$

*В случае* $\theta \le \tau_2$, *эта оценка точна по порядку.*

*Если* $\tau_2 < \theta$, *то справедлива оценка снизу*

$$E_M(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta})_{p,\tau_2} >> (\log(M+1))^{-\alpha + (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)_+},\ M \in \mathbb{N}$$

*при* $1 < p < 2$, $1 < \tau_2 \le 2$ *или* $1 < p < \infty$, $2 < \tau_2 < \infty$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$. Если $\tau_2 < \theta$, то, применяя неравенство Гельдера ($\beta = \theta/\tau_2, 1/\beta + 1/\beta' = 1$), получим

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}$$

$$\le \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta} \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{-\big(\alpha - (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)\big)\tau_2\beta'}\Big)^{1/(\tau_2\beta')}. \qquad (3.26)$$

Если $\theta \le \tau_2$, то, учитывая, что $\alpha > (1/\tau_2 - 1/\tau_1)$ согласно неравенству Йенсена [15, с. 125], имеем

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2} \le \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta}. \qquad (3.27)$$

Так как по условию теоремы $\alpha > (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)_+$, то из неравенств (3.26), (3.27) вытекает, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1} < \infty$$

для любой функции $f \in B^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$. Следовательно, $B^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta} \subset L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$.

Далее, пользуясь неравенством (3.25) и повторяя рассуждения доказательств (3.26) и (3.27), нетрудно убедиться, что

$$E_{2^n}(f)_{p,\tau_2} \le \Big(\sum_{s=n+1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}$$

$$\le \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta} \Big(\sum_{s=n+1}^{\infty} s^{-\big(\alpha - (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)\big)\tau_2\beta'}\Big)^{1/(\tau_2\beta')}$$

$$\ll (n+1)^{-\big(\alpha - (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)\big)} \qquad (3.28)$$

для любой функции $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ в случае $\tau_2 < \theta$ и

$$E_{\square_{2^n}}(f)_{p,\tau_2} \le C\Big(\sum_{s=n+1}^{\infty} s^{(1/\tau_2 - 1/\tau_1)\tau_2} \|\sigma_s(f)\|^{\tau_2}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\tau_2}$$

$$\ll \Big(\sum_{s=1}^{\infty} s^{\alpha\theta} \|\sigma_s(f)\|^{\theta}_{p,\tau_1}\Big)^{1/\theta} \le (n+1)^{-\alpha + (1/\tau_2 - 1/\tau_1)} \qquad (3.29)$$

для любой функции $f \in \mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ в случае $\theta \le \tau_2$.

Таким образом, из оценок (3.28) и (3.29) следует, что

$$E_{2^n}\big(\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}\big)_{p,\tau_2} \ll (n+1)^{-\big(\alpha - (1/\tau_2 - 1/\tau_1) + (1/\tau_2 - 1/\theta)_+\big)}.$$

Этим оценка сверху доказана.

Докажем оценки снизу. Пусть $\tau_2 < \theta$. Рассмотрим функцию

$$f_3(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-1/\theta} \sum_{s=n+1}^{2n} (s+1)^{-(\alpha + m/\tau_1)} \prod_{j=2}^{m} e^{i2\pi x_j 2^{s-1}} \sum_{k_1 = 2^{s-1}}^{2^s - 1} (k_1 - 2^{s-1} + 1)^{1/p - 1} e^{i2\pi x_1 k_1},$$

где $\bar{x} \in \mathbb{I}^m,\ n \in \mathbb{N}_0$. Тогда

$$\|\sigma_s(f_3)\|_{p,\tau_1} = (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-(\alpha + m/\tau_1)} \Big\| \prod_{j=2}^{m} e^{i2\pi x_j 2^{s-1}} \sum_{k_1 = 2^{s-1}}^{2^s - 1} (k_1 - 2^{s-1} + 1)^{1/p - 1} e^{i2\pi x_1 k_1} \Big\|_{p,\tau_1}$$

$$= (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-(\alpha+m/\tau_1)}\Big\|\sum_{k_1=2^{s-1}}^{2^s-1}(k_1-2^{s-1}+1)^{1/p-1}e^{i2\pi x_1k_1}\Big\|_{p,\tau_1}$$

$$\asymp (n+1)^{-1/\theta}(s+1)^{-\alpha} \tag{3.30}$$

для $1 < p, \tau_1 < \infty$, $s \in \mathbb{N}_0$. В силу непрерывности функция $f_3 \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$, и, используя соотношение (3.30), получим

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty}s^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_3)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta} = \Big(\sum_{s=n+1}^{2n}s^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_3)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta} \le C_3.$$

Следовательно, функция $C_3^{-1}f_3 \in \mathbb{B}_{p,\tau_1,\theta}^{0,\alpha}$. Теперь в силу теоремы 3.3 имеем

$$E_{2^n}(C_3^{-1}f_3)_{p,\tau_2} = C_3^{-1}\|f_2\|_{p,\tau_2} \gg \Big(\sum_{s=n}^{\infty}s^{(1/\tau_2-1/\lambda)\tau_2}\|\sigma_s(f_2)\|_{p,\lambda}^{\tau_2}\Big)^{1/\tau_2}$$

при условиях $1 < p < \infty$, $2 \le \tau_2 < \infty$ или $1 < p < 2$, $1 < \tau_2 \le 2$ и $1 < \lambda < \tau_2 < \infty$.

Далее, пользуясь соотношением (3.30), получим

$$E_{2^n}(f_3)_{p,\tau_2} \gg (n+1)^{-1/\theta}\Bigg[\sum_{s=n}^{2n}s^{(1/\tau_2-1/\lambda)\tau_2}(s+1)^{-(\alpha+m/\tau_1)}\Big\|\sum_{k_1=2^{s-1}}^{2^s-1}(k_1-2^{s-1}+1)^{1/p-1}e^{ik_12\pi x_1}\Big\|_{p,\lambda}^{\tau_2}\Bigg]^{1/\tau_2}$$

$$\gg (n+1)^{-1/\theta}\Big(\sum_{s=n}^{2n}s^{((1/\tau_2-1/\tau_1)-\alpha)\tau_2}\Big)^{1/\tau_2} \ge C(n+1)^{-\alpha+(1/\tau_2-1/\tau_1)+1/\tau_2-1/\theta}.$$

Таким образом,

$$E_{2^n}\big(\mathbb{B}_{p,\tau_1,\theta}^{0,\alpha}\big)_{p,\tau_2} \ge C(n+1)^{-\alpha+(1/\tau_2-1/\tau_1)+1/\tau_2-1/\theta}$$

в случае $\tau_2 < \theta$.

Пусть $\theta \le \tau_2$. Рассмотрим функцию

$$f_4(2\pi\bar{x}) = (n+1)^{-(\alpha+m/\tau_1)}\sum_{\bar{k}\in\square_{2^n}\setminus\square_{2^{n-1}}}\prod_{j=1}^{m}(k_j-2^{s-1}+1)^{1/p-1}e^{i\langle\bar{k},2\pi\bar{x}\rangle},$$

где $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$, $n \in \mathbb{N}_0$. В силу непрерывности функции $f_4 \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$, и, используя соотношение (3.30), получим

$$\Big(\sum_{s=1}^{\infty}s^{\alpha\theta}\|\sigma_s(f_4)\|_{p,\tau_1}^{\theta}\Big)^{1/\theta} = n^{\alpha}\|\sigma_n(f_3)\|_{p,\tau_1} \le C_4.$$

Соответственно, функция $C_4^{-1}f_4 \in \mathbb{B}_{p,\tau,\theta}^{0,\alpha}$. Далее, учитывая определение наилучшего приближения и снова применяя соотношение (3.30), имеем

$$E_{2^n}(C_4^{-1}f_4)_{p,\tau_2} = \|C_4^{-1}f_4\|_{p,\tau_2} \gg (n+1)^{-\alpha+m(1/\tau_2-1/\tau_1)}$$

в случае $\theta \le \tau_2$. Следовательно,

$$E_{2^n}\big(\mathbb{B}_{p,\tau_1,\theta}^{0,\alpha}\big)_{p,\tau_2} \ge C(n+1)^{-\alpha+m(1/\tau_2-1/\tau_1)}$$

в случае $\theta \le \tau_2$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство леммы 2.1, сформулированной в разд. 2, опирается на следующую теорему.

**Теорема 3.5.** *Пусть* $1 < p < q < \infty,\ 1 < \tau < +\infty$. *Если* $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1/p-1/q)\tau} \|\sigma_s(f)\|_p^\tau < \infty,$$

то $f \in L_{q,\tau}(\mathbb{T}^m)$ и

$$\|f\|_{q,\tau} \le C\bigg\{\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1/p-1/q)\tau} \|\sigma_s(f)\|_p^\tau\bigg\}^{1/\tau}.$$

Доказательство. Известно, что [10, теорема 1] если $f \in L_p(\mathbb{T}^m)$, то

$$\|f\|_{q,\tau} \le C\bigg\{\|f\|_p + \bigg[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{nm(1/p-1/q)\tau} E^\tau_{2^n,\dots,2^n}(f)_p\bigg]^{1/\tau}\bigg\} \tag{3.31}$$

для $1 < p < q < \infty,\ 1 < \tau < +\infty$. По свойству нормы

$$E^\tau_{2^n,\dots,2^n}(f)_p \le \bigg\|f - \sum_{s=0}^{n}\sigma_s(f)\bigg\|_p \le \sum_{s=n+1}^{\infty}\|\sigma_s(f)\|_p, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.32}$$

Далее, по свойству нормы и неравенству Гельдера имеем

$$\|f\|_p \le \sum_{s=0}^{\infty}\|\sigma_s(f)\|_p \le C\bigg\{\sum_{s=0}^{\infty} 2^{sm(1/p-1/q)\tau}\|\sigma_s(f)\|_p^\tau\bigg\}^{1/\tau} \tag{3.33}$$

Теперь, пользуясь леммой 2.2 из [18] и соотношениями (3.32), (3.33) из (3.31), получим утверждение теоремы 3.5. □

Применяя метод В. Н. Темлякова, использованный при доказательстве леммы 3.1′ в [19], и теорему 3.5 завершаем доказательство леммы 2.1.

Замечание 3. Отметим, что в случае $1 < \tau \le 2$ утверждение теоремы 3.5 также следует из леммы 1.3 и неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов (см. в [16, лемма 6]).

## Заключение

В теореме 2.1 установлено, что порядок наилучшего приближения функции из класса $\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ не зависит от параметра $p$ пространства Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ и $m$-количества переменных.

В теореме 3.1 условие на наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ не зависит от $m$-количества переменных. В отличие от оценок в анизотропном пространстве Лоренца [20], в теореме 3.4 порядок наилучшего приближения функций класса $\mathbb{B}^{0,\alpha}_{p,\tau_1,\theta}$ не зависит от $m$.

Теоремы 2.1, 3.1, 3.2, 3.4 были анонсированы в [21]. В теоремах 4 и 5 в [21] имеются опечатки: вместо $m(1/\tau_2 - 1/\tau_1)$ должно быть $(1/\tau_2 - 1/\tau_1)$, как в теоремах 3.2 и 3.4 настоящей статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 332 с.
2. **Кашин Б.С., Темляков В.Н.** Об одной норме и аппроксимационных характеристиках классов функций многих переменных // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М: АЦФ, 1999. С. 69–99.

3. **DeVore R.A., Riemenschneider S.D., Sharpley R.C.** Weak interpolation in Banach spaces // J. Func. Anal. 1979. Vol. 33. P. 58–94. doi: 10.1016/0022-1236(79)90018-1.
4. **Cobos F., Milman M.** On a limit class of approximation spaces // Numer. Funct. Anal. Optimiz. 1990. Vol. 11, no. 1–2. P. 11–31. doi: 10.1080/01630569008816358.
5. **Cobos F., Dominguez O.** On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lippschitz spaces // J. Math. Anal. Appl. 2015. Vol. 425, no. 1. P. 71–84. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.12.034.
6. **Романюк А.С.** Приближение изотропных классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных в пространстве $L_q$ // Збірник праць Ін-ту математики НАН Україні. 2008. Т. 5, № 1. С. 263–278.
7. **Стасюк С.А.** Аппроксимативные характеристики аналогов классов Бесова с логарифмической гладкостью // Укр. мат. журн. 2014. Т. 66, № 4. С. 493–499.
8. **Стасюк С.А.** Колмогоровские поперечники аналогов классов Никольского — Бесова с логарифмической гладкостью // Укр. мат. журн. 2015. Т. 67, № 11. С. 1579–1584.
9. **Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation [e-resource]. 2016. 154 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1601.03978.pdf
10. **Акишев Г.** О вложении некоторых классов функций многих переменных в пространство Лоренца // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1982. Т. 3. С. 47–51.
11. **Шерстнева Л.А.** О свойствах наилучших приближений Лоренца и некоторые теоремы вложения // Изв. вузов. Математика. 1987. Т. 10. С. 48–58.
12. **Lizorkin P.I.** Generalized Holder spaces $B^{(r)}_{p,\theta}$ and their relations with the Sobolev spaces $L^{(r)}_p$ // Sib. Mat. Zh. 1968. Vol. 9, no. 5. P. 1127–1152.
13. **Janson S.** On the interpolation of sublinear operators // Studia Math. 1982. Vol. 75. P. 51–53.
14. **Kokilashvili V., Yildirir Y.E.** On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces // J. Func. Spaces Appl. 2010. Vol. 8, no. 1. P. 67–86.
15. **Никольский С. М.** Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
16. **Акишев Г.** О порядках $M$-членных приближений классов функций симметричного пространства // Мат. журн. 2014. Т. 14, № 4. С. 46–71.
17. **Ditzian Z., Prymak A.** Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces // Rocky Mountain Jour. Math. 2010. Vol. 40, no. 1. P. 209–223. doi: 10.1216/RMJ-2010-40-1-209.
18. **Johansson H.** Embedding of $H^{\omega}_p$ in some Lorentz spases // Research Report Universite Umea. 1975. Vol. 6. C. 1–36.
19. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
20. **Akishev G.** The estimates of approximations classes in the Lorentz space // AIP Conf. Proc. International conference Advancements in Mathematical Sciences (5-7 November, 2015). Antalya, 2015. P. 1–4. doi: 10.1063/1.4930453.
21. **Акишев Г.** Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца // Материалы Междунар. конф. “Воронежская зимняя математическая школа”. Воронеж, 2017. С. 12–14.

Акишев Габдолла
д-р физ.-мат. наук, профессор
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова,
г. Караганда, Казахстан,
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: akishev_g@mail.ru

Поступила 28.06.2017

## REFERENCES

1. Stein E., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton, Princeton University Press, 1971, 312 p. ISBN: 9780691080789. Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh.* Moscow, Mir Publ., 1974, 332 p.

2. Kashin B.S., Temlyakov V.N. *Ob odnoi norme i approksimatsionnykh kharakteristikakh klassov funktsii mnogikh peremennykh* [On a norm and approximation characteristics of classes of functions of several variables]. In: Metricheskaya teoriya funktsii i smezhnye voprosy analiza [Metric theory of functions and related problems in analysis], edited by Nikol'skii, Izd. Nauchno-Issled. Aktuarno-Finans. Tsentra (AFTs), Moscow, 1999, pp. 69–99, ISBN: 5-93379-002-8 .
3. DeVore R.A., Riemenschneider S.D., Sharpley R.C. Weak interpolation in Banach spaces. *Jour. Func. Anal.*, 1979, vol. 33, pp. 58–94. doi: 10.1016/0022-1236(79)90018-1 .
4. Cobos F., Milman M. On a limit class of approximation spaces. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1990, vol. 11, no. 1-2, pp. 11–31. doi: 10.1080/01630569008816358 .
5. Cobos F., Dominguez O. On Besov spaces of logarithmic smoothness and Lippschitz spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, 2015, vol. 425, pp. 71–84. doi: 10.1016/j.jmaa.2014.12.034 .
6. Romanyuk A.S. Approximation of the isotropic classes $B^r_{p,\theta}$ of periodic functions of several variables in the space $L_q$. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, 2008, vol. 5, no. 1, pp. 263–278 (in Russian).
7. Stasyuk S.A. Approximating characteristics of the analogs of Besov classes with logarithmic smoothness. *Ukr. Math. J.*, 2014, vol. 66, no. 4, pp. 553–560. doi: 10.1007/s11253-014-0952-5 .
8. Stasyuk S.A. Kolmogorov widths for analogs ofthe Nikol'skii–Besov classes with logarithmic smoothness. *Ukr. Math. Jour.*, 2015, vol. 67, no. 11, pp. 1786–1792. doi: 10.1007/s11253-016-1190-9 .
9. Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T. Hyperbolic cross approximation. Available at: https://arxiv.org/pdf/1601.03978.pdf . 154 p. [*arXiv*: 1601. 03978v1[math.NA] 15 Jan. 2016.]
10. Akishev G.A. On imbedding of some classes of functions of several variables into the Lorentz space. *Izv. Akad. Nauk Kaz. SSR, Ser. Fiz.-Mat.*, 1982, no. 3, pp. 47–51 (in Russian).
11. Sherstneva L.A. On the properties of best Lorentz approximations and certain embedding theorems. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1987, vol. 31, no. 10, pp. 62–73.
12. Lizorkin P.I. Generalized Holder spaces $B^{(r)}_{p,\theta}$ and their relations with the Sobolev spaces $L^{(r)}_p$. *Sib. Mat. Zh.*, 1968, vol. 9, no. 5, pp. 1127–1152 (in Russian).
13. Janson S. On the interpolation of sublinear operators. *Studia Math.*, 1982, vol. 75, pp. 51–53.
14. Kokilashvili V., Yildirir Y.E. On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces. *J. Func. Spaces Appl.*, 2010, vol. 8, no. 1, pp. 67–86.
15. Nikol'skii S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems.* New York, Springer-Verlag, 1975, 418 p. ISBN: 9780387064420 . Original Russian text (2nd ed.) published in Nikol'skii S.M. *Priblizhenie funktsii mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya. 2-e izd.* Moscow, Nauka Publ. 1977, 455 p.
16. Akishev G. On the orders of $M-$terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 46–71 (in Russian).
17. Ditzian Z., Prymak A. Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces. *Rocky Mountain Jour. Math.*, 2010, vol. 40, no. 1, pp. 209–223. doi: 10.1216/RMJ-2010-40-1-209 .
18. Johansson H. Embedding of $H^\omega_p$ in some Lorentz spases. *Research Report University Umeå*, 1975, vol. 6, pp. 1–36.
19. Temlyakov V.N. *Approximation of functions with a bounded mixed derivative.* Proc. Steklov Inst. Math., Providence, American Mathematical Society (AMS), 1989, vol. 178. 121 p. Original Russian text published in Temlyakov V.N. *Priblizhenie funktsii s ogranichennoi smeshannoi proizvodnoi*, Tr. MIAN SSSR, vol. 178, ed. S.M. Nikol'skii, 1986, 113 p.
20. Akishev G. The estimates of approximations classes in the Lorentz space. AIP Conf. Proc., vol. 1676, 020027, pp. 1–4. Internat. Conf. Advancements in Math. Sci. (5-7 November, 2015). Antalya, 2015. doi: 10.1063/1.4930453 .
21. Akishev G. Estimates of the best approximation of functions of the class with logarithmic smoothness in the Lorentz space. Proc. Intern. Conf. "Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola" [Voronezh Winter Mathematical School'] (January 26 – February 1), Voronezh, 2017, pp. 12–14 (in Russian). ISBN: 978-5-9273-2415-6 .


The paper was received by the Editorial Office on June 28, 2017.

*Gabdolla Akishev*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RSE Academician E. A. Buketov Karaganda State University, the Republic of Kazakhstan, 100028; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: akishev_g@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.977

# ТРИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И БЕРГМАНА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КРУГЕ [1]

**Р. Р. Акопян, М. С. Саидусайнов**

Пусть $\gamma(\rho)$ — функция неотрицательная, измеримая, почти всюду отличная от нуля на $(0,1)$, у которой произведение $\rho\gamma(\rho)$ суммируемо на $(0,1)$. Обозначим через $\mathcal{B} = B^{p,q}_{\gamma}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, пространство аналитических в круге функций $f$, для которых суммируема на $(0,1)$ функция $M^q_p(f,\rho)\rho\gamma(\rho)$, где $M^q_p(f,\rho)$ есть $p$-среднее значение $f$ на окружности радиуса $\rho$; это пространство наделено нормой

$$\|f\|_{B^{p,q}_{\gamma}} = \|M_p(f,\cdot)\|_{L^q_{\rho\gamma(\rho)}(0,1)}\,.$$

В случае $q = \infty$ пространство $\mathcal{B} = B^{p,\infty}_{\gamma}$ отождествляется с пространством Харди $H^p$. С помощью оператора $L$, заданного на аналитических в единичном круге функциях $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ равенством $Lf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k c_k z^k$, определим класс

$$LB^{p,q}_{\gamma}(N) := \{f\colon \|Lf\|_{B^{p,q}_{\gamma}} \le N\}, \quad N > 0.$$

Для пары таких операторов $L$ и $G$ при некоторых ограничениях исследованы три экстремальные задачи.

(1) Найдено наилучшее приближение класса $LB^{p_1,q_1}_{\gamma}(1)$ классом $GB^{p_3,q_3}_{\gamma}(N)$ по норме пространства $B^{p_2,q_2}_{\gamma}$ при $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $1 \le p_3 \le 2$, $1 \le q_1 = q_2 = q_3 \le \infty$ и $q_s = 2$ или $\infty$.

(2) Найдено наилучшее приближение оператора $L$ множеством $\mathcal{L}(N)$, $N > 0$, линейных ограниченных операторов из $B^{p_1,q_1}_{\gamma}$ в $B^{p_2,q_2}_{\gamma}$ с нормой, не превосходящей $N$, на классе $GB^{p_3,q_3}_{\gamma}(1)$ при $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $2 \le p_3 \le \infty$, $1 \le q_1 = q_2 = q_3 \le \infty$ и $q_s = 2$ или $\infty$.

(3) Получены оценки модуля непрерывности оператора $L$ на классе $GB^{p_3,q_3}_{\gamma}(1)$, а в гильбертовом случае — его точное значение.

Ключевые слова: пространства Харди и Бергмана; наилучшее приближение класса классом; наилучшее приближение неограниченного оператора ограниченными; модуль непрерывности оператора.

**R. R. Akopyan, M. S. Saidusainov. Three extremal problems in the Hardy and Bergman spaces of functions analytic in a disk.**

Let a nonnegative measurable function $\gamma(\rho)$ be nonzero almost everywhere on $(0,1)$, and let the product $\rho\gamma(\rho)$ be summable on $(0,1)$. Denote by $\mathcal{B} = B^{p,q}_{\gamma}$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, the space of functions $f$ analytic in the unit disk for which the function $M^q_p(f,\rho)\rho\gamma(\rho)$ is summable on $(0,1)$, where $M^q_p(f,\rho)$ is the $p$-mean of $f$ on the circle of radius $\rho$; this space is equipped with the norm

$$\|f\|_{B^{p,q}_{\gamma}} = \|M_p(f,\cdot)\|_{L^q_{\rho\gamma(\rho)}(0,1)}.$$

In the case $q = \infty$, the space $\mathcal{B} = B^{p,\infty}_{\gamma}$ is identified with the Hardy space $H^p$. Using an operator $L$ given by the equality $Lf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k c_k z^k$ on functions $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ analytic in the unit disk, we define the class

$$LB^{p,q}_{\gamma}(N) := \{f\colon \|Lf\|_{B^{p,q}_{\gamma}} \le N\}, \quad N > 0.$$

For a pair of such operators $L$ and $G$, under some constraints, the following three extremal problems are solved.

(1) The best approximation of the class $LB^{p_1,q_1}_{\gamma}(1)$ by the class $GB^{p_3,q_3}_{\gamma}(N)$ in the norm of the space $B^{p_2,q_2}_{\gamma}$ is found for $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $1 \le p_3 \le 2$, $1 \le q_1 = q_2 = q_3 \le \infty$, and $q_s = 2$ or $\infty$.

(2) The best approximation of the operator $L$ by the set $\mathcal{L}(N)$, $N > 0$, of linear bounded operators from $B^{p_1,q_1}_{\gamma}$ to $B^{p_2,q_2}_{\gamma}$ with the norm not exceeding $N$ on the class $GB^{p_3,q_3}_{\gamma}(1)$ is found for $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $2 \le p_3 \le \infty$, $1 \le q_1 = q_2 = q_3 \le \infty$, and $q_s = 2$ or $\infty$.

(3) Bounds for the modulus of continuity of the operator $L$ on the class $GB^{p_3,q_3}_{\gamma}(1)$ are obtained, and the exact value of the modulus is found in the Hilbert case.

Keywords: Hardy and Bergman spaces, best approximation of a class by a class, best approximation of an unbounded operator by bounded operators, modulus of continuity of an operator.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

**MSC:** 30E10, 47A58

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-22-32

## 1. Введение

В данной статье рассматривается несколько взаимосвязанных экстремальных задач во множестве $\mathcal{A}$ аналитических функций в единичном круге комплексной плоскости. Для функции $f \in \mathcal{A}$ через $M_p(f,\rho)$, $1 \le p \le \infty$, $0 \le \rho < 1$, обозначим $p$-среднее значение функции $f$ на окружности радиуса $\rho$ :

$$M_p(f,\rho) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\{|f(z)|\colon |z| = \rho\}, & p = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что $p$-среднее, определенное равенством (1.1), не убывает по параметру $p$, $1 \le p \le \infty$, и не убывает по $\rho$, $0 \le \rho < 1$ [7, гл. 6, § 3, с. 310]. При $p = 2$ справедливо равенство

$$M_2(f,\rho) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 \rho^{2n}\Big)^{1/2}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Пусть $\gamma(\rho)$ — весовая функция на $(0,1)$, т. е. функция неотрицательная, измеримая, почти всюду отличная от нуля на $(0,1)$, у которой произведение $\rho\gamma(\rho)$ суммируемо на $(0,1)$. Рассмотрим множество $\mathcal{B} = B^{p,q}_\gamma$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, аналитических в круге функций $f \in \mathcal{A}$, для которых функция $M^q_p(f,\rho)\rho\gamma(\rho)$ является суммируемой на $(0,1)$. Множество $B^{p,q}_\gamma$ есть банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{B^{p,q}_\gamma} = \|M_p(f,\cdot)\|_{L^q_{\rho\gamma(\rho)}(0,1)} = \left(\int_0^1 M^q_p(f,\rho)\rho\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \tag{1.2}$$

В случае $q = p$ пространство $B^{p,q}_\gamma = B^p_\gamma$ является пространством Бергмана с (радиальным) весом $\gamma$.

В случае $q = \infty$, $1 \le p \le \infty$, пространство $B^{p,\infty}_\gamma$ естественно отождествить с пространством Харди $H^p$ аналитических в единичном круге функций $f$, для которых функция $M_p(f,\rho)$ является ограниченной на $(0,1)$ или, что то же самое, имеет конечный предел при $\rho \to 1-0$; пространство Харди $H^p$ наделено нормой

$$\|f\|_{H^p} = \|M_p(f,\cdot)\|_{L^\infty(0,1)} = \sup_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{1/p}.$$

Подробную информацию о пространствах функций, аналитических в круге, и их обобщениях можно найти в обзорной работе [12].

С помощью аналитической в единичном круге функции

$$L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k z^k$$

определим во множестве $\mathcal{A}$ аналитических в круге функций оператор “свертки” $L$ формулой

$$Lf(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k c_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \tag{1.3}$$

Пусть $\mathbb{N}(L) := \{k \in \mathbb{Z}_+ \colon l_k \neq 0\}$ есть множество номеров ненулевых коэффициентов оператора $L$. В данной статье будут рассматриваться операторы, у которых $\mathbb{N}(L)$ — множество номеров, начиная с некоторого номера $n(L)$, так что $n(L)$ является наименьшим номером $k$, для которого $l_k \neq 0$. Согласно этим предположениям ядро оператора $L$ есть множество $\mathcal{P}_{n(L)-1}$ алгебраических многочленов степени, меньшей $n(L)$.

Примерами операторов вида (1.3) являются операторы дифференцирования

$$(\mathcal{D}^n f)(z) = z^n f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(n-k)!}\, c_k z^k, \tag{1.4}$$

$$(D^n f)(z) = \frac{d^n}{dt^n}\, f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (ik)^n\, c_k z^k, \quad z = \rho e^{it}. \tag{1.5}$$

Для числа $N > 0$ и оператора $L$ вида (1.3) выделим класс $L\mathcal{B}(N)$ аналитических в круге функций $f$, удовлетворяющих условию $Lf \in \mathcal{B}$ и неравенству $\|Lf\|_{\mathcal{B}} \leq N$. В случае, когда $N = 1$, будем использовать обозначение $L\mathcal{B} := L\mathcal{B}(1)$.

В настоящей статье будут исследоваться три экстремальные задачи для тройки пространств аналитических функций $\mathcal{B}_s = B_{\gamma}^{p_s, q_s}$, $s = 1, 2, 3$, и операторов вида (1.3).

Первой из них является задача вычисления величины

$$\mathcal{E}(N) = \mathcal{E}(L\mathcal{B}_1, G\mathcal{B}_3(N))_{\mathcal{B}_2} := \sup_{f \in L\mathcal{B}_1} \inf_{\varphi \in G\mathcal{B}_3(N)} \|f - \varphi\|_{\mathcal{B}_2}, \quad N > 0, \tag{1.6}$$

наилучшего приближения класса $L\mathcal{B}_1$ классом $G\mathcal{B}_3(N)$, определяемых операторами $L$ и $G$ вида (1.3), по норме пространства $\mathcal{B}_2$.

Вторая рассматриваемая задача — задача о модуле непрерывности оператора $L$ из $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$ на классе $G\mathcal{B}_3$. *Модулем непрерывности оператора* $L$ будем называть функцию переменной $\delta > 0$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; L, G\mathcal{B}_3)_{\mathcal{B}_2} := \sup\left\{\|Lf\|_{\mathcal{B}_2} \colon f \in G\mathcal{B}_3,\ \|f\|_{\mathcal{B}_1} \leq \delta\right\}. \tag{1.7}$$

Из определения (1.7) модуля непрерывности для функций $f \in \mathcal{B}_1$, для которых $Gf \in \mathcal{B}_3$, следует точное неравенство

$$\|Lf\|_{\mathcal{B}_2} \leq \|Gf\|_{\mathcal{B}_3}\, \omega\Big(\frac{\|f\|_{\mathcal{B}_1}}{\|Gf\|_{\mathcal{B}_3}}\Big). \tag{1.8}$$

Если для пары операторов $L$ и $G$ имеет место (мультипликативное) неравенство колмогоровского типа, т. е. неравенство

$$\|Lf\|_{\mathcal{B}_2} \leq \mathcal{C}\, \|f\|_{\mathcal{B}_1}^{\alpha}\, \|Gf\|_{\mathcal{B}_3}^{1-\alpha}, \tag{1.9}$$

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(L, G, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3), \quad \alpha = \alpha(L, G, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3), \quad 0 < \alpha < 1,$$

то для модуля непрерывности справедлива оценка сверху

$$\omega(\delta) \leq \mathcal{C}\, \delta^{\alpha}.$$

Таким образом, неравенство (1.8) является уточнением неравенства (1.9).

Ряд неравенств вида (1.9) для операторов дифференцирования и дифференцирования по аргументу (1.5) в пространствах $B^2$ и $B^2_{\gamma}$ получены в последнее время в работах С. Б. Вакарчука, М. Б. Вакарчука, М. Ш. Шабозова, М. С. Саидусайнова, (см. [4–6; 8; 11] и приведенную там библиографию).

Третьей является задача наилучшего приближения оператора $L$ линейными ограниченными операторами на классе $Q = G\mathcal{B}_3$. Обозначим через $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N)_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$, $N > 0$, множество линейных ограниченных операторов из $\mathcal{B}_1$ в $\mathcal{B}_2$, норма которых не превосходит $N$. Для оператора $T \in \mathcal{L}(N)$ величина

$$\mathcal{U}(T) := \sup\left\{\|Lf - Tf\|_{\mathcal{B}_2} \colon f \in G\mathcal{B}_3\right\}$$

Т а б л и ц а

| $\mathcal{B}_1$ | $\mathcal{B}_2$ | $\mathcal{B}_3$ | $a_k$ | $b_k$ | $\omega_k$ | $\delta_k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B^{p_1,q}_\gamma$ | $B^{p_2,q}_\gamma$ | $B^{p_3,q}_\gamma$ | $\lvert l_k\rvert^{-1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}$ | $\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}$ |
| $H^{p_1}$ | $B^{p_2,2}_\gamma$ | $H^{p_3}$ | $\lvert l_k\rvert^{-1}\,m^{1/2}_{2k+1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{1/2}_{2k+1}$ | $\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{1/2}_{2k+1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}$ |
| $B^{p_1,2}_\gamma$ | $H^{p_2}$ | $B^{p_3,2}_\gamma$ | $\lvert l_k\rvert^{-1}\,m^{-1/2}_{2k+1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{-1/2}_{2k+1}$ | $\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{-1/2}_{2k+1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}$ |
| $B^{p_1,2}_\gamma$ | $B^{p_2,2}_\gamma$ | $H^{p_3}$ | $\lvert l_k\rvert^{-1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{1/2}_{2k+1}$ | $\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{1/2}_{2k+1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{1/2}_{2k+1}$ |
| $B^{p_1,2}_\gamma$ | $H^{p_2}$ | $H^{p_3}$ | $\lvert l_k\rvert^{-1}\,m^{-1/2}_{2k+1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}$ | $\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{1/2}_{2k+1}$ |
| $H^{p_1}$ | $H^{p_2}$ | $B^{p_3,2}_\gamma$ | $\lvert l_k\rvert^{-1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{-1/2}_{2k+1}$ | $\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{-1/2}_{2k+1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{-1/2}_{2k+1}$ |
| $H^{p_1}$ | $B^{p_2,2}_\gamma$ | $B^{p_3,2}_\gamma$ | $\lvert l_k\rvert^{-1}\,m^{1/2}_{2k+1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}$ | $\lvert l_k\rvert\,\lvert g_k\rvert^{-1}$ | $\lvert g_k\rvert^{-1}\,m^{-1/2}_{2k+1}$ |

является уклонением оператора $T$ от оператора $L$ на классе $Q = G\mathcal{B}_3$. Соответственно

$$E(N) := \inf\left\{\mathcal{U}(T)\colon T \in \mathcal{L}(N)\right\} \tag{1.10}$$

есть величина наилучшего приближения оператора $L$ множеством линейных ограниченных операторов $\mathcal{L}(N)$ на классе $G\mathcal{B}_3$.

Задача (1.10) является конкретным вариантом задачи наилучшего приближения оператора линейными ограниченными операторами (задачи Стечкина). Историю исследования задачи Стечкина и взаимосвязанных экстремальных задач, в том числе задач о модуле непрерывности (неравенстве Колмогорова), и приближения одного класса функций другим можно найти в обзорной работе [2] (см. также [3] и приведенную там библиографию). Представим здесь лишь следующий результат, частный случай более общего утверждения С. Б. Стечкина (1965–1967) [9] (см. также [2, теорема 1.1]) о взаимосвязи задач (1.7) и (1.10). Имеют место следующие два неравенства:

$$\begin{aligned} E(N) &\ge \sup\left\{\omega(\delta) - N\delta\colon \delta > 0\right\}, \quad N > 0, \\ \omega(\delta) &\le \inf\left\{E(N) + N\delta\colon N > 0\right\}, \quad \delta > 0. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Задача Стечкина и задача о модуле непрерывности оператора взаимосвязаны и с задачей наилучшего приближения одного класса другим [1] (см. также [2]); эта взаимосвязь в данной работе не используется.

Отправной точкой нашего исследования являются два утверждения Л. В. Тайкова (1967), полученные в работе [10] в теоремах 3 и 4, где даны решения задач (1.6) и (1.10) для операторов дифференцирования (1.4) и тройки пространств $\mathcal{B}_s = H^{p_s}$, $s = 1, 2, 3$, $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $1 \le p_3 \le 2$. В настоящей статье будут использоваться идеи работы [10] и взаимосвязь задач (1.11). Мы получим решения задач (1.6), (1.10) и исследуем задачу (1.7) для троек пространств $\mathcal{B}_s$, $s = 1, 2, 3$, в случаях, описанных в первых трех столбцах приведенной выше таблицы. Решения задач будут выписано в терминах последовательностей $A$, $B$, $W$ и $D$, элементы которых, соответственно $a_k$, $b_k$, $\omega_k$ и $\delta_k$, также описаны в ней.

## 2. Вспомогательные утверждения

В этом разделе будут вычислены нормы оператора вида (1.3)

$$\mathcal{N}(L, p_1, q_1, p_2, q_2, \gamma) := \|L\|_{B^{p_1,q_1}_\gamma \to B^{p_2,q_2}_\gamma}$$

при некоторых, нужных нам в дальнейшем, значениях параметров. Обозначим через $m_s$ степенной момент весовой функции $\gamma$ порядка $s$, т. е. величину, определяемую равенством

$$m_s = m_s(\gamma) := \int\limits_0^1 \gamma(\rho)\rho^s\,d\rho.$$

Ясно, что $m_s(\gamma)$ убывает по $s$. При этом если функция $\gamma$ ограниченная и отделена от нуля, т. е.

$$\exists_{c_2>c_1>0} : \forall_{\rho\in(0,1)} \quad c_1 \le \gamma(\rho) \le c_2,$$

то для произвольного $s \ge 0$ справедливо неравенство

$$\frac{c_1}{s+1} \le m_s(\gamma) \le \frac{c_2}{s+1}.$$

Через $\eta_{s,q}$ будем обозначать норму степенной функции $z^s$ в пространстве $B^{p,q}_\gamma$; имеем

$$\eta_{s,q} = \eta_{s,q}(\gamma) := \|z^s\|_{B^{p,q}_\gamma} = \begin{cases} m^{1/q}_{qs+1}, & 1 \le q < \infty, \\ 1, & q = \infty. \end{cases}$$

**Лемма 1.** *При* $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $1 \le q \le \infty$ *справедливы равенства*

$$\mathcal{N}(L, p_1, q, p_2, q, \gamma) = \sup\{|l_k| \colon k \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{2.1}$$

$$\mathcal{N}(L, p_1, 2, p_2, \infty, \gamma) = \sup\{|l_k|\, m^{1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\}, \tag{2.2}$$

$$\mathcal{N}(L, p_1, \infty, p_2, 2, \gamma) = \sup\{|l_n|\, m^{-1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\}. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нужные оценки снизу норм оператора дают функции $f_k(z) = \eta^{-1}_{k,q_1} z^k$. Получим такие же оценки сверху, а следовательно — точные значения норм.

В обоснование (2.1) оценку сверху нормы оператора выводим из следующей цепочки соотношений:

$$\|Lf\|_{B^{p_2,q}_\gamma} \le \|Lf\|_{B^{2,q}_\gamma} = \left( \int\limits_0^1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 \, |c_k|^2 \, \rho^{2k} \right)^{q/2} \rho\gamma(\rho) \, d\rho \right)^{1/q}$$

$$\le \sup\{|l_k| \colon k \in \mathbb{Z}_+\} \left( \int\limits_0^1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \, \rho^{2k} \right)^{q/2} \rho\gamma(\rho) \, d\rho \right)^{1/q}$$

$$= \sup\{|l_k| \colon k \in \mathbb{Z}_+\} \; \|f\|_{B^{2,q}_\gamma} \le \sup\{|l_k| \colon k \in \mathbb{Z}_+\} \, \|f\|_{B^{p_1,q}_\gamma}.$$

Оценку сверху для доказательства равенства (2.2) получим следующим образом:

$$\|Lf\|_{B^{p_2,2}_\gamma} \le \|Lf\|_{B^{2,2}_\gamma} = \left( \int\limits_0^1 \left( \sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 \, |c_k|^2 \, \rho^{2k+1} \, \gamma(\rho) \right) d\rho \right)^{1/2}$$

$$= \left( \sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 \, |c_k|^2 \, m_{2k+1} \right)^{1/2} \le \sup\left\{|l_k|\, m^{1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \right)^{1/2}$$

$$= \sup\left\{|l_k|\, m^{1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \|f\|_{B^{2,\infty}_\gamma} \le \sup\left\{|l_k|\, m^{1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \|f\|_{B^{p_1,\infty}_\gamma}.$$

Наконец, оценка сверху при доказательстве равенства (2.3) такова:

$$\|Lf\|_{B^{p_2,\infty}_\gamma} \le \|Lf\|_{B^{2,\infty}_\gamma} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 \, |c_k|^2 \right)^{1/2} \le \sup\left\{|l_k|\, m^{-1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \, m_{2k+1} \right)^{1/2}$$

$$= \sup\left\{|l_k|\, m^{-1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \|f\|_{B^{2,2}_\gamma} \le \sup\left\{|l_k|\, m^{-1/2}_{2k+1} \colon k \in \mathbb{Z}_+\right\} \|f\|_{B^{p_1,2}_\gamma}.$$

Лемма 1 доказана.

Для двух последовательностей, $A = \{a_k\}_{k\ge n}$ и $B = \{b_k\}_{k\ge n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, определим числовую последовательность $N(A, B) = \{N_k\}_{k\ge n}$, элементы которой задаются равенствами

$$N_k := \frac{a_k - a_{k+1}}{b_k - b_{k+1}}, \quad k \ge n. \tag{2.4}$$

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Пусть $A$ и $B$ — убывающие последовательности положительных чисел, а последовательность $N(A,B)$ не убывает. Тогда для любого $N_{n-1}, 0 \le N_{n-1} \le N_n$, функция $\mu$ переменой $N$, определенная при $N \in [N_{n-1}, +\infty)$ равенством*

$$\mu(N) = \mu(N; A, B) := \max \{a_k - N\, b_k \colon k \ge n\},$$

*является непрерывной кусочно линейной и для нее справедливо равенство*

$$\mu(N) = a_k - N\, b_k, \quad N \in [N_{k-1}, N_k], \quad \kappa \ge n.$$

Доказательство. Рассмотрим линейные функции $\mu_j(N) := a_j - N\, b_j$, $j \ge n$. В точках $N_j$ значения функций $\mu_j$ и $\mu_{j+1}$ равны: $\mu_j(N_j) = \mu_{j+1}(N_j)$. Из условия убывания последовательности $A$ следует, что $\mu_j(N) > \mu_{j+1}(N)$, если $N < N_j$, и $\mu_j(N) < \mu_{j+1}(N)$, если $N > N_j$. Отсюда для произвольного $k \ge n$, используя монотонность последовательности $N(A,B)$, индукцией по $j$ получим: для любого $j < k$ и $N > N_{k-1}$ справедливо неравенство $\mu_j(N) < \mu_k(N)$; для любого $j > k$ и $N < N_k$ — неравенство $\mu_j(N) < \mu_k(N)$. Таким образом, при $N \in [N_{k-1}, N_k]$ для всех $j \ge n, j \ne k$ имеем $\mu_j(N) < \mu_k(N)$. Лемма 2 доказана.

Отметим, что в условиях леммы 2 последовательность $\{a_k/b_k\}_{k \ge n}$ не убывает и последовательность $A$ является выпуклой относительно последовательности $B$, т. е.

$$\frac{b_k - b_{k+1}}{b_{k-1} - b_{k+1}}\, a_{k-1} + \frac{b_{k-1} - b_k}{b_{k-1} - b_{k+1}}\, a_{k+1} \le a_k, \quad k \ge n+1.$$

В дальнейшем будем считать, что справедливы условия

$$\lim_{k \to +\infty} b_k = 0, \quad \lim_{k \to +\infty} N_k = +\infty.$$

В случае $N_{n-1} > 0$ примем, что значение функции $\mu$ на $(0, N_{n-1})$ равно $+\infty$.

Определим кусочно линейную функцию $\xi$ положительной переменной $\delta$ равенством

$$\xi(\delta) = \xi(\delta; A, B) := \begin{cases} a_k + N_k(\delta - b_k), & \delta \in [b_{k+1}, b_k],\ k \ge n, \\ a_n + N_{n-1}(\delta - b_n), & \delta \ge b_n, \end{cases} \tag{2.5}$$

в котором последовательность $N(A,B) = \{N_k\}_{k \ge n-1}$ определена в (2.4). Имеет место следующее утверждение, связывающее функции $\mu(N; A, B)$ и $\xi(\delta; A, B)$.

**Лемма 3.** *В условиях леммы 2 справедливы равенства*

$$\sup \{\xi(\delta) - N\delta \colon \delta > 0\} = \mu(N), \tag{2.6}$$

$$\inf \{\mu(N) + N\delta \colon N > 0\} = \xi(\delta). \tag{2.7}$$

Доказательство. Для произвольного $N > 0$ функция $\xi(\delta) - N\delta$ переменной $\delta$ является кусочно линейной, следовательно,

$$\sup \{\xi(\delta) - N\delta \colon \delta > 0\} = \sup \{\xi(b_k) - N b_k \colon k \ge n\} = \sup \{a_k - N b_k \colon k \ge n\}.$$

Теперь равенство (2.6) вытекает из леммы 2.

Так же для произвольного $\delta > 0$ функция $\mu(N) + N\delta$ является кусочно линейной, и, значит, имеет место равенство

$$\inf \{\mu(N) + N\delta \colon N > 0\} = \inf \{\mu(N_k) + N_k\delta \colon k \ge n-1\} = \inf \{a_k + N_k(\delta - b_k) \colon k \ge n-1\}.$$

При вычислении последней нижней грани, проводя рассуждения, аналогичные доказательству леммы 2, получим равенство (2.7). Лемма 3 доказана.

## 3. Приближение класса классом

Пусть $L, G$ — пара линейных операторов вида (1.3), определяемых аналитическими в единичном круге функциями

$$L(z)=\sum_{k=n(L)}^{\infty} l_k z^k,\quad G(z)=\sum_{k=n(G)}^{\infty} g_k z^k. \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что ядро оператора $G$ содержит ядро оператора $L$, т. е. выполняется условие $n(G)\ge n(L)$. Обозначим $A:=\{a_k\}_{k\ge n}$ и $B:=\{b_k\}_{k\ge n}$, $n=n(G)$, — последовательности с элементами

$$a_k:=|l_k|^{-1}\,\eta_{k,q_1}^{-1}\,\eta_{k,q_2},\quad b_k:=|g_k|^{-1}\,\eta_{k,q_3}^{-1}\,\eta_{k,q_2}; \tag{3.2}$$

вид $a_k$ и $b_k$ для рассматриваемых случаев пространств приведен в таблице на с. 25. В этой части статьи в определении функции $\mu(N;A,B)$ считаем $N_{n-1}=0$.

**Теорема 1.** *Пусть* $2\le p_1\le\infty$, $1\le p_2\le 2$, $1\le p_3\le 2$, $1\le q\le\infty$, $N>0$ *и последовательности* $A$ *и* $B$ *убывают к нулю, а* $N(A,B)$ *не убывает и неограниченная. Тогда в случаях пространств* $\mathcal{B}_\nu, \nu=1,2,3,$ *описанных в таблице на с.* 25, *для значения величины* (1.6) *наилучшего приближения класса классом справедливы равенства*

$$\mathcal{E}(L\mathcal{B}_1, G\mathcal{B}_3(N))_{\mathcal{B}_2}=\max\{a_k-N\,b_k\colon k\ge n(G)\}=\mu(N;A,B).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для оценки снизу рассмотрим функцию $f(z)=\alpha z^k$, где $k\ge n(G)$. При таком выборе $k$ значения $g_k$ и, следовательно, $l_k$ отличны от нуля. В случае $\alpha=|l_k|^{-1}\eta_{k,q_1}^{-1}$ функция $f$ принадлежит классу $LB_\gamma^{p_1,q_1}$. Действительно, имеет место равенство

$$\|Lf\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}}=\|l_k\alpha z^k\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}}=\alpha|l_k|\|z^k\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}}=1.$$

Элементом наилучшего приближения функции $f(z)=\alpha z^k$ классом $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$ является функция вида $\varphi_0(z)=Cz^k, C>0$. Для того чтобы $\varphi_0$ принадлежала классу $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\|G\varphi_0\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}}=\|g_kCz^k\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}}=C|g_k|\eta_{k,q_3}\le N.$$

Соответственно наилучшее приближение вычисляется следующим образом:

$$\inf\left\{\left\|\alpha z^k-Cz^k\right\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}}\colon C\le N|g_k|^{-1}\eta_{k,q_3}^{-1}\right\}=\max\left\{0,|l_k|^{-1}\eta_{k,q_1}^{-1}-N|g_k|^{-1}\eta_{k,q_3}^{-1}\right\}\eta_{k,q_2},$$

откуда получаем оценку снизу величины (1.6):

$$\mathcal{E}(LB_\gamma^{p_1,q_1}, GB_\gamma^{p_3,q_3}(N))_{B_\gamma^{p_2,q_2}}\ge\max\left\{|l_k|^{-1}\eta_{k,q_1}^{-1}\eta_{k,q_2}-N|g_k|^{-1}\eta_{k,q_3}^{-1}\eta_{k,q_2}\right\},$$

где максимум берется по номерам $k$, для которых справедливо неравенство

$$|l_k|^{-1}|g_k|\eta_{k,q_1}^{-1}\eta_{k,q_3}>N. \tag{3.3}$$

Заметим, что если максимум брать по всем номерам $k\ge n$, то его величина не изменится. Тогда по лемме 2 в рассматриваемых случаях эта величина равна $\mu(N;A,B)$.

Для оценки сверху достаточно для произвольной функции $f\in LB_\gamma^{p_1,q_1}$ получить оценку сверху ее наилучшего приближения классом $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$ по норме пространства $B_\gamma^{p_2,q_2}$. Рассмотрим линейный метод приближения $\Lambda$, определяемый равенством

$$\Lambda f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k c_k z^k,\quad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,$$

в котором множители $\lambda_k$ выберем следующим образом: $\lambda_k = N|l_k|\,|g_k|^{-1}\,\eta_{k,q_1}\eta_{k,q_3}^{-1}$, если справедливо неравенство (3.3), и $\lambda_k = 1$ для номеров $k$, для которых (3.3) не выполняется. Убедимся, что функция $\Lambda f$ принадлежит классу $GB_\gamma^{p_3,q_3}(N)$. Действительно, если $f \in LB_\gamma^{p_1,q_1}$, то для рассматриваемого случая пространств из леммы 1 получаем неравенство

$$\|G\Lambda f\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} = \Big\|\sum_{k=n}^{\infty}(g_k\lambda_k l_k^{-1})l_k c_k z^k\Big\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} \le \sup\big\{|\lambda_k g_k l_k^{-1}|\eta_{k,q_3}\eta_{k,q_1}^{-1} : k \ge n\big\}\|Lf\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}} \le N.$$

Так же, используя лемму 1, оценим уклонение

$$\|f - \Lambda f\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} = \Big\|\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1-\lambda_k}{l_k}\,l_k c_k z^k\Big\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} = \max\big\{|l_k|^{-1}\eta_{k,q_1}^{-1}\eta_{k,q_2} - N|g_k|^{-1}\eta_{k,q_3}^{-1}\eta_{k,q_2}\big\}\|Lf\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}},$$

где максимум берется по номерам $k$, для которых справедливо неравенство (3.3) или, что то же самое, по $k \ge n$. Соответственно по лемме 2 получаем оценку сверху

$$\mathcal{E}(LB_\gamma^{p_1,q_1}, GB_\gamma^{p_3,q_3}(N))_{B_\gamma^{p_2,q_2}} \le \mu(N; A, B).$$

Оценки снизу и сверху совпали. Теорема доказана.

## 4. Модуль непрерывности оператора и задача Стечкина

Пусть $L, G$ — пара линейных операторов вида (1.3), определяемых функциями (3.1). В этой части статьи будем использовать следующие обозначения:

$$\varphi_k(z) := g_k^{-1}\,\eta_{k,q_3}^{-1}\,z^k, \quad k \ge n, \quad n = n(G); \tag{4.1}$$

$W := \{\omega_k\}_{k\ge n}$ и $D := \{\delta_k\}_{k\ge n}$ — последовательности с элементами

$$\omega_k := \|L\varphi_k\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} = |l_k|\,|g_k|^{-1}\,\eta_{k,q_3}^{-1}\,\eta_{k,q_2}, \quad \delta_k := \|\varphi_k\|_{B_\gamma^{p_1,q_1}} = |g_k|^{-1}\,\eta_{k,q_3}^{-1}\,\eta_{k,q_1}; \tag{4.2}$$

вид $\omega_k$ и $\delta_k$ для рассматриваемых случаев пространств приведен в таблице на с. 25. Соответственно элементы последовательности $N(W,D)$ и число $N_{n-1}$ задаются равенствами

$$N_k = \frac{\omega_k - \omega_{k+1}}{\delta_k - \delta_{k+1}}, \quad k \ge n; \quad N_{n-1} := |l_{n-1}|\,\eta_{n-1,q_1}^{-1}\,\eta_{n-1,q_2}.$$

Рассмотрим оператор $T_0 = T_0[L,N]$ вида (1.3), определяемый функцией $T_0(z) := \sum\limits_{k=n(L)}^{\infty}\tau_k z^k$ по формулам

$$(T_0 f)(z) = \sum_{k=n(L)}^{\infty}\tau_k c_k z^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k, \tag{4.3}$$

$$|\tau_k| := \min\big\{|l_k|,\, N\,\eta_{k,q_1}\,\eta_{k,q_2}^{-1}\big\}, \quad \arg\tau_k := \arg l_k. \tag{4.4}$$

В частности если $|l_k| \le N\,\eta_{k,q_1}\,\eta_{k,q_2}^{-1}$, то $\tau_k = l_k$.

**Теорема 2.** *Пусть* $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $2 \le p_3 \le \infty$, $1 \le q \le \infty$, $N > 0$ *и последовательности* $W$ *и* $D$ *убывают к нулю, а* $N(W,D)$ *не убывает и неограниченная. Тогда в случаях пространств* $\mathcal{B}_s, s = 1,2,3,$ *описанных в таблице на с.* 25, *для наилучшего приближения* (1.10) *оператора* $L$ *линейными ограниченными операторами* $\mathcal{L}(N)$ *на классе* $Q = G\mathcal{B}_3$ *справедливы равенства*

$$E(N) = \max\{\omega_k - N\,\delta_k : k \ge n(G)\} = \mu(N; W, D).$$

*Оператором наилучшего приближения является оператор* $T_0 = T_0[L,N]$, *задаваемый равенствами* (4.3), (4.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале отметим, что в случае, когда ядро оператора $L$ не содержит ядро оператора $G$, т.е. $n(L) < n(G)$, для значений параметра $N$, $0 < N < N_{n-1}$, уклонение $U(T) = +\infty$ для любого $T \in \mathcal{L}(N)$, следовательно, $E(N) = +\infty$.

Получим оценку сверху наилучшего приближения при $N \geq N_{n-1}$. Рассмотрим оператор $T_0$, определяемый равенствами (4.3), (4.4). Для рассматриваемых случаев пространств по лемме 1 получим неравенство $\|T_0\|_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} \leq N$, т.е. $T_0 \in \mathcal{L}(N)$. Оценим уклонение оператора $T_0$ от оператора $L$. Справедливо представление $Lf - T_0 f = S(Gf)$, в котором оператор $S$ имеет вид (1.3) и определяется функцией $S(z) := \sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{l_k - \tau_k}{g_k}\, z^k$. Используя определение оператора $T_0$, леммы 1 и 2, для уклонения выводим оценку

$$\|Lf - T_0 f\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}} \leq \|S\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}\to B_\gamma^{p_2,q_2}} \|Gf\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} = \max\left\{\left|\frac{l_k - \tau_k}{g_k}\right|\eta_{k,q_3}^{-1}\eta_{k,q_2} \colon k \geq n\right\} \|Gf\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}}$$
$$= \max\{\omega_k - N\delta_k \colon k \geq n\}\, \|Gf\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}} = \mu(N; W, D)\, \|Gf\|_{B_\gamma^{p_3,q_3}}.$$

Отсюда следует оценка сверху величины наилучшего приближения $E(N) \leq \mu(N; W, D)$.

Для получения оценки снизу рассмотрим функции $\varphi_k$, определенные равенствами (4.1). Для произвольного $k$, $k \geq n$, функции $\varphi_k$ принадлежат классу $GB_\gamma^{p_3,q_3}$, поэтому из определения наилучшего приближения (1.10) следует

$$E(N) \geq \sup_{k\geq n} \inf_{T\in\mathcal{L}(N)} \left\{\|L\varphi_k - T\varphi_k\|_{B_\gamma^{p_2,q_2}}\right\} = \sup\{\omega_k - N\delta_k \colon k \geq n\}.$$

Теперь по лемме 2 имеем оценку снизу $E(N) \geq \mu(N; W, D)$. Теорема доказана.

В следующем утверждении в случаях, описанных в таблице на с. 25, будут получены оценки сверху величины модуля непрерывности (1.7) и точное значение в некоторых точках.

**Следствие.** *В условиях теоремы* 2 *для модуля непрерывности* (1.7) *оператора* $L$ *на классе* $G\mathcal{B}_3$ *справедливо неравенство*

$$\omega(\delta) \leq \xi(\delta; W, D), \quad \delta > 0, \tag{4.5}$$

*где функция* $l$ *определяется равенством* (2.5). *При этом* $\omega(\delta_k) = \omega_k, k \geq n$, *и в данном случае экстремальными функциями в* (1.7) *являются* $\varphi_k$, *заданные равенствами* (4.1). *Если* $n(L) = n(G)$, *то* $\omega(\delta) = \omega_n$, $\delta \geq \delta_n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения непосредственно вытекает из теоремы 2, неравенства (1.11) и равенства (2.7) леммы 3.

Далее для значений $q_s = 2$ или $\infty$ будут улучшена оценка (4.5) величины модуля непрерывности (1.7) и получено точное значение в случаях гильбертовых пространств, т.е. при $p_s = 2$. Введем обозначения: $W^2 := \{\omega_k^2\}_{k\geq n}$ и $D^2 := \{\delta_k^2\}_{k\geq n}$, где $\omega_k, \delta_k$ определены в (4.2).

**Теорема 3.** *Пусть* $2 \leq p_1 \leq \infty$, $1 \leq p_2 \leq 2$, $2 \leq p_3 \leq \infty$, $q_s = 2$ *или* $\infty$ *и* $\delta > 0$; *последовательности* $W^2$ *и* $D^2$ *убывают к нулю, а* $N(W^2, D^2)$ *не убывает и неограниченная. Тогда в случаях пространств* $\mathcal{B}_s, s = 1, 2, 3$, *описанных в таблице на с.* 25, *для модуля непрерывности* (1.7)*оператора* $L$ *на классе* $Q = G\mathcal{B}_3$ *справедливо неравенство*

$$\omega(\delta) \leq \xi^{1/2}(\delta^2; W^2, D^2). \tag{4.6}$$

*При* $p_s = 2$, $s = 1, 2, 3$, *неравенство* (4.6) *является равенством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай, когда пространства $\mathcal{B}_s = B_\gamma^{p_s,q_s}$, $s = 1, 2, 3$, являются гильбертовыми, т. е. когда $p_s = 2$, $q_s = 2$ или $\infty$, $s = 1, 2, 3$. В этом случае справедливы равенства

$$\|f\|_{\mathcal{B}_1}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \eta_{k,q_1}^2, \quad \|Lf\|_{\mathcal{B}_2}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 |c_k|^2 \eta_{k,q_2}^2, \quad \|Gf\|_{\mathcal{B}_3}^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|^2 |c_k|^2 \eta_{k,q_3}^2$$

и, следовательно, для модуля непрерывности (1.7) верно равенство

$$\omega^2(\delta) = \max\Big\{ \sum_{k=0}^{\infty} |l_k|^2 \eta_{k,q_2}^2\, x_k : \ \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|^2 \eta_{k,q_3}^2\, x_k \le 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{k,q_1}^2\, x_k \le \delta^2, \quad x_k \ge 0 \Big\}. \qquad (4.7)$$

Задача в правой части равенства (4.7) является задачей линейного программирования. Когда параметр $\delta$ удовлетворяет условию $\delta_{k+1} \le \delta \le \delta_k$, максимум достигается в точке

$$x_k = \eta_{k,q_1}^{-2}\, \frac{\delta_k^2(\delta^2 - \delta_{k+1}^2)}{\delta_k^2 - \delta_{k+1}^2}, \quad x_{k+1} = \eta_{k+1,q_1}^{-2}\, \frac{\delta_{k+1}^2(\delta_k^2 - \delta^2)}{\delta_k^2 - \delta_{k+1}^2}, \quad x_j = 0, \quad j \ne k, k+1.$$

Отсюда следует, что $\omega(\delta) = \xi^{1/2}(\delta^2; W^2, D^2)$. Верхняя грань в (1.7) достигается на функциях $f_\delta(z) = \varepsilon_1 \sqrt{x_k} z^k + \varepsilon_2 \sqrt{x_{k+1}} z^{k+1}$, $|\varepsilon_1| = |\varepsilon_2| = 1$.

Теперь для произвольных $2 \le p_1 \le \infty$, $1 \le p_2 \le 2$, $2 \le p_3 \le \infty$ и $q_s = 2$ или $\infty$, $s = 1, 2, 3$, неравенство (4.6) вытекает из монотонности $p$-средних (1.1) аналитических функций на окружности. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Арестов В.В.** О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной. Приближение функций и операторов // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 3–28.
2. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.
3. **Arestov V., Filatova M.** Best approximation of the differentiation operator in the space $L_2$ on the semiaxis // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 187, № l. P. 65–81. doi:10.3103/S1066369X13050010 .
4. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** О мультипликативных неравенствах типа Харди—Литтльвуда—Полиа для аналитических функций одной и двух комплексных переменных // Віснік Дніпропетровского університету, сер. Математика. 2010. Т. 18, № 6/1. С. 81–87.
5. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 12. - С. 1579–1601.
6. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций // Віснік Дніпропетровского університету, сер. Математика. 2012. Т. 17, № 61. С. 82–88.
7. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Т. 1. М.: Наука, 1978. 392 с.
8. **Саидусайнов М.С.** Точные неравенства типа Колмогорова для функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана // Тр. Междунар. летней мат. шк.-конф. С. Б. Стечкина по теории функций (Таджикистан, Душанбе, 15-25 августа, 2016). 2016. С. 217–223.
9. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып 2. С. 137–148.
10. **Тайков Л.В.** О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 155–162.
11. **Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.** Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // Докл. АН республики Таджикистан. 2007. Т. 50, № 1. С. 14–19.
12. **Шведенко С.В.** Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1985. Т. 23. С. 3–124.



Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук
Уральский федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru


Поступила 15.05.2017


Саидусайнов Муким Саидусайнович
канд. физ.-мат. наук
Таджикский национальный университет, г. Душанбе, Таджикистан
e-mail: smuqim@gmail.com

**REFERENCES**

1. Arestov V.V. On some extremal problems for differentiable functions of one variable. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 1–29.
2. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
3. Arestov V., Filatova M. Best approximation of the differentiation operator in the space $L_2$ on the semiaxis. *J. Approx. Theory*, 2014, vol. 187, no. 1, pp. 65–81. doi:10.3103/S1066369X13050010 .
4. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On multiplicative inequalities of Hardy–Littlewood–Polya type for analytic functions of one and two complex variables. *Visn. Dnipropetr. Univ., Ser. Mat.*, 2010, vol. 18, no. 6/1, pp. 81–87 (in Ukrainian).
5. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On the exponential decay of vibrations of damped elastic media. *Ukr. Mat. Zh.*, 2011. vol. 63, no. 12, pp. 1579–1601.
6. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On inequalities of Kolmogorov type for analytic functions in a disc. *Visn. Dnipropetr. Univ., Ser. Mat.*, 2012, vol. 17, no. 61, pp. 82–88 (in Ukrainian).
7. Polya G., Szegö G. *Problems and theorems in analysis. Vol. I: Series, integral calculus, theory of functions.* Translation from German to English. Springer Study Edition. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1976, 389 p. Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza. Vol. 1*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 392 p.
8. Saidusainov M.S. *Tochnye neravenstva tipa Kolmogorova dlya funktsii, prinadlezhashchikh vesovomu prostranstvu Bergmana* [Exact inequalities of Kolmogorov type for functions belonging to the weighted Bergman space]. Trudy Mezhdunarodnoi letnei matematicheskoi shkoly-konferentsii S.B.Stechkina po teorii funktsii [Proceedings of the International Mathematical School of the School-Conference S.B. Stechkin on the theory of functions]. Tajikistan, Dushanbe, 15-25 August, 2016, pp. 217–223.
9. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99. doi: 10.1007/BF01268056 .
10. Taikov L.V. Best approximation in the mean of certain classes of analytic functions. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 104–109. doi: 10.1007/BF01268058 .
11. Shabozov M.Sh., Saidusainov M.S. Inequality of Kolmogorov type in the weighted Bergman space. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2007, vol. 50, no. 1, pp. 14–19 (in Russian).
12. Shvedenko S.V. Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit circle, polydisc, and ball. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 39, no. 6, pp. 3011–3087. doi: 10.1007/BF01087546 .


The paper was received by the Editorial Office on May 15, 2017.

*Roman Razmikovich Akopyan*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Ekaterinburg, 620002, Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: RRAkopyan@mephi.ru .

*Mukim Saidusainovich Saidusainov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan, e-mail: smuqim@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.988.68

# О МЕТОДАХ ОПТИМИЗАЦИИ ФУНКЦИИ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ[1]

**А. С. Антипин**

Рассматривается параметрическое семейство задач выпуклого программирования. В качестве параметра выступает вектор правых частей функциональных ограничений задачи. Каждому векторному значению параметра, взятому из неотрицательного ортанта, отвечает регулярная (условие Слейтера) задача выпуклого программирования и ее минимальное значение целевой функции. Это значение, зависящее от параметра ограничений, порождает функцию чувствительности. Наряду с этой функцией априори задается выпуклое множество (геометрически или функционально заданное). Ставится задача минимизации неявно заданной функции чувствительности на этом множестве. Такая задача имеет содержательную интерпретацию как задача выпуклого программирования, когда вместо заданного вектора правых частей функциональных ограничений указывается только множество, которому этот вектор принадлежит. В результате получаем двухуровневую задачу. В отличие от классических двухуровневых иерархических задач, где неявно задаются ограничения, в нашем случае неявно задаются целевые функции. Никакой иерархии в этой задаче нет. Как правило функции чувствительности обсуждаются в научной литературе в более общем контексте как функции оптимального значения. Автору не известны оптимизационные постановки этих задач как самостоятельных исследований и, тем более, не известны предлагаемые методы их решения. В работе предлагается оригинальный седловой подход к решению задач с функциями чувствительности. Доказывается монотонная сходимость метода к решению задачи по переменным пространства, в котором рассматривается задача.

Ключевые слова: функция чувствительности, параметрическая оптимизация, параметрическая функция Лагранжа, седловая точка, экстрапроксимальные методы, сходимость.

**A. S. Antipin. Optimization methods for the sensitivity function with constraints.**

We consider a parametric family of convex programming problems. The parameter is the vector of the right-hand sides in the functional constraints of the problem. Each vector value of the parameter taken from the nonnegative orthant corresponds to a regular (Slater's condition) convex programming problem and the minimum value of its objective function. This value depends on the constraint parameter and generates the sensitivity function. Along with this function, a convex set is given geometrically or functionally. The problem of minimization of the implicit sensitivity function on this set is posed. It can be interpreted as a convex programming problem in which, instead of a given vector of the right-hand sides of functional constraints, only a set to which this vector belongs is specified. As a result, we obtain a two-level problem. In contrast to the classical two-level hierarchical problems with implicitly given constraints, it is objective functions that are given implicitly in out case. There is no hierarchy in this problem. As a rule, sensitivity functions are discussed in the literature in a more general context as functions of the optimal value. The author does not know optimization statements of these problems as independent studies or, even more so, solution methods for them. A new saddle approach to the solution of problems with sensitivity functions is proposed. The monotone convergence of the method is proved with respect to the variables of the space in which the problem is considered.

Keywords: sensitivity function, parametric optimization, parametric Lagrangian, saddle point, extraproximal methods, convergence.

**MSC:** 90C25, 90C31, 90C46, 90C90, 49K40

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-33-42

## 1. Постановка задачи

Задача минимизации функции чувствительности представляет собой систему двух задач. Одна из них является параметрической задачей выпуклого программирования, которая, собственно говоря, относительно параметра порождает функцию чувствительности. Другая задача — это задача оптимизации функции чувствительности на выпуклых множествах:

$$\varphi(y) = f(x^*(y)) = \mathrm{Min}\{f(x) \mid g(x) \leq y,\ x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}, \quad y \in \mathbb{R}^m_+, \tag{1.1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01353).

$$y^* \in \operatorname{Arg}\min\{\varphi(y) \mid y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m_+\}. \tag{1.2}$$

Здесь $f(x)$ — выпуклая скалярная, $g(x)$ — векторная функции, причем каждая компонента векторной функции также выпуклая функция, $y \geq 0$ — параметр, $\mathbb{R}^m_+$ — положительный ортант, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m_+$ — выпуклые замкнутые множества. Совокупности решений задач (1.1), (1.2) представляют собой выпуклые замкнутые множества $X^*$, $Y^*$, тогда $x^* \in X^*$, $y^* \in Y^*$. Фиксированное множество $Y$ в этой работе будет выступать в двух формах: в геометрической форме как выпуклое замкнутое множество и в форме, заданной системой функциональных неравенств $Y = \{y \mid g_1(y) \leq y_1\}$, $y_1 \in \mathbb{R}^q_+$. Все компоненты векторной функции $g_1(y)$ выпуклы. В частности, функциональные ограничения могут порождать многогранники.

Первая задача из системы (1.1), (1.2) порождает функцию чувствительности. Это происходит следующим образом: когда параметр $y \in \mathbb{R}^m_+$ пробегает положительный ортант, внутренняя задача по переменной $x \in X$ порождает оптимальное значение $f(x^*(y))$, которое присваивается функции $\varphi(y)$, вычисленной в точке $y \in \mathbb{R}^m_+$. В системе (1.1), (1.2) требуется найти минимум функции чувствительности на множестве $y \in Y$, при этом целевая функция задана неявно.

Задачу (1.1) можно интерпретировать как модель производства, в которой требуется выбрать вектор ресурсов $y \in Y$ и отвечающий ему вектор интенсивностей $x \in X$ работы предприятия так, чтобы обеспечить выпуск продукции с минимальными затратами. Эффективность предприятия, зависящая от ресурсов, оценивается величиной $f(x^*(y))$ в точке минимума $x^*(y)$ из задачи (1.1). Очевидно, при разных наборах ресурсов эффективность предприятия, вообще говоря, будет разная. В этой ситуации возникает задача выбора вектора ресурсов из некоторого фиксированного геометрического множества $Y \in \mathbb{R}^m_+$ или функционально заданного множества $Y = \{y \mid g_1(y) \leq y_1\}$, $y_1 \in \mathbb{R}^q_+$, так, чтобы обеспечить наилучшую эффективность предприятия. Формальное описание этой ситуации приводит нас к задаче (1.1), (1.2). Если в этой задаче операцию min заменить на операцию max, то можно говорить о максимальной выгоде предприятия при выборе того или иного набора ресурсов.

Функция $\varphi(y)$, $y \in \mathbb{R}^m_+$, известна как функция чувствительности. Перечислим основные свойства этой функции (см., например, [1]), где приведена соответствующая библиография.

1) Функция чувствительности является монотонно убывающей.

2) Надграфик функции чувствительности — выпуклое замкнутое множество.

3) Функция чувствительности является субдифференцируемой. Прокомментируем утверждение более детально. Для каждого $y \in Y = \{y \mid g_1(y) \leq y_1\}$, $y_1 \in \mathbb{R}^q_+$, функция чувствительности тесно связана с задачей выпуклого программирования (1.1), которая в свою очередь тесно связана с функцией Лагранжа

$$L(x, p) = f(x) + \langle p, g(x) - y\rangle, \tag{1.3}$$

определенной для всех $x \in X$, $p \in \mathbb{R}^q_+$ и любого фиксированного $y \in \mathbb{R}^q_+$. Связь эта состоит в том, что прямое и двойственное решения регулярной задачи выпуклого программирования образуют седловую точку функции Лагранжа, т. е. седловая точка $(x^y, p^y)$ по определению удовлетворяет системе неравенств

$$f(x^y) + \langle p, g(x^y) - y\rangle \leq f(x^y) + \langle p^y, g(x^y) - y\rangle \leq f(x) + \langle p^y, g(x) - y\rangle \tag{1.4}$$

для всех допустимых $x \in \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^q_+$ и фиксированного $y \geq 0$. Из правого неравенства системы (1.4) видно, что вторая компонента седловой точки (вместе с координатой $-1$) является нормалью $(-1, p^n)$ опорной функции относительно образа отображения прямых переменных $(f(x), g(x))$. Обозначим эту компоненту нормали через $\nabla\varphi(y) = -p^y$ и будем называть ее *субградиентом.* В общем случае пара $(-1, \nabla\varphi(y))$ порождает опорную плоскость в точке $(f(x^y), g(x^y) - y)$. Опорных плоскостей может быть много, как правило, это целый конус. Конус нормалей опорных плоскостей будем называть *субдифференциалом* и обозначать его через $\dfrac{\partial\varphi(y)}{\partial y}$, тогда отдельный элемент конуса — *субградиент* $\nabla\varphi(y)$. В частности, конус может содержать один элемент, который порождает касательную плоскость. Проведенные рассуждения верны для любого значения параметра $y \in \mathbb{R}^q_+$, и в частности для некоторого $y_0 \in \mathbb{R}^q_+$. С учетом введенных обозначений можно написать:

$$\nabla\varphi(y) \in \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}, \quad \nabla\varphi(y_0) \in \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\Big|_{y=y_0}.$$

Анализируя систему (1.4), нетрудно получить известные неравенства выпуклости функции чувствительности

$$\langle\nabla\varphi(y_0), y - y_0\rangle \le \varphi(y) - \varphi(y_0) \le \nabla\langle\varphi(y), y - y_0\rangle \tag{1.5}$$

для всех $y \ge 0$ и $y_0 \ge 0$. Подробное и формальное изложение этого пункта представлено в [1].

4) Функция чувствительности $\varphi(y)$ выпукла в смысле неравенства Йенссена [2], т. е. удовлетворяет условиям

$$\varphi(\alpha y + (1-\alpha)y_0) \le \alpha\varphi(y) + (1-\alpha)\varphi(y_0), \quad y \ge 0, \quad y_0 \ge 0, \quad 0 \le \alpha \le 1. \tag{1.6}$$

5) Субдифференциал функции чувствительности является многозначным выпуклозначным замкнутым отображением [1].

6) Субдифференциал функции чувствительности есть ограниченное отображение.

7) Субдифференциал функции чувствительности — многозначное монотонное отображение

$$\Big\langle \frac{\partial\varphi(y)}{\partial y} - \frac{\partial\varphi(y_0)}{\partial y}, y - y_0 \Big\rangle \ge 0$$

для всех $y \ge 0$ и $y_0 \ge 0$. Это неравенство очевидно следует из (1.5).

Отметим также, что график функции чувствительности задачи выпуклого программирования и совокупность парето-оптимальных векторных оценок векторной функции $(f(x), g(x))$ задачи многокритериальной оптимизации совпадают для выпуклого случая как множества [1].

## 2. Минимизация функции чувствительности на геометрическом множестве

Функция чувствительности не задана в явном виде, но, тем не менее, для любого $y \ge 0$ всегда можно вычислить ее значение в любой точке и любой ее субградиент (т. е. вектор множителей Лагранжа задачи (1.1)). Это значит, что для решения задачи минимизации $\varphi(y)$ на множестве $Y \in \mathbb{R}^m_+$ можно сформулировать проксимальные и градиентные итеративные процессы и доказать их сходимость к решению задачи (1.2), т. е. вычислить значение функции и ее градиент.

Пусть точка $y^* \in Y$ является точкой минимума функции чувствительности $\varphi(y)$ на множестве $Y \subseteq \mathbb{R}^m_+$. Тогда $y^* \in Y$ — неподвижная точка экстремального (проксимального) однозначного отображения, т. е.

$$y^* = \arg\min\big\{1/2\,|y - y^*|^2 + \alpha\varphi(y) \mid y \in Y\big\}, \quad \alpha > 0. \tag{2.1}$$

Это уравнение одновременно является необходимым и достаточным условием для задачи оптимизации (1.2). Метод простой итерации (проксимальный метод) для решения этого уравнения представляется естественным [3; 4]:

$$y^{n+1} = \arg\min\big\{1/2\,|y - y^n|^2 + \alpha\varphi(y) \mid y \in Y\big\}. \tag{2.2}$$

Процесс является неявным аналогом градиентного (в случае дифференцируемости $\varphi(y)$) метода, и сходимость его к точке минимума почти очевидна. Точка $y^{n+1}$ из (2.2) — единственная точка минимума и по определению удовлетворяет неравенству

$$1/2\,|y^{n+1} - y^n|^2 + \alpha\varphi(y^{n+1}) \le 1/2\,|y - y^n|^2 + \alpha\varphi(y)$$

для всех $y \in Y$. Однако рассматриваемая функция является сильно выпуклой, и, как показано в [5], для точки $y^{n+1}$ выполняется более сильное неравенство, а именно:

$$1/2\,|y^{n+1} - y^n|^2 + \alpha\varphi(y^{n+1}) \le 1/2\,|y - y^n|^2 + \alpha\varphi(y) - 1/2\,|y - y^{n+1}|^2 \tag{2.3}$$

для всех $y \in Y$. Аналогично, уравнение (2.1) можем записать в форме усиленного неравенства

$$1/2\,|y^* - y^*|^2 + \alpha\varphi(y^*) \le 1/2\,|y - y^*|^2 + \alpha\varphi(y) - 1/2\,|y - y^*|^2 \tag{2.4}$$

для всех $y \in Y$. Приведем кратко доказательство теоремы, которая нам понадобится в дальнейшем.

**Теорема 1.** *Если множество решений задачи* (1.1), (1.2) *не пусто, целевая функция подчинена условию* (1.6), *множество* $Y \subseteq \mathbb{R}^m_+$ *выпукло, замкнуто, то процесс* (2.2) *при любом значении параметра* $\alpha > 0$ *сходится монотонно по норме к одному из решений задачи* (1.1), (1.2).

Доказательство. Неравенства (2.3) и (2.4) выполняются для всех $y \in Y$, поэтому можно принять в первом неравенстве $y = y^*$, во втором — $y = y^{n+1}$, сложить оба неравенства и получить

$$|y^{n+1} - y^*|^2 + |y^{n+1} - y^n|^2 + 2\alpha(\varphi(y^{n+1}) - \varphi(y^*)) \le |y^n - y^*|^2. \tag{2.5}$$

Поскольку $(\varphi(y^{n+1}) - \varphi(y^*)) \ge 0$, то отсюда следует ограниченность последовательности $|y^{n+1} - y^*|^2$ и ее монотонное по норме убывание. Просуммируем неравенство (2.5) от $n = 0$ до $n = N$ и получим

$$|y^{N+1} - y^*|^2 + \sum_{k=0}^{N} |y^{n+1} - y^n|^2 + 2\alpha \sum_{k=0}^{N} (\varphi(y^{n+1}) - \varphi(y^*)) \le |y^0 - y^*|^2.$$

Из этого неравенства следуют ограниченность последовательности $|y^{N+1} - y^*|^2 \le |y^0 - y^*|^2$, сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |y^{n+1} - y^n|^2 < \infty$ и соответственно стремление к нулю величины $|y^{n+1} - y^n| \to 0,\ n \to \infty$. Так как последовательность $y^n$ ограничена, то существуют подпоследовательность $y^{n_i}$ и элемент $y' \in Y$ такие, что $y^{n_i} \to y'$ при $n_i \to \infty$, причем $|y^{n_i+1} - y^{n_i}|^2 \to 0$.

Рассмотрим неравенство (2.3) на элементах подпоследовательности $n_i \to \infty$ и, перейдя к пределу, выпишем предельное неравенство $\varphi(y') \le \varphi(y)$ для всех $y \in Y$. Отсюда следует, что $y' = y^* \in Y$. Таким образом, любая предельная точка последовательности $y^n$ является решением задачи, при этом величина $|y^n - y^*|$ монотонно убывает. В совокупности данные два фактора означают, что исходная последовательность имеет только одну предельную точку, т. е. $y^n$ монотонно по норме сходится к одному из решений $y^* \in Y$ задачи.

Теорема доказана.

Для численной реализации процесса (2.2) требуется явное задание функции чувствительности. Однако в нашей ситуации эта функция задана неявно, хотя в каждой точке $y \in Y$ всегда можно вычислить ее значение и любой ее субградиент. Воспользуемся последним обстоятельством и выпишем для каждой итерации (2.2) и уравнения (2.1) необходимые и достаточные условия минимумов:

$$\langle y^{n+1} - y^n + \alpha\nabla\varphi(y^{n+1}), y - y^{n+1} \rangle \ge 0, \quad y \in Y; \tag{2.6}$$

$$\langle \nabla\varphi(y^*), y - y^* \rangle \ge 0, \quad y \in Y. \tag{2.7}$$

Полученная итеративная последовательность вариационных неравенств и предельное неравенство эквивалентны проксимальному процессу (2.2), (2.1). Эквивалентность понимается в том смысле, что они порождают одну и ту же последовательность решений, которая сходится к одному и тому же решению $y^* \in Y$. Поэтому теорема о сходимости в равной мере относится к итеративной системе вариационных неравенств и ее предельному случаю (2.6), (2.7).

При практическом применении подхода, основанного на использовании вариационных неравенств (2.6), конечно, нужно записать процесс в форме

$$\left\langle y^{n+1} - y^n + \alpha \frac{\partial \varphi(y^{n+1})}{\partial y}, y - y^{n+1} \right\rangle \geq 0, \quad y \in Y, \tag{2.8}$$

где $\dfrac{\partial \varphi(y)}{\partial y}$ — многозначное выпуклозначное ограниченное монотонное отображение. В рассматриваемом случае оператор вариационного неравенства регуляризован прибавлением к нему единичного оператора, тогда обратный оператор к вариационному неравенству в целом будет однозначным. Другими словами, любое вариационное неравенство (2.8) имеет единственное решение при любом $n$. Это хорошо согласуется с (2.2) (методы решения вариационных неравенств и другие детали см. в [6]).

## 3. Минимизация функции чувствительности на множестве функциональных ограничений

В этом разделе вместо задачи (1.1), (1.2) рассмотрим задачу с функциональными ограничениями [7]:

$$\varphi(y) = f(x^*) = \mathrm{Min}\{f(x) \mid g(x) \leq y,\ x \in X \subseteq \mathbb{R}^n\}, \quad y \in \mathbb{R}^m_+, \tag{3.1}$$

$$y^* \in \mathrm{Arg}\min\{\varphi(y) \mid y \in Y\}, \tag{3.2}$$

где $y \in Y = \{y \mid g_1(y) \leq y_1 \in \mathbb{R}^m_+\}$. Целевая функция (3.1) характеризует уровень чувствительности задачи к изменению значения ее целевой функции при сдвиге $i$-го ограничения в направлении его градиента. Если оптимум $x^* \in X$ задачи (3.1) или (1.1) сильно лимитируется $i$-м ограничением, то $i$-й множитель Лагранжа $p_i^*$ достаточно велик, а это значит, что целевая функция по этому направлению будет быстро меняться; при малом же множителе Лагранжа сдвиг ограничения в направлении его $i$-го градиента оказывает малое возмущение на задачу. Если же точка $x^* \in X$ лежит строго "внутри" ограничения, то $i$-й множитель Лагранжа вообще равен нулю. Вектор $y \in \mathbb{R}^m_+$ в этой задаче имеет определенную смысловую и содержательную нагрузку как вектор ресурсов.

Рассмотрим эту ситуацию более подробно. Введем функцию Лагранжа для задачи (3.1)

$$x^* \in \mathrm{Arg}\min\{f(x) \mid g(x) - y^* \leq 0,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

при фиксированном векторе $y = y^*$:

$$L(x, y, p) = f(x) + \langle p, g(x) - y^* \rangle.$$

Эта функция определена для всех $x \in \mathbb{R}^n,\ p \in \mathbb{R}^m_+,\ y^* \in \mathbb{R}^m_+$. Седловая точка $(x^*, p^*)$ функции удовлетворяет системе седловых неравенств

$$f(x^*) + \langle p, g(x^*) - y^* \rangle \leq f(x^*) + \langle p^*, g(x^*) - y^* \rangle \leq f(x) + \langle p^*, g(x) - y^* \rangle \tag{3.3}$$

для всех допустимых $x \in X$, $p \in \mathbb{R}^m_+$. Перепишем систему (3.3) в виде

$$x^* \in \mathrm{Arg}\min\{f(x) + \langle p^*, g(x) - y^* \rangle \mid x \in X\}, \quad y^* \in Y,$$

$$\langle p - p^*, g(x^*) - y^* \rangle \leq 0, \quad p \geq 0$$

и добавим к ней необходимое и достаточное условие минимума задачи (3.2)

$$\langle \nabla\varphi(y^*), y - y^* \rangle \geq 0, \quad y \in Y,$$

что эквивалентно $\varphi(y^*) \leq \varphi(y),\ y \in Y$.

Согласно (1.4) в п. 3) имеем $\nabla\varphi(y^*) = -p^*$, тогда последнюю систему неравенств можно представить как

$$\begin{gathered} x^* \in \operatorname{Arg}\min\{f(x) + \langle p^*, g(x) - y^*\rangle \mid x \in X\}, \quad y^* \in Y, \\ \langle p - p^*, g(x^*) - y^*\rangle \le 0, \quad p \ge 0, \\ \langle p^*, y - y^*\rangle \le 0, \quad y \in Y. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Отсюда следует, что решение системы (3.4) удовлетворяет системе (3.1), (3.2) и наоборот. В свою очередь тройка векторов $x^*$, $p^*$, $y^*$ является решением системы экстремальных задач:

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min\{f(x) \mid g(x) \le y^*,\ x \in X\}, \tag{3.5}$$

$$p^* \in \operatorname{Arg}\max\{\langle p, g(x^*) - y^*\rangle \mid p \ge 0\}, \tag{3.6}$$

$$y^* \in \operatorname{Arg}\min\{\langle \nabla\varphi(y^*), y\rangle \mid y \in Y\}. \tag{3.7}$$

Теперь можно сформулировать

**Утверждение.** *Система соотношений* (3.4) *является необходимым и достаточным условием оптимальности для системы задач* (3.5)–(3.7).

## 4. Прямой и двойственный экстрапроксимальные методы

Седловую структуру задачи (3.5)–(3.7) представим в форме

$$x^* \in \operatorname{Arg}\min\{f(x) + \langle p^*, g(x) - y^*)\rangle \mid x \in X\},$$

$$\begin{gathered} p^* = \pi_+(p^* + \alpha(g(x^*) - y^*)), \\ y^* = \pi_Y(y^* + \alpha p^*). \end{gathered}$$

Чтобы придать экстремальному отображению свойство “быть нерасширяющимся оператором” в области его определения, разумно его регуляризовать и записать в эквивалентной форме проксимального оператора; тогда система приобретает вид:

$$\begin{gathered} x^* \in \operatorname{Arg}\min\big\{1/2\,|x - x^*|^2 + \alpha(f(x) + \langle p^*, g(x) - y^*)\rangle) \mid x \in X\big\}, \\ p^* = \pi_+(p^* + \alpha(g(x^*) - y^*)), \\ y^* = \pi_Y(y^* + \alpha p^*). \end{gathered} \tag{4.1}$$

Полученная система уравнений относится к системам седлового типа, поэтому для ее решения естественно использовать седловые подходы. В работах [7; 8] седловые подходы применялись для решения разного типа задач и назывались *экстрапроксимальными методами* (см. также [9; 10]).

Здесь представляется разумным сопоставить постановку задачи, упомянутой в работе [7], с рассматриваемой здесь задачей (3.1), (3.2). В указанной работе рассматривается задача вычисления неподвижной точки некоторого отображения множества $Y \subset \mathbb{R}^q$ в себя. Эта постановка в неявном виде включена в задачу (3.1), (3.2), поэтому последнюю постановку можно рассматривать как обобщение первой. Содержательная интерпретация у этих задач может быть разная, но внутренняя логика одна и та же, поэтому методы их решения совпадают.

Что касается различия между прямыми и двойственными методами, то это различие в первую очередь связано со структурой векторных полей седловых задач. Эти векторные поля являются полями вращения с центром вращения в седловой точке. Такая структура векторного поля порождает замкнутые траектории. Чтобы обеспечить движение вычислительного процесса из произвольной точки к центру вращения, необходимо на каждой итерации “перескакивать” с одной замкнутой кривой на другую, которая ближе к центру вращения. Это приводит к расщеплению итеративного шага на два полушага. В зависимости от того, по каким переменным (прямым или двойственным) происходит расщепление итеративного шага, получаем прямой или двойственный методы.

Задача минимизации неявно заданной функции чувствительности при ограничениях представляет собой очень эластичную конструкцию, которая легко сочетается с другими задачами, включая игровые, сетевые задачи, вариационные неравенства, различные экономические рынки, а также динамические управляемые системы. Перечисленные связки дают возможность строить сложные сети задач, которые в свою очередь позволят создавать сложные математические модели для описания сложных равновесных состояний больших прикладных систем.

В настоящей работе рассмотрим два варианта (прямой и двойственный) экстрапроксимальных методов для решения системы (3.5)–(3.7). Первый из них будем называть прямой метод, а второй — соответственно двойственный метод.

**Прямой метод:**

$$\begin{gathered}\bar{y}^n = \pi_Y(y^n + \alpha p^n),\\ \bar{x}^n \in \arg\min\left\{1/2\,|x - x^n|^2 + \alpha(f(x) + \langle p^n, g(x)\rangle) \mid x \in X\right\};\\ p^{n+1} = \pi_+(p^n + \alpha(g(\bar{x}^n) - \bar{y}^n)),\\ y^{n+1} = \pi_Y(y^n + \alpha p^{n+1}),\\ x^{n+1} \in \arg\min\left\{1/2\,|x - x^n|^2 + \alpha(f(x) + \langle p^{n+1}, g(x)\rangle) \mid x \in X\right\}.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Поскольку целевые функции процесса (4.2) имеют структуру функции (2.3), то этот процесс может быть записан в эквивалентной форме:

$$|\bar{x}^n - x^n|^2 + 2\alpha f(\bar{x}^n) + 2\alpha\langle p^n, g(\bar{x}^n)\rangle$$
$$\le |x - x^n|^2 + 2\alpha f(x) + 2\alpha\langle p^n, g(x)\rangle - |x - \bar{x}^n|^2; \tag{4.3}$$
$$|x^{n+1} - x^n|^2 + 2\alpha f(x^{n+1}) + 2\alpha\langle p^{n+1}, g(x^{n+1})\rangle$$
$$\le |x - x^n|^2 + 2\alpha f(x) + 2\alpha\langle p^{n+1}, g(x)\rangle - |x - x^{n+1}|^2. \tag{4.4}$$

Операторные уравнения процесса (4.3) согласно [5] представим в форме вариационных неравенств

$$\langle \bar{y}^n - y^n - \alpha p^n, y - \bar{y}^n\rangle \ge 0, \quad y \in Y,$$
$$\langle y^{n+1} - y^n - \alpha p^{n+1}, y - y^{n+1}\rangle \ge 0, \tag{4.5}$$
$$\langle p^{n+1} - p^n - \alpha(g(\bar{x}^n) - \bar{y}^n)), p - p^{n+1}\rangle \ge 0, \quad p \ge 0. \tag{4.6}$$

Для доказательства сходимости рассматриваемого метода понадобится условие Липшица для векторной функции $g(x)$, которое используем в форме

$$|g(x+h) - g(h)| \le |g|\,|h| \tag{4.7}$$

для всех $x + h \in X$, $h \in \mathbb{R}^n$, где $|g|$ — константа Липшица.

Оценим отклонение векторов $\bar{x}^n$ и $x^{n+1}$ на каждом шаге процесса (4.3), (4.4). С этой целью положим в неравенствах (4.5) и (4.6) значения $x = x^{n+1}$ и $x = x^n$ соответственно; тогда

$$|\bar{x}^n - x^n|^2 + 2\alpha f(\bar{x}^n) + 2\alpha\langle p^n, g(\bar{x}^n)\rangle \le |x^{n+1} - x^n|^2 + 2\alpha f(x^{n+1}) + 2\alpha\langle p^n, g(x^{n+1})\rangle - |x^{n+1} - \bar{x}^n|^2,$$

$$|x^{n+1} - x^n|^2 + 2\alpha f(x^{n+1}) + 2\alpha\langle p^{n+1}, g(x^{n+1})\rangle \le |\bar{x}^n - x^n|^2 + 2\alpha f(\bar{x}^n) + 2\alpha\langle p^{n+1}, g(\bar{x}^n)\rangle - |\bar{x}^n - x^{n+1}|^2.$$

Сложим полученные неравенства:

$$|\bar{x}^n - x^{n+1}|^2 \le \alpha\langle p^{n+1} - p^n, g(\bar{x}^n) - g(x^{n+1}\rangle.$$

С учетом (4.7) окончательно получим

$$|\bar{x}^n - x^{n+1}| \le \alpha\,|g|\,|p^{n+1} - p^n|. \tag{4.8}$$

Оценим отклонение векторов $\bar{y}^n$ и $y^{n+1}$ на каждом шаге процесса (4.3):

$$|\bar{y}^n - y^{n+1}| \le \alpha\,|p^{n+1} - p^n|.$$

Сходимость итеративного процесса (4.2) устанавливает следующая теорема.

**Теорема 2.** *Если решение равновесной задачи* (3.1), (3.2) *существует, функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *— выпуклые, функция* $g(x)$ *дополнительно подчинена условию Липшица* (4.8), $X$, $Y$ *— выпуклые замкнутые множества, то последовательность* $p^n, x^n, y^n$ *прямого экстрапроксимального метода* (4.2) *с параметром* $\alpha$, *удовлетворяющим условию* $0 < \alpha < 1/\sqrt{2(|g|^2+1)}$, *сходится монотонно по норме к одному из решений задачи* (4.1), *т. е.* $p^n, x^n, y^n \to p^*, x^*, y^*$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $p^0$, $x^0$, $p^0$.

Схема доказательства метода близка к доказательству, представленному в работе [7]. Доказательство легко может быть восстановлено читателем, поэтому здесь не приводится.

Наряду с прямым методом, который только что был рассмотрен, для решения системы задач (3.5)–(3.7) можно использовать двойственный экстрапроксимальный подход [7; 8]. Формулы этого метода имеют следующий вид.

**Двойственный метод:**

$$\begin{gathered}
\bar{p}^n = \pi_+(p^n + \alpha(g(x^n) - y^n));\\
y^{n+1} = \pi_Y(y^n + \alpha\bar{p}^n),\\
x^{n+1} \in \arg\min\bigl\{1/2\,|x - x^n|^2 + \alpha(f(x) + \langle \bar{p}^n, g(x)\rangle) \mid x \in X\bigr\},\\
p^{n+1} = \pi_+(p^n + \alpha(g(x^{n+1}) - y^{n+1})).
\end{gathered} \tag{4.9}$$

Если в исходной задаче (3.1), (3.2) вектор $y^* \in Y$ — константа, т. е. множество $Y$ содержит одну точку, то итеративные формулы по переменой $y$ отсутствуют. В этом случае получаютя формулы процесса для решения задачи выпуклого программирования (3.1) или вычисления седловой точки функции (1.3). Если же, наоборот, задача выпуклого программирования вырождается и отсутствует, то процесс (4.9) содержит формулы только по переменной $y$ и этот подпроцесс сходится к решению задачи (3.2), т. е. к вычислению граничной точки множества $Y$, которая является опорной для линейного функционала $\langle p^*, y\rangle$, $y \in Y$, где $p^*$ — априори заданный вектор.

Представим процесс (4.9) в форме неравенств:

$$\begin{gathered}
\langle \bar{p}^n - p^n - \alpha(g(x^n) - y^n)), p - \bar{p}^n\rangle \ge 0, \quad p \ge 0,\\
\langle y^{n+1} - y^n - \alpha\bar{p}^n, y - y^{n+1}\rangle \ge 0,\\
|x^{n+1} - x^n|^2 + 2\alpha f(x^{n+1}) + 2\alpha\langle \bar{p}^n, g(x^{n+1})\rangle\\
\le |x - x^n|^2 + 2\alpha f(x) + 2\alpha\langle \bar{p}^n, g(x)\rangle - |x - x^{n+1}|^2, \quad x \in X,\\
\langle p^{n+1} - p^n - \alpha(g(x^{n+1}) - y^{n+1})), p - p^{n+1}\rangle \ge 0, \quad p \ge 0.
\end{gathered}$$

Получим оценки отклонения векторов $\bar{p}^n$ и $p^{n+1}$ друг от друга. Сопоставляя первое и последнее уравнения из (4.9), имеем $|\bar{p}^n - p^{n+1}| = \alpha\,|g(x^n) - y^n - g(x^{n+1}) + y^{n+1}|$.

Относительно сходимости метода (4.9) справедлива теорема.

**Теорема 3.** *Если решение равновесной задачи* (3.1), (3.2) *существует, функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *выпуклы, функция* $g(x)$ *подчинена условию Липшица* (4.8), $X$, $Y$ *— выпуклые замкнутые множества, то последовательность* $p^n, x^n, y^n$ *двойственного экстрапроксимального метода* (4.9) *с параметром* $\alpha$, *удовлетворяющим условию* $0 < \alpha < \min\{1/(2|g|), 1/2\}$, *сходится монотонно по норме к одному из решений задачи* (4.9), *т. е.* $p^n, x^n, y^n \to p^*, x^*, y^*$ *при* $n \to \infty$ *для всех* $p^0$, $x^0$, $p^0$.

Теорема также приводится без доказательства (см. [7]).

## 5. Заключение

В работе рассматривалась задача минимизации функции чувствительности на выпуклом замкнутом множестве. Эта задача, несмотря на свою традиционную постановку, носит оригинальный характер в силу того обстоятельства, что представляет собой систему двух задач оптимизации. Целевая функция задачи задана неявно, и эта функция как функция чувствительности позволяет описывать и оценивать изменение оптимального значения целевой функции при сдвиге ограничений в направлении своего градиента. Кроме того, данная задача часто является самостоятельной компонентой сложных систем задач оптимизации. Например, в настоящей работе рассматривался случай, когда функция чувствительности явилась результатом задачи первого уровня. В свою очередь функция чувствительности, рассматриваемая на параметрическом множестве, порождает функцию чувствительности второго уровня. Такой процесс создает связанную систему из конечного числа задач, каждая из которых обусловлена своими функциями чувствительности. Развитие методов решения такого сорта сложных систем имеет особое значение для приложений, поскольку такие системы описывают равновесные состояния реальных сложных объектов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Антипин А. С., Голиков А. И., Хорошилова Е. В.** Функция чувствительности, ее свойства и приложения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51. № 12. С. 2126–2142.
2. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. Т. 1,2. М.: Изд-во МЦНМО, 2011. 1056 р.
3. **Rockafellar R. T.** Monotone operators and the proximal point algorithm // SIAM J. Control Optim. 1976. Vol. 14, № 5. C. 877–898. doi: 10.1137/0314056 .
4. **Антипин А. С.** О методе выпуклого программирования, использующем симметрическую модификацию функции Лагранжа // Экономика и мат. методы. 1976. XII, вып. 6. С. 1164–1173.
5. **Антипин А. С.** О сходимости и оценках скорости сходимости проксимальных методов к неподвижным точкам экстремальных отображений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 5. С. 688–704.
6. **Коннов И. В.** Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2013. 508 р.
7. **Антипин А. С.** Седловая задача и задача оптимизации как единая система // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 5–15.
8. **Антипин А. С.** Экстрапроксимальный метод решения равновесных и игровых задач со связанными переменными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2005. Т. 45, № 12. С. 2102–2111.
9. **Clempner J., Poznyak A. S.** Using the extraproximal method for computing the shotest-path mixeв Lyapunov equilibrium in stackelberg security games // Inernational J. on Artificial Intelligence Tools. 2014. Vol. 11. P. 3–23.
10. **Trejo K. K., Clempner J. B., Poznyak A. S.** A stackelberg security game with random strategic based on the extraproximal theoretic approach // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2015. Vol. 37. P. 145–153. doi: 10.1016/j.engappai.2014.09.002 .


Антипин Анатолий Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН,
г. Москва
e-mail: asantip@yandex.ru

Поступила 13.06.2017

## REFERENCES


1. Antipin A.S., Golikov A.I., Khoroshilova E.V. Sensitivity function: Properties and applications. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 12, pp. 2000–2016. doi: 10.1134/S0965542511120049 .
2. Vasil’ev F.P. *Metody optimizatsii:* T. 1,2. [Optimization methods: Vol. 1,2]. Moscow, MTsNMO Publ., 2011, 1056 p.

3. Rockafellar R.T. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM J. Control and Optimization*, 1976, vol. 14, no. 5, pp. 877–898. doi: 10.1137/0314056 .
4. Antipin A.C. On the method of convex programming using the symmetric modification of the Lagrange function. *Economy and Mat. Methods*, 1976, vol. 12, no. 6, pp. 1164–1173 (in Russian).
5. Antipin A.S. The convergence of proximal methods to fixed points of extremal mappings and estimates of their rate of convergence. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1995, vol. 35, no. 5, pp. 539–551.
6. Konnov I.V. *Nelineinaya optimizatsiya i variatsionnye neravenstva* [Nonlinear optimization and variational inequalities]. Kazan: Kazan Federal University Publ., 2013, 508 p. ISBN: 978-5-00019-059-3 .
7. Antipin A.S. Saddle problem and optimization problem as an integrated system. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2008, vol. 263 (suppl. 2), pp. 3–14. doi: 10.1134/S0081543808060023 .
8. Antipin A.S. An extraproximal method for solving equilibrium programming problems and games with coupled variables. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2005, vol. 45, no. 12, pp. 2020–2029.
9. Clempner J., Poznyak A.S. Using the extraproximal method for computing the shortest-path mixed Lyapunov equilibrium in Stackelberg security games. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2017, vol. 138, pp. 14–30. doi: 10.1016/j.matcom.2016.12.010 .
10. Trejo K.K., Clempner J.B., Poznyak A.S. A stackelberg security game with random strategic based on the extraproximal theoretic approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2015, vol. 37, pp. 145–153. doi: 10.1016/j.engappai.2014.09.002 .

The paper was received by the Editorial Office on June 13, 2017.

*Anatolii Sergeevich Antipin*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Science, Moscow, 119333 Russian, e-mail: asantip@yandex.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.51

# МОДИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ БЕРНШТЕЙНА И РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ ПОЛИНОМАМИ[1]

**А. Г. Бабенко Ю. В. Крякин**

П. Л. Чебышев (1857, 1859) поставил и решил задачу о наименее уклоняющейся от нуля в равномерной метрике на отрезке неправильной рациональной дроби среди рациональных дробей, знаменатель которых фиксирован и представляет собой положительный на отрезке многочлен заданной степени $m$, а числитель — многочлен заданной степени $n \geq m$ с единичным старшим коэффициентом. А. А. Марков (1884) решил аналогичную задачу в случае, когда в знаменателе расположен корень квадратный из заданного положительного многочлена. В XX в. эта тематика получила развитие в работах С. Н. Бернштейна, Н. И. Ахиезера и других математиков. Так, Г. Сеге (1964), используя методы комплексного анализа, перенес результат П. Л. Чебышева на случай тригонометрических дробей. В данной статье методами вещественного анализа на основе развития подхода С. Н. Бернштейна удалось найти наилучшее равномерное приближение на периоде тригонометрическими полиномами определенного порядка для бесконечной серии правильных тригонометрических дробей специального вида. Оказалось, что в периодическом случае некоторые результаты естественно формулировать в терминах обобщенного ядра Пуассона $\Pi_{\rho,\xi}(t) = (\cos\xi)P_\rho(t) + (\sin\xi)Q_\rho(t)$, представляющего собой линейную комбинацию ядра Пуассона $P_\rho(t) = (1-\rho^2)/[2(1+\rho^2-2\rho\cos t)]$ и сопряженного ядра Пуассона $Q_\rho(t) = \rho\sin t/(1+\rho^2-2\rho\cos t)$, где $\rho \in (-1,1)$, $\xi \in \mathbb{R}$. В настоящей работе найдено наилучшее равномерное приближение на периоде подпространством $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n$ следующей линейной комбинации обобщенного ядра Пуассона и его сдвига: $\Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n\Pi_{\rho,\xi}(t+\pi)$. Отсюда при $\xi = 0$ получаются известные результаты С. Н. Бернштейна о наилучшем равномерном приближении на $[-1,1]$ дробей $1/(x^2-a^2)$, $x/(x^2-a^2)$ алгебраическими многочленами, а при $\xi = \pi/2$ — их весовые аналоги (с весом $\sqrt{1-x^2}$). Кроме того, здесь найдена величина наилучшего равномерного приближения на периоде подпространством $\mathcal{T}_n$ специальной линейной комбинации упомянутого выше ядра Пуассона $P_\rho$ и ядра Пуассона $K_\rho$ для бигармонического уравнения в единичном круге.

Ключевые слова: Функции Бернштейна, ядра Пуассона, равномерное приближение.

**A. G. Babenko, Yu. V. Kryakin. Modified Bernstein function and a uniform approximation of some rational fractions by polynomials.**

P. L. Chebyshev posed and solved (1857, 1859) the problem of finding an improper rational fraction least deviating from zero in the uniform metric on a closed interval among rational fractions whose denominator is a fixed polynomial of a given degree $m$ that is positive on the interval and numerator is a polynomial of a given degree $n \geq m$ with unit leading coefficient. A. A. Markov solved (1884) a similar problem in the case when the denominator is the square root of a given positive polynomial. In the 20th century, this research direction was developed by S. N. Bernstein, N. I. Akhiezer, and other mathematicians. For example, in 1964 G. Szegő extended Chebyshev's result to the case of trigonometric fractions using the methods of complex analysis. In this paper, using the methods of real analysis and developing Bernstein's approach, we find the best uniform approximation on a period by trigonometric polynomials of certain order for an infinite series of proper trigonometric fractions of a special form. It turned out that, in the periodic case, it is natural to formulate some results in terms of the generalized Poisson kernel $\Pi_{\rho,\xi}(t) = (\cos\xi)P_\rho(t) + (\sin\xi)Q_\rho(t)$, which is a linear combination of the Poisson kernel $P_\rho(t) = (1-\rho^2)/[2(1+\rho^2-2\rho\cos t)]$ and the conjugate Poisson kernel $Q_\rho(t) = \rho\sin t/(1+\rho^2-2\rho\cos t)$, where $\rho \in (-1,1)$ and $\xi \in \mathbb{R}$. We find the best uniform approximation on a period by the subspace $\mathcal{T}_n$ of trigonometric polynomials of order at most $n$ for the linear combination $\Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n\Pi_{\rho,\xi}(t+\pi)$ of the generalized Poisson kernel and its shift. For $\xi = 0$, this yields Bernstein's known results on the best uniform approximation on $[-1,1]$ of the fractions $1/(x^2-a^2)$ and $x/(x^2-a^2)$ by algebraic polynomials. For $\xi = \pi/2$, we obtain the weight analogs (with weight $\sqrt{1-x^2}$) of these results. In addition, we find the value of the best uniform approximation on a period by the subspace $\mathcal{T}_n$ of a special linear combination of the mentioned Poisson kernel $P_\rho$ and the Poisson kernel $K_\rho$ for the biharmonic equation in the unit disk.

Keywords: Bernstein functions, Poisson kernels, uniform approximation.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 2.A03.21.0006 от 27.08.2013).

**MSC:** 41A10, 42A10

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-43-57

## Введение

П. Л. Чебышев [19, т. 2, с. 146–236] поставил и решил задачу о наименее уклоняющейся от нуля в равномерной метрике на отрезке $[-1,1]$ неправильной рациональной дроби среди рациональных дробей вида $P/Q$, где числитель $P$ — многочлен заданной степени $n$ с единичным старшим коэффициентом, а знаменатель $Q$ фиксирован и представляет собой положительный на $[-1,1]$ алгебраический многочлен степени $m \le n$. А. А. Марков [12; 13, ст. 11, п. 1–8, с. 244–273] решил аналогичную задачу в случае, когда в знаменателе дроби вместо фиксированного многочлена $Q$ расположен $\sqrt{\psi}$, где $\psi$ — заданный многочлен степени $\ell \le 2n$, положительный на $[-1,1]$. Г. Сеге [17] перенес результат П. Л. Чебышева на случай тригонометрических дробей. Существенный вклад в эту тематику внесли С. Н. Бернштейн, Н. И. Ахиезер и другие математики, используя методы как вещественного, так и комплексного анализа (см. монографию [16], работы [9–11] и приведенную в них библиографию).

В данной статье на основе развития подхода С. Н. Бернштейна найдены наилучшие равномерные приближения на периоде тригонометрическими полиномами определенного порядка для бесконечной серии правильных тригонометрических дробей специального вида, в частности для специальной линейной комбинации обобщенного ядра Пуассона и его сдвига, а также для специальной линейной комбинации ядер Пуассона для гармонического и бигармонического уравнений в единичном круге. При этом решающее значение имеют модифицированные функции Бернштейна $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$, определенные ниже в разд. 2 (в случае $k=1$ эти функции были введены ранее в [3]).

Нули функции Бернштейна $B_n(t,q)=\mathcal{B}_{n,1}(t,q,0)$ (см. ниже формулу (1.6), а также формулу (2.12) при $\xi=0$, $k=1$) сыграли ключевую роль в решении задачи интегрального приближения характеристической функции произвольного отрезка тригонометрическими полиномами [3]. Кроме того, как оказалось [4], набор точек альтернанса функции $B_n(t,q)=\mathcal{B}_{n,1}(t,q,0)$ совпал с набором нулей известного синус-полинома Геронимуса, в терминах которого выражается решение задачи о многочлене, наименее уклоняющемся от нуля на отрезке в интегральной метрике с двумя фиксированными старшими коэффициентами. Поэтому есть основания предполагать, что модифицированные функции Бернштейна $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$ при $\xi\in\mathbb{R}$, $k\ge 1$, $q=(q_1,q_2,\ldots,q_k)\in(-1,1)^k$ найдут еще ряд новых приложений (помимо упомянутых в предыдущем абзаце), тем более что свойства этих функций хорошо анализируются (как численно, так и аналитически) с помощью формул (2.12)–(2.18).

## 1. История вопроса. Краткие формулировки результатов

Пусть $C[\alpha,\beta]$ — пространство непрерывных функций $f\colon\ [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ с равномерной нормой $\|f\|_{C[\alpha,\beta]}=\max\{|f(x)|:\ x\in[\alpha,\beta]\}$; $\mathcal{P}_n$ — подпространство многочленов $p(x)=\sum_{k=0}^n c_kx^k$ (с вещественными коэффициентами) степени не выше $n$.

С. Н. Бернштейн [6, ст. 7–9; 7, гл. 2] исследовал задачу о величине

$$E_n(f)=E_n(f)_{C[-1,1]}=\inf_{p\in\mathcal{P}_n}\|f-p\|_{C[-1,1]}$$

наилучшего равномерного приближения на $[-1,1]$ аналитической функции $f$ подпространством $\mathcal{P}_n$. Он нашел асимптотику указанной величины для рациональной дроби $1/(x-a)^k$, $a>1$, $k\in\mathbb{N}$ при $n\to\infty$. Постановка задачи о равномерном приближении простейшей дроби

$f_a(x) = 1/(x-a)$, $a > 1$, подпространством $\mathcal{P}_n$ принадлежит П. Л. Чебышеву[2] (1892) [19, т. 3, с. 363–372]. С. Н. Бернштейн [6, ст. 8, § 3] (см. [4, разд. 2]) вычислил величину

$$E_n(f_a) = \frac{1}{(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} = \frac{4\rho^{n+2}}{(1-\rho^2)^2}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}, \tag{1.1}$$

и многочлен наилучшего равномерного приближения; здесь параметры $a > 1$, $\rho \in (0,1)$ связаны между собой формулой

$$a = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big) = \frac{1+\rho^2}{2\rho}. \tag{1.2}$$

В [7, гл. 2, § 3, (22)] для $F_a(x) = \dfrac{1}{x^2-a^2}$, $G_a(x) = \dfrac{x}{x^2-a^2}$, $a > 1$, найдены также величины

$$E_n(F_a) = E_{n+1}(F_a) = \frac{1}{2a^2(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} = \frac{8\rho^{n+4}}{(1-\rho^4)^2}, \quad n = 2m,\ m \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.3}$$

$$E_n(G_a) = E_{n+1}(G_a) = \frac{1}{2a(a^2-1)(a+\sqrt{a^2-1})^n} = \frac{4\rho^{n+3}}{(1-\rho^4)(1-\rho^2)}, \quad n = 2m+1,\ m \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.4}$$

Здесь, как и выше, параметры $a > 1$, $\rho \in (0,1)$ связаны между собой формулой (1.2).

При доказательстве этих результатов ключевую роль играют функции $B_n(t,\rho)$, $B_n(t,\rho_1,\rho_2)$ (см. формулы (1.6), (1.7) ниже), которые (в несколько иной форме) применялись в [6, ст. 7–9] и [7, гл. 2, § 3, (20)–(22)] соответственно. Положим

$$\lambda(t,\rho) = \arccos\frac{2\rho-(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}, \quad t \in [0,\pi], \quad -1 < \rho < 1. \tag{1.5}$$

*Функциями Бернштейна* будем называть следующие функции:

$$B_n(t,\rho) = \cos\left[nt - \lambda(t,\rho)\right], \quad t \in [0,\pi], \quad -1 < \rho < 1, \tag{1.6}$$

$$B_n(t,\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\ell) = \cos\left[nt - \lambda(t,\rho_1) - \lambda(t,\rho_2) - \ldots - \lambda(t,\rho_\ell)\right], \tag{1.7}$$
$$t \in [0,\pi], \quad -1 < \rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_\ell < 1.$$

Эти функции после замены $x = \cos t$ преобразуются в алгебраические рациональные дроби с вещественными полюсами, расположенными вне отрезка $[-1,1]$. Указанные дроби (с точностью до постоянного множителя) являются важным частным случаем дробей Чебышева–Маркова (П. Л. Чебышев (1859) [19, т. 2, с. 186–196], А. А. Марков (1884) [12]); при этом форма записи упомянутых дробей имеет простой вид, что удобно для их исследования и развития. Функции $B_n(t,\rho)$ и $B_n(t,\rho,-\rho)$ приводят соответственно к упомянутым выше результатам (1.1) и (1.3), (1.4), о чем подробнее будет сказано ниже.

Пусть $\rho \in (-1,1)$. Напомним (см. [8, гл. 3, § 6, (6.2), (6.3)]), что *ядром Пуассона* и *сопряженным ядром Пуассона* называются соответственно функции

$$P_\rho(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\rho^\nu\cos\nu t = \frac{1-\rho^2}{2(1+\rho^2-2\rho\cos t)}, \quad Q_\rho(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\rho^\nu\sin\nu t = \frac{\rho\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}, \tag{1.8}$$

а *обобщенным ядром Пуассона* — следующая линейная комбинация ядер $P_\rho$ и $Q_\rho$:

$$\Pi_{\rho,\xi}(t) = (\cos\xi)P_\rho(t) + (\sin\xi)Q_\rho(t), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

[2]Постановка более общей задачи о наилучшем равномерном приближении произвольной непрерывной функции на отрезке многочленами и рациональными дробями тоже принадлежит П. Л. Чебышеву (1857) [19, т. 2, с. 146, 147, 159].

Заметим, что $P_\rho(t+\pi) = P_{-\rho}(t)$, $Q_\rho(t+\pi) = Q_{-\rho}(t)$, $\Pi_{\rho,\xi}(t+\pi) = \Pi_{-\rho,\xi}(t)$ при любых $\rho \in (-1,1)$, $t,\xi \in \mathbb{R}$. Для $\rho \in (-1,1)$, $\rho \neq 0$ определим величину (сравните с (1.2))

$$x_\rho = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big) = \frac{1+\rho^2}{2\rho}, \tag{1.10}$$

в терминах которой выражения для $P_\rho$, $P_{-\rho}$, $Q_\rho$, $Q_{-\rho}$ перепишутся в виде

$$P_\rho(t) = \frac{1-\rho^2}{4\rho(x_\rho - \cos t)}, \quad P_{-\rho}(t) = \frac{1-\rho^2}{4\rho(x_\rho + \cos t)}, \tag{1.11}$$

$$Q_\rho(t) = \frac{\sin t}{2(x_\rho - \cos t)}, \quad Q_{-\rho}(t) = \frac{-\sin t}{2(x_\rho + \cos t)}. \tag{1.12}$$

Утверждение (1.1) эквивалентно равенству $\inf\limits_{g\in\mathcal{C}_n} \|P_\rho - g\|_{C[0,\pi]} = \dfrac{|\rho|^{n+1}}{1-\rho^2}$, $\rho \in (-1,1)$, где $\mathcal{C}_n$ — подпространство косинус-полиномов порядка не выше $n$.

Результаты (1.1) и (1.3), (1.4) равносильны соответственно утверждениям, что при любом $\rho \in (-1,1)$ функция $B(t) = B_n(t,\rho)$ (см. (1.6)) не приближается в равномерной норме на $[0,\pi]$ подпространством $\mathcal{C}_n$, а функция $B_n(t,\rho,-\rho)$ не приближается подпространствами $\mathcal{C}_n$, $\mathcal{C}_{n+1}$, т. е. соответствующие полиномы наилучшего приближения тождественно равны нулю.

Асимптотическое поведение величины наилучшего приближения рациональных дробей общего вида алгебраическими полиномами на отрезке нашел С. Н. Бернштейн [6, ст. 7–9; 7, гл. 2]. Эффективные оценки сверху указанной величины получил Н. И. Ахиезер [1].

Ниже в разд. 2 вводится модифицированная функция Бернштейна $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$, зависящая от $t \in [-\pi,\pi]$, натурального параметра $n \in \mathbb{N}$, вещественного параметра $\xi \in \mathbb{R}$ и многомерного параметра $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ из открытого куба $(-1,1)^k$. Эта функция является обобщением функций Бернштейна (см. (1.6), (1.7)). В частности, $\mathcal{B}_{n,1}(t,\rho,0) = B_n(t,\rho)$ при $t \in [0,\pi]$. Основной результат разд. 2 (теорема 1) заключается в том, что функция $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$ представляет собой неправильную дробь, числитель которой есть тригонометрический полином порядка $n+k$, а знаменатель — косинус-полином порядка $k-m$, где $m$ — число нулевых элементов $q_j$ в наборе $q$. Указанная дробь имеет $2(n+k)$-точечный альтернанс на периоде $\mathbb{T} = [-\pi,\pi)$, следовательно, она не приближается в равномерной метрике на $\mathbb{T}$ подпространством $\mathcal{T}_{n+k-1}$ тригонометрических полиномов порядка не выше $n+k-1$ (подробнее см. теорему 2 разд. 3). Выделяя из указанной неправильной дроби ее правильную часть, приходим к утверждению (3.2) о величине наилучшего равномерного приближения на периоде правильной части подпространством $\mathcal{T}_{n+k-1}$ и о соответствующем наилучшем полиноме.

Этим способом в разд. 4 (см. следствие 1) найдено наилучшее равномерное приближение на периоде подпространством $\mathcal{T}_n$ следующей линейной комбинации обобщенного ядра Пуассона и его сдвига: $\Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n\Pi_{\rho,\xi}(t+\pi) = \Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n\Pi_{-\rho,\xi}(t)$. Отсюда при $\xi = 0$ получаются результаты (1.3), (1.4) С. Н. Бернштейна, а при $\xi = \pi/2$ — их весовые аналоги (с весом $\sqrt{1-x^2}$). Кроме того, в разд. 4 (см. пример 3, равенства (4.19)) вычислена величина наилучшего равномерного приближения на периоде тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного специальной линейной комбинации ядер Пуассона $P_\rho$ и $K_\rho$ для гармонического и бигармонического уравнений в единичном круге.

## 2. Модифицированная функция Бернштейна

Пусть $\rho \in (-1,1)$. Помимо функции $\lambda(t,\rho)$, определенной выше формулой (1.5) для $t \in [0,\pi]$, в дальнейшем понадобятся еще две функции $\widetilde{\lambda}(t,\rho)$ и $\mu(t,\rho)$, первая из которых задана на полупериоде $[-\pi,0]$, а вторая — на всем периоде $[-\pi,\pi]$ следующими формулами:

$$\widetilde{\lambda}(t,\rho) = \pi + \lambda(t+\pi,-\rho), \quad t \in [-\pi,0], \tag{2.1}$$

$$\mu(t,\rho) = \begin{cases} \widetilde{\lambda}(t,\rho), & t \in [-\pi,0], \\ \lambda(t,\rho), & t \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{2.2}$$

В частности, если $\rho = 0$, то

$$\mu(t, 0) = \pi - t \quad \text{при} \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{2.3}$$

Функция $\mu(t, \rho)$ была введена ранее авторами и использовалась в работе [3, разд. 6, формула (6.17)], где сформулированы кратко некоторые ее свойства. В следующем утверждении помимо упомянутых свойств приводятся новые свойства функции $\mu(t, \rho)$, которые нам понадобятся в дальнейшем.

**Лемма.** *При фиксированном $\rho \in (-1, 1)$ функция $\mu(t, \rho)$ как функция переменного $t$ обладает следующими свойствами:*

(1) $\mu(t, \rho)$ *— непрерывная и убывающая функцией по $t$ на $[-\pi, \pi]$, причем $\mu(-\pi, \rho) = 2\pi$, $\mu(\pi, \rho) = 0$; более того, $\mu(t, \rho)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменного $t$ в интервале $(-\pi, \pi)$, при этом выполняются равенства*

$$\frac{\partial \mu(t, \rho)}{\partial t} = \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos t} = -2P_\rho(t), \quad t \in (-\pi, \pi); \tag{2.4}$$

(2) *для всех $t \in [-\pi, \pi]$ справедливы равенства*

$$\cos \mu(t, \rho) = \frac{2\rho - (1 + \rho^2) \cos t}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos t}, \quad \sin \mu(t, \rho) = \frac{(1 - \rho^2) \sin t}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos t}. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $\lambda(t, \rho)$ (см. (1.5)) представима в виде

$$\lambda(t, \rho) = \arccos u(t, \rho), \quad \text{где} \quad u(t, \rho) = \frac{2\rho - (1 + \rho^2) \cos t}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos t}.$$

Легко проверить, что имеют место равенства

$$1 - u^2(t, \rho) = \frac{(1 - \rho^2)^2 \sin^2 t}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos t)^2}, \quad \lambda(0, \rho) = \pi, \quad \lambda(\pi, \rho) = 0. \tag{2.6}$$

С помощью первого равенства в (2.6) находим

$$\sin \lambda(t, \rho) = \sin\{\arccos u(t, \rho)\} = \sqrt{1 - u^2(t, \rho)} = \frac{(1 - \rho^2) \sin t}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos t}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u(t, \rho)}{\partial t} = \frac{(1 - \rho^2)^2 \sin t}{(1 + \rho^2 - 2\rho \cos t)^2} = \frac{1 - u^2(t, \rho)}{\sin t},$$

$$\frac{\partial \lambda(t, \rho)}{\partial t} = \frac{-1}{\sqrt{1 - u^2(t, \rho)}} \frac{\partial u(t, \rho)}{\partial t} = \frac{-\sqrt{1 - u^2(t, \rho)}}{\sin t} = \frac{\rho^2 - 1}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos t}. \tag{2.8}$$

Из (2.8) и последних двух равенств в (2.6) видно, что функция $\lambda(t, \rho)$ монотонно убывает по $t$ на отрезке $[0, \pi]$ от значения $\lambda(0, \rho) = \pi$ до значения $\lambda(\pi, \rho) = 0$. Ясно также, что $\lambda(t, \rho)$ является бесконечно дифференцируемой функцией переменного $t$ в интервале $(0, \pi)$. Отсюда и из (2.1) следует, что функция $\widetilde{\lambda}(t, \rho)$ монотонно убывает на отрезке $[-\pi, 0]$ от значения $\widetilde{\lambda}(-\pi, \rho) = 2\pi$ до значения $\widetilde{\lambda}(0, \rho) = \pi$. Понятно, что $\widetilde{\lambda}(t, \rho)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменного $t$ в интервале $(-\pi, 0)$. Таким образом, в силу определения (2.2), заключаем, что функция $\mu(t, \rho)$ как функция переменного $t$ является непрерывной и убывающей функцией на $[-\pi, \pi]$, причем $\mu(-\pi, \rho) = 2\pi$, $\mu(\pi, \rho) = 0$. Кроме того, $\mu(t, \rho)$ — бесконечно дифференцируемая функция переменного $t$ на объединении двух интервалов $(-\pi, 0) \bigcup (0, \pi)$.

Для завершения доказательства свойства (1) осталось установить, что $\mu(t,\rho)$ является бесконечно дифференцируемой функцией переменного $t$ в точке “склейки” $t=0$. В связи с этим рассмотрим частную производную по $t$ функции $\widetilde{\lambda}(t,\rho)$ в интервале $(-\pi,0)$

$$\frac{\partial\widetilde{\lambda}(t,\rho)}{\partial t}=\frac{\partial\lambda(t+\pi,-\rho)}{\partial t}=\frac{\rho^2-1}{1+\rho^2+2\rho\cos{(t+\pi)}}=\frac{\rho^2-1}{1+\rho^2-2\rho\cos t}.$$

Сравнивая последнюю часть полученной цепочки равенств с последней частью равенств (2.8), приходим (с учетом (1.8)) к равенствам (2.4), которые и влекут свойство бесконечной дифференцируемости функции $\mu(t,\rho)$ по $t$ не только в точке $t=0$, но и на всем интервале $(-\pi,\pi)$.

Перейдем к доказательству свойства (2). Равенства (2.5) на отрезке $[0,\pi]$ в силу определения (2.2) эквивалентны следующим равенствам:

$$\cos\lambda(t,\rho)=\frac{2\rho-(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t},\quad \sin\lambda(t,\rho)=\frac{(1-\rho^2)\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}\quad\text{при}\quad t\in[0,\pi]. \tag{2.9}$$

Эти равенства вытекают из определения (1.5) и формул (2.7).

Для доказательства равенств (2.5) на отрезке $[-\pi,0]$ достаточно установить справедливость следующих двух равенств:

$$\cos\widetilde{\lambda}(t,\rho)=\frac{2\rho-(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t},\qquad \sin\widetilde{\lambda}(t,\rho)=\frac{(1-\rho^2)\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}\quad\text{при}\quad t\in[-\pi,0]. \tag{2.10}$$

Первое из этих равенств получается с помощью (2.1) и первого равенства в (2.9). Действительно,

$$\cos\widetilde{\lambda}(t,\rho)=\cos[\pi+\lambda(t+\pi,-\rho)]=-\cos\lambda(t+\pi,-\rho)$$

$$=-\frac{-2\rho-(1+\rho^2)\cos{(t+\pi)}}{1+\rho^2+2\rho\cos{(t+\pi)}}=-\frac{-2\rho+(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}=\frac{2\rho-(1+\rho^2)\cos t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}.$$

Используя определение (2.1) и второе равенство в (2.9), находим

$$\sin\widetilde{\lambda}(t,\rho)=\sin[\pi+\lambda(t+\pi,-\rho)]=-\sin\lambda(t+\pi,-\rho)$$

$$=-\frac{(1-\rho^2)\sin{(t+\pi)}}{1+\rho^2+2\rho\cos{(t+\pi)}}=\frac{(1-\rho^2)\sin t}{1+\rho^2-2\rho\cos t}.$$

Первая и последняя части этой цепочки равенств дают второе равенство в (2.10). □

З а м е ч а н и е. Обратим внимание (см. [4, разд. 3, формулы (3.4)–(3.6)]), что

$$\mu(t,\rho)=\psi(t,\rho)\quad\text{при}\quad t\in[-\pi,\pi],\quad \rho\in(-1,1), \tag{2.11}$$

где

$$\psi(t,\rho)=\begin{cases}2\pi, & t=-\pi,\\ \pi-2\operatorname{arctg}\Big(\dfrac{1+\rho}{1-\rho}\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\Big), & t\in(-\pi,\pi),\\ 0, & t=\pi.\end{cases}$$

Действительно, легко проверить, что $\dfrac{\partial\mu(t,\rho)}{\partial t}=\dfrac{\partial\psi(t,\rho)}{\partial t}$ при $t\in(-\pi,\pi),\ \rho\in(-1,1)$. Отсюда с учетом непрерывности функций $\psi(t,\rho)$ и $\mu(t,\rho)$ по переменной $t$ на $[-\pi,\pi]$ и того факта, что значения этих функций совпадают в концевых точках отрезка $[-\pi,\pi]$, вывоводим (2.11).

О п р е д е л е н и е. Натуральному числу $n\in\mathbb{N}$, вещественному числу $\xi\in\mathbb{R}$ и набору $q=(q_1,q_2,\dots,q_k)$, в котором все $q_j\in(-1,1)$, сопоставим функцию

$$\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)=\mathcal{B}_{n,k}\big(t,(q_1,q_2,\dots,q_k),\xi\big)=\cos\Big[nt+\xi-\sum_{j=1}^{k}\mu(t,q_j)\Big],\quad t\in[-\pi,\pi], \tag{2.12}$$

которую назовем *модифицированной функцией Бернштейна.*

**Теорема 1.** *Пусть* $k, n \in \mathbb{N}, \xi \in \mathbb{R}$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_k) \in (-1,1)^k$, $m$ *— число нулевых элементов* $q_j$ *в наборе* $q$. *Тогда при всех* $t \in [-\pi, \pi]$ *имеет место представление*[3]

$$\mathcal{B}_{n,k}(t, q, \xi) = \frac{R_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\Big(1 + q_j^2 - 2q_j \cos t\Big)}, \tag{2.13}$$

*в котором* $R_{q,\xi}(t) = R_{n,k,q,\xi}(t)$ *— тригонометрический полином порядка* $n+k$, *определяемый однозначно указанными параметрами* $n, k, q, \xi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы (2.3) и определения (2.12) случай $m > 0$ сводится к случаю $m = 0$ заменой параметра $n$ на параметр $n' = n + m$. Поэтому доказательство теоремы будем проводить, предполагая $m = 0$, т.е. считаем, что в наборе $q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ все элементы $q_j \in (-1, 1)$ и $q_j \neq 0$.

Утверждение (2.13) при $k = 1$ доказано в [3, разд. 6, формула (6.17)]. Рассмотрим и здесь этот случай, поскольку он будет применяться ниже для случая $k = 2$.

Заданной паре чисел $\rho \in (-1,1)$, $\xi \in \mathbb{R}$ соответствует функция $\mathcal{B}_{n,1}(t, \rho, \xi)$ (см.(2.12)), которая с помощью стандартных тригонометрических формул преобразуется к виду

$$\mathcal{B}_{n,1}(t, \rho, \xi) = \cos\left[nt + \xi - \mu(t, \rho)\right] = \cos(nt + \xi)\cos\mu(t, \rho) + \sin(nt + \xi)\sin\mu(t, \rho).$$

Отсюда и из (2.5) имеем

$$\mathcal{B}_{n,1}(t, \rho, \xi) = \frac{[2\rho - (1 + \rho^2)\cos t]\cos(nt + \xi) + [(1 - \rho^2)\sin t]\sin(nt + \xi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos t}.$$

Таким образом, приходим к представлению

$$\mathcal{B}_{n,1}(t, \rho, \xi) = \frac{R_{\rho,\xi}(t)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos t}, \quad t \in [-\pi, \pi], \tag{2.14}$$

в котором

$$\begin{aligned} R_{\rho,\xi}(t) &= -\cos[(n+1)t + \xi] + 2\rho\cos\left[nt + \xi\right] - \rho^2\cos[(n-1)t + \xi] \\ &= \left[\sin(n+1)t - 2\rho\sin nt + \rho^2\sin(n-1)t\right]\sin\xi \\ &- \left[\cos(n+1)t - 2\rho\cos nt + \rho^2\cos(n-1)t\right]\cos\xi. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Рассмотрим случай $k = 2$. В этом случае набор $q = (q_1, q_2)$ состоит из двух элементов $q_1 \in (-1,1)$, $q_2 \in (-1,1)$ и функция (2.12) преобразуется к виду

$$\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) = \cos\left[nt + \xi - \mu(t, q_1) - \mu(t, q_2)\right]$$

$$= \cos\mu(t, q_2)\cos\left[nt + \xi - \mu(t, q_1)\right] + \sin\mu(t, q_2)\sin\left[nt + \xi - \mu(t, q_1)\right].$$

Отсюда и (2.5) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) &= \frac{2q_2 - (1 + q_2^2)\cos t}{1 + q_2^2 - 2q_2\cos t}\cos\left[nt + \xi - \mu(t, q_1)\right] + \frac{(1 - q_2^2)\sin t}{1 + q_2^2 - 2q_2\cos t}\sin\left[nt + \xi - \mu(t, q_1)\right] \\ &= \frac{2q_2 - (1 + q_2^2)\cos t}{1 + q_2^2 - 2q_2\cos t}\mathcal{B}_{n,1}(t, q_1, \xi) + \frac{(1 - q_2^2)\sin t}{1 + q_2^2 - 2q_2\cos t}\mathcal{B}_{n,1}(t, q_1, \xi - \pi/2). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Применив (2.14), придем к равенству

$$\mathcal{B}_{n,2}(t, q, \xi) = \frac{[2q_2 - (1 + q_2^2)\cos t]R_{q_1,\xi}(t) + [(1 - q_2^2)\sin t]R_{q_1,\xi-\pi/2}(t)}{(1 + q_1^2 - 2q_1\cos t)(1 + q_2^2 - 2q_2\cos t)}, \tag{2.17}$$

[3]Если у знака произведения нижний индекс больше верхнего, то такое произведение считается равным единице.

которое вместе с (2.15) влечет утверждение теоремы 1 в случае $k = 2$.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, которые использовались при выводе равенств (2.16), установим реккурентную формулу

$$\mathcal{B}_{n,k+1}\big(t,(q_1,\dots,q_k,q_{k+1}),\xi\big) = \frac{2q_{k+1}-(1+q_{k+1}^2)\cos t}{1+q_{k+1}^2-2q_{k+1}\cos t}\,\mathcal{B}_{n,k}\big(t,(q_1,\dots,q_k),\xi\big)$$
$$+\frac{(1-q_{k+1}^2)\sin t}{1+q_{k+1}^2-2q_{k+1}\cos t}\,\mathcal{B}_{n,k}\big(t,(q_1,\dots,q_k),\xi-\pi/2\big), \tag{2.18}$$

где $k \ge 1$, $(q_1,\dots,q_k,q_{k+1}) \in (-1,1)^{k+1}$. С помощью этой формулы доказывается справедливость теоремы 1 в случае $k \ge 3$ по индукции. □

## 3. Равномерное приближение некоторых тригонометрических дробей тригонометрическими полиномами

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше $n$, т. е. $g \in \mathcal{T}_n$, если $g(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k\cos kt + b_k \sin kt)$ (все $a_k,\ b_k \in \mathbb{R}$).

Пусть $k,n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \mathbb{R}$, $q = (q_1,q_2,\dots,q_k) \in (-1,1)^k$, $m$ — число нулевых элементов $q_j$ в наборе $q$. Обратим внимание на то, что дробь

$$\frac{R_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\big(1+q_j^2-2q_j\cos t\big)}, \tag{3.1}$$

расположенная в правой части (2.13), является $2\pi$-периодическим продолжением функции $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$ на всю ось $\mathbb{R}$, поскольку числитель указанной дроби есть тригонометрический полином $R_{q,\xi}(t) = R_{n,k,q,\xi}(t)$ порядка $n+k$, однозначно определяемый параметрами $n,k,q,\xi$.

Функция $\mathcal{B}_{n,k}(t,q,\xi)$, заданная формулой (2.12), имеет $2(n+k)$-точечный альтернанс на $[-\pi,\pi)$. Поэтому в качестве следствия из теоремы 1 получаем утверждение

**Теорема 2.** *При любых* $k,n \in \mathbb{N}$, $q = (q_1,q_2,\dots,q_k) \in (-1,1)^k$, $\xi \in \mathbb{R}$ *тригонометрическая дробь* (3.1) *не приближается подпространством* $\mathcal{T}_{n+k-1}$ *в равномерной норме на любом полуинтервале вида* $[\alpha,\alpha+2\pi)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (*т. е. соответствующий полином наилучшего приближения тождественно равен нулю*).

Хорошо известно, что из неправильной дроби (3.1) можно выделить правильную часть, т. е. представить ее в виде $\dfrac{R_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\big(1+q_j^2-2q_j\cos t\big)} = \dfrac{r_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\big(1+q_j^2-2q_j\cos t\big)} - g_{q,\xi}(t)$, где $r_{q,\xi}$ и $g_{q,\xi}$ — тригонометрические полиномы порядка[4] $k-1-m$ и $n+m$ соответственно.

Пусть $0 \le m \le k-1$; в силу теоремы 2 полиномом $g_{q,\xi}$ является полином наилучшего равномерного приближения на периоде для правильной части $\varphi_{q,\xi}(t) = \dfrac{r_{q,\xi}(t)}{\prod\limits_{j=1}^{k-m}\big(1+q_j^2-2q_j\cos t\big)}$ дроби (3.1) в каждом из подпространств $\mathcal{T}_j$, $n+m \le j \le n+k-1$, т. е.

$$E_{n+m}(\varphi_{q,\xi})_{C_{2\pi}} = \inf_{g\in\mathcal{T}_{n+m}} \|\varphi_{q,\xi}-g\|_{C_{2\pi}} = \dots = E_{n+k-1}(\varphi_{q,\xi})_{C_{2\pi}} = \|\varphi_{q,\xi}-g_{q,\xi}\|_{C_{2\pi}} = 1. \tag{3.2}$$

Здесь $C_{2\pi}$ — пространство непрерывных $2\pi$-периодических вещественнозначных функций $f$ с равномерной нормой $\|f\|_{C_{2\pi}} = \max\{|f(t)| :\ t \in \mathbb{T}\}$.

[4]Тригонометрический полином порядка $(-1)$ условимся считать тождественно равным нулю.

## 4. Примеры

П р и м е р 1. Рассмотрим случай $k = 1$. Утверждение (3.2) в этом случае более детально раскрыто в [3, разд. 6, теоремы 8, 9]. А именно при любых $\rho \in (-1,1)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$E_n\big(\Pi_{\rho,\xi}\big)_{C_{2\pi}} = \inf_{g\in\mathcal{T}_n} \|\Pi_{\rho,\xi} - g\|_{C_{2\pi}} = \frac{|\rho|^{n+1}}{1-\rho^2}, \tag{4.1}$$

где $\Pi_{\rho,\xi}$ — обобщенное ядро Пуассона, определенное выше формулой (1.9).

Равенство (4.1) при $\xi = 0$ эквивалентно утверждению (1.1) С. Н. Бернштейна. Отметим, что величина наилучшего равномерного приближения обобщенного ядра Пуассона $\Pi_{\rho,\xi}$ подпространством $\mathcal{T}_n$ не зависит от параметра $\xi$, в то время как аналогичная величина наилучшего интегрального приближения уже зависит от $\xi$ (см. теорему 1 из работы [5] и приведенную в ней историю вопроса, восходящую к исследованиям Б. Надя и М. Г. Крейна 1938 г.).

П р и м е р 2. Пусть $k = 2$, $q = (\rho, -\rho)$, $\rho \in (-1,1)$, $\rho \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. В этом случае функция $\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \cos\left[nt + \xi - \mu(t,\rho) - \mu(t,-\rho)\right]$ (см. (2.17)) имеет вид

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \frac{\big[(1-\rho^2)\sin t\big] R_{\rho,\xi-\pi/2}(t) - \big[2\rho + (1+\rho_2^2)\cos t\big] R_{\rho,\xi}(t)}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)(1+\rho^2+2\rho\cos t)}.$$

После преобразований приходим к представлению $\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \dfrac{W(t)}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2 t}$, где

$$W(t) = \Big[\cos(n+2)t - 2\rho^2\cos nt + \rho^4\cos(n-2)t\Big]\cos\xi - \Big[\sin(n+2)t - 2\rho^2\sin nt + \rho^4\sin(n-2)t\Big]\sin\xi.$$

Отсюда получаем, что при любом $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняется равенство

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \frac{\mathcal{W}_{n+2}(t)}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2 t}\cos\xi - \frac{\mathcal{V}_{n+1}(t)\sin t}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2\cos^2 t}\sin\xi, \tag{4.2}$$

где $\mathcal{W}_{n+2}$ и $\mathcal{V}_{n+1}$ — следующие косинус-полиномы порядка $n+2$ и $n+1$ соответственно:

$$\mathcal{W}_{n+2}(t) = \cos(n+2)t - 2\rho^2\cos nt + \rho^4\cos(n-2)t, \tag{4.3}$$

$$\mathcal{V}_{n+1}(t) = \frac{\sin(n+2)t}{\sin t} - 2\rho^2\frac{\sin nt}{\sin t} + \rho^4\frac{\sin(n-2)t}{\sin t}. \tag{4.4}$$

Пусть $n \geq 3$. Функция $\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi)$ при $t \in [0,\pi]$ представима в виде

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \frac{W_{n+2}(x)\cos\xi}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2x^2} - \frac{V_{n+1}(x)\sqrt{1-x^2}\sin\xi}{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2x^2}, \quad x = \cos t \in [-1,1], \tag{4.5}$$

где $W_{n+2}(x) = T_{n+2}(x) - 2\rho^2T_n(x) + \rho^4T_{n-2}(x)$, $V_{n+1}(x) = U_{n+1}(x) - 2\rho^2U_{n-1}(x) + \rho^4U_{n-3}(x)$; здесь $T_k$ и $U_k$ — многочлены Чебышева (степени $k$) первого и второго рода соответственно, т. е. $T_k(\cos t) = \cos kt$, $U_k(\cos t) = \dfrac{\sin(k+1)t}{\sin t}$.

Выше (см. (1.10)) была определена величина $x_\rho = \dfrac{1}{2}\Big(\rho + \dfrac{1}{\rho}\Big) = \dfrac{1+\rho^2}{2\rho}$, которая неявно содержится в выражении (4.5) для $\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi)$. Действительно, поскольку $(x_\rho - x)(x_\rho + x) = x_\rho^2 - x^2 = \dfrac{(1+\rho^2)^2}{4\rho^2} - x^2 = \dfrac{(1+\rho^2)^2 - 4\rho^2x^2}{4\rho^2}$, то

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \frac{W_{n+2}(x)\cos\xi}{4\rho^2(x_\rho - x)(x_\rho + x)} - \frac{V_{n+1}(x)\sqrt{1-x^2}\sin\xi}{4\rho^2(x_\rho - x)(x_\rho + x)} \quad \text{при} \quad x = \cos t, \quad t \in [0,\pi]. \tag{4.6}$$

Применив известные факты из теории разложений рациональных функций на простейшие дроби (см. [14, гл. 8, § 8.5, § 8.6]), приходим к представлениям

$$\frac{W_{n+2}(x)}{4\rho^2(x_\rho - x)(x_\rho + x)} = \frac{a_1}{x_\rho - x} + \frac{a_2}{x_\rho + x} + p_n(x), \tag{4.7}$$

$$\frac{V_{n+1}(x)}{4\rho^2(x_\rho - x)(x_\rho + x)} = \frac{b_1}{x_\rho - x} + \frac{b_2}{x_\rho + x} + q_{n-1}(x), \tag{4.8}$$

в которых $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ — некоторые величины, не зависящие от $x$, а $p_n$ и $q_{n-1}$ — некоторые алгебраические полиномы степени не выше $n$ и $n-1$ соответственно.

Для вычисления величины $a_1$ домножим обе части равенства (4.7) на $x_\rho - x$, а затем, устремив $x$ к точке $x_\rho$, получим

$$\frac{W_{n+2}(x_\rho)}{8\rho^2 x_\rho} = a_1. \tag{4.9}$$

Как известно (см. [15, гл. 1, §1, (20)]), многочлен Чебышева $T_k$ отображает $x_\rho$ в $x_{\rho^k}$, т. е.

$$T_k\Big(\frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\rho^k + \frac{1}{\rho^k}\Big) = \frac{1+\rho^{2k}}{2\rho^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \rho \in (-1,0) \cup (0,1). \tag{4.10}$$

Отсюда с помощью равенства $W_{n+2}(x) = T_{n+2}(x) - 2\rho^2 T_n(x) + \rho^4 T_{n-2}(x)$ и (4.9) находим

$$W_{n+2}(x_\rho) = \frac{(1-\rho^4)^2}{2\rho^{n+2}}, \qquad a_1 = \frac{(1-\rho^4)^2}{8\rho^{n+3}(1+\rho^2)}.$$

Используя аналогичные рассуждения, вычислим $a_2 = \dfrac{W_{n+2}(-x_\rho)}{8\rho^2 x_\rho} = \dfrac{(-1)^n(1-\rho^4)^2}{8\rho^{n+3}(1+\rho^2)}$.

Таким образом, выражение (4.7) преобразуется к виду

$$\frac{W_{n+2}(x)}{4\rho^2(x_\rho - x)(x_\rho + x)} = \frac{(1-\rho^4)^2}{8\rho^{n+3}(1+\rho^2)}\Big[\frac{1}{x_\rho - x} + \frac{(-1)^n}{x_\rho + x}\Big] + p_n(x).$$

Аналогично, с помощью известной формулы (см. [15, гл. 1, §1, формула (21)])

$$\Big(\rho - \frac{1}{\rho}\Big)U_k\Big(\frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\Big) = \rho^{k+1} - \frac{1}{\rho^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \rho \in (-1,1), \quad \rho \neq 0, \tag{4.11}$$

(4.8) преобразуется к виду $\dfrac{V_{n+1}(x)}{4\rho^2(x_\rho - x)(x_\rho + x)} = \dfrac{1-\rho^4}{4\rho^{n+2}}\Big[\dfrac{1}{x_\rho - x} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{x_\rho + x}\Big] + q_{n-1}(x)$.

Принимая во внимание (4.6), приходим к равенству

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = &\Big\{\frac{(1-\rho^4)^2}{8\rho^{n+3}(1+\rho^2)}\Big[\frac{1}{x_\rho - \cos t} + \frac{(-1)^n}{x_\rho + \cos t}\Big] + p_n(\cos t)\Big\}\cos\xi \\ &- \Big\{\frac{1-\rho^4}{4\rho^{n+2}}\Big[\frac{1}{x_\rho - \cos t} + \frac{(-1)^{n+1}}{x_\rho + \cos t}\Big] + q_{n-1}(\cos t)\Big\}\sin t \sin\xi,\end{aligned} \tag{4.12}$$

которое справедливо для натуральных $n \geq 3$ и любых $t, \xi \in \mathbb{R}$. На самом деле, равенство (4.12) выполняется и при $n = 0, 1, 2$. Для того чтобы убедиться в этом, надо воспользоваться формулами (4.2)–(4.4). При этом любой алгебраический полином $q_{-1}$ степени $(-1)$ считаем тождественно равным нулю. Запишем равенство (4.12) в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = &\Big\{\frac{1-\rho^4}{2\rho^{n+2}}\Big[\frac{1-\rho^2}{4\rho(x_\rho - \cos t)} + \frac{(-1)^n(1-\rho^2)}{4\rho(x_\rho + \cos t)}\Big] + p_n(\cos t)\Big\}\cos\xi \\ &- \Big\{\frac{1-\rho^4}{2\rho^{n+2}}\Big[\frac{\sin t}{2(x_\rho - \cos t)} + \frac{(-1)^n(-\sin t)}{2(x_\rho + \cos t)}\Big] + (\sin t)q_{n-1}(\cos t)\Big\}\sin\xi.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом формул (1.11), (1.12), (1.9) получаем представление

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,\xi) = \frac{1-\rho^4}{2\rho^{n+2}}\Big[\Pi_{\rho,\xi}(t) + (-1)^n \Pi_{-\rho,\xi}(t)\Big] + \tau_n(t), \quad \tau_n \in \mathcal{T}_n,$$

с помощью которого исходя из (3.2) приходим к утверждению

**Следствие 1.** *Пусть* $k=2$, $\rho \in (-1,1)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$E_n\Big(\Pi_{\rho,\xi} + (-1)^n \Pi_{-\rho,\xi}\Big)_{C_{2\pi}} = E_{n+1}\Big(\Pi_{\rho,\xi} + (-1)^n \Pi_{-\rho,\xi}\Big)_{C_{2\pi}} = \frac{2|\rho|^{n+2}}{1-\rho^4}. \tag{4.13}$$

З а м е ч а н и е. При $\xi = 0$ утверждение (4.13) равносильно результатам (1.3), (1.4) С. Н. Бернштейна. Утверждение (4.13) в случае $\xi = \pi/2$ позволяет вычислить величины наилучшего взвешенного (с весом $\sqrt{1-x^2}$) равномерного приближения подпространствами $\mathcal{P}_{n-1}$, $\mathcal{P}_n$ для следующей линейной комбинации двух простейших дробей: $H_{n,\rho}(x) = \dfrac{1}{x_\rho - x} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{x_\rho + x}$, где $x_\rho = (\rho + 1/\rho)/2$ (см. формулу (1.10)). А именно

$$\widetilde{E}_{n-1}(H_{n,\rho}) = \widetilde{E}_n(H_{n,\rho}) = \frac{4|\rho|^{n+2}}{1-\rho^4}; \quad \text{здесь} \quad \widetilde{E}_n(f) = \inf_{p\in\mathcal{P}_n} \Big\| \big[f(x) - p(x)\big]\sqrt{1-x^2}\Big\|_{C[-1,1]}.$$

Отсюда получаем весовые аналоги результатов (1.3), (1.4):

$$\widetilde{E}_{n-1}\Big(\frac{1}{x_\rho^2 - x^2}\Big) = \widetilde{E}_n\Big(\frac{1}{x_\rho^2 - x^2}\Big) = \frac{4|\rho|^{n+3}}{(1+\rho^2)(1-\rho^4)}, \quad n = 2m+1,\ m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\widetilde{E}_{n-1}\Big(\frac{x}{x_\rho^2 - x^2}\Big) = \widetilde{E}_n\Big(\frac{x}{x_\rho^2 - x^2}\Big) = \frac{2|\rho|^{n+2}}{1-\rho^4}, \quad n = 2m,\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Напомним, что $\mathcal{P}_{-1}$ состоит из единственной функции, тождественно равной нулю.

П р и м е р 3. Пусть $k=2$, $q=(\rho,\rho)$, $\rho\in(-1,1)$, $\rho\neq 0$, $\xi=0$. В этом случае функция $\mathcal{B}_{n,2}(t,q,0)$ (см. (2.12)) имеет вид $\mathcal{B}_{n,2}(t,q,0) = \cos\left[nt - 2\mu(t,\rho)\right] = \dfrac{R(t)}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}$, где

$$\begin{aligned} R(t) &= \Big\{2\left[2\rho - (1+\rho^2)\cos t\right]^2 - \left[1+\rho^2-2\rho\cos t\right]^2\Big\}\cos nt \\ &\quad + 2(1-\rho^2)\left[2\rho - (1+\rho^2)\cos t\right]\sin t \sin nt \\ &= \cos(n+2)t - 4\rho\cos(n+1)t + 6\rho^2\cos nt - 4\rho^3\cos(n-1)t + \rho^4\cos(n-2)t. \end{aligned}$$

Также как и в предыдущем примере, воспользовавшись известными фактами из теории разложений рациональных функций на простейшие дроби, придем к представлению

$$\mathcal{B}_{n,2}(t,q,0) = \frac{A_1}{1+\rho^2-2\rho\cos t} + \frac{A_2}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2} + g(t), \quad g\in\mathcal{C}_n, \tag{4.14}$$

где $\mathcal{C}_n$ — подпространство косинус-полиномов порядка не выше $n$, $A_1$, $A_2$ — некоторые величины, не зависящие от $t$. Поиском этих величин сейчас займемся, исходя из утверждения: *выражение*

$$\begin{aligned} &\frac{\cos(n+2)t - 4\rho\cos(n+1)t + 6\rho^2\cos nt - 4\rho^3\cos(n-1)t + \rho^4\cos(n-2)t}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2} \\ &\qquad - \frac{A_1}{1+\rho^2-2\rho\cos t} - \frac{A_2}{(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2} \end{aligned} \tag{4.15}$$

*представляет собой некоторый косинус-полином порядка не выше $n$.*

Рассмотрим сначала случай $n \geq 3$. Замена $x = \cos t$ позволяет сформулировать утверждение (4.15) в эквивалентной форме: *дробь*

$$\frac{T_{n+2}(x) - 4\rho T_{n+1}(x) + 6\rho^2 T_n(x) - 4\rho^3 T_{n-1}(x) + \rho^4 T_{n-2}(x) - (1+\rho^2-2\rho x)A_1 - A_2}{(1+\rho^2-2\rho x)^2} \tag{4.16}$$

*является алгебраическим полиномом степени $n$.*

Напомним, что выше через $T_k$, $U_k$ были обозначены многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно. Заметим, что утверждение (4.16) равносильно тому, что многочлен $w(x) = T_{n+2}(x) - 4\rho T_{n+1}(x) + 6\rho^2 T_n(x) - 4\rho^3 T_{n-1}(x) + \rho^4 T_{n-2}(x) - (1+\rho^2-2\rho x)A_1 - A_2$, расположенный в числителе дроби (4.16), имеет в точке $x_\rho = (\rho + 1/\rho)/2$ ноль второго порядка, т.е. $w(x_\rho) = w'(x_\rho) = 0$. Отсюда на основе (4.10), (4.11) и формулы $T'_{k+1}(x) = (k+1)U_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ (см. [15, гл. 1, §1, (13)]), находим $A_1 = \dfrac{\left(1-\rho^2\right)^2\left[(n-2)\rho^2 - n - 2\right]}{2\rho^{n+2}}$, $A_2 = \dfrac{\left(1-\rho^2\right)^4}{2\rho^{n+2}}$. Следовательно, при $n \geq 3$ утверждение (4.14) преобразуется к виду

$$\frac{2\rho^{n+2}}{\left(1-\rho^2\right)^2}\cos\left[nt - 2\mu(t,\rho)\right] = \frac{(n-2)\rho^2 - n - 2}{1+\rho^2-2\rho\cos t} + \frac{\left(1-\rho^2\right)^2}{\left(1+\rho^2-2\rho\cos t\right)^2} + g^*(t), \quad g^* \in \mathcal{C}_n. \tag{4.17}$$

Исходя из (4.15) несложно убедиться, что равенство (4.17) справедливо и при $n = 0, 1, 2$.

Таким образом, имеет место следующее утверждение, в котором используется обозначение

$$f_{\rho,n}(x) = \frac{(n-2)\rho^2 - n - 2}{1+\rho^2-2\rho x} + \Big(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho x}\Big)^2. \tag{4.18}$$

**Следствие 2.** *При любых $\rho \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются равенства*

$$E_n(f_{\rho,n})_{C[-1,1]} = E_{n+1}(f_{\rho,n})_{C[-1,1]} = \frac{2|\rho|^{n+2}}{\left(1-\rho^2\right)^2}.$$

Напомним (см. [18, прилож. 7 к гл. 4, с. 398–402; 20, формула (4)]), что ядро Пуассона $K_\rho$, соответствующее краевой задаче для бигармонического уравнения в единичном круге с нулевой нормальной производной на границе, имеет вид $K_\rho(t) = \dfrac{(1-\rho^2)^2(1-\rho\cos t)}{2(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}$.

М. Ш. Шабозов [20] нашел величины наилучшего интегрального приближения и наилучшего одностороннего интегрального приближения на периоде ядра $K_\rho$ тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного.

Ядро $K_\rho$ можно представить в виде [20, формула (8)]

$$K_\rho(t) = \frac{(1-\rho^2)^2}{4(1+\rho^2-2\rho\cos t)} + \frac{(1-\rho^2)^3}{4(1+\rho^2-2\rho\cos t)^2}.$$

Заметим, что $\mathcal{L}_{\rho,n}(t) = f_{\rho,n}(\cos t) = \dfrac{(n-2)\rho^2 - n - 2}{1+\rho^2-2\rho\cos t} + \dfrac{\left(1-\rho^2\right)^2}{\left(1+\rho^2-2\rho\cos t\right)^2}$ — линейная комбинация ядер Пуассона для гармонического и бигармонического уравнений, а именно $\mathcal{L}_{\rho,n}(t) = \dfrac{4}{1-\rho^2}K_\rho(t) - \dfrac{2(n-1)(1-\rho^2)+8}{1-\rho^2}P_\rho(t)$. Следствие 2 равносильно тому, что при любых $\rho \in (-1,1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$ выполняются равенства

$$E_n\Big(K_\rho - \frac{(n-1)(1-\rho^2)+4}{2}P_\rho\Big)_{C_{2\pi}} = E_{n+1}\Big(K_\rho - \frac{(n-1)(1-\rho^2)+4}{2}P_\rho\Big)_{C_{2\pi}} = \frac{|\rho|^{n+2}}{2(1-\rho^2)}. \tag{4.19}$$

Приведем один результат Н. И. Ахиезера, касающийся оценки величины наилучшего равномерного приближения алгебраическими полиномами на отрезке $[-1,1]$ линейной комбинации двух рациональных дробей

$$\Phi_{a,A,A'}(x) = \frac{A(a^2-1)^2}{(x-a)^2} + \frac{A'(a^2-1)}{x-a}. \tag{4.20}$$

**Теорема A** [2, гл. 2, п. 38]. *Пусть $A$, $A'$, $a>1$ — данные ненулевые вещественные числа. Тогда при достаточно большом $n$*

$$E_n(\Phi_{a,A,A'})_{C[-1,1]} = \frac{|A|\sqrt{a^2-1}}{2(a+\sqrt{a^2-1})^n}\left| n + \frac{2aA-A'}{A\sqrt{a^2-1}} + \sqrt{\Big(n+\frac{2aA-A'}{A\sqrt{a^2-1}}\Big)^2 + \frac{1}{a^2-1}}\right|(1+\varepsilon_n), \tag{4.21}$$

*где*

$$|\varepsilon_n| < \frac{(a-\sqrt{a^2-1})^n}{4(a-1)\Big(n+\dfrac{2aA-A'}{A\sqrt{a^2-1}}\Big)^2}. \tag{4.22}$$

Преобразуем неравенство (4.22), воспользовавшись формулой (1.2), из которой вытекают равенства $a=\dfrac{1+\rho^2}{2\rho}$, $a^2-1=\Big(\dfrac{1-\rho^2}{2\rho}\Big)^2$, $\sqrt{a^2-1}=\dfrac{1-\rho^2}{2\rho}$, $a+\sqrt{a^2-1}=\dfrac{1}{\rho}$, $a-\sqrt{a^2-1}=\rho$. С помощью этих равенств перепишем (4.21) и (4.22) в терминах параметров $\rho\in(0,1)$, $A$, $A'$:

$$E_n(\Phi_{a,A,A'})_{C[-1,1]}$$

$$= \frac{|A|\rho^{n-1}(1-\rho^2)}{4}\left| n + 2\frac{(1+\rho^2)A-\rho A'}{A(1-\rho^2)} + \sqrt{\Big(n+2\frac{(1+\rho^2)A-\rho A'}{A(1-\rho^2)}\Big)^2 + \Big(\frac{2\rho}{1-\rho^2}\Big)^2}\right|(1+\varepsilon_n),$$

$$|\varepsilon_n| < \frac{\rho^{n+1}}{2\left[n(1-\rho)^2+2(1+\rho^2)-2\rho A'/A\right]^2}. \tag{4.23}$$

Заметим, что при $A=2\rho$, $A'=n+2-(n-2)\rho^2$, $a=\dfrac{1+\rho^2}{2\rho}$, $\rho\in(0,1)$ функции $f_{\rho,n}$, $\Phi_{a,A,A'}$, заданные формулами (4.18), (4.20), связаны равенством $\Phi_{a,A,A'}(x)=\dfrac{1-\rho^2}{2\rho}f_{\rho,n}(x)$, при этом знаменатель дроби в правой части неравенства (4.23) обращается в ноль.

Авторы искренне признательны профессору Ивану Владимировичу Тихонову, внимательно прочитавшему работу и сделавшему ряд ценных замечаний.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Akhiezer N.** Sur la valeur asimptoticue de la meilleure approximation de quelques fractions par des polynômes // Compt. Rend. Acad. Sci. 1930. Vol. 191. P. 991–993.
2. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.; Л.: ОГИЗ. Гос. изд-во тех.-теорет. лит-ры, 1947. 323 с.
3. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В.** Интегральное приближение характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики. 2008. Т. 14, вып. 3. С. 19–37.
4. **Бабенко А.Г., Крякин Ю.В., Юдин В.А.** Об одном результате Геронимуса // Тр. Ин-та математики и механики. 2010. Т. 16, вып. 4. С. 54–64.
5. **Барабошкина Н.А.** Приближение гармонических функций алгебраическими многочленами на окружности радиуса меньше единицы с наличием ограничений на единичной окружности // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 71–78.

6. **Бернштейн С.Н.** Собрание сочинений : в 4 т. Т. 1: Конструктивная теория функций (1905–1930). М.: АН СССР, 1952. 581 с.
7. **Бернштейн С.Н.** Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Ч. 1. Л.; М.: Гл. ред. общетехн. лит-ры, 1937. 203 с.
8. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: пер. с англ. Т. 1. М.: Мир, 1965. 616 с.
9. **Dzjadyk V.K.** On a problem of Chebyshev and Markov // Analysis Math. 1977. Vol. 3. P. 171–175. doi: 10.1007/BF02297689 .
10. **Лебедев В.И.** Экстремальные многочлены и методы оптимизации вычислительных алгоритмов // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 10. С. 21–66.
11. **Лукашов А.Л.** Алгебраические дроби Чебышева – Маркова на нескольких отрезках // Analysis Math. 1998. Vol. 24. P. 111–130. doi: 10.1007/BF02771077 .
12. **Марков А.А.** Определение некоторой функции по условию наименее уклоняться от нуля // Сообщ. и протоколы заседаний мат. о-ва при Императорском харьковском ун-те, 1884. I. С. 83–92.
13. **Марков А.А.** Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.
14. **Никольский С.М.** Курс математического анализа. Т.1. М.: Наука, 1990. 528 с.
15. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева: пер.с польск. М.: Наука, 1983. 384 с.
16. **Русак В.Н.** Рациональные функции как аппарат приближения. Минск: Изд-во БГУ, 1979. 176 с.
17. **Szegö G.** On a problem of the best approximation // Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg. 1964. Vol. 27, Is. 3. P. 193–198. doi: 10.1007/BF02993216.
18. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики: учеб. пособие для вузов. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 735 с.
19. **Чебышев П.Л.** Полн. собр. соч.: в 5 т. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947, 1948. Т. 2: Математический анализ. 520 с. Т. 3: Математический анализ. 414 с.
20. **Шабозов М.Ш.** Наилучшее и наилучшее одностороннее приближения ядра бигармонического уравнения и оптимальное восстановление значений операторов // Укр. мат. журн. 1995. Т. 47, № 11. С. 1549–1557.


Бабенко Александр Григорьевич
д-р физ.-мат. наук
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: babenko@imm.uran.ru

Поступила 17.10.2016

Kryakin, Yuriy
dr hab.
Mathematical Institute University of Wroclaw
Wroclaw, Poland
e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl

## REFERENCES


1. Akhiezer N. Sur la valeur asimptoticue de la meilleure approximation de quelques fractions par des polynômes. *Compt. Rend. Acad. Sci.*, 1930, vol. 191, pp. 991–993.
2. Achieser N.I. *Theory of approximation*, Reprint of the 1956, New York: Dover Publ., Inc., 1992, 307 p. ISBN: 0486671291 . Original Russian text published in *Lektsii po teorii approksimatsii.* Moscow, Leningrad: OGIZ Publ., 1947, 323 p.
3. Babenko A.G., Kryakin Yu.V. Integral approximation of the characteristic function of an interval by trigonometric polynomials. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, vol. 264, suppl. 1, pp. 19–38. doi: 10.1134/S0081543809050022 .
4. Babenko A.G., Kryakin V.Yu., Yudin V.A. On a result by geronimus. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 37–48. doi: 10.1134/S008154381105004X .
5. Baraboshkina N.A. Approximation of harmonic functions by algebraic polynomials on a circle of radius smaller than one with constraints on the unit circle. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, vol. 19, no. 2, 2013, pp. 71–78 (in Russian).

6. Bernstein S.N. Collected Works (Russian): Vol. 1: The constructive theory of functions (1905–1930). U. S. Atomic Energy Commission, Springfield, Va, 1958, 221 p. Sobranie Sochinenii: Tom I. *Konstruktivnaya Teoriya Funktcii* (1905–1930). Transaltion of a publication of the Academy of Sciences of U.S.S.R. Press, 1952, Moscow.
7. Bernstein S.N. *Ekstremal'nye svoistva polinomov i nailuchshee priblizhenie nepreryvnykh funktsii odnoi veshchestvennoi peremennoi* [Extremal properties of polynomials and the best approximation of continuous functions of one real variable], Part 1, Moscow, Leningrad: ONTI NKTP SSSR Publ., 1937, 203 p.
8. Zygmund A. *Trigonometric series*, 2nd ed., New York: Cambridge University Press, 1959, vol. 1, 383 p. Translated under the title *Trigonometricheskie ryady.* Vol. 1, Moscow, Mir Publ., 1965, 616 p.
9. Dzjadyk V.K. On a problem of Chebyshev and Markov. *Analysis Math.*, 1977, vol. 3, pp. 171–175. doi: 10.1007/BF02297689 .
10. Lebedev V.I. Extremal polynomials and methods for the optimization of numerical algorithms. *Sb. Math.*, 2004, vol. 195, no. 9–10, pp. 1413–1459. doi: 10.1070/SM2004v195n10ABEH000852 .
11. Lukashov A.L. The algebraic fractions of Chebyshev and Markov on several segments. *Analysis Math.*, 1998, vol. 24, pp. 111–130 (in Russian). doi: 10.1007/BF02771077 .
12. Markov A.A. Determination of a function with respect to the condition to deviate as little as possible from zero. *Communication and Proceedings of the Mathematical Society of the Imperial University of Kharkov*, 1884, I, pp. 83–92.
13. Markov A.A. *Izbrannye trudy po teorii nepreryvnykh drobei i teorii funktsii, naimenee uklonyayushchikhsya ot nulya* [Selected works on the theory of continued fractions and the theory of functions least deviating from zero]. Moscow, Leningrad: Gostechizdat Publ., 1948, 411 p.
14. Nikol'skij S.M. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course of mathematical analysis]. Moscow, Nauka Publ. , 1990, vol. 1, 528 p.
15. Paszkowski S. *Vychislitel'nye primenenija mnogochlenov i rjadov Chebyshjova* [Numerical applications of Chebyshev polynomials and series]. Transl. from Polish to Russian, Moscow, Nauka Publ., 1983, 384 p.
16. Rusak V.N. *Ratsional'nye funktsii kak apparat priblizheniya* [Rational functions as approximation apparatus]. Minsk, Beloruss. Gos. Univ. Publ., 1979, 176 p.
17. Szegö G. On a problem of the best approximation. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 1964, vol. 27, iss. 3, pp. 193–198. doi: 10.1007/BF02993216 .
18. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 735 p.
19. Chebyshev P.L. *Complete Set of Works.* Moscow, Leningrad: Izd. Akad. Nauk SSSR, Vol. 2: Mathematical analysis, 1947, 520 p; Vol. 3: Mathematical analysis, 1948, 414 p. (in Russian).
20. Shabozov M.Sh. Best approximation and best unilateral approximation of the kernel of a biharmonic equation and optimal renewal of the values of operators, *Ukr. Math. J.* 1995, vol. 47, iss. 11, pp. 1769–1778.

The paper was received by the Editorial Office on October, 17, 2016.

*Aleksandr Grigor'evich Babenko*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: babenko@imm.uran.ru .

*Yuriy Kryakin*, dr hab., Mathematical Institute of University of Wroclaw, 48-300 Wroclaw, Poland e-mail: kryakin@math.uni.wroc.pl .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.956.45, 517.968.74

# УРАВНЕНИЕ АГРЕГАЦИИ С АНИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИЕЙ[1]

**В. Ф. Вильданова**

Работа посвящена изучению смешанной задачи для уравнения агрегации с анизотропной вырождающейся диффузией. Единственность решения доказана методом энергетических оценок. При этом строится специальная пробная функция как решение вспомогательной эллиптической задачи. Предварительно изучается задача с гладкими данными, в которой нелокальный член со сверткой заменяется гладким вектором. Для нее устанавливаются неотрицательность решения и оценка сверху роста решения. Существование решения сначала доказывается для невырожденного уравнения комбинированием методов итераций и сжимающих отображений. Затем осуществляется предельный переход от решений $u_\varepsilon$ приближающего уравнения к решению предельной вырожденной задачи. При этом используется принцип компактности в $L_1$, близкий к разработанному в известной работе Альта и Лукхауса. Исследуемые в статье уравнения возникают в моделях биологической агрегации.

Ключевые слова: уравнение агрегации, анизотропная диффузия, существование решения, единственность решения.

**V. F. Vil'danova. Aggregation equation with anisotropic diffusion.**

A mixed problem for the aggregation equation with anisotropic degenerating diffusion is studied. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy estimates. For this, a special test function is constructed as a solution of an auxiliary elliptic problem. Preliminarily, we study a problem with smooth data, where the nonlocal term with convolution is replaced by a smooth vector. For this problem, we establish the nonnegativity of the solution and find an upper bound for its growth. The existence of the solution is first proved for the nondegenerate equation by a combination of the iteration method and the method of contracting mappings. Passing to the limit, we obtain a solution of the degenerate limit problem from solutions $u_\varepsilon$ of the approximating equation. Here, we apply the compactness principle in $L_1$, which is similar to the principle developed in the known paper by Alt and Luckhaus. The equations under consideration appear in biological aggregation models.

Keywords: aggregation equation, anisotropic diffusion, solution existence, uniqueness of solution.

**MSC:** 35K20, 35K55, 35K65

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-58-73

## Введение

Пусть $\Omega$ — выпуклая ограниченная область пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, с границей класса $C^3$. Рассмотрим в цилиндрической области $D^T = \Omega \times (0, T)$ уравнение

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j A(u)) + \operatorname{div}(u \nabla K * u) = 0 \tag{0.1}$$

с начальным и краевым условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_0(x) \geq 0, \quad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

$$\sum_{i=1}^{d} \Big( -\sum_{j=1}^{d} a_{ij}(x) \partial_j A(u) + u \partial_i K * u \Big) \nu_i = 0 \quad \text{на} \;\; \partial\Omega \times (0, T), \tag{0.3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-41-020195 р-а).

где $\nu$ — вектор внешней нормали. Оператор свертки определяется формулой $K * u(x,t) = \int_\Omega K(x-y)u(y,t)dy$.

На симметричные коэффициенты $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})$ накладывается условие равномерной эллиптичности: существуют положительные постоянные $\gamma, \Gamma$ такие, что для любого вектора $y \in \mathbb{R}^d$ и почти всех $x \in \Omega$ справедливы неравенства

$$\gamma|y|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) y_i y_j \leq \Gamma|y|^2. \tag{0.4}$$

Предполагается, что нечетная функция $A(s) \in C^1(\mathbb{R})$ удовлетворяет условию

$$A'(s) > 0, \quad s > 0. \tag{0.5}$$

Функция $K(x)$ подчиняется условиям

$$K \in C^2(\mathbb{R}^d), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^d} K(x)dx = 1, \tag{0.6}$$

$$\frac{\partial K(x-y)}{\partial \nu_x} \leq 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad y \in \Omega. \tag{0.7}$$

Эти условия выполнены при выпуклой области $\Omega$, если, например, $K(x) = \widetilde{K}(|x-y_0|)$, $y_0 \in \Omega$, $\widetilde{K}(s) \in C^2(\mathbb{R})$ [1].

В последние 15 лет появилось большое число исследований, посвященных изучению явлений агрегации в биологических системах. Был предложен ряд нелокальных моделей (см.[2–6] и имеющиеся там ссылки). Модели агрегации без диффузии изучались в работе [7].

В [8] приведен вывод одномерного уравнения агрегации, кроме того, для этого уравнения найдены стабильные состояния и изучены их свойства.

В настоящей публикации доказываются существование и единственность решений смешанной задачи для вырождающегося параболического уравнения с нелокальностью в виде свертки. Такое уравнение близко к моделям, которые были введены в работах [2; 6].

В [1] доказаны существование и единственность слабого решения смешанной задачи для уравнения

$$u_t - \triangle A(u) + \operatorname{div}(u \nabla K * u) = 0$$

с условиями (0.2), (0.3). В этой статье ядро $K$ имеет вид $K(x) = K(|x|)$, область $\Omega$ выпукла и функция $A(s)$ удовлетворяет условию (0.5).

Отметим интересную работу [9], в которой изучается задача для системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \operatorname{div}[\nabla u^m(x,t) - u(x,t)\nabla\phi(x,t)], \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 3, \quad m > 1, \\ -\triangle\phi(x,t) = u(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Здесь показано, что при $m = 2(n-1)/n$ существует критическое значение $M_c$ массы $M = \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)dx$ такое, что если $0 < M < M_c$, то решение существует глобально, а если $M > M_c$, то решение "взрывается" за конечное время.

В работе [10] для уравнения агрегации с диффузией изучаются вопросы, связанные с выяснением условий, при которых устанавливается равновесие между притяжением частиц, которое моделируется нелинейной диффузией, и отталкиванием в виде нелокального оператора свертки. Показано, что баланс между притяжением и отталкиванием приводит к радиально симметричным равновесным конфигурациям с компактным носителем при любой массе.

Доказано существование глобального минимизанта свободной энергии среди этих состояний равновесия. В двумерном случае с ньютоновским взаимодействием при $A(u) = u^m$ и любой массе доказаны единственность равновесного состояния с точностью до трансляций и сходимость решений уравнения агрегации к этому равновесному состоянию.

Стабилизация решений к равновесному состоянию для нелинейных параболических уравнений в неограниченных областях изучалась в исследовании [11].

## 1. Доказательство единственности решения

Всюду предполагается, что $u_0 \in L_\infty(\Omega)$ — неотрицательная функция.

Определение 1. Функция $u\colon D^T \to [0,\infty)$ называется слабым решением задачи (0.1)–(0.3), если $u \in L_\infty(D^T)$, $A(u) \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ и для всех пробных функций $\phi \in C^\infty(\overline{D^T})$ таких, что $\phi(x,T) = 0$, выполнено равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Big( - u\phi_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_j A(u)\partial_i\phi - u(\nabla K * u)\cdot\nabla\phi\Big)dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\phi(x,0)dx. \tag{1.1}$$

Отметим, что поскольку $K \in C^2(\mathbb{R}^d)$, то $\nabla K * u(t) \in C^1(\mathbb{R}^d)$ при почти всех $t \in (0,T)$.

Определение 2. Будем говорить, что функции $u, u_1\colon D^T \to [0,\infty)$ являются итерационной парой, если $u, u_1 \in L_\infty(D^T)$, $A(u), A(u_1) \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$,

$$\int\limits_\Omega u(x,t)dx = \int\limits_\Omega u_1(x,t)dx = \int\limits_\Omega u_0(x)dx$$

для почти всех $t \in (0,T)$ и для всех пробных функций $\phi \in C^\infty(\overline{D^T})$ таких, что $\phi(x,T) = 0$, выполнено равенство

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \Big( - u\phi_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_j A(u)\partial_i\phi - u(\nabla K * u_1)\cdot\nabla\phi\Big)dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\phi(x,0)dx. \tag{1.2}$$

**Лемма 1.** *Пусть функция $u(x,t)$ — слабое решение задачи* (0.1)–(0.3).
*Тогда при всех $\tau \in [0,T]$*

$$\int\limits_\Omega u(x,\tau)dx = \int\limits_\Omega u_0(x)dx.$$

Доказательство. Подставляя в (1.1) $\phi = \phi(t) \in C_0^\infty(0,T)$, получаем, что

$$\int\limits_0^T \phi'(t)\int\limits_\Omega u(x,t)dxdt = 0.$$

Это значит, что $\int_\Omega u(x,t)dx$ не зависит от $t$. Поэтому, чтобы завершить доказательство леммы, достаточно выбрать пробную функцию $\phi_\varepsilon = \eta\Big(\dfrac{t-\tau}{\varepsilon}\Big)$, где $\eta(t) = \min(1, \max(0,-t))$, и перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана.

Очевидно, что если $u(x,t)$ — слабое решение задачи (0.1)–(0.3), то пара функций $u, u_1 := u$ является итерационной парой.

Следующее утверждение будет использоваться в доказательстве существования и единственности решения.

**Лемма 2.** *Пусть $u, u_1$ и $v, v_1$ — две итерационные пары. Пусть $A'(s) \geq \varepsilon > 0, \quad s \in \mathbb{R}$. Тогда при малом $\tau = \tau(\varepsilon)$*

$$\|u - v\|_{L_2(D_0^\tau)} \leq q\|u_1 - v_1\|_{L_2(D_0^\tau)}, \quad q < 1, \quad D_0^\tau = \Omega \times (0, \tau).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в (1.2) $\phi \in C_0^\infty(D^T)$, устанавливаем, что в смысле обобщенных функций выполнено равенство

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j A(u)) + \operatorname{div}(u\nabla K * u_1) = 0.$$

Поскольку

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j A(u)) \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad \nabla u \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \ \text{ и } \ \nabla K * u_1 \in L_\infty(D^T),$$

то $u_t \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Поэтому $u, v \in H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$.

Определим функцию $\varphi(x, t)$ при фиксированном $t \in (0, T)$ как решение задачи

$$\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j\varphi(x, t)\right) = u(x, t) - v(x, t), \quad x \in \Omega; \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\nu_i\partial_j\varphi = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.3}$$

Условием разрешимости этой задачи является ортогональность в $L_2(\Omega)$ правой части уравнения решениям однородного уравнения (см., например, [12, гл. III, § 6; 13, гл. II, теорема 5.2]). Решениями задачи для однородного уравнения являются только константы. По определению 2 имеем $\int_\Omega (u(x, t) - v(x, t))dx = 0$, т. е. условие разрешимости задачи выполнено. Можно считать при этом, что $\int_\Omega \varphi(x, t)dx = 0$. Поскольку $u - v \in L_\infty(D^T) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega))$, то $\varphi \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^1(\Omega))$ (см., например, [13, гл. II, теорема 5.1]). Тогда $\nabla\varphi \in C(0, T; L_2(\Omega))$. Дифференцируя (1.3) по $t$, имеем (в слабом смысле)

$$\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \left(a_{ij}(x)\partial_j\varphi_t\right) = u_t - v_t \quad \text{в} \ \ D^T, \quad \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\nu_i\partial_j\varphi_t = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Тогда

$$-\int_0^\tau \langle u_t - v_t, \varphi\rangle dt = \int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_i\varphi_t\partial_j\varphi dxdt = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_i\varphi\partial_j\varphi\Big|_0^\tau dx. \tag{1.4}$$

Отметим, что $u(x, 0) = v(x, 0) = u_0(x)$, поэтому $\varphi(x, 0) = 0$.

Запишем соотношение (1.2) для пары функций $v$, $v_1$ при условии $\phi(x, 0) = \phi(x, T) = 0$:

$$\int_0^T \int_\Omega \Big( - v\phi_t + \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_j A(v) \cdot \partial_i\phi - v(\nabla K * v_1) \cdot \nabla\phi\Big)dxdt = 0.$$

Вычитая из (1.2) последнее соотношение и интегрируя по частям в одном из слагаемых, будем иметь

$$-\int_0^T \langle u_t - v_t, \phi\rangle dt = \int_0^T \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial_j(A(u) - A(v))\partial_i\phi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \big((\nabla K * u_1)u - (\nabla K * v_1)v\big) \cdot \nabla\phi dxdt$$

Пусть $\chi(0 \le t \le \tau)$ — характеристическая функция отрезка $[0,\tau]$. Выбирая последовательность $\phi_m$, сходящуюся к $\phi = \varphi\chi(0 \le t \le \tau)$ в пространстве $L_2(0,T;H^2(\Omega))$, после предельного перехода $m \to \infty$ получим с учетом (1.4)

$$\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(x,\tau)\partial_j\phi(x,\tau)dx \le \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial_j(A(u)-A(v))\partial_i\phi dxdt$$

$$-\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega ((\nabla K * u_1)u - (\nabla K * v_1)v)\cdot\nabla\phi dxdt = I_1 + I_2. \tag{1.5}$$

Поскольку $A(u)-A(v) \in L_2(0,T;H^1(\Omega))$ и функция $A$ возрастает, то, пользуясь (1.3) и условием леммы, можно записать соотношение

$$I_1 = -\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (A(u)-A(v))(u-v)dxdt \le -\varepsilon\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega (u-v)^2dxdt.$$

Перепишем интеграл $I_2$ в виде

$$I_2 = -\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^d \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i\phi)(\nabla K * u_1)\cdot\nabla\phi dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega v(\nabla K * (u_1 - v_1))\cdot\nabla\phi dxdt = I_3 + I_4.$$

Интегрируя по частям в первом слагаемом, получим

$$I_3 = \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial^2_{jl}K * u_1)\partial_l\phi dxdt + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial_l K * u_1)\partial^2_{lj}\phi dxdt = I_5 + I_6.$$

Применим формулу Гаусса — Остроградского к интегралу $I_6$ :

$$I_6 = -\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d \partial_l(a_{ij}(x)\partial_i\phi)(\partial_l K * u_1)\partial_j\phi dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial^2_{ll}K * u_1)\partial_j\phi dxdt$$

$$+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi\partial_j\phi(\partial_l K * u_1)\nu_l dSdt.$$

Из (0.7) следует, что

$$\int\limits_0^\tau\int\limits_{\partial\Omega} \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi\partial_j\phi(\partial_l K * u_1)\nu_l dSdt \le 0,$$

поэтому

$$2I_6 \le -\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d \partial_l(a_{ij}(x))\partial_i\phi(\partial_l K * u_1)\partial_j\phi dxdt - \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial^2_{ll}K * u_1)\partial_j\phi dxdt = I_7 + I_8.$$

Всюду в дальнейшем $C, C_i$ обозначают положительные постоянные.

Очевидно, что

$$\max|\partial^2_{jl}K * u_1| \le \|\partial^2_{jl}K\|_{L_\infty(\Omega+\Omega)}\|u_0\|_{L_1(\Omega)} \le C,$$

где $\Omega + \Omega = \{x - y \,|\, x, y \in \Omega\}$. Поэтому

$$I_5 = \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d a_{ij}(x)\partial_i\phi(\partial^2_{jl}K * u_1)\partial_l\phi dxdt \le C\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega |\nabla\phi|^2dxdt.$$

Интеграл $I_8$ оценивается аналогично:

$$I_8 \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

При оценке интеграла $I_7$ воспользуемся неравенствами $|\partial_l(a_{ij}(x))| \leq C$, $i,j,l = 1,\ldots,d$. Тогда

$$I_7 \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Полученные оценки для $I_5$–$I_8$ подставим в $I_3$ :

$$I_3 \leq C \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdt.$$

Далее, пусть $\phi_1$ — решение задачи (1.3) с правой частью $u_1 - v_1$, т. е. $\sum_{i,j=1}^d \partial_i a_{ij}(x)\partial_j\phi_1 = u_1 - v_1$. Тогда

$$I_4 = -\int_0^\tau \int_\Omega v(x,t)\nabla\phi(x,t)\cdot\int_\Omega \nabla K(x-y)(u_1(y,t) - v_1(y,t))dydxdt$$

$$= -\int_0^\tau \int_\Omega v \sum_{i,j,l=1}^n \partial_l\phi \int_\Omega \partial_{lj}^2 K(x-y)a_{ij}(y)\partial_i\phi_1(y,t)dydxdt = -\int_0^\tau \int_\Omega \sum_{i,j,l=1}^d v\partial_l\phi(\partial_{lj}^2 K * a_{ij}\partial_i\phi_1)dxdt.$$

Поэтому в силу неравенства Юнга для свёрток [14, гл. I, 4.3]

$$|I_4| \leq \Gamma|v|_{L_\infty(D^T)} \sum_{i,j,l=1}^d \int_0^\tau \int_\Omega \left|(\partial_{lj}^2 K * a_{ij}\partial_i\phi_1)\partial_l\phi\right| dxdt$$

$$\leq C \sum_{i,j,l=1}^d \left\| |\partial_{lj}^2 K| * |\partial_i\phi_1| \right\|_{L_2(D_0^\tau)} \|\partial_l\phi\|_{L_2(D_0^\tau)} \leq C\|\nabla\phi_1\|_{L_2(D_0^\tau)}\|\nabla\phi\|_{L_2(D_0^\tau)}.$$

Полагая $\eta(\tau) = \|\nabla\phi\|_{D_0^\tau}$, $\eta(0) = 0$, из (0.4), (1.5) и предыдущих оценок получаем

$$\frac{\gamma}{2}\int_\Omega |\nabla\phi|^2(\tau)dx + \varepsilon\int_0^\tau \int_\Omega (u-v)^2 dxdt \leq C(\eta_1(\tau)\eta(\tau) + \eta^2(\tau)). \tag{1.6}$$

Поскольку $(\eta^2(\tau))' = \int_\Omega |\nabla\phi|^2(\tau)dx$, то из (1.6) следует неравенство $\eta'(\tau) \leq C\left(\eta_1(\tau) + \eta(\tau)\right)$, или, после интегрирования по $\tau$, при малых $\tau$ имеем

$$\eta(\tau) \leq C\left(\eta_1(\tau) + \eta(\tau)\right)\tau, \quad \eta(\tau) \leq 2C\eta_1(\tau)\tau. \tag{1.7}$$

Из (1.3) при помощи неравенства Пуанкаре устанавливаем, что

$$\eta_1(\tau) \leq C_\Omega\|u_1 - v_1\|_{L_2(D_0^\tau)}.$$

Поэтому из (1.6), (1.7) вытекает, что при достаточно малом $\tau$ выполнено неравенство

$$\varepsilon\int_0^\tau \int_\Omega (u-v)^2 dxdt \leq C_1\tau\int_0^\tau \int_\Omega (u_1 - v_1)^2 dxdt.$$

Лемма доказана.

Отметим, что (1.6) справедливо с $\varepsilon = 0$ и при ослабленном условии леммы $A'(s) \geq 0$.

**Теорема 1.** *Пусть $u_0 \in L_\infty(\Omega)$ неотрицательно. Тогда существует не более одного решения задачи* (0.1)–(0.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u$ и $v$ — решения задачи (0.1)–(0.3), тогда $(u, u)$ и $(v, v)$ являются итерационными парами. Применив неравенство (1.6) из доказательства леммы 2, получим, что

$$(\eta^2(\tau))' \le C_2 \eta^2(\tau),$$

поскольку $\eta_1(t)$ совпадает с $\eta(t)$. Отсюда с помощью неравенства Гронуолла выводим, что $\eta(t) = 0$ для всех $0 \le t < T$. Поэтому $u \equiv v$. Теорема доказана.

## 2. Существование решения

Пусть $\varepsilon > 0$ и $a_\varepsilon(z)$ — гладкая четная функция такая, что

$$A'(z) + \varepsilon \le a_\varepsilon(z) \le A'(z) + 2\varepsilon \quad \text{при} \quad z \ge 0. \tag{2.1}$$

Положим

$$A_\varepsilon(z) = \int\limits_0^z a_\varepsilon(s)ds, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Продолжим коэффициенты $a_{ij}$ вне $\Omega$ по формуле $a_{ij} = \gamma\delta_{ij}$, где $\delta_{ij}$ — символы Кронекера. Пусть $a^\varepsilon_{ij}(x) = \varepsilon^{-d} a_{ij}(x) * \rho\Big(\dfrac{x}{\varepsilon}\Big)$, $\rho$ — ядро осреднения. Тогда справедливы неравенства

$$\gamma|y|^2 \le \sum_{i,j=1}^d a^\varepsilon_{ij}(x) y_i y_j \le \Gamma|y|^2.$$

В дальнейшем будем писать $\widetilde{A}(z)$ вместо $A_\varepsilon(z)$ и $\widetilde{a_{ij}}(x)$ вместо $a^\varepsilon_{ij}(x)$.

Пусть $V$ — гладкое векторное поле на $\overline{D^T}$. Рассмотрим уравнение

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^d \partial_i \Big(\widetilde{a_{ij}}(x)\partial_j \widetilde{A}(u)\Big) + \operatorname{div}(uV) = 0 \tag{2.2}$$

с краевым условием

$$\sum_{i=1}^d \Big( - \sum_{j=1}^d \widetilde{a_{ij}}(x)\partial_j \widetilde{A}(u) + uV_i\Big)\nu_i = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.3}$$

Уравнение (2.2) — равномерно параболическое и квазилинейное с гладкими коэффициентами. Существование гладкого (класса $C^{2,1}(\overline{D^T})$) решения задачи (2.2), (0.2), (2.3) известно (см.[15, гл. 5, теорема 7.4]).

**Лемма 3.** *Пусть $u \in C^{2,1}(\overline{D^T})$ — решение задачи* (2.2), (0.2), (2.3) *с гладкой неотрицательной ограниченной начальной функцией $u_0$. Пусть $-\operatorname{div} V \le \mu$ в $D^T$, $\mu > 0$, и*

$$V \cdot \nu \le 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \times (0,T). \tag{2.4}$$

*Тогда функция $u(x,t)$ неотрицательна в $D^T$ и*

$$\|u(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \le e^{\mu t}\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим уравнение (2.6) на $w = \max(0, -u)$ и проинтегрируем по $D_0^\tau$. Имеем с учетом краевого условия (2.3)

$$\int\limits_{D_0^\tau} \Big( wu_t + \sum_{i,j=1}^{d} \widetilde{a_{ij}}(x)\widetilde{A}'(u)\partial_j u \partial_i w - uV\cdot\nabla w\Big) dxdt = 0. \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{D_0^\tau} \sum_{i,j=1}^{d} \widetilde{a_{ij}}(x)\widetilde{A}'(u)\partial_j u \partial_i w dxdt \leq 0.$$

Пользуясь (2.4), запишем соотношения

$$-\int\limits_{D_0^\tau} uV\cdot\nabla w dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{D_0^\tau} V\cdot\nabla w^2 dxdt \leq -\frac{1}{2}\int\limits_{D_0^\tau} w^2 \mathrm{div} V dxdt \leq \frac{\mu}{2}\int\limits_{D_0^\tau} w^2 dxdt.$$

Поскольку $w(x,0) = 0$, $wu_t = -ww_t$, то из (2.5) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x,\tau)dx \leq \mu \int\limits_{D_0^\tau} w^2 dxdt.$$

По лемме Гроноулла получаем, что $w = 0$. Неотрицательность функции $u$ доказана.

Покажем ограниченность решения. Сделав замену $u = ve^{\mu t}$ в уравнении (2.2) получим

$$\mu v + \partial_t v - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_i \Big( \widetilde{a_{ij}}(x) e^{-\mu t} \partial_j \widetilde{A}(ve^{\mu t})\Big) + \mathrm{div}(vV) = 0. \tag{2.6}$$

Пусть $k = \max u_0(x)$. Свойства срезки $v^{(k)} = \max(0, v-k)$ хорошо известны (см., например, [16].) Умножим уравнение (2.6) на $v^{(k)}$ и проинтегрируем по $D^T$. Получим с учетом краевого условия (2.3)

$$\int\limits_{D^T} \Big[ v^{(k)} v_t + \mu v v^{(k)} + \sum_{i,j=1}^{d} \widetilde{a_{ij}}(x)\widetilde{A}'(e^{\mu t}v)\partial_j v \partial_i v^{(k)} - vV\cdot\nabla v^{(k)}\Big] dxdt = 0. \tag{2.7}$$

Заметим, что $v^{(k)}v_t = v^{(k)}(v^{(k)}+k)_t = v^{(k)}v_t^{(k)}$, $v^{(k)}(0) = 0$, $v\nabla v^{(k)} = (v^{(k)}+k)\nabla v^{(k)} = \nabla((v^{(k)})^2/2 + kv^{(k)})$. Поэтому

$$\int\limits_{D^T} vV\cdot\nabla v^{(k)} dxdt = \int\limits_{D^T} V\cdot\nabla\Big(\frac{(v^{(k)})^2}{2} + kv^{(k)}\Big) dxdt$$

$$= -\int\limits_{D^T} \Big(\frac{(v^{(k)})^2}{2} + kv^{(k)}\Big)\mathrm{div} V dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_{\partial\Omega} \Big(\frac{(v^{(k)})^2}{2} + kv^{(k)}\Big) V\nu dsdt \leq \mu \int\limits_{D^T} \Big(\frac{(v^{(k)})^2}{2} + kv^{(k)}\Big) dxdt.$$

Тогда из (2.7) следует неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{(v^{(k)}(T))^2}{2}\Big) dx \leq -\mu \int\limits_{D^T} \Big( vv^{(k)} - \frac{(v^{(k)})^2}{2} - kv^{(k)}\Big) dxdt \leq 0.$$

Отсюда заключаем, что $v^{(k)} \equiv 0$, или $v \leq k$. Лемма доказана.

Как и в лемме 1, устанавливается равенство

$$\int\limits_{\Omega} u(x,t)dx = \int\limits_{\Omega} u_0(x)dx,$$

которое ниже будет использоваться без ссылок.

Доказательство следующего утверждения использует идею из работы [17, Lemma 1.8].

**Лемма 4.** *Пусть $A$ удовлетворяет условию* (0.5). *Пусть $M > 0$ и $\delta > 0$. Пусть $\mathcal{F}$ — семейство неотрицательных функций из $L_\infty(\Omega)$ таких, что*

$$\|A(f)\|_{H^1(\Omega)} \le M \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \le M \quad \text{для любого} \quad f \in \mathcal{F}. \tag{2.8}$$

*Пусть $\mathcal{F}(\mathcal{M},\delta)$ обозначает множество пар функций $(f_1, f_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, для которых выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} (A(f_2) - A(f_1))(f_2 - f_1)dx \le \delta.$$

*Тогда*

$$\omega_M(\delta) = \sup_{\mathcal{F}(\mathcal{M},\delta)} \|A(f_2) - A(f_1)\|_{L_1(\Omega)} \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что утверждение неверно. Тогда существует $k > 0$ и последовательность функций $f_{1,m}$, $f_{2,m}$ из $\mathcal{F}$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} \big(A(f_{2,m}) - A(f_{1,m})\big)(f_{2,m} - f_{1,m})dx \le \frac{1}{m} \tag{2.9}$$

и при этом

$$\int\limits_{\Omega} |A(f_{2,m}) - A(f_{1,m})|dx \ge k. \tag{2.10}$$

Из условий (2.8) вытекает, что из последовательностей $f_{1,m}$, $f_{2,m}$ можно выделить такие подпоследовательности (сохраняя за ними старые обозначения), что $A(f_{1,m}) \to A(f_1)$, $A(f_{2,m}) \to A(f_2)$ в $L_2(\Omega)$ при $m \to \infty$. Можно считать при этом, что $A(f_{1,m}) \to A(f_1)$ п.в. в $\Omega$. Тогда из условия монотонности (0.5) функции $A$ следует, что $f_{1,m} \to f_1$ и $f_{2,m} \to f_2$ п.в. в $\Omega$. Поэтому, переходя к пределу в (2.9) по подходящей подпоследовательности, устанавливаем, что

$$\int\limits_{\Omega} (A(f_2) - A(f_1))(f_2 - f_1)dx = 0.$$

В силу возрастания функции $A(r)$ отсюда выводим, что $f_1 = f_2$ п.в. в $\Omega$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в (2.10), получаем противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Пусть $u \in L_\infty(D^T)$ – гладкое решение задачи* (2.2), (0.2), (2.3). *Тогда существует постоянная $C$, зависящая только от $\gamma$, $T$, $\|V\|_{L_\infty(D^T)}$, $\|u\|_{L_\infty(D^T)}$, $\|u_0\|_{L_1(\Omega)}$ и $\widetilde{A}(\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)})$, такая что*

$$\|\nabla \widetilde{A}(u)\|_{L_2(D^T)} \le C.$$

Умножим уравнение (2.2) на пробную функцию $\widetilde{A}(u)$ и проинтегрируем по $D^T$. После интегрирования по частям будем иметь

$$\int\limits_{D^T} u_t \widetilde{A}(u)dxdt = -\int\limits_{D^T} \sum_{i,j=1}^{d} \widetilde{a_{ij}}(x)\partial_i \widetilde{A}(u)\partial_j \widetilde{A}(u)dxdt + \int\limits_{D^T} uV \cdot \nabla \widetilde{A}(u)dxdt.$$

Отметим, что

$$\int\limits_{D^T} uV\cdot\nabla\widetilde{A}(u)dxdt \le \gamma^{-1}\int\limits_{D^T} u^2|V|^2dxdt+\frac{\gamma}{4}\int\limits_{D^T}|\nabla\widetilde{A}(u)|^2dxdt.$$

Положим $F(z)=\int_0^z\widetilde{A}(s)ds$. Очевидно, что

$$F(u(x,0))\le\int\limits_0^{u_0(x)}\widetilde{A}(\sup u_0)ds=\widetilde{A}(\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)})u_0(x).$$

Пользуясь последним неравенством и очевидным равенством

$$\int\limits_\Omega\big(F(u(x,T))-F(u(x,0))\big)dx=\int\limits_{D^T}u_t\widetilde{A}(u(x,t))dxdt,$$

получим

$$\frac{3}{4}\gamma\int\limits_{D^T}|\nabla\widetilde{A}(u)|^2dxdt\le\int\limits_\Omega F(u(x,0))dx+\gamma^{-1}\int\limits_{D^T}u^2|V|^2dxdt$$

$$\le\|u_0\|_{L_1(\Omega)}\widetilde{A}(\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)})+\gamma^{-1}T\|V\|^2_{L_\infty(D^T)}\|u\|_{L_\infty(D^T)}\|u_0\|_{L_1(\Omega)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. Отметим, что из последнего неравенства вытекает, что

$$uV\in L_2(D^T). \tag{2.11}$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Пусть* $V\in L_\infty(D^T)$. *Пусть* $A$ *удовлетворяет условию* (0.5). *Пусть* $u$ *— решение задачи* (2.2), (0.2), (2.3) *с начальной функцией из* $L_\infty(\Omega)$.

*Тогда существует постоянная* $C$, *зависящая только от* $T$, $\|uV\|_{L_2(D^T)}$ *и* $\|\nabla\widetilde{A}(u)\|_{L_2(D^T)}$ *такая, что*

$$\int\limits_0^{T-h}\int\limits_\Omega(u(x,t+h)-u(t,x))(\widetilde{A}(u(x,t+h))-\widetilde{A}(u(t,x)))dxdt\le Ch$$

*для всех* $h\in[0,T/2]$.

Доказательство. При фиксированном $t\in(0,T-h)$, умножим уравнение (2.2) на функцию $v(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ и проинтегрируем по $\tau\in(t,t+h)$, $x\in\Omega$ :

$$\int\limits_\Omega\big(u(x,t+h)-u(t,x)\big)v(x)dx=-\int\limits_{D_t^{t+h}}\Big(\sum_{i,j=1}^d\widetilde{a_{ij}}(x)\partial_i\widetilde{A}(u)\partial_jv(x)-uV\cdot\nabla v\Big)dxd\tau$$

$$=-h\int\limits_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^d(\widetilde{a_{ij}}\partial_i\widetilde{A})_h\partial_jv-(uV)_h\cdot\nabla v\Big)dx,$$

где $f_h$ обозначает осреднение Стеклова $f_h(x,t)=\dfrac{1}{h}\int\limits_t^{t+h}f(x,\tau)d\tau$. Подставим в эту формулу вместо $v(x)$ функцию $v(x)=\widetilde{A}(u(x,t+h))-\widetilde{A}(u(x,t))$. Ясно, что это можно сделать при п.в. $t\in(0,T-h)$. После интегрирования по $t\in(0,T-h)$ получим

$$\int\limits_{D^{T-h}}(u(x,t+h)-u(x,t))\big(\widetilde{A}(u(x,t+h))-\widetilde{A}(u(x,t))\big)dxd\tau$$

$$= -h \int\limits_{D^{T-h}} \Big( \sum_{i,j=1}^{d} \big( (\widetilde{a_{ij}} \partial_i \widetilde{A})_h - (uV_j)_h \big) \partial_j \big( \widetilde{A}(u(x,t+h)) - \widetilde{A}(u(x,t)) \big) \Big) dxdt$$

$$\le 2h\Gamma \left( \|\nabla \widetilde{A}_h\|_{L_2(D^{T-h})} + \|(uV)_h\|_{L_2(D^{T-h})} \right) \|\nabla \widetilde{A}\|_{L_2(D^T)}$$

$$\le 2h \left( \|\nabla \widetilde{A}\|_{L_2(D^T)} + \|uV\|_{L_2(D^T)} \right) \|\nabla \widetilde{A}\|_{L_2(D^T)} \le Ch.$$

В последнем неравенстве использовано условие леммы и (2.11). Лемма доказана.

Перейдем к доказательству существования решения уравнения

$$\partial_t u_\varepsilon - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_j (a_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i A_\varepsilon(u_\varepsilon)) + \operatorname{div}(u_\varepsilon \nabla K * u_\varepsilon) = 0 \tag{2.12}$$

с начальным и краевым условиями (0.2), (0.3).

**Теорема 2.** *Пусть функция* $A$ *удовлетворяет условию* (0.5)*, а функция* $K$ *— условиям* (0.6) *и* (0.7)*. Пусть* $\varepsilon > 0$ *и* $u_0$ *— неотрицательная гладкая функция на* $\overline{\Omega}$.

*Тогда задача* (2.12), (0.2), (0.3) *имеет слабое решение* $u$ *в* $D^T$.

Доказательство. Решение получим посредством итерационного процесса. В качестве начального приближения положим $u^1(x,t) = u_0(x)$ при всех $(x,t) \in D^T$. Пусть $u^k$ при $k > 1$ является решением уравнения

$$u_t^k - \sum_{i,j=1}^{d} \partial_j (a_{ij}^\varepsilon(x) \partial_i A_\varepsilon(u^k)) + \operatorname{div}(u^k \nabla (K * u^{k-1})) = 0 \tag{2.13}$$

с начальной функцией $u^k(0,x) = u_0(x)$, вектором $V = \nabla(K * u^{k-1})$ и краевым условием (2.3).

По лемме 3 устанавливаем неотрицательность функций $u^k$ и оценку

$$\|u^k\|_{L_\infty(D^T)} \le e^{M_k T} \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}, \tag{2.14}$$

где $M_k = \|\triangle K * u_{k-1}(t)\|_{L_\infty(D^T)}$. При этом

$$M_k \le \sup_{t \in [0,T]} \|\triangle K\|_{L_\infty(\Omega+\Omega)} \|u_{k-1}(t)\|_{L_1(\Omega)} \le M.$$

Действуя, как при доказательстве леммы 1, устанавливаем равенства

$$\int\limits_{\Omega} u^k(x,t) dx = \int\limits_{\Omega} u_0(x) dx.$$

Применив лемму 2 для функций $u = u^{k+1}$, $v = u^k$, $u_1 = u^k$, $v_1 = u^{k-1}$, получим, что $\|u^{k+1} - u^k\|_{L_2(D_0^\tau)} \to 0$ при $k \to \infty$ как геометрическая прогрессия. Отсюда вытекает, что последовательность $u^k$ имеет предел $u$ в $L_2(D_0^\tau)$. Докажем, что этот предел является решением задачи (2.12), (0.2), (0.3) в цилиндре $D_0^\tau$. Выбирая подпоследовательность, можно считать, что $u^k \to u$ п.в. в $D_0^\tau$. Для функции $u$ из (2.14) следует оценка $\|u\|_{L_\infty(D_0^\tau)} \le e^{M\tau} \|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}$. Тогда из ограниченности производной $A'_\varepsilon(s)$ на конечном отрезке выводим также сходимость

$$A_\varepsilon(u^k) \to A_\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad L_2(D_0^\tau).$$

По лемме 5 устанавливаем слабую сходимость градиентов

$$\nabla A_\varepsilon(u^k) \rightharpoonup \nabla A_\varepsilon(u) \quad \text{в} \quad L_2(D_0^\tau).$$

Согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\|\nabla K * u^{k-1} - \nabla K * u\|_{L_2(0,\tau,L_\infty(\Omega))} \leq \|\nabla K\|_{L_2(\Omega+\Omega)}\|u^{k-1} - u\|_{L_2(D_0^\tau)}.$$

Поэтому

$$u^k \nabla K * u^{k-1} \to u\nabla K * u \quad \text{в} \ \ L_1(D_0^\tau).$$

Запишем для решения уравнения (2.13) интегральное соотношение

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big( - u^k \phi_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i A_\varepsilon(u^k)\partial_j \phi - u^k(\nabla K * u^{k-1}) \cdot \nabla\phi\Big) dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\phi(x,0)dx.$$

В результате предельного перехода $k \to \infty$ будем иметь

$$\int\limits_0^\tau \int\limits_\Omega \Big( - u\phi_t + \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i A_\varepsilon(u)\partial_j \phi - u(\nabla K * u) \cdot \nabla\phi\Big) dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\phi(x,0)dx.$$

Тем самым существование решения доказано в достаточно малом цилиндре $D_0^\tau$. Далее, взяв $\widetilde{u}_0(x) = u(\tau, x)$ в качестве нового начального условия, найдем решение в цилиндре $D_\tau^{\tau+2\tau}$. "Склеивая" построенные решения, найдем решение во всем цилиндре $D^T$. Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Пусть функция $A$ удовлетворяет условию* (0.5)*, функция $K$ удовлетворяет условиям* (0.6) *и* (0.7)*. Пусть $u_0$ — неотрицательная функция в $L_\infty(\Omega)$.*

*Тогда задача* (0.1)–(0.3) *имеет слабое решение в $D^T$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u_0^\varepsilon$ — гладкие неотрицательные приближения для начальной функции $u_0$ такие, что $\|u_0^\varepsilon\|_{L_1(\Omega)} = \|u_0\|_{L_1(\Omega)}$, $\|u_0^\varepsilon\|_{L_\infty(\Omega)} \leq 2\|u_0\|_{L_\infty(\Omega)}$ и $u_0^\varepsilon \to u_0$ в $L_p(\Omega)$ при $\varepsilon \to 0$ для всех $p \in [1, \infty)$. По теореме 2 существует неотрицательное решение $u_\varepsilon$ задачи (2.12), (0.2), (0.3) с начальной функцией $u_0^\varepsilon$. При этом справедливы равномерные по $\varepsilon$ оценки норм

$$\|A_\varepsilon(u_\varepsilon)\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} + \|u_\varepsilon\|_{L_\infty(D^T)} \leq C. \tag{2.15}$$

Можно считать, что $\|A(u_\varepsilon)\|_{L_1(D^T)} \leq M$. Из (2.15) и (2.1) следует, что

$$\|A(u_\varepsilon)\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))} \leq M. \tag{2.16}$$

Поэтому найдется последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что $A(u_{\varepsilon_n}) \rightharpoonup w$ (слабо) в $L_2(0,T;H^1(\Omega))$. В силу (2.15) можно считать также, что

$$A_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) \rightharpoonup w_1 \quad \text{(слабо) в} \ \ L_2(0,T;H^1(\Omega)).$$

Отметим, что $u_\varepsilon$ является слабым решением (2.2) с $V = \nabla K * u_\varepsilon$. Поскольку $(A_\varepsilon)'_s \geq A'_s$, то $A(s_1) - A(s_2) \leq A_\varepsilon(s_1) - A_\varepsilon(s_2)$ при всех $\varepsilon > 0$ и $s_1 > s_2 \geq 0$, $x \in \Omega$. Поэтому из леммы 6 получаем, что

$$\int\limits_0^{T-h} \int\limits_\Omega \big(u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(x,t)\big)\big(A(u_\varepsilon(x,t+h)) - A(u_\varepsilon(x,t))\big)dxdt \leq Ch \tag{2.17}$$

при всех $h \in [0, T/2]$. Для доказательства компактности в $L_1(D^T)$ семейства $\{z_\varepsilon = A(u_\varepsilon(x,t)\}$, воспользуемся критерием Рисса — Фреше — Колмогорова [18, Ch. IV, (26)]. Напомним два условия этого критерия.

У с л о в и е 1. При всех $\theta > 0$ существует $h_0 \in (0, \theta]$ такое, что при всех $\varepsilon > 0$ и $0 < h \leq h_0$

$$\int_0^{T-\theta} \int_\Omega |z_\varepsilon(x, t+h) - z_\varepsilon(x,t)| dxdt \leq \theta.$$

У с л о в и е 2. При любом единичном векторе $e$ выполнено неравенство

$$\int_0^T \int_{\Omega^\theta} |z_\varepsilon(x + he, t) - z_\varepsilon(x,t)| dxdt \leq \theta,$$

где $\Omega^\theta = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \theta\}$.

Установим справедливость первого условия. Рассмотрим для $h \in (0, \theta)$ и $\lambda > 1$ следующее множество:

$$E_\lambda(h) = \Big\{ t \in [0, T-\theta] \colon \|z_\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq M\sqrt{\lambda},\ \|z_\varepsilon(t+h)\|_{H^1(\Omega)} \leq M\sqrt{\lambda},$$

$$I(t) = \int_\Omega \big(u_\varepsilon(x, t+h) - u_\varepsilon(x,t)\big)\big(z_\varepsilon(t+h) - z_\varepsilon(t)\big) dx < C\lambda h \Big\}.$$

Пусть $E^c_\lambda(h) = [0, T-\theta] \setminus E_\lambda(h)$. Отметим, что $|E^c_\lambda(h)| \leq 3/\lambda$, поскольку каждое из неравенств не может нарушаться на множестве меры больше, чем $1/\lambda$. Действительно, из (2.16) имеем

$$M^2 \geq \int_0^T \|z_\varepsilon(t)\|^2_{H^1(\Omega)} dt \geq \int_0^T M^2 \lambda \chi\Big(\|z_\varepsilon(t)\|_{H^1(\Omega)} > M\sqrt{\lambda}\Big) dt.$$

Аналогично из (2.17) следует, что

$$Ch \geq \int_0^{T-h} I(t) dt \geq \int_0^{T-h} Ch\lambda \chi\Big(I(t) > Ch\lambda\Big) dt.$$

Пусть $\omega_{M\sqrt{\lambda}}$ — функция из леммы 4, тогда ввиду (2.17) выводим

$$\int_0^{T-\theta} \int_\Omega \big|A(u_\varepsilon(x, t+h)) - A(u_\varepsilon(x,t))\big| dxdt \leq T\omega_{M\sqrt{\lambda}}(C\lambda h) + 2M\frac{3}{\lambda}.$$

Положим $\lambda = \max\{12M/\theta, 1\}$. Выберем $h_0 > 0$ так, чтобы неравенство $T\omega_{M\sqrt{\lambda}}(C\lambda h_0) < \theta/2$ обеспечило выполнение условия 1.

Перейдем к условию 2. Отметим, что при $h \in (0, \theta)$

$$\int_0^T \int_{\Omega^\theta} |z_\varepsilon(x + he, t) - z_\varepsilon(x,t)| dxdt \leq h \int_0^T \int_0^1 \int_{\Omega^\theta} |\nabla z_\varepsilon(x + she, t)| dxdtds \leq Ch\|A(u_\varepsilon)\|_{L_2(0,T;H^1(\Omega))}.$$

Условие 2 будет выполнено, если взять $h_0$ достаточно малым. Итак, найдется последовательность $\varepsilon_n \to 0$ такая, что

$$A(u_{\varepsilon_n}(x,t)) \to z \quad \text{в} \quad L_1(D^T).$$

Тогда можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.в. в $D^T$. В силу строгой монотонности функции $A$ имеем сходимость $u_{\varepsilon_n}$ п.в. в $D^T$. Это вместе с ограниченностью последовательности функций $u_{\varepsilon_n}$ в $D^T$ влечет сходимость $u_{\varepsilon_n} \to u$ в $L_p(D^T)$ при любом $p \geq 1$. Тогда $z = w = w_1 = A(u)$. Очевидна оценка

$$\|\nabla K * (u_{\varepsilon_n} - u)\|_{L_2(0,T,L_\infty(\Omega))} \leq C\|\nabla K\|_{L_\infty(\Omega+\Omega)}\|u_{\varepsilon_n} - u\|_{L_2(D^T)}.$$

Это дает сходимость

$$V_n = (\nabla K * u_{\varepsilon_n}) \to (\nabla K * u) \quad \text{в} \ L_2(D^T).$$

Следовательно, в формуле

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_{\varepsilon_n}\phi_t - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}^\varepsilon(x)\partial_i A_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})\partial_j\phi + u_{\varepsilon_n}(\nabla K * u_{\varepsilon_n})\nabla\phi dxdt = \int\limits_\Omega u_0(x)\phi(x,0)dx$$

можно перейти к пределу и получить (1.1). Теорема доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Ф. Х. Мукминову за обсуждение результатов работы и полезные замечания.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Bertozzi A., Slepcev D.** Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion // Comm. Pur. Appl. Anal. 2010. Vol. 6, no. 9. P. 1617–1637. doi:10.3934/cpaa.2010.9.1617.
2. **Boi S., Capasso V., Morale D.** Modeling the aggregative behavior of ants of the species polyergus rufescens // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2000. Vol. 1, no. 1. P. 163–176. doi: 10.1016/S0362-546X(99)00399-5.
3. Modeling group formation and activity patterns in self-organizing collectives of individuals / R. Eftimie, G. Vries, M.A. Lewis, F. Lutscher // Bull. Math. Biol. 2007. Vol. 146, iss. 69. P. 1537–1565. doi: 10.1007/s11538-006-9175-8.
4. **Milewski P.A., Yang X.** A simple model for biological aggregation with asymmetric sensing // Commun. Math. Sci. 2008. Vol. 6, no. 2. P. 397–416. doi:10.4310/CMS.2008.v6.n2.a7.
5. **Morale D., Capasso V., Oelschlager K.** An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations // J. Math. Biol. 2005. Vol. 50, no. 1. P. 49–66. doi:10.1007/s00285-004-0279-1.
6. **Topaz C.M., Bertozzi A.L., Lewis M.A.** A nonlocal continuum model for biological aggregation // Bull. Math. Biol. 2006. Vol. 68, no. 7. P. 1601–1623. doi:10.1007/s11538-006-9088-6.
7. **Topaz C.M.,Bertozzi A.L.** A swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups // SIAM J. Appl. Math. 2004. Vol. 65, no. 1. P. 152–174. doi:10.1137/S0036139903437424.
8. **Burger M., Fetecau R. C., Huang Y.** A Stationary states and asymptotic behavior of aggregation models with nonlinear local repulsion // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. 2014. Vol. 13, iss. 1. P. 397–424. doi:10.1137/130923786.
9. **Blanchet A., Carrillo J. A., Laurencot P.** Critical mass for a Patlak–Keller–Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions // Calc. Var. Partial Differential Equations. 2009. Vol. 35, no. 2. P. 133–168. doi:10.1007/s00526-008-0200-7.
10. Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics / J.A. Carrillo, S. Hittmeir, B. Volzone, Y. Yao. arXiv:1603.07767v1[math.ap]. 2016. 47 p. URL: https://arxiv.org/pdf/1603.07767.pdf.
11. **Андриянова Э.Р., Мукминов Ф.Х.** Существование и качественные свойства решения первой смешанной задачи для параболического уравнения с двойной нестепенной нелинейностью // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 1. С. 3–44.
12. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
13. **Лионс Ж.-Л.,Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.

14. **Stein E.M., Weiss G.** Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971. 312 p.
15. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
16. **Гущин А.К.** Некоторые свойства обобщенного решения второй краевой задачи для параболического уравнения // Мат. сб. 1975. Т. 97, № 2 (6). С. 242–261.
17. **Alt H.W., Luckhaus S.** Quasilinear elliptic-parabolic differential equations // Math. Z. 1983. Vol. 183, no. 3. P. 311–341.
18. **Brezis H.** Analyze functionally [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Paris, Masson, 1983. ISBN: 2225771987.

Вильданова Венера Фидарисовна
кан. физ.-мат. наук, доцент
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы
e-mail: gilvenera@mail.ru

Поступила 16.03.2017

## REFERENCES

1. Bertozzi A., Slepcev D. Existence and Uniqueness of Solutions to an Aggregation Equation with Degenerate Diffusion. *Comm. Pur. Appl. Anal.*, 2010, vol. 6, no. 9, pp. 1617–1637. doi: 10.3934/cpaa.2010.9.1617.
2. Boi S., Capasso V., Morale D. Modeling the aggregative behavior of ants of the species polyergus rufescens. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2000, vol. 1, no. 1, pp. 163–176. doi: 10.1016/S0362-546X(99)00399-5.
3. Eftimie R., Vries G., Lewis M.A., Lutscher F. Modeling group formation and activity patterns in self-organizing collectives of individuals. *Bull. Math. Biol.*, 2007, vol. 146, no. 69, pp. 1537–1565. doi: 10.1007/s11538-006-9175-8.
4. Milewski P.A., Yang X. A simple model for biological aggregation with asymmetric sensing. *Commun. Math. Sci.*, 2008, vol. 6, no. 2, pp. 397–416. doi: 10.4310/CMS.2008.v6.n2.a7.
5. Morale D., Capasso V., Oelschlager K. An interacting particle system modelling aggregation behavior: from individuals to populations. *J. Math. Biol.*, 2005, vol. 50, no. 1, pp. 49–66. doi: 10.1007/s00285-004-0279-1.
6. Topaz C.M., Bertozzi A.L., Lewis M.A. A nonlocal continuum model for biological aggregation. *Bull. Math. Biol.*, 2006, vol. 68, no. 7, pp. 1601–1623. doi: 10.1007/s11538-006-9088-6.
7. Topaz C.M.,Bertozzi A.L. A swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups. *SIAM J. Appl. Math.*, 2004, vol. 65, no. 1, pp. 152–174. doi: 10.1137/S0036139903437424.
8. Burger M., Fetecau R. C., Huang Y. A Stationary States and Asymptotic Behavior of Aggregation Models with Nonlinear Local Repulsion. *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2014, vol. 13, iss. 1, pp. 397–424. doi: 10.1137/130923786.
9. Blanchet A., Carrillo J. A., Laurencot P. Critical mass for a Patlak- Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 2009, vol. 35, no. 2, pp. 133–168. doi: 10.1007/s00526-008-0200-7.
10. Carrillo J.A., Hittmeir S., Volzone B., Yao Y. Nonlinear aggregation-diffusion equations: radial symmetry and long time asymptotics. *arXiv*:1603.07767v1[math.ap]. 2016. Available at: https://arxiv.org/pdf/1603.07767.pdf.
11. Andriyanova E.R., Mukminov F.Kh. Existence and qualitative properties of a solution of the first mixed problem for a parabolic equation with non-power-law double nonlinearity. *Mat. Sb.*, 2016, vol. 207, no. 1, pp. 3–44. doi: 10.4213/sm8484.
12. Ladyzhenskaya O.A. Ural'tseva, N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and quasilinear equations of elliptic type]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 576 p.
13. Lions J.L., Magenes E. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol.* 1. Paris, Dunod, 1968, 372 p. Translated to Russian under the title *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya.* Moscow, Mir Publ., 1971, 371 p.
14. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 069108078X.

15. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov, V.A. Ural'tseva, N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type.* Providence, RI: American Mathematical Society, 1968, Ser. Translations of Mathematical Monographs, 23, 648 p. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa.* Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p.
16. Guščin A.K. Some properties of a generalized solution of the second boundary-value problem for a parabolic equation. *Math. of the USSR-Sb.*, 1975, vol. 26, no. 2, pp. 225–244. doi: 10.1070/SM1975v026n02ABEH002478 .
17. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*, 1983, vol. 183, pp. 311–341. doi: 10.1007/BF01176474 .
18. Brezis H. *Analyse fonctionnelle: théorie et applications.* [Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise]. Paris, Masson, 1983, 233 p. ISBN: 2225771987 .

The paper was received by the Editorial Office on March 16, 2017.

*Venera Fidarisovna Vildanova,* Cand. Phys.-Math. Sci., Bashkir State Pedagogical University of M. Akmulla, Ufa, 450000 Russia, e-mail: gilvenera@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.85

# ТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ВНЕШНЕПЛАНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ С УЛУЧШЕННОЙ ВРЕМЕННОЙ СЛОЖНОСТЬЮ[1]

**Э. Х. Гимади**

Рассматривается сетевая задача размещения с неограниченными объемами производства. В общем случае задача $NP$-трудна. Известно, что задача точно решается с квадратичной трудоемкостью на древовидной сети. В статье исследуется случай сети, представляемой внешнепланарным графом, т. е. графом, все вершины которого принадлежат одной (внешней) грани. Для точного решения рассматриваемой задачи был известен алгоритм с временной сложностью $O(nm^3)$, где $n$ — число вершин, $m$ — число возможных мест размещения предприятий. При использовании некоторых свойств внешнепланарных графов (бинарных 2-деревьев) и учете существования оптимального решения с совокупностью центрально связных областей обслуживания получены рекуррентные соотношения, позволяющие построить точный алгоритм, решающий задачу с уменьшенной в $\sqrt{m}$ раз временной сложностью.

Ключевые слова: задача размещения, сеть, внешнепланарный граф, точный алгоритм, временная сложность, связность.

**E. Kh. Gimadi. An optimal algorithm for an outerplanar facility location problem with improved time complexity.**

We consider a network facility location problem with unbounded production levels. This problem is NP-hard in the general case and is known to have an optimal solution with quadratic complexity on a tree network. We study the case of a network representable by an outerplanar graph, i.e., by a graph whose vertices belong to one (outer) face. This problem is known to have an optimal algorithm with time complexity $O(nm^3)$, where $n$ is the number of vertices and $m$ is the number of possible facility locations. Using some properties of outerplanar graphs (binary 2-trees) and the existence of an optimal solution with a family of centrally connected service domains, we obtain recurrence relations for the construction of an optimal algorithm with time complexity that is smaller by a factor of $\sqrt{m}$ than the time complexity of the earlier algorithm.

Keywords: facility location problem, network, outerplanar graph, optimal algorithm, time complexity, connectedness.

**MSC:** 90B80, 90C10, 90C39, 05C10

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-74-81

## 1. Введение

Задача размещения (Facility Location Problem — FLP [1]) может быть сформулирована следующим образом: минимизировать целевую функцию

$$\sum_{i\in M} f_i x_i + \sum_{j\in V}\sum_{i\in M} b_j c_{ij} x_{ij}$$

при ограничениях

$$\sum_{i\in M} x_{ij} = 1, \quad j\in V,$$

$$x_{ij} \le x_i, \quad i\in M, \quad j\in V,$$

$$x_{ij}, x_i \in \{0,1\},$$

где

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 16-11-10041.

$M$ — множество возможных мест предприятий, $|M| = m$;

$V$ — множество пунктов спроса (потребителей), $|V| = n$;

$b_j$ — объем спроса в пункте $j$;

$f_i$ — фиксированная стоимость открытия предприятия в пункте $i$;

$c_{ij}$ — затраты на транспортировку единицы продукции от действующего предприятия в пункте $i$ до потребителя $j$;

$x_i$ и $x_{ij}$ — переменные выбора и назначения соответственно.

Задачу можно записать более компактно: найти минимум функции

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in V} b_j \min_{i \in S} c_{ij}$$

по всем непустым подмножествам множества $M$.

Для анализа задачи FLP оказывается удобной другая компактная формулировка, которая в качестве переменных использует вектор назначения предприятий $\pi$: минимизировать функцию

$$\sum_{i \in I(\pi)} f_i + \sum_{j \in V} b_j c_{\pi_j j}$$

по всем векторам $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, где $\pi_j \in M$ — номер пункта-предприятия, обслуживающего пункт-потребителя $j \in V$, и $I(\pi)$ — множество предприятий, содержащееся в решении $\pi$.

Известно, что задача размещения $NP$-трудна в силу очевидной сводимости к ней $NP$-трудной задачи покрытия множествами.

*Сетевая задача размещения* определяется посредством простого связного неориентированного взвешенного графа $G = (V, E)$ с множеством вершин $V$ потребителей и множеством ребер коммуникаций, соединяющих эти вершины. Предполагается, что множество возможных мест предприятий $M \subset V$, а транспортные затраты $c_{ij}$ равны сумме длин (весов) ребер в кратчайшем пути, соединяющем пункты $i$ и $j$ (расстояния между $i$ и $j$).

*Задача размещения на древовидной сети* была решена В. А. Трубиным [2] за время $O(n^3)$. Позже этот алгоритм был переоткрыт в работе [3]. Одновременно с этим автором статьи был предложен алгоритм с временной сложностью $O(nm)$ [4], что, естественно, не превышает $O(n^2)$. Позже алгоритмы с такой же трудоемкостью были представлены в работах [1; 5].

Алгоритм в [4] использует понятие *связных областей обслуживания.*

Область обслуживания $A \in V$ называется *связной относительно графа* $G = (V, E)$, если подграф, индуцированный этой областью, является связным.

Обозначим через

$$i {\leq_v} k, \quad i {<_v} k, \quad i {=_v} k$$

соотношения

$$g_{iv} \leq g_{kv}, \quad g_{iv} < g_{kv}, \quad g_{iv} = g_{kv},$$

соответственно. Формулы

$$i {\leq_{V'}} k, \quad i {<_{V'}} k, \quad i {=_{V'}} k$$

означают, что соответствующие соотношения выполняются для каждого $v \in V'$, $V' \subset V$.

Говорим, что матрица $(g_{ij})$ $(i \in M,\ j \in V)$ удовлетворяет *свойству связности относительно ациклической сети* $G$, если для всякой пары $i, k \in M$ существует разбиение $(V', V'')$ такое, что подграфы $V'$ и $V''$ являются связными и имеют место соотношения $i {\leq_{V'}} k$, $i {<_{V''}} k$.

Понятие матрицы $(g_{ij})$ $(i \in M,\ j \in V)$, *связной относительно произвольного графа* $G$, рассмотрено в работе [6].

В нижеследующем утверждении используется понятие *центральной связности* [7] матрицы транспортных затрат. Матрица $(g_{ij})$ называется *центрально-связной относительно сети* $G$ (*короче,* $C$*-матрица*), если неравенства $g_{i_1,v} < g_{i_2,v}$ для всех $i_1, i_2 \in M$, $v \in V$ влекут неравенства $g_{i_1,j} < g_{i_2,j}$ для всех вершин $j$ в кратчайшем пути, соединяющем вершины $i_1$ и $v$:

*Для произвольной сетевой задачи размещения с $C$-матрицей $(g_{ij})$ существует оптимальное решение с совокупностью центрально-связных областей обслуживания* (см. [7]).

В этом случае сетевая задача размещения решается за время $O(nm^2 + |E|)$, если сеть содержит только псевдодревесные квазиблоки, и за время $O(n^2m)$, если число возможных мест открытия предприятий в каждом непсевдодревесном квазиблоке не превышает $\log n$ [7].

Примером $C$-матрицы является матрица с компонентами $g_{ij} = c_i + \widetilde{c}_{ij}$, где $c_i$ — произвольные веса вершин и $\widetilde{c}_{ij}$ — расстояния между вершинами $i$ и $j$.

В настоящей работе рассматривается класс задач размещения на внешнепланарном графе. По определению *внешнепланарный граф* (outerplanar graph) есть планарный граф, который имеет укладку на плоскости такую, что все его вершины принадлежат одной грани. Внешнепланарные графы являются подграфами параллельно-последовательных графов. Максимальные внешнепланарные графы — это графы, к которым нельзя добавить ребро без потери внешнепланарности. Это в точности 2-деревья [8].

В работе [9] построено полиномиальное по времени преобразование задачи размещения с матрицей, связной относительно внешнепланарных графов, к задаче размещения с матрицей, связной относительно циклов, что, как следствие, ведет к построению алгоритма с временной сложностью $O(n^3m)$ для решения этих задач. В статье [6] задача размещения на частичных 2-деревьях (включающих последовательно-параллельные сети) решается за время $O(nm^3)$ посредством аналогичной техники, используемой в алгоритмах для задачи размещения на древовидных сетях [4; 7].

Несколько ранее для задачи размещения на последовательно-параллельной сети Hassin и Tamir [10] представили алгоритм с временной сложностью $O(nm^3)$.

Таким образом, для известных алгоритмов решения задачи размещения с линейной (относительно числа потребителей $n$) временной сложностью имеется существенный разрыв между временами $O(nm)$ и $O(nm^3)$ решения задачи размещения на деревьях и 2-деревьях соответственно.

Ниже мы представим алгоритм решения задачи размещения на внешнепланарных графах, где во временной сложности функция $m^3$ заменяется на $m^{5/2}$.

## 2. Основной результат и предварительные рассмотрения

Основным результатом статьи является

**Теорема.** *Оптимальное решение задачи размещения на внешнепланарном графе может быть найдено за время $O(nm^{2.5})$.*

Для доказательства теоремы представим несколько рекуррентных соотношений, позволяющих построить алгоритм с анонсированной временной сложностью.

Заметим, что внешнепланарная задача размещения может быть сведена к задаче размещения на максимальном внешнепланарном графе добавлением не более $(n-3)$ новых ребер с достаточно большим весом. Максимальный внешнепланарный граф имеет $(2n-3)$ ребер.

Ребро внешнепланарного графа назовем *внешним*, если оно смежно ровно одному треугольнику, и *внутренним* — в противном случае. Ниже нам будет удобно использовать альтернативное определение максимального внешнепланарного графа, а именно *бинарного* 2-*дерева*. Неориентированный граф $G$ называем 2-*деревом*, если $G$ — треугольник либо он может быть достроен из некоторого своего треугольника посредством подсоединения к концам одного из его ребер $(p,q)$ двух новых ребер $(p,s)$, $(s,q)$ с новой вершиной $s$. *Бинарное* 2-*дерево* есть 2-дерево, каждое ребро которого смежно не более чем с двумя треугольниками.

Выберем в качестве *корневого ребра* данного графа внешнее ребро $e_1 \in E$.

Пусть $V_{pq} \subset V$ означает множество вершин-потомков ребра $(p,q)$ (исключая концевые вершины этого ребра). Для каждого $v \in V_{pq}$ ребро $(p,q)$ содержится в минимальной последовательности реберно-сцепленных треугольников, соединяющих вершину $v$ и корневое ребро $e_1 \in E$.

Положим $N_{pq} = |V_{pq}|$, $V^0_{pq} = V_{pq} \cup \{p\} \cup \{q\}$, $M_{pq} = V_{pq} \cap M$. Назначим номера $\{1, \dots, n\}$ вершинам графа $G$ в противочасовом порядке на внешней грани так, что выбранное ребро $e_1$ оказалось помечено как $(1, n)$. При этом $p < q$ для всех ребер $(p, q)$. Заметим, что множество $V^0_{pq}$ совпадает с целочисленным сегментом $[p, q]$.

Для каждого внутреннего ребра $(p, q)$ (и внешнего ребра $e_1$) через $Son(p, q)$ обозначим единственную вершину $s \in [p, q]$ такую, что имеются ребра $(p, s)$ и $(s, q)$. Для каждой вершины $s = Son(p, q)$ через $L(s)$ и $R(s)$ обозначим вершины $p$ и $q$ соответственно.

Рассмотрим семейство следующих задач размещения на подграфах исходного бинарного 2-дерева:

$$\big\{G_{pq}; i, j \,\big|\, \pi_p = i,\ \pi_q = j\big\}, \quad 1 \le p < q \le n, \quad i, j \in M, \tag{2.1}$$

не принимая во внимание стоимости $f_i,\ f_j,\ g_{ip},\ g_{jq}$. Здесь $G_{pq}$ есть подграф, индуцированный множеством вершин, определенных сегментом $[p, q]$. Заметим, что подграф $G_{pq}$ может не быть бинарным 2-деревом, но если $(p, q) \in E$, то $G_{pq}$ является бинарным 2-деревом.

Пусть $\{F_{pq}(i, j)\}$ — оптимумы соответствующих задач (2.1). Тогда, используя обозначение

$$f_k^{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \in \{i,\, j\}, \\ f_k & \text{иначе}, \end{cases}$$

для всяких $i, j, k \in M$ получаем, что оптимум исходной задачи

$$F^* = \min_{i \in M} \big\{ f_i + g_{i1} + \min_{j \in M} \{ f_j^{ii} + g_{jn} + F_{1,n}(i, j) \} \big\}.$$

**Лемма 1.** *Для всякой вершины $s \in V$ (для $p = L(s),\ q = R(s)$) и пары $(i, j) \in M$ верны следующие рекуррентные соотношения:*

$$F_{pq}(i, j) = \min\big\{ D_{pq}(i, j), \min_{k \in \{i,\, j\}} \{ F_{ps}(i, k) + g_{ks} + F_{sq}(k, j) \} \big\},$$

*где*

$$D_{pq}(i, j) = \min_{k \in M_{pq}} \big\{ F_{ps}(i, k) + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k, j) \big\}. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Правильность леммы 1 следует из существования центрально-связного оптимального решения согласно сформулированному выше на с. 76 утверждению и представлению графа $G_{pq}$ с $(p, q) \in E$ в виде двух подграфов $G_{ps}$ и $G_{sq}$, связанных ребром $(p, q)$ и вершиной $s = Son(p, q)$. □

Посредством этих соотношений мы можем решить внешнепланарную задачу размещения за такое же время $O(nm^3)$, что и в статьях [6; 10]. Временная сложность алгоритма зависит главным образом от вычисления величин $D_{pq}(i, j)$. Ниже мы представим более эффективный способ вычисления этих величин.

## 3. О некотором свойстве бинарных 2-деревьев

Далее нам понадобится вспомогательное свойство бинарных 2-деревьев, которое для данного целого $r$, $0 \le r < n/2$, устанавливает верхнюю оценку мощности множества

$$V(n, r) = \big\{ s \in V \,\big|\, N_{L(s)s} \ge r,\ N_{sR(s)} \ge r \big\}.$$

**Лемма 2.** *Справедливы следующие неравенства*:

$$|V(n, r)| \le \frac{n-1}{r+1} - 1, \quad 0 \le r < n/2. \tag{3.1}$$

Доказательство. Ясно, что лемма верна для минимального 2-дерева с $n = 3$. Пусть она выполняется для бинарных деревьев с числом вершин, меньшим $n$. В бинарном $n$-вершинном 2-дереве $G = G(n)$ выберем бинарные 2-деревья $G(n_1) = G_{1s}$ и $G(n_2) = G_{sn}$, индуцированные множествами вершин $V_{1s}^0$ и $V_{sn}^0$ соответственно, где $s$ означает $Son(1, n)$. Положив $n_1 = |V_{1s}^0|$, $n_2 = |V_{sn}^0|$, мы имеем равенство $n_1 + n_2 - 1 = n$. Из этого соотношения и неравенств (3.1) для графов $G(n_1)$ и $G(n_2)$ следует, что

$$|V(n,r)| \le |V(n_1,r)| + |V(n_2,r)| + 1$$

$$\le \Big(\frac{n_1-1}{r+1} - 1\Big) + \Big(\frac{n_2-1}{r+1} - 1\Big) + 1 = \frac{n_1+n_2-2}{r+1} - 1 = \frac{n-1}{r+1} - 1. \qquad \square$$

## 4. Вычисление величины $D_{pq}(i, j)$

### 4.1. Случай $Son(p, q) \in V(n, r)$

**Лемма 3.** *Семейство величин*

$$\big\{D_{pq}(i,j) \,\big|\, Son(p,q) \in V(n,r),\ (p,q) \in E,\ i,j \in M\big\}$$

*может быть вычислено за время* $O(nm^3/r)$.

Доказательство. Для фиксированных $i, j \in M$ и $(p, q) \in E$ величина $D_{pq}(i, j)$, определенная равенством (2.2), вычисляется за время $O(m)$. По лемме 2 число ребер $(p, q)$ с $Son(p, q) \in V(n, r)$ не превышает $n/r$. С учетом всех пар $i, j$ вершин (возможных мест предприятий) мы получаем требуемую оценку временной сложности. $\square$

### 4.2. Случай $Son(p, q) \notin V(n, r)$

**Лемма 4.** *Семейство величин*

$$\big\{D_{pq}(i,j) \,\big|\, Son(p,q) \notin V(n,r),\ (p,q) \in E,\ i,j \in M\big\}$$

*может быть найдено за время* $O(nm^2r + nmr^3)$.

Доказательство. Зафиксируем $s \in V(n, r)$ и положим $p = L(s)$, $q = R(s)$. По утверждению леммы либо $N_{ps} < r$, либо $N_{sq} < r$. Пусть верно первое неравенство.

Для произвольных $i, j \in M$ представим выражение (2.2) в следующей форме:

$$D_{pq}(i,j) = \min\big\{D_{pq}^L(i,j),\ D_{pq}^R(i,j)\big\},$$

где

$$D_{pq}^L(i,j) = \min_{p<k<s}\big\{F_{ps}(i,k) + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\big\},$$

$$D_{pq}^R(i,j) = \min_{s\le k<q}\big\{F_{ps}(i,k) + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\big\}. \tag{4.1}$$

По лемме 1 семейство величин

$$\big\{D_{pq}^L(i,j) \,\big|\, (p,q) \in E,\ i,j \in M\big\}$$

можно вычислить за время $O(nm^2r)$. Теперь нам нужен подходящий способ отыскания семейства величин

$$\big\{D_{pq}^R(i,j) \,\big|\, (p,q) \in E,\ i,j \in M\big\} \tag{4.2}$$

в случае $N_{ps} < r$ (что означает $s \le p + r$).

Чтобы закончить доказательство леммы 4, требуется доказать следующую лемму.

**Лемма 5.** *Семейство величин* (4.2) *может быть вычислено за время* $O(nmr^3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы основано на следующих двух фактах.

**Факт 1.** *Для всякого ребра* $(p,q) \in E$ *и пары* $i,j \in M$ *верны следующие рекуррентные соотношения*:

$$D^R_{pq}(i,j) = \min_{p<v<s}\bigl\{\mathcal{F}'_{vs}(i) + \mathcal{F}''_{vs}(j)\bigr\}, \tag{4.3}$$

*где* $s = Son(p,q)$ *и*

$$\mathcal{F}'_{vs}(i) = \min_{p\le k'<s}\bigl\{F_{pv}(i,k') + f^{ii}_{k'} + g_{k'v}\bigr\}, \tag{4.4}$$

$$\mathcal{F}''_{vs}(j) = \min_{s\le k<q}\bigl\{g_{k,v+1} + F_{v+1,s}(k,k) + f_k + g_{ks} + F_{sq}(k,j)\bigr\}. \tag{4.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданной вершины $s \in \{p,q\}$ обозначим через $F^{(s)}_{pq}(i,j)$ оптимум целевой функции задачи размещения на внешнепланарном графе, индуцированном вершинным множеством $\{p,p+1,\ldots,q\}$ при условии, что $\pi_p = i,\ \pi_q = j$ без учета стоимостей $f_{\pi_s}$ и $g_{\pi_s s}$. Тогда величину $F_{ps}(i,k)$ в (4.1) можно представить в виде

$$F_{ps}(i,k) = \min_{p<v<s}\bigl\{\min_{p<k'\le v} F^{(p)}_{pv}(i,k') + F^{(s)}_{v+1,s}(k,k)\bigr\}.$$

Следовательно, (4.1) может быть записано в виде

$$D^R_{pq}(i,j) = \min_{s\le k<q}\bigl\{\min_{p<v<s}\{\min_{p<k'\le v} F^{(p)}_{pv}(i,k') + F^{(s)}_{v+1,s}(k,k)\} + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\bigr\}.$$

Изменяя порядок минимизации по $k$ и $v$, получим следующее выражение:

$$D^R_{pq}(i,j) = \min_{p<v<s}\bigl\{\min_{p<k'\le v} F^{(p)}_{pv}(i,k') + \min_{s\le k<q}\{F^{(s)}_{v+1,s}(k,k) + (f_k + g_{ks}) + F_{sq}(k,j)\}\bigr\}.$$

Наконец, поскольку

$$F^{(p)}_{pv}(i,k') = F_{pv}(i,k') + f^{ii}_{k'} + g_{k'v}, \quad F^{(s)}_{v+1,s}(k,k) = g_{k,v+1} + F_{v+1,s}(k,k),$$

выражение $D^R_{pq}(i,j)$ можно записать в виде (4.3)–(4.5). □

Заметим, что выражение (4.4) не зависит от вершины-предприятия $j$, а выражение (4.5) — от вершины-предприятия $i$. Каждая такая вершина может принимать $m$ значений. Вместо этих соотношений получаем зависимость от $v$ и от $k'$ соответственно. Число различных значений $v$ (и $k'$) не превышает $r$.

**Факт 2.** *Оба семейства значений*

$$\bigl\{\mathcal{F}'_{vs}(i)\,\big|\, L(s) < v < s,\ s \notin V(n,r),\ i \in M\bigr\} \tag{4.6}$$

*и*

$$\bigl\{\mathcal{F}''_{vs}(j)\,\big|\, L(s) < v < s,\ s \notin V(n,r),\ j \in M\bigr\} \tag{4.7}$$

*можно вычислить за время* $O(nmr^3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим семейства (4.6) и (4.7) по отдельности.

Положим $p = L(s)$. Пусть $]a,b[$ означает целочисленный сегмент без концевых точек $a$ и $b$. Семейство (4.6) обрабатывается за время $O(mnr^2)$, если уже известны величины $F_{vs}(i,k')$ для всяких $v,k' \in ]p,s[$. Часть этих величин уже была найдена, а именно для $v,k' \in ]p,s'[$, где $s' = Son(p,s)$. Остальные величины $F_{pv}(i,k')$ для $v,k' \in ]s',s[$ можно вычислить (используя уже имеющиеся значения $F_{s'v}(i',k')$ для $v,i',k' \in ]s',s[$) посредством следующих рекуррентных соотношений:

$$F_{pv}(i,k') = \min_{p<i'<v}\bigl\{F_{ps'}(i,i') + f^{ik'}_{i'} + g_{i's'} + F_{s'v}(i',k')\bigr\}.$$

Это может быть выполнено за время $O(nmr^3)$.

Вычисление (4.7) выполняется за время $O(mnr^2)$, если уже имеются необходимые значения величин $F_{v+1,s}(k,k)$ для всех $v \in ]p,s[$ and $k \in ]s,q[$. Они могут быть найдены за время $O(nmr)$ с помощью рекуррентных соотношений

$$F_{v,s}(k,k) = g_{k,v} + F_{v,R(v)}(k,k) + F_{R(v),s}(k,k),$$

где $(v,R(v)) \in E,\ v \in ]p,s[,\ F_{s,s}(k,k) = 0$.

Следовательно, все значения величин (4.5) могут быть найдены за время $O(nmr^2)$. Общая обработка обоих семейств (4.6) и (4.7) выполняется за время $O(nmr^3)$. $\square$

Таким образом, лемма 5 и предшествующая ей лемма 4 доказаны.

## 5. Доказательство основного утверждения статьи

Из лемм 3 и 4 следует, что можно найти величины $D_{pq}(i,j)$ для всех $(p,q) \in E,\ i,j \in M$ за время $O(nm\psi_{mr})$, где

$$\psi_{mr} = m^2/r + mr + r^3.$$

Положив параметр $r = \lfloor \sqrt{m} \rfloor$, мы получаем верхнюю оценку $O(m^{1.5})$, близкую к минимуму величины $\psi_{mr}$. Это позволяет нам оценить временную сложность алгоритма решения внешнепланарной задачи размещения величиной $O(nm^{2.5})$.

Тем самым доказательство теоремы — основного результата статьи — закончено.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Discrete location theory / eds. P. B. Mirchandani, R. L. Francis. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. N.Y.; Chichester; Brisbane; Toronto; Singapour: Wiley and Sons Inc., 1990. 576 p. ISBN: 978-0-471-89233-5 .
2. **Трубин В. А.** Эффективный алгоритм решения задачи размещения на сети в форме дерева // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, № 3. С. 547–550.
3. **Kolen A.** Solving covering problems and the uncapacitated plant location on the trees // Eur. J. Oper. Res. 1983. Vol. 12, no. 3. P. 266–278.
4. **Гимади Э. Х.** Эффективный алгоритм размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети // Управляемые системы: сб. ст. / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1983. Вып. 23. С. 12–23.
5. **Billionet A., Costa M.-C.** Solving the uncapacitated plant location problem on trees // Discrete Appl. Math. 1994. Vol. 49, no. 1–3. P. 51–59.
6. **Агеев А. А.** Полиномиальный алгоритм решения задачи размещения на последовательно-параллельной сети // Управляемые системы: сб. ст. / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1990. Вып. 30. С. 3–16.
7. **Гимади Э. Х.** Задача размещения на сети с центрально-связными областями обслуживания // Управляемые системы: сб. ст. / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1984. Вып. 25. С. 38–47.
8. **Valdes J., Tarjan R., Lawler E.** The recognition of series parallel digraphs // SIAM J. Comput. 1982. Vol. 11, no. 2. P. 298–313.
9. **Агеев А. А.** Графы, матрицы и простейшая задача размещения // Управляемые системы: сб. ст. / ИМ СО РАН. Новосибирск, 1989. Вып. 29. С. 3–11.
10. **Hassin R., Tamir A.** Efficient algorithm for optimization and selection on series-parallel graphs // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1986. Vol. 7, № 3. P. 379–389.

Поступила 16.05.2017

Гимади Эдуард Хайрутдинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
e-mail: gimadi@math.nsc.ru

**REFERENCES**


1. P. B. Mirchandani, R. L. Francis (eds). *Discrete location theory.* Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, N.Y., Chichester, Brisbane, Toronto, Singapour: Wiley and Sons Inc., 1990, 576 p. ISBN: 978-0-471-89233-5 .
2. Trubin V.A. An effective algorithm for solving the distribution problem in a network in the form of a tree. *Dokl. AN SSSR (*Soviet Math. Dokl.*)*, 1976, vol. 231, no. 3, pp. 547–550 (in Russian).
3. Kolen A. Solving covering problems and the uncapacitated plant location on the trees. *Eur. J. Oper. Res.*, 1983, vol. 12, no. 3, pp. 266–278.
4. Gimadi E. Kh. Effektivnyi algoritm razmeshcheniya s oblastyami obsluzhivaniya, svyaznymi otnositel'no atsiklicheskoi seti. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statei Instituta matematiki SO RAN*, Novosibirsk, 1983, no. 23, pp. 12–23 (in Russian).
5. Billionet A., Costa M.-C. Solving the uncapacitated plant location problem on trees. *Discrete Appl. Math.*, 1994, vol. 49, no. 1–3, pp. 51–59.
6. Ageev A.A. Polinomial'nyi algoritm resheniya zadachi razmeshcheniya na posledovatel'no-parallel'noi seti. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statei Instituta matematiki SO RAN*, Novosibirsk, 1990, no. 30, pp. 3–16 (in Russian).
7. Gimadi E. Kh. Zadacha razmeshcheniya na seti s tsentral'no-svyaznymi oblastyami obsluzhivaniya. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statei Instituta matematiki SO RAN*, Novosibirsk, 1984, no. 25, pp. 38–47 (in Russian).
8. Valdes J., Tarjan R., Lawler E. The recognition of series parallel digraphs. *SIAM J. Comput.*, 1982, vol. 11, no. 2, pp. 298–313.
9. Ageev A.A. Grafy, matritsy i prosteishaya zadacha razmeshcheniya. *Upravlyaemye sistemy: sbornik statei Instituta matematiki SO RAN*, Novosibirsk, 1989, no. 29, pp. 3–11 (in Russian).
10. Hassin R., Tamir A. Efficient algorithm for optimization and selection on series-parallel graphs. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 1986, vol. 7, no. 3. pp. 379–389.


The paper was received by the Editorial Office on May 16, 2017.

*Eduard Khairutdinovich Gimadi*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia,
e-mail: gimadi@math.nsc.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.977

# УПРАВЛЕНИЕ С ПОВОДЫРЕМ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИИ ПРИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ПОМЕХУ[1]

**М. И. Гомоюнов, Д. А. Серков**

Рассматривается задача об управлении движением динамической системы в условиях помех на конечном промежутке времени. Значения управления и помехи стеснены компактными геометрическими ограничениями. Условие равновесия в маленькой игре не предполагается выполненным. Целью управления является минимизация заданного терминального показателя качества. В рамках теоретико-игрового подхода ставится задача об оптимизации гарантированного результата управления. Для случая, когда реализации помехи принадлежат некоторому априори не известному компактному подмножеству пространства $L_1$ (функций, суммируемых по Лебегу с нормой), дана новая дискретная по времени процедура управления с поводырем, разрешающая эту задачу. Близость движений исходной системы и поводыря обеспечивается при помощи динамического восстановления помехи. Качество процесса управления достигается за счет использования в поводыре оптимальной контрстратегии. Указаны условия на уравнения движения, при которых эта процедура обеспечивает достижение оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий. Схема обоснования этого факта позволяет оценить отклонение реализующегося значения показателя качества от величины указанного оптимального результата в зависимости от параметра дискретизации. Приводятся иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: оптимизация гарантии, функциональные ограничения, квазистратегии, управление с поводырем.

**M. I. Gomoyunov, D. A. Serkov. Control with a guide in the guarantee optimization problem under functional constraints on the disturbance.**

A motion control problem for a dynamic system under disturbances is considered on a finite time interval. There are compact geometric constraints on the values of the control and disturbance. The equilibrium condition in the small game is not assumed. The aim of the control is to minimize a given terminal quality index. The guaranteed result optimization problem is posed in the context of the game-theoretical approach. In the case when realizations of the disturbance belong to some a priori unknown compact subset of $L_1$ (the space of functions that are Lebesgue summable with the norm), we propose a new discrete-time control procedure with a guide. The proximity between the motions of the system and the guide is provided by the dynamic reconstruction of the disturbance. The quality of the control process is achieved by using an optimal counter-strategy in the guide. Conditions on the equations of motion under which this procedure ensures an optimal guaranteed result in the class of quasi-strategies are given. The scheme of the proof makes it possible to estimate the deviation of the realized value of the quality index from the value of the optimal result depending on the discretization parameter. Illustrative examples are given.

Keywords: guarantee optimization, functional constraints, quasi-strategies, control with a guide.

**MSC:** 49N35, 49N70

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-82-94

## Введение

В статье рассматривается задача об управлении движением динамической системы в условиях помех на конечном промежутке времени. Значения управления и помехи стеснены геометрическими ограничениями. Управление нацелено на минимизацию заданного терминального показателя качества. В рамках теоретико-игрового подхода [1–4] изучается задача об оптимизации гарантированного результата управления.

Известно [2; 3], что величина $\Gamma^0$ оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий (см., например, [2, с. 24]) является наилучшей среди достаточно широкого класса

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект № 15-16-1-13).

физически реализуемых законов управления. В общем случае, когда не выполнено условие равновесия в маленькой игре (см., например, [3, с. 79]), для достижения этого результата при помощи позиционных способов управления необходимо применять позиционные контрстратегии (см., например, [1, § 82, 83; 3, с. 83]), что на практике требует знания текущих значений помехи, зачастую недоступных для непосредственного измерения. Тем не менее, как показано в [5; 6], результат $\Gamma^0$ может быть гарантирован без использования такой информации (в классе стратегий с памятью истории движения [1, гл. XVI; 7]) в случае, когда помеха стеснена дополнительными функциональными ограничениями. А именно, предполагается, что все возможные реализации помехи принадлежат некоторому компактному в пространстве $L_1$ множеству, причем само это множество может быть неизвестно. Задачи с ограничениями такого сорта возникают в случаях, когда возможные реализации помехи как функции времени, обладают некоторыми дополнительными свойствами, например являются кусочно-постоянными, с ограниченным, но неизвестным количеством точек разрыва, или же равностепенно непрерывными, с неизвестным общим модулем непрерывности.

В работе предложена новая дискретная по времени процедура управления с поводырем, гарантирующая при рассматриваемых функциональных ограничениях на помеху и дополнительном условии на уравнения движения результат $\Gamma^0$ (в классе квазистрегий) и не использующая при этом информацию о текущих значениях помехи. Близость движений исходной системы и поводыря обеспечивается при помощи конструкций динамического восстановления помехи, восходящих к [7;8]. Качество процесса управления достигается за счет использования в поводыре оптимальной контрстратегии. В отличие от [5; 6], где утверждения носят преимущественно качественный характер, предложена новая схема обоснования, которая имеет целью дальнейшие численные приложения и позволяет проследить оценку отклонения реализующегося значения показателя качества от величины $\Gamma^0$ в зависимости от параметра дискретизации.

## 1. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v(t) \in Q \subset \mathbb{R}^q. \tag{1.1}$$

Здесь $t$ — время, $x$ — фазовый вектор, $u$ — значение управления, $v$ — значение помехи; $t_0$ и $\vartheta$ — начальный и конечный моменты времени; $n$, $p$, $q \in \mathbb{N}$; $P$ и $Q$ — известные компактные множества, определяющие геометрические ограничения на значения управления и помехи. Предполагается, что функция $f : [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$ непрерывна; для любого ограниченного множества $D \subset \mathbb{R}^n$ существует такое число $L > 0$, что выполняется неравенство

$$\|f(t, x, u, v) - f(t, x', u, v)\| \leqslant L\|x - x'\|, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x, x' \in D, \quad u \in P, \quad v \in Q;$$

существует число $a > 0$, для которого имеет место оценка

$$\|f(t, x, u, v)\| \leqslant a(1 + \|x\|), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Здесь и далее символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора.

Полагая, что отрезок $[t_0, \vartheta]$ снабжен мерой Лебега, допустимыми реализациями $u(\cdot)$ управления и $v(\cdot)$ помехи считаем измеримые функции $u : [t_0, \vartheta] \to P$ и $v : [t_0, \vartheta] \to Q$. Множества всех таких реализаций обозначим через $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ соответственно. Позицией системы (1.1) называем пару $(t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. В силу сделанных предположений относительно функции $f$ для любой начальной позиции $(t_0, x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, и любых допустимых реализаций $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ существует единственное движение $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.1) — абсолютно непрерывная функция $x : [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет начальному условию $x(t_0) = x_0$ и при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ вместе с реализациями $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — уравнению (1.1).

В пространстве позиций $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ системы (1.1) выделим (см., например, [3, с. 40]) такое компактное множество $G$, что, каковы бы ни были начальная позиция $(t_0, x_0) \in G$ и реализации $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, для движения $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ системы (1.1) выполняются включения $(t, x(t)) \in G$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Пусть качество движения $x(\cdot)$ системы (1.1) оценивается терминальным показателем

$$\gamma = \sigma(x(\vartheta)), \tag{1.2}$$

где функция $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывна. Сторона, формирующая управление, стремится минимизировать значение показателя $\gamma$. При этом согласно принципу гарантированного результата [1–4] следует учитывать, что действия помехи неизвестны и, в частности, могут быть нацелены на максимизацию $\gamma$.

Исходя из [2, с. 24], квазистратегией $\alpha(\cdot)$ назовем всякое отображение $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, обладающее следующим свойством неупреждаемости: если для момента времени $t \in [t_0, \vartheta]$ и функций $v(\cdot), v'(\cdot) \in \mathcal{V}$ при всех $\tau \in [t_0, t]$ справедливо равенство $v(\tau) = v'(\tau)$, то и для соответствующих образов $u(\cdot) = \alpha(v(\cdot))$ и $u'(\cdot) = \alpha(v'(\cdot))$ при всех $\tau \in [t_0, t]$ будет выполняться равенство $u(\tau) = u'(\tau)$. Для начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$ определим величину оптимального гарантированного результата управления в классе квазистратегий

$$\Gamma^0(t_0, x_0) = \inf_{\alpha(\cdot)} \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}} \sigma\Big(x\big(\vartheta; t_0, x_0, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot)\big)\Big). \tag{1.3}$$

Известно (см. в этой связи [1, § 82, 83], а также [3, § 29, теорема 29.3]), что величина $\Gamma^0(t_0, x_0)$ может быть гарантирована при формировании управления с использованием контрстратегий [1, § 82, 83; 3, с. 83]. Другими словами, существует оптимальная контрстратегия

$$U^0(t, x, v, \varepsilon) \in P, \quad (t, x) \in G, \quad v \in Q, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.4}$$

которая при любых $t$, $x$ и $\varepsilon$ является функцией, измеримой по Борелю по $v$ и для которой имеет место следующее утверждение. Для любого числа $\zeta > 0$ существуют такие число $\varepsilon^0 > 0$ и функция $\delta^0(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$, что, каковы бы ни были начальная позиция $(t_0, x_0) \in G$, число $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ и разбиение

$$\Delta = \big\{\tau_j\colon \tau_1 = t_0,\, \tau_j < \tau_{j+1},\, j = \overline{1, k},\, \tau_{k+1} = \vartheta\big\} \tag{1.5}$$

отрезка времени $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $d(\Delta) = \max_{j=\overline{1,k}}(\tau_{j+1} - \tau_j) \leqslant \delta^0(\varepsilon)$, закон управления $\{U^0(\cdot), \varepsilon, \Delta\}$, формирующий реализацию $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ на базе разбиения $\Delta$ согласно правилу

$$u(t) = U^0\big(\tau_j, x(\tau_j), v(t), \varepsilon\big), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, k},$$

для любой реализации помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ обеспечивает для значения $\gamma$ показателя качества (1.2) выполнение неравенства

$$\gamma \leqslant \Gamma^0(t_0, x_0) + \zeta. \tag{1.6}$$

Использование контрстратегий на практике зачастую затруднительно в силу недоступности непосредственного измерения текущего значения помехи $v(t)$. С другой стороны, в общем случае, когда не предполагается выполненным условие равновесия в маленькой игре (см., например, [3, с. 79]), величина $\Gamma^0(t_0, x_0)$ не может быть гарантирована при формировании управления без учета информации о значении $v(t)$ (см. в этой связи [3, § 12]). Однако, как показано в [5; 6], величина $\Gamma^0(t_0, x_0)$ может быть гарантирована без использования такой информации в случае, когда помеха удовлетворяет следующему функциональному ограничению.

Обозначим через $L_1 = L_1([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^q)$ пространство (классов эквивалентности) суммируемых функций из $[t_0, \vartheta]$ в $\mathbb{R}^q$ со стандартной нормой (см., например, [10, п. 3.5]). Будем предполагать, что существует такое компактное в $L_1$ множество $V$, что для всех допустимых реализаций $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, которые могут случиться в системе (1.1), выполняется включение $v(\cdot) \in V$. При этом будем считать, что само множество $V$ управляющей стороне неизвестно (в отличие от множества $Q$, определяющего геометрические ограничения на помеху). Таким образом, при формировании управления следует исходить из того факта, что в системе (1.1) может случиться любая допустимая реализация помехи $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, удовлетворяющая включению $v(\cdot) \in V$, где $V \subset L_1$ — неизвестный компакт.

Пусть задана начальная позиция $(t_0, x_0) \in G$, зафиксированы число $\varepsilon > 0$ и разбиение $\Delta$ (1.5). Рассмотрим процедуру управления системой (1.1) с использованием вспомогательного движения $y(\cdot)$ системы (1.1) в качестве поводыря (см., например, [1, § 57]). При этом будем считать, что это движение выходит из той же самой начальной позиции $(t_0, x_0)$, а через $\overline{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $\overline{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$ будем обозначать определяющие это движение реализации управления и помехи: $y(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot))$. Отметим, что для любого такого движения $y(\cdot)$ будут выполнены включения $(t, y(t)) \in G$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Опишем пошаговую схему формирования кусочно-постоянных реализаций

$$u(t) = u_j \in P, \quad \overline{u}(t) = \overline{u}_j \in P, \quad \overline{v}(t) = \overline{v}_j \in Q, \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, k}. \tag{1.7}$$

Выберем произвольным образом вектор $u^* \in P$ и положим $u_1 = u^*$. Пусть теперь $j = \overline{1, k}$ и к моменту времени $\tau_{j+1}$ известны значения $x(\tau_j)$ и $x(\tau_{j+1})$ фазового вектора системы (1.1), назначенное на промежутке $[\tau_j, \tau_{j+1})$ управление $u_j$ и состояние поводыря $y(\tau_j)$. Тогда, "восстанавливая" помехи, действовавшие в системе (1.1) на промежутке $[\tau_j, \tau_{j+1})$, выбираем вектор $\overline{v}_j$ из условия

$$\overline{v}_j \in \operatorname*{argmin}_{v \in Q} \left\| \frac{x(\tau_{j+1}) - x(\tau_j)}{\tau_{j+1} - \tau_j} - f(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1}), u_j, v) \right\|, \tag{1.8}$$

затем, используя оптимальную контрстратегию (1.4), определяем

$$\overline{u}_j = U^0\big(\tau_j, y(\tau_j), \overline{v}_j, \varepsilon\big), \tag{1.9}$$

и далее, если $j < k$, полагаем

$$u_{j+1} = \overline{u}_j. \tag{1.10}$$

Работоспособность данной процедуры управления с поводырем будет обоснована при условии, что выполнено

**Предположение 1.** *Каковы бы ни были позиция $(t, x) \in G$ и векторы $v, v' \in Q$, если равенство $f(t, x, u, v) = f(t, x, u, v')$ выполняется для некоторого вектора $u = u' \in P$, то это равенство выполняется и для всех векторов $u \in P$.*

Предположение 1 в другой терминологии использовалось в работах [5; 9]. Отметим, что в случае, если это предположение не выполнено, вместо (1.8) следует использовать более сложную схему динамического восстановления помех [6]. Подчеркнем, что предположение 1 заведомо выполняется для любой функции $f$, которая при каждых фиксированных $(t, x) \in G$ и $u \in P$ инъективна по $v \in Q$.

Основным результатом работы является следующая

**Теорема.** *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда для любых числа $\zeta > 0$ и компактного в $L_1$ множества $V \subset \mathcal{V}$ можно указать такие число $\varepsilon^* > 0$ и функцию $\delta^*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, что, каковы бы ни были начальная позиция $(t_0, x_0) \in G$, число $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$ и разбиение $\Delta$* (1.5) *с постоянным шагом и диаметром $d(\Delta) \leqslant \delta^*(\varepsilon)$, процедура управления с поводырем* (1.7)–(1.10) *гарантирует выполнение неравенства* (1.6) *для любой реализации помехи $v(\cdot) \in V$.*

Принимая во внимание тот факт, что движение поводыря $y(\cdot)$ формируется при действии оптимальной контрстратегии $U^0(\cdot)$ (см. (1.4), (1.9)), и учитывая непрерывность функции $\sigma$, определяющей показатель качества (1.2), для доказательства теоремы достаточно установить справедливость следующей леммы, представляющей также и самостоятельный интерес.

**Лемма.** *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда для любых числа* $\xi > 0$ *и компактного в* $L_1$ *множества* $V \subset \mathcal{V}$ *можно указать такое число* $\delta_* > 0$, *что, каковы бы ни были начальная позиция* $(t_0, x_0) \in G$ *и разбиение* $\Delta$ (1.5) *с постоянным шагом и диаметром* $d(\Delta) \leqslant \delta_*$, *справедливо следующее утверждение. Пусть движение* $x(\cdot)$ *системы* (1.1) *порождено из позиции* $(t_0, x_0)$ *при действии кусочно-постоянной реализации управления* $u(\cdot)$ *вида* (1.7) *и произвольной реализации помехи* $v(\cdot) \in V$. *Пусть* $y(\cdot)$ — *движение системы* (1.1), *порожденное из позиции* $(t_0, x_0)$ *при действии кусочно-постоянных реализаций* $\overline{u}(\cdot)$ *и* $\overline{v}(\cdot)$ *вида* (1.7), *которые вместе с* $x(\cdot)$ *и* $u(\cdot)$ *удовлетворяют соотношениям* (1.8), (1.10). *Тогда выполняется неравенство*

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \xi, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Доказательство леммы составляет основное содержание статьи и приводится в следующем разделе. Отметим, что для рассматриваемой задачи оптимизации гарантии с функциональными ограничениями на помеху это утверждение представляет собой аналог оценок [1, § 14-15, 82], играющих ключевую роль при обосновании свойств стратегий экстремального сдвига.

З а м е ч а н и я: 1. Несмотря на то что процедура управления с поводырем (1.7)–(1.10) не зависит от множества $V$, определяющего функциональные ограничения, в согласии с теоремой для обеспечения неравенства (1.6) при заданном $\zeta$ один из основных параметров этой процедуры, диаметр разбиения $\Delta$, требуется выбирать уже в зависимости от множества $V$.

2. В случае произвольного (с переменным шагом) разбиения $\Delta$ (1.5) следует, например, по схеме из [9, замечание 4.1] перейти к прореженному, “почти равномерному” разбиению $\Delta' \subset \Delta$ и реализовывать процедуру (1.7)–(1.10) на базе разбиения $\Delta'$.

3. Результат, аналогичный теореме, может быть получен для более широкого класса показателей качества, которые оценивают все движение $x(\cdot)$ системы (1.1), а не только конечное состояние $x(\vartheta)$. При этом в случае позиционного показателя качества (см., например, [4, § 4]) процедура управления (1.7)–(1.10) остается такой же, а в общем случае вместо позиционных контрстратегий (1.4) следует использовать контрстратегии с памятью истории движения (см., например, [1, с. 430]).

## 2. Доказательство леммы

Прежде чем переходить непосредственно к доказательству леммы, введем необходимые обозначения и проведем предварительные построения.

С учетом предположений относительно свойств функции $f$ и компактности множеств $G$, $P$ и $Q$ выберем числа $\varkappa > 0$ и $L > 0$ так, чтобы выполнялись оценки

$$\|f(t, x, u, v)\| \leqslant \varkappa, \quad \|f(t, x, u, v) - f(t, x', u, v)\| \leqslant L\|x - x'\|,$$
$$(t, x), (t, x') \in G, \quad u \in P, \quad v \in Q,$$

и обозначим

$$\begin{aligned} \mu_t(\delta) &= \max\Big\{\|f(t, x, u, v) - f(t', x, u, v)\| : \ (t, x), (t', x') \in G, \ |t' - t| \leqslant \delta, \ u \in P, \ v \in Q\Big\}, \\ \mu_v(\delta) &= \max\Big\{\|f(t, x, u, v) - f(t, x, u, v')\| : \ (t, x) \in G, \ u \in P, \ v, v' \in Q, \ \|v - v'\| \leqslant \delta\Big\}, \\ \psi(\delta) &= \mu_t(\delta) + L\varkappa\delta, \quad \delta \geqslant 0. \end{aligned}$$

Отметим, что $\lim_{\delta\downarrow 0} \mu_t(\delta) = \lim_{\delta\downarrow 0} \mu_v(\delta) = 0$ и, каково бы ни было движение $x(\cdot)$ системы (1.1), порожденное из начальной позиции $(t_0, x_0) \in G$ реализациями $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, для любых моментов времени $t, t' \in [t_0, \vartheta]$ и векторов $u \in P$, $v, v' \in Q$ имеет место неравенство

$$\big\|f(t, x(t), u, v) - f(t', x(t'), u, v')\big\| \leqslant \psi(|t - t'|) + \mu_v(\|v - v'\|). \tag{2.1}$$

Положим

$$\mu_{uv}(\delta) = \max\Big\{\|f(t,x,u,v) - f(t,x,u,v')\| :$$
$$(t,x) \in G,\ u,u' \in P,\ v,v' \in Q,\ \|f(t,x,u',v) - f(t,x,u',v')\| \leqslant \delta\Big\}, \quad \delta \geqslant 0.$$

Тогда для любых позиции $(t,x) \in G$ и векторов $u,u' \in P$, $v,v' \in Q$ будет справедлива оценка

$$\|f(t,x,u,v) - f(t,x,u,v')\| \leqslant \mu_{uv}\big(\|f(t,x,u',v) - f(t,x,u',v')\|\big). \tag{2.2}$$

Имеет место

**Утверждение 1.** *Если выполнено предположение* 1, *то* $\lim_{\delta\downarrow 0}\mu_{uv}(\delta) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждая от противного, предположим, что существует такое число $\varepsilon_* > 0$, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ можно указать позицию $(t_k,x_k) \in G$ и векторы $u_k, u'_k \in P$ и $v_k, v'_k \in Q$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|f(t_k,x_k,u'_k,v_k) - f(t_k,x_k,u'_k,v'_k)\| \leqslant 1/k, \quad \|f(t_k,x_k,u_k,v_k) - f(t_k,x_k,u_k,v'_k)\| \geqslant \varepsilon_*.$$

Учитывая компактность множеств $G$, $P$ и $Q$, можно считать, что последовательности $\{(t_k,x_k)\}$, $\{u_k\}$, $\{u'_k\}$, $\{v_k\}$ и $\{v'_k\}$ сходятся. Тогда для соответствующих пределов $(t_*,x_*) \in G$, $u_*, u'_* \in P$, и $v_*, v'_* \in Q$ в силу непрерывности функции $f$ будут справедливы соотношения $f(t_*,x_*,u'_*,v_*) = f(t_*,x_*,u'_*,v'_*)$, $f(t_*,x_*,u_*,v_*) \neq f(t_*,x_*,u_*,v'_*)$, противоречащие предположению 1. Утверждение доказано.

Установим следующий вспомогательный факт.

**Утверждение 2.** *Пусть* $M > 0$, *и для каждого числа* $\delta > 0$ *и каждого значения параметра* $\alpha$ *из некоторого непустого множества* $A$ *задана измеримая функция* $\varphi_\delta^\alpha : [t_0,\vartheta] \to [0,M]$, *причем выполняется равенство*

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\ \sup_{\alpha\in A}\int_{t_0}^{\vartheta}\varphi_\delta^\alpha(t)\mathrm{d}t = 0.$$

*Тогда для любой неубывающей функции* $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\lim_{\delta\downarrow 0}\mu(\delta) = 0$, *имеет место соотношение*

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\ \sup_{\alpha\in A}\int_{t_0}^{\vartheta}\mu\big(\varphi_\delta^\alpha(t)\big)\mathrm{d}t = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задавшись числом $\varepsilon > 0$, выберем число $\eta_* > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mu(\eta_*) \leqslant \varepsilon/(2(\vartheta - t_0))$. Далее выберем число $\delta_* > 0$, при котором справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{\vartheta}\varphi_\delta^\alpha(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon\eta_*}{2\mu(M)+1}, \quad \delta \in (0,\delta_*], \quad \alpha \in A.$$

Пусть $\delta \in (0,\delta_*]$ и $\alpha \in A$. Положим $E = \{t \in [t_0,\vartheta] : \varphi_\delta^\alpha(t) \geqslant \eta_*\}$, $F = [t_0,\vartheta]\setminus E$. Тогда с учетом неравенства Чебышева (см., например, [10, теорема 3.3.2]) выводим

$$\int_{t_0}^{\vartheta}\mu\big(\varphi_\delta^\alpha(t)\big)\mathrm{d}t = \int_E\mu\big(\varphi_\delta^\alpha(t)\big)\mathrm{d}t + \int_F\mu\big(\varphi_\delta^\alpha(t)\big)\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mu(M)}{\eta_*}\int_{t_0}^{\vartheta}\varphi_\delta^\alpha(t)\mathrm{d}t + (\vartheta - t_0)\mu(\eta_*) \leqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

Утверждение доказано.

**Следствие.** *Для любого компактного в* $L_1$ *множества* $V \subset \mathcal{V}$ *и любой неубывающей функции* $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\lim_{\delta\downarrow 0} \mu(\delta) = 0$, *справедливо равенство*

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{v(\cdot)\in V} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mu\bigl(\|v(t) - v(t-\delta)\|\bigr)\mathrm{d}t = 0. \tag{2.4}$$

Отметим, что в равенстве (2.4) и всюду далее предполагается, что $v(t) = 0$ при $t \notin [t_0, \vartheta]$.

Доказательство. В силу компактности множества $V$ по теореме Рисса (см., например, [11, с. 316, теорема 2]) выполняется соотношение

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{v(\cdot)\in V} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \|v(t) - v(t-\delta)\|\mathrm{d}t = 0,$$

из которого с учетом утверждения 2 вытекает равенство (2.4). Следствие доказано.

Также при доказательстве леммы будет использоваться

**Утверждение 3.** *Для любого компактного в* $L_1$ *множества* $V \subset \mathcal{V}$ *и любой неубывающей функции* $\mu : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\lim_{\delta\downarrow 0} \mu(\delta) = 0$, *имеет место соотношение*

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{v(\cdot)\in V} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu\bigl(\|v(t) - v(\tau)\|\bigr)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = 0.$$

Доказательство. Задавшись числом $\varepsilon > 0$, выберем число $\eta_* > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\mu(\eta_*) \leqslant \varepsilon/(2(\vartheta - t_0))$. В силу компактности множества $V$, применяя усреднения по Стеклову и теорему Колмогорова (см., например, [12, с. 460, теорема 6; 11, с. 316, теорема 2]), можно показать, что справедливо равенство

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{v(\cdot)\in V} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \|v(t) - v(\tau)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t = 0,$$

и стало быть, существует такое число $\delta_* > 0$, что имеет место оценка

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \|v(t) - v(\tau)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon\eta_*}{2\mu(2M)+1}, \quad \delta \in (0, \delta_*], \quad v(\cdot) \in V,$$

где $M = \max_{v\in Q} \|v\|$. Пусть $\delta \in (0, \delta_*]$ и $v(\cdot) \in V$. Для каждого $t \in [t_0, \vartheta]$ по аналогии с оценкой (2.3) имеем

$$\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu\bigl(\|v(t) - v(\tau)\|\bigr)\mathrm{d}\tau \leqslant \frac{\mu(2M)}{\eta_*} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \|v(t) - v(\tau)\|\mathrm{d}\tau + 2\delta\mu(\eta_*),$$

откуда выводим

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu\bigl(\|v(t) - v(\tau)\|\bigr)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t \leqslant \frac{\mu(2M)}{\eta_*} \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \frac{1}{2\delta} \int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \|v(t) - v(\tau)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t + (\vartheta - t_0)\mu(\eta_*) \leqslant \varepsilon.$$

Утверждение доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Зафиксируем число $\xi > 0$ и компактное в $L_1$ множество $V \subset \mathcal{V}$. Выберем число $\xi_* > 0$ из условия

$$2\xi_* e^{L(\vartheta - t_0)} \leqslant \xi. \tag{2.5}$$

Принимая во внимание следствие, выберем такое число $\delta_1 > 0$, что, каковы бы ни были число $\delta \in (0, \delta_1]$ и функция $v(\cdot) \in V$, имеет место неравенство

$$2\varkappa\delta + (\vartheta - t_0)\psi(\delta) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mu_v\big(\|v(t) - v(t - \delta)\|\big)\mathrm{d}t \leqslant \xi_*. \tag{2.6}$$

Опираясь на утверждение 2, учитывая при этом утверждения 1 и 3, выберем число $\delta_2 > 0$ так, чтобы для любого числа $\delta \in (0, \delta_2]$ и любой функции $v(\cdot) \in V$ была справедлива оценка

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \mu_{uv}\Big(4\psi(\delta) + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu_v\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big)\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}t \leqslant \xi_*. \tag{2.7}$$

Положим $\delta_* = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ и покажем, что при таком выборе числа $\delta_*$ выполняется утверждение леммы. Пусть в согласии с формулировкой леммы зафиксированы позиция $(t_0, x_0)$, разбиение $\Delta$, реализации $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ и $\overline{u}(\cdot)$, $\overline{v}(\cdot)$, а также движения $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ системы (1.1).

Положим $\delta = d(\Delta) \leqslant \delta_*$. Оценим величину $\|x(t) - y(t)\|$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$. В силу того что движения $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ порождены из одной и той же начальной позиции, имеем

$$\|x(t) - y(t)\| = \Big\|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))\mathrm{d}\tau\Big\|.$$

При $t \in [t_0, t_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))\mathrm{d}\tau\Big\| \leqslant 2\varkappa\delta.$$

Пусть $t \in [t_0 + \delta, \vartheta]$. Учитывая неравенство (2.1), выводим

$$\begin{aligned}
&\Big\|\int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0+\delta}^{t} f(\tau - \delta, x(\tau - \delta), u(\tau), v(\tau - \delta))\mathrm{d}\tau\Big\| \\
&\leqslant \int\limits_{t_0+\delta}^{t} \big\|f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) - f(\tau - \delta, x(\tau - \delta), u(\tau), v(\tau - \delta))\big\|\mathrm{d}\tau + \varkappa\delta \\
&\leqslant (t - t_0 - \delta)\psi(\delta) + \int\limits_{t_0+\delta}^{t} \mu_v\big(\|v(\tau) - v(\tau - \delta)\|\big)\mathrm{d}\tau + \varkappa\delta.
\end{aligned}$$

Из равенства $u(\tau + \delta) = \overline{u}(\tau)$, $\tau \in [t_0, \vartheta - \delta)$, справедливого в силу соотношений (1.7), (1.10) и постоянного шага разбиения $\Delta$, получаем

$$\Big\| \int\limits_{t_0+\delta}^{t} f(\tau-\delta, x(\tau-\delta), u(\tau), v(\tau-\delta))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))\mathrm{d}\tau \Big\|$$

$$= \Big\| \int\limits_{t_0}^{t-\delta} f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau))\mathrm{d}\tau \Big\|$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \big\| f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau)) - f(\tau, y(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| \mathrm{d}\tau + \varkappa\delta$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{t} \big\| f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| \mathrm{d}\tau + \int\limits_{t_0}^{t} L\|x(\tau) - y(\tau)\|\mathrm{d}\tau + \varkappa\delta.$$

Таким образом, с учетом выбора (2.6) числа $\delta_1$ при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ имеем

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \xi_* + \int\limits_{t_0}^{t} L\|x(\tau) - y(\tau)\|\mathrm{d}\tau + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big\| f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| \mathrm{d}\tau. \tag{2.8}$$

Покажем далее, что справедливо неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{\vartheta} \| f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), \overline{u}(\tau), \overline{v}(\tau)) \| \mathrm{d}\tau \leqslant \xi_*. \tag{2.9}$$

Для этого в согласии с оценкой (2.2) и выбором (2.7) числа $\delta_2$, достаточно проверить, что при $\tau \in [t_0, \vartheta)$ выполняется оценка

$$\big\| f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), u(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| \leqslant 4\psi(\delta) + \frac{2}{\delta} \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \mu_v\big(\|v(\tau) - v(s)\|\big)\mathrm{d}s. \tag{2.10}$$

Пусть $j = \overline{1, k}$ и $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1})$. В силу соотношений (1.7), полагая $a_j = (x(\tau_{j+1}) - x(\tau_j))/\delta$, имеем

$$\big\| f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), u(\tau), \overline{v}(\tau)) \big\| = \big\| f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) - f(\tau, x(\tau), u_j, \overline{v}_j) \big\|$$

$$\leqslant \big\| f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) - a_j \big\| + \big\| a_j - f(\tau, x(\tau), u_j, \overline{v}_j) \big\|. \tag{2.11}$$

Оценим по отдельности каждое из слагаемых. Для первого слагаемого, принимая во внимание неравенство (2.1), выводим

$$\big\| f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) - a_j \big\| \leqslant \frac{1}{\delta} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \big\| f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) - f(s, x(s), u_j, v(s)) \big\| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant \psi(\delta) + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \mu_v\big(\|v(\tau) - v(s)\|\big)\mathrm{d}s \leqslant \psi(\delta) + \frac{1}{\delta} \int\limits_{\tau-\delta}^{\tau+\delta} \mu_v\big(\|v(\tau) - v(s)\|\big)\mathrm{d}s. \tag{2.12}$$

Для второго слагаемого, учитывая выбор (1.8) вектора $\overline{v}_j$ и неравенство (2.1), получаем

$$\big\| a_j - f(\tau, x(\tau), u_j, \overline{v}_j) \big\| \leqslant \big\| a_j - f(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1}), u_j, \overline{v}_j) \big\| + \psi(\delta)$$

$$\leqslant \left\| a_j - f(\tau_{j+1}, x(\tau_{j+1}), u_j, v(\tau)) \right\| + \psi(\delta) \leqslant \left\| a_j - f(\tau, x(\tau), u_j, v(\tau)) \right\| + 2\psi(\delta). \tag{2.13}$$

Из соотношений (2.11)–(2.13) следует оценка (2.10), а вместе с ней и неравенство (2.9).

Таким образом, в силу неравенств (2.8) и (2.9) имеет место соотношение

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant 2\xi_* + \int\limits_{t_0}^{t} L\|x(\tau) - y(\tau)\| \mathrm{d}\tau, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

из которого, применяя лемму Беллмана — Гронуолла (см., например, [13, лемма 2.1]), с учетом выбора (2.5) числа $\xi_*$ выводим

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant 2\xi_* e^{L(t-t_0)} \leqslant 2\xi_* e^{L(\vartheta - t_0)} \leqslant \xi, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{2.14}$$

Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

## 3. Примеры

Первый пример показывает, что без предположения 1 утверждения теоремы и леммы могут не выполняться. Во втором примере для конкретной динамической системы и двух типов функциональных ограничений на помехи явно выписывается полученная при доказательстве леммы оценка расхождения движений системы и поводыря.

П р и м е р 1. Пусть движение динамической системы описывается уравнением

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)v(t), \quad t \in [0,1], \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \{0,1\}, \quad v(t) \in \{-1,1\}, \tag{3.1}$$

с начальным условием $x(0) = 0$ и показатель качества имеет вид

$$\gamma = x(1). \tag{3.2}$$

Отметим, что для системы (3.1) не выполнено предположение 1. Действительно, при $v = 1$, $v' = -1$ и $u' = 0$ имеем $u'v = u'v' = 0$, однако при $u = 1$ получаем $uv = 1 \neq -1 = uv'$.

Можно показать, что в задаче (3.1), (3.2) для величины оптимального гарантированного результата в классе квазистратегий (1.3) выполняется равенство $\Gamma^0(0,0) = 0$, а контрстратегия $U^0(v) = 0$ при $v = 1$ и $U^0(v) = 1$ при $v = -1$ является оптимальной.

Пусть компактное множество $V$, задающее функциональные ограничения на допустимые реализации помехи, состоит из одной функции $v(t) = 1$, $t \in [0,1]$. Зафиксируем разбиение $\Delta$ отрезка времени $[0,1]$ с постоянным шагом $\delta = d(\Delta)$. В согласии с (1.7) определим кусочно-постоянные реализации $u(\cdot)$, $\overline{u}(\cdot)$ и $\overline{v}(\cdot)$ по правилу

$$u_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ четно}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \overline{u}_j = \begin{cases} 0, & \text{если } j \text{ четно}, \\ 1, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad \overline{v}_j = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ четно}, \\ -1, & \text{иначе}, \end{cases} \qquad j = \overline{1, k+1}.$$

Можно проверить, что такие $u(\cdot)$, $\overline{u}(\cdot)$ и $\overline{v}(\cdot)$ удовлетворяют соотношениям (1.8)–(1.10) при $v(t) = 1$, $t \in [0,1]$.

Подставляя реализации $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ в систему (3.1), получаем $\gamma = x(1) \geqslant 1/2 - \delta/2$. Таким образом, в задаче (3.1), (3.2) процедура управления с поводырем (1.7)–(1.10) не гарантирует показателю качества $\gamma$ значение $\Gamma^0(0,0) = 0$, т. е. не выполняется утверждение теоремы. Далее, подставляя в систему (3.1) реализации $\overline{u}(\cdot)$ и $\overline{v}(\cdot)$, для движения поводыря $y(\cdot)$ имеем $y(1) \leqslant -1/2 + \delta/2$, откуда выводим $x(1) - y(1) \geqslant 1 - \delta$. Стало быть, в данном примере утверждение леммы также не выполняется.

П р и м е р 2. Пусть движение динамической системы описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} = u_1(t)\big(v_1^2(t) + v_2^2(t)\big), & t \in [0,1], \quad x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big) \in \mathbb{R}^2, \\ \dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} = u_2(t)v_1(t)v_2(t), & u(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big) \in P, \quad v(t) = \big(v_1(t), v_2(t)\big) \in Q, \end{cases} \tag{3.3}$$

с начальным условием $x(0) = (0,0)$ и геометрические ограничения имеют вид

$$P = \big\{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 - \beta \leqslant u_i \leqslant 1 + \beta,\ i = 1,2\big\}, \quad Q = \big\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leqslant v_1^2 + v_2^2 \leqslant 4\big\},$$

где $\beta \in [0,1)$ — параметр. Можно проверить, что, несмотря на то что функция, определяющая правую часть системы (3.3), не является инъективной по $v = (v_1, v_2)$, для нее выполнено предположение 1. Кроме того, отметим, что система (3.3) не удовлетворяет условию равновесия в маленькой игре (см., например, [3, с. 79]).

Для системы (3.3) вычислим основные величины, участвующие в полученной при доказательстве леммы оценке (см. (2.6), (2.7) и (2.14)) расходимости движений системы $x(\cdot)$ и поводыря $y(\cdot)$. Можно показать, что имеют место соотношения

$$\mu_v(\delta) \leqslant 2\sqrt{5}(1+\beta)\delta, \quad \psi(\delta) = 0, \quad \mu_{uv}(\delta) \leqslant \frac{1+\beta}{1-\beta}\delta, \quad \delta \in [0,1).$$

Рассмотрим случай, когда реализации помехи $v(\cdot)$ являются кусочно-постоянными функциями с количеством точек разрыва, не превосходящем фиксированного числа $l \in \mathbb{N}$. Имеем

$$\int\limits_0^1 \mu_v\big(\|v(t) - v(t-\delta)\|\big)\mathrm{d}t \leqslant 2\sqrt{5}(1+\beta)(l+1)2\max_{v \in Q}\|v\|\delta = 8\sqrt{5}(1+\beta)(l+1)\delta,$$

$$\int\limits_0^1 \mu_{uv}\Big(4\psi(\delta) + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta} \mu_v\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big)\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}t \leqslant 4\sqrt{5}\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta}\int\limits_0^1 \frac{1}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\|v(t) - v(\tau)\|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$
$$\leqslant 4\sqrt{5}\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta}(l+1)2\max_{v\in Q}\|v\|\delta = 16\sqrt{5}\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta}(l+1)\delta, \quad \delta \in [0,1).$$

Оценивая эти же величины для случая, когда реализации $v(\cdot)$ равностепенно непрерывны с общим модулем непрерывности $\omega$, получаем

$$\int\limits_0^1 \mu_v\big(\|v(t) - v(t-\delta)\|\big)\mathrm{d}t \leqslant \mu_v\big(\omega(\delta)\big) \leqslant 2\sqrt{5}(1+\beta)\omega(\delta),$$

$$\int\limits_0^1 \mu_{uv}\Big(4\psi(\delta) + \frac{2}{\delta}\int\limits_{t-\delta}^{t+\delta}\mu_v\big(\|v(t) - v(\tau)\|\big)\mathrm{d}\tau\Big)\mathrm{d}t \leqslant 8\sqrt{5}\frac{(1+\beta)^2}{1-\beta}\omega(\delta), \quad \delta \in [0,1).$$

Таким образом, приведенное доказательство леммы позволяет в некоторых случаях выписывать явные оценки расходимости движений системы и поводыря при использовании схемы управления (1.7)–(1.10).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.

4. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p. ISBN 0-8176-3698-6.
5. **Серков Д.А.** Гарантированное управление при функциональных ограничениях на помеху // Математическая теория игр и ее приложения. 2012. Т. 4, вып. 2. С. 71–95.
6. **Серков Д.А.** О неулучшаемости стратегий с полной памятью в задачах оптимизации гарантированного результата // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 204–217.
7. **Kryazhimskii A.V.** The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies // Constantin Caratheodory: An International Tribute. New York; London; Munich etc.: World Scientific Publ. Co, 1991. P. 636–675.
8. **Кряжимский А.В, Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР: Техн. кибернет. 1983. № 2. С. 51–60.
9. **Серков Д.А.** Оптимальное по риску управление при функциональных ограничениях на помеху // Математическая теория игр и ее приложения. 2013. Т. 5, вып. 1. С. 74–103.
10. **Богачев В.И., Смолянов О.Г.** Действительный и функциональный анализ: университетский курс / Институт компьютерных исследований. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2009. 724 с. ISBN: 978-5-93972-742-6.
11. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
12. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 480 с.
13. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Гомоюнов Михаил Игоревич
Поступила 30.06.2017
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Серков Дмитрий Александрович
д-р физ.-мат. наук, зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: serkov@imm.uran.ru

## REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry* [Positional differential games], Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p. ISBN 0-8176-3698-6.
5. Serkov D.A. Guaranteed control under functional constraints on the distrubance. *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 71–95 (in Russian).
6. Serkov D.A. On the unimprovability of full-memory strategies in problems of guaranteed result optimization. *Proc. Steklov Inst. Math*, 2015, vol. 291, suppl. 1, pp. 157–172. doi: 10.1134/S0081543815090114.
7. Kryazhimskii A.V. The problem of optimization of the ensured result: unimprovability of full-memory strategies. *Constantin Caratheodory: An International Tribute.* New York, London, Munich etc.: World Scientific Publ. Co, 1991, pp. 636–675. ISBN: 9814506923.
8. Kryazhimskiy A.V., Osipov Yu.S. Modelling of a control in a dynamic system. *Engrg. Cybernetics*, 1983, vol. 21, iss. 2, pp. 38–47.

9. Serkov D.A. Optimal risk control under functionally restricted disturbances. *Mat. Teor. Igr Prilozh.*, 2013, vol. 5, no. 1, pp. 74–103 (in Russian).
10. Bogachev V.I., Smolyanov O.G. *Deistvitel'nyi i funktsional'nyi analiz: universitetskii kurs* [Real and functional analysis: a university course]. Moscow: RCD Publ., 2009, 724 p. ISBN: 978-5-93972-742-6 .
11. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funkcional'nyj analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 752 p.
12. Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi* [Theory of functions of a real variable]. Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
13. Bellman R., Cooke K. L. *Differential-difference equations.* New York, London: Academic Press, 1963, 462 p. ISBN-10: 012410973X . Translated under the title *Differentsial'no-raznostnye uravneniya*, Moscow: Mir Publ., 1967, 548 p.

The paper was received by the Editorial Office on June 30, 2017.

*Mihail Igorevich Gomoyunov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University named after B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com.

*Dmitrii Aleksandrovich Serkov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University named after B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: serkov@imm.uran.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 512.567

# О РЕШЕТКАХ МАКСИМАЛЬНЫХ АНТИЦЕПЕЙ КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

**И. А. Дерендяев**

Настоящая статья посвящена решеткам максимальных антицепей конечных частично упорядоченных (ч.у.) множеств произвольной высоты. Решетки максимальных антицепей конечных ч.у. множеств высоты 1 хорошо изучены и применяются, например, в анализе формальных понятий. Однако существует множество общих свойств, присущих конечным ч.у. множествам любой высоты. Для произвольного элемента $x$ некоторого ч.у. множества мы вводим понятие наименьшей (наибольшей) максимальной антицепи, содержащей $x$, обозначаемой как $m_x$ ($M_x$). Мы доказываем, что для любой максимальной антицепи $A$ справедливо равенство $A = \bigvee_{x\in A} m_x = \bigwedge_{x\in A} M_x$. Это соотношение позволяет описать все неразложимые элементы решеток максимальных антицепей. Основным результатом статьи является описание всех конечных ч.у. множеств, решетка максимальных антицепей которых изоморфна некоторой заранее заданной решетке. Неразложимые элементы в этом описании играют ключевую роль.

Ключевые слова: частично упорядоченное множество, максимальная антицепь, решетка максимальных антицепей.

**I. A. Derendiaev. On maximal antichain lattices of finite posets.**

This paper is devoted to maximal antichain lattices of posets of arbitrary length. Maximal antichain lattices of finite posets of length 1 have been well studied and are applied, for example, in formal concept analysis. However, there are many general properties inherent in finite posets of any length. For an arbitrary element $x$ of some poset, we introduce the notions of smallest and largest maximal antichains containing $x$, which are denoted by $m_x$ and $M_x$, respectively. We prove that the equality $A = \bigvee_{x\in A} m_x = \bigwedge_{x\in A} M_x$ holds for any maximal antichain $A$. This equality allows us to describe all irreducible elements of maximal antichain lattices. The main result of this paper is a description of all finite posets whose maximal antichain lattice is isomorphic to a given lattice. Irreducible elements play a key role in this description.

Keywords: poset, maximal antichain, maximal antichain lattice.

**MSC:** 06B15, 06A05, 06A11

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-95-104

## Введение

Частично упорядоченные (ч.у.) множества относятся к числу основных математических объектов и изучаются с различных точек зрения. В частности, рассматриваются антицепи в конечных ч.у. множествах. Напомним, что *антицепью* называется подмножество ч.у. множества, в котором все элементы попарно несравнимы. На множестве всех антицепей произвольного конечного ч.у. множества можно ввести отношение частичного порядка, причем таким образом, что антицепи образуют дистрибутивную решетку; более того, всякую конечную дистрибутивную решетку можно представить как решетку антицепей подходящего ч.у. множества [1].

В данной статье рассматриваются максимальные антицепи конечных ч.у. множеств. Антицепь максимальна, если она не является собственным подмножеством никакой другой антицепи. На множестве всех максимальных антицепей произвольного конечного ч.у. множества также можно ввести отношение частичного порядка (см. разд. 1), которое превращает его в решетку; более того, любую конечную решетку можно представить как решетку максимальных антицепей некоторого подходящего ч.у. множества (см. [2]). В работе [2], кроме того, был найден способ построения конечного ч.у. множества с данной конечной решеткой максимальных антицепей, причем построенное таким образом ч.у. множество всегда имеет высоту 1 (напомним, что ч.у. множество имеет высоту $n$, если число элементов в его самой длинной цепи равно $n+1$).

Для ч.у. множеств высоты 1 были получены условия, при которых решетка максимальных антицепей модулярна [3] и дистрибутивна [3; 4]. Была найдена связь между решетками максимальных антицепей и решетками так называемых формальных понятий [5]. Решетки максимальных антицепей были применены также для исследования моделей параллельных вычислений [6].

В перечисленных статьях все исследования касались только ч.у. множеств высоты 1. Оставалось невыясненным, какие решетки представимы в виде решеток максимальных антицепей ч.у. множеств высоты больше единицы, какую наибольшую высоту может иметь ч.у. множество с данной решеткой максимальных антицепей и как связаны между собой два различных ч.у. множества с одинаковыми решетками максимальных антицепей.

Эти вопросы можно объединить в следующую задачу.

З а д а ч а. По данной конечной решетке $L$ описать все частично упорядоченные множества, решетка максимальных антицепей которых изоморфна $L$.

Сформулированная задача решается в разд. 3. В разд. 1 приведены основные определения и некоторые вспомогательные утверждения. Раздел 2 посвящен свойствам элементов-близнецов частично упорядоченных множеств, которые играют существенную роль в доказательстве основного результата.

## 1. Предварительные сведения

Условимся о следующих обозначениях: для любого ч.у. множества $P$, если иные обозначения не оговорены, соответствующее отношение частичного порядка будем обозначать символом $\leq_P$, строгое неравенство — символом $<_P$, а отношение "быть несравнимыми" — символом $||_P$.

Зафиксируем произвольное конечное ч.у. множество $P$. Все следующие утверждения этого раздела будут посвящены свойствам его максимальных антицепей.

В дальнейшем множество всех максимальных антицепей ч.у. множества $P$ будем обозначать символом $AntP$. На этом множестве естественным образом можно ввести отношение частичного порядка: для любых максимальных антицепей $A, B \in AntP$ будем считать, что $A$ предшествует $B$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $a \in A$ найдется такой элемент $b \in B$, что выполнено неравенство $a \leq_P b$. Условимся частичный порядок на $AntP$ обозначать специальным символом $\trianglelefteq$; для строго неравенства будем использовать символ $\triangleleft$, для отношения "быть несравнимыми" — символ $||$.

Следующее утверждение в принципе хорошо известно. Оно показывает, как условие максимальности антицепей влияет на свойства частичного порядка $\trianglelefteq$.

**Лемма 1.** *Пусть $A, B \in AntP$. Следующие условия равносильны*:

1) $A \trianglelefteq B$, *т. е. для любого элемента $a \in A$ найдется элемент $b \in B$ такой, что $a \leq_P b$*;

2) *для любого элемента $b \in B$ найдется элемент $a \in A$ такой, что $a \leq_P b$*;

3) *для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ справедлива импликация: если $a$ и $b$ сравнимы, то $a \leq_P b$.*

В дальнейшем точную верхнюю (нижнюю) грань максимальных антицепей $A$ и $B$ будем обозначать как $A \vee B$ $(A \wedge B)$ и называть *объединением* (*пересечением*) *максимальных антицепей* $A$ и $B$.

Пусть $A, B \in AntP$. Введем следующие обозначения:

$$Up(A, B) = \{x \in A \cup B \mid \exists y \in A \cup B : y <_P x\} \cup (A \cap B),$$
$$Down(A, B) = \{x \in A \cup B \mid \exists y \in A \cup B : x <_P y\} \cup (A \cap B).$$

Справедлива следующая

**Лемма 2.** *Для любых максимальных антицепей $A, B \in AntP$ выполнены включения $Up(A, B) \subseteq A \vee B$ и $Down(A, B) \subseteq A \wedge B$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения легко следует из построения операций $\vee$ и $\wedge$ в решетке $AntP$ (см. [2]). □

Перечислим несколько следствий леммы 2.

**Следствие 1.** *Для любых максимальных антицепей $A, B \in P$ и для любого элемента $x \in A \cap B$ выполнены включения $x \in A \vee B$ и $x \in A \wedge B$.*

**Следствие 2.** *Для любого элемента $x \in P$ множество всех максимальных антицепей, содержащих $x$, является интервалом в $AntP$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in P$. По следствию 1 множество всех максимальных антицепей, содержащих $x$, замкнуто относительно объединений и пересечений, т. е. является подрешеткой решетки $AntP$. Покажем, что эта подрешетка является интервалом. Предположим, что $A, B, C \in AntP$, при этом $x \in A \cap B$, а $C$ удовлетворяет двойному неравенству $A \trianglelefteq C \trianglelefteq B$. Докажем, что $x$ лежит в $C$. Поскольку $x \in A$ и $A \trianglelefteq C$, найдется такой элемент $c \in C$, что $x \leq_P c$. С другой стороны, поскольку $x \in B$ и $C \trianglelefteq B$, найдется такой элемент $c' \in C$, что $c' \leq_P x$. Тогда выполнено двойное неравенство $c' \leq_P x \leq_P c$. Получаем, что элементы $c$ и $c'$ сравнимы и лежат в антицепи $C$. Следовательно, $c = c'$, откуда $c' = x = c$, а значит, $x \in C$. □

**Следствие 3.** *Для любого элемента $x \in P$ среди всех максимальных антицепей, содержащих $x$, существуют наибольшая и наименьшая максимальные антицепи.*

В дальнейшем наибольшую (наименьшую) максимальную антицепь, содержащую элемент $x$, будем для краткости называть *наибольшей* (*наименьшей*) *для* $x$ и обозначать символом $M_x$ ($m_x$). Максимальные антицепи, наибольшие или наименьшие для элементов, играют ключевую роль в решении поставленной задачи. Продемонстрируем несколько их основных свойств.

**Лемма 3.** *Пусть $x, y \in P$ и $x \leq_P y$. Тогда $M_x \trianglelefteq M_y$ и $m_x \trianglelefteq m_y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим неравенство $M_x \trianglelefteq M_y$. Поскольку $x \leq_P y$, элемент $y$ содержится во множестве $Up(M_x, M_y)$. Из леммы 2 следует, что тогда $y$ содержится в максимальной антицепи $M_x \vee M_y$. Поскольку $M_y$ — наибольшая для $y$ максимальная антицепь, справедливо неравенство $M_x \vee M_y \trianglelefteq M_y$, откуда вытекает, что $M_x \trianglelefteq M_y$.

Неравенство $m_x \trianglelefteq m_y$ проверяется двойственным образом. □

**Предложение 1.** *Пусть $x, y \in P$. Следующие условия равносильны:*

1) $x <_P y$;

2) *выполнено либо $M_x \triangleleft m_y$, либо $M_x \parallel m_y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что условие 1 влечет условие 2. Пусть $x <_P y$. Поскольку $x \in M_x$ и $y \in m_y$, соотношение $m_y \trianglelefteq M_x$ противоречит условию 3 леммы 1. Поэтому либо $M_x \triangleleft m_y$, либо $M_x \parallel m_y$.

Предположим теперь, что условие 1 не выполняется, т. е. либо $y \leq_P x$, либо $x$ и $y$ несравнимы. Если $y \leq_P x$, то $x$ содержится в $Up(m_y, M_x)$, а значит, содержится в $m_y \vee M_x$. Тогда справедливо двойное неравенство $m_y \trianglelefteq m_y \vee M_x \trianglelefteq M_x$. Если же $x$ и $y$ несравнимы, то существует максимальная антицепь $A \in AntP$, содержащая как $x$, так и $y$, и тогда справедливо двойное неравенство $m_y \trianglelefteq A \trianglelefteq M_x$. В обоих случаях выполняется неравенство $m_y \trianglelefteq M_x$. Отсюда следует, что условие 2 не выполняется.

Итак, если условие 1 истинно, то и условие 2 истинно, а если условие 1 ложно, то и условие 2 ложно. Следовательно, условия 1 и 2 эквивалентны. □

**Предложение 2.** *Пусть $A \in AntP$. Справедливы следующие равенства:*

$$A = \bigvee_{x \in A} m_x = \bigwedge_{x \in A} M_x. \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим равенство $A = \bigvee\limits_{x \in A} m_x$. Ясно, что для любого элемента $x \in A$ справедливо неравенство $m_x \trianglelefteq A$. Следовательно, выполнено неравенство $\bigvee\limits_{x \in A} m_x \trianglelefteq A$.

Пусть теперь $B \in AntP$ и $\bigvee\limits_{x \in A} m_x \trianglelefteq B$. Зафиксируем произвольный элемент $y \in A$. Из неравенства $\bigvee\limits_{x \in A} m_x \trianglelefteq B$ следует неравенство $m_y \trianglelefteq B$. Тогда найдется такой элемент $b \in B$, что $y \leq_P b$. Элемент $y$ был выбран из $A$ произвольно, следовательно, $A \trianglelefteq B$. Максимальная антицепь $B$ также была выбрана произвольно с условием $\bigvee\limits_{x \in A} m_x \trianglelefteq B$. Подставляя вместо антицепи $B$ антицепь $\bigvee\limits_{x \in A} m_x$, получаем $A \trianglelefteq \bigvee\limits_{x \in A} m_x$, откуда следует $A = \bigvee\limits_{x \in A} m_x$.

Двойственным образом проверяется равенство $A = \bigwedge\limits_{x \in A} M_x$. □

**Следствие 4.** *Пусть $A \in AntP$. Если антицепь $A$ неразложима в объединение (пересечение) как элемент решетки $AntP$, то $A = m_x$ ($A = M_x$) для некоторого элемента $x \in A$.*

**Предложение 3.** *Пусть $x \in P$ и $A \in AntP$.*
1) *Если $M_x \parallel A$, то $m_x \triangleleft A$.*
2) *Если $m_x \parallel A$, то $A \triangleleft M_x$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем истинность импликации 1). Пусть $M_x \parallel A$. Предположим, что для любого $y \in A$ выполнено неравенство $m_y \trianglelefteq M_x$. Тогда в силу равенства (1) имеем $A \trianglelefteq M_x$, что противоречит предположению о том, что $M_x \parallel A$. Следовательно, найдется элемент $y' \in A$ такой, что либо $M_x \parallel m_{y'}$, либо $M_x \triangleleft m_{y'}$. Тогда по предложению 1 справедливо неравенство $x <_P y'$, откуда $m_x \trianglelefteq m_{y'}$ (по лемме 3). Поскольку $m_{y'} \trianglelefteq A$, имеем $m_x \trianglelefteq A$, а из соотношения $x <_P y'$ вытекает, что максимальные антицепи $m_x$ и $A$ не могут совпадать. Следовательно, $m_x \triangleleft A$.

Истинность импликации 2) проверяется двойственным образом. □

## 2. Элементы-близнецы в частично упорядоченном множестве

В этом разделе мы вводим и изучаем понятие пар близнецов ч.у. множества, которое играет принципиальную роль в формулировке основного результата статьи.

О п р е д е л е н и е. Различные элементы $x$ и $y$ ч.у. множества $P$ называются *близнецами*, если для любого элемента $z \in P$ неравенство $x <_P z$ равносильно неравенству $y <_P z$, а неравенство $z <_P x$ равносильно неравенству $z <_P y$.

**Лемма 4.** *Пусть $x, y$ — близнецы в конечном ч.у. множестве $P$. Для любой максимальной антицепи $A \in AntP$ включение $x \in A$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено включение $y \in A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A$ — максимальная антицепь. Покажем, что если $x$ не лежит в $A$, то и $y$ не может лежать в $A$. Действительно, если $x$ не лежит в $A$, то (так как антицепь $A$ максимальна) найдется элемент $a \in A$ такой, что либо $x <_P a$, либо $a <_P x$. Тогда либо $y <_P a$, либо $a <_P y$, что означает, что $y$ не лежит в $A$. Следовательно, если $y \in A$, то и $x \in A$.

Обратная импликация проверяется аналогично. □

**Предложение 4.** *Различные элементы $x$ и $y$ конечного ч.у. множества $P$ являются близнецами тогда и только тогда, когда $M_x = M_y$ и $m_x = m_y$.*

Доказательство. Пусть $x$ и $y$ — близнецы. Тогда по лемме 4 $x \in M_y$ и $y \in M_x$, откуда следует, что $M_y \trianglelefteq M_x$ и $M_x \trianglelefteq M_y$, что означает $M_x = M_y$.

Равенство $m_x = m_y$ проверяется аналогично.

Пусть теперь $M_x = M_y$ и $m_x = m_y$, и пусть $a$ — произвольный элемент $P$. Неравенство $x <_P a$ по предложению 1 эквивалентно тому, что либо $M_x \parallel m_a$, либо $M_x \triangleleft m_a$, а это, поскольку $M_x = M_y$, эквивалентно неравенству $y <_P a$. Эквивалентность неравенств $a <_P x$ и $a <_P y$ проверяется двойственным образом. А раз $x$ и $y$ различны, они являются близнецами. □

Отметим, что между конечными ч.у. множествами высоты 1 и формальными контекстами существует взаимно однозначное соответствие (см. [5]), причем решетка максимальных антицепей ч.у. множества высоты 1 изоморфна решетке понятий соответствующего контекста, а существование в ч.у. множестве элементов-близнецов равносильно существованию в соответствующем контексте повторяющихся строк или столбцов. В монографии [5] показано, что при "очищении" контекста от повторяющихся столбцов и строк решетка понятий этого контекста остается неизменной. Это равносильно тому, что при "удалении" из ч.у. множества высоты 1 элементов-близнецов решетка максимальных антицепей этого ч.у. множества не меняется.

Покажем, что это справедливо для конечных ч.у. множеств любой высоты. Пусть $a$ — некоторый фиксированный элемент конечного ч.у. множества $P$ и $a' \notin P$. Положим $R = P \cup \{a'\}$ и введем на $R$ отношение частичного порядка $\leq_{R,a}$ следующим способом:

$$\forall x, y \in P \colon x \leq_{R,a} y \Leftrightarrow x \leq_P y;$$
$$\forall x \in R \colon x <_{R,a} a' \Leftrightarrow x <_P a;$$
$$\forall x \in R \colon a' <_{R,a} x \Leftrightarrow a <_P x.$$

Другими словами, ч.у. множество $R$ получается из $P$ добавлением специального элемента $a'$, причем таким образом, чтобы элементы $a$ и $a'$ были близнецами. Оказывается, что при таком "добавлении" близнеца решетка максимальных антицепей не меняется, т. е. справедливо

**Предложение 5.** *Решетки $AntP$ и $AntR$ изоморфны.*

Доказательство. Пусть $A$ — максимальная антицепь ч.у. множества $P$. Если $a \notin A$, то для какого-то элемента $x \in A$ либо $x <_P a$, либо $a <_P x$. Тогда либо $x <_R a'$, либо $a' <_R x$ и $A$ является максимальной антицепью в $R$. Если же $a \in A$, то $a$ не сравним (в ч.у. множестве $P$) с каждым элементом из $A \backslash \{a\}$, а значит, $a'$ не сравним с каждым элементом из $A$ (в ч.у. множестве $R$); это означает, что множество $A \cup \{a'\}$ будет максимальной антицепью в $R$. Иными словами, для любой максимальной антицепи $A \in AntP$ либо $A \in AntR$, либо $A \cup \{a'\} \in AntR$.

С другой стороны, ясно, что для любой максимальной антицепи $B \in AntR$ выполнено включение $B \backslash \{a'\} \in AntP$. Причем если для каких-то двух максимальных антицепей $B, C \in AntR$ выполнено равенство $B \backslash \{a'\} = C \backslash \{a'\}$, то $B = C$, откуда следует, что отображение $f \colon AntR \to AntP$, действующее по правилу $f(B) = B \backslash \{a'\}$, является биекцией.

Тот факт, что $f$ сохраняет отношение порядка, следует из построения частичного порядка на $R$ и леммы 1.

Итак, $f$ — биекция решетки $AntR$ на решетку $AntP$, сохраняющая частичный порядок. Значит, решетки $AntR$ и $AntP$ изоморфны. □

Таким образом, "добавление" (а значит, и "удаление") близнецов не влияет на решетку максимальных антицепей. Это значит, что для описания всех конечных ч.у. множеств с некоторой заданной решеткой максимальных антицепей достаточно описать только те ч.у. множества, в которых нет близнецов.

## 3. Основной результат

Всюду далее будем считать, что $L$ — произвольная конечная решетка. Символами $Mi(L)$ и $Ji(L)$ будем обозначать множества всех неразложимых в пересечение и объединение элементов решетки $L$ соответственно. Кроме того, будем считать, что $0_L$ (т. е. наименьший элемент решетки $L$) не является элементом, неразложимым в объединение, а $1_L$ (наибольший элемент решетки $L$) — элементом, неразложимым в пересечение.

Рассмотрим некоторое множество $Q \subseteq L^2$. Потребуем, чтобы $Q$ удовлетворяло следующим свойствам:

I) $\forall (a,b) \in Q\colon a \leq_L b$;

II) $\forall (a,b) \in Q, \forall c \in L\colon c \,||_L\, a \to c <_L b \;\&\; c \,||_L\, b \to a <_L c$;

III) $\forall x \in Mi(L),\ \forall y' \in Ji(L)\colon \exists y \in L\colon (y,x) \in Q \;\&\; \exists x' \in L\colon (y',x') \in Q$.

Отметим, что хотя бы одно множество с такими свойствами найдется. Например, это может быть множество

$$\{(a, 1_L) \mid a \in Ji(L)\} \cup \{(0_L, b) \mid b \in Mi(L)\}.$$

Нетрудно проверить, что это множество удовлетворяет каждому из свойств I–III.

На множестве $Q$ введем отношение частичного порядка:

$$(a_1, b_1) \leq_Q (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \text{ или } a_2 \not\leq_L b_1. \tag{2}$$

Соответствующий строгий порядок будем обозначать символом $<_Q$.

Отметим, что соотношения $a_2 \not\leq_L b_1$ и $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ не могут выполняться одновременно в силу свойства I.

Прежде чем проверить, что отношение $\leq_Q$ действительно является отношением частичного порядка на множестве $Q$, докажем одно вспомогательное утверждение.

**Лемма 5.** *Пусть $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in Q$ и $(a_1, b_1) <_Q (a_2, b_2)$. Тогда $a_1 <_L a_2$ и $b_1 <_L b_2$.*

Доказательство. Пусть $(a_1, b_1) <_Q (a_2, b_2)$. Тогда либо $b_1 <_L a_2$, либо $b_1 \,||_L\, a_2$. Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

Предположим, что $b_1 <_L a_2$. Из свойства I следуют соотношения $a_1 \leq_L b_1 <_L a_2 \leq_L b_2$, откуда $a_1 <_L a_2$ и $b_1 <_L b_2$.

Если же $b_1 \,||_L\, a_2$, то требуемые неравенства вытекают из свойства II. □

**Следствие 5.** *Если $(a_1, b_1) \leq_Q (a_2, b_2)$, то $a_1 \leq_L a_2$ и $b_1 \leq_L b_2$.*

**Предложение 6.** *Бинарное отношение $\leq_Q$ на множестве $Q$ является отношением частичного порядка.*

Доказательство. Рефлексивность отношения $\leq_Q$ вытекает из его определения. Проверим антисимметричность: пусть $(a_1, b_1) \leq_Q (a_2, b_2)$ и $(a_2, b_2) \leq_Q (a_1, b_1)$. Тогда по следствию 5 справедливы соотношения $b_1 \leq_L b_2$ и $b_2 \leq_L b_1$, откуда $b_1 = b_2$. Аналогично проверяется равенство $a_1 = a_2$.

Проверим транзитивность. Пусть $(a_1, b_1) \leq_Q (a_2, b_2)$ и $(a_2, b_2) \leq_Q (a_3, b_3)$. Случай, когда хотя бы одно из неравенств обращается в равенство, тривиален, поэтому предположим, что оба неравенства строгие. Тогда по определению отношения $\leq_Q$ либо $b_2 <_L a_3$, либо $b_2 \,||_L\, a_3$. По лемме 5 справедливо соотношение $b_1 \leq_L b_2$. Ясно, что в таком случае неравенство $a_3 \leq_L b_1$ выполняться не может, следовательно, либо $b_1 <_L a_3$, либо $b_1 \,||_L\, a_3$, что по определению отношения $\leq_Q$ означает, что $(a_1, b_1) \leq_Q (a_3, b_3)$. □

Итак, любое множество $Q \subseteq L^2$, удовлетворяющее свойствам I–III, является частично упорядоченным. Оказывается, что решетка максимальных антицепей любого такого ч.у. множества изоморфна исходной решетке $L$. Более того, любое ч.у. множество без близнецов, решетка максимальных антицепей которого изоморфна $L$, можно представить в таком виде. Для доказательства этого факта потребуется несколько вспомогательных утверждений.

**Лемма 6.** *Пусть $(a,b),(c,d)$ — элементы множества $Q$. Следующие условия равносильны:*

1) $(a,b)\ ||_Q\ (c,d)$;
2) $[a,b]\cap[c,d]\neq\varnothing$.

Доказательство. Покажем, что из условия 1 следует условие 2. Если $(a,b)\ ||_Q\ (c,d)$, то по определению частичного порядка $\leq_Q$ справедливы неравенства $a\ \leq_L\ d$ и $c\ \leq_L\ b$. Поскольку $a\leq_L b$ и $c\leq_L d$, справедливы неравенства $a\leq_L b\wedge d\leq_L b$ и $c\leq_L b\wedge d\leq_L d$. Таким образом, выполнено включение $b\wedge d\in[a,b]\cap[c,d]$, откуда очевидна истинность условия 2.

Теперь покажем, что из условия 2 следует условие 1. Пусть $x\in[a,b]\cap[c,d]$. Тогда выполнены неравенства $a\leq_L x\leq_L b$ и $c\leq_L x\leq_L d$, откуда $a\leq_L d$ и $c\leq_L b$. Следовательно, по определению порядка на множестве $Q$ выполнено соотношение $(a,b)\ ||_Q\ (c,d)$. □

**Следствие 6.** *Пусть $x$ — произвольный элемент решетки $L$. Тогда множество*

$$\{(a,b)\in Q\mid x\in[a,b]\}$$

*является антицепью ч.у. множества $Q$.*

Доказательство легко следует из леммы 6. □

Всюду далее для любого элемента $x\in L$ множество $\{(a,b)\in Q\mid x\in[a,b]\}$ будем обозначать символом $A(x)$.

**Лемма 7.** *Пусть $A=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),\dots,(a_n,b_n)\}$ — произвольная антицепь ч.у. множества $Q$ ($n>0$). Тогда множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ непусто.*

Доказательство. Поскольку любые два различных элемента множества $A$ несравнимы, для любых $k,j$ таких, что $1\leq k<j\leq n$, выполнены соотношения $a_k\leq_L b_j$ и $a_j\leq_L b_k$. Тогда для любого $k$ такого, что $1\leq k\leq n$, выполнено неравенство $a_j\leq_L\bigwedge\limits_{i=1}^{n}b_i\leq_L b_j$, откуда следует, что множество $\bigcap\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ содержит элемент $\bigwedge\limits_{i=1}^{n}b_i$, т. е. непусто. □

**Лемма 8.** *Для любого элемента $x\in L$ множество $A(x)$ является максимальной антицепью ч.у. множества $Q$.*

Доказательство. Сперва заметим, что для любой пары $(a,b)\in A(x)$ справедливо соотношение $a\leq_L x\leq_L b$, откуда вытекает двойное неравенство

$$\bigvee_{(a,b)\in A(x)}a\leq_L x\leq_L\bigwedge_{(a,b)\in A(x)}b. \tag{3}$$

Пусть $x=a_1\vee a_2\vee\dots\vee a_n$, причем элементы $a_i$, $i=1,2,\dots,n$, неразложимы в объединение и попарно несравнимы (ясно, что если $x$ разложим в объединение, то такие элементы в силу конечности решетки $L$ найдутся; если $x$ неразложим в объединение, то $n=1$ и $x=a_1$). В силу свойства III найдутся элементы $b_1,b_2,\dots,b_n$ такие, что $(a_i,b_i)\in Q$ для любого $i=1,2,\dots,n$. Покажем, что для любого $i$, где $1\leq i\leq n$, выполнено включение $x\in[a_i,b_i]$. Если $n=1$, то $a_1=x$ и $x\in[a_1,b_1]$. Поэтому предположим, что $n>1$. Для любых $i,j$ таких, что $1\leq i<j\leq n$, в силу соотношения $a_i\ ||_L\ a_j$ справедливы неравенства $a_i\leq_L b_j$ и $a_j\leq_L b_i$. Кроме того, в силу свойства I для любого $i=1,2,\dots,n$ имеет место неравенство $a_i\leq_L b_i$. Отсюда следует, что для любого $i=1,2,\dots,n$ выполнено неравенство $a_i\leq_L\bigwedge\limits_{j=1}^{n}b_j$. Следовательно, выполнено соотношение $x=\bigvee\limits_{i=1}^{n}a_i\leq_L\bigwedge\limits_{j=1}^{n}b_j$, откуда, в частности, следует, что $x\leq_L b_j$ для

любого $j = 1, 2, \ldots, n$. С другой стороны, для любого $j = 1, 2, \ldots, n$ имеет место соотношение $a_j \leq_L x$, откуда $x \in [a_j, b_j]$ для любого $j = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $(a_j, b_j) \in A(x)$.

Из включения $(a_j, b_j) \in A(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, вытекает неравенство

$$x = \bigvee_{i=1}^{n} a_i \leq_L \bigvee_{(a,b)\in A(x)} a.$$

С учетом неравенства (3) отсюда следует, что $x = \bigvee\limits_{(a,b)\in A(x)} a$. Двойственными рассуждениями проверяется равенство $x = \bigwedge\limits_{(a,b)\in A(x)} b$. Поскольку

$$\bigcap_{(a,b)\in A(x)} [a, b] = \Bigg[ \bigvee_{(a,b)\in A(x)} a, \bigwedge_{(a,b)\in A(x)} b \Bigg],$$

имеем $\bigcap\limits_{(a,b)\in A(x)} [a, b] = \{x\}$.

Раз $A(x)$ — антицепь, найдется максимальная антицепь $B \in AntQ$ такая, что $A(x) \subseteq B$. По лемме 7 множество $\bigcap\limits_{(c,d)\in B} [c, d]$ непусто. С другой стороны, поскольку $A(x) \subseteq B$, справедливо включение

$$\bigcap_{(c,d)\in B} [c, d] \subseteq \bigcap_{(a,b)\in A(x)} [a, b] = \{x\}.$$

Следовательно, $\bigcap\limits_{(c,d)\in B} [c, d] = \{x\}$; это означает, что для любой пары $(c, d) \in B$ выполнено $x \in [c, d]$. Тогда $B \subseteq A(x)$, откуда вытекает, что $A(x)$ — максимальная антицепь. □

**Следствие 7.** *Для любого элемента $x \in L$ справедливы следующие равенства:*

$$x = \bigvee_{(a,b)\in A(x)} a = \bigwedge_{(a,b)\in A(x)} b; \qquad \{x\} = \bigcap_{(a,b)\in A(x)} [a, b].$$

**Следствие 8.** *Для любых элементов $x, y \in L$ если $A(x) = A(y)$, то $x = y$.*

Доказательство. В силу следствия 7 имеет место равенство $\bigcap\limits_{(a,b)\in A(x)} [a, b] = \{x\}$. Если $A(x) = A(y)$, то $\{x\} = \{y\}$, откуда $x = y$. □

**Лемма 9.** *Для любой максимальной антицепи $B \in AntQ$ существует элемент $x \in L$ такой, что $B = A(x)$.*

Доказательство. Пусть $B \in AntQ$. По лемме 7 множество $\bigcap\limits_{(a,b)\in B} [a, b]$ непусто. Пусть $x \in \bigcap\limits_{(a,b)\in B} [a, b]$. Тогда для любой пары $(a, b) \in B$ выполнено включение $x \in [a, b]$, откуда $B \subseteq A(x)$. Но $B$ — максимальная антицепь, а значит, $B = A(x)$. □

**Предложение 7.** *Ч.у. множество $Q$ не содержит близнецов.*

Доказательство. Предположим, что $(a, b)$ и $(c, d)$ — близнецы в $Q$.

Рассмотрим максимальную антицепь $A(b)$. Поскольку $b \in [a, b]$, имеем $(a, b) \in A(b)$. Отсюда, так как $(a, b)$ и $(c, d)$ являются близнецами в $Q$, получаем, что $(c, d) \in A(b)$, т. е. $b \in [c, d]$. Аналогичным образом можно показать, что $d \in [a, b]$, откуда получаем, что $b = d$. Двойственным образом можно проверить равенство $a = c$. Отсюда следует равенство $(a, b) = (c, d)$; это противоречит предположению о том, что $(a, b)$ и $(c, d)$ — близнецы в $Q$. □

Теперь можно сформулировать окончательный результат.

**Теорема.** *Пусть $L$ — конечная решетка.*

1) *Для любого ч.у. множества $Q \subseteq L^2$, удовлетворяющего свойствам* I–III, *с частичным порядком $\leq_Q$, заданным по правилу* (2), *решетки $AntQ$ и $L$ изоморфны.*

2) *Для любого конечного ч.у. множества $P$ без близнецов с решеткой максимальных антицепей, изоморфной $L$, существует ч.у. множество $Q \subseteq L^2$ с частичным порядком $\leq_Q$, заданным по правилу* (2), *удовлетворяющее свойствам* I–III *и изоморфное ч.у. множеству $P$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $Q \subseteq L^2$ удовлетворяет свойствам I–III. Построим изоморфизм $f$ между решетками $L$ и $AntQ$ следующим образом: для любого $x \in L$ положим $f(x) = A(x)$. Согласно лемме 8 для любого $x \in P$ множество $A(x)$ является максимальной антицепью в $Q$; в силу леммы 9 и следствия 8 отображение $f$ биективно. Проверим, что $f$ сохраняет порядок.

Пусть $x \leq_L y$. Покажем, что тогда $A(x) \trianglelefteq A(y)$. Для этого достаточно проверить выполнение п. 3 леммы 1. Пусть $(a,b) \in A(x), (c,d) \in A(y)$ и пары $(a,b)$ и $(c,d)$ сравнимы в $Q$. Поскольку $a \leq_L x \leq_L y \leq_L d$, выполнено неравенство $a \leq_L d$. Отсюда следует, что неравенство $(c,d) <_Q (a,b)$ невозможно, а значит, выполнено неравенство $(a,b) \leq_Q (c,d)$.

Пусть теперь $x, y \in L$ и $A(x) \trianglelefteq A(y)$. Покажем, что тогда $x \leq_L y$. Пусть $(a,b) \in A(x)$ и $(c,d) \in A(y)$. Неравенство $A(x) \trianglelefteq A(y)$ означает, что либо $(a,b) \leq_Q (c,d)$, либо $(a,b) \,||_Q\, (c,d)$. В обоих случаях с учетом леммы 5, свойства II ч.у. множества $Q$ и неравенств $a \leq_L b$, $c \leq_L d$ получаем, что $a \leq_L d$.

Таким образом, для любых пар $(a,b) \in A(x)$ и $(c,d) \in A(y)$ выполнено неравенство $a \leq_L d$. Следовательно, выполнено неравенство

$$\bigvee_{(a,b) \in A(x)} a \leq_L \bigwedge_{(c,d) \in A(y)} d.$$

По следствию 7 выполнены равенства

$$x = \bigvee_{(a,b) \in A(x)} a, \qquad y = \bigwedge_{(c,d) \in A(y)} d,$$

откуда $x \leq_L y$.

Итак, $f$ — биеция между $L$ и $AntQ$, сохраняющая порядок, т. е. $L$ и $AntQ$ изоморфны как ч.у. множества. Тогда они изоморфны как решетки. Кроме того, по предложению 7 $Q$ — ч.у. множество без близнецов.

2) Пусть $P$ — конечное ч.у. множество без близнецов и с решеткой максимальных антицепей, изоморфной решетке $L$. Рассмотрим множество пар

$$Q = \{(m_x, M_x) \mid x \in P\} \subseteq (AntP)^2.$$

Так как для любого $x \in P$ выполнено неравенство $m_x \trianglelefteq M_x$, множество $Q$ удовлетворяет свойству I. По предложению 3 и следствию 4 $Q$ удовлетворяет свойствам II и III соответственно. Зададим на $Q$ частичный порядок $\leq_Q$ по правилу (2). Поскольку $P$ — ч.у. множество без близнецов, для любых элементов $x, y \in P$ равенство $(m_x, M_x) = (m_y, M_y)$ равносильно равенству $x = y$, а по определению отношения $<_Q$ и по предложению 1 неравенство $(m_x, M_x) <_Q (m_y, M_y)$ равносильно неравенству $x <_L y$. Следовательно, отображение $f\colon P \to Q$, действующее по правилу $f(x) = (m_x, M_x)$, является биекцией, сохраняющей порядок, а значит, является изоморфизмом ч.у. множеств $P$ и $Q$. Поскольку решетки $AntP$ и $L$ изоморфны, можно считать, что $Q \subseteq L^2$. На этом доказательство теоремы завершается. $\square$

Таким образом, все конечные частично упорядоченные множества с решеткой максимальных антицепей, изоморфной конечной решетке $L$, — это в точности все подмножества множества $L^2$, удовлетворяющие свойствам I–III с частичным порядком $\leq_Q$ либо полученные из таких добавлением некоторого числа близнецов.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. **Birkhoff G.** Rings of sets// Duke Math. J. 1937. Vol. 3, no. 3. P. 443–454.
2. **Behrendt G.** Maximal antichains in partially ordered sets // Ars Combin. 1988. No. 25C. P. 149–157.
3. **Reuter K.** The jump number and the lattice of maximal antichains // Discrete Math. 1991. Vol. 88, iss. 2–3. P. 289–307.
4. **Morvan M., Nourine L.** Simplicial elimination schemes, extremal lattices and maximal antichain lattices // Order. 1996. Vol. 13, iss. 2. P. 159–173. doi: 10.1007/BF00389839 .
5. **Ganter B., Wille R.** Formal concept analysis: Mathematical foundations. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999. 284 p. doi: 10.1007/978-3-642-59830-2 .
6. **Garg V.** Maximal antichain lattice algorithms for distributed computations // Internat. Conf. on Distributed Computing and Networking. 2013. P. 240–254. (Lecture Notes Comp. Sci., vol. 7730.) doi: 10.1007/978-3-642-35668-1_17 .

Дерендяев Илья Александрович
магистрант
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: ilia.derendiaev@yandex.ru

Поступила 19.05.2017

**REFERENCES**

1. Birkhoff G. Rings of sets. *Duke Math. J.*, 1937, vol. 3, no. 3, pp. 443–454.
2. Behrendt G. Maximal antichains in partially ordered sets. *Ars Combin.*, 1988, no. 25C, pp. 149–157.
3. Reuter K. The jump number and the lattice of maximal antichains. *Discrete Math.*, 1991, vol. 88, iss. 2-3, pp. 289–307.
4. Morvan M., Nourine L. Simplicial elimination schemes, extremal lattices and maximal antichain lattices. *Order*, 1996, vol. 13, iss. 2, pp. 159–173. doi: 10.1007/BF00389839 .
5. Ganter B., Wille R. *Formal Concept Analysis: Mathematical foundations*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999, 284 p. doi: 10.1007/978-3-642-59830-2 .
6. Garg V. Maximal antichain lattice algorithms for distributed computations. Internat. Conf. on Distributed Computing and Networking, 2013, Ser. Lecture Notes Comp. Sci., vol. 7730, pp. 240–254. doi: 10.1007/978-3-642-35668-1_17 .

The paper was received by the Editorial Office on May 19, 2017.

*Ilia Aleksandrovich Derendiaev*, graduate student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: ilia.derendiaev@yandex.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.955.8

# КОНТАКТНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОНТАКТА[1]

**А. А. Ершов**

Рассмотрено проводящее тело в форме параллелепипеда, по торцам которого подключены малые контакты квадратной формы. Потенциал электрического тока моделируется при помощи краевой задачи для уравнения Лапласа в параллелепипеде. По всей границе задана нулевая нормальная производная, кроме областей границы под контактами, где предполагается, что производная по нормали равна ненулевой постоянной. Физически такое условие соответствует наличию тонкой плохо проводящей плёнки на поверхности контактов. Решение данной задачи получено методом разделения переменных, затем найдено электрическое сопротивление как некоторый функционал от решения в виде суммы двойного ряда. Главной целью работы является исследование зависимости сопротивления от малого параметра, характеризующего размер контактов. Главный член этой асимптотики и есть контактное сопротивление. Математическая проблема заключается в том, что сумма ряда, выражающая сопротивление, зависит от малого параметра сингулярно: при стремлении его к нулю ряд расходится. В качестве метода решения данной задачи использована замена ряда на двумерный интеграл. Найден главный член асимптотики и оценка остатка. Главный вклад в оценку остатка вносит разность между двумерным интегралом и двойной суммой.

Ключевые слова: контактное сопротивление, краевая задача, электрический потенциал, уравнение Лапласа, малый параметр.

**A. A. Ershov. Contact resistance of a square contact.**

We consider a conductive body in the form of a parallelepiped with small square contacts attached to its ends. The potential of the electric current is modelled by a boundary value problem for the Laplace equation in a parallelepiped. The zero normal derivative is assigned on the boundary except for the areas under the contacts, where the derivative is a nonzero constant. Physically, this condition corresponds to the presence of a low-conductivity film on the surface of the contacts. The problem is solved by separation of variables, and then the electrical resistance is found as a functional of the solution in the form of the sum of a double series. Our main aim is to study the dependence of the resistance on a small parameter characterizing the size of the contacts. The leading term of the asymptotics that expresses this dependence is the contact resistance. The mathematical problem is to treat the singular dependence of the sum of the series corresponding to the resistance on the small parameter: the series diverges as the small parameter vanishes. We solve this problem by replacing the series with a two-dimensional integral. We find the leading term of the asymptotics and estimate the remainder. It turns out that the main contribution to the remainder is made by the difference between the two-dimensional integral and the double sum.

Keywords: contact resistance, boundary value problem, electric potential, Laplace equation, small parameter.

**MSC:** 35C20, 35Q60

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-105-113

## Введение

Одними из первых работ, посвященных изучению контактного электрического сопротивления или сопротивления области стягивания линий тока к пятну контакта, являются работы Р. Хольма [1; 2], но данная задача является до сих пор актуальной (см., например, [3; 4]).

Как известно, электрический потенциал проводника $\varphi$ моделируется краевой задачей для уравнения Лапласа. Если на поверхности проводника обычно задается условие $\partial\varphi/\partial n = 0$, которое следует из естественного предположения, что нормальная составляющая плотности тока на поверхности образца равна нулю, кроме точек под токовыми электродами, то на контактной поверхности задаются различные условия. Например, Р. Хольм в своей монографии [5] выделял два основных типа граничных условий на контактной поверхности:

[1]Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10018).

1) $\varphi = \text{const}$ в случае так называемых эквипотенциальных контактов,

2) $\partial\varphi/\partial n = \text{const}$ в случае равномерной плотности тока, что происходит, если поверхность контакта покрыта тонкой пленкой.

Знание контактного сопротивления помогает приближенно решить известную задачу вычисления сопротивления проводника по его форме (см., например, [6, гл. 2, § 8]). Например, в случае двух круглых эквипотенциальных контактов радиуса $\varepsilon$ электрическое сопротивление проводника с постоянной удельной проводимостью $\sigma$ есть

$$R = \frac{1}{2\sigma\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

В случае же двух круглых контактов с постоянной плотностью тока на поверхности известна [5, ч. 1, § 5] следующая асимптотика

$$R = \frac{2}{\pi\sigma\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \to 0.$$

Также Р. Хольмом замечено [5, ч. 1, § 4], что сопротивление стягивания эллиптического контактного пятна на плоской поверхности полубесконечного тела играет в теории контактов большую роль. Отметим, что в монографии [5] приведен следующий главный член (и остальные члены в [7]) асимптотики электрического сопротивления образца произвольной формы в случае двух малых эквипотенциальных контактов $\gamma_1^\varepsilon$ и $\gamma_2^\varepsilon$:

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\varepsilon}\Big(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\Big) + O(1), \quad \varepsilon \to 0,$$

где $\sigma$ — удельная проводимость материала проводника, $\gamma_k^\varepsilon = \{z : \varepsilon^{-1} \in \gamma_k\}$, $k = 1, 2$ — малые контакты, образованные сжатием плоских фигур $\gamma_1$ и $\gamma_2$ в $\varepsilon^{-1}$ раз, $C_1$, $C_2$ — емкости (см., например, [8, гл. 2, § 1; 9, гл. 2, § 3]) плоских фигур $\gamma_1$ и $\gamma_2$. Причем известно (см., например, [10, гл. 1, § 4]), что если $\gamma_1$ — единичный круг, то $C_1 = 2/\pi$, а если $\gamma_1$ — эллипс с осями a и b, то $C_1 = a/(K(c/a))$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $K(z) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - z^2 \sin^2 t}}$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Однако, на этом список плоских фигур с известной „аналитической“ емкостью заканчивается.

Итак, целью нашей работы является нахождение аналитического значения сопротивления стягивания малого квадратного контакта с постоянной плотностью тока на нем. Двумерный аналог подобных исследований опубликован в работах [11–13].

## 1. Сведение к математической постановке

По определению контактного сопротивления Р. Хольма мы должны вычислить электрическое сопротивление полубесконечного тела следующим образом. Пусть $u(x, y, z)$ — решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad z > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \begin{cases} -\dfrac{I}{4\varepsilon^2\sigma}, \quad (x, y) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon), \\ 0, \quad (x, y) \notin [-\varepsilon, \varepsilon] \times [-\varepsilon, \varepsilon], \end{cases} \\ u(x, y, z) \to 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty. \end{cases}$$

Здесь функция $u(x, y, z)$ является электрическим потенциалом внутри этого полубесконечного тела, $\sigma$ — проводимость, а $I$ — сила тока, протекающая через квадратный контакт со стороной $2\varepsilon$. Используя функцию Грина для полупространства в случае второй краевой задачи

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}}\right),$$

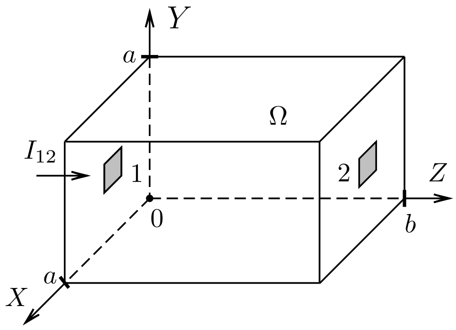



Схема протекания тока через образец.

можно найти

$$u(x,y,z) = -\iint\limits_{\{\zeta=0\}} G(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\xi,\eta,\zeta)dS = \frac{I}{4\varepsilon^2\sigma}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}},$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к области $\{\zeta > 0\}$.

Тогда контактное сопротивление

$$R_{cont.} = \frac{W}{I^2} = \frac{1}{I^2}\iiint\limits_{z>0}\Big(\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)^2\Big)\sigma dxdydz,$$

где $W$ — мощность выделяемой энергии.

Однако, аналитическое вычисление данных интегралов связано со значительными трудностями, поэтому найдем контактное сопротивление иначе, как главный член асимптотики сопротивления тела конечных размеров с малыми квадратными контактами.

Вычислим асимптотику электрического сопротивления образца с формой параллелепипеда и подключенного с помощью двух малых квадратных контактов со стороной $2\varepsilon$ (см. рисунок) по малому параметру $\varepsilon$.

Электрический потенциал при протекании тока через образец прямоугольной формы $\Omega = \{(x,y,z) : 0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < b\}$ с малыми квадратными контактами может быть смоделирован с помощью решения следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \quad (x,y,z) \in \Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=0,a} = 0, \quad (y,z) \in (0,a)\times(0,b), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\Big|_{y=0,b} = 0, \quad (x,z) \in (0,a)\times(0,b), \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0,b} = \psi(x,y), \quad (x,y) \in (0,a)\times(0,a), \end{cases} \tag{1.1}$$

где функция

$$\psi(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{I_{12}}{4\sigma\varepsilon^2}, \quad (x,y) \in \Big(\dfrac{a}{2}-\varepsilon, \dfrac{a}{2}+\varepsilon\Big)\times\Big(\dfrac{a}{2}-\varepsilon, \dfrac{a}{2}+\varepsilon\Big), \\ 0, \quad (x,y) \in (0,a)^2 \setminus \Big[\dfrac{a}{2}-\varepsilon, \dfrac{a}{2}+\varepsilon\Big]^2, \end{cases}$$

$\sigma$ — удельная проводимость образца, $I_{12}$ — сила электрического тока, протекающего через контакты 1 и 2 (см. рисунок).

Поскольку нашей задачей является вычисление электрического сопротивления образца, а оно является свойством самого образца и не зависит от силы тока, протекающего через образец, то для сокращения записей мы можем принять $I_{12} = 4\sigma\varepsilon^2$. Кроме того, обозначим поверхность первого контакта через

$$\gamma_1^\varepsilon = \{(x,y,z)\colon a/2-\varepsilon < x < a/2+\varepsilon, a/2-\varepsilon < y < a/2+\varepsilon, z=0\},$$

а поверхность второго контакта через

$$\gamma_2^\varepsilon = \{(x,y,z) : a/2-\varepsilon < x < a/2+\varepsilon, a/2-\varepsilon < y < a/2+\varepsilon, z=b\}.$$

В этих обозначениях задачу (1.1) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0, \quad (x,y,z)\in\Omega, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}_\Omega} = 0, \quad (x,y,z)\in\partial\Omega\backslash\{\overline{\gamma_1^\varepsilon}\cup\overline{\gamma_2^\varepsilon}\}, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = -1, \quad (x,y,z)\in\{\gamma_1^\varepsilon\cup\gamma_2^\varepsilon\}, \end{cases} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}_\Omega$ — внешняя нормаль к области $\Omega$.

Методом разделения переменных можно получить следующее решение задачи (1.2):

$$\varphi(x,y,z) = A_0 - \frac{4\varepsilon^2}{a^2}z - \frac{2\varepsilon}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\cos\Big(\frac{2\pi n}{a}x\Big) + \cos\Big(\frac{2\pi n}{a}\,y\Big)\Big)$$

$$\times\frac{(-1)^n}{n^2}\frac{\sin\Big(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\Big)}{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{2\pi n}{a}\,b\Big)}\Big[\operatorname{ch}\Big(\frac{2\pi n}{a}z\Big) - \operatorname{ch}\Big(\frac{2\pi n}{a}(b-z)\Big)\Big]$$

$$-\frac{2a}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{mn\sqrt{m^2+n^2}}\frac{\sin\Big(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\Big)\sin\Big(\dfrac{2\pi m}{b}\,\varepsilon\Big)}{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{2\pi}{a}\,b\sqrt{m^2+n^2}\Big)}\cos\Big(\frac{2\pi n}{a}x\Big)\cos\Big(\frac{2\pi m}{a}\,y\Big)$$

$$\times\Big[\operatorname{ch}\Big(\frac{2\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}\,z\Big) - \operatorname{ch}\Big(\frac{2\pi}{a}\sqrt{m^2+n^2}(b-z)\Big)\Big],$$

где $A_0$ — произвольная постоянная.

Как известно [10], мощность выделяемой энергии можно выразить через интеграл

$$W = \sigma\iiint\limits_{\Omega}\Big(\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big)^2\Big)\,dxdydz.$$

Тогда сопротивление

$$R = \frac{W}{I_{12}^2} = \frac{b}{\sigma a^2} + \frac{4}{\sigma a\pi}(S_1+S_2),$$

где

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi n}{a}\varepsilon\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\Big)^2}\frac{\operatorname{th}\Big(\dfrac{\pi n}{a}\,b\Big)}{n},$$

$$S_2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi n}{a}\,\varepsilon\Big)^2}\frac{\sin^2\Big(\dfrac{2\pi m}{a}\,\varepsilon\Big)}{\Big(\dfrac{2\pi m}{a}\,\varepsilon\Big)^2}\frac{\operatorname{th}\Big(\dfrac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+n^2}\Big)}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Для суммы $S_1$ в работах [11; 13] уже была вычислена следующая асимптотика

$$S_1 = \ln\Big(\frac{e^{3/2}a}{4\pi\varepsilon}\Big) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\pi n}{a}b}}{n\,\operatorname{ch}\Big(\dfrac{\pi n}{a}\,b\Big)} + \Bigg(\frac{1}{36} + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,e^{-\frac{\pi n}{a}b}}{\operatorname{ch}\Big(\dfrac{\pi n}{a}\,b\Big)}\Bigg)\Big(\frac{2\pi\varepsilon}{a}\Big)^2 + O\Big(\frac{\varepsilon^4}{a^4}\Big), \quad \frac{\varepsilon}{a}\to 0,$$

поэтому нашей задачей является нахождение асимптотики суммы ряда $S_2$.

## 2. Вычисление асимптотики

**Теорема 1.** *Имеет место следующее асимптотическое равенство*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2}\frac{\operatorname{th}\left(\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+n^2}\right)}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{\pi}{\mu}\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\Big)+O\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big),\quad \mu\to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\operatorname{th}x=1-e^{-x}/\operatorname{ch}x$, то

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2}\frac{\operatorname{th}\left(\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+n^2}\right)}{\sqrt{m^2+n^2}}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2}\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+n^2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi b}{a}\sqrt{m^2+n^2}\right)\sqrt{m^2+n^2}}+O(\mu^2). \tag{2.3}$$

Обозначим через

$$F(m,n,\mu)=\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{\sin^2(\mu m)}{(\mu m)^2}\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Заменим сингулярный ряд из правой части (2.3) на интеграл следующим образом:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F(m,n,\mu)=J+H, \tag{2.4}$$

где

$$J=\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}F(x,y,\mu)dxdy,\qquad H=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\int_m^{m+1}\big(F(m,n,\mu)-F(x,y,\mu)\big)dxdy.$$

Разобьем интеграл $J$ на слагаемые следующим образом:

$$J=\int_1^{\infty}\int_1^{\infty}\frac{\sin^2(\mu x)}{(\mu x)^2}\frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=J_1-2J_2+J_3,$$

где

$$J_1=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(\mu x)}{(\mu x)^2}\frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\left[\begin{array}{c}x=\xi/\mu,\\ y=\eta/\mu\end{array}\right]=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2\xi}{\xi^2}\frac{\sin^2\eta}{\eta^2}\frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$
$$=\left[\begin{array}{c}\xi=r\cos\varphi,\\ \eta=r\sin\varphi,\\ |I|=r\end{array}\right]=\frac{1}{\mu}\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2(r\cos\varphi)}{r^2\cos^2\varphi}\,\frac{\sin^2(r\sin\varphi)}{r^2\sin^2\varphi}d\varphi dr$$
$$=\frac{1}{\mu}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos(2r\cos\varphi))(1-\cos(2r\sin\varphi))}{4r^4}drd\varphi$$
$$=\frac{1}{4\mu}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\int_0^{\infty}r^{-4}\Big(1-\cos(2r\cos\varphi)-\cos(2r\sin\varphi)$$
$$+\ \frac{\cos(2r(\cos\varphi+\sin\varphi))+\cos(2r(\cos\varphi-\sin\varphi))}{2}\Big)drd\varphi$$

$$= \frac{1}{4\mu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\int\limits_0^{\infty}(\dots)\frac{dr^{-3}}{-3}\,d\varphi = \frac{1}{4\mu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\Big((\dots)\frac{r^{-3}}{-3}\Big|_{r=0}^{\infty} - \int\limits_0^{\infty}\frac{r^{-3}}{-3}(\dots)'_r\Big)d\varphi$$

$$= \dots = \frac{1}{6\mu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\int\limits_0^{\infty} r^{-1}\Big(-2\cos^3\varphi\,\sin(2r\cos\varphi) - 2\sin^3\varphi^3\varphi\,\sin(2r\sin\varphi)$$

$$+ (\cos\varphi+\sin\varphi)^3\sin(2r(\cos\varphi+\sin\varphi)) + (\cos\varphi-\sin\varphi)^3\sin(2r(\cos\varphi-\sin\varphi))\Big)drd\varphi$$

$$= \frac{1}{6\mu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\Big(-2\cos^3\varphi\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(r\,2\cos\varphi)}{r}\,dr - 2\sin^3\varphi\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(r\,2\sin\varphi)}{r}\,dr$$

$$+ (\cos\varphi+\sin\varphi)^3\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(r\,2(\cos\varphi+\sin\varphi))}{r}\,dr + (\cos\varphi-\sin\varphi)^3\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(r\,2(\cos\varphi-\sin\varphi))}{r}\,dr\Big)d\varphi$$

$$= \frac{1}{6\mu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\Big(-2\cos^3\varphi\,\mathrm{sign}(\cos\varphi)\,\frac{\pi}{2} - 2\sin^3\varphi\,\mathrm{sign}(\sin\varphi)\,\frac{\pi}{2}$$

$$+ (\cos\varphi+\sin\varphi)^3\,\mathrm{sign}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,\frac{\pi}{2} + (\cos\varphi-\sin\varphi)^3\,\mathrm{sign}(\cos\varphi+\sin\varphi)\,\frac{\pi}{2}\Big)d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{12\mu}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\Big(-2|\cos\varphi|^3 - 2|\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi+\sin\varphi|^3 + |\cos\varphi-\sin\varphi|^3\Big)d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{6\mu}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{1}{\sin^2\varphi\sin^2\varphi}\Big(-2\cos^3\varphi - 2\sin^3\varphi + (\cos\varphi+\sin\varphi)^3 + (\cos\varphi-\sin\varphi)^3\Big)d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{6\mu}\int\limits_0^{\pi/4}\frac{6\cos\varphi-2\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{\mu}\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})\Big),$$

так как $\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(at)}{t}\,dt = \mathrm{sign}(a)\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x) = \mathrm{sign}(a)\frac{\pi}{2}$ (здесь $\mathrm{Si}(\cdot)$ — интегральный синус [14, § 9.9], $\mathrm{sign}(\cdot)$ — знак числа),

$$0 < J_2 = \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{1}\frac{\sin^2(\mu x)}{(\mu x)^2}\frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{1}\frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\leqslant \int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \int\limits_1^{\infty}\int\limits_0^{1}\frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{1}drd\varphi + \int\limits_1^{\infty}\frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2}\frac{dy}{y} = O(\ln\mu)$$

в силу оценок из [11],

$$J_3 = \int\limits_0^{1}\int\limits_0^{1}\frac{\sin^2(\mu x)}{(\mu x)^2}\frac{\sin^2(\mu y)}{(\mu y)^2}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = O(1).$$

Следовательно,

$$J=\frac{\pi}{\mu}\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{3}+\ln(1+\sqrt{2})\Big)+O(\ln\mu),\quad \mu\to 0. \tag{2.5}$$

Сумму $H$ разобьем на два слагаемых следующим образом: $H=H_1+H_2$, где

$$H_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\int\limits_{m}^{m+1}\big(F(m,n,\mu)-F(x,n,\mu)\big)dxdy,$$

$$H_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\int\limits_{m}^{m+1}\big(F(x,n,\mu)-F(x,y,\mu)\big)dxdy.$$

Оценим $H_1$ по модулю. По теореме Лагранжа для любого $x\in[m,m+1]$ выполняется равенство

$$F(x,n,\mu)-F(m,n,\mu)=F'_x(\xi_m,n,\mu)\cdot(x-m),$$

где $\xi_m\in(m,m+1)$. Поскольку

$$F'_x(x,y,\mu)=\frac{2\sin(\mu x)\sin^2(\mu y)\cos(\mu x)}{\mu^3x^2y^2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2\sin^2(\mu x)\sin^2(\mu y)}{\mu^4x^3y^2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{\sin^2(\mu x)\sin^2(\mu y)}{\mu^4xy^2(x^2+y^2)^{3/2}},$$

то

$$|F'_x(\xi_m,n,\mu)|\leqslant\left|\frac{2\sin(\mu\xi_m)\sin^2(\mu n)\cos(\mu\xi_m)}{\mu^3\xi_m^2n^2\sqrt{\xi_m^2+n^2}}-\frac{2\sin^2(\mu\xi_m)\sin^2(\mu n)}{\mu^4\xi_m^3n^2\sqrt{\xi_m^2+n^2}}\right|+\frac{\sin^2(\mu\xi_m)\sin^2(\mu n)}{\mu^4\xi_mn^2(\xi_m^2+n^2)^{3/2}}$$

$$\leqslant\left|\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{\sin(\mu\xi_m)}{\mu\xi_m}\Big(2\cos(\mu\xi_m)-\frac{2\sin(\mu\xi_m)}{\mu\xi_m}\Big)\frac{1}{\xi_m\sqrt{\xi_m^2+n^2}}\right|+\frac{\xi_m}{(\xi_m^2+n^2)^{3/2}}$$

$$\leqslant\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{4}{\xi_m\sqrt{2\,\xi_m n}}+\frac{\xi_m}{(\xi_m^2+n^2)^{3/2}},$$

соответственно, $|H_1|\leqslant T_1+T_2$, где

$$T_1=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\int\limits_{m}^{m+1}\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{4}{\xi_m\sqrt{2\,\xi_m n}}(x-m)dxdy=\sqrt{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\xi_m\sqrt{\xi_m}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\leqslant\sqrt{2}\,\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{(\mu y)^2\sqrt{y}}\max_{z\in[y,y+1]}\sin^2(\mu z)dy=\Big[y=\frac{\eta}{\mu}\Big]=\sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)\int\limits_{\mu}^{\infty}\frac{1}{(\eta)^2\sqrt{\eta}}\max_{z\in[\eta,\eta+\mu]}\sin^2(z)d\eta$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)\Bigg(\int\limits_{\mu}^{1/2}\frac{\sin^2(\eta+\mu)}{\eta^2\sqrt{\eta}}\,d\eta+\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{1}{\eta^2\sqrt{\eta}}\max_{z\in[\eta,\eta+\mu]}\sin^2(z)d\eta\Bigg)$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{2}{\mu}}\,\zeta\Big(\frac{3}{2}\Big)\Bigg(\int\limits_{0}^{1/2}\frac{\sin^2(2\eta)}{\eta^2\sqrt{\eta}}\,d\eta+\int\limits_{1/2}^{\infty}\frac{d\eta}{\eta^2\sqrt{\eta}}\Bigg)=O\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big),$$

$$T_2=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1}\int\limits_{m}^{m+1}\frac{\xi_m}{(\xi_m^2+n^2)^{3/2}}\,dxdy=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_m}{(\xi_m^2+n^2)^{3/2}}=O(1),$$

так как $\dfrac{\xi_m}{(\xi_m^2+n^2)^{3/2}}\sim\dfrac{1}{m^2n^3}$ при $m,n\to\infty$.

Следовательно, $H_1 = O(1/\sqrt{\mu})$. Аналогично, дополнительно применяя теорему о среднем, можно доказать, что $H_2 = O(1/\sqrt{\mu})$. Таким образом, мы получили оценку

$$H = O\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big), \quad \mu \to 0. \tag{2.6}$$

Подставляя равенства (2.5) и (2.6) в (2.4), получим, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} F(m,n,\mu) = \frac{\pi}{\mu}\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})\Big) + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\Big).$$

Отсюда и из (2.3) следует утверждение теоремы.

## Заключение

Используя утверждение теоремы 1, получаем, что сопротивление области стягивания линий тока двух квадратных контактов со стороной $2\varepsilon$ составляет

$$\frac{2}{\sigma\pi\varepsilon}\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})\Big),$$

соответственно контактное сопротивление одного квадратного контакта со стороной $2\varepsilon$ есть

$$R_{cont.} = \frac{1}{\sigma\pi\varepsilon}\Big(\frac{1-\sqrt{2}}{3} + \ln(1+\sqrt{2})\Big) \approx 0.2366 \cdot \frac{1}{\sigma\varepsilon}.$$

В силу определения контактного сопротивления Р. Хольма других членов асимптотики для полубесконечного проводника в его составе быть не может. Нахождение более полной асимптотики электрического сопротивления параллелепипеда может быть задачей дальнейших исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Holm R.** Über Kontaktwiderstände, besonders bei Kohlekontakten // Zeitschrift für technische Physik. 1922. Vol. 3, no. 9, P. 290–294; no. 10, P. 320–327; no. 11, P. 349–357.
2. **Holm R., Störmer R.** Eine Kontrolle des metallischen Charakters von gereinigten Platinkontakten // Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern. 1930. Band 9, heft 2. P. 323–330.
3. **Павлейно О.М., Павлов В.А., Павлейно М.А.** Уточнение границ применимости хольмовского приближения для расчета сопротивления электрических контактов // Электронная обработка материалов. 2010. Т. 46, № 5. С. 56–62.
4. **Затовский В.Г. Минаков Н.В.** Экспериментальное моделирование сопротивления стягивания // Электрические контакты и электроды. 2010. № 10. С. 132–139.
5. **Хольм Р.** Электрические контакты. М.: Иностранная литература, 1961. 314 с.
6. **Сильвестер П., Феррари Р.** Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков. М.: Мир, 1986. 229 с.
7. **Гадыльшин Р.Р., Ершов А.А., Репьевский С.В.** Об асимптотической формуле для электрического сопротивления в проводнике с малыми контактами // Уфим. мат. журн. 2015. Т. 7, № 3. С. 16–28.
8. **Полиа Г., Сегё Г.** Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. 336 с.
9. **Ландкоф Н.С.** Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966. 515 с.
10. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика (в 10 т). Т. 8: Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2005. 656 с.
11. **Ершов А.А.** Асимптотика решения задачи Неймана с дельтообразной граничной функцией // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 479–485.

12. **Ершов А.А.** Асимптотика решения уравнения Лапласа со смешанными условиями на границе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 7. С. 1064–1080.
13. **Ершов А.А.** К задаче об измерении электропроводности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 6. С. 1004–1007.
14. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 296 с.


Поступила 13.02.2017

Ершов Александр Анатольевич
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
доцент
Челябинский государственный университет,
г. Челябинск
e-mail: ale10919@yandex.ru

## REFERENCES


1. Holm R. Über Kontaktwiderstände, besonders bei Kohlekontakten. *Zeitschrift für technische Physik*, 1922, vol. 3, no. 9, pp. 290–294; no. 10, pp. 320–327; no. 11, pp. 349–357.
2. Holm R. Störmer R. Eine Kontrolle des metallischen Charakters von gereinigten Platinkontakten. *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*, 1930, Band 9, heft 2, pp. 323–330.
3. Pavleino O.M., Pavlov V.A., Pavleino M.A. Verification of the boundaries of the applicability of the holm approximation for the calculation of the resistance of electric contacts. *Surf. Engin. Appl. Electrochem.*, 2010, vol. 46, no. 5, pp. 440–446. doi: 10.3103/S1068375510050078 .
4. Zatovsky V.G., Minakov N.V. Experimental modeling of the resistance of the retraction. *Elektricheskie kontaktyi i elektrodyi*, 2010, no. 10, pp. 132–139 (in Russian).
5. Holm R. *Electric contacts handbook.* Berlin: Springer-Verlag, 1958, 527 p. Translated under the title *Elektricheskie kontakty*, Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1961, 314 p.
6. Silvester P.P., Ferrari R.L. *Finite elements for electrical engineers.* New York: Cambridge University Press, 1983, 512 p. Translated under the title *Metod konechnykh elementov dlya radioinzhenerov i inzhenerov-elektrikov*, Moscow, Mir Publ., 1986, 229 p.
7. Gadyl'shin R.R., Ershov A.A., Repyevsky S.V. On asymptotic formula for electric resistance of condactor with small contacts. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 3, pp. 15–27. doi: 10.13108/2015-7-3-15 .
8. Pólya G., Szegö G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1951, 279 p. Translated under the title *Izoperimetricheskie neravenstva v matematicheskoi fizike*, Moscow, Gos. Izd-vo Fiz.-Mat. Lit. Publ., 1962, 336 p.
9. Landkof N.S. *Foundations of Modern Potential Theory*, Berlin, Springer, 1973, 424 p. Original Russian text published in *Osnovy sovremennoi teorii potentsiala*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 515 p.
10. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Course of Theoretical Physics. Vol. 8: Electrodynamics of Continuous Media*, 1rst ed., Oxford: Butterworth-Heinemann, 1984, 460 p. ISBN 978-0-7506-2634-7.
11. Ershov A.A. Asymptotics of the solution to the Neumann problem with a delta-function-like boundary function. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 3, pp. 457–463. doi: 10.1134/S0965542510030073 .
12. Ershov A.A. Asymptotics of the solution of Laplace's equation with mixed boundary conditions. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 7, pp. 994–1010. doi: 10.1134/S0965542511060066 .
13. Ershov A.A. On measurement of electrical conductivity. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2013, vol. 53, no. 6, pp. 823–826. doi: 10.1134/S0965542513060079 .
14. Bateman H., Erdelyi A. *Higher transcendental functions: vol. 2.* New York: McGraw-Hill Book Company Inc., 1953, 414 p.


The paper was received by the Editorial Office on February, 13, 2017.

*Aleksandr Anatol'evich Ershov,* Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ale10919@yandex.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.856

# ВАРИАНТ АФФИННО-МАСШТАБИРУЮЩЕГО МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧИ КОНИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ НА КОНУСЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА[1]

**В. Г. Жадан**

Рассматривается линейная задача конического программирования, в которой конус является прямым произведением конусов второго порядка (конусов Лоренца). Для ее решения предлагается прямой метод аффинно-масштабирующего типа, обобщающий соответствующий метод для линейного программирования. Метод можно рассматривать как специальный способ решения системы необходимых и достаточных условий оптимальности для пары взаимно двойственных задач конического программирования. На основании этих условий выводится зависимость двойственных переменных от прямых, которая подставляется в условие дополнительности. Получившаяся система уравнений относительно прямых переменных решается с помощью метода простой итерации. Стартовые точки в методе принадлежат конусу, но не обязательно должны удовлетворять линейным ограничениям типа равенства. При предположении о невырожденности решений прямой и двойственной задач и их строгой дополнительности доказывается локальная сходимость метода с линейной скоростью.

Ключевые слова: задача конического программирования, конус второго порядка, аффинно-масштабирующий метод, локальная сходимость.

**V. G. Zhadan. A variant of the affine-scaling method for a cone programming problem on a second-order cone.**

A linear cone programming problem in which the cone is the direct product of second-order cones (Lorentz cones) is considered. For its solution we propose a direct affine-scaling type method generalizing the corresponding method used in linear programming. The method can be considered as a special way to solve a system of necessary and sufficient optimality conditions for a pair of mutually dual cone programming problems. These conditions are used to derive the dependence of the dual variables on the primal variables, and the dependence is substituted into the complementarity condition. The obtained system of equations is solved with respect to the primal variables by the simple iteration method. The starting points in the method belong to the cone but do not necessarily satisfy the linear equality-type constraints. The local linear convergence of the method is proved under the assumption that the solutions of the primal and dual problems are nondegenerate and strictly complementary.

Keywords: cone programming, second-order cone, affine-scaling method, local convergence.

**MSC:** 90C22

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-114-124

## Введение

Линейная задача конического программирования на конусе второго порядка является весьма универсальной постановкой, к частным случаям которой относятся задачи линейного и квадратичного программирования, включая задачи с квадратичными ограничениями [1]. К решению задач конического программирования сводятся многие другие оптимизационные задачи, например задачи робастного и комбинаторного программирования [2]. Хотя задача конического программирования на конусе второго порядка может быть переформулирована как задача полуопределенного программирования, имеется целый ряд причин рассматривать данную постановку отдельно, особенно это касается численных алгоритмов.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-08259, а также при содействии Программы ведущих научных школ (НШ-8860.2016.1).

Теории и методам решения задач конического и полуопределенного программирования в последнее время уделяется большое внимание [3]. Многие численные методы решения линейных задач конического программирования получены как обобщения соответствующих методов для задач линейного программирования. Среди них наиболее популярны прямо-двойственные методы аффинно-масштабирующего типа, однако имеются обобщения симплекс-метода [4–6]. Рассматриваемый в настоящей работе численный метод также является переносом на случай задачи конического программирования барьерно-проективного метода [7], предложенного ранее для линейного программирования и принадлежащего к классу аффинно-масштабирующих методов. В [8] приводится его обобщение на задачи полуопределенного программирования.

Работа состоит из четырех разделов и заключения. В разд. 1 приводятся вспомогательные сведения из теории задач конического программирования на конусе второго порядка. В разд. 2 дается постановка линейной задачи конического программирования и двойственной к ней. В разд. 3 рассматривается численный алгоритм, в разд. 4 доказывается его локальная сходимость.

Всюду ниже через $\mathrm{Diag}(C_1, \ldots, C_k)$ и $D(c)$ обозначаются соответственно блочно-диагональная матрица с блоками $C_1, \ldots, C_k$ и диагональная матрица с вектором $c$ на диагонали. Символ $I_k$ используется для обозначения единичной матрицы порядка $k$, символ $0_{kl}$ — для обозначения нулевой матрицы размерности $k \times l$. Символом $0_k$ обозначается нулевой $k$-мерный вектор.

## 1. Вспомогательные сведения

Пусть $K^s$ — конус второго порядка (конус Лоренца) в пространстве $\mathbb{R}^s$:

$$K^s = \left\{[x^0, \bar{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{s-1} \colon x^0 \geq \|\bar{x}\|\right\},$$

где $\|\bar{x}\|$ — евклидова норма вектора $\bar{x} = [x^1, \ldots, x^{s-1}]^T \in \mathbb{R}^{s-1}$. Границу и внутренность конуса $K^s$ обозначим соответственно $\partial K^s$ и $\mathrm{int} K^s$. Конус $K^s$ является самосопряженным. Он задает в $\mathbb{R}^s$ частичный порядок между векторами, а именно $x_1 \succeq_{K^s} x_2$, если $x_1 - x_2 \in K^s$. Строгое неравенство $x_1 \succ_{K^s} x_2$ означает, что $x_1 - x_2 \in \mathrm{int} K^s$. Считаем, что $s > 1$, при $s = 1$ конус $K^1$ есть просто неотрицательная полуось действительной прямой.

Для $x = [x^0, \bar{x}]$ и $y = [y^0, \bar{y}]$ из $\mathbb{R}^s$ обозначим через $x \circ y$ их произведение, определяемое следующим образом:

$$x \circ y = \begin{bmatrix} x^T y \\ x^0 \bar{y} + y^0 \bar{x} \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Пространство $\mathbb{R}^s$ с таким произведением является йордановой алгеброй. Вектор $\mathbf{e} = [1, 0_{s-1}]^T$ при умножении (1.1) играет роль единицы, так как $x \circ \mathbf{e} = x$ для любого $x \in \mathbb{R}^s$.

С помощью симметричной матрицы $\mathrm{Arw}(x)$ порядка $s$, сопоставляемой вектору $x \in \mathbb{R}^s$ и имеющей вид

$$\mathrm{Arw}(x) = \begin{bmatrix} x^0 & \bar{x}^T \\ \bar{x} & x^0 I_{s-1} \end{bmatrix},$$

произведение $x \circ y$ может быть записано следующим образом:

$$x \circ y = \mathrm{Arw}(x) y = \mathrm{Arw}(y) x = \mathrm{Arw}(x)\mathrm{Arw}(y)\bar{e}, \tag{1.2}$$

где $\bar{e}$ — $s$-мерный вектор, состоящий из единиц.

Возьмем $x = [x^0; \bar{x}] \in \mathbb{R}^s$. Тогда $x$ можно представить в виде

$$x = \lambda_p p + \lambda_q q, \tag{1.3}$$

где $\lambda_p = x^0 + \|\bar{x}\|$, $\lambda_q = x^0 - \|\bar{x}\|$ и

$$p = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x}/\|\bar{x}\| \end{bmatrix}, \qquad q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{x}/\|\bar{x}\| \end{bmatrix}. \tag{1.4}$$

Векторы $p$ и $q$ принадлежат границе $\partial K^s$ конуса $K^s$ и таковы, что

$$p \circ q = 0_s, \qquad p + q = \mathbf{e}, \qquad p^2 = p, \qquad q^2 = q,$$

где $p^2 = p \circ p$, $q^2 = q \circ q$. Равенство (1.3) называется *спектральным разложением* вектора $x$. О паре векторов $(p,q)$, определяемой согласно (1.4), говорят как о *йордановом репере* $x$. Вектор $x \in \mathbb{R}^s$ принадлежит конусу $K^s$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{p,q} \geq 0$. В этом случае вектор $x$ называется *положительно полуопределенным*. Аналогично вектор $x \in \mathbb{R}^s$ называется *положительно определенным*, если $\lambda_{p,q} > 0$. Строгие неравенства имеют место в том и только в том случае, когда $x \in \mathrm{int} K^s$.

Векторы $p$ и $q$ из разложения (1.3) входят в число собственных векторов матрицы $\mathrm{Arw}(x)$, а именно если ввести в рассмотрение ортогональную матрицу

$$Q = Q(x) = \left[\sqrt{2}p, H, \sqrt{2}q\right], \tag{1.5}$$

где $H$ — матрица размерности $s \times (s-2)$, все столбцы которой ортогональны векторам $p$ и $q$, то столбцы матрицы $Q$ являются собственными векторами матрицы $\mathrm{Arw}(x)$. Коэффициенты $\lambda_p$ и $\lambda_q$ являются собственными значениями $\mathrm{Arw}(x)$, которые соответствуют собственным векторам $\sqrt{2}p$ и $\sqrt{2}q$. Еще одним собственным значением матрицы $\mathrm{Arw}(x)$ оказывается компонента $x^0$. Данное значение имеет кратность $s-2$, если $x \neq 0_s$.

Касательное пространство $\mathcal{T}_{K^s}(x)$ к конусу $K^s$ в точке $x \in K^s$ равняется всему пространству $\mathbb{R}^s$, если $x \in \mathrm{int} K^s$. В случае, когда $x \in \partial K^s$, например $x = \lambda_p p$, где $(p,q)$ — йордановый репер $x$, касательное пространство следующее: $\mathcal{T}_{K^s}(x) = \{y \in \mathbb{R}^s \colon \langle q, y \rangle = 0\}$ . Угловые скобки указывают на обычное скалярное произведение в соответствующем пространстве $\mathbb{R}^s$. Наконец, если $x = 0_s$, касательное пространство совпадает с нулевым подпространством.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу конического программирования следующего вида:

$$\min \sum_{i=1}^{r} \langle c_i, x_i \rangle, \qquad \sum_{i=1}^{r} A_i x_i = b, \qquad x_i \succeq_{K_i} 0_{n_i}, \qquad 1 \leq i \leq r. \tag{2.1}$$

Здесь $r \geq 1$, $b \in \mathbb{R}^m$ и $c_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $K_i = K^{n_i}$, $1 \leq i \leq r$. Матрицы $A_i$ имеют размерность $m \times n_i$. Относительно $n_i$ предполагаем, что $n_i > 1$ для всех индексов $1 \leq i \leq r$.

Обозначим $n = n_1 + \cdots + n_r$ и объединим векторы $c_i$ и $x_i$ в единые векторы-столбцы длины $n$, т. е. $c = [c_1; \ldots; c_r]$, $x = [x_1; \ldots; x_r]$. В них компоненты помещаются одна под другой, на что указывает знак точки с запятой при перечислении этих компонент. Аналогичное объединение проведем для матриц $A_i$ и конусов $K_i$, положив $\mathcal{A} = [A_1, \ldots, A_r]$, $\mathcal{K} = K_1 \times \cdots \times K_r$. Тогда $\mathcal{F}_P = \{x \in \mathcal{K} \colon \mathcal{A}x = b\}$ есть допустимое множество в задаче (2.1).

Двойственной к (2.1) является задача

$$\max \langle b, u \rangle, \qquad v_i = c_i - A_i^T u, \qquad v_i \succeq_{K_i} 0_{n_i}, \qquad 1 \leq i \leq r. \tag{2.2}$$

Если ввести вектор $v = [v_1; \ldots; v_r] \in \mathbb{R}^n$, то допустимое множество в задаче (2.2) можно записать в виде $\mathcal{F}_D = \left\{[u, v] \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{K} \colon \; v = c - \mathcal{A}^T u\right\}$. Предполагаем, что обе задачи (2.1) и (2.2) имеют решения и строки матрицы $A$ линейно независимы.

Для задач (2.1) и (2.2) имеет место *слабая двойственность*, т. е.

$$\langle c, x \rangle \geq \langle b, u \rangle \tag{2.3}$$

для любых $x \in \mathcal{F}_P$ и $u \in \mathbb{R}^m$ таких, что $[u, v] \in \mathcal{F}_D$.

Говорят, что задачи (2.1) и (2.2) *строго допустимы*, если найдутся соответственно точки $\hat{x} \in \mathcal{F}_P$ и $[\hat{u}, \hat{v}] \in \mathcal{F}_D$ такие, что $\hat{x} \succ_{\mathcal{K}} 0_n$ и $\hat{v} \succ_{\mathcal{K}} 0_n$ (условия Слейтера). В этом случае задачи (2.1) и (2.2) связаны между собой соотношением *сильной двойственности*, которая означает, что неравенство (2.3) для некоторых $x_* \in \mathcal{F}_P$ и $[u_*, v_*] \in \mathcal{F}_D$ выполняется как равенство. Точки $x_*$ и $[u_*, v_*]$ являются решениями соответственно задач (2.1) и (2.2), причем для $x_*$ и $v_*$ оказывается справедливым равенство $\langle x_*, v_* \rangle = 0$.

Решения $x_*$ и $[u_*, v_*]$ в этом случае удовлетворяют *условию дополнительности*, т. е. для каждой пары компонент $x_{*,i}$ и $v_{*,i}$ справедливо равенство $x_{*,i} \circ v_{*,i} = 0_{n_i}$, $1 \leq i \leq r$. Матрицы $\mathrm{Arw}(x_{*,i})$ и $\mathrm{Arw}(v_{*,i})$ коммутируют между собой. *Условие строгой дополнительности* означает, что помимо указанных равенств выполняется еще включение $x_* + v_* \in \mathrm{int}\mathcal{K}$. Понятно, что данное включение имеет место тогда и только тогда, когда $x_{*,i} + v_{*,i} \in \mathrm{int}K_i$ для каждого $1 \leq i \leq r$. В этом случае либо одна компонента принадлежит внутренности конуса $K_i$, другая — нулевая, либо обе они принадлежат границе конуса $K_i$.

Невырожденные точки в задачах (2.1) и (2.2) определяются с помощью *касательного пространства* $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(z)$ к конусу $\mathcal{K}$ в точке $z \in \mathcal{K}$. Данное касательное пространство получается как декартово произведение касательных пространств $\mathcal{T}_{K_i}(z_i)$, т. е. $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(z) = \mathcal{T}_{K_1}(z_1) \times \cdots \times \mathcal{T}_{\mathcal{K}_r}(z_r)$. Кроме того, нам потребуются нуль-пространство $\mathcal{N}_{\mathcal{A}}$ матрицы $\mathcal{A}$ и пространство столбцов $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^T}$ матрицы $\mathcal{A}^T$. Дадим определение невырожденности допустимых точек, следуя [1]. Эквивалентные определения невырожденности приводятся также в [9].

О п р е д е л е н и е. Точка $x \in \mathcal{F}_P$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(x) + \mathcal{N}_{\mathcal{A}} = \mathbb{R}^n$. Соответственно точка $[u, v] \in \mathcal{F}_D$ называется *невырожденной*, если $\mathcal{T}_{\mathcal{K}}(v) + \mathcal{R}_{\mathcal{A}^T} = \mathbb{R}^n$.

Если оптимальное решение $x_*$ прямой задачи (2.1) невырожденное, то решение $[u_*, v_*]$ двойственной задачи (2.2) единственное, и наоборот, если решение $[u_*, v_*]$ двойственной задачи невырожденное, то решение $x_*$ задачи (2.1) единственное.

Пусть $x \in \mathcal{K}$. Составим из $r$ векторов $x_i$, входящих в общий вектор $x$, три блока компонент: $x_B$, $x_I$ и $x_Z$. К блоку $x_B$ отнесем те ненулевые компоненты $x_i$, для которых $x_i \in \partial K_i$. Блок $x_I$ составляют те компоненты $x_i$, для которых $x_i \in \mathrm{int}K_i$. Наконец, в блок $x_Z$ входят только $x_i = 0_{n_i}$. Всюду ниже, не умаляя общности, считаем, что эти блоки располагаются в следующем порядке:

$$x = [x_B; x_I; x_Z], \tag{2.4}$$

причем $x_B$ и $x_I$ состоят из компонент:

$$x_B = [x_1; \ldots; x_{r_B}], \qquad x_I = [x_{r_B+1}; \ldots; x_{r_B+r_I}]. \tag{2.5}$$

Таким образом, $r_B + r_I + r_Z = r$. Аналогичное блочное представление будем использовать для матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}_B$, а именно: $\mathcal{A} = [\mathcal{A}_B, \mathcal{A}_I, \mathcal{A}_Z]$, $\mathcal{A}_B = [A_1, \ldots, A_{r_B}]$. Подобным образом поступаем и с вектором $v \in \mathcal{K}$, разбивая его на блоки $v_B$, $v_I$ и $v_Z$, а также разбиваем матрицу $\mathcal{A}$ в соответствие с разбиением $v$ на подматрицы $\mathcal{A}_B$, $\mathcal{A}_I$ и $\mathcal{A}_Z$. Отметим, что некоторые блоки $x$ и $v$ могут быть пустыми.

Предположим, что для $1 \leq i \leq r_B$ выполняется $x_i = \beta_i p_i \in \partial K_i$, где $(p_i, q_i)$ — репер $x_i$. Тогда $x \in \partial \mathcal{A}$. Пусть $A_i^{Q_L}$ обозначает матрицу $A_i Q_i^L$, где $Q_i^L$ — левая подматрица размерности $n_i \times (n_i - 1)$ ортогональной матрицы $Q_i = \left[\sqrt{2}p_i, H_i, \sqrt{2}q_i\right]$, имеющей вид (1.5) и состоящей из собственных векторов матрицы $\mathrm{Arw}(x_i)$, т. е. $Q_i^L = \left[\sqrt{2}p_i, H_i\right]$. Положим $\mathcal{A}_B^{Q_L} = \left[A_1^{Q_L}, \ldots A_{r_B}^{Q_L}\right]$.

Предположим, кроме того, что $v \in \partial\mathcal{K}$ и для компонент $v_i$, $1 \leq i \leq r_B$, выполняется $v_i = \beta_i q_i \in \partial K_i$, где $(p_i, q_i)$ есть репер $v_i$. Обозначим $A_i^p = A_i p_i$, $1 \leq i \leq r_B$, и составим матрицу $A_B^p = [A_1^p, \ldots, A_{r_B}^p]$.

Имеют место следующие критерии невырожденности в прямой и двойственной задачах [1].

**Критерий невырожденности в задаче (2.1).** *Точка $x \in \mathcal{F}_P$, в которой $x = [x_B; x_I, x_Z]$, является невырожденной в том и только в том случае, когда строки матрицы $\mathcal{A}^Q = \left[\mathcal{A}_B^{Q_L}, \mathcal{A}_I\right]$ линейно независимы.*

**Критерий невырожденности в задаче (2.2).** *Точка $[u,v] \in \mathcal{F}_D$, в которой $v = [v_B; v_Z; v_I]$, является невырожденной в том и только в том случае, когда столбцы матрицы $\mathcal{A}^p = \left[\mathcal{A}_B^p, \mathcal{A}_Z\right]$ линейно независимы.*

Из первого критерия следует, что должно выполняться неравенство $\sum_{i=1}^{r_B+r_I} n_i - r_B \geq m$. Соответственно из второго критерия следует неравенство $m \geq r_B + \sum_{i=r_B+1}^{r_B+r_I} n_i$, если считать, что $v_i = 0_{n_i}$, $r_B < i \leq r_B + r_I$. В силу непрерывности критерии невырожденности будут выполняться и в некоторых окрестностях точек $x$ и $[u,v]$.

## 3. Условия оптимальности и итерационный процесс

Если число блоков $r$ в задаче (2.1) равно единице, то, как известно, эта задача допускает аналитическое решение [1]. Поэтому ниже считаем, что $r > 1$.

Условия оптимальности для пары задач (2.1) и (2.2) состоят из следующих равенств и неравенств:

$$\begin{gathered} x \circ v = 0_n, \\ \mathcal{A}x = b, \\ v = c - \mathcal{A}^T u, \\ x \succeq_{\mathcal{K}} 0_n, \quad v \succeq_{\mathcal{K}} 0_n, \end{gathered} \tag{3.1}$$

причем первое равенство вытекает из равенства $\langle x, v\rangle = 0$ и неравенств $x \succeq_{\mathcal{K}} 0_n$, $v \succeq_{\mathcal{K}} 0_n$. Здесь и ниже под произведением $x \circ v$ понимается $n$-мерный вектор $[x_1 \circ v_1; \ldots; x_r \circ v_r]$.

Для построения численного метода решения задачи (2.1) воспользуемся условиями оптимальности (3.1). Наша цель заключается в освобождении от двойственной переменной $u$ и в сведении системы равенств, входящих в (3.1), к зависимости только от прямой переменной $x$. Положим $v(u) = c - A^T u$ и подставим $v(u)$ в первое равенство из (3.1). Тогда оно преобразуется к виду

$$x \circ (A^T u) = x \circ c. \tag{3.2}$$

Обозначим через $\mathrm{Arw}(x)$ блочно-диагональную матрицу с $r$ диагональными блоками:

$$\mathrm{Arw}(x) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(x_1), \ldots, \mathrm{Arw}(x_r)\right).$$

Умножая обе части (3.2) на матрицу $\mathcal{A}$ и принимая во внимание формулу (1.2), приходим к уравнению

$$\Gamma(x) u = \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x) c, \tag{3.3}$$

где симметричная матрица $\Gamma(x)$ порядка $m$ имеет вид $\Gamma(x) = \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)\mathcal{A}^T$.

Добавим к равенству (3.3) второе равенство из (3.1), предварительно умноженное на некоторое число $\tau > 0$. В результате получаем следующее уравнение относительно $u$:

$$\Gamma(x) u = \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x) c + \tau\,(b - \mathcal{A}x). \tag{3.4}$$

Если матрица $\Gamma(x)$ неособая, то, разрешая уравнение (3.4), получаем

$$u = u(x) = \Gamma^{-1}(x)\left[\mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x) c + \tau\,(b - \mathcal{A}x)\right].$$

Для слабой двойственной переменной $v$ тогда имеем

$$v = v(x) = v(u(x)) = \left[I_n - \mathcal{A}^T \Gamma^{-1}(x) \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)\right] c + \tau \mathcal{A}^T \Gamma^{-1}(x)\,(\mathcal{A}x - b). \tag{3.5}$$

Если подставить теперь зависимость $v(x)$ в первое равенство из (3.1), то приходим к системе нелинейных уравнений

$$x \circ v(x) = 0_n. \tag{3.6}$$

Применение для решения системы (3.6) метода простой итерации приводит к следующему итерационному процессу:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k\, x_k \circ v_k, \qquad v_k = v(x_k), \tag{3.7}$$

где $\alpha_k > 0$ — шаг перемещения. От стартовой точки $x_0$ потребуем только, чтобы $x_0 \succ_{\mathcal{K}} 0_n$.

**Утверждение 1.** *Пусть точка $x \in \mathcal{F}_P$ невырожденная. Тогда матрица $\Gamma(x)$ положительно определена.*

Доказательство. Считаем, не умаляя общности, что для точки $x$ справедливо представление (2.4), (2.5). Так как $x \in \mathcal{K}$, то $x_i \in K_i$. Поэтому все собственные числа симметричной матрицы $\mathrm{Arw}(x_i)$ неотрицательные, сами матрицы $\mathrm{Arw}(x_i)$ положительно полуопределенные. Более того, они положительно определенные, если $r_B < i \le r_B + r_I$. Отметим также, что эти матрицы нулевые, когда $i > r_B + r_I$.

Если $x_i \ne 0_{n_i}$, то матрицу $\mathrm{Arw}(x_i)$ согласно вышесказанному можно представить в виде

$$\mathrm{Arw}(x_i) = Q_i D\left(\lambda_{p,i}, x_i^0, \ldots, x_i^0, \lambda_{q,i}\right) Q_i^T,$$

где $Q_i = \left[\sqrt{2}p_i, H_i, \sqrt{2}q_i\right]$, $(p_i, q_i)$ — репер $x_i$. В случае, когда $1 \le i \le r_B$ и $x_i = \lambda_{p,i}p_i \in \partial K_i$, выполняется $x_i^0 = \|\bar{x}_i\|$, следовательно, $\lambda_{p,i} = 2x_i^0$, $\lambda_{q,i} = 0$.

Тогда, отбрасывая нулевые матрицы $\mathrm{Arw}(x_i)$, получаем следующее разложение:

$$\Gamma(x) = \left[\mathcal{A}_B^{Q_L}, \mathcal{A}_I\right] G(x) \left[\mathcal{A}_B^{Q_L}, \mathcal{A}_I\right]^T,$$

где блочно-диагональная матрица $G(x)$ имеет вид

$$G(x) = \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \Omega_{r_B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Arw}(x_{r_B+1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Arw}(x_{r_B+r_I}) \end{bmatrix},$$

причем $\Omega_i$ — диагональные матрицы порядка $n_i - 1$ следующего вида:

$$\Omega_i = D\left(2x_i^0, x_i^0, \ldots, x_i^0\right), \qquad 1 \le i \le r_B.$$

Так как все диагональные блоки в $G(x)$ положительно определенные, то $G(x)$ — положительно определенная матрица. Поскольку согласно критерию невырожденности в прямой задаче строки матрицы $\left[\mathcal{A}_B^{Q_L}, \mathcal{A}_I\right]$ линейно независимы, приходим к выводу, что ранг матрицы $\Gamma(x)$ равен $m$. Таким образом, $\Gamma(x)$ — положительно определенная матрица.

Утверждение доказано.

**Утверждение 2.** *Пусть $x_*$ — невырожденное решение задачи* (2.1). *Тогда $x_*$ есть стационарная точка для итерационного процесса* (3.7), *т. е. $x_* \circ v(x_*) = 0_n$.*

Доказательство. Возьмем решение $[u_*, v_*]$ двойственной задачи (2.2). Двойственная переменная $u_*$ и слабая двойственная переменная $v_*$ связаны между собой равенством $v_* = c - \mathcal{A}^T u_*$. Так как $x_*$ — решение (2.1), то $x_* \circ v_* = 0_n$. Следовательно, $x_* \circ (\mathcal{A}^T u_*) = x_* \circ c$. Данное равенство можно переписать в виде $\mathrm{Arw}(x_*)\mathcal{A}^T u_* = \mathrm{Arw}(x_*)c$, из которого следует, что точка $u_*$ есть решение системы линейных уравнений $\mathrm{Arw}(x_*)\mathcal{A}^T u = \mathrm{Arw}(x_*)c$. Но в силу невырожденности точки $x_*$ столбцы матрицы $\mathrm{Arw}(x_*)\mathcal{A}^T$ линейно независимы. Отсюда следует, что $u(x_*) = u_*$. Поэтому $v(x_*) = v_*$ и выполняется равенство $x_* \circ v(x_*) = x_* \circ v_* = 0_n$.

Утверждение доказано.

Ниже предполагается, что задача (2.1) *невырожденная*, т. е. все точки $x \in \mathcal{F}_P$ невырожденные.

## 4. Локальная сходимость метода

Дадим обоснование локальной сходимости итерационного процесса (3.7) с помощью теоремы Островского [10]. Считаем, что зависимость $v(x)$ выбирается согласно (3.5). Обозначим через $W(x)$ отображение $W(x) = x \circ v(x)$.

**Лемма.** *Пусть точка $x \in \mathbb{R}^n$ является невырожденной. Тогда матрица Якоби $W_x(x)$ отображения $W(x)$ имеет вид*

$$W_x(x) = (I_n - P(x))\,\mathrm{Arw}\,(v(x)) + \tau P(x), \qquad P(x) = \mathrm{Arw}(x)\Gamma(x). \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя $W(x)$, получаем

$$W_x(x) = \mathrm{Arw}\,(v(x)) + \mathrm{Arw}(x)v_x(x) = \mathrm{Arw}\,(v(x)) - \mathrm{Arw}\,(x)\,\mathcal{A}^T u_x(x). \tag{4.2}$$

Здесь $v_x(x)$ и $u_x(x)$ — матрицы Якоби соответственно отображений $v(x)$ и $u(x)$.

Согласно (3.4) вектор-функция $u(x)$ удовлетворяет тождеству

$$\mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)\left(c - \mathcal{A}^T u(x)\right) \equiv \tau\left(\mathcal{A}x - b\right).$$

Продифференцируем данное тождество по $x$:

$$\mathcal{A}\,\mathrm{Arw}\,(v(x)) - \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)\mathcal{A}^T u_x(x) = \tau\mathcal{A}. \tag{4.3}$$

Так как по предположению точка $x$ является невырожденной, то согласно утверждению 1 матрица $\Gamma(x) = \mathcal{A}\,\mathrm{Arw}(x)\mathcal{A}^T$ неособая. Поэтому, разрешая уравнение (4.3), получаем

$$u_x(x) = \Gamma^{-1}(x)\left[\mathcal{A}\,\mathrm{Arw}\,(v(x)) - \tau\mathcal{A}\right].$$

После подстановки данного выражения в (4.2) приходим к (4.1).

Лемма доказана.

**Теорема.** *Пусть $x_*$ и $[u_*, v_*]$ — невырожденные оптимальные решения соответственно задач* (2.1) *и* (2.2). *Пусть, кроме того, выполнено условие строгой дополнительности. Тогда можно указать такое $\bar\alpha > 0$, что для $0 < \alpha < \bar\alpha$ итерационный процесс* (3.7) *с постоянным шагом $\alpha_k = \alpha$ локально сходится с линейной скоростью к $x_*$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем отображение $F(x) = x - \alpha W(x)$ и покажем, что спектральный радиус $\rho(F_x(x_*))$ матрицы Якоби $F_x(x_*)$ этого отображения в точке $x_*$ при достаточно малом $\alpha$ меньше единицы. Для этого нужно знать собственные числа матрицы $W_x(x_*)$. Найдем их.

Предположим, что для $x_*$ имеет место разбиение (2.4), т. е. $x_* = [x_{*,B}; x_{*,I}; x_{*,Z}]$. Рассмотрим аналогичное разбиение для вектора $v_* = [v_{*,B}; v_{*,Z}; v_{*,I}]$. Здесь в блок $v_{*,B}$ входят те ненулевые компоненты $v_{*,i}$, для которых $v_{*,i} \in \partial K_i$. В блок $v_{*,I}$ входят те компоненты $v_{*,i}$, для которых $v_{*,i} \in \mathrm{int} K_i$. Блок $v_{*,Z}$ состоит из нулевых компонент $v_{*,i} = 0_{n_i}$.

Пусть $r_B$, $r_I$ и $r_Z$ — количество компонент векторов $x_{*,i}$ в соответствующих блоках для $x_*$. Пусть, аналогично, $\bar r_B$, $\bar r_I$ и $\bar r_Z$ — количество компонент векторов $v_{*,i}$ в блоках для $v_*$. Считаем, не умаляя общности, что

$$x_{*,B} = [x_{*,1}; \ldots; x_{*,r_B}], \qquad x_{*,I} = [x_{*,r_B+1}; \ldots; x_{*,r_B+r_I}].$$

Так как имеет место условие строгой дополнительности, то в силу вышесказанного $r_B = \bar r_B$, $r_I = \bar r_Z$ и $r_Z = \bar r_I$. Поэтому

$$v_{*,B} = [v_{*,1}; \ldots; v_{*,r_B}], \qquad v_{*,Z} = [v_{*,r_B+1}; \ldots; v_{*,r_B+r_I}].$$

Кроме того,

$$x_{*,Z} = [x_{*,r_B+r_I+1}; \ldots; x_{*,n}], \qquad v_{*,I} = [v_{*,r_B+r_I+1}; \ldots; v_{*,n}].$$

Согласно лемме $W_x(x_*) = (I_n - P(x_*))\,\mathrm{Arw}\,(v_*) + \tau P(x_*)$. Обозначим $\mathcal{A}_1 = [\mathcal{A}_B, \mathcal{A}_I]$ и $X_1 = \mathrm{Diag}\ (\mathrm{Arw}(x_{*,B}), \mathrm{Arw}(x_{*,I}))$, где

$$\mathrm{Arw}(x_{*,B}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(x_{*,1}), \dots, \mathrm{Arw}(x_{*,r_B})\right),$$

$$\mathrm{Arw}(x_{*,I}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(x_{*,r_B+1}), \dots, \mathrm{Arw}(x_{*,r_B+r_I})\right).$$

Обозначим также $Y_1 = \mathrm{Diag}\ (\mathrm{Arw}(v_{*,B}), \mathrm{Arw}(v_{*,Z}))$ и $Y_2 = \mathrm{Arw}(v_{*,I})$, где

$$\mathrm{Arw}(v_{*,B}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(v_{*,1}), \dots, \mathrm{Arw}(v_{*,r_B})\right),$$

$$\mathrm{Arw}(v_{*,Z}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(v_{*,r_B+1}), \dots, \mathrm{Arw}(v_{*,r_B+r_I})\right),$$

$$\mathrm{Arw}(v_{*,I}) = \mathrm{Diag}\left(\mathrm{Arw}(v_{*,r_B+r_I+1}), \dots, \mathrm{Arw}(v_{*,r})\right).$$

Матрица $\mathrm{Arw}(v_{*,Z})$ нулевая. Тогда в этих обозначениях матрица Якоби $W_x(x_*)$ принимает вид верхней блочной треугольной матрицы

$$W_x(x_*) = \begin{bmatrix} W_1 & W_2 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix},$$

в которой

$$W_1 = (I_k - P_1)\,Y_1 + \tau P_1, \qquad P_1 = X_1 \mathcal{A}_1^T \left(\mathcal{A}_1 X_1 \mathcal{A}_1^T\right)^{-1} \mathcal{A}_1, \qquad k = \sum_{i=1}^{r_B+r_I} n_i,$$

причем матрицы $P_1$ и $I_k - P_1$ идемпотентные.

Собственные числа матрицы $W_x(x_*)$ определяются собственными числами матриц $W_1$ и $Y_2$. Так как каждый блок блочно-диагональной матрицы $Y_2$ является симметричной положительно определенной матрицей, то все собственные числа $\nu_j$, $1 \le j \le n-k$, матрицы $Y_2$ положительные. Обозначим через $\nu_*$ максимальное собственное значение из этих чисел.

Определим теперь собственные числа матрицы $W_1$. Пусть для определенности $x_{*,i} = \lambda_{p,i} p_{*,i}$, $1 \le i \le r_B$. Здесь $(p_{*,i}, q_{*,i})$ — репер точки $x_{*,i} \in \partial K_i$. Тогда на основании вышесказанного для всех таких индексов для каждой матрицы $\mathrm{Arw}(x_{*,i})$ справедливо разложение $Q_i D_i Q_i^T$ вида (1.5) с соответствующей ортогональной матрицей $Q_i = \left[\sqrt{2}p_{*,i}, H_i, \sqrt{2}q_{*,i}\right]$ и с диагональной матрицей $D_i$, у которой на диагонали стоит вектор собственных значений $\lambda_{*,i} = \left[\lambda_{p,i}, x^0_{*,i}, \dots, x^0_{*,i}, 0\right]^T$, причем $\lambda_{p,i} = 2x^0_{*,i}$. Положим

$$Q_B = \mathrm{Diag}\ (Q_1, \dots, Q_{r_B}), \qquad \Lambda_B = \mathrm{Diag}\ (D(\lambda_{*,1}), \dots, D(\lambda_{*,r_B}))\,.$$

Примем во внимание, что в решениях $x_*$ и $[u_*, v_*]$ матрицы $\mathrm{Arw}(x_{*,i})$ и $\mathrm{Arw}(v_{*,i})$, $1 \le i \le r_B$, коммутируют между собой. Следовательно, в качестве ортогональной матрицы, состоящей из собственных векторов матрицы $\mathrm{Arw}(v_{*,i})$, можно взять матрицу $Q_i$. Тогда если ввести блочно-диагональную матрицу $U$, на диагонали которой стоят $Q_B$ и $I_l$, где $l = \sum\limits_{i=r_B+1}^{r_B+r_I} n_i$, а также блочно-диагональную матрицу $\Lambda$ с блоками $\Lambda_B$ и $\mathrm{Arw}(x_{*,I})$, то матрица $W_1$ преобразуется к виду

$$W_1 = U\bar{W}_1 U^T, \qquad \bar{W}_1 = (I_k - \bar{P}_1)\Theta + \tau\bar{P}_1, \qquad \bar{P}_1 = \Lambda(\mathcal{A}^Q)^T \left(\mathcal{A}^Q \Lambda (\mathcal{A}^Q)^T\right)^{-1} \mathcal{A}^Q. \tag{4.4}$$

Здесь $\mathcal{A}^Q = \mathcal{A}[Q_B, I_l]$ и $\Theta = \mathrm{Diag}\ (\Theta_B, 0_{ll})$, $\Theta_B = \mathrm{Diag}\ (D(\theta_{*,1}), \dots, D(\theta_{*,r_B}))$, через $\theta_{*,i}$ обозначен вектор $\theta_{*,i} = [0, v^0_{*,i}, \dots, v^0_{*,i}, 2v^0_{*,i}]^T$, состоящий из собственных значений матрицы $\mathrm{Arw}(v_{*,i})$. Матрица $\bar{P}_1$ является идемпотентной.

Из (4.4) следует, что матрица $W_1$ подобна матрице $\bar{W}_1$, поэтому собственные числа матрицы $W_1$ совпадают с собственными числами матрицы $\bar{W}_1$. Пусть $\mu$ — произвольное собственное число матрицы $\bar{W}_1$, которому соответствует собственный вектор $y$. Тогда справедливо равенство

$$\left[\left(I_k - \bar{P}_1\right)\Theta + \tau\bar{P}_1\right] y = \mu y, \tag{4.5}$$

а также вытекающее из него равенство

$$\langle y, \left[\left(I_k - \bar{P}_1\right)\Theta + \tau\bar{P}_1\right] y\rangle = \mu\langle y, y\rangle. \tag{4.6}$$

Так как матрица $\bar{P}_1$ идемпотентная, то после умножения обеих частей равенства (4.5) слева на матрицу $\bar{P}_1$ приходим дополнительно еще к одному равенству

$$\tau\bar{P}_1 y = \mu\bar{P}_1 y. \tag{4.7}$$

Пусть $\mathcal{Y}$ — подпространство пространства $\mathbb{R}^k$, состоящее из векторов $y = [y_1; \ldots; y_{r_B+r_I}]$ таких, что $y_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ и при этом последние компоненты векторов $y_i$, $1 \le i \le r_B$, равны нулю. Через $\mathcal{Y}^\perp$ обозначим ортогональное дополнение $\mathcal{Y}$.

Из равенства (4.6) следует, что любой вектор $y \in \mathcal{Y}^\perp$, у которого только единственная компонента отлична от нуля, удовлетворяет ему. В самом деле, пусть $y \in \mathcal{Y}^\perp$ и для определенности $y_i^{n_i} = 1$, а все остальные компоненты вектора $y_i$ и другие подвекторы $y_j$, $j \ne i$, вектора $y$ нулевые. Тогда, подставляя данный вектор $y$ в (4.6) и принимая во внимание, что у матрицы $\bar{P}_1$ строка с соответствующим номером нулевая, получаем $\mu = v_{*,i}^{n_i} = 2v_{*,i}^0 > 0$. Таких собственных значений $\mu$ имеется $r_B$ штук.

Возьмем теперь $y \in \mathcal{Y}$. Из (4.7) видно, что если $y \notin \mathcal{N}_{\mathcal{A}^Q}$, где $\mathcal{N}_{\mathcal{A}^Q}$ — нуль-пространство матрицы $\mathcal{A}^Q$, то $\mu = \tau > 0$. Количество таких собственных чисел равно $m$.

Далее считаем, что $y \in \mathcal{Y}$ и $y \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}^Q}$. Введем в рассмотрение блочно-диагональную матрицу $M = \mathrm{Diag}\,(M_B, M_I)$, в которой

$$M_B = \mathrm{Diag}\,\left(M_1, \ldots, M_{r_B}\right), \qquad M_I = \mathrm{Diag}\,\left(\mathrm{Arw}^{-1}(x_{*,r_B+1}), \ldots, \mathrm{Arw}^{-1}(x_{*,r_B+r_I})\right),$$

$$M_i = D\left((2x_{*,i}^0)^{-1}, (x_{*,i}^0)^{-1}, \ldots, (x_{*,i}^0)^{-1}, 1\right), \qquad 1 \le i \le r_B.$$

Тогда умножение обеих частей равенства (4.5) на $y^T M$ дает

$$\langle y, M\Theta y\rangle = \mu\langle y, My\rangle. \tag{4.8}$$

Матрица $M$ положительно определенная, матрица $\Theta$ диагональная, причем ее правый нижний блок нулевой. Следовательно, $\langle y, M\Theta y\rangle = \langle y_B, M_B\Theta_B y_B\rangle$, где $y_B = [y_1; \ldots; y_{r_B}]$. Так как диагональные матрицы $M_B$ и $\Theta_B$ положительно полуопределенные, то $\mu \ge 0$.

Но равенство $\mu = 0$ невозможно. Действительно, из (4.8) следует, что $\mu = 0$ в том и только в том случае, когда $y \in \mathcal{Y}_1$, где

$$\mathcal{Y}_1 = \left\{y \in \mathbb{R}^k \colon y_i^j = 0,\ 1 \le j \le n_i - 1,\ 1 \le i \le r_B\right\}.$$

Так как $y$ — ненулевой вектор и $y \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}^Q}$, то, взяв $y \in \mathcal{Y}_1$, приходим к выводу, что столбцы матрицы

$$[A_1 p_{*,1}, \ldots, A_{r_B} p_{*,r_B}, A_{r_B+1}, \ldots, A_{r_B+r_I}]$$

линейно зависимы. Это противоречит критерию невырожденности точки $[u_*, v_*]$ в двойственной задаче (2.2). Поэтому обязательно $y \notin \mathcal{Y}_1$ и, следовательно, $\mu > 0$. Число таких положительных собственных чисел равно $k - r_B - m$.

Таким образом все собственные числа матрицы $\bar{W}_1$, а стало быть и матрицы $W_1$, действительные и строго положительные. Пусть $\mu_*$ — максимальное собственное значение матрицы $W_1$. Тогда собственные значения всей матрицы $W_x(x_*)$ строго положительные. Поэтому, взяв $0 < \bar{\alpha} < 2/\max\{\nu_*, \mu_*\}$, получаем, что при $\alpha < \bar{\alpha}$ спектральный радиус $\rho(F_x(x_*))$

удовлетворяет неравенству $\rho(F_x(x_*)) < 1$. Поэтому по теореме Островского итерационный процесс (3.7) локально сходится к $x_*$.

Теорема доказана.

**Следствие.** *Пусть выполнены предположения теоремы. Пусть, кроме того, $x_0 \in \mathcal{F}_P$ и $x_0 \succ_{\mathcal{K}} 0_n$. Тогда можно указать такое $\bar{\alpha} > 0$, что итерационный процесс*

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \, x_k \circ \left[ I_n - \mathcal{A}^T \Gamma^{-1}(x_k) \mathcal{A} \, \mathrm{Arw}(x_k) \right] c \tag{4.9}$$

*сходится к $x_*$ с линейной скоростью, если шаг $\alpha_k$ берется постоянным и равным $0 < \alpha < \bar{\alpha}$.*

Доказательство следует из того факта, что равенство $\mathcal{A}x_0 = b$ сохраняется и на всех последующих итерациях, т. е. $\mathcal{A}x_k = b$. Поэтому зависимость от $\tau$ в (3.5) пропадает, и можно считать, что $\tau = 0$. Поскольку в этом случае траектории, порождаемые итерационными процессами (3.7) и (4.9), полностью совпадают, то утверждение следствия есть частный случай более общего утверждения теоремы.

Отметим также, что в методе (4.9) на каждой итерации целевая функция убывает, так как выполняется неравенство $\langle c, x_{k+1} \rangle < \langle c, x_k \rangle$, если точка $x_k$ не является стационарной для процесса (4.9). Таким образом, метод (4.9) ведет себя как релаксационный, его можно назвать *допустимым вариантом* основного метода (3.7).

## Заключение

Предложенный метод обладает как достоинствами, так и недостатками. Одним из достоинств метода является возможность брать в качестве стартовых точек недопустимые точки. Они могут даже не принадлежать конусу. Теорема гарантирует, что это не повлияет на сходимость метода, если стартовая точка взята достаточно близко к решению. Недостатками метода являются его локальность и малый шаг перемещения. Существенно расширить область сходимости можно в допустимом варианте метода. В нем можно также использовать наискорейший спуск для выбора шагов $\alpha_k$, однако это потребует модификации правых частей метода (4.9) в тех точках, в которых $x_k$ принадлежат границе конуса $\mathcal{K}$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Alizadeh F., Goldfarb D.** Second-order cone programming // Math. Program., Ser. B. 2003. Vol. 95. P. 3–51. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079.
2. Applications of second order cone programming / M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, H. Lebret // Linear Algebra Appl. 1998. Vol. 284. P. 193–228. doi: 10.1016/S0024-3795(98)10032-0 .
3. **Anjos M. F., Lasserre J. B., eds.** Handbook on semidefinite, cone and polynomial optimization: theory, algorithms, software and applications. New York: Springer, 2011. 960 p. doi: 10.1007/978-1-4614-0769-0 .
4. **Nesterov Y. E., Todd M. J.** Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones // SIAM J. Optim. 1998. Vol. 8, no. 2. P. 324–364. doi: 10.1137/S1052623495290209 .
5. **Monteiro R. D. C., Tsuchia T.** Polynomial convergence of primal-dual algorithms for the second-order cone program bazed on MZ-family directions // Math. Program. 2000. Vol. 88. P. 61–83. doi: 10.1007/s101070000137 .
6. **Muramatsu M.** A pivoting procedure for a class of second-order cone programming // Optim. Methods Softw. 2006. Vol. 21, № 2. P. 295–315. doi: /10.1080/10556780500094697 .
7. **Evtushenko Yu., Zhadan V.** Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming // Comput. Optimiz. and Appl. 1994. Vol. 3, no. 4. P. 289–304.
8. **Бабынин М. С., Жадан В. Г.** Прямой метод внутренней точки для линейной задачи полуопределенного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1780–1801.

9. **Pataki G.** Cone-LP's and semidefinite programs: geometry and simplex-type method // Proc. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5), 1996. P. 1–13.
10. **Ортега Дж., Рейнболдт В.** Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975. 560 с.



Жадан Виталий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына, ФИЦ Информатика и управление РАН,
г. Москва
e-mail: zhadan@ccas.ru


Поступила 31.05.2017

## REFERENCES


1. Alizadeh F., Goldfarb D. Second-order cone programming. *Math. Program.*, Ser. B, 2003, vol. 95, pp. 3–51. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079.
2. Lobo M.S., Vandenberghe L., Boyd S., Lebret H.. Applications of second order cone programming. *Linear Algebra Appl.*, 1998, vol. 284, pp. 193–228. doi: 10.1016/S0024-3795(98)10032-0 .
3. Anjos M. F., Lasserre J. B., eds. *Handbook on semidefinite, cone and polynomial optimization: theory, algorithms, software and applications.* New York: Springer, 2011, 960 p. doi: 10.1007/978-1-4614-0769-0 .
4. Nesterov Y. E., Todd M. J. Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones. *SIAM J. Optim.*, 1998, vol. 8, no. 2, pp. 324–364. doi: 10.1137/S1052623495290209 .
5. Monteiro R. D. C., Tsuchia T. Polynomial convergence of primal-dual algorithms for the second-order cone program bazed on MZ-family directions. *Math. Program.*, 2000, vol. 88, pp. 61–83. doi: 10.1007/s101070000137 .
6. Muramatsu M. A pivoting procedure for a class of second-order cone programming. *Optim. Methods Softw*, 2006, vol. 21, no. 2, pp. 295–315. doi: 10.1080/10556780500094697 .
7. Evtushenko Yu., Zhadan V. Stable barrier-projection and barrier-newton methods in linear programming. *Comput. Optimiz. Appl.*, 1994, vol. 3, no. 4, pp. 289–304.
8. Babynin M.S., Zhadan V.G. A primal interior point method for linear semidefinite programming problem. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2008, vol. 48, no. 10, pp. 1746-1767. doi: 10.1134/S0965542508100035 .
9. Pataki G. Cone-LP's and semidefinite programs: geometry and simplex-type method. Proc. Conf. on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5), 1996, pp. 1–13.
10. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iterative solution of nonlinear equations in several variables.* New York; London: Academic Press, 1970, 592 p. ISBN: 978-0-12-528550-6 . Translated under the title "Iteratsionnye metody resheniya sistem nelineinykh uravnenii so mnogimi neizvestnymi", Moscow, Mir, 1975, 560 p.


The paper was received by the Editorial Office on May 31, 2017.

*Vitalii Grigor'evich Zhadan*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS, Moscow, 119333 Russia, e-mail: zhadan@ccas.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.518.45

# ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ СУММ ИЗ МОДУЛЕЙ БЛОКОВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

**В. П. Заставный, А. С. Левадная**

В работе рассматривается следующая задача: найти достаточные условия на последовательности $\{\gamma(r)\}$, $\{n_j\}$ и $\{v_j\}$, чтобы для любой последовательности $\{b_k\}$, удовлетворяющей условию $\sum_{k=r}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|\le\gamma(r)$, $b_k\to 0$, сходился интеграл $\int_0^{\pi}U^p(x)/x^q\,dx$, где $p>0$, $q\in[1-p;1)$, $U(x):=\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j}^{v_j}b_k\sin kx\Big|$. В такой постановке для $\gamma(r)=B/r$, $B>0$, задача была рассмотрена и решена С. А. Теляковским. Для случая, когда $p\ge 1$, $q=0$, $v_j=n_{j+1}-1$, а последовательность $\{b_k\}$ является монотонной, А. С. Белов получил критерий принадлежности функции $U(x)$ пространству $L_p$. В теореме 1 данной работы получены достаточные условия сходимости указанного выше интеграла, которые при $\gamma(r)=B/r$, $B>0$, совпадают с достаточными условиями С. А. Теляковского. В случае $\gamma(r)=O(1/r)$ условия С. А. Теляковского могут не выполняться, а применение теоремы 1 позволяет гарантировать сходимость интеграла. Соответствующие примеры приведены в последнем параграфе работы. Вопрос о необходимых условиях сходимости интеграла $\int_0^{\pi}U^p(x)/x^q\,dx$, где $p>0$, $q\in[1-p;1)$, остается открытым.

Ключевые слова: тригонометрический ряд, суммы модулей блоков, степенной вес.

**V. P. Zastavnyi, A. S. Levadnaya. Power wight integrability for sums of moduli of blocks from trigonometric series.**

The following problem is studied: find conditions on sequences $\{\gamma(r)\}$, $\{n_j\}$, and $\{v_j\}$ under which, for any sequence $\{b_k\}$ such that $\sum_{k=r}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|\le\gamma(r)$, $b_k\to 0$, the integral $\int_0^{\pi}U^p(x)/x^q\,dx$ is convergent, where $p>0$, $q\in[1-p;1)$, and $U(x):=\sum_{j=1}^{\infty}\Big|\sum_{k=n_j}^{v_j}b_k\sin kx\Big|$. In the case $\gamma(r)=B/r$, $B>0$, this problem was studied and solved by S. A. Telyakovskii. In the case where $p\ge 1$, $q=0$, $v_j=n_{j+1}-1$, and the sequence $\{b_k\}$ is monotone, A. S. Belov obtained a criterion for the belonging of the function $U(x)$ to the space $L_p$. In Theorem 1 of the present paper, we give sufficient conditions for the convergence of the above integral, which for $\gamma(r)=B/r$, $B>0$, coincide with Telyakovskii's sufficient conditions. In the case $\gamma(r)=O(1/r)$, Telyakovskii's conditions may be violated, but the application of Theorem 1 guarantees the convergence of the integral. The corresponding examples are given in the last section of the paper. The question on necessary conditions for the convergence of the integral $\int_0^{\pi}U^p(x)/x^q\,dx$, where $p>0$ and $q\in[1-p;1)$, remains open.

Keywords: trigonometric series, sums of moduli of blocks, power weight.

**MSC:** 42A32

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-125-133

## 1. Введение. Формулировка результатов

Пусть $\gamma(r)$, $r\in\mathbb{N}$, — фиксированная, убывающая к нулю положительная числовая последовательность, т. е.

$$0<\gamma(r+1)\le\gamma(r)\quad\forall r\in\mathbb{N},\qquad \lim_{r\to\infty}\gamma(r)=0. \tag{1.1}$$

Эта последовательность определяет класс числовых последовательностей $\{b_k\}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{k\to\infty}b_k=0;\qquad \sum_{k=r}^{\infty}|b_k-b_{k+1}|\le\gamma(r)\quad\text{при всех}\quad r\in\mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Условию (1.2) удовлетворяет, например, последовательность $b_k:=\gamma(k)$, $k\in\mathbb{N}$.

Пусть последовательность $\{b_k\}$ удовлетворяет условию (1.2), а $\{n_j\}$ и $\{v_j\}$ — две последовательности натуральных чисел, удовлетворяющих условию $n_j < n_{j+1}$, $n_j \le v_j$, $j \in \mathbb{N}$. Рассмотрим функцию

$$U(x) := \sum_{j=1}^{\infty} u_j(x), \quad u_j(x) := \Big| \sum_{k=n_j}^{v_j} b_k \sin kx \Big|, \tag{1.3}$$

В данной работе изучается следующая задача об интегрируемости функции $U(x)$ со степенным весом: *найти достаточные условия на последовательности $\{\gamma(r)\}$, $\{n_j\}$ и $\{v_j\}$, чтобы для любой последовательности $\{b_k\}$, удовлетворяющей условию* (1.2), *сходился интеграл*

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{x^q} U^p(x) dx, \quad \text{где} \quad p > 0, \quad q \in [1-p; 1). \tag{1.4}$$

В такой постановке для $\gamma(r) = B/r$, $B > 0$, задача была рассмотрена и решена в статье С. А. Теляковского [12, теоремы 4, 5] (для $p \in \mathbb{N}$ и $b_k = 1/k$ см. также [11]). В этой же статье приведена подробная история подобных задач (с соответствующими ссылками). Задачу об ограниченности $U(x)$ для случая $\gamma(r) = B/r$, $B > 0$, $v_j = n_{j+1} - 1$, исследовал Л. Лейндлер [6]. Отметим следующие работы, которые касаются случая $p \ge 1$ и $q = 0$:

1) В 2006 г. А. С. Белов исследовал случай, когда $v_j = n_{j+1} - 1$, а последовательность $\{b_k\}$ является монотонной. В его работе [1, теорема 4] доказано, что принадлежность функции $U(x)$ пространству $L_p$, $p > 1$, эквивалентна сходимости двух рядов. Отметим, что проверка сходимости (расходимости) одного из этих рядов затруднительна. В [1, теорема 3] получен простой критерий, когда $U(x) \in L_1$. В 2012 г. А. С. Белов [2, теоремы 3,4] получил аналогичные критерии, когда при любом натуральном $j$ последовательность $\{b_k\}$ убывает при $k \in [n_j, v_j]$.

2) В некоторых работах вместо условия (1.2) рассматривался случай, когда числа $b_k$ являются коэффициентами Фурье функции ограниченной вариации. Для этого случая получены как критерии, так и отдельно достаточные и отдельно необходимые условия принадлежности функции $U(x)$ пространству $L_p$, $1 \le p \le +\infty$ (см. [3; 4; 7–10; 13]).

Основные результаты данной работы содержатся в следующей теореме.

**Теорема 1.** *Пусть $s_j := v_j - n_j + 1$ и выполнены условия* (1.1), (1.2). *Тогда интеграл* (1.4) *сходится, если выполняется одно из условий* (1.5)–(1.7) *или* (1.8):

$$p \ge 1, \quad 1-p < q < 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j)\; s_j^{(p+q-1)/p} < +\infty, \tag{1.5}$$

$$p \ge 1, \qquad q = 1-p, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(n_j) \ln^{1/p}(s_j+1) < +\infty, \tag{1.6}$$

$$0 < p < 1, \quad 1-p < q < 1, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^p(n_j)\; s_j^{p+q-1} < +\infty, \tag{1.7}$$

$$0 < p < 1, \qquad q = 1-p, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^p(n_j) \ln(s_j+1) < +\infty. \tag{1.8}$$

*Если дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$, то утверждение теоремы останется в силе, если в условиях* (1.5)–(1.7) *и* (1.8) *величину $s_j$ заменить на $m_j := \min\{v_j - n_j + 1; 1/\gamma(n_j)\}$.*

З а м е ч а н и е 1. Если выполнено условие (1.2), то очевидно выполняется неравенство

$$|b_r| = \Big| \sum_{k=r}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) \Big| \le \sum_{k=r}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| \le \gamma(r), \quad r \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Если $v_j < n_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, и сходится ряд $\sum_{r=1}^{\infty} \gamma(r)$, то ряд (1.3) сходится равномерно на $\mathbb{R}$, а функция $U(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и, значит, интеграл (1.4) сходится при любых $p > 0$ и $q < 1$. Поэтому при выполнении условия $v_j < n_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, теорема 1 содержательна лишь в случае расходимости ряда $\sum_{r=1}^{\infty} \gamma(r)$.

З а м е ч а н и е 2. Теоремы С. А. Теляковского [12, теоремы 4, 5] являются частным случаем теоремы 1 при $\gamma(r) = B/r$, $B > 0$. При $\gamma(r) \neq O(1/r)$ теоремы С. А. Теляковского не применимы, а применение теоремы 1 иногда позволяет гарантировать сходимость интеграла (1.4). Даже при $\gamma(r) = O(1/r)$ теоремы С. А. Теляковского могут не гарантировать сходимость интеграла (1.4), а применение теоремы 1 позволяет гарантировать сходимость данного интеграла. Соответствующие примеры приведены в последнем разделе, когда $\gamma(r) = 1/(r^{\mu} \ln^{\delta}(r+2))$, $0 < \mu \leq 1$, $0 < \delta \leq 1$.

Отметим, что доказательство теоремы 1 проведено по той же схеме, что и доказательство теорем из [12, теоремы 4, 5; 4, теорема 5].

## 2. Вспомогательные утверждения

Выпишем несколько известных простых соотношений и неравенств:

$$\sigma_k(x) := \sum_{j=0}^{k} \sin jx = \frac{\cos\dfrac{x}{2} - \cos\Big(k+\dfrac{1}{2}\Big)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}, \quad \sin\frac{x}{2} \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}_+;$$
$$|\sigma_k(x)| \leq \frac{\pi}{x}, \quad 0 < x \leq \pi. \tag{2.1}$$

При любых $n, v \in \mathbb{N}$, $n \leq v$, справедливо равенство

$$S_{n,v}(x) := \sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx = b_v \sigma_v(x) + \sum_{k=n}^{v-1} (b_k - b_{k+1}) \sigma_k(x) - b_n \sigma_{n-1}(x). \tag{2.2}$$

Если выполнены условия (1.1), (1.2), то из (2.1) и (2.2) вытекает, что при любом $x \in \mathbb{R}$ сходится ряд

$$R_n(x) := \sum_{k=n}^{\infty} b_k \sin kx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

а для его суммы и частных сумм при $n \leq v$, $0 < x \leq \pi$, справедливы неравенства (см. (1.9))

$$|S_{n,v}(x)| \leq (v-n+1)\gamma(n), \quad |S_{n,v}(x)| \leq \frac{(\gamma(v) + 2\gamma(n))\pi}{x} \leq \frac{3\pi\gamma(n)}{x}, \quad |R_n(x)| \leq \frac{2\pi\gamma(n)}{x}. \tag{2.4}$$

**Лемма 1.** *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2), $n, v \in \mathbb{N}$, $n \leq v$, *и* $s := v - n + 1$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big| \leq C\gamma(n) \min\Big\{\frac{1}{x}; s\Big\}, \quad x \in (0;\pi], \quad \text{где} \ \ C = 3\pi. \tag{2.5}$$

*Если дополнительно* $\gamma(r) = O(1/r)$, *то неравенство* (2.5) *останется верным с константой* $C = 4\pi \max\big\{1; \sup_{r\geq 1} r\gamma(r)\big\}$ *при замене* $s$ *на* $m := \min\{v-n+1; 1/\gamma(n)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (2.5) вытекает из неравенств (2.4). Пусть дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$. Докажем, что при любых $n, v \in \mathbb{N}$, $n \leq v$, справедливо неравенство

$$\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big| \leq 4\pi \sup_{r\geq 1} r\gamma(r), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.6}$$

откуда будет следовать утверждение леммы 1 для случая $\gamma(r) = O(1/r)$. Для доказательства неравенства (2.6) используем хорошо известные рассуждения из [5, гл. V, § 1; 14, § 7.2]. Пусть $C_1 := \sup_{r\ge1} r\gamma(r)$. Берем произвольное фиксированное $x \in (0;\pi]$. Для произвольного $d \in \mathbb{N}$ сумму ряда (2.3) представим в виде

$$R_d(x) = S_{d,d+N-1}(x) + R_{d+N}(x), \quad \text{где} \quad N := \left[\frac{\pi}{x}\right].$$

Для натурального числа $N$ очевидно выполняется неравенство

$$\frac{\pi}{N+1} < x \le \frac{\pi}{N}. \tag{2.7}$$

Учитывая неравенства (1.9), (2.4) и (2.7), получаем

$$|S_{d,d+N-1}(x)| \le \sum_{k=d}^{d+N-1} \gamma(k)kx \le C_1 xN \le \pi C_1;$$

$$|R_{d+N}(x)| \le \frac{2\pi}{x}\gamma(d+N) \le 2(N+1)\gamma(N+1) \le 2C_1.$$

Из последних двух неравенств вытекает неравенство $|R_d(x)| \le 2\pi C_1$, откуда следует (2.6). Необходимо только учесть равенство $S_{n,v}(x) = R_n(x) - R_{v+1}(x)$.

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть выполнены условия* (1.1), (1.2), $n, v \in \mathbb{N}$, $n \le v$, *и* $s := v - n + 1$. *Тогда при любых* $p > 0$ *и* $q \in [1-p; 1)$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q}\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big|^p dx \le C^p C(p,q)\gamma^p(n) \begin{cases} s^{p+q-1}, & \text{если } q \in (1-p;1); \\ \ln(s+1), & \text{если } q = 1-p, \end{cases} \tag{2.8}$$

*где* $C = 3\pi$, $C(p,q) = p/((1-q)(p+q-1))$ *и* $C(p,q) = (2+2p)/p$ *соответственно при* $q \in (1-p;1)$ *и* $q = 1-p$. *Если дополнительно* $\gamma(r) = O(1/r)$ *и* $\gamma(n) \le 1$, *то неравенство* (2.8) *останется верным с константой* $C = 4\pi \max\{1; \sup_{r\ge1} r\gamma(r)\}$ *при замене* $s$ *на* $m := \min\{v-n+1; 1/\gamma(n)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая неравенство (2.5) и неравенство $s \ge 1$, получаем

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q}\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big|^p dx \le C^p\gamma^p(n)\left(s^p\int_0^{1/s}\frac{1}{x^q}dx + \int_{1/s}^{\pi}\frac{1}{x^{p+q}}dx\right).$$

Если $q \in (1-p\,;\,1)$, то

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q}\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big|^p dx \le C^p\,\gamma^p(n)\; s^{p+q-1}\frac{p}{(1-q)(p+q-1)}.$$

В случае $q = 1-p$ имеем

$$\int_0^\pi \frac{1}{x^q}\Big|\sum_{k=n}^{v} b_k \sin kx\Big|^p dx \le C^p\gamma^p(n)\Big(\frac{1}{p} + \ln\pi + \ln s\Big) \le C^p\gamma^p(n)\frac{2+2p}{p}\ln(s+1).$$

Здесь мы учли, что при любых $s \ge 1$ выполняются неравенства $e < \pi s < 4s \le (s+1)^2$.

Если дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$, то можно применить неравенство (2.5) с константой $C = 4\pi\max\{1; \sup_{r\ge1} r\gamma(r)\}$ при замене $s$ на $m = \min\{v-n+1; 1/\gamma(n)\}$. Если еще $\gamma(n) \le 1$, то $m \ge 1$ и, значит, справедливы все предыдущие неравенства с заменой $s$ на $m$.

Лемма доказана.

## 3. Доказательство теоремы 1

Пусть $p \geq 1$. Из неравенства Минковского вытекает, что

$$\left(\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx\right)^{1/p} \leq \sum_{j=1}^\infty \left(\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx\right)^{1/p}, \quad p \geq 1. \tag{3.1}$$

Из этого неравенства и (2.8) получаем следующие два неравенства для $p \geq 1$:

$$\left(\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx\right)^{1/p} \leq CC^{1/p}(p,q) \sum_{j=1}^\infty \gamma(n_j)\ s_j^{(p+q-1)/p}, \quad q \in (1-p\,; 1);$$

$$\left(\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx\right)^{1/p} \leq CC^{1/p}(p,q) \sum_{j=1}^\infty \gamma(n_j) \ln^{1/p}(s_j+1), \quad q = 1-p.$$

Пусть теперь $0 < p < 1$. В этом случае справедливо неравенство

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \leq \sum_{j=1}^\infty \int\limits_0^\pi \frac{1}{x^q} u_j^p(x)dx, \quad p \in (0;1). \tag{3.2}$$

Из этого неравенства и (2.8) получаем следующие два неравенства для $0 < p < 1$:

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \leq C^p C(p,q) \sum_{j=1}^\infty \gamma^p(n_j)\ s_j^{p+q-1}, \quad q \in (1-p\,;\,1);$$

$$\int\limits_0^\pi \frac{1}{x^q} U^p(x)dx \leq C^p C(p,q) \sum_{j=1}^\infty \gamma^p(n_j) \ln(s_j+1), \quad q = 1-p.$$

Пусть дополнительно $\gamma(r) = O(1/r)$. Так как $n_j \to \infty$, то $\gamma(n_j) \leq 1$ при всех $j \geq j_0$. Поэтому к членам рядов (3.1) и (3.2) с номерами $j \geq j_0$ можно применить неравенство (2.8) с константой $C = 4\pi \max\{1; \sup_{r\geq 1} r\gamma(r)\}$, если $s = s_j$ заменить на $m = m_j := \min\{v_j - n_j + 1; 1/\gamma(n_j)\}$.

Теорема доказана.

## 4. Пример

Пусть

$$f(x) := x + (x+2)^\alpha \ln^\beta(x+2), \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 0.$$

Так как $f(x+1) - f(x) = f'(\xi) > 1$, $x \geq 1$, то последовательность $\{[f(j)]\}_{j\geq 1}$ строго возрастает. Мы рассматриваем случай, когда $n_j = [f(j)]$, $v_j = n_{j+1} - 1$, $j \in \mathbb{N}$. Здесь $s_j := v_j - n_j + 1 = n_{j+1} - n_j$. Будем считать, что выполнено одно из двух условий: 1) $\alpha > 1$, $\beta \geq 0$; 2) $\alpha = 1$, $\beta > 0$. Тогда

$$s_j \sim \alpha j^{\alpha-1} \ln^\beta j, \quad j \to \infty.$$

Пусть

$$\gamma(r) := \frac{1}{r^\mu \ln^\delta(r+2)}, \quad r \in \mathbb{N}, \quad \text{где } 0 < \mu < 1, \quad \delta \geq 0, \quad \text{или} \quad \mu = 1, \quad 0 \leq \delta \leq 1.$$

Очевидно,

$$n_j \sim j^\alpha \ln^\beta j, \quad \gamma(n_j) \sim \frac{\alpha^{-\delta}}{j^{\alpha\mu} (\ln j)^{\beta\mu+\delta}}, \quad j \to \infty.$$

Условие $\gamma(r)=O(1/r)$ выполняется только при $\mu=1$, и в этой ситуации

$$m_j := \min\{s_j; 1/\gamma(n_j)\} = s_j, \quad j\ge j_0.$$

Найдем условия сходимости рядов (1.5)–(1.7) и (1.8) (с учетом указанных ограничений на параметры $\alpha,\beta,\mu$ и $\delta$) и сравним полученные результаты при $\mu=1$ с результатами С. А. Теляковского (см. [12]). Рассмотрим четыре случая.

1) Пусть $p\ge 1$ и $1-p<q<1$ (это условие эквивалентно неравенству $0<(1-q)/p<1$). Тогда при $j\to\infty$ имеем

$$\gamma(n_j)\ s_j^{\frac{p+q-1}{p}} \sim \frac{\alpha^{\frac{p+q-1}{p}-\delta}}{j^{\alpha\mu-(\alpha-1)\frac{p+q-1}{p}}(\ln j)^{\beta\mu+\delta-\beta\frac{p+q-1}{p}}}.$$

Из этого соотношения вытекает, что ряд (1.5) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ \alpha\Big(\dfrac{1-q}{p}+\mu-1\Big)>\dfrac{1-q}{p};\\ \text{ii)}\ \alpha\Big(\dfrac{1-q}{p}+\mu-1\Big)=\dfrac{1-q}{p},\quad \beta\Big(\dfrac{1-q}{p}+\mu-1\Big)+\delta>1. \end{array}\right.$$

С учетом ограничений на параметры получаем, что ряд (1.5) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ 1-\dfrac{1-q}{p}<\mu\le 1,\quad \alpha>\dfrac{1-q}{1-q+p(\mu-1)};\\ \text{ii)}\ 1-\dfrac{1-q}{p}<\mu\le 1,\quad \alpha=\dfrac{1-q}{1-q+p(\mu-1)},\quad \beta>\dfrac{(1-\delta)p}{1-q+p(\mu-1)}. \end{array}\right.$$

Если $p\ge 1$, $1-p<q<1$, $\mu=1$, $\alpha=1$, $0<\delta\le 1$, то при $(1-\delta)p/(1-q)<\beta\le p/(1-q)$ ряд (1.5) сходится и, значит, сходится интеграл (1.4), а теоремы С. А. Теляковского не гарантируют сходимость данного интеграла (соответствующий ряд расходится при $\delta=0$).

2) Пусть $p\ge 1$ и $q=1-p$. Тогда при $j\to\infty$ имеем

$$\gamma(n_j)\ \ln^{\frac{1}{p}}(s_j+1) \sim \frac{\alpha^{-\delta}}{j^{\alpha\mu}(\ln j)^{\beta\mu+\delta}}\big((\alpha-1)\ln j+\beta\ln(\ln j)\big)^{1/p}.$$

Из этого соотношения вытекает, что ряд (1.6) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ \alpha>\dfrac{1}{\mu};\\ \text{ii)}\ \alpha=\dfrac{1}{\mu},\quad \beta>\dfrac{1}{\mu}\Big(1-\delta+\dfrac{\operatorname{sign}(\alpha-1)}{p}\Big). \end{array}\right.$$

Если $p\ge 1$, $q=1-p$, $\mu=1$, $\alpha=1$, $0<\delta\le 1$, то при $1-\delta<\beta\le 1$ ряд (1.6) сходится и, значит, сходится интеграл (1.4), а теоремы С. А. Теляковского не гарантируют сходимость данного интеграла (соответствующий ряд расходится при $\delta=0$).

3) Пусть $0<p<1$ и $1-p<q<1$ (это условие эквивалентно неравенству $0<(1-q)/p<1$). Тогда при $j\to\infty$ имеем

$$\gamma^p(n_j)\ s_j^{p+q-1} \sim \frac{\alpha^{p+q-1-p\delta}}{j^{\alpha\mu p-(\alpha-1)(p+q-1)}(\ln j)^{p(\beta\mu+\delta)-\beta(p+q-1)}}.$$

Из этого соотношения вытекает, что ряд (1.7) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ \alpha\,(\mu p - p - q + 1) > 2 - p - q; \\ \text{ii)}\ \alpha\,(\mu p - p - q + 1) = 2 - p - q, \quad \beta\,(\mu p - p - q + 1) > 1 - p\delta. \end{array}\right.$$

С учетом ограничений на параметры получаем, что ряд (1.7) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ 1 - \dfrac{1-q}{p} < \mu \le 1, \quad \alpha > \dfrac{2-p-q}{\mu p - p - q + 1}; \\ \text{ii)}\ 1 - \dfrac{1-q}{p} < \mu \le 1, \quad \alpha = \dfrac{2-p-q}{\mu p - p - q + 1}, \quad \beta > \dfrac{1-p\delta}{\mu p - p - q + 1}. \end{array}\right.$$

Если $0 < p < 1$, $1 - p < q < 1$, $\mu = 1$, $\alpha = 1 + (1-p)/(1-q)$, $0 < \delta \le 1$, то при $(1 - p\delta)/(1-q) < \beta \le 1/(1-q)$ ряд (1.7) сходится и, значит, сходится интеграл (1.4), а теоремы С. А. Теляковского не гарантируют сходимость данного интеграла (соответствующий ряд расходится при $\delta = 0$).

4) Пусть $0 < p < 1$ и $q = 1 - p$. Тогда при $j \to \infty$ имеем

$$\gamma^p(n_j)\ \ln(s_j + 1) \sim \frac{\alpha^{-p\delta}}{j^{\alpha\mu p}(\ln j)^{\beta\mu p + \delta p}}\big((\alpha - 1)\ln j + \beta\ln(\ln j)\big)\,.$$

Из этого соотношения вытекает, что ряд (1.8) сходится тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

$$\left[\begin{array}{l} \text{i)}\ \alpha > \dfrac{1}{\mu p}; \\ \text{ii)}\ \alpha = \dfrac{1}{\mu p}, \quad \beta > \dfrac{1}{\mu p}\,(1 - \delta p + \operatorname{sign}(\alpha - 1))\,. \end{array}\right.$$

Если $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $\mu = 1$, $\alpha = 1/p$, $0 < \delta \le 1$, то при $2/p - \delta < \beta \le 2/p$ ряд (1.8) сходится и, значит, сходится интеграл (1.4), а теоремы С. А. Теляковского не гарантируют сходимость данного интеграла (соответствующий ряд расходится при $\delta = 0$).

В заключение отметим, что вопрос о необходимых условиях сходимости интеграла (1.4) остается открытым (кроме указанного во введении случая $p \ge 1$ и $q = 0$). Это касается и критерия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Белов А.С.** О суммах модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда с монотонными коэффициентами // Вестн. Иванов. гос. ун-та. Сер. Биология, химия, физика, математика. 2006. Вып. 3. С. 107–121.
2. **Белов А.С.** О свойствах суммы модулей членов сгруппированного тригонометрического ряда // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 6. С. 35–62.
3. **Белов А.С., Теляковский С.А.** Усиление теорем Дирихле — Жордана и Янга о рядах Фурье функций ограниченной вариации // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 6. С. 25–40.
4. **Заставный В.П.** Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 166–179.
5. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.
6. **Leindler L.** On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series // Anal. Math. 2001. Vol. 27, no. 4. P. 279–285.
7. **Попов А.Ю., Теляковский С.А.** К оценкам частных сумм рядов Фурье функций ограниченной вариации // Изв. вузов. Математика. 2000. № 1. С. 51–55.
8. **Теляковский С.А.** О частных суммах рядов Фурье функций ограниченной вариации // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 378–386.

9. **Telyakovskii S.A.** Some properties of Fourier series of functions with bounded variation // East J. Approx. 2004. Vol. 10, no. 1–2. P. 215–218.
10. **Теляковский С.А.** Некоторые свойства рядов Фурье функции ограниченной вариации. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 168–174.
11. **Теляковский С.А.** О свойствах блоков членов ряда $\sum \frac{1}{k} \sin kx$ // Укр. мат. журн. 2012. Т. 64, №5. С. 713–718.
12. **Теляковский С.А.** Добавление к работе В. П. Заставного “Оценки сумм из модулей блоков тригонометрических рядов Фурье” // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 277–281.
13. **Trigub R.M.** A note on the paper of Telyakovskii "Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation"// East J. Approx. 2007. Vol. 13, no. 1. P. 1–6.
14. **Эдвардс Р.** Ряды Фурье в современном изложении: в 2 т. М: Мир, 1985. Т. 1, 264 с.



Заставный Виктор Петрович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор
Донецкий национальный университет,
г. Донецк, Украина
e-mail: zastavn@rambler.ru


Поступила 15.05.2017


Левадная Антонина Сергеевна
аспирант
Донецкий национальный университет,
г. Донецк, Украина
e-mail: last.dris@mail.ru


## REFERENCES


1. Belov A.S. Some properties of the sum of the moduli of the terms of a grouped trigonometric series with monotonic coefficients. *Vestn. Ivanov. gos. un-ta. Ser. Biologiya, khimiya, fizika, matematika*, 2006. No. 3. pp. 107–121 (in Russian).
2. Belov A.S. Some properties of the sum of the moduli of the terms of a grouped trigonometric series. *Sb. Math.*, 2012, vol. 203, no. 6, pp. 798–825. doi: https://doi.org/10.4213/sm7851 .
3. Belov A.S., Telyakovskii S.A. Refinement of the Dirichlet–Jordan and Young's theorems on Fourier series of functions of bounded variation. *Sb. Math.*, 2007, vol. 198, no. 6, pp. 777–791. doi: https://doi.org/10.4213/sm2420 .
4. Zastavnyi V.P. Estimates for sums of moduli of blocks in trigonometric Fourier series. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. 190–204. doi: 10.1134/S0081543811050208 .
5. Zygmund A. *Trigonometric series*, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959, vol. I, 383 p. Translated under the title *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Mir Publ., 1965, vol. I, 616 c.
6. Leindler L. On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series. *Anal. Math.*, 2001, vol. 27, no. 4, pp. 279–285.
7. Popov A.Yu., Telyakovskii S.A. On estimates for partial sums of Fourier series of functions of bounded variation. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), 2000, vol. 44, no. 1, pp. 50–54.
8. Telyakovskii S.A. On partial sums of Fourier series of Functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1997, vol. 219, pp. 372–381.
9. Telyakovskii S.A. Some properties of Fourier series of functions with bounded variation. *East J. Approx.*, 2004, vol. 10, no. 1–2, pp. 215–218.
10. Telyakovskii S.A. Some properties of Fourier series of functions with bounded variation. II, *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2005, suppl. 2, pp. 188–195.
11. Telyakovskii S.A., On the properties of blocks of terms of the series $\sum \frac{1}{k} \sin kx$. *Ukr. Math. J.*, 2012, vol. 64, no. 5, pp. 816–822.
12. Telyakovskii S.A. An addition to V.P. Zastavnyi's paper “Estimates for sums of moduli of blocks in trigonometric Fourier series”. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 277–281 (in Russian).

13. Trigub R.M. A note on the paper of Telyakovskii “Certain properties of Fourier series of functions with bounded variation”. *East J. Approx.*, 2007, vol. 13, no. 1, pp. 1–6.
14. Edwards R.E. *Fourier series. A modern introduction*, vol. 1. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1979, Ser. Grad. Texts in Math., 64, 228 p. doi: 10.1007/978-1-4612-6208-4. Translated under the title “ Ryady Fur’e v sovremennom izlozhenii”. Moscow: Mir Publ., 1985, vol. 1, 264 p.

The paper was received by the Editorial Office on May 15, 2017.

*Viktor Petrovich Zastavnyi*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Donetsk National University, Universitetskaya str. 24, Donetsk, 83001, Ukraine, e-mail: zastavn@rambler.ru.

*Antonina Sergeevna Levadnaya*, doctoral student, Donetsk National University, Universitetskaya str. 24, Donetsk, 83001, Ukraine, e-mail: last.dris@mail.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.856

# ВЫБОРОЧНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДВУХЭТАПНОЙ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С КВАНТИЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ[1]

**С. В. Иванов, А. И. Кибзун**

Рассматривается двухэтапная задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием. В данной задаче стратегия первого этапа является детерминированной, а стратегия второго этапа выбирается по факту реализации случайных параметров задачи. Исследованы свойства задачи, доказана теорема о существовании ее решения, и построена для нее выборочная аппроксимация. Выборочная аппроксимация сведена к смешанной целочисленной задаче линейного программирования. Доказана теорема об их эквивалентности. Предложена процедура поиска оптимального решения аппроксимирующей задачи. Приведена теорема о сходимости дискретных аппроксимаций по значению критериальной функции и по стратегии оптимизации. Также рассмотрены случаи, не учитываемые в данной теореме.

Ключевые слова: стохастическое программирование, квантильный критерий, выборочная аппроксимация, смешанное целочисленное линейное программирование.

**S. V. Ivanov, A. I. Kibzun. Sample average approximation in the two-stage stochastic linear programming problem with quantile criterion.**

The two-stage problem of stochastic linear programming with quantile criterion is considered. In this problem, the first stage strategy is deterministic and the second stage strategy is chosen when a realization of the random parameters is known. The properties of the problem are studied, a theorem on the existence of its solution is proved, and a sample average approximation of the problem is constructed. The sample average approximation is reduced to a mixed integer linear programming problem, and a theorem on their equivalence is proved. A procedure for finding an optimal solution of the approximation problem is suggested. A theorem on the convergence of discrete approximations with respect to the value of the objective function and to the optimization strategy is given. We also consider some cases not covered in the theorem.

Keywords: stochastic programming, quantile criterion, sample average approximation, mixed integer linear programming.

**MSC:** 90C15

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-134-143

## Введение

Двухэтапные задачи стохастического программирования [1] моделируют ситуацию, когда лицо, принимающее решение, выбирает стратегию оптимизации дважды. Сначала выбирается предварительная детерминированная стратегия оптимизации (стратегия первого этапа). Затем по факту реализации случайных параметров задачи корректируется стратегия первого этапа посредством так называемой стратегии второго этапа. Стратегия второго этапа определяется через решение задачи минимизации функции потерь второго этапа, а лицо, осуществляющее выбор, учитывает на первом этапе минимальное значение функции потерь второго этапа как функцию стратегии первого этапа и реализации случайных параметров.

Поскольку минимальное значение функции потерь второго этапа является случайным, то могут быть рассмотрены задачи оптимизации различных функционалов данной случайной величины. Традиционно в стохастическом программировании исследовались двухэтапные задачи с критерием в форме математического ожидания, в том числе и в случае, когда задача

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-07-00203А).

второго этапа является линейной (см., например, [1]). Двухэтапная задача стохастического линейного программирования с квантильным критерием впервые была сформулирована в [2]. В этой работе для непрерывного распределения случайных параметров были предложены методы решения задачи, обеспечивающие лишь верхнюю оценку оптимального значения критериальной функции. В предлагаемой работе рассматривается задача линейного стохастического программирования с квантильным критерием в более общей форме, чем в [2], где только вектор, задающий правые части ограничений задачи второго этапа, являлся случайным.

На практике часто распределение случайных параметров неизвестно, а доступна только выборка реализаций случайной величины. Используя выборку, можно построить оценку критериального функционала задачи стохастического программирования, тем самым заменив исходную задачу ее выборочной аппроксимацией. При этом саму построенную аппроксимацию исходной задачи стохастического программирования можно считать задачей стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров.

В последние годы развилась методология решения задач стохастического программирования с квантильным критерием для случая дискретных случайных параметров [3], которая позволяет сводить их к задачам смешанного целочисленного программирования. Однако для применения данного метода необходимо выполнение ряда условий, что в линейном случае не всегда имеет место. В данной работе приводится смешанная целочисленная задача линейного программирования, эквивалентная построенной аппроксимации. При этом показано, что всегда можно обеспечить выполнение условий эквивалентности данных задач, а также предложена процедура, позволяющая находить точное решение аппроксимирующей задачи.

Условия сходимости дискретных аппроксимаций для одноэтапных и двухэтапных задач стохастического программирования с критерием в форме математического ожидания предложены в [4], для задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями — в [5]. Для некоторых частных случаев одноэтапных задач стохастического программирования с квантильным и вероятностным критериями соответствующие условия описаны в [6]. В данной работе получены условия сходимости выборочных аппроксимаций двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием.

## 1. Постановка задачи

Пусть задано полное вероятностное пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, где $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^m$ — некоторое замкнутое множество. Условие полноты означает, что сигма-алгебра $\mathcal{F}$ содержит все подмножества любого множества вероятностной меры нуль. Пусть $X \triangleq (X_1, X_2, \ldots, X_m)^\top$ — случайный вектор, определенный на вероятностном пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Для простоты изложения будем считать, что для всех $x \in \mathcal{X}$ выполнено $X(x) = x$. Таким образом, через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^\top$ будем обозначать реализации случайного вектора $X$.

Для описания двухэтапной задачи стохастического линейного программирования введем следующие матрицы и векторы:

$$A(x) \triangleq A^0 + \sum_{i=1}^{m} x_i A^i, \qquad B(x) \triangleq B^0 + \sum_{i=1}^{m} x_i B^i,$$
$$q(x) \triangleq q^0 + \sum_{i=1}^{m} x_i q^i, \qquad b(x) \triangleq b^0 + \sum_{i=1}^{m} x_i b^i,$$

где $A^i \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $B^i \in \mathbb{R}^{r\times l}$, $q^i \in \mathbb{R}^l$, $b^i \in \mathbb{R}^r$ — детерминированные матрицы и векторы, $i = \overline{0, m}$.

Задача второго этапа решается при известных оптимизационной стратегии первого этапа $u \in \mathbb{R}^s$ и реализации случайных факторов $x \in \mathcal{X}$. Будем считать, что множество $U$ допустимых стратегий первого этапа является компактом в $\mathbb{R}^s$. Пусть множество допустимых стратегий $y$ задачи второго этапа определено как

$$Y(u, x) \triangleq \{y \in \mathbb{R}^l \colon A(x)u + B(x)y \geqslant b(x),\ y \geqslant 0\},$$

т. е. имеет линейную структуру относительно стратегий первого и второго этапов. Здесь и ниже векторные неравенства понимаются поэлементно.

Согласно принятой в теории двухэтапных задач терминологии матрица $A(x)$ называется *технологической*, а матрица $B(x)$ — *матрицей рекурсии*. Задача второго этапа формулируется как

$$\Phi(u,x) \triangleq \begin{cases} \inf\limits_{y\in Y(u,x)} q^\top(x)y, & \text{если } Y(u,x)\neq\varnothing;\\ +\infty, & \text{если } Y(u,x)=\varnothing, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $q^\top(x)y$ характеризует потери на втором этапе. В том случае, когда оптимальное значение целевой функции второго этапа не ограничено снизу, полагаем по определению $\Phi(u,x)=-\infty$.

Определим функцию вероятности $P_\varphi(\cdot)\colon U\to[0,1]$ по правилу

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X)\leqslant\varphi\}, \tag{1.2}$$

где $\varphi\in\mathbb{R}^1$ — некоторый фиксированный уровень минимального значения функции потерь второго этапа.

Функция квантили $\varphi_\alpha(\cdot)\colon U\to[-\infty,+\infty]$ определяется как минимальный уровень функции потерь второго этапа, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью $\alpha\in(0,1)$. Если для всех $\varphi\in\mathbb{R}^1$ выполнено $P_\varphi(u)<\alpha$, то по определению полагаем $\varphi_\alpha(u)=+\infty$. В противном случае значение функции квантили задается по правилу

$$\varphi_\alpha(u)\triangleq\inf\{\varphi\in\mathbb{R}^1\colon P_\varphi(u)\geqslant\alpha\}.$$

Заметим, что если для всех $\varphi\in\mathbb{R}^1$ выполнено $P_\varphi(u)\geqslant\alpha$, то $\varphi_\alpha(u)=-\infty$.

Двухэтапная задача стохастического программирования с квантильным критерием формулируется в виде

$$\begin{aligned} &\psi^*\triangleq\inf_{u\in U}\{c^\top u+\varphi_\alpha(u)\},\\ &U^*\triangleq\operatorname{Arg}\min_{u\in U}\{c^\top u+\varphi_\alpha(u)\}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $c\in\mathbb{R}^s$ — вектор коэффициентов целевой функции первого этапа, а $c^\top u$ характеризует потери на первом этапе.

## 2. Свойства задачи

Рассмотрим вначале задачу второго этапа (1.1). В [1, Section 2.1.3] показано, что функция $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ является нормальным интегрантом [7]. Обозначим через $\mathcal{B}(U)$ борелевскую сигма-алгебру подмножеств $U$. В случае полной сигма-алгебры $\mathcal{F}$ определение нормального интегранта можно сформулировать следующим образом [7, Corollary 14.34].

О п р е д е л е н и е. Функция $\Psi(\cdot)\colon U\times\mathcal{X}\to[-\infty,+\infty]$ называется *нормальным интегрантом*, если она является $\mathcal{B}(U)\times\mathcal{F}$-измеримой и при каждом фиксированном значении $x\in\mathcal{X}$ функция $u\mapsto\Phi(u,x)$ полунепрерыва снизу.

Измеримость функции $(u,x)\mapsto\Phi(u,x)$ обеспечивает корректность определения функции вероятности (1.2).

Докажем, что вероятность $\mathbf{P}\{\Phi(u,X)=-\infty\}$ не зависит от выбранной стратегии первого этапа.

**Утверждение 1.** *Пусть для некоторых $\bar u\in U$ и $x\in\mathcal{X}$ выполнено $\Phi(\bar u,x)=-\infty$. Тогда для всех $u\in U$ выполнено $\Phi(u,x)=-\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $\Phi(u,x)=-\infty$ тогда и только тогда, когда множество

$$Y(u,x)\cap\{y\in\mathbb{R}^l\colon q^\top(x)y\leqslant a\} \tag{2.1}$$

не ограничено для всех $a \in \mathbb{R}^1$. Как показано в [8, теорема 1.3], многогранник, задаваемый системой линейных неравенств, является ограниченным тогда и только тогда, когда его конус рецессивных направлений состоит только из нулевого вектора. Конус рецессивных направлений множества (2.1) имеет вид

$$\{y \in \mathbb{R}^l \colon B(x)y \geqslant 0,\ q^\top(x)y \leqslant 0,\ y \geqslant 0\}.$$

Вид данного множества не зависит ни от $u$, ни от $a$. Отсюда следует, что если при некотором $\bar{u} \in U$ и $a \in \mathbb{R}^1$ конус рецессивных направлений содержит ненулевой вектор, то он будет иметь ненулевой вектор и при всех $u \in U$ и $a \in \mathbb{R}^1$. Из данного свойства непосредственно следует доказываемое утверждение.

Таким образом, при фиксированной реализации случайных параметров $x \in \mathcal{X}$ для всех $u \in U$ либо $\Phi(u,x) > -\infty$, либо $\Phi(u,x) = -\infty$. Поэтому можно ввести следующее обозначение:

$$\underline{\alpha} \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u,X) = -\infty\} = \mathbf{P}\big\{\{y \in \mathbb{R}^l \colon B(X)y \geqslant 0,\ q^\top(X)y \leqslant 0,\ y \geqslant 0\} \neq \{\bar{0}\}\big\},$$

где $\bar{0}$ — нулевой вектор. Согласно утверждению 1 величина $\underline{\alpha}$ не зависит от $u$.

Особенно отметим часто рассматриваемый случай двухэтапной задачи, когда матрица рекурсии $B(x)$ и вектор $q(x)$ коэффициентов целевой функции задачи второго этапа являются постоянными. При данных предположениях либо $\Phi(\cdot) \equiv -\infty$, либо, при всех $u \in U$, $x \in \mathcal{X}$, выполнено $\Phi(u,x) > -\infty$.

Сформулируем теорему о существовании решения поставленной задачи (1.3).

**Теорема 1.** *Пусть $U$ является непустым компактом, тогда для любого $\alpha \in (0,1)$ решение задачи* (1.3) *существует, т. е. $U^* \neq \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [9, теорема 2.2] доказано, что при условии полунепрерывности снизу функции $u \mapsto \Phi(u,x)$ функция квантили $u \mapsto \varphi_\alpha(u)$ является полунепрерывной снизу. В [9] доказательство проведено в случае, когда функция $\Phi(\cdot)$ принимает только конечные значения, но анализ доказательства показывает, что оно переносится и на случай, когда допустимы бесконечные значения функции $\Phi(\cdot)$. Из полунепрывности снизу функции квантили и компактности множества допустимых стратегий по теореме Вейерштрасса следует существование решения задачи (1.3).

## 3. Выборочная аппроксимация задачи

### 3.1. Построение выборочной аппроксимации

Пусть $\{X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность независимых одинаково распределеннных случайных величин, имеющих то же распределение, что и случайная величина $X$. Будем считать, что случайная последовательность $\{X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ определена на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}', \mathbf{P}')$. В качестве пространства элементарных событий $\Omega$ может быть рассмотрено множество $\mathcal{X}^\infty$ реализаций случайной последовательности. Ниже под сходимостью *почти наверное* (п. н.) будем понимать сходимость для почти всех реализаций случайной последовательности $\{X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ относительно вероятностной меры $\mathbf{P}'$.

Для построения выборочной аппроксимации задачи минимизации функции квантили (1.3) заменим функцию вероятности ее выборочной оценкой, которой является частота события $\{\Phi(u,X) \leqslant \varphi\}$:

$$P_\varphi^{(n)}(u) \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u,x) - \varphi),$$

где

$$\chi_A(x) \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

С помощью данной оценки построим выборочную оценку функции квантили $\varphi_\alpha(u)$ в виде

$$\varphi_\alpha^{(n)}(u) \triangleq \inf\{\varphi\colon P_\varphi^{(n)}(u) \geqslant \alpha\}.$$

Теперь запишем аппроксимацию исходной задачи минимизации функции квантили (1.3) в форме

$$\begin{aligned} &\psi_n \triangleq \inf\nolimits_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(u)\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ &U_n \triangleq \operatorname{Arg\,min}\nolimits_{u\in U}\{c^\top u + \varphi_\alpha^{(n)}(u)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

При фиксированной реализации последовательности $\{X^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ и заданном $n \in \mathbb{N}$ задача (3.1) может быть рассмотрена как задача стохастического программирования с дискретным распределением случайных параметров. Для построения данной задачи рассмотрим некоторую реализацию выборки $\{X^{(k)}\}_{k=1}^n$ объема $n$ в виде $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$. Без ограничения общности предположим, что уникальные значения данных реализаций $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ приходятся на первые $\tilde{n}$ элементов. Введем случайную величину $\xi^{(n)}$. Будем считать, что $\xi^{(n)}$ имеет $\tilde{n} \leqslant n$ реализаций $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\tilde{n})}$. Вероятности данных реализаций будем определять как

$$\mathbf{P}\{\xi = x^{(k)}\} \triangleq p_k \triangleq m_k/n, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$

где $m_k$ — количество элементов реализации выборки $\{x^{(k)}\}_{k=1}^n$, совпадающих с $x^{(k)}$. Тогда задачу (3.1) можно записать в форме двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием:

$$U_n = \operatorname{Arg}\min_{u\in U}\bigl\{c^\top u + \inf\{\varphi\colon \mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}\bigr\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По теореме 1 решение данной задачи, а значит и задачи (3.1), существует, т. е. $U_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

### 3.2. Эквивалентная смешанная целочисленная задача

Метод сведения двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием в общем случае описан в [3], однако для его применения необходимо выполнение ряда предположений, которые в линейном случае могут не подтверждаться. В частности, требуется достижимость оптимального решения задачи второго этапа, что в случае $\Phi(u,x) = -\infty$ не выполнено. Предложим способ сведения задачи (3.1) к задаче смешанного целочисленного программирования, который может быть реализован только в предположении, что $\psi_n > -\infty$.

Пусть известна константа $\gamma_1$ такая, что

$$\gamma_1 \geqslant \max_{u\in U}\max\{0, c^\top u - \psi_n\}.$$

Пусть также для каждого $x \in \{x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(\tilde{n})}\}$ известна константа $\gamma_2(x)$ такая, что

$$\gamma_2(x) \geqslant \max_{u\in U}\|b(x) - A(x)u\|_\infty,$$

где через $\|\cdot\|_\infty$ обозначена $\infty$-норма вектора, т. е. максимальное абсолютное значение его координат. В силу компактности и непустоты множества $U$ значения $\gamma_1$ и $\gamma_2(x)$ всегда конечны.

Рассмотрим задачу смешанного целочисленного линейного программирования

$$c^\top u + \varphi \to \inf_{u\in U,\, \varphi\in(-\infty,+\infty],\, y^{(1)},\dots,y^{(\tilde{n})}\in\mathbb{R}^l,\, \delta\in\{0,1\}^{\tilde{n}}} \tag{3.2}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} q^\top\bigl(x^{(k)}\bigr)y^{(k)} - \gamma_1(1-\delta_k) \leqslant \varphi, \quad k = \overline{1,\tilde{n}}, \\ A\bigl(x^{(k)}\bigr)u + B\bigl(x^{(k)}\bigr)y^{(k)} \geqslant b\bigl(x^{(k)}\bigr) - \gamma_2\bigl(x^{(k)}\bigr)(1-\delta_k)e_r, \quad k = \overline{1,\tilde{n}}, \\ y^{(k)} \geqslant 0, \quad k = \overline{1,\tilde{n}}, \quad \sum_{k=1}^{\tilde{n}} p_k\delta_k \geqslant \alpha, \end{gathered}$$

где $e_r$ — вектор из $r$ единиц. В задаче (3.2) для каждой реализации случайных параметров $x^{(k)}$ вводятся переменная $y^{(k)}$, соответствующая стратегии второго этапа, и бинарная переменная $\delta_k$, которая равна единице, если оптимальное значение стратегии второго этапа не больше оптимального значения функции квантили, и нулю — в противном случае.

Сформулируем теорему об эквивалентности задач (3.1) и (3.2).

**Теорема 2.** *Пусть $\psi_n > -\infty$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \dots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ — оптимальное решение задачи* (3.2), *то $u^* \in U_n$*;

2) *если $\bar{u} \in U_n$, то существует оптимальное решение $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \dots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ задачи* (3.2), *такое что $\bar{u} = u^*$.*

Доказательство. Пусть $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \dots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ — оптимальное решение задачи (3.2). Тогда для всех $x^{(k)}$ таких, что $\delta_k = 1$, выполнено

$$q^\top\big(x^{(k)}\big)y_*^{(k)} \leqslant \varphi^*, \quad k = \overline{1, \tilde{n}};$$
$$A\big(x^{(k)}\big)u^* + B\big(x^{(k)}\big)y_*^{(k)} \geqslant b\big(x^{(k)}\big), \quad k = \overline{1, \tilde{n}}; \quad y_*^{(k)} \geqslant 0, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$

а значит, $\Phi(u^*, x^{(k)}) \leqslant \varphi^*$ для набора реализаций случайных параметров $x^{(k)}$ с суммарной вероятностью больше $\alpha$. Поэтому

$$\psi_n = \min_{u \in U} \big\{c^\top u + \inf\{\varphi \colon \mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}\big\} \leqslant c^\top u^* + \varphi^*. \tag{3.3}$$

Пусть теперь $\bar{u} \in U_n$. Построим решение $(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(\tilde{n})}, \bar{\delta})$, являющееся допустимым в задаче (3.2). Пусть $\bar{\varphi} = \inf\{\varphi \colon \mathbf{P}\{\Phi(\bar{u}, \xi^{(n)}) \leqslant \varphi\} \geqslant \alpha\}$. В силу предположения $\psi_n > -\infty$ выполнено $\bar{\varphi} > -\infty$. Определим значения $\bar{\delta}_k$ по правилу

$$\bar{\delta}_k \triangleq \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi(\bar{u}, x^{(k)}) \leqslant \bar{\varphi}, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Значение вектора $\delta = \bar{\delta}$ является допустимым в задаче (3.2). Если $\bar{\delta}_k = 1$ и $|\Phi(\bar{u}, x^{(k)})| < +\infty$, то выберем

$$\bar{y}^{(k)} \in \operatorname{Arg} \min_{y \in Y(\bar{u}, x^{(k)})} \{q^\top(x^{(k)})y\}.$$

Если $\Phi(\bar{u}, x^{(k)}) = -\infty$, то выберем $\bar{y}^{(k)}$ так, чтобы

$$q^\top\big(x^{(k)}\big)\bar{y}^{(k)} \leqslant \bar{\varphi}, \quad k = \overline{1, \tilde{n}};$$
$$A\big(x^{(k)}\big)\bar{u} + B\big(x^{(k)}\big)\bar{y}^{(k)} \geqslant b\big(x^{(k)}\big), \quad k = \overline{1, \tilde{n}}; \quad \bar{y}^{(k)} \geqslant 0, \quad k = \overline{1, \tilde{n}},$$

что будет гарантировать допустимость $y^{(k)} = \bar{y}^{(k)}$ в задаче (3.2). Если $\bar{\delta}_k = 0$ или $\Phi(\bar{u}, x^{(k)}) = +\infty$, то установим $\bar{y}^{(k)} = 0$. По определению констант $\gamma_1$ и $\gamma_2(x^{(k)})$ решение $\bar{y}^{(k)} = 0$ будет являться допустимым в рассматриваемом случае. Таким образом, по оптимальному решению задачи (3.1) построено допустимое решение задачи (3.2), при котором

$$\psi_n = c^\top \bar{u} + \bar{\varphi}. \tag{3.4}$$

Из соотношения (3.3) следует, что для оптимального решения задачи (3.2) выполнено $\psi_n \leqslant c^\top u^* + \varphi^*$. Согласно (3.4) для построенного решения задачи (3.2) вместо неравенства выполнено равенство, поэтому $(\bar{u}, \bar{\varphi}, \bar{y}^{(1)}, \dots, \bar{y}^{(\tilde{n})}, \bar{\delta})$ является оптимальным в задаче (3.2), что доказывает второе утверждение теоремы. Из оптимальности решения $(u^*, \varphi^*, y_*^{(1)}, \dots, y_*^{(\tilde{n})}, \delta^*)$ и достижимости равенства в (3.3) следует, что $\psi_n = c^\top \bar{u} + \bar{\varphi} = c^\top u^* + \varphi^*$; это гарантирует $u^* \in U_n$. Таким образом, оба утверждения теоремы доказаны.

Для применения теоремы 2 необходимо проверить, что $\psi_n \neq -\infty$. Согласно утверждению 1 $\mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) = -\infty\}$ не зависит от $u$. Таким образом, $\psi_n = -\infty$ тогда и только тогда, когда при некотором $u \in U$ выполнено $\mathbf{P}\{\Phi(u, \xi^{(n)}) = -\infty\} \geqslant \alpha$. Отсюда следует, что для проверки равенства $\psi_n = -\infty$ достаточно вычислить значение функции квантили только для одного значения $u$.

При $\psi_n > -\infty$ справедливо утверждение

$$\max_{u\in U} \max\{0, c^\top u - \psi_n\} \leqslant \bigl|\max_{u\in U} c^\top u - \min_{u\in U} \min_{k\in\Delta}\{c^\top u + \Phi(u, x^{(k)})\}\bigr|,$$

где $\Delta$ — набор индексов $k$ таких, что $\Phi(u, x^{(k)}) > -\infty$. Поэтому константу $\gamma_1$ можно определить по формуле

$$\gamma_1 = \bigl|\max_{u\in U} c^\top u - \min_{u\in U} \min_{k\in\Delta}\{c^\top u + \Phi(u, x^{(k)})\}\bigr|. \tag{3.5}$$

Заметим, что вычисление данной константы в случае полиэдрального множества $U$ сводится к решению конечного числа задач линейного программирования.

Таким образом, задача (3.1) может быть решена следующим образом. Сначала необходимо проверить выполнение равенства $\psi_n = -\infty$. Если оно имеет место, то $U_n = U$. Если данное равенство не обеспечено, то необходимо вычислить константу $\gamma_1$ согласно (3.5) и константы $\gamma_2(x^{(k)})$, а затем найти решение задачи (3.2), которое даст решение задачи (3.1).

## 4. Сходимость выборочных аппроксимаций двухэтапной задачи

Основной трудностью доказательства сходимости дискретных аппроксимаций двухэтапной задачи является установление сходимости по стратегии второго этапа. Данная сходимость исследовалась в работе [10] для двухэтапной задачи с критерием в форме математического ожидания. Однако стратегия второго этапа в двухэтапной задаче является вспомогательной, а для формулировки задачи достаточно рассмотреть минимальное значение функции потерь второго этапа, при этом саму двухэтапную задачу формулировать в том виде, в каком она представлена в данной работе. Поэтому теорему о сходимости решений задачи (3.1) к решению исходной задачи (1.3) можно сформулировать только относительно стратегии первого этапа.

**Теорема 3.** *Пусть выполнены следующие условия:*
1) *множество $U$ компактно и непусто*;
2) $\underline{\alpha} < \alpha < 1$;
3) *если $\psi^* < +\infty$, то для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\psi})$ такая, что*

$$|\psi^* - \tilde{\psi}| \leqslant \varepsilon, \quad P_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) > \alpha. \tag{4.1}$$

*Тогда $\psi_n \to \psi^*$ (п. н.) при $n \to \infty$ и любая предельная точка $\bar{u}$ последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, в которой $u_n \in U_n$ для всех $n \in N$, оптимальна в задаче* (1.3) *п. н.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие 2) доказываемой теоремы гарантирует в силу утверждения 1 выполнение неравенства $\psi^* > -\infty$. Покажем, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \psi_n \leqslant \psi^* \quad \text{(п.н.)}. \tag{4.2}$$

Согласно условию 3) при $\psi^* < +\infty$ для всех $\varepsilon > 0$ существует пара $(\tilde{u}, \tilde{\psi})$ такая, что справедливо (4.1). Из закона больших чисел следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)}_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) = P_{\tilde{\psi} - c^\top \tilde{u}}(\tilde{u}) > \alpha \quad \text{(п.н.)}.$$

Таким образом, при достаточно больших $n$ выполнено утверждение

$$\psi_n \leqslant c^\top u + \varphi^{(n)}_\alpha(\tilde{u}) \leqslant c^\top u + \tilde{\psi} - c^\top \tilde{u} = \tilde{\psi} \leqslant \psi^* + \varepsilon \quad \text{(п.н.)}.$$

Поскольку величина $\varepsilon > 0$ произвольна, неравенство (4.2) выполнено при $|\psi^*| < +\infty$. В случае $\psi^* = +\infty$ неравенство (4.2) имеет место, ибо его правая часть бесконечна. Таким образом, неравенство (4.2) доказано.

Теперь докажем, что
$$\varliminf_{n\to\infty} \psi_n \geqslant \psi^* \quad \text{(п.н.).} \tag{4.3}$$

Рассмотрим последовательность $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Обозначим нижний предел данной последовательности через $\bar\psi \triangleq \varliminf\limits_{n\to\infty} \psi_n$. Покажем, что $\bar\psi > -\infty$. Рассмотрим случайную величину $\eta \triangleq \min\limits_{u\in U} \Phi(u, X)$. В силу утверждения 1, полунепрерывности функции $u \mapsto \Phi(u, x)$, компактности множества $U$ выполнено $\mathbf{P}\{\eta = -\infty\} = \underline{\alpha}$. Поэтому при $\alpha > \underline{\alpha}$ выборочные оценки $\eta_\alpha^{(n)}$ квантили уровня $\alpha$ распределения случайной величины $\eta$ при достаточно большом $n$ ограничены снизу некоторой константой $C$. Таким образом, $C \leqslant \eta_\alpha^{(n)} \leqslant \varphi_\alpha^{(n)}(u)$. С учетом компактности множества $U$ также справедливо утверждение $C' \triangleq \min_{u\in U} c^\top u + C \leqslant \psi_n$, откуда следует, что $\bar\psi > -\infty$.

Пусть $\{u_n\}_{n\in K}$ — некоторая сходящаяся к $\bar u$ подпоследовательность $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\bar\psi = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} \psi_n$, где $K$ — множество номеров элементов сходящейся подпоследовательности. В силу компактности множества $U$ данная подпоследовательность существует.

Заметим, что функцию вероятности (1.2) можно представить в виде $P_\varphi(u) = -\mathbf{M}[f(u, \varphi, X)]$, где $f(u, \varphi, x) \triangleq -\chi_{(-\infty,0]}(\Phi(u, x) - \varphi)$. В связи с тем, что функция $\Phi(\cdot)$ является нормальным интегрантом, функция $((u, \varphi), x) \mapsto f(u, \varphi, x)$ также является нормальным интегрантом. Согласно [4, Theorem 2.3] при конечном значении $\bar\psi$

$$\begin{aligned}\varlimsup_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} P^{(n)}_{\psi_n - c^\top u_n}(u_n) &= -\varliminf_{\substack{n\to\infty\\ n\in K}} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_n, \psi_n - c^\top u_n, X_k)\\ &\leqslant -\mathbf{M}[f(\bar u, \bar\psi - c^\top \bar u, X)] = P_{\bar\psi - c^\top \bar u}(\bar u).\end{aligned} \tag{4.4}$$

При $\bar\psi = +\infty$ данное неравенство также выполнено, потому что правая часть неравенства равна 1.

Поскольку $P^{(n)}_{\psi_n - c^\top u_n}(u_n) \geqslant \alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$, из (4.4) следует выполнение соотношения $P_{\bar\psi - c^\top \bar u}(\bar u) \geqslant \alpha$, откуда имеем, что

$$\bar\psi = \varliminf_{n\to\infty} \psi_n = \varliminf_{n\to\infty} \bigl(c^\top u_n + (\psi_n - c^\top u_n)\bigr) = \bigl(c^\top \bar u + (\bar\psi - c^\top \bar u)\bigr) \geqslant \psi^* \quad \text{(п. н.);}$$

это и доказывает неравенство (4.3).

Из неравенств (4.2) и (4.3) следует выполнение равенства

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi^* \quad \text{(п. н.).} \tag{4.5}$$

Теперь докажем, что для любой предельной точки последовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ выполнено $\bar u \in U^*$ (п. н.). В силу (4.5) соотношение (4.4) справедливо для любой сходящейся к $\bar u$ подпоследовательности $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. С учетом этого, выполнено неравенство $P_{\bar\psi - c^\top \bar u}(\bar u) \geqslant \alpha$, которое обеспечивает $c^\top \bar u + \varphi_\alpha(\bar u) \leqslant \bar\psi$. С другой стороны, $c^\top \bar u + \varphi_\alpha(\bar u) \geqslant \psi^* = \bar\psi$. Таким образом, стратегия $\bar u$ оптимальна в исходной задаче, а значит, теорема 3 доказана.

Заметим, что теорема 3 гарантирует сходимость выборочных аппроксимаций как по значению критериальной функции, так и по стратегии оптимизации.

Условие 3) теоремы 3 будет выполнено, например, в том случае, когда функция вероятности $P_\varphi(\cdot)$ является строго монотонной по $\varphi \in \mathbb{R}^1$.

Рассмотрим случай $\psi^* = -\infty$, не учитываемый в данной теореме. Заметим, что указанное равенство имеет место в том и только том случае, когда $\underline{\alpha} \triangleq \mathbf{P}\{\Phi(u, X) = -\infty\} \geqslant \alpha$. Согласно утверждению 1 величина $\underline{\alpha}$ не зависит от $u$, поэтому при $\alpha < \underline{\alpha}$ решение аппроксимирующей задачи (3.1) будет п. н. давать решение $\psi_n = -\infty$ при всех $n$, начиная с некоторого достаточно большого номера.

## Заключение

В работе построена выборочная аппроксимация двухэтапной задачи стохастического программирования с квантильным критерием, для которой предложена процедура поиска точного решения, основанная на сведении задачи к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. При этом учтены случаи, когда оптимальное значение критериальной функции данной задачи является бесконечным. Доказана теорема о сходимости выборочных аппроксимаций к решению исходной задачи как по значению критериальной функции, так и по стратегии оптимизации. Также рассмотрены случаи бесконечного оптимального значения критериальной функции исходной задачи.

Предложенная методология может быть в дальнейшем расширена на более широкий класс двухэтапных задач с различными критериальными функционалами, с различной нелинейной структурой целевых функций. Также представляется интересным исследование сходимости выборочных аппроксимаций многоэтапных задач стохастического программирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A.** Lectures on stochastic programming: Modeling and theory. MPS/SIAM Series on Optimization. 9. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009. 436 p.
2. **Кибзун А. И., Наумов А. В.** Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 1995. № 1. С. 83–93.
3. **Норкин В. И., Кибзун А. И., Наумов А. В.** Сведение задач двухэтапной вероятностной оптимизации с дискретным распределением случайных данных к задачам частично целочисленного программирования // Кибернетика и системный анализ. 2014. Т. 50, № 5. С. 34–48.
4. **Artstein Z., Wets R.J.-B.** Consistency of minimizers and the SLLN for stochastic programs // J. Convex Anal. 1996. Vol. 2, iss. 1/2. P. 1–17.
5. **Pagnoncelli B. K., Ahmed S., Shapiro A.** Sample average approximation method for chance constrained programming: Theory and Applications // J. Optim. Theory Appl. 2009. Vol. 142. P. 399–416. doi: 10.1007/s10957-009-9523-6 .
6. Kibzun A.I., Ivanov S.V. Convergence of discrete approximations of stochastic programming problems with probabilistic criteria. Proc. 9th Internat. Conf. DOOR 2016 (Vladivostok, 2016), eds. Kochetov, Yu. et all., Ser. Theoretical Computer Science and General Issues, vol. 9869, pp. 525–537, Heidelberg: Springer, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2 .
7. **Rockafellar R. T., Wets R.J.-B.** Variational analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 736 p. doi: 10.1007/978-3-642-02431-3 .
8. **Еремин И.И.** Линейная оптимизация и системы линейных неравенств. М.: Академия, 2007. 256 с.
9. **Кибзун А. И., Кан Ю. С.** Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М: Физматлит, 2009. 372 с.
10. **Lepp R.** Approximate solution of stochastic programming problems with recourse // Kybernetika. 1987. Vol. 23, iss. 6. P. 476–482.

Иванов Сергей Валерьевич
Поступила 19.05.2017
канд. физ.-мат. наук, доцент
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
e-mail: sergeyivanov89@mail.ru

Кибзун Андрей Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
заведующий кафедрой теории вероятностей
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
e-mail: kibzun@mail.ru

**REFERENCES**

1. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. *Lectures on stochastic programming: Modeling and theory.* MPS/SIAM Series on Optimization. 9. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2009, 436 p. ISBN: 9780898716870 .
2. Kibzun A.I., Naumov A.V. A two-stage quantile linear programming problem. *Autom. Remote Control*, 1995, vol. 56, iss. 1, pp. 68–76.
3. Norkin V.I., Kibzun A.I., Naumov A.V. Reducing two-stage probabilistic optimization problems with discrete distribution of random data to mixed-integer programming problems. *Cybern. Syst. Anal.*, 2014, vol. 50, pp. 679–692. doi: 10.1007/s10559-014-9658-9 .
4. Artstein Z., Wets R.J.-B. Consistency of minimizers and the SLLN for stochastic programs. *J. Convex Anal.*, 1996, vol. 2, iss. 1/2, pp. 1–17.
5. Pagnoncelli B.K., Ahmed S., Shapiro A. Sample average approximation method for chance constrained programming: Theory and applications. *J. Optim. Theory Appl.*, 2009, vol. 142, pp. 399–416. doi: 10.1007/s10957-009-9523-6 .
6. Kibzun A.I., Ivanov S.V. Convergence of discrete approximations of stochastic programming problems with probabilistic criteria. Proc. 9th Internat. Conf. DOOR 2016 (Vladivostok, 2016), eds. Kochetov, Yu. et all., Ser. Theoretical Computer Science and General Issues, vol. 9869, pp. 525–537, Heidelberg: Springer, 2016. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2 .
7. Rockafellar R.T., Wets R.J.-B. *Variational analysis.* Berlin: Springer, 2009, 736 p. doi: 10.1007/978-3-642-02431-3 .
8. Eremin I.I. *Lineinaya optimizatsiya i sistemy lineinykh neravenstv* [Linear optimization and systems of linear inequalities]. Moscow, Akademiya Publ., 2007, 256 p. ISBN: 978-5-7695-2963-4 .
9. Kan Yu. S., Kibzun A.I. *Zadachi stokhasticheskogo programmirovaniya s veroyatnostnymi kriteriyami* [Problems in stochastic programming with probabilistic criteria]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 372 p. ISBN: 978-5-9221-1148-5/hbk .
10. Lepp R. Approximate solution of stochastic programming problems with recourse. *Kybernetika*, 1987, vol. 23, iss. 6, pp. 476–482.

The paper was received by the Editorial Office on May 19, 2017.

*Sergei Valer'evich Ivanov,* Cand. Sci. (Phys.-Math.), Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia, e-mail: sergeyivanov89@mail.ru .

*Andrei Ivanovich Kibzun*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Head of a department, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia, e-mail: kibzun@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.518.454, 517.518.832

# ПРЯМАЯ ТЕОРЕМА В РАЗНЫХ МЕТРИКАХ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ

**Н. А. Ильясов**

В статье исследуется задача о порядковой точности оценки сверху наилучшего приближения в $L_q(\mathbb{T})$ посредством модуля гладкости $l$-го порядка (модуля непрерывности при $l=1$) в

$$L_p(\mathbb{T})\colon E_{n-1}(f)_q \le C(l,p,q)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q}, \quad n\in\mathbb{N},$$

на классе $M_p(\mathbb{T})$ всех функций $f\in L_p(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям

$$a_0(f)=0,\ a_n(f)\downarrow 0,\ b_n(f)\downarrow 0\ (n\uparrow\infty),\ \text{где}\ l\in\mathbb{N},\ 1<p<q<\infty,\ l>\sigma=1/p-1/q,\ \mathbb{T}=(-\pi,\pi].$$

В случае $l$=1 и $p\ge 1$ указанная оценка впервые установлена П. Л. Ульяновым при доказательстве неравенства разных метрик для модулей непрерывности, а в случае $l>1$ и $p\ge 1$ в силу $L_p$-аналога неравенства Д. Джексона — С. Б. Стечкина доказательство этой оценки сохраняется. Ниже сформулированы основные результаты, полученные в данной работе. Для того, чтобы функция $f\in M_p(\mathbb{T})$ принадлежала $L_q(\mathbb{T})$, где $1<p<q<\infty$, необходимо и достаточно выполнения условия $\sum_{n=1}^{\infty}n^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/n)_p<\infty$, при этом имеют место порядковые равенства

$(a)$ $E_{n-1}(f)_q + n^{\sigma}\omega_l(f;\pi/n)_p \asymp \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q}$, $n\in\mathbb{N}$;

$(b)$ $n^{-(l-\sigma)}\big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(l-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\big)^{1/p} \asymp \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q}$, $n\in\mathbb{N}$.

При оценке снизу в п. $(a)$ второе слагаемое $n^{\sigma}\omega_l(f;\pi/n)_p$, в общем случае, не допускает исключения. Однако, если последовательность $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ либо последовательность $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет $(B_l^{(p)})$-условию Н. К. Бари, равносильному $(S_l)$-условию С. Б. Стечкина, то

$$E_{n-1}(f)_q \asymp \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q},\ n\in\mathbb{N}.$$

Оценка сверху в пункте $(b)$, имеющая место для любой функции $f\in L_p(\mathbb{T})$ при условии сходимости ряда, представляет собой усиленный вариант прямой теоремы. Порядковое равенство $(b)$ показывает, что усиленный вариант является точным в смысле порядка на всем классе $M_p(\mathbb{T})$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль гладкости, прямая теорема в разных метриках, тригонометрический ряд Фурье с монотонными коэффициентами, точное в смысле порядка неравенство на классе.

**N. A. Il'yasov. The direct theorem of the theory of approximation of periodic functions with monotone Fourier coefficients in different metrics.**

We study the problem of order optimality of an upper bound for the best approximation in $L_q(\mathbb{T})$ in terms of the $l$th-order modulus of smoothness (the modulus of continuity for $l=1$) in

$$L_p(\mathbb{T})\colon E_{n-1}(f)_q \le C(l,p,q)\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q}, \quad n\in\mathbb{N},$$

on the class $M_p(\mathbb{T})$ of all functions $f\in L_p(\mathbb{T})$ whose Fourier coefficients satisfy the conditions

$$a_0(f)=0,\ a_n(f)\downarrow 0,\ \text{and}\ b_n(f)\downarrow 0\ (n\uparrow\infty),\ \text{where}\ l\in\mathbb{N},\ 1<p<q<\infty,\ l>\sigma=1/p-1/q,\ \text{and}\ \mathbb{T}=(-\pi,\pi].$$

For $l=1$ and $p\ge 1$, the bound was first established by P. L. Ul'yanov in the proof of the inequality of different metrics for moduli of continuity; for $l>1$ and $p\ge 1$, the proof of the bound remains valid in view of the $L_p$-analog of the Jackson–Stechkin inequality. Below we formulate the main results of the paper. A function

$f \in M_p(\mathbb{T})$ belongs to $L_q(\mathbb{T})$, where $1 < p < q < \infty$, if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/n)_p < \infty$, and the following order inequalities hold:

(a) $E_{n-1}(f)_q + n^\sigma\omega_l(f;\pi/n)_p \asymp \big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/q}$, $n \in \mathbb{N}$;

(b) $n^{-(l-\sigma)}\big(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p(l-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\big)^{1/p} \asymp \big(\sum\limits_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\big)^{1/q}$, $n \in \mathbb{N}$.

In the lower bound in inequality (a), the second term $n^\sigma\omega_l(f;\pi/n)_p$ generally cannot be omitted. However, if the sequence $\{\omega_l(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ or the sequence $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ satisfies Bari's $(B_l^{(p)})$-condition, which is equivalent to Stechkin's $(S_l)$-condition, then

$$E_{n-1}(f)_q \asymp \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_l^q(f;\pi/\nu)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

The upper bound in inequality (b), which holds for any function $f \in L_p(\mathbb{T})$ if the series converges, is a strengthened version of the direct theorem. The order inequality ($b$) shows that the strengthened version is order-exact on the whole class $M_p(\mathbb{T})$.

Keywords: best approximation, modulus of smoothness, direct theorem in different metrics, trigonometric Fourier series with monotone coefficients, order-exact inequality on a class.

**MSC:** 42A10, 41A17, 41A25, 42A32

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-144-158

## Введение

Пусть $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, — пространство всех измеримых $2\pi$-периодических функций с конечной $L_p(\mathbb{T})$-нормой $\|f\|_p = \Big(\pi^{-1}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$;

$L_\infty(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})$ — пространство всех непрерывных $2\pi$-периодических функций с равномерной нормой $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)|\colon x \in \mathbb{T}\}$, где $\mathbb{T} = (-\pi,\pi]$;

$E_n(f)_p$ — наилучшее в метрике $L_p(\mathbb{T})$ приближение функции $f$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n$, $n \in \mathbb{Z}_+$;

$\omega_\ell(f;\delta)_p$ — модуль гладкости $\ell$-го порядка функции $f \in L_p(\mathbb{T})$, $\ell \in \mathbb{N}$, $\delta \in [0,+\infty)$:

$$\omega_\ell(f;\delta)_p = \sup\{\|\Delta_h^\ell f(\cdot)\|_p\colon h \in \mathbb{R},\ |h| \le \delta\},$$

где

$$\Delta_h^\ell f(x) = \sum_{\nu=0}^{\ell}(-1)^{\ell-\nu}\binom{\ell}{\nu}f(x+\nu h), \quad \binom{\ell}{\nu} = \frac{\ell!}{\nu!(\ell-\nu)!}, \quad \nu = \overline{0,\ell}.$$

Следующее утверждение представляет собой прямую теорему в разных метриках теории приближений периодических функций (см., например, [1, теорема B] и библиографию там).

*Пусть* $1 \le p < q \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$,

$$\gamma(q) = q \quad \textit{при} \quad q < \infty \quad \textit{и} \quad \gamma(\infty) = 1, \quad \ell \in \mathbb{N}, \quad \sigma = 1/p - 1/q, \quad \ell > \sigma \tag{0.1}$$

*и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\gamma\sigma-1}\omega_\ell^\gamma\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p < \infty. \tag{0.2}$$

*Тогда $f$ почти всюду совпадает с некоторой функцией из $L_q(\mathbb{T})$ (которую после изменения на множестве меры нуль снова обозначим через $f$) и справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f)_q \le C_1(\ell,p,q)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{\gamma\sigma-1}\omega_\ell^\gamma\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/\gamma}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.3}$$

Здесь и всюду в дальнейшем $C_j(\ell,p,q,\ldots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные величины, зависящие только от указанных в скобках параметров. В случаях когда в формулах часто используется величина, зависящая от параметров, для сокращения записи эту зависимость указываем один раз, а затем ее подразумеваем, не оговаривая явно; при этом если указанная упрощенная величина умножается на выражение, стоящее в круглых скобках, то между величиной и скобкой ставится знак умножения. Например, при доказательстве леммы 2 в длинной цепочке неравенств величина $C_{19}$ равна $C_{19}(\beta\sigma)$.

Оценка (0.3) в силу $L_p$-аналога неравенства Джексона — Стечкина (см., например, [2, § 2, теорема 1, неравенство (2.5); 3, гл. V, п. 5.11, неравенство (1)])

$$E_{n-1}(f)_p \le C_2(\ell)\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{0.4}$$

следует (см. [1, введение, абзац после теоремы B]) из неравенства разных метрик для наилучших приближений Конюшкова — Стечкина [4, § 1, теорема 2, неравенство (1.8)] при $q=\infty$ и П. Л. Ульянова [5, § 4, теорема 4, неравенство (4.3)] при $q<\infty$:

$$E_{n-1}(f)_q \le C_3(p,q)\bigg(n^\sigma E_{n-1}(f)_p + \Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{\gamma\sigma-1}E^\gamma_{\nu-1}(f)_p\Big)^{1/\gamma}\bigg), \quad n\in\mathbb{N}. \tag{0.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Оценка (0.3) при $\ell=1$ и $q<\infty$ впервые установлена в работе П. Л. Ульянова [5, § 4, неравенство (4.9)] (в силу неравенства (0.4) при $\ell>1$ доказательство этой оценки сохраняется).

В случае $1<p<q<\infty$ оценка (0.3) допускает усиление, а именно имеет место следующее утверждение: *Пусть* $1<p<q<\infty$, $f\in L_p(\mathbb{T})$ *и выполнены условия* (0.1), (0.2). *Тогда справедлива оценка*

$$n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E^p_{\nu-1}(f)_q\bigg)^{1/p} \le C_4(\ell,p,q)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega^q_\ell\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{0.6}$$

В силу справедливости порядкового равенства (см., например, [1, разд. 2, замечание 7], $1\le p<q\le\infty$, $\ell>\sigma$, $\alpha\in[1,\infty)$)

$$n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha(\ell-\sigma)-1}E^\alpha_{\nu-1}(f)_q\bigg)^{1/\alpha} \asymp n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\alpha(\ell-\sigma)-1}\omega^\alpha_\ell\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_q\bigg)^{1/\alpha} \tag{0.7}$$

оценка (0.6) является следствием аналогичной оценки для модулей гладкости, впервые полученной В. И. Колядой [6, разд. 3, теорема 2, неравенство (3.8)] в случае $\ell=1$ и отмеченной М. Л. Гольдманом [7, разд. 4, доказательство леммы 6, неравенство (11)] в случае $\ell>1$. Другое доказательство оценки (0.6) (с показателем $\beta=\beta(p)=\max\{2,p\}$ вместо $p$ в левой части) приведено автором в [1, разд. 2, доказательство теоремы 2].

Далее, как обычно, порядковое равенство $\varphi_n\asymp\psi_n$ означает существование таких постоянных $0<C_5\le C_6$, зависящих лишь от заданных параметров (в данном случае $l,p,q$ и $\alpha$), что $C_5\psi_n\le\varphi_n\le C_6\psi_n$.

З а м е ч а н и е 2. Автором [1, теоремы 1 и 2] доказана точность в смысле порядка оценок (0.3) и (0.6) на классе $H^\ell_p[\omega]=\{f\in L_p(\mathbb{T})\colon \omega_\ell(f;\delta)_p\le\omega(\delta),\ \delta\in(0,\pi]\}$, где $\omega\in\Omega_\ell$ — класс функций $\omega=\omega(\delta)$, определенных на $(0,\pi]$ и удовлетворяющих условиям: $0<\omega(\delta)\downarrow 0$ при $\delta\downarrow 0$ и $\delta^{-\ell}\omega(\delta)\downarrow$ при $\delta\uparrow$. В случае $\ell=1$ из этих результатов (в силу неравенства (0.4) и порядкового равенства (0.7)) следуют соответствующие утверждения, ранее полученные другим способом в [6, разд. 4, теорема 5, порядковое равенство (4.5); теорема 7, неравенство (4.9); теорема 4, неравенство (4.1)].

Для заданного $p\in[1,\infty]$ обозначим через $M_p(\mathbb{T})$ класс всех функций $f\in L_p(\mathbb{T})$, коэффициенты Фурье которых удовлетворяют условиям $a_0(f)=0$, $a_n(f)\downarrow 0$, $b_n(f)\downarrow 0$ при

$n \uparrow \infty$. Известно (см., например, [8, гл. 1, § 30]), что ряды Фурье таких функций сходятся всюду, за исключением, быть может, счетного множества точек $x \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, так что почти всюду на $\mathbb{R}$ имеем $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx)$. Отметим, что условие $a_0(f) = 0$ не умаляет общности формулируемых результатов, поскольку при $a_0(f) \neq 0$, полагая $\overline{f}(x) = f(x) - (1/2)a_0(f)$, имеем $\omega_\ell(f;\delta)_p = \omega_\ell(\overline{f};\delta)_p$ и $E_n(f)_p = E_n(\overline{f})_p$, $1 \le p \le \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

В настоящей работе рассматривается задача о точности в смысле порядка неравенств (0.3) и (0.6) на всем классе $M_p(\mathbb{T})$ при $1 < p < q < \infty$.

**Теорема 1.** *Пусть $1 < p < q < \infty$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $\ell \in \mathbb{N}$. Для того чтобы функция $f \in M_p(\mathbb{T})$ принадлежала $L_q(\mathbb{T})$, необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p < \infty, \tag{0.8}$$

*при этом имеют место порядковые равенства:*

1) $\|f\|_q \asymp \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\bigg)^{1/q}$;

2) $E_{n-1}(f)_q + n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \asymp \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}$;

3) $n^{-(\ell-\sigma)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\bigg)^{1/p} \asymp \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}$;

4) $E_{n-1}(f)_q + n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \asymp n^{-(\ell-\sigma)}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\bigg)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}$.

З а м е ч а н и е 3. При оценке снизу в пп. 2) и 4) теоремы 1 второе слагаемое $n^\sigma\omega_\ell(f;\pi/n)_p$ в общем случае исключить невозможно, поскольку существует функция $g \in M_p(\mathbb{T})$ такая, что $n^\sigma\omega_\ell(g;\pi/n)_p \neq O(E_{n-1}(g)_q)$ (см. ниже разд. 3, п. 1)). Однако при условии определенной регулярности последовательности $\{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}$ либо последовательности $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}$ такое исключение возможно.

Для формулировки соответствующего результата обозначим через $B_k^{(\alpha)}$ класс всех последовательностей $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ($0 < \varphi_n \downarrow 0$ при $n \uparrow \infty$), удовлетворяющих условию

$$n^{-k}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\alpha k-1}\varphi_\nu^\alpha\bigg)^{1/\alpha} = O(\varphi_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $k \in (0,\infty)$, $\alpha \in [1,\infty)$. При $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha = 1$ это условие совпадает с известным $(B_k)$-условием Н. К. Бари, которое равносильно $(S_k)$-условию С. Б. Стечкина: существует $\varepsilon \in (0,k)$ такое, что последовательность $\{n^{k-\varepsilon}\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ почти возрастает (см., например, [9, § 2]; там же приведены эквивалентные описания этих условий).

**Теорема 2.** *Пусть $1 < p < q < \infty$, $f \in M_p(\mathbb{T})$, $\sigma = 1/p - 1/q$, $\ell \in \mathbb{N}$ и выполнено условие* (0.8). *Если $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_\ell^{(p)}$ либо (равносильное условие) $\{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty} \in B_\ell^{(p)}$, то имеет место порядковое равенство*

$$E_{n-1}(f)_q \asymp \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{0.9}$$

З а м е ч а н и е 4. Условие $\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(p)}\big(\Leftrightarrow \{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(p)}\big)$ гарантирует справедливость оценки $n^\sigma\omega_\ell(f;\pi/n)_p \le C_7(\ell,p,q)E_{n-1}(f)_q$, $n \in \mathbb{N}$, для любой функции $f$ из $M_q(\mathbb{T})$, где $1 < p < q < \infty$, $\ell \in \mathbb{N}$ (см. ниже разд. 2, оценка (2.8)).

З а м е ч а н и е 5. Равносильность условий $\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)}$ и $\{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)}$, где $1 \le p \le \infty$, $\alpha \in [1,\infty)$, при $\alpha = 1$ известна (см., например, [3, теорема 7.1.1]). Для случая $p = \infty$ и $\alpha = 1$ эквивалентные утверждения о равносильности указанных условий, выраженные в терминах заданного порядка убывания величин $E_{n-1}(f)_p$ и $\omega_\ell(f;\delta)_p$, содержатся в [10, теорема 3] и [9, § 4, лемма 7] (там же приведены полное доказательство соответствующего результата и подробная история вопроса). Общий случай $\alpha \ge 1$ сводится к случаю $\alpha = 1$ (см. ниже разд. 3, п. 2)). Последний факт отмечен также в [1, разд. 2, замечание 6].

З а м е ч а н и е 6. В связи с утверждением теоремы 2 отметим также следующий факт, который является очевидным следствием п. 3) в утверждении теоремы 1: *для справедливости порядкового равенства* (0.9) *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{E_{n-1}(f)_q\}_{n=1}^\infty \in B_{\ell-\sigma}^{(p)}$. Кроме того, если $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty \in B_\ell^{(p)}$, то в силу (0.9) имеем $\{E_{n-1}(f)_q\}_{n=1}^\infty \in B_{\ell-\sigma}^{(p)}$. С другой стороны, последнее условие гарантирует лишь

$$\Big\{\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q(f;\pi/\nu)_p\Big)^{1/q}\Big\}_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell-\sigma}^{(p)}.$$

## 1. Предварительные сведения и вспомогательные утверждения

Следующий результат, принадлежащий Г. Харди и Дж. Литтлвуду (см., например, [8, гл. X, § 3; 11, т. 2, гл. 12, лемма 6.6] является фундаментальным при исследовании свойств функций из $M_p(\mathbb{T})$ в случае $1 < p < \infty$.

**Предложение 1.** *Пусть* $a_n \downarrow 0,\ b_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$ *и* $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$; *тогда* $f \in L_p(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty n^{p-2}(a_n + b_n)^p < \infty$, *где* $1 < p < \infty$. *При этом* $a_n = a_n(f)$, $b_n = b_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, *и справедливы оценки*

$$C_9(p)\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}(a_n(f)+b_n(f))^p\bigg)^{1/p} \le \|f\|_p \le C_8(p)\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} n^{p-2}(a_n(f)+b_n(f))^p\bigg)^{1/p}. \qquad (1.1)$$

**Предложение 2.** *Пусть* $d_\nu \ge 0,\ \nu = 1,2,\dots,\ 1 < \lambda < \infty,\ \tau \ne 1,\ m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\},\ n \in \mathbb{N}$, $m > n$ *и* $s_n = \sum_{\nu=1}^n d_\nu$ *при* $\tau > 1$, $s_n = \sum_{\nu=n}^m d_\nu$ *при* $\tau < 1$; *тогда*

$$\sum_{n=1}^{m} n^{-\tau} s_n^\lambda \le C_{10}(\tau,\lambda) \sum_{n=1}^{m} n^{-\tau}(nd_n)^\lambda. \qquad (1.2)$$

Неравенство (1.2) установлено Г. Харди (см., например, [12, теорема 346]).

**Предложение 3.** *Пусть* $f(x) = \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, *где* $a_n \downarrow 0,\ b_n \downarrow 0\ (n \uparrow \infty)$, *и* $\sum_{n=1}^\infty n^{p-2}(a_n + b_n)^p < \infty$ *при некотором* $p \in (1,\infty)$. *Тогда* $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и справедлива оценка*

$$E_{n-1}(f)_p \le C_{11}(p)\Bigg(n^{1-1/p}(a_n+b_n) + \bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{p-2}(a_\nu+b_\nu)^p\bigg)^{1/p}\Bigg), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (1.3)$$

*При* $p \ge 2$ *в правой части* (1.3) *первое слагаемое можно опустить.*

Неравенство (1.3) доказано А. А. Конюшковым [4, § 1, теорема 4, неравенство (1.21); 13, § 2, неравенство (21)].

**Предложение 4.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$ *и имеет ряд Фурье с коэффициентами* $a_n(f) \downarrow,\ b_n(f) \downarrow$ *при* $n \uparrow$; *тогда справедливы оценки*

$$a_n(f) + b_n(f) \le C_{12}(\ell,p) n^{1/p-1} \omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p, \quad \ell \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}; \qquad (1.4)$$

$$a_{2n}(f)+b_{2n}(f)\le C_{13}(p)n^{1/p-1}E_n(f)_p,\quad n\in\mathbb{N};\tag{1.5}$$

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}(a_\nu(f)+b_\nu(f))^p\Big)^{1/p}\le C_{14}(p)E_{[(n+1)/2]}(f)_p,\quad n\in\mathbb{N},\tag{1.6}$$

*где* $[t]$ — *целая часть числа* $t$. *В этой оценке при* $p>2$, *вообще говоря, нельзя заменить* $E_{[(n+1)/2]}(f)_p$ *на* $E_n(f)_p$; *при* $p\le 2$ *такая замена возможна и без предположения* $a_n(f)\downarrow$, $b_n(f)\downarrow$.

Оценка (1.4) установлена в [4, § 1, следствие 2, неравенство (1.19)]. Оценка (1.5) получена в [13, § 2, теорема 5, неравенство (19)] (см. также [4, § 1, теорема 3, неравенство (1.12)]. Оценка (1.6) и последующее утверждение доказаны в [13, § 2, теорема 6].

**Предложение 5.** *Пусть* $1<p<\infty$, $\ell\in\mathbb{N}$; *тогда для любой функции* $f\in M_p(\mathbb{T})$ *справедливы оценки*

$$C_{16}(\ell,p)n^{-\ell}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\Big)^{1/p}\le\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p$$

$$\le C_{15}(\ell,p)n^{-\ell}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\Big)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}.\tag{1.7}$$

Доказательство предложения 5 приведено в работе В. М. Кокилашвили [14, § 1, теорема 1.1]. Правой оценке в (1.7) предшествовал результат С. Алянчича [15, теорема 1]: $\omega_2(f;\delta)_p=O(\delta)\Rightarrow\omega_1(f;\delta)_p=O(\delta(\ln(\pi e/\delta))^{1/p})$, $\delta\in(0,\pi]$, если учесть классический результат А. Зигмунда [16, теоремы 8 и 8′]: $\omega_2(f;\delta)_p=O(\delta)$, $\delta\in(0,\pi]\Leftrightarrow E_{n-1}(f)_p=O(n^{-1})$, $n\in\mathbb{N}$, где $1\le p\le\infty$. Отметим, что оценки (1.7) являются уточнениями на классе $M_p(\mathbb{T})$ соответствующих неравенств, установленных М. Ф. Тиманом в [17, теорема 1, неравенства (7)] (правая оценка в (1.7) с показателем $\theta=\min\{2,p\}$ вместо $p$) и [18, неравенство (2)] (левая оценка в (1.7) с показателем $\beta=\max\{2,p\}$ вместо $p$) для функций $f\in L_p(\mathbb{T})$.

**Лемма 1.** *Пусть* $1<p<q<\infty$, $f\in L_q(\mathbb{T})$, $\sigma=1/p-1/q$, $\ell\in\mathbb{N}$; *тогда справедлива оценка*

$$\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\le C_{17}(\ell,p,q)\Big(E_n(f)_q+n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big),\quad n\in\mathbb{N}.\tag{1.8}$$

Доказательство. В силу известных свойств модулей гладкости имеем $\omega_\ell(f;\pi/n)_q\le\omega_\ell(f(\cdot)-S_n(f;\cdot);\pi/n)_q+\omega_\ell(S_n(f;\cdot);\pi/n)_q\le 2^\ell\|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_q+\pi^\ell n^{-\ell}\|S_n^{(\ell)}(f;\cdot)\|_q$, где $S_n(f;x)$ — частная сумма порядка $n\in\mathbb{N}$ ряда Фурье функции $f$. Привлечение неравенства М. Рисса (см., например, [11, т. 1, гл. 7, теорема 6.4]) приводит к оценкам

$$\|\Delta_h^\ell S_n(f;\cdot)\|_p=\|S_n(\Delta_h^\ell f(\cdot))\|_p\le C_{18}(p)\|\Delta_h^\ell f(\cdot)\|_p\ (h\in\mathbb{R}),$$

$$\|f(\cdot)-S_n(f;\cdot)\|_q\le(1+C_{18}(q))E_n(f)_q.$$

Далее в силу неравенства разных метрик Джексона — Никольского и неравенства Никольского — Стечкина (см., например, [3, гл. 4, п. 4.9.2, неравенство (7); п. 4.8.6, неравенство (18)]) получаем

$$\|S_n^{(\ell)}(f;\cdot)\|_q\le 2n^\sigma\|S_n^{(\ell)}(f;\cdot)\|_p\le 2n^\sigma 2^{-\ell}n^\ell\|\Delta_{\pi/n}^\ell S_n(f;\cdot)\|_p\le 2^{-\ell+1}n^{\sigma+\ell}C_{18}(p)$$

$$\times\|\Delta_{\pi/n}^\ell f(\cdot)\|_p\le 2^{-\ell+1}C_{18}(p)n^{\sigma+\ell}\omega_\ell(f;\pi/n)_p.$$

Учитывая приведенные оценки, окончательно имеем $\omega_\ell(f;\pi/n)_q\le 2^\ell(1+C_{18}(q))E_n(f)_q+2^{-\ell+1}\pi^\ell C_{18}(p)n^\sigma\omega_\ell(f;\pi/n)_p$. Лемма 1 доказана. □

**Лемма 2.** *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $f \in L_p(\mathbb{T})$, $1 \le \gamma < \beta < \infty$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$; *тогда справедлива оценка*

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{\beta\sigma-1} E_{\nu-1}^{\beta}(f)_p\right)^{1/\beta} \le C_{19}^{1/\beta}(\beta\sigma)\left(n^{\sigma} E_n(f)_p + C_{20}^{1/\gamma}(\gamma\sigma)\left(\sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{\gamma\sigma-1} E_{\nu}^{\gamma}(f)_p\right)^{1/\gamma}\right). \quad (1.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\varphi_n = E_{n-1}(f)_p$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что достаточно рассмотреть случай $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $m > n$, то найдется $s \in \mathbb{N}$ такое, что $2^{s-1}n < m \le 2^s n$. Отсюда, в силу $\varphi_n \downarrow$ $(n \uparrow)$, имеем

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{m} \nu^{\beta\sigma-1}\varphi_\nu^{\beta}\right)^{1/\beta} \le \left(\sum_{\nu=n+1}^{2^s n} \nu^{\beta\sigma-1}\varphi_\nu^{\beta}\right)^{1/\beta} = \left(\sum_{j=0}^{s-1}\sum_{\nu=2^j n+1}^{2^{j+1}n} \nu^{\beta\sigma-1}\varphi_\nu^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

$$\le \left(\sum_{j=0}^{s-1}\varphi_{2^j n+1}^{\beta}\sum_{\nu=2^j n+1}^{2^{j+1}n}\nu^{\beta\sigma-1}\right)^{1/\beta} \le C_{19}^{1/\beta}(\beta\sigma)\left(\sum_{j=0}^{s-1}(2^j n)^{\beta\sigma}\varphi_{2^j n+1}^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

$$\le C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(\sum_{j=0}^{s-1}(2^j n)^{\gamma\sigma}\varphi_{2^j n+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma} = C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(n^{\gamma\sigma}\varphi_{n+1}^{\gamma} + \sum_{j=1}^{s-1}(2^j n)^{\gamma\sigma}\varphi_{2^j n+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}$$

$$\le C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(n^{\gamma\sigma}\varphi_{n+1}^{\gamma} + C_{20}(\gamma\sigma)\sum_{j=1}^{s-1}\sum_{\nu=2^{j-1}n+1}^{2^j n}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}$$

$$= C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(n^{\gamma\sigma}\varphi_{n+1}^{\gamma} + C_{20}\sum_{\nu=n+1}^{2^{s-1}n}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \le C_{19}^{1/\beta}\cdot\left(n^{\sigma}\varphi_{n+1} + C_{20}^{1/\gamma}\left(\sum_{\nu=n+1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_{\nu+1}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}\right),$$

где $C_{19}(\beta\sigma) = 2^{\beta\sigma-1}$ при $\beta\sigma \ge 1$ и $C_{19}(\beta\sigma) = (\beta\sigma)^{-1}(2^{\beta\sigma}-1)$ при $\beta\sigma \le 1$, $C_{20}(\gamma\sigma) = \gamma\sigma(1-2^{-\gamma\sigma})^{-1}$ при $\gamma\sigma \ge 1$ и $C_{20}(\gamma\sigma) = 2$ при $\gamma\sigma \le 1$. Лемма 2 доказана. □

З а м е ч а н и е 7. Оценка (1.9) в случае $\gamma = 1$ и $m = +\infty$ следует (возможно, с другими постоянными) из неравенства (2.6) [5, § 2, лемма 8], в котором надо положить $a_k = E_k(f)_p$, $\alpha = \beta\sigma - 1$, $\nu = \beta$. В приведенном доказательстве леммы 2 с некоторыми изменениями используются соответствующие рассуждения из [5, § 2, лемма 8].

**Лемма 3.** *Пусть* $1 \le \gamma < \beta < \infty$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *и* $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ $(0 < \varphi_n \downarrow 0$ *при* $n \uparrow \infty)$; *тогда*

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\beta\sigma-1}\varphi_\nu^{\beta}\right)^{1/\beta} \le C_{21}(\gamma,\beta,\sigma)\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\nu^{\gamma}\right)^{1/\gamma}. \quad (1.10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно рассмотреть случай $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $\varphi_n \downarrow$ при $n \uparrow$, то при $1 \le \nu \le m$ имеем $\left(\sum_{\mu=1}^{m}\mu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\mu^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \ge \left(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\mu^{\gamma}\right)^{1/\gamma} \ge \varphi_\nu\left(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{\gamma\sigma-1}\right)^{1/\gamma} \ge C_{22}^{-1/\gamma}(\gamma\sigma)\nu^{\sigma}\varphi_\nu$, где $C_{22}(\gamma\sigma) = \gamma\sigma$ при $\gamma\sigma \ge 1$ и $C_{22}(\gamma\sigma) = 1$ при $\gamma\sigma \le 1$. Учитывая последнюю оценку, получаем

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\beta\sigma-1}\varphi_\nu^{\beta}\right)^{1/\beta} = \left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\nu^{\gamma}[\nu^{\sigma}\varphi_\nu]^{\beta-\gamma}\right)^{1/\beta}$$

$$\le C_{22}^{1/\gamma-1/\beta}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\nu^{\gamma}\left[\left(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\mu^{\gamma}\right)^{1/\gamma}\right]^{\beta-\gamma}\right)^{1/\beta}$$

$$\le C_{22}^{1/\gamma-1/\beta}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\nu^{\gamma}\left(\sum_{\mu=1}^{m}\mu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\mu^{\gamma}\right)^{\beta/\gamma-1}\right)^{1/\beta} = C_{22}^{1/\gamma-1/\beta}\cdot\left(\sum_{\nu=1}^{m}\nu^{\gamma\sigma-1}\varphi_\nu^{\gamma}\right)^{1/\gamma}.$$

Лемма 3 доказана. □

## 2. Доказательства теоремы 1 и теоремы 2

Для удобства изложения примем $c_n(f) = (a_n^2(f) + b_n^2(f))^{1/2}$, где $a_n(f),\ b_n(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in M_p(\mathbb{T})$. Очевидно, что $c_n(f) \downarrow 0$ $(n \uparrow \infty)$ и $2^{-1}(a_n(f) + b_n(f)) \le c_n(f) \le a_n(f) + b_n(f),\ n \in \mathbb{N}$.

Доказательство теоремы 1.

1) *Достаточность*: если $f \in M_p(\mathbb{T})$ и сходится ряд (0.8), то в силу правой оценки в (1.1) и оценки (1.4) имеем

$$\|f\|_q \le 2C_8(q)\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f)\biggr)^{1/q} \le 2C_8C_{12}(\ell,p)\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}\Bigl(n^{1/p-1}\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\Bigr)^q\biggr)^{1/q}$$

$$= 2C_8C_{12}\cdot\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q/p-2}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\biggr)^{1/q} = C_{23}(\ell,p,q)\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\biggr)^{1/q}.$$

*Необходимость*: если $f \in M_p(\mathbb{T})$ принадлежит $L_q(\mathbb{T})$, то $f \in M_q(\mathbb{T})$ и в силу правой оценки в (1.7), неравенства (1.2) $(\lambda = q/p > 1,\ \tau = q(\ell-\sigma)+1 > 1)$, неравенства (8) из [19]: $\Bigl(\sum_{n=1}^\infty n^{q\sigma-1}E_{n-1}^q(f)_p\Bigr)^{1/q} \le C_{24}(p,q)\Bigl(\sum_{n=1}^\infty n^{q-2}c_n^q(f)\Bigr)^{1/q}$, левой оценки в (1.1) получаем

$$\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\biggr)^{1/q} \le C_{15}(\ell,p)\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1-q\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\biggr)^{q/p}\biggr)^{1/q}$$

$$\le C_{15}C_{25}(\ell,p,q)\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q\sigma-1}E_{n-1}^q(f)_p\biggr)^{1/q} \le C_{15}C_{25}C_{24}\cdot\biggl(\sum_{n=1}^{\infty} n^{q-2}c_n^q(f)\biggr)^{1/q}$$

$$\le C_{15}C_{25}C_{24}C_9^{-1}(q)\|f\|_q.$$

2) *Оценка сверху*: в силу оценок (1.3) и (1.4) имеем

$$E_{n-1}(f)_q \le 2C_{11}(q)\biggl(n^{1-1/q}c_n(f) + \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\biggr)^{1/q}\biggr)$$

$$\le 2C_{11}C_{12}(\ell,p)\biggl(n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p + \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q}\biggr),$$

откуда

$$E_{n-1}(f)_q + n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p \le 2C_{11}C_{12}\cdot\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q} + (1+2C_{11}C_{12})n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p$$

$$\le C_{26}(\ell,p,q)\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q},$$

поскольку $(\omega_\ell(f;\delta_1)_p \le \omega_\ell(f;\delta_2)_p$ и $\delta_2^{-\ell}\omega_\ell(f;\delta_2)_p \le 2^\ell\delta_1^{-\ell}\omega_\ell(f;\delta_1)_p$ при $0 < \delta_1 < \delta_2 < \infty)$

$$\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q} \ge \biggl(\sum_{\nu=n+1}^{2n}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q} \ge \omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{2n}\Bigr)_p\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{2n}\nu^{q\sigma-1}\biggr)^{1/q}$$

$$\ge 2^{-\ell}C_{27}(p,q)n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

где $C_{27}(p,q) = 2^{\sigma-1/q}$ при $q\sigma \le 1$ и $C_{27}(p,q) = ((2^{q\sigma}-1)(q\sigma)^{-1})^{1/q}$ при $q\sigma \ge 1$.

*Оценка снизу*: в силу правой оценки в (1.7), неравенства (1.2), неравенства (10) из [19]: $\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\Big)^{1/q}\le C_{28}(\ell,p,q)\omega_\ell(f;\pi/n)_q,\ n\in\mathbb{N}$, и левой оценки в (1.7) имеем

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\le C^q_{15}(\ell,p)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1-q\ell}\Big(\sum_{\mu=1}^{\nu}\mu^{p\ell-1}E^p_{\mu-1}(f)_p\Big)^{q/p}$$

$$\le 2^{q/p-1}C^q_{15}\cdot\Bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{-q(\ell-\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{p\ell-1}E^p_{\mu-1}(f)_p\Big)^{q/p}$$

$$+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1-q\ell}\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\nu}\mu^{p\ell-1}E^p_{\mu-1}(f)_p\Big)^{q/p}\Bigg)$$

$$\le 2^{q/p-1}C^q_{15}\cdot\Bigg((q(\ell-\sigma))^{-1}n^{-q(\ell-\sigma)}\Big(\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{p\ell-1}E^p_{\mu-1}(f)_p\Big)^{q/p}+C_{29}(\ell,p,q)\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E^q_{\nu-1}(f)_p\Bigg)$$

$$\le 2^{q/p-1}C^q_{15}\cdot\Big((q(\ell-\sigma))^{-1}C^{-q}_{16}(\ell,p)n^{q\sigma}\omega^q_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p+C_{29}C^q_{28}\omega^q_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\Big),$$

откуда, учитывая оценку (1.8), получим

$$\Big(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega^q_\ell\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\Big)^{1/q}\le C_{30}(\ell,p,q)\Big(n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p+\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q\Big)$$

$$\le C_{30}\cdot\Big(n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p+C_{17}\Big(E_n(f)_q+n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big)\Big)\le C_{31}(\ell,p,q)\Big(E_{n-1}(f)_q+n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big).$$

3) *Оценка сверху.* В силу неравенства (0.5) при $1<p<q<\infty$ имеем

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E^p_{\nu-1}(f)_q\Big)^{1/p}\le 2^{1-1/p}C_3\cdot\Bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E^p_{\nu-1}(f)_p$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E^q_{\mu-1}(f)_p\Big)^{p/q}\Bigg)^{1/p}$$

$$\le 2^{1-1/p}C_3\cdot\Bigg[\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E^p_{\nu-1}(f)_p\Big)^{1/p}+\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{q\sigma-1}E^q_{\mu-1}(f)_p\Big)^{p/q}\Big)^{1/p}$$

$$+C_{32}(\ell,p,q)n^{\ell-\sigma}\Big(\sum_{\mu=n+1}^{\infty}\mu^{q\sigma-1}E^q_{\mu-1}(f)_p\Big)^{1/q}\Bigg],\tag{2.2}$$

где $C_{32}(\ell,p,q)=(p(\ell-\sigma))^{-1/p}$ при $p(\ell-\sigma)\le 1$ и $C_{32}(\ell,p,q)=1$ при $p(\ell-\sigma)\ge 1$.

Оценим сверху второе слагаемое в квадратных скобках в правой части (2.2). Применяя оценку (1.9) при $\gamma=p>1,\ \beta=q$, получим

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{q\sigma-1}E^q_{\mu-1}(f)_p\Big)^{p/q}$$

$$\le C^{p/q}_{19}(q\sigma)\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\Big(\nu^\sigma E_\nu(f)_p+C^{1/p}_{20}(p\sigma)\Big(\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{p\sigma-1}E^p_\mu(f)_p\Big)^{1/p}\Big)^p$$

$$\le 2^{p-1}C^{p/q}_{19}\cdot\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E^p_\nu(f)_p+C_{20}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\sum_{\mu=\nu+1}^{n}\mu^{p\sigma-1}E^p_\mu(f)_p\Big)$$

$$\le 2^{p-1}C_{19}^{p/q}\cdot\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_\nu^p(f)_p+C_{20}\sum_{\mu=1}^{n}\mu^{p\sigma-1}E_\mu^p(f)_p\sum_{\nu=1}^{\mu}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\biggr)$$

$$\le 2^{p-1}C_{19}^{p/q}\cdot(1+C_{20}C_{32})\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_\nu^p(f)_p.$$

Учитывая полученную оценку в (2.2), имеем

$$n^{\sigma-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\biggr)^{1/p}$$

$$\le C_{33}(\ell,p,q)\biggl[n^{\sigma-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\biggr)^{1/p}+\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}E_{\nu-1}^q(f)_p\biggr)^{1/q}\biggr]. \tag{2.3}$$

Далее, привлекая в (2.3) левую оценку в (1.7), неравенство (0.4) и оценку (2.1), окончательно получаем

$$n^{\sigma-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\biggr)^{1/p}$$

$$\le C_{33}\cdot\biggl(C_{16}^{-1}(\ell,p)n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p+C_2(\ell)\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q}\biggr)$$

$$\le C_{33}\cdot\bigl(2^\ell C_{16}^{-1}C_{27}^{-1}(p,q)+C_2\bigr)\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q}.$$

*Оценка снизу.* В силу оценки снизу в порядковом равенстве 2) из утверждения теоремы 1 имеем

$$\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Bigl(f;\frac{\pi}{\nu}\Bigr)_p\biggr)^{1/q}\le C_{34}(\ell,p,q)\Bigl(E_{n-1}(f)_q+n^\sigma\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_p\Bigr),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Требуемая оценка сверху первого слагаемого в правой части (2.4) очевидна, поскольку в силу $E_n(f)_q\downarrow\ (n\uparrow)$ имеем

$$n^{\sigma-\ell}\biggl(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\biggr)^{1/p}\ge C_{35}(\ell,p,q)E_{n-1}(f)_q, \tag{2.5}$$

где $C_{35}(\ell,p,q)=(p(\ell-\sigma))^{-1/p}$ при $p(\ell-\sigma)\ge 1$ и $C_{35}(\ell,p,q)=1$ при $p(\ell-\sigma)\le 1$.

Для оценки сверху второго слагаемого в правой части (2.4) предварительно докажем справедливость неравенства

$$E_{n-1}(f)_p\le C_{36}(\ell,p,q)n^{-\sigma}\omega_\ell\Bigl(f;\frac{\pi}{n}\Bigr)_q,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Действительно, в силу оценки (1.3), оценки (1.4), неравенства (11) из [19]:

$$n^\sigma\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\biggr)^{1/p}\le\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\biggr)^{1/q},\quad n\in\mathbb{N},$$

и неравенства (см. [19, доказательство неравенства (10)]): $\Bigl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\Bigr)^{1/q}\le C_{37}(\ell,q)\times\omega_\ell(f;\pi/n)_q$, $n\in\mathbb{N}$, получаем

$$E_{n-1}(f)_p\le 2C_{11}(p)\biggl(n^{1-1/p}c_n(f)+\biggl(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\biggr)^{1/p}\biggr)$$

$$\leq 2C_{11}(p)\bigg(C_{12}(\ell,q)n^{-\sigma}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q+n^{-\sigma}\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\bigg)^{1/q}\bigg)$$

$$\leq 2C_{11}(p)\big(C_{12}(\ell,q)+C_{37}(\ell,q)\big)n^{-\sigma}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q,$$

откуда и следует требуемое неравенство (2.6).

Далее в силу правой оценки в (1.7), неравенства (2.6) и порядкового равенства (0.7) (полагаем $\alpha=p$) имеем

$$n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\leq C_{15}(\ell,p)n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p}\leq C_{15}C_{36}n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\omega_\ell^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_q\bigg)^{1/p}$$

$$\leq C_{15}C_{36}C_{38}(\ell,p,q)n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\bigg)^{1/p},$$

откуда

$$\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\leq C_{39}(\ell,p,q)n^{-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\bigg)^{1/p}. \tag{2.7}$$

Учитывая неравенства (2.5) и (2.7) в (2.4), получим требуемую оценку снизу в порядковом равенстве 3):

$$\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}\leq C_{34}\cdot(C_{35}^{-1}+C_{39})n^{\sigma-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}E_{\nu-1}^p(f)_q\bigg)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N}.$$

4) Это порядковое равенство следует из сопоставления 2) и 3). Оценка сверху в 4) была непосредственно установлена выше при доказательстве оценки снизу в 3).

Теорема 1 полностью доказана. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $1<p<q<\infty$, $f\in M_p(\mathbb{T})$, $\ell\in\mathbb{N}$, $\sigma=1/p-1/q$ и выполнено условие (0.8), обеспечивающее включение $f\in M_q(\mathbb{T})$. Предварительно докажем, что если $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^\infty\in B_\ell^{(p)}$, то имеет место оценка

$$n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\leq C_{40}(\ell,p,q)E_n(f)_q,\quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.8}$$

В силу правой оценки в (1.7) и условия $\{E_{n-1}(f)_p\}\in B_\ell^{(p)}$ имеем

$$n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\leq 2^\ell n^\sigma\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{2n}\Big)_p\leq 2^\ell n^\sigma C_{15}(\ell,p)(2n)^{-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{2n}\nu^{p\ell-1}E_{\nu-1}^p(f)_p\bigg)^{1/p}$$

$$\leq 2^\ell C_{15}C_{41}(\ell,p)n^\sigma E_{2n-1}(f)_p. \tag{2.9}$$

Оценим сверху $E_{2n-1}(f)_p$. В силу оценки (1.3), оценки (1.5), неравенства (11) из [19] (см. выше доказательство неравенства (2.6)) и оценки (1.6) получаем

$$E_{2n-1}(f)_p\leq 2C_{11}(p)\bigg((2n)^{1-1/p}c_{2n}(f)+\bigg(\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\nu^{p-2}c_\nu^p(f)\bigg)^{1/p}\bigg)$$

$$\leq 2C_{11}\cdot\bigg((2n)^{1-1/p}C_{13}(q)n^{1/q-1}E_n(f)_q+(2n)^{-\sigma}\bigg(\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}\nu^{q-2}c_\nu^q(f)\bigg)^{1/q}\bigg)$$

$$\leq 2C_{11}\cdot\big(2^{1-1/p}C_{13}n^{-\sigma}E_n(f)_q+2^{-\sigma}C_{14}(q)n^{-\sigma}E_n(f)_q\big)=2C_{11}\cdot\big(2^{1-1/p}C_{13}+2^{-\sigma}C_{14}\big)n^{-\sigma}E_n(f)_q,$$

откуда
$$n^{\sigma}E_{2n-1}(f)_p \le C_{42}(p,q)E_n(f)_q, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{2.10}$$
Учитывая полученную оценку (2.10) в (2.9), приходим к оценке (2.8).

Требуемая оценка снизу в (0.9) следует из порядкового равенства в п. 2) утверждения теоремы 1 с учетом оценки (2.8):
$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\right)^{1/q} \asymp E_{n-1}(f)_q + n^{\sigma}\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le \big(1+C_{40}(\ell,p,q)\big)E_{n-1}(f)_q.$$
Оценка сверху в (0.9) содержится в утверждении (0.3) (см. введение), а для случая функций $f\in M_p(\mathbb{T})$ ее доказательство (без привлечения неравенства (0.5)) приведено в п. 2) доказательства теоремы 1. Теорема 2 доказана. $\square$

## 3. Необходимые комментарии и замечания

1) В общем случае оценка (2.8) не имеет места на всем классе $M_p(\mathbb{T})$, что подтверждается приведенным ниже примером. Положим
$$g(x;p;\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \text{ где } a_n=a_n(p;\alpha)=n^{-(1/p'+\alpha)},\ \alpha\in(0,+\infty),\ 1/p+1/p'=1.$$
Поскольку
$$a_n\downarrow 0\ (n\uparrow\infty) \ \text{ и } \ \sum_{n=1}^{\infty}n^{p-2}a_n^p=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(p\alpha+1)}<\infty,$$
то в силу предложения 1 имеем $g\in M_p(\mathbb{T})$, откуда ввиду оценок (1.3) и (1.5) получаем $E_{n-1}(g)_p\asymp n^{-\alpha}$, $n\in\mathbb{N}$. Для значений $\alpha\in(0,\ell]$ в силу оценок (1.7) имеем $\omega_\ell(g;\pi/n)_p\asymp n^{-\alpha}$ при $\alpha<\ell$ и $\omega_\ell(g;\pi/n)_p\asymp n^{-\ell}(\ln(en))^{1/p}$ при $\alpha=\ell$.

Допустим теперь, что $\alpha\in(\sigma,+\infty)$, где $\sigma=1/p-1/q,\ 1<p<q<\infty$. В этом случае
$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{q-2}Fa_n^q=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-(q(\alpha-\sigma)+1)}<\infty,$$
и, следовательно, $g\in M_q(\mathbb{T})$ в силу предложения 1. Далее, в силу оценок (1.3) и (1.5) получаем $E_{n-1}(g)_q\asymp n^{-(\alpha-\sigma)}$, $n\in\mathbb{N}$. Для значений $\alpha\in(\sigma,\ell]$ с учетом оценок (1.7) имеем $\omega_\ell(g;\pi/n)_q\asymp n^{-(\alpha-\sigma)}$, $n\in\mathbb{N}$, поскольку $\alpha\in(\sigma,\ell]\Rightarrow 0<\alpha-\sigma\le\ell-\sigma<\ell$. Таким образом, при $\sigma<\alpha<\ell$ оценка (2.8) имеет место (в этом случае $\big\{E_{n-1}(g)_p\big\}_{n=1}^{\infty}\in B_\ell^{(p)}$):
$$n^{\sigma}\omega_\ell(g;\pi/n)_p\asymp n^{-(\alpha-\sigma)}\asymp E_{n-1}(g)_q\asymp\omega_\ell(g;\pi/n)_q, \quad n\in\mathbb{N},$$
а при $\sigma<\alpha=\ell$ оценка (2.8) не имеет места (в этом случае $\{E_{n-1}(g)_p\}_{n=1}^{\infty}\notin B_\ell^{(p)}$):
$$n^{\sigma}\omega_\ell(g;\pi/n)_p\asymp n^{-(\ell-\sigma)}(\ln(en))^{1/p}\asymp E_{n-1}(g)_q(\ln(en))^{1/p}\asymp\omega_\ell(g;\pi/n)_q(\ln(en))^{1/p}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

2) Условия $\{E_{n-1}(f)_p\}_{n=1}^{\infty}\in B_\ell^{(\alpha)}$ и $\{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\}_{n=1}^{\infty}\in B_\ell^{(\alpha)}$ равносильны при любых $\alpha\in[1,\infty)$, $1\le p\le\infty$, $\ell\in\mathbb{N}$. Как было отмечено в замечании 5, равносильность указанных условий при $\alpha>1$ сводится к известному случаю $\alpha=1$. Поэтому достаточно установить, что для любой последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(0<\varphi_n\downarrow 0$ при $n\uparrow\infty)$ при $\alpha>1$ имеет место соотношение: $\{\varphi_n\}\in B_\ell^{(\alpha)}\Leftrightarrow\{\varphi_n\}\in B_\ell^{(1)}\equiv B_\ell$, откуда, полагая $\varphi_n=E_{n-1}(f)_p,\ n\in\mathbb{N}$, либо $\varphi_n=\omega_\ell(f;\pi/n)_p,\ n\in\mathbb{N}$, получим
$$\{E_{n-1}(f)_p\}\in B_\ell^{(\alpha)}\Leftrightarrow\{E_{n-1}(f)_p\}\in B_\ell^{(1)}\Leftrightarrow\Big\{\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big\}\in B_\ell^{(1)}\Leftrightarrow\Big\{\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p\Big\}\in B_\ell^{(\alpha)}.$$

Если $\{\varphi_n\} \in B_\ell^{(1)}$, то с учетом леммы 3 (полагаем $\gamma = 1$, $\beta = \alpha$) имеем $\{\varphi_n\} \in B_\ell^{(\alpha)}$ при любом $\alpha > 1$. С другой стороны, если $\{\varphi_n\} \in B_\ell^{(\alpha)}$ при некотором $\alpha > 1$, то очевидно, что $\{\varphi_n^\alpha\} \in B_{\alpha\ell}^{(1)}$. Последнее условие на последовательность $\{\varphi_n^\alpha\}$ равносильно $(S_{\alpha\ell})$-условию: существует $\varepsilon \in (0, \alpha\ell)$ такое, что $\{n^{\alpha\ell-\varepsilon}\varphi_n^\alpha\}$ почти возрастает и, следовательно, последовательность $\{n^{\ell-\varepsilon/\alpha}\varphi_n\}$ также почти возрастает. Таким образом, последовательность $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет $(S_\ell)$-условию, которое равносильно условию $\{\varphi_n\} \in B_\ell \equiv B_\ell^{(1)}$. Отметим также, что ввиду установленного соотношения имеем

$$\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\beta)}, \quad \{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(\beta)}$$

при любых $\alpha, \beta \in [1, \infty)$ и, следовательно, $\{E_{n-1}(f)_p\} \in B_\ell^{(\alpha)} \Leftrightarrow \{\omega_\ell(f;\pi/n)_p\} \in B_\ell^{(\beta)}$.

3) В силу (0.4) из оценки (2.7) следует неравенство ($f \in M_q(\mathbb{T})$, $1 < p < q < \infty$)

$$\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_p \le C_{43}(\ell,p,q)n^{-\ell}\bigg(\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{p(\ell-\sigma)-1}\omega_\ell^p\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_q\bigg)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

С другой стороны, применяя (0.3) в оценке (1.8) и учитывая (2.1), получим неравенство

$$\omega_\ell\Big(f;\frac{\pi}{n}\Big)_q \le C_{44}(\ell,p,q)\bigg(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{q\sigma-1}\omega_\ell^q\Big(f;\frac{\pi}{\nu}\Big)_p\bigg)^{1/q}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

которое при $\ell = 1$ другим способом установлено П. Л. Ульяновым [5, § 4, теорема 4, неравенство (4.4)] (формулировка приведена ранее в [20, § 3, второе неравенство в (3.6′)]; там же указывается, что это неравенство имеет место и при $\ell > 1$).

Неравенство (3.1) для $f \in M_q(\mathbb{T}) \subset M_p(\mathbb{T})$ является обратным (в смысле оценки сверху $\omega_\ell(f;\delta)_p$ посредством $\omega_\ell(f;\delta)_q$) к неравенству (3.2), имеющему место для любой функции $f \in L_q(\mathbb{T})$ при условии сходимости ряда (0.2). Из неравенства (3.1) можно сделать заключение, что при переходе из класса $M_q(\mathbb{T})$ в $M_p(\mathbb{T})$, где $p < q$, гладкость функции увеличивается на величину, не большую, чем $\sigma = 1/p - 1/q$. Последнее утверждение легко просматривается в степенной шкале порядков убывания модулей гладкости, а именно: если $f \in M_q(\mathbb{T})$ и $\omega_\ell(f;\delta)_q \asymp \delta^\alpha$, где $0 < \alpha \le \ell$, то в силу неравенства (3.1)

$$\omega_\ell(f;\delta)_p = O(\delta^{\alpha+\sigma}) \text{ при } \alpha+\sigma<\ell \text{ и } \omega_\ell(f;\delta)_p = O(\delta^{\alpha+\sigma}(\ln(\pi e/\delta))^{1/p}) \text{ при } \alpha+\sigma=\ell,\ \delta \in (0,\pi].$$

При этом для любого $\varepsilon > 0$ имеет место соотношение $\omega_\ell(f;\delta)_p \ne O(\delta^{\alpha+\sigma+\varepsilon})$, поскольку в противном случае неравенство (3.2) приводит к оценке $\omega_\ell(f;\delta)_q = O(\delta^{\alpha+\varepsilon})$, что противоречит исходному предположению $\omega_\ell(f;\delta)_q \asymp \delta^\alpha$, $\delta \in (0,\pi]$.

Утверждения, аналогичные приведенным в предыдущем абзаце, для случая неотрицательных и невозрастающих на отрезке $[0,1]$ функций ранее установлены Э. А. Стороженко [21, § 3, абзац после доказательства теоремы 4]. Отметим, что в [21] рассматривается случай $\ell = 1$, а соответствующие выводы основаны на привлечении первого неравенства в утверждении теоремы 4 [21] и неравенства (3.2) при $\ell = 1$.

Для функции $g(x;q;\alpha) = \sum_{n=1}^\infty n^{-(1/q'+\alpha)}\cos nx$, где $\alpha \in (0,+\infty)$, $1/q + 1/q' = 1$, имеем (необходимые обоснования приведены выше в п. 1) этого раздела): $g \in M_q(\mathbb{T})$ и $E_{n-1}(g)_q \asymp n^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, откуда $\omega_\ell(g;\pi/n)_q \asymp n^{-\alpha}$ при $\alpha < \ell$, $\omega_\ell(g;\pi/n)_q \asymp n^{-\ell}(\ln(en))^{1/q}$ при $\alpha = \ell$, и, следовательно,

$$\omega_\ell(g;\delta)_q \asymp \delta^\alpha \text{ при } \alpha<\ell \text{ и } \omega_\ell(g;\delta)_q \asymp \delta^\ell(\ln(\pi e/\delta))^{1/q} \text{ при } \alpha=\ell, \quad \delta \in (0,\pi].$$

Далее, поскольку $g \in M_p(\mathbb{T})$ и $E_{n-1}(g)_p \asymp n^{-(\alpha+\sigma)}$, $n \in \mathbb{N}$, то $\omega_\ell(g;\pi/n)_p \asymp n^{-(\alpha+\sigma)}$ при $\alpha+\sigma < \ell$, $\omega_\ell(g;\pi/n)_p \asymp n^{-\ell}(\ln(en))^{1/p}$ при $\alpha+\sigma = \ell$, $n \in \mathbb{N}$, откуда следует, что $\omega_\ell(g;\delta)_p \asymp \delta^{\alpha+\sigma}$ при $\alpha+\sigma < \ell$ и $\omega_\ell(g;\delta)_p \asymp \delta^\ell(\ln(\pi e/\delta))^{1/p}$ при $\alpha+\sigma = \ell$, $\delta \in (0,\pi]$. Таким образом, при $\alpha+\sigma < \ell$ имеем

$$\omega_\ell(g;\delta)_p \asymp \delta^{\alpha+\sigma} = \delta^\sigma\delta^\alpha \asymp \delta^\sigma\omega_\ell(g;\delta)_q, \quad \delta \in (0,\pi].$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильясов Н.А.** К прямой теореме теории приближений периодических функций в разных метриках // Тр. МИАН. 1997. Т. 219. С. 220–234.
2. **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.
3. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
4. **Конюшков А.А.** Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. 1958. Т. 44(86), № 1. С. 53–84.
5. **Ульянов П.Л.** Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках // Мат. сб. 1970. Т. 81(123), № 1. С. 104–131.
6. **Коляда В.И.** О соотношениях между модулями непрерывности в разных метриках // Тр. МИАН. 1988. Т. 181. С. 117–136.
7. **Гольдман М.Л.** Критерий вложения разных метрик для изотропных пространств Бесова с произвольными модулями непрерывности // Тр. МИАН. 1992. Т. 201. С. 186–218.
8. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
9. **Бари Н.К., Стечкин С.Б.** Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. об-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
10. **Лозинский С.М.** Обращение теорем Джексона // Докл. АН СССР. 1952. Т. 83, № 5. С. 645–647.
11. **Зигмунд А.** Тригонометрические ряды: в 2 т. М.: Мир, 1965. Т. 1. 616 с.; Т. 2. 538 с.
12. **Харди Г.Г., Литтльвуд Д.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
13. **Конюшков А.А.** О наилучших приближениях при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 1. С. 56–78.
14. **Кокилашвили В.М.** О приближении периодических функций // Тр. Тбилис. мат. ин-та. 1968. Т. 34. С. 51–81.
15. **Aljančić S.** On the integral moduli of continuity in $L_p$ $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients // Proc. Amer. Math. Soc. 1966. Vol. 17, no. 2. P. 287–294.
16. **Zygmund A.** Smooth functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, no. 1. P. 47–76.
17. **Тиман М.Ф.** Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах $L_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ // Мат. сб. 1958. Т. 46(88), № 1. С. 125–132.
18. **Тиман М.Ф.** О теореме Джексона в пространствах $L_p$ // Укр. мат. журн. 1966. Т. 18, № 1. С. 134–137.
19. **Ильясов Н.А.** Обратная теорема в разных метриках теории приближений периодических функций с монотонными коэффициентами Фурье // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 153–162.
20. **Ульянов П.Л.** Вложение некоторых классов функций $H_p^\omega$ // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1968. Т. 32, № 3. С. 649–686.
21. **Стороженко Э.А.** Теоремы вложения и наилучшие приближения // Мат. сб. 1975. Т. 97(139), № 2(6). С. 230–241.



Ильясов Ниязи Аладдин оглы
канд. физ.-мат. наук, доцент
Бакинский государственный университет
г. Баку, Азербайджан
e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com


Поступила 15.03.2017


## REFERENCES

1. Il'yasov N.A. On the direct theorem of approximation theory of periodic functions in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.,* 1997, vol. 219, pp. 215–230.
2. Stechkin S.B. On the order of the best approximations of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.,* 1951, vol. 15, no. 3, pp. 219–242 (in Russian).
3. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables.* Oxford, London, New York, Pergamon Press, 1963, 655 p. This translation has been made from A.F. Timan's book entitled *Teoriya priblizheniya funktsii deystvitel'nogo peremennogo*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.

4. Konyushkov A.A. Best approximations by trigonometric polynomials and Fourier coefficients. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 44(86), no. 1, pp. 53–84 (in Russian).
5. Ul'yanov P.L. Imbedding theorems and relations between best approximations (moduli of continuity) in different metrics. *Math. USSR-Sb.,* 1970, vol. 10, no. 1, pp. 103–126.
6. Kolyada V.I. On relations between moduli of continuity in different metrics. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 4, pp. 127–148.
7. Goldman M.L. An imbedding criterion for different metrics for isotropic Besov spaces with arbitrary moduli of continuity. *Proc. Steklov Inst. Math.,* 1994, vol. 2, pp. 155–181.
8. Bari N.K. *A treatise on trigonometric series.* Vols. I, II. Oxford, New York: Pergamon Press, 1964, vol. I, 533 p; vol. II, 508 p. Original Russian text published in *Trigonometricheskie ryady*, Moscow, Fiz.-Mat. Giz. Publ., 1961, 936 p.
9. Bari N.K., Stechkin S.B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Trudy Mosk. Mat. Obsh*, 1956, vol. 5, pp. 483–522 (in Russian).
10. Lozinskii S.M. The converse of Jackson's theorems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 1952, vol. 83, no. 5, pp. 645–647 (in Russian).
11. Zygmund A. *Trigonometric series*, vol. I, II. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1959; vol. I, 383 p.; vol. II, 354 p. Translated under the title *Trigonometricheskie ryady.* M.: Mir Publ., 1965, vol. I, 616 p; vol. II, 538 p.
12. Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. *Inequalities.* London: Cambridge Univ. Press, 1934. 314 p. Translated under the title *Neravenstva*, Moscow, Inostran. Literat. Publ., 1948, 456 c.
13. Konyushkov A.A. On best approximations in the conversion of the Fourier coefficients by the method of arithmetic average and on the Fourier series with non-negative coefficients. *Sib. Mat. Zhurn.*, 1962, vol. 3, no. 1, pp. 56–78 (in Russian).
14. Kokilashvili V.M. On approximation of periodic functions. *Tr. Tbilis. Mat. Inst.,* 1968, vol. 34, pp. 51–81 (in Russian).
15. Aljančić S. On the integral moduli of continuity in$L_p$ $(1 < p < \infty)$ of Fourier series with monotone coefficients. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 1966, vol. 17, no. 2, pp. 287–294.
16. Zygmund A. Smooth functions. *Duke Math. J.*, 1945, vol. 12, no. 1, pp. 47–76.
17. Timan M.F. Inverse theorems of the constructive theory of functions in $L_p$ spaces $(1 \le p \le \infty)$. *Mat. Sb. (N.S.)*, 1958, vol. 46(88), no. 1, pp. 125–132 (in Russian).
18. Timan M.F. On the Jackson theorem in $L_p$ spaces. *Ukr. Mat. Zhurn.,* 1966, vol. 18, no. 1, pp. 134–137 (in Russian).
19. Il'yasov N.A. The inverse theorem in different metrics of approximation theory for periodic functions with monotone Fourier coefficients. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 153–162 (in Russian).
20. Ul'yanov P.L. Embedding of certain classes of functions $H_p^\omega$. *Math. USSR–Izv.,* 1968, vol. 2, no. 3, pp. 601–637.
21. Storozhenko E.A. Embedding theorems and best approximations. *Math. USSR–Sb.*, 1975, vol. 26, no. 2, pp. 213–224.

The paper was received by the Editorial Office on March 15, 2017.

*Niyazi Aladdin ogly Il'yasov*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Baku State University, Baku, Azerbaijan, e-mail: niyazi.ilyasov@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.16+519.85

# ПРИБЛИЖЕННАЯ СХЕМА ДЛЯ ЗАДАЧИ ВЗВЕШЕННОЙ 2-КЛАСТЕРИЗАЦИИ С ФИКСИРОВАННЫМ ЦЕНТРОМ ОДНОГО КЛАСТЕРА[1]

**А. В. Кельманов, А. В. Моткова, В. В. Шенмайер**

Рассматривается одна из труднорешаемых задач разбиения конечного множества точек евклидова пространства на два кластера. Критерием решения является минимум суммы по обоим кластерам взвешенных сумм квадратов внутрикластерных расстояний от элементов кластеров до их центров. Центр одного из кластеров неизвестен и определяется как точка пространства, равная среднему значению элементов этого кластера (т. е. равная центроиду этого кластера). Центр другого кластера фиксирован в начале координат. Весовые множители для обеих внутрикластерных сумм заданы на входе. Предложен алгоритм приближенного решения задачи, основанный на адаптивном сеточном подходе поиска центра оптимального кластера. Показано, что алгоритм является полностью полиномиальной приближенной схемой (FPTAS) в случае фиксированной размерности пространства. В случае, когда размерность пространства не фиксирована, но ограничена медленно растущей функцией от мощности входного множества, алгоритм реализует полиномиальную аппроксимационную схему (PTAS).

Ключевые слова: евклидово пространство, кластеризация, $NP$-трудность, FPTAS, PTAS.

**A. V. Kel'manov, A. V. Motkova, V. V. Shenmaier. Approximation scheme for the problem of weighted 2-partitioning with a fixed center of one cluster.**

We consider the intractable problem of partitioning a finite set of points in Euclidean space into two clusters with minimum sum over the clusters of weighted sums of squared distances between the elements of the clusters and their centers. The center of one cluster is unknown and is defined as the mean value of its elements (i.e., it is the centroid of the cluster). The center of the other cluster is fixed at the origin. The weight factors for the intracluster sums are given as input. We present an approximation algorithm for this problem, which is based on the adaptive grid approach to finding the center of the optimal cluster. We show that the algorithm implements a fully polynomial-time approximation scheme (FPTAS) in the case of fixed space dimension. If the dimension is not fixed but is bounded by a slowly growing function of the number of input points, the algorithm realizes a polynomial-time approximation scheme (PTAS).

Keywords: Euclidean space, partitioning, NP-hardness, FPTAS, PTAS.

**MSC:** 68W25, 68Q25

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-159-170

## Введение

Предметом настоящего исследования является задача взвешенного разбиения конечного множества точек евклидова пространства на два кластера с фиксированным центром одного из кластеров. Цель исследования — обоснование аппроксимационной схемы.

Исследование мотивировано слабой изученностью рассматриваемой задачи в алгоритмическом плане и актуальностью ее приложений, таких как статистические проблемы совместного оценивания и проверки гипотез по неоднородным выборкам, проблемы кластерного анализа данных, проблемы интерпретации данных и др.

Статья развивает результаты из [1–3] по построению аппроксимационных схем и имеет следующую структуру. В разд. 1 приведены формулировка задачи, ее интерпретации и примеры приложений. Там же приведены основные известные результаты и анонсированы полученные алгоритмические результаты. В разд. 2 сформулированы и доказаны геометрические утверждения, обеспечивающие установление оценок качества (точности и временной сложности)

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 16-11-10041).

предложенного алгоритма. В разд. 3 приведено описание алгоритма и показано, что при фиксированной размерности пространства он реализует полностью полиномиальную приближенную схему (FPTAS). Наконец, в разд. 4. предложена ускоренная модификация алгоритма и показано, что ускоренный алгоритм реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) в случае, когда размерность пространства является медленно растущей функцией от мощности входного множества.

## 1. Формулировка, интерпретация и приложения задачи, известные и полученные результаты

Всюду далее $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{R}_+$ — множество положительных вещественных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\|\cdot\|$ — евклидова норма, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Рассматривается следующая задача.

З а д а ч а Weighted variance-based 2-clustering with given center. Дано: $N$-элементное множество $\mathcal{Y}$ точек из $\mathbb{R}^q$, натуральное число $M \le N$ и два вещественных числа $w_1 > 0$ и $w_2 \ge 0$. Найти: разбиение множества $\mathcal{Y}$ на два кластера $\mathcal{C}$ и $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}$ такое, что

$$F(\mathcal{C}) = w_1\sum_{y\in\mathcal{C}}\|y-\overline{y}(\mathcal{C})\|^2 + w_2\sum_{y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}}\|y\|^2 \longrightarrow \min, \tag{1.1}$$

где $\overline{y}(\mathcal{C}) = \dfrac{1}{|\mathcal{C}|}\sum\limits_{y\in\mathcal{C}} y$ — геометрический центр (центроид) кластера $\mathcal{C}$ при ограничении $|\mathcal{C}| = M$.

В последнее десятилетие задача (1.1) привлекает живой интерес исследователей в области вычислительной сложности и аппроксимируемости труднорешаемых задач. По просьбе редакции журнала приводится краткий обзор известных нам результатов, непосредственно связанных с результатами, представленными в разд. 2–4 данной статьи.

Сформулированную задачу, очевидно, можно интерпретировать как задачу о взвешенном (весами $w_1$ и $w_2$) разбиении (кластеризации). Ранее исследовались следующие варианты этой задачи: (1) $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 0$, (2) $\omega_1 = \omega_2 = 1$, (3) $\omega_1 = |\mathcal{C}|$ и $\omega_2 = N - |\mathcal{C}|$. Для указанных вариантов задачи к настоящему времени получен целый ряд результатов.

Первый вариант задачи ($\omega_1 = 1, \omega_2 = 0$) известен под названием $M$-Variance [4]. Он моделирует одну из простейших проблем анализа данных и распознавания образов — поиск (выбор) во множестве объектов совокупности похожих (близких) элементов. Сильная $NP$-трудность этого варианта задачи установлена в [5].

Точные алгоритмы с трудоемкостью $\mathcal{O}(qN^{q+1})$ предложены в [4; 6]. Для случая, в котором размерность $q$ пространства фиксирована, а координаты точек входного множества имеют целочисленные значения построен [7] точный псевдополиномиальный алгоритм. Его трудоемкость есть величина $\mathcal{O}(qN(2MB+1)^q)$, где $B$ — максимальное абсолютное значение координаты точек входного множества. В [8] построен 2-приближенный полиномиальный алгоритм, имеющий временную сложность $\mathcal{O}(qN^2)$. Схема PTAS, позволяющая находить приближенное решение с относительной погрешностью $\varepsilon > 0$ за время $\mathcal{O}(qN^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$, предложена в [9]. Факт несуществования схемы FPTAS установлен в [1], и там же такая схема предложена для случая, в котором размерность $q$ пространства фиксирована. Эта схема позволяет находить $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи для заданного $\varepsilon \in (0,1)$ за время $\mathcal{O}(N^2(M/\varepsilon)^q)$.

Во втором варианте, когда $\omega_1 = \omega_2 = 1$, требуется найти разбиение входного множества на два кластера, минимизирующее сумму двух внутрикластерных сумм. Первая из них — суммарный квадратичный разброс точек кластера $\mathcal{C}$ относительно неизвестного центроида. Вторая — суммарный квадратичный разброс точек кластера $\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}$ относительно начала координат. Этот вариант задачи индуцируется (см. [10–12]), в частности, одной из проблем помехоустойчивого кластерного анализа данных, когда известно, что в одном из кластеров ($\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}$) шумящие данные разбросаны (распределены) относительно заданной точки (известного среднего), которую без ограничения общности можно считать началом координат.

Сильная $NP$-трудность этого варианта задачи следует из результатов [10–13]. Напомним, что в этих работах была установлена $NP$-трудность в сильном смысле полиномиально эквивалентной задачи на максимум.

Для второго варианта задачи к настоящему времени предложены: точные алгоритмы [6; 14] с трудоемкостью $\mathcal{O}(qN^{q+1})$, $\mathcal{O}(q^2N^{2q})$; точные алгоритмы [13; 15; 16] для случая целочисленных входов с трудоемкостью $\mathcal{O}(Nq^{q+1}(MB)^{q-1})$, $\mathcal{O}(qMN(2MB)^{q-1})$ и $\mathcal{O}(qN(2MB+1)^q)$, соответственно, где $B$ — максимальное абсолютное значение координат входных точек; 2-приближенный полиномиальный алгоритм [17] с трудоемкостью $\mathcal{O}(qN^2)$; схема PTAS [18] с трудоемкостью $\mathcal{O}(qN^{2/\varepsilon+1}(9/\varepsilon)^{3/\varepsilon})$, где $\varepsilon$ — относительная погрешность.

Кроме того, в [2] установлено, что для этого варианта задачи схема FPTAS не существует, и в этой же работе такая схема предложена для случая, в котором размерность $q$ пространства фиксирована. Эта схема позволяет находить приближенное решение задачи за время $\mathcal{O}(N^2(1/\varepsilon)^{q/2})$.

Наконец, в [19] предложен рандомизированный алгоритм, который для заданных $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in (0,1)$ при установленном значении параметра находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение с вероятностью не менее $1-\gamma$ за время $\mathcal{O}(qN)$. Там же найдены условия, при которых алгоритм асимптотически точен и имеет трудоемкость $\mathcal{O}(qN^2)$.

Третий вариант задачи, когда $\omega_1 = |\mathcal{C}|$ и $\omega_2 = N - |\mathcal{C}|$, можно трактовать как взвешенное мощностями кластеров 2-разбиение точек входного множества. Этот вариант задачи, как и второй вариант, возникает в задачах помехоустойчивого кластерного анализа данных в ситуации, когда известен центр одного из кластеров, относительно которого распределены (разбросаны) неизвестные точки, а центроид другого кластера требуется найти (оценить) (см., например, [3; 20–22]). Сильная $NP$-трудность и факт несуществования схемы FPTAS доказаны в [21; 22], соответственно.

Для этого варианта в [20] был предложен точный алгоритм, ориентированный на случай целочисленных входов задачи; трудоемкость алгоритма есть величина $\mathcal{O}(qN(2MB+1)^q)$, где $B$, как и выше, — максимальное абсолютное значение координат входных точек. Кроме того, в [3] обоснован приближенный алгоритм, который в случае фиксированной размерности пространства реализует схему FPTAS. Эта схема позволяет находить приближенное решение задачи за время $\mathcal{O}(N^2(1/\varepsilon)^{q/2})$.

Общая задача взвешенного разбиения, рассматриваемая в настоящей статье, как и ее отмеченные варианты, относится к числу типичных проблем, возникающих, в частности, в анализе данных (Data analysis), распознавании образов (Pattern recognition), машинном обучении (Machine learning) и интерпретации данных (Data mining). В этих проблемах модели разбиения множеств на кластеры, как известно, играют ключевую роль (см., например, [23–27]).

В настоящей работе построен приближенный алгоритм, который применим к сформулированной обобщенной задаче с произвольными весами $w_1 > 0$ и $w_2 \geq 0$, а не только для вариантов задачи с весами, указанными выше. Для заданной относительной погрешности $\varepsilon$ этот алгоритм позволяет находить $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи за время $\mathcal{O}\big(qN^2(\sqrt{2q/\varepsilon}+2)^q\big)$. Кроме того, предложена модификация алгоритма с улучшенной трудоемкостью, оцениваемой величиной $\mathcal{O}\big(\sqrt{q}N^2(\pi e/2)^{q/2}(\sqrt{2/\varepsilon}+2)^q\big)$ . В случае, когда размерность пространства ограничена константой, обе версии алгоритма реализуют схему FPTAS с трудоемкостью $\mathcal{O}(N^2(1/\varepsilon)^{q/2})$. В случае, когда размерность пространства ограничена величиной $C\log N$, где $C$ — некоторая положительная константа, модифицированная версия алгоритма остается полиномиальной и реализует схему PTAS с трудоемкостью $\mathcal{O}\big(N^{C\,(1.05+\log(2+\sqrt{2/\varepsilon}))}\big)$.

## 2. Геометрические основы алгоритма

Для обоснования алгоритма нам потребуется несколько базовых утверждений.

Следующие две леммы относятся к числу хорошо известных (см., например, [1; 8]).

**Лемма 1.** *Пусть $\mathcal{Z}$ — конечное множество в $\mathbb{R}^q$, $\overline{z}$ — его центроид и $x$ — произвольная точка в $\mathbb{R}^q$. Тогда*

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}} \|z-x\|^2 = \sum_{z\in\mathcal{Z}} \|z-\overline{z}\|^2 + |\mathcal{Z}|\,\|x-\overline{z}\|^2.$$

**Лемма 2.** *Пусть $\mathcal{Z}$ — конечное множество в $\mathbb{R}^q$, $\overline{z}$ — его центроид и точка $u\in\mathbb{R}^q$ находится ближе к $\overline{z}$, чем любая точка из $\mathcal{Z}$. Тогда*

$$\sum_{z\in\mathcal{Z}} \|z-u\|^2 \le 2\sum_{z\in\mathcal{Z}} \|z-\overline{z}\|^2 \,.$$

**Лемма 3.** *Пусть*

$$S(\mathcal{C},x) = w_1\sum_{y\in\mathcal{C}} \|y-x\|^2 + w_2 \sum_{y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}} \|y\|^2,$$

*где $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{Y}$ и $x\in\mathbb{R}^q$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *при любом непустом фиксированном подмножестве $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{Y}$ минимум функции $S(\mathcal{C},x)$ по всем точкам $x\in\mathbb{R}^q$ достигается в точке $\overline{y}(\mathcal{C}) = 1/|\mathcal{C}|\sum\limits_{y\in\mathcal{C}} y$;*

(2) *при любой фиксированной точке $x\in\mathbb{R}^q$ минимум функции $S(\mathcal{C},x)$ по всем $M$-элементным подмножествам $\mathcal{C}\subseteq\mathcal{Y}$ достигается на подмножестве $\mathcal{B}^x$, состоящем из $M$ точек множества $\mathcal{Y}$, в которых функция*

$$g^x(y) = (w_1-w_2)\,\|y\|^2 - 2w_1\,\langle y,x\rangle\,, \qquad y\in\mathcal{Y} \tag{2.1}$$

*принимает наименьшие значения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение (1) является прямым следствием леммы 1 и определений функций $S$ и $F$. Утверждение (2) основано на цепочке равенств

$$\begin{aligned} S(\mathcal{C},x) &= w_1\sum_{y\in\mathcal{C}} \|y-x\|^2 + w_2\sum_{y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{C}} \|y\|^2 \\ &= w_1\sum_{y\in\mathcal{C}}\|y\|^2 - 2w_1\sum_{y\in\mathcal{C}}\langle y,x\rangle + Mw_1\|x\|^2 + w_2\Big(\sum_{y\in\mathcal{Y}}\|y\|^2 - \sum_{y\in\mathcal{C}}\|y\|^2\Big) \\ &= \sum_{y\in\mathcal{C}}\{(w_1-w_2)\|y\|^2 - 2w_1\langle y,x\rangle\} + Mw_1\|x\|^2 + w_2\sum_{y\in\mathcal{Y}}\|y\|^2. \end{aligned}$$

Остается заметить, что последние два слагаемых в последнем равенстве не зависят от $\mathcal{C}$.

Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** *Пусть $\mathcal{C}^*$ — оптимальное решение задачи и $t$ — точка из множества $\mathcal{C}^*$, ближайшая к его центроиду. Тогда*

$$\|t-\overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2 \le \frac{1}{Mw_1}F(\mathcal{B}^t). \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу выбора точки $t$ имеем $\|t-\overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2 \le \|y-\overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2$, где $y\in\mathcal{C}^*$. Суммируя это неравенство по всем $y\in\mathcal{C}^*$, получаем

$$M\|t-\overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2 \le \sum_{y\in\mathcal{C}^*} \|y-\overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2.$$

С другой стороны, из определения (1.1) и оптимальности $\mathcal{C}^*$ имеем

$$w_1 \sum_{y \in \mathcal{C}^*} \|y - \overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2 \le F(\mathcal{C}^*) \le F(\mathcal{B}^t).$$

Отсюда получаем утверждение леммы.

Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** *Если для произвольного $\varepsilon > 0$ и для некоторой точки $x \in \mathbb{R}^q$ справедливо неравенство*

$$\|x - \overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2 \le \frac{\varepsilon}{2Mw_1} F(\mathcal{B}^t), \tag{2.3}$$

*то подмножество $\mathcal{B}^x$, определенное в лемме 3, является $(1+\varepsilon)$-приближенным решением задачи.*

Доказательство. Согласно лемме 3 справедливы соотношения

$$F(\mathcal{B}^t) = S(\mathcal{B}^t, \overline{y}(\mathcal{B}^t)) \le S(\mathcal{B}^t, t) \le S(\mathcal{C}^*, t). \tag{2.4}$$

С другой стороны, в силу леммы 2 имеем $\sum\limits_{y \in \mathcal{C}^*} \|y - t\|^2 \le 2 \sum\limits_{y \in \mathcal{C}^*} \|y - \overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2$, а значит,

$$S(\mathcal{C}^*, t) \le 2F(\mathcal{C}^*). \tag{2.5}$$

Объединяя (2.3)–(2.5), получим

$$\|x - \overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2 \le \frac{\varepsilon}{2Mw_1} F(\mathcal{B}^t) \le \frac{\varepsilon}{2Mw_1} S(\mathcal{C}^*, t) \le \frac{\varepsilon}{Mw_1} F(\mathcal{C}^*).$$

Отсюда и из лемм 3 и 1 вытекает цепочка неравенств

$$F(\mathcal{B}^x) = S(\mathcal{B}^x, \overline{y}(\mathcal{B}^x)) \le S(\mathcal{B}^x, x) \le S(\mathcal{C}^*, x) \le F(\mathcal{C}^*) + Mw_1 \|x - \overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2 \le (1+\varepsilon) F(\mathcal{C}^*).$$

Лемма 5 доказана.

## 3. Приближенный алгоритм

Суть предлагаемого подхода к поиску приближенного решения задачи состоит в следующем. Для каждой точки входного множества строится область (кубической формы) так, чтобы одна из построенных областей гарантированно включала центроид искомого подмножества. По заданной на входе желаемой относительной погрешности решения строится решетка, дискретизирующая указанную область с равномерным по всем координатам шагом. Размер и шаг решетки вычисляются адаптивно (см. далее) для каждой из входных точек. Для каждого узла решетки формируется подмножество из $M$ точек входного множества, имеющих наименьшие значения функции (2.1). Сформированное подмножество объявляется претендентом на решение. В качестве окончательного решения выбирается тот претендент (подмножество), для которого значение целевой функции задачи минимально.

Напомним, что этот по своей сути адаптивный сеточный подход ранее уже применялся в [1–3] для решения трех упомянутых в разд. 1 вариантов задачи. Настоящая работа демонстрирует результативность адаптивного сеточного подхода к решению обобщенной задачи.

Для произвольной точки $x \in \mathbb{R}^q$ и положительных чисел $h$ и $H$ определим множество точек

$$\mathcal{G}(x, h, H) = \{d \in \mathbb{R}^q \mid d = x + h(i_1, \ldots, i_q),\ i_k \in \mathbb{Z},\ |hi_k| \le H,\ k \in \{1, \ldots, q\}\} \tag{3.1}$$

— многомерную решетку кубической формы размера $2H$ с центром в точке $x$ и покоординатным шагом $h$ между узлами.

З а м е ч а н и е 1. Если для произвольных точек $x$ и $z \in \mathbb{R}^q$ верно, что $\|z - x\| \leq H$, то расстояние от $z$ до ближайшего узла решетки $\mathcal{G}(x, h, H + h/2)$ не превосходит $h\sqrt{q}/2$.

Для построения алгоритмического решения нам потребуется для каждой точки $y$ входного множества $\mathcal{Y}$ адаптивно определять полуразмер $H$ решетки и ее шаг $h$ таким образом, чтобы область решетки гарантированно включала центроид искомого подмножества, а шаг решетки определялся заданной относительной погрешностью $\varepsilon$. В связи с этим положим

$$H(y) = \sqrt{\frac{1}{Mw_1} F(\mathcal{B}^y)}, \qquad y \in \mathcal{Y}, \tag{3.2}$$

$$h(y, \varepsilon) = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{qMw_1} F(\mathcal{B}^y)}, \qquad y \in \mathcal{Y}, \qquad \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \tag{3.3}$$

где $\mathcal{B}^y$ — множество, определенное в лемме 3.

З а м е ч а н и е 2. Для произвольной точки $y \in \mathcal{Y}$ мощность решетки $\mathcal{G}(y, h, H + h/2)$ не превосходит значения

$$L = \Big(2\Big\lfloor\frac{H + h/2}{h}\Big\rfloor + 1\Big)^q \leq \Big(2\frac{H}{h} + 2\Big)^q = \Big(\sqrt{\frac{2q}{\varepsilon}} + 2\Big)^q$$

в силу (3.2) и (3.3).

Приведем пошаговую запись алгоритма.

А л г о р и т м $\mathcal{A}$

Вход алгоритма: $N$-элементное множество $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^q$, натуральное число $M \leq N$ и вещественные числа $w_1 > 0$, $w_2 \geq 0$ и $\varepsilon \in (0, 1)$.

Для каждой точки $y \in \mathcal{Y}$ выполним шаги 1–5.

Ш а г 1. Вычислим значения $g^y(z)$, $z \in \mathcal{Y}$, по формуле (2.1); найдем $M$-элементное подмножество $\mathcal{B}^y \subseteq \mathcal{Y}$ с наименьшими значениями $g^y(z)$, вычислим значение $F(\mathcal{B}^y)$ по формуле (1.1).

Ш а г 2. Если $F(\mathcal{B}^y) = 0$, то положим $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \mathcal{B}^y$; выход.

Ш а г 3. Вычислим значения $H$ и $h$ по формулам (3.2) и (3.3) соответственно.

Ш а г 4. Построим решетку $\mathcal{G}(y, h, H + h/2)$ по формуле (3.1).

Ш а г 5. Для каждого узла $x$ решетки $\mathcal{G}(y, h, H + h/2)$ вычислим значения $g^x(y)$, $y \in \mathcal{Y}$, по формуле (2.1) и найдем $M$-элементное подмножество $\mathcal{B}^x \subseteq \mathcal{Y}$ с наименьшими значениями $g^x(y)$. Вычислим значение $F(\mathcal{B}^x)$ по формуле (1.1); запомним это значение и множество $\mathcal{B}^x$.

Ш а г 6. В семействе $\{\mathcal{B}^x \mid x \in \mathcal{G}(y, h, H+h/2),\ y \in \mathcal{Y}\}$ допустимых множеств, построенных на шагах 1–5, выберем в качестве решения $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$ то множество $\mathcal{B}^x$, для которого значение $F(\mathcal{B}^x)$ минимально.

Выход алгоритма: множество $\mathcal{C}_{\mathcal{A}}$.

**Теорема 1.** *Для любого* $\varepsilon \in (0, 1)$ *алгоритм* $\mathcal{A}$ *находит* $(1 + \varepsilon)$*-приближенное решение задачи за время* $\mathcal{O}\big(qN^2(\sqrt{2q/\varepsilon} + 2)^q\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим точность алгоритма. Очевидно, что один из циклов алгоритма будет выполнен для точки $t \in \mathcal{Y}$, ближайшей к центроиду оптимального множества $\mathcal{C}^*$. По лемме 4 для этой точки будет выполнено неравенство (2.2), которое в соответствии с (3.2) означает, что $\|t - \overline{y}(\mathcal{C}^*)\| \leq H(t)$. Следовательно, центроид оптимального подмножества лежит в кубе с ребром $2H(t)$ и центром в $t$.

Пусть $x^*$ — узел решетки $\mathcal{G}(t, h, H + h/2)$, ближайший к центроиду $\mathcal{C}^*$. В соответствии с замечанием 1 квадрат расстояния от оптимального центроида $\overline{y}(\mathcal{C}^*)$ до ближайшего узла $x^*$ решетки не превосходит $h^2q/4$. Поэтому

$$\|x^* - \overline{y}(\mathcal{C}^*)\|^2 \leq \frac{h^2 q}{4} = \frac{\varepsilon}{2Mw_1} F(\mathcal{B}^t). \tag{3.4}$$

Следовательно, точка $x^*$ удовлетворяет условиям леммы 5, а соответствующее ей подмножество $\mathcal{B}^{x^*}$ является $(1+\varepsilon)$-приближенным решением задачи.

Оценим временную сложность алгоритма. На шаге 1 для вычисления значений $g^y(z)$ требуется не более $\mathcal{O}(qN)$ операций. Для поиска $M$ наименьших элементов во множестве из $N$ элементов потребуется $\mathcal{O}(N)$ операций (например, с помощью алгоритма отыскания $n$-го наименьшего значения в неупорядоченном массиве [28]). Вычисление значения $F(\mathcal{B}^y)$ выполняется за время $\mathcal{O}(qN)$. Шаги 2 и 3 выполняются за время $\mathcal{O}(q)$. Для построения решетки на шаге 4 требуется $\mathcal{O}(qL)$ операций (по замечанию 2). На шаге 5 вычисление элементов множества $\mathcal{B}^x$ для каждого узла $x$ решетки выполняется за время $\mathcal{O}(qN)$, как и вычисление значения $F(\mathcal{B}^x)$ (по аналогии с вычислениями на шаге 1). Поэтому суммарное время вычислений для всех узлов решетки на этом шаге равно $\mathcal{O}(qNL)$. Наконец, поскольку шаги 1–5 выполняются $N$ раз, трудоемкость выполнения этих шагов равна $\mathcal{O}(qN^2L)$. Трудоемкость шага 6 оценивается величиной $\mathcal{O}(NL)$. В итоге суммарные затраты на всех шагах равны $\mathcal{O}(qN^2L) = \mathcal{O}\big(qN^2(\sqrt{2q/\varepsilon}+2)^q\big)$.

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Легко видеть, что в случае фиксированной размерности пространства трудоемкость алгоритма $\mathcal{A}$ оценивается величиной $\mathcal{O}(N^2(1/\varepsilon)^{q/2})$ и он реализует схему FPTAS.

## 4. Ускоренный алгоритм

Предложенный выше алгоритм можно ускорить путем исключения из процесса вычислений значительной части узлов адаптивно строящихся решеток кубической формы. Действительно, поскольку центроид оптимального кластера лежит на расстоянии, не превосходящем некоторый порог $H$, от одной из точек входного множества, достаточно рассматривать только те узлы построенных решеток, что расположены на расстоянии, не превышающем $H$ от их центров, с небольшим запасом, который определен ниже в лемме 6.

Для каждого $y \in \mathcal{Y}$ положим $R = H + h\sqrt{q}/2$, где $H = H(y)$, $h = h(y,\varepsilon)$ — параметры решетки, определенные по формулам (3.2) и (3.3) соответственно. Построим "сокращенную" решетку сферической формы: $\mathcal{G}_R(y,h,H+h/2) = \mathcal{G}(y,h,H+h/2)\cap B(y,R)$, где $B(y,R) = \{x \in \mathbb{R}^q \mid \|x-y\| \le R\}$ — шар радиуса $R$ с центром в $y$.

Справедливы следующие утверждения.

**Лемма 6.** *Пусть $x$ — произвольная точка шара $B(y,H)$, $y \in \mathcal{Y}$. Тогда ближайший к $x$ узел решетки $\mathcal{G}_R(y,h,H+h/2)$ расположен на расстоянии от $x$, не превышающем $h\sqrt{q}/2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $z$ — ближайший к $x$ узел решетки $\mathcal{G}(y,h,H+h/2)$. Тогда в соответствии с замечанием 1 справедливо неравенство $\|z-x\| \le h\sqrt{q}/2$. С другой стороны, $\|x-y\| \le H$, отсюда и из неравенства треугольника получаем $\|z-y\| \le H + h\sqrt{q}/2 = R$. Следовательно, $z \in \mathcal{G}_R(y,h,H+h/2)$.

Лемма 6 доказана.

**Лемма 7.** *Для любого $y \in \mathcal{Y}$ мощность множества $\mathcal{G}_R(y,h,H+h/2)$ не превосходит величины*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi q}}\Big(\frac{2\pi e}{q}\Big)^{q/2}\Big(\frac{H}{h}+\sqrt{q}\Big)^q.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку каждый узел $z$ решетки $\mathcal{G}_R(y,h,H+h/2)$ лежит внутри шара $B(y,R)$, то согласно неравенству треугольника все точки $q$-мерного куба со стороной $h$ с центром в $z$ лежат внутри шара $B(y,R+h\sqrt{q}/2)$. Следовательно, суммарный объем всех таких кубов не превышает объема $q$-мерного шара радиуса $R+h\sqrt{q}/2 = H+h\sqrt{q}$. Отсюда $L_R h^q \le V_q(H+h\sqrt{q})^q$, где $L_R$ — мощность множества $\mathcal{G}_R(y,h,H+h/2)$, а $V_q$ — объем $q$-мерного единичного шара, оцениваемый по общеизвестной формуле $V_q \le 1/\sqrt{\pi q}\,\Big(\dfrac{2\pi e}{q}\Big)^{q/2}$

(см. например, [29]). Сопоставляя два последних неравенства, получаем заявленную в лемме оценку.

Лемма 7 доказана.

Обозначим через $\mathcal{A}_R$ алгоритм, отличающийся от алгоритма $\mathcal{A}$ тем, что в описании шагов 4, 5 вместо решеток $\mathcal{G}(y,h,H+h/2)$ рассматриваются решетки $\mathcal{G}_R(y,h,H+h/2)$. Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *алгоритм* $\mathcal{A}_R$ *находит* $(1+\varepsilon)$*-приближенное решение задачи за время*

$$\mathcal{O}\Big(\sqrt{q}N^2\Big(\frac{\pi e}{2}\Big)^{q/2}\Big(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}+2\Big)^q\Big). \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно равенству $H/h = (1/\sqrt{2})\sqrt{q/\varepsilon}$ и лемме 7 получаем

$$L_R \leq \frac{1}{\sqrt{\pi q}}\Big(\frac{2\pi e}{q}\Big)^{q/2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{q}{\varepsilon}}+\sqrt{q}\Big)^q = \frac{1}{\sqrt{\pi q}}\Big(\frac{\pi e}{2}\Big)^{q/2}\Big(\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}+2\Big)^q.$$

Отсюда с учетом оценок трудоемкости шагов 1–6 алгоритма $\mathcal{A}$, установленных в доказательстве теоремы 1, получаем оценку (4.1) трудоемкости алгоритма $\mathcal{A}_R$.

Остается заметить, что оценки точности обоих алгоритмов совпадают. Действительно, для некоторого $y \in \mathcal{Y}$ центроид оптимального кластера лежит в шаре $B(y,H)$, а значит, согласно лемме 6 находится на расстоянии, не превышающем $h\sqrt{q}/2$, от одного из узлов “сокращенной” решетки $\mathcal{G}_R(y,h,H+h/2)$. Тем самым выполняется соотношение (3.4), откуда следует, что алгоритм находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи.

Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 4. В связи с тем что $\mathcal{G}_R(y,h,H+h/2) \subset \mathcal{G}(y,h,H+h/2)$, время работы алгоритма $\mathcal{A}_R$ при любых $N$, $q$ и $\varepsilon$ строго меньше времени работы алгоритма $\mathcal{A}$.

З а м е ч а н и е 5. Алгоритм $\mathcal{A}_R$ полиномиален не только в случае фиксированной размерности $q$ пространства, но и в случае, когда размерность пространства ограничена величиной $C\log N$, где $C$ — некоторая положительная константа. В этом случае согласно теореме 2 алгоритм находит $(1+\varepsilon)$-приближенное решение задачи за время $O(N^d \log N)$, где

$$d = \frac{C}{2}\log\frac{\pi e}{2} + C\log\Big(2+\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\Big) < C\,\Big(1.05+\log\Big(2+\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\Big)\Big).$$

Таким образом, в указанном случае алгоритм реализует схему PTAS.

## Заключение

В работе построен приближенный алгоритм сеточного типа для решения квадратичной евклидовой задачи взвешенной 2-кластеризации конечного множества точек при заданном центре одного из кластеров. Показано, что алгоритм является полностью полиномиальной аппроксимационной схемой, если размерность пространства ограничена константой. Алгоритм остается полиномиальным, даже если размерность пространства не фиксирована, но ограничена величиной $\mathcal{O}(\log N)$, медленно растущей с ростом мощности входного множества точек. Актуальность этого случая объясняется тем, что размерность пространства $\mathcal{O}(\log N)$ является минимальной; при данной размерности возможно существование $N$-элементного множества точек с координатами из фиксированного конечного набора значений.

Рассмотренная задача кластеризации относится к числу слабоизученных проблем дискретной оптимизации. Продолжение исследований этой задачи представляется важным делом ближайшей перспективы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Кельманов А. В., Романченко С. М.** FPTAS для одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2014. Т. 21, № 3. С. 41–52.
2. **Кельманов А. В., Хандеев В. И.** Полностью полиномиальная аппроксимационная схема для специального случая одной квадратичной евклидовой задачи 2-кластеризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 2. С. 332–340. doi: 10.7868/S0044466916020113 .
3. **Kel'manov A. V., Motkova A. V.** A fully polynomial-time approximation scheme for a special case of a balanced 2-clustering problem // Proc. Internat. Conf. on Discrete Optimization and Operations Research (DOOR 2016). 2016. P. 182–192. (Lecture Notes Comp. Sci.; vol. 9869.) doi: 10.1007/978-3-319-44914-2-15.
4. Finding $k$ points with minimum diameter and related problems / A. Aggarwal, H. Imai, N. Katoh, S. Suri // J. Algorithms. 1991. Vol. 12, № 1. P. 38–56. doi: 10.1016/0196-6774(91)90022-Q .
5. **Кельманов А. В., Пяткин А. В.** $NP$-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, № 5. С. 37–45.
6. **Шенмайер В. В.** Решение некоторых задач поиска подмножества векторов с использованием диаграмм Вороного // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23, № 4. С. 102–115. doi: 10.17377/daio.2016.23.526 .
7. **Кельманов А. В, Романченко С. М.** Псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Автоматика и телемеханика. 2012. № 2. С. 156–162.
8. **Кельманов А. В., Романченко С. М.** Приближенный алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 1. С. 61–69.
9. **Шенмайер В. В.** Аппроксимационная схема для одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19, № 2. С. 92–100.
10. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов / Э. Х. Гимади, А. В. Кельманов, М. А. Кельманова, С. А. Хамидуллин // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1(25). С. 55–74.
11. A posteriori detecting a quasiperiodic fragment in a numerical sequence / E. Kh. Gimadi, A. V. Kel'manov, M. A. Kel'manova, S. A. Khamidullin // Pattern Recognition and Image Analysis. 2008. Vol. 18, № 1. P. 30–42. doi:10.1134/S1054661808010057 .
12. **Кельманов А. В., Пяткин А. В.** О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 11. С. 2059–2065.
13. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом / А. Е. Бабурин, Э. Х. Гимади, Н. И. Глебов, А. В. Пяткин // Дискретный анализ и исследование операций. 2007. Т. 14, № 1. С. 32–42.
14. **Гимади Э. Х., Пяткин А. В., Рыков И. А.** О полиномиальной разрешимости некоторых задач выбора подмножества векторов в евклидовом пространстве фиксированной размерности // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, № 6. С. 11–19.
15. **Гимади Э. Х., Глазков Ю. В., Рыков И. А.** О двух задачах выбора подмножества векторов с целочисленными координатами в евклидовом пространстве с максимальной нормой суммы // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т. 15, № 4. С. 30–43.
16. **Кельманов А. В., Хандеев В. И.** Точный псевдополиномиальный алгоритм для одной задачи двухкластерного разбиения множества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22, № 4. С. 50–62. doi: 10.17377/daio.2015.22.463.
17. **Долгушев А. В., Кельманов А. В.** Приближенный алгоритм решения одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 2. С. 29–40.
18. **Долгушев А. В., Кельманов А. В., Шенмайер В. В.** Полиномиальная аппроксимационная схема для одной задачи разбиения конечного множества на два кластера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С 100–109.
19. **Кельманов А. В., Хандеев В. И.** Рандомизированный алгоритм для одной задачи двухкластерного разбиения множества векторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 335–344. doi: 10.7868/S0044466915020131.

20. **Кельманов А. В., Моткова А. В.** Точные псевдополиномиальные алгоритмы для задачи сбалансированной 2-кластеризации // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23, № 3. С. 21–34. doi: 10.17377/daio.2016.23.520
21. **Кельманов А. В., Пяткин А. В.** $NP$-трудность некоторых квадратичных евклидовых задач 2-кластеризации // Докл. РАН. 2015. Т. 464, № 5. С. 535–538. doi: 10.7868/S0869565215290058
22. **Кельманов А. В., Пяткин А. В.** О сложности некоторых квадратичных евклидовых задач 2-кластеризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 3. С. 498–504. doi: 0.7868/S0044466916030091 .
23. **Aggarwal C. C.** Data Mining: The Textbook. Cham: Springer International Publishing, 2015. 734 p. ISBN: 978-3319141411 .
24. **Bishop C. M.** Pattern Recognition and Machine Learning. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2006. 738 p. ISBN: 978-0-387-31073-2 .
25. **Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.** The Elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction. New York: Springer-Verlag, 2009. 763 p. doi: 10.1007/978-0-387-84858-7 .
26. An introduction to statistical learning / G. James, D. Witten, T. Hastie, R. Tibshirani. New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2013. 426 p. doi: 10.1007/978-1-4614-7138-7 .
27. **Jain A. K.** Data clustering: 50 years beyond $k$-means // Pattern Recognition Lett. 2010. Vol. 31. P. 651–666. doi: 10.1016/j.patrec.2009.09.011 .
28. **Wirth N.** Algorithms + data structures = programs. New Jersey: Prentice Hall, 1976. 366 p. ISBN: 0130224189 .
29. **Ball K.** An elementary introduction to modern convex geometry. Flavors of geometry // MSRI Publications / ed. S. Levi. 1997. Vol. 31. P. 1–58. ISBN: 0-521-62048-1 .

Кельманов Александр Васильевич
д-р физ.-мат. наук
зав. лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет,
г. Новосибирск
e-mail: kelm@math.nsc.ru

Поступила 24.05.2017

Моткова Анна Владимировна
студент
Новосибирский государственный университет
г. Новосибирск,
e-mail: anitamo@mail.ru

Шенмайер Владимир Владимирович
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
г. Новосибирск
e-mail: shenmaier@mail.ru

## REFERENCES

1. Kel'manov A. V., Romanchenko S. M. An FPTAS for a vector subset search problem. *J. Appl. Ind. Math.*, 2014, vol. 8, no. 3, pp. 329–336. doi: 10.1134/S1990478914030041 .
2. Kel'manov A. V., Khandeev V. I. Fully polynomial-time approximation scheme for a special case of a quadratic euclidean 2-clustering problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 2, pp. 334–341. doi: 10.1134/S0965542516020111 .
3. Kel'manov A. V., Motkova A. V. A fully polynomial-time approximation scheme for a special case of a balanced 2-clustering problem. Proc. Internat. Conf. on Discrete Optimization and Operations Research (DOOR 2016), 2016, *Ser. Lecture Notes Comp. Sci.*, vol. 9869, pp. 182–192. doi: 10.1007/978-3-319-44914-2−15 .

4. Aggarwal A., Imai H., Katoh N., Suri S. Finding $k$ points with minimum diameter and related problems. *J. Algorithms*, 1991, vol. 12, no. 1, pp. 38–56. doi: 10.1016/0196-6774(91)90022-Q .
5. Kel'manov A. V., Pyatkin A. V. $NP$-completeness of some problems of choosing a vector subset. *J. Appl. Ind. Math.*, 2011, vol. 5, no. 3, pp. 352–357. doi: 10.1134/S1990478911030069 .
6. Shenmaier V. V. Solving some vector subset problems by Voronoi diagrams. *J. Appl. Industr. Math.*, 2016, vol. 10, no. 4, pp. 560–566. doi: 10.1134/S199047891604013X .
7. Kel'manov A. V., Romanchenko S. M. Pseudopolynomial algorithms for certain computationally hard vector subset and cluster analysis problems. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 2, pp. 349–354. doi: 10.1134/S0005117912020129 .
8. Kel'manov A. V., Romanchenko S. M. An approximation algorithm for solving a problem of search for a vector subset. *J. Appl. Ind. Math.*, 2012, vol. 6, no. 1, pp. 90–96. doi: 10.1134/S1990478912010097 .
9. Shenmaier V. V. An approximation scheme for a problem of search for a vector subset. *J. Appl. Ind. Math.*, 2012, vol. 6, no. 3, pp. 381–386. doi: 10.1134/S0081543816090066 .
10. Gimadi E.Kh., Kel'manov A.V., Kelmanova M.A., Khamidullin S.A. A posteriori detection of a quasiperiodic fragment with a given number of repetitions in a numerical sequence. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 1, pp. 55–74 (in Russian).
11. Gimadi E. Kh., Kel'manov A. V., Kel'manova M. A., Khamidullin S. A. A posteriori detecting a quasiperiodic fragment in a numerical sequence. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 2008, vol. 18, no. 1, pp. 30–42. doi:10.1134/S1054661808010057 .
12. Kel'manov A. V., Pyatkin A. V. Complexity of certain problems of searching for subsets of vectors and cluster analysis. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 11, pp. 1966–1971. doi: 10.1134/S0965542509110128 .
13. Baburin A.E., Gimadi E.Kh., Glebov, N.I., Pyatkin, A.V. The problem of finding a subset of vectors with the maximum total weight. *J. Appl. Industr. Math.*, 2008, vol. 2, no. 1, pp. 32–38. doi: 10.1007/s11754-008-1004-3 .
14. Gimadi E. Kh., Pyatkin A. V., Rykov I. A. On polynomial solvability of some problems of a vector subset choice in a Euclidean space of fixed dimension. *J. Appl. Indust. Math.*, 2010, vol. 4, no. 1, pp. 48–53. doi: 10.1134/S1990478910010084 .
15. Gimadi E.K., Glazkov Y.V., Rykov I.A. On two problems of choosing some subset of vectors with integer coordinates that has maximum norm of the sum of elements in Euclidean space. *J. Appl. Ind. Math.*, 2009, vol. 3, no. 3, pp. 343–352. doi: 10.1134/S1990478909030041 .
16. Kel'manov A. V., Khandeev V. I. An exact pseudopolynomial algorithm for a problem of the two-cluster partitioning of a set of vectors. *J. Appl. Ind. Math.*, 2015, vol. 9, no. 4, pp. 497–502. doi: 10.1134/S1990478915040067 .
17. Dolgushev A. V., Kel'manov A. V. An approximation algorithm for solving a problem of cluster analysis. *J. Appl. Indust. Math.*, 2011, vol. 5, no. 4, pp. 551–558. doi: 10.1134/S1990478911040107 .
18. A.V. Dolgushev, A.V. Kel'manov, V.V. Shenmaier. Polynomial-time approximation scheme for a problem of partitioning a finite set into two clusters. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 295, suppl. 1, pp. 47–56. doi: 10.1134/S0081543816090066 .
19. Kel'manov A. V., Khandeev V. I. A Randomized algorithm for two-cluster partition of a set of vectors. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, vol. 55, no. 2, pp. 330–339. doi: 10.1134/S096554251502013X .
20. Kel'manov A. V., Motkova A. V. *J. Appl. Ind. Math.*, 2016, vol. 10, no. 3, pp. 349–355. doi: 10.1134/S1990478916030054 .
21. Kel'manov A. V., Pyatkin A. V. $NP$-hardness of some quadratic euclidean 2-clustering problems. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 92, no. 2, pp. 634–637. doi: 10.1134/S1064562415050233 .
22. Kel'manov A. V., Pyatkin A. V. On the complexity of some quadratic euclidean 2-clustering problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 3, pp. 491–497. doi: 10.1134/S096554251603009X .
23. Aggarwal C. C. *Data Mining: The Textbook.* Cham, Springer International Publishing, 2015, 734 p. ISBN: 978-3319141411 .
24. Bishop C. M. *Pattern Recognition and Machine Learning.* New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2006. 738 p. ISBN: 978-0-387-31073-2 .
25. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. *The Elements of statistical learning: Data mining, inference, and prediction.* New York: Springer-Verlag. 2009. 763 p. doi: 10.1007/978-0-387-84858-7 .
26. James G., Witten D., Hastie T., Tibshirani R. *An introduction to statistical learning.* New York: Springer Science+Business Media, LLC, 2013, 426 p. doi: 10.1007/978-1-4614-7138-7 .
27. Jain A. K. Data clustering: 50 years beyond $k$-means. *Pattern Recognition Lett.*, 2010, vol. 31, no. 8, pp. 651–666. doi: 10.1016/j.patrec.2009.09.011 .

28. Wirth N. *Algorithms + data structures = programs.* New Jersey: Prentice Hall, 1976, 366 p. ISBN: 0130224189 .
29. Ball K. An elementary introduction to modern convex geometry. Flavors of geometry. *MSRI Publications*, S. Levy editor, 1997, vol. 31, pp. 1–58. ISBN: 0-521-62048-1 .

The paper was received by the Editorial Office on May 24, 2017.

*Aleksander Vasil'evich Kel'manov,* Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: kelm@math.nsc.ru .

*Anna Vladimirovna Motkova,* undergraduate student, Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: anitamo@mail.ru .

*Vladimir Vladimirovich Shenmaier,* Cand. Sci. (Phys.-Math.), Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: shenmaier@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.856

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ОТРЕЗКОВ КРУГАМИ[1]

**К. С. Кобылкин**

В работе изучается вычислительная сложность и строятся точные полиномиальные алгоритмы для задачи оптимального пересечения заданного набора отрезков на плоскости минимальным числом одинаковых кругов радиуса $r > 0$, при этом отрезки задают множество ребер некоторого плоского графа $G = (V, E)$ и пересекаются не более чем в своих концевых точках. Близкие геометрические задачи возникают при анализе безопасности физических сетей. В работе сообщается $NP$-трудность задачи в сильном смысле для семейств отрезков, порождаемых триангуляциями Делоне, графами Габриеля и некоторыми другими их подграфами, часто возникающими в проектировании сетей, для $r \in [d_{\min}, \eta d_{\max}]$ и некоторой константы $\eta$, где $d_{\max}$ и $d_{\min}$ являются (евклидовыми) длинами наидлиннейшего и наикратчайшего ребер графа $G$.

Ключевые слова: вычислительная сложность, задача Hitting Set, задача Continuous Disk Cover, триангуляция Делоне.

**K. S. Kobylkin. Computational complexity for the problem of optimal intersections of straight line segments by disks.**

Computational complexity and exact polynomial algorithms are reported for the problem of stabbing a set of straight line segments with a least cardinality set of disks of fixed radii $r > 0$, where the set of segments forms a straight line drawing $G = (V, E)$ of a planar graph without edge crossings. Similar geometric problems arise in network security applications (Agarwal et al., 2013). We establish the strong NP-hardness of the problem for edge sets of Delaunay triangulations, Gabriel graphs, and other subgraphs (which are often used in network design) for $r \in [d_{\min}, \eta d_{\max}]$ and some constant $\eta$, where $d_{\max}$ and $d_{\min}$ are the Euclidean lengths of the longest and shortest graph edges, respectively.

Keywords: computational complexity, Hitting Set Problem, Continuous Disk Cover problem, Delaunay triangulations.

**MSC:** 90C15

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-171-181

## Введение

Многочисленные приложения в области безопасности, оптимальном размещении сенсоров и робототехнике приводят к задачам вычислительной геометрии, в которых необходимо отыскать множество точек $C$ минимальной мощности на плоскости с условием, что всякая точка из $C$ обладает некоторой ограниченной “областью видимости”, при этом любая часть границы заданного геометрического объекта или всякая часть комплекса (т. е. множества ребер или граней) данного плоского графа пересекается с областью видимости хотя бы одной из точек множества $C$ [5; 10]. Уточнение сложностного статуса для этих задач и проектирование для них полиномиальных приближенных алгоритмов до сих пор являются областью активных исследований. В данной работе изучается вычислительная сложность задачи оптимального пересечения семейства отрезков на плоскости одинаковыми кругами.

З а д а ч а Intersecting Plane Graph with Disks (IPGD): для заданных $r > 0$ и укладки $G = (V, E)$ простого (т. е. без петель и кратных ребер) планарного графа с прямолинейными ребрами, пересекающимися не более чем в своих концевых точках, найти наименьшее по мощности подмножество $C \subset \mathbb{R}^2$ точек (центров кругов) с условием, что всякое ребро $e \in E$

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

находится на расстоянии, не превосходящем $r$, от некоторой точки $c = c(e) \in C$; другими словами, круг радиуса $r$ с центром в точке $c$ пересекает ребро $e$.

В нашем изложении при обозначении сформулированной задачи оптимального пересечения отрезков будет использоваться аббревиатура IPGD, а для обозначения укладки графа — термин "плоский граф". Одним из приложений сложностного и алгоритмического исследования задачи IPGD является анализ безопасности физических сетей. Точнее, IPGD можно использовать в качестве математической модели для оценки отказоустойчивости физической сети к одновременно возникающим техническим нарушениям, вызванным природными (например, наводнения, пожары, электромагнитные воздействия) и человеческими факторами [1].

С геометрической точки зрения близкая к задаче IPGD постановка рассматривается в монографии [10]. В отличие от IPGD, где всякая точка множества $C$ имеет круговую "область видимости", в этой монографии изучается задача Art Gallery Problem, в которой "область видимости" точек из $C$ зависит от границы окружающих их геометрических объектов.

Пусть $f$ и $h$ — некоторые положительные функции натурального аргумента $n$. В работе используются стандартные обозначения: $f(n) = O(h(n))$, $f(n) = \Omega(h(n))$ и $f(n) = \Theta(h(n))$. Первое обозначение равносильно существованию такой константы $c > 0$, что для всех достаточно больших $n$ выполнено неравенство $f(n) \leq ch(n)$; второе равносильно выполнению обратного неравенства между $f$ и $h$; третье — существованию таких констант $c_1, c_2 > 0$, что $c_1 h(n) \leq f(n) \leq c_2 h(n)$ для всех достаточно больших $n$. Кроме того, символики $O$ и $\Omega$ используются ниже для пар функций $f$ и $h$ от сложного аргумента $(G, r)$, определяющего условие задачи IPGD, где $\mathcal{I}$ — некоторый класс ее условий. При этом соответствующие неравенства выполнены для всех $(G, r) \in \mathcal{I}$.

В настоящей работе изучаются вычислительная сложность задачи IPGD в классах простых плоских графов $G$ при $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$, а также при $r = \Omega(d_{\max})$, где $d_{\max}$ и $d_{\min}$ обозначают евклидовы длины наидлиннейшего и наикратчайшего ребер $G$ соответственно. При этом акцент делается на классах плоских графов, определяемых некоторой функцией расстояния, точнее, для триангуляций Делоне, графов Габриеля и некоторых их подграфов. Эти графы часто называют *метрическими графами.* Триангуляции Делоне допускают эффективные алгоритмы маршрутизации [4], представляя, таким образом, удобные сетевые топологии. Графы Габриеля возникают при моделировании беспроводных сетей [11].

Задача IPGD связана с несколькими хорошо известными задачами комбинаторной оптимизации. Во-первых, в случае, когда отрезки множества $E$ имеют нулевую длину, становясь точками, задача IPGD превращается в задачу Continuous Disk Cover (CDC), $NP$-трудность которой в сильном смысле дана в [7]. Во-вторых, при $r = 0$ задача IPGD совпадает с классической задачей Vertex Cover о вершинном покрытии планарного графа. В-третьих, она является частным случаем задачи Hitting Set на плоскости.

З а д а ч а Hitting Set: для заданного семейства множеств $\mathcal{N}$ на плоскости и множества $U \subseteq \mathbb{R}^2$ найти множество $H \subseteq U$ минимальной мощности с условием, что $N \cap H \neq \varnothing$ для всякого $N \in \mathcal{N}$.

Задача IPGD совпадает с Hitting Set, если положить $\mathcal{N} := \mathcal{N}_r(E) = \{N_r(e)\}_{e \in E}$ и $U := \mathbb{R}^2$, где $N_r(e) = B_r(0) + e = \{x + y \colon x \in B_r(0),\, y \in e\}$ — евклидова $r$-окрестность ребра $e$, $B_r(z)$ — круг радиуса $r$ с центром в точке $z \in \mathbb{R}^2$. *Соотношением размеров* выпуклого замкнутого ограниченного множества $N$ с условием $\operatorname{int} N \neq \varnothing$ называется отношение минимального радиуса круга, содержащего множество $N$, к максимальному радиусу круга, содержащегося в $N$, где $\operatorname{int} N$ — множество внутренних точек множества $N$. Например, всякое множество $N_r(e)$, в дальнейшем называемое *объектом*, имеет соотношение размеров, равное $1 + \dfrac{d(e)}{2r}$, где $d(e)$ — евклидова длина ребра $e \in E$.

В работе [6] доказана $APX$-трудность дискретного варианта задачи Hitting Set (т. е. варианта, когда $U$ совпадает с некоторым заданным конечным множеством точек) для семейств прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, имеющих, вообще говоря, неограниченное соотношение размеров. В [9] также сообщается $APX$-трудность дискретного варианта этой задачи для семейств треугольников, имеющих ограниченное константой соотношение размеров.

В данной работе сообщается $NP$-трудность и строятся точные полиномиальные алгоритмы для задачи IPGD в классах плоских (в том числе метрических) графов при различных предположениях на порядок значений $r$.

Обозначим через $S$ множество из $n$ точек в общем положении на плоскости, из которых никакие четыре не лежат на одной окружности. Будем называть плоский граф $G = (S, E)$ *триангуляцией Делоне* при условии $[u, v] \in E$ тогда и только тогда, когда существует такой круг $T$, что $u, v \in \operatorname{bd} T$ и $S \cap \operatorname{int} T = \varnothing$, где $\operatorname{bd} T$ — множество всех граничных точек $T$. Наконец, плоский граф $G = (S, E)$ называется *графом ближайших соседей*, если $[u, v] \in E$ в том и только в том случае, когда либо $u$, либо $v$ являются ближайшими соседями $v$ и $u$ соответственно.

Первый результат данной работы (теорема 2) сообщает $NP$-трудность задачи IPGD в сильном смысле при условии, что граф $G$ принадлежит либо классу триангуляций Делоне, либо какому-нибудь классу их связных подграфов (например, графов Габриеля или графов относительных окрестностей) для $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$ и $\mu = \dfrac{d_{\max}}{d_{\min}} = O(n)$, где $n = |S|$. Задача IPGD остается $NP$-трудной в сильном смысле в классе графов ближайших соседей (теорема 3) при $r \in [d_{\max}, \eta d_{\max}]$ для некоторой достаточно большой константы $\eta$ и $\mu \leq 4$. Более того, эта задача остается $NP$-трудной при тех же ограничениях на $r$ и $\mu$ даже в случае, когда точки множества $C$ выбираются близко к вершинам графа $G$. Верхняя граница значений параметра $\mu$ для триангуляций Делоне сравнима с нижней границей $\mu = \Omega\left(\sqrt[3]{n^2}\right)$, выполненной с положительной вероятностью для случайных триангуляций Делоне, порожденных $n$ равномерными независимыми точками на единичном круге [2]. Таким образом, заявленные ограничения на $r$ и $\mu$ определяют естественные постановки задачи IPGD.

Ограничение сверху на параметр $\mu$ задает оценку сверху на отношение наибольшего и наименьшего соотношений размеров объектов семейства $\mathcal{N}_r(E)$. Задача Hitting Set, вообще говоря, является более простой в случае, когда множества из семейства $\mathcal{N}$ имеют ограниченное константой соотношение размеров. Полученный в работе результат (теорема 3) дает $NP$-трудность задачи IPGD в сильном смысле в классе графов ближайших соседей в случае, когда объекты соответствующего семейства $\mathcal{N}_r(E)$ имеют ограниченное константой приблизительно одинаковое между объектами этого семейства соотношение размеров.

В отличие от известных сложностных результатов для задачи Hitting Set, упомянутых выше, в данной работе в основном исследуется ее непрерывная постановка с определенным образом структурированным семейством объектов $\mathcal{N}_r(E)$, формируемым множеством ребер специальных плоских графов; всякое множество из $\mathcal{N}_r(E)$ имеет специальный вид суммы Минковского некоторого ребра плоского графа и круга радиуса $r$. Доказательство основных результатов работы требует применения нетривиальных техник и вспомогательных утверждений и использует задачу CDC, которая оказывается тесно связанной с задачей IPGD.

Пусть $R(E)$ — наименьший радиус круга, пересекающего все отрезки из множества $E$. В отличие от случаев, когда $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$ или $r \in [d_{\max}, \eta d_{\max}]$, задача IPGD оказывается полиномиально разрешимой (разд. 2) в классе простых плоских графов при условии равномерного по всем графам выполнения неравенства $r \geq \eta R(E)$ для некоторой константы $\eta$ за время $O\left(k^2 |E|^{2k+1}\right)$, где $k = \left\lceil \dfrac{\sqrt{2}}{\eta} \right\rceil^2$. Это неравенство фактически задает оценку сверху $k$ на оптимум задачи IPGD. Ввиду $W[1]$-трудности параметризованного варианта задачи CDC [8] и сведения, осуществленного в доказательстве теоремы 2 данной работы, кажется маловероятным, что эту оценку сложности полиномиального алгоритма удастся улучшить до $O(f(k)|E|^c)$ для любой вычислимой функции $f$ и константы $c > 0$.

## 1. Вычислительная сложность задачи оптимального пересечения отрезков при $r = O(d_{\max})$

В настоящем разделе дается анализ вычислительной сложности задачи оптимального пересечения отрезков (IPGD) при условии $r = O(d_{\max})$. В этой ситуации задача IPGD, вообще говоря, не совпадает ни с известной задачей Vertex Cover о вершинном покрытии планарного графа, ни с задачей CDC об оптимальном покрытии множества точек одинаковыми кругами на плоскости. Фактически задача IPGD эквивалентна геометрической задаче Hitting Set для семейства $\mathcal{N}_r(E)$ евклидовых $r$-окрестностей ребер графа $G$. Ниже будет показана ее $NP$-трудность в случае, когда либо $G$ — триангуляция Делоне, либо $G$ принадлежит некоторому классу подграфов триангуляций Делоне при дополнительном ограничении сверху на $\mu = \frac{d_{\max}}{d_{\min}}$, которое, по сути, задает ограничение сверху на отношение наибольшего и наименьшего соотношений размеров объектов семейства $\mathcal{N}_r(E)$. Также показывается, что IPGD остается $NP$-трудной даже в простом варианте, когда $r = \Theta(d_{\max})$ и $\mu$ ограничено сверху некоторой малой константой, что эквивалентно случаю, когда объекты семейства $\mathcal{N}_r(E)$ имеют примерно одинаковое соотношение размеров, равномерно ограниченное сверху константой.

Первый сложностной результат для задачи IPGD получается путем сведения от $NP$-трудной задачи CDC оптимального покрытия одинаковыми кругами. При таком сведении выделяется некоторый подкласс задач IPGD на триангуляциях Делоне, в определенном смысле эквивалентных “трудным” задачам CDC. При этом составляющие этот подкласс “трудные” задачи IPGD характеризуются относительно небольшими значениями параметра $\mu$.

### 1.1. *NP*-трудность задачи Continuous Disk Cover

Для того, чтобы выделить подкласс “трудных” задач CDC, в [7] используется сведение от $NP$-трудной в сильном смысле задачи о минимальном доминирующем множестве, которая формулируется следующим образом: для данного простого планарного графа $G_0 = (V_0, E_0)$ степени не выше 3 найти наименьшее по мощности подмножество $V_0' \subseteq V_0$ с условием, что для любой вершины $u \in V_0 \backslash V_0'$ найдется вершина $v = v(u) \in V_0'$, смежная с $u$.

Ниже под *целочисленной сеткой* понимается декартово произведение множеств всех целочисленных точек двух ограниченных интервалов на прямой, а под *ортогональной укладкой* графа $G_0$ на целочисленной сетке — такая укладка графа с вершинами, расположенными на сетке, что его ребра представляют собой кусочно-линейные ломаные, определяемые последовательностями отрезков, параллельных осям координат, имеющими вид $[p_1, p_2]$, $[p_2, p_3]$, $\ldots, [p_{k-1}, p_k]$ и пересекающимися лишь в своих концевых точках $p_1$ и $p_k$, причем всякая точка $p_i$ также расположена на целочисленной сетке.

В работе [7] доказана $NP$-трудность задачи CDC в сильном смысле путем сведения к ней задачи о минимальном доминирующем множестве. Данное сведение использует ортогональную укладку графа $G_0$ на некоторой целочисленной сетке. Точнее, в процессе сведения строится множество $D$ на этой сетке, где $V_0 \subset D$. Получающаяся в результате “трудная” задача CDC определена на множестве $D$ для некоторого целого (константного) значения радиуса $r_0 \geq 1$. Заметим здесь, что $G_0$ допускает ортогональную укладку (см. [12, теорема 1]) на сетке размерности $O(|V_0|) \times O(|V_0|)$, причем общая длина всякого ребра имеет порядок $O(|V_0|)$. Доказательство $NP$-трудности задачи CDC может быть проведено аналогично с учетом этого замечания. Поэтому можно сформулировать следующую теорему [7, комбинация теорем 1 и 3].

**Теорема 1** [7]. *Задача* CDC *является* $NP$*-трудной в сильном смысле для множеств* $D$*, расположенных на целочисленной сетке размерности* $O(|D|) \times O(|D|)$*, для константного целочисленного радиуса* $r_0 \geq 1$*. Задача остается* $NP$*-трудной, даже если ограничить выбор центров кругов радиуса* $r_0$ *в точках множества* $D$*.*

З а м е ч а н и е 1. Укладку всякого простого планарного графа $G_0$ степени, не превосходящей 3, можно провести таким образом (за полиномиальное время), что хотя бы одно из ребер укладки состоит по крайней мере из двух взаимно перпендикулярных отрезков.

## 1.2. *NP*-трудность задачи IPGD в классе триангуляций Делоне

Для построения сведения от задачи CDC на множестве $D$, определенном в предыдущем разделе, используется простое наблюдение: круг радиуса $r$ содержит множество точек $D' \subset D$ тогда и только тогда, когда круг несколько большего радиуса содержит отрезки, каждый из которых расположен близко к некоторой точке из $D'$ и имеет малую длину по сравнению с расстояниями между точками в множестве $D$. Далее строится метрический граф $H$ с множеством вершин, совпадающим с множеством концевых точек отрезков малой длины, отвечающих точкам из множества $D$. Поскольку эти малые отрезки, как правило, будут ребрами графа $H$, данное построение дает труднорешаемость задачи IPGD для многих классов метрических графов. Справедлива следующая техническая лемма, дающая зависящую только от целочисленного радиуса $r$ оценку снизу на расстояние от целочисленной точки до окружности радиуса $r$, проходящей через две другие целочисленные точки.

**Лемма 1.** *Пусть $X \subset \mathbb{Z}^2$, $r \geq 1$ — некоторое целое число, $\rho(u; v, w)$ — минимум из двух евклидовых расстояний от точки $u \in X$ до окружностей радиуса $r$, проходящих через различные точки $v$, $w$ из $X$, где $|v-w|_2 \leq 2r$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $|\cdot|_2$ — евклидова норма. Тогда*

$$\min_{u \notin C(v,w),\, v \neq w,\, u,v,w \in X,\, |v-w|_2 \leq 2r} \rho(u; v, w) \geq \frac{1}{480 r^5},$$

*где $C(v, w)$ — объединение двух окружностей радиуса $r$, проходящих через точки $v$ и $w$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u = (x, y)$, $v = (x_1, y_1)$ и $w = (x_2, y_2)$ — различные точки множества $X$. Рассмотрим произвольную окружность радиуса $r$ среди двух возможно совпадающих окружностей, проходящих через $v$ и $w$, и обозначим ее центр через $O$. Далее будет получена оценка снизу на расстояние $\pi = \pi(u; v, w)$ от этой окружности до точки $u \notin C(v, w)$.

Пусть $\Delta = |v - w|_2$, $\lambda = \sqrt{r^2 - \Delta^2/4}$, $a = (u - v, u - w)$ и $b = (u - v, (v - w)^\perp)$, где $(v - w)^\perp = \pm(y_1 - y_2, -x_1 + x_2)$. Расстояние $\pi > 0$ может быть записано в виде

$$\pi = \pi(u; v, w) = \left| \, \left| \frac{v+w}{2} - \lambda \frac{(v-w)^\perp}{|v-w|_2} - u \right|_2 - r \right| = \left| \frac{a + 2\lambda b/\Delta}{\sqrt{a + 2\lambda b/\Delta + r^2} + r} \right|.$$

Без ограничения общности достаточно рассматривать случай, когда $u$ лежит внутри круга радиуса $2r$ с центром в точке $O$. Действительно, в противном случае $\pi \geq r \geq 1/r$.

Ограничим знаменатель дроби $\pi$. Принимая во внимание, что $\Delta \leq 2r$, $|u - v|_2 \leq |u - O|_2 + |O - v|_2 \leq 3r$ и $|b|/\Delta \leq 3r$, имеем

$$\sqrt{a + 2\lambda b/\Delta + r^2} + r \leq 5r.$$

Так как точки из множества $X$ имеют целочисленные координаты, то $a$ и $b$ — целые. При $\Delta^2 = 4r^2$ получаем $\pi \geq 1/(5r)$. Для $\Delta^2 \leq 4r^2 - 1$ достаточно показать, что выполнено неравенство

$$\left| a + \frac{2\lambda b}{\Delta} \right| \geq \frac{1}{96 r^4}. \tag{1.1}$$

Действительно, объединение этой оценки для числителя с полученной верхней оценкой для знаменателя дроби $\pi$ дает требуемое неравенство $\pi \geq 1/(480 r^5)$.

Легко видеть, что для целого $\dfrac{2\lambda b}{\Delta}$ левая часть неравенства (1.1) не меньше 1. Таким образом, остается рассмотреть случай, когда $\dfrac{2\lambda b}{\Delta} \notin \mathbb{Z}$. Пусть $q = \left\{ \left| \dfrac{2\lambda b}{\Delta} \right| \right\} > 0$ и $k = \left[ \left| \dfrac{2\lambda b}{\Delta} \right| \right]$, где

$\{\cdot\}$ и $[\cdot]$ — дробная и целая части вещественного числа соответственно. Как легко убедиться, для доказательства неравенства (1.1) достаточно оценить снизу величину $\min\{q, 1-q\}$.

Оценим снизу величину $q$. Сначала предположим, что $\gamma = \dfrac{4r^2b^2}{\Delta^2} \in \mathbb{Z}$. Имеем $k^2 < \dfrac{4\lambda^2 b^2}{\Delta^2} < (k+1)^2$. Поскольку $q > 0$, получаем $q \geq \left\{\sqrt{k^2+1}\right\}$. Ввиду вогнутости функции квадратного корня можно записать

$$\left\{\sqrt{k^2+1}\right\} = \left\{\sqrt{\frac{2k\cdot k^2}{2k+1} + \frac{(k+1)^2}{2k+1}}\right\} \geq \left\{k + \frac{1}{2k+1}\right\} = \frac{1}{2k+1} \geq \frac{1}{4\lambda|b|/\Delta+1} \geq \frac{1}{13r^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Имеем $2kq + q^2 \geq \{2kq+q^2\} = \{\gamma\}$, откуда

$$q \geq \sqrt{k^2+\{\gamma\}} - k \geq \frac{\{\gamma\}}{\sqrt{k^2+\{\gamma\}}+k} \geq \frac{1/\Delta^2}{4r|b|/\Delta} \geq \frac{1}{12r^2\Delta^2} \geq \frac{1}{48r^4}.$$

Далее оценим снизу $1-q$. Вновь предположим, что $\gamma \in \mathbb{Z}$. Рассуждая аналогично, приходим к неравенству

$$2k(1-q) + (1-q)^2 \geq \{(k+1-q)^2\} = \left\{(k+1)^2 - \frac{4\lambda^2b^2}{\Delta^2} - 2q(1-q)\right\} \geq 1/2.$$

Разрешая квадратное неравенство относительно $1-q$, имеем

$$1-q \geq \sqrt{k^2+1/2} - k = \frac{1/2}{\sqrt{k^2+1/2}+k} \geq \frac{1}{8r|b|/\Delta} \geq \frac{1}{24r^2}.$$

Пусть теперь $\gamma \notin \mathbb{Z}$. Рассмотрим подслучай, когда $\{\gamma\} + 2q(1-q) > 1$. Получаем

$$\left\{(k+1)^2 - \frac{4\lambda^2b^2}{\Delta^2} - 2q(1-q)\right\} \geq 1 - \{\gamma\} \geq 1/\Delta^2.$$

Разрешая относительно $1-q$ соответствующее квадратное неравенство, выводим похожую оценку $1-q \geq 1/(48r^4)$.

Обратимся к подслучаю, когда $\{\gamma\} + 2q(1-q) < 1$. Очевидно,

$$\left\{(k+1)^2 - \frac{4\lambda^2b^2}{\Delta^2} - 2q(1-q)\right\} = 1 - \{\gamma\} - 2q(1-q).$$

При $1-q < 1/(4\Delta^2)$ имеем $1 - \{\gamma\} - 2q(1-q) \geq 1/\Delta^2 - 1/(2\Delta^2) = 1/(2\Delta^2)$. Рассуждая аналогично, приходим к оценке $1-q \geq 1/(96r^4)$; в противном случае $1-q \geq 1/(4\Delta^2) \geq 1/(16r^2)$.

При $\{\gamma\} + 2q(1-q) = 1$ имеем

$$1-q = \frac{1-\{\gamma\}}{2q} \geq \frac{1-\{\gamma\}}{2} \geq \frac{1}{2\Delta^2} \geq \frac{1}{8r^2}.$$

Объединяя оценки для $q$ и $1-q$, полученные при рассмотрении различных случаев, приходим к оценке $\min\{q, 1-q\} \geq 1/(96r^4)$.

Лемма 1 доказана.

Сформулируем задачу IPGD с дополнительным ограничением.

З а д а ч а Vertex Restricted IPGD (VRIPGD($\delta$)): для данного простого плоского графа $G = (V, E)$, констант $\delta$, $r > 0$ найти подмножество $C \subset \mathbb{R}^2$ минимальной мощности с условием, что для всякого отрезка $e \in E$ найдется точка $c = c(e) \in C$, находящаяся от него на евклидовом расстоянии, не превосходящем $r$, причем $C \subset \bigcup\limits_{v \in V} B_\delta(v)$.

**Теорема 2.** *Задачи* IPGD *и* VRIPGD($\delta$) *являются NP-трудными в сильном смысле для* $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$, $\mu = O(n)$ *и* $\delta = \Theta(r)$ *в классе триангуляций Делоне, где* $n$ *— число вершин в триангуляции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, например, что задача IPGD является $NP$-трудной в сильном смысле. Доказательство $NP$-трудности задачи VRIPGD($\delta$) проводится аналогично с учетом теоремы 1 (см. также доказательство [7, теорема 3]).

Всякой "трудной" постановке задачи CDC, описанной в разд. 1.1, будет сопоставлена постановка задачи IPGD для $r = r_0 + \delta$, где $\delta = 1/(2000^2 2r_0^{11})$, следующим образом.

Для всякого $u \in D$ находятся точки $u_0$ и $v_0$ такие, что $|u - u_0|_\infty \leq \delta/2$ и $|u - v_0|_\infty \leq \delta/2$, где $I_u = [u_0, v_0]$ имеет евклидову длину не меньшую чем $\delta/2$ ($|\cdot|_\infty$ обозначает норму в $\mathbb{R}^2$, равную максимуму из модулей координат вектора). Точнее, положим $I_D := \{I_u = [u_0, v_0]\colon u \in D\}$. Концевые точки отрезков из $I_D$ строятся последовательным образом с полиномиальными затратами времени и памяти, определяя новый отрезок $I_u$ таким образом, чтобы обеспечить общность положения множества концевых точек отрезков из $I_{D'} \cup \{I_u\}$, $D' \subset D$, где отрезки множества $I_{D'}$ уже построены. Для этого концевые точки отрезка $I_u$ выбираются на рациональной сетке, содержащей $u$, имеющей размер элементарной клетки $\dfrac{c_1}{|D|^2} \times \dfrac{c_1}{|D|^2}$ для некоторой малой рациональной константы $c_1 = c_1(\delta)$. В предположении, что $u = (u_x, u_y)$, точка $u_0$ выбирается в нижней части сетки с $y$-координатой, меньшей $u_y - \delta/4$, в то время как точка $v_0$ выбирается в верхней части сетки, где $y$-координата больше, чем $u_y + \delta/4$.

Пусть $S$ — множество концевых точек отрезков из $I_D$. Всякий круг, имеющий отрезок $I_u$ в качестве своего диаметра, не содержит точек из $S$, отличных от концевых точек отрезка $I_u$. Пусть $G = (S, E)$ — триангуляция Делоне множества $S$, которая может быть вычислена с полиномиальными затратами времени по $|D|$. Очевидно, любой отрезок $I_u$ совпадает с некоторым ребром из $E$. С учетом теоремы 1 имеем $d_{\min} \leq r$ и $\mu = O(|S|)$.

Остается показать, что $r \leq d_{\max}$. Согласно замечанию 1 и по построению множества $D$ (см. [7, рис. 1 и доказательство теоремы 1]) множество $S$ может быть построено таким образом, чтобы для графа $G$ было выполнено неравенство $r \leq d_{\max}$. Кроме того, длина записи координат вершин из $S$ полиномиальна по длине записи координат точек множества $D$.

Пусть $k$ — заданное натуральное число. Очевидно, центры не более чем $k$ кругов радиуса $r_0$, объединение которых содержит множество $D$, дают центры кругов радиуса $r > r_0$, чье объединение пересекается со всяким отрезком из $E$. Обратно, пусть $T$ — круг радиуса $r$, пересекающий подмножество $I_{D'} = \{I_u\colon u \in D'\}$ отрезков для некоторого $D' \subseteq D$. При $|D'| = 1$ легко преобразовать $T$ в круг радиуса $r_0$, содержащий точку подмножества $D'$. Точки множества $D$ имеют целочисленные координаты. Более того, квадрат евклидова расстояния между всякой парой точек подмножества $D'$ не превосходит $(2r_0 + 4\delta)^2 = 4r_0^2 + 16r_0\delta + 16\delta^2$. Поскольку $r_0 \in \mathbb{Z}$, то точки из $D'$ расположены на расстоянии, не превосходящем $2r_0$ друг от друга.

Воспользуемся теоремой Хелли. Пусть $R$ — минимальный радиус круга (обозначим его через $T_0$), содержащего произвольную тройку точек $u_1$, $u_2$ и $u_3$ из $D'$. Без ограничения общности предположим, что $u_1$ и $u_2$ лежат на границе круга $T_0$, и обозначим его центр через $O$. Очевидно, $R \leq r_0 + 2\delta$.

Покажем, что случай $R > r_0$ невозможен. Несколько сдвинем центр круга $T_0$ вдоль серединного перпендикуляра к $[u_1, u_2]$ так, чтобы точки $u_1$ и $u_2$ были расположены на расстоянии $r_0$ от сдвинутого центра $O'$. Расстояние от точки $u_3$ до окружности радиуса $r_0$ с центром в $O'$ не превосходит величины

$$|O - u_3|_2 + |O - O'|_2 - r_0 \leq 2\delta + \sqrt{(r_0 + 2\delta)^2 - \delta_1^2} - \sqrt{r_0^2 - \delta_1^2}$$

$$= 2\delta + \frac{4r_0\delta + 4\delta^2}{\sqrt{(r_0 + 2\delta)^2 - \delta_1^2} + \sqrt{r_0^2 - \delta_1^2}} \leq 2\delta + 2\sqrt{r_0\delta + \delta^2} < \frac{1}{480r_0^5},$$

где $\delta_1 = \dfrac{|u_1 - u_2|_2}{2} \leq r_0$. По лемме 1 имеем $R \leq r_0$. Таким образом, множество $D'$ содержится в некотором круге радиуса $r_0$. Круг минимального радиуса, содержащий заданное конечное множество точек на плоскости, может быть найден с полиномиальными затратами времени и памяти по числу точек. Поэтому всякое множество из не более чем $k$ кругов радиуса $r$, чье объединение пересекается со всяким отрезком в $E$, может быть преобразовано в множество из не более чем $k$ кругов радиуса $r_0$, объединение которых содержит множество $D$.

Теорема 2 доказана.

### 1.3. *NP*-трудность задачи IPGD для других классов метрических графов

Аналогичная техника доказательства может быть применена для обоснования $NP$-трудности задачи для других классов метрических графов. Дадим несколько определений, сохраняя обозначения предыдущего подраздела.

Следующие графы являются связными подграфами триангуляций Делоне.

Плоский граф $G = (S, E)$ называется *графом Габриеля* при условии, что $[u, v] \in E$ тогда и только тогда, когда круг, для которого отрезок $[u, v]$ является его диаметром, не содержит точек множества $S$, отличных от $u$ и $v$.

*Графом относительных окрестностей* называется плоский граф $G$ с тем же множеством вершин, у которого $[u, v] \in E$ тогда и только тогда, когда не существует никакого $w \in S$ с условием, что $w \neq u, v$ и $\max\{|u - w|_2, |v - w|_2\} < |u - v|_2$.

Плоский граф называется *минимальным евклидовым остовным деревом*, если этот граф совпадает с остовным деревом минимального веса для полного взвешенного графа $K_{|S|}$, вершины которого находятся в точках множества $S$, а веса ребер задаются евклидовыми расстояниями между их концевыми точками.

**Теорема 3.** *Задачи* IPGD *и* VRIPGD($\delta$) *являются NP-трудными в сильном смысле при* $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$, $\mu = O(n)$ *и* $\delta = \Theta(r)$ *в классах графов Габриеля, графов относительных окрестностей и минимальных евклидовых остовных деревьев, а также при* $r \in [d_{\max}, \eta d_{\max}]$ *и* $\mu \leq 4$ *в классе графов ближайших соседей, где* $\eta$ *— некоторая большая константа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся сведением, данным в доказательстве теоремы 2. Во-первых, заметим, что и граф Габриеля, и граф относительных окрестностей на множестве вершин $S$ содержат в качестве своих ребер отрезки семейства $I_D$, откуда следует $NP$-трудность задачи IPGD в этих классах графов для тех же порядков значений параметров $r$ и $\mu$, что и для триангуляций Делоне.

Во-вторых, семейство $I_D$ совпадает с множеством ребер графа ближайших соседей на множестве вершин $S$. По построению радиус $r$ и длины отрезков семейства $I_D$ не превосходят некоторой константы, причем длины последних лежат в диапазоне между $\delta/2$ и $2\delta$. Следовательно, $r = \Theta(d_{\max})$ и $\mu \leq 4$.

В-третьих, отрезки из $I_D$ образуют подмножество ребер всякого минимального евклидового остовного дерева на множестве $S$.

Пусть, от противного, существует такое остовное дерево $H$, которое не содержит ребра $I_u$, но включает ребра, инцидентные обеим концевым точкам $u_0$ и $v_0$ отрезка $I_u$ для некоторого $u \in D$. Удалим ребро $e = [u_0, w_0]$ из $H$ и добавим в него ребро $I_u$, где $w_0$ — родитель $u_0$ в $H$ и либо $u_0$ и $v_0$ лежат в разных поддеревьях, либо $v_0$ является предком $u_0$. Очевидно, полученное дерево будет иметь меньший вес. Получили противоречие со свойством минимальности веса дерева $H$.

Теорема 3 доказана.

## 2. Полиномиальная разрешимость задачи IPGD для больших *r*

В данном разделе будет обоснована полиномиальная разрешимость задачи оптимального пересечения отрезков в случае, когда $r = \Omega(R(E))$, где $R(E)$ — наименьший радиус круга, пересекающего все отрезки из $E$; этот радиус может быть найден за линейное время [3]. Для доказательства этого факта производится предварительное преобразование постановки задачи

IPGD с полиномиальными затратами времени и памяти к некоторой дискретной постановке, в которой точки множества $C$ (т. е. центры кругов радиуса $r$) выбираются в некотором конечном подмножестве точек, мощность которого ограничена сверху некоторым полиномом от $|E|$.

### 2.1. Предварительное преобразование постановки задачи

Для того чтобы ограничить выбор центров кругов радиуса $r$ некоторым дискретным множеством, определяемым семейством $\mathcal{N}_r(E)$ евклидовых $r$-окрестностей ребер графа $G$, воспользуемся следующим наблюдением. Легко заметить, что границы этих окрестностей составлены из четырех частей: пары полуокружностей и пары параллельных отрезков. Тогда непустое пересечение любого подмножества, включающего не менее двух различных объектов из $\mathcal{N}_r(E)$, содержит хотя бы одну точку на пересечении границ некоторой пары объектов из $\mathcal{N}_r(E)$. Следующая лемма, которую можно отнести к фольклору, использует это наблюдение для того, чтобы ограничить выбор центров кругов некоторым конечным множеством точек на плоскости. Ее доказательство приводится ниже для полноты изложения.

**Лемма 2.** *Пусть $G = (V, E)$ — простой плоский граф. Всякое допустимое решение $C$ задачи* IPGD *на графе $G$ может быть с полиномиальными затратами времени и памяти (по $|E|$) преобразовано в некоторое допустимое решение $D \subset D_r(G)$ задачи на том же графе с условием, что $|D| \leq |C|$, где $D_r(G) \subset \mathbb{R}^2$ — некоторое подмножество мощности порядка $O(|E|^2)$.*

Доказательство. Опишем построение множества $D_r(G)$. Без ограничения общности можно считать, что для всякого множества $N_1 \in \mathcal{N}_r(E)$ найдется такое множество $N_2 \in \mathcal{N}_r(E)$, что $N_1 \cap N_2 \neq \varnothing$. В противном случае в множество $D_r(G)$ добавляется по концевой точке всякого $e \in E$, для которого соответствующий объект $N_r(e)$ не пересекается ни с каким другим объектом из $\mathcal{N}_r(E)$. Последнее может быть сделано с полиномиальными затратами времени и памяти по $|E|$.

Рассмотрим произвольную максимальную по включению подсистему объектов из $\mathcal{N}_r(E)$, имеющую непустое пересечение. Такая подсистема в дальнейшем будет называться *максимальной совместной подсистемой* (МСП). Обозначим через $M$ множество точек на пересечении всех объектов произвольной МСП. Множество $M$ выпукло и компактно. Кроме того, $M$ имеет границу, составленную из кусков границ объектов из $\mathcal{N}_r(E)$. По предположению $M$ содержится в пересечении по крайней мере двух объектов из $\mathcal{N}_r(E)$.

Сначала рассмотрим вырожденный случай, когда ребра $e_1$ и $e_2$ из множества $E$ параллельны и соответствующие им $r$-окрестности пересекаются по некоторому отрезку. В этом случае $|\operatorname{bd} N_r(e_1) \cap \operatorname{bd} N_r(e_2)| = \infty$. Кроме того, это пересечение может содержать бесконечное число точек при условии, что ребра $e_1$ и $e_2$ пересекаются в их общей концевой точке. В обоих случаях пересечение $\operatorname{bd} N_r(e_1) \cap \operatorname{bd} N_r(e_2)$, являясь криволинейным отрезком, имеет не более двух концевых точек.

В остальных (невырожденных) случаях получаем, что $|\operatorname{bd} N_r(e_1) \cap \operatorname{bd} N_r(e_2)|$ ограничено сверху константой, принимая во внимание тот факт, что всякое множество $\operatorname{bd} N_r(e)$, $e \in E$, является объединением пары параллельных отрезков и пары полуокружностей. Положим

$$D_r(G) = \bigcup_{e_1, e_2 \in E,\, e_1 \neq e_2} \operatorname{extr}\left(\operatorname{bd} N_r(e_1) \cap \operatorname{bd} N_r(e_2)\right),$$

где $\operatorname{extr} N = N$ в невырожденном случае; для вырожденных случаев $\operatorname{extr} N$ обозначает множество концевых точек криволинейного отрезка $N$. Множество $M$ содержит по крайней мере одну точку, принадлежащую $D_r(G)$. Кроме того, $|D_r(G)| = O(|E|^2)$.

Пусть теперь $C$ — произвольное допустимое решение задачи IPGD. Для всякого $c \in C$ перебором всех пар множеств из $\mathcal{N}_r(E)$, содержащих $c$, может быть найдена точка $d(c) \in D_r(G)$

такая, что $\{N \in \mathcal{N}_r(E) \colon c \in N\} \subseteq \{N \in \mathcal{N}_r(E) \colon d(c) \in N\}$. Таким образом, в общем случае мультимножество $D = \{d(c) \colon c \in C\}$ является допустимым решением задачи IPGD и $|D| \le |C|$.

Лемма 2 доказана.

### 2.2. Полиномиальная разрешимость задачи IPGD для больших $r$

В отличие от случаев, когда $r \in [d_{\min}, d_{\max}]$ или $r = \Theta(d_{\max})$, задача IPGD оказывается полиномиально разрешимой при $r = \Omega(R(E))$. Эта задача разрешима за время $O(|E|)$ [3] в классе плоских графов, внутри которого равномерно по всем графам выполнено неравенство $r \ge R(E)$. Ниже задача IPGD рассматривается в классе плоских графов, для которого равномерно по всем графам имеет место неравенство $r \ge \eta R(E)$ для некоторого фиксированного $0 < \eta < 1$. Поскольку любой круг радиуса $r$ содержит квадрат со сторонами, параллельными осям координат и имеющими длину $r\sqrt{2}$, то для пересечения всех отрезков из множества $E$ необходимо не более чем $\left\lceil \frac{\sqrt{2}R(E)}{r} \right\rceil^2 \le \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{\eta} \right\rceil^2$ кругов радиуса $r$. Таким образом, применяя переборный алгоритм, который последовательно проверяет все подмножества в $D_r(G)$, имеющие мощность, не превосходящую $k = k(\eta) = \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{\eta} \right\rceil^2$, на возможность быть решением задачи, получаем с учетом леммы 2 оптимальное решение задачи IPGD за время $O\left(k^2 |E|^{2k+1}\right)$. Заметим, что сложность этого алгоритма зависит экспоненциально от $1/\eta$.

В работе изучается вычислительная сложность задачи оптимального пересечения структурированного набора отрезков на плоскости минимальным числом кругов одинакового радиуса $r$, где структурная информация о системе отрезков задается множеством ребер некоторого (возможно метрического) графа. Показано, что задача является $NP$-трудной в сильном смысле в классе триангуляций Делоне и некоторых их подграфов для не слишком больших значений $r$, в то время как для больших значений $r$ задача оказывается полиномиально разрешимой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. The resilience of WDM networks to probabilistic geographical failures / P. K. Agarwal, A. Efrat, S. K. Ganjugunte, D. Hay, S. Sankararaman, G. Zussman // IEEE/ACM Trans. on Networking. 2013. Vol. 21, no. 5. P. 1525–1538. doi: 10.1109/TNET.2012.2232111 .
2. Probabilistic bounds on the length of a longest edge in Delaunay graphs of random points in $d$ dimensions / E. M. Arkin, A. F. Anta, J. S. Mitchell, M. A. Mosteiro // Comput. Geom. 2015. Vol. 48, no. 2. P. 134–146. doi: 10.1016/j.comgeo.2014.08.008 .
3. Optimal algorithms for some intersection radius problems / B. K. Bhattacharya, S. Jadhav, A. Mukhopadhyay, J. M. Robert // Computing. 1994. Vol. 52, no. 3. P. 269–279. doi: 10.1007/BF02246508 .
4. Competitive online routing on Delaunay triangulations / P. Bose, J. L. Carufel, S. Durocher, P. Taslakian // Algorithm theory — SWAT 2014: Proc. Cham: Springer, 2014. P. 98–109 (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 8503). doi: 10.1007/978-3-319-08404-6_9 .
5. **Bose P., Kirkpatrick D. G., Li Z.** Worst-case-optimal algorithms for guarding planar graphs and polyhedral surfaces // Comput. Geom. 2003. Vol. 26, no. 3. P. 209–219. doi: 10.1016/S0925-7721(03)00027-0 .
6. **Chan T. M., Grant E.** Exact algorithms and $APX$-hardness results for geometric packing and covering problems // Comput. Geom. 2014. Vol. 47, no. 2. P. 112–124. doi: 10.1016/j.comgeo.2012.04.001 .
7. **Hasegawa T., Masuyama S., Ibaraki T.** Computational complexity of the $m$-center problems on the plane // Trans. of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan. Section E. 1981. Vol. E64, no. 2. P. 57–64.
8. **Marx D.** Efficient approximation schemes for geometric problems? // Algorithms — ESA 2005: Proc. Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. P. 448–459 (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 3669). doi: 10.1007/11561071_41 .

9. **Quanrud K., Har-Peled S.** Approximation algorithms for polynomial-expansion and low-density graphs // Algorithms — ESA 2015: Proc. Berlin; Heidelberg: Springer, 2015. P. 717–728 (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 9294). doi: 10.1007/978-3-662-48350-3_60 .
10. **O'Rourke J.** Art gallery theorems and algorithms. Oxford: Oxford University Press, 1987. 282 p.
11. Routing with guaranteed delivery in ad hoc wireless networks / I. Stojmenovic, J. Urrutia, P. Bose, P. Morin // Wireless Networks. 2001. Vol. 7, no. 6. P. 609–616.
12. **Tamassia R., Tollis I. G.** Planar grid embedding in linear time // IEEE Trans. Circuits and Systems. 1989. Vol. 36. P. 1230–1234. doi: 10.1109/31.34669 .

Кобылкин Константин Сергеевич
Поступила 19.05.2017
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: kobylkinks@gmail.com

**REFERENCES**

1. Agarwal P. K., Efrat A., Ganjugunte S. K., D. Hay D., Sankararaman S., Zussman G. The resilience of WDM networks to probabilistic geographical failures. *IEEE/ACM Trans. on Networking*, 2013, vol. 21, no. 5, pp. 1525–1538. doi: 10.1109/TNET.2012.2232111 .
2. Arkin E. M., Anta A. F., Mitchell J.S., Mosteiro M. A. Probabilistic bounds on the length of a longest edge in Delaunay graphs of random points in $d$ dimensions. *Comput. Geom.*, 2015, vol. 48, no. 2, pp. 134–146. doi: 10.1016/j.comgeo.2014.08.008 .
3. Bhattacharya B.K., Jadhav S., Mukhopadhyay A., Robert J.M. Optimal algorithms for some intersection radius problems. *Computing*, 1994, vol. 52, no. 3, pp. 269–279. doi: 10.1007/BF02246508 .
4. Bose P., Carufel J.L., Durocher S., Taslakian P. Competitive online routing on Delaunay triangulations. In: Ravi R., Gørtz I.L. (eds) *Algorithm Theory – SWAT* 2014: Proc., Cham, Springer, 2014, Ser. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 8503, pp. 98–109. doi: 10.1007/978-3-319-08404-6_9 .
5. Bose P., Kirkpatrick D.G., Li Z. Worst-case-optimal algorithms for guarding planar graphs and polyhedral surfaces. *Comput. Geom.*, 2003, vol. 26, no. 3, pp. 209–219. doi: 10.1016/S0925-7721(03)00027-0 .
6. Chan T.M., Grant E. Exact algorithms and APX-hardness results for geometric packing and covering problems. *Comput. Geom.*, 2014, vol. 47, no. 2, pp. 112–124. doi: 10.1016/j.comgeo.2012.04.001 .
7. Hasegawa T., Masuyama S., Ibaraki T. Computational complexity of the $m$-center problems on the plane. *Trans. of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan. Section E.*, 1981, vol. E64, no. 2, pp. 57–64.
8. Marx D. Efficient approximation schemes for geometric problems? In: Brodal G.S., Leonardi S. (eds) *Algorithms — ESA* 2005. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005, Ser. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 3669, pp. 448–459. doi: 10.1007/11561071_41 .
9. Quanrud K., Har-Peled S. Approximation algorithms for polynomial-expansion and low-density graphs. *Algorithms — ESA* 2015: Proc. Berlin; Heidelberg: Springer, 2015, Ser. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 9294, pp. 717–728. doi: 10.1007/978-3-662-48350-3_60 .
10. O'Rourke J. *Art gallery theorems and algorithms*. Oxford: Oxford University Press, 1987. 282 p. ISBN: 0-19-503965-3 .
11. Stojmenovic I., Urrutia J., Bose P., Morin P. Routing with guaranteed delivery in ad hoc wireless networks. *Wireless Networks*, 2001, vol. 7, no. 6, pp. 609–616. doi: 10.1023/A:1012319418150 .
12. Tamassia R., Tollis I.G. Planar grid embedding in linear time. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, 1989, vol. 36, pp. 1230–1234. doi: 10.1109/31.34669 .

The paper was received by the Editorial Office on May 19, 2017.

*Konstantin Sergeevich Kobylkin*, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, Ural branch of Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: kobylkinks@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.17

# ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$[1]

**А. А. Махнев, М. С. Нирова**

Пусть $\Gamma$ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с собственными значениями $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. Если $\theta_2 = -1$, то граф $\Gamma_3$ сильно регулярен и дополнительный граф $\bar{\Gamma}_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. Если граф $\Gamma_3$ не содержит треугольников и число его вершин $v$ меньше 800, то $\Gamma$ имеет массив пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. При этом $\Gamma_3$ – граф с параметрами (392,46,0,6) и $\bar{\Gamma}_2$ – сильно регулярный граф с параметрами (392,115,18,40). Заметим, что окрестность любой вершины в графе с параметрами $(392, 115, 18, 40)$ является сильно регулярным графом с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, существование которого не известно. В работе найдены возможные автоморфизмы указанных сильно регулярных графов и гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. В частности, доказано, что последний граф не является реберно симметричным.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

**A. A. Makhnev, M. S. Nirova. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$.**

Let $\Gamma$ be a distance-regular graph of diameter 3 with eigenvalues $\theta_0 > \theta_1 > \theta_2 > \theta_3$. If $\theta_2 = -1$, then the graph $\Gamma_3$ is strongly regular and the complementary graph $\bar{\Gamma}_3$ is pseudogeometric for $pG_{c_3}(k, b_1/c_2)$. If $\Gamma_3$ does not contain triangles and the number of its vertices $v$ is less than 800, then $\Gamma$ has intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. In this case $\Gamma_3$ is a graph with parameters (392,46,0,6) and $\bar{\Gamma}_2$ is a strongly regular graph with parameters (392,115,18,40). Note that the neighborhood of any vertex in a graph with parameters $(392, 115, 18, 40)$ is a strongly regular graph with parameters $(115, 18, 1, 3)$, and its existence is unknown. In this paper, we find possible automorphisms of this strongly regular graph and automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$. In particular, it is proved that the latter graph is not arc-transitive.

Keywords: distance-regular graph, automorphism of a graph.

**MSC:** 05B25

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-182-190

## Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины $a$ графа $\Gamma$ через $\Gamma_i(a)$ обозначим $i$-окрестность вершины $a$, т. е. подграф, индуцированный $\Gamma$ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии $i$ от $a$. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть $\Gamma$ — граф, $a, b \in \Gamma$. Тогда число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если $a, b$ находятся на расстоянии 2 (смежны) в $\Gamma$. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *$\mu$-подграфом* (*$\lambda$-подграфом*). Если $\Gamma$ — граф диаметра $d$, то через $\Gamma_i$, где $i \le d$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и $\Gamma$, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии $i$ в $\Gamma$.

Если вершины $u, w$ находятся на расстоянии $i$ в $\Gamma$, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (соответственно $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф $\Gamma$ диаметра $d$ называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин $u, w$ на расстоянии $i$ в $\Gamma$ для

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025 (теоремы 1–3) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (следствие 2).

любого $i=0,\dots,d$. Положим $a_i=k-b_i-c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа $b_0=k$ — это степень графа, $c_1=1$. Дистанционно регулярный граф $\Gamma$ диаметра 2 называется *сильно регулярным* с параметрами $(v,k,\lambda,\mu)$, где $\lambda=a_1,\mu=c_2$.

Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ для вершин $x,y$, находящихся на расстоянии $l$ в графе $\Gamma$. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин $x,y$, обозначаются $p^l_{ij}$ и называются числами пересечений графа $\Gamma$. Для автоморфизма $g$ графа $\Gamma$ через $\alpha_i(g)$ обозначим $|\{u\in\Gamma\mid d(u,u^g)=i\}|$.

Пусть $\Gamma$ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с собственными значениями $\theta_0>\theta_1>\theta_2>\theta_3$. Если $\theta_2=-1$, то по предложению 4.2.17 из [1] граф $\Gamma_3$ сильно регулярен. В этом случае граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$.

Если, кроме того, граф $\Gamma_3$ не содержит треугольников и число его вершин $v$ меньше 800, то $\Gamma$ имеет массив пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$. При этом $\Gamma_3$ — граф с параметрами (392,46,0,6) и $\bar\Gamma_2$ – сильно регулярный граф с параметрами (392,115,18,40).

Сильно регулярные графы без треугольников являются самыми интригующими в классе сильно регулярных графов. Известно существование следующих сильно регулярных графов без треугольников:

а) полный двудольный граф;

б) граф Мура с параметрами $(k^2+1,k,0,1)$, $k=2,3,7$ (неизвестно существование графа Мура с $k=57$);

в) граф Клебша с параметрами $(16,5,0,2)$, граф Гевиртца с параметрами $(56,10,0,2)$, граф Матье с параметрами $(77,16,0,4)$, граф Хигмена — Симса с параметрами $(100,22,0,6)$.

В работе найдены возможные автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{69,56,10;1,14,60\}$. Такой граф имеет спектр $69^1,13^{69},-1^{276},-15^{46}$ и $1+69+276+46=392$ вершины. Основным результатом статьи является

**Теорема 1.** *Пусть* $\Gamma$ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{69,56,10;1,14,60\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ *— элемент простого порядка из* $G$ *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,7\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $\Omega$ *— пустой граф, и либо* $p=7$, $\alpha_3(g)=98s$, $\alpha_2(g)=198t$, *либо* $p=2$, $\alpha_3(g)=28s$, $\alpha_2(g)=56t$;

(2) $|\Omega|=1$, *и* $p=23$, $\alpha_1(g)=69$, $\alpha_2(g)=276$, $\alpha_3(g)=46$;

(3) $|\Omega|=21s+14$, *и* $p=3$, $s=0,1,2$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_2(g)=84t$.

**Следствие 1.** *Пусть* $\Gamma$ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{69,56,10;1,14,60\}$. *Если группа* $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* $\Gamma$, *то либо* $|G|=8\cdot 49$ *и* $\Gamma$ *является графом Кэли, либо* $G=Z(G)\times L$, $Z(G)\cong Z_7$, $L\cong L_2(7),L_2(8)$ *и* $L_a$ *— силовская 3-подгруппа из* $L$, *либо* $G$ *содержит подгруппу индекса 2, изоморфную* $Z_7\times L_2(7)$, $|L_a|=6$ *и* $G/S(G)\cong PGL_2(7)$. *В любом случае граф* $\Gamma$ *не является реберно симметричным.*

Существование графа из заключения следствия 1 пока не известно.

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие результаты.

**Теорема 2.** *Пусть* $\Gamma$ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(392,46,0,6)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ *— элемент простого порядка из* $G$ *и* $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $\Omega$ *— пустой граф, и* $p=7$, $\alpha_1(g)=98s$ *или* $p=2$, $\alpha_1(g)=28t$;

(2) $\Omega$ *является* $n$*-кликой, и либо* $n=1$, $p=23$, $\alpha_1(g)=46$, *либо* $n=2$, $p=5$, $\alpha_1(g)=70l-20$;

(3) $\Omega$ *является* $m$*-кокликой,* $4\le m\le 56$, *и* $p=2$, $\alpha_1(g)=28l-10m$;

(4) $\Omega$ *является объединением* $l$ *изолированных ребер,* $l=7,28$, *и* $p=3$, $\alpha_1(g)=0$;

(5) $\Omega$ *содержит геодезический 2-путь и* $p\le 5$.

Заметим, что окрестность любой вершины в графе с параметрами $(392, 115, 18, 40)$ является сильно регулярным графом с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, а вторая окрестность вершины сильно регулярна с параметрами $(276, 75, 10, 24)$. Автоморфизмы сильно регулярных графов с параметрами $(115, 18, 140)$ и $(276, 75, 10, 24)$ найдены в [2] и [3] соответственно. Теорема 3 устраняет неточность в основном результате из [4], использованном в [2].

**Теорема 3.** *Пусть* $\Gamma$ *является сильно регулярным графом с параметрами* $(392, 115, 18, 40)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — *элемент простого порядка из* $G$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 7, 23\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) $\Omega$ — *пустой граф, и* $p = 7$, $\alpha_1(g) = 0, 196$ *или* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 56t$;

(2) $|\Omega| = 1$, *и* $p = 23$, $\alpha_1(g) = 115$;

(3) $\Omega$ *является полным двудольным графом* $K_{m,n}$, $p = 3$, *числа* $m, n$ *сравнимы с* 1 *по модулю* 3 *и* $\alpha_1(g) = 84l + 3(m + n)$;

(4) *если* $f$ — *элемент порядка* 7 *из* $G$, *то* $|C_G(f)|$ *не делится на* 9.

С помощью теоремы 3 получаем существенное уточнение результата из [2].

**Следствие 2.** *Пусть* $\Gamma$ — *дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$. *Если группа* $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ *действует транзитивно на множестве вершин графа* $\Gamma$, *то либо* $|G| = 32 \cdot 49$ *и* $\Gamma$ *является графом Кэли, либо* $G = S(G) \times L$, $S(G) = Z_7 \times K$, $|K| = 4$, $L \cong L_2(7), L_2(8)$ *и* $|L : L_a| = 56$, *либо* $S(G) = Z_7 \times K$, $|K| = 2$, $|L_a| = 3$ *и* $G/S(G) \cong PGL_2(7)$.

## 1. Автоморфизмы графов с параметрами $(392, 46, 0, 6)$ и $(392, 115, 18, 40)$

Сначала приведем один вспомогательный результат.

Пусть $g$ — неединичный автоморфизм сильно регулярного графа $\Gamma$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Если $\Gamma$ имеет параметры $(392, 46, 0, 6)$, то ввиду [5, теорема 3.2] имеем $|\Omega| \leq 56$, а если $\Gamma$ имеет параметры $(392, 115, 18, 40)$, то $|\Omega| \leq 140$.

В леммах 1–3 предполагается, что $\Gamma$ — сильно регулярный граф с параметрами $(392, 46, 0, 6)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — элемент простого порядка $p$ из $G$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Gamma$ имеет спектр $46^1, 4^{276}, -10^{115}$. Следующая лемма использует метод Хигмена [6, гл. 3]. Здесь матрицы $P, Q$ являются первой и второй матрицей собственных значений графа и $PQ = QP = v^{-1}I$ (см. также [7]).

**Лемма 1.** *Если* $\varphi_1$ — *характер проекции мономиального представления на подпространство размерности* 276, *то* $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ *для любого натурального числа* $l$, *взаимно простого с* $|g|$, $\varphi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/14 - 4$ *и* $\varphi_1(g) - 276$ *делится на* $p$.

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 276 & 24 & -4 \\ 115 & -25 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi_1(g) = (69\alpha_0(g) + 6\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/98$. Подставляя $\alpha_2(g) = 392 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\varphi_1(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/14 - 4$.

Остальные утверждения леммы следуют из [7, лемма 1]. □

**Лемма 2.** *Выполняются следующие утверждения*:

(1) *если* $\Omega$ — *пустой граф, то либо* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 98s$, *либо* $p = 2$ *и* $\alpha_1(g) = 28t$;

(2) *если* $\Omega$ *является* $n$-*кликой, то либо* $n = 1$, $p = 23$ *и* $\alpha_1(g) = 46$, *либо* $n = 2$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 70l - 20$;

(3) *если $\Omega$ является $m$-кокликой, $m \geq 2$, то $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 28l - 10m$;*

(4) *если $\Omega$ содержит ребро и является объединением изолированных клик, то $p = 3$, $\Omega$ является объединением $l$ изолированных ребер, $l = 7, 28$ и $\alpha_1(g) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\Omega$ — пустой граф. Так как $392 = 8 \cdot 49$, то $p = 2, 7$.

Если $p = 7$, то по лемме 1 число $\varphi_1(g) = \alpha_1(g)/14 - 4$ сравнимо с -4 по модулю 7 и $\alpha_1(g) = 98s$.

Если $p = 2$, то число $\varphi_1(g) = \alpha_1(g)/14 - 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 28t$.

Пусть $\Omega$ является $n$-кликой. Если $n = 1$, то $p$ делит 46 и 345, поэтому $p = 23$. Теперь $\varphi_1(g) = (10 + \alpha_1(g))/14 - 4$ и $\alpha_1(g) = 46$.

Если $n = 2$, $a, b$ — две вершины из $\Omega$, то $\Gamma$ содержит по 45 вершин из $[a] - \{b\}$, $[b] - \{a\}$ и 300 вершин вне $[a] \cup [b]$, поэтому $p$ делит 45 и 345, $p = 3, 5$. В случае $p = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 0$ и $\varphi_1(g) = 20/14 - 4$, противоречие. В случае $p = 5$ имеем $\varphi_1(g) = (20 + \alpha_1(g))/14 - 4$ и $\alpha_1(g) = 70l - 20$.

Пусть $\Omega$ является $m$-кокликой, $m \geq 2$. Если $a, b$ — две вершины из $\Omega$, то $\Gamma$ содержит 6 вершин из $[a] \cap [b]$, по 40 вершин из $[a] - [b]$, $[b] - [a]$ и 304 вершины вне $a^\perp \cup b^\perp$, поэтому $p$ делит 6, 40 и $306 - m$. Отсюда $p = 2$. Далее, число $\varphi_1(g) = (10m + \alpha_1(g))/14 - 4$ четно и $\alpha_1(g) = 28l - 10m$.

Пусть $\Omega$ содержит ребро и является объединением изолированных клик. Если $a, b$ — две смежные вершины из $\Omega$, то $p$ делит 6 и 45, поэтому $p = 3$, $\Omega$ является объединением изолированных ребер, $\alpha_1(g) = 0$ и число $\varphi_1(g) = 10\alpha_0(g)/14 - 4$ делится на 3. Отсюда $10\alpha_0(g) = 42s + 14$, $s = 5t + 3$ и $\alpha_0(g) = 21t + 14$, $t = 0, 2$. □

**Лемма 3.** *Если $\Omega$ содержит геодезический 2-путь, то выполняются следующие утверждения*:

(1) *$p \leq 5$ и в случае $p = 5$ имеем $|\Omega| \in \{7, 12, \ldots, 52\}$ и степень вершины в $\Omega$ равна $6, 11, 16, 21$;*

(2) *если $p = 3$, то $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_0(g) \in \{14, 35, 56\}$;*

(3) *если $p = 2$, то $|\Omega| \in \{4, 6, \ldots, 56\}$ и степень вершины в $\Omega$ равна $2, 4, \ldots, 36$.*

Доказательство. Пусть $\Omega$ содержит геодезический 2-путь $b, a, c$. Если $p > 5$, то $\Omega$ — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 0, 6)$, $\Omega$ имеет неглавные собственные значения $r$, $-(6 + r)$ и $k' = 6(r + 1) + r^2$, причем 6 делит $r^2(r^2 - 1)$. Если $r = 1$, то $\Omega$ имеет параметры $(40, 13, 0, 6)$, противоречие, а если $r = 2$, то $\Omega$ имеет параметры $(100, 22, 0, 6)$. В этом случае число ребер между $\Omega$ и $\Gamma - \Omega$ равно $100 \cdot 24$, противоречие с тем, что вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с одной вершиной из $\Omega$.

Пусть $p = 5$. Тогда $\mu_\Omega \in \{1, 6\}$, $|\Omega| \in \{7, 12, \ldots, 52\}$ и степень вершины в $\Omega$ равна $6, 11, 16, 21$.

Пусть $p = 3$. Тогда $\mu_\Omega \in \{3, 6\}$, $|\Omega| \in \{8, 11, \ldots, 56\}$ и степень вершины в $\Omega$ равна $3, 6, \ldots, 21$. Далее, $\alpha_1(g) = 0$, число $\varphi_1(g) = 5\alpha_0(g)/7 - 4$ делится на 3, $5\alpha_0(g) = 7(3s + 1)$ и $s = 5t + 3$. Отсюда $\alpha_0(g) \in \{14, 35, 56\}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\mu_\Omega \in \{2, 4, 6\}$, $|\Omega| \in \{4, 6, \ldots, 56\}$ и степень вершины в $\Omega$ равна $2, 4, \ldots, 36$. □

Из лемм 2, 3 следует теорема 2.

В леммах 4–6 предполагается, что $\Gamma$ — сильно регулярный граф с параметрами (392, 115, 18, 40), $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — элемент простого порядка $p$ из $G$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Gamma$ имеет спектр $115^1, 3^{345}, -25^{46}$. Так как окрестности вершин в $\Gamma$ сильно регулярны с параметрами (115,18,1,3), то окрестность любой вершины в $\mu$-подграфе является 3-кокликой и порядок клики в $\Gamma$ не больше 4. Далее, порядок коклики в $\Gamma$ не больше $392 \cdot 5/28 = 70$. Следующая лемма использует метод Хигмена [4, гл. 3].

**Лемма 4.** *Если $\psi_2$ — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности 46, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа $l$, взаимно простого с $|g|$, $\psi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/28 + 4$ и $\psi_2(g) - 46$ делится на $p$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 345 & 9 & -5 \\ 46 & -10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\psi_2(g) = (23\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g))/196$. Подставляя $\alpha_2(g) = 392 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\psi_2(g) = (3\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/28 + 4$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 1]. □

**Лемма 5.** *Если $\Omega$ — пустой граф, то либо $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 0, 196$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 56t$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Omega$ — пустой граф. Так как $392 = 8 \cdot 49$, то $p = 2, 7$.

Если $p = 7$, то по лемме 4 число $\psi_2(g) = \alpha_1(g)/28 + 4$ сравнимо с 4 по модулю 7 и $\alpha_1(g) = 196s$. Если $\alpha_1(g) = 392$, то каждая $\langle g\rangle$-орбита на множестве вершин является 7-кликой, противоречие.

Если $p = 2$, то число $\psi_2(g) = \alpha_1(g)/28 + 4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 56t$. □

**Лемма 6.** *Если $\Omega$ — непустой граф, то либо*

(1) $|\Omega| = 1$, $p = 23$ *и* $\alpha_1(g) = 115$, *либо*

(2) $\Omega$ *является полным двудольным графом* $K_{m,n}$, $p = 3$, *числа* $m, n$ *сравнимы с* 1 *по модулю* 3 *и* $\alpha_1(g) = 84l + 3(m + n)$;

(3) *если* $f$ *— элемент порядка* 7, *то* $|C_G(f)|$ *не делится на* 9.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Omega$ содержит вершину $a$, $\alpha'_i(g) = |\{u \in [a] - \Omega \mid d(u, u^g) = i\}|$. По [2, теорема 1] выполняется одно из утверждений:

(1) $\Omega(a)$ — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha'_1(g) = 15, 55$, либо $p = 23$ и $\alpha'_1(g) = 23$;

(2) $\Omega(a)$ является $l$-кокликой, $1 \le l \le 13$, $p = 3$, $l$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha'_1(g) = 24s + 23 - 5l \ne 0$;

(3) $\Omega(a) = b^\perp$ для некоторой вершины $b \in \Omega(a)$ и $p = 2$.

В случае (1) $\Omega$ является $m$-кокликой, и если $p = 23$, то $m = 1$, $\psi_2(g) = (115 - \alpha_1(g))/28$, поэтому $\alpha_1(g) = 115$. Если $p = 5$, то получим противоречие с [3, лемма 5].

В случае (2) покажем, что $\Omega - a^\perp$ является кокликой. Если $b, c$ — две смежные вершины из $\Omega - a^\perp$, то $[b] \cap [c]$ содержит 40 вершин, 16 из которых попадают в $[a]$. Противоречие с тем, что для вершины $e \in [b] \cap [c] \cap \Omega(a)$ подграф $\Omega(e)$ содержит ребро.

Покажем, что $\Omega$ — полный двудольный граф $K_{m,n}$. Пусть $b \in \Omega(a)$. Если $c$ — несмежная с $b$ вершина из $\Omega - a^\perp$, то $\Omega(c)$ не пересекает $[b]$, противоречие с тем, что $|[b] \cap [c]| = 40$.

Наконец, число $\psi_2(g) = (3(m + n) - \alpha_1(g))/28 + 4$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $\alpha_1(g) = 84l + 3(m + n)$.

В случае (3) получим противоречие с тем, что окрестность любой вершины в $\mu$-подграфе является 3-кокликой.

Пусть $p = 7$ и $|C_G(g)|$ делится на 9. Тогда для элемента $f$ порядка 3 из $C_G(g)$ число $m+n$ делится на 7 и $m+n = 14, 35$. В последнем случае имеем $\{m, n\} = \{7, 28\}$, противоречие с тем, что порядок окрестности вершины в $\Omega$ не больше 23. По лемме 6 имеем $\alpha_2(g) = 196, 392$.

Пусть $f$ — элемент порядка 7 и $|C_G(f)|$ делится на 9. Если $C_G(f)$ содержит элемент порядка 9, то $\alpha_2(f) - 14$ не делится на 9, противоречие. Пусть $U = \langle g_1, g_2, g_3, g_4\rangle$ — элементарная абелева подгруппа порядка 9 из $C_G(f)$, где $\langle g_i \langle$ — различные подгруппы порядка 3 из $U$. Тогда $|\mathrm{Fix}(U)| = 14$ и снова $\alpha_2(f) - 14$ не делится на 9, противоречие. □

Из лемм 5, 6 следует теорема 3.

## 2. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$

В этом разделе предполагается, что $\Gamma$ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — элемент простого порядка $p$ из $G$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Gamma$ имеет спектр $115^1, 23^{210}, 3^{345}, -5^{966}, -25^{46}$ и $v = 1 + 115 + 1104 + 345 + 3 = 1568 = 32 \cdot 49$. Далее, окрестность любой вершины в $\Gamma$ — сильно регулярный граф с параметрами (115,18,1,3) и $\Gamma$ не содержит 5-клик.

Пусть $\chi_1$ — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности 210 и $\chi_4$ — характер проекции представления на подпространство размерности 46. Тогда по [2, лемма 6] имеем $\chi_1(g) = (15\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 5\alpha_4(g))/112$, $\chi_4(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 4\alpha_4(g))/112 - 10$, $\chi_1(g) - 210$, $\chi_4(g) - 46$ делятся на $p$.

Если $g$ индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то $\alpha_4(g) = v$ и $p = 2$. Более того, порядок подгруппы $K$ из $G$, индуцирующей тривиальные автоморфизмы антиподального частного $\bar{\Gamma}$, делит 4. Ввиду теоремы 3 порядок группы $G$ делит $32 \cdot 3^{\beta} \cdot 49 \cdot 23$.

**Лемма 7.** *Если $g$ индуцирует нетривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то выполняется одно из утверждений:*

(1) $\alpha_0(g) + \alpha_4(g) = 0$, $p = 7$, $\alpha_1(g) = 196l$, $\alpha_2(g) = 784$, $\alpha_3(g) = 784 - 196l$, $l \in \{0, 1, 2\}$ *или* $p = 2$, $\alpha_1(g) = 56t$, $\alpha_2(g) = 224s$, $\alpha_3(g) = 1568 - 56t - 224s$*;*

(2) $\alpha_0(g) = 4$, $\alpha_4(g) = 0$, $p = 23$, $\alpha_1(g) = 184$, $\alpha_2(g) = 1104$ *и* $\alpha_3(g) = 276$*;*

(3) $p = 3$, $\alpha_0(g) = 4(m + n)$, $\alpha_1(g) = 84t - 12(m + n)$, $\alpha_2(g) = 4(392 - 84l - 4(m + n))$, $\alpha_3(g) = 336l + 24(m + n) - 84t$ *и* $\alpha_4(g) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду теоремы 3 либо $p \in \{2, 7\}$ и $\Omega$ — пустой граф, либо $p = 23$ и $|\bar{\Omega}| = 1$, либо $p = 3$ и $|\bar{\Omega}| = m + n$.

Если $p = 7$, то $\alpha_4(g) = 0$, и ввиду леммы 4 имеем $\bar{\alpha}_1(g) = 196 = \bar{\alpha}_2(g)$. Поэтому $\alpha_2(g) = 784$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 784$, число $\chi_1(g) - 210 = (3\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/112 - 210 = \alpha_1(g)/28 - 217$ делится на 7. Отсюда $\alpha_1(g) = 196l$, $\alpha_3(g) = 784 - 196l$, $l \in \{0, 1, 2\}$.

Если $p = 2$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) + \alpha_3(g) = 32 \cdot 49$ и число $\chi_4(g) - 46 = \alpha_2(g)/112 - 56$ четно. Поэтому $\alpha_2(g) = 224s$. Аналогично число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 392 + 56s)/28$ четно и $\alpha_1(g) = 56t$.

Пусть $\bar{\Omega} = \{\bar{a}\}$, $p = 23$ и $\bar{\alpha}_2(g) = 276$. Тогда $|\Omega| = 4$, $\alpha_2(g) = 1104$, $\chi_4(g) = (16 + 1104)/112 - 10 = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 460$, $\alpha_1(g) = 23 \cdot 4l$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 100)/28 = (23l - 25)/7$ и $l = 2$.

Если $p = 3$, то $\bar{\alpha}_2(g) = 392 - 84l - 4(m + n)$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 1568 - 4(m + n) - 4(392 - 84l - 4(m + n)) = 336l + 12(m + n)$, $\chi_4(g) = (392 - 84l)/28 - 10 = 4 - 3l$, число $\chi_1(g) = (12(m + n) + \alpha_1(g) - 84l)/28$ делится на 3 и $\alpha_1(g) = 84t - 12(m + n)$. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2. До конца раздела будем предполагать, что неразрешимая группа $G$ действует транзитивно на множестве вершин графа $\Gamma$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$ и $F$ — антиподальный класс, содержащий вершину $a$. Тогда $|G : G_{\{F\}}| = 392$ и $|G : G_a| = 1568$.

Так как $v = 32 \cdot 49$, то $S(G)$ является $\{2, 7\}$-группой. Если $G$ — разрешимая группа, то $\Gamma$ является графом Кэли $Cay(G, S)$ и $\alpha_1(g) = 1568$ для любого порождающего элемента $g \in S$, $\alpha_1(g) = 0$ для любого $g \notin S$. Пусть $|g| = 7$. Если $g \in S$, то получим противоречие с тем, что любая $\langle g \rangle$-орбита на множестве вершин графа $\Gamma$ является 7-кликой. Значит, $g \notin S$ и $\alpha_1(g) = 0$. Теперь $\alpha_2(g) = \alpha_3(g) = 784$.

Пусть $G$ — неразрешимая группа. Если 23 делит $|G|$, то по [8, теорема 1] число 11 делит $|G|$, противоречие. Если 23 не делит $|G|$, то по [8, теорема 1] группа $\bar{T}$ изоморна $L_2(7)$, $L_2(8)$ или $U_3(3)$. Ввиду утверждения (4) теоремы 3 группа $S(G)$ содержит элемент $f$ порядка 7 и $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8)$. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_{\{F\}}| = 56$, то $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 7$, группа $S(G)$ равна $Z_7 \times K$, $|K|$ делит 4 и коммутант группы $G$ изоморфен $L_2(7)$, $SL_2(7)$, $L_2(8)$. Далее, $|G : G_a| = 1568$ и случай $SL_2(7)$ не возникает. $\square$

## 3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$

В этом разделе предполагается, что $\Gamma$ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{69, 56, 10; 1, 14, 60\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $g$ — элемент простого порядка $p$ из $G$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\Gamma$ имеет спектр $69^1, 13^{69}, -1^{276}, -15^{46}$ и $v = 1 + 69 + 276 + 46 = 392$. Порядок клики в $\Gamma$ не больше $1 + 69/15$ и порядок коклики в $\Gamma$ не больше $392 \cdot 5/28 = 70$.

**Лемма 8.** *Пусть $\chi_2$ — характер проекции мономиального представления на подпространство размерности 276, $\chi_3$ — характер проекции на подпространство размерности 46. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа $l$, взаимно простого с $|g|$, $\chi_2(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 4$, $\chi_3(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/28 - 10$ и $\chi_2(g) - 276$, $\chi_3(g) - 46$ делятся на $p$.*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 69 & 13 & -1 & -15 \\ 276 & -4 & -4 & 24 \\ 46 & -10 & 4 & -10 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_2(g) = (69\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 6\alpha_3(g))/98$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 392 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (10\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 4$.

Далее, $\chi_3(g) = (23\alpha_0(g) - 5\alpha_1(g) + 2\alpha_2(g) - 5\alpha_3(g))/196$. Учитывая равенство $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 392 - \alpha_2(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_3(g) = (4\alpha_0(g) + \alpha_2(g))/28 - 10$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 1]. □

**Лемма 9.** *Выполняется одно из утверждений:*

*(1) $\Omega$ — пустой граф, либо $p = 7$, $\alpha_3(g) = 98s$, $\alpha_2(g) = 196t$, либо $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$ и $\alpha_2(g) = 56t$;*

*(2) $|\Omega| = 1$, $p = 23$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$ и $\alpha_3(g) = 46$;*

*(3) $|\Omega| = 21s + 14$, $p = 3$, $s = 0, 1, 2$, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 84t$.*

Доказательство. Если $\Omega$ — пустой граф, то $p = 2, 7$. В случае $p = 7$ по лемме 8 число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ сравнимо с 3 по модулю 7, поэтому $\alpha_3(g) = 98s$, число $\chi_3(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ сравнимо с 4 по модулю 7 и $\alpha_2(g) = 196t$.

В случае $p = 2$ число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 28s$, число $\chi_3(g) = \alpha_2(g)/28$ четно и $\alpha_2(g) = 56t$.

Если $\Omega$ — непустой граф, то из теорем 2, 3 следует, что либо $|\Omega| = 1$ и $p = 23$, либо $p = 3$. В случае $p = 23$ получим $\alpha_3(g) = 46$, $\alpha_1(g) = 69$, $\alpha_2(g) = 276$, $\chi_2(g) = (10 + 46)/14 - 4 = 0$ и $\chi_3(g) = (4 + 276)/28 - 10$, противоречие.

В случае $p = 3$ получим $\alpha_3(g) = 0$, число $\chi_2(g) = 10\alpha_0(g)/14 - 4$ делится на 3, поэтому $5\alpha_0(g) = 7(15s+10)$ и $\alpha_0(g) = 21s+14$, $s = 0, 1, 2$. Далее, число $\chi_3(g) = (4(21s+14)+\alpha_2(g))/28 - 10$ сравнимо с 1 по модулю 3 и $6s - 8 + \alpha_2(g)/28 = 3t' + 1$. Отсюда $\alpha_2(g) = 84t$. □

Из леммы 9 следует теорема 1.

**Лемма 10.** *Если $f$ — элемент порядка 7 из $G$, $g$ — элемент простого порядка $p < 7$ из $C_G(f)$ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то выполняется одно из утверждений:*

*(1) $\Omega$ — пустой граф, $p = 2$, если $|C_G(g)|$ делится на 49, то $\alpha_2(g) = 0, 392$ и $\alpha_3(g)$ делится на 196, а если $|C_G(f)|$ делится на 8, то $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 392$ или $\alpha_3(g) = 392$;*

*(2) $\Omega$ — непустой граф, $p = 3$ и $|C_G(f)|$ не делится на 9.*

Доказательство. Если $\Omega$ — пустой граф, то $p = 2$, $\alpha_3(g) = 28s$ и $\alpha_2(g) = 56t$. Если $|C_G(g)|$ делится на 49, то $\alpha_2(g) = 0, 392$ и $\alpha_3(g)$ делится на 196. Если $|C_G(f)|$ делится на 8, то $\alpha_1(g) = 0$ и $\alpha_2(g) = 392$ или $\alpha_3(g) = 392$.

Если $\Omega$ — непустой граф, то $p = 3$ и по теореме 3 число $|C_G(f)|$ не делится на 9. □

До конца раздела будем предполагать, что группа $G$ действует транзитивно на множестве вершин графа $\Gamma$ и $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Тогда $|G : G_a| = 392$.

**Лемма 11.** *Выполняются следующие утверждения*:
(1) $S(G)$ *является* $\{2, 7\}$*-группой*;
(2) *если* $G$ *— разрешимая группа, то* $\Gamma$ *является графом Кэли*;
(3) *если* $G$ *— неразрешимая группа, то группа* $\bar{T}$ *изоморфна* $L_2(7)$*,* $L_2(8)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $v = 8 \cdot 49$, то $S(G)$ является $\{2, 7\}$-группой.

Если группа $G$ разрешима, то $\Gamma$ является графом Кэли $Cay(G, S)$, $\alpha_1(g) = 392$ для любого элемента $g \in S$, $\alpha_1(g) = 0$ для $g \notin S$.

Пусть $g$ — элемент порядка 7 из $G$. Если $g \in S$, то получим противоречие с тем, что любая $\langle g\rangle$-орбита на множестве вершин графа $\Gamma$ является 7-кликой. Значит, $g \notin S$, $\alpha_2(g)+\alpha_3(g) = 392$, число $\chi_2(g) = \alpha_3(g)/14 - 4$ сравнимо с 3 по модулю 7, число $\chi_3(g) = (392 - \alpha_2(g))/28 - 10$ сравнимо с 4 по модулю 7. Отсюда $\alpha_2(g) = \alpha_3(g) = 196$.

Если группа $G$ неразрешима, то по [8, теорема 1] группа $\bar{T}$ изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$ или $U_3(3)$. В любом случае $|\bar{T} : \bar{T}_a|$ не делится на 49, поэтому $S(G)$ содержит элемент $f$ порядка 7 и по лемме 11 $|C_G(f)|$ не делится на 9. Отсюда $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8)$.

Завершим д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1. Ввиду леммы 11 имеем $\bar{T} \cong L_2(7), L_2(8)$. Так как $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 56$, то либо группа $G$ равна $Z_7 \times L$, $L \cong L_2(7), L_2(8)$ и $L_a$ — силовская 3-подгруппа из $L$, либо $G$ содержит подгруппу индекса 2, изоморфную $Z_7 \times L_2(7)$ и $G/S(G) \cong PGL_2(7)$. □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs // Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1989. 495 p. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2 .
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Самойленко М.С.** Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ // Докл. РАН 2014. Т. 459, № 2. С. 149–153.
3. **Махнев А.А., Самойленко М.С.** Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (276,75,10,24) // Докл. РАН. 2014. Т. 457, № 5. С. 516–519.
4. **Махнев А.А., Пономарев Д.Н.** Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами (392,115,18,40) // Докл. РАН. 2015. Т. 460, № 1. С. 18–21.
5. **Behbahani M., Lam C.** Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math. 2011. Vol. 311, no. 2-3. P. 132–144.
6. **Cameron P.** Permutation Groups. London: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
7. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН. 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
8. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.



Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru


Поступила 27.02.2017


Нирова Марина Сефовнач
канд. физ.-мат. наук, доцент
Кабардино-Балкарский гос. университет, г. Нальчик,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: nirova_m@mail.ru

## REFERENCES


1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1989, 495 p. doi: 10.1007/978-3-642-74341-2 .
2. Makhnev A.A., Paduchikh D.V., Samoilenko M.S. Automorphisms of a graph with intersection array $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$. *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 692–696. doi: 10.1134/S1064562414060131 .
3. Makhnev A.A., Samoilenko M.S. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters (276,75,10,24). *Dokl. Math.*, 2014, vol. 90, no. 1, pp. 485–488. doi: 10.1134/S1064562414050238 .
4. Makhnev A.A., Ponomarev, D.N. Automorphisms of a strongly regular graph with parameters (392, 115, 18, 40). *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 1, pp. 12–15. doi: 10.1134/S1064562414070035 .
5. Behbahani M., Lam C. Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms. *Discrete Math.* 2011, vol. 311, iss. 2-3, pp. 132–144. doi: 10.1016/j.disc.2010.10.005 .
6. Cameron P. *Permutation Groups.* London, Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
7. Gavrilyuk A.L., Makhnev, A.A. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. *Dokl. Math.*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. doi: 10.1134/S1064562410030282 .
8. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sibirean Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12. ISSN 1813-3304 .


The paper was received by the Editorial Office on February 27, 2017.

*Aleksandr Alekseevich Makhnev*, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: makhnev@imm.uran.ru .

*Marina Sefovnach Nirova*, Cand. Phys.-Math. Sci, Kabardino-Balkarian State University named after H. M. Berbekov, Nal'chik, 360004 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: nirova_m@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.21+517.958

# СВЯЗЬ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ЗАДАЧАМИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК[1]

**И. В. Мельникова, У. А. Алексеева, В. А. Бовкун**

Работа посвящена исследованию связи между задачей Коши для бесконечномерных стохастических уравнений с мультипликативным винеровским процессом и задачами Коши (прямой и обратной) для соответствующих детерминированных уравнений в частных производных (с производными Фреше). Для марковских случайных процессов, задаваемых стохастическими уравнениями, доказано существование двух пределов, определяемых через плотности переходных вероятностей — обобщение на бесконечномерный случай средних значений и ковариации этих процессов. Получено уравнение в частных производных для вероятностных характеристик изучаемых процессов с коэффициентами, определяемыми этими пределами — бесконечномерный аналог уравнения Колмогорова. Специфика бесконечномерности решений рассматриваемых стохастических уравнений сказывается настолько сильно, что выражения для пределов и сами полученные уравнения в частных производных выглядят не так, как в конечномерном случае: в уравнении присутствует гладкий функционал, который в каком-то смысле играет роль основных функций в уравнениях, рассматриваемых как обобщенные.

Ключевые слова: стохастическая задача Коши, $Q$-винеровский процесс, марковский процесс, генератор полугруппы, уравнение Колмогорова.

**I. V. Mel'nikova, U. A. Alekseeva, V. A. Bovkun. The connection between infinite-dimensional stochastic problems and problems for probabilistic characteristics.**

We study the connection between the Cauchy problem for infinite-dimensional quasi-linear stochastic equations with multiplicative Wiener process and the (direct and inverse) Cauchy problems for the corresponding deterministic partial differential equations (with Fréchet derivatives). For Markov processes given by stochastic equations, we prove the existence of two limits defined in terms of densities of transition probabilities; these limits generalize to the general case the average values and covariances of these processes. A partial differential equation, which is an infinite-dimensional analog of the Kolmogorov equation, is obtained for probabilistic characteristics of the processes with coefficients defined by these limits. The fact that the solutions of the stochastic differential equations are infinite-dimensional has a profound effect on the expressions for the limits and for the obtained partial differential equations. The form of these expressions is different as compared to the finite-dimensional case: the equations contain a smooth potential, which, in a sense, plays the role of test functions in the equations considered as generalized ones.

Keywords: stochastic Cauchy problem, Q-Wiener process, Markov process, semigroup generator, Kolmogorov equation.

**MSC:** 47D07, 60H20, 60J25, 46G12

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-191-205

## Введение

Многие модели в условиях неполной информации, недостаточной для детерминированной постановки, приводят к бесконечномерным стохастическим задачам вида

$$X'(t) = AX(t) + F(t, X(t)) + B(t, X(t))\mathcal{W}(t), \quad t \in [0, T], \quad X(0) = \xi, \tag{0.1}$$

где $A$ — генератор некоторой полугруппы операторов в гильбертовом пространстве $H$, $F$ — нелинейное отображение из $H$ в $H$, $\mathcal{W}$ — случайный процесс типа белого шума со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ и $B$ — оператор из $\mathbb{H}$ в $H$.

[1]Работа выполнена при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-9356.2016.1) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Например, в биологии это стохастический аналог уравнения Маккендрика — фон Ферстера, описывающего плотность распределения популяции $X(t,s)$ в момент времени $t$, структурированной по возрасту $s$. Здесь $AX(t,s) = -dX(t,s)/ds - \mu(s)X(t,s)$, где $\mu(s)$ — коэффициент скорости гибели в зависимости от возраста, $B(\cdot,\cdot)$ — оператор умножения на $X(t,s)$, шум $\mathcal{W}(t)$ — обобщенная производная $Q$-винеровского процесса, с оператором $Q$, характеризующим корреляцию возмущений скорости гибели особей разных возрастов, или цилиндрического винеровского процесса, если возмущения скорости гибели особей разных возрастов некоррелированы.

В физике это модель колебаний струны (мембраны) под воздействием случайных импульсов (ударов частиц, "размерных" или "безразмерных", от чего зависят свойства случайного процесса $\mathcal{W}$ ). Модель может быть записана в форме задачи (0.1) с $A$ — оператором-матрицей, порождающим интегрированную полугруппу операторов в $H \times H$, и аддитивным шумом.

В финансовой математике это стохастическое уравнение динамики цен бондов (облигаций) с оператором $A$ — генератором полугруппы правых сдвигов, действующим на цену облигации $X(t,s)$ в момент времени $t$, где $s$ — время до момента погашения облигации, а $F(t,X)$ и $B(t,X)$ — операторы, отражающие влияние рынка в модели Хита — Джэрроу — Мортона (см., например., [1–3]).

Связь данных и других стохастических задач, записываемых, как это принято в современной теории, в форме дифференциалов с винеровским процессом $W$ ("первообразной" белого шума):

$$dX_t = (AX_t + F(t,X_t))dt + B(t,X_t)dW_t, \quad t \in [0,T], \quad X_0 = \xi, \tag{0.2}$$

с детерминированными задачами для вероятностных характеристик решений лежит в основе многих исследований в сфере стохастического анализа. Результаты изучения таких связей в бесконечномерном случае отражены в монографиях [4–6]. Доказательство связи решения задачи Коши (0.2) с обратной задачей Коши для вероятностных характеристик вида $g(t,x) = \mathbf{E}^{t,x}[f(X(T))]$, где $f$ — некоторый гладкий функционал, $\mathbf{E}^{t,x}[f(X(T))]$ — математическое ожидание решения уравнения (0.2) с дополнительным условием $X(t) = x,\ 0 \leqslant t \leqslant T$, основано на использовании бесконечномерной формулы Ито для диффузионных процессов, которую в более общем случае применять, вообще говоря, нельзя (см., например, [7; 8]). Для стохастических задач с неограниченным оператором $A$, нелинейными слагаемыми и мультипликативным винеровским процессом оказывается неприменимым и "полугрупповой" метод, использованный в [9] в случае линейных уравнений с аддитивным шумом.

Настоящая работа посвящена исследованию связи между задачей Коши (0.2) для марковских процессов и задачами Коши (прямой и обратной) для соответствующих детерминированных уравнений в частных производных (с производными Фреше): прямой задачей Коши для плотности переходных вероятностей и обратной задачей Коши для вероятностной характеристики $g(t,x)$ (представляющей самостоятельный интерес в задачах финансовой математики). В работе использован подход, обобщающий идеи классических доказательств (см., например, [2; 10]) для марковских процессов при условии существования некоторых пределов при $\Delta t \to 0$, определяемых свойствами плотности переходных вероятностей при переходе от момента времени $t$ к $t + \Delta t$. При этом специфика бесконечномерности сказывается настолько сильно, что иначе выглядят как эти условия, так и сами полученные уравнения.

## 1. Постановка задачи

Пусть $H$ — гильбертово пространство, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство с заданной на нем нормальной фильтрацией $\{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant 0\}$.

Рассмотрим задачу Коши (0.2) для бесконечномерного стохастического уравнения с мультипликативным возмущением в интегральной форме:

$$X_t = \xi + \int\limits_0^t \mathcal{A}(s, X_s)\,ds + \int\limits_0^t B(s, X_s)\,dW_s, \quad t \in [0,T], \tag{1.3}$$

с оператором $\mathcal{A}(t,x) = Ax + F(t,x)$, $t \in [0,T]$, $x \in H$.

Здесь $A$ — линейный оператор в пространстве $H$; $F(t,x)$ — отображение из $[0,T] \times H$ в $H$, в общем случае нелинейное, с интегралом Бохнера $\int_0^t \mathcal{A}(s,X_s)\,ds$ и интегралом Ито $\int_0^t B(s,X_s)\,dW_s$; $\{W_t,\ t \geqslant 0\}$ — $Q$-винеровский процесс относительно фильтра $\{\mathcal{F}_t,\ t \geqslant 0\}$ со значениями в пространстве $H$; $B(t,x)$ — отображение из $[0,T] \times H$ в $\mathcal{L}(H)$, в общем случае нелинейное и $\xi$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая $H$-значная случайная величина.

Определение 1. $H$-значный предсказуемый процесс $\{X_t,\, t \in [0,T]\}$ называется *сильным решением* задачи (1.3), если

(a) $X_t$ принимает значения в $D(A)$ при почти всех $t \in [0,T]$ и $\omega \in \Omega$;

(b) $\int_0^T \|\mathcal{A}(t,X_t)\|_H dt < \infty$ п.н. (при почти всех $\omega \in \Omega$);

(c) равенство (1.3) справедливо п.н.

Определение 2. $H$-значный предсказуемый процесс $\{X_t,\, t \in [0,T]\}$ называется *слабым решением* задачи (1.3), если

(a) $\int_0^T \|X_t\|_H dt < \infty$ п.н.;

(b) для любых $y \in D(A^*)$, $t \in [0,T]$

$$\langle X_t, y\rangle = \langle \xi, y\rangle + \int\limits_0^t \langle X_s, A^* y\rangle ds + \int\limits_0^t \langle F(s,X_s), y\rangle ds + \left\langle \int\limits_0^t B(s,X_s)\,dW(s), y \right\rangle \text{ п.н.} \tag{1.4}$$

Иными словами, сильным решением является предсказуемый процесс $\{X_t,\ t \in [0,T]\}$, принимающий значения в $D(A)$ при почти всех $t \in [0,T]$ и $\omega \in \Omega$, для которого траектории процесса $\{\mathcal{A}(t,X_t),\ t \in [0,T]\}$ интегрируемы при почти всех $\omega \in \Omega$ и который удовлетворяет уравнению (1.3). В отличие от сильного, слабое решение может принимать значения, не принадлежащие $D(A)$; уравнение (1.3) удовлетворяется в слабом смысле — как функционал в сопряженном пространстве, что описывается уравнением (1.4). Следует отметить, что введенное слабое решение имеет другой смысл, нежели слабое решение в конечномерных стохастических уравнениях — здесь название "слабое решение" исходит из терминологии функционального анализа; решения, называемые слабыми в конечномерном случае, в бесконечномерном называют мартингальными [5].

Наряду с сильным, слабым и мартингальным, для стохастических уравнений вводят мягкое решение — решение уравнения

$$X_t = S(t)\xi + \int\limits_0^t S(t-s)F(s,X_s)\,ds + \int\limits_0^t S(t-s)B(s,X_s)\,dW_s, \quad t \in [0,T].$$

В [4; 5] доказано, что при условии липшицевости и подлинейного роста для операторов $F(t,x)$ и $B(t,x)$ и существования полугруппы $\{S(t),\, t \geqslant 0\}$ класса $C_0$ с генератором $A$ задача (1.3) имеет единственное мягкое решение; при дополнительных условиях на оператор $B$ существует слабое решение, а еще при дополнительных условиях на $A$ — сильное. Кроме того, доказано, что эти решения обладают свойством Маркова.

Из уравнения (1.3) следует, что процесс $X_t$ имеет стохастический дифференциал

$$dX_t = \mathcal{A}(t, X_t)dt + B(t, X_t)dW_t,$$

и это означает, что процесс $X_t$ за время $\triangle t$ переходит из состояния $X_t = x$ в состояние $x + \triangle X_t$, где в некотором смысле (см. разд. 2 замечание 2)

$$\triangle X_t \sim \mathcal{A}(t, X_t)\,\triangle t + B(t, X_t)\,\triangle W_t. \tag{1.5}$$

Вероятность перехода из состояния $X_t = x$ в состояние $X_{t+\triangle t} = y$ описывается при помощи функционала $p(t+\triangle t, y|t, x)$ — плотности переходной вероятности процесса $X_t$. В бесконечномерном случае, как и в конечномерном, для плотности переходной вероятности марковского процесса имеет место уравнение Колмогорова — Чепмена:

$$p(t+\triangle t, y|s, z) = \int\limits_H p(t+\triangle t, y|t, x)p(t, x|s, z)\,dx, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t+\triangle t, \quad x, y, z \in H. \tag{1.6}$$

В настоящей работе мы показываем, что дифференциальные уравнения Колмогорова не обобщаются на бесконечномерный случай с такой же точностью, как уравнение (1.6) — они становятся интегро-дифференциальными и связывают не только плотность переходной вероятности $p(t+\triangle t, y|t, x)$, но и вспомогательный функционал $f(x)$, $x \in H$, который в конечномерном случае может играть роль основной функции, если рассматривать уравнение в обобщенном смысле.

Вывод уравнений опирается на уравнение Колмогорова — Чепмена и условия

$$\int\limits_{\|y-x\|_H > \delta} p(t+\triangle t, y|t, x)\,dy = o(\triangle t), \tag{$A$}$$

$$\int\limits_{\|y-x\|_H \leqslant \delta} f'(x)(y-x)p(t+\triangle t, y|t, x)\,dy = f'(x)\mathcal{A}(t, x)\,\triangle t + o(\triangle t), \tag{$B$}$$

$$\int\limits_{\|y-x\|_H \leqslant \delta} f''(x)[y-x]^2 p(t+\triangle t, y|t, x)\,dy = \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t, x)QB^*(t, x)]\,\triangle t + o(\triangle t), \tag{$C$}$$

где $\delta > 0$, $f \in H^*$, и все равенства понимаются в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, оснащенном нормой $\|\xi\|_2 = \sqrt{\mathbf{E}|\xi|^2}$:

$$\frac{\|o(\triangle t)\|_2}{\triangle t} = \frac{\sqrt{\mathbf{E}|o(\triangle t)|^2}}{\triangle t} \to 0.$$

Производные функционала $f \in H^*$ определяются по Фреше; при каждом $x \in H$ они являются линейными ограниченными операторами: $f'(x)\colon H \to \mathbb{R}$ и $f''(x)\colon H \to \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$. Применение этих операторов будем понимать в следующем смысле: для любых $x, y, z \in H$

$$f'(x)y := \langle y, f'(x)\rangle, \quad f''(x)[y, z] := \langle z, f''(x)y\rangle,$$

в частности,

$$f''(x)[y]^2 := \langle y, f''(x)y\rangle.$$

Равенства $(B), (C)$ в классическом анализе представляют собой локализацию первого и второго моментов приращений процесса $X_t$ и обычно рассматриваются без дополнительной функции $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. В бесконечномерном случае второй момент имеет смысл только в присутствии оператора $f''$. В связи с этим и условие $(B)$ мы формулируем с функционалом $f'$.

В разд. 2 доказано выполнение глобальных условий $(B), (C)$ для сильного решения задачи (1.3) сначала для ограниченного оператора $A$, а затем для генератора полугруппы класса $C_0$. В раз. 3 доказано, что при выполнении условий $(A)$–$(C)$ имеют место аналоги прямого и обратного уравнений Колмогорова для плотности переходных вероятностей.

## 2. Доказательство выполнения глобальных условий $(B)$, $(C)$

**Предложение 1.** *Пусть $H$-значная функция $F(t,x)$ и $\mathcal{L}(H)$-значная функция $B(t,x)$ непрерывны по $t$ на $[0,T]$ и обладают свойством Липшица по $x$ :*

$$\|F(t,x)-F(t,y)\|_H \leqslant C_1\|x-y\|_H, \quad \|B(t,x)-B(t,y)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant C_2\|x-y\|_H, \quad x,y\in H, \quad t\in[0,T],$$

*где $C_1, C_2$ — некоторые константы. Пусть непрерывный в среднеквадратичном марковский процесс $X_t$, $t\in[0,T]$, — сильное решение задачи* (1.3) *с ограниченным оператором $A$. Пусть $f$ — дважды дифференцируемый по Фреше функционал на $H$, равный нулю вне некоторого ограниченного подмножества из $H$. Тогда для любого $x\in H$ имеют место следующие равенства для условного математического ожидания*:

$$\mathbf{E}[f'(X_t)\,\triangle X_t|\,X_t=x] \;=\; f'(x)\mathcal{A}(t,x)\,\triangle t+o(\triangle t), \tag{2.1}$$

$$\mathbf{E}[f''(X_t)\,[\triangle X_t]^2\,|\,X_t=x] \;=\; \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t+o(\triangle t), \tag{2.2}$$

*где* Tr *— след соответствующего оператора.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала (2.1). Рассмотрим

$$\mathbf{E}[f'(X_t)\,\triangle X_t|\,X_t=x]=\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathcal{A}(s,X_s)\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]$$
$$+\,\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}B(s,X_s)\,dW_s,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big] \tag{2.3}$$

и покажем, что в пространстве $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$

$$\Delta_1:=\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathcal{A}(s,X_s)\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]-f'(x)\mathcal{A}(t,x)\,\triangle t=o(\triangle t), \tag{2.4}$$

$$\Delta_2:=\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}B(s,X_s)\,dW_s,f'(X_t)\Big|\,X_t=x\Big]=0. \tag{2.5}$$

Действительно, принимая во внимание определение нормы в пространстве $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$, имеем

$$\|\Delta_1\|_2^2=\bigg\|\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathcal{A}(s,X_s)\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]-f'(x)\mathcal{A}(t,x)\,\triangle t\bigg\|_2^2$$
$$=\mathbf{E}\bigg[\bigg|\mathbf{E}\Big[\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}\mathcal{A}(s,X_s)\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,X_t=x\Big]-f'(x)\mathcal{A}(t,x)\,\triangle t\bigg|^2\bigg]$$
$$\leqslant\mathbf{E}\bigg[\mathbf{E}\Big[\Big|\Big\langle\int\limits_t^{t+\triangle t}(\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t))\,ds,f'(X_t)\Big\rangle\Big|\,\Big|\,X_t=x\Big]\bigg]^2$$
$$\leqslant\mathbf{E}\bigg[\mathbf{E}\Big[\int\limits_t^{t+\triangle t}\|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H\,ds\cdot\|f'(X_t)\|_H\Big|\,X_t=x\Big]\bigg]^2.$$

Из свойства условного математического ожидания для случайных величин $\xi,\eta,\zeta$

$$\mathbf{E}^2[\xi\eta\,|\,\zeta]\leqslant\mathbf{E}[\xi^2\,|\,\zeta]\;\mathbf{E}[\eta^2\,|\,\zeta] \tag{2.6}$$

получаем

$$\|\Delta_1\|_2^2 \leqslant \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\Big[\Big(\int\limits_t^{t+\triangle t} \|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H\,ds\Big)^2 \Big|\, X_t=x\Big]\,\mathbf{E}\big[\|f'(X_t)\|_H^2 \,|\, X_t=x\big]\Big].$$

Применим неравенство Гёльдера и стохастическую теорему Фубини:

$$\|\Delta_1\|_2^2 \leqslant \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\Big[\triangle t \int\limits_t^{t+\triangle t} \|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H^2\,ds \big|\, X_t=x\Big]\Big]\cdot\|f'(x)\|_H^2$$

$$= \mathbf{E}\Big[\int\limits_t^{t+\triangle t} \mathbf{E}\big[\|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H^2 \big|\, X_t=x\big]\,ds\Big]\cdot\|f'(x)\|_H^2\,\triangle t. \tag{2.7}$$

Пользуясь свойствами ограниченности оператора $A$, липшицевости функции $F$ по переменной $x$ и непрерывности $F$ по $t$, для произвольного $\varepsilon>0$ при малых $\triangle t$ имеем

$$\|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H \leqslant \|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(s,X_t)\|_H + \|\mathcal{A}(s,X_t)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H$$

$$\leqslant C\max\{\|X_s-X_t\|_H,\varepsilon\}.$$

Отсюда и из непрерывности (в среднеквадратичном) процесса $X_t$ следует

$$\mathbf{E}[\|\mathcal{A}(s,X_s)-\mathcal{A}(t,X_t)\|_H^2 \,|\, X_t=x] \leqslant C^2\mathbf{E}\big[\max\{\|X_s-X_t\|_H^2,(\triangle t)^2\}\,|\, X_t=x\big] < \varepsilon^2.$$

Подставляя полученную оценку в (2.7), получаем

$$\|\Delta_1\|_2^2 < \varepsilon\|f'(x)\|_H^2\cdot(\triangle t)^2 \quad \text{и} \quad \frac{\|\Delta_1\|_2}{\Delta t} < C\varepsilon,$$

что доказывает (2.4).

Докажем (2.5). По определению стохастического интеграла

$$I = \int\limits_t^{t+\triangle t} B(s,X_s)\,dW_s = \text{l.i.m}_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} B(s_k,X_{s_k})\,\triangle W_{s_k} = \text{l.i.m}_{n\to\infty} I_n, \tag{2.8}$$

где l.i.m означает предельный переход в $L_2(\Omega,\mathcal{F},P;H)$, т. е. $\|I-I_n\|_{2,H}^2 = \mathbf{E}\|I-I_n\|_H^2 \to 0$. Представим $\Delta_2$ в виде

$$\Delta_2 = \mathbf{E}[\langle I, f'(X_t)\rangle \,|\, X_t=x] = \mathbf{E}[\langle I-I_n, f'(X_t)\rangle \,|\, X_t=x] + \mathbf{E}[\langle I_n, f'(X_t)\rangle \,|\, X_t=x].$$

Второе слагаемое здесь равно нулю:

$$\mathbf{E}[\langle I_n, f'(X_t)\rangle \,|\, X_t=x] = \mathbf{E}\Big[\Big\langle \sum_{k=0}^{n-1} B(s_k,X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}, f'(X_t)\Big\rangle\Big|\, X_t=x\Big]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\,\big[\big\langle\, \triangle W_{s_k}, B^*(s_k,X_{s_k})f'(X_t)\big\rangle\big|\, X_t=x\big]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\big[\big\langle\sqrt{\lambda_i}\beta_i(\triangle s_k)e_i, B^*(s_k,X_{s_k})f'(X_t)\big\rangle\big|\, X_t=x\big], \tag{2.9}$$

где $B^*$ — эрмитово-сопряженный к оператору $B$ и по определению $Q$-винеровского процесса

$$\triangle W_s = \sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\beta_i(\triangle s)e_i, \tag{2.10}$$

$\beta_i$ — система независимых броуновских движений, $\lambda_i$ и $e_i$ — собственные значения и собственные векторы оператора $Q$, являющегося оператором следа

$$\mathrm{Tr}\,[Q] = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Qe_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty.$$

В силу независимости значений процесса $X_t$ от приращений броуновских движений и равенства нулю средних значений последних получаем

$$\mathbf{E}[\langle I_n, f'(X_t)\rangle |\, X_t = x] = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} \cdot \mathbf{E}\beta_i(\triangle s_k) \cdot \mathbf{E}[\langle e_i, B^*(s_k, X_{s_k}) f'(X_t)\rangle |\, X_t = x] = 0.$$

Тогда

$$\|\Delta_2\|_2^2 = \mathbf{E}\big[\, \big|\mathbf{E}[\langle I - I_n, f'(X_t)\rangle |\, X_t = x]\big|^2\big] \leqslant \mathbf{E}[\, \mathbf{E}^2[\, \|I - I_n\|_H \cdot \|f'(X_t)\|_H |\, X_t = x]\,].$$

Из свойства (2.6) и свойства $\mathbf{E}[\mathbf{E}[\xi|\,\eta]] = \mathbf{E}[\xi]$ для произвольного $\varepsilon > 0$ за счет выбора $n$ имеем

$$\|\Delta_2\|_2^2 \leqslant \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[\, \|I - I_n\|_H^2 |\, X_t = x] \cdot \mathbf{E}[\, \|f'(X_t)\|_H^2 |\, X_t = x]\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}[\|I - I_n\|_H^2 |\, X_t = x]\right] \cdot \|f'(x)\|_H^2 = \mathbf{E}[\, \|I - I_n\|_H^2] \cdot \|f'(x)\|_H^2 < \varepsilon,$$

следовательно, $\Delta_2 = 0$ в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Соединяя вместе (2.3)–(2.5), получаем утверждение (2.1).

Переходим к доказательству равенства (2.2):

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[f''(X_t)\,[\Delta X_t]^2\,|X_t = x\big] &= \mathbf{E}\left[\langle \triangle X_t, f''(X_t)\,\triangle X_t\rangle |\, X_t = x\right] \\
&= \mathbf{E}\Bigg[\Bigg\langle \int_t^{t+\triangle t} \mathcal{A}(s, X_s)\, ds, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} \mathcal{A}(s, X_s)\, ds \Bigg\rangle \Bigg|\, X_t = x\Bigg] \\
&+ \mathbf{E}\Bigg[\Bigg\langle \int_t^{t+\triangle t} \mathcal{A}(s, X_s)\, ds, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\, dW_s \Bigg\rangle \Bigg|\, X_t = x\Bigg] \\
&+ \mathbf{E}\Bigg[\Bigg\langle \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\, dW_s, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} \mathcal{A}(s, X_s)\, ds \Bigg\rangle \Bigg|\, X_t = x\Bigg] \\
&+ \mathbf{E}\Bigg[\Bigg\langle \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\, dW_s, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\, dW_s \Bigg\rangle \Bigg|\, X_t = x\Bigg].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Как и при доказательстве соотношений (2.4) и (2.5), несложно получить, что все слагаемые в правой части (2.11), кроме последнего, имеют порядок малости относительно $\triangle t$ выше первого. Вычисление среднего значения в последнем слагаемом также подобно (2.5) и опирается на определение стохастического интеграла и представление $Q$-винеровского процесса в виде ряда (2.10), но, в отличие от (2.5), присутствие здесь второго интеграла приводит к появлению ковариационного оператора $Q$-винеровского процесса и дает ненулевое математическое ожидание.

Докажем, что в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Bigg[\Bigg\langle \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\, dW_s, f''(X_t) \int_t^{t+\triangle t} B(s, X_s)\, dW_s \Bigg\rangle \Bigg|\, X_t = x\Bigg] \\
= \mathrm{Tr}\,[f''(x) B(t, x) Q B^*(t, x)]\,\triangle t + o(\triangle t).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Для этого составим разность указанных в (2.12) математического ожидания и следа и с учетом определения стохастического интеграла (2.8) представим ее в виде

$$\mathbf{E}\left[\langle I, f''(X_t)I\rangle \,\middle|\, X_t = x\right] - \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t$$

$$= \mathbf{E}\left[\langle I - I_n, f''(X_t)I\rangle \,\middle|\, X_t = x\right] + \mathbf{E}\left[\langle I_n, f''(X_t)(I - I_n)\rangle \,\middle|\, X_t = x\right]$$

$$+ \mathbf{E}\,[\langle I_n, f''(X_t)I_n\rangle \mid X_t = x] - \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t =: \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5. \qquad (2.13)$$

Для $\Delta_3$, подобно рассуждениям, проведенным выше для $\Delta_2$, имеем

$$\|\Delta_3\|_2^2 = \mathbf{E}\big[\,\big|\mathbf{E}[\langle I - I_n, f''(X_t)I\rangle|\, X_t = x]\big|^2\big]$$
$$\leqslant \mathbf{E}\big[\mathbf{E}[\,\|I - I_n\|_H^2|\, X_t = x] \cdot \mathbf{E}[\,\|f''(X_t)I\|_H^2|\, X_t = x]\big].$$

Сходимость $\|I - I_n\|_{2,H}^2 = \mathbf{E}\|I - I_n\|_H^2 \to 0$ имеет место вне зависимости от положения $x$ процесса $X_t$ в момент времени $t$, поэтому за счет выбора $n$

$$\|\Delta_3\|_2^2 < \mathbf{E}\left[\varepsilon \cdot \mathbf{E}[\,\|f''(X_t)I\|_H^2 \mid X_t = x]\right] = C\varepsilon, \qquad (2.14)$$

следовательно, $\Delta_3 = 0$ в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Аналогично

$$\|\Delta_4\|_2^2 = \mathbf{E}\big[\,\big|\mathbf{E}[\langle I_n, f''(X_t)(I - I_n)\rangle|\, X_t = x]\big|^2\big]$$

$$\leqslant \mathbf{E}\Big[\mathbf{E}\big[\,\|f''(X_t)\|_{\mathcal{L}(H)}^2\|I_n\|_H^2|\, X_t = x\big] \cdot \mathbf{E}[\,\|I - I_n\|_H^2|\, X_t = x]\Big] < C'\varepsilon, \qquad (2.15)$$

и $\Delta_4 = 0$. Наконец, рассмотрим $\Delta_5$:

$$\Delta_5 := \mathbf{E}[\langle I_n, f''(X_t)I_n\rangle|\, X_t = x] - \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t.$$

Сначала заметим, что $\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t = \mathbf{E}[f''(X_t)\,(B(t,X_t)\,\triangle W_t)^2 \mid X_t = x]$. Действительно,

$$\mathbf{E}\big[f''(X_t)\,[B(t,X_t)\,\triangle W_t]^2 \mid X_t = x\big] = \mathbf{E}\big[\langle B(t,X_t)\,\triangle W_t, f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_t\rangle|\, X_t = x\big]$$
$$= \mathbf{E}\Big[\Big\langle \sum_{i=1}^{\infty}\langle B(t,X_t)\,\triangle W_t, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{\infty}\langle f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_t, e_j\rangle e_j\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\big[\langle B(t,X_t)\,\triangle W_t, e_i\rangle \cdot \langle f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_t, e_i\rangle|\, X_t = x\big]$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\big[\langle\triangle W_t, B^*(t,X_t)e_i\rangle \cdot \langle\triangle W_t, (f''(X_t)B(t,X_t))^*e_i\rangle|\, X_t = x\big].$$

По определению ковариационного оператора $Q$-винеровского процесса

$$\mathbf{E}[\langle\triangle W_t, a\rangle\langle\triangle W_t, b\rangle] = \langle\triangle t Q a, b\rangle.$$

Отсюда и из того, что $\mathbf{E}[f''(X_t)B(t,X_t)|\, X_t = x] = f''(x)B(t,x)$ и $\mathbf{E}[B(t,X_t)|\, X_t = x] = B(t,x)$, получаем

$$\mathbf{E}\big[f''(X_t)\,(B(t,X_t)\,\triangle W_t)^2 \mid X_t = x\big] = \sum_{i=1}^{\infty}\langle\triangle t Q B^*(t,x)e_i, (f''(x)B(t,x))^*e_i\rangle$$

$$= \triangle t\sum_{i=1}^{\infty}\langle f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)e_i, e_i\rangle = \mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t.$$

Вернемся к оценке $\Delta_5$:

$$\|\Delta_5\|_2^2 = \|\mathbf{E}[\langle I_n, f''(X_t)I_n\rangle |\, X_t = x] - \operatorname{Tr}[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t\|_2^2$$

$$= \mathbf{E}\Big[\Big|\mathbf{E}\Big[\Big\langle \sum_{k=0}^{n-1} B(s_k, X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}, f''(X_t)\sum_{k=0}^{n-1} B(s_k, X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]$$

$$- \mathbf{E}\left[\langle B(t,X_t)\,\triangle W_t, f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_t\rangle |\, X_t = x\right]\Big|^2\Big]$$

[представим второе слагаемое в виде суммы по соответствующим $\triangle s_k$]

$$= \mathbf{E}\Big[\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left[\langle B(s_k, X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}, f''(X_t)B(s_k,X_{s_k})\,\triangle W_{s_k}\rangle |\, X_t = x\right]$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\left[\langle B(t,X_t)\,\triangle W_{s_k}, f''(X_t)B(t,X_t)\,\triangle W_{s_k}\rangle |\, X_t = x\right]\Big|^2\Big]$$

[разложим $Q$-винеровский процесс по базису $\{e_i\}$ в виде суммы броуновских движений]

$$= \mathbf{E}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\Big[\Big\langle B(s_k, X_{s_k})\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\beta_i(\triangle s_k)e_i, f''(X_t)B(s_k,X_{s_k})\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}\beta_j(\triangle s_k)e_j\Big\rangle$$

$$- \Big\langle B(t,X_t)\sum_{i=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\beta_i(\triangle s_k)e_i, f''(X_t)B(t,X_t)\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}\beta_j(\triangle s_k)e_j\Big\rangle\Big|\, X_t = x\Big]\Big|^2$$

$$= \mathbf{E}\Big[\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{E}\Big[\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\beta_i^2(\triangle s_k)\Big(\big\langle B(s_k,X_{s_k})e_i, f''(X_t)B(s_k,X_{s_k})e_i\big\rangle$$

$$- \big\langle B(t,X_t)e_i, f''(X_t)B(t,X_t)e_i\big\rangle\Big)\Big|\, X_t = x\Big]\Big|^2\Big]$$

$$= \mathbf{E}\Big[\Big|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}\Big[\lambda_i\beta_i^2(\triangle s_k)\Big(\big\langle (B(s_k,X_{s_k}) - B(t,X_t))e_i, f''(X_t)B(s_k,X_{s_k})e_i\big\rangle$$

$$+ \big\langle B(t,X_t)e_i, f''(X_t)(B(s_k,X_{s_k}) - B(t,X_t))e_i\big\rangle\Big)\Big|\, X_t = x\Big]\Big|^2\Big].$$

Используя независимость случайных величин $\beta_i^2(\triangle s_k)$ от $f''(X_t)B(s_k,X_{s_k})$, непрерывность и липшицевость операторной функции $B(t,x)$ и непрерывность процесса $X_t$, имеем

$$\mathbf{E}\Big[\Big|\big\langle (B(s_k,X_{s_k}) - B(t,X_t))e_i, f''(X_t)B(s_k,X_{s_k})e_i\big\rangle\Big|\,\Big|\, X_t = x\Big] \leqslant \varepsilon C,$$

$$\mathbf{E}\Big[\Big|\big\langle B(t,X_t)e_i, f''(X_t)(B(s_k,X_{s_k}) - B(t,X_t))e_i\big\rangle\Big|\,\Big|\, X_t = x\Big] \leqslant \varepsilon C.$$

Окончательно

$$\|\Delta_5\|_2^2 \leqslant \mathbf{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbf{E}[\lambda_i\beta_i^2(\triangle s_k)]2\varepsilon MC\Big]^2 = C'\varepsilon^2\mathbf{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\langle\triangle s_k Q e_i, e_i\rangle\Big]^2$$

$$= C'\varepsilon^2\mathbf{E}\Big[\sum_{k=0}^{n-1}\triangle s_k \operatorname{Tr} Q\Big]^2 = C''\varepsilon^2(\triangle t)^2$$

и $\Delta_5 = o(\triangle t)$. Вместе с оценками (2.14), (2.15) и соотношением (2.13) это доказывает равенство (2.12), а вместе с ним и (2.2). □

Распространим полученные характеристики решения (2.1) и (2.2) на случай, когда оператор задачи $A$ является неограниченным, но порождает полугруппу класса $C_0$.

О п р е д е л е н и е 4. Семейство линейных ограниченных операторов $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$, действующих в банаховом пространстве $H$ и удовлетворяющих условиям

(U1) $S(t+h) = S(t)S(h), \quad t,h \geqslant 0,$
(U2) $S(0) = I,$
(U3) операторная функция $S(\cdot)$ сильно непрерывна по $t$ при $t \geqslant 0$,
называется *полугруппой класса* $C_0$.

Оператор, определяемый равенством

$$Af := \lim_{h\to 0} h^{-1}(S(h)-I)f,$$

с областью определения $D(A) = \bigl\{f \in H\colon \lim_{h\to 0} h^{-1}(S(h)-I)f \ \text{ существует}\bigr\}$, называется *генератором семейства* $\{S(t),\ t \geqslant 0\}$.

Замечание 1. Генератор полугруппы класса $C_0$ является замкнутым, но в общем случае неограниченным оператором. Он имеет резольвенту $R(\lambda)$ в некоторой правой полуплоскости комплексной плоскости. На своей области определения он может быть поточечно приближен последовательностью ограниченных операторов $A_n = \lambda_n AR(\lambda_n)$, называемых *аппроксимациями Иосиды* [11]:

$$A_n x = \lambda_n AR(\lambda_n)x \to Ax \quad \text{где} \;\; \lambda_n \in \mathbb{R},\ \lambda_n \to \infty \text{ при } n\to\infty, \quad x \in D(A).$$

**Предложение 2.** *Пусть в условиях предложения* 1 *оператор* $A$ *является генератором полугруппы операторов класса* $C_0$. *Тогда для сильного решения уравнения* (1.3) *при* $x \in D(A)$ *справедливы равенства* (2.1) *и* (2.2).

Доказательство. Пусть ограниченные операторы $A_n$ — аппроксимации Иосиды оператора $A$ (см. замечание 1). Тогда решения $X_{n,t}$ соответствующих стохастических задач (1.3) равномерно по $t \in [0,T]$ сходятся в пространстве $L_2(\Omega,\mathcal{F},P;H)$ к процессу $X_t$ — решению (1.3) с оператором $A$ [4]:

$$\sup_{t\in[0,T]} \|X_{n,t} - X_t\|_{2,H} \to 0, \quad n\to\infty. \tag{2.16}$$

Для $X_{n,t}$ согласно предложению 1 имеем

$$\mathbf{E}[f'(X_{n,t})\,\triangle X_{n,t}|\, X_{n,t}=x] = f'(x)(A_n x + F(t,x))\,\triangle t + o(\triangle t),$$

$$\mathbf{E}[f''(X_{n,t})\,[\triangle X_{n,t}]^2\,|\, X_{n,t}=x] = \operatorname{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\,\triangle t + o(\triangle t).$$

Покажем, что в $L_2(\Omega,\mathcal{F},P)$ при $n\to\infty$

$$\mathbf{E}[f'(X_{n,t})\,\triangle X_{n,t}|\, X_{n,t}=x] \to \mathbf{E}[f'(X_t)\,\triangle X_t|\, X_t=x], \tag{2.17}$$

$$\mathbf{E}[f''(X_{n,t})\,[\triangle X_{n,t}]^2\,|\, X_{n,t}=x] \to \mathbf{E}[f''(X_t)\,[\triangle X_t]^2\,|\, X_t=x]. \tag{2.18}$$

Для доказательства (2.17), пользуясь непрерывностью $X_t$, непрерывностью и равномерной ограниченностью $f'(x)$ и сходимостью (2.16), оценим

$$\begin{gathered}
\mathbf{E}\Bigl[\,\bigl|\mathbf{E}[f'(X_{n,t})\,\triangle X_{n,t}|\, X_{n,t}=x] - \mathbf{E}[f'(X_t)\,\triangle X_t|\, X_t=x]\bigr|^2\Bigr] \\
= \mathbf{E}\Bigl[\,\bigl|\mathbf{E}[f'(X_{n,t})\,\triangle X_{n,t} - f'(X_t)\,\triangle X_t|\, X_t=x]\bigr|^2\Bigr] \\
\leqslant 2\mathbf{E}\Bigl[\mathbf{E}^2[\,\|f'(X_{n,t})\|_H \cdot \|\,\triangle X_{n,t} - \triangle X_t\|_H|\, X_t=x] + \mathbf{E}^2[\,\|f'(X_{n,t}) - f'(X_t)\|_H \cdot \|\,\triangle X_t\|_H|\, X_t=x]\Bigr] \\
\leqslant 2\mathbf{E}\Bigl[\mathbf{E}[\,\|f'(X_{n,t})\|_H^2|\, X_t=x]\cdot \mathbf{E}[\,\|\,\triangle X_{n,t} - \triangle X_t\|_H^2|\, X_t=x] \\
+ \mathbf{E}[\,\|f'(X_{n,t}) - f'(X_t)\|_H^2|\, X_t=x]\cdot \mathbf{E}[\,\|\,\triangle X_t\|_H^2|\, X_t=x]\Bigr] \leqslant \varepsilon.
\end{gathered}$$

Соотношение (2.18) доказывается аналогично. □

Итак, мы доказали равенства (2.1) и (2.2) для решения задачи Коши (1.3) с генератором полугруппы класса $C_0$. В конечномерном случае отсюда в силу свойств броуновских движений следуют локальные условия $(B)$, $(C)$ и условие непрерывности $(A)$. В следующем разделе мы будем предполагать выполненными условия $(A)$–$(C)$ в бесконечномерном случае.

З а м е ч а н и е 2. Легко заметить, что из равенств (2.1) и (2.2) следует, что в пространстве $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$\mathbf{E}[f'(X_t)[\triangle X_t - \mathcal{A}(t, X_t)\,\triangle t - B(t, X_t)\,\triangle W_t] \,|\, X_t = x] = o(\triangle t),$$
$$\mathbf{E}[f''(X_t)\,[\triangle X_t - \mathcal{A}(t, X_t)\,\triangle t - B(t, X_t)\,\triangle W_t]^2 \,|\, X_t = x] = o(\triangle t).$$

Эти соотношения расшифровывают смысл, в котором мы понимаем равенство (1.5).

## 3. Основной результат

**Теорема 1.** *Пусть непрерывный марковский процесс $X_t$, $t \in [0, T]$, — сильное решение задачи* (1.3) *и для него выполнены условия $(A)$–$(C)$. Пусть $p(t, x|s, z)$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $z, x \in H$, — плотность переходной вероятности процесса $X_t$. Пусть $f(x)$, $x \in H$, — произвольный дважды дифференцируемый по Фреше функционал, равный нулю вне некоторого ограниченного подмножества из $H$. Тогда имеет место уравнение*

$$\int\limits_H f(x) \frac{\partial p(t, x|s, z)}{\partial t}\, dx = \int\limits_H \Big(f'(x)\mathcal{A}(t, x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t, x)QB^*(t, x)]\Big) p(t, x|s, z)\, dx. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функционал

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_H f(x)p(t, x|s, z)\, dx = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \Big( \int\limits_H f(x)p(t{+}\,\triangle t, x|s, z)\, dx - \int\limits_H f(x)p(t, x|s, z)\, dx \Big).$$

Поскольку значение интеграла $\int_H f(x)p(t{+}\,\triangle t, x|s, z)\, dx$ не зависит от переменной интегрирования, переобозначим ее (заменим на $y$). Далее в силу уравнения Колмогорова — Чепмена (1.6) получим

$$\int\limits_H f(y)p(t{+}\,\triangle t, y|s, z)\, dy = \int\limits_H f(y)\, dy \int\limits_H p(t, x|s, z)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\, dx$$
$$= \int\limits_H p(t, x|s, z)\, dx \int\limits_H f(y)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\, dy.$$

Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_H f(x)p(t, x|s, z)\, dx = \int\limits_H p(t, x|s, z) \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \bigg( \int\limits_H f(y)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\, dy - f(x) \bigg) dx. \tag{3.2}$$

Найдем предел, стоящий под знаком интеграла. Для этого разобьем интеграл на две части: $\|y - x\|_H \leqslant \delta$ и $\|y - x\|_H > \delta$, и в первой из них представим функционал $f$ по формуле Тейлора:

$$\int\limits_H f(y)p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\, dy - f(x) = \int\limits_H (f(y) - f(x))p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\, dy$$
$$= \int\limits_{\|y-x\|_H \leqslant \delta} \Big(f'(x)(y - x) + \frac{1}{2} f''(x)[y - x]^2 + O(\|y - x\|_H^2)\Big) p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\, dy$$
$$+ \int\limits_{\|y-x\|_H > \delta} (f(y) - f(x))p(t{+}\,\triangle t, y|t, x)\, dy. \tag{3.3}$$

Из условий $(B)$ и $(C)$ следует, что

$$\int\limits_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}\Big(f'(x)(y-x)+\frac{1}{2}f''(x)[y-x]^2\Big)p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy$$
$$=f'(x)\mathcal{A}(t,x)\vartriangle t+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\vartriangle t+o(\vartriangle t). \tag{3.4}$$

Далее, $O(\|y-x\|_H^2)=R(y,x)f''(x)[y-x]^2$, поэтому

$$\Bigg|\int\limits_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}O(\|y-x\|_H^2)p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy\Bigg|$$
$$\leqslant \max_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}\|R(y,x)\|\int\limits_{\|y-x\|_H\leqslant\delta}f''(x)[y-x]^2p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy$$
$$=C_\delta\,\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\vartriangle t+o(\vartriangle t), \tag{3.5}$$

где $C_\delta\to0$ при $\delta\to0$. И, наконец, из условия $(A)$ и ограниченности функционала $f$ (он непрерывен и имеет ограниченный носитель) получаем

$$\Bigg|\int\limits_{\|y-x\|_H>\delta}(f(y)-f(x))p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy\Bigg|\leqslant\int\limits_{\|y-x\|_H>\delta}|f(y)-f(x)|p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy$$
$$\leqslant C\int\limits_{\|y-x\|_H>\delta}p(t+\vartriangle t,y|t,x)\,dy=CP[\|\vartriangle X_t\|_H>\delta|\,X_t=x]=o(\vartriangle t). \tag{3.6}$$

Соберем вместе равенства (3.2)–(3.6):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_H f(x)p(t,x|s,z)\,dx$$
$$=\int\limits_H\Bigg(f'(x)\mathcal{A}(t,x)+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]+C_\delta\,\mathrm{Tr}\,[f''(x)B(t,x)QB^*(t,x)]\Bigg)p(t,x|s,z)\,dx.$$

В силу произвольности $\delta$ имеем (3.1). □

Полученное уравнение (3.1) является бесконечномерным аналогом прямого уравнения Колмогорова[2].

**Теорема 2.** *Пусть непрерывный марковский процесс* $X_t$, $t\in[0,T]$, *— сильное решение задачи* (1.3), *и для него выполнены условия (A)–(C). Пусть* $p(t,x|s,z)$, $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, $z,x\in H$, *— плотность переходной вероятности процесса* $X_t$ *и существуют производные по Фреше* $\dfrac{\partial p(t,y|s,x)}{\partial s}$, $\dfrac{\partial p(t,y|s,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 p(t,y|s,x)}{\partial x^2}$. *Пусть* $f\in H^*$ *— функционал, равный нулю вне некоторого ограниченного подмножества из* $H$ *и*

$$g(s,x):=\int\limits_H f(y)p(t,y|s,x)\,dy.$$

[2]Это уравнение известно также как уравнение Фоккера — Планка, поскольку оно встречалось в работах М. К. Планка, А. Д. Фоккера и других физиков до того, как было математически обосновано А. Н. Колмогоровым.

*Тогда имеет место уравнение*

$$-\int\limits_H f(y)\frac{\partial p(t,y|s,x)}{\partial s}\,dy = \int\limits_H f(y)\frac{\partial p(t,y|s,x)}{\partial x}\mathcal{A}(s,x)\,dy$$
$$+\frac{1}{2}\,Tr\Big[\int\limits_H f(y)\frac{\partial^2 p(t,y|s,x)}{\partial x^2}\,dyB(s,x)QB^*(s,x)\Big]. \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исходя из уравнения Колмогорова — Чепмена

$$g(s,x) = \int\limits_H f(y)\,dy\int\limits_H p(s+\triangle s,z|s,x)p(t,y|s+\triangle s,z)\,dz$$
$$= \int\limits_H p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz\int\limits_H f(y)p(t,y|s+\triangle s,z)\,dy = \int\limits_H g(s+\triangle s,z)p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz.$$

Рассмотрим приращение

$$g(s,x) - g(s+\triangle s,x) = \int\limits_H g(s+\triangle s,z)p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz - g(s+\triangle s,x)$$
$$= \int\limits_H (g(s+\triangle s,z) - g(s+\triangle s,x))p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz.$$

В силу условий на плотность переходной вероятности функционал $g(s,x)$ является дифференцируемым по $s$ и дважды дифференцируемым по $x$ в смысле Фреше. По формуле Тейлора получим

$$g(s,x) - g(s+\triangle s,x)$$
$$= \int\limits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta}\Big(g'_x(s+\triangle s,x)(z-x) + \frac{1}{2}g''_{xx}(s+\triangle s,x)[z-x]^2 + O(\|z-x\|_H^2)\Big)p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz$$
$$+\int\limits_{\|z-x\|_H>\delta}(g(s+\triangle s,z) - g(s+\triangle s,x))p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz. \tag{3.8}$$

Применим условия $(B)$ и $(C)$, подставляя в них вместо $f(x)$ функцию $g(s,x)$:

$$\int\limits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta}\Big(g'_x(s+\triangle s,x)(z-x) + \frac{1}{2}g''_{xx}(s+\triangle s,x)[z-x]^2\Big)p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz$$
$$= g'_x(s+\triangle s,x)\mathcal{A}(s,x)\,\triangle s + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[g''_{xx}(s+\triangle s,x)B(s,x)QB^*(s,x)]\,\triangle s + o(\triangle s). \tag{3.9}$$

Как и в доказательстве теоремы 1, представим остаточный член формулы Тейлора в виде

$$O(\|z-x\|_H^2) = R(z,x)g''_{xx}(s+\triangle s,x)[z-x]^2,$$

и оценим интеграл

$$\Big|\int\limits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta} O(\|z-x\|_H^2)p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz\Big|$$
$$\leqslant \max\nolimits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta}\{\|R(z,x)\|\}\int\limits_{\|z-x\|_H\leqslant\delta} g''_{xx}(s+\triangle s,x)[z-x]^2p(s+\triangle s,z|s,x)\,dz$$
$$= C_\delta\,\mathrm{Tr}\,[g''_{xx}(s+\triangle s,x)B(s,x)QB^*(s,x)]\,\triangle s + o(\triangle s), \tag{3.10}$$

где $C_\delta \to 0$ при $\delta \to 0$. Для последнего интеграла в (3.8) согласно условию $(A)$ непрерывности процесса $X_t$ и ограниченности функционала $g$ получаем

$$\begin{aligned} &\left| \int\limits_{\|z-x\|_H>\delta} (g(s+\triangle s, z) - g(s+\triangle s, x))p(s+\triangle s, z|s,x)\,dz \right| \\ &\leqslant \int\limits_{\|z-x\|_H>\delta} |g(s+\triangle s, z) - g(s+\triangle s, x)| \cdot p(s+\triangle s, z|s,x)\,dz \\ &\qquad \leqslant C \int\limits_{\|z-x\|_H>\delta} p(s+\triangle s, z|s,x)\,dz = o(\triangle s). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Соединим вместе равенства (3.8)–(3.11) и примем во внимание произвольность $\delta$:

$$g(s,x) - g(s+\triangle s, x) = g'_x(s+\triangle s, x)\mathcal{A}(s,x)\,\triangle s + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[g''_{xx}(s+\triangle s, x)B(s,x)QB^*(s,x)]\,\triangle s + o(\triangle s).$$

Поделив это равенство на $\triangle s$ и устремив $\triangle s$ к нулю, получим

$$-\frac{\partial g(s,x)}{\partial s} = g'_x(s,x)\mathcal{A}(s,x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,[g''_{xx}(s,x)B(s,x)QB^*(s,x)],$$

откуда следует уравнение (3.7). □

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Allen E.J.** Modeling with Ito stochastic differential equations. Berlin: Springer, 2007. 228 p. ISBN: 978-1-4020-5953-7 .

2. **Gardiner C.W.** Handbook of stochastic methods. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2004. 440 p. ISBN: 3-540-20882-8 .

3. **Shreve S.E.** Stochastic calculus for Finance II. Berlin; Heidelberg; London: Springer Finance, 2004. 550 p. ISBN: 978-0-387-40101-0 .

4. **Da Prato G., Zabczyk J.** Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridg: Cambridge Univ. Press, 2014. 380 p. ISBN: 9781107295513 .

5. **Gawarecki L., Mandrekar V.** Stochastic differential equations in infinite dimensions. Berlin: Springer, 2011. 292 p. ISBN: 978-3-642-16194-0 .

6. **Melnikova I.V.** Stochastic cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions. Boca Raton; London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016. 300 p. ISBN: 1482210509 .

7. **Carmona R., Tehranchi M.** Interest rate models: an infinite dimensional stochastic analysis perspective. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2006. 235 p. ISBN: 3540270655 .

8. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 400 с. ISBN: 5-9221-0335-0 .

9. **Melnikova I.V., Parfenenkova V.S.** Relations between stochastic and partial differential equations in Hilbert spaces // Int. J. Stoch. Anal. 2012. Article ID 858736. doi: 10.1155/2012/858736.

10. **Розанов Ю.А.** Случайные процессы (краткий курс). М.: Наука. Главная редакция физ-мат. литры, 1971. 228 с.
11. **Hille E., Phillips R.S.** Functional analysis and semi-groups. Rev. ed. Providence: American Mathematical Society, 1957. 810 pp. (Ser. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., *31*.)

Мельникова Ирина Валерьяновна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: Irina.Melnikova@urfu.ru

Поступила 15.05.2017

Алексеева Ульяна Алексеевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: Uliana.Alekseeva@urfu.ru

Бовкун Вадим Андреевич
аспирант
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: 123456m@inbox.ru

## REFERENCES

1. Allen E.J. *Modeling with Ito stochastic differential equations.* Berlin: Springer, 2007, 228 p. ISBN: 978-1-4020-5953-7 .
2. Gardiner C.W. *Handbook of stochastic methods.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 2004, 440 p. ISBN: 3-540-20882-8 .
3. Shreve S.E. *Stochastic calculus for Finance II.* Berlin; Heidelberg; London: Springer Finance, 2004, 550 p. ISBN: 978-0-387-40101-0 .
4. Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2014, 380 p. ISBN: 9781107295513 .
5. Gawarecki L., Mandrekar V. *Stochastic differential equations in infinite dimensions.* Berlin: Springer, 2011, 292 p. ISBN: 978-3-642-16194-0 .
6. Melnikova I.V. *Stochastic cauchy problems in infinite dimensions. Regularized and generalized solutions.* Boca Raton; London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016, 300 p. ISBN: 1482210509 .
7. Carmona R., Tehranchi M. *Interest rate models: an infinite dimensional stochastic analysis perspective.* Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 2006, 235 p. ISBN: 3540270655 .
8. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 400 p. ISBN 5-9221-0335-0 .
9. Melnikova I.V., Parfenenkova V.S. Relations between Stochastic and Partial Differential Equations in Hilbert Spaces. *Int. J. Stoch. Anal.*, 2012, Article ID 858736. doi: 10.1155/2012/858736 .
10. Rozanov Yu.A. *Processus aléatoires.* Éditions Mir, Moscow, 1975, 275 p. *Sluchainye protsessy* (*kratkii kurs*) [Random processes: a short course]. Moscow: Nauka Publ., 1971, 286 p.
11. Hille E., Phillips R.S. *Functional analysis and semi-groups.* Rev. ed. Providence: American Mathematical Society, 1957. Ser. Amer. Math. Soc. Coll. Publ., *31*, 810 p.

The paper was received by the Editorial Office on May 15, 2017.

*Irina Valer'yanovna Melnikova,* Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: Irina.Melnikova@urfu.ru .

*Ul'yana Alekseevna Alekseeva,* Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: Uliana.Alekseeva@urfu.ru .

*Vadim Andreevich Bovkun,* doctoral student, Ural Federal University, Institute of Natural Sciences and Mathematics, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: 123456m@inbox.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.518

# РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ИДЕАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ[1]

**А. В. Мироненко**

Рассматривается задача равномерного приближения заданной на отрезке непрерывной функции. В случае аппроксимации классом $W^{(n)}$ (т. е. функциями, имеющими почти всюду ограниченную единицей производную порядка $n$) известен критерий элемента наилучшего приближения. В нем, кроме прочего, требуется совпадение на каком-то участке приближающей функции с идеальным сплайном степени $n$ с конечным числом узлов. Сами по себе идеальные сплайны содержатся в классе функций $W^{(n)}$, поэтому в работе исследуется сужение задачи: приближение непрерывной функции только множеством идеальных сплайнов с произвольным конечным количеством узлов. В работе устанавливается существование идеального сплайна, являющегося одновременно элементом наилучшего приближения и в классе, и во множестве. Это доказывает равенство величин наилучшего приближения в этих задачах. Также в работе показывается, что элементы наилучшего приближения в этом множестве удовлетворяют критерию, аналогичному критерию элемента наилучшешго приближения в классе $W^{(n)}$. Устанавливается всюду плотность множества идеальных сплайнов в классе $W^{(n)}$.

Ключевые слова: равномерное приближение, функции с ограниченной производной, идеальные сплайны.

**A. V. Mironenko. Uniform approximation by perfect splines.**

The problem of uniform approximation of a continuous function on a closed interval is considered. In the case of approximation by the class $W^{(n)}$ of functions whose $n$th derivative is bounded by 1 almost everywhere, a criterion for a best approximation element is known. This criterion, in particular, requires that the approximating function coincide on some subinterval with a perfect spline of degree $n$ with finitely many knots. Since perfect splines belong to the class $W^{(n)}$, we study the following restriction of the problem: a continuous function is approximated by the set of perfect splines with an arbitrary finite number of knots. We establish the existence of a perfect spline that is a best approximation element both in $W^{(n)}$ and in this set. This means that the values of best approximation in the problems are equal. We also show that the best approximation elements in this set satisfy a criterion similar to the criterion of best approximation in $W^{(n)}$. The set of perfect splines is shown to be everywhere dense in $W^{(n)}$.

Keywords: uniform approximation, functions with bounded derivative, perfect splines.

**MSC:** 41A15, 41A30

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-206-213

## 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

В статье рассматривается задача равномерного приближения заданной на отрезке непрерывной функции. Введем следующие обозначения.

$C[a,b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с нормой $\|f\| = \|f\|_{C[a,b]} = \max\{|f(x)|\colon x\in[a,b]\}$.

$AC[a,b]$ — класс абсолютно непрерывных функций из $C[a,b]$. Известно, что у абсолютно непрерывной функции производная существует почти всюду.

$L_\infty[a,b]$ — класс существенно ограниченных суммируемых функций с нормой $\|f\|_{L_\infty[a,b]} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(x)|\colon x\in[a,b]\}$.

$L_\infty^{(n)}[a,b] = \{g\colon g^{(n-1)}\in AC[a,b], g^{(n)}\in L_\infty[a,b]\}$ — класс функций с почти всюду конечной производной порядка $n$.

[1]Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления”.

Пусть $M > 0$, через $MW^{(n)}[a, b]$ обозначим класс функций со старшей производной, ограниченной этим числом:

$$MW^{(n)}[a, b] = \bigl\{g \in L_\infty^{(n)}[a, b] \colon \|g^{(n)}\|_{L_\infty[a,b]} \leqslant M\bigr\}.$$

Далее в обозначении $MW^{(n)}[a, b]$ будем опускать указание на отрезок $[a, b]$. При $M = 1$ класс $MW^{(n)}$ будем обозначать просто $W^{(n)}$.

Обозначим положительную срезку функции $f(x)$ через $f(x)_+ = \begin{cases} f(x), & \text{при } f(x) \geqslant 0 \\ 0, & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$

Пусть $N \geqslant 1$. Набор точек $\mathcal{T}_N = \{\tau_i\}_{i=0}^N$, удовлетворяющий условиям $c = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = d$, назовем *разбиением отрезка* $[c, d]$. Пусть даны разбиение $\mathcal{T}_N$, некоторое число $M \geqslant 0$ и число $\sigma$, равное $+1$ или $-1$. Функции вида

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sigma \frac{M}{n!}\Bigl[x^n + 2\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j (x - \tau_j)_+^n\Bigr],$$

заданные на отрезке $[\tau_0, \tau_N]$, будем называть *$M$-идеальными сплайнами степени $n$*. Точки $\tau_i$ будем называть *узлами* сплайна, а при $0 < i < N$ — *внутренними узлами*. Множество $M$-идеальных сплайнов степени $n$, построенных по разбиению $\mathcal{T}_N$, будем обозначать через $M\Gamma_n(\mathcal{T}_N)$. Отметим, что $M$-идеальные сплайны степени $n$ имеют дефект 1 (т. е. имеют непрерывную производную порядка $n-1$), а равенство $|p^{(n)}(x)| = M$ справедливо всюду, кроме точек $\tau_j$, и в каждой точке $\tau_j$ производная $p^{(n)}(x)$ меняет знак. Также отметим, что $M$-идеальные сплайны второй степени могут рассматриваться как течение во времени некоторого процесса, управлемого переключением его второй производной из максимального в минимальное значение и наоборот в моменты времени $\tau_j$ (так называемый *bang-bang control*).

Через $\Gamma_n(\mathcal{T}_N) = \Gamma_n[\tau_0, \ldots, \tau_N]$ обозначаем множество $M\Gamma_n(\mathcal{T}_N)$ при $M = 1$. В этом случае будем называть $M$-идеальные сплайны просто *идеальными сплайнами.* Отметим, что если $\mathcal{T}_N$ есть разбиение отрезка $[a, b]$, то $\Gamma_n(\mathcal{T}_N) \subset W^{(n)}$.

Обозначим объединение множеств $\Gamma_n(\mathcal{T}_N)$ по всем возможным разбиениям отрезка $[a, b]$ (любой конечной мощности) через $\Gamma_n$. Иными словами, $\Gamma_n$ — это множество идеальных сплайнов степени $n$ с произвольными количеством и расположением узлов. Очевидно, что $\Gamma_n \subset W^{(n)}$. Более того, ниже мы покажем, что $\Gamma_n$ всюду плотно в $W^{(n)}$.

Следуя [1], набор точек $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ будем называть *чебышёвским альтернансом* (или просто *альтернансом*) для непрерывной функции $h$, если существует такая константа $\sigma$, равная $+1$ или $-1$, что $h(x_i) = \sigma(-1)^{i+1}\|h\|$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть даны функция $f \in C[a, b]$ и произвольный класс функций $Q \subset C[a, b]$. Величина $E(f; Q) = \inf\limits_{g\in Q} \|f - g\|$ называется *величиной наилучшего приближения* (ВНП) функции $f$ классом функций $Q$. Любая функция $g_* \in Q$, удовлетворяющая условию $\|f - g_*\| = E(f; Q)$, называется *элементом наилучшего приближения* (ЭНП) функции $f$ классом функций $Q$.

В силу замкнутости и локальной компактности класса $W^{(n)}$ для любой непрерывной функции $f$ хотя бы один ЭНП в этом классе всегда существует, но не всегда он единствен.

Критерий ЭПН в классе $W^{(1)}$ сформулирован в статье [2, теорема 1]. Фактически он был найден Н. П. Корнейчуком еще в работах [3; 4]. В этом критерии одним из условий является наличие двух точек альтернанса на отрезке, на котором ЭНП совпадает с идеальным сплайном первой степени без внутренних узлов. Общий критерий ЭНП в классе $W^{(n)}$ при $n \geqslant 1$ доказал с небольшими ошибками немецкий математик Ульрих Заттес (Ullrich Sattes) в своей диссертации 1980 г. (см. [5]). Также этот критерий был опубликован без доказательства в чуть более доступной его работе [6]. Позднее несколько раз была доказана (см. А. Л. Браун [7], Дж. А. Орам [8], А. В. Мироненко [2, теорема 2]) другая, более короткая, формулировка этого критерия. В ней утверждается, что ЭНП должен, кроме прочих условий, совпадать на каком-то отрезке с неким идеальным сплайном степени $n$ и иметь на этом отрезке на $n + 1$ точку альтернанса больше, чем количество внутренних узлов этого сплайна. Видно, что идеальные сплайны играют важную роль в этой задаче, и естественно исследовать отдельно вопрос приближения идеальными сплайнами. Устанавливаемая в данной работе теорема 1 показывает, что множество $\Gamma_n$ в некотором смысле экстремально в классе $W^{(n)}$.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in C[a,b] \setminus W^{(n)}$, $n \geqslant 1$. Тогда $E\bigl(f; W^{(n)}\bigr) = E(f;\Gamma_n)$. Более того, существует идеальный сплайн $g_*$, являющийся* ЭНП *функции $f$ одновременно как во множестве $\Gamma_n$, так и в классе $W^{(n)}$.*

Критерий из работ [2; 5–8] утверждает, что любой ЭНП в классе $W^{(n)}$ на каком-то подотрезке обязательно является идеальным сплайном. Теорема 1 уточняет, что среди всех ЭНП обязательно найдется хотя бы один, являющийся идеальным сплайном и на остальной части отрезка $[a,b]$. Также теорема 1 решает вопрос о существовании ЭНП в множестве $\Gamma_n$, она же позволяет свести задачу численного построения ЭНП в классе $W^{(n)}$ к более простой задаче построения ЭНП в множестве $\Gamma_n$.

Теорема 2, доказываемая в данной работе для случая аппроксимации множеством $\Gamma_n$, аналогична критерию для случая приближения классом $W^{(n)}$ из работ [2; 5–8].

**Теорема 2.** *Пусть $f \in C[a,b] \setminus W^{(n)}$, $n \geqslant 1$. Идеальный сплайн $g_* \in \Gamma_n$ является* ЭНП *функции $f$ в множестве $\Gamma_n$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

1. *У сплайна $g_*$ есть набор из $s+1$ подряд идущих узлов $\{\tau_i\}_{i=j}^{j+s}$ (при каком-то $s>0$) такой, что на отрезке $[\tau_j,\tau_{j+s}]$ есть альтернанс функции $f-g_*$ из $s+n$ точек $\{x_i\}_{i=1}^{s+n}$.*

2. *На каждом из интервалов $(\tau_{j+i},\tau_{j+i+1})$ выполняется*

$$g_*^{(n)}(x) \equiv (-1)^{n+i}\operatorname{sign}\left((f-g_*)(x_1)\right).$$

*Более того, на отрезке $[x_1, x_{s+n}]$ все* ЭНП *совпадают друг с другом.*

Отметим, что здесь (как и в случае приближения классом $W^{(n)}$), хотя все ЭНП и обязаны совпадать на отрезке между крайними точками альтернанса, в общем случае нет единственности ЭНП на остальной части отрезка $[a,b]$. Можно легко построить пример двух таких несовпадающих ЭНП.

Условие $f \notin W^{(n)}$ в теореме 2 существенно. Это показывает устанавливаемая в данной работе теорема 3.

**Теорема 3.** *Любую функцию $f$ из класса $W^{(n)}$ можно приблизить идеальными сплайнами сколь угодно точно, т. е. $E(f;\Gamma_n) = 0$.*

Фактически теорема 3 означает, что множество $\Gamma_n$ всюду плотно в классе $W^{(n)}$.

## 2. Вспомогательные утверждения

Пусть $n \geqslant 1$, $k \geqslant 1$ и на некотором отрезке $[c,d]$ задана последовательность $\Theta = \{\theta_i\}_{i=1}^{n+k}$, удовлетворяющая условиям

$$c = \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots \leqslant \theta_{n+k} = d \quad \text{и} \quad \theta_i < \theta_{i+n} \text{ для всех } i \in \overline{1,k}. \tag{2.1}$$

Пусть также дан набор чисел $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i\}_{i=1}^{n+k}$. Будем говорить, что функция $f$ из класса $L_\infty^{(n)}[c,d]$ принимает значения $\boldsymbol{\alpha}$ на сетке $\Theta$, если при $i = 1,2,\ldots,n+k$ выполняются равенства $f^{(m)}(\theta_i) = \alpha_i$, где $m = \max\{j : \theta_{i-m} = \theta_i\}$. В этом случае мы будем писать $f|_\Theta = \boldsymbol{\alpha}$. Через $\Pi(\Theta,\boldsymbol{\alpha}) = \bigl\{f \in L_\infty^{(n)}[c,d] \colon\ f|_\Theta = \boldsymbol{\alpha}\bigr\}$ обозначим множество функций, принимающих заданные значения $\boldsymbol{\alpha}$ на сетке $\Theta$.

В этих обозначениях теорему С. Карлина и К. де Боора из работы [9] сформулируем следующим образом.

**Теорема А.** *Пусть последовательность* $\Theta$ *удовлетворяет условиям* (2.1)*. Тогда в множестве* $\Pi(\Theta, \boldsymbol{\alpha})$ *обязательно содержится* $M$*-идеальный сплайн* $g(x)$ (*для некоторого числа* $M$)*, имеющий менее чем* $k$ *внутренних узлов. Более того, на этом сплайне достигается минимум* $\left\|f^{(n)}\right\|_{L_\infty[c,d]}$ *среди всех функций* $f$ *из множества* $\Pi(\Theta, \boldsymbol{\alpha})$.

Пусть дана функция $f_0 \in L_\infty^{(n)}[c,d]$; через $\Pi(\Theta, f_0) = \left\{ f \in L_\infty^{(n)}[c,d]\colon\ f|_\Theta = f_0|_\Theta \right\}$ обозначим множество функций, интерполирующих функцию $f_0$ на сетке $\Theta$. Ясно, что $f_0 \in \Pi(\Theta, f_0)$. Выделим в этом множестве подмножество (возможно, пустое) функций, имеющих ограниченную старшую производную:

$$\Pi(\Theta, f_0, M) = \Pi(\Theta, f_0) \cap MW^{(n)}[c,d]. \tag{2.2}$$

Теорема А позволяет доказать следующий факт.

**Лемма 1.** *Пусть* $k = n$ *и дана последовательность* $\overline{\Theta} = \{\overline{\theta}_i\}_{i=1}^{n+k}$*, в которой*

$$\overline{\theta}_1 = \overline{\theta}_2 = \cdots = \overline{\theta}_n = c \quad \text{и} \quad \overline{\theta}_{n+1} = \overline{\theta}_{n+2} = \cdots = \overline{\theta}_{n+n} = d. \tag{2.3}$$

*Тогда функция* $\overline{f}$ *является идеальным сплайном не более чем с* $n-1$ *внутренним узлом* (*т. е.* $\overline{f} \in \Gamma_n[c, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}, d]$ *для какого-то разбиения* $\mathcal{T}_m$ *при* $m \leqslant n-1$) *тогда и только тогда, когда она — единственный элемент во множестве* $\Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть функция $\overline{f}$ принадлежит классу $\Gamma_n[c, \tau_1, \ldots, \tau_{m-1}, d]$ при некотором $m < n$; тогда очевидно, что $\overline{f} \in \Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$. Требуется доказать, что других элементов в этом множестве нет. Предположим, что во множестве $\Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$ найдется другая функция $g$. Согласно (2.2) имеем $g \in W^{(n)}$. Рассмотрим разность $h = \overline{f} - g$, очевидно, что $h \in L_\infty^{(n)}[c,d]$. Из условий интерполяции (2.3) вытекают соотношения

$$h(c) = h'(c) = \cdots = h^{(n-1)}(c) = 0 \quad \text{и} \quad h(d) = h'(d) = \cdots = h^{(n-1)}(d) = 0. \tag{2.4}$$

Поскольку функции $f$ и $g$ не равны, то найдется точка $x_0^0 \in (c,d)$ такая, что $h(x_0^0) \neq 0$. Пусть, для определенности, $h(x_0^0) > 0$. Поскольку $h(c) = 0$ и $h(x_0^0) > 0$, то по теореме Лагранжа на интервале $(c, x_0^0)$ найдется точка $x_0^1$ такая, что $h'(x_0^1) > 0$. Аналогично на втором интервале $(x_0^0, d)$ найдется вторая точка $x_1^1$, в которой $h'(x_1^1) < 0$.

Из соотношений (2.4) получаем $h'(c) = h'(d) = 0$. Применив теорему Лагранжа уже к функции $h'$ на наборах $\{c, x_0^1\}$, $\{x_0^1, x_1^1\}$, $\{x_1^1, d\}$, мы найдем три точки $x_0^2 < x_1^2 < x_2^2$, в которых функция $h^{(2)}$ принимает чередующиеся по знаку значения, начиная с положительного.

Продолжая этот процесс, мы получим $n$ последовательных точек $x_0^{n-1}$, $x_1^{n-1}$, …, $x_{n-1}^{n-1}$, в которых функция $h^{(n-1)}$ принимает значения с чередующимися знаками, начиная с положительного. Также из (2.4) имеем $h^{(n-1)}(c) = h^{(n-1)}(d) = 0$.

Так как $h \in L_\infty^{(n)}[c,d]$, то $h^{(n-1)} \in AC[c,d]$, и тогда

$$\int\limits_c^{x_0^{n-1}} h^{(n)}(t)\,dt = h^{(n-1)}(x_0^{n-1}) - h^{(n-1)}(c) = h^{(n-1)}(x_0^{n-1}) > 0.$$

Поскольку интеграл от функции $h^{(n)}$ строго положителен, то и сама функция внутри интервала $(c, x_0^{n-1})$ должна быть строго положительной на некотором множестве ненулевой меры. Применив это рассуждение последовательно к наборам точек $\{c, x_0^{n-1}\}$, $\{x_0^{n-1}, x_1^{n-1}\}$, …, $\{x_{n-2}^{n-1}, x_1^{n-1}\}$, $\{x_{n-1}^{n-1}, d\}$, мы получаем $n+1$ множество ненулевой меры, на которых $h^{(n)}(x)$ принимает значения с чередующимися знаками. По предположению функция $\overline{f}$ есть идеальный сплайн, имеющий не более чем $n-1$ внутренний узел, т. е. функция $\overline{f}^{(n)}$ имеет не более $n$ участков постоянства. Поэтому среди этих множеств найдется такая точка, в которой функции $\overline{f}^{(n)}$

и $h^{(n)}$ существуют и противоположны по знаку. Тогда в этой точке функция $g^{(n)} = \overline{f}^{(n)} - h^{(n)}$ по модулю превзойдет 1, что противоречит условию $g \in W^{(n)}[c,d]$.

*Достаточность.* Пусть функция $\overline{f}$ является единственным элементом множества $\Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$, значит, $\|\overline{f}^{(n)}\|_{L_\infty[c,\,d]} \leqslant 1$. По теореме A во множестве $\Pi(\overline{\Theta}, \overline{f})$ содержится хотя бы один $M$-идеальный сплайн $f_0$ с числом внутренних узлов, меньшим $n$, и на нем достигается минимум нормы $n$-й производной. Поскольку $\overline{f} \in \Pi(\overline{\Theta}, \overline{f})$, то этот минимум не превосходит величины $\|\overline{f}^{(n)}\|_{L_\infty[c,\,d]} = 1$ и, следовательно, $f_0 \in \Pi(\overline{\Theta}, \overline{f}, 1)$. Функция $\overline{f}$ есть единственный элемент этого множества, поэтому $\overline{f} \equiv f_0$. Лемма 1 доказана.

Из теоремы Т. Н. Т. Гудмана и С. Л. Ли [10, теорема 1] в наших обозначениях можно сформулировать следующее утверждение.

**Теорема B**. *Пусть дана последовательность точек интерполяции $\Theta$, удовлетворяющая условиям (2.1), и дана функция $f_0 \in L^{(n)}_\infty[c,d]$. Пусть число $M > \|f_0^{(n)}\|_{L_\infty[c,\,d]}$. Тогда во множестве $\Pi(\Theta, f_0, M)$ содержатся $M$-идеальные сплайны, имеющие не более $k$ внутренних узлов. Более того, таких сплайнов ровно два (обозначим их $h$ и $g$), и они имеют ровно по $k$ внутренних узлов, при этом для любой функции $f \in \Pi(\Theta, f_0, M)$ справедливо неравенство*

$$\min\left(g(x), h(x)\right) \leqslant f(x) \leqslant \max\left(g(x), h(x)\right).$$

Приведем грубую оценку зазора между найденными в ней функциями $h$ и $g$ для одного частного случая расположения точек интерполяции.

**Лемма 2.** *Пусть в условиях теоремы B последовательность $\overline{\Theta} = \{\overline{\theta}_i\}_{i=1}^{n+k}$ удовлетворяет условиям (2.3), а $d - c = \delta$. Тогда*:

1. *Одна из функций $h$ и $g$ мажорирует другую, т. е. либо $h \leqslant g$, либо $h \geqslant g$ на всем отрезке $[c,d]$.*
2. *Выполняется соотношение $\|h - g\|_{C[c,d]} \leqslant 2M\delta^n$.*

Доказательство. Докажем п. 1 от противного. Рассмотрим функцию $w(x) = h(x) - g(x)$. Пусть ни одна из функций $h$ и $g$ не мажорирует другую. Это значит, что найдутся такие две точки $x_0^0$, $x_1^0$ из интервала $(c,d)$, что $w(x_0^0) > 0$ и $w(x_1^0) < 0$. При этом $w(c) = 0$ и $w(d) = 0$. Точно так же, как в лемме 1, доказывается существование трех точек $x_0^1 < x_1^1 < x_2^1$ из интервала $(c,d)$, в которых производная $w'(x)$ последовательно принимает значения с чередующимися знаками. И, в итоге, мы найдем $n+2$ последовательные точки $\{x_j^n\}$ $j = 0, 1, \ldots, n+1$ (вместе с множествами ненулевой меры), в которых производная $w^{(n)}(x)$ принимает значения с чередующимися знаками.

С другой стороны, поскольку по теореме B функции $h(x)$ и $g(x)$ являются $M$-идеальными сплайнами степени $n$ с $n$ внутренними узлами, то функция $w^{(n)}(x)$ есть разность двух функций, каждая из которых на ровно $n+1$ интервале последовательно равна $+M$ или $-M$. Фактически функция $w^{(n)}(x)$ может принимать лишь три значения: $-2M$, $0$, $+2M$. То, что она при переходе от $x_j^n$ к $x_{j+1}^n$ поменяла знак, означает, что между $x_j^n$ и $x_{j+1}^n$ есть как минимум по одному узлу $h(x)$ и $g(x)$. Тогда между $n+2$ точками $\{x_j^n\}$ найдется не менее чем $n+1$ внутренний узел у каждого из сплайнов, противоречие.

Оценим теперь зазор между этими функциями. По построению $\left|w^{(n)}\right| = |h^{(n)} - g^{(n)}| \leqslant |h^{(n)}| + |g^{(n)}| \leqslant 2M$. Так как функции $h$ и $g$ в концах отрезка интерполируют одну и ту же функцию $f_0$ и ее производные, то

$$w(c) = w'(c) = \cdots = w^{(n-1)}(c) = 0 \quad \text{и} \quad w(d) = w'(d) = \cdots = w^{(n-1)}(d) = 0.$$

Поскольку $w^{(n-1)} \in AC[c,d]$, то при $x \in [c,d]$ справедлива поточечная оценка

$$|w^{(n-1)}(x)| = \left|\int_c^x w^{(n)}(t)\,dt\right| \leqslant \int_c^x |w^{(n)}(t)|\,dt \leqslant \int_c^x 2M\,dt = 2M(x-c) \leqslant 2M\delta.$$

Аналогично получаем, что

$$|w^{(n-2)}(x)| = \left| \int\limits_c^x w^{(n-1)}(t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_c^x |w^{(n-1)}(t)|\,dt \leqslant \int\limits_c^x 2M\delta\,dt = 2M\delta(x-c) \leqslant 2M\delta^2.$$

Продолжим этот процесс. В результате имеем, что при $x \in [c,d]$ справедливо неравенство

$$|w(x)| = \left| \int\limits_c^x w'(t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_c^x 2M\delta^{n-1}\,dt = 2M\delta^{n-1}(x-c) \leqslant 2M\delta^n.$$

Лемма 2 доказана.

## 3. Доказательства теорем 1–3

Доказательство теоремы 1. Утверждение $E\big(f; W^{(n)}\big) = E(f;\Gamma_n)$ будет выполняться автоматически, если мы укажем сплайн, одновременно являющийся ЭНП в каждом из множеств. Построим такой сплайн.

Поскольку функция $f$ не лежит в классе $W^{(n)}$, то, как мы указывали в разд. 1, у нее существует в нем хотя бы один ЭНП; обозначим его через $g_*$. Для доказательства теоремы мы разобьем отрезок $[a,b]$ на конечное число достаточно коротких подотрезков, на каждом заменим (с сохранением уклонения и гладкости) функцию $g_*$ на идеальный сплайн. Это и даст нам искомый идеальный сплайн на всем отрезке $[a,b]$.

Обозначим функцию уклонения $f(x) - g_*(x)$ через $d(x)$, а величину уклонения $\|f - g_*\| = \|d\|$ через $E$. Поскольку функция $d(x)$ равномерно непрерывна, то найдется такое число $\delta_1 > 0$, что на любом отрезке $[c,d]$ длины меньше $\delta_1$ разброс значений функции $d(x)$ (т. е. величина $\sup\{\big|d(x) - d(y)\big| : x, y \in [c,d]\}$) не превосходит числа $E/4$. Также можно выбрать такое число $\delta_2 > 0$, что $2(\delta_2)^n < E/16$.

Пусть $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Разобьем весь отрезок $[a,b]$ на подотрезки длины меньше $\delta$ и рассмотрим один такой отрезок $[c,d]$. Пусть последовательность $\overline{\Theta}$ удовлетворяет (2.3) на отрезке $[c,d]$. Обозначим через $M$ величину $\inf\big\{|g^{(n)}|_{L_\infty[c,d]} \colon g \in \Pi(\overline{\Theta}, g_*)\big\}$. Поскольку $g_* \in \Pi(\overline{\Theta}, g_*)$, то $M \leqslant |gz^{(n)}|_{L_\infty[c,d]}$. Раз $g_* \in W^{(n)}$, то $|g_*^{(n)}|_{L_\infty[c,d]} \leqslant 1$, т. е. $M \leqslant 1$.

Рассмотрим случай $M = 1$. Здесь имеем $\|g_*^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]} = 1$. По теореме A в множестве $\Pi(\overline{\Theta}, g_*)$ существует идеальный сплайн $\gamma \in \Gamma_n$, имеющий менее чем $n$ внутренних узлов, на котором достигается минимум нормы старшей производной. Тогда $M \leqslant \|\gamma^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]} \leqslant \|g_*^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]} = 1$, т. е. $\|\gamma^{(n)}\|_{L_\infty[c,d]} = 1$. Сплайн $\gamma(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1, поэтому он является единственным элементом множества $\Pi(\overline{\Theta}, g_*, 1)$. Поскольку $g_* \in \Pi(\overline{\Theta}, g_*, 1)$, то функции $\gamma$ и $g_*$ совпадают, т. е. функция $g_*$ уже является идеальным сплайном на отрезке $[c,d]$. В этом случае функцию $g_*$ на отрезке $[c,d]$ изменять не надо.

Теперь рассмотрим случай $M < 1$. По теореме B и лемме 2 найдутся такие два идеальных сплайна $\gamma_1$ и $\gamma_2$, что $\gamma_1 \leqslant g_* \leqslant \gamma_2$. При этом уклонение любого из них от функции $g_*$ не превосходит $2\delta^n$, что по условиям на $\delta$ не превосходит $E/8$.

Будем писать $f \in [s,t]$, если множество значений функции $f(x)$ при всех $x \in [c,d]$ лежит в отрезке $[s,t]$, т. е. если $s \leqslant f(x) \leqslant t$ при $x \in [c,d]$.

Поскольку $\gamma_1 \leqslant g_*$, то $(\gamma_1 - g_*) \in [-E/8, 0]$. Аналогично поскольку $g_* \leqslant \gamma_2$, то $(\gamma_2 - g_*) \in [0, E/8]$.

Рассмотрим два случая: $d \in [-E, 0]$ и $d \in [-E/2, E]$. Поскольку разброс значений функции $d(x)$ на отрезке $[c,d]$ не превосходит $E/4$, то эти два варианта исчерпывают все возможности.

В первом случае заменим на отрезке $[c,d]$ функцию $g_*$ на идеальный сплайн $\gamma_1$. Тогда $(f - \gamma_1) = ((f - g_*) - (\gamma_1 - g_*)) = (d - (\gamma_1 - g_*)) \in [-E, 0] + [0, E/8] = [-E, E/8]$, т. е. при этой операции уклонение от функции $f$ не превысит $E$. Во втором случае заменим на отрезке $[c,d]$ функцию $g_*$ на идеальный сплайн $\gamma_2$. Тогда $(f-\gamma_2) = ((f-g_*)-(\gamma_2-g_*)) \in [-E/2, E] + [-E/8, 0] = [-E/2 - E/8, E]$, т. е. и в этом случае уклонение от функции $f$ не превысит $E$.

В силу условий интерполяции (2.3) при описанной замене все производные до порядка $n-1$ на концах отрезка $[c,d]$ останутся абсолютно непрерывными, т. е. функция $g_*$ останется элементом класса $W^{(n)}$.

Проделав такую операцию замены на идеальный сплайн на всех отрезках разбиения, мы преобразуем всю функцию $g_*$ в идеальный сплайн, причем уклонение этого сплайна от $f$ не будет превышать $E$ по построению. С учетом того, что мы остались в классе $W^{(n)}$, меньше, чем $E$, оно быть не может, т. е. преобразованная функция $g_*$ будет ЭНП как в $W^{(n)}$, так и в $\Gamma_n$.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. *Достаточность.* Пусть условия теоремы выполнены для некоторого идеального сплайна $g_*$. Тогда по критерию из работ [2; 5–8] он является ЭНП для функции $f$ в классе $W^{(n)}$, т. е. $E\big(f; W^{(n)}\big) = \|f-g_*\|$. Поскольку $\Gamma_n \subset W^{(n)}$, то $E(f;\Gamma_n) \geqslant E\big(f; W^{(n)}\big)$. Тогда $\|f-g_*\| \geqslant E(f;\Gamma_n) \geqslant E\big(f; W^{(n)}\big) = \|f-g_*\|$, т. е. сплайн $g_*$ является ЭНП во множестве $\Gamma_n$.

*Необходимость.* Пусть дан идеальный сплайн $g_*$, являющийся ЭНП функции $f$ во множестве $\Gamma_n$. Требуется показать, что для него выполнены условия теоремы. Рассмотрим функцию $g$, являющуюся ЭНП в классе $W^{(n)}$. По теореме 1 получаем $\|f-g\| = E\big(f; W^{(n)}\big) = E(f;\Gamma_n) = \|f-g_*\|$, т. е. сплайн $g_*$ является ЭНП и в классе $W^{(n)}$. По критерию из работ [2; 5–8] у функции $g$ найдется участок, на котором выполнены условия доказываемой теоремы, по нему же все ЭНП на отрезке между крайними точками альтернанса совпадают. Следовательно, на этом отрезке функция $g$ и сплайн $g_*$ совпадают, поэтому на нем и сплайн $g_*$ удовлетворяет условиям теоремы. Необходимость доказана.

Поскольку все ЭНП во множестве $\Gamma_n$ являются и ЭНП в классе $W^{(n)}$, то они совпадают друг с другом на отрезке между крайними точками альтернанса по критерию из работ [2; 5–8]. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3. Из доказательства теоремы 1 видно, что любую функцию из $W^{(n)}$ можно, учащая разбиение, сколь угодно точно приблизить идеальным сплайном. Можно даже, выбирая сплайны $\gamma_2$ или $\gamma_1$, приближать только сверху или же только снизу. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Натансон И. П.** Конструктивная теория функций. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теорет. литературы, 1949. 688 с.
2. **Мироненко А. В.** Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 5. С. 696–712.
3. **Корнейчук Н. П.** О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР. 1961. Т. 140, № 4. С. 748–751.
4. **Корнейчук Н. П.** О наилучшем приближении непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1963. Т. 27. С. 29–44.
5. **Sattes U.** Beste Approximation durch glatte Funktionen und Andwendungen in der intermediären Approximation: Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1980.
6. **Sattes U.** Best Chebyshev approximation by smooth functions // Quantitative Approximation: Proc. Internat. Symposium / eds. R.A. Devore and K. Scherer (Bonn, 1979) New York: Acad. Press, 1980. P. 279–289.
7. **Brown A.L.** Best approximation by smooth functions and related problems // Parametric optimization and approximation: Proc. Conf. Held at the Mathematisches Forschungsinstitut (Oberwolfach, 1983). Basel: Birkhäuser, 1985. P. 70–82. (Internat. Schriftenreihe. Numer. Math., 72.)
8. **Oram J. A.** Best approximation by periodic smooth functions // J. Approx. Theory. Vol. 92, no. 1. 1998. P. 128–166.

9. **de Boor C.** A remark concerning perfect splines // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. Vol. 80, no. 4. P. 724–727.
10. **Goodman T. N. T., Lee S. L.** Another extremal property of perfect splines // Proc. of Amer. Math. Soc. 1978. Vol. 70, no. 2. P. 129–135.



Мироненко Александр Васильевич
канд. физ.-мат. наук,
математик
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: a_mironenko@mail.ru


Поступила 10.05.2017

## REFERENCES


1. Natanson I.P. *Constructive function theory. Vol. I. Uniform approximation.* New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1964, 232 p. Original Russian text published in *Konstruktivnaya teoriya funktsii.* Moscow, Leningrad, Gos. Izd-vo Tekhn.-Teoret. Literatury, 1949, 688 p.
2. Mironenko A.V. Uniform approximation by the class of functions with bounded derivative. *Math. Notes*, 2003, vol. 74, no. 5, pp. 656–670. doi: 10.1023/B:MATN.0000008998.41243.75 .
3. Kornejchuk N.P. The best uniform approximation on certain classes of continuous functions. *Sov. Math., Dokl.*, 1961, vol. 2, pp. 1254–1257.
4. Korneichuk N.P. On the best approximation of continuous functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1963, vol. 27, no. 1, pp. 29–44 (in Russian).
5. Sattes U. *Beste Approximation durch glatte Funktionen und Andwendungen in der intermediären Approximation*, Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1980.
6. Sattes U. Best Chebyshev approximation by smooth functions, Quantitative Approximation, Proc. Internat. Symposium, eds. R.A. Devore and K. Scherer (Bonn, 1979), New York, Acad. Press, 1980, pp. 279–289.
7. Brown A.L. Best approximation by smooth functions and related problems, Parametric optimization and approximation, Proc. Conf. Held at the Mathematisches Forschungsinstitut (Oberwolfach, 1983), Internat. Schriftenreihe. Numer. Math., 72, Basel, Birkhäuser, 1985, pp. 70–82.
8. Oram J.A. Best Approximation by Periodic Smooth Functions. *Journal of Approximation Theory*, 1998, vol. 92, no. 1, pp. 128–166. doi: 10.1006/jath.1997.3098 .
9. de Boor C. A remark concerning perfect splines. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 80, no. 4, pp. 724–727.
10. Goodman T.N.T., Lee S.L. Another extremal property of perfect splines, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1978, vol. 70, no. 2, pp. 129–135. doi: 10.1090/S0002-9939-1978-0481760-9 .


The paper was received by the Editorial Office on May 10, 2017.

*Aleksandr Vasil'evich Mironenko.* Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: a_mironenko@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.658.4

# МЕТОДЫ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ВОПРОСЫ ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ КОРРЕКЦИИ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕСОВМЕСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

**Л. Д. Попов, В. Д. Скарин**

Рассматриваются задачи выпуклого программирования, про ограничения которых априори не известно, совместны они или нет. Для численного анализа и поиска обобщенных решений таких задач предлагается использовать симметричную регуляризацию классической функции Лагранжа одновременно как по прямым, так и по двойственным переменным. За счет такой регуляризации минимаксные задачи, порождаемые расширенным Лагранжианом исходной задачи, оказываются всегда разрешимыми и при стремлении параметра регуляризации к нулю дают автоматически либо обычное решение исходной задачи (в случае ее собственности, т. е. разрешимости), либо ее обобщенное решение (в несобственном случае); последнее минимизирует изменения, которые необходимо внести в ограничения исходной задачи для обеспечения их совместности, и в то же время оптимизируют значение ее целевой функции в релаксированной допустимой области. Такие минимаксные задачи могут быть положены в основу формирования новых схем двойственности, по крайней мере для несобственных постановок. Приведены схемы регуляризации, доказаны теоремы сходимости и численной устойчивости метода, дана содержательная интерпретация получаемого обобщенного решения. Работа развивает ранее опубликованные результаты авторов, полученные ими для задач линейного программирования.

Ключевые слова: выпуклое программирование, двойственность, обобщенные решения, метод регуляризации, метод штрафных функций, лексикографический оптимум.

**L. D. Popov, V. D. Skarin. Regularization methods and issues of lexicographic correction for convex programming problems with inconsistent constraints.**

We consider convex programming problems for which it is unknown in advance whether their constraints are consistent. For the numerical analysis of these problems, we propose to apply a multistep symmetric regularization of the classical Lagrange function with respect to both primal and dual variables and then to solve the arising minimax problems with a small parameter. The latter problems are always solvable and give either normal decisions of the original problems in the case of their propriety or, in the improper case, generalized solutions that minimize the discrepancies of the constraints and optimize the value of the objective function asymptotically with respect to the parameter. Minimax problems can also form a basis for the construction of new duality diagrams in convex programming, at least for improper settings. Regularization diagrams are provided, a primal minimax setting is written, theorems on the convergence and numerical stability of the method are proved, and an informal interpretation of the generalized solutions is given. The study develops the authors' earlier results obtained for linear programming problems.

Keywords: convex programming, duality, generalized solutions, regularization method, penalty function method.

**MSC:** 90C05, 90C46

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-214-223

## Введение

Задачи условной оптимизации с несовместными системами ограничений представляют собой важный подкласс так называемых несобственных задач математического программирования (МП), систематическое и планомерное изучение которых было начато в 80-х годах прошлого века в монографии [1] и продолжено в целом ряде отечественных и зарубежных публикаций (см. [2–7] и др.). Несовместность ограничений в оптимизационных моделях часто встречается на практике как следствие неточности задания их исходных данных, рассогласования их целей и имеющихся средств для их достижения, наличия у моделируемого объекта реальных

[1]Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 16-07-00266).

противоречий в развитии и функционировании и пр. Центральными пунктами исследований несобственных задач МП являются альтернативные схемы построения двойственности для таких задач [1], связь этих схем с анализом поведения классических численных методов оптимизации в ситуациях, когда модель, к которой они применяются, оказывается несобственной. Для классических методов важно, насколько полную и структурированную информацию они дают прикладному специалисту в качестве помощи ему в организации корректировки структуры модели и/или ее исходных данных, которую ему неизбежно предстоит провести. Особенно интересны численные методы, в которых оптимальная корректировка исходных данных задачи проводится с помощью формальных процедур, учитывующих те или иные критерии качества коррекции, и совмещается с процессом оптимизации целевой функции на релаксированном допустимом множестве [2–4]. В предлагаемой вниманию работе инструментом такого совмещения будут служить симметричная регуляризация функции Лагранжа для исходных постановок [8; 9] и идеи последовательной (лексикографической) оптимизации при построении релаксированого множества [10; 11]. Работа развивает ранее опубликованные результаты авторов, полученные ими для задач линейного программирования (см. [13] и библиографию к ней).

## 1. Постановка задачи

В качестве исходной рассмотрим задачу нелинейного (выпуклого) программирования, ограничения которой, возможно, несовместны:

$$\min\{f_0(x)\colon f_j(x) \le 0 \ (j = 1, \ldots, m), \ x \in \Omega\}; \tag{1}$$

здесь функции $f_j(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ конечны и выпуклы, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт.

Множество $\Omega$ моделирует так называемые "директивные" ограничения, т. е. ограничения, не подлежащие корректировке. Все прочие ограничения-неравенства предполагаются "факультативными", т. е. в случае противоречивости можно корректировать их правые части, тем самым ослабляя их и формируя непустое релаксированное допустимое множество.

Предположим, что множество индексов $J = \{1, \ldots, m\}$ факультативных ограничений разбито на ряд непустых подмножеств $J_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m_0)$ следующим образом:

$$J = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_{m_0}, \qquad J_i \cap J_j = \varnothing \text{ при } i \ne j. \tag{2}$$

Будем считать, что приведенное разбиение отражает приоритетность (важность) соответствующих ограничений для выполнения, причем приоритет падает с ростом номера подсистемы. Коррекция каждой из подсистем означает внесение в них изменений, по-возможности минимальных.

Приоритетность влияет на то, что вначале должны вноситься минимально необходимые изменения в подсистемы с более высоким приоритетом (если такие изменения вообще требуются) и лишь затем — в подсистемы, приоритеты которых ниже. Иными словами, будут последовательно строиться релаксированные множества:

$$\begin{gathered} X_0 = \arg\min\{\|F_0(x)^+\|\colon x \in \Omega\}, \\ X_1 = \arg\min\{\|F_1(x)^+\|\colon x \in X_0\}, \ldots, X_{m_0} = \arg\min\{\|F^+_{m_0}(x)\|\colon x \in X_{m_0-1}\}. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $F_i(x) = (f_j(x))_{j\in J_i}$ — вектор-функции, составленные из левых частей ограничений, входящих в $i$-ю подсистему $(i = 0, 1, \ldots, m_0)$, $a^+ = \max\{0, a\}$ для числа $a$ и $h^+ = (h_1^+, h_2^+, \ldots, h_n^+)$ для вектора $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$.

Заключительное множество серии $X_{m_0}$ играет роль допустимого (аппроксимационного или релаксированного) множества в скорректированной исходной постановке

$$\min\{f_0(x)\colon x \in X_{m_0}\}; \tag{4}$$

при этом одно из решений $\hat{x}$ задачи (4), например минимальное по норме, объявляется аппроксимационным (обобщенным) решением исходной несобственной задачи (1).

Предлагаемая схема развязки “узких” мест противоречивой системы ограничений исходной задачи тесно связана с лексикографическим (последовательным) программированием [10; 11]. Заметим, что требование компактности множества $\Omega$ и выпуклости функций $f_i(x)$ обеспечивает достижимость минимумов в задачах (3), так что построение множеств (3) корректно.

Построение релаксационных множеств в геометрическом плане эквивалентно последовательному решению серии задач поиска евклидовых проекций нуль-вектора на выпуклые замкнутые множества:

$$U_0 = \{u\colon \exists x \in \Omega \ \ F_0(x) \le u\},$$
$$U_1 = \{u\colon \exists x \in X_0 \ \ F_1(x) \le u\}, \dots, U_{m_0} = \{u\colon \exists x \in X_{m_0-1} \ \ F_{m_0}(x) \le u\}.$$

В силу единственности таких проекций найдутся (также единственные и, очевидно, неотрицательные) векторы $\hat{u}_0 = \pi_{U_0}(0)$, $\hat{u}_1 = \pi_{U_1}(0), \dots, \hat{u}_{m_0} = \pi_{U_{m_0}}(0)$ такие, что множества (3) можно представить в виде

$$\begin{gathered} X_0 = \{x\colon F_0(x) \le \hat{u}_0,\ x \in \Omega\}, \\ X_1 = \{x\colon F_1(x) \le \hat{u}_1,\ x \in X_0\}, \dots, X_{m_0} = \{x\colon F_{m_0}(x) \le \hat{u}_{m_0},\ x \in X_{m_0-1}\}; \end{gathered} \tag{5}$$

здесь $\pi_B(\cdot)$ — оператор евклидового проектирования на множество $B$. В частности, заключительное множество серии окажется представимо в виде

$$X_{m_0} = \{x\colon F_0(x) \le \hat{u}_0,\ F_1(x) \le \hat{u}_1, \dots, F_{m_0}(x) \le \hat{u}_{m_0},\ x \in \Omega\}.$$

Поэтому предлагаемая схема релаксация “факультативных” ограничений действительно сводится к корректировке их правых частей, т. е. к их ослаблению.

Введем дополнительные ограничения на рассматриваемые нами задачи.

Поскольку множество $X_{m_0}$ ограничено, задача (4), аппроксимирующая исходную неразрешимую постановку, заведомо разрешима, а ее оптимальное множество ограничено. Будем также предполагать для задачи (4) выполненными классические условия оптимальности Куна — Таккера, т. е. считать, что функция Лагранжа задачи (4)

$$\hat{L}(x, y) = f_0(x) + \sum_{i=0}^{m_0} (y_i, F_i(x) - \hat{u}_i)$$

имеет седловую точку относительно области $\Omega \times \mathbb{R}^m_+$; здесь вектор $y = (y_0, y_1, \dots, y_{m_0}) \in \mathbb{R}^m$ разбит на подвекторы в соответствии с разбиением (2), $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение векторов.

Также будем предполагать выполнимость аналогичных условий Куна — Таккера для решений подзадач (3), записанных в виде

$$\min\bigl\{1/2\,\|F_i(x)^+\|^2\colon F_0(x) \le \hat{u}_0, \dots, F_{i-1}(x) \le \hat{u}_{i-1},\ x \in \Omega\bigr\}, \tag{6}$$

и тесно связанных с ними линеаризованных по целевой функции подзадач

$$\min\bigl\{(\hat{u}_i, F_i(x)^+)\colon F_0(x) \le \hat{u}_0, \dots, F_{i-1}(x) \le \hat{u}_{i-1},\ x \in \Omega\bigr\}, \tag{7}$$

т. е. предполагать, что их стандартные функции Лагранжа также имеют седловые точки в своих областях определения (здесь $i = 1, \dots, m_0$).

Задачи (7) сконструированы искусственно по задачам (6) таким образом, что имеют одинаковые с ними решения, т. е. если $x'$ — оптимальный вектор задачи (7), то $F_i(x')^+ = \hat{u}_i$, и наоборот. Это следует из свойств евклидовой проекции на выпуклое замкнутое множество. Отмеченное свойство позволяет легко показать, что на самом деле седловые точки функций $\hat{L}(x, y; i)$ и $\hat{L}_0(x, y; i)$ совпадают, так что последние два предположения на самом деле сливаются в одно.

## 2. Симметричная регуляризация функции Лагранжа

Векторы $\hat{u}_0$, $\hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{m_0}$ и минимальное по норме решение $\hat{x}$ задачи (4) можно искать последовательно, исходя из их формального определения, данного выше, т. е. решая конечную серию обычных задач выпуклого программирования. Однако эти процессы можно эффективно объединить в один общий вычислительный процесс, и инструментом такого объединения станет функция Лагранжа исходной задачи, симметрично регуляризированная по прямым и двойственным переменным.

Вслед за [4; 13] рассмотрим функцию

$$\mathcal{L}(x,y;\sigma) = L(x,y) + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 - \frac{\beta_0}{2}\|y_0\|^2 - \frac{\beta_1}{2}\|y_1\|^2 - \ldots - \frac{\beta_{m_0}}{2}\|y_{m_0}\|^2, \tag{8}$$

где $L(x,y) = f_0(x) + \sum\limits_{j=1}^{m} y_j f_j(x)$ — функция Лагранжа задачи (1), $\sigma = [\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}]$ — набор положительных параметров регуляризации, $\sigma \to +0$.

Функция (8) стандартным образом порождает пару минимаксных задач:

$$P_\sigma\colon \quad \min_{x\in\Omega}\max_{y\geq 0} \mathcal{L}(x,y;\sigma) \qquad \text{и} \qquad D_\sigma\colon \quad \max_{y\geq 0}\min_{x\in\Omega} \mathcal{L}(x,y;\sigma).$$

Поскольку регуляризированная функция Лагранжа (8) сильно выпукла по $x$ при всех фиксированных $y$ и сильно вогнута по $y$ при всех фиксированных $x$, то задачи $P_\sigma$ и $D_\sigma$ находятся в отношении совершенной двойственности [12], т. е. обе они разрешимы, а их оптимальные значения совпадают вне зависимости от того, разрешима или нет исходная задача. Оптимальные векторы задач $P_\sigma$ и $D_\sigma$ образуют седловую точку функции (8) относительно области $\Omega \times \mathbb{R}^m_+$.

Ниже мы будем исследовать первую из выписанных минимаксных задач, т. е. задачу

$$P_\sigma\colon \quad \min_{x\in\Omega} \Phi_\sigma(x), \qquad \sigma \to +0, \tag{9}$$

в которой, как нетрудно проверить,

$$\Phi_\sigma(x) = \max_{y\geq 0} \mathcal{L}(x,y;\sigma) = f_0(x) + \frac{\alpha}{2}\|x\|^2 + \sum_{i=0}^{m_0} \frac{1}{2\beta_i}\|F_i^+(x)\|^2.$$

Целью исследования является нахождение таких условий на поведение параметров регуляризации $\sigma = [\alpha, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m_0}] \to 0$, которые бы гарантировали сходимость решений $x^\sigma$ задач $P_\sigma$ к решению аппроксимирующей задачи (4). Как оказалось, такие условия совпадают с теми, что были найдены авторами ранее для несобственных задач линейного программирования.

## 3. Вспомогательные оценки

Нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Взглянем подробнее на аппроксимационную задачу (4), заменив в ней фиксированные правые части ограничений на параметры:

$$\min\{f_0(x)\colon F_0(x) \leq u_0,\ F_1(x) \leq u_1, \ldots, F_{m_0}(x) \leq u_{m_0},\ x \in \Omega\}. \tag{10}$$

В силу компактности $\Omega$ функция оптимума этой задачи $\upsilon_0(\cdot)$ определена, непрерывна и выпукла на выпуклом замкнутом множестве $\mathcal{U}_*$ всех таких наборов $u = [u_0, u_1, \ldots, u_{m_0}]$, которые обеспечивают совместность ее ограничений. При этом оптимальный вектор коррекции $\hat{u} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_{m_0}]$, определяемый соотношениями (4)–(5), лежит в $\mathcal{U}_*$ и $\upsilon_0(\hat{u}) = f_0(\hat{x})$.

Оценим значение функции $f_0(x)$ в произвольной точке $x \in \Omega$.

**Лемма 1.** *Пусть $\hat{x}$ — решение задачи* (4). *Существует такая константа $N_0$, что при всех $x \in \Omega$ выполняется неравенство*

$$f_0(\hat{x}) - f_0(x) \le N_0 \sum_{s=0}^{m_0} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, по предположению (см. разд. 1) разрешима не только задача (4), но и задача, двойственная к ней. Пусть $\hat{y} = [\hat{y}_0, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{m_0}]$ — ее минимальный по норме оптимальный вектор. Поскольку всякий оптимальный вектор двойственной задачи ЛП определяет один из субградиентов функции оптимума прямой задачи, то

$$\upsilon_0(u) \ge \upsilon_0(\hat{u}) - \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{y}_s, u_s - \hat{u}_s) = f_0(\hat{x}) - \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{y}_s, u_s - \hat{u}_s).$$

Но вектор $x$ удовлетворяет всем ограничениям задачи (10) при $u_s(x) = \hat{u}_s + (F_s(x) - \hat{u}_s)^+$. Следовательно,

$$f_0(x) \ge \upsilon_0(u(x)) \ge \upsilon_0(\hat{u}) - \sum_{s=0}^{m_0} (\hat{y}_s, (F_s(x) - \hat{u}_s)^+) \ge \upsilon_0(\hat{u}) - N_0 \sum_{s=0}^{m_0} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|,$$

где $N_0 = \max_s \|\hat{y}_s\|$, что и требовалось. □

Далее рассмотрим задачи (6)

$$\min\bigl\{1/2\, \|F_i(x)^+\|^2 \colon F_0(x) \le u_0, \dots, F_{i-1}(x) \le u_{i-1},\ x \in \Omega\bigr\}$$

и вспомогательные задачи (7)

$$\min\bigl\{(F_i(x), \hat{u}_i) \colon F_0(x) \le u_0,\ F_1(x) \le u_1, \dots, F_{i-1}(x) \le u_{i-1},\ x \in \Omega\bigr\}; \tag{11}$$

здесь $i = 1, \dots, m_0$ и фиксированные правые части $\hat{u}_s$ ограничений также заменены на параметры $u_s$. Функции оптимума этих задач $\upsilon_i(u)$ и $w_i(u)$ (которые для простоты обозначений также будем считать зависящими от полного набора векторов $u_s$) являются выпуклыми и непрерывными на $\mathcal{U}_*$. При этом $\hat{u} = [\hat{u}, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{m_0}] \in \mathcal{U}_*$ и $2\upsilon_i(\hat{u}) = w_i(\hat{u}) = \|\hat{u}_i\|^2$.

В разд. 1 мы предполагали для задач (7) наличие множителей Лагранжа (двойственных переменных) и выполнение для них условий оптимальности в форме условий Куна — Таккера. Это предположение позволяет оценить значение целевой функции задачи (11) в произвольных точках компакта $\Omega$.

**Лемма 2.** *Константу $N_0$ из предыдущей леммы можно сделать настолько большой, что при всех $x \in \Omega$ и всех $i = 1, \dots, m_0$ будут выполнены также неравенства*

$$\|\hat{u}_i\|^2 - (F_i(x), \hat{u}_i) \le N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о данной леммы дословно следует схеме, использованной при доказательстве леммы 1.

В заключение оценим поведение отклонений $\|(F_i(x) - \hat{u}_i)^+\|$.

**Лемма 3.** *Пусть константа $N_0$ определена так, как в предыдущей лемме. Тогда при всех $x \in \Omega$ и всех $i = 1, \dots, m_0$ выполнены неравенства*

$$\|(F_i(x) - \hat{u}_i)^+\|^2 \le \|F_i(x)\|^2 - \|\hat{u}_i\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно проследить следующую цепочку соотношений со ссылкой на лемму 2:

$$\|(F_i(x) - \hat{u}_i)^+\|^2 \leq \|F_i(x)^+ - \hat{u}_i\|^2 = \|F_i(x)^+\|^2 + \|\hat{u}_i\|^2 - 2(F_i(x)^+, \hat{u}_i)$$
$$\leq \|F_i(x)^+\|^2 - \|\hat{u}_i\|^2 + 2N_0 \sum_{s=0}^{i-1} \|(F_s(x) - \hat{u}_s)^+\|.$$

□

Значение последней леммы состоит в том, что отклонения $\delta_i(x) = \|(F_i(x) - \hat{u}_i)^+\|$ для систем ограничений-неравенств с большими индексами (приоритетом) оценены через точно такие же отклонения для систем ограничений-неравенств с меньшими индексами (приоритетами).

Приведенные леммы несколько модифицированы по сравнению с аналогичными утверждениями, применяемыми авторами при анализе задач линейного программирования.

## 4. Условия сходимости метода

Как уже отмечалось, условия на поведение параметров регуляризации остаются теми же, что и для задач линейного программирования (см. уже упоминавшуюся работу [13] и библиографию к ней). А именно, параметры регуляризации $\alpha$, $\beta_0$, $\beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ должны быть бесконечно малыми положительными величинами и

$$\gamma_s = \beta_{s-1}/\beta_s \to 0 \qquad (0 < s \leq m_0). \tag{12}$$

Для удобства дальнейшего изучения и, желая подчеркнуть связь предлагаемого подхода с методом линейной свертки критериев в задачах лексикографической оптимизации, перепишем целевую функцию задачи (9) в виде

$$\Psi_\omega(x) = 2\beta_0 \Phi_\sigma(x) = \omega_0 \|F_0^+(x)\|^2 + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|F_s^+(x)\|^2 + \omega_{m_0+1} f_0(x) + \omega_{m_0+2}\|x\|^2,$$

где $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \beta_0/\beta_1$, $\omega_2 = \beta_0/\beta_2, \dots, \omega_{m_0} = \beta_0/\beta_{m_0}$, $\omega_{m_0+1} = 2\beta_0$, $\omega_{m_0+2} = \alpha\beta_0$. В силу условий (12) параметры $\omega_s$ также являются бесконечно малыми положительными величинами и также

$$\omega_s/\omega_{s-1} \to 0 \qquad (s = 2, 3, \dots, m_0 + 2). \tag{13}$$

Перейдем к анализу свойств последовательности $x^\sigma$ решений задач (9).

Сразу оговорим, что все последующие доказательства в целом следуют схеме аналогичных доказательств, проведенных авторами ранее при анализе линейного случая. Изменения и дополнения касаются включения в эти схемы свойств операции положительной срезки векторов (операции евклидовой проекции вектора на неотрицательный ортант соответствующего евклидова пространства), что необходимо при переходе от задач с ограничениями-равенствами, рассматриваемыми в линейном случае, к оптимизационным задачам с ограничениями-неравенствами, рассматриваемыми в данной работе. Также были приняты несколько иные исходные предположения (в частности, предположения об ограниченности директивной области $\Omega$), позволяющие избежать ссылки на лемму Хоффмана, существенно используемую при анализе линейного случая, но неприменимую для нелинейных задач. Роль указанных изменений и дополнений будет отчетливо видна уже при доказательстве первой из последующих лемм.

Покажем вначале, что $\|(F_s(x^\sigma) - \hat{u}_s)^+\| \to 0$ $(0 \leq s \leq m_0)$, где $\hat{u}_s$ взяты из (4), (5). Для этого, как и ранее, воспользуемся методом математической индукции.

Базой этой индукции служит следующая лемма (доказывается полностью).

**Лемма 4.** *Пусть параметры регуляризации* $\alpha$, $\beta_0$, $\beta_1, \dots, \beta_{m_0}$ *являются бесконечно малыми положительными величинами и выполнено условие* (12). *Тогда оптимальный вектор* $x^\sigma$ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношению* $\delta_0(\sigma) = \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в линейном случае, начнем с того, что по определению элементов $x^\sigma$ имеем: $\Psi_\omega(x^\sigma) = \min\limits_{x\in\Omega} \Psi_\omega(x) \le \Psi_\omega(\hat{x})$, откуда вытекает неравенство

$$\|F_0^+(x^\sigma)\|^2 - \|\hat{u}_0\|^2 \le \omega_{m_0+1}(f(\hat{x}) - f(x^\sigma)) + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\hat{u}_s\|^2 - \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|F_s^+(x^\sigma)\|^2 + \omega_{m_0+2}\|\hat{x}\|^2.$$

Поскольку вектор $\hat{u}_0$ является евклидовой проекцией нуль-вектора на выпуклое замкнутое множество $U_0 = \{u\colon \exists x \in \Omega \;\; F_0(x) \le u\}$, то имеем еще одно неравенство

$$\|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\|^2 \le \|F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0\|^2 \le \|F_0(x^\sigma)^+\|^2 - \|\hat{u}_0\|^2.$$

Отметим, что в нем мы дополнительно воспользовались свойствами операции положительной срезки векторов.

Далее применяем лемму 1 (она адаптирована к нелинейным задачам с ограничениями-неравенствами). Получаем третье неравенство

$$\omega_{m_0+1}(f(\hat{x}) - f(x^\sigma)) \le \omega_{m_0+1} N_0 \Big( \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| + \sum_{s=1}^{m_0} \|F_s^+(x^\sigma)\| + \sum_{s=1}^{m_0} \|\hat{u}_s\| \Big).$$

Наконец, выделяя полные квадраты, получаем

$$\begin{aligned} &\omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \|F_s^+(x^\sigma)\| - \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|F_s^+(x^\sigma)\|^2 \\ &= \omega_{m_0+1} \left[ N_0^2 \sum_{s=1}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} - \sum_{s=1}^{m_0} \left( \sqrt{\frac{\omega_s}{\omega_{m_0+1}}} \|F_s^+(x^\sigma)\| - N_0 \sqrt{\frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}} \;\right)^2 \right] \\ &\le \omega_{m_0+1} N_0^2 \sum_{s=1}^{m_0} \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s}. \end{aligned}$$

Складывая отдельно левые и правые части четырех выписанных выше неравенств, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} &\|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\|^2 \\ &\le \omega_{m_0+1} N_0 \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| + \sum_{s=1}^{m_0} \omega_s \|\hat{u}_s\|^2 + \omega_{m_0+1} N_0 \sum_{s=1}^{m_0} \left( \|\hat{u}_s\| + N_0 \frac{\omega_{m_0+1}}{4\omega_s} \right) + \omega_{m_0+2} \|\hat{x}\|^2. \end{aligned}$$

По условиям (12), (13) и в виду ограниченности множества $\Omega$ найдется такая константа $N_1$, что последние три слагаемые не превосходят $N_1\omega_1$. Поэтому

$$\|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\|^2 \le \omega_{m_0+1} N_0 \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| + N_1\omega_1,$$

и значит найдется такая константа $N_2$, что

$$\delta_0(\sigma) = \|(F_0(x^\sigma) - \hat{u}_0)^+\| \le \frac{\omega_{m_0+1} N_0}{2} + \sqrt{\left( \frac{\omega_{m_0+1} N_0}{2} \right)^2 + N_1\omega_1} \le N_2 \sqrt{\omega_1} \to 0.$$

Здесь также применены условия (12), (13). □

Перейдем к обоснованию шага индукции.

Следующую лемму приведем уже без доказательства (оно проводится по схеме, сходной с доказательством соответствующих лемм в линейном случае с уже продемонстрированными выше поправками и изменениями, вызванными наличием в исходной задаче ограничений-неравенств).

**Лемма 5.** *Пусть выполнены предположения предыдущей леммы и оптимальный вектор* $x^\sigma$ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношениям*

$$\delta_s(\sigma) = \|(F_s(x^\sigma) - \hat{u}_s)^+\| \to 0 \qquad (s = 0, 1, \ldots, k < m_0).$$

*Тогда* $\delta_{k+1}(\sigma) = \|(F_{k+1}(x^\sigma) - \hat{u}_{k+1})^+\| \to 0.$

Леммы 4, 5 завершают математическую индукцию и с учетом компактности $\Omega$ позволяют сформулировать следующее утверждение.

**Теорема 1.** *Пусть параметры регуляризации* $\alpha$, $\beta_0$, $\beta_1, \ldots, \beta_{m_0}$ *являются бесконечно малыми положительными величинами и выполнено условие* (12). *Тогда оптимальный вектор* $x^\sigma$ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношению*

$$\rho(x^\sigma, X_{m_0}) \to 0.$$

Исследуем теперь поведение величин $f_0(x^\sigma)$.

**Лемма 6.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда оптимальный вектор* $x^\sigma$ *задачи* (9) *удовлетворяет соотношению* $f(x^\sigma) \to f(\hat{x})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\hat{x}(u^\sigma)$ — минимальное по норме решение задачи (10), отвечающее правым частям $u_s = u_s^\sigma = F_s(x^\sigma)^+$, где $s = 0, 1, \ldots, m_0$. Поскольку вектор $x^\sigma$ удовлетворяет ограничениям этой задачи, то $f(x^\sigma) \geq \upsilon_0(u^\sigma)$. Вместе с тем

$$\Psi_\omega(x^\sigma) = \min_{x \in \Omega} \Psi_\omega(x) \leq \Psi_\omega(\hat{x}(u^\sigma)).$$

Отсюда, с учетом того что первые $m_0 + 1$ слагаемых в выражениях для $\Psi_\omega(x^\sigma)$ и $\Psi_\omega(\hat{x}(u^\sigma))$ связаны неравенствами $\omega_s\|F_s(\hat{x}(u^\sigma))^+\| \leq \omega_s\|F_s(x^\sigma)^+\|$ $(s = 0, 1, \ldots, m_0)$, получаем

$$0 \leq f(x^\sigma) - \upsilon_0(u^\sigma) \leq \frac{\omega_{m_0+2}}{\omega_{m_0+1}} (\|\hat{x}(u^\sigma)\|^2 - \|x^\sigma\|^2).$$

Осталось перейти к пределу в левой и правой частях этого соотношения и учесть теорему 1, непрерывность функции оптимума $\upsilon_0(\cdot)$ и условия на параметры регуляризации (13). □

Соединяя утверждения теоремы 1 и леммы 6, получаем итоговое утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $[x^\sigma, y^\sigma]$ — *седловая точка симметрично регуляризованной функции Лагранжа* (8) *относительно области* $\Omega \times \mathbb{R}^m_+$. *Тогда вектор* $x^\sigma$ *является решением задачи* (9) *и выполняются соотношения:*

$$f(x^\sigma) \to f(\hat{x}), \qquad \beta_s y_s^\sigma = F_s(x^\sigma)^+ = u_s^\sigma \to \hat{u}_s \qquad (s = 0, 1, \ldots, m_0),$$

*где* $\hat{x}$ — *нормальное решение задачи* (4), *векторы* $\hat{u}_s$ *взяты из соотношений* (4), (5).

## 5. Заключение

В работе результаты авторов по применению симметричной регуляризации классической функции Лагранжа одновременно по прямым и двойственным переменным к поиску обобщенных решений несобственных задач линейного программирования перенесены на задачи нелинейного (выпуклого) программирования. Показано, что метод автоматически приводит к обычному решению нелинейной задачи в случае совместности ее ограничений и к ее обобщенному решению в случае, когда ее ограничения противоречивы. Приведены теоремы сходимости и содержательная интерпретация обобщенного решения в лексикографической постановке.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Еремин И. И., Мазуров Вл. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Ватолин А. А.** Множества разрешимости и коррекция седловых функций и систем неравенств: препринт / Ин-т математики и механики УрО АН СССР. Свердловск, 1989. 90 с.
3. **Попов Л. Д.** Линейная коррекция несобственных минимаксных выпукло-вогнутых задач по максиминному критерию // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 9. С. 1100–1110.
4. **Скарин В. Д.** Об одном подходе к анализу несобственных задач линейного программирования // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 3. С. 439–448.
5. **McCormick S. T.** How to compute least infeasible flows // Math. Programming. 1997. Vol. 78, no. 2. P. 179–194.
6. **Vada J., Slupphaug O., Johansen T. A.** Optimal prioritized infeasibility handling in model predictive control: parametric preemptive multiobjective linear programming approach // J. Optim. Theory Appl. 2001. Vol. 109, no. 2. P. 385–413.
7. **Leon T., Liern V., Vercher E.** Viability of infeasible portfolio selection problems: a fuzzy approach // European J. Oper. Res. 2002. Vol. 139, no. 1. P. 178–189.
8. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
9. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981. 400 с.
10. **Еремин И. И.** О задачах последовательного программирования // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 1. С. 124–129.
11. **Федоров В. В.** Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
12. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
13. **Popov L.D., Skarin V.D.** On alternative duality and lexicographic correction of right-hand-side vector in improper linear programs of the 1st kind // Proc. V Internat. Conf. on Optimization Methods and Applications (OPTIMA-2014; Petrovac, Montenegro, September 28 – October 4, 2014). Moscow, 2014. P. 152–153.


Поступила 25.03.2017

Попов Леонид Денисович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: popld@imm.uran.ru

Скарин Владимир Дмитриевич
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

## REFERENCES


1. Eremin I.I., Mazurov Vl.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi linejnogo i vypuklogo programmirovanija* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 336 p.
2. Vatolin A.A. *Mnozhestva razreshimosti i korrektsiya sedlovykh funktsii i sistem neravenstv* [Solvability sets and correction of saddle functions and inequality systems]. Preprint, Inst. Mat. Mech. Ural Branch Acad. Sci. USSR, Sverdlovsk, 1989, 90 p.
3. Popov L.D. Linear correction of ill-posed convex-concave minimax problems on a maximin criterion. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1986, vol. 26, no. 5, pp. 30–39. doi: 10.1016/0041-5553(86)90037-6 .

4. Skarin V.D. An approach to the analysis of improper problems of linear programming. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1986, vol. 26, no. 2, pp. 73–79. doi: 10.1016/0041-5553(86)90011-X .
5. McCormick S.T. How to compute least infeasible flows. *Math. Programming*, 1997, vol. 78, no. 2, pp. 179–194. doi: 10.1007/BF02614370 .
6. Vada J., Slupphaug O., Johansen T.A. Optimal prioritized infeasibility handling in model predictive control: parametric preemptive multiobjective linear programming approach. *J. Optim. Theory Appl.*, 2001, vol. 109, no. 2, pp. 385–413. doi: 10.1023/A:1017570507125 .
7. Leon T., Liern V., Vercher E. Viability of infeasible portfolio selection problems: a fuzzy approach. *European J. Oper. Res.*, 2002, vol. 139, no. 1, pp. 178–189. doi: 10.1016/S0377-2217(01)00175-8 .
8. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p.
9. Vasil'ev F.P. *Metody resheniya ehkstremal'nykh zadach. Zadachi minimizatsii v funktsional'nykh prostranstvakh, regulyarizatsiya, approksimatsiya. Uchebnoe posobie* [Methods for solving extremal problems. Minimization problems in function spaces, regularization, approximation. Textbook.] Moscow, Nauka Publ., 1981, 400 p.
10. Eremin I.I. Problems of successive programming. *Siberian Math. J.*, 1973, vol. 14, no. 1, pp. 36–43. doi: 10.1007/BF00967264 .
11. Fedorov V.V. *Chislennye metody maksimina* [Numerical methods of maximin]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 280 p.
12. Gol'shtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematical programming and its applications]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 352 p.
13. Popov L.D., Skarin V.D. On alternative duality and lexicographic correction of right-hand-side vector in improper linear programs of the 1st kind. *Proc. V Internat. Conf. on Optimization Methods and Applications* (*OPTIMA*-2014) (Petrovac, Montenegro, September 28 – October 4, 2014), Moscow, 2014, pp. 152–153.

The paper was received by the Editorial Office on March 25, 2017.

*Leonid Denisovich Popov*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: popld@imm.uran.ru .

*Vladimir Dmitrievich Skarin*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: skavd@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.5

# ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СПЛАЙНОВ ПО ТРЕХТОЧЕЧНЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ИНТЕРПОЛЯНТАМ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ И НЕПРЕРЫВНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

**А.-Р. К. Рамазанов, В. Г. Магомедова**

Для непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ по сеткам попарно различных узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ исследована скорость сходимости кусочно рациональных функций $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x,f)$ таких, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ имеем $R_{N,1}(x) = (R_i(x)(x - x_{i-1}) + R_{i-1}(x)(x_i - x))/(x_i - x_{i-1})$, где $R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i/(x - g_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$, коэффициенты $\alpha_i$, $\beta_i$ и $\gamma_i$ определяются условиями $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$, а полюсы $g_i$ — узлами; считаем $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$. Даны оценки скорости сходимости $R_{N,1}(x,f)$ через различные структурные характеристики функции:

1) в случае равномерных сеток узлов — через модуль непрерывности третьего порядка функции $f(x)$;

2) для непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$ с выбором узлов сетки — через вариацию и через модуль изменения производных первого и второго порядков; при этом оценки через вариацию имеют порядок наилучших полиномиальных сплайн-приближений.

Ключевые слова: сплайны, интерполяционные сплайны, рациональные сплайны.

**A.-R. K. Ramazanov, V. G. Magomedova. Convergence bounds for splines for three-point rational interpolants of continuous and continuously differentiable functions**.

For functions $f(x)$ continuous on an interval $[a,b]$ and grids of pairwise different nodes $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$, we study the convergence rate of piecewise rational functions $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x,f)$ such that, for $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, we have $R_{N,1}(x) = (R_i(x)(x - x_{i-1}) + R_{i-1}(x)(x_i - x))/(x_i - x_{i-1})$, where $R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i/(x - g_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$; the coefficients $\alpha_i$, $\beta_i$, and $\gamma_i$ are defined by the conditions $R_i(x_j) = f(x_j)$ for $j = i-1, i, i+1$; and the poles $g_i$ are defined by the nodes. It is assumed that $R_0(x) \equiv R_1(x)$ and $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$. Bounds for the convergence rate of $R_{N,1}(x,f)$ are found in terms of certain structural characteristics of the function:

(1) the third-order modulus of continuity in the case of uniform grids;

(2) the variation and the modulus of change of the first and second derivatives in the case of continuously differentiable functions $f(x)$; here, the bounds in terms of the variation have the order of the best polynomial spline approximations.

Keywords: splines, interpolation splines, rational splines.

**MSC**: 97N50

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-224-233

## Введение

Первые существенные результаты по исследованию задачи С. Б. Стечкина о наилучших полиномиальных сплайн-приближениях с выбором узлов для классов дифференцируемых функций с производными из классов Лебега или конечной вариации получили Ю. Н. Субботин и Н. И. Черных [1].

Подробно исследования наилучших полиномиальных сплайн-приближений для различных классов функций и вопросы выбора узлов можно найти в [2–6] и цитируемых в них работах. При этом изучались также вопросы приближения функций полиномиальными сплайнами определенного порядка по конкретным видам сеток узлов.

Некоторые вопросы о рациональных сплайн-приближениях рассматривались, например, в работах [7–10].

В частности, в [9] для функций $f(x)$ из классов $C_{[a,b]}$ и $C^{(1)}_{[a,b]}$ приведены оценки скорости равномерной сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам и производных этих сплайнов соответственно к функции $f(x)$ и к производной $f'(x)$ через их модули непрерывности первого порядка в случае произвольных сеток попарно различных узлов.

В данной статье представлены оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывных функций в случае равномерных сеток — через модуль непрерывности третьего порядка и для непрерывно дифференцируемых функций с выбором узлов сетки — через вариацию и через модуль изменения производных первого и второго порядков.

## 1. Уточнение задачи и вспомогательные утверждения

Трехточечные рациональные интерполянты — функции вида

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\gamma_i}{x - g_i} \tag{1.1}$$

— строятся (см. [9]) для непрерывных на данном отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ по произвольной сетке попарно различных узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ так, что коэффициенты $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ удовлетворяют условиям $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$, а в качестве полюса $g_i$ можно взять любое действительное число вне отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Тогда при $i = 1, 2, \dots, N-1$ имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i),\\
\beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i),\\
\gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Как легко увидеть из выражения $R''_i(x)$, если при некотором $i = 1, 2, \dots, N-1$ функция $f(x)$ является выпуклой или вогнутой на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, то на этом отрезке $R_i(x)$ является соответственно выпуклой или вогнутой функцией.

Для данных $f \in C_{[a,b]}$, натуральных чисел $N \geqslant 2$ и $k$, разбиения $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ и произвольного набора чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ с $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ построим кусочно-рациональную функцию $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ такую, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ выполняется равенство

$$R_{N,k}(x) = \frac{R_i(x)(x - x_{i-1})^k + R_{i-1}(x)(x_i - x)^k}{(x - x_{i-1})^k + (x_i - x)^k};$$

считаем, что $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

Далее использованы обозначения

$$\|\varphi\|_{[a,b]} = \sup\{|\varphi(x)|\colon x \in [a, b]\},$$

$$\|\Delta\| = \max\{x_i - x_{i-1}\colon i = 1, 2, \dots, N\}.$$

Можно показать, что гладкие сплайны $R_{N,k}(x)$ сами (в отличие от гладких полиномиальных сплайнов) и их производные $R'_{N,k}(x)$ обладают свойством безусловной сходимости (по терминологии Ю. Н. Субботина [11]) для всех функций классов $C_{[a,b]}$ и $C^{(1)}_{[a,b]}$ соответственно.

Укажем также, что при $k \geqslant 2$ сплайны $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ сохраняют выпуклость (вниз или вверх) функции $f(x)$ в некоторых окрестностях узлов сетки $\Delta$.

Заметим, что $R_{N,k}(x)$ имеют наименьшую степень как рациональные функции на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$ при $k = 1$, а именно, при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ получаем

$$R_{N,1}(x) = R_i(x)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x)\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}}. \tag{1.3}$$

Поэтому приводимые ниже оценки сплайн-приближений даны для $R_{N,1}(x)$ через различные структурные характеристики.

Модуль непрерывности (гладкости) третьего порядка функции $f \in C_{[a,b]}$ определяем, как обычно, через соответствующую конечную разность $\Delta_h^3 f(x)$:

$$\omega_3(\delta, f) = \sup\{|\Delta_h^3 f(x)|\colon 0 \leqslant h \leqslant \delta; x, x+3h \in [a,b]\} \quad (\delta \geqslant 0).$$

Вариация функции $\varphi \in C_{[a,b]}$ на отрезке $[a,b]$ определяется соотношением

$$V(\varphi, [a,b]) = \sup \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|,$$

где супремум берется по всем разбиениям $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и при всех $n = 1, 2, \dots$ .

Следующее утверждение используется при построении сетки узлов сплайна в случае функций, имеющих на данном отрезке непрерывную вторую производную конечной вариации.

**Лемма.** *Если $\varphi \in C_{[a,b]}$ и $V = V(\varphi, [a,b]) < \infty$, то при любом натуральном $n$ существует разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ с $m \leqslant n$ такое, что*

$$V(\varphi, [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})^2 \leqslant \frac{1}{n^3} V(b-a)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

*а при $i = 1, 2, \dots, m-1$ это неравенство обращается в равенство.*

Доказательство. Исключив тривиальный случай постоянной функции $\varphi(x)$, положим $t_0 = a$.

Для краткости обозначим $V_i = V(\varphi, [t_{i-1}, t_i])$ и возьмем последовательно все точки $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k \leqslant b$, для которых выполняется равенство

$$V_i (t_i - t_{i-1})^2 = \frac{1}{n^3} V(b-a)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Тогда, используя неравенство Гельдера для сумм, получим

$$\frac{k}{n} = \sum_{i=1}^{k} \Big(\frac{V_i}{V}\Big)^{1/3} \Big(\frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\Big)^{2/3} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{V_i}{V}\Big)^{1/3} \Big(\sum_{i=1}^{k} \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a}\Big)^{2/3} \leqslant 1,$$

а поэтому $k \leqslant n$.

Если окажется $k = n$, то предыдущие неравенства также обращаются в равенства и должно выполняться равенство

$$\sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1}) = b - a,$$

а значит, $t_k = t_n = b$, искомое $m = k$.

Если же окажется $k < n$, то по выбору числа $k$ должно выполняться неравенство

$$V(\varphi, [t_k, b])(b - t_k)^2 < \frac{1}{n^3} V(b-a)^2,$$

поэтому положим $t_{k+1} = b$, т. е. искомое $m = k+1$. Лемма доказана.

Для оценки скорости сплайн-приближений в случае произвольных дважды непрерывно дифференцируемых функций (без ограничений на вариацию второй производной) ниже используется модуль изменения функции. Это позволяет при необходимости распространить полученную оценку также на обобщенные вариации.

Модуль изменения порядка $n$ $(n = 1, 2, \dots)$ функции $\varphi \in C[a,b]$ определяется соотношением [12]

$$V_n(\varphi, [a,b]) = \sup\Big\{ \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)| \Big\},$$

где супремум берется при фиксированном $n$ по всем точкам $\alpha_1 < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \dots \leqslant \alpha_n < \beta_n$ из отрезка $[a,b]$.

Близкие определения модуля изменения даны в [13; 14].

Ниже использовано также принятое обозначение

$$\Omega(\varphi,[a,b]) = \sup\{|\varphi(x)-\varphi(y)|\colon x,y\in[a,b]\}$$

полного колебания функции $\varphi(x)$ на данном отрезке $[a,b]$.

## 2. Оценки сплайн-приближений

**Теорема 1.** *Пусть* $f\in C_{[a,b]}$, *натуральное* $N\geqslant 2$, $\Delta\colon x_i = a + i\dfrac{b-a}{N}$ $(i=0,1,\dots,N)$ — *сетка узлов.*

*Тогда при любом выборе чисел* $g=\{g_1,g_2,\dots,g_{N-1}\}$ *с* $g_i\notin[x_{i-1},x_{i+1}]$ $(i=1,2,\dots,N-1)$ *сплайн* $R_{N,1}(x)=R_{N,1}(x,f,\Delta,g)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|f-R_{N,1}\|_{[a,b]} \leqslant W_3\omega_3\Big(\frac{2(b-a)}{3N},f\Big) + \frac{2}{3\sqrt3}\frac{M}{\mu}\Big(\frac{b-a}{N}\Big)^3, \tag{2.1}$$

*где* $W_3$ — *константа Уитни,* $M=\max\{|f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})|\colon i=1,2,\dots,N-1\}$, $\mu=\min\{|x_{i-1}-g_i|,|x_{i+1}-g_i|\colon i=1,2,\dots,N-1\}$.

Доказательство. Пусть при данном $i=1,2,\dots,N-1$ имеем $x\in[x_{i-1},x_{i+1}]$ и $g_i\notin[x_{i-1},x_{i+1}]$. Представим полином $P(x)=(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})$ в виде $P(x)=P(g_i)+Q_2(x)(x-g_i)$ с соответствующим полиномом $Q_2(x)$ второй степени.

Пусть теперь $R_i(x)$ — рациональная функция из (1.1), интерполирующая $f(x)$ в узлах $x_{i-1},x_i,x_{i+1}$, с коэффициентами $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ из (1.2). Тогда для полинома второй степени

$$P_2(x)=\alpha_i+\beta_i(x-x_i)+f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})Q_2(x)$$

получим

$$f(x)-R_i(x)=f(x)-P_2(x)+\frac{f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})}{x-g_i}P(x).$$

Отсюда в силу интерполяционности $R_i(x)$ выводим $P_2(x_j)=f(x_j)$ $(j=i-1,i,i+1)$. Тогда по неравенству Уитни [15] при $x\in[x_{i-1},x_{i+1}]$

$$|f(x)-P_2(x)|\leqslant W_3\omega_3\Big(\frac{x_{i+1}-x_{i-1}}{3},f\Big)=W_3\omega_3\Big(\frac{2(b-a)}{3N},f\Big),$$

где константа Уитни ([15]) $W_3\in\Big(\dfrac{16}{15},\dfrac{14}{9}\Big)$.

Легко показать, что при $x\in[x_{i-1},x_{i+1}]$ имеем

$$|P(x)|=|(x-x_{i-1})(x-x_i)(x-x_{i+1})|\leqslant\frac{2}{3\sqrt3}\Big(\frac{b-a}{N}\Big)^3,$$

поэтому

$$|f(x)-R_i(x)|\leqslant W_3\omega_3\Big(\frac{2(b-a)}{3N},f\Big)+\Big|\frac{f(x_{i-1},x_i,x_{i+1})}{x-g_i}\Big|\frac{2}{3\sqrt3}\Big(\frac{b-a}{N}\Big)^3. \tag{2.2}$$

Положим $R_0(x)\equiv R_1(x)$ и $R_N(x)\equiv R_{N-1}(x)$ и на отрезке $[a,b]$ определим сплайн $R_{N,1}(x)=R_{N,1}(x,f,\Delta,g)$ по (1.3).

Используя равенство (1.3) и оценку (2.2), приходим к неравенству (2.1).

Теорема доказана.

Заметим, что правую часть неравенства (2.1) можно сделать сколь угодно близкой к первому ее слагаемому за счет выбора сколь угодно больших по модулю значений полюсов $g_1, g_2, \dots, g_{N-1}$.

Это же замечание относится к полученным ниже оценкам (2.3), (2.10) и (2.15).

До перехода к следующим оценкам для непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и произвольной сетки узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ дадим более удобное для этих оценок представление рациональных интерполянтов $R_i(x)$ для каждой тройки узлов $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$, а именно положим

$$R_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + A_i \frac{x - x_i}{x - g_i} \tag{2.3}$$

и найдем значения коэффициентов $a_i$, $b_i$, $A_i$ из условий интерполяции $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$.

Тогда получим $a_i = f(x_i)$, $A_i = -f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i)$; при этом для $b_i$ в зависимости от того, точка $x \in (x_{i-1}, x_i)$ или же точка $x \in (x_i, x_{i+1})$, воспользуемся соответственно выражениями

$$b_i = f(x_{i-1}, x_i) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i+1} - g_i), \quad b_i = f(x_i, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i).$$

Для краткости при $i = 1, 2, \dots, N-1$ положим также

$$D_i(x) = f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})}{x - g_i}.$$

Тогда, считая точку $x$ отличной от узлов, соответственно выводим

$$R_i(x) - f(x) = [f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) - f(x_{i-1}, x_i, x)](x - x_{i-1})(x - x_i) - D_i(x), \tag{2.4}$$

$$R_i(x) - f(x) = [f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) - f(x, x_i, x_{i+1})](x - x_i)(x - x_{i+1}) - D_i(x). \tag{2.5}$$

Как видно из этих равенств, если $f''(x)$ является постоянной на $[a, b]$, то для любой сетки узлов оценка разности $R_i(x) - f(x)$ сводится к оценке лишь величины $D_i(x)$.

Ясно, что при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ и любом $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ имеем

$$|D_i(x)| \leqslant \frac{(\max\{x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i\})^3}{4|x - g_i|} \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}.$$

Поэтому, переходя в равенствах (2.4) и (2.5) от разделенных разностей к производным второго порядка и учитывая неравенства

$$|(x - x_{i-1})(x - x_i)| \leqslant \frac{1}{4}(x_i - x_{i-1})^2 \text{ при } x \in [x_{i-1}, x_i]$$

и

$$|(x - x_i)(x - x_{i+1})| \leqslant \frac{1}{4}(x_{i+1} - x_i)^2 \text{ при } x \in [x_i, x_{i+1}],$$

при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ получим

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant \frac{1}{8}\Omega(f'', [x_{i-1}, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_{i-1})^2$$

$$+ \frac{(\max\{x_i - x_{i-1}, x_{i+1} - x_i\})^3}{4|x - g_i|} \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}. \tag{2.6}$$

**Теорема 2.** *Пусть* $f \in C^{(2)}_{[a,b]}$, *вариация* $V = V(f'', [a,b]) < \infty$, $n$ *— любое натуральное число.*

*Тогда существует сетка узлов* $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ *с* $N \leqslant 2n$, *для которой при любом выборе чисел* $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ *с* $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ *сплайн* $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|f - R_{N,1}\|_{[a,b]} \leqslant \frac{(b-a)^2}{N^3} V + \frac{\|\Delta\|^3}{4\mu} \|f''\|_{[a,b]}, \tag{2.7}$$

*где* $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i| \colon i = 1, 2, \ldots, N-1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При построении сетки узлов будем считать, что $f''(x)$ не является постоянной на $[a,b]$. Для заданного натурального $n$ к функции $f''(x)$ применим лемму, согласно которой существует разбиение $a = t_0 < t_1 \cdots < t_m = b$ с $m \leqslant n$ такое, что при $i = 1, 2, \ldots, m-1$ выполняется равенство

$$V(f'', [t_{i-1}, t_i])(t_i - t_{i-1})^2 = \frac{1}{n^3} V(b-a)^2,$$

$$V(f'', [t_{m-1}, t_m])(t_m - t_{m-1})^2 \leqslant \frac{1}{n^3} V(b-a)^2. \tag{2.8}$$

Построим теперь промежуточные точки $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Возьмем $\tau_1 \in (t_0, t_1)$. Тогда

$$V(f'', [\tau_1, t_1])(t_1 - \tau_1)^2 < V(f'', [t_0, t_1])(t_1 - t_0)^2 = \frac{1}{n^3} V(b-a)^2.$$

Значит, если возьмем точку $\tau_2$ такую, что $V(f'', [\tau_1, \tau_2])(\tau_2 - \tau_1)^2 = \dfrac{1}{n^3} V(b-a)^2$, то получим $t_1 < \tau_2$.

С другой стороны, имеем $\tau_2 < t_2$, так как

$$V(f'', [\tau_1, t_2])(t_2 - \tau_1)^2 > V(f'', [t_1, t_2])(t_2 - t_1)^2 = \frac{1}{n^3} V(b-a)^2.$$

Продолжив эту процедуру, получим все точки

$$a = t_0 < \tau_1 < t_1 < \tau_2 < t_2 < \cdots < t_{m-1} < \tau_m < t_m = b,$$

если неравенство (2.8) также выполняется в виде равенства; если же (2.8) выполняется в виде строгого неравенства, то в качестве точки $\tau_m$ берем какую-нибудь точку из $(t_{m-1}, t_m)$.

Переобозначив $x_{2i} = t_i$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, $x_{2i-1} = \tau_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, получим сетку узлов

$$\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b \quad (N \leqslant 2n) \tag{2.9}$$

такую, что при $i = 1, 2, \ldots, N-1$ выполняется неравенство

$$V(f'', [x_{i-1}, x_{i+1}])(x_{i+1} - x_{i-1})^2 \leqslant \frac{1}{n^3} V(b-a)^2. \tag{2.10}$$

По сетке узлов (2.9) для функции $f(x)$ построим рациональные интерполянты $R_i(x)$ вида (2.3) для каждой тройки узлов $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$.

Тогда из неравенств (2.6), (2.10) и $N \leqslant 2n$ при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ получим

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant \frac{1}{N^3} V(b-a)^2 + \frac{\|\Delta\|^3}{4|x - g_i|} \|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]}. \tag{2.11}$$

Пусть теперь $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ — произвольный набор чисел таких, что $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$; будем считать также, что $R_0 \equiv R_1(x)$ и $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$.

Рассмотрим для заданной функции $f(x)$, сетки узлов $\Delta$ и набора чисел $g$ кусочно-рациональную функцию $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ такую, что при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ выполняется равенство (1.3).

Тогда из (1.3) и (2.11) получим требуемую оценку (2.7).

Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Пусть $f \in C^{(2)}_{[a,b]}$, $n$ — любое натуральное число. Тогда существует сетка узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ с $N \leqslant 2n$, для которой при любом выборе чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ с $g_i \notin [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ сплайн $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|f - R_{N,1}\|_{[a,b]} \leqslant 2\frac{(b-a)^2}{N^3} V_n(f'', [a,b]) + \frac{2(b-a)^3}{\mu N^3}\|f''\|_{[a,b]}, \tag{2.12}$$

*где* $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i|\colon i = 1, 2, \dots, N-1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала построим точки $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ такие, что $m \leqslant n$ и на каждом частичном отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ полное колебание второй производной $f''(x)$ на нем удовлетворяет неравенству

$$\Omega(f'', [t_{i-1}, t_i]) \leqslant \frac{1}{n} V_n(f'', [a,b]). \tag{2.13}$$

Для построения этих точек по аналогии с леммой применим легко доказываемое равенство

$$V_n(f'', [a,b]) = \sup \sum_{i=1}^{n} \Omega(f'', [t_{i-1}, t_i]),$$

где супремум берется при фиксированном $n$ по всем разбиениям $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.

Тогда существование точек $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ $(m \leqslant n)$ с неравенством (2.13) очевидно.

К этим точкам добавим равноотстоящие точки $\tau_j = a + j\dfrac{b-a}{n}$ $(j = 1, 2, \dots, n-1)$. Переобозначив точки после их объединения, получим новое разбиение $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ такое, что $N \leqslant m + n - 1 \leqslant 2n - 1$; причем при $i = 1, 2, \dots, N$ выполняются неравенства

$$x_i - x_{i-1} \leqslant \frac{b-a}{n}, \quad \Omega(f'', [x_{i-1}, x_i]) \leqslant \frac{1}{n} V_n(f'', [a,b]). \tag{2.14}$$

Для сетки узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ и произвольного набора точек $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ с $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ возьмем рациональную функцию $R_i(x)$ вида (2.3), интерполирующую $f(x)$ в узлах $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$, для которой имеют место равенства (2.4) и (2.5).

Тогда, применив неравенства (2.14), при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ получим

$$\begin{aligned} |f(x) - R_i(x)| &\leqslant \frac{(b-a)^2}{4n^3} V_n(f'', [a,b]) + \frac{(b-a)^3}{4n^3|x - g_i|}\|f''\|_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} \\ &\leqslant 2\frac{(b-a)^2}{N^3} V_n(f'', [a,b]) + \frac{2(b-a)^3}{N^3|x - g_i|}\|f''\|_{[a,b]}. \end{aligned}$$

Далее доказательство завершается вполне аналогично теореме 2.

Теорема доказана.

Приведем также оценку скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывно дифференцируемой на отрезке функции через модуль изменения ее производной.

**Теорема 4.** *Пусть $f \in C^{(1)}_{[a,b]}$, $n$ — любое натуральное число. Тогда существует сетка узлов $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ с $N \leqslant 2n$, для которой при любом выборе чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ с $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \dots, N-1)$ сплайн $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$ удовлетворяет неравенству*

$$\|f - R_{N,1}\|_{[a,b]} \leqslant 6\frac{b-a}{N^2}\Big(1 + \frac{b-a}{\mu N}\Big) V_n(f', [a,b]), \tag{2.15}$$

*где* $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i|\colon i = 1, 2, \dots, N-1\}$.

Доказательство. Доказательство проводится по аналогии с оценкой (2.12) по следующей схеме. Сначала построим точки $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ такие, что $m \leqslant n$ и при $i = 1, 2, \ldots, m$ выполняется неравенство

$$\Omega(f', [t_{i-1}, t_i] \leqslant \frac{1}{n} V_n(f', [a, b]).$$

Объединив точки $\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ с точками $\tau_j = a + j\dfrac{b-a}{n}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, получим сетку узлов $\Delta$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ такую, что $N \leqslant 2n - 1$, $x_i - x_{i-1} \leqslant \dfrac{b-a}{n}$,

$$\Omega(f', [x_{i-1}, x_i]) \leqslant \frac{1}{n} V_n(f', [a, b]) \quad (i = 1, 2, \ldots, N). \tag{2.16}$$

Для произвольного набора чисел $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ с $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ возьмем рациональную функцию $R_i(x)$ в виде (2.3), для которой выполняются равенства (2.4) и (2.5). В этих равенствах разделенные разности второго порядка выразим через разделенные разности первого порядка, а их через производные первого порядка. При этом применим равенство (2.4), если $x \in [x_{i-1}, x_i]$, и равенство (2.5), если $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Тогда с использованием (2.16) получим при $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ неравенство

$$|f(x) - R_i(x)| \leqslant \frac{3}{2} \frac{b-a}{n^2} \Big(1 + \frac{b-a}{3n\mu}\Big) V_n(f', [a, b]). \tag{2.17}$$

Положим, как и выше, $R_0(x) \equiv R_1(x)$ и $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$ и рассмотрим сплайн $R_{N,1}(x) = R_{N,1}(x, f, \Delta, g)$, который при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ удовлетворяет равенству (1.3).

Тогда из (1.3) и (2.17) получим требуемое неравенство (2.15).

Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Порядок наилучших сплайн-приближений некоторых классов функций // Мат. заметки. 1970. Т. 7, вып. 1. С. 31–42.
2. **Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 319 с.
3. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
4. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн–функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
5. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
6. **Малоземов В.Н., Певный А.Б.** Полиномиальные сплайны. Л.: Изд–во ЛГУ, 1986. 120 с.
7. **Schaback R.** Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 2. P. 281–292.
8. **Edeo A., Gofeb G., Tefera T.** Shape preserving $C^2$ rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences (ASRJETS). 2015. Vol. 12, no. 1. P. 110–122.
9. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Сплайны по рациональным интерполянтам // Дагестанские электрон. мат. изв. 2015. Вып. 4. С. 22–31.
10. **Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.** Сплайны по четырехточечным рациональным интерполянтам // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 233–246.
11. **Субботин Ю.Н.** Вариации на тему сплайнов // Фундамент. и прикл. математика 1997. Т. 3, вып. 4. С. 1043–1058.
12. **Севастьянов Е.А.** Кусочно-монотонная аппроксимация и Ф–вариации // Analysis Math. 1975. Вып. 1. С. 141–164.
13. **Lagrange R.** Sur oscillations d‘order superior d‘une functions numerique // Ann. Sci. École Norm. Sup. (3). 1965. Vol. 82, no 2. P. 101–130.

14. **Чантурия З.А.** О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 534–554.
15. **Whitney H.** On functions with bounded $n$–th differences // J. Math. Pures Appl. 1957. Vol. 6 (9), no. 36. P. 67–95.



Рамазанов Абдул-Рашид Кехриманович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой математического анализа
Дагестанский государственный университет
главный науч. сотрудник
Дагестанский научный центр РАН
г. Махачкала, республика Дагестан,
e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru


Поступила 17.04.2017


Магомедова Вазипат Гусеновна
канд. физ.-мат. наук, доцент
Дагестанский государственный университет
г. Махачкала, республика Дагестан
e-mail: vazipat@rambler.ru


**REFERENCES**


1. Subbotin Yu. N., Chernykh N. I. Order of the best spline approximations of some classes of functions. *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1970, vol. 7, no. 1, pp. 20–26. doi: 10.1007/BF01093336 .
2. Ahlberg J., Nilson E., Waish J. *The theory of splines and their applications.* New York: Acad. Press, 1967, 284 p. ISBN: 9781483222950 . Translated under the title *Teorija splajnov i ee prilozhenija.* M.: Mir, 1972, 319 p.
3. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splajny v vychislitelnoy matematike* [Splines in computational mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p.
4. Zavialov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splajn funkcij* [Methods of spline–functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.
5. Korneichuk N.P. *Splajny v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 352 p.
6. Malozyomov V. N., Pevny A. B. *Polinomial'nye splainy* [Polynomial splines]. Leningrad, LGU, 1986, 120 p.
7. Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen. *J. Approx.Theory*, 1973, vol. 7, no. 3,pp. 281–292. doi: 10.1016/0021-9045(73)90072-5 .
8. Edeo A., Gofeb G., Tefera T. Shape preserving $C^2$ rational cubic spline interpolation. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences* (*ASRJETS*), 2015, vol. 12, no. 1, pp. 110–122.
9. Ramazanov A.-R.K., Magomedova V.G. Splines on rational interpolants. *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2015, iss. 4, pp. 22–31 (in Russian).
10. Ramazanov A.-R. K., Magomedova V. G. Splines for four-point interpolants. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 233–246 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-233-246 .
11. Subbotin Yu.N. Variations on a spline theme. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 1043–1058 (in Russian).
12. Sevastyanov E. A. Piecewise-monotone approximation and Φ–variations. *Analysis Math.*, 1975, vol. 1, pp. 141–164 (in Russian).
13. Lagrange R. Sur oscillations d‘order superior d‘une functions numerique. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (3), 1965, vol. 82, no 2, pp. 101–130.

14. Chanturiya Z. A. On uniform convergence of Fourier series. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 29, no. 4, pp. 475–495. doi: 10.1070/SM1976v029n04ABEH003682 .
15. Whitney H. On functions with bounded $n$–th differences. *J. Math. Pures Appl.*, 1957, vol. 6 (9), no. 36, pp. 67–95.

The paper was received by the Editorial Office on April 17, 2017.

*Abdul-Rashid Kehrimanovich Ramazanov*, Dr. Phys.-Math., Prof., Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia; Dagestan Scientific Center RAN, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367025 Russia, e-mail: ar-ramazanov@rambler.ru .

*Vazipat Gusenovna Magomedova*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Dagestan State University, the Republic of Dagestan, Makhachkala, 367002 Russia, e–mail: vazipat@rambler.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.853

# О ПОСТРОЕНИИ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ НЕСОБСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ[1]

**В. Д. Скарин**

В работе рассматриваются задачи выпуклого программирования с возможно противоречивой системой ограничений. Такие задачи составляют важный класс несобственных моделей выпуклой оптимизации и часто возникают при математическом моделировании практических постановок из области исследования операций. Частота появления несобственных задач делает актуальной необходимость разработки теории и методов их численной аппроксимации (коррекции), т. е. объективных процедур "развязки" противоречивых ограничений, превращения несобственной модели в совокупность разрешимых задач и выбора среди них оптимальной коррекции. В работе аппроксимирующая задача строится путем вариации правых частей ограничений относительно минимума той или иной векторной нормы. Тип выбранной нормы определяет вид штрафной функции, минимизация которой вместе со стабилизирующей добавкой лежит в основе конкретного метода оптимальной коррекции несобственной задачи. Евклидова норма влечет применение квадратичного штрафа, кусочно-линейная норма (чебышевская, октаэдрическая) предполагает использование точной штрафной функции. Предлагаемые алгоритмы могут быть проинтерпретированы и как методы регуляризации (по Тихонову) задач выпуклого программирования с неточно заданной исходной информацией. Формулируются условия и устанавливаются оценки сходимости рассматриваемых методов.

Ключевые слова: выпуклое программирование, несобственная задача, оптимальная коррекция, метод регуляризации Тихонова, методы штрафных функций.

**V. D. Skarin. On the construction of regularizing algorithms for the correction of improper convex programming problems.**

We consider convex programming methods with a possibly inconsistent constraint system. Such problems constitute an important class of improper models of convex optimization and often arise in the mathematical modeling of real-life operations research statements. Since improper problems arise rather frequently, the theory and methods of their numerical approximation (correction) should be developed, which would allow to design objective procedures that resolve inconsistent constraints, turn an improper model into a family of feasible problems, and choose an optimal correction among them. In the present paper, an approximating problem is constructed by the variation of the right-hand sides of the constraints with respect to some vector norm. The type of the norm defines the form of a penalty function, and the minimization of the penalty function together with a stabilizing term is the core of each specific method of optimal correction of improper problems. The Euclidean norm implies the application of a quadratic penalty, whereas a piecewise linear (Chebyshev of octahedral) norm is concerned with the use of an exact penalty function. The proposed algorithms may also be interpreted as (Tikhonov) regularization methods for convex programming problems with inaccurate input information. Convergence conditions are formulated for the methods under consideration and convergence bounds are established.

Keywords: convex programming, improper problem, optimal correction, Tikhonov regularization method, penalty function methods.

**MSC:** 47N05, 37N25, 37N40

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-234-243

## Введение

При моделировании конкретных постановок из области исследования операций на основе аппарата математического программирования часто возникают оптимизационные задачи с противоречивой системой ограничений. Соответствующие модели составляют важнейший

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант № 14-11-00109.

класс несобственных задач (НЗ) [1] линейного и выпуклого программирования (ВП). Численный анализ подобных задач состоит прежде всего в их коррекции, т. е. построении в некотором смысле близких разрешимых задач, решение которых принимается за обобщенное (аппроксимационное) решение несобственной проблемы.

Достаточно часто причина возникновения несобственных задач заключается в неточном задании исходных данных. Модели, в которых информация о целевой функции и функциях ограничений носит приближенный характер, типичны для теории некорректных экстремальных задач. Поэтому является естественной попытка применить при исследовании НЗ ВП стандартные способы регуляризации некорректных моделей, такие как метод Тихонова (стабилизирующих функций), метод квазирешений и метод невязки [2].

В работе [3] для построения методов оптимальной коррекции НЗ ВП исследовались возможности метода невязки — одного из классических способов регуляризации некорректных задач оптимизации. В настоящей статье основное внимание уделяется методу Тихонова. Здесь рассматриваются два типа задач, аппроксимирующих исходную несобственную постановку. Задачи первого типа получаются в результате коррекции вектора правых частей ограничений по минимуму евклидовой нормы, второго типа — по минимуму чебышевской нормы. Соответственно возникают два подхода к построению методов оптимальной коррекции: один основан на минимизации квадратичной штрафной функции, второй — на минимизации точной штрафной функции специального вида. В обоих случаях к минимизируемой функции добавляется квадратичный стабилизатор, характерный для метода Тихонова. Для каждого подхода определяются условия и оценки сходимости соответствующих методов.

## 1. Несобственная задача ВП

Рассмотрим задачу ВП
$$\min\{f_0(x) \mid x \in X\}, \tag{1}$$
где $X = \{x \mid f(x) \le 0\}$, $f(x) = [f_1(x), \dots, f_m(x)]$, $f_i(x)$ — выпуклые функции, определенные на $\mathbb{R}^n$, $i = 0, 1, \dots, m$. Будем считать, что множество $X$ в задаче (1) может быть пустым. Обозначим через $L(x, \lambda) = f_0(x) + (\lambda, f(x))$ функцию Лагранжа для задачи (1), $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$. Определим $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \mid \inf\limits_x L(x, \lambda) > -\infty\}$. Если $X = \varnothing$, $\Lambda \neq \varnothing$, то согласно классификации из [1] задача (1) называется НЗ ВП 1-го рода. Это наиболее распространенный класс несобственных постановок, и ниже мы ограничимся рассмотрением таких задач.

Естественный способ оптимальной коррекции НЗ ВП состоит в замене (1) задачей
$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\bar\xi_p}\}, \tag{2}$$
где $\bar\xi_p = \arg\min\{\|\xi\|_p \mid \xi \in E\}$, $X_\xi = \{x \mid f(x) \le \xi\}$, $\xi \in \mathbb{R}^m_+$, $E = \{\xi \mid X_\xi \neq \varnothing\}$, $\|\cdot\|_p$ — символ некоторой векторной нормы в $\mathbb{R}^n$.

Если в задаче (1) $X \neq \varnothing$, то $\bar\xi_p = 0$ и задачи (1) и (2) совпадают. В противном случае оптимальный вектор задачи (2) принимается за обобщенное решение НЗ (1). Далее мы увидим, что качество аппроксимации будет зависеть от выбора нормы $p$.

## 2. Коррекция с помощью евклидовой нормы

Рассмотрим случай, когда вектор $\bar\xi_p = \bar\xi$ в задаче (2) определяется с помощью евклидовой нормы $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Нетрудно видеть, что если вектор $\bar\xi$ существует, то $\bar\xi = f^+(\bar x)$, где $\bar x \in \bar X = \operatorname{Arg}\min\{\varphi(x) = \|f^+(x)\|^2\}$, при этом $X_{\bar\xi} = \bar X$. Другими словами, задача (2) эквивалентна проблеме
$$\min\{f_0(x) \mid \varphi(x) \le \bar\varphi\}, \tag{3}$$
где $\bar\varphi = \min\varphi(x) = \|f^+(\bar x)\|^2 = \|\bar\xi\|^2$.

Задача (3) является частным случаем более общей постановки. Пусть $d(z)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$, такая что $d(0)=0$, $d(z)>0$ $(\forall z \in \mathbb{R}^m_+,\ z \neq 0)$. Примером подобной функции как раз и служит функция $\varphi(x)=d(f^+(x))$ из задачи (3). С помощью $d(z)$ можно ввести меру совместности системы $f(x)\leq 0$, определяющей множество $X$, а именно

$$\bar{d}=\inf_x d(f^+(x)). \tag{4}$$

Если величина $\bar{d}$ достигается, то $X\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bar{d}=0$. Достижимость $\bar{d}$ гарантируется в следующих случаях:

1) функции $f_i(x)$ линейны $(i=\overline{1,m})$;

2) множество $X_\xi$ непусто и ограничено для некоторого $\xi=\xi_0$.

Приведем пример НЗ ВП 1-го рода, когда задача определения вектора $\bar{\xi}$ не имеет решения.

П р и м е р 1. В пространстве $x=[x_1,x_2]\in\mathbb{R}^2$ рассмотрим задачу

$$\min\{x_1 \mid x_1^{-1}-x_2\leq 0,\ x_1\geq 1,\ x_2\leq 0\}. \tag{5}$$

Здесь $\inf\{\|\xi\| \mid \xi\in E\}=\inf\limits_x \varphi(x)=0$, но соответствующие нижние границы не достигаются. Множество $X_\xi$ непустое и неограниченное для любого $\xi>0$. Двойственная функция для задачи (5) имеет вид

$$\psi(\lambda)=\inf_x\{L(x,\lambda)=x_1+\lambda_1(x_1^{-1}-x_2)+\lambda_2(-x_1+1)+\lambda_3x_2\}=L(x(\lambda),\lambda),$$

где $\lambda=[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3]\geq 0$, $x(\lambda)$ — решение уравнения $\bigtriangledown_x L(x,\lambda)=0$. Решая это уравнение, получим $x_1^2(\lambda)=\lambda_1(1-\lambda_2)^{-1}$, $\lambda_1=\lambda_3>0$, $0\leq\lambda_2<1$, $x_2(\lambda)=x_2$ — произвольно. Отсюда $\psi(\lambda)=2\sqrt{\lambda_1(1-\lambda_2)}+\lambda_2$, $\sup\limits_{\lambda\geq 0}\psi(\lambda)=+\infty$. Очевидно, в задаче (5) $X=\varnothing$, $\Lambda\neq\varnothing$, т. е. (5) — НЗ ВП 1-го рода.

С целью построения алгоритмов оптимальной коррекции НЗ ВП воспользуемся методом Тихонова регуляризации некорректных задач оптимизации. Применительно к разрешимой задаче ВП вида (1) этот метод состоит в решении задачи

$$\min\{g_\alpha(x) \mid x\in X\}, \tag{6}$$

где $g_\alpha(x)=f_0(x)+\alpha\Omega(x)$, $\alpha>0$, $\Omega(x)$ — некоторый стабилизатор [2] задачи (1). Для простоты положим $\Omega(x)=\|x\|^2$. Задача (6) при $X\neq\varnothing$ разрешима в единственной точке $x_\alpha$. Легко видеть, что $|f_0(x_\alpha)-\bar{f}|\leq\alpha\|\bar{x}_0\|^2$ и $\lim\limits_{\alpha\to 0}x_\alpha=\bar{x}_0$, где $\bar{x}_0$ — решение задачи (1) с минимальной нормой (нормальное решение), $\bar{f}=f_0(\bar{x}_0)$.

Для учета ограничений, определяющих множество $X$, сведем задачу (6) к минимизации штрафной функции $F_\alpha(x,r)=g_\alpha(x)+rd(x)$, где $r>0$, $d(x)$ — из (4). Если задача оптимальной коррекции (2) определяется вектором $\bar{\xi}$, связанным с минимизацией функции $\varphi(x)$, то представляется естественным положить $d(x)=\varphi(x)$. В результате возникает задача минимизации регуляризованной квадратичной штрафной функции

$$\min_x\Big\{F_\alpha(x,r)=g_\alpha(x)+r\varphi(x)=f_0(x)+r\sum_{i=1}^m f_i^{+^2}(x)+\alpha\|x\|^2\Big\}. \tag{7}$$

Результаты о сходимости данного метода регуляризации для случая разрешимой задачи ВП хорошо известны (см., например, [2; 4; 5]). Для НЗ ВП 1-го рода из работы [6] следует, что при условии разрешимости задачи (2) и двойственной к ней имеет место сходимость $x_\alpha(r)=\arg\min\limits_x F_\alpha(x,r)\to\tilde{x}_0$, когда $\alpha\to 0$, $r\to\infty$, $r\alpha\to\infty$ ($\tilde{x}_0$ — нормальное решение задачи (2)).

В дальнейшем будем считать, что в задаче (1) вместо $f_i(x)$ известны непрерывные функции $f_i^\varepsilon(x)$, определенные на $\mathbb{R}^n$, такие что

$$|f_i(x)-f_i^\varepsilon(x)|\leq\varepsilon, \qquad \varepsilon\geq 0 \qquad (\forall x\in\mathbb{R}^n,\ i=0,1,\dots,m). \tag{8}$$

Тогда рассматриваемый метод регуляризации (7) (метод коррекции НЗ ВП) для задачи (1) сведется к задаче

$$\min_x\{F_\alpha^\varepsilon(x,r) = g_\alpha^\varepsilon(x) + r\varphi^\varepsilon(x)\}, \tag{9}$$

где $g_\alpha^\varepsilon(x) = f_0^\varepsilon(x) + \alpha\|x\|^2$, $\varphi^\varepsilon(x) = \|f^{\varepsilon^+}(x)\|^2 = \sum\limits_{i=1}^m \big(f_i^{\varepsilon^+}(x)\big)^2$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\varepsilon \geq 0$.

**Лемма.** *Для любого фиксированного набора* $s = [\alpha, r, \varepsilon]$ *параметров задачи* (9) *существует точка* $x_s = x_\alpha^\varepsilon(r) = \arg\min\limits_x\{F_s(x) = F_\alpha^\varepsilon(x,r)\}$.

Доказательство. Вначале оценим $\varphi(x) = \varphi^\varepsilon(x) + \sum\limits_{i=1}^m \big(f_i^+(x) - f_i^{\varepsilon^+}(x)\big)\big(f_i^+(x) + f_i^{\varepsilon^+}(x)\big) < \varphi^\varepsilon(x) + 2\varepsilon\sum\limits_{i=1}^m f_i^{\varepsilon^+}(x) + m\varepsilon^2 \leq \varphi^\varepsilon(x) + m\varepsilon^2 + \sum\limits_{i=1}^m \big(f_i^{\varepsilon^{+2}}(x) + \varepsilon^2\big) = 2\varphi^\varepsilon(x) + 2m\varepsilon^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} F_\alpha(x,r) &= g_\alpha(x) + r\varphi(x) < g_\alpha^\varepsilon(x) + 2r(\varphi^\varepsilon(x) + m\varepsilon^2) + \varepsilon \\ &= 2F_\alpha^\varepsilon(x,r) - g_\alpha^\varepsilon(x) + 2mr\varepsilon^2 + \varepsilon < 2F_\alpha^\varepsilon(x,r) - g_\alpha(x) + 2\varepsilon(mr\varepsilon + 1). \end{aligned} \tag{10}$$

Так как $g_\alpha(x)$ — сильно выпуклая функция, то $g_\alpha(x) \geq \bar g_\alpha > -\infty$ $(\forall x)$. Следовательно, из (10) получим

$$F_\alpha(x,r) < 2F_\alpha^\varepsilon(x,r) + 2\varepsilon(mr\varepsilon + 1) - \bar g_\alpha. \tag{11}$$

Пусть $M_C^\varepsilon = \{x \mid F_\alpha^\varepsilon(x,r) \leq C\} \neq \varnothing$ для некоторой константы $C$. Если $x' \in M_C^\varepsilon$, то в силу (11) $x' \in M_{C_1} = \{x \mid F_\alpha(x,r) \leq C_1\}$, где $C_1 = 2C + 2\varepsilon(mr\varepsilon + 1) - \bar g_\alpha$. Поскольку $F_\alpha(x,r)$ — сильно выпуклая по $x$ функция, то множество $M_{C_1}$ ограничено. Но $M_C^\varepsilon \subset M_{C_1}$, $\min\limits_x F_s(x) = \min\limits_{x\in M_C^\varepsilon} F_s(x)$, поэтому существует $x_s = \arg\min\limits_x F_s(x)$.

Лемма доказана.

Пусть (1) — НЗ ВП 1-го рода, но вектор коррекции $\bar\xi$ не обязательно достигается. Применяя один из монотонных методов безусловной минимизации дифференцируемой функции $n$ переменных $\varphi(x)$, определим последовательность точек $\{x_k\}$, которая минимизирует $\varphi(x)$ с заданной точностью $\bar\eta > 0$: $\varphi(x_k) - \bar\varphi \leq \bar\eta$, $\forall k \geq \bar k$.

Зафиксируем $k = \bar k$, положим $\xi_k = f^+(x_k)$ и образуем задачу

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\xi_k}\}. \tag{12}$$

Так как $x_k \in X_{\xi_k}$, то $X_{\xi_k} \neq \varnothing$. Задача (12) может иметь решения (как в примере 1 при $\xi = \xi_k$), но может быть и неразрешимой. Так, положим в задаче (5) $f_0(x) = e^{-x_1}$, тогда $\inf\{f_0(x) \mid x \in X_{\xi_k}\} = 0$ не достигается на $X_{\xi_k}$. В то же время множество $\Lambda = \{\lambda \geq 0 \mid \inf\limits_x\{e^{-x_1} + \lambda_1(x_1^{-1} - x_2) + \lambda_2(-x_1 + 1) + \lambda_3 x_2\} > -\infty\}$ будет непустым (например, $0 \in \Lambda$)), т. е. задача (5) с новой целевой функцией будет оставаться НЗ ВП 1-го рода.

Чтобы не рассматривать отдельно случаи разрешимости и неразрешимости задачи (12), мы в качестве оптимальной коррекции для задачи (1) будем рассматривать регуляризованную по Тихонову задачу (аналог (6)):

$$\min\{g_\alpha(x) \mid x \in X_{\xi_k}\}. \tag{13}$$

Ее (единственное) решение обозначим через $x_\alpha^k$, $g_\alpha(x_\alpha^k) = g_\alpha^k$. Будем также считать, что разрешима при этом и двойственная к (13) задача, т. е. найдется вектор $\lambda_\alpha^k \geq 0$ такой, что пара $[x_\alpha^k, \lambda_\alpha^k]$ будет седловой точкой функции $L_\alpha^k(x,\lambda) = g_\alpha(x) + (\lambda, f(x) - \xi_k)$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m$.

Рассмотрим далее связь между задачами (9) и (13).

**Теорема 1.** *При сформулированных выше условиях справедливы оценки*

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| \leq A_0(s, \lambda_\alpha^k, \xi_k), \tag{14}$$

$$|g_\alpha^\varepsilon(x_s) - g_\alpha^k| \leq A_1(s, \lambda_\alpha^k, \xi_k), \tag{15}$$

где $A_0(s,\lambda_\alpha^k,\xi_k) = \frac{\|\lambda_\alpha^k\|}{2r} + \Big[\frac{\|\lambda_\alpha^k\|^2}{4r^2} + \frac{\varepsilon}{r}\big(\|\lambda_\alpha^k\|_1 + 2\big) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{r^2}\Big]^{1/2}$, $A_1(s,\lambda_\alpha^k,\xi_k) = \max\big\{4r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + \frac{1}{r} + 2\varepsilon,\ \|\lambda_\alpha^k\|A_0(s,\lambda_\alpha^k,\xi_k) + \varepsilon(\|\lambda_\alpha^k\|_1 + 1)\big\}$, $\|z = [z_1,\dots,z_m]\|_1 = \sum\limits_{i=1}^m |z_i|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме существует точка $x_s = x_\alpha^\varepsilon(x)$, для которой выполняется неравенство

$$g_\alpha^\varepsilon(x_s) + r\varphi^\varepsilon(x_s) \le g_\alpha^\varepsilon(x_\alpha^k) + r\varphi^\varepsilon(x_\alpha^k). \tag{16}$$

Оценим $\varphi^\varepsilon(x_\alpha^k) < \varphi(x_\alpha^k) + 2\varepsilon\|f^+(x_\alpha^k)\|_1 + m\varepsilon^2 \le \|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2$. С учетом этой оценки из (16) получим $g_\alpha(x_s) - \varepsilon + r\varphi^\varepsilon(x_s) \le g_\alpha^k + r\|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon r\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + \varepsilon$, откуда

$$r(\varphi^\varepsilon(x_s) - \|\xi_k\|^2) \le g_\alpha^k - g_\alpha(x_s) + 2\varepsilon r\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + 2\varepsilon. \tag{17}$$

Из определения седловой точки $[x_\alpha^k,\lambda_\alpha^k]$ вытекает

$$g_\alpha^k - g_\alpha(x_s) \le (\lambda_\alpha^k, f^+(x_s) - \xi_k) \le \|\lambda_\alpha^k\|\,\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| + \varepsilon\|\lambda_\alpha^k\|_1. \tag{18}$$

Так как $\{x_k\}$ — минимизирующая последовательность для $\varphi(x)$, то $\varliminf\limits_{k\to\infty}(\triangledown\varphi(x_k), x - x_k) \ge 0$ $(\forall x)$. Поэтому можно считать

$$(\triangledown\varphi(x_k), x - x_k) \ge -1/r^2 \qquad (\forall x\in\mathbb{R}^n,\ r > 1). \tag{19}$$

Поскольку

$$(\triangledown\varphi(x_k), x - x_k) = 2\sum_{i=1}^m f_i^+(x_k)(\triangledown f_i(x_k), x - x_k) \le 2\sum_{i=1}^m \xi_i^k[f_i(x) - f_i(x_k)] = 2(\xi_k, f(x)) - 2\|\xi_k\|^2,$$

где $\xi_i^k$ — $i$-я компонента вектора $\xi_k$ $(i=\overline{1,m})$, то с учетом (19) имеем

$$(\xi_k, f(x)) - \|\xi_k\|^2 \ge -\frac{1}{2r^2} \qquad (\forall x\in\mathbb{R}^n). \tag{20}$$

Далее получаем

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 = \|f^{\varepsilon^+}(x_s)\|^2 - 2(\xi_k, f^{\varepsilon^+}(x_s)) + \|\xi_k\|^2 \le \varphi^\varepsilon(x_s) - 2(\xi_k, f^+(x_s)) + \|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1,$$

что вместе с (20) дает

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \le \varphi^\varepsilon(x_s) - \|\xi_k\|^2 + 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{r^2}. \tag{21}$$

Объединим неравенства (21), (17), (18):

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 \le \frac{1}{r}(g_\alpha^k - g_\alpha(x_s)) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + 2\frac{\varepsilon}{r} + \frac{1}{r^2}$$

$$\le \frac{1}{r}\|\lambda_\alpha^k\|\,\|f^{\varepsilon+}(x_s) - \xi_k\| + \frac{\varepsilon}{r}(\|\lambda_\alpha^k\|_1 + 2) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{r^2}.$$

Отсюда

$$\Big(\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| - \frac{\|\lambda_\alpha^k\|}{2r}\Big)^2 \le \frac{\|\lambda_\alpha^k\|}{4r^2} + \frac{\varepsilon}{r}(\|\lambda_\alpha^k\|_1 + 2) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon^2 + \frac{1}{r^2}.$$

Таким образом, справедлива оценка (14).

Оценим разность $|g_\alpha^\varepsilon(x_s) - g_\alpha^k|$. Из неравенства (17) вытекает

$$g_\alpha^\varepsilon(x_s) - g_\alpha^k \le r(\|\xi_k\|^2 - \varphi^\varepsilon(x_s)) + 2\varepsilon r\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + 2\varepsilon.$$

Так как из неравенства (21) следует $\|\xi_k\|^2 - \varphi^\varepsilon(x_s) \le 2\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \dfrac{1}{r^2}$, то

$$g_\alpha^\varepsilon(x_s) - g_\alpha^k \le 4r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + rm\varepsilon^2 + \frac{1}{r} + 2\varepsilon. \tag{22}$$

С другой стороны, из (18) и (14) получим

$$g_\alpha^k - g_\alpha^\varepsilon(x_s) < g_\alpha^k - g_\alpha(x_s) + \varepsilon \le \|\lambda_\alpha^k\|\,\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| + \varepsilon(\|\lambda_\alpha^k\|_1 + 1) \le \|\lambda_\alpha^k\| A_0(s, \lambda_\alpha^k, \xi_k) + \varepsilon(\|\lambda_\alpha^k\|_1 + 1).$$

Отсюда и из (22) имеем оценку (15).

Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

**Следствие 1.** *Пусть в задаче* (14) $\alpha = \bar\alpha > 0$, $k = \bar k$, *параметры* $r$ *и* $\varepsilon$ *в* (9) *выбраны так, чтобы* $r \to \infty$, $\varepsilon \to 0$, $r\varepsilon \to 0$. *Тогда* $\lim x_s = x_\alpha^k$.

В самом деле, поскольку $g_\alpha(x)$ — сильно выпуклая по $x$ функция, то множество $M_0 = \{x \mid g_\alpha(x) \le g_\alpha(x_0)\}$ ограничено для произвольного фиксированного $x_0 \in \mathbb{R}^n$. В силу (22) ограниченной будет и последовательность $\{x_s\}$. Пусть $\tilde x_\alpha$ — ее предельная точка. Согласно соотношениям (14) и (22) $\tilde x_\alpha \in X_{\xi_k}$, $g_\alpha(\tilde x_\alpha) = g_\alpha^k$, т. е. $\tilde x_\alpha$ — решение (13). Но задача (13) имеет единственное решение $x_\alpha^k$, поэтому $\tilde x_\alpha = x_\alpha^k$ и $\lim x_s = x_\alpha^k$.

Далее применим метод регуляризации (9) непосредственно к задаче (12).

**Теорема 2.** *Пусть задача* (12) *разрешима при* $k = \bar k$, $x_0^*$ — *ее нормальное решение,* $\lambda_0^*$ — *соответствующий* $x_0^*$ *вектор множителей Лагранжа. Если параметры* $s = [r, \alpha, \varepsilon]$ *в методе* (9) *выбраны так, чтобы*

$$r \to \infty, \qquad \varepsilon \to 0, \qquad \alpha \to 0, \qquad \alpha r \to \infty, \qquad \frac{\varepsilon r}{\alpha} \to 0, \tag{23}$$

*то* $\lim x_s = x_0^*$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем придерживаться схемы доказательства предыдущей теоремы. Вспоминая, что $g_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha\|x\|^2$, перепишем неравенство (17) в виде

$$r(\varphi^\varepsilon(x_s) - \|\xi_k\|^2) \le f_0(x_0^*) - f_0(x_s) + \alpha\|x_0^*\|^2 + 2\varepsilon r\|\xi_k\|_1 + mr\varepsilon^2 + 2\varepsilon. \tag{24}$$

По аналогии с (18) имеем

$$f_0(x_0^*) - f_0(x_s) \le \|\lambda_0^*\|\,\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| + \varepsilon\|\lambda_0^*\|_1. \tag{25}$$

С учетом неравенства (21), справедливого и в этой ситуации, из (24) и (25) получим

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 - \frac{\|\lambda_0^*\|}{r}\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| \le A_2(s, \lambda_0^*, \xi_k),$$

где $A_2(s, \lambda_0^*, \xi_k) = \frac{\varepsilon}{r}(\|\lambda_0^*\|_1 + 2) + 4\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{\alpha}{r}\|x_0^*\|^2 + m\varepsilon^2 + \dfrac{1}{r^2}$. Отсюда

$$\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| \le \frac{\|\lambda_0^*\|}{2r} + \Big(\frac{\|\lambda_0^*\|^2}{4r^2} + A_2(s, \lambda_0^*, \xi_k)\Big)^{1/2}. \tag{26}$$

Аналогично неравенству (22) имеем

$$f_0(x_s) - f_0(x_0^*) \le \alpha\|x_0^*\| + 4r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + mr\varepsilon^2 + \frac{1}{r} + 2\varepsilon. \tag{27}$$

Далее, из неравенства $F_s(x_s) \le F(x_0^*)$ следует

$$\alpha\|x_s\|^2 \le \alpha\|x_0^*\|^2 + r(\|\xi_k\|^2 - \varphi^\varepsilon(x_s)) + f_0(x_0^*) - f_0(x_s) + 2r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + mr\varepsilon^2 + 2\varepsilon. \tag{28}$$

С помощью (21) и (25) оценим выражение

$$r(\|\xi_k\|^2 - \varphi^\varepsilon(x_s)) + f_0(x_0^*) - f_0(x_s)$$

$$\le -r\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\|^2 + 2r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{r} + \|\lambda_0^*\|\,\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| + \varepsilon\|\lambda_0^*\|_1$$

$$= -\Big(\sqrt{r}\|f^{\varepsilon^+}(x_s) - \xi_k\| - \frac{\|\lambda_0^*\|}{2\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{\|\lambda_0^*\|^2}{4r} + 2r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \frac{1}{r} + \varepsilon\|\lambda_0^*\|_1$$

$$\le \frac{\|\lambda_0^*\|^2}{4r} + 2r\varepsilon\|\xi_k\|_1 + \varepsilon\|\lambda_0^*\|_1 + \frac{1}{r}.$$

Поэтому из (28) вытекает

$$\|x_s\|^2 \le \|x_0^*\|^2 + \frac{1}{\alpha r}\Big(\frac{1}{4}\|\lambda_0^*\|^2 + 1\Big) + \frac{r\varepsilon}{\alpha}(4\|\xi_k\|_1 + m\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\alpha}(\|\lambda_0^*\|_1 + 2). \tag{29}$$

Переходя в (29) к пределу при условиях (23), заключаем, что последовательность $\{x_s\}$ ограничена. Пусть $\tilde{x}$ — ее предельная точка. Из (26), (27), (29) и (23) следует $\tilde{x} \in X_{\xi_k},\ f_0(\tilde{x}) \le f_0(x_0^*),\ \|\tilde{x}\| \le \|x_0^*\|$. В силу единственности решения $x_0^*$ выполняется $\tilde{x} = x_0^*$ и $\lim x_s = x_0^*$.

Теорема доказана.

Приведем пример последовательностей $r = r_t,\ \varepsilon = \varepsilon_t,\ \alpha = \alpha_t$, удовлетворяющих условию (23) при $t \to \infty$: $r_t = r^t$ $(r > 1)$, $\varepsilon_t = \frac{1}{r_t\sqrt{r_t}},\ \alpha_t = \frac{1}{\sqrt[4]{r_t}}$.

## 3. Особенности применения кусочно-линейных норм

Как уже отмечалось в разд. 1, в задаче (2) оптимальной коррекции НЗ ВП наряду с евклидовой могут применяться и другие векторные нормы. Широкое распространение имеют, например, кусочно-линейные нормы: октаэдрическая $\|z = [z_1, \dots, z_n]\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |z_j|$ и чебышевская $\|z\|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n} |z_j|$. В результате использования этих норм изменится метод (9), который можно будет трактовать как регуляризованный метод точных штрафных функций [7] применительно к НЗ ВП. Ниже рассмотрим особенности данного подхода на примере чебышевской нормы.

Поставим в соответствие НЗ ВП (1) аппроксимирующую задачу

$$\min\{f_0(x) \mid x \in X_{\xi_\infty}\}, \tag{30}$$

где $\xi_\infty = \arg\min\{\|\xi\|_\infty \mid \xi \in E\}$. Пусть $\varphi_\infty(x) = \|f^+(x)\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le m} f_i^+(x)$, $\bar{X}_\infty = \operatorname{Arg}\min\limits_x \varphi_\infty(x)$, $x_\infty^* \in \bar{X}_\infty$, $\varphi_\infty(x_\infty^*) = \varphi_\infty^*$. Легко видеть, что в качестве $\xi_\infty$ в (30) можно взять вектор $\xi^* = f^+(x_\infty^*)$. При этом если для евклидовой нормы вектор оптимальной коррекции $\bar{\xi}$ в (2) определялся однозначно, то в случае чебышевской нормы свойство единственности $\xi_\infty$ может не выполняться.

П р и м е р 2. Требуется найти

$$\min\{2x_1 + x_2 \mid x_1 \le 0,\ x_2 \le 0,\ x_1 \ge 1\}.$$

Очевидно, $X = \varnothing$. Функция $\varphi_\infty(x) = \max\{x_1^+, x_2^+, (-x_1 + 1)^+\}$ достигает минимума $\varphi_\infty^* = 0.5$ в точках множества $\bar{X}_\infty = \{x = [x_1, x_2] \mid x_1 = 0.5,\ x_2 \le 0.5\}$. Для точек $(x_\infty^*)_1 = [0.5, 0.2] \in \bar{X}_\infty$ и $(x_\infty^*)_2 = [0.5, 0] \in \bar{X}_\infty$ получим соответственно векторы $(\xi_\infty)_1 = [0.5, 0.2, 0.5]$ и $(\xi_\infty)_2 = [0.5, 0, 0.5]$. При этом $\bar{X}_\infty \supset X_{(\xi_\infty)_i},\ i = 1, 2$.

Задача определения $\varphi_\infty^*$ при $X = \varnothing$ эквивалентна проблеме

$$\min\{\sigma \mid f_i^+(x) \le \sigma,\ i = \overline{1, m}\} \tag{31}$$

нахождения чебышевского приближения (см. например, [8]) несовместной системы выпуклых неравенств. Если положить $\bar{\xi}_\sigma = [\bar{\sigma}, \ldots, \bar{\sigma}] \in \mathbb{R}^m_+$, где $\bar{\sigma}$ — решение (31), то, очевидно, $\bar{\xi}_\sigma = \xi_\infty$, причем $\bar{X}_\infty = X_{\bar{\xi}_\sigma}$.

Заметим, что использование в задаче (30) вектора $\xi_\infty$ с равными компонентами может быть оправданным [9] при построении конкретных итерационных методов оптимальной коррекции НЗ ВП. Поэтому далее будем считать, что в задаче (30) $\xi_\infty = \bar{\xi}_\sigma$ и $X_{\bar{\xi}_\sigma} = \{x \mid \varphi_\infty(x) \le \bar{\sigma}\}$.

Задаче (30) поставим в соответствие проблему нахождения

$$\min_x \{P^\varepsilon_\alpha(x, r) = f^\varepsilon_0(x) + \alpha\|x\|^2 + r\varphi^\varepsilon_\infty(x)\}, \tag{32}$$

где $\varphi^\varepsilon_\infty(x) = \max\limits_{1 \le i \le m} f^{\varepsilon+}_i(x)$, $f^\varepsilon_i(x)$ удовлетворяют (8), $\alpha > 0$, $r > 0$, $\varepsilon \ge 0$.

Применяя схему доказательства леммы, легко показать, что задача (32) разрешима в некоторой точке $x'_s = x'(\alpha, r, \varepsilon)$, $s = [\alpha, r, \varepsilon]$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\varepsilon \ge 0$.

**Теорема 3.** *Пусть функция Лагранжа* $\mathcal{L}_{\bar{\sigma}}(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda(\varphi_\infty(x) - \bar{\sigma})$ *для задачи* (30) *имеет седловую точку* $[\bar{x}_\infty, \bar{\lambda}_\infty]$ *в области* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$. *Если в задаче* (32) $r \ge \bar{r} = \bar{\lambda}_\infty + 1$, *то справедливы оценки*

$$\varphi_\infty(x_s) - \bar{\sigma} \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(\bar{r} + 1); \tag{33}$$

$$|f_0(x_s) - \bar{f}| \le \bar{r}(\alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(\bar{r} + 1)); \tag{34}$$

$$\|x_s\|^2 \le \|\bar{x}_\infty\|^2 + \frac{2\varepsilon}{\alpha}(\bar{r} + 1). \tag{35}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что $|f^+_i(x) - f^{\varepsilon+}_i(x)| \le |f_i(x) - f^\varepsilon_i(x)| \le \varepsilon$, $\varphi^\varepsilon_\infty(x) \le \varphi_\infty(x) + \varepsilon$ $(\forall x)$, из неравенства $P^\varepsilon_\alpha(x'_s, r) \le P^\varepsilon_\alpha(\bar{x}_\infty, r)$ получим

$$r(\varphi_\infty(x'_s) - \bar{\sigma}) \le \bar{f} - f_0(x'_s) + \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(r + 1). \tag{36}$$

По определению седловой точки имеем

$$\bar{f} - f_0(x'_s) \le \bar{\lambda}_\infty(\varphi_\infty(x'_s) - \bar{\sigma}). \tag{37}$$

Поэтому из неравенства (36) следует $(r - \bar{\lambda}_\infty)(\varphi_\infty(x'_s) - \bar{\sigma}) \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(r+1)$, что с учетом условия $r \ge \bar{r}$ приводит к оценке (33).

Далее из (36) вытекает неравенство $f_0(x'_s) - \bar{f} \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(r + 1)$. Используя наряду с этим оценки (37) и (33), приходим к (34).

Наконец, для получения (35) применим еще раз соотношение $P^\varepsilon_\alpha(x'_s, r) \le P^\varepsilon_\alpha(\bar{x}_\infty, r)$. Имеем $\alpha\|x'_s\| \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + r(\bar{\sigma} - \varphi_\infty(x'_s)) + \bar{f} - f_0(x'_s) + 2\varepsilon(r + 1) \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + (r - \bar{\lambda}_\infty)(\bar{\sigma} - \varphi_\infty(x'_s)) + 2\varepsilon(r + 1) \le \alpha\|\bar{x}_\infty\|^2 + 2\varepsilon(r + 1)$, т. е. справедлива оценка (35).

Теорема доказана.

**Следствие 2.** *Пусть в задаче* (32) *параметры* $r$, $\alpha$, $\varepsilon$ *выбраны так, чтобы* $r \ge \bar{r}$, $\alpha \to 0$, $\varepsilon \to 0$, $\frac{\varepsilon}{\alpha} \to 0$. *Тогда* $\lim x'_s = \bar{\bar{x}}_\infty$, *где* $\bar{\bar{x}}_\infty$ — *нормальное решение задачи* (30).

В самом деле, в силу (35) последовательность $\{x'_s\}$ ограничена при $\varepsilon \to 0$, $\alpha \to 0$, $\frac{\varepsilon}{\alpha} \to 0$, $r \ge \bar{r}$. Обозначим через $\tilde{x}$ ее предельную точку. Из неравенства (33) следует $\varphi_\infty(\tilde{x}) = \bar{\sigma}$, из (34) и (35) — $f_0(\tilde{x}) \le \bar{f}$, $\|\tilde{x}\| \le \|\bar{\bar{x}}_\infty\|$. Таким образом, $\tilde{x}$ — решение (30) с минимальной нормой, а единственность нормального решения влечет $\lim x'_s = \bar{\bar{x}}_\infty$.

В качестве последовательностей $\varepsilon = \varepsilon_t$, $\alpha = \alpha_t$, удовлетворяющих условию данного следствия, можно взять $\varepsilon_t = \varepsilon^t_0$ $(\varepsilon_0 < 1)$, $\alpha_t = \sqrt{\varepsilon_t}$ $(t \to \infty)$.

Значение $\bar{\sigma} = \varphi^*_\infty$ в задаче (30) может не достигаться. Тогда по аналогии с (12), (13) будем считать известной минимизирующую последовательность $\{x_k\}$: $\varphi_\infty(x_k) \searrow \inf\limits_x \varphi_\infty(x) = \varphi^*_\infty$ $(k \to \infty)$. Зафиксируем определенную точность $\nu > 0$, и пусть номер $\bar{k}$ таков, что

$$\varphi_\infty(x_k) - \varphi^*_\infty \le \nu \qquad (\forall k \ge \bar{k}). \tag{38}$$

Положим $\varphi_\infty(x_k) = \sigma_k,\ \bar{\xi}_{\sigma_k} = [\sigma_k, \dots, \sigma_k] \in \mathbb{R}^m_+$. Образуем задачу

$$\min \{ g_\alpha(x) \mid x \in X_{\bar{\xi}_{\sigma_k}} \}, \tag{39}$$

$g_\alpha(x) = f_0(x) + \alpha\|x\|^2,\ \alpha = \bar{\alpha} > 0,\ k \geq \bar{k}$. Обозначим решение задачи (39) через $x^*_{\alpha k},\ g^*_{\alpha k} = g_\alpha(x^*_{\alpha k})$.

Поскольку последовательность $\varphi_\infty(x_k)$ монотонно убывает, то можно считать, что задача (39) удовлетворяет условию Слейтера: $\exists x_0 \in X_{\bar{\xi}_{\sigma_k}} : \varphi_\infty(x_0) < \sigma_k$. Поэтому функция Лагранжа для задачи (39) $\mathcal{L}^k_\alpha(x,\lambda) = g_\alpha(x) + \lambda(\varphi_\infty(x) - \sigma_k)$ имеет седловую точку $[x^*_{\alpha k}, \lambda^*_{\alpha k}]$ в области $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1_+$.

**Теорема 4.** *Пусть в задаче* (32) $\alpha = \bar{\alpha} > 0$, *параметр* $r$ *выбран так, чтобы* $r \geq \bar{r} = \dfrac{\lambda^*_{\alpha k}(C+1)+2}{C-1}$, *где* $C = \mathrm{const},\ C > 1$. *Справедливы оценки*

$$\begin{cases} (\varphi^\varepsilon_\infty(x'_s) - \sigma_k)^+ \leq C\varepsilon, \\ |g^\varepsilon_\alpha(x'_s) - g^*_{\alpha k}| \leq \bar{r}\nu + C_1\varepsilon, \end{cases} \tag{40}$$

$\nu$ *— из* (38), $C_1 = C_1(\alpha,k) = \max\{\lambda^*_{\alpha k}(C+1)+1, \bar{r}+3\}$.

Вывод оценок (40) проводится по схеме доказательства теоремы 3 и будет здесь опущен.

Оценки (40) могут служить указанием к выбору параметров $\varepsilon,\ r,\ \nu$ с тем, чтобы обеспечить требуемую степень приближения для значения $g^*_{\alpha k}$.

## Заключение

В работе рассматривались методы коррекции НЗ ВП, основанные на применении метода Тихонова для регуляризации некорректных задач оптимизации. Исходной задаче ВП с возможно несовместной системой ограничений ставится в соответствие аппроксимирующая задача, полученная в результате коррекции вектора правых частей относительно минимума некоторой векторной нормы. Исследуются два типа норм: евклидова и чебышевская. Каждый тип нормы влечет соответствующий вид штрафной функции: евклидова — квадратичную, чебышевская — точную штрафную функцию. Решение задачи минимизации этих штрафных функций с добавленным квадратичным стабилизатором определяет два подхода к построению методов оптимальной коррекции НЗ ВП. Для каждого подхода находятся условия сходимости метода и устанавливаются оценки качества сходимости к обобщенному решению исходной задачи.

Отдельно рассматриваются ситуации, когда функции задачи заданы с некоторой погрешностью, когда вектор оптимальной коррекции не достигается, когда откорректированная задача не имеет решения. Показано, что в предлагаемых методах отражается специфика сходимости соответствующих алгоритмов штрафных функций. Для квадратичного штрафа это неограниченное возрастание штрафного коэффициента, а для точной штрафной функции — наличие у этого коэффициента определенного порога, начиная с которого достигается требуемая точность метода.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Еремин И. И., Мазуров В. Д., Астафьев Н. Н.** Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.
2. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. М.: Факториал, 2002. 824 с.
3. **Скарин В. Д.** О применении одного метода регуляризации для коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 230–241.

4. **Антипин А. С.** Метод регуляризации в задачах выпуклого программирования // Экономика и мат. методы. 1975. Т. 11, № 2. С. 336–342.
5. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.
6. **Скарин В. Д.** О методе регуляризации для противоречивых задач выпуклого программирования // Изв. вузов. Математика. 1995. № 12. С. 81–88.
7. **Еремин И. И.** К методу штрафов в математическом программировании // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 4. С. 459–461.
8. **Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.** Линейное и выпуклое программирование. М.: Наука, 1967. 460 с.
9. **Скарин В. Д.** О методе барьерных функций и алгоритмах коррекции несобственных задач выпуклого программирования // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 115–128.

Скарин Владимир Дмитриевич
доктор физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: skavd@imm.uran.ru

Поступила 1.06.2017

**REFERENCES**

1. Eremin I.I., Mazurov Vl.D., Astaf'ev N.N. *Nesobstvennye zadachi linejnogo i vypuklogo programmirovaniya* [Improper problems of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ. 1983. 336 p.
2. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Factorial Press. 2002. 824 p.
3. Skarin V.D. On the application of regularization method for correction of improper problems of convex programming. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2013, vol. 283, suppl. 1, pp. 126–138. doi: 10.1134/S0081543813090137 .
4. Antipin A.S. A regularization method for the problems of convex programming. *Economic and Math. Methods.* 1975, vol. 11, no. 2, pp. 336–342. (in Russian).
5. Eremin I.I., Astaf'ev N.N. *Vvedenie v teoriyu linejnogo i vypuklogo programmirovaniya* [An introduction to the theory of linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ. 1976. 192 p.
6. Skarin V.D. On a regularization method for inconsistent convex programming problems. *Russian Math.* (*Izv. VUZ*). 1995, vol. 39, no. 12, pp. 78–85.
7. Eremin I.I. On the penalty method in mathematical programming. *Dokl. Math.* 1996. vol. 53, no. 1, pp. 138–140.
8. Zukhovitskii S.I., Avdeeva L.I. *Lineinoe i vypukloe programmirovanie* [Linear and convex programming]. Moscow, Nauka Publ. 1967, 460 p.
9. Skarin V.D. Barrier function method and correction algorithms for improper convex programming problems. *Proc. Steklov Inst. Math.* (*Suppl.*), 2008, vol. 263, suppl. 2, pp. S120–S134. doi:10.1134/S0081543808060126 .

The paper was received by the Editorial Office on June 1, 2017.

*Vladimir Dmitrievich Skarin*, Dr. Phys.-Math. Sci, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: skavd@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.518

# РАЗРЕЖЕННОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ БЕСОВА ФУНКЦИЙ С МАЛОЙ СМЕШАННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

**С. А. Стасюк**

В работе рассматриваются задачи, которые касаются нахождения точных по порядку оценок такого разреженного тригонометрического приближения, как наилучшее $m$-членное тригонометрическое приближение $\sigma_m(F)_q$, где в качестве классов $F$ рассматриваются как классы Никольского — Бесова $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ функций смешанной гладкости, так и близкие к ним функциональные классы. Уделяется внимание соотношениям между параметрами $p$ и $q$, когда $1 < p < q < \infty$, $q > 2$. А. С. Романюком (2003) были найдены точные по порядку оценки величины $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, $1 \le \theta \le \infty$ (оценки сверху при этом являлись неконструктивными), когда $1 < p \le 2 < q < \infty$, $r > 1/p - 1/q$ или $2 < p < q < \infty$, $r > 1/2$. В дополнение к исследованиям А. С. Романюка недавно В. Н. Темляков получил конструктивные оценки сверху (которые обеспечиваются конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме) величины $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, $1 \le \theta \le \infty$ в случае большой гладкости, т. е. при $1 < p < q < \infty$, $q > 2$, $r > \max\{1/p; 1/2\}$, рассмотрев при этом более широкие классы $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ ($\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_p$, $1 \le \theta < \infty$). Меньше внимания было уделено конструктивным оценкам сверху величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ и $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ в случае малой гладкости, т.е. при $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1/p - 1/q < r \le 1/p$. Для $1 < p \le 2 < q < \infty$ В. Н. Темляковым была найдена конструктивная оценка сверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, если $\theta = \infty$, $1/p - 1/q < r < 1/p$ или $\theta = p$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, где $1/q + 1/q' = 1$, а автором — конструктивная оценка сверху для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, если $r = 1/p$, $p \le \theta \le \infty$, при этом оказалось, что $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q (\log m)^{1/\theta}$, $r = 1/p$, $p \le \theta < \infty$. В данной работе устанавливается конструктивная оценка сверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (или $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})$), $1 < p \le 2 < q < \infty$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, когда $p < \theta < \infty$ (или $p \le \theta < \infty$), а также точные по порядку (хотя и неконструктивные сверху) оценки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, $2 < p < q < \infty$, $\theta = 1$, $r = 1/2$, и $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta < p$, $r = 1/p$, которые дополняют соответственно результаты А. С. Романюка и недавние исследования автора.

Ключевые слова: нелинейное приближение, разреженное тригонометрическое приближение, смешанная гладкость, классы Бесова, точные порядковые оценки.

**S. A. Stasyuk. Sparse trigonometric approximation of Besov classes of functions with small mixed smoothness.**

We consider problems concerned with finding order-exact estimates for a sparse trigonometric approximation, more exactly, for the best $m$-term trigonometric approximation $\sigma_m(F)_q$, where $F$ are the Nikol'skii–Besov classes $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ of functions with mixed smoothness and classes of functions close to them. Attention is paid to relations between the parameters $p$ and $q$ for $1 < p < q < \infty$ and $q > 2$. In 2003 Romanyuk found order-exact estimates of $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ for $1 \le \theta \le \infty$ (the upper estimates are nonconstructive) in the cases $1 < p \le 2 < q < \infty$, $r > 1/p - 1/q$ and $2 < p < q < \infty$, $r > 1/2$. Complementing Romanyuk's studies, Temlyakov has recently found constructive upper estimates (provided by a constructive method based on a greedy algorithm) for $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, $1 \le \theta \le \infty$, in the case of great smoothness, i.e., for $1 < p < q < \infty$, $q > 2$, and $r > \max\{1/p; 1/2\}$; he considered wider classes $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ ($\mathbf{MB}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_{p,\theta} \subset \mathbf{MH}^r_p$, $1 \le \theta < \infty$). Less attention was paid to constructive upper estimates of the values $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ and $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ in the case of small smoothness, i.e., for $1 < p \le 2 < q < \infty$ and $1/p - 1/q < r \le 1/p$. For $1 < p \le 2 < q < \infty$ Temlyakov found a constructive upper estimate for $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ in the cases $\theta = \infty$, $1/p - 1/q < r < 1/p$ and $\theta = p$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, where $1/q + 1/q' = 1$, while the author found a constructive upper estimate for $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ if $r = 1/p$ and $p \le \theta \le \infty$; it turned out that $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q (\log m)^{1/\theta}$ for $r = 1/p$ and $p \le \theta < \infty$. In the present paper, we derive a constructive upper estimate for $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (or $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$) for $1 < p \le 2 < q < \infty$ and $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$ when $p < \theta < \infty$ (or $p \le \theta < \infty$) as well as order-exact (though nonconstructive upper) estimates for the values $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, $2 < p < q < \infty$, $\theta = 1$, $r = 1/2$, and $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, $1 < p \le 2 < q < \infty$, $1 \le \theta < p$, $r = 1/p$, which complement Romanyuk's results and the author's recent results, respectively.

Keywords: nonlinear approximation, sparse trigonometric approximation, mixed smoothness, Besov classes, exact order bounds.

**MSC:** 41A60, 41A65, 42A10, 46E30, 46E35

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-244-252

## Введение

Настоящая работа посвящена вопросам, связанным с получением точных по порядку оценок наилучшего $m$-членного тригонометрического приближения $\sigma_m(F)$ (один из видов разреженных тригонометрических приближений), где в качестве классов $F$ рассматриваются классы Бесова $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ (периодических функций с малой смешанной гладкостью) или близкие к ним функциональные классы.

Внимание будет уделено тем соотношениям между параметрами $p$ и $q$, когда $1 < p \leq 2 < q < \infty$.

Опишем вкратце историю исследуемых здесь вопросов.

А. С. Романюком [1] были найдены точные по порядку оценки величины $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, когда $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $r > 1/p - 1/q$ или $2 < p < q < \infty$, $r > 1/2$.

При этом полученные оценки сверху являлись неконструктивными, поскольку построение приближающего $m$-членного тригонометрического полинома базировалось на использовании леммы Белинского (см. [2] или [1, лемма 2.1]), которая имеет неконструктивный характер.

В. Н. Темляковым [3] для введенных им более широких классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$, чем классы Бесова $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, были найдены точные по порядку оценки $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, когда $1 < p < q < \infty$, $q > 2$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $r > \max\{1/p; 1/2\}$, т. е. в случае большой гладкости. Упомянутые оценки сверху для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ являлись конструктивными и обеспечивались конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме, разработанном В. Н. Темляковым [3].

В случае $1 < p \leq q \leq 2$, $r > 1/p - 1/q$ точные по порядку (к тому же конструктивные) оценки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ и $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ установлены, соответственно, А. С. Романюком [1] и Д. Б. Базархановым [4], при этом $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ за исключением случая $1 \leq \theta < q$, $r = 1/p - 2/q + 1/\theta$, когда $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q(\log\log m)^{1/\theta}$.

Меньше внимания было уделено конструктивным оценкам сверху величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ и $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ в случае малой гладкости, в частности, когда $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1/p - 1/q < r \leq 1/p$. Для $1 < p \leq 2 < q < \infty$ В. Н. Темляковым [5] была установлена конструктивная оценка сверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, если $\theta = \infty$, $1/p - 1/q < r < 1/p$ или $\theta = p$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, где $1/q + 1/q' = 1$, а автором [6] — конструктивная оценка сверху для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, если $r = 1/p$, $p \leq \theta \leq \infty$, при этом оказалось, что $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q(\log m)^{1/\theta}$, $r = 1/p$, $p \leq \theta < \infty$.

Автором [7] также были найдены точные по порядку оценки (при этом оценки сверху не являлись конструктивными и базировались на использовании упомянутой леммы Белинского) для $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, когда $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $r \in (1/p - 1/q; 1/p)\backslash\{1/p - q'/(q\theta')\}$, которые совпадают с установленными А. С. Романюком [1] оценками для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ при тех же ограничениях на параметры $p$, $q$, $r$ и $\theta$.

В данной работе устанавливается конструктивная оценка сверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ (или $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$), $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$, когда $p < \theta < \infty$ (или $p \leq \theta < \infty$), а также точные по порядку (хотя и неконструктивные сверху) оценки величин $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$, $2 < p < q < \infty$, $\theta = 1$, $r = 1/2$.

Используя неконструктивный (с точки зрения получения верхних оценок) подход А.С. Романюка [1], мы также получили точные по порядку оценки величины $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$, $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $r = 1/p$ в недостающем случае $1 \leq \theta < p$, хотя на самом деле полученные оценки имеют место для всех конечных значений параметра $\theta$, т. е. для $1 \leq \theta < \infty$.

Работа состоит из трех разделов. В первом разделе приводятся обозначения, определения и вспомогательные утверждения. Второй раздел состоит из формулировок основных результатов и комментариев к ним. В завершающем третьем разделе содержатся доказательства результатов, приведенных в разд. 2 работы.

## 1. Обозначения, определения и вспомогательные утверждения

Пусть $\mathbb{R}^d$ — евклидово пространство с элементами $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := x_1y_1 + \dots + x_dy_d$; $L_p := L_p(\mathbb{T}^d)$, $1 \le p \le \infty$, $\mathbb{T}^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$, — пространство функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$, $2\pi$-периодических по каждой переменной, с конечной нормой

$$\|f\|_p := \|f\|_{L_p(\mathbb{T}^d)} := \Bigg( (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \Bigg)^{1/p}.$$

Для $f \in L_q(\mathbb{T}^d)$ определим *наилучшее $m$-членное тригонометрическое приближение* (*наилучшее $m$-членное приближение по многомерной тригонометрической системе*) *функции $f$ в метрике пространства $L_q(\mathbb{T}^d)$*:

$$\sigma_m(f)_q := \inf_{\{c_j\}, \{\mathbf{k}_j\}} \Big\| f - \sum_{j=1}^m c_j e^{i(\mathbf{k}_j, \mathbf{x})} \Big\|_q. \tag{1.1}$$

Заметим, что величина (1.1) является одним из видов разреженного тригонометрического приближения. Тогда для функционального класса $F \subset L_q(\mathbb{T}^d)$ полагаем

$$\sigma_m(F)_q := \sup_{f \in F} \sigma_m(f)_q. \tag{1.2}$$

Более детально история исследования величин (1.1) и (1.2) описана, например, в монографии [8, гл. 3], обзоре [9, Ch. 7] и статье [5].

Перейдем теперь к определению функциональных классов.

Положим

$$\delta_{\mathbf{s}}(f) := \delta_{\mathbf{s}}(f, \mathbf{x}) := (f * \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})})(\mathbf{x}), \quad \mathcal{D}_{\rho(\mathbf{s})} := \sum_{\mathbf{k} \in \rho(\mathbf{s})} e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})},$$

$$\rho(\mathbf{s}) := \left\{ \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \colon [2^{s_j - 1}] \le |k_j| < 2^{s_j}, s_j \in \mathbb{Z}_+, k_j \in \mathbb{Z}, j = 1, \dots, d \right\},$$

где символом “$*$” обозначена операция свертки двух функций, т. е.

$$(\varphi * g)(\mathbf{x}) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(\mathbf{y}) \, g(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \text{ для } \varphi, g \in L_1(\mathbb{T}^d).$$

Для $r > 0$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ пространство $MB^r_{p,\theta}$ определяется следующим образом (см. [10] ($\theta = \infty$) и [11] ($1 \le \theta < \infty$)):

$$MB^r_{p,\theta} := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{MB^r_{p,\theta}} < \infty \Big\}, \tag{1.3}$$

где

$$\|f\|_{MB^r_{p,\theta}} := \Big( \sum_{\mathbf{s}} \Big( 2^{r\|\mathbf{s}\|_1} \, \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \Big)^\theta \Big)^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.4}$$

$$\|f\|_{MB^r_{p,\infty}} := \|f\|_{MH^r_p} := \sup_{\mathbf{s}} \frac{\|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p}{2^{-r\|\mathbf{s}\|_1}}, \tag{1.5}$$

а $\|\mathbf{s}\|_1 := (\mathbf{s}, \mathbf{1}) = s_1 + \dots + s_d$.

Для $r > 0$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta < \infty$ наряду с пространствами $MB^r_{p,\theta}$ рассмотрим близкие к ним пространства $MH^r_{p,\theta}$, которые определяются таким образом [3]:

$$MH^r_{p,\theta} := \Big\{ f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{MH^r_{p,\theta}} < \infty \Big\}, \tag{1.6}$$

где

$$\|f\|_{MH^r_{p,\theta}} := \sup_j \Big( \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=j} \Big( 2^{r\|\mathbf{s}\|_1} \, \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \Big)^\theta \Big)^{1/\theta}. \tag{1.7}$$

Заметим, что при конечном значении параметра $\theta$, т. е. при $1 \le \theta < \infty$, $MB^r_{p,\theta}$ — пространства О. В. Бесова смешанной гладкости, а при предельном значении параметра $\theta$, т. е. при $\theta = \infty$, $MB^r_{p,\infty} \equiv MH^r_{p,\infty} \equiv MH^r_p$ — пространства С. М. Никольского смешанной гладкости.

Для определенных выше функциональних пространств, исходя из определений (1.3)–(1.7), выполняются вложения:

$$MB^r_{p,\theta} \subset MH^r_{p,\theta} \subset MH^r_p \equiv MB^r_{p,\infty} \equiv MH^r_{p,\infty}, \quad 1 \le \theta < \infty, \tag{1.8}$$

$MB^r_{p,\theta_1} \subset MB^r_{p,\theta_2}$, $MH^r_{p,\theta_1} \subset MH^r_{p,\theta_2}$, $1 \le \theta_1 < \theta_2 < \infty$.

Для $r > 0$, $1 < p < \infty$, $b \in \mathbb{R}$ определим функциональное пространство [5]

$$MW^{r,b}_p := \{f \in L_p(\mathbb{T}^d) \colon \|f\|_{MW^{r,b}_p} < \infty\},$$

где

$$\|f\|_{MW^{r,b}_p} := \sup_j \|f_j\|_p \cdot 2^{rj} (\bar{j})^{-(d-1)b}, \quad \bar{j} := \max\{1; j\}, \quad f_j := \sum_{\|\mathbf{s}\|_1=j} \delta_{\mathbf{s}}(f), \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

В [6] установлено, что для $r > 0$, $1 < p \le 2$, $p \le \theta \le \infty$ имеет место вложение

$$MH^r_{p,\theta} \subset MW^{r,1/p-1/\theta}_p. \tag{1.9}$$

Единичные шары пространств $MB^r_{p,\theta}$, $MH^r_{p,\theta}$, $MW^{r,b}_p$ будем обозначать через $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$, $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$, $\mathbf{MW}^{r,b}_p$ соответственно и называть их классами. С историей исследования классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ (с аппроксимативной точки зрения) можно ознакомиться, например, в монографии [8] и обзоре [9].

Классы $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ введены В.Н. Темляковым [3] при решении им задачи, связанной с получением конструктивных верхних оценок для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ и $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$. Вопросы, связанные с нахождением порядковых оценок нелинейного приближения классов $\mathbf{MH}^r_{p,\theta}$, изучались в [3; 4; 6; 7; 9] (для наилучшего $m$-членного приближения по многомерной тригонометрической системе) и в [12] (для наилучшего $m$-членного приближения по тензорной системе Хаара).

В. Н. Темляков для классов $\mathbf{MW}^{r,b}_q$ установил справедливость утверждения [5, Theorem 3.2]:

*Пусть $1 < p \le 2 < q < \infty$ и $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$. Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MW}^{r,b}_p)_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2} (\log m)^{(d-1)(b+(q-1)(r-(1/p-1/q)q')}, \tag{1.10}$$

*где $1/q + 1/q' = 1$. Оценка сверху обеспечивается конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме.*

А. С. Романюк для классов $\mathbf{MB}^r_{p,\theta}$ доказал следующее утверждение (см. [1, теорема 2.1]):

*Пусть $1 < p \le 2 < q < \infty$ и $1 \le \theta \le \infty$. Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-1/2} (\log m)^{d(1-1/\theta)}, \tag{1.11}$$

*если $r = 1/p$, и*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2} (\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))_+}, \tag{1.12}$$

*если $1/p - 1/q < r < 1/p$, где $a_+ := \{a; 0\}$, $1/\theta + 1/\theta' = 1$.*

Заметим, что для двух положительных величин $A$ и $B$ запись $A \asymp B$ означает, что существует положительная величина $C$ такая, что $C^{-1}A \le B \le CA$. В случае $B \ge C^{-1}A$ или $B \le CA$ будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Для величин $C_j$, $j \in \mathbb{N}$, которые будут встречаться в работе явным или неявным образом, существенным является то, что они не зависят от одного обозначенного контекстом параметра.

## 2. Основные результаты и комментарии к ним

Имеют место следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Пусть* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $p \leq \theta < \infty$ *и* $(1/p - 1/q)q' < r < 1/p$. *Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \asymp \sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))}. \tag{2.1}$$

*Оценка сверху обеспечивается конструктивным методом, основанным на жадном алгоритме.*

**Теорема 2.** *Пусть* $2 < p < q < \infty$, *тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{1/2}_{p,1})_q \asymp m^{-1/2}. \tag{2.2}$$

**Теорема 3.** *Пусть* $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$ *и* $r = 1/p$. *Тогда*

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp m^{-1/2}(\log m)^{d(1-1/\theta)+1/\theta}. \tag{2.3}$$

В завершение сформулированного результата приведем некоторые комментарии.

Замечание 1. Вопрос о конструктивных оценках сверху для $\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q$ и $\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q$ в случае, когда $1 < p \leq 2 < q < \infty$, а $p \leq \theta < \infty$, $1/p - 1/q < r \leq (1/p - 1/q)q'$, или $1 \leq \theta < p$, $1/p - 1/q < r < 1/p$, остается, по-видимому, открытым.

Замечание 2. В случае $d = 1$ теорема 2 доказана в [13].

Замечание 3. При условиях теоремы 3 имеет место оценка (см. также (1.11))

$$\sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \asymp (\log m)^{1/\theta}\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q.$$

## 3. Доказательства результатов

### 3.1. Доказательство теоремы 1

Оценка сверху базируется на использовании вложений (1.8), (1.9), а также (1.10) (для $b = 1/p - 1/\theta$), согласно которым имеем

$$\sigma_m(\mathbf{MB}^r_{p,\theta})_q \leq \sigma_m(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \leq \sigma_m(\mathbf{MW}^{r,1/p-1/\theta}_p)_q$$

$$\asymp m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(1/p-1/\theta+(q-1)(r-(1/p-1/q)q')}$$

$$= m^{-(r-1/p+1/q)q/2}(\log m)^{(d-1)(q-1)(r-1/p+q'/(q\theta'))}.$$

Нижняя оценка в (2.1) вытекает из вложения (1.8) и соотношения (1.12).

### 3.2. Доказательство теоремы 2

Оценка сверху в (2.2) вытекает из соотношения (1.11) за счет вложения $MB^{1/2}_{p,1} \subset MB^{1/2}_{2,1}$, $p > 2$.

При нахождении оценки снизу в (2.2) будем пользоваться известным результатом Рудина — Шапиро (см., например, [14, с. 155]): для каждого $l \in \mathbb{N}$ найдется полином

$$R_l(x) := \sum_{j=2^{l-1}}^{2^l-1} \varepsilon_j e^{ijx}, \quad \varepsilon_j = \pm 1,$$

такой что
$$\|R_l\|_\infty \ll 2^{l/2}. \tag{3.1}$$

Итак, выберем по заданному $m \in \mathbb{N}$ число $n \in \mathbb{N}$ такое, чтобы выполнялись соотношения
$$m \asymp 2^n n^{d-1}, \tag{3.2}$$
$$\#\{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n\} \ge 2m, \tag{3.3}$$
и рассмотрим функцию
$$g(\mathbf{x}) := C_1 2^{-n} n^{-d+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j). \tag{3.4}$$
Заметим, что согласно (3.1) имеем
$$\Big\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j) \Big\|_p = \prod_{j=1}^{d} \|R_{s_j}(x_j)\|_p \le \prod_{j=1}^{d} \|R_{s_j}(x_j)\|_\infty \ll 2^{\|\mathbf{s}\|_1/2}. \tag{3.5}$$

Убедимся, что $g \in \mathbf{MB}^{1/2}_{p,1}$ при соответствующем значении $C_1 > 0$. Действительно, принимая во внимание (1.4), (3.4), (3.5) и
$$\sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = j} 1 \asymp j^{d-1}, \tag{3.6}$$
получаем
$$\|g\|_{MB^{1/2}_{p,1}} = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/2} \|\delta_{\mathbf{s}}(g)\|_p = C_1 2^{-n} n^{-d+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/2} \Big\| \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j) \Big\|_p$$
$$\ll 2^{-n} n^{-d+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} 2^{\|\mathbf{s}\|_1} = n^{-d+1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} 1 \asymp 1.$$

Далее, возьмем произвольное множество $K_m$, состоящее из $m$ гармоник $\mathbf{k}$. Рассмотрим дополнительную функцию $h = v - u$, где
$$v = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j), \quad u = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = n}^{*} \prod_{j=1}^{d} R_{s_j}(x_j),$$
а символ “ $*$ ” в верхнем индексе суммы в $u$ означает, что полином $u$ содержит только те гармоники функции $v$, которые имеют номера из множества $K_m$. Поэтому, учитывая (3.2) и (3.3), имеем
$$\|h\|'_q \le \|v - u\|_2 \le \|v\|_2 + \|u\|_2 \le (\#\{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n\})^{1/2} + m^{1/2} \ll m^{1/2}. \tag{3.7}$$

Для произвольного тригонометрического полинома $t$ с гармониками из $K_m$, с одной стороны, имеем
$$\langle g - t, h\rangle \le \|g - t\|_q \cdot \|h\|_{q'}. \tag{3.8}$$
С другой стороны, принимая во внимание (3.2)–(3.4), получаем
$$\langle g - t, h\rangle = \langle g, h\rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n\} \setminus K_m} \hat{g}(\mathbf{k}) \gg 2^{-n} n^{-d+1} (\#\{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 = n\} - m)$$
$$\ge 2^{-n} n^{-d+1} (2^n n^{d-1} - m) \asymp 1. \tag{3.9}$$

Таким образом, исходя из (3.7)–(3.9), имеем
$$\sigma_m(\mathbf{MB}^{1/2}_{p,1})_q \ge \sigma_m(g)_q \gg m^{-1/2}.$$

Нижняя оценка в (2.2) установлена.

### 3.3. Доказательство теоремы 3

Установим сначала оценку сверху.

По заданному $m \in \mathbb{N}$ выберем $n \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы выполнялись условия $m > \#Q_n$ и (3.2), где $Q_n := \{\rho(\mathbf{s})\colon \|\mathbf{s}\|_1 < n\}$, а $\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}$.

Ввиду вложений (1.8) построим полином, который будет реализовать для $f \in \mathbf{MH}^r_{p,\theta}$ требуемую оценку приближения, в виде

$$P(\Theta_m) = \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 < n} \delta_{\mathbf{s}}(f) + \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}}), \tag{3.10}$$

где $P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}})$ — полиномы, приближающие “блоки” $\delta_{\mathbf{s}}(f)$ согласно лемме Белинского, а

$$n_1 = \frac{(n + (d-1)\log n)q}{2}, \tag{3.11}$$

$$N_{\mathbf{s}} = [2^n n^{(d-1)/\theta - 1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p] + 1. \tag{3.12}$$

Покажем сначала, что

$$\sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \ll n^{(d-1)/\theta' + 1}. \tag{3.13}$$

Действительно, используя неравенство Гельдера, а также учитывая (1.7), (3.6), (3.11), имеем

$$\sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p = \sum_{n \le j < n_1} \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = j} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p$$

$$\le \sum_{n \le j < n_1} \Big( \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = j} (2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p)^\theta \Big)^{1/\theta} \Big( \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 = j} 1 \Big)^{1/\theta'} \ll \|f\|_{MH^{1/p}_{p,\theta}} \sum_{n \le j < n_1} j^{(d-1)/\theta'}$$

$$\le n_1^{(d-1)/\theta'} \sum_{n \le j < n_1} 1 \asymp n^{(d-1)/\theta' + 1}.$$

Убедимся теперь, что полином $P(\Theta_m)$ содержит по порядку не больше чем $m$ гармоник. Поскольку $\#Q_n \asymp 2^n n^{d-1}$, то вследствие (3.12), (3.13) и (3.2) убеждаемся, что

$$\#\Theta_m = \#Q_n + \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} N_{\mathbf{s}} \ll 2^n n^{d-1} + n^d + 2^n n^{(d-1)/\theta - 1} \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \ll 2^n n^{d-1} \asymp m.$$

Принимая во внимание (3.10), имеем

$$\|f - P(\Theta_m)\|_q \le \Big\| \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} (\delta_{\mathbf{s}}(f) - P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}})) \Big\|_q + \Big\| \sum_{\|\mathbf{s}\|_1 \ge n_1} \delta_{\mathbf{s}}(f) \Big\|_q =: J_1 + J_2. \tag{3.14}$$

Воспользовавшись следствием к теореме Литтлвуда — Пэли, леммой Белинского, неравенством разных метрик Никольского, а также учитывая (3.12), (3.13) и (3.2), получаем

$$J_1 \ll \Big( \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} \|\delta_{\mathbf{s}}(f) - P(\Theta_{N_{\mathbf{s}}})\|_q^2 \Big)^{1/2} \ll \Big( \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} N_{\mathbf{s}}^{-1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_2^2 \Big)^{1/2}$$

$$\ll \Big( \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} N_{\mathbf{s}}^{-1} 2^{2\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p^2 \Big)^{1/2}$$

$$\le \Big( 2^{-n} n^{1-(d-1)/\theta} \sum_{n \le \|\mathbf{s}\|_1 < n_1} 2^{\|\mathbf{s}\|_1/p} \|\delta_{\mathbf{s}}(f)\|_p \Big)^{1/2} \ll \Big( 2^{-n} n^{2-(d-1)/\theta + (d-1)/\theta'} \Big)^{1/2}$$

$$= \left((2^n n^{d-1})^{-1} n^{2d(1-1/\theta)+2/\theta}\right)^{1/2} \asymp m^{-1/2}(\log m)^{d(1-1/\theta)+1/\theta}. \tag{3.15}$$

Учитывая (3.11) и (3.2), выводим

$$J_2 \leq \mathcal{E}_{Q_{n_1}}(\mathbf{MH}^r_{p,\theta})_q \ll 2^{-(r-1/p+1/q)n_1} n_1^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+} = 2^{-(n+(d-1)\log n)/2} n_1^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+}$$

$$\asymp m^{-1/2}(\log m)^{(d-1)(1/q-1/\theta)_+} \ll m^{-1/2}(\log m)^{d(1-1/\theta)+1/\theta}. \tag{3.16}$$

Подставляя (3.15), (3.16) в (3.14), получаем в (2.3) требуемую оценку сверху.

В случае $1 < p \leq 2 < q < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$, $r = 1/p$ оценка снизу в (2.3) содержится в [6, теорема 1] и имеет место для всех конечных значений $\theta$, т. е. для $1 \leq \theta < \infty$.

Таким образом, теорема 3 доказана.

В завершение автор выражает искреннюю признательность рецензенту за сделанные им замечания, способствовавшие улучшению изложения материала. Идея написать данную работу возникла в 2016 г. во время пребывания в Centre de Recerca Matemàtica (г. Барселона, Испания) (где и была завершена год спустя) в рамках научно-исследовательской программы по конструктивной теории приближений и гармоническому анализу. Также автор выражает огромную благодарность проф. В. Н. Темлякову за обсуждение изложенных здесь результатов во время пребывания в Centre de Recerca Matemàtica в 2016 и 2017 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Романюк А.С.** Наилучшие $M$-членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // Изв. РАН. Сер. мататематическая. 2003. Т. 67, № 2. С. 61–100.
2. **Белинский Э.С.** Приближение плавающей системой экспонент на класах периодических функций с ограниченной смешанной производной // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Ярославль: Изд-во Яросл. ун-та, 1988. С. 16–33.
3. **Темляков В.Н.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 131–160.
4. **Базарханов Д.Б.** Нелинейные тригонометрические приближения классов функций многих переменных // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 8–42.
5. **Temlyakov V.N.** Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // Constr. Approx. 2017. Vol. 45, № 3. P. 467–495. doi: 10.1007/s00365-016-9345-3 .
6. **Стасюк С.А.** Конструктивные разреженные тригонометрические приближения для классов функций с небольшой смешанной гладкостью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 4. С. 247–253.
7. **Стасюк С.А.** Найкраще $m$-членне тригонометричне наближення періодичних функцій малої мішаної гладкості з класів типу Нікольського — Бєсова // Укр. мат. журн. 2016. Т. 68, № 7. С. 983–1003.
8. **Романюк А.С.** Аппроксимативные характеристики классов периодических функций многих переменных. Київ: Інститут математики НАН України, 2012. Т. 92. 353 с. (Праці Інституту математики НАН України.)
9. **Dũng D., Temlyakov V.N., Ullrich T.** Hyperbolic cross approximation. arXiv: math.1601.03978v2 [math.NA] 2 Dec 2016. P. 1–182. URL: https://arxiv.org/abs/1601.03978v2 .
10. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН СССР. 1986. Т. 178. С. 1–112.
11. **Лизоркин П.И., Никольский С.М.** Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точки зрения // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 187. С. 143–161.
12. **Стасюк С.А.** Приближение некоторых гладкостных классов периодических функций многих переменных полиномами по тензорной системе Хаара // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 251–260.

13. **Stasyuk S.A.** Best $m$-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 177. P. 1–16. doi: 10.1016/j.jat.2013.09.006.
14. **Кашин Б.С., Саакян А.А.** Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984. 496 с.

Стасюк Сергей Андреевич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики НАН Украины, Киев
e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua

Поступила 26.07.2017

**REFERENCES**

1. Romanyuk A.S. Best $M$-term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables. *Izv. Math.*, 2003, vol. 67, no. 2, pp. 265–302. doi: 10.1070/IM2003v067n02ABEH000427.
2. Belinskii E.S. Approximation by a "floating" system of exponentials on classes of periodic functions with a bounded mixed derivative. *Studies in the theory of functions of several real variables. Matematika.* Yaroslavl': Yaroslav. Gos. Univ. Publ., 1988, pp. 16–33 (in Russian).
3. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness, *Sb. Math.*, 2015, vol. 206, no. 11, pp. 1628–1656. doi: 10.1070/SM2015v206n11ABEH004507.
4. Bazarkhanov D.B. Nonlinear trigonometric approximations of multivariate function classes. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, pp. 2–36. doi: 10.1134/S0081543816040027.
5. Temlyakov V.N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness. *Constr. Approx.*, 2017, vol. 45, no. 3, pp. 467–495. doi: 10.1007/s00365-016-9345-3.
6. Stasyuk S.A. Constructive sparse trigonometric approximations of functions with small mixed smoothness. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 4, pp. 247–253 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-4-247-253.
7. Stasyuk S.A. Best $m$-term trigonometric approximation for periodic functions with small mixed smoothness from Nikolskii–Besov type classes. *Ukrain. Mat. Zh.*, 2016, vol. 68, no. 7, pp. 983–1003 (in Ukrainian).
8. Romanyuk A.S. *Approksimativnye kharakteristiki klassov periodichestikh funktsii mnogikh peremennykh* [Approximation characteristics of classes of periodic functions of several variables]. Pratsi Instytutu Matematyky Natsional'noï Akademiï Nauk Ukraïny. Matematyka ta ïï Zastosuvannya 93. Kyïv: Instytut Matematyky NAN Ukraïny, 2012, 352 p. ISBN: 978-966-02-6692-6.
9. D. Dũng, Temlyakov V.N., Ullrich T. Hyperbolic cross approximation, *arXiv*: math.1601.03978v2 [math.NA] 2 Dec 2016, pp. 1–182. Available at: https://arxiv.org/abs/1601.03978v2.
10. Temlyakov V.N. Approximation of functions with bounded mixed derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 178, no. 1, 121 p.
11. Lizorkin P.I., Nikol'skii S.M. Functional spaces of mixed smoothness from decompositional point of view. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
12. Stasyuk S.A. Approximation of certain smoothness classes of periodic functions of several variables by polynomials with regard to the tensor Haar system. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 4, pp. 251–260 (in Russian).
13. Stasyuk S.A. Best $m$-term trigonometric approximation of periodic functions of several variables from Nikol'skii–Besov classes for small smoothness. *J. Approx. Theory.*, 2014, vol. 177, pp. 1–16. doi: 10.1016/j.jat.2013.09.006.
14. Kashin B.S., Saakyan A.A. *Orthogonal series.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 1989, Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 75, 451 p. ISBN: 0821845276. Original Russian text published in *Ortogonal'nye ryady*, Moscow, Nauka Publ., 1984, 496 p.

The paper was received by the Editorial Office on July 26, 2017.

*Sergej Andreevich Stasyuk*, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, 01601, Ukraine, e-mail: stasyuk@imath.kiev.ua.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.518.834

# РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ КРИВИЗНЫ ГЛАДКИХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧАСТНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ[1]

**Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных**

В статье получена оценка сверху погрешности аппроксимации кривизны графиков периодических функций класса $W^r$ при $r \geq 3$ в равномерной метрике с помощью простейшего аппарата приближения гладких периодических функций — частных сумм их тригонометрических рядов Фурье. Задача в математическом плане интересна тем, что кривизна графика функций является специфичным нелинейным оператором на классе гладких функций $W^r$ на периоде (и отрезке) при $r \geq 2$. Ранее было опубликовано несколько работ об аппроксимации кривизны плоских кривых в среднеквадратичной и чебышевской метриках. В качестве аппарата приближения в предшествовавших работах использовались частные суммы тригонометрических рядов (в $L^2$-норме), интерполяционные сплайны с равномерными узлами, средние Фейера частных сумм тригонометрических рядов и интерполяционно-ортогональные всплески на базе всплесков Мейера (в $C^\infty$-норме). Методику настоящей работы, отраженную в лемме, вероятно, можно распространить на $L^p$-метрику и другие методы аппроксимации.

Ключевые слова: приближение кривизны, плоские кривые класса $W^r$, равномерная метрика.

**N. I. Chernykh, Yu. N. Subbotin. Uniform approximation of the curvature of smooth planar curves with the use of partial sums of Fourier series.**

An error bound for the approximation of the curvature of graphs of periodic functions from the class $W^r$ for $r \geq 3$ in the uniform metric is obtained with the use of the simplest approximation technique for smooth periodic functions, which is approximation by partial sums of their trigonometric Fourier series. From the mathematical point of view, the interest in this problem is connected with the specific nonlinearity of the graph curvature operator on the class of smooth functions $W^r$ on a period or a closed interval for $r \geq 2$. There are several papers on curvature approximation for planar curves in the mean-square and Chebyshev norms. In previous works, the approximation was performed by partial sums of trigonometric series (in the $L^2$ norm), interpolation splines with uniform knots, Fejér means of partial sums of trigonometric series, and orthogonal interpolating wavelets based on Meyer wavelets (in the $C^\infty$ norm). The technique of this paper, based on the lemma, can possibly be generalized to the $L^p$ metric and other approximation methods.

Keywords: curvature approximation, planar curves from the class $W^r$, uniform metric.

**MSC:** 42A10

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-253-256

В работе [1] изучалась аппроксимация кривизны гладких плоских кривых в среднеквадратической метрике $L_2[0,2\pi]$. В настоящей работе, как и в ряде более ранних работ (см., например, [2] и цитированные там работы, а также работу 2016 года, опубликованную в настоящем журнале), подобная проблема рассматривается в равномерной метрике.

Далее $W^r$ ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 3$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел) — класс $2\pi$-периодических функций $y = f(x)$, удовлетворяющих условиям: всюду на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ существуют производные

$$y^{(s)} = y^{(s)}(x) = \frac{d^s f(x)}{dx^s} \quad (s = 1, \ldots, r-1), \quad \text{причем} \quad \left|y^{(r-1)}(x) - y^{(r-1)}(t)\right| \leq |x - t| \qquad (1)$$

для любых $x, t$, принадлежащих $\mathbb{R}$, $r \geq 3$. В статье предлагается аппроксимировать в равномерной норме кривизну таких кривых кривизной графиков частных сумм их тригонометрических рядов Фурье. При этом будут использованы результаты И. Г. Соколова [3] об оценках соответствующего остаточного члена при аппроксимации частными суммами ряда Фурье в равномерной норме дифференцируемой функции $f(x)$ из класса (1). А именно если функция

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

$y \in W^r$ $(r \geq 3)$ и $S_n(y,x)$ — частная сумма порядка $n$ ее ряда Фурье, то $y^{(s)} \in W^{r-s}$ $(s = 1,2)$, $S_n^{(s)}(y,x)$ — частная сумма порядка $n$ ряда Фурье производной $y^{(s)}(x)$ и из результатов И. Г. Соколова следует, что

$$\big\|y^s(x) - S_n^{(s)}(y,x)\big\|_{C[0,2\pi]} \leq \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\ln n}{n^{r-s}} + \frac{7}{n^{r-s}} \quad (s = 1,2,\ r \in \mathbb{N},\ r \geq 3). \tag{2}$$

Отметим, что у И. Г. Соколова [3] в формулировке результата вместо числа 7 в (2) стоит $O(1)$, как величина, не зависящая от $n$ и $r$, но в конце статьи, в зависимости от трех различных возможных вариантов, выписаны явные значения величины $O(1)$ и во всех случаях выписываемые положительные константы не больше 7.

Итак, кривизну

$$K(y;x) = \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}} \tag{3}$$

кривой — графика функции $y(x) \in W^r$ $(r \geq 3)$ — аппроксимируем кривизной графиков частных сумм $S_n(y,x)$ ряда Фурье $y(x)$, т. е. кривизной

$$K(S_n;x) = \frac{S_n''(y,x)}{[1 + (S_n'(y;x))^2]^{3/2}}. \tag{4}$$

Вначале рассмотрим функцию

$$\widetilde{K}(u,v) = \frac{u}{(1+v^2)^{3/2}} \tag{5}$$

двух вещественных переменных $u, v$ и оценим приращение $\Delta\widetilde{K}(u,v)$ этой функции при замене $(u,v)$ на $(u + \Delta u, v + \Delta v)$. Имеем

$$\Delta\widetilde{K}(u,v) = \frac{u + \Delta u}{(1 + (v+\Delta v)^2)^{3/2}} - \frac{u}{(1+v^2)^{3/2}} = \frac{\Delta u}{(1 + (v+\Delta v)^2)^{3/2}} + u\Big(\Delta \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}}\Big), \tag{6}$$

где $\Delta(1+v^2)^{-3/2} = (1 + (v+\Delta v)^{-3/2} - (1+v^2)^{-3/2})$. По теореме Лагранжа имеем

$$\Delta\big((1+v^2)^{-3/2}\big) = (\Delta v)\frac{d}{d\xi}(1+\xi^2)^{-3/2}\Big|_{\xi=v+\theta\Delta v} = -3(1+(v+\theta\Delta v)^2)^{-5/2}(v+\theta\Delta v)\Delta v \qquad (0<\theta<1),$$

откуда получаем неравенство

$$\big|\Delta\big((1+v^2)^{-3/2}\big)\big| \leq 3|\Delta v| \max_{\xi\geq 0} \lambda(\xi), \tag{7}$$

где $\lambda(\xi) = \xi(1+\xi^2)^{-5/2}$. Имеем

$$\lambda'(\xi) = (1+\xi^2)^{-5/2}(1 - 5\xi^2(1+\xi^2)^{-1}) = (1+\xi^2)^{-7/2}(1-4\xi^2).$$

Так как $\lambda(\xi) = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = +\infty$, то $|\lambda(\xi)|$ достигает своего максимума на $\mathbb{R}$ в точке $\xi = 1/2$, где $\lambda'(1/2) = 0$. Таким образом,

$$3\max_{\xi\geq 0} \lambda(\xi) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{4}\Big)^{5/2}} = \frac{48}{25\sqrt{5}} = \frac{48\sqrt{5}}{125}. \tag{8}$$

Результатом объединения оценок (6)–(8) является следующая лемма об оценке изменения функции (5) при изменении ее аргументов. При этом учтено, что знаменатель в первом слагаемом равенства (6) не меньше 1.

**Лемма.** *При любых вещественных $u, u_1, v, v_1$ справедливо неравенство*

$$|\widetilde{K}(u,v) - \widetilde{K}(u_1,v_1)| \le |u - u_1| + \frac{48\sqrt{5}}{125}|u| \cdot |v - v_1|. \qquad (9)$$

Из определений (3)–(5) функций $K(y;x)$, $K(S_n;x)$ и $\widetilde{K}(u,v)$ следует, что

$$K(y;x) = \widetilde{K}(y''(x), y'(x)), \qquad K(S_n;x) = \widetilde{K}(S_n(y'';x), S_n(y';x)).$$

Введем обозначение $G = (48\sqrt{5})/125 \approx 0.859$. Полагая в неравенстве (9) леммы $u = y''(x)$, $u_1 = S''_n(y;x)$, $v = y'(x)$, $v_1 = s'_n(y;x)$, получаем следующее утверждение о поточечной аппроксимации кривизны $2\pi$-периодической кривой (графика функции $y = y(x)$) кривизной графика функции $S_n(y;x)$.

**Теорема.** *Пусть функция $y(x) \in W^r$ $(r \ge 3,\ r \in \mathbb{N})$ и $S_n(y;x)$ — ее сумма Фурье:*

$$S_n(y;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(x)\cos kx\, dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(x)\sin kx\, dx.$$

*Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство*

$$|K(y;x) - K(S_n(y;\cdot);x)| \le |y''(x) - S''_n(y;x)| + G|y''(x)||y'(x) - S'_n(y;x)|. \qquad (10)$$

*Неравенство* (10) *является точным в следующем смысле. Константа* 1 *перед первым слагаемым в правой части* (10) *достигается в тех точках $x$, где $y'(x) = S'_n(y;x) = 0$, а константа $G$ перед вторым слагаемым в* (10) *достигается асимптотически при $n \to \infty$ в тех точках, где $y'(x) = 1/2$.*

Само неравенство (10) вытекает из леммы при указанных функциональных значениях аргументов функции (5). А утверждения теоремы о точности оценки (10) следуют из вывода оценок (8) и (9).

Так как при $r \ge 3$ для функций $y(x)$ из класса $W^r$ справедливо неравенство Фавара (см., например, [4, с. 282])

$$\|y''(x)\|_{C[0,2\pi]} \le K_{r-2},$$

где

$$K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(r+1)k}}{(2k+1)^{r+1}}, \qquad \frac{\pi^2}{8} = K_2 < K_4 < K_6 < \dots < K_3 < K_1 = \frac{\pi}{2},$$

то, применяя это неравенство и оценку (2) к правой части неравенства (10), получаем следующую, равномерную на периоде, оценку погрешности рассматриваемой аппроксимации кривизны гладких кривых.

**Следствие.** *Для функций $y(x) \in W^r$ $(r \ge 3)$ и частных сумм $S_n(y;x)$ справедливо неравенство*

$$\|K(y;x) - K(S_n(y,\cdot);x)\|_{C[0,2\pi]} \le \Big(\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\ln n}{n^{r-2}} + \frac{7}{n^{r-2}}\Big)\Big(1 + \frac{GK_{r-2}}{n}\Big).$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Субботин Ю.Н.** Аппроксимация кривизны гладких классов плоских кривых элементами конечномерных подпространств // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2012. Вып. 3. С. 41–47.
2. **Субботин Ю.Н., Черных Н.И.** Интерполяционные всплески в задаче оценки кривизны // Тр. Междунар. летней мат. шк.-конф. С. Б. Стечкина по теории функций. Душанбе: Изд-во “Офсет”, 2016. С. 231–233.

3. **Соколов И.Г.** Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103, № 1. С. 23–26.
4. **Ахиезер Н.И.** Лекции по теории аппроксимации. М.; Л: Гостехиздат, 1947. 323 с.


Поступила 01.06.2017

Субботин Юрий Николаевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

**REFERENCES**


1. Subbotin Yu.N. Approximation of the curvature for certain smooth classes of plane curves by elements of finite-dimensional spaces. *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestvennye nauki.* 2012, no. 3, pp. 41–47 (in Russian).
2. Subbotin Yu.N., Chernykh N.I. *Interpolyatsionnye vspleski v zadache otsenki krivizny* [Interpolation wavelets in the problem of estimating the curvature]. Proc. Internat. Summer Math. Stechkin School-Conf. on Function Theory. Dushanbe, Offset Publ., 2016, pp. 231–233.
3. Sokolov I.G. The remainder term of the Fourier series of differentiable functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1955, vol. 103, no. 1, pp. 23–26 (in Russian).
4. Achieser N.I. *Theory of approximation.* Reprint of the 1956, New York: Dover Publ., Inc., 1992, 307 p. ISBN: 0486671291 . Original Russian text published in Akhiezer N.I. *Lektsii po teorii approksimatsii.* Moscow, Leningrad: OGIZ Publ., 1947, 323 p.


The paper was received by the Editorial Office on June, 1, 2017.

*Yurii Nikolaevich Subbotin*, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: yunsub@imm.uran.ru .

*Nikolai Ivanovich Chernykh*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: chernykh@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 517.5

# О КРАТНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЯХ

**Р. М. Тригуб**

По тематике и методу статья относится к классическому анализу. Винеровская банахова алгебра (нормированное кольцо) $A(\mathbb{R}^d), d \in \mathbb{N}$, представляет собой пространство преобразований Фурье функций из $L_1(\mathbb{R}^d)$ (умножение поточечное). Принадлежность этой алгебре является существенной для мультипликаторов Фурье из $L_1$ в $L_1$ и определяющей для сходимости на пространстве $L_1$ методов суммирования рядов и интегралов Фурье, задаваемых одной функцией-множителем. Функцию $f$ на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ называют *$m$-кратно монотонной*, если $(-1)^\nu f^{(\nu)}(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$ и $0 \leq \nu \leq m+1$. Давно известно для таких функций интегральное представление Шенберга (I. J. Schoenberg), которое при $m \to \infty$ переходит в формулу С. Н. Бернштейна для вполне монотонных функций. Обозначим через $V_0(\mathbb{R}_+)$ множество функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}_+$, т. е., множество функций, представимых в виде разности двух ограниченных монотонных функций. При $m \in \mathbb{N}$ через $V_m(\mathbb{R}_+)$ обозначим пространство функций из $V_{0,loc}(\mathbb{R}_+)$ с условием $\|f\|_{V_m} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| + \int_0^\infty t^m |df^{(m)}(t)| < \infty$. Это банахова алгебра. Для того чтобы функция $f$ принадлежала $V_m(\mathbb{R}_+)$, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух ограниченных функций с выпуклыми производными порядка $m-1$ (теорема 1). В данной работе рассмотрен также вопрос о принадлежности $A(\mathbb{R}^d)$ функций вида $f_0(|x|_{p,d})$, где $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $|x|_{\infty,d} = \max\limits_{1\leq j\leq d} |x_j|$, $|x|_{p,d} = \big(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\big)^{1/p}$ при $p \in (0, \infty)$. Случай $p = 2$ (радиальные функции) хорошо изучен, включая признак Пойя — Аски (G. Pólya – R. Askey) положительной определенности функций на $\mathbb{R}^d$. Сформулируем следствия из полученной здесь теоремы 2:

1) если $f_0 \in C_0[0, \infty)$ и $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$, то при $p \in [1, \infty]$ функция $f_0(|x|_{p,d})$ принадлежит $A(\mathbb{R}^d)$;

2) если $f_0 \in C_0[0, \infty)$ и $f_0 \in V_{d+1}(\mathbb{R}_+)$, то при $p \in (0, 1)$ функция $f_0(|x|_{p,d})$ принадлежит $A(\mathbb{R}^d)$.

Приведены примеры, среди которых одна осциллирующая функция.

Ключевые слова: функции ограниченной вариации, выпуклые, кратно монотонные, вполне монотонные и положительно определенные на $\mathbb{R}_+$, преобразование Фурье.

**R. M. Trigub. On multiply monotone functions.**

The subject and the method of this paper belong to classical analysis. The Wiener Banach algebra (the normed ring) $A(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, is the space of Fourier transforms of functions from $L_1(\mathbb{R}^d)$ (with pointwise product). The membership in this algebra is essential for Fourier multipliers from $L_1$ to $L_1$ and principal for the convergence on the space $L_1$ of summation methods for Fourier series and integrals given by one factor function. A function $f$ is called $m$-multiply monotone on $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ if $(-1)^\nu f^{(\nu)}(t) \geq 0$ for $t \in \mathbb{R}_+$ and $0 \leq \nu \leq m+1$. For such functions, Shoenberg's integral presentation has long been known, which becomes Bernstein's formula for monotone functions as $m \to \infty$. Denote by $V_0(\mathbb{R}_+)$ the set of functions of bounded variation on $\mathbb{R}_+$, i.e., the set of functions representable as the difference of two bounded monotone functions. Denote by $V_m(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, the space of functions $f$ from $V_{0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ such that $\|f\|_{V_m} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| + \int_0^\infty t^m |df^{(m)}(t)| < \infty$. This is a Banach algebra. A function $f$ belongs to $V_m(\mathbb{R}_+)$ if and only if $f$ can be represented as the difference of two bounded functions with convex derivatives of order $m-1$ (Theorem 1). We also study conditions under which functions of the form $f_0(|x|_{p,d})$, where $|x|_{p,d} = \big(\sum_{j=1}^d |x_j|^p\big)^{1/p}$, $x = (x_1, \ldots, x_d)$, for $p \in (0, \infty)$ and $|x|_\infty = \max\limits_{1\leq j\leq d} |x_j|$, belong to $A(\mathbb{R}^d)$. The case $p = 2$ (radial functions) is well studied, including the Pólya–Askey criterion of the positive definiteness of functions on $\mathbb{R}^d$. We prove Theorem 2, which has the following corollaries.

(1) If $f_0 \in C_0[0, \infty)$ and $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$, then $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$ for $p \in [1, \infty]$.

(2) If $f_0 \in C_0[0, \infty)$ and $f_0 \in V_{d+1}(\mathbb{R}_+)$, then $f_0(|x|_{p,d}) \in A(\mathbb{R}^d)$ for $p \in (0, 1)$.

We give some examples, including an example with an oscillating function.

Keywords: function of bounded variation, convex function, multiply monotone function, completely monotone function, positive definite function, Fourier transform.

**MSC:** 26A48, 42A38, 26A45, 42B35

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-257-271

## Введение

Введем следующие обозначения и определения: $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; функцию $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, у которой $(-1)^\nu f^{(\nu)}(t) \geq 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$ и $0 \leq \nu \leq m+1$, $m \in \mathbb{N}$, называют *$m$-кратно монотонной*, а при $m = \infty$ — *вполне монотонной*. Через $\gamma(...)$, возможно с индексами, обозначаем положительные величины, зависящие лишь от переменных, стоящих в скобках. Для $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j$,

$$|x|_{\infty,d} = \max_{1\leq j\leq d} |x_j|, \qquad |x|_{p,d} = \Big(\sum_{j=1}^{d} |x_j|^p\Big)^{1/p} \quad \text{при} \quad p \in (0, \infty),$$

в частности, $|x|_{2,d} = \sqrt{(x,x)}$ — евклидова норма.

*Винеровской банаховой алгеброй* $A(\mathbb{R}^d)$ называется класс функций $d$ переменных $x_1, \dots, x_d$, представимых на $\mathbb{R}^d$ в виде преобразования Фурье интегрируемых функций, т. е.

$$A(\mathbb{R}^d) = \Big\{ f(x) = \widehat{g}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i(x,y)}\, dy,\ \|f\|_A = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |g(y)|\, dy < \infty \Big\}.$$

Эта алгебра возникает, например, при изучении мультипликаторов Фурье из $L_1$ в $L_1$ (см. [1;2]). Обзор свойств этой алгебры можно найти в [3]. В частности, функции из $A(\mathbb{R}^d)$ принадлежат пространству $C_0(\mathbb{R}^d)$, т. е. пространству непрерывных на $\mathbb{R}^d$ функций, удовлетворяющих соотношению

$$f(\infty) = \lim_{\max\limits_{1\leq j\leq d} |x_j| \to \infty} f(x) = 0.$$

Кроме того, функции из $A(\mathbb{R}^d)$ обладают локальным свойством (см. [3, Theorem 4.5.]).

Есть много разных достаточных условий принадлежности функций классу $A(\mathbb{R}^d)$ (см. [3]). Особенно хорошо изучены радиальные функции, т. е. функции вида $f(x) = f_0(|x|_{2,d})$. В этом случае вопрос о принадлежности $A(\mathbb{R}^d)$ при $d \geq 2$ полностью сводится к принадлежности $A(\mathbb{R}) = A(\mathbb{R}^1)$ другой функции (см. [4, 6.3.6; 5]).

Приведем один пример (см. [1, гл. IV, 7.4]):

$$f_0(t) = \frac{e^{it^\alpha}}{(1+t)^\beta}, \qquad f_0\big(|x|_{2,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d) \ \Leftrightarrow\ 2\beta > d\alpha \geq 0.$$

Отметим, что те же формулы из [5] применимы для изменения числа переменных положительно определенных радиальных функций.

Обозначим через $L_1^*(\mathbb{R})$ множество измеримых функций $g$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname*{ess\,sup}_{|y|\geq|x|} |g(y)| \in L_1(\mathbb{R}),$$

а через $A^*(\mathbb{R})$ обозначим алгебру, состоящую из преобразований Фурье $f = \widehat{g}$, где $g \in L_1^*(\mathbb{R})$. Свойства этой алгебры можно найти в [6].

Берлинг (Beurling) [7] доказал, что если $f_1(\infty) = 0$ и $\big|f_1(t+h) - f_1(t)\big| \leq \big|f_2(t+h) - f_2(t)\big|$ $(t, h \in \mathbb{R})$, где $f_2 \in A^*(\mathbb{R})$, то $f_1 \in A(\mathbb{R})$.

Отметим еще, что принадлежность $A(\mathbb{R}^d)$ является существенной при изучении сходимости на $L_1$ и $C$ линейных средних рядов и интегралов Фурье, определяемых одной функцией-множителем [4, 8.1.2], а принадлежность $A^*(\mathbb{R}^d)$ является определяющей для сходимости тех же средних во всех точках Лебега (почти всюду) (см. [4, 8.1.3]).

В настоящей статье изучена алгебра $V_m$ функций, равных разности двух ограниченных $m$-кратно монотонных функций на $\mathbb{R}_+$. Указано также достаточное условие для того чтобы $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$, $p \in (0, +\infty]$ (см. следствия и примеры в разд. 3).

Работа состоит из трех разделов. Первый раздел посвящен кратно монотонным функциям, второй — алгебре $V_m(\mathbb{R}_+)$, а третий — функциям вида $f_0\big(|x|_{p,d}\big)$ $\big(d \geq 2,\ p \in (0, +\infty]\big)$.

## 1. Кратно монотонные функции

Известно [8; 9], что если все функции $(-1)^\nu f^{(\nu)}$ $(0 \le \nu \le m-1,\ m \in \mathbb{N})$ неотрицательны, убывают и выпуклы вниз на $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, то при $t \ge 0$ $\big(f(0) = f(+0)\big)$

$$f(t) = \int\limits_0^{+\infty} (1-tu)_+^m \, d\mu(u) \quad (\xi_+ = \max\{\xi, 0\}),$$

где $\mu$ — некоторая положительная борелевская мера на $[0, +\infty)$, конечная на $[0, a]$ при любом $a \in \mathbb{R}_+$.

Известно также, что любая выпуклая (вниз, например) функция принадлежит $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ (на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ абсолютно непрерывна и даже из $\mathrm{Lip}\, 1$) и является интегралом от своей (убывающей) правой или левой производной. Выпуклая функция дифференцируема всюду, кроме, возможно, не более счетного числа точек, в которых существуют односторонние производные. Если же выпуклая на $\mathbb{R}_+$ функция ограничена, то она и монотонная.

**Лемма 1.** *Пусть натуральное число $m \ge 2$. Тогда если функция $f$ ограничена на $\mathbb{R}_+$ и $f^{(m-1)}$ выпукла вверх, то при любых $\nu \in \{0, 1, \dots, m\}$, $t > 0$ выполняется неравенство*

$$(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) \ge 0$$

*и существуют конечные пределы $f(+0)$, $f(+\infty)$. Кроме того,*

$$\lim_{t\to 0} t^\nu f^{(\nu)}(t) = \lim_{t\to+\infty} t^\nu f^{(\nu)}(t) = 0 \quad (1 \le \nu \le m) \quad и \quad \int\limits_0^\infty t^m \big|df^{(m)}(t)\big| < \infty.$$

*Если функция $f$ ненулевая, то существует число $a \in (0, +\infty]$ такое, что при любом $\nu \in \{1, \dots, m\}$ выполняется неравенство*

$$(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) > 0, \quad t \in (0, a),$$

*и $f(t) = f(+\infty)$ при $t \ge a$, если $a \in \mathbb{R}_+$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция $f$ ограничена снизу и при некотором $m \in \mathbb{N}$ $f^{(m)} \searrow$ (убывает), то $f^{(m)}(t) \ge 0$ при $t > 0$. Действительно, как видно из формулы Тейлора, при любом $a \in \mathbb{R}_+$ и $t \ge a$ (интеграл Стилтьеса)

$$f(t) = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t-a)^j + \frac{1}{m!} \int\limits_a^t (t-u)^m df^{(m)}(u) \le \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)(t-a)^j.$$

Если бы было $f^{(m)}(a) < 0$, то было бы и $f(+\infty) = -\infty$. Следовательно, существует конечный предел $f^{(m)}(+\infty)$ и $f^{(m-1)} \nearrow$.

Если $m \ge 2$, то по той же причине $(-f^{(m-1)} \searrow)$ $f^{(m-1)}(t) \le 0$ на $\mathbb{R}_+$ и существует конечный предел $f^{(m-1)}(+\infty)$. При этом $f^{(m)}(+\infty) = 0$, так как в противном случае $f^{(m-1)}$ не может быть ограниченной около $+\infty$.

Продолжая таким же образом, получаем $(-1)^{m+\nu+1} f^{(\nu)}(t) \ge 0$, $f^{(\nu)}(+\infty) = 0$ $(1 \le \nu \le m)$.

В силу монотонности функции и ее производных

$$\int\limits_0^\infty \sup_{u\ge t} |f'(u)| \, dt = \left| \int\limits_0^\infty f'(t)\, dt \right| = \big|f(+\infty) - f(+0)\big|.$$

Заметим, что если $g(t) \ge 0$, $g \searrow$ на $\mathbb{R}_+$ и при некотором $\alpha \ge 0$ функция $u^\alpha g(u) \in L(\mathbb{R}_+)$, то

$$0 \le t^{\alpha+1} g(2t) \le \int\limits_t^{2t} u^\alpha g(u)\,du \to 0 \quad (t \to +0,\ t \to +\infty). \tag{1.1}$$

Поэтому

$$\lim_{t\to+0} tf'(t) = \lim_{t\to+\infty} tf'(t) = 0.$$

Но тогда и

$$\int\limits_0^\infty t \sup_{t\ge u} |f''(u)|\,dt = \left|\int\limits_0^\infty tf''(t)\,dt\right| = \left|\int\limits_0^\infty f'(t)\,dt\right| < \infty.$$

В силу (1.1)

$$\lim_{t\to+0} t^2 f''(t) = \lim_{t\to+\infty} t^2 f''(t) = 0$$

и т. д.

А интеграл вычисляется интегрированием по частям.

Еще нужно учесть, что если непрерывная и ненулевая $f^{(\nu)}$, например, убывает к нулю, то существует $a_\nu \in \mathbb{R}_+$, при котором $f^{(\nu)}(t) > 0$ на $(0, a_\nu)$ и $f^{(\nu)}(t) = 0$ при $a_\nu \in \mathbb{R}_+$ и $t \ge a_\nu$. Очевидно, что $a_{\nu+1} \le a_\nu$. Но и $a_\nu \le a_{\nu+1}$, так как

$$f^{(\nu)}(t) = -\int\limits_t^\infty f^{(\nu+1)}(u)\,du.$$

Лемма доказана. $\square$

Вопрос о кратной монотонности стал существенным при определении положительной определенности, т. е. представлении в виде преобразования Фурье положительной меры. Так, по признаку Пойя, если четная функция $f$ принадлежит $C_0[0,+\infty)$ и выпукла вниз на $\mathbb{R}_+$, то $f = \widehat{g}$, где $g \in L_1(\mathbb{R})$ и $g(y) \ge 0$. Более того, $g \in L_1^*(\mathbb{R})$, т. е. $f \in A^*(\mathbb{R})$ (см. [4, с. 302]).

Признак типа Пойя для радиальных функций ([10], см. также [4, 6.3.7]) теперь можно сформулировать так: *если $f_0 \in C_0[0,+\infty)$ и при $m = 1 + [d/2]$ $(d \in \mathbb{N})$ $(-1)^m f_0^{(m-1)}$ выпукла вверх на $\mathbb{R}_+$, то*

$$f_0\bigl(|x|_{2,d}\bigr) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(y) e^{-i(x,y)}\,dy, \quad g \in L_1(\mathbb{R}^d), \quad g(y) \ge 0 \quad (y \in \mathbb{R}^d). \tag{1.2}$$

По теореме Бернштейна ограниченная и вполне монотонная функция на $\mathbb{R}_+$ представима в виде

$$f(t) = \int\limits_0^\infty e^{-ut}\,d\mu(u) \quad (t \ge 0,\ f(0) = f(+0)),$$

где $\mu$ — конечная положительная борелевская мера на $[0,+\infty)$. По теореме Шенберга [11, Theorem 3] (см. также, например, [4, 6.3.9]) функция $f_0\bigl(|x|_{2,d}\bigr)$ имеет представление (1.2) при любом $d \in \mathbb{N}$ в том и только в том случае, когда $f_0(\sqrt{t})$ вполне монотонная.

Отметим еще, что вместе с $m$-кратно монотонной функцией $f$ и суперпозиция $f \circ h$ является такой же, если $h(t) > 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$ и

$$(-1)^{\nu+1} h^{(\nu)}(t) \ge 0 \quad (1 \le \nu \le m,\ t \in \mathbb{R}_+).$$

Пример: $h(t) = t^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

## 2. Алгебра $V_m(\mathbb{R}_+)$

Разность двух кратно монотонных функций может не быть кратно монотонной.

Введем следующие обозначения: $V_0(\mathbb{R}_+)$ — множество функций ограниченной вариации на $\mathbb{R}_+$ (т. е. множество функций, представимых в виде разности двух ограниченных монотонных функций); $V_{0,loc}(\mathbb{R}_+)$ — множество функций $f$ таких, что $f(+\infty) = 0$ и на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$, имеющих ограниченную вариацию; $V_m(\mathbb{R}_+)$, $m \in \mathbb{N}$, — множество функций с условием ($f^{(m)} \in V_{0,loc}(\mathbb{R}_+)$)

$$\|f\|_{V_m} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)| + \int_0^\infty t^m \big| df^{(m)}(t)\big| < \infty. \tag{2.1}$$

Условие (2.1) при $m \in \mathbb{Z}_+$ Требельс (W. Trebels) [12] использовал как достаточное условие для мультипликаторов Фурье. Множество $V_m(\mathbb{R}_+)$, где $m \in \mathbb{N}$, является банаховой алгеброй (см. также [3]).

Функции из $V_1(\mathbb{R}_+)$ называют *квазивыпуклыми.*

**Лемма 2.** *Для того чтобы $f \in V_1(\mathbb{R}_+)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $f$ была разностью двух ограниченных и выпуклых функций на $\mathbb{R}_+$.*

Доказательство. *Достаточность.* Если $f = f_1 - f_2$, где $f_1$ и $f_2$ — ограниченные выпуклые, то, используя лемму 1, получаем

$$\int_0^\infty t|df_{1,2}(t)| = \left|\int_0^\infty t df_{1,2}(t)\right| = \left|\int_0^\infty f'_{1,2}(t)\,dt\right| = \big|f_{1,2}(+0) - f_{1,2}(+\infty)\big| < \infty.$$

*Необходимость.* Полагаем $f_1(t) = -\int_0^\infty (u-t)\big|df'(u)\big| \quad (f_1(+\infty) = 0).$

Очевидно, что при $t > 0$

$$|f_1(t)| \le \int_0^\infty u|df'(u)|, \quad f'_1(t) = \int_t^\infty |df'(u)| \searrow$$

и

$$\int_0^\infty t|df'_1(t)| = -\int_0^\infty t df'_1(t) = \int_0^\infty f'_1(t)\,dt = -f_1(+0).$$

Так что

$$\|f_1\|_{V_1} \le \int_0^\infty t|df'(t)| + |f_1(+0)| = 2\int_0^\infty t|df'(t)|.$$

Функция $f_2 = f_1 - f$ ограничена, как разность ограниченных функций,

$$f'_2(t) = \int_t^\infty |df'(u)| - f'(t) = \int_t^\infty \big(|df'(u) + df'(u)\big) \searrow$$

и

$$\|f_2\|_{V_1} \le \|f_1\|_{V_1} + \|f\|_{V_1} \le 3\|f\|_{V_1}. \qquad \square$$

Замечание. Как видно из доказатедьства леммы, $f_1(+\infty) = 0$. Если добавить в условие $f(+\infty) = 0$, то и $f_2(+\infty) = f_1(+\infty) - f(+\infty) = 0$.

Отметим, что функции из $C^2(\mathbb{R}_+)$ образуют плотное множество в $V_1(\mathbb{R}_+)$. Для доказательства достаточно применить при $h \to +0$ функцию Стеклова

$$f_{2,h}(t) = \frac{1}{h^2} \int_0^h du_1 \int_0^h f(t + u_1 + u_2)\, du_2.$$

Введем промежуточное пространство $V_0^*(\mathbb{R}_+)$ между $V_0$ и $V_1$, представляющее собой множество функций из $AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ с нормой

$$\|f\|_{V_0^*} = \int_0^\infty \operatorname*{ess\,sup}_{u \geq t} |f'(u)|\, dt;$$

$V_0^*(\mathbb{R}_+)$ — банахово пространство не сепарабельное, рефлексивное, в котором непрерывные функции не образуют плотное множество. Кроме того, алгебра $V_0^*(\mathbb{R}_+)$ (кольцо относительно поточечного умножения) существенно отличается от $L_1(\mathbb{R}_+)$. Отметим лишь одно отличие $V_0^*$ от $V_1$. Любую функцию из Lip 1 на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$ можно продолжить до функции из $V_0^*(\mathbb{R}_+)$, но не всегда — до функции из $V_1$. По этому поводу см. [13], где также сравниваются и преобразования Фурье четных функций из $V_0^*$ и $V_1$.

Заметим, что множества $V_1$ и $V_0^*$ можно рассматривать и на отрезке вещественной оси. Для отрезка $[0, b]$, например, появляются нормы

$$\int_0^b t\Big(1 - \frac{t}{b}\Big)|df'(t)|, \quad \int_0^b \operatorname*{ess\,sup}_{b \geq u \geq t} \big(|f'(u)| + |f'(b-u)|\big)\, dt.$$

Переходим к общему пространству $V_m,\ m \in \mathbb{N}$. Приведем первый основной результат.

**Теорема 1.** *Для того чтобы $f \in V_m(\mathbb{R}_+)$ (см. (2.1)), необходимо и достаточно, чтобы ее можно было представить в виде разности двух ограниченных функций с выпуклыми производными порядка $m-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Если $f = f_1 - f_2$, то, используя лемму 1, получаем

$$\int_0^\infty t^m \big|df_{1,2}^{(m)}(t)\big| = \bigg|\int_0^\infty t^m df_{1,2}^{(m)}(t)\bigg| = \bigg|(-1)^m m! \int_0^\infty f'_{1,2}(t)\, dt\bigg| = m!\big|f_{1,2}(+\infty) - f_{1,2}(+0)\big| < \infty.$$

*Необходимость.* Полагаем

$$f_1(t) = \frac{(-1)^m}{m!} \int_t^{+\infty} (u-t)^m \big|df^{(m)}(u)\big|.$$

Тогда $f_1$ ограничена: $0 \leq (-1)^m m! f_1(t) \leq \int_0^\infty u^m \big|df^{(m)}(u)\big|$ и $f_1^{(m)}(t) = \int_t^\infty \big|df^{(m)}(u)\big| \searrow$. При этом

$$\|f_1\|_{V_m} \leq \frac{1}{m!} \int_0^\infty u^m \big|df^{(m)}(u)\big| + \int_0^\infty t^m \big|df^{(m)}(t)\big| \leq \Big(1 + \frac{1}{m!}\Big)\|f\|_{V_m},$$

и $f_2 = f_1 - f$ ограничена как разность двух ограниченных функций, а

$$f_2^{(m)}(t) = \int_t^\infty \big|df^{(m)}(u)\big| - f^{(m)}(t) = \int_t^\infty \big|df^{(m)}(u)\big| + \int_t^\infty df^{(m)}(u) - f^{(m)}(+\infty) \searrow.$$

Предел $f^{(m)}(+\infty)$ существует, так как при $x_1 \to +\infty$ и $x_2 > x_1$

$$\left|f^{(m)}(x_2) - f^{(m)}(x_1)\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} df^{(m)}(t)\right| \le \int\limits_{x_1}^{+\infty} t^m \left|df^{(m)}(t)\right| \to 0.$$

При этом $\|f_2\|_{V_m} \le \|f_1\|_{V_m} + \|f\|_{V_m} \le \Big(2 + \dfrac{1}{m!}\Big)\|f\|_{V_m}$. □

**Следствие.** *Пусть* $m \ge 2$.

*Если* $f^{(m-1)} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$ *и* $\displaystyle\int_0^\infty t^{m-1}\left|f^{(m)}(t)\right|dt < \infty$, *то при* $\nu \in [1, m-1]$

$$\lim_{t\to+0} t^\nu f^{(\nu)}(t) = \lim_{t\to+\infty} t^\nu f^{(\nu)}(t) = 0$$

*и*

$$\int\limits_0^\infty t^{m-2} \sup_{u\ge t}\left|f^{(m-1)}(u)\right|dt \le \frac{1}{m}\int\limits_0^\infty t^{m-1}\left|f^{(m)}(t)\right|dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, к функции $f \in V_{m-1}(\mathbb{R}_+)$ применяем теорему 1, а затем и лемму 1. Получаем, что пределы равны нулю. Но тогда

$$\int\limits_0^\infty t^{m-2} \sup_{u\ge t}\left|f^{(m-1)}(u)\right|dt = \int\limits_0^\infty t^{m-2} \sup_{u\ge t}\left|\int\limits_u^\infty f^{(m)}(v)dv\right|dt$$

$$\le \int\limits_0^\infty t^{m-2}dt \cdot \sup_{u\ge t}\int\limits_u^\infty \left|f^{(m)}(v)\right|dv = \int\limits_0^\infty t^{m-1}dt\int\limits_t^\infty \left|f^{(m)}(u)\right|du$$

$$= \int\limits_0^\infty \left|f^{(m)}(u)\right|du\int\limits_0^u t^{m-1}dt = \frac{1}{m}\int\limits_0^\infty t^m\left|f^{(m)}(t)\right|dt$$

(изменен порядок интегрирования). □

Из теоремы 1 и леммы 1 следует также, что $V_m(\mathbb{R}_+) \subset V_{m-1}(\mathbb{R}_+)$.

Требельс (Trebels) [14] (см. также [3, теорема 9.5]) доказал, что при $m > (d-1)/2$ и $f_0 \in V_m(\mathbb{R}_+)$

$$f_0(H(x)) \in A(\mathbb{R}^d)$$

при любой положительной однородной функции $d$ переменных положительной степени с условием $H \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$.

Теперь эту теорему можно сформулировать так: *если* $f_0 \in C_0[0,+\infty)$ *и ее можно представить в виде разности двух ограниченных функций, у которых производные порядка* $m-1$ *при* $m > (d-1)/2$ *выпуклы, то* $f_0 \circ H \in A(\mathbb{R}^d)$.

## 3. О функциях вида $f_0\big(|x|_{p,d}\big)$ $(d \ge 2,\ p \in (0,+\infty])$

Сначала рассмотрим особый случай $p = 2$.

**Предложение 1.** *Если* $f_0 \in C_0[0,+\infty) \cap V_m(\mathbb{R}_+)$ *при* $m = 1 + [d/2]$, *то* $f_0\big(|x|_{2,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства достаточно представить $f$ в виде разности согласно теореме 1 и применить признак положительной определенности типа Пойя, приведенный в разд. 1. □

Далее рассматривается следующий вопрос. Когда $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ в зависимости от $p$?

Заметим, что при $p \neq 2$ не существует частной производной $\dfrac{\partial^r f_0\big(|x|_{p,d}\big)}{\partial x_1^r}$ $(r > p)$ в точках, в которых $x_2 \neq 0$. Поэтому лучше учитывать поведение смешанных производных (дифференцирование по $x_j$ $(j \in [1,d])$ не более одного раза).

Приведем второй основой результат. Для его формулировки используются следующие условия:

$A.$ $\displaystyle\int_0^\infty t^{d-1} \operatorname*{ess\,sup}_{u \ge t} |f_0(u)|\, dt < \infty,$

$B.$ $\displaystyle\int_0^\infty t^{dp-1} \operatorname*{ess\,sup}_{u \ge t} u^{d(1-p)} |f_0^{(d)}(u)|\, dt < \infty,$

$C.$ $f_0(t) = 0$ при $t \in [0,a]$, а при $t > 0$

$$f_0(t) = O\Big(\frac{1}{t^\varepsilon}\Big), \quad f_0^{(\nu)}(t) = O\Big(\frac{1}{t^{\varepsilon+\nu\delta}}\Big) \quad \Big(\varepsilon > 0, \delta > 1 - \frac{2\varepsilon}{d}\Big), \quad \nu \in [1,d].$$

**Теорема 2.** *Пусть $f_0 \in C_0[0,+\infty)$ и $f_0^{(d-1)} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Если выполнено условие $A$ или $C$, то $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1,+\infty]$. Если выполнено условие $B$, то $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ при $p \in (0,1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 основано на леммах 3 и 4.

**Лемма 3.** *Если симметричная относительно переменных $x_j$ $(1 \le j \le d)$ и четная по $x_j$ $(1 \le j \le d)$ функция $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ имеет на $\mathbb{R}_+^d$ непрерывную смешанную производную*

$$\partial^d f(x) = \frac{\partial^d f(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_d},$$

*а*

$$\lim_{x_1 \to +\infty} \frac{\partial^\nu f(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_\nu} = 0 \quad (1 \le \nu \le d-1), \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j| \ge |y_j|,\ 1 \le j \le d} \big|\partial^d f(x)\big|\, dy < \infty,$$

*то $f \in A(\mathbb{R}^d)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы основано на следующей теореме: *если для всех $x \in \mathbb{R}^d$ $f(x) = \displaystyle\int_{|x_1|}^\infty du_1 \int_{|x_2|}^\infty du_2 \dots \int_{|x_d|}^\infty g(y_1,\dots,y_d)\, dy_d$ и $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \operatorname*{ess\,sup}_{|x_j| \ge |y_j|} |g(x)|\, dy < \infty$, то $f \in A(\mathbb{R}^d)$* (см. [15, теорема 4; 4, 6.4.10]).

Эта теорема доказана в [15] с использованием полученного там же обобщения на кратный случай теоремы Берлинга, приведенной во введении.

Считая $f_0^{(d)} \in C(\mathbb{R}_+)$, что не уменьшает общности, полагаем

$$g(x) = (-1)^d \partial^d f(x) = (-1)^d \frac{\partial^d f_0\big(|x|_{p,d}\big)}{\partial x_1 \dots \partial x_d}.$$

Лемма доказана. □

Очевидно, что при $p = \infty$ и $x \in \mathbb{R}_+^d$ имеем $\big|\partial^d f_0\big(|x|_{\infty,d}\big)\big| = \big|f_0^{(d)}\big(|x|_{\infty,d}\big)\big|$.

Индукцией по $d$ легко доказать, что при $p \in (0,+\infty)$ и $x \in \mathbb{R}_+^d$

$$\frac{\partial^d f_0\big(|x|_{p,d}\big)}{\partial x_1 \dots \partial x_d} = \sum_{\nu=1}^d \gamma(d,p,\nu) |x|_{p,d}^{\nu-dp} f_0^{(\nu)}\big(|x|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^d x_j^{p-1}. \tag{3.1}$$

**Лемма 4.** *Пусть* $d \geq 2$ *и* $\alpha > 0$. *Тогда при* $p = \infty$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g\big(|x|_{\infty,d}\big) \prod_{j=1}^{d} |x_j|^{\alpha-1}\,dx = \frac{2^d d!}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+d-2)} \int\limits_0^\infty t^{2\alpha+d-3} g(t)\,dt,$$

*а при* $p \in (0,+\infty)$ ($\Gamma$ *— гамма-функция Эйлера*)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g\big(|x|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} |x_j|^{\alpha-1}\,dx = \frac{2^d \Gamma^d\Big(\dfrac{\alpha}{p}\Big)}{p^{p-1}\Gamma\Big(\dfrac{d\alpha}{p}\Big)} \int\limits_0^\infty t^{d\alpha-1} g(t)\,dt$$

(*в предположении, что простой интеграл справа сходится абсолютно*).

Доказательство. В силу четности подинтегральной функции интеграл по $\mathbb{R}^d$ равен $2^d$ интегралов по $\mathbb{R}_+$. А с учетом симметрии подинтегральной функции искомый интеграл равен $2^d \cdot d!$ интегралов по множеству: $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_d$.

При $p = \infty$ такой интеграл равен повторному:

$$\int\limits_{0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_d} g(x_d) x_d^{\alpha-1} dx_d \int\limits_0^{x_d} x_{d-1}^{\alpha-1} dx_{d-1} \ldots \int\limits_0^{x_2} x_1^{\alpha-1} dx_1 = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+d-2)} \int\limits_0^\infty g(u) u^{2\alpha+d-3} du.$$

При $p \in (0,+\infty)$ можно поступить аналогично. Но проще воспользоваться формулой Лиувилля (см., например, [19, п. 676, формула 7]):

$$\int\limits_{x \in \mathbb{R}_+^d,\ |x|_{1,d} \leq 1} g\big(|x|_{1,d}\big) \prod_{j=1}^{d} x_j^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma^d(\alpha)}{\Gamma(d\alpha)} \int\limits_0^1 g(u) u^{d\alpha-1} du.$$

Из нее следует, что при любых $p$ и $r > 0$

$$\int\limits_{x \in \mathbb{R}_+^d,\ |x|_{1,d} \leq 1} g\big(r|x|_{1,d}^{1/p}\big) \prod_{j=1}^{d} x_j^{\alpha-1} dx = \frac{\Gamma^d(\alpha)}{\Gamma(d\alpha)} \int\limits_0^1 g(ru^{1/p}) u^{d\alpha-1} du = p\frac{\Gamma^d(\alpha)}{\Gamma(d\alpha)} \cdot \frac{1}{r^{d\alpha p}} \int\limits_0^r g(t) t^{d\alpha p-1} dt$$

(в простом интеграле сделана линейная замена).

Теперь в $d$–кратном интеграле делаем замену переменных $x_j = \dfrac{1}{r^p} y_j^p$ $(1 \leq j \leq d)$ с якобианом $J = \Big(\dfrac{p}{r^p}\Big)^d \displaystyle\prod_{j=1}^{d} y_j^{p-1}$. Получим интеграл

$$\int\limits_{y \in \mathbb{R}_+^d,\ |y|_{p,d} \leq r} g\big(|y|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} y_j^{\alpha p-1} \frac{p^d}{r^{d\alpha p}} dy.$$

Умножая обе части равенства двух интегралов на $r^{d\alpha p}$ и переходя к пределу при $r \to +\infty$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^d} g\big(|y|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} y_j^{\alpha p-1} dy = \frac{1}{p^{d-1}} \cdot \frac{\Gamma^d(\alpha)}{\Gamma(d\alpha)} \int\limits_0^\infty g(t) \cdot t^{d\alpha p-1} dt.$$

Но

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} g\big(|y|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} |y_j|^{\alpha p-1} dy = 2^d \cdot d! \int\limits_{\mathbb{R}_+^d} g\big(|y|_{p,d}\big) \prod_{j=1}^{d} y_j^{\alpha p-1} dy.$$

Осталось $\alpha$ заменить на $\alpha/p$. □

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2.

По условиям теоремы $f_0 \in C_0[0,+\infty)$ и $f_0^{(d-1)} \in AC_{loc}(\mathbb{R}_+)$. Не уменьшая общности, считаем $f_0 \in C^d(\mathbb{R}_+)$.

Начнем со случая $A$. При $p=\infty$ для применения леммы 3 воспользуемся леммой 4 ($\alpha=1$):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|\partial^d f_0\big(|x|_{\infty,d}\big)\Big| dy = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|f_0^{(d)}\big(|x|_{\infty,d}\big)\Big| dy$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x|_{\infty,d}\ge|y|_{\infty,d}} \Big|f_0^{(d)}\big(|x|_{\infty,d}\big)\Big| dy = 2^d\cdot d(d-1)\int\limits_0^\infty t^{d-1}\sup_{t\ge u}\Big|f_0^{(d)}(u)\Big|dt<+\infty.$$

В силу следствия из теоремы 1 при $\nu\in[1,d-1]$ $f_0^{(\nu)}(t)=o\Big(\dfrac{1}{t^\nu}\Big)$ $(t\to+\infty)$. Применяем лемму 3.

Пусть теперь $p\in[1,+\infty)$. Как следует из равенства (3.1),

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|\partial^d f_0\big(|x|_{p,d}\big)\Big| dy \le \gamma(d,p)\max_{1\le\nu\le d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} |x|_{p,d}^{\nu-dp}\cdot\Big|f_0^{(\nu)}\big(|x|_{p,d}\big)\Big|\cdot\prod_{j=1}^d |x_j|^{p-1}dy.$$

Учитывая, что $|x_j|^{p-1}\le|x|_{p,d}^{p-1}$ $(1\le j\le d)$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|\partial^d f_0\big(|x|_{p,d}\big)\Big| dy \le \gamma(d,p)\max_{1\le\nu\le d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{t\ge|y|_{p,d}} t^{\nu-d}\Big|f_0^{(\nu)}(t)\Big|dy.$$

Применяем лемму 4 ($\alpha=1$) при $\nu\le d-1$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{t\ge|y|_{p,d}} t^{\nu-d}\Big|f_0^{(\nu)}(t)\Big|dy \le \gamma_1(d,p,\nu)\int\limits_0^\infty t^{d-1}\sup_{u\ge t}u^{\nu-d}\Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big|dt\le\gamma_1(d,p,\nu)\int\limits_0^\infty t^{\nu-1}\sup_{u\ge t}\Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big|dt.$$

Осталось воспользоваться следствием из теоремы 1 и леммой 3.

Случай $B$. При $p\in(0,1)$ из неравенства $|x_j|\ge|y_j|$ следует, что $|x_j|^{p-1}\le|y_j|^{p-1}$.

Применяя (3.1) и лемму 4 ($\alpha=p$), получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sup_{|x_j|\ge|y_j|} \Big|\partial^d f_0\big(|x|_{p,d}\big)\Big| dy \le \gamma_2(p,d)\max_{1\le\nu\le d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^d|y_j|^{p-1}\sup_{t\ge|y|_{p,d}}t^{\nu-dp}\Big|f^{(\nu)}(t)\Big|dy$$

$$=\gamma_3(p,d)\max_{1\le\nu\le d}\int\limits_0^\infty t^{dp-1}\sup_{u\ge t}u^{\nu-dp}\Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big|dt.$$

Так как $d-1=dp-1+d(1-p)$, а $p\le1$, то

$$\int\limits_0^\infty t^{d-1}\sup_{u\ge t}\Big|f_0^{(d)}(u)\Big|dt\le\int\limits_0^\infty t^{dp-1}\sup_{u\ge t}u^{d(1-p)}\Big|f_0^{(d)}(u)\Big|dt<\infty$$

(условие $A$ слабее $B$).

Для доказательства сходимости других интегралов ($1\le\nu\le d-1$) рассмотрим два случая.

Пусть сначала $p \geq 1-1/d$. Тогда $dp-1 = \nu-1+(dp-\nu)$, где $(dp-\nu) \geq 0$ и, следовательно, (см. также следствие из теоремы 1)

$$\int\limits_0^\infty t^{dp-1} \sup_{u\geq t} u^{\nu-dp} \Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big| dt \leq \int\limits_0^\infty t^{\nu-1} \sup_{u\geq t} \Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big| dt \leq \gamma_4(d) \int\limits_0^\infty t^{d-1} \sup_{u\geq t} \Big|f_0^{(d)}(u)\Big| dt < \infty.$$

Пусть теперь $p \in \big(0, 1-1/d\big)$. Убедимся в том, что при $\nu \in [1, d-1]$

$$\int\limits_0^\infty t^{dp-1} \sup_{u\geq t} u^{\nu-dp} \Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big| dt \leq \frac{1}{\nu} \int\limits_0^\infty t^{\nu} \Big|f_0^{(\nu+1)}(t)\Big| dt,$$

а затем воспользуемся следствием из теоремы 1.

При $\nu \geq dp$ искомый интеграл не больше

$$\int\limits_0^\infty t^{dp-1} \sup_{u\geq t} u^{\nu-dp} \int\limits_u^\infty \Big|f_0^{(\nu+1)}(v)\Big| dv \leq \int\limits_0^\infty t^{dp-1} dt \cdot \sup_{u\geq t} \int\limits_u^\infty v^{\nu-dp} \Big|f_0^{(\nu+1)}(v)\Big| dv$$

$$= \int\limits_0^\infty t^{dp-1} dt \int\limits_t^\infty u^{\nu-dp} \Big|f_0^{(\nu+1)}(u)\Big| du = \int\limits_0^\infty \Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big| \frac{u^\nu}{\nu} du.$$

Если же $\nu < dp$, то тот же интеграл не больше

$$\int\limits_0^\infty t^{dp-1} \cdot t^{\nu-dp} \sup_{u\geq t} \Big|f_0^{(\nu)}(u)\Big| dt \leq \int\limits_0^\infty t^{\nu-1} dt \int\limits_t^\infty \Big|f_0^{(\nu+1)}(u)\Big| du = \frac{1}{\nu} \int\limits_0^\infty t^{\nu} \Big|f_0^{(\nu+1)}(t)\Big| dt.$$

Применяем следствие из теоремы 1 и лемму 3.

Осталось освободиться от дополнительного предположения $f_0^{(d)} \in C(\mathbb{R}_+)$.

Для функции Стеклова $(h > 0)$

$$f_h(t) = \frac{1}{h} \int\limits_0^h f_0(t+u) du = \frac{1}{h} \int\limits_t^{t+h} f_0(u) du$$

имеем

$$f_h^{(d)}(t) = \frac{1}{h} \Big( f_0^{(d-1)}(t+h) - f_0^{(d-1)}(t) \Big) \in C(\mathbb{R}_+)$$

и

$$\sup_{u\geq t} \Big|f_h^{(d)}(u)\Big| = \frac{1}{h} \sup_{u\geq t} \int\limits_u^{u+h} \Big|f_0^{(d)}(v)\Big| dv \leq \operatorname{ess\,sup}_{u\geq t} \Big|f_0^{(d)}(u)\Big|.$$

Случай $C$. Доказательство основано на теореме 2 (Б) из [16] (формулируем с учетом симметрии функции): *если*

$$\frac{\partial^\nu f_0\big(|x|_{p,d}\big)}{\partial x_1 \ldots \partial x_\nu} = O\Big(\frac{1}{|x|_{2,d}^{\lambda_\nu}}\Big) \quad (0 \leq \nu \leq d), \quad \lambda_0 > 0$$

*и*

$$\frac{1}{2^d} \sum_{\nu=0}^{d} \binom{d}{\nu} \lambda_\nu > \frac{d}{2},$$

*то* $f \in A(\mathbb{R}^d)$.

В рассматриваемом случае $\lambda_0 = \varepsilon$, а при $\nu \geq 1$ имеем $\lambda_\nu = \nu + \varepsilon + \min\limits_{1 \leq s \leq \nu} \{\delta - 1, s(\delta - 1)\}$. Так что $\lambda_\nu = \varepsilon + \delta\nu$ при $\delta \leq 1$ и $\lambda_\nu = \nu + \varepsilon + \delta - 1$ при $\delta > 1$.

В первом случае ($\delta \leq 1$)

$$\frac{1}{2^d}\sum_{\nu=0}^{d} \lambda_\nu \binom{d}{\nu} = \varepsilon + \delta \frac{1}{2^d}\sum_{\nu=1}^{d} \nu \binom{d}{\nu} = \varepsilon + \delta \frac{1}{2^d} d \cdot 2^{d-1} > \frac{d}{2} \quad \text{при} \quad \delta > 1 - (2\varepsilon)/d.$$

Во втором случае ($\delta > 1$)

$$\frac{1}{2^d}\sum_{\nu=0}^{d} \binom{d}{\nu} \lambda_\nu = \frac{1}{2^d}\sum_{\nu=1}^{d} \binom{d}{\nu} (\nu + \varepsilon + \delta - 1) + \frac{\varepsilon}{2^d} = (\varepsilon + (\delta - 1))\frac{2^d - 1}{2^d} + \frac{d}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} > \frac{d}{2}.$$

Теорема 2 доказана. □

**Следствие 1.** *Если $f_0 \in C_0[0, +\infty)$ и $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$, то при $p \in [1, +\infty]$*

$$f_0\bigl(|x|_{p,d}\bigr) \in A(\mathbb{R}^d).$$

**Следствие 2.** *Если $f_0 \in C_0[0, +\infty)$ и $f_0 \in V_{d+1}(\mathbb{R}_+)$, то при $p \in (0, 1)$*

$$f_0\bigl(|x|_{p,d}\bigr) \in A(\mathbb{R}^d).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1. Если $f_0 \in V_d(\mathbb{R}_+)$, то в силу теоремы 1 она представима в виде разности $f_1 - f_2$ двух ограниченных функций с убывающими производными порядка $d$. Но тогда (см. еще лемму 1)

$$\int_0^\infty t^{d-1} \sup_{t \geq u} \left| f_{1,2}^{(d)}(u) \right| dt = \int_0^\infty t^{d-1} f_{1,2}^{(d)}(t)\, dt = (-1)^{d-1}(d-1)!(f_{1,2}(+\infty) - f_{1,2}(+0)).$$

И применяем теорему 2. □

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2. Достаточно убедиться в неравенстве

$$\int_0^\infty t^{dp-1} \sup_{u \geq t} u^{d(1-p)} \bigl| f_0^{(d)}(u) \bigr|\, dt \leq \frac{1}{dp} \int_0^\infty t^d \bigl| f_0^{(d+1)}(t) \bigr|\, dt.$$

Левая часть этого неравенства не больше

$$\int_0^\infty t^{dp-1}\, dt \sup_{u \geq t} u^{d(1-p)} \int_u^\infty \bigl| f_0^{(d+1)}(\nu) \bigr| d\nu \leq \int_0^\infty t^{dp-1}\, dt \sup_{u \geq t} \int_u^\infty v^{d(1-p)} \bigl| f_0^{(d+1)}(\nu) \bigr|\, d\nu$$

$$= \int_0^\infty t^{dp-1}\, dt \int_t^\infty u^{d(1-p)} \bigl| f_0^{(d+1)}(u) \bigr|\, du = \int_0^\infty u^{d(1-p)} \bigl| f_0^{(d+1)}(u) \bigr|\, du \int_0^u t^{dp-1}\, dt = \frac{1}{dp} \int_0^\infty u^d \bigl| f_0^{(d+1)}(u) \bigr|\, du.$$

Осталось повторить доказательство следствия 1. □

П р и м е р 1. Функция

$$f_0(t) = \frac{t^\gamma}{(1 + t^\alpha)^\beta}, \quad t = |x|_{p,d}, \quad p \in (0, +\infty],$$

принадлежит $A(\mathbb{R}^d)$ только при $\alpha > 0$ и $\alpha\beta > \gamma \geq 0$.

Действительно, поскольку $f_0 \in C_0[0, +\infty)$, то должно быть $\alpha > 0$ и $\alpha\beta > \gamma \geq 0$.

Заметим, что $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$. Любая производная $f_0^{(\nu)}$ в достаточно малой окрестности нуля сохраняет знак $(-1)^\nu$, так как при $t \in (0,1)$

$$f_0(t) = t^\gamma - \beta t^{\gamma+\alpha} + \cdots .$$

Таким же образом ведет себя любая производная и около $\infty$, так как

$$f_0(t) = t^{\gamma-\alpha\beta}\Big(1 - \beta\frac{1}{t^\alpha} + \cdots\Big).$$

П р и м е р 2. Пусть

$$f_0(t) = \frac{e^{it^\alpha}}{(1+t)^\beta}, \quad t = |x|_{p,d}, \quad p \in (0,+\infty], \quad \alpha \geq 0, \quad \beta > 0.$$

Если $2\beta > d\alpha$, то $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ при $p \in [1,\infty]$. А если $\beta > d\alpha$, то $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ при $p \in (0,1)$.

При $p = 2$ этот результат точный (см. пример во введении). Любая производная $\operatorname{Re} f_0$ и $\operatorname{Im} f_0$ сохраняет знак в окрестности нуля и можно, как и в примере 1, применить следствия 1 и 2.

А около $\infty$ применяем при $p \in [1,\infty]$ случай $C$ в теореме 2, учитывая, что

$$f_0^{(\nu)}(t) = O\Big(\frac{1}{t^{\beta+\nu(1-\alpha)}}\Big),$$

где $\varepsilon = \beta$, $\delta = 1-\alpha > 1-(2\beta)/d$ или $2\beta > d\alpha$.

При $p \in (0,1)$ применяем случай $B$ в теореме 2.

Заметим, что для определения положительной определенности функций есть результаты, которые существенно зависят от $p \in (0,+\infty]$ (см., например, [17]).

Применим теперь пример 1 к суммированию рядов и интегралов Фурье. Так как $f_0\big(|x|_{p,d}\big) \in A(\mathbb{R}^d)$ и при $\gamma = 0$ $f_0(0) = 1$, то средние рядов и интегралов Фурье, порожденные этой функцией ($\gamma = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$), сходятся на всем пространстве $L_1$. А при $d = 1$ эта функция принадлежит и $A^*(\mathbb{R})$ (см. достаточные условия в [6]). А это значит, что сходимость имеет место во всех точках Лебега любой функции из $L_1$ (см. [4, 8.1]).

Этот метод суммирования обобщает метод Пикара ($\alpha = 2, \beta = 1$).

Отметим еще, что, в отличие от случая $d = 1$, при $d = 2$ средние арифметические квадратных частных сумм двойного ряда Фурье (суммы Марцинкевича) могут сходиться не во всех точках Лебега. Это следует из того, что в $A^*(\mathbb{R}^2)$ нет, практически, функций вида $f_0\big(|x|_{\infty,2}\big)$ или, что то же самое, функций вида $f_0\big(|x|_{1,2}\big)$ [18].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Stein E.M.** Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton: Princeton Univ. Press., 1970. 304 p.
2. **Stein E.M., Weiss G.** Introduction of Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton: Princeton Univ. Press., 1971. 312 p. ISBN: 0-691-08078-X.
3. **Liflyand E., Samko S., Trigub R.** Absolute convergence of Fourier integrals // Analysis and Math. Physis. 2012. Vol. 2, no. 1. P. 1–68.
4. **Trigub R., Belinsky E.** Fourier analysis and approximation of functions. Dordrecht: Kluwer-Springer, 2004. 585 p. ISBN: 1-4020-2341-3/hbk.
5. **Тригуб Р.М.** О мультипликаторах Фурье и абсолютной сходимости интегралов Фурье радиальных функций // Укр. мат. журн. 2010. Т. 62, № 9. С. 1280–1293.
6. **Belinsky E., Liflyand E. and Trigub R.** The Banach algebra $A^*$ and its properties // J. Fourier Anal. Appl. 1997. Vol. 3, no. 2. P. 103–129. doi: 10.1007/BF02649131.

7. **Beurling A.** On the spectral synthesis of bounded functions // Acta Math. 1949. Vol. 81. P. 225–238. doi: 10.1007/BF02395018 .
8. **Schoenberg I.J.** On integral representations of completely monotone and related functions: abstract // Bull. Amer. Math. Soc. 1941. Vol. 47. P. 208.
9. **Williamson R.E.** Multiply monotone functions and their Laplace transforms // Duke Math. J. 1956. Vol. 23. P. 189–207. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02317-1 .
10. **Askey R.** Radial characteristic functions. Tech. Report no. 1262. Madison: Math. Resc. Center, University of Wisconsin. 1973.
11. **Schoenberg I.J.** Metric spaces and completely monotone functions // Ann. Math. Soc. 1938. Vol. 39. P. 811–841.
12. **Trebels W.** Multipliers for $(C, \alpha)$-bounded Fourier expansions in Banach spaces and approximation theory. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1973. 103 p. (Lect. Notes Math.; vol. 329.) doi: 10.1007/BFb0060959 .
13. **Тригуб Р.М.** Преобразование Фурье квазивыпуклых функций и функций класса $V^*$ // Укр. мат. вiсник. 2014. Т. 11, № 2. С. 274–286 .
14. **Trebels W.** Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner–Riesz kernel // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1975. Vol. 20, no. 10. P. 1173–1185.
15. **Тригуб Р.М.** Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1980. Т. 44, № 6. С. 1378–1409.
16. **Лифлянд И.Р., Тригуб Р.М.** О представлении функций в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье // Тр. МИАН. 2010. Т. 269. С. 153–166.
17. **Zastavnyi V.P.** On positive definiteness of some functions // J. Multivariate Anal. 2000. Vol. 73, no. 1. P. 55–81. doi: 10.1006/jmva.1999.1864 .
18. **Тригуб Р.М.** О преобразовании Фурье функций двух переменных, зависящих лишь от максимума модуля этих переменных. arXiv:1512.03183v1 [math CA]. 10 Dec. 2015. 30 p. URL:// https://arxiv.org/abs/1512.03183 .
19. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления Т. 3. М.: Физматлит, 1969. 662 p.



Тригуб Роальд Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
Сумский государственный университет
г. Сумы, Украина
e-mail: roald.trigub@gmail.com


Поступила 13.04.2017

## REFERENCES


1. Stein E.M. *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton, Princeton Univ. Press., 1970, 304 p.
2. Stein E.M., Weiss G. *Introduction of Fourier analysis on Euclidean spaces.* Princeton, Princeton Univ. Press., 1971, 312 p. ISBN: 0-691-08078-X .
3. Liflyand E., Samko S., Trigub R. Absolute convergence of Fourier integrals. *Analysis and Math. Physis.*, 2012, vol. 2, no. 1, pp. 1–68.
4. Trigub R., Belinsky E. *Fourier analysis and approximation of functions.* Dordrecht, Kluwer-Springer, 2004, 585 p. ISBN: 1-4020-2341-3/hbk .
5. Trigub R.M. On Fourier multipliers and absolute convergence of Fourier integrals of radial functions. *Ukr. Math. J.*, 2010, vol. 62, no. 9, pp. 1487–1501. doi: 10.1007/s11253-011-0444-9 .
6. Belinsky E., Liflyand E. and Trigub R. The Banach algebra $A^*$ and its properties. *J. Fourier Anal. Appl.*, 1997, vol. 3, no. 2, pp. 103–129. doi: 10.1007/BF02649131 .
7. Beurling A. On the spectral synthesis of bounded functions. *Acta Math.*, 1949, vol. 81, pp. 225–238. doi: 10.1007/BF02395018 .
8. Schoenberg I.J. On integral representations of completely monotone and related functions: abstract. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1941, vol. 47, pp. 208.
9. Williamson R.E. Multiply monotone functions and their Laplace transform. *Duke Math. J.*, 1956, vol. 23, pp. 189–207. doi: 10.1215/S0012-7094-56-02317-1 .

10. Askey R. *Radial characteristic functions. Tech. Report № 1262.* Madison, Math. Resc. Center, University of Wisconsin, 1973.
11. Schoenberg I.J. Metric spaces and completely monotone functions. *Ann. Math. Soc.*, 1938, vol. 39, pp. 811–841.
12. Trebels W. *Multipliers for $(C, \alpha)$-bounded Fourier expansions in Banach spaces and Approximation Theory.* Berlin etc.: Springer-Verlag, 1973, Ser. Lect. Notes Math., vol. 329, 103 p. doi: 10.1007/BFb0060959 .
13. Trigub R.M. Fourier transformation of quasiconvex functions and functions of the class $V^*$. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 204, iss. 3, pp. 369–378. doi: 10.1007/s10958-014-2208-1 .
14. Trebels W. Some Fourier multiplier criteria and the spherical Bochner–Riesz kernel. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 1975, vol. 20, no. 10, pp. 1173–1185.
15. Trigub R.M. Absolute convergence of Fourier integrals, summability of Fourier series, and polynomial approximation of functions on the torus. *Math. USSR-Izv.*, 1981, vol. 17, no. 3, pp. 567–593. doi: 10.1070/IM1981v017n03ABEH001372 .
16. Liflyand E.R., Trigub R.M. On the representation of a function as an absolutely convergent Fourier integral. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 269, pp. 146–159. doi: 10.1134/S0081543810020136 .
17. Zastavnyi V.P. On positive definiteness of some functions. *J. Multivariate Anal.*, 2000, vol. 73, no. 1, pp. 55–81. doi: 10.1006/jmva.1999.1864 .
18. Trigub R.M. On the Fourier transform of function of two variables which depend only on the maximum of these variables. *arXiv*:151203183 v1[math CA]. 10 Dec. 2015. 30 p. Available at: https://arxiv.org/abs/1512.03183 (in Russian).
19. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course of differential and integral calculus]. Vol. 3. Moscow, Fizmatlit Publ., 1969, 662 p.


The paper was received by the Editorial Office on April 14, 2017.

*Roald Mikhailovich Trigub*, Dr. Phis.-Math. Sci., Prof., Sumy State University, Sumy, 40007, Ukraine, e-mail: roald.trigub@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.6

# АППРОКСИМАЦИЯ МЕРЫ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТНОГО МНОЖЕСТВА[1]

**О. В. Хамисов**

В работе предлагается методика построения оценок сверху и снизу меры выпуклого компактного множества. Методика основана на использовании экстремальных вписанных и описанных параллелепипедов. Предполагается, что вычисление меры параллелепипеда не встречает вычислительных трудностей. Для задачи построения вписанного параллелепипеда максимального объема показано сведение к задаче выпуклого программирования с экспоненциальным числом ограничений. Отмечается, что в некоторых важных частных случаях можно избежать экспоненциального числа ограничений. Предлагается алгоритм итеративной внутренней и внешней аппроксимации компактного множества параллелепипедами. Оценивается трудоемкость алгоритма. Приводятся результаты небольшого численного эксперимента. Обсуждается возможность построения экстремальных относительно меры параллелепипедов. В заключении указываются преимущества предлагаемой методики.

Ключевые слова: мера, выпуклое компактное множество, экстремальные параллелепипеды, внешняя и внутренняя аппроксимация.

**O. V. Khamisov. Approximation of the measure of a convex compact set.**

We consider an approach to constructing upper and lower bounds for the measure of a convex compact set. The approach is based on extremal inscribed and circumscribed parallelepipeds. It is assumed that the measure of a parallelepiped can be easily calculated. It is shown that the problem of constructing an inscribed parallelepiped of maximum volume is reduced to a convex programming problem with exponential number of constraints. In some particular important cases the exponential number of constraints can be avoided. We suggest an algorithm for the iterative inner and outer approximation of a convex compact set by parallelepipeds. The complexity of the algorithm is estimated. The results of a preliminary numerical experiment are given. The possibility of constructing parallelepipeds that are extremal with respect to measure is discussed. Some advantages of the proposed approach are specified in the conclusion.

Keywords: measure, convex compact set, extremal parallelepiped, inner and outer approximation.

**MSC:** 28A12, 90C25

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-272-279

## Введение

Пусть выпуклое компактное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ задано системой неравенств

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m\}, \tag{0.1}$$

где $f_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, — выпуклые функции. Везде далее предполагается, что $\int(X) \neq \varnothing$. Кроме того, задана счетно-аддитивная абсолютно непрерывная мера $\mu$ (см. [1]), областью определения которой являются параллелепипеды (или брусы в терминологии [2]):

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \underline{x}_j \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j,\ j = 1, \ldots, n\}, \tag{0.2}$$

$-\infty < \underline{x}_j < \overline{x}_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, n$. Последнее с практической точки зрения означает, что вычисление $\mu(\Pi)$ не представляет проблем. Для заданного $\varepsilon > 0$ требуется определить величины $\underline{\mu}$ и $\overline{\mu}$ такие, что

$$\underline{\mu} \leqslant \mu(X) \leqslant \overline{\mu} \quad \text{и} \quad \overline{\mu} - \underline{\mu} \leqslant \varepsilon.$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-07-08986).

В работе предлагается итеративная эвристическая процедура, на каждом шаге $k$ которой строятся величины $\underline{\mu}_k$, $\overline{\mu}_k$: $\underline{\mu}_{k-1} \leqslant \underline{\mu}_k$, $\overline{\mu}_{k-1} > \overline{\mu}_k$, $\underline{\mu}_k \leqslant \mu(X) \leqslant \overline{\mu}_k$, $k = 1, \dots$ Как только $\overline{\mu}_{k'} - \underline{\mu}_{k'} \leqslant \varepsilon$ для некоторого $k'$, процедура останавливается.

Идея, лежащая в основе предлагаемого в работе алгоритма, имеет простую геометрическую интерпретацию и отличается от идеологии методов Монте-Карло [3], случайного блуждания и марковских цепей [4]. Пусть $\mathfrak{P}$ — множество всевозможных параллелепипедов вида (0.2). Две процедуры лежат в основе алгоритма: построение параллелепипеда минимальной меры $\overline{\Pi}$, содержащего $X$ и построение параллелепипеда максимальной меры, содержащегося в $X$:

$$\overline{\Pi} \in \operatorname{Arg\,min}\{\mu(\Pi)\colon \Pi \supset X,\ \Pi \in \mathfrak{P}\}, \quad \underline{\Pi} \in \operatorname{Arg\,max}\{\mu(\Pi)\colon \Pi \subset X,\ \Pi \in \mathfrak{P}\}. \tag{0.3}$$

Вместо параллелепипедов можно рассматривать и другие множества, например, многогранники [5], однако параллелепипеды выбраны потому, что, как правило, в прикладных задачах мера параллелепипеда вида (0.2) легко вычислима.

## 1. Внешняя и внутренняя аппроксимация множества $X$

Решение задач (0.3) в общем случае может оказаться исключительно сложным делом, поэтому первоначально рассмотрим задачи описывания параллелепипеда минимального объема вокруг $X$ и вписывания параллелепипеда максимального объема в $X$. Это, очевидно, частные случаи задач (0.3), в которых в качестве меры выступает объем.

Для нахождения внешней аппроксимации множества $X$ стандартным образом решаются $2n$ задач выпуклого программирования

$$\pm x_j \to \min, \quad x \in X, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.1}$$

Пусть $\overline{\Pi}$ — параллелепипед минимального объема, полученный в результате решения задач (1.1). Очевидно $\overline{\Pi} \supset X$, следовательно, $\mu(\overline{\Pi}) \geqslant \mu(X)$ и мы получаем оценку сверху меры $\mu(X)$.

Внутренняя аппроксимация $X$ строится при помощи параллелепипеда максимального объема, вписанного в $X$. Пусть $v^j, j = 1, \dots, 2^n$, — вершины куба $C = \{x \in \mathbb{R}^n\colon -1 \leqslant x_j \leqslant 1,\ j = 1, \dots, n\}$. Вписываемый параллелепипед будем искать в следующем виде:

$$\underline{\Pi} = \underline{\Pi}(z, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : z_j - \delta_j \leqslant x_j \leqslant z_j + \delta_j,\ j = 1, \dots, n\}. \tag{1.2}$$

Здесь $z$ — центр параллелепипеда, $\delta$ — вектор длин полуосей. Традиционно вместо самого объема можно использовать его логарифм:

$$\varphi(\delta) = \sum_{j=1}^{n} \ln(\delta_j). \tag{1.3}$$

Вершинами $\underline{\Pi}(z, \delta)$ являются точки $w^j = z + (v^j)^T I\delta$, $j = 1, \dots, 2^n$, $I$ — $n \times n$ единичная матрица. В силу выпуклости функций $f_i$ условие $\Pi(z, \delta) \subset X$ эквивалентно условию

$$\max\{f_i(x)\colon x \in \underline{\Pi}(z, \delta)\} = \max_{1 \leqslant j \leqslant 2^n} f_i(w^j)\} \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \tag{1.4}$$

или системе неравенств

$$f_i(z + (v^j)^T I\delta) \leqslant 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, 2^n. \tag{1.5}$$

Из сказанного следует справедливость следующей теоремы.

**Теорема.** *Задача вписывания параллелепипеда максимального объема* (0.2) *в выпуклое компактное множество* (0.1) *представляет собой задачу выпуклого программирования, заключающуюся в максимизации по совокупности переменных* $(z, \delta)$ *функции* (1.3) *при ограничениях* (1.5), *число которых экспоненциально, и при условии неотрицательности* $\delta \geqslant 0$.

Параллелепипеды максимального и минимального объемов могут быть использованы и в случае произвольной меры $\mu$. Конечно, в этом случае аппроксимация сверху и снизу меры $\mu(X)$ может оказаться далека от оптимальной, тем не менее предложенную выше конструкцию внутренней аппроксимации можно распространить и не только на аппроксимацию объема $X$.

Пусть $\mu$ — так называемая логарифмически вогнутая вероятностная мера [6], т. е. $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$ и для любых $\Pi_1 \in \mathfrak{P}$ и $\Pi_2 \in \mathfrak{P}$ справедливо $\mu(\lambda_1\Pi_1 + \lambda_2\Pi_2) \geqslant (\mu(\Pi_1))^{\lambda_1} (\mu(\Pi_2))^{\lambda_2}$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_j \geqslant 0, j = 1, 2$. В этом случае логарифм меры — вогнутая функция, следовательно, вписывание параллелепипеда максимальной логарифмически вогнутой меры есть снова задача выпуклого программирования, хотя и по-прежнему с экспоненциальным числом ограничений. Положительным здесь является тот факт, что многие распределения определяются логарифмически вогнутыми мерами, например, невырожденное нормальное распределение, распределение Дирихле, гамма-распределение, бета-распределение и т.д. (см. снова [6]). В качестве обобщения, вместо логарифма можно использовать и другие функции [7].

П р и м е р. Множество $X \subset \mathbb{R}^2$ задано неравенствами

$$X = \{-\ln(x_1) + x_2 \leqslant 0,\ x_1^2 + x_2^2 - 16 \leqslant 0\}.$$

Соответствующая задача по вписыванию прямоугольника максимальной площади (1.3)–(1.5) имеет вид

$$\begin{gathered}
\ln(\delta_1) + \ln(\delta_2) \to \max, \\
-\ln(z_1 + \delta_1) + (z_2 + \delta_2) \leqslant 0, \quad -\ln(z_1 + \delta_1) + (z_2 - \delta_2) \leqslant 0, \\
-\ln(z_1 - \delta_1) + (z_2 - \delta_2) \leqslant 0, \quad -\ln(z_1 - \delta_1) + (z_2 + \delta_2) \leqslant 0, \\
(z_1 + \delta_1)^2 + (z_2 + \delta_2)^2 \leqslant 16, \quad (z_1 + \delta_1)^2 - (z_2 - \delta_2)^2 \leqslant 16, \\
(z_1 - \delta_1)^2 - (z_2 - \delta_2)^2 \leqslant 16, \quad (z_1 - \delta_1)^2 + (z_2 + \delta_2)^2 \leqslant 16, \\
\delta_1 \geqslant 0, \delta_2 \geqslant 0.
\end{gathered}$$

Решением этой задачи является пара $z_v^* = (1.944, -1.382)$, $\delta_v^* = (1.076, 1.240)$. Пусть далее $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ — двумерная нормально распределенная величина с независимыми компонентами $\xi_1$ и $\xi_2$, $a_1 = 1$, $\sigma_1 = 1.2$ — параметры распределения $\xi_1$, $a_2 = -3$, $\sigma_2 = 0.5$ — параметры распределения $\xi_2$. Логарифм вероятности попадания $\xi$ в параллелепипед вида (1.2) при $n = 2$ есть функция

$$F(z, \delta) = \sum_{j=1}^{2} \ln\left(\Phi\Big(\frac{z_j + \delta_j - a_j}{\sigma_j}\Big) - \Phi\Big(\frac{z_j - \delta_j - a_j}{\sigma_j}\Big)\right),$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа. Максимизируя $F$ при тех же ограничениях, что и ранее, найдем решение $z_p^* = (1.099, -2.646)$, $\delta_p^* = (0.943, 0.793)$, определяющее прямоугольник наибольшей вероятностной меры, вписанный в $X$. Вероятностная мера прямоугольника максимальной площади равна 0.112, прямоугольника максимальной меры — 0.453. Геометрическая интерпретация обоих решений дана на рисунке ниже.

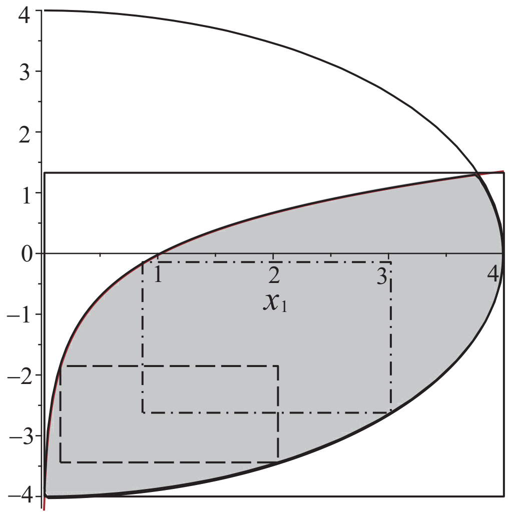
Если выпуклые функции $f_i$ сепарабельны, $f_i(x) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_j)$, то задача по вписыванию параллелепипеда упрощается. В этом случае условие (1.4) с учетом (1.2) примет вид

$$\max\{f_i(x) \colon x \in \underline{\Pi}(z, \delta)\} = \sum_{j=1}^{n} \max\{f_{ij}(z_j - \delta_j), f_{ij}(z_j + \delta_j)\} \leqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Стандартным образом вводя дополнительные переменные $y_{ij}$, перепишем последние неравенства в следующем виде:

$$f_{ij}(z_j - \delta_j) - y_{ij} \leqslant 0,\ f_{ij}(z_j + \delta_j) - y_{ij} \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m. \tag{1.7}$$




Вписанный в выпуклый компакт примера (см. выше) прямоугольник максимальной площади изображен штрих-пунктирной линией, прямоугольник максимальной вероятностной меры — штриховой линией, описанный прямоугольник минимальной площади — сплошной линией.

Результирующая задача выпуклого программирования будет состоять в минимизации по переменным $(z, y, \delta)$ функции (1.3) при ограничениях (1.6), (1.7) и $\delta \geqslant 0$. В этом случае число ограничений уже не является экспоненциальным.

Наиболее простая ситуация возникает при вписывании параллелепипеда в выпуклый многогранник. Функции $f_i$ являются аффинными, $f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_j$, и предполагается, что многогранное множество $X$ ограничено. Неравенства (1.4) превращаются в следующие:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\delta_j \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Данная задачи при условии $\delta_j = \delta,\ j = 1, \dots, n$, т. е. при вписывании куба максимального объема, рассматривалась в [8]. В этом случае задача вписывания эквивалентна задаче линейного программирования.

З а м е ч а н и е. Задачу о вписывании параллелепипеда максимального объема в многогранник можно обобщить на случай вписывания множества, определяемого взвешенной гёльдеровской нормой, в многогранник. Для краткости, множество

$$G(z, \delta) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{j=1}^n \Big|\frac{x_j - z_j}{\delta_j}\Big|^p \leqslant 1\Big\},$$

$p \geqslant 1$, будем называть *гёльдеровским* (предполагается $\delta_j > 0\ \forall j$). $G(z, \delta)$ — симметричное относительно $z$ множество, $\delta_j$ — расстояние от центра до границы множества вдоль $j$-го орта. Будем считать, что функция (1.3) по-прежнему характеризует объем $G(z, \delta)$. Выполнение включения $G(z, \delta) \subset X$ эквивалентно условиям

$$\max\Big\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \colon x \in G(z, \delta)\Big\} \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, m. \tag{1.8}$$

Каждая из задач (1.8) — задача выпуклого программирования, которая решается при помощи метода неопределенных множителей Лагранжа, и компоненты точек максимума $x^{i,*}$ определяются следующим образом:

$$x_j^{i,*} = z_j + \frac{|a_{ij}|^{1/(p-1)}\delta_j^{p/(p-1)}}{\Big(\sum_{k=1}^n |a_{ik}|^{p/(p-1)}\delta_k^{p/(p-1)}\Big)^{1/p}}\operatorname{sign}(a_{ij}), \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $\mathrm{sign}(a_{ij})$ — знак $a_{ij}$. Тогда максимальные значения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{i,*} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j + \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \delta_j^q\Big)^{1/q}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{1.9}$$

где $q\colon \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Из (1.8) и (1.9) следует, что задачу максимизации $\varphi(\delta)$ при ограничениях (1.8) (и $\delta_j > 0\ \forall j$) можно заменить задачей максимизации $\varphi(\delta)$ при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}z_j + \Big(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \delta_j^q\Big)^{1/q} \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

и $\delta_j \geqslant \epsilon$ при достаточно малом $\epsilon > 0$. Таким образом, задача вписывания максимального (в смысле максимизации функции $\varphi$) гёльдеровского множества в многогранник может быть сформулирована в виде задачи выпуклого программирования с использованием нормы, сопряженной норме, при помощи которой определяется само гёльдеровское множество.

## 2. Алгоритм

Алгоритм аппроксимации меры $X$ основан на следующей идее. Первоначально, решая $2n$ задач выпуклого программирования (1.1), описываем вокруг $X$ параллелепипед наименьшего объема $\Pi^{out} \supset X$, $\Pi^{out} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \underline{x}^{out} \leqslant x \leqslant \overline{x}^{out}\}$, и решая задачу выпуклого программирования (1.5), (1.3) при $\delta \geqslant 0$, вписываем в $X$ параллелепипед максимального объема $\Pi^{in} \subset X$, $\Pi^{in} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \underline{x}^{in} \leqslant x \leqslant \overline{x}^{in}\}$. Определим множества

$$D_1 = \{x \in X\colon \underline{x}_1^{out} \leqslant x_1 \leqslant \underline{x}_1^{in}; \underline{x}_j^{out} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{out},\ j > 1\}, \tag{2.1}$$

$$D_{n+1} = \{x \in X\colon \overline{x}_1^{in} \leqslant x_1 \leqslant \overline{x}_1^{out}; \underline{x}_j^{out} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{out},\ j > 1\}, \tag{2.2}$$

$$D_i = \{x \in X\colon \underline{x}_j^{in} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{in}, j < i; \underline{x}_i^{out} \leqslant x_i \leqslant \underline{x}_i^{in}; \underline{x}_j^{out} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{out},\ j > i\}, \tag{2.3}$$

$$D_{n+i} = \{x \in X\colon \underline{x}_j^{in} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{in}, j < i; \overline{x}_i^{in} \leqslant x_i \leqslant \overline{x}_i^{out}; \underline{x}_j^{out} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{out},\ j > i\}, \tag{2.4}$$

$$i = 2, \ldots, n-1, \tag{2.5}$$

$$D_n = \{x \in X\colon \underline{x}_j^{in} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{in}, j < n; \underline{x}_n^{out} \leqslant x_n \leqslant \underline{x}_n^{in}\}, \tag{2.6}$$

$$D_{2n} = \{x \in X\colon \underline{x}_j^{in} \leqslant x_j \leqslant \overline{x}_j^{in}, j < n; \overline{x}_n^{in} \leqslant x_n \leqslant \overline{x}_n^{out}\}. \tag{2.7}$$

В силу построения

$$X = \Pi^{in} \cup D_1 \cup \ldots \cup D_{2n}$$

и множества $int(X), int(D_i), i = 1, \ldots, 2n$ попарно не пересекаются. Тогда

$$\mu(X) = \mu(\Pi^{in}) + \sum_{i=1}^{2n} \mu(D_i),$$

следовательно, $\mu(\Pi^{in})$ служит оценкой снизу $\mu(X)$. Далее, поскольку $\Pi^{out} \supset X$, то $\mu(\Pi^{out})$ служит оценкой сверху $\mu(X)$. Эти оценки можно уточнить следующим образом. Впишем в каждое множество $D_i$ параллелепипед максимального объема $\Pi_i^{in} \subset D_i$ и опишем вокруг каждого $D_i$ параллелепипед минимального объема $\Pi_i^{out} \supset D_i$. Тогда величины

$$\underline{\mu} = \mu(\Pi^{in}) + \sum_{i=1}^{2n} \mu(\Pi_i^{in}), \quad \overline{\mu} = \mu(\Pi^{in}) + \sum_{i=1}^{2n} \mu(\Pi_i^{out})$$

будут более точными оценками $\mu(X)\colon \underline{\mu} \leqslant \mu(X) \leqslant \overline{\mu}$. Затем, процедуру разбиения, аналогичную (2.1)–(2.7), можно повторить для каждого множества $D_i$, роль $X$ будут играть уже множества $D_i$.

Перейдем к описанию алгоритма.

**I. Инициализация.** Входные данные: множество $X$, мера $\mu$, относительная точность $\Delta$, максимальное количество итераций $K_{\max}$.

**I.1** Построить параллелепипед наименьшего объема $\Pi^{out} \supset X$, вычислить $\mu(\Pi^{out})$;

**I.2** Построить параллелепипед максимального объема $\Pi^{in} \subset X$, вычислить $\mu(\Pi^{in})$;

**I.3** Определить $\mathcal{D} = \{X\}$, определить $\mu^{out} = \mu(\Pi^{out})$, $\mu^{in} = \mu(\Pi^{in})$, установить $k \leftarrow 0$.

**II. Итеративная часть.** Перед началом каждой итерации имеем: набор множеств $\mathcal{D}$; для каждого $D \in \mathcal{D}$ есть внешний параллелепипед (не обязательно минимального объема) $\Pi^{out}(D) \supset D$ и внутренний параллелепипед (обязательно максимального объема) $\Pi^{in}(D) \subset D$; оценка снизу $\mu^{in}\colon \mu^{in} \leqslant \mu(X)$, оценка сверху $\mu^{out}\colon \mu^{out} \geqslant \mu(X)$.

**II.1** Если $\dfrac{\mu^{out} - \mu^{in}}{\mu^{out}} \leqslant \Delta$, то стоп;

**II.2** Найти $D_k \in \operatorname{Argmax}\{\mu(\Pi^{out}(D)) - \mu(\Pi^{in}(D))\colon D \in \mathcal{D}\}$;

**II.3** Построить параллелепипед наименьшего объема $\Pi_k^{out} \supset D_k$;

**II.4** Построить $2n$ множеств $D_{ki}$ по аналогии с (2.1)–(2.7), заменяя в этих формулах $X$ на $D_k$, $\Pi^{out}$ на $\Pi_k^{out}$, $\Pi^{in}$ на $\Pi_k^{in}$, $D_i$ на $D_{ki}$;

**II.5** Построить $2n$ параллелепипедов $\Pi_{ki}^{out} \supset D_{ki}$ по аналогии с (2.1)–(2.7), заменяя в этих формулах $X$ на $\Pi_k^{out}$, $\Pi^{out}$ на $\Pi_k^{out}$, $\Pi^{in}$ на $\Pi_k^{in}$, $D_i$ на $\Pi_{ki}^{out}$;

**II.6** Построить параллелепипеды наибольшего объема $\Pi_{ki}^{in} \subset D_{ki}$, $i = 1, \ldots, 2n$;

**II.7** Вычислить $\mu^{in} = \mu^{in} + \sum\limits_{i=1}^{2n} \mu(\Pi_{ki}^{in})$;

**II.8** Вычислить $\mu^{out} = \mu^{out} - \mu(\Pi_k^{out}) + \mu(\Pi_k^{in}) + \sum\limits_{i=1}^{2n} \mu(\Pi_{ki}^{out})$;

**II.9** Определить $\mathcal{D} = \mathcal{D} \setminus D_k \bigcup \left( \bigcup\limits_{i=1}^{2n} D_{ki} \right)$;

**II.10** Если $k = K_{\max}$, то стоп, иначе установить $k \leftarrow k+1$ и перейти на **II.1**.

Построение параллелепипеда наименьшего объема на шаге **II.3** требует решение $2n$ задач выпуклого программирования вида (1.1), построение $2n$ параллелепипедов наибольшего объема на шаге **II.6** требует решения $2n$ задач выпуклого программирования вида (1.3), (1.5). В итоге на каждой итерации решается $4n$ задач выпуклого программирования. Задачи эти не связаны друг с другом и поэтому их решение легко может быть распараллелено. Тем не менее вычислительная трудоемкость предлагаемого алгоритма достаточно высока. Поэтому алгоритм предлагается использовать в задачах небольшой размерности, тем более что возможности аппроксимации параллелепипедами компактного множества ограничены. Частным случаем меры является объем. Следовательно, предлагаемый алгоритм применим и к вычислению объемов выпуклых компактных множеств. Как известно [9], задача вычисления объема выпуклого многогранника $\#P$-трудна, поэтому указанная трудоемкость алгоритма не удивительна.

С геометрической точки зрения на шаге **II.5** параллелепипед $\Pi_k^{out}$ разбивается на $2n+1$ параллелепипедов:

$$\Pi_k^{out} = \Pi_k^{in} \bigcup \Big( \bigcup_{i=1}^{2n} \Pi_{ki}^{out} \Big).$$

Разбиение это происходит без учета множества $X$, вследствие чего параллелепипеды $\Pi_{ki}^{out}$, содержащие $D_{ki}$, не являются внешними параллелепипедами минимального объема, поэтому необходима оптимизация внешних параллелепипедов, осуществляемая на шаге **II.3**.

На каждой итерации множество $X$ может быть представлено как объединение всех построенных к данному моменту внутренних параллелепипедов и множеств из текущего набора $\mathcal{D}$, т. е. набор непересекающихся множеств $\mathcal{D}$ содержит граничную часть множества $X$, не измеренную при помощи построенных внутренних параллелепипедов. Измерение этой граничной части с избытком происходит при помощи внешних параллелепипедов $\Pi_{ki}^{out}$, размеры которых становятся меньше от итерации к итерации.

## 3. Предварительный вычислительный эксперимент

В данном разделе приводятся результаты измерения компактного множества на плоскости $X$ из ранее приведенного примера (см. также рисунок). Относительная точность $\Delta = 0.05$. Сначала рассмотрим задачу нахождения площади этого множества. В этом случае мера прямоугольника $\Pi = \{(x_1, x_2)\colon \underline{x}_1 \leqslant x_1 \leqslant \overline{x}_1,\ \underline{x}_2 \leqslant x_2 \leqslant \overline{x}_2\}$ $\mu(\Pi) = (\overline{x}_1 - \underline{x}_1)(\overline{x}_2 - \underline{x}_2)$. Для получения заданной точности алгоритм проделал 59 итераций.

Пусть теперь требуется определить вероятность попадания в $X$ двумерной нормально распределенной случайной величины $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ с независимыми компонентами $\xi_1$ и $\xi_2$. Функция распределения $F_\xi(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$, где $F_1$ — функция распределения нормальной случайной величины $\xi_1$ с математическим ожиданием $\alpha_1 = 2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_1 = 3$, $F_2$ — функция распределения нормальной случайной величины $\xi_2$ с математическим ожиданием $\alpha_2 = -2$ и средним квадратическим отклонением $\sigma_2 = 2$. В этом случае мера $\mu(\Pi) = (F_1(\overline{x}_1) - F_1(\underline{x}_1))\,(F_2(\overline{x}_2) - F_2(\underline{x}_2))$. Для достижения заданной точности потребовалось 36 итераций. Если взять более концентрированную вероятностную меру с $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 0.5$, то требуется уже 8 итераций.

Как показал вычислительный эксперимент нижняя оценка меры $\mu^{in}$ более точна, чем верхняя оценка $\mu^{out}$. Связано это с тем, что внутренние (вписанные) аппроксимирующие параллелепипеды — всегда максимального объема. Если на шаге **II.5** строить внешние параллелепипеды именно наименьшего объема, то точность оценки сверху можно улучшить, а вместе с тем и сократить количество итераций. Для этого на каждой итерации придется дополнительно решать $4n^2$ задач выпуклого программирования.

## Заключение

Параллелепипеды в предлагаемом алгоритме оптимальны с точки зрения объема. В общем случае эффективнее было бы строить экстремальные параллелепипеды с точки зрения используемой меры. Однако в таком случае вспомогательные задачи могут оказаться задачами невыпуклой оптимизации. Пусть, например, задана случайная величина $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с функцией распределения $F_\xi(x) = F_1(x_1)F_2(x_2)\ldots F_n(x_n)$, где $F_i$ — функция распределения $\xi_i$. Тогда, для построения максимального с точки зрения вероятностной меры параллелепипеда $\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \underline{x} \leqslant x \leqslant \overline{x}\}$ вместо целевой функции (1.3) потребуется использовать функцию

$$\psi(\underline{x}, \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(F_i(\overline{x}_i) - F_i(\underline{x}_i)\right).$$

Функция $\psi$ — логарифм вероятностной меры $\Pi$. Каждое слагаемое в данной функции — логарифм разности двух монотонных функций, а такая разность может оказаться многоэкстремальной [10].

Построение экстремальных в смысле объема параллелепипедов требует решения задач выпуклой оптимизации, что является преимуществом предложенного алгоритма. Далее, построение максимального вписанного параллелепипеда позволяет охватить максимальную "прямоугольную" внутреннюю часть $X$ по сравнению с сеточными методами. Необходимо отметить, что данная методика может использоваться и при вычислении многомерных интегралов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М: Наука, 1976. 544 с.
2. **Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л.** Интеграл, мера и производная. М: Наука, 1967. 220 с.
3. **Михайлов Г.А., Войтишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М: Изд. центр "Академия", 2006. 368 с.

4. **Lovász L., Simonovits M.** Random walks in a convex body and an improved volume algorithm // Random structures & algorithms. 1993. № 4. P. 359–412.
5. **Бронштейн Е.М.** Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 22. С. 5–37.
6. **Prékopa A.** Stochastic programming. Dordrecht, Boston: Kluwer Acad. Publ., 1995. 599 p. ISBN: 0792334825 .
7. **Норкин В.И., Роенко Н.В.** $\alpha$-вогнутые функции и меры и их применения // Кибернетика и системный снализ. 1991. Вып. 6. С. 77–88.
8. **Ащепков Л.Т.** О построении максимального куба, вписанного в заданную область // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1980. Т. 20, № 2. С. 510–513.
9. **Хачиян Л.Г.** Задача вычисления объема многогранника перечислительно трудна // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, вып. 3. С. 179–180.
10. **Tuy H., Al-Khayyal F., Thach P.T.** Monotonic optimization: Branch and cut methods // Essays and Surveys in Global Optimization / eds. C. Audet, P. Hansen, G. Savard. Berlin, etc.: Springer, 2005. P. 39–78. doi: 10.1007/0-387-25570-2_2 .

Хамисов Олег Валерьевич
д-р физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник,
зав. отделом
Институт систем энергетики им Л.А. Мелентьева СО РАН,
г. Иркутск
e-mail: khamisov@isem.irk.ru

Поступила 12.05.2017

**REFERENCES**

1. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* (Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961). Martino Fine Books, United States, 2012, 280 p. ISBN: 1614273049 . The 4th edition of Russian text published in *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza.* Moscow, Nauka Publ., 1976, 544 p.
2. Shilov G.E., Gurevich B.L. *Integral, measure and derivative: A unified approach.* (Translated from the first Russian edition 1964). N.J.: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1966, 233 p. ISBN: 0486635198 . The 2nd edition of Russian text published in *Integral, mera i proizvodnaya.* Moscow, Nauka Publ. 1967, 220 p.
3. Mikhailov G.A., Voytishek A.V. *Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo.* [Numerical Statistical Simulation. Monte Carlo methods]. Moscow: Publ. Center Academy, 2006, 368 p. ISBN: 5-7695-2739-0 .
4. Lovász L., Simonovits M. Random walks in a convex body and an improved volume algorithm. *Random structures & algorithms*, 1993, vol. 4, no. 4, pp. 359–412. doi: 10.1002/rsa.3240040402 .
5. Bronshtein E.M. Approximation of Convex Sets by Polytopes. *J. Math. Sci.*, 2008, vol. 153, no. 6, pp. 727–762. doi: 10.1007/s10958-008-9144-x .
6. Prékopa A. *Stochastic Programming.* Dordrecht, Boston, Kluwer Acad. Publ., 1995, 599 p. ISBN: 0792334825 .
7. Norkin V.I., Roenko, N.V. $\alpha$-concave functions and measures and their applications. *Cybern. Syst. Anal.*, 1991, vol. 27, no. 6, pp. 860–869. doi: 10.1007/BF01246517 .
8. Ashchepkov L.T. Construction of the maximum cube inscribed in a given domain. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1980, vol. 20, no. 2, pp. 245–249. doi: 10.1016/0041-5553(80)90039-7 .
9. Khachiyan L.G. The problem of calculating the volume of a polyhedron is enumerably hard. *Russian Math. Surveys*, 1989, vol. 44, no. 3, pp. 199–200. doi: 10.1070/RM1989v044n03ABEH002136 .
10. Tuy H., Al-Khayyal F., Thach P.T. *Monotonic optimization: Branch and cut methods.* In: Essays and Surveys in Global Optimization, C. Audet, P. Hansen, G. Savard (eds.), Berlin: Springer, 2005, pp. 39–78. doi: 10.1007/0-387-25570-2_2 .

The paper was received by the Editorial Office on May, 12, 2017.

*Oleg Valer'evich Khamisov.* Dr. Phys.-Math. Sci., Melentiev Energy Systems Institute, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: khamisov@isem.irk.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.16 + 519.85

# РАЗРЕШИМОСТЬ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА В КЛАССЕ КВАЗИ- И ПСЕВДОПИРАМИДАЛЬНЫХ МАРШРУТОВ[1]

**М. Ю. Хачай, Е. Д. Незнахина**

В работе изучается общая постановка обобщенной задачи коммивояжера (GTSP), в которой требуется построить кратчайший циклический маршрут, посещающий каждый элемент фиксированного разбиения множества вершин заданного взвешенного графа (именуемый *кластером* или *мегаполисом*) в единственной вершине. Обобщив классическое понятие пирамидального маршрута и введя в рассмотрение квази- и псевдопирамидальные маршруты для задачи GTSP, мы показали, что оптимальный $l$-квазипирамидальный и $l$-псевдопирамидальный маршруты в произвольной постановке задачи на $n$ вершинах и $k$ кластерах могут быть построены за время $O(4^l n^3)$ и $O(2^l k^{l+4} n^3)$ соответственно. Как следствие показано, что задача GTSP принадлежит классу FPT относительно параметризаций, задаваемых такими типами маршрутов. Кроме того, обоснована полиномиальная разрешимость геометрического подкласса задачи, известного в литературе как GTSP-GC, произвольная постановка которого стеснена дополнительным ограничением $H \leq 2$ на высоту решетки, определяющей кластеры.

Ключевые слова: обобщенная задача коммивояжера (GTSP), полиномиально разрешимый подкласс, квазипирамидальный маршрут, псевдопирамидальный маршрут.

**M. Yu. Khachai, E. D. Neznakhina. Solvability of the Generalized Traveling Salesman Problem in the class of quasi- and pseudopyramidal tours.**

We consider the general setting of the Generalized Traveling Salesman Problem (GTSP), where, for a given weighted graph and a partition of its nodes into clusters (or megalopolises), it is required to find a cheapest cyclic tour visiting each cluster exactly once. Generalizing the classical notion of pyramidal tour, we introduce quasi- and pseudopyramidal tours for the GTSP and show that, for an arbitrary instance of the problem with $n$ nodes and $k$ clusters, optimal $l$-quasi-pyramidal and $l$-pseudopyramidal tours can be found in time $O(4^l n^3)$ and $O(2^l k^{l+4} n^3)$, respectively. As a consequence, we prove that the GTSP belongs to the class FTP with respect to parametrizations given by such types of routes. Furthermore, we establish the polynomial-time solvability of the geometric subclass of the problem known in the literature as GTSP-GC, where an arbitrary statement is subject to the additional constraint $H \leq 2$ on the height of the grid defining the clusters.

Keywords: Generalized Traveling Salesman Problem (GTSP), polynomially solvable subclass, quasi-pyramidal tour, pseudopyramidal tour.

**MSC:** 90C27, 90C59, 90B06

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-280-291

## Введение

Задача коммивояжера (TSP) — классическая задача комбинаторной оптимизации, известная широким спектром приложений в области исследования операций и привлекающая внимание специалистов в области алгоритмического анализа труднорешаемых задач с начала 60-х гг. прошлого века (см., например, [12]).

Хорошо известно [18], что задача TSP $NP$-трудна в сильном смысле как в общем случае, так и в существенно более специальных постановках, например, на евклидовой плоскости. Аппроксимируемость задачи TSP, по-видимому, наиболее точно характеризуется следующими фундаментальными результатами. С одной стороны, поскольку существование полиномиального приближенного алгоритма с точностью $O(2^n)$ для общего случая задачи влечет [19] совпадение классов $P$ и $NP$, алгоритмы, способные эффективно находить не только точные, но и приближенные решения с приемлемой точностью для произвольной постановки TSP,

[1]Исследования поддержаны Российским научным фондом, грант 14-11-00109.

вряд ли когда-либо будут разработаны. С другой стороны, во многих важных с точки зрения приложений частных случаях задача коммивояжера обладает существенно лучшей аппроксимируемостью. Например, для произвольного метрического пространства разработаны [6] полиномиальные приближенные алгоритмы фиксированной точности, а для конечномерных евклидовых пространств — полиномиальные приближенные схемы (PTAS) [3], позволяющие для произвольного наперед заданного $\varepsilon > 0$ найти приближенное решение задачи с относительной погрешностью $\varepsilon$ за полиномиальное время от длины записи ее условия. Отметим, что подобными сложностными и аппроксимационными свойствами обладают и некоторые известные обобщения задачи коммивояжера, например, задача о цикловом покрытии графа (см., например, [11; 13]) и задача о нескольких коммивояжерах [2].

Наряду с проектированием приближенных алгоритмов в последние десятилетия внимание исследователей привлекает алгоритмический анализ постановок задачи TSP и ее обобщений, множества допустимых маршрутов которых стеснены дополнительными ограничениями, например, *ограничениями предшествования* (см., например, [4; 5]). Среди прочих ограничений сужение допустимого множества до множества так называемых *пирамидальных маршрутов* представляется наиболее активно исследуемым (см. обзоры в [12; 20]). *Пирамидальным* называется маршрут, согласованный с естественным упорядочением вершин графа, задающего условие задачи, и имеющий вид $v_1 = v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_r} = v_n, v_{i_{r+1}}, \ldots, v_{i_n}$, где

$$v_{i_j} < v_{i_{j+1}} \quad (1 \leq j \leq r-1), \qquad v_{i_j} > v_{i_{j+1}} \quad (r+1 \leq j \leq n-1).$$

Известно, что в классе пирамидальных маршрутов задача коммивояжера может быть решена чрезвычайно эффективно: при произвольной весовой функции пирамидальный маршрут минимального (или максимального) веса может быть найден [15] за время $O(n^2)$, в то время как для евклидовой постановки известны [9] алгоритмы и с субквадратичной трудоемкостью $O(n \log^2 n)$. В работах [8; 17] предложены обобщения понятия пирамидального маршрута, сохраняющие свойство полиномиальности соответствующих оптимизирующих процедур.

Несмотря на общеизвестность пирамидальных маршрутов, использование их и обобщающих их конструкций при алгоритмическом анализе задачи коммивояжера затруднено редкостью постановок задачи, для которых удается обосновать оптимальность (или субоптимальность) таких маршрутов. Фактически множество известных примеров подобных задач исчерпывается постановками, удовлетворяющими классическим достаточным условиям Демиденко и Ван дер Веена [12], а также условиям, приведенным в работах [8; 16].

В статье исследуется полиномиальная разрешимость подклассов обобщенной задачи коммивояжера (GTSP), состоящей в поиске циклического маршрута минимального веса, посещающего каждый элемент заданного разбиения множества вершин взвешенного графа в единственной вершине. Известно, что задача GTSP полиномиально разрешима при произвольном фиксированном числе элементов разбиения [10], однако в случае, когда это число является частью условия, задача $NP$-трудна и сохраняет трудноразрешаемость даже на евклидовой плоскости.

Результаты данной статьи условно могут быть разделены на две группы.

1) В разд. 1 нами вводятся понятия *$l$-квазипирамидального* и *$l$-псевдопирамидального* маршрутов, распространяющие классическое понятие пирамидального маршрута на случай обобщенной задачи коммивояжера (GTSP), и показывается, что оптимальные $l$-квази- и $l$-псевдопирамидальные маршруты могут быть найдены за полиномиальное время при произвольной весовой функции и произвольном фиксированном значении параметра $l$.

2) В разд. 2 нами описывается нетривиальный полиномиально разрешимый геометрический подкласс задачи GTSP и показывается, что для найденного конкретного значения $l$ произвольная частная задача, представитель рассматриваемого подкласса, обладает оптимальным $l$-квазипирамидальным маршрутом.

## 1. Квази- и псевдопирамидальные маршруты

В данном разделе мы распространим понятие пирамидального маршрута на случай обобщенной задачи коммивояжера (GTSP). Постановка задачи GTSP задается полным реберно-взвешенным графом $G = (V, E, w)$ с неотрицательнозначной весовой функцией $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ и разбиением $V_1 \cup \ldots \cup V_k = V$ множества вершин $V = V(G)$ графа $G$ на *кластеры* (*мегаполисы*). Допустимыми решениями задачи являются циклические маршруты $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, посещающие произвольный кластер $V_i$ в единственной вершине. Договоримся в дальнейшем называть такие решения *кластеризованными маршрутами коммивояжера* или сокращенно *$k$-маршрутами*. Цель в задаче GTSP состоит в поиске $k$-маршрута минимального веса[2].

Как отмечалось выше, пирамидальные маршруты согласованы с линейным порядком на множестве вершин графа. В данном разделе мы обобщим это понятие на случай частичных порядков, порождаемых упорядочениями кластеров. В самом деле, линейно упорядоченное множество кластеров $(V_1, \ldots, V_k)$ индуцирует естественный частичный порядок на множестве вершин графа $G$: для произвольных вершин $u \in V_i$ и $v \in V_j$ $u \prec v$, если $i < j$.

О п р е д е л е н и е. $k$-маршрут $\tau$ вида $v_1, v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}, v_k, v_{j_{k-r-2}}, \ldots, v_{j_1}$, в котором $v_t \in V_t$ для каждого $t \in \{1, \ldots, k\}$, называется *$l$-квазипирамидальным маршрутом*, если неравенства $i_p - i_q \le l$ и $j_{p'} - j_{q'} \le l$ справедливы для произвольных $1 \le p < q \le r$ и $1 \le p' < q' \le k - r - 2$.

Следующая теорема обобщает результат, полученный в [17] для случая классической задачи коммивояжера.

**Теорема 1.** *Оптимальный $l$-квазипирамидальный маршрут для постановки задачи* GTSP *с произвольной весовой функцией $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ может быть найден за время $O(4^l n^3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задавшись произвольной постановкой задачи GTSP, опишем процедуру поиска $l$-квазипирамидального маршрута минимальной стоимости. Для натуральных чисел $i > j$ договоримся использовать сокращенные обозначения $[j, i]$, $[j, i)$ и $(j, i)$ для подмножеств $\{j, \ldots, i\} \cap \mathbb{N}$, $\{j, \ldots, i-1\} \cap \mathbb{N}$ и $\{j+1, \ldots, i-1\} \cap \mathbb{N}$ соответственно. Для произвольных вершин $u \in V_i$ и $v \in V_j$, $1 \le i \ne j \le k$, и подмножества $S$, удовлетворяющего соотношению

$$(S \subset [i-l, i) \setminus \{1, j\}) \vee (S \subset [j-l, j) \setminus \{1, i\}),$$

обозначим через $g(u, S, v)$ вес кратчайшего $(|S|+1)$-реберного пути из $u$ в $v$, посещающего каждый из кластеров $\{V_t\colon t \in S\}$ (рис. 1). Значения функции $g$ легко могут быть вычислены рекурсивно, поскольку $g(u, \varnothing, v) = w(\{u, v\})$ и

$$g(u, S, v) = \begin{cases} \min\limits_{m \in S} \min\limits_{v' \in V_m} \{g(u, S \setminus \{m\}, v') + w(\{v', v\})\}, & \text{если} \quad S \subseteq [j-l, j) \setminus \{1, i\}, \\ \min\limits_{m \in S} \min\limits_{v' \in V_m} \{w(\{u, v'\}) + g(v', S \setminus \{m\}, v)\}, & \text{если} \quad S \subseteq [i-l, i) \setminus \{1, j\}. \end{cases} \tag{1}$$

Далее, для произвольных $1 \le j < i \le k$ и подмножества $T \subseteq [i-l, i) \cup [j-l, j) \setminus \{1, i, j\}$ через $f(u, v, T)$ обозначим вес кратчайшего пути $P$ из $u \in V_i$ в $v \in V_j$, посещающего каждый кластер $V_p$, $p \in [1, i) \setminus T$, в единственной вершине и имеющего вид

$$u = v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_r} = \bar{v} = v_{j_0}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_s} = v,$$

причем $\bar{v} \in V_1$, индексы $i_0, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ попарно различны, $i_t < i$ и $j_{t'} < j$ для каждого $1 \le t \le r$ и $0 \le t' \le s-1$ соответственно, и

$$i_q - i_p \le l \quad (0 < p < q \le r), \qquad j_{p'} - j_{q'} \le l \quad (0 \le p' < q' < s).$$

[2]Для простоты мы ограничимся случаем неориентированных графов, однако проведенные рассуждения легко могут быть обобщены на случай ориентированных графов и несимметричных весовых функций.

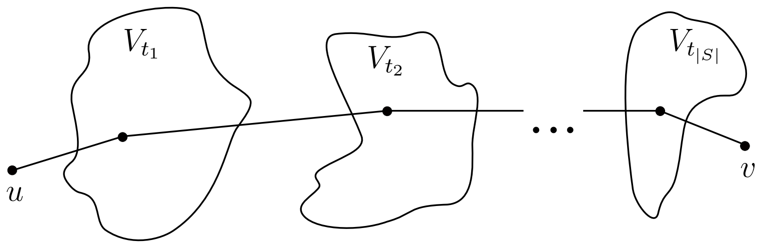



Рис. 1. $u$-$v$-путь, посещающий кластеры $V_{t_j}$, $t_j \in S$.

Как и в случае с функцией $g$, значения введенной выше функции $f$ могут быть вычислены рекурсивно. Базу рекурсии составляют значения $f(u, v, (1, t)) = w(\{u, v\})$, вычисляемые непосредственно для произвольной пары вершин $u \in V_t$ и $v \in V_1$, $2 \leq t \leq l+2$. Остальные значения $f(u, v, T)$ для произвольных $u \in V_i$, $v \in V_j$ и $T \subset [i-l, i) \cup [j-l, j) \setminus \{1, i, j\}$, необходимые для дальнейших построений, могут быть вычислены в порядке возрастания $i$ и $j < i$ следующим образом.

Пусть $m = \max\{p\colon p \in [1, i) \cup [1, j) \setminus T\}$ — наибольший номер промежуточного кластера, посещаемого маршрутом из $u$ в $v$. В случае $m > j$ значение $f(u, v, T)$ может быть вычислено по формуле

$$f(u, v, T) = \min_{S \subseteq [m-l, m) \setminus (T \cup \{1, j\})} \min_{u' \in V_m} \{g(u, S, u') + f(u', v, T \cup S)\}, \tag{2}$$

в случае $m < j$ — по формуле

$$f(u,v,T) = \min \begin{cases} \min\limits_{S \subseteq [m-l, m) \setminus (T \cup \{1\})} \min\limits_{u' \in V_m} \{g(u, S, u') + f(u', v, T \cup S)\}, & \text{если } m \in \{i_1, ..., i_{r-1}\}, \\ \min\limits_{S \subseteq [m-l, m) \setminus (T \cup \{1\})} \min\limits_{u' \in V_m} \{f(u, u', T \cup S) + g(u', S, v)\}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

На завершающем этапе вычисляются значения $f(u, v, T)$ для произвольных вершин $u \in V_k$ и $v \in V_{k-1}$ и произвольного подмножества $T \subseteq [k-l-1, k-1) \setminus \{1\}$.

Нетрудно убедиться в том, что вес оптимального $l$-квазипирамидального маршрута (см. рис. 2) определяется соотношением

$$\min_{T \subseteq [k-l-1, k-1) \setminus \{1\}} \min_{u \in V_k} \min_{v \in V_{k-1}} \{f(u, v, T) + g(v, T, u)\}.$$

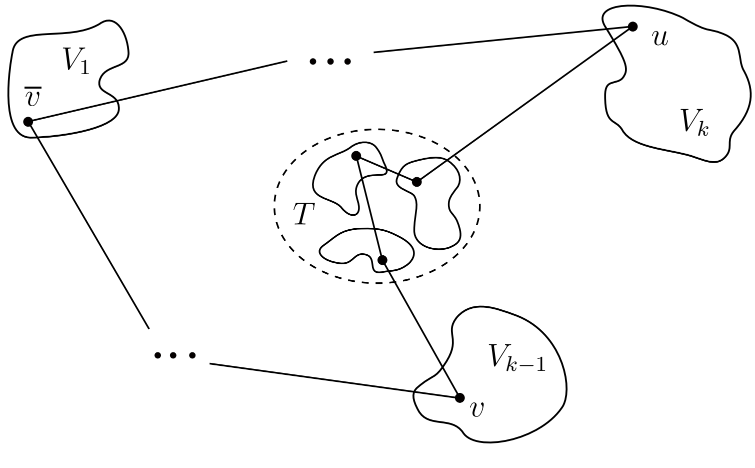



Рис. 2. Построение $l$-квазипирамидального маршрута минимальной стоимости.

Оценим трудоемкость описанного выше алгоритма. Необходимые для построения оптимального $l$-квазипирамидального маршрута значения $g(v, S, u)$ могут быть вычислены по формуле (1) за время $O(2^l n^3)$. Временная сложность вычисления базовых значений $f(u, v, (1, t))$ рекурсивной процедуры определения функции $f$ не превышает $O(n^2)$. Далее, для произвольных фиксированных $u, v$ и $T$ трудоемкость вычислений по формулам (2) и (3) не превышает $O(2^l n)$, число вызовов которых ограничено сверху величиной $O(2^l n^2)$. Следовательно, суммарная временная сложность алгоритма не превышает $O(4^l n^3)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Суммарный объем памяти, используемой описанным в доказательстве теоремы 1 алгоритмом, совпадает по порядку величины с размером хеш-таблиц $f$ и $g$ и составляет $O(2^l n^2)$.

З а м е ч а н и е 2. Обобщенная задача коммивояжера с неотрицательной симметричной матрицей весов принадлежит классу FPT — параметрических задач, эффективно разрешимых при произвольном фиксированном значении параметра [7].

О п р е д е л е н и е. $k$-маршрут $\tau$ вида $v_1, v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}, v_k, v_{j_{k-r-2}}, \ldots, v_{j_1}$, в котором $v_t \in V_t$ для каждого $t \in [1, k]$, называется *$l$-псевдопирамидальным маршрутом*, если неравенства $i_p - i_{p+1} \le l$ и $j_{p'} - j_{p'+1} \le l$ справедливы для произвольных $1 \le p < r$ и $1 \le p' < k - r - 2$.

Очевидно, произвольный $l$-квазипирамидальный маршрут является также и $l$-псевдопирамидальным. Покажем, что поиск оптимального $l$-псевдопирамидального маршрута может быть организован с помощью эффективной процедуры.

**Теорема 2.** *Для произвольной постановки задачи GTSP, задаваемой взвешенным графом $G = (V, E, w)$ и разбиением $V_1, \ldots, V_k$, $l$-псевдопирамидальный маршрут минимального (максимального) веса может быть найден за время $O(2^l k^{l+4} n^3)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о состоит из двух стадий. На первой стадии мы строим перечисление элементов множества $\Theta_l$ всевозможных $l$-псевдопирамидальных маршрутов вспомогательного полного *графа кластеров* $H = K_k$ на множестве вершин $\{1, \ldots, k\}$. Затем на второй стадии для каждого маршрута $\theta = (1, i_1, \ldots, i_{k-1}) \in \Theta_l$ и произвольной вершины $u \in V_1$ строится кратчайший $u$-$u$-маршрут $\rho(\theta, u)$ в подходящем вспомогательном $(k+1)$-дольном графе $H_{\theta,u}$, имеющем следующую структуру (рис. 3).

Доли $\pi_0$ и $\pi_k$ графа $H_{\theta,u}$ состоят из единственной вершины $u \in V_1$, в то время как для каждого $j \in [1, k)$ доля $\pi_j$ совпадает с кластером $V_{i_j}$ исходного графа $G$, т.е. $\pi_j = V_{i_j}$. Произвольный подграф графа $H_{\theta,u}$, индуцированный двумя соседними долями $\pi_j$ и $\pi_{j+1}$, является полным двудольным графом. Граф $H_{\theta,u}$ предполагается взвешенным, каждое его ребро наследует вес соответствующего ребра графа $G$.

По построению произвольный $u$-$u$-маршрут графа $H_{\theta,u}$ эквивалентен равному ему по весу подходящему $l$-квазипирамидальному $k$-маршруту в графе $G$ (и наоборот). В частности, $l$-квазипирамидальный маршрут минимальной стоимости в графе $G$ соответствует кратчайшему

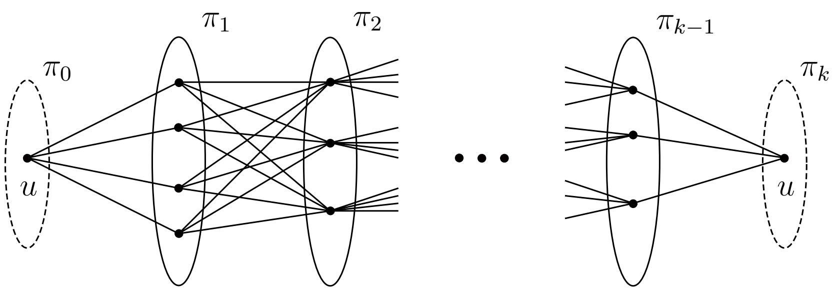



Рис. 3. Вспомогательный граф $H_{\theta,u}$ индуцированный маршрутом $\theta = \{1, i_1, \ldots, i_{k-1}\}$ и вершиной $u \in V_1$.

пути $\rho(\theta^*, u^*)$ в графе $H_{\theta^*,u^*}$, удовлетворяющему соотношению

$$w(\rho(\theta^*, u^*)) = \min\{w(\rho(\theta, u)) \colon \theta \in \Theta_l, u \in V_1\}.$$

Трудоемкость обеих стадий, очевидно, не превосходит произведения трудоемкости $T(\Theta_l)$ перечисления всевозможных $l$-псевдопирамидальных маршрутов графа $H$ (построения множества $\Theta_l$), мощности кластера $V_1$ и временной сложности $O(k \cdot n^2)$ поиска кратчайшего $u$-$u$-пути в графе $H(\theta, u)$. Поскольку без ограничения общности всегда можно полагать, что $|V_1| = \min\{|V_i| \colon i \in [1, k]\} \leq n/k$, суммарная трудоемкость построения $l$-псевдопирамидального маршрута минимального веса составляет $T(\Theta_l) \cdot O(n^3)$.

Для построения множества $\Theta_l$ воспользуемся подходом, развивающим подход, предложенный в работе [17]. Введем в рассмотрение множества $\Theta_l^+$ и $\Theta_l^-$ частичных (возможно, замкнутых) простых путей в графе $H$. Каждый элемент множества $\Theta_l^+$ — путь $\theta^+ = (i_1, \ldots, i_c)$, удовлетворяющий условию $i_p - i_{p+1} \leq l$ при каждом $p \in [1, c)$. Аналогично для произвольного $\theta^- = (j_1, \ldots, j_d) \in \Theta_l^-$ соотношение $j_{q+1} - j_q \leq l$ выполнено при каждом $q \in [1, d)$. Текущее состояние описываемой ниже рекурсивной процедуры характеризуется упорядоченной тройкой $(i, S, \mathcal{E})$, состоящей из следующих компонент. Число $i \in [1, k-1]$ определяет глубину рекурсии. Множество $S = \{p_1, \ldots, p_m\}$ состоит из пар $(i, j) \in [1, k]^2$, помеченных знаками + и −, удовлетворяющих условиям:

1) $p_1 = (1, s)^+$ и $p_2 = (t, 1)^-$ для некоторого подмножества $\{s, t\} \subset [1, k]$;

2) произвольной паре $p_a = (i_a, j_a)^+ \in S$ ($p_a = (i_a, j_a)^- \in S$) соответствует частичный $(i_a, j_a)$-путь $\theta_a \in \Theta_l^+$ ($\theta_a \in \Theta_l^-$), так что все пути $\theta_1, \ldots, \theta_m$ за исключением $\theta_1$ и $\theta_2$, пересекающихся в вершине 1, не имеют общих вершин.

Множество $\mathcal{E}$, последняя компонента состояния $(i, S, \mathcal{E})$, содержит ребра строящегося искомого $l$-псевдопирамидального маршрута.

Введем обозначение $Q = \bigcup\big\{\{i_a, j_a\} \colon p_a \in S\big\}$. Рекурсивная процедура начинается с рассмотрения следующего множества начальных состояний

$$\big\{(k-1, \{(1, s)^+, (t, 1)^-\}, \{(s, k), (k, t)\}) \colon \{s, t\} \subset [1, k)\big\}.$$

На каждом шаге рекурсии возможна одна из перечисленных ниже альтернатив.

**Case 1.** Множество $S$ текущего состояния содержит пару $p = (i, i)^+$ или $p = (i, i)^-$. В этом случае производим рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \setminus \{p\}, \mathcal{E})$.

**Case 2.** Множество $S$ содержит пару $p_a = (i, j)^+$. Тогда в пути $\theta_a \in \Theta_l^+$ вершина $i$ обладает некоторым последователем $t \in [i-l, i-1]$. Для произвольного $t \in [i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{j\})$ производим рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \cup \{(t, j)^+\} \setminus \{p_a\}, \mathcal{E} \cup \{(i, t)\})$.

**Case 3.** Множество $S$ содержит пару $p_a = (i, j)^-$. Поскольку в этом случае путь $\theta_a \in \Theta_l^-$ с необходимостью содержит некоторого последователя $t \in [1, i-1]$ вершины $i$, для каждого $t \in [1, i-1] \setminus (Q \setminus \{j\})$ производим рекурсивный вызов с переходом в состояние $(i-1, S \cup \{(t, j)^-\} \setminus \{p_a\}, \mathcal{E} \cup \{(i, t)\})$.

**Case 4 и 5.** Варианты, в которых множество $S$ содержит пару $(j, i)^+$ или $(j, i)^-$ могут быть рассмотрены по аналогии с Case 3 и Case 2 соответственно.

**Case 6.** В этом случае вершина $i$ не принадлежит множеству $Q$ и может выступать в качестве промежуточной вершины пути $\theta_a$, соответствующего произвольной паре $p_a \in S$. Следовательно, каждой паре $p_a \in S$ нам потребуется сопоставить серию рекурсивных вызовов. Допустим, пара $p_a = (i_a, j_a)^+$. Обозначив через $s$ и $t$ предшественника и последователя вершины $i$ в маршруте $\theta_a$, совершаем рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \cup \{(i_a, s)^+, (t, j_a)^+\}, \mathcal{E} \cup \{(s, i), (i, t)\})$ для произвольного $\{s, t\} \subset ([1, i-1] \setminus (Q \setminus \{i_a\}) \times ([i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{j_a\}))$. Аналогично, паре $p_a = (i_a, j_a)^-$ сопоставим серию рекурсивных переходов в состояния $(i-1, S \cup \{(i_a, s)^-, (t, j_a)^-\}, \mathcal{E} \cup \{(s, i), (i, t)\})$ для произвольного $\{s, t\} \subset ([i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{i_a\}) \times ([1, i-1] \setminus (Q \setminus \{j_a\}))$.

Всякое состояние $(1, S, \mathcal{E})$, в котором с необходимостью $S = \{(1,1)^+, (1,1)^-\}$, является финальным. Компонента $\mathcal{E}$ содержит ребра очередного $l$-квазипирамидального маршрута в графе $H$, который, очевидно, может быть восстановлен за время $O(k)$.

Временная сложность описанной выше рекурсивной процедуры совпадает с трудоемкостью $O(2^l k^{l+3})$ процедуры, предложенной в доказательстве теоремы 3.7 работы [17], общая трудоемкость построения оптимального $l$-квазипирамидального маршрута составляет $T(\Theta_l) \cdot O(n^3) = O(2^l k^{l+3}) \cdot O(k) \cdot O(n^3) = O(2^l k^{l+4} n^3)$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3. Как следует из теоремы 2, задача GTSP обладает FPT-алгоритмом относительно параметров $k$ и $l$. Кроме того, поскольку $O(2^l (\log n)^{l+4} n^3)$ не превосходит $2^{O(l^3)} \cdot O(n^4)$, при $k = O(\log n)$ задача принадлежит классу FPT относительно параметризации, определяемой $l$-псевдопирамидальными маршрутами.

## 2. Полиномиально разрешимый подкласс

В этом разделе мы опишем полиномиально разрешимый подкласс геометрического частного случая задачи GTSP, известного под названием обобщенной задачи коммивояжера на сеточных кластерах (GTSP-GC). Постановка задачи GTSP-GC задается полным взвешенным графом $G = (V, E, w)$, вершины которого являются точками на плоскости, а кластеры задаются неявно ячейками прямоугольной целочисленной решетки так, что кластером является подмножество вершин, принадлежащих одной $1 \times 1$-ячейке[3]. Весовая функция индуцируется произвольной метрикой, заданной на множестве $V$.

Известно [1], что задача GTSP-GC $NP$-трудна в сильном смысле, обладает полиномиальными приближенными алгоритмами с фиксированной точностью. Кроме того, известно [14], что в случае, когда число $k$ кластеров (непустых ячеек решетки) связано с числом вершин графа $n$ одним из соотношений $k = O(\log n)$ или $k = n - O(\log n)$, задача обладает полиномиальными приближенными схемами (PTAS).

Для простоты изложения дальнейшие рассуждения мы проведем для евклидовой метрики, хотя аналогичные результаты легко могут быть получены и для некоторых других метрик, например, для метрики $l_1$.

Пусть далее $H$ и $W$ обозначают *высоту* и *ширину* (число строк и колонок) заданной решетки соответственно. Рассмотрим специальный случай задачи GTSP-GC, в котором один из параметров, например, $H$, не превосходит 2 (в то время как $W$ может принимать произвольные значения). Назовем эту задачу GTSP-GC(H2) и покажем, что произвольная постановка такой задачи обладает $l$-квазипирамидальным маршрутом для некоторого $l$, не зависящего от числа вершин $n$ и числа кластеров $k$. Тем самым, в силу теоремы 1 нами будет обоснована полиномиальная разрешимость задачи GTSP-GC(H2).

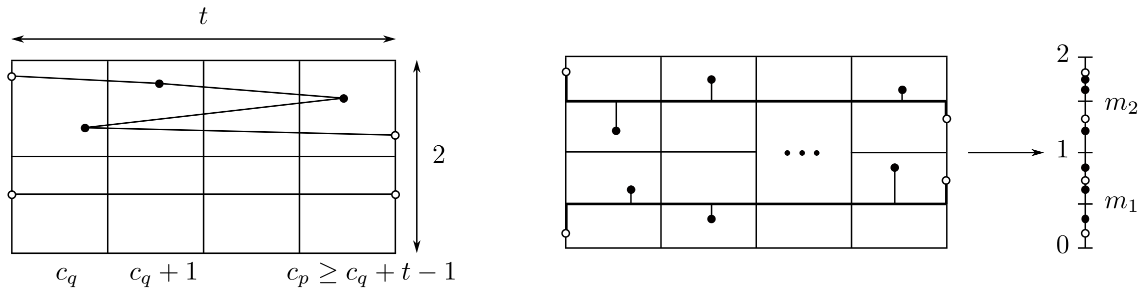
Наши рассуждения основаны на следующей процедуре преобразования маршрута, названной нами *распрямляющей*. По существу данная процедура близка к известным эвристикам локального поиска. Для ее описания пронумеруем столбцы решетки натуральными числами $1, 2, \ldots, W$ слева направо. Зададимся произвольным $k$-маршрутом $\tau$. Сопоставив каждой его вершине $v_i$ номер $c_i$ содержащего ее столбца, получим последовательность $\sigma$ номеров столбцов, перечисленных в порядке их посещения маршрутом $\tau$. Без ограничения общности полагаем, что $\sigma$ имеет вид $1 = c_1, c_2, \ldots, c_r = W, c_{r+1}, \ldots, c_s = 1$ для некоторых подходящих чисел $r$ и $s$.

Пусть для некоторого числа $t$, значение которого мы зададим позже, найдутся индексы

$$1 \le p < q < r, \quad \text{такие, что} \quad c_p - c_q \ge t - 1, \ \text{или} \tag{4}$$

$$r + 1 \le p' < q' \le s, \quad \text{такие, что} \quad c_{q'} - c_{p'} \ge t - 1. \tag{5}$$

[3]Вершины, лежащие на границах ячеек, произвольным образом относятся к одному из прилегающих кластеров.




(a) Фрагмент маршрута $\tau$, содержащий $t$-зигзаг.

(b) Замещение $t$-зигзага фрагментом специального вида.

Рис. 4. Распрямляющая процедура.

В этом случае мы будем говорить, что маршрут $\tau$ содержит *$t$-зигзаг* (рис. 4a). Приведенный ниже алгоритм исключает из маршрута $\tau$ все $t$-зигзаги, замещая фрагмент маршрута, находящийся в соответствующих столбцах решетки, фрагментами специального вида (см. рис. 4b).

А л г о р и т м. Распрямляющая процедура

**Внешний параметр:** $t$.
**Input:** постановка задачи GTSP-GC(H2) и $k$-маршрут $\tau$.
**Output:** $k$-маршрут $\tau'$, не содержащий $t$-зигзагов.

1: инициализируем $\tau' := \tau$.
2: **while** $\tau'$ содержит $t$-зигзаг **do**
3: пусть справедливо соотношение (4), случай соотношения (5) может быть рассмотрен по аналогии, кроме того, пусть $t' \geq t$, такое что выполняется равенство $c_p = c_q + t' - 1$;
4: через $C$ обозначим множество столбцов решетки с номерами $c_q, \ldots, c_p$ (см. рис. 4a);
5: через $Y = (y_1, \ldots, y_m)$, где $m \leq 2t' + 4$, обозначим последовательность ординат вершин, посещенных маршрутом $\tau$ в столбцах из множества $C$, дополненную ординатами точек пересечения левой и правой границ соответствующего подмножества столбцов;
6: построим 2-medians кластеризацию для выборки $Y$, обозначив через $m_1$ и $m_2$ найденные медианы;
7: заменим фрагменты маршрута $\tau'$, лежащие в столбцах из $C$, горизонтальными линиями с ординатами $m_1$ и $m_2$, связав их с вершинами, перечисленными на шаге 5, прямолинейными отрезками (рис. 4b)
8: **end while**
9: ответом является маршрут $\tau'$.

Для определения значения $t$ заметим, что вес исключаемых на каждой итерации алгоритма фрагментов допускает очевидную нижнюю оценку $t' + 2(t' - 1) + t' - 2 = 4t' - 4$. В то же время, вес добавляемых (на шаге 7) фрагментов не превосходит $2t' + 2F(Y, [0, 2])$, где $F(Y, S)$ — оптимальное значение целевой функции задачи 2-medians для выборки $Y$, распределенной на отрезке $S$. Верхняя оценка для $F(Y, S)$ следует из приведенной ниже леммы.

**Лемма.** *Для произвольной выборки* $p_1, \ldots, p_n$ *из отрезка* $[0, 1]$ *найдутся точки* $m_1$, $m_2 \in [0, 1]$, *для которых*

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{|p_i - m_1|, |p_i - m_2|\} \leq n/6. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, рассмотрим следующую антагонистическую игру двух игроков с нулевой суммой. Стратегиями первого игрока являются $n$-элементные выборки $\xi = (p_1, \ldots, p_n)$ из отрезка $[0, 1]$. Множество стратегий второго игрока состоит из всевозможных разбиений множества $\{1, \ldots, n\}$ на два подмножества $C_1$ и $C_2$. Без ограничения общности, полагаем, что $p_1 \leq \ldots \leq p_n$ и для произвольных $i_1 \in C_1$ и $i_2 \in C_2$ справедливо $i_1 < i_2$.

Платежная функция

$$F(\xi,(C_1,C_2)) = \sum_{i\in C_1}|p_i - m_1| + \sum_{i\in C_2}|p_i - m_2| = \sum_{i=1}^{n}\min\{|p_i - m_1|, |p_i - m_2|\},$$

где $m_1$ и $m_2$ — медианы подвыборок $\xi_1 = (p_i : i \in C_1)$ и $\xi_2 = (p_i : i \in C_2)$ соответственно.

Нетрудно убедиться в том, что описанная выше игра не имеет цены. Для завершения доказательства леммы достаточно оценить сверху нижнюю цену игры

$$v_* = \sup_{\xi}\inf_{C_1,C_2} F(\xi,(C_1,C_2)). \tag{7}$$

Учитывая, что соотношение

$$\sum_{i=1}^{\nu}|p_i - m| = \begin{cases} \sum\limits_{i=k+1}^{2k} p_i - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i, & \text{если } \nu = 2k,\\ \sum\limits_{i=k+2}^{2k+1} p_i - \sum\limits_{i=1}^{k} p_i, & \text{если } \nu = 2k+1,\end{cases}$$

справедливо для произвольного $\nu \in \mathbb{N}$, выборки $p_1,\ldots,p_\nu$ и ее медианы $m$, убеждаемся, что $v_*$ является оптимальным значением подходящей задачи линейного программирования

$$v_* = \max\ u$$

$$\sum_{i=\lceil|C_1|/2\rceil+1}^{|C_1|} p_i - \sum_{i=1}^{\lfloor|C_1|/2\rfloor} p_i + \sum_{i=\lceil|C_2|/2\rceil+1}^{|C_2|} p_{|C_1|+i} - \sum_{i=1}^{\lfloor|C_2|/2\rfloor} p_{|C_1|+i} \ge u \quad (C_1\cup C_2 = [1,n]),$$

$$0 \le p_1 \le \ldots \le p_n \le 1.$$

Применяя, например, метод последовательного исключения неизвестных, нетрудно показать, что $v_* \le n/6$, что завершает доказательство леммы, поскольку внутренний inf в соотношении (7) достижим при произвольной выборке $\xi$.

З а м е ч а н и е 4. Для произвольного $n > 2$ оценка (6) является достижимой.

Возвращаясь к обсуждению алгоритма, из леммы и по построению последовательности $Y$ получаем $F(Y,[0,2]) \le 2(1/6)(2t'+4)$. Следовательно, шаг 7 произвольной итерации алгоритма не увеличивает стоимость маршрута $\tau'$ при условии $2t'+2F(Y,[0,2]) \le 2t'+4t'/3+8/3 \le 4t'-4$, справедливом при $t' \ge 10$.

Пусть далее ячейки решетки, задающей условие задачи (следовательно, и порождаемые ей кластеры) пронумерованы, как на рис. 5. По доказанному выше для $t' \ge 10$ произвольному $k$-маршруту алгоритм сопоставляет 20-квазипирамидальный маршрут, не превосходящий его по весу.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

**Теорема 3.** *Произвольная постановка задачи* GTSP-GC(H2) *обладает оптимальным* 20-*квазипирамидальным маршрутом.*

В качестве непосредственного следствия из теорем 1 и 3 получаем окончательный результат: оптимальное решение произвольной постановки задачи GTSP-GC(H2) может быть найдено за время $O(n^3)$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | | $k-1$ |
| 2 | 4 | 6 | | $k$ |

Рис. 5. Нумерация кластеров.

## Заключение

В данной статье классическое понятие пирамидального маршрута распространено на случай графов с частично упорядоченными множествами вершин специального типа, в которых порядок индуцируется линейным порядком, задаваемым на множестве кластеров, что соответствует постановкам обобщенной задачи коммивояжера (GTSP). Нами показано, что при произвольной весовой функции оптимальные $l$-квази- и $l$-псевдопирамидальные маршруты могут быть найдены за время $O(4^l n^3)$ и $O(2^l k^{l+4} n^3)$ соответственно при произвольном фиксированном значении $l$. Кроме того, нами описан нетривиальный подкласс задачи GTSP такой, что оптимум всякой относящейся к нему постановки достигается именно на $l$-квазипирамидальном маршруте при $l = 20$, т. е. может быть найден за полиномиальное время. Данный подкласс является геометрическим и соответствует задаче GTSP-GC с решеткой, число строк которой не превосходит двух.

Возвращаясь к описанию сложностного статуса задачи GTSP-GC, открытым остается вопрос о полиномиальной разрешимости подкласса задачи GTSP-GC(H$h$), определяемого решетками произвольной фиксированной высоты $h$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Approximation algorithms for generalized MST and TSP in grid clusters / B. Bhattacharya, A. Ćustić, A. Rafiey, A. Rafiey, V. Sokol // Combinatorial Optimization and Applications: Proc. 9th Internat. Conf. (COCOA 2015). Cham: Springer International Publ., 2015. P. 110–125. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 9486). doi: 10.1007/978-3-319-26626-8_9 .
2. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 / A. Baburin, F. Della Croce, E. K. Gimadi, Y. V. Glazkov, V. T. Paschos // Discrete Appl. Math. 2009. Vol. 157, no. 9. P. 1988–1992. doi:10.1134/S1990478909010074 .
3. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782.
4. **Balas E.** New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems // Ann. Oper. Res. 1999. Vol. 86. P. 529–558.
5. **Chentsov A., Khachay M., Khachay D.** Linear time algorithm for precedence constrained asymmetric generalized traveling salesman problem // IFAC-PapersOnLine. 2016. Vol. 49, no. 12. P. 651–655. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.767 .
6. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results: Proc. Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity / ed. J.F. Traub. Orlando: Acad. Press., 1976. P. 441.
7. **Cygan M. et al.** Parameterized Algorithms. Cham;Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer, 2015. 613 p. doi: 10.1007/978-3-319-21275-3 .
8. **Enomoto H., Oda Y., Ota K.** Pyramidal tours with step-backs and the asymmetric traveling salesman problem // Discrete Appl. Math. 1998. Vol. 87, no. 1–3. P. 57–65.
9. Fine-grained complexity analysis of two classic TSP variants / M. de Berg, K. Buchin, B. M. P. Jansen, G. Woeginger // Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). 2016. Vol. 55. P. 5:1–5:14. (43rd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2016) / eds. I. Chatzigiannakis, M. Mitzenmacher, Y. Rabani, D. Sangiorgi. Dagstuhl, Germany, 2016.) ISBN 978-3-95977-013-2 .
10. **Fischetti M., Gonzalez J., Toth P.** A branch-and-cut algorithm for the symmetric generalized traveling salesman problem // Operations Research. 1997. Vol. 45, no.3. P. 378–394.
11. **Gimadi E. K., Rykov I. A.** On the asymptotic optimality of a solution of the euclidean problem of covering a graph by $m$ nonadjacent cycles of maximum total weight // Dokl. Math. 2016. Vol. 93, no. 1. P. 117–120. doi: 10.1134/S1064562416010233 .
12. **Gutin G., Punnen A. P.** The traveling salesman problem and its variations. Boston: Springer, 2007. 830 p. doi: 10.1007/b101971 .
13. **Khachay M., Neznakhina K.** Approximability of the minimum-weight $k$-size cycle cover problem // J. Glob. Optim. 2016. Vol. 66, no. 1. P. 65–82. doi:10.1007/s10898-015-0391-3 .
14. **Khachay M., Neznakhina K.** Towards a PTAS for the generalized TSP in grid clusters // AIP Conf. Proceedings. 2016. Vol. 1776, 050003. doi: 10.1063/1.4965324 .

15. **Klyaus P.** Generation of testproblems for the traveling salesman problem // Preprint Inst. Mat. Akad. Nauk. BSSR. Minsk, 1976. No. 16 (in Russian).
16. **Oda Y.** An asymmetric analogue of van der Veen conditions and the traveling salesman problem // Discrete Appl. Math. 2001. Vol. 109, no. 3. P. 279–292. doi: 10.1016/S0166-218X(00)00273-0 .
17. **Oda Y., Ota K.** Algorithmic aspects of pyramidal tours with restricted jump-backs // Interdiscip. Inform. Sci. 2001. Vol. 7, no. 1. P. 123–133. doi: 10.4036/iis.2001.123 .
18. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is $NP$-complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. Vol. 4, no. 3. P. 237–244. doi: 10.1016/0304-3975(77)90012-3 .
19. **Sahni S., Gonzales T.** $P$-complete approximation problems // J. ACM. 1976. Vol. 23, no. 3. P. 555–565. doi: 10.1145/321958.321975 .
20. Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: A survey / R. E. Burkard, V. G. Deineko, R. van Dal, J. A. A. van der Veen, G. J. Woeginger // SIAM Rev. Sept. 1998. Vol. 40, no. 3. P. 496–546. doi: 10.1137/S0036144596297514 .

Хачай Михаил Юрьевич
Поступила 29.05.17
доктор физ.-мат. наук, проф. РАН, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет,
Омский государственный технический университет
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Незнахина Екатерина Дмитриевна
аспирант, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: eneznakhina@yandex.ru

## REFERENCES

1. Bhattacharya B., Ćustić A., Rafiey A., Rafiey A., Sokol V. Approximation algorithms for generalized MST and TSP in grid clusters. Combinatorial Optimization and Applications, Proc. 9th Internat. Conf. (COCOA 2015), Cham, Springer Internat. Publ., 2015, Ser. Lecture Notes in Computer Science, vol. 9486, pp. 110–125. doi: 10.1007/978-3-319-26626-8_9 .
2. Baburin A., Della Croce F., GimadiE. K., Glazkov Y. V., Paschos V. T. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2. *Discrete Appl. Math.*, 2009, vol. 157, no. 9, pp. 1988–1992. doi: 10.1134/S1990478909010074 .
3. Arora S. Polynomial time approximation schemes for euclidean traveling salesman and other geometric problems. *J. ACM*, 1998, vol. 45, no. 5, pp. 753–782.
4. Balas E. New classes of efficiently solvable generalized traveling salesman problems. *Ann. Oper. Res.*, 1999, vol. 86, pp. 529–558.
5. Chentsov A., Khachay M., Khachay D. Linear time algorithm for precedence constrained asymmetric generalized traveling salesman problem. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, no. 12, pp. 651–655. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.767 .
6. Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. Algorithms and Complexity: New Directions and Recent Results, Proc. Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity, ed. J.F. Traub, Orlando: Acad. Press., 1976, pp. 441.
7. Cygan M., Fomin F.V., Kowalik L., Lokshtanov D., Marx D., Pilipczuk Marcin, Pilipczuk Michal, Saurabh S. *Parameterized algorithms*. Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, Springer, 2015, 613 p. doi: 10.1007/978-3-319-21275-3 .
8. Enomoto H., Oda Y., Ota K. Pyramidal tours with step-backs and the asymmetric traveling salesman problem. *Discrete Appl. Math.*, 1998, vol. 87, no. 1–3, pp. 57–65.
9. M. de Berg, K. Buchin, B. M. P. Jansen, G. Woeginger. Fine-grained complexity analysis of two classic TSP variants. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs), 2016, vol. 55, pp. 5:1–5:14, 43rd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2016), eds. I. Chatzigiannakis, M. Mitzenmacher, Y. Rabani, D. Sangiorgi (Dagstuhl, Germany, 2016). ISBN 978-3-95977-013-2 .

10. Fischetti M., Gonzalez J., Toth P. A branch-and-cut algorithm for the symmetric generalized traveling salesman problem // *Operations Research*, 1997, vol. 45, no.3, pp. 378–394.
11. Gimadi E. K., Rykov I. A. On the asymptotic optimality of a solution of the euclidean problem of covering a graph by $m$ nonadjacent cycles of maximum total weight. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 93, no. 1, pp. 117–120. doi:10.1134/S1064562416010233 .
12. Gutin G., Punnen A. P. *The traveling salesman problem and its variations.* Boston: Springer US, 2007, 830 p. doi: 10.1007/b101971 .
13. Khachay M., Neznakhina K. Approximability of the minimum-weight $k$-size cycle cover problem. *J. Glob. Optim.*, 2016, vol. 66, no. 1, pp. 65–82. doi:10.1007/s10898-015-0391-3 .
14. Khachay M., Neznakhina K. Towards a PTAS for the generalized TSP in grid clusters. *AIP Conf. Proc.*, 2016, vol. 1776, 050003. doi: 10.1063/1.4965324 .
15. Klyaus P. Generation of testproblems for the traveling salesman problem. *Preprint* Inst. Mat. Akad. Nauk. BSSR. Minsk, 1976, no. 16 (in Russian).
16. Oda Y. An asymmetric analogue of van der Veen conditions and the traveling salesman problem. *Discrete Appl. Math.*, 2001, vol. 109, no. 3, pp. 279–292. doi: 10.1016/S0166-218X(00)00273-0 .
17. Oda Y., Ota K. Algorithmic aspects of pyramidal tours with restricted jump-backs. *Interdiscip. Inform. Sci.*, 2001, vol. 7, no. 1, pp. 123–133. doi: 10.4036/iis.2001.123 .
18. Papadimitriou C. Euclidean TSP is $NP$-complete. *Theoret. Comput. Sci.*, 1977, vol. 4, no. 3, pp. 237–244. doi: 10.1016/0304-3975(77)90012-3 .
19. Sahni S., Gonzales T. $P$-complete approximation problems. *J. ACM*, 1976, vol. 23, no. 3, pp. 555–565. doi: 10.1145/321958.321975 .
20. R. E. Burkard, V. G. Deineko, R. van Dal, J. A. A. van der Veen, G. J. Woeginger. Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: A survey. *SIAM Rev. Sept.*, 1998, vol. 40, no. 3, pp. 496–546. doi: 10.1137/S0036144596297514 .

The paper was received by the Editorial Office on May 29, 2017.

*Mikhail Yur'evich Khachai*, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; Omsk State Technical University, Omsk, 644050 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru .

*Ekaterina Dmitrievna Neznakhina*, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: eneznakhina@yandex.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

УДК 519.65

# РАВНОМЕРНЫЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНОЙ СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ[1]

**В. Т. Шевалдин**

Для функции $\varphi \in C^1[-h,h]$, удовлетворяющей условиям $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ $(x \in [0;h])$, $\varphi(x)$ не убывает на $[0;h]$, для любой функции $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рассматриваются локальные сплайны вида

$$S(x) = S_\varphi(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x + \frac{3h}{2} - jh\Big) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

где $y_j = f(jh),\ m(h) > 0$ и

$$B_\varphi(x) = m(h)\begin{cases} \varphi(x), & x \in [0;h],\\ 2\varphi(h) - \varphi(x-h) - \varphi(2h-x), & x \in [h;2h],\\ \varphi(3h-x), & x \in [2h;3h],\\ 0, & x \notin [0;3h]. \end{cases}$$

При определенном выборе функции $\varphi$ такие сплайны становятся соответственно параболическими, экспоненциальными, тригонометрическими и т. д. В работе изучаются равномерные константы Лебега $L_\varphi = \|S\|_C^C$ (нормы линейных операторов из $C$ в $C$) таких сплайнов как функций, зависящих от $\varphi$ и $h$. В некоторых случаях эти величины вычислены точно на оси $\mathbb{R}$ и на отрезке числовой прямой (при определенном выборе из сплайна $S_\varphi(f,x)$ граничных условий).

Ключевые слова: константы Лебега, локальные сплайны, трехточечная схема.

**V. T. Shevaldin. Uniform Lebesgue constants of local spline approximation.**

Let a function $\varphi \in C^1[-h,h]$ be such that $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ for $x \in [0;h]$), and $\varphi(x)$ is nondecreasing on $[0;h]$. For any function $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, we consider local splines of the form

$$S(x) = S_\varphi(f,x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x + \frac{3h}{2} - jh\Big) \quad (x \in \mathbb{R}),$$

where $y_j = f(jh)$, $m(h) > 0$, and

$$B_\varphi(x) = m(h)\begin{cases} \varphi(x), & x \in [0;h],\\ 2\varphi(h) - \varphi(x-h) - \varphi(2h-x), & x \in [h;2h],\\ \varphi(3h-x), & x \in [2h;3h],\\ 0, & x \notin [0;3h]. \end{cases}$$

These splines become parabolic, exponential, trigonometric, etc., under the corresponding choice of the function $\varphi$. We study the uniform Lebesgue constants $L_\varphi = \|S\|_C^C$ (the norms of linear operators from $C$ to $C$) of these splines as functions depending on $\varphi$ and $h$. In some cases, the constants are calculated exactly on the axis $\mathbb{R}$ and on a closed interval of the real line (under a certain choice of boundary conditions from the spline $S_\varphi(f,x)$).

Keywords: Lebesgue constants, local splines, three-point system.

**MSC:** 41A15

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-292-299

[1]Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

## Введение

В современной вычислительной математике регулярно появляются различные обобщения полиномиальных сплайн-функций. Помимо хорошо известных $\mathcal{L}$-сплайнов (см., например, [1]) отметим истокообразно представимые сплайны [2], функции Рвачева [3], сплайны Леонтьева [4], функции Квасова [5], $\varphi$-сплайны Демьяновича [6] и т. д. Автор [7] предложил еще одно обобщение известной конструкции параболического базисного сплайна с равноотстоящими узлами, построенного на основе только одной функции $\varphi \in C^1[-h,h]$ $(h>0)$, а именно: $B$-сплайн для фиксированной функции $\varphi \in C^1[-h,h]$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0, \quad \varphi(-x)=\varphi(x) \quad (x\in[0;h]),$$

на оси $\mathbb{R}$ определяется формулой

$$B_\varphi(x)=m(h)\begin{cases} \varphi(x), & x\in[0;h],\\ 2\varphi(h)-\varphi(x-h)-\varphi(2h-x), & x\in[h;2h],\\ \varphi(3h-x), & x\in[2h;3h],\\ 0, & x\notin[0;3h]. \end{cases} \tag{0.1}$$

Здесь $m=m(h)>0$ — нормирующий множитель (о его выборе пойдет речь в дальнейшем изложении). В классическом случае нормализованный (в $C$) параболический $B$-сплайн с равномерными узлами $0,h,2h$ и $3h$ (см., например, [8]) получается из этого определения, если положить

$$\varphi(x)=x^2, \quad m(h)=\frac{1}{2h^2}.$$

Из (0.1) и свойств функции $\varphi$ вытекают очевидные свойства сплайна $B_\varphi(x)$:

$$\operatorname{supp} B_\varphi(x)=[0;3h], \quad B_\varphi\in C^1(\mathbb{R}), \quad B_\varphi(3h-x)=B_\varphi(x) \quad (x\in[0;3h]).$$

Если дополнительно потребовать, чтобы было выполнено еще одно условие: функция $\varphi(x)$ не убывает на отрезке $[0;h]$, то график функции $B_\varphi(x)$ будет представлять собой симметричную относительно прямой $x=3h/2$ "шапочку" типа параболического $B$-сплайна с равномерными узлами.

Для произвольной функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ положим $y_j=f(jh)$ $(j\in\mathbb{Z})$. Для функции $\varphi$ описанного выше типа в [7] изучались локальные сплайны вида

$$S(x)=S_\varphi(x)=S_\varphi(f,x)=\sum_{j\in\mathbb{Z}} y_j B_\varphi\Big(x+\frac{3h}{2}-jh\Big) \quad (x\in\mathbb{R}). \tag{0.2}$$

В частности, было доказано: такие сплайны удовлетворяют локально свойству сохранения знака и свойству сохранения монотонности исходных данных $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в том смысле, что если

$$y_{l-1}\le y_l\le y_{l+1} \quad (l\in\mathbb{Z}),$$

то сплайн $S(x)$ не убывает на отрезке $[(l-1/2)h;(l+1/2)h]$ $(l\in\mathbb{Z})$. Известно также (см., например, [7], имеющиеся там ссылки и далее замечание 1 к разд. 1), что для некоторых функций $\varphi$, удовлетворяющих отмеченным выше свойствам, сплайны вида (0.2) (они, по терминологии [7;8], реализуют простейшую схему локальной сплайн-аппроксимации) обладают хорошими (в некоторых случаях наилучшими) аппроксимативными свойствами на соответствующих классах функций типа соболевских, определяемых функцией $\varphi$. Аналогичные сплайны в [7] были построены и на произвольном отрезке числовой прямой с краевыми условиями второго рода.

Приведем некоторые примеры функций $\varphi$, приводящие соответственно к параболическим, экспоненциальным, тригонометрическим, эллиптическим и гиперболическим сплайнам на оси $\mathbb{R}$:

1) $\varphi(x) = x^2$;
2) $\varphi(x) = \operatorname{ch}\beta x - 1$ $(\beta > 0)$;
3) $\varphi(x) = 1 - \cos\alpha x$ $(\alpha > 0)$;
4) $\varphi(x) = b - (b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ $(a, b > 0)$;
5) $\varphi(x) = -b + (b/a)\sqrt{a^2 + x^2}$ $(a, b > 0)$.

Сплайны $S_\varphi(x) = S_\varphi(f, x)$ задают линейный (неинтерполяционный) метод $S\colon f \to S_\varphi$ аппроксимации функций $f$, определенных на оси или на отрезке числовой прямой. Представляет интерес изучение констант Лебега (норм операторов из $C$ в $C$) таких сплайнов как функций, зависящих от $\varphi$ и $h$. Как известно, величина

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|_C^C = \sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R})} \le 1} \|S_\varphi(f, \cdot)\|_{C(\mathbb{R})}$$

называется *константой Лебега линейного оператора* $S$. Она характеризует устойчивость метода $S$ к возмущению исходных данных $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.

В настоящей работе для некоторых функций $\varphi$ данная величина вычисляется точно. При этом изучается вопрос о выборе нормирующего множителя $m(h)$ в определении (0.1).

## 1. Константы Лебега сплайнов на оси $\mathbb{R}$

Пусть, как обычно, $C(\mathbb{R})$ и $C[a,b]$ — классы непрерывных функций соответственно на оси $\mathbb{R}$ и на отрезке со стандартным определением нормы, $AC$ — класс локально абсолютно непрерывных функций, $L_\infty(\mathbb{R})$ и $L_\infty[a,b]$ — классы существенно ограниченных функций на оси $\mathbb{R}$ и на отрезке с нормами

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, \quad \|f\|_{L_\infty[a,b]} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Пусть функция $\varphi \in C^1[-h;h]$ $(h > 0)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} &1)\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0,\\ &2)\ \varphi(-x) = \varphi(x) \quad (x \in [0;h]),\\ &3)\ \varphi(x) \ \text{ не убывает на отрезке } \ [0;h]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Для произвольной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим $y_j = f(jh)$ $(j \in \mathbb{Z})$ и рассмотрим сплайн $S_\varphi(x) = S_\varphi(f, x)$, определенный при $x \in \mathbb{R}$ равенствами (0.1) и (0.2).

**Теорема 1.** *Для функции $\varphi$, удовлетворяющей условиям* (1.1)*, и сплайна $S_\varphi(x)$, определенного равенствами* (0.1) *и* (0.2)*, имеет место равенство*

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|_C^C = 2\varphi(h)m(h).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $x \in [(l - 1/2)h; (l + 1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ положим $t = x - lh \in [-h/2; h/2]$. При этом сумма (0.2) содержит конечное число (в точности, три) слагаемых и записывается в виде

$$\widetilde{S}(t) = S_\varphi(x) = m(h)\Big[y_{l+1}\varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big) + y_l\Big(2\varphi(h) - \varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big)\Big) + y_{l-1}\varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big)\Big]. \tag{1.2}$$

Таким образом, простейшая схема локальной сплайн-аппроксимации (0.2) приводит к трехточечной схеме определения сплайна (сплайн $S_\varphi$ на каждом отрезке $[(l-1/2)h; (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$ числовой оси зависит только от трех значений $y_{l-1}$, $y_l$ и $y_{l+1}$ аппроксимируемой функции $f$).

Исследуем функцию

$$g(t) = 2\varphi(h) - \varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big)$$

на отрезке $[-h/2; h/2]$ с учетом свойств (1.1) функции $\varphi$. Имеем

$$g(-t) = g(t) \quad \Big(t \in \Big[0; \frac{h}{2}\Big]\Big), \quad g\Big(-\frac{h}{2}\Big) = g\Big(\frac{h}{2}\Big) = \varphi(h) \geq 0,$$

$$g(0) = 2\Big(\varphi(h) - \varphi\Big(\frac{h}{2}\Big)\Big) \geq 0, \quad g'(t) = -\varphi'\Big(t + \frac{h}{2}\Big) - \varphi'\Big(t - \frac{h}{2}\Big) \leq 0 \quad \Big(t \in \Big[0; \frac{h}{2}\Big]\Big).$$

Поэтому

$$g(t) \geq 0 \quad \Big(t \in \Big[-\frac{h}{2}; \frac{h}{2}\Big]\Big). \tag{1.3}$$

Из (1.2) и (1.3) для любой функции $f\colon \|f\|_{C(\mathbb{R})} \leq 1$ выводим оценку сверху для модуля сплайна $S_\varphi(x)$:

$$|\widetilde{S}(t)| = |S_\varphi(x)| \leq m(h) \max_l |y_l| \Big[\varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big) + 2\varphi(h) + \varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big)$$

$$- \varphi\Big(t - \frac{h}{2}\Big) - \varphi\Big(t + \frac{h}{2}\Big)\Big] = 2m(h)\big(\max_l |y_l|\big)\varphi(h) \leq 2m(h)\varphi(h). \tag{1.4}$$

Полученная оценка сверху для $|S_\varphi(x)|$ является точной, поскольку знак равенства достигается для функции $f(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$. Из (1.2) и (1.4) следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим частные случаи теоремы 1.

1. Пусть $\varphi(x) = x^2$ и $m(h) = 1/(2h^2)$. Локальные параболические сплайны, возникающие в этом случае в формуле (0.2), сохраняют линейные функции [9] и обладают помимо этого следующими свойствами:

$$E(W^2_\infty)_C = \sup_{f \in W^2_\infty} \|f - S_\varphi\|_{C(\mathbb{R})} = \frac{h^2}{8}, \quad L_\varphi = \|S_\varphi\|^C_C = 1. \tag{1.5}$$

Здесь $W^2_\infty = \{f :\ f' \in AC,\ \|f''\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1\}$ — соболевский класс дважды дифференцируемых функций. Первое из равенств (1.5) доказано Ю. Н. Субботиным в [9] (см. также [10]), а второе — автором (оно является частным случаем теоремы 1) в монографии [7].

2. Пусть $\varphi(x) = \operatorname{ch}\beta x - 1$ $(\beta > 0)$. Если нормирующий множитель выбрать в виде

$$m(h) = \Big(4 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta h}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta h}{2}\Big)^{-1}, \tag{1.6}$$

то простейшая схема локальной экспоненциальной сплайн-аппроксимации (0.2) будет сохранять на всей оси $\mathbb{R}$ функции $e^{\beta x}$ и $e^{-\beta x}$ (см., например, [11]). Из [10] также следует, что для класса функций

$$W^{\mathcal{L}_2}_\infty = \{f\colon f' \in AC,\ \|\mathcal{L}_2(D)f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \leq 1\}$$

(здесь $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D) = D^2 - \beta^2$ — линейный дифференциальный оператор второго порядка) при таком выборе нормирующего множителя имеет место равенство

$$E(W^{\mathcal{L}_2}_\infty)_C = \sup_{f \in W^{\mathcal{L}_2}_\infty} \|f - S_\varphi\|_{C(\mathbb{R})} = \frac{2 \operatorname{sh}^2 \dfrac{\beta h}{4}}{\beta^2 \operatorname{ch} \dfrac{\beta h}{2}}. \tag{1.7}$$

При этом из теоремы 1 в качестве частного случая выводим

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|^C_C = \Big(\operatorname{ch} \frac{\beta h}{2}\Big)^{-1}.$$

3. Пусть $\varphi(x) = 1-\cos\alpha x$ ($\alpha > 0$). Этот случай приводит к локальным тригонометрическим сплайнам и при выборе нормирующего множителя в виде

$$m(h) = \Big(4\sin^2\frac{\alpha h}{2}\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)^{-1} \quad \Big(0 < h < \frac{\pi}{\alpha}\Big) \tag{1.8}$$

ведет к тому, что сплайны вида (0.2) сохраняют на всей оси $\mathbb{R}$ функции $\sin\alpha x$ и $\cos\alpha x$ (см., например, [12]). Кроме того, из [11] следует, что для линейного дифференциального оператора $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D) = D^2 + \alpha^2$ и класса функций $W_\infty^{\mathcal{L}_2}$ имеет место равенство

$$E(W_\infty^{\mathcal{L}_2})_C = \sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_2}} \|f - S_\varphi\|_{C(\mathbb{R})} = \frac{2\sin^2\dfrac{\alpha h}{4}}{\alpha^2\cos\dfrac{\alpha h}{2}} \quad \Big(0 < h < \frac{\pi}{\alpha}\Big). \tag{1.9}$$

При таком выборе функций $\varphi(x)$ и $m(h)$ из теоремы 1 получаем, что

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|_C^C = \Big(\cos\frac{\alpha h}{2}\Big)^{-1} \quad \Big(0 < h < \frac{\pi}{\alpha}\Big).$$

В работах [9–11] отмечено, что для 1-периодических функций $f$ при $h = 1/(2n)$ величины $E(W_\infty^2)_C,\ E(W_\infty^{D^2-\beta^2})_C,\ E(W_\infty^{D^2+\alpha^2})_C$ (см. (1.5), (1.7), (1.9)) совпадают с поперечниками по Колмогорову порядка $2n$ соответствующих классов функций $W_\infty^2,\ W_\infty^{D^2-\beta^2}$ и $W_\infty^{D^2+\alpha^2}$. Поэтому можно сделать вывод, что выбор нормирующего множителя во всех этих случаях с точки зрения аппроксимации оптимален.

4. В случаях $\varphi(x) = b-(b/a)\sqrt{a^2 - x^2}$ (эллиптические сплайны) и $\varphi(x) = -b+(b/a)\sqrt{a^2 + x^2}$ (гиперболические сплайны) выбор нормирующего множителя к настоящему времени не ясен. В первом случае из теоремы 1 имеем

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|_C^C = 2\Big(b - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - h^2}\Big)m(h) \quad (0 < h < a,\ b > 0),$$

а во втором —

$$L_\varphi = \|S_\varphi\|_C^C = 2\Big(-b + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + h^2}\Big)m(h) \quad (a, b > 0).$$

## 2. Константы Лебега локальных сплайнов на отрезке

Трехточечная схема (0.2) может быть применена для аппроксимации функций, заданных своими значениями не на всей числовой прямой $\mathbb{R}$, а только на отрезке. Не ограничивая общности, рассмотрим отрезок $[0; A]$, $A = nh$. Для функции $f\colon [0; A] \to \mathbb{R}$ положим $y_j = f(jh)$ $(j = \overline{0, n})$. На отрезках $[h/2; 3h/2],\ [3h/2; 5h/2], \ldots, [(n-3/2)h; (n-1/2)h]$ сплайн $S_\varphi(x) = S_\varphi(f, x)$ строим по формулам (0.1), (0.2). При этом нетрудно проверить, что

$$S_\varphi(jh) \neq y_j \quad (j = \overline{1, n-1}),$$

т. е. локальный сплайн $S_\varphi(x)$ не является интерполяционным. Сплайн $S_\varphi(x)$ на крайних отрезках $[0; h/2]$ и $[(n-1/2)h; A]$ построен в [7, гл. 5] с учетом следующих равенств:

$$S_\varphi(0) = y_0, \quad S_\varphi\Big(\frac{h}{2} - 0\Big) = S_\varphi\Big(\frac{h}{2} + 0\Big), \quad S'_\varphi\Big(\frac{h}{2} - 0\Big) = S'_\varphi\Big(\frac{h}{2} + 0\Big),$$

$$S_\varphi(A) = y_n, \quad S_\varphi\Big(\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h-0\Big) = S_\varphi\Big(\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h+0\Big), \quad S'_\varphi\Big(\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h-0\Big) = S'_\varphi\Big(\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h+0\Big). \tag{2.1}$$

На отрезке $[0;h/2]$ он может быть записан в виде

$$S_\varphi(x)=2m(h)\varphi(h)y_0+\Big[\frac{y_0(1-2m(h)\varphi(h))}{\varphi(h/2)}-m(h)(y_1-y_0)\Big]\varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big)$$

$$+m(h)(y_1-y_0)\varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big)=y_0\Big[2m(h)\varphi(h)+\Big(\frac{1-2m(h)\varphi(h)}{\varphi(h/2)}+m(h)\Big)\varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big)-m(h)\varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big)\Big]$$

$$+y_1m(h)\Big(\varphi\Big(x+\frac{h}{2}\Big)-\varphi\Big(x-\frac{h}{2}\Big)\Big)\Big], \tag{2.2}$$

а на отрезке $[(n-1/2)h;A]$ — в виде

$$S_\varphi(x)=2m(h)\varphi(h)y_n+\Big[\frac{y_n(1-2m(h)\varphi(h))}{\varphi(h/2)}-m(h)(y_{n-1}-y_n)\Big]\varphi\Big(nh-x-\frac{h}{2}\Big)$$

$$+m(h)(y_{n-1}-y_n)\varphi\Big(nh-x+\frac{h}{2}\Big)=y_n\Big[2m(h)\varphi(h)+\Big(\frac{1-2m(h)\varphi(h)}{\varphi(h/2)}+m(h)\Big)$$

$$\times\varphi\Big(nh-x-\frac{h}{2}\Big)-m(h)\varphi\Big(nh-x+\frac{h}{2}\Big)\Big]+y_{n-1}m(h)\Big(\varphi\Big(nh-x+\frac{h}{2}\Big)-\varphi\Big(nh-x-\frac{h}{2}\Big)\Big]. \tag{2.3}$$

Из равенств (2.2) и (2.3) легко следуют равенства (2.1). Кроме того, нетрудно заметить, что $S'_\varphi\in C[0;A]$ и на крайних отрезках $[0;h/2]$ и $[(n-1/2)h;A]$ сплайн $S_\varphi(x)$ зависит только от двух значений функции $f$ (в первом случае от $y_0$ и $y_1$, а во втором — от $y_{n-1}$ и $y_n$). При этом в точках $x=0$ и $x=A$ сплайн $S_\varphi(x)$ интерполирует функцию $f$, поскольку $S_\varphi(0)=y_0=f(0)$ и $S_\varphi(A)=y_n=f(A)$.

**Теорема 2.** *Пусть функция $\varphi$ удовлетворяет условиям* (1.1) *и имеет место равенство*

$$2m(h)\varphi(h)=1. \tag{2.4}$$

*Для сплайна $S_\varphi(x)$, определенного формулами* (0.1) *и* (0.2) *при $x\in[h/2;(n-1/2)h]$ и формулами* (2.2) *и* (2.3) *на отрезках $[0;h/2]$ и $[(n-1/2)h;A]$ соответственно, имеет место равенство*

$$L_\varphi=\sup_{\|f\|_{C[0;A]}\le 1}\|S_\varphi(f,\cdot)\|_{C[0;A]}=1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f:\ [0;A]\to\mathbb{R}$ такова, что $\|f\|_{C[0;A]}\le 1$. Неравенство

$$|S_\varphi(x)|\le 2\varphi(h)m(h)\max_{l=\overline{1,n-1}}|y_l|\le 1\quad\Big(x\in\Big[\frac{h}{2};\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h\Big]\Big) \tag{2.5}$$

следует из теоремы 1, равенства (2.4) и неравенств $|y_l|\le 1$ $(l=\overline{1,n-1})$. При $x\in[0;h/2]$ равенство (2.2) можно переписать в виде

$$S_\varphi(x)=A_0y_0+A_1y_1, \tag{2.6}$$

где

$$A_0=\frac{2\varphi(h)+\varphi(x-h/2)-\varphi(x+h/2)}{2\varphi(h)},\quad A_1=\frac{\varphi(x+h/2)-\varphi(x-h/2)}{2\varphi(h)}.$$

В силу свойств функции $\varphi(x)$ при $x\in[0;h/2]$ имеем $A_0\ge 0,\ A_1\ge 0$. Поэтому из (2.6) следует, что

$$|S_\varphi(x)|\le\max\{|y_0|,|y_1|\}\le 1\quad\Big(x\in\Big[0;\frac{h}{2}\Big]\Big). \tag{2.7}$$

Аналогично, используя равенство (2.3), получаем неравенство

$$|S_\varphi(x)|\le\max\{|y_{n-1}|,|y_n|\}\le 1\quad\Big(x\in\Big[\Big(n-\frac{1}{2}\Big)h;A\Big]\Big). \tag{2.8}$$

Неравенства (2.5), (2.7) и (2.8) являются точными в том смысле, что знак равенства в них реализует функция $f(x) = 1$ $(x \in [0; A])$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е 2. Прокомментируем выбор нормирующего множителя $m(h)$ в теореме 2 для частных случаев функции $\varphi(x)$, рассмотренных в замечании 1.

1. Для параболических сплайнов $(\varphi(x) = x^2)$ имеем

$$m(h) = \frac{1}{2\varphi(h)} = \frac{1}{2h^2}$$

как в замечании 1, так и в теореме 2. Этот выбор обеспечивает наилучшие аппроксимативные свойства локальных параболических сплайнов $S_\varphi(f, x)$ на классе функций $W_\infty^2$ (см. замечание 1) и константу Лебега $L_\varphi$, равную 1.

2, 3. Для экспоненциальных $(\varphi(x) = \operatorname{ch}\beta x - 1,\ \beta > 0)$ и тригонометрических $(\varphi(x) = 1 - \cos\alpha x,\ \alpha > 0)$ сплайнов выбор $m(h)$ в виде (2.4) отличается от (1.6) и (1.8), и, следовательно, при этом в силу замечания 1 сплайны $S_\varphi(f, x)$ не обладают наилучшими аппроксимативными свойствами на соответствующих классах функций $W_\infty^{D^2-\beta^2}$ и $W_\infty^{D^2+\beta^2}$.

4, 5. Для эллиптических $(\varphi(x) = b - (b/a)\sqrt{a^2 - x^2})$ и гиперболических $(\varphi(x) = -b + (b/a) \times \sqrt{a^2 + x^2})$ сплайнов выбор нормирующего множителя в форме (2.4) к настоящему времени представляется наиболее естественным, поскольку он приводит к константе Лебега $L_\varphi$, равной 1, в то время как пока ничего неизвестно об аппроксимативных свойствах рассматриваемых сплайнов на каких-либо классах функций, зависящих от $\varphi(x)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.** Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972. 318 с.
2. **Шевалдин В.Т.** Оценки снизу поперечников классов истокообразно представимых функций // Тр. МИАН СССР. 1989. Т. 189. С. 185–201.
3. **Рвачев В.А.** Финитные решения функционально-дифференцируемых уравнений и их приложения // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, № 1. С. 77–103.
4. **Леонтьев В.Л.** Ортогональная финитные функции и численные методы. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2003. 178 с.
5. **Квасов Б.И.** Методы изогеометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.
6. **Демьянович Ю.К.** Вейвлет-базис $B_\varphi$-сплайнов для неравномерной сетки // Мат. моделирование. 2006. Т. 18, № 10. С. 123–126.
7. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
8. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
9. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
10. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 77–88.
11. **Kostousov K.V., Shevaldin V.T.** Approximation by local exponential splines // Proc. Steklov Inst. Math. 2004. Suppl. 1. P. 147–157.
12. **Костоусов К.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 3. С. 354–363.

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила 2.06.2017

**REFERENCES**


1. Ahlberg J., Nilson E.N., Walsh J. *The theory of Splines and Their Applications.* New York, London: Academic Press, 1967, 284 p. ISBN: 0120447509 . Translated under the title *Teoriya splainov i ee prilozheniya*, Moscow, Mir Publ., 1972, 318 p.
2. Shevaldin V.T. Lower bounds on width of classes of sourcewise representable functions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1990, vol. 189, pp. 217–234.
3. Rvachev V.A. Compactly supported solutions of functional-differential equations and their applications. *Russian Math. Surveys*, 1990, vol. 45, no. 1, pp. 87–120. doi: 10.1070/RM1990v045n01ABEH002324 .
4. Leont'ev V.L. *Ortogonal'naya finitnye funkzii i chislennye metody* [Orthogonal compactly supported functions and numerical methods]. Ul'yanovsk: Ul'yanovskij Gosudarstvennyj Universitet Publ., 2003, 177 p. ISBN: 5-88866-144-9/hbk .
5. Kvasov B.I. *Metody isogeometricheskoi approximacii* [Methods for isogeometric approximation]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 360 p. ISBN: 5-9221-0733-X .
6. Dem'yanovich Y.K. Wavelets basic of $B_\varphi$-splines for erregular net. *Mat. Mod.*, 2006, vol. 18, no. 10, pp. 123–126 (in Russian).
7. Shevaldin V.T. *Approksimatsiya lokal'nymi splainami* [Local approximation by splines]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2014, 198 p.
8. Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splain-funktsii* [Methods of spline functions]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 352 p.
9. Subbotin Yu.N. Inheritance of monotonicity and convexity in local approximations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1993, vol. 33, no. 7, pp. 879–884.
10. Shevaldin V.T. Approximation by local parabolic splines with arbitrary knots. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2005, vol. 8, no. 1, pp. 77–88.
11. Kostousov K.V., Shevaldin V.T. Approximation by local exponential splines. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2004, Suppl. 1, pp. 147–157.
12. Kostousov K.V., Shevaldin V.T. Approximation by local trigonometric splines. *Math. Notes*, 2005, vol. 77, no. 3, pp. 326–334. doi: 10.1007/s11006-005-0033-z .


The paper was received by the Editorial Office on June 2, 2017.

*Valerii Trifonovich Shevaldin*, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of the Rassian Academy of Sciences, Yeraterinburg, 620990 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 3 2017

# EXPLICIT EXPRESSION FOR HYPERBOLIC LIMIT CYCLES OF A CLASS OF POLYNOMIAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

**Rachid Boukoucha**

We consider systems of differential equations in the plane,

$$x' = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad y' = \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

where the dependent variables $x$ and $y$ and the independent one (the time) $t$ are real, and $P(x, y)$, $Q(x, y)$ are polynomials in the variables $x$ and $y$ with real coefficients. These differential systems are mathematical models and arise in many fields of application like biology, economics, physics and engineering, etc. The existence of limit cycles is one of the more difficult objects to study in the qualitative theory of differential systems in the plane. There is a huge literature dedicated to this topic. It is known that for differential systems defined on the plane the existence of a first integral determines their phase portrait. Thus for polynomial differential systems a natural question arises: given a polynomial differential system in the plane, how to recognize if it has a first integral? There is a strong relation between the invariant algebraic curves and the theory of integrability. In this paper we introduce explicit expressions for invariant algebraic curves and for the first integral. Finally, we determine sufficient conditions for a class of polynomial differential systems to possess an explicitly given hyperbolic limit cycle. Concrete examples exhibiting the applicability of our results are introduced. The elementary method used in this paper seems to be fruitful to investigate more general planar dynamical systems in order to obtain explicitly some or all of their limit cycles at least in the case of hyperbolic cycles. In the spirit of the inverse approach to dynamical systems, we look for them as the ovals of suitably chosen invariant algebraic curves.

Keywords: planar polynomial differential system, invariant algebraic curve, first integral, limit cycle.

Р. Букуша. Явное выражение для гиперболических предельных циклов одного класса полиномиальных дифференциальных систем.

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений на плоскости

$$x' = \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad y' = \frac{dy}{dt} = Q(x, y),$$

где зависимые переменные $x$ и $y$, а также независимая переменная (время) $t$ вещественны, а $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — вещественные многочлены от переменных $x$ и $y$. Такие математические модели возникают во многих прикладных областях в биологии, экономики, технике и т.д. Существование предельных циклов представляет собой один из наиболее трудных для изучения вопросов качественной теории плоских дифференциальных систем, и этой теме посвящено огромное количество работ. Известно, что существование первого интеграла плоской дифференциальной системы определяет ее фазовый портрет. Таким образом, для полиномиальных дифференциальных систем возникает естественный вопрос: как определить, имеет ли данная система первый интеграл? Инвариантные алгебраические кривые тесно связаны с теорией интегрируемости. В данной статье введены явные выражения для инвариантных алгебраических кривых и для первого интеграла, а также найдены достаточные условия, при которых класс полиномиальных дифференциальных систем имеет явно заданные гиперболические предельные циклы. Приведены конкретные примеры, демонстрирующие применимость результатов. Представляется, что элементарный метод, использованный в данной статье, может быть применен для исследования более общих плоских динамических систем для получения в явном виде некоторых или всех предельных циклов, по крайней мере в случае гиперболических циклов. В духе обратного подхода к динамическим системам мы ищем их в виде овалов подходящих инвариантных алгебраических кривых.

Ключевые слова: плоская полиномиальная дифференциальная система, инвариантная алгебраическая кривая, первый интеграл, предельный цикл.

**MSC**: 34C05, 34C07, 34C25

**DOI:** 10.21538/0134-4889-2017-23-3-300-307

## Introduction

By definition, an autonomous planar polynomial system of differential equations is a system of the form

$$\begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} = P(x, y), \\ y' = \dfrac{dy}{dt} = Q(x, y), \end{cases} \tag{0.1}$$

where $P$ and $Q$ are real polynomials in the variables $x$ and $y$, we denote by $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$ and we say that $m$ is the degree of system (0.1). A limit cycle of system (0.1) is an isolated periodic solution in the set of all periodic solution of system (0.1) . In the qualitative theory of autonomous differential systems on the plane see [8;12], the study of limit cycles is very attractive because of their relation with the applications to other areas of sciences. This is the most important topics is related to the second part of the unsolved Hilbert 16th problem see [11]. There is a huge literature about limit cycles, most of them deal essentially with their detection, their number and their stability and rare are papers concerned by giving them explicitly see [1–5; 10]. Another main open problems in the qualitative theory of real planar differential systems the determination of its first integrals, the importance for searching first integrals of a given system was already noted by Poincaré in his discussion on a method to obtain polynomial or rational first integrals see [13]. One of the classical tools in the classification of all trajectories of a dynamical system is to find first integrals, for or more details about first integral see for instance [6; 9] . It is well known that for differential systems defined on the plane $\mathbb{R}^2$ the existence of a first integral determines their phase portrait see [7].

## 1. Some useful notions

Let us recall some useful notions.

System (0.1) is integrable on an open set $\Omega$ of $\mathbb{R}^2$ if there exists a non constant $C^1$ function $H : \Omega \to \mathbb{R}$, called a first integral of the system on $\Omega$ , which is constant on the trajectories of the system (0.1) contained in $\Omega$, i.e. if

$$\frac{dH(x,y)}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x} P(x,y) + \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} Q(x,y) \equiv 0 \text{ in the points of } \Omega.$$

Moreover, $H = h$ is the general solution of this equation, where $h$ is an arbitrary constant.

Since for such vector fields the notion of integrability is based on the existence of a first integral, the following question arises: Given the polynomial differential systems (0.1), how to recognize if this polynomial differential systems has a first Integral? and how to compute it when it exists?

A curve $U(x, y) = 0$, where $U(x, y)$ is a polynomial with real coefficients, is an invariant algebraic curve of system (0.1) if and only if there exists a polynomial $K = K(x, y)$ of degree at most $m - 1$ satisfying

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} P(x,y) + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} Q(x,y) = K(x,y) U(x,y). \tag{1.1}$$

The polynomial $K(x, y)$ is called the cofactor of $U(x, y) = 0$, if the cofactor is identically zero, then $U(x, y)$ is a polynomial first integral for system (0.1) . The corresponding cofactor of $U(x, y)$ is always polynomial whether $U(x, y)$ is algebraic or non algebraic. If $U$ is real, the curve $U(x, y) = 0$ is an invariant under the flow of differential system (0.1) and the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ U(x, y) = 0\}$ is formed by orbits of system (0.1). There are strong relationships between the integrability of system (0.1) and its number of invariant algebraic solutions.

## 2. Main result

As a main result, we shall prove the following theorem.

**Theorem.** *Consider a multi-parameter planar polynomial differential system of the form*

$$\begin{cases} x' &= P_n(x,y), \\ y' &= Q_n(x,y), \end{cases} \tag{2.1}$$

*where*

$$P_n(x,y) \quad = \quad x + (y-x)\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^n$$

*and*

$$Q_n(x,y) \quad = \quad y - (y+x)\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^n,$$

*in which $a$, $b$ are real constants and $n \in \mathbb{N}$, then the following statements hold.*

1) *The curve*

$$U(x,y) \quad = \quad -\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^n$$

*is an invariant algebraic curve of system* (2.1) *with cofactor*

$$K(x,y) = 2n + 4 + \left(-3x^2 + 4xy - 5y^2\right)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^n + n\Big((2ax + by)(y-x)\left(x^2 - xy + y^2\right) - (bx + 2ay)\left(x^3 + y^3\right)\Big)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^{n-1}.$$

2) *If* $2a + b\sin 2\theta \neq 0$ *for all* $\theta \in \mathbb{R}$, *then system* (2.1) *has the first integral*

$$H(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^{n+1} \exp\left(-(2n+2)\arctan\frac{y}{x}\right) - \int_0^{\arctan\frac{y}{x}} F(w)dw,$$

*where*

$$F(w) = \frac{(4n+4)\exp(-2nw - 2w)}{(-2 + \sin 2w)\left(a + 1/2\, b\sin 2w\right)^n}. \tag{2.2}$$

3) *If* $2a + b\sin 2\theta \neq 0$ *for all* $\theta \in \mathbb{R}$ *and* $2a + |b| > 0$, *then system* (2.1) *has limit cycle explicitly given in polar coordinates* $(r,\theta)$, *by*

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta)\left(r_*^{2n+2} + \int_0^{\theta} F(w)dw\right)^{1/(2n+2)},$$

*where $r_*$ a positive constant, such that*

$$r_* = \left(\frac{\exp(4n\pi + 4\pi)}{1 - \exp(4n\pi + 4\pi)} \int_0^{2\pi} F(w)dw\right)^{1/(2n+2)}.$$

4) *If* $a = b = 0$, *then system* (2.1) *has the first integral* $H(x,y) = \dfrac{y}{x}$.
*Moreover, the system* (2.1) *has no limit cycle.*

**Proof.**

**Proof of statement** (1).

An computation shows that

$$U(x,y) \quad = \quad -\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^n = 0,$$

satisfy the linear partial differential equation (1.1)

$$K(x,y) = 2n + 4 + \left(-3x^2 + 4xy - 5y^2\right)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^n$$

$$+ n\left((2ax + by)(y - x)\left(x^2 - xy + y^2\right) - (bx + 2ay)\left(x^3 + y^3\right)\right)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^{n-1},$$

then the curve $U(x,y) = 0$ is an invariant algebraic curve of system (2.1) with cofactor $K(x,y)$.

This completes the proof of statement (1) of Theorem.

In order to prove our results (2)–(4) we write the polynomial differential system (2.1) in polar coordinates $(r,\theta)$, defined by $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$, then system becomes

$$\begin{cases} r' = \dfrac{dr}{dt} = r + \left(-1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)\left(a + \dfrac{1}{2}b\sin 2\theta\right)^n r^{2n+3}, \\ \theta' = \dfrac{d\theta}{dt} = \left(-1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)\left(a + \dfrac{1}{2}b\sin 2\theta\right)^n r^{2n+2}. \end{cases} \tag{2.3}$$

**Proof of statement** (2).

If $2a + b\sin 2\theta \neq 0$ for all $\theta \in \mathbb{R}$, we take as new independent variable the variable $\theta$, then the differential system (2.3) becomes

$$\frac{dr}{d\theta} = r + \left(\frac{2}{(-2 + \sin 2\theta)(a + 1/2\, b\sin 2\theta)^n} r\right)^{-2n-1}. \tag{2.4}$$

The equation (2.4) is a Bernoulli equation, by introducing the standard change of variables $\rho = r^{2n+2}$ we obtain the linear equation

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (2n+2)\rho + \frac{4n+4}{(-2 + \sin 2\theta)(a + 1/2\, b\sin 2\theta)^n}. \tag{2.5}$$

The general solution of linear equation (2.5) is

$$\rho(\theta) = \exp(2n\theta + 2\theta)\left(\lambda + \int_0^\theta F(w)dw\right),$$

where $\lambda \in (0,\infty)$ and $F(w)$ is defined in (2.2).

Then the general solution of Bernoulli equation (2.4) is

$$r(\theta) = \exp(\theta)\left(\lambda + \int_0^\theta F(w)dw\right)^{1/(2n+2)}, \tag{2.6}$$

where $\lambda \in (0,\infty)$, which has the first integral

$$H(x,y) = \left(x^2 + y^2\right)^{n+1}\exp\left(-(2n+2)\arctan\frac{y}{x}\right) - \int_0^{\arctan\frac{y}{x}} F(w)dw.$$

Hence statement (2) of Theorem is proved.

**Proof of statement** (3).

If $2a + b\sin 2\theta \neq 0$ for all $\theta \in \mathbb{R}$, we have

$$yP_n(x,y) - xQ_n(x,y) = \left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)\left(ax^2 + bxy + ay^2\right)^n,$$

thus the origin is the unique critical point at finite distance.

It is easy to check that the solution $r(\theta, r_0)$ of the differential equation (2.6) such that $r(0, r_0) = r_0$ is

$$r(\theta, r_0) = \exp(\theta)\left(r_0^{2n+2} + \int_0^\theta F(w)dw\right)^{1/(2n+2)}. \tag{2.7}$$

A periodic solution of system (2.1) must satisfy the condition $r(2\pi, r_0) = r(0, r_0)$, which leads to an unique value $r_0 = r_*$, given by

$$r_* = \left(\frac{\exp(4n\pi + 4\pi)}{1 - \exp(4n\pi + 4\pi)}\int_0^{2\pi} F(w)dw\right)^{1/(2n+2)},$$

where $F(w)$ is defined in (2.2).

Since $2a + |b| > 0$, we have $a + 1/2\, b \sin 2w > 0$. Hence, $r_* > 0$.
Injecting this value of $r_*$ in (2.7), we get the candidate solution

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta)\left(\frac{\exp(4n\pi + 4\pi)}{1 - \exp(4n\pi + 4\pi)}\int_0^{2\pi} F(w)dw + \int_0^\theta F(w)dw\right)^{1/(2n+2)}.$$

So, if $r(\theta, r_*) > 0$ for all $\theta \in \mathbb{R}$, we shall have $r(\theta, r_*)$ would be periodic orbit, and consequently a limit cycle.

Since $2a + |b| > 0$, we have $a + 1/2\, b \sin 2w > 0$, then $-F(w) > 0$ and

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta)\left(\frac{\exp(4n\pi + 4\pi)}{-1 + \exp(4n\pi + 4\pi)}\int_{2\pi}^{0} F(w)dw + \int_0^\theta F(w)dw\right)^{1/(2n+2)}$$

$$> \exp(\theta)\left(\int_\theta^{2\pi} -F(w)dw\right)^{1/(2n+2)} > 0,$$

for all $\theta \in (0, 2\pi)$.

Consequently, this is a limit cycle for the differential system (2.1).

In order to prove the hyperbolicity of the limit cycle it is sufficient to that the Poincaré return map, for more details see [8, section 1.6]. An computation shows that

$$\left.\frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0}\right|_{r_0 = r_*} = \exp(4n\pi + 4\pi) > 1,$$

Therefore the limit cycle of the differential equation (2.4) is hyperbolic. Consequently, this is a hyperbolic limit cycle for the differential system (2.1). This completes the proof of statement (3) of Theorem.

**Proof of statement** (4). Assume now that $a = b = 0$, then from (2.3) it follows that $\theta' = 0$. So the straight lines through the origin of coordinates of the differential system (2.1) are invariant by the flow of this system. Hence, $H(x, y) = y/x$ is a first integral of the system. This completes the proof of statement (4) of Theorem. □

## 3. Examples

The following examples is given to illustrate our results.

E x a m p l e 1. If we take $n = 0$, then system (2.1) reads

$$\begin{cases} x' = x + (y - x)\left(x^2 - xy + y^2\right), \\ y' = y - (y + x)\left(x^2 - xy + y^2\right). \end{cases} \tag{3.1}$$

The curve

$$U(x, y) \quad = \quad -\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) = 0,$$

is an invariant algebraic curve of system (3.1) with cofactor $K(x, y) = -3x^2 + 4xy - 5y^2 + 4$.

The system (3.1) has the first integral

$$H(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)\exp\left(-2\arctan\frac{y}{x}\right) + \int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\left(\frac{4\exp(-2w)}{2 - \sin 2w}\right)dw.$$

Moreover, the system (3.1) has limit cycle whose expression in polar coordinates $(r, \theta)$ is

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta)\sqrt{r_*^2 - 4\int_0^{\theta}\left(\frac{\exp(-2w)}{2 - \sin 2w}\right)dw},$$

where $\theta \in \mathbb{R}$, and the intersection of the limit cycle with the $OX_+$ axis is the point having

$$r_* = \sqrt{\frac{2\exp(4\pi)}{\exp(4\pi) - 1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{2 - \sin 2w}\exp(-2w)\right)dw} \simeq 1.191\,2.$$

Moreover,

$$\left.\frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0}\right|_{r_0 = r_*} = e^{4\pi} > 1.$$

This limit cycle is hyperbolic limit cycle. It is the results presented by Jaume Llibre and Benterki Rebiha in [5].

E x a m p l e 2. If we take $n = 1$, $a = 3$ and $b = 2$ then system (2.1) reads

$$\begin{cases} x' = x + (y - x)\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(3x^2 + 2xy + 3y^2\right), \\ y' = y - (y + x)\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(3x^2 + 2xy + 3y^2\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

The curve

$$U(x, y) = -\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)\left(3x^2 + 2xy + 3y^2\right) = 0,$$

is an invariant algebraic curve of system (3.2) with cofactor

$$K(x, y) = -17x^4 + 10x^3y - 24x^2y^2 + 2xy^3 - 19y^4 + 6.$$

The system (3.2) has the first integral

$$H(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^2\exp\left(-4\arctan\frac{y}{x}\right) - \int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\left(\frac{8\exp(-4w)}{(-2 + \sin 2w)(3 + \sin 2w)}\right)dw.$$

Moreover, the system (3.2) has limit cycle whose expression in polar coordinates $(r, \theta)$ is

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta)\left(r_*^4 + \int_0^{\theta}\left(\frac{8\exp(-4w)}{(-2 + \sin 2w)(3 + \sin 2w)}\right)dw\right)^{1/4},$$

where $\theta \in \mathbb{R}$, and the intersection of the limit cycle with the $OX_+$ axis is the point having

$$r_* = \left( \frac{\exp 8\pi}{1 - \exp 8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{8 \exp(-4w)}{(-2 + \sin 2w)(3 + \sin 2w)} dw \right)^{1/4} \simeq 0.784\,63.$$

Moreover,

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0 = r_*} = \exp(8\pi) > 1.$$

This limit cycle is hyperbolic limit cycle.

E x a m p l e 3. If we take $n = 2$, $a = 10$ and $b = -2$ then system (2.1) reads

$$\begin{cases} x' = x + (y - x)\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(10x^2 - 2xy + 10y^2\right)^2, \\ y' = y - (y + x)\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(10x^2 - 2xy + 10y^2\right)^2. \end{cases} \tag{3.3}$$

The curve

$$U(x, y) = -\left(x^2 - xy + y^2\right)\left(x^2 + y^2\right)\left(10x^2 - 2xy + 10y^2\right)^2 = 0,$$

is an invariant algebraic curve of system (3.3) with cofactor

$$K(x, y) = \left(-66x^4 + 90x^3y - 176x^2y^2 + 102xy^3 - 94y^4\right)\left(10x^2 - 2xy + 10y^2\right) + 8.$$

The system (3.3) has the first integral

$$H(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)^3 \exp\left(-6 \arctan \frac{y}{x}\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \left( \frac{12 \exp(-6w)}{(-2 + \sin 2w)(10 - \sin 2w)^2} \right) dw.$$

Moreover, the system (3.3) has limit cycle whose expression in polar coordinates $(r, \theta)$ is

$$r(\theta, r_*) = \exp(\theta) \left( r_*^6 + \int_0^{\theta} \left( \frac{12 \exp(-6w)}{(-2 + \sin 2w)(10 - \sin 2w)^2} \right) dw \right)^{1/6},$$

where $\theta \in \mathbb{R}$, and the intersection of the limit cycle with the $OX_+$ axis is the point having

$$r_* = \left( \frac{\exp(12\pi)}{1 - \exp(12\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{12 \exp(-6w)}{(-2 + \sin 2w)(10 - \sin 2w)^2} dw \right)^{1/6} \simeq 0.484\,91.$$

Moreover,

$$\left. \frac{dr(2\pi, r_0)}{dr_0} \right|_{r_0 = r_*} = \exp(12\pi) > 1.$$

This limit cycle is hyperbolic limit cycle.

**REFERENCES**

1. Bendjeddou A., Boukoucha R., Explicit limit cycles of a cubic polynomial differential systems, *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.*, 2016, vol. 61, no. 1, pp. 77-85.
2. Bendjeddou A., Cheurfa R., Coexistence of algebraic and non-algebraic limit cycles for quintic polynomial differential systems, *Elect. J. Diff. Equ*, 2017, vol. 2017, no. 71, pp. 1–7. ISSN: 1072-6691 .
3. Bendjeddou A., Cheurfa R., Cubic and quartic planar differential systems with exact algebraic limit cycles, *Elect. J. Diff. Equ*, 2011, vol. 2011, no. 15, pp. 1–12. ISSN: 1072-6691 .

4. Bendjeddou A., Cheurfa R., On the exact limit cycle for some class of planar differential systems, *Nonlinear Diff. Equ. Appl.*, 2007, vol. 14 pp. 491–498. doi:10.1007/s00030-007-4005-8 .
5. Benterki R., Llibre J., Polynomial differential systems with explicit non-algebraic limit cycles, *Elect. J. Diff. Equ*, 2012, vol. 2012, no. 78, pp. 1–6. ISSN: 1072-6691 .
6. Boukoucha R., On the dynamics of a class of Kolmogorov systems, *Siberian Elect. Math. Reports*, 2016, vol. 13, pp. 734–739. doi: 10.17516/1997-1397-2016-9-1-11-16 .
7. Cairó L., Llibre J., Phase portraits of cubic polynomial vector fields of Lotka–Volterra type having a rational first integral of degree 2, *J. Phys. A*, 2007, vol. 40, pp. 6329–6348. doi:10.1088/1751-8113/40/24/005 .
8. Dumortier F., Llibre J., Artés J., *Qualitative theory of planar differential systems,* (Universitex) Berlin, Springer, 2006, 302 p. doi: 10.1007/978-3-540-32902-2 .
9. Gao P., Hamiltonian structure and first integrals for the Lotka-Volterra systems, *Phys. Lett. A*, 2000, vol. 273, pp. 85–96. doi: 10.1016/S0375-9601(00)00454-0 .
10. Gasull A., Giacomini H. and Torregrosa J., Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems, *J. Comput. Appl. Math.*, 2007, vol. 200, iss. 1, pp. 448–457. doi: 10.1016/j.cam.2006.01.003 .
11. Hilbert D., *Mathematische Probleme*, Lecture, Second Internat. Congr. Math. (Paris, 1900), *Nachr. Ges. Wiss. Gttingen Math. Phys. Kl.*, 1900, pp. 253–297, English transl., Bull.
12. Perko L., *Differential equations and dynamical systems*, Third ed., Ser. Texts Appl. Math., 7, New York, Springer-Verlag, 2001, 555 p. ISBN 0-387-95116-4 .
13. Poincaré H., Sur lintégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré I and II, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1891, vol. 5, pp. 161–191.

The paper was received by the Editorial Office on April 17, 2017.

*Rachid Boukoucha*, Department of Technology, Faculty of Technology, University of Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria, e-mail: rachid_boukecha@yahoo.fr .

## CONTENT

**ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН**

**Том 23 № 3 2017**

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редакторы Н. Н. Моргунова, Н. М. Юркова
TEX-редактор Г. Ф. Корнилова

Отв. за выпуск В. В. Шевченко

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

---

Подписано в печать 31.08.17. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. $36,2$. Уч.-изд. л. 31,8 Тираж 200 экз.

---

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО “ Типография ДЛЯ ВАС”
620026, г. Екатеринбург, ул. Розы Люксембург, 52а, оф. 3