

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

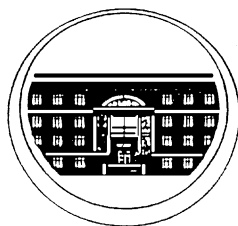
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 23

№ 2

2017



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 23, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2017. 322 с.

ISSN 0134-4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев
Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Антонов, д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко,
д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
канд. физ.-мат. наук М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук Х. Г. Гусейнов (Турция), д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов,
д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий,
канд. физ.-мат. наук П. Д. Лебедев, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,
д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных, д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь),
д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай,
канд. физ.-мат. наук Н. В. Маслова (отв. секретарь)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,
акад. РАН А. Б. Куржанский, чл.-корр. РАН Н. Ю. Лукоянов,
чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров, акад. РАН С. В. Матвеев,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,
чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков, чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,
чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

Отв. редакторы выпуска: д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2017



DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-5-9

ВЛАДИМИР ВАСИЛЬЕВИЧ ВАСИН*(К 75-летию юбилею)*

В. В. Васин родился 2 ноября 1941 года в семье служащих в с. Бараково Оренбургской области¹. Во время учебы на физико-математическом факультете Уральского государственного университета им. А.М. Горького (УрГУ) он начал заниматься научной работой под руководством члена-корреспондента АН СССР В. К. Иванова. Как известно, в конце 50-х — начале 60-х годов прошлого столетия в СССР зародилось новое направление, лежащее на стыке функционального анализа и вычислительной математики, — теория и методы решения некорректно поставленных задач. Сформировались три лидирующих центра по теории некорректных задач и ее приложениям. Уральский государственный университет в Свердловске благодаря работам В. К. Иванова и его учеников занимал ведущие позиции в этом новом направлении.

2 ноября 1964 года, еще до окончания университета, В. В. Васина пригласили в недавно организованное на Урале Свердловское отделение Математического института им. В.А. Стеклова (ныне Институт математики и механики УрО РАН), и после обстоятельной беседы с заместителем директора по Свердловскому отделению С. Б. Стечкиным он был зачислен в отдел прикладных задач.

В первый период научной работы, до защиты в начале 1971 года кандидатской диссертации, Владимир Васин под руководством В. К. Иванова получил результаты, в настоящее время превратившиеся в фольклор. К этим результатам, в частности, относятся: результат о взаимосвязи методов Тихонова и невязки, а также (совместно с В. П. Тананой) наиболее общее условие на оператор (слабая замкнутость) и пространства (свойство Ефимова — Стечкина), которые гарантируют сильную сходимую регуляризованного семейства приближенных решений, построенных на базе вариационных методов. Это позволило обобщить исследование В. А. Морозова для гильбертовых пространств и усилить результаты А. Н. Тихонова, В. К. Иванова и М. М. Лаврентьева, использовавших при доказательстве сходимости приближенных решений схему компактного вложения в предположении, что решение принадлежит образу вполне непрерывного оператора. Эти и некоторые другие результаты вошли в монографию 1978 года (авторы В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана), где были подытожены исследования В. К. Иванова и его учеников по теории некорректных задач.

В этот период группа сотрудников (Г. Я. Пересторонина, Т. И. Сережникова, О. В. Коковицина, Л. Ю. Тимерханова), которой руководил В. В. Васин, по договору с ВНИИТФ (ныне Рос-

¹ Полная биография В. В. Васина и список его трудов опубликованы в «Трудах Института математики и механики УрО РАН», 2012, Т. 18, № 1, С. 5–19.

сийский федеральный ядерный центр — ВНИИТФ, г. Снежинск) выполняла работу по построению алгоритмов и созданию пакета программ для расчета напряженно-деформированного состояния спецконструкций. Созданный комплекс программ был передан заказчику для использования в производственных расчетах.

В конце 1970-х — начале 1980-х годов интересы В. В. Васиной начали сдвигаться к теоретическому исследованию алгоритмов, разработке технологии решения некорректно поставленных задач и их практическому решению. В частности, было проведено обоснование схем дискретной аппроксимации регуляризирующих алгоритмов. В это же время началось сотрудничество с коллегами из Института физики металлов УрО РАН (группа Ю. А. Бабанова) для решения некорректной задачи обработки данных физических экспериментов по расшифровке атомной структуры аморфных материалов на основе рентгеноспектральных и дифракционных данных. Вышла большая серия совместных работ в физических журналах, которые до настоящего времени широко цитируются в зарубежной литературе, а разработанный комплекс программ (исполнители А. Л. Агеев, Н. В. Ершов) был внедрен в ряде отечественных и зарубежных организаций. В. В. Васин предложил оригинальный подход к решению задач с дополнительной априорной информацией с использованием псевдосжимающих (фейеровских) отображений, отвечающих за априорные ограничения. Этому направлению посвящены серия статей и две монографии (одна в соавторстве с А. Л. Агеевым, другая — с И. И. Ереминым), вышедших также на английском языке.

В 1990-е годы научные интересы В. В. Васиной были связаны с изучением итерационных процессов для устойчивой аппроксимации решений нелинейных некорректных операторных уравнений, в том числе при наличии дополнительных априорных ограничений на решение. Был рассмотрен подход, связанный с парными монотонными процессами для нелинейных уравнений с изотонным оператором, порождающими монотонные по конусу последовательности. Эти методы апробировались при решении обратных задач геофизики и зондирования атмосферы, а также в задачах идентификации параметров для уравнений гиперболического типа. Другой цикл работ этого периода касается обоснования сходимости различных модификаций методов градиентного типа и метода Левенберга — Марквардта. В этом направлении удалось доказать слабую, а в некоторых случаях и сильную, сходимость итераций при условии, что оператор задачи удовлетворяет в окрестности решения условию типа равномерной псевдомонотонности. Кроме того, для итеративно регуляризованного метода Ньютона был намечен подход с целью обоснования практической сходимости итераций на основе доказательных вычислений. Сотрудники отдела некорректных задач анализа и приложений, который в 1990–2012 годах возглавлял В. В. Васин, с середины 1990-х годов сотрудничают с коллегами из Института геофизики УрО РАН (отдел П. С. Мартышко) в создании регулярных параллельных алгоритмов и разработке программных средств на МВС-1000 (исполнители Е. Н. Акимова, Г. Я. Пересторонина, Г. Г. Скорик) для решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии с модельными и реальными геофизическими полями. Совместные с геофизиками исследования в значительной степени стимулировали дальнейшее развитие теории итеративной регуляризации нелинейных проблем с использованием аппарата фейеровских отображений.

С конца 1990-х годов В. В. Васин занимался исследованием проблемы построения РА для линейных операторных (интегральных) уравнений с негладкими, возможно разрывными, решениями. Им предложен и обоснован метод решения этой проблемы, основная идея которого заключается в использовании тихоновской регуляризации с недифференцируемыми стабилизаторами (Липшиц-норма, обобщенная вариация) и субградиентных методов негладкой минимизации, а в некоторых случаях с дополнительным привлечением прох-алгоритма. Как показали численные эксперименты, выполненные Т. И. Сережниковой, усовершенствованный

таким образом алгоритм позволяет надежно восстанавливать негладкие решения различных типов для одномерных и двумерных уравнений Фредгольма первого рода. В традиционном подходе, характерном для многих авторов (Р. Акар и С. Вогель, А. С. Леонов, Д. Герман и С. Янг), негладкий стабилизатор предварительно аппроксимируется семейством дифференцируемых функционалов, что, по-видимому, может приводить к “заглаживанию” тонкой структуры решения. Построенные на основе этого метода алгоритмы нашли применение в обратных задачах радиозондирования ионосферы (проблема волноводов), исследованиями которых В. В. Васин, А. Л. Агеев, Т. В. Антонова занимались в 1996–2002 годах вместе с коллегами (группа В. М. Маркушевича) из Международного института теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН. Итог сотрудничества — несколько совместных статей, в которых было дано решение проблемы волноводов (волновод — участок нарушения монотонного поведения электронной концентрации от высоты), что открыло возможность определения электронной концентрации за волноводом и нахождения меры множеств Лебега волноводов. Эффективность алгоритмов восстановления разрывных решений подтверждена также численными экспериментами в статических и динамических обратных задачах управления, а также при восстановлении зашумленных изображений.

В 2006–2009 годах в рамках контракта с технологической компанией “Шлюмберже” отдел выполнял исследования по разработке регулярных алгоритмов для решения задачи деконволюции, которая возникает в скважинной геофизике. Предложенные В. В. Васиным и его сотрудниками (А. Л. Агеев, Т. В. Антонова, Г. Г. Скорик) эффективные алгоритмы и программные модули, реализующие модифицированные методы Тихонова и Левенберга — Марквардта и учитывающие априорную информацию о решении, получили высокую оценку заказчика и составили содержание совместной публикации в зарубежном журнале. Для этой задачи построены новые специализированные базисы, учитывающие априорную информацию об искомым решении и позволяющие построить эффективные численные алгоритмы решения задачи деконволюции.

В последние годы весьма успешно развиваются совместные исследования сотрудников отдела с коллегами из Уральского федерального университета (лаборатория глобальной экологии и спутникового мониторинга, заведующий В. И. Захаров) по решению обратных задач зондирования атмосферы, связанных с определением концентрации парниковых газов по спектрам высокого разрешения, измеренным спектрометрами спутникового и наземного базирования. В этих задачах оказались востребованными методы итеративной регуляризации фейеровского типа, развиваемые В. В. Васиным для решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений.

Более подробно остановимся на последних исследованиях В. В. Васина.

Обратимся к первому направлению, связанному с исследованием нелинейных некорректно поставленных операторных уравнений, охватывающему широкий класс обратных задач. Предложен и исследован двухэтапный метод построения регуляризованного семейства приближенных решений, в котором на первом этапе осуществляется регуляризация Тихонова — Лаврентьева, а на втором для решения регуляризованного уравнения применяются процессы градиентного и ньютоновского типов. Установлены теоремы сходимости итераций и свойство их фейеровости для основных процессов и их модификаций, а при наличии оценок для регуляризованного решения получены оценки погрешности двухэтапного метода. Эти результаты обобщают и дополняют исследования отечественных (А. Б. Бакушинский, М. Ю. Кокурин) и зарубежных математиков (О. Шерцер, А. Нойбауер, Б. Кальтенбахер) по методам итеративной регуляризации нелинейных некорректных задач. Построенные методы широко используются при решении обратных некорректных задач геофизики и термического зондирования атмосферы.

Второе направление касается исследования линейных некорректных задач, решение которых имеет особенности различных типов, например, наряду с гладким фоном решение может содержать разрывы и изломы. Это означает, что решение можно представить в виде суммы нескольких компонент, каждая из которых содержит только один тип особенности. Исследованы модификации метода Тихонова, основанные на использовании стабилизаторов, каждый из которых зависит только от одной компоненты и, следовательно, в полной мере учитывает именно данный тип особенности. Это позволяет реализовать раздельное восстановление компонент регуляризованного решения и восстановить тонкую структуру решения. Дано теоретическое обоснование регуляризирующих свойств данного метода и доказаны теоремы сходимости схем дискретной аппроксимации построенного регуляризирующего алгоритма.

Решение так называемой задачи деконволюции (устоявшийся термин в инженерных публикациях), исследованием которой с середины прошлого столетия активно занимаются в основном инженеры-нефтяники, составляет содержание третьего направления. При интерпретации данных гидродинамических испытаний скважин возникает интегральное уравнение Вольтера первого рода, решение которого содержит очень важную информацию о системе скважина-резервуар. Наряду с некорректностью задача имеет особенности, которые существенно осложняют построение устойчивого приближенного решения. А именно, решение уравнения имеет разномасштабный характер поведения, исходные данные (ядро, правая часть), как правило, разрывны и содержат большие ошибки измерения — до 15% в ядре (скорость потока) и до 5% в правой части (падение давления). Совместно с Г. Г. Скориком выполнен цикл работ, где предложен оригинальный метод решения задачи в полной постановке и выполнено его теоретическое и численное исследование. Метод основан на привлечении тихоновской регуляризации с нелинейным (неквадратичным) стабилизатором, использовании специального базиса, с помощью которого строится приближенное решение, и применении дополнительной процедуры коррекции полученных аппроксимаций. Это позволяет сформировать высокоточный регуляризирующий алгоритм, генерирующий приближенные решения с требуемыми свойствами гладкости, удовлетворяющие всем априорным ограничениям на решение, заданным в виде бесконечной системы линейных неравенств.

В четвертом направлении получены результаты по итерационным процессам для нелинейных монотонных операторных уравнений в условиях нарушения условий корректности Адамара. В рамках двухэтапного метода предложены и теоретически исследованы нелинейные аналоги альфа-процессов и их модифицированных вариантов. Ранее итеративная регуляризация альфа-процессов исследовалась только для линейных уравнений с самосопряженным неотрицательно определенным оператором. Наряду с монотонными уравнениями рассмотрены также нелинейные уравнения с оператором, производная которого имеет неотрицательный спектр. Установлены теоремы сходимости и получены оценки погрешности метода на классах корректности. На основе развитых методов построены экономичные алгоритмы решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии.

В течение многих лет В. В. Васин читает в Уральском федеральном университете специальные курсы по теории и методам решения некорректных задач. Основной материал этих спецкурсов изложен в монографиях “Теория линейных некорректных задач и ее приложения” (В. В. Васин, В. К. Иванов, В. П. Танана), “Некорректные задачи с априорной информацией” (А. Л. Агеев, В. В. Васин), “Операторы и итерационные процессы фейеровского типа” (В. В. Васин, И. И. Еремин), а также в методических пособиях “Методы решения неустойчивых задач”, “Методы решения плохо обусловленных линейных алгебраических уравнений”. Кроме того, в соавторстве с Ф. А. Шолоховичем В. В. Васиным написан учебник “Основы высшей математики” для социально-экономических специальностей, который пользуется широкой популярностью.

Владимир Васильевич Васин опубликовал свыше 250 научных работ, в том числе четыре монографии (в соавторстве), три из которых переведены за рубежом. Среди его учеников четыре кандидата и два доктора наук. Он является членом редколлегии трех российских математических журналов и членом программных комитетов многих международных конференций. В 1994 году Владимир Васильевич был избран членом-корреспондентом РАН по Отделению информатики, вычислительной техники и автоматизации (ныне Отделение математических наук, секция прикладной математики и информатики).

С 1995 года при непосредственном участии В.В. Васина в качестве председателя оргкомитета в Екатеринбурге проводятся всероссийские конференции (с международным участием) по некорректным задачам, посвященные памяти создателя уральской научной школы по теории и методам решения некорректно поставленных задач, выдающегося российского математика В. К. Иванова.

Коллеги и друзья отмечают редкостные порядочность и доброжелательность Владимира Васильевича по отношению к окружающим как в научных, так и в бытовых делах. Его обязательность и надежность всем хорошо известны. Владимир Васильевич активно участвует в жизни института.

Сотрудники Института математики и механики УрО РАН, коллеги, ученики и друзья сердечно поздравляют Владимира Васильевича Васина с его славным юбилеем и от всей души желают ему крепкого здоровья и дальнейших творческих успехов!

Коллеги и ученики

УДК 517.988.68

**АЛГОРИТМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ
ЛИНИЙ РАЗРЫВА ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ¹****А. Л. Агеев, Т. В. Антонова**

В работе рассматривается задача локализации (определения положения) линий разрыва зашумленной функции двух переменных. Такого рода задачи возникают при обработке изображений, поскольку границы объектов часто являются линиями разрыва. Предполагается, что в окрестности линий разрыва функция двух переменных гладкая, а в каждой точке на линиях имеет разрыв первого рода. Вместо точной функции известны ее приближение в пространстве L_2 и уровень погрешности измерений δ . Для возмущений такого рода задача относится к нелинейным некорректно поставленным проблемам, и для ее решения требуется строить регуляризирующие алгоритмы. В работе строятся и исследуются регуляризирующие дискретные алгоритмы усреднения “с поворотом”. Предложены новые законы выбора параметров регуляризации и усовершенствованы способы проведения оценок точности локализации. Получены оценки точности локализации особенностей порядка $O(\delta^{4/3})$ при более жестких условиях разделимости: порог разделимости в настоящей работе имеет порядок $O(\delta^{2/3})$. В то время как в предшествующих работах авторов, посвященных этой задаче, оценки точности локализации и порога разделимости имеют порядок $O(\delta)$. Кроме того, впервые проведено теоретическое исследование дискретизации (указаны условия на шаг дискретизации) алгоритмов усреднения “с поворотом”.

Ключевые слова: некорректная задача, регуляризирующий алгоритм, локализация особенностей, разрыв первого рода, линия разрыва.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. High accuracy algorithms for approximation of discontinuity lines of a noisy function.

We consider the problem of localizing (finding the position of) discontinuity lines of a noisy function of two variables. Such problems arise in image processing, because the boundaries of objects are often discontinuity lines. It is assumed that the function of two variables is smooth in a neighborhood of discontinuity lines and has discontinuity of the first kind at each point of these lines. Instead of the exact function, its approximation in the space L_2 and the measurement error level δ are known. In this case, the problem belongs to the class of nonlinear ill-posed problems, and regularization algorithms should be constructed for its solution. We construct and study regularizing discrete algorithms of averaging “with a turn”. New rules are proposed for choosing regularization parameters and the methods of deriving localization error bounds are improved. Error bounds are found for the localization of singularities of order $O(\delta^{4/3})$ under stricter separability conditions: the separability threshold in the present paper has order $O(\delta^{2/3})$, whereas in the authors’ previous papers devoted to this problem the bounds for the localization error and separability threshold have order $O(\delta)$. In addition, the discretization of the algorithms of averaging “with a turn” is investigated theoretically for the first time (conditions on the discretization step are specified).

Keywords: ill-posed problem, regularization algorithm, localization of singularities, discontinuity of the first kind, discontinuity line.

MSC: 65J20, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-10-21

Введение

В работе рассматривается задача локализации [1; 2] (определения положения) линии, в окрестности которой измеряемая функция f двух переменных гладкая, а на линии имеет разрыв первого рода. Такого рода проблемы возникают во многих прикладных исследованиях, поскольку границы разных “объектов” на изображении часто являются линиями, на которых интенсивность изображения испытывает скачок первого рода. Изучается модельный случай,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00629).

когда функция f принадлежит пространству $L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$. При этом точная функция f неизвестна, а известна возмущенная функция $f^\delta \in L_2$ такая, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leq \delta$, где δ — параметр, описывающий уровень точности измерений. В этом случае линии разрыва известной функции f^δ могут как угодно сильно отличаться от искомым линий разрыва функции f , т. е. рассматриваемая задача *некорректно поставлена* [3; 4].

В настоящее время для решения подобных задач предложено множество эвристических алгоритмов (ссылки на литературу см. в [1; 2]). Насколько известно авторам, первые теоретические результаты были получены в работах [5–7]. Выбор параметров регуляризации в этих работах был таким, что порядок точности локализации оценивался как $O(\delta)$. Между тем для одномерного аналога этой проблемы (локализация разрывов первого рода), см. [8–10], удалось построить оптимальные по порядку методы с порядком сходимости $O(\delta^2)$. В настоящей работе построены регуляризирующие дискретные методы усреднения с новыми законами выбора параметров регуляризации и усовершенствованы способы проведения оценок точности локализации особенностей. Доказывается, что эти методы имеют порядок точности² локализации $O(\delta^{4/3})$.

В первом разделе сформулирована постановка задачи. Во втором разделе получены предварительные оценки. В третьем разделе приведен метод локализации, доказана его сходимость и получены оценки точности аппроксимации полученных приближений.

1. Постановка задачи и построение вспомогательной функции

Зафиксируем некоторое значение переменной $y = \bar{y}$ и введем полосу

$$\mathfrak{D} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}\},$$

где величина $\bar{\delta} > 0$. Пусть в полосе \mathfrak{D} функция f двух переменных имеет конечное число линий разрыва $\{\Gamma_k\}_1^l$ (см. рис. 1); вне этих линий функции f гладкая. Считаем, что линии $\{\Gamma_k\}_1^l$ можно параметризовать, то есть существуют функции $x = \gamma_k(y)$, $k = 1, 2, \dots, l$ ³. Линию, которая задана уравнением $y = \bar{y}$, обозначим \mathfrak{L} . Через x_k обозначим точки пересечения кривых Γ_k с линией \mathfrak{L} : $x_k = \gamma_k(\bar{y})$, $k = 1, 2, \dots, l$.

Будем считать, что вместо точной функции f известны возмущенная функция f^δ и уровень погрешности измерений δ такие, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leq \delta$. Задача локализации будет состоять в определении по δ и f^δ количества l линий разрыва в полосе \mathfrak{D} и приближении точек $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности аппроксимации. Дополнительные условия на линии разрыва и поведение функции f вне разрывов будут приведены ниже.

Исследование этой задачи существенно опирается на результаты по локализации разрывов первого рода зашумленной функции одной переменной. Введем пространство $MV(\mathbb{R})$ [8] функций g одной переменной, которые на любом отрезке имеют конечное число разрывов первого рода: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция g абсолютно непрерывна; функция g ограничена на \mathbb{R} ; функция g' почти всюду ограничена⁴ на \mathbb{R} .

Договоримся для упрощения записи вместо $(\Delta_k(t))'_t|_{t=y}$ писать $\Delta'_k(y)$, вместо $(\gamma_k(t))'_t|_{t=y} - \gamma'_k(y)$, вместо $(\phi_\lambda(t))'_t|_{t=u} - \phi'_\lambda(u)$.

Введем пространство $MV(\mathbb{R}^2)$ функций двух переменных, для которых в полосе \mathfrak{D} выполнены следующие условия:

(*) для почти всех направлений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y)^T$ функция $f(x + \tau_x t, y + \tau_y t)$ принадлежит пространству $MV(\mathbb{R})$ как функция переменной t ; для $(x, y) \notin \Gamma_k$, $k = 1, 2, \dots, l$, почти всюду

²К сожалению, этот порядок достигается при более жестких по сравнению с методами из [5–7] условиях разделимости: функция $h(\delta)$ в теореме имеет порядок $O(\delta^{2/3})$ (см. условие $\min_{k \neq j} |x_k - x_j| \geq h(\delta)$).

³Нас будет интересовать только та часть линий Γ_k , которая лежит в полосе \mathfrak{D} .

⁴Производная почти всюду существует; в точках несуществования доопределим ее, например, нулем.

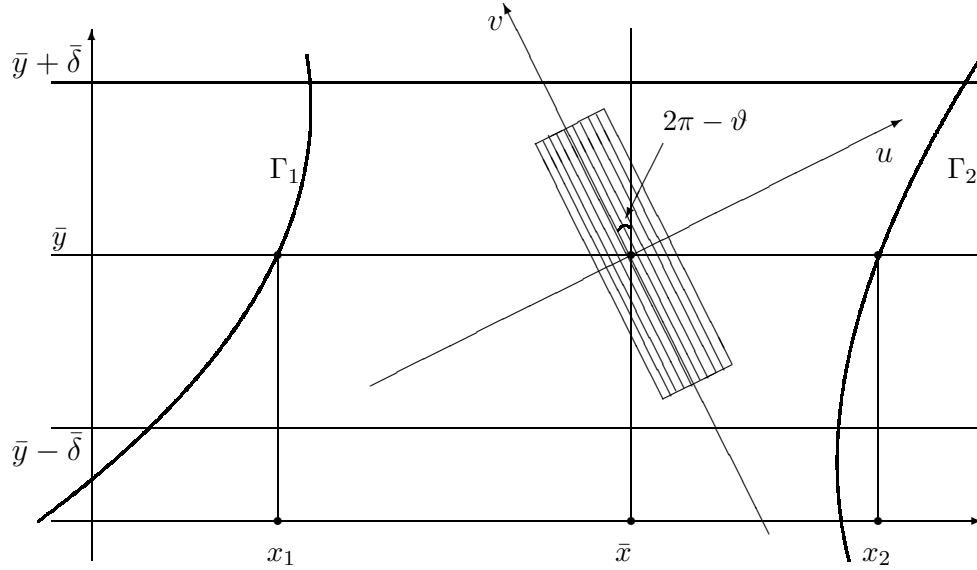


Рис. 1. Локализация линий разрыва функции двух переменных: Γ_k — линии разрыва функции f ; $x_k, k = 1, 2$, — аппроксимируемые величины; (u, v) — новая система координат; заштрихованный прямоугольник — область усреднения.

существуют $df(x, y)/d\tau$: $|df(x, y)/d\tau| \leq r$ и для $(x, y) \in \Gamma_k, k = 1, 2, \dots, l$, существуют $df(x \pm 0, y)/d\tau$: $|df(x \pm 0, y)/d\tau| \leq r$ (без ограничения общности будем считать, что $r = 1$);

(**) для $(x, y) \in \Gamma_k, k = 1, 2, \dots, l$, существуют конечные величины $f(x \pm 0, y)$, и они не равны; скачок $\Delta_k(y)$ функции f на линии Γ_k является непрерывно дифференцируемой функцией для $y: |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}$, и существуют производные $\Delta'_k(y), k = 1, 2, \dots, l$; заданы положительные константы $\Delta^{\min}, \Delta^{\max}, B$:

$$\Delta^{\min} \leq \min_{k, |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \leq \max_{k, |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \leq \Delta^{\max}, \quad \max_{k, |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}} |\Delta'_k(y)| \leq B;$$

(***) существуют производные $\gamma'_k, \gamma''_k, k = 1, 2, \dots, l$; заданы положительные константы M_1, M_2 :

$$\max_k |\gamma'_k(\bar{y})| \leq M_1, \quad \max_{k, |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}} |\gamma''_k(y)| \leq M_2.$$

Постановка задачи. Пусть функция $f \in MV(\mathbb{R}^2)$. Требуется по функции $f^\delta \in L_2$ и уровню погрешности δ таким, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leq \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{x_k\}_1^l$.

Методы локализации основаны на построении и исследовании вспомогательной функции [5–10]. Поскольку возмущение $f - f^\delta$ двумерно, то для построения вспомогательной функции нужно проводить усреднение по двум переменным. Для этого нам понадобятся два класса усредняющих функций. Через Φ обозначим множество функций $\phi(t), t \in \mathbb{R}$, для которых выполнены следующие условия:

- (a) $\phi \in W_1^1(\mathbb{R})$; $|\phi'(t)| \leq C, t \in \mathbb{R}, C$ — константа;
- (b) существуют $0 < b < 1, 0 < a \leq 1$ такие, что $a \leq |\phi(t)| \leq 1$ для $t \in [-b, b]$;
- (c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Введем второе множество усредняющих функций Ψ , которое также состоит из финитных функций $\psi(t), t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям:

- (a') $\psi \in L_2(\mathbb{R})$;
- (b') $\int_{-1}^1 \psi(t) dt = 1$;

(с') $\psi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$; $\psi(t) \geq 0$ для $t \in [-1, 1]$.

Приведем пример функций, удовлетворяющих вышеприведенным условиям $\phi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$:

$$\phi(t) = \begin{cases} \cos^2(\pi t/2), & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} 1/2, & t \in [-1, 1], \\ 0, & t \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\left(\frac{t}{\lambda_1}\right), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\left(\frac{t}{\lambda_2}\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

В работе рассматривается метод усреднения “с поворотом”, когда усреднение проводится в новой системе координат. Зафиксируем точку (\bar{x}, \bar{y}) на линии \mathcal{L} . Введем новую систему координат с началом в точке (\bar{x}, \bar{y}) и поворотом на некоторый угол ϑ относительно старой системы координат. Для удобства читателя приведем формулы перехода к новым координатам (u, v) и обратно

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x - \bar{x} \\ y - \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Для краткости введем обозначение $W = W(u, v) = (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta + \bar{x}, u \sin \vartheta + v \cos \vartheta + \bar{y})$. Поскольку \bar{x} будет меняться от $-\infty$ до $+\infty$, то удобно далее вместо \bar{x} писать x . Усреднение будем проводить в новой системе координат с усредняющим ядром $\phi'_{\lambda_1}(u)\psi_{\lambda_2}(v)$. Положим

$$F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta) = \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f^\delta(W) \phi'_{\lambda_1}(u) \psi_{\lambda_2}(v) du dv, \quad (1.1)$$

где $x \in (-\infty, +\infty)$, $\vartheta \in (-\arctg M_1, \arctg M_1)$, M_1 — константа из условия (**). Определим вспомогательную функцию для метода локализации

$$\hat{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x) = \max_{|\operatorname{tg} \vartheta| \leq M_1} |F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta)|. \quad (1.2)$$

Максимум выбирается на множестве углов, которому принадлежат углы наклона касательных к кривым Γ_k в точке (x_k, \bar{y}) . В следующем разделе проведено исследование вспомогательной функции $\hat{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x)$.

2. Исследование вспомогательной функции и получение предварительных оценок

В дальнейшем нам понадобится оценить двойной интеграл (1.1) при $\delta = 0$ (индекс δ при этом будем опускать), который сначала запишем в виде повторного

$$F_{\lambda_1 \lambda_2}(x, \vartheta) = \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \left(\int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f(W) \phi'_{\lambda_1}(u) du \right) \psi_{\lambda_2}(v) dv.$$

Обозначим через ϑ_k угол наклона касательной к кривой Γ_k в точке (x_k, \bar{y}) , т. е. $\operatorname{tg} \vartheta_k = \gamma'_k(\bar{y})$, $k = 1, 2, \dots, l$. Для внутреннего интеграла при $\vartheta = \vartheta_k$ для почти всех v таких, что $|v| \leq \lambda_2$ может быть применена лемма 1 из работы [7], где v является параметром. Для удобства читателя сформулируем соответствующее утверждение.

Следствие (из леммы 1 [7]). Пусть $f \in MV(\mathbb{R}^2)$ и зафиксирована функция $\phi \in \Phi$. Если в пределах интегрирования в (1.1) функция f имеет разрывы только на линии Γ_k , то для

почти всех v таких, что $|v| \leq \lambda_2$, в новой системе координат, повернутой на угол $\vartheta = \vartheta_k$, справедливо разложение

$$\int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)du = \tilde{\Delta}_k(v)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(v)) + \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f'_u(W)\phi_{\lambda_1}(u)du,$$

где $\tilde{\Delta}_k(v)$, $\tilde{\gamma}_k(v)$ соответственно скачок функции f на линии разрыва Γ_k и положение этого скачка в новой системе координат.

Подход к построению метода локализации и получению оценок в случае двух переменных во многом аналогичен случаю одной переменной. В следующей лемме получены оценки сверху для функции $\hat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x)$ вне такой окрестности точек $\{x_k\}_1^l$, что при любом $\vartheta: |\operatorname{tg} \vartheta| \leq M_1$ область усреднения в (1.1) (заштрихованный прямоугольник на рис. 1) не пересекается с кривыми $\{\Gamma_k\}_1^l$. Оценки снизу для функции $\hat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x)$ получены в окрестности точек $\{x_k\}_1^l$. Лемма является аналогом леммы 3 из [5]. Однако оценка в п. (б) получена более детальная, что позволяет улучшить оценки точности локализации в следующем разделе.

Положим $\varrho = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2}$, $M = 2 \max\{M_1, M_2\}$, $K = 2\varrho(1 + M^2)^{1/2}$, где M_1, M_2 — константы из условия (**). Напомним, что величина $\bar{\delta}$ входит в определение полосы \mathfrak{D} , B — константа из условия (**), величины a, b — из условия (b) на функцию ϕ . Через $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ обозначим $\|\cdot\|_{L_1(\mathbb{R})}$ и $\|\cdot\|_{L_2(\mathbb{R})}$.

Лемма 1. Пусть зафиксированы функции $\phi \in \Phi, \psi \in \Psi$ и положительные числа λ_1, λ_2 такие, что $\varrho \leq \min\{2, \bar{\delta}\}$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи справедливы следующие утверждения:

(а) для x таких, что $|x - x_k| \geq K$, $k = 1, 2, \dots, l$, имеет место оценка

$$\hat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x) \leq \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_1\lambda_1,$$

где $A_0 = \|\phi'\|_2\|\psi\|_2$, $A_1 = \|\phi\|_1$;

(б) если $\min_{1 \leq k, j \leq l, k \neq j} |x_k - x_j| \geq K$, то для всех x таких, что $|x - x_k| \leq b\lambda_1$, $k = 1, 2, \dots, l$, имеет место оценка

$$\hat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x) \geq a|\Delta_k(\bar{y})| - \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - A_1\lambda_1 - \frac{A_2\lambda_2^2}{\lambda_1} - \bar{B}\lambda_2,$$

где $A_2 = CM_2\Delta^{\max}$, $\bar{B} = aB$.

Доказательство. Условие $\varrho \leq \bar{\delta}$ гарантирует, что пределы интегрирования в (1.1) не выйдут из полосы \mathfrak{D} (интегрирование в правой части (1.1) проводится по заштрихованной области на рис. 1).

Введем $\Delta f = f - f^\delta$ и напомним, что $W = W(u, v) = (u \cos \vartheta - v \sin \vartheta + x, u \sin \vartheta + v \cos \vartheta + \bar{y})$. Тогда

$$F_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x, \vartheta) = F_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) + \Delta F_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x, \vartheta), \quad (2.1)$$

где

$$F_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta) = \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)\psi_{\lambda_2}(v)dudv, \quad \Delta F_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x, \vartheta) = \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} \Delta f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)\psi_{\lambda_2}(v)dudv.$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства Коши — Буняковского и перехода от функций ϕ'_{λ_1} , ψ_{λ_2} к функциям ϕ' , ψ :

$$\left| \Delta F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta) \right| \leq \|\phi'_{\lambda_1}\|_2 \|\psi_{\lambda_2}\|_2 \left(\int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} (\Delta f(W))^2 dudv \right)^{1/2} \leq \frac{A_0 \delta}{(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}}.$$

Проверим, что в полосе \mathfrak{D} при условии $|x - x_k| \geq K$, $k = 1, 2, \dots, l$, функция f не имеет разрывов в области интегрирования для всех ϑ . Ясно, что объединением всех областей интегрирования для всевозможных углов ϑ является окружность O_ϱ с радиусом ϱ и центром в точке (x, \bar{y}) (см. рис. 2). Рассмотрим полосу $\mathfrak{D}_\varrho = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, |y - \bar{y}| \leq \varrho\}$, содержащую окружность O_ϱ . Пусть точка $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Gamma_k \cap \mathfrak{D}_\varrho$. Запишем разложение

$$\tilde{x} - x_k = \gamma_k(\tilde{y}) - \gamma_k(\bar{y}) = \gamma'_k(\bar{y})(\tilde{y} - \bar{y}) + \frac{\gamma''_k(\xi)(\tilde{y} - \bar{y})^2}{2}, \quad \text{где } \xi \in (\tilde{y}, \bar{y}).$$

В силу условия (***) и ввиду того, что $\varrho \leq 2$, имеем оценку

$$|\tilde{x} - x_k| \leq \left(M_1 + \frac{M_2 \varrho}{2} \right) |\tilde{y} - \bar{y}| \leq M |\tilde{y} - \bar{y}|, \quad M = 2 \max\{M_1, M_2\}.$$

Кривая Γ_k в полосе \mathfrak{D}_ϱ не выходит за пределы области $\Omega_k = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) : |\tilde{y} - \bar{y}| \leq \varrho, |\tilde{x} - x_k| \leq M|\tilde{y} - \bar{y}|\}$ (Ω_k — это конус с вершиной в точке (x_k, \bar{y})). Значит множество $\Omega_k \supseteq \Gamma_k \cap \mathfrak{D}_\varrho$. Угол, тангенс которого равен M , обозначим через β (см. рис. 2). Условие $O_\varrho \cap \Omega_k = \emptyset$ достаточно, чтобы кривая Γ_k не пересекала окружность O_ϱ . Будем приближать точку x к точке x_k (для определенности можно считать, что $x < x_k$, как изображено на рис. 2). Тогда первой точкой x , в которой условие $O_\varrho \cap \Omega_k = \emptyset$ нарушится, будет точка касания окружности O_ϱ области Ω_k , как это показано на рис. 2. Из простых геометрических рассуждений видно, что условие $O_\varrho \cap \Omega_k = \emptyset$ следует из неравенства $|x - x_k| > \varrho / \cos \beta = \varrho(1 + M^2)^{1/2}$, т. е. достаточно потребовать $|x - x_k| \geq K = 2\varrho(1 + M^2)^{1/2}$.

Следовательно, в п. (а) формулировки леммы в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов. А в п. (б) в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k . Получим оценки для первого слагаемого в правой части (2.1) в том и в другом случае.

Рассмотрим случай (а). Перейдем от двойного интеграла в первом слагаемом в правой части (2.1) к повторному и для внутреннего интеграла применим формулу интегрирования

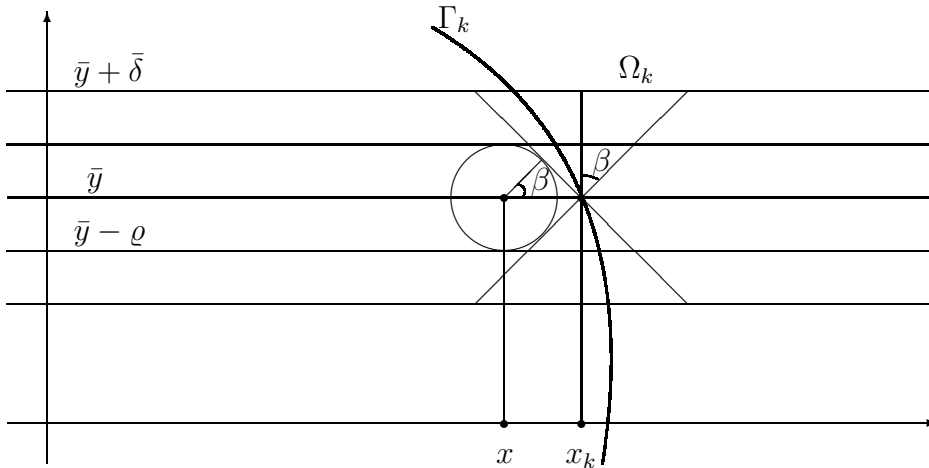


Рис. 2. Условие разделимости: Γ_k — линия разрыва; $x_k - x$ — минимальное расстояние, при котором область интегрирования не пересекается с кривой Γ_k ; Ω_k — конус с вершиной в точке (x_k, \bar{y}) и углом β .

по частям. Затем, используя условие (*) на функцию f , условие (a) на функцию ϕ и условия (b'), (c') на функцию ψ , получаем требуемую оценку:

$$\begin{aligned} |F_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta)| &= \left| \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \left(\int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f(W)\phi'_{\lambda_1}(u)du \right) \psi_{\lambda_2}(v)dv \right| \\ &= \left| \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \left(\int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f'_u(W)\phi_{\lambda_1}(u)du \right) \psi_{\lambda_2}(v)dv \right| \leq \operatorname{ess\,sup}_{(u,v) \in D} |f'_u| \|\phi\|_1 \lambda_1 \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(v)dv \leq A_1 \lambda_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай (б). Поскольку в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k , то, применяя следствие (из леммы 1 работы [7]) для внутреннего интеграла в первом слагаемом (2.1) для x таких, что $|x - x_k| \leq b\lambda_1$ при $\vartheta = \vartheta_k$, имеем равенство

$$F_{\lambda_1\lambda_2}(x, \vartheta_k) = \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \tilde{\Delta}_k(v)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(v))\psi_{\lambda_2}(v)dv + \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \left(\int_{-\lambda_1}^{\lambda_1} f'_u(W)\phi_{\lambda_1}(u)du \right) \psi_{\lambda_2}(v)dv. \quad (2.2)$$

Второе слагаемое было рассмотрено выше в случае (a). Введем величину $\tilde{\gamma}_k(\bar{v}) = (x - x_k) \cos \vartheta_k$. Ясно, что $|\bar{v}| \leq \lambda_2$. Используя формулу Лагранжа $\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(v)) = \phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v})) + \phi'_{\lambda_1}(\xi)(\tilde{\gamma}_k(v) - \tilde{\gamma}_k(\bar{v}))$, где $\xi \in (\tilde{\gamma}_k(v), \tilde{\gamma}_k(\bar{v}))$, первое слагаемое в правой части (2.2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \tilde{\Delta}_k(v)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(v))\psi_{\lambda_2}(v)dv &= \phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v})) \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \tilde{\Delta}_k(v)\psi_{\lambda_2}(v)dv \\ &+ \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \tilde{\Delta}_k(v)\phi'_{\lambda_1}(\xi)(\tilde{\gamma}_k(v) - \tilde{\gamma}_k(\bar{v}))\psi_{\lambda_2}(v)dv. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Поскольку функция $\tilde{\Delta}_k$ непрерывна, то она сохраняет знак. Так как $\tilde{\Delta}_k(v) = \tilde{\Delta}_k(0) + \tilde{\Delta}'_k(\tau)v$, $\tau \in (0, v)$, для первого слагаемого в правой части (2.3) имеем

$$\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v})) \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \tilde{\Delta}_k(v)\psi_{\lambda_2}(v)dv = \tilde{\Delta}_k(0)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v})) \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(v)dv + \phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v})) \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \tilde{\Delta}'_k(\tau)v\psi_{\lambda_2}(v)dv.$$

Поскольку $|x - x_k| \leq b\lambda_1$, то $|\tilde{\gamma}_k(\bar{v})| \leq b\lambda_1$. Величина $\tilde{\Delta}_k(0)$ в исходной системе координат равна $\Delta_k(\bar{y})$. Используя условия (b) на функцию ϕ и (b') на функцию ψ , первое слагаемое в правой части в последнем выражении оценим снизу следующим образом:

$$\left| \tilde{\Delta}_k(0)\phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v})) \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(v)dv \right| \geq a|\Delta_k(\bar{y})|.$$

Оценим второе слагаемое, используя условие (**) на функцию f и условия (b'), (c') на функцию ψ :

$$\left| \phi_{\lambda_1}(\tilde{\gamma}_k(\bar{v})) \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \tilde{\Delta}'_k(\tau)v\psi_{\lambda_2}(v)dv \right| \leq aB\lambda_2.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.3). Поскольку в данной системе координат $\tilde{\gamma}_k(0) = 0$ и $\tilde{\gamma}'_k(0) = 0$, то

$$|\tilde{\gamma}_k(v) - \tilde{\gamma}_k(\bar{v})| \leq \frac{|\tilde{\gamma}''_k(\xi_1)|v^2}{2} + \frac{|\tilde{\gamma}''_k(\xi_2)|\bar{v}^2}{2} \leq M_2\lambda_2^2, \quad \xi_1 \in (0, v), \quad \xi_2 \in (0, \bar{v}).$$

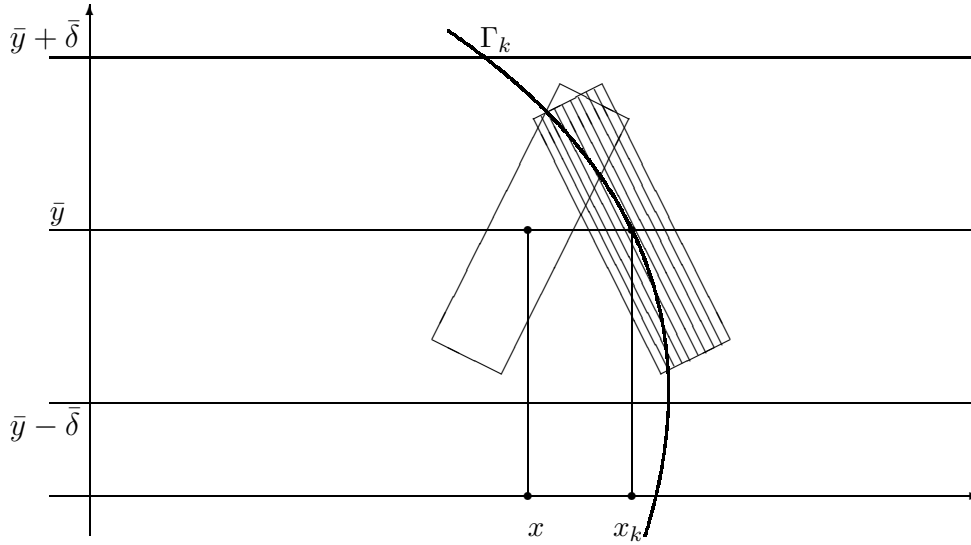


Рис. 3. Иллюстрация к лемме 2: Γ_k — линия разрыва функции f ; x_k — аппроксимируемая величина; x — текущая точка; заштрихованный прямоугольник — область усреднения функции $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x_k, \vartheta_k)$; незаштрихованный прямоугольник — область усреднения функции $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta)$, $|\operatorname{tg} \vartheta| \leq M_1$.

Таким образом, используя условие (a) на функцию ϕ и условие (b') на функцию ψ , для второго слагаемого в правой части (2.3) имеем

$$\left| \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \tilde{\Delta}_k(v) \phi'_{\lambda_1}(\xi) (\tilde{\gamma}_k(v) - \tilde{\gamma}_k(\bar{v})) \psi_{\lambda_2}(v) dv \right| \leq \frac{CM_2 \Delta^{\max} \lambda_2^2}{\lambda_1} \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} \psi_{\lambda_2}(v) dv \leq \frac{A_2 \lambda_2^2}{\lambda_1}.$$

Объединяя полученные выше оценки, получаем требуемое соотношение в п. (б).

Лемма 1 доказана.

В следующей лемме получена оценка сверху для функции $\hat{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x)$ вне отрезка $[x_k - V, x_k + V]$, $V = 2\lambda_1(1 + M_1^2)^{1/2}$, которая позволит улучшить оценку точности аппроксимации точек $\{x_k\}_1^l$ по сравнению с [5]. Заметим, что далее $V < K$ (см. лемму 1).

Лемма 2. Пусть зафиксированы функции $\phi \in \Phi, \psi \in \Psi$ и положительные числа λ_1, λ_2 такие, что $\varrho \leq \min\{2, \bar{\delta}\}$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для x таких, что $|x - x_k| \geq V$, $k = 1, 2, \dots, l$, имеет место оценка

$$\hat{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x) \leq \frac{a|\Delta_k(\bar{y})|}{2} + \frac{A_0 \delta}{(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}} + A_1 \lambda_1 + \frac{A_2 \lambda_2^2}{\lambda_1} + \bar{B} \lambda_2.$$

Доказательство. При условии $|x - x_k| \geq V$ пересечение областей усреднения в точке x и в точке x_k может быть либо пустым, либо принадлежать полуплоскости $y \geq \bar{y}$, как это показано на рис. 3, либо принадлежать полуплоскости $y \leq \bar{y}$. Следовательно, площадь области пересечения не может превышать половины площади всей области усреднения, и в область усреднения в точке x не может попасть больше половины кривой Γ_k , которая лежит в области усреднения в точке x_k . Используя оценки леммы 1 и условия на функции ϕ и ψ , получаем требуемое неравенство.

Лемма 2 доказана.

3. Метод локализации и теорема сходимости

Предположим, что нам известен интервал $(-d, d)$, содержащий искомые точки $\{x_k\}_1^l$. Считаем, что вместо функции $\hat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta$ вычисляется ее приближенное значение $\tilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta$ в точках равномерной сетки на отрезке $[-d-h, d+h]$: $x^i = -d-h + i\Delta x$, $i = 1, 2, \dots, I$, с шагом $\Delta x = 2(d+h)/I$. Параметр h будет определен позже. Предполагаем, что выполнено следующее условие.

Условие аппроксимации интеграла при вычислении вспомогательной функции⁵

$$\tilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^i) = \hat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^i) + \Delta\tilde{F}(x^i), \quad \max_{x^i} |\Delta\tilde{F}(x^i)| \leq \frac{P}{16}. \quad (3.1)$$

Положим порог в методе локализации $P = a\Delta^{\min}/2$. Напомним, что $K = 2\varrho(1 + M^2)^{1/2}$, где $\varrho = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2}$, $M = 2\max\{M_1, M_2\}$. В работе метода локализации также используются параметры λ_1, λ_2, h , которые будут выписаны ниже. Через $[z]$ обозначена целая часть вещественного числа z плюс единица.

А л г о р и т м $ПД_\Delta$. Положим начальные $i := 0$, $m := 0$.

Шаг алгоритма: если $x^i \geq d$, то завершаем процесс;

иначе, если $|\tilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^i)| \geq P$, то положим $m := m + 1$, $a_m := x^i$, $i := i + [2K/\Delta x]$;
выберем в качестве x_m^δ точку сетки x^i на отрезке $[a_m, a_m + K]$, в которой функция $\tilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta$ принимает наибольшее значение;
иначе $i := i + 1$;

повторяем шаг алгоритма.

Таким образом, с помощью алгоритма $ПД_\Delta$ по функции $\tilde{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta$ вычисляются величина m , относительно которой будет доказано, что $m = l$, и приближения x_k^δ , $k = 1, 2, \dots, l$, для аппроксимации точек x_k , $k = 1, 2, \dots, l$.

Сформулируем теорему сходимости алгоритма $ПД_\Delta$ для рассматриваемой задачи. Напомним, что $A_0 = \|\phi'\|_2 \|\psi\|_2$, $A_1 = \|\phi\|_1$, $A_2 = CM_2\Delta^{\max}$, $\bar{B} = aB$.

Введем константы

$$\omega = \left(\frac{P^2}{16^2 A_0 A_2}\right)^{1/3}, \quad D = \frac{16A_0}{P\omega}, \quad \tilde{D} = 2D(1 + M_1^2)^{1/2},$$

$$\delta_0 = \min \left\{ \omega^3, \left(\frac{\bar{\delta}}{2D\omega^2}\right)^{3/2}, \left(\frac{1}{D\omega^2}\right)^{3/2}, \left(\frac{P}{16A_1D}\right)^{3/4}, \left(\frac{P}{16\bar{B}D\omega^2}\right)^{3/2} \right\}$$

и функции

$$\lambda_1(\delta) = D\delta^{4/3}, \quad \lambda_2(\delta) = D\omega^2\delta^{2/3}, \quad h(\delta) = 12D\omega^2(1 + M^2)^{1/2}\delta^{2/3}.$$

Положим шаг сетки $\Delta x(\delta) = b\lambda_1(\delta)$ (без ограничения общности этого всегда можно добиться за счет выбора I и увеличения d). Поскольку $\delta_0 \leq \omega^3$, то $\varrho = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^{1/2} < 2D\omega^2\delta^{2/3}$. Следовательно, $K(\delta) = 2\varrho(1 + M^2)^{1/2}$ будет величиной порядка $O(\delta^{2/3})$ и $K(\delta) < 4D\omega^2(1 + M^2)^{1/2}\delta^{2/3}$. Таким образом, функция $h(\delta) > 3K(\delta)$. При таком выборе параметров величины Δx и $V = 2\lambda_1(1 + M_1^2)^{1/2} = \tilde{D}\delta^{4/3}$ меньше величины K .

Теорема. Пусть зафиксированы функции $\phi \in \Phi$ и $\psi \in \Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \leq \delta_0$ при связи параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$, $\Delta x = \Delta x(\delta)$ и выполнении условия разделимости $\min_{1 \leq k, j \leq l, k \neq j} |x_k - x_j| \geq h(\delta)$ для алгоритма $ПД_\Delta$ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^\delta| \leq \tilde{D}\delta^{4/3}$, $k = 1, 2, \dots, l$.

⁵Для полной дискретизации метода необходимо задать модель измерительных датчиков и перейти в вычислении функции $\hat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x)$ от интегралов к суммам; мы в настоящей статье не проводим этот этап для существенного упрощения выкладки.

Доказательство. Пусть $\delta \leq \delta_0$ и $\lambda_1 = \lambda_1(\delta), \lambda_2 = \lambda_2(\delta), \Delta x = \Delta x(\delta)$. Условие на величину ρ из лемм 1, 2 выполнено за счет выбора δ_0 . Рассмотрим $\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta$ в точках сетки $x^i: |x^i - x_k| \leq b\lambda_1, k = 1, 2, \dots, l$, (такие точки существуют, поскольку $\Delta x = b\lambda_1$). Согласно п. (б) леммы 1, используя условие (**) и условие аппроксимации (3.1), имеем

$$\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^i) \geq a\Delta^{\min} - \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - A_1\lambda_1 - \frac{A_2\lambda_2^2}{\lambda_1} - \bar{B}\lambda_2 - \frac{P}{16}.$$

Заметим, что условие $\delta \leq \delta_0$ обеспечивает выполнение неравенств $A_1\lambda_1 \leq P/16$ и $\bar{B}\lambda_2 \leq P/16$. Благодаря выбору констант D и ω получаем $A_0\delta/(\lambda_1\lambda_2)^{1/2} = P/16$ и $A_2\lambda_2^2/\lambda_1 = P/16$. Следовательно,

$$\frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_1\lambda_1 + \frac{A_2\lambda_2^2}{\lambda_1} + \bar{B}\lambda_2 + \frac{P}{16} \leq \frac{5P}{16}.$$

Таким образом, при данном выборе параметров для x^i таких, что $|x^i - x_k| \leq b\lambda_1$, получаем

$$\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^i) \geq a\Delta^{\min} - \frac{5P}{16} > P. \quad (3.2)$$

Введем множество $Q = \bigcup_{k=1}^l \{x: |x - x_k| \leq K\}$. Используя оценку из п. (а) леммы 1 и условие аппроксимации (3.1), для $x^i \notin Q$ имеем

$$\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^i) \leq \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_1\lambda_1 + \frac{P}{16} \leq \frac{3P}{16} < P. \quad (3.3)$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т. е. алгоритм PD_Δ должен найти приближения x_1^δ, x_2^δ для точек x_1, x_2 . Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом алгоритм PD_Δ должен найти l точек. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций f , для которых выполнено условие разделимости: $x_2 - x_1 \geq h(\delta) > 3K$.

Согласно (3.2) во всех точках сетки x^i таких, что $|x^i - x_k| \leq b\lambda_1$, имеем $\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^i) > P$. Поскольку шаг сетки $\Delta x = b\lambda_1$, то для любого k на отрезке $[x_k - b\lambda_1, x_k + b\lambda_1]$ найдется точка сетки $x^i < x_k$. Следуя алгоритму PD_Δ , пусть x^i первая точка сетки, в которой $\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^i) \geq P$. Так как $x_1 < x_2$, то $x^i < x_1$. Заметим, что x^i не обязательно принадлежит отрезку $[x_1 - b\lambda_1, x_k + b\lambda_1]$, но $|x^i - x_1| \leq K$, согласно оценке (3.3). Следовательно, x_1 принадлежит отрезку $[x^i, x^i + K] =: [a_1, a_1 + K]$.

Далее, следуя алгоритму PD_Δ , положим $i := i + \lceil 2K/\Delta x \rceil$, т. е. $x^i = a_1 + \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x$. Ясно, что $x^i - x_1 > K$. Покажем, что $x^i < x_2$. Используя условие разделимости, имеем

$$\begin{aligned} x_2 - x^i &= x_2 - a_1 - \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x > x_2 - x_1 - \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x \\ &\geq x_2 - x_1 - 2K - \Delta x \geq x_2 - x_1 - h \geq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $x^i < x_2$. Далее, согласно (3.2), найдется точка сетки x^i такая, что $\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^i) \geq P$. Следуя (3.3), $x_2 - x^i \leq K$, т. е. $x_2 \in [x^i, x^i + K] =: [a_2, a_2 + K]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2 + \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x, d]$. Ясно, что он не содержит точек множества Q . Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Выберем в качестве x_k^δ точку сетки x^i , в которой сеточная функция $\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta$ принимает наибольшее значение на отрезке $[a_k, a_k + K]$. Для всех точек x^i таких, что $|x^i - x_k| \leq b\lambda_1$, согласно п. (б) леммы 1, при данном выборе параметров имеем следующую оценку снизу для функции $\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta$:

$$\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^i) \geq a|\Delta_k(\bar{y})| - \frac{5P}{16} \geq \frac{27a|\Delta_k(\bar{y})|}{32}.$$

С другой стороны, оценим сверху функцию $\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x)$ для $x \notin [x_k - V, x_k + V]$, где $V = 2\lambda_1(1 + M_1^2)^{1/2} = \tilde{D}\delta^{4/3}$. Используя лемму 2 и предыдущую оценку, имеем

$$\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x) \leq \frac{a|\Delta_k(\bar{y})|}{2} + \frac{5P}{16} \leq \frac{11a|\Delta_k(\bar{y})|}{32}.$$

Следовательно, точка x_k^δ принадлежит отрезку $[x_k - V, x_k + V]$, т. е. получаем окончательную оценку $|x_k - x_k^\delta| \leq \tilde{D}\delta^{4/3}$. \square

Заключение. В работах [5–7] оценка точности локализации и величина $h(\delta)$ имеют порядок $O(\delta)$. В настоящей статье благодаря модификации метода локализации и усовершенствованию оценки удалось получить для точности локализации порядок $O(\delta^{4/3})$ при худшем порядке $O(\delta^{2/3})$ для функции $h(\delta)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
2. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / под ред. Я. А. Фурмана. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
3. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
4. Vasin V. V., Ageev A. L. Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 p.
5. Антонова Т. В. Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
6. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.
7. Агеев А. Л., Антонова Т. В. Методы аппроксимации линий разрыва зашумленной функции двух переменных со счетным числом особенностей // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2(62). С. 3–11. doi: 10.17377/sibjim.2015.18.201.
8. Агеев А. Л., Антонова Т. В. О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 30–45.
9. Ageev A. L., Antonova T. V. New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. Vol. 21, no. 2. P. 177–191. doi: 10.1515/jip-2012-0039.
10. Курликовский Д. В., Агеев А. Л., Антонова Т. В. Исследование порогового (корреляционного) метода и его приложение к локализации особенностей // Сиб. электрон. мат. известия. 2016. Т. 13. С. 829–848. doi: 10.17377/semi.2016.13.066.

Агеев Александр Леонидович

Поступила 22.12.2016

д-р физ.-мат. наук, зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Уральский федеральный университет

e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна

д-р физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Mallat S. *A wavelet tour of signal processing: the sparse way*. New York, Academic Press, 1999, 620 p. ISBN: 0-12-466606-X. Translated under the title *Vvejulety v obrabotke signalov*, Moscow, Mir Publ., 2005, 671 p.
2. Furman Ya. A. (ed.) *Vvedenie v konturnyi analiz i ego prilozheniya k obrabotke izobrazhenii i signalov* [Introduction to contour analysis and its applications to image and signal processing]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 596 p. ISBN 5-9221-0255-9.

3. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. Utrecht, VSP, 2002, 281 p. ISBN-10: 906764367X. Original Russian text published in *Teoriya linejnyh nekorrektnyh zadach i ee prilozhenija*, M.: Nauka, Publ., 1978, 206 p.
4. Vasin V. V., Ageev A. L. *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht: VSP, 1995, 255 p.
5. Antonova T.V. Localization method for lines of discontinuity of an approximately defined function of two variables. *Numer. Analys. Appl.* , 2012, vol. 5, no. 4, pp. 285–296. doi: 10.1134/S1995423912040015 .
6. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines of a noisy function of two variables. *J. Appl. Ind. Math.*, 2012, vol. 6, iss. 3, pp. 269–279. doi: 10.1134/S1990478912030015 .
7. Ageev A.L., Antonova T.V. Approximation of discontinuity lines for a noisy function of two variables with countably many singularities. *J. Appl. Ind. Math.*, 2015, vol. 9, no. 3, pp. 297–305. doi: 10.1134/S1990478915030011.
8. Ageev A.L., Antonova T.V. On ill-posed problems of localization of singularities. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 3, pp. 30–45 (in Russian).
9. Ageev A.L., Antonova T.V. New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2013, vol. 21, no. 2, pp. 177–191. doi: 10.1515/jip-2012-0039 .
10. Ageev A.L., Antonova T.V., Kurlikovskii D.V. Research of a threshold (correlation) method and application for localization of singularities. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 829–848. doi: 10.17377/semi.2016.13.066 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on December 22, 2016.

Aleksandr Leonidovich Ageev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: ageev@imm.uran.ru .

Tat'yana Vladimirovna Antonova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: tvantonova@imm.uran.ru .

УДК 519.176

О ПОРОГОВЫХ ГРАФАХ И РЕАЛИЗАЦИЯХ ГРАФИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ

В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок

Тройка вершин (x, v, y) в графе $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$, называется повышающей, если $\deg(x) \leq \deg(y)$ и — понижающей, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. Понижающим вращением ребра в графе G , отвечающим понижающей тройке (x, v, y) , называется преобразование графа, при котором ребро xv заменяется на ребро vy . В работе доказано, что граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не содержит повышающих троек вершин. Из этого результата вытекают три следствия.

1. Графическое разбиение, отвечающее графу G , является максимальным графическим разбиением тогда и только тогда, когда граф G является пороговым.

2. Произвольное разбиение λ является максимальным графическим разбиением тогда и только тогда, когда голова разбиения λ равна его хвосту.

3. Для произвольного графического разбиения μ все его реализации H получаются с помощью конечных последовательностей понижающих вращений ребер из пороговых реализаций G подходящих максимальных графических разбиений λ таких, что $\lambda \geq \mu$.

Ключевые слова: граф, пороговый граф, решетка, разбиение натурального числа, графическое разбиение, диаграмма Ферре.

V. A. Baransky, T. A. Senchonok. On threshold graphs and realizations of graphical partitions.

A triple of vertices (x, v, y) in a graph $G = (V, E)$ such that $xv \in E$ and $vy \notin E$ is called lifting if $\deg(x) \leq \deg(y)$ and lowering if $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. A lowering rotation of an edge in a graph G corresponding to a lowering triple (x, v, y) is a transformation of this graph that replaces the edge xv by the edge vy . We prove that G is a threshold graph if and only if it has no lifting triples of vertices. This result has three corollaries:

1. The graphical partition corresponding to G is a maximal graphical partition if and only if G is a threshold graph.

2. An arbitrary partition λ is a maximal graphical partition if and only if the head of λ is equal to its tail.

3. Each realization of an arbitrary graphical partition μ can be obtained by a finite sequence of lowering rotations of edges from a threshold realization of an appropriate maximal graphical partition λ such that $\lambda \geq \mu$.

Keywords: graph, threshold graph, lattice, integer partition, graphical partition, Ferrers diagram.

MSC: 05C07

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-22-31

1. Введение

В данной работе под графами мы понимаем обыкновенные графы, т. е. графы без петель и кратных ребер. Мы будем придерживаться для графов терминологии и обозначений, принятых в [1].

Разбиением [2] называется последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ целых неотрицательных чисел такая, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, λ содержит лишь конечное число ненулевых компонент и $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = m$, где m — натуральное число. Говорят также, что λ является разбиением натурального числа m , а m — весом разбиения λ , и пишут $m = \text{sum}(\lambda)$. Натуральное число $l = l(\lambda)$ такое, что $\lambda_l > 0$ и $\lambda_{l+1} = \lambda_{l+2} = \dots = 0$, называют длиной разбиения λ . Для удобства разбиение λ иногда будем записывать в виде конечной последовательности в любом из следующих видов: $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l+2}) = \dots$, т. е. будем опускать нули, начиная с некоторой компоненты, помня при этом, что имеем дело с разбиением.

Через NPL обозначим множество всех разбиений всех натуральных чисел, а через $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, — множество всех разбиений натурального числа m . На множествах NPL и $NPL(m)$ рассмотрим отношение доминирования \supseteq [3], полагая $\lambda \supseteq \mu$, если

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\geq \mu_1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &\geq \mu_1 + \mu_2, \\ &\dots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_i &\geq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_i, \\ &\dots, \end{aligned}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$.

Разбиение удобно изображать его *диаграммой Ферре*, которую можно представлять себе в виде конечного набора квадратных блоков одинакового размера, составляющих “ступенчатую” фигуру (пример такой диаграммы см. [4, рис. 1]).

Определим *элементарные преобразования* разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ числа $m = \text{sum}(\lambda)$ (см. [5–7]).

Пусть существуют натуральные числа $i, j \in \{1, \dots, n\}$ такие, что $i < j \leq l(\lambda) + 1 = n$, и выполняется: 1) $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$ и $\lambda_{j-1} \geq \lambda_j + 1$; 2) $\lambda_i \geq 2 + \lambda_j$. Будем говорить, что разбиение $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_i - 1, \dots, \lambda_j + 1, \dots, \lambda_n)$ получено из разбиения $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$ *элементарным преобразованием первого типа* (или *перекидыванием блока*). Отметим, что μ отличается от λ точно на двух компонентах с номерами i и j . Для диаграммы Ферре такое преобразование означает перемещение верхнего блока i -го столбца вправо на верх j -го столбца. Условия 1) и 2) гарантируют, что после такого перемещения снова получится разбиение. Отметим, что элементарное преобразование первого типа сохраняет вес разбиения.

Определим еще один тип преобразований разбиений из NPL . Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in NPL$ и $\lambda_i - 1 \geq \lambda_{i+1}$, где $1 \leq i \leq l(\lambda)$. Преобразование, заменяющее λ на $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \dots)$, будем называть *элементарным преобразованием второго типа* (или *удалением блока*). Отметим, что удаление блока уменьшает вес разбиения на 1. Преобразование, обратное к элементарному преобразованию второго типа, будем называть *вставкой блока*.

В случае, когда разбиение μ получено из разбиения λ с помощью элементарного преобразования первого или второго типа, будем кратко писать $\lambda \rightarrow \mu$.

На множестве NPL и множествах $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, определим отношение \geq , полагая $\lambda \geq \mu$, если μ можно получить из λ с помощью последовательного применения конечного числа (возможно, нулевого) элементарных преобразований указанных типов. Ясно, что для $NPL(m)$ мы можем использовать только элементарные преобразования первого типа, которые не меняют вес разбиений. В [6; 7] показано, что отношение \geq на каждом из рассматриваемых множеств совпадает с отношением доминирования \supseteq . Важно отметить, что использование элементарных преобразований порой бывает удобнее рассмотрения неравенств из определения отношения \supseteq .

Отметим также, что NPL и $NPL(m)$, где $m \in \mathbb{N}$, являются решетками относительно отношения \geq (см. [6; 7]), причем решетка NPL представляет из себя дизъюнктивное объединение решеток $NPL(m)$, где m пробегает \mathbb{N} , отвечающее некоторой естественной транзитивной системе вложений [7].

Зафиксируем натуральное число n . Конечную последовательность целых неотрицательных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ такую, что $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, будем называть *n -последовательностью*; n -последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ называется *графической*, если существует (обыкновенный) граф $G = (V, E)$ на n вершинах, для которого $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $\text{deg}(v_1) = \lambda_1, \text{deg}(v_2) = \lambda_2, \dots, \text{deg}(v_n) = \lambda_n$. Такой граф G называют *реализацией n -последовательности λ* и говорят, что λ реализуется графом G . Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ называется *графическим*, если графической является l -последовательность $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$, где $l = l(\lambda)$.

Очевидно, разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ является графическим тогда и только тогда, когда графической является любая из n -последовательностей $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ при $n \geq l(\lambda)$.

Отметим, что в [8] нами указан алгоритм порождения всех графических n -последовательностей для заданного n , который при своей работе не использует неграфических n -последовательностей. Этот алгоритм последовательно порождает все графические n -последовательности с помощью специальных элементарных преобразований второго типа, начиная с n -последовательности $(n-1, n-1, \dots, n-1)$.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный ненулевой граф, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и $\deg(v_1) = \lambda_1 \geq \deg(v_2) = \lambda_2 \geq \dots \geq \deg(v_n) = \lambda_n$. Разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$ будем называть *графическим разбиением, отвечающим графу G* , будем обозначать его через $\text{gpt}(G)$ и будем говорить, что G является *реализацией* для λ . Ясно, что добавление к графу G или удаление из него изолированных вершин не меняет отвечающего ему графического разбиения. Графическое разбиение называется *униграфическим*, если оно обладает единственной реализацией с точностью до изоморфизма и изолированных вершин.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ — разбиение. Определим *ранг Дёрфи* $r(\lambda)$ разбиения λ , полагая $r(\lambda) = \max\{i | \lambda_i \geq i\}$. Иногда ранг Дёрфи будем называть просто рангом разбиения. Очевидно, ранг Дёрфи $r = r(\lambda)$ разбиения λ равен числу блоков на главной диагонали диаграммы Ферре этого разбиения. Максимальный квадрат, составленный из блоков и симметричный относительно главной диагонали, называют *квадратом Дёрфи* разбиения λ (см. [4, рис. 1]).

Для каждого разбиения λ мы будем рассматривать *сопряженное* разбиение λ^* , компоненты которого равны числу блоков в соответствующих строках диаграммы Ферре этого разбиения. Ясно, что диаграмму Ферре разбиения λ^* можно получить из диаграммы Ферре разбиения λ с помощью зеркальной симметрии относительно главной диагонали. Конечно, всегда справедливо равенство $r(\lambda^*) = r(\lambda)$.

Заметим (см. [6]), что для любого $m \in \mathbb{N}$ отображение $\lambda \rightarrow \lambda^*$ является антиавтоморфизмом решетки $NPL(m)$ таким, что $(\lambda^*)^* = \lambda$, и условие $\lambda \geq \mu$ эквивалентно условию $\lambda^* \leq \mu^*$.

Определим теперь голову и хвост разбиения $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, ранг которого равен r .

В качестве *головы* $\text{hd}(\lambda)$ возьмем разбиение, которое получается из разбиения λ уменьшением всех первых r компонент на одно и то же число $r-1$ и обнулением всех компонент с номерами $r+1, r+2, \dots$ (для примера см. [4, рис. 2]).

В качестве *хвоста* $\text{tl}(\lambda)$ возьмем разбиение, для которого диаграмма Ферре сопряженного разбиения получается из диаграммы Ферре разбиения λ удалением первых r столбцов, т.е. диаграмма Ферре разбиения $\text{tl}^*(\lambda)$ расположена справа от квадрата Дёрфи (см. [4, рис. 2]).

Ясно, что верхняя строка квадрата Дёрфи всегда входит в диаграмму Ферре разбиения $\text{hd}(\lambda)$ и является в ней первой строкой, разбиение $\text{hd}(\lambda)$ “считывается” по столбцам слева направо, а длина разбиения $\text{hd}(\lambda)$ равна r . Разбиение $\text{tl}(\lambda)$ “считывается” по строкам снизу вверх, и длина разбиения $\text{tl}(\lambda)$ равна $l(\lambda) - r(\lambda)$.

Тройка вершин (x, v, y) в графе $G = (V, E)$ такая, что $xv \in E$ и $vy \notin E$, называется *повышающей*, если $\deg(x) \leq \deg(y)$, и *понижающей*, если $\deg(x) \geq 2 + \deg(y)$. Пусть x, v, y — три различные вершины графа $G = (V, E)$ такие, что $xv \in E$ и $vy \notin E$ (см. рис. 1):

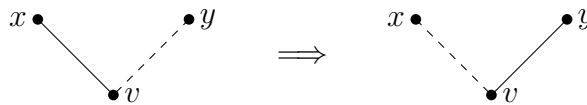


Рис. 1

Рассмотрим преобразование φ графа G такое, что $\varphi(G) = G - xv + vy$, т.е. из графа G удаляется ребро xv , а затем добавляется ребро vy . Преобразование φ будем называть *вращением ребра* (в графе G вокруг вершины v), отвечающим тройке (x, v, y) (см. рис. 1). Вращение ребра в графе $\varphi(G)$, отвечающее тройке (y, v, x) , будем называть *обратным вращением ребра* к φ .

Вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , называется 1) *повышающим*, если $\deg_G(x) \leq \deg_G(y)$; 2) *понижающим*, если $\deg_G(x) \geq 2 + \deg_G(y)$; 3) *сохраняющим*, если $\deg_G(x) = 1 + \deg_G(y)$. Отметим, что случай $\deg_G(x) = 1$ и случай $\deg_G(y) = 0$ будем считать допустимыми.

Очевидно, вращение ребра в графе G является понижающим тогда и только тогда, когда обратное к нему вращение ребра является повышающим.

Пусть $\text{gpt}(G)$ — графическое разбиение, отвечающее графу G , и φ — вращение ребра в графе G , отвечающее тройке (x, v, y) , где $xv \in E$ и $vy \notin E$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если φ — повышающее вращение ребра, то $\text{gpt}(G) < \text{gpt}(\varphi(G))$, причем $\text{gpt}(G)$ получается из $\text{gpt}(\varphi(G))$ с помощью одного элементарного преобразования первого типа, а G получается из $\varphi(G)$ с помощью обратного (понижающего) вращения ребра.
2. Если φ — понижающее вращение ребра, то $\text{gpt}(G) > \text{gpt}(\varphi(G))$, причем $\text{gpt}(\varphi(G))$ получается из $\text{gpt}(G)$ с помощью одного элементарного преобразования первого типа, а G получается из $\varphi(G)$ с помощью обратного (повышающего) вращения ребра.
3. Если φ — сохраняющее вращение ребра, то $\text{gpt}(G) = \text{gpt}(\varphi(G))$, причем G получается из $\varphi(G)$ с помощью обратного (сохраняющего) вращения ребра.

Отметим, что любое графическое разбиение имеет четный вес $2m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Множество всех графических разбиений фиксированного веса $2m$ является порядковым идеалом и нижней подполурешеткой решетки $NPL(2m)$ (см., например, лемму 1 [4]), т. е. оно замкнуто относительно взятия меньших разбиений. Графическое разбиение λ веса $2m$ будем называть *максимальным графическим разбиением*, если оно максимально в множестве всех графических разбиений из $NPL(2m)$.

Напомним (см., например, [9]), что граф $G = (V, E)$ называется *пороговым*, если его множество вершин V представимо в виде дизъюнктного объединения клики V_1 и антиклики V_2 , причем множество всех окрестностей вершин из V_2 образует цепь относительно теоретико-множественного включения \subseteq . Допускаются случаи, когда $V_1 = \emptyset$ или $V_2 = \emptyset$, т. е. полные и нулевые графы являются пороговыми. Ясно, что добавление или удаление изолированных вершин не меняет свойство графа быть пороговым. В монографии [9] представлено много других эквивалентных определений пороговых графов.

Основная цель данной работы состоит в доказательстве следующей теоремы и трех ее следствий.

Теорема 1. *Граф является пороговым тогда и только тогда, когда он не содержит повышающих троек вершин.*

Следствие 1. *Графическое разбиение, отвечающее графу G , является максимальным графическим разбиением тогда и только тогда, когда граф G пороговый.*

Следствие 2. *Произвольное разбиение λ является максимальным графическим разбиением тогда и только тогда, когда $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$.*

Следствие 3. *Для произвольного графического разбиения μ все его реализации H , и только они, получаются из пороговых реализаций G подходящих максимальных графических разбиений λ таких, что $\lambda \geq \mu$ и $\text{sum}(\lambda) = \text{sum}(\mu)$, с помощью конечных последовательностей понижающих вращений ребер, отвечающих последовательности элементарных преобразований первого типа от λ до μ ; в частности, любой граф с помощью конечной последовательности повышающих вращений ребер сводится к пороговому графу и получается из него с помощью обратных понижающих вращений ребер, производимых в обратном порядке.*

2. Доказательство основной теоремы и ее следствий

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный пороговый граф, не являющийся полным или нулевым графом. Будем считать, что в G нет изолированных вершин. Пусть $V = V_1 \dot{\cup} V_2$, где V_1 — клика, т. е. множество вершин, порождающих полный граф, V_2 — антиклика, т. е. множество вершин, порождающих нулевой граф, и множество окрестностей $N(v)$ ($v \in V_2$) образует цепь относительно \subseteq . Если в V_2 найдется вершина, смежная со всеми вершинами из V_1 , то перенесем ее из V_2 в V_1 . Ясно, что мы получим полный граф на новом множестве V_1 , и условие на окрестности вершин для нового множества V_2 сохранится. Поэтому будем считать, что степень любой вершины из V_2 строго меньше числа $|V_1|$.

Упорядочим множество V таким образом, что $V_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{t+1}\}$, $V_2 = \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{t+2}\}$ и $N(v_n) \subseteq N(v_{n-1}) \subseteq \dots \subseteq N(v_{t+2}) \subset V_1$ для некоторого натурального числа t такого, что $t \geq 1$. Отметим, что последнее включение является строгим. Здесь через $N(v_i)$ мы обозначаем окрестность вершины v_i .

Последовательно продвигаясь по окрестностям вершин $v_n, v_{n-1}, \dots, v_{t+2}$, на множестве V_1 выберем такой порядок вершин v_1, v_2, \dots, v_{t+1} , что

$$\begin{aligned} N(v_n) &= \{v_1, \dots, v_{\lambda_n}\}, \\ N(v_{n-1}) &= \{v_1, \dots, v_{\lambda_{n-1}}\}, \\ &\dots \\ N(v_{t+2}) &= \{v_1, \dots, v_{\lambda_{t+2}}\}, \end{aligned}$$

где $\lambda_n = |N(v_n)|$, $\lambda_{n-1} = |N(v_{n-1})|$, \dots , $\lambda_{t+2} = |N(v_{t+2})|$.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{t+1}, \lambda_{t+2}, \dots, \lambda_n)$ — графическое разбиение, отвечающее графу G , т. е. $\lambda = \text{gpt}(G)$. Можно считать, $\lambda_1 = \deg(v_1) \geq \lambda_2 = \deg(v_2) \geq \dots \geq \lambda_{t+1} = \deg(v_{t+1}) \geq \lambda_{t+2} = \deg(v_{t+2}) \geq \dots \geq \lambda_n = \deg(v_n)$.

Поскольку $N(v_{t+2}) \subseteq \{v_1, \dots, v_t\}$, вершина v_{t+1} не смежна вершинам из V_2 . С другой стороны, v_{t+1} смежна всем вершинам v_1, \dots, v_t . Поэтому $\lambda_{t+1} = t$, и выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_t \geq t = \lambda_{t+1}, \\ \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_{t+2} \leq t = \lambda_{t+1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что число t является рангом Дёрфи разбиения λ .

Ранг t , как обычно, будем обозначать через r , т. е. полагаем $t = r$.

Таким образом, выполняются следующие условия.

П1. $V_1 = \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ — клика.

П2. $V_2 = \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{r+2}\}$ — антиклика.

П3. $N(v_n) \subseteq N(v_{n-1}) \subseteq \dots \subseteq N(v_{r+2}) \subseteq \{v_1, \dots, v_r\}$,

где $N(v_i) = \{v_1, \dots, v_{\lambda_i}\}$ для любого $i = n, n-1, \dots, r+2$.

Ясно, что $\text{tl}^*(\lambda) = (\lambda_{r+1} = r, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n)$.

Заметим, что пороговый граф без изолированных вершин определяется с точностью до изоморфизма его рангом Дёрфи r , порядком n и последовательностью чисел $1 \leq \lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_{r+2} \leq r$ при $r < n-1$.

Лемма 1. Пусть λ — графическое разбиение, отвечающее некоторому пороговому графу G . Тогда $\text{hd}(\lambda) = \text{tl}(\lambda)$.

Доказательство. Пусть G — пороговый граф такой, что $\lambda = \text{gpt}(G)$, и для графа G выполняются условия П1–П3.

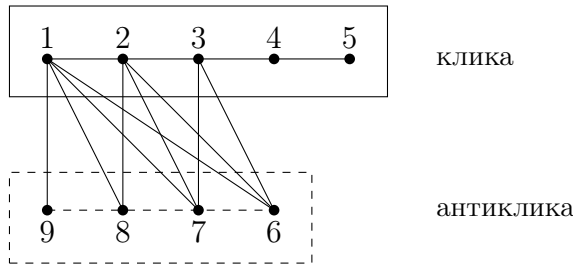


Рис. 2

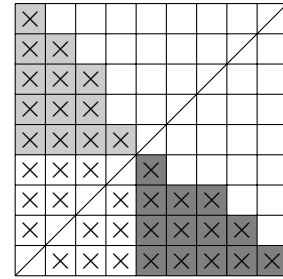


Рис. 3

Очевидно, степень λ_i любой вершины v_i такой, что $1 \leq i \leq r$, равна сумме числа r и числа вершин из V_2 , смежных с v_i , т. е. сумме числа r и числа верных неравенств среди неравенств $i \leq \lambda_{r+2}, i \leq \lambda_{r+3}, \dots, i \leq \lambda_n$. Поэтому любое такое λ_i равно сумме числа $r - 1$ и числа блоков, содержащихся в i -й строке диаграммы Ферре для $tl^*(\lambda)$, поскольку для i верно неравенство $i \leq \lambda_{r+1} = r$. Отсюда следует, что столбцы с номером i диаграммы Ферре для $hd(\lambda)$ и диаграммы Ферре для $tl(\lambda)$ совпадают для любого i такого, что $1 \leq i \leq r$, т. е. выполняется $hd(\lambda) = tl(\lambda)$.

Осталось отметить, что для графического разбиения λ , отвечающего полному n -графу, где $n \geq 2$, выполняется $hd(\lambda) = tl(\lambda) = (\underbrace{1, \dots, 1}_{n-1}, 0, \dots)$. \square

Пример 1. Пусть пороговый граф G задан, как указано на рис. 2.

Для этого графа имеем $n = 9$, $\lambda = (8, 7, 6, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$ и $r = 4$. Рассмотрим матрицу смежности графа G , причем столбцы матрицы будем нумеровать слева направо, а строки — снизу вверх. Будем представлять себе матрицу в виде аналога шахматной доски (без раскраски) размера $n \times n$, т. е. будем считать, что матрица покрыта равномерной прямоугольной сеткой, содержащей $n \times n$ квадратных ячеек (полей) одинакового размера. Будем заполнять матрицу смежности как обычно, только вместо единиц в соответствующих ячейках будем размещать квадратные блоки такого же размера, как ячейки, а ячейки, содержащие нули, оставим пустыми. В результате для графа G мы получим матрицу, представленную на рис. 3.

В силу симметричности матрицы смежности сначала можно заполнить ячейки, лежащие ниже главной диагонали, а затем симметричным образом заполнить ячейки, лежащие выше главной диагонали. Если теперь совершить сдвиг на одну ячейку вниз всех ячеек, лежащих выше главной диагонали, то мы получим диаграмму Ферре для разбиения λ . Очевидно, выполняется $hd(\lambda) = tl(\lambda)$. Рассуждая аналогичным образом для произвольного порогового графа G , мы достаточно очевидным образом получим $hd(\lambda) = tl(\lambda)$. \square

Лемма 2. Пусть μ — произвольное разбиение такое, что $hd(\mu) = tl(\mu)$. Тогда существует пороговый граф G , для которого $\mu = gpt(G)$.

Доказательство. Пусть $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{r+1}, \mu_{r+2}, \dots, \mu_n)$, где r — ранг разбиения μ и $n = l(\mu)$. Нетрудно заметить, что из условия $hd(\mu) = tl(\mu)$ следует $\mu_1 = n - 1$, $\mu_{r+1} = r$ и $tl^*(\mu) = (\mu_{r+1} = r, \mu_{r+2}, \dots, \mu_n)$. Рассмотрим пороговый n -граф G , ранг Дёрфи которого равен r и для которого выполняется $tl^*(\lambda) = (r, \mu_{r+2}, \dots, \mu_n)$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ — графическое разбиение $gpt(G)$. Тогда $\lambda_{r+1} = \mu_{r+1}$, $\lambda_{r+2} = \mu_{r+2}, \dots, \lambda_n = \mu_n$ и $tl^*(\lambda) = tl^*(\mu)$, поэтому $tl(\lambda) = tl(\mu)$. Поскольку для порогового графа выполняется $hd(\lambda) = tl(\lambda)$, разбиения λ и μ имеют одинаковые длины, ранги, головы и хвосты, поэтому они равны, т. е. $\lambda = \mu$ и $\mu = gpt(G)$. \square

Лемма 3. Произвольный граф G , не содержащий повышающих троек вершин, является пороговым графом.

Доказательство. Добавление или удаление изолированных вершин к графу, очевидно, не меняет свойство графа быть пороговым и свойство графа не содержать повышающих

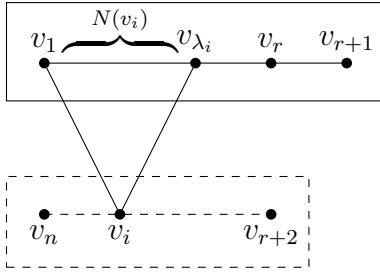


Рис. 4

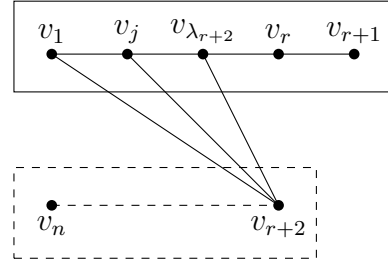


Рис. 5

троек вершин. Поэтому будем считать, что граф G не имеет изолированных вершин и не является нулевым графом.

Пусть $\text{gpt}(G) = \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $n = l(\lambda)$. Тогда $n - 1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1$. Положим $r = r(\lambda)$. Ясно, что $r \leq n - 1$.

1-й с л у ч а й. Пусть $r = n - 1$. Тогда $n - 1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq n - 1$, откуда вытекает $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = n - 1$ и $\lambda_n = n - 1$. Следовательно, G — полный n -граф, т. е. G — пороговый граф.

2-й с л у ч а й. Пусть $r < n - 1$. Тогда $r + 2 \leq n$. Пусть v_1, v_2, \dots, v_n — множество всех вершин графа G и $\lambda_1 = \deg(v_1), \dots, \lambda_n = \deg(v_n)$.

По определению ранга r разбиения λ выполняется $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq r$ и $\lambda_{r+1} < r + 1$. Поэтому мы имеем $\lambda_n \leq \lambda_{n-1} \leq \dots \leq \lambda_{r+2} \leq \lambda_{r+1} \leq r$.

Предположим, что имеется ребро $v_i v_j$ такое, что $n \geq i > j \geq r + 1$. Тогда в силу отсутствия повышающих троек вершин вершина v_i смежна всем вершинам v_1, \dots, v_{r+1} , поэтому $\lambda_i \geq r + 1$, что невозможно. Следовательно, вершины v_n, \dots, v_{r+1} образуют антиклику в G .

Если вершина v_i , где $n \geq i \geq r + 2$, смежна некоторой вершине v_j , то $j \in \{1, \dots, r\}$ и в силу отсутствия повышающих троек вершин вершина v_i смежна всем вершинам v_1, \dots, v_j . Следовательно, любая вершина v_i такая, что $n \geq i \geq r + 2$, имеет окрестность $N(v_i)$ такую, что $N(v_i) = \{v_1, \dots, v_{\lambda_i}\}$ (см. рис. 4). Поэтому выполняется $N(v_n) \subseteq N(v_{n-1}) \subseteq \dots \subseteq N(v_{r+2}) \subseteq \{v_1, \dots, v_r\}$.

Рассмотрим произвольную вершину v_j такую, что $1 \leq j \leq r$.

2.1. Пусть $1 \leq j \leq \lambda_{r+2}$ (см. рис. 5).

Тогда существует ребро $v_{r+2} v_j$ в графе G , поэтому в силу отсутствия повышающих троек вершин вершина v_j смежна любой из вершин $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{r+1}$.

2.2. Пусть $\lambda_{r+2} + 1 \leq j \leq r$ (такого индекса j может и не существовать, если $\lambda_{r+2} = r$). Вершина v_j имеет степень $\geq r$, поскольку $j \leq r$. Кроме того, вершина v_j может быть смежна только вершинам из множества $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{r+1}$. Следовательно, $\lambda_j = r$ и вершина v_j смежна всем вершинам $v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{r+1}$.

Таким образом, вершины v_1, \dots, v_{r+1} порождают в графе G полный $(r + 1)$ -подграф.

Поскольку подграф в G , порожденный вершинами v_n, \dots, v_{r+2} , является нулевым графом и окрестности вершин v_n, \dots, v_{r+2} образуют цепь по включению \subseteq , граф G является пороговым. \square

Лемма 4. *Любой пороговый граф G не содержит повышающих троек вершин.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы можем считать, что граф G не является полным графом, не является нулевым графом и не содержит изолированных вершин. Пусть, от противного, граф G имеет повышающую тройку вершин (x, v, y) , где $xv \in E$, $vy \notin E$ и $\deg(x) \leq \deg(y)$. Пусть в графе G выполняются условия П1–П3.

1-й с л у ч а й. Пусть $x \in V_1$ и $v \in V_2$.

1.1. Пусть $y \in V_1$. В силу устройства окрестности $N(v)$ вершины v вершина y расположена правее вершины x в последовательности $v_1, v_2, \dots, v_r, v_{r+1}$. Поэтому $\deg(x) \geq \deg(y)$, откуда получаем $\deg(x) = \deg(y)$. Отсюда следует, что x и y смежны одним и тем же вершинам из V_2 , т. е. в G имеется ребро vy , что противоречиво.

1.2. Пусть $y \in V_2$. Так как существует ребро xv в G , выполняется $\deg(x) > r$. Поскольку $\deg(y) \leq r$, получаем $\deg(x) > \deg(y)$, что противоречиво.

2-й с л у ч а й. Пусть $v \in V_1$ и $x \in V_2$. Поскольку все вершины из V_1 попарно смежны, вершина y лежит в V_2 . Если y лежит правее x в последовательности $v_n, v_{n-1}, \dots, v_{r+2}$, то из $v \in N(x)$ в силу $N(x) \subseteq N(y)$ следует $v \in N(y)$, что невозможно. Поэтому y лежит левее x в этой последовательности, откуда вытекает $\deg(y) \leq \deg(x)$, что в свою очередь влечет $\deg(x) = \deg(y)$. Тогда $N(x) = N(y)$ и, следовательно, $v \in N(y)$, что противоречиво.

3-й с л у ч а й. Пусть $x \in V_1$ и $v \in V_1$. Ясно, что $y \in V_2$. Поэтому $\deg(x) \geq \deg(y)$, откуда получаем $\deg(x) = \deg(y)$. Поскольку $\deg(x) \geq r \geq \deg(y)$, выполняется $\deg(x) = \deg(y) = r$. Следовательно, $N(y) = \{v_1, \dots, v_r\}$. Отсюда вытекает $v = v_{r+1}$ и $x \in N(y)$. В силу условия $x \in N(y)$ выполняется $\deg(x) \geq r + 1$, что противоречиво. \square

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Данная теорема вытекает из лемм 3 и 4. \square

Перейдем теперь к доказательству следствий 1–3.

Пусть четыре различные вершины v_1, x, v_2, y порогового графа образуют 4-псевдоцикл, т. е. $v_1x \in E$, $xv_2 \notin E$, $v_2y \in E$ и $yv_1 \notin E$. Тогда одна из троек (x, v_1, y) , (y, v_2, x) является повышающей, что противоречиво. Как хорошо известно (см. [9]), последовательность степеней графа, не содержащего 4-псевдоциклов, униграфична. Поэтому графическое разбиение, отвечающее пороговому графу, униграфично.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 1. Пусть $\lambda = \text{gpt}(G)$ для некоторого графа G .

Предположим, что λ является максимальным графическим разбиением. Если граф G не является пороговым, то в нем имеется повышающая тройка вершин (x, v, y) . Пусть φ — повышающее вращение ребра, отвечающее этой тройке. Тогда G можно получить из $\varphi(G)$ с помощью понижающего вращение ребра, отвечающего тройке (y, v, x) . Следовательно, разбиение λ можно получить из разбиения $\mu = \text{gpt}(\varphi(G))$ с помощью элементарного преобразования первого типа, что противоречит максимальной λ .

Обратно, пусть G — пороговый граф. Если разбиение λ не является максимальным графическим разбиением, то существует графическое разбиение μ такое, что $\mu \rightarrow \lambda$, т. е. λ получается из μ с помощью элементарного преобразования первого типа. Пусть H — реализация разбиения μ , т. е. $\mu = \text{gpt}(H)$. Тогда существует реализация G' разбиения λ , которую можно получить из H с помощью понижающего вращение ребра. Поэтому в G' существует повышающая тройка вершин, т. е. граф G' не является пороговым. Отсюда следует, что λ — неуниграфическое разбиение, что противоречит сделанному выше замечанию. \square

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 2. Данное следствие очевидно вытекает из леммы 1 и леммы 2 в силу следствия 1. \square

П р и м е р 2. На рис. 6 в решетке $NPL(10)$ выделены все максимальные графические разбиения веса 10 (их три — $(5,1 \times 5)$, $(4,2,2,1,1)$, $(3,3,2,2)$). \square

Д о к а з а т е л ь с т в о следствия 3. Пусть λ и μ — два графических разбиения одного веса таких, что $\lambda > \mu$. Рассмотрим реализацию G разбиения λ . Укажем метод построения реализации H разбиения μ .

Поскольку $\lambda > \mu$, существует последовательность элементарных преобразований первого типа такая, что $\lambda = \lambda_0 \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_t = \mu$. Существует понижающее вращение ребра в графе $G_0 = G$, переводящее граф G_0 в граф G_1 такой, что $\lambda_1 = \text{gpt}(G_1)$. Отметим, что для выбора понижающего вращение ребра здесь могут иметься несколько возможностей. В силу этого граф G_1 выбирается, вообще говоря, неоднозначно по G_0 . Далее последовательно для каждого элементарного преобразования $\lambda_i \rightarrow \lambda_{i+1}$ ($i = 1, \dots, t - 1$) выбираем понижающее

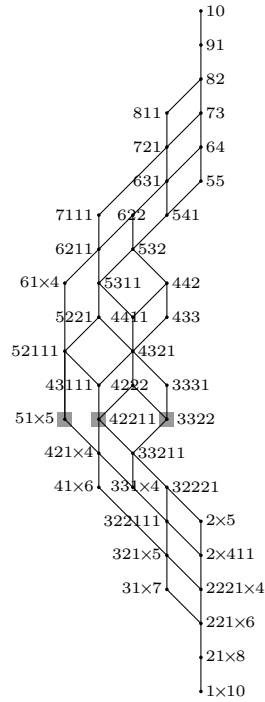


Рис. 6

вращение ребра в графе G_i , переводящее граф G_i в граф G_{i+1} такой, что $\lambda_{i+1} = \text{gpt}(G_{i+1})$. В результате будет построена последовательность графов $G = G_0, G_1, \dots, G_t = H$ такая, что H является реализацией разбиения μ . Таким образом, граф H получается из графа G с помощью последовательности понижающих вращений ребер, отвечающей последовательности элементарных преобразований первого типа $\lambda = \lambda_0 \rightarrow \lambda_1 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_t = \mu$ от λ до μ . Очевидно, граф G получается из графа H с помощью обратных повышающих вращений ребер, производимых в обратном порядке.

Теперь ясно, что следствие 3 вытекает из теоремы 1. \square

В заключение сформулируем открытые вопросы.

Зафиксируем натуральное число $m \in \mathbb{N}$ и будем рассматривать разбиения веса $2m$. Пусть $\lambda \in NPL(2m)$ и G — произвольный n -граф, являющийся реализацией разбиения λ . Очевидно, $l(\lambda) \leq 2m$, поэтому с точностью до изолированных вершин можно считать, что $2 \leq n \leq 2m$. Зафиксируем некоторое множество $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{2m}\}$ (в качестве V можно взять множество $\{1, 2, \dots, 2m\}$). Все реализации разбиений из $NPL(2m)$ будем рассматривать только на множестве V . Пусть $G_1 = (V, E_1)$ и $G_2 = (V, E_2)$ — два графа таких, что $|E_1| = |E_2| = m$, и $\lambda_1 = \text{gpt}(G_1)$, $\lambda_2 = \text{gpt}(G_2)$. Ясно, что $\lambda_1, \lambda_2 \geq \underbrace{(1, \dots, 1)}_{2m}, 0, \dots$. Используя эти неравенства,

нетрудно показать, что существует конечная последовательность вращений ребер, переводящая G_1 в G_2 . Наименьшую из длин таких последовательностей назовем *ротационным расстоянием* $\text{rtdist}(G_1, G_2)$ от графа G_1 до графа G_2 .

Проблема 1. Исследовать свойства ротационного расстояния, найти для него оценки и алгоритмы вычисления.

В связи с этой задачей полезно заметить, что процедура переключения ребер в 4-псевдоцикле всегда сводится к выполнению двух вращений ребер.

Проблема 2. Для заданного графа найти ближайший к нему пороговый граф (в смысле ротационного расстояния).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Асанов М.О., Баранский В.А., Расин В.В.** Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. 2-е изд., испр. и доп. СПб.: Лань, 2010. 368 с. ISBN: 978-5-8114-1068-2.
2. **Andrews G.E.** The theory of partitions. Cambridge: Cambridge University Press, 1976. 255 p. ISBN: 0-521-63766-X.
3. **Brylawsky T.** The lattice of integer partitions // *Discrete Math.* 1973. Vol. 6. P. 201–219. doi: 10.1016/0012-365X(73)90094-0.
4. **Baransky V.A., Senchonok T.A.** On maximal graphical partitions // *Sib. Elect. Math. Reports.* 2017. Vol. 14. P. 112–124. doi: 10.17377/semi.2017.14.012.
5. **Baransky V.A., Koroleva T.A.** The lattice of partitions of a positive integer // *Doklady Math.* 2008. Vol. 77, no. 1. P. 72–75. doi: 10.1007/s11472-008-1018-z.
6. **Баранский В.А., Королёва Т.А., Сеньчонок Т.А.** О решетке разбиений натурального числа // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2015. Т. 21, № 3. С. 30–36.
7. **Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A.** On the partition lattice of all integers // *Sib. Elect. Math. Reports.* 2016. Vol. 13. P. 744–753. doi: 10.17377/semi.2016.13.060.
8. **Baransky V.A., Nadymova T.I., Senchonok T.A.** A new algorithm generating graphical sequences // *Sib. Elect. Math. Reports.* 2016. Vol. 13. P. 269–279. doi: 10.17377/semi.2016.13.021.
9. **Mahadev N.V.R., Peled U.N.** Threshold graphs and related topics. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995. 542 p. (Annals of Discr. Math.; vol. 56). ISBN: 0-444-89287-7.

Баранский Виталий Анатольевич

Поступила 20.10.2016

д-р физ.-мат. наук, профессор

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru

Сеньчонок Татьяна Александровна

канд. физ.-мат. наук, доцент

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru

REFERENCES

1. Asanov M.O., Baransky V.A., Rasin V.V. *Diskretnaya matematika: grafy, matroidy, algoritmy* [Discrete mathematics: graphs, matroids, algorithms]. St. Petersburg: Lan' Publ, 2010, 368 p. ISBN: 978-5-8114-1068-2.
2. Andrews G.E. *The theory of partitions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1976, 255 p. ISBN: 0-521-63766-X.
3. Brylawsky T. The lattice of integer partitions. *Discrete Math.*, 1973, vol. 6, pp. 201–219. doi: 10.1016/0012-365X(73)90094-0.
4. Baransky V.A., Senchonok T.A. On maximal graphical partitions. *Sib. Elect. Math. Reports.*, 2017, vol. 14, pp. 112–124. doi: 10.17377/semi.2017.14.012.
5. Baransky V.A., Koroleva T.A. The lattice of partitions of a positive integer. *Dokl. Math.*, 2008, vol. 77, no. 1, pp. 72–75. doi: 10.1007/s11472-008-1018-z.
6. Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A. On the partition lattice of an integer. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 30–36 [in Russian].
7. Baransky V.A., Koroleva T.A., Senchonok T.A. On the partition lattice of all integers. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2016, vol. 13, pp. 744–753. doi: 10.17377/semi.2016.13.060.
8. Baransky V.A., Nadymova T.I., Senchonok T.A. A new algorithm generating graphical sequences. *Sib. Elect. Math. Reports*, 2016, vol. 13, pp. 269–279. doi: 10.17377/semi.2016.13.021.
9. Mahadev N.V.R., Peled U.N. *Threshold graphs and related topics*. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1995, Ser. Annals of Discr. Math., vol. 56, 542 p. ISBN: 0-444-89287-7.

The paper was received by the Editorial Office on October 10, 2016.

Vitalii Anatol'evich Baransky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: vitaly.baransky@urfu.ru.

Tat'yana Aleksandrovna Senchonok, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: tatiana.senchonok@urfu.ru.

УДК 532.51

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ
СЛОЖНОЙ КОНВЕКЦИИ, ОПИСЫВАЮЩИЕ
ПОЛЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ РАЗНОГО ЗНАКА****А. В. Горшков, Е. Ю. Просвиряков**

В статье изучается слоистая конвекция вязкой несжимаемой жидкости. Течение несжимаемой среды описывается переопределенной системой уравнений Обербека — Буссинеска. Найдено точное решение переопределенной системы уравнений. Решение принадлежит классу Линя — Сидорова — Аристова. В нем скорости являются однородными относительно горизонтальных переменных, поля давления и температуры линейно зависят от координат x и y . Использование класса решений Линя — Сидорова — Аристова сохраняет нелинейность уравнений движения только в уравнении теплопроводности. Исследование краевой задачи проведено для конвекции Бенара — Марангони с учетом теплообмена на свободной границе. Теплообмен определяется законом Ньютона — Рихмана. Конвективное движение жидкости характеризуется существованием толщины слоя, при которой сила трения (касательные напряжения) равны нулю во внутренней точке слоя жидкости. Приведены соответствующие ограничения на параметры управления, которые определяют условия отсутствия скольжения слоев для теплового и концентрационного конвективного течения жидкости.

Ключевые слова: конвекция Бенара-Марангони, точное решение, граничные условия III рода, касательные напряжения.

A. V. Gorshkov, E. Yu. Prosviryakov. Analytic solutions of stationary complex convection describing a shear stress field of different signs.

We study layered convection of a viscous incompressible fluid. The flow of an incompressible medium is described by the overdetermined system of the Oberbeck–Boussinesq equations. An exact solution of the overdetermined system of equations is found. The solution belongs to the Lin–Sidorov–Aristov class. In this class the velocities are homogeneous with respect to the horizontal variables. The pressure and temperature fields are linear functions of the coordinates x and y . The use of the Lin–Sidorov–Aristov class preserves the nonlinearity of the motion equations only in the heat equation. The boundary value problem is studied for the Bénard–Marangoni convection with heat transfer at the free boundary. The heat transfer is determined by the Newton–Richman law. The convective motion of a fluid is characterized by the existence of a layer thickness at which the friction force (the shear stress) vanishes at an interior point of the fluid layer. We give constraints on the control parameters that determine the no-slip conditions for the layers in the cases of thermal and solutal convective flows.

Keywords: Bénard–Marangoni convection, exact solution, boundary condition of the third kind, shear stress.

MSC: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-32-41

Введение

К настоящему времени известно мало классов точных решений уравнений Навье — Стокса, описывающих жидкости с различными свойствами. Наиболее продуктивным классом точных решений оказались течения жидкости, профили скоростей которых линейно зависят от части координат. Первым, кто изучал скорости, линейные по горизонтальным координатам, для задач магнитной гидродинамики был Ц. Ц. Линь [1]. Далее в работах А. Ф. Сидорова были сформулированы несколько классов точных решений, которые справедливы для конвективных и диффузионных течений вязких сжимаемых и несжимаемых сред [2]. В классе Сидорова поля температуры были линейными по горизонтальным координатам [2; 3].

Дальнейшее обобщение было предпринято С. Н. Аристовым, который сформулировал задачи исследования конвективных течений, учитывая совместные квадратичные эффекты давления и температуры. В недавней статье [4] была показана возможность исследования термодиффузионных движений вязкой несжимаемой жидкости при учете перекрестных диссипативных

эффектов Соре и Дюффора. Это обобщение особенно важно, поскольку в практических задачах нужно учитывать оба эффекта, а в подавляющем большинстве случаев исследователи пренебрегают одним из влияний на структуру течения [6].

При использовании классов точных решений системы определяющих уравнений достаточно часто являются переопределенными [1; 4; 5; 7]. В этом случае нахождение условия разрешимости позволяет построить новые точные решения, которые обладают порой весьма неожиданными свойствами, позволяющими описывать конвективные противотечения в жидкости [8; 9]. Тем не менее возможна противоположная ситуация, при которой класс решений помогает сразу разрешить исходную переопределенную систему Обербека — Буссинеска [4; 7–9].

В статье [7] было вычислено первое точное решение уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости, описывающих конвективное слоистое течение, которое может быть индуцировано термокапиллярными силами и наличием теплообмена на границах бесконечного слоя. Было показано [7], что при действии двух факторов на возникновение конвекции в жидкости наблюдаются противотечения и усиление скоростей, а также при определенной толщине отсутствует трение на недеформируемой нижней границе. Интересной оказывается задача вычисления толщины слоя жидкости, при которой отсутствует сила трения между стратифицированными областями или в произвольном сечении слоя жидкости. В статьях [8–10] приводится только весьма частный случай исследования точного решения. Таким образом, отсутствует методика вычисления толщины слоя жидкости, при которой касательные напряжения в слоистом потоке жидкости могут быть сжимающими и растягивающими.

В настоящей статье будет приведено решение вышеуказанной задачи при помощи исследования спектральных свойств полиномиального поля скоростей.

1. Постановка задачи

Рассматривается стационарная термокапиллярная слоистая конвекция (конвекция Бена — Марангони) вязкой несжимаемой жидкости, которая движется в бесконечно протяженном слое толщины h . Система уравнений Навье — Стокса в приближении Буссинеска [11] для слоистых течений является переопределенной, поскольку вертикальная скорость V_z равна нулю [8; 9; 12]. Для разрешимости системы уравнений Обербека — Буссинеска используется точное решение [2; 4; 7–9]:

$$V_x = U(z), \quad V_y = V(z), \quad T = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z), \quad P = P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z). \quad (1.1)$$

Здесь $V_x = U$, $V_y = V$ — компоненты вектора скорости жидкости; T_0 и P_0 — фоновая температура и давление соответственно; T_1 , T_2 и P_1 , P_2 — горизонтальные (продольные) компоненты градиента температуры и давления соответственно.

Подстановка гидродинамических полей (1.1) позволяет свести нелинейную систему уравнений Обербека — Буссинеска в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [8; 9; 12]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{dz^2} &= 0, & \frac{d^2 T_2}{dz^2} &= 0, \\ \frac{dP_1}{dz} &= g\beta T_1, & \frac{dP_2}{dz} &= g\beta T_2, \\ \frac{d^2 T_0}{dz^2} &= \frac{1}{\chi} (UT_1 + VT_2), & \frac{dP_0}{dz} &= g\beta T_0, \\ \nu \frac{d^2 U}{dz^2} &= P_1, & \nu \frac{d^2 V}{dz^2} &= P_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь g — ускорение свободного падения; β — коэффициент объемного расширения; ν — кинематическая (молекулярная) вязкость жидкости; χ — коэффициент температуропроводности.

Краевые условия, необходимые для вычисления частного решения системы (1.2), записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} U(0) = 0, \quad V(0) = 0, \\ \eta \left. \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=h} = -\sigma T_1(h), \\ \eta \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=h} = -\sigma T_2(h), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \vartheta_1 (A_1 - T_1(0)), \quad \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=0} = \vartheta_2 (B_1 - T_2(0)), \\ \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=h} = \vartheta_1 (A_2 - T_1(h)), \quad \left. \frac{\partial T_2}{\partial z} \right|_{z=h} = \vartheta_2 (B_2 - T_2(h)), \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$T_0(0) = 0, \quad T_0(h) = 0, \quad P_1(h) = 0, \quad P_2(h) = 0, \quad P_0(h) = S, \quad (1.5)$$

где $\vartheta_1 = \alpha_1 h / \lambda_1$, $\vartheta_2 = \alpha_2 h / \lambda_2$ — числа Нуссельта; α_1 , α_2 — коэффициенты теплоотдачи; λ_1 , λ_2 — коэффициенты теплопроводности для нижней (индекс 1) и верхней (индекс 2) граничных поверхностей соответственно; A_1 , A_2 и B_1 , B_2 — продольные компоненты градиенты температуры окружающей среды на нижней и верхней границах соответственно; σ — температурный коэффициент поверхностного натяжения; η — коэффициент динамической вязкости жидкости.

2. Построение точного решения

Точное решение, описывающее горизонтальные компоненты T_1 и T_2 градиента температуры, вычисляем, в отличие от [12], в виде линейных функций от относительной переменной $\zeta = z/h$:

$$T_1 = a_1 \zeta + b_1, \quad T_2 = a_2 \zeta + b_2.$$

В результате вычислений получим коэффициенты a_1 , b_1 , a_2 , b_2 :

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{(A_2 - A_1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}, \quad b_1 = \frac{A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}, \\ a_2 = \frac{(B_2 - B_1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}, \quad b_2 = \frac{B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В этом случае решения T_1 и T_2 удовлетворяют краевым условиям (1.4).

Таким образом, выражения для T_1 и T_2 в силу (2.1) примут вид

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{(A_2 - A_1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \zeta + \frac{A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}, \\ T_2 = \frac{(B_2 - B_1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \zeta + \frac{B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Последовательно интегрируя уравнения системы (1.2), с учетом функций (2.2) и граничных условий (1.3)–(1.5) получим, что скорости конвективного течения имеют вид

$$\begin{aligned} U(\zeta) = \frac{g\beta}{\nu} h^3 \left\{ \frac{(A_2 - A_1) \vartheta_1 \vartheta_2}{24(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta^4 + \frac{A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{6(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta^3 \right. \\ \left. - \frac{2(A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2) + (A_1 + A_2) \vartheta_1 \vartheta_2}{4(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta^2 \right. \\ \left. + \frac{2(A_2 - A_1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 \vartheta_1 \vartheta_2)}{6(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta \right\} - \frac{\sigma h}{\eta} \frac{A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V(\zeta) = & \frac{g\beta}{\nu} h^3 \left\{ \frac{(B_2 - B_1) \vartheta_1 \vartheta_2}{24(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta^4 + \frac{B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{6(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta^3 \right. \\
 & \left. - \frac{2(B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2) + (B_1 + B_2) \vartheta_1 \vartheta_2}{4(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta^2 \right. \\
 & \left. + \frac{2(B_2 - B_1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 \vartheta_1 \vartheta_2)}{6(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta \right\} - \frac{\sigma h}{\eta} \frac{B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2)} \zeta.
 \end{aligned}$$

3. Определение толщины слоя с нулевым трением

Обозначим через δ относительную глубину, на которой может возникнуть слой жидкости без трения. Параметр δ может принимать значения в диапазоне

$$0 \leq \delta \leq 1, \quad (3.1)$$

причем значение $\delta = 0$ соответствует твердой поверхности, а $\delta = 1$ — свободной поверхности слоя жидкости. Вычислим касательные напряжения в слое $\zeta = \delta$:

$$\begin{aligned}
 \tau_{zx} = \eta \frac{\partial V_x}{\partial \zeta} = \eta \frac{dU}{d\zeta} = \frac{g\beta\rho}{6} h^6 \left\{ \frac{(A_2 - A_1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^2 \right. \\
 \left. - 3 \frac{(A_2 + A_1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta + \frac{(2A_2 + A_1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \right\} \\
 - \sigma \frac{A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 + A_2 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}, \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{zy} = \eta \frac{\partial V_y}{\partial \zeta} = \eta \frac{dV}{d\zeta} = \frac{g\beta\rho}{6} h^6 \left\{ \frac{(B_2 - B_1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_1 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^2 \right. \\
 \left. - 3 \frac{(B_2 + B_1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta + \frac{(2B_2 + B_1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \right\} \\
 - \sigma A_1 \frac{B_1 \vartheta_1 + B_2 \vartheta_2 + B_2 \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Пусть далее компоненты векторов градиентов температуры связаны соотношениями

$$A_2 = \gamma_x A_1, \quad B_2 = \gamma_y B_1,$$

где γ_x и γ_y — некоторые постоянные, отличные от нуля.

Подставим в (3.2), (3.3) связь градиентов, получим

$$\begin{aligned}
 \tau_{zx} = \frac{g\beta\rho}{6} h^2 A_1 \left\{ \frac{(\gamma_x - 1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{\vartheta_1 + \gamma_x \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^2 \right. \\
 \left. - 3 \frac{(\gamma_x + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(\vartheta_1 + \gamma_x \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta + \frac{(2\gamma_x + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(\vartheta_1 + \gamma_x \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \right\} \\
 - \sigma A_1 \frac{\vartheta_1 + \gamma_x \vartheta_2 + \gamma_x \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}, \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{zy} = \frac{g\beta\rho}{6} h^2 B_1 \left\{ \frac{(\gamma_y - 1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{\vartheta_1 + \gamma_y \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^2 \right. \\
 \left. - 3 \frac{(\gamma_y + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(\vartheta_1 + \gamma_y \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta + \frac{(2\gamma_y + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(\vartheta_1 + \gamma_y \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \right\} \\
 - \sigma B_1 \frac{\vartheta_1 + \gamma_y \vartheta_2 + \gamma_y \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}. \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь полиномиальные уравнения $\tau_{zx} = 0$ и $\tau_{zy} = 0$. Очевидно, левую часть уравнения $\tau_{zx} = 0$, следующего из (3.4), можно разделить на A_1 . Для уравнения $\tau_{zy} = 0$, следующего из (3.5), справедлива операция деления на параметр B_1 . Уравнения (3.4) и (3.5) соответственно примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{g\beta\rho}{6} h^2 \left\{ \frac{(\gamma_x - 1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{\vartheta_1 + \gamma_x \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^2 \right. \\ & - 3 \frac{(\gamma_x + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(\vartheta_1 + \gamma_x \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta + \left. \frac{(2\gamma_x + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(\vartheta_1 + \gamma_x \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \right\} \\ & - \sigma \frac{\vartheta_1 + \gamma_x \vartheta_2 + \gamma_x \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \frac{g\beta\rho}{6} h^6 \left\{ \frac{(\gamma_y - 1) \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{\vartheta_1 + \gamma_y \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^2 \right. \\ & - 3 \frac{(\gamma_y + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(\vartheta_1 + \gamma_y \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta + \left. \frac{(2\gamma_y + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(\vartheta_1 + \gamma_y \vartheta_2)}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \right\} \\ & - \sigma \frac{\vartheta_1 + \gamma_y \vartheta_2 + \gamma_y \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Вычитая из левой части (3.6) левую часть (3.7), получим уравнение

$$\begin{aligned} & (\gamma_x - \gamma_y) \left\{ \frac{g\beta\rho}{6} h^2 \left[\frac{\vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^3 + 3 \frac{\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta^2 \right. \right. \\ & - \left. \left. 3 \frac{\vartheta_1 \vartheta_2 + 2\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \delta + \frac{2\vartheta_1 \vartheta_2 + 3\vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \right] - \sigma \frac{\vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2}{\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Если коэффициенты γ_x и γ_y равны $\gamma_x = \gamma_y = \gamma$ (векторы градиента температуры коллинеарны), то левые части уравнений (3.6), (3.7) тождественно совпадают. В этом случае решения уравнений (3.6), (3.7) определяют одинаковые значения параметров течения жидкости, при которых возникает слой с нулевыми касательными напряжениями

$$\begin{aligned} & h^2 \left\{ (\gamma - 1) \vartheta_1 \vartheta_2 \delta^3 + 3(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2) \delta^2 - 3[(\gamma - 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2)] \delta \right. \\ & \left. + [(2\gamma + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2)] \right\} - \frac{6\sigma}{g\beta\rho} (\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2 + \gamma \vartheta_1 \vartheta_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Разрешим уравнение (3.8) относительно h^2 :

$$\begin{aligned} h^2 &= \frac{6\sigma}{g\beta\rho} (\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2 + \gamma \vartheta_1 \vartheta_2) \left\{ (\gamma - 1) \vartheta_1 \vartheta_2 \delta^3 + 3(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2 + \vartheta_1 \vartheta_2) \delta^2 \right. \\ & \left. - 3[(\gamma - 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 2(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2)] \delta + [(2\gamma + 1) \vartheta_1 \vartheta_2 + 3(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2)] \right\}^{-1} \end{aligned}$$

и найдем область существования решений (3.8) на множестве параметров γ и δ . Многочлен, стоящий в знаменателе, примет вид $(1 - \delta)^2 [3(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2) + \vartheta_1 \vartheta_2 (1 + 2\gamma) + \delta(\gamma - 1) \vartheta_1 \vartheta_2]$. Тогда толщину h можно представить в виде

$$h = \frac{1}{1 - \delta} \sqrt{\frac{6}{g\beta\rho}} \sqrt{\frac{\sigma(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2 + \gamma \vartheta_1 \vartheta_2)}{3(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2) + \vartheta_1 \vartheta_2 (1 + 2\gamma) + \delta(\gamma - 1) \vartheta_1 \vartheta_2}}. \quad (3.9)$$

Следовательно, толщина слоя, при которой касательные напряжения обращаются в нуль на относительной глубине δ , существует, если подкоренное выражение

$$\frac{\sigma(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2 + \gamma \vartheta_1 \vartheta_2)}{3(\vartheta_1 + \gamma \vartheta_2) + \vartheta_1 \vartheta_2 (1 + 2\gamma) + \delta(\gamma - 1) \vartheta_1 \vartheta_2} > 0.$$

Рассмотрим далее случай $\sigma > 0$. Данное неравенство соответствует классической жидкости. В этом случае возможны следующие варианты значений параметров.

1) При $\gamma > 1$ — числитель и знаменатель подкоренного выражения (3.9) положительны при всех допустимых значениях входящих в него параметров. Следовательно, при любой заданной относительной глубине δ найдется толщина слоя, при которой возникает слой жидкости с нулевыми касательными напряжениями.

2) При $\gamma < 1$ возможны два случая:

а)

$$\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2 + \gamma\vartheta_1\vartheta_2 > 0 \quad (3.10)$$

и, соответственно,

$$3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma) + \delta(\gamma - 1)\vartheta_1\vartheta_2 > 0. \quad (3.11)$$

Из условия (3.10) следует $\frac{-\vartheta_1}{\vartheta_2(1 + \vartheta_1)} < \gamma < 1$.

Разрешим (3.11) относительно δ с учетом условия $\gamma < 1$: $\delta < \frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2}$.

Тогда, с учетом выполнения двойного неравенства (3.1), получим

$$0 < \delta < \min \left\{ 1, \frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2} \right\}.$$

Дробь в фигурных скобках всегда будет больше единицы при выполнении условия (3.10) для $0 < \delta \leq 1$.

б)

$$\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2 + \gamma\vartheta_1\vartheta_2 < 0 \quad (3.12)$$

и

$$3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma) + \delta(\gamma - 1)\vartheta_1\vartheta_2 < 0. \quad (3.13)$$

Неравенство (3.13) разрешим относительно δ : $\delta > \frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2}$. С учетом ограничений на δ (3.1) получим

$$\max \left\{ 0, \frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2} \right\} < \delta \leq 1. \quad (3.14)$$

Для того чтобы область значений δ не была пустой, необходимо выполнение неравенства

$$\frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2} < 1.$$

Очевидно, что это неравенство равносильно неравенству (3.12).

Следовательно, при выполнении $\gamma < -\vartheta_1(3 + \vartheta_2) / (\vartheta_2(1 + 2\vartheta_1))$ дробь в фигурных скобках (3.14) меньше нуля при любом допустимом значении δ .

Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Если векторы градиента температуры на границах слоя вязкой несжимаемой жидкости коллинеарны $(A_2, B_2) = \gamma(A_1, B_1)$, а отношение модулей векторов градиентов удовлетворяет неравенствам $-\vartheta_1 / (\vartheta_2(1 + \vartheta_1)) < \gamma$ или $\gamma < -\vartheta_1(3 + \vartheta_2) / (\vartheta_2(3 + 2\vartheta_1))$, то при любом допустимом значении $\delta \in [0; 1]$ найдется соответствующая толщина слоя h , при которой на глубине δ возникает слой с нулевыми значениями касательных напряжений. Если

$$-\frac{\vartheta_1(3 + \vartheta_2)}{\vartheta_2(1 + 2\vartheta_1)} < \gamma < -\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2(1 + \vartheta_1)},$$

то слой с нулевыми касательными напряжениями возникает на относительной глубине, удовлетворяющей неравенству

$$\frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2} \leq \delta \leq 1.$$

Если векторы градиентов температуры неколлинеарны, то уравнения $\tau_{zx} = 0$ и $\tau_{zy} = 0$ не имеют общего решения. Следовательно, слой жидкости с нулевыми касательными напряжениями возникнуть не может.

Необходимо отметить, что при идеальном тепловом контакте на обеих границах условия $\tau_{zx} = 0$ и $\tau_{zy} = 0$ при $\delta = 0$ превращаются в квадратные уравнения с равными по абсолютной величине корнями

$$\pm \sqrt{\frac{6\sigma\gamma}{g\beta\rho(1 + 2\gamma)}}.$$

Корни принимают действительные значения при $\gamma < -1/2$ или $\gamma > 1$.

Для неклассической жидкости $\sigma < 0$ на основе выражения (3.9) получим следующие неравенства:

1) При $\gamma \geq 1$ числитель и знаменатель дроби положительны. Следовательно, при таком соотношении векторов граничного градиента температуры возникновение слоя с нулевыми касательными напряжениями невозможно.

2) При $\gamma < 1$, как и в предыдущем варианте, возможны два случая.

а)

$$\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2 + \gamma\vartheta_1\vartheta_2 < 0 \quad (3.15)$$

и

$$3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma) + \delta(\gamma - 1)\vartheta_1\vartheta_2 > 0. \quad (3.16)$$

Из неравенства (3.15) следует $\gamma < -\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2(1 + \vartheta_1)}$, а из (3.16): $\delta < \frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2}$.

Тогда с учетом выполнения двойного неравенства (3.1) получим

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2}, 1 \right\}.$$

Дробь из фигурной скобки удовлетворяет неравенству $\frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2} < 1$. Для того чтобы область значений δ была непустой, необходимо выполнение неравенства

$$3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma) > 0.$$

Разрешив полученное неравенство относительно γ , найдем $\gamma > -\vartheta_1(3 + \vartheta_2)/(\vartheta_2(3 + 2\vartheta_1))$.

Таким образом, при γ , удовлетворяющем неравенствам $-\frac{3\vartheta_1 + \vartheta_1\vartheta_2}{3\vartheta_2 + 2\vartheta_1\vartheta_2} < \gamma < -\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2}$, область значений δ непуста и при толщине слоя, определяемой равенством (3.9), на глубине δ возникает слой с нулевыми касательными напряжениями.

б)

$$\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2 + \gamma\vartheta_1\vartheta_2 > 0 \quad (3.17)$$

и

$$3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma) + \delta(\gamma - 1)\vartheta_1\vartheta_2 < 0. \quad (3.18)$$

Из (3.17) следует, что параметр γ удовлетворяет неравенству $-\vartheta_1/(\vartheta_2(1 + \vartheta_1)) < \gamma < 1$. Из неравенства (3.18) с учетом допустимых значений (3.1) для относительной глубины δ получим

$$\text{двойное неравенство } \frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2} < \delta < 1.$$

Для дроби в правой части выполняется неравенство

$$\frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2} > 1,$$

которое несовместно с условием (3.17). Следовательно, не существует толщины слоя жидкости, при котором возникает слой с нулевыми касательными напряжениями. Можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Если векторы граничного градиента температуры коллинеарны, а отношение модулей удовлетворяет неравенствам $\gamma < -(\vartheta_1(3 + \vartheta_2)/(\vartheta_2(3 + 2\vartheta_1)))$ или $\gamma > -\vartheta_1/(\vartheta_2(1 + \vartheta_1))$, то не существует толщины слоя, при котором в жидкости возникает слой с нулевыми касательными напряжениями. При γ , удовлетворяющем неравенству*

$$-\frac{3\vartheta_1 + \vartheta_1\vartheta_2}{3\vartheta_2 + 2\vartheta_1\vartheta_2} < \gamma < -\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2 + \vartheta_1\vartheta_2},$$

на относительной глубине δ , удовлетворяющей неравенствам

$$\frac{3(\vartheta_1 + \gamma\vartheta_2) + \vartheta_1\vartheta_2(1 + 2\gamma)}{(1 - \gamma)\vartheta_1\vartheta_2} < \delta \leq 1,$$

при толщине слоя жидкости h , определяемого равенством (3.9), возникает слой, в котором касательные напряжения обращаются в нуль.

В настоящей работе рассмотрены стационарные слоистые течения конвекции вязкой несжимаемой жидкости, индуцируемые градиентом температуры. Получены решения для краевых условий третьего рода на границах потока жидкости — теплообмен по закону Ньютона — Рихмана. Показано, что при некоторых условиях найдется толщина слоя жидкости, при которой касательные напряжения на твердой поверхности в направлении и одновременно обращаются в ноль. Отметим, что рассмотрение теплового движения классических и аномальных жидкостей позволяет также описывать сложную концентрационную конвекцию вязкой несжимаемой жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lin C.C.** Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395. doi: 10.1007/BF00298016.
2. **Сидоров А.Ф.** Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Численные и аналитические методы решения задач механики сплошной среды / УНЦ АН СССР: сб. науч. тр. НЦ АН СССР. Свердловск, 1981. С. 101–117.
3. О разработках аналитических и численных методов решения задач механики сплошной среды / А.И. Короткий [и др.] // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 2. С. 203–215.
4. **Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю.** Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теорет. основы химич. технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 294–301.
5. **Пухначев В.В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. № 6. С. 3–76.
6. **Рыжков И.И.** Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2013. 200 с.
7. **Сидоров А.Ф.** О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн // Прикл. механика и технич. физика. 1989. № 2. С. 34–40.
8. **Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю., Спевак Л.Ф.** Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вычисл. механика сплошных сред. 2015. Т. 8, № 4. С. 445–456. doi: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
9. **Аристов С.Н., Просвирыков Е.Ю., Спевак Л.Ф.** Нестационарная конвекция Бенара — Марангони слоистых течений вязкой несжимаемой жидкости // Теорет. основы химич. технологии. 2016. Т. 50, № 2. С. 137–146.

10. **Аристов С. Н., Шварц К. Г.** Вихревые течения в тонких слоях жидкости. Киров: ВятГУ, 2011. 207 с.
11. **Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.** Теоретическая физика. Т. 6: Гидродинамика. М.: Наука, 2006. 736 с.
12. **Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu.** Complex Stationary Convection with Third-Kind Boundary Conditions at the Boundaries of a Fluid Layer [e-resource] // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. 2016. Iss. 2. P. 34–47. Available at: http://dream-journal.org/issues/2016-2/2016-2_81.html (accessed: 12.09.2016).

Горшков Александр Васильевич

Поступила 9.10.2016

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург

доцент

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: alex55gor@mail.ru

Просвиряков Евгений Юрьевич

канд. физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург

доцент

Казанский исследовательский технический

университет им. А. Н. Туполева — КАИ, г. Казань

e-mail: evgen_pros@uran.ru

REFERENCES

1. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.
2. Sidorov A. F. On a class of solutions of the equations of gas dynamics and natural convection. *Numerical and analytical methods for solving problems of continuum mechanics* / ed. A.F. Sidorov, Yu.N. Kondyurin, Sverdlovsk, Ural. Nauchn. Tsentr Akad. Nauk SSSR, 1981, pp. 101–117.
3. Korotkii A.I. et [al.]. On the development of analytical and numerical solution methods for problems of continuum mechanics. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 2, pp. 203–215.
4. Aristov S. N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286–293. doi: 10.1134/S0040579516030027.
5. Pukhnachev V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Usp. Mekh.*, 2006, vol. 3, no. 6, pp. 3–76.
6. Ryzhkov I.I. *Termodiffuziya v smesyakh: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustojchivost'* [Thermal diffusion in mixtures: equations, symmetries, solutions and their stability]. Novosibirsk, Publishing house of SB RAS, 2013, 200 p.
7. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197–203. doi: 10.1007/BF00852164.
8. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y., Spevak L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Computational Continuum Mechanics*, 2015, vol. 8, no. 4, pp. 445–456. doi: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38 (in Russian).
9. Aristov S. N., Prosviryakov E.Yu., Spevak L.F. Unsteady-state Bénard-Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theor. Found. Chem. Eng.*, 2016, vol. 50, no. 2, pp. 132–141. doi: 10.1134/S0040579516020019.
10. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex flow in thin liquid layers]. Киров: Vyatka State Univ. Publ., 2011, 207 p.
11. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 1987. 539 p. Translate from *Gidrodinamika*, 3rd ed., Moscow, Nauka Publ., 1986, 736 p.

-
12. *Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y.* Complex stationary convection with third-kind boundary conditions at the boundaries of a fluid layer. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2016, iss. 2, pp. 34–47. Available at: http://dream-journal.org/issues/2016-2/2016-2_81.html.

The paper was received by the Editorial Office on October 9, 2016.

Aleksandr Vasil'evich Gorshkov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620049 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alex55gor@mail.ru.

Evgenii Yur'evich Prosviryakov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620049 Russia; Kazan National Research Technical University named after A. N. Tupolev — KAI, Kazan, Tatarstan 420111, Russia, e-mail: evgen_pros@uran.ru.

УДК 517.977

ЕКАТЕРИНБУРГСКОЕ НАСЛЕДИЕ АРЛЕНА МИХАЙЛОВИЧА ИЛЬИНА

А. Р. Данилин, С. В. Захаров, О. О. Коврижных,
Е. Ф. Леликова, И. В. Першин, О. Ю. Хачай

В настоящей статье рассмотрены основные задачи, сформулированные А.М. Ильиным и решенные его учениками, ныне работающими в Екатеринбурге. Эти задачи связаны с методом согласования асимптотических разложений для нахождения асимптотики решения уравнений, сингулярно зависящих от малого параметра. Помимо краевых задач для уравнений математической физики рассматриваются системы нелинейных уравнений, системы линейных уравнений, зависящих от двух малых параметров. Рассмотрены также задачи нахождения асимптотических разложений фундаментальных решений параболических уравнений и задачи оптимального управления, зависящие от малого параметра.

Ключевые слова: сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр, метод согласования асимптотических разложений, оптимальное управление.

A. R. Danilin, S. V. Zakharov, O. O. Kovrizhnykh, E. F. Lelikova, I. V. Pershin, O. Yu. Khachai.
The Yekaterinburg heritage of Arlen Mikhailovich Il'in.

The main problems formulated by A. M. Il'in and solved by his disciples working now in Yekaterinburg are considered. These problems are related to the method of matched asymptotic expansions used for finding asymptotic solutions of equations with a singular dependence on a small parameter. In addition to boundary value problems for equations of mathematical physics, we consider systems of nonlinear equations and systems of linear equations depending on two small parameters. We also consider problems of finding asymptotic expansions for fundamental solutions of parabolic equations and optimal control problems depending on a small parameter.

Keywords: singularly perturbed problems, asymptotic expansions, small parameter, method of matched asymptotic expansions, optimal control.

MSC: 93C70, 49N05, 34E05, 34E10, 34K26, 34K28, 35K15, 35K59, 35C20

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-42-66

В этом году исполнилось 85 лет со дня рождения выдающегося математика, лауреата Государственной премии РФ, академика РАН Арлена Михайловича Ильина (8.01.1932 – 23.06.2013). Его научное наследие велико, как многочисленны и его ученики (и ученики его учеников), работающие в различных городах РФ (в частности, в Екатеринбурге, в Уфе и в Челябинске).

Основная тематика научной школы А.М. Ильина — построение асимптотических разложений решений бисингулярных задач с малым параметром методом согласования асимптотических разложений [1].

Метод применяется в случае, когда коэффициенты $u_k(x)$ стандартного ряда возмущений $U(x, \varepsilon)$, называемого *внешним асимптотическим разложением* решения рассматриваемой задачи, по тем или иным причинам имеют особенности в точках некоторых “особых” подмножеств рассматриваемой области. Этими “особыми” подмножествами могут быть точки границы области, отрезки некоторых кривых, лежащих в области, части границы. При этом порядок особенностей растет вместе с номером приближения. Такие задачи называют *бисингулярными*.

Очевидно, что в окрестности “особого” множества внешнее разложение $U(x, \varepsilon)$ уже не является формальным асимптотическим решением (ф.а.р.) задачи, и поэтому естественно в окрестности этих множеств строить другое, *внутреннее асимптотическое разложение* $V(\xi, \varepsilon)$ в новых переменных ξ , называемых *внутренними*. Внутренние переменные выбираются исходя

из особенностей рассматриваемой задачи таким образом, чтобы ряд $V(\xi, \varepsilon)$ был ф.а.р. решения задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$. Задачи для нахождения коэффициентов $v_i(\xi)$ значительно сложнее стандартных задач для нахождения коэффициентов $u_k(x)$ внешнего разложения. Это задачи для уравнений в неограниченных областях, решения которых, как правило, определяются неоднозначно. Правильный выбор этих решений возможен только в результате согласования внешнего и внутреннего разложений.

Пусть, например, особенности возникают в начале координат, и внутренняя переменная $\xi = \varepsilon^{-\alpha}x$, $\alpha > 0$. Поясним кратко идею построения равномерного асимптотического разложения с помощью согласованных рядов.

Пусть

$$U(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(\varepsilon) u_k(x), \quad V(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i(\varepsilon) v_i(\xi),$$

где $\{\mu_k(\varepsilon)\}$, $\{\nu_i(\varepsilon)\}$ — некоторые асимптотические последовательности при $\varepsilon \rightarrow 0$. Будем обозначать через $A_{n,x}U$ сумму тех членов $\mu_k(\varepsilon)u_k(x)$ ряда U , для которых справедливо условие $\varepsilon^n = O(\mu_k(\varepsilon))$. Аналогично, $A_{n,\xi}V$ — сумма тех членов $\nu_i(\varepsilon)v_i(\xi)$ ряда V , для которых справедливо условие $\varepsilon^n = O(\nu_i(\varepsilon))$.

Если ряды U и V представляют одну и ту же функцию $u(x, \varepsilon)$ при $|x| > \varepsilon^\beta$ и при $|x| = |\varepsilon^\alpha \xi| < \varepsilon^\gamma$ соответственно, а $\gamma < \beta$, то в общей части $\varepsilon^\beta < |x| < \varepsilon^\gamma$ оба ряда приближают одно и то же решение. Поэтому должно выполняться условие

$$A_{n,\xi}(A_{n,x}U) \stackrel{x=\varepsilon^\alpha \xi}{=} A_{n,x}(A_{n,\xi}V). \quad (1)$$

Здесь $A_{n,\xi}$ в (1) применяется к $A_{n,x}U$, переразложенной по переменной ξ , т.е. сначала коэффициенты $u_k(x)$ из $A_{n,x}U$ разлагаются в асимптотические ряды при $x \rightarrow 0$, а затем в получившихся рядах делается переход от переменной x к переменной ξ . Аналогично, $A_{n,x}$ в (1) применяется к $A_{n,\xi}V$, переразложенной по переменной x , т.е. сначала коэффициенты $v_i(\xi)$ из $A_{n,\xi}V$ разлагаются в асимптотические ряды при $\xi \rightarrow \infty$, а затем в получившихся рядах делается переход от переменной ξ к переменной x .

Определим составное асимптотическое разложение $u_n(x, \xi) = A_{n,x}U + A_{n,\xi}V - A_{n,\xi}(A_{n,x}U)$. Очевидно, что это сумма отрезков внешнего и внутреннего разложений минус их общая часть. Это составное разложение является равномерным асимптотическим разложением рассматриваемой задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Здесь приводится обзор основных задач, связанных с необходимостью согласования асимптотических разложений, инициированных А. М. Ильиным и исследованных его учениками, ныне работающими в Екатеринбурге — в Институте математики и механики УрО РАН и в Уральском федеральном университете. Эти задачи породили целые направления исследований, которые продолжают развиваться в работах екатеринбургских учеников А. М. Ильина.

В данном обзоре не представлены исследования по построению разностных схем для задач, содержащих малый параметр, с которыми можно познакомиться в работах К. В. Емельянова и Г. И. Шишкина.

Разделы 1, 2 написаны Е. Ф. Леликовой, разд. 3 — И. В. Першиным, разд. 4 — С. В. Захаровым, разд. 5 — О. Ю. Хачаем, разд. 6 — О. О. Коврижных, разд. 7 — А. Р. Данилиным и О. О. Коврижных, разд. 8 — А. Р. Данилиным.

1. Эллиптические уравнения с малым параметром при старших производных

Приведенное выше определение бисингулярности (в смысле неограниченности коэффициентов внешнего разложения) в значительной мере упрощено. В реальных задачах часто особенности возникают из-за разрывов коэффициентов внешнего разложения, из-за невозможности

удовлетворить с помощью внешнего разложения тем или иным условиям исходной задачи. Это приводит к возникновению первого внутреннего разложения, и коэффициенты именно этого разложения имеют нарастающие особенности, в результате чего в свою очередь возникает еще одно (второе) внутреннее разложение, и процедура согласования применяется к этим двум разложениям, первое из которых является внешним по отношению ко второму.

Рассмотрим краевые задачи для уравнения $\varepsilon \mathcal{M}u + lu = f$ в ограниченной области Ω . Здесь \mathcal{M} — эллиптический оператор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а l — дифференциальный оператор первого порядка.

Будем рассматривать плоские области Ω , оператор \mathcal{M} второго порядка и первую краевую задачу. Пусть поле характеристик предельного уравнения $lu = f$ диффеоморфно полю параллельных прямых. Тогда после соответствующей замены независимых переменных оператор l совпадет с оператором $\partial/\partial y$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением краевой задачи

$$\varepsilon \mathcal{M}u - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

$$u(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega. \quad (3)$$

Характеристики предельного уравнения — это прямые, параллельные оси y , а само предельное уравнение — это по существу обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -f(x, y)$$

вдоль каждого из отрезков, параллельных оси y и лежащих в $\bar{\Omega}$.

Если бы оператор \mathcal{M} равнялся оператору $\partial^2/\partial y^2$, то задача (2), (3) на каждом таком отрезке совпадала бы с задачей для обыкновенного дифференциального уравнения. Переменная x являлась бы просто параметром. При этом граничное условие $u = 0$ для предельной задачи сохранялось бы на нижних концах отрезков, а вблизи верхних концов отрезков появлялся бы стандартный экспоненциальный пограничный слой (Вишик М. И., Люстерник Л. А. *Успехи мат. наук.* 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122).

Оказывается, что и для эллиптического оператора \mathcal{M} картина в целом будет такой же. Нетрудно построить внешнее разложение задачи (2), (3):

$$U(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y).$$

Его коэффициенты — это решения рекуррентных уравнений

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = -f(x, y), \quad \frac{\partial u_k}{\partial y} = -\mathcal{M}u_{k-1},$$

принимающие нулевые значения на нижних границах отрезков, параллельных оси y , содержащихся в области Ω . Эти коэффициенты имеют следующие недостатки:

- а) нарастающие особенности в точках касания характеристик предельного уравнения границы $\partial\Omega$ области извне области;
- б) нарастающие особенности на характеристиках, касающихся границы $\partial\Omega$ области изнутри области и лежащих в области;
- в) разрывы на характеристиках, проходящих через угловые точки границы и лежащих в области или проходящих через точки разрыва граничной функции;
- г) невозможность удовлетворить граничным условиям исходной задачи с помощью стандартного пограничного слоя на части границы, совпадающей с характеристикой предельного оператора.

В работе [2] был рассмотрен следующий случай (случай г):

$$\mathcal{L}_\varepsilon u \equiv \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

$$u(x, y) = 0 \text{ при } (x, y) \in \partial\Omega, \quad (5)$$

где Ω — квадрат $\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, функции $a(x, y)$ и $f(x, y)$ бесконечно дифференцируемы в $\bar{\Omega}$, $a(x, y) > 0$, $0 < \varepsilon < 1$. Здесь для удобства дальнейших обозначений малый параметр ε заменен на ε^2 . Особыми множествами здесь являются отрезки характеристик $x = 0$ и $x = 1$, совпадающие с границами квадрата.

Внешнее разложение задачи (4), (5) имеет вид

$$U(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} u_{2k}(x, y).$$

Функции $u_{2k}(x, y)$ — это решения рекуррентных соотношений

$$a(x, y) \frac{\partial u_0}{\partial y} = -f(x, y), \quad a(x, y) \frac{\partial u_{2k}}{\partial y} = \Delta u_{2k-2},$$

обращающиеся в нуль при $y = 0$. Ряд $U(x, y, \varepsilon)$ не удовлетворяет граничному условию при $y = 1$, но это легко исправить добавлением к этому ряду стандартного ряда (Вишик М. И., Люстерник Л. А., 1957) погранслоя $S(x, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} s_{2k}(x, \tau)$, где $\tau = (1 - y)\varepsilon^{-2}$. Функции $s_{2k}(x, \tau)$ удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям вида

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + a(x, 1) \frac{\partial}{\partial \tau} \right) s_{2k} = g_{2k}(x, \tau),$$

граничным условиям $s_{2k}(x, 0) = -u_{2k}(x, 1)$ и экспоненциально стремятся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$.

Коэффициенты $u_{2k}(x, y)$, $s_{2k}(x, \tau)$ находятся однозначно, являются бесконечно дифференцируемыми функциями своих аргументов, а $s_{2k}(x, \tau)$ экспоненциально стремятся к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$. Функции $A_{2n}U + A_{2n}S$ аппроксимируют уравнение (4), удовлетворяют граничным условиям на нижней и верхней сторонах квадрата Ω ($y = 0$ и $y = 1$), но не удовлетворяют граничным условиям на боковых сторонах квадрата, являющихся характеристиками предельного уравнения, т. е. при $x = 0$ и $x = 1$.

Рассмотрим левую границу $x = 0$. В окрестности этой границы введем внутреннюю переменную (первую) $\zeta = \varepsilon^{-1}x$ и построим внутреннее разложение (первое)

$$V(\zeta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\zeta, y).$$

Функции $v_k(\zeta, y)$ определяются как решения параболических уравнений

$$L_1 v_0 = f(0, y), \quad L_1 v_1 = \zeta f_x(0, y), \quad L_1 v_2 = \frac{\zeta^2}{2} f_{xx}(0, y) - \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}, \dots, \quad L_1 v_k = F_k(\zeta, y) - \frac{\partial^2 v_{k-2}}{\partial y^2}$$

в области $\zeta > 0$, $y > 0$, удовлетворяющие граничным условиям $v_k(\zeta, 0) = 0$, $v_k(0, y) = 0$. Здесь

$$L_1 := \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - a(0, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Функции $v_k(\zeta, y)$ при $k \geq 2$ имеют нарастающие (с увеличением номера k) особенности при $\zeta = 0$, $y = 0$ (или, что то же самое, при $x = 0$, $y = 0$), что делает внутреннее разложение $V(\zeta, y, \varepsilon)$ непригодным для аппроксимации решения $u(x, y)$ в этой точке. Кроме того, в

классе неограниченных функций решения $v_k(\zeta, y)$ определяются неоднозначно, так как рассматриваемые задачи имеют собственные функции, не ограниченные в начале координат, — это производные фундаментального решения оператора $\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - a(0, 0) \frac{\partial}{\partial y}$.

В окрестности начала координат введем новые внутренние переменные $\xi = \varepsilon^{-2}x$, $\eta = \varepsilon^{-2}y$ и построим второе внутреннее разложение

$$W(\xi, \eta, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}(\xi, \eta).$$

Для определения коэффициентов $w_{2k}(\xi, \eta)$ получим рекуррентную систему эллиптических уравнений в неограниченной области $\Delta w_{2k} - a(0, 0) \frac{\partial w_{2k}}{\partial \eta} = G_k(\xi, \eta)$, $\xi, \eta > 0$, с граничным условием $w_{2k}(0, \eta) = w_{2k}(\xi, 0) = 0$. Функции $w_{2k}(\xi, \eta)$ ограничены в начале координат, но поскольку задачи рассматриваются в бесконечной области, эти функции не ограничены при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow +\infty$, и, следовательно, они определяются неоднозначно.

В процессе согласования асимптотических разложений $V(\zeta, y, \varepsilon)$ и $W(\xi, \eta, \varepsilon)$ неоднозначность в определении этих обоих разложений устраняется.

Аналогичным образом рассматривается вторая сторона квадрата $x = 1$. В окрестности этой характеристики строится первое внутреннее разложение

$$V^*(\zeta^*, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^*(\zeta^*, y),$$

где $\zeta^* = (1-x)\varepsilon^{-1}$, и второе внутреннее разложение

$$W^*(\xi^*, \eta, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{2k} w_{2k}^*(\xi^*, \eta),$$

где $\xi^* = (1-x)\varepsilon^{-2}$.

Невязку на границе $y = 1$, равную $-\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(\zeta, 1)$, легко компенсировать с помощью ряда

$$\tilde{S}(\zeta, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{s}_k(\zeta, \tau).$$

При этом функции $\tilde{s}_k(\zeta, \tau)$ удовлетворяют оценке $|\tilde{s}_k(\zeta, \tau)| < M \exp(-\delta(\zeta + \tau))$.

Само разложение $\tilde{S}(\zeta, \tau, \varepsilon)$ вносит невязку на левую границу $x = 0$. Эта невязка в свою очередь убирается рядом $Z(\xi, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\xi, \tau)$, где функции $z_k(\xi, \tau)$ — экспоненциально убывающие решения рекуррентной системы уравнений вида

$$\left(\Delta_{\xi\tau} + a(0, 1) \frac{\partial}{\partial \tau} \right) z_k(\xi, \tau) = Q_k(\xi, \tau).$$

Аналогично строятся ряды

$$\tilde{S}^*(\zeta^*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{s}_k^*(\zeta^*, \tau), \quad Z^*(\xi^*, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k z_k^*(\xi^*, \tau).$$

Теперь асимптотика решения построена полностью.

Теорема 1 [2]. Пусть $u(x, y, \varepsilon)$ — решение задачи (4), (5), а

$$Y_N(x, y, \varepsilon) = A_{2N,x,y}U + T_N + T_N^* + A_{2N,x,\tau}S + A_{2N,\zeta,\tau}\tilde{S} + A_{2N,\zeta^*,\tau}\tilde{S}^* + A_{2N,\xi,\tau}Z + A_{2N,\xi^*,\tau}Z^*,$$

где T_N — составное асимптотическое разложение из рядов V и W , а T_N^* — аналогичное составное асимптотическое разложение из рядов V^* и W^* .

Тогда существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что для любого натурального N справедлива оценка

$$|Y_N(x, y, \varepsilon - u(x, y, \varepsilon))| < M\varepsilon^{\gamma N}.$$

Елена Федоровна Леликова в 1976 г. построила полную асимптотику решения задачи (4), (5) в случае, когда на границе области $\partial\Omega$ есть точка, в которой характеристики касаются границы внешним образом (*Дифференц. уравнения*. 1976. Т. 12, № 10. С. 1852–1865).

Впоследствии Е. Ф. Леликовой были исследованы некоторые задачи, аналогичные задаче (4), (5), но в трехмерной области (*Дифференц. уравнения*. 1978. Т. 14, № 9; С. 1638–1648; 1980. Т. 16, № 2. С. 105–118), также она построила полную асимптотику решения задачи (4), (5) в случае, когда на границе области $\partial\Omega$ есть угловая точка (Применение метода согласования асимптотических разложений к краевым задачам для дифференциальных уравнений: сб. тр. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. С. 40–57).

В настоящее время исследования таких задач продолжаются. Поскольку А. М. Ильин уделял большое внимание задачам, в которых малый параметр в уравнении стоит не при всех старших производных, а только при части из них (что, например, характерно для моделей в анизотропных средах), то были исследованы краевые задачи такого типа в случае, когда граничная функция гладкая (в работах [3; 4] — точки внешнего касания и угловые точки границы, [5] — точки внутреннего касания границы, [6] — точки перегиба границы).

2. Асимптотика фундаментального решения параболического уравнения при $t \rightarrow +\infty$

Метод согласования асимптотических разложений был применен также и для исследования асимптотического поведения при $t \rightarrow \infty$ фундаментального решения $G(x, s, t)$ задачи Коши для параболических уравнений вида

$$G_t - G_{xx} + a(x)G = 0, \quad G(x, s, 0) = \delta(x - s), \quad x, s \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0. \quad (6)$$

Предполагается, что функция $a(x)$ бесконечно дифференцируема и при $|x| \rightarrow \infty$ убывает. Более точно, разлагается в асимптотический ряд вида

$$a(x) = a_2^\pm x^{-2} + \sum_{k=3}^{\infty} a_k^\pm x^{-k}.$$

Кроме того, предполагается, что выполнено условие: уравнение $u'' - a(x)u' - \lambda u = 0$ не имеет нетривиального решения из $L_2(\mathbb{R}^1)$ при $\lambda > 0$. Для этого, например, достаточно, чтобы $a(x) \leq 0$.

Из этого условия вытекает, что главный коэффициент a_2^\pm не может быть большим по модулю отрицательным числом: $a_2^\pm \geq -1/4$ ($-1/4$ — постоянная Крезера).

Известно, что поведение фундаментального решения $G(x, s, t)$ при больших временах определяется поведением его преобразования Лапласа $g(x, s, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$. Задача для $g(x, s, \lambda)$ принимает вид

$$g_{xx} - a(x)g - \lambda g = -\delta(x - s), \quad x \in \mathbb{R}, \quad g(x, s, \lambda) \rightarrow 0 \text{ при } |x|, |s| \rightarrow \infty.$$

Изучение поведения функции $g(x, s, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow 0$ проводится методом согласования асимптотических разложений. Несмотря на кажущуюся простоту, задача эта является бисингулярной, поскольку область бесконечна, и в различных частях этой области разложения функции $g(x, s, \lambda)$ имеют различный вид.

Поведение фундаментального решения $G(x, s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ зависит от скорости убывания коэффициента $a(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$. Самый простой случай, так называемое *быстрое убывание* реализуется тогда, когда $a_2^\pm = 0$, т. е. $|a(x)| = O(x^{-3})$ при $x \rightarrow \infty$. В этом случае фундаментальное решение $G(x, s, t)$ ведет себя как фундаментальное решение уравнения теплопроводности (Леликова Е. Ф. *Мат. сб.* 1987. Т. 132 (174), № 3. С. 322–344), т. е. $G(x, s, t) \sim \exp((x-s)^2/(4t))/\sqrt{2\pi t}$.

Наиболее интересным является случай, когда $a_2^\pm \neq 0$ (Леликова Е. Ф. *Мат. сб.* 1989. Т. 180, № 8. С. 1119–1131; 1995. Т. 186, № 4. С. 125–142). Этот случай назван *критическим*. Скорость убывания фундаментального решения $G(x, s, t)$ в этом случае зависит от поведения решений стационарного уравнения

$$u'' - a(x)u = 0. \quad (7)$$

Будем называть его уравнением первого типа, если оно имеет такие линейно независимые решения $U_1(x)$, $U_2(x)$, что $|U_1(x)| = O(U_2(x))$ при $x \rightarrow -\infty$, $|U_2(x)| = O(U_1(x))$ при $x \rightarrow +\infty$, и уравнением второго типа, если оно имеет такие линейно независимые решения $U_1(x)$, $U_2(x)$, что $|U_1(x)| = O(U_2(x))$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

Со стационарным уравнением (7) тесно связано уравнение Эйлера $v'' - \frac{a_2^\pm}{x^2}v = 0$. Его характеристическое уравнение имеет вид $\mathcal{A}^\pm(\alpha) := \alpha(\alpha - 1) - a_2^\pm = 0$. При $a_2^\pm \geq -1/4$ его корни действительны, при $a_2^\pm > -1/4$ — различны, а при $a_2^\pm = -1/4$ существует двукратный корень $\alpha_2^\pm = 1/2$. Обозначим эти корни через α_1^\pm , α_2^\pm и будем считать, что $\alpha_1^\pm \leq \alpha_2^\pm$. Обозначим также $\alpha_{21}^- = (\alpha_2^- - \alpha_1^-)/2$, $\alpha_{21}^+ = (\alpha_2^+ - \alpha_1^+)/2$, $\alpha^* = \min\{\alpha_{21}^-, \alpha_{21}^+\}$.

Асимптотические представления фундаментального решения $G(x, s, t)$ при $t \rightarrow \infty$ во всех рассматриваемых случаях построены и обоснованы с точностью до любой степени t^{-1} равномерно по $x, s \in \mathbb{R}^1$. Здесь мы ограничимся приведением только главных членов асимптотики в наиболее интересной области изменения x, s :

$$\mathcal{D}_\beta = \{(x, s) : |x| + |s| < Ct^{1/2-\beta}\}, \quad \beta \in (0, 1/2), \quad C > 0.$$

Пусть стационарное уравнение (7) относится к уравнениям первого типа и корни характеристического уравнения Эйлера $\mathcal{A}(\alpha) = 0$ различны ($a_2^\pm > -1/4$). Тогда главный член асимптотического представления $G(x, s, t)$ в области \mathcal{D}_β имеет вид

$$G(x, s, t) \simeq t^{-1-\alpha^*} \psi(x, s) \text{ при } \alpha^* \neq m, \quad G(x, s, t) \simeq t^{-1-\alpha^*} \ln t \psi(x, s) \text{ при } \alpha^* = m,$$

где m — целое положительное число.

Пусть стационарное уравнение (7) относится к уравнениям первого типа и характеристическое уравнение Эйлера $\mathcal{A}(\alpha) = 0$ имеет кратный корень ($a_2^\pm = -1/4$). Тогда главный член асимптотического представления $G(x, s, t)$ в области \mathcal{D}_β имеет вид $G(x, s, t) \simeq V'(t)\psi(x, s)$, где через $V(t)$ обозначен интеграл Рамануджана $V(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi t} d\xi}{\xi(\pi^2 + \ln^2 \xi)}$. Можно проверить, что $V(t) = O(\ln^{-1} t)$ при $t \rightarrow \infty$ и, следовательно, $G(x, s, t) = O(t^{-1} \ln^{-2} t)$.

В заключение этого раздела отметим, что в 1988 г. Е. Ф. Леликовой была построена асимптотика фундаментального решения $G(x, s, t)$ в случае, когда $a(x)$ не стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$ (Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений: сб. ст. / БНЦ УрО АН СССР. Уфа, 1988. С. 46–65), а в 1998 г. — асимптотика фундаментального решения уравнения высокого порядка (*Фундамент. и прикл. математика*. 1998. Т. 4, вып. 3. С. 1009–1027).

3. Моделирование тепловых процессов сварки

Задача о нагреве полубесконечного тела источником тепла малых размеров используется для анализа процессов электрошлаковой сварки, газопламенной закалки, плазменной обработки и др. Для определения полей температур, скоростей охлаждения, градиентов температур часто возникает необходимость провести исследования в области, непосредственно прилегающей к источнику нагрева. Важно учесть распределение плотности теплового потока по площади нагрева, которое может иметь весьма сложный характер. Практически не встречаются примеры исследования решения при произвольном распределении плотности теплового потока. Естественным образом точечный источник тепла моделируется δ -функцией или δ -образными последовательностями.

Одной из первых задач, поставленных А. М. Ильиным в этой тематике, была задача о нахождении асимптотического разложения функции Грина для второй краевой задачи. Эта асимптотика играет важную роль при расчетах тепловых задач в случае, когда линейный размер источника тепла на границе много меньше размеров нагреваемого тела.

Эта асимптотика была построена Игорем Викторовичем Першиным в 2001 г. (см. [7]). В этой работе при $t > 0$ рассматривалась задача

$$\frac{\partial G}{\partial t} = A(y) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + B(y) \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + C(y) \frac{\partial G}{\partial y}, \quad -\frac{\partial G(0, y, \eta, t)}{\partial x} = \delta(y - \eta, t), \quad G(x, y, \eta, 0) = 0 \quad (8)$$

в области $0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, где $A, B, C \in C^\infty$, $A > 0, B > 0$.

Была доказана следующая теорема.

Теорема 2 [7]. *В окрестности особой точки функция Грина задачи (8) имеет асимптотику вида*

$$G(x, y, \eta, t) = \frac{1}{t} \exp\left(\sum_{i=-1}^{\infty} t^i w_i^*(x, y, \eta)\right),$$

где $w_i^*(x, y, \eta)$ — полиномы по переменным x , $(y - \eta)$ с коэффициентами, зависящими от η как от параметра.

В работе [8] рассматривалась задача о нагреве полубесконечного тела подвижным источником тепла большой мощности, заданным на полосе малой ширины. В ней предполагалось выполнение следующих условий: распространение тепла в теле происходит только с помощью теплопроводности, отсутствуют фазовые и структурные превращения, теплофизические коэффициенты не зависят от температуры.

В рассматриваемой задаче полосовой источник действует на границе $x = 0$ и движется вдоль оси $y = 0$ с постоянной скоростью. В этом случае тепловое поле полубесконечного тела не зависит от координаты z (является симметричным вдоль оси oz). Поэтому исходная задача сводится к двумерной задаче определения теплового поля в полуплоскости, по границе которой движется источник малой ширины, при этом ширина источника стремится к нулю, а его мощность — к бесконечности.

Математическая модель в данном случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \tilde{y}^2} \right), & 0 \leq x \leq \infty, \quad -\infty \leq y \leq \infty, \quad -\infty \leq z \leq \infty, \quad t > 0, \\ \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial \tilde{x}} + \alpha_k T \right) \Big|_{x=0} = \delta(\tilde{y} - \tilde{v}t), & T(\tilde{x}, \tilde{y}, 0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь a — коэффициент теплопроводности ($a \ll 1$), λ — коэффициент теплопроводности, α_k — коэффициент конвективной теплопередачи, v — скорость движения источника тепла, δ — дельта-функция Дирака, T — искомая температура, t — время, знак \sim обозначает неподвижную систему координат.

Перейдя в подвижную систему координат, связанную с источником тепла, и сделав соответствующую замену переменных $T = ue^{-\frac{v}{2}y - \frac{v^2}{4\beta}t}$, $v = \tilde{v}\beta$, где $\beta = 1/a$ и $\alpha = \alpha_k/\lambda$, получим систему (9) в каноническом виде, для которого справедливо следующее утверждение.

Теорема 3 [8]. *Существует единственное решение задачи при $t > 0$, которое имеет вид*

$$\pi u(x, y, t) = \sqrt{\frac{\beta}{t}} e^{-\frac{y^2\beta}{4t}} D\left(x, \frac{t}{\beta}\right) + e^{st} \int_0^{t/\beta} D(x, \tau) \left[\frac{\beta s}{\sqrt{\tau}} + \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\frac{2\tau - y^2}{4\tau} \right) \right] e^{-\frac{y^2\beta}{4\tau} - s\tau} d\tau,$$

$$\text{где } D(x, t) = \frac{1}{\alpha\beta} \left[\operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) - e^{\alpha^2 t + \alpha x} \operatorname{Erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} + \alpha t\right) \right].$$

Здесь $\operatorname{Erfc}(x)$ — дополнение функции ошибок, $s = v^2/4\beta$.

Поведение главного члена разложения этого решения — функции $D_0(x, t)$ — описывает

Теорема 4 [8]. *Функция $D_0(x, t)$ имеет асимптотическое представление*

- в области $x \leq t$: $D_0(x, t) = \frac{M\sqrt{t}}{\beta} + O(t)$, $0 < M \leq 1$, причем при $x \ll t$ $M = 1$;
- в области $x \gg t$: $D_0(x, t) = \frac{2\sqrt{t}}{\beta} e^{-\frac{x^2}{4t}} + O(t)$.

Из нее для $u(x, y, t)$ выводим следующее асимптотическое представление.

Теорема 5 [8]. *Функция $u_0(x, y, t)$ имеет асимптотическое представление*

- в области $x \leq t$: $\pi u_0(x, y, t) \cong M \left[\frac{1}{\sqrt{\beta}} e^{-\beta \frac{y^2}{4t}} - \frac{\beta}{2} \operatorname{Ei}\left(-\frac{\beta y^2}{4t}\right) \right]$, $0 < M \leq 1$, причем при $x \ll t$ $M = 1$;
- в области $x \gg t$: $\pi u_0(x, y, t) \cong \frac{2}{\beta} e^{-\frac{\beta(x^2+y^2)}{4t}}$.

Вернувшись в неподвижную систему координат, для решения исходной задачи вблизи источника тепла получим $T_0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \cong e^{-\frac{\tilde{v}}{2a}\tilde{y}^2 - \frac{\tilde{v}}{4a}\tilde{t}} \left(-\ln\left(\frac{(\tilde{y} - \tilde{v}\tilde{t})^2}{4a\tilde{t}}\right) \right)$.

Исследование подобных задач продолжается и в настоящее время (см, например, статью И. В. Першина в данном номере журнала).

4. Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения

Исследование асимптотического поведения решений задачи Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром ε при старшей производной

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq t_0, \quad (10)$$

$$u(x, t_0) = q(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

имеет большую историю.

Частный случай уравнения (10), известный как уравнение Бюргерса $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$ и рассмотренный еще Г. Бейтменом (*Monthly Weather Rev.* 1915. Vol. 43. P. 163–170) при исследовании движения жидкости и Дж. Бюргерсом (Проблемы механики: сб. ст. М.: ИЛ, 1955. С. 422–445) в теории турбулентности, используется при изучении эволюции широкого класса физических систем и вероятностных процессов, например, нелинейной диффузии, акустических волн в жидкости и газе (Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир, 1977; Гурбатов С. Н., Малахов А. Н., Саичев А. И. *Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии*.

М.: Наука, 1990). Параметр ε имеет смысл вязкости среды. Кроме того, уравнение (10) используется при моделировании движения автомобильного потока, в задаче о паводковых волнах и в некоторых других, когда скорость движения нетривиальным образом зависит от плотности [1].

С различных точек зрения задачу Коши (10), (11) изучали многие математики. Интерес к ней объясняется как наличием физической интерпретации, так и тем, что ее решения позволяют получить вязкостные обобщенные решения предельного уравнения (Олейник О. А. *Успехи мат. наук.* 1959. Т. 14, № 2. С. 159–164). В предположении, что $\varepsilon > 0$, функция φ бесконечно дифференцируема, ее вторая производная строго положительна, начальная функция q ограничена и кусочно-гладкая, строго доказано (Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука, 1967), что существует единственное ограниченное бесконечно дифференцируемое по x и t решение $u(x, t, \varepsilon)$.

Особый интерес представляет поведение решения $u(x, t, \varepsilon)$ вблизи особых точек решения предельной задачи с $\varepsilon = 0$, поскольку сингулярные события во многом определяют поведение системы в целом на конечных и больших временах и их изучение важно для понимания процессов формирования ударных волн в физических средах с малой ненулевой вязкостью. Например, сдвиг фазы ударной волны, которая начинается в точке градиентной катастрофы и продолжается до бесконечности, определяется поведением коэффициентов асимптотического решения именно в окрестности особой точки [1].

Поведение решения в целом оказывается в некотором смысле подобным поведению вблизи особой точки. Точная математическая формулировка этого тезиса представляет собой метод ренорм-группы (Теодорович Э. В. *Прикл. математика и механика.* 2004. Т. 68, вып. 2. С. 335–367), с помощью которого можно построить равномерное асимптотическое приближение решения [9].

С точки зрения приложений важно также описание поведения решений вблизи ударных волн; подробнее о физической стороне этого вопроса см., например, монографию Дж. Уизема (*Линейные и нелинейные волны.* М.: Мир, 1977) и прекрасный обзор В. Е. Фортова (*Успехи физ. наук.* 2007. Т. 177, № 4. С. 347–368), где прикладному аспекту уделено особое внимание.

Хотя существует классификация особенностей решений (Арнольд В. И. *Особенности кавестик и волновых фронтов.* М.: Фазис, 1996), поведение $u(x, t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ является, вообще говоря, довольно сложным — возникает необходимость строить не один, а несколько асимптотических рядов в разных областях независимых переменных. Таким образом, мы имеем дело с сингулярно возмущенной задачей.

В работах А. М. Ильина и Т. Н. Нестеровой (Ильин А. М., Нестерова Т. Н. *Докл. АН СССР.* 1978. Т. 240, № 1. С. 11–13; Нестерова Т. Н. Дифференциальные уравнения с малым параметром: сб. ст. / УНЦ АН СССР Свердловск, 1980. С. 66–86) задача (10), (11) рассмотрена в случае, когда предельное решение на конечном отрезке времени имеет две гладкие линии разрыва $x = s_1(t)$ и $x = s_2(t)$, сливающиеся в момент $t = t^*$ в одну $x = s_3(t)$.

В работе А. М. Ильина (*Изв. АН СССР. Сер. математ.* 1989. Т. 53, вып. 2. С. 258–275) была исследована бисингулярная задача, когда в полосе $\{(x, t): t_0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}\}$ предельное решение является функцией, гладкой всюду, кроме одной гладкой линии разрыва $\{(x, t): x = s(t), t \geq t^* > t_0\}$. Подробное изложение результатов можно также найти в монографии [1], где асимптотика решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ построена и обоснована с произвольной степенью точности.

Задача о переходе слабого разрыва в сильный была рассмотрена в работах Арлена Михайловича Ильина и Сергея Викторовича Захарова [10; 11], в которых задача (10), (11) исследована в случае, когда начальная функция $u(x, 0, \varepsilon)$ является гладкой всюду кроме одной точки, в которой она непрерывна, а разрыв имеет первая производная. Тогда в некоторой полосе $t_0 \leq t \leq t^*$ предельное решение $u(x, t, 0)$ будет непрерывным, но при этом оно будет иметь разрыв производной u_x , т. е. слабый разрыв.

В предположении, что

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 1, \quad q(x) = -(x + ax^2) \Theta(-x) (1 + q_0(x)),$$

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, $a > 0$, $q_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $q_0(x) = 0$ в некоторой окрестности нуля, было исследовано поведение решения $u(x, t, \varepsilon)$ вблизи точки перехода слабого разрыва в сильный.

В окрестности начала координат ($x = 0$, $t = 0$) вводятся растянутые переменные $\xi = \varepsilon^{-2/3}x$, $\tau = \varepsilon^{-1/3}t$. Асимптотика решения задачи построена в виде ряда

$$W = \sum_{p=2}^{\infty} \varepsilon^{p/6} \sum_{s=0}^{[p/2]-1} \ln^s \varepsilon w_{p,s}(\xi, \tau).$$

Коэффициенты $w_{p,s}(\xi, \tau)$ — это решения рекуррентной системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_{2,0}}{\partial \tau} + w_{2,0} \frac{\partial w_{2,0}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{2,0}}{\partial \xi^2} = 0, \quad \frac{\partial w_{3,0}}{\partial \tau} + \frac{\partial (w_{2,0} w_{3,0})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{3,0}}{\partial \xi^2} = 0, \\ \frac{\partial w_{p,s}}{\partial \tau} + \frac{\partial (w_{2,0} w_{p,s})}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w_{p,s}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial E_{p,s}}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

где

$$E_{p,s} = -\frac{1}{2} \sum_{m=3}^{p-1} \sum_{l=0}^s w_{m,l} w_{p+2-m,s-l} - \sum_{q=3}^{[p/2]-s+1} \frac{\varphi^{(q)}(0)}{q!} \sum_{\substack{p_1+\dots+p_q=p+2 \\ s_1+\dots+s_q=s}} \prod_{j=1}^q w_{p_j,s_j}$$

(считается, что при $s = [p/2] - 1$ сумма по q равна нулю), с условиями

$$w_{p,s} = \sum_{l=s}^{[p/2]-1} \frac{l!}{s!(l-s)!3^s} \ln^{l-s} |\tau| \sum_{k=\max\{1,2l\}}^{\infty} |\tau|^{(p-3k)/2} R_{k,l,p-2l-2}(\theta), \quad \theta = \frac{\xi}{2\sqrt{-\tau}},$$

при $\tau \rightarrow -\infty$ в области $X^0 = \{(\xi, \tau): |\xi| < |\tau|^{1-\gamma}, \tau < 0\}$ ($0 < \gamma < 1/2$).

Функции $R_{k,l,p-2l-2}(\theta)$ находятся из условия согласования ряда W с разложением в пограничном слое в окрестности линии слабого разрыва. Главный член асимптотики имеет вид $\varepsilon^{1/3} w_{2,0}(\xi, \tau)$, где

$$w_{2,0}(\xi, \tau) = -\frac{2}{\Phi(\xi, \tau)} \frac{\partial \Phi(\xi, \tau)}{\partial \xi}, \quad \Phi(\xi, \tau) = \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{4b}{3}s^3 + \tau s^2 - \xi s\right) ds, \quad b = a - \varphi'''(0)/2 > 0.$$

Еще один тип особой точки решения возникает в случае задачи с двумя малыми параметрами (Захаров С. В. Докл. РАН. 2008. Т. 422, № 6. С. 733–734), когда начальное условие имеет вид

$$u(x, 0, \varepsilon, \rho) = \nu(x\rho^{-1}), \quad x \in \mathbb{R},$$

где функция ν бесконечно дифференцируема и ограничена, а ρ — второй малый параметр. В работе [9] доказано, что в этом случае при выполнении условий

$$\nu(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_n^\pm}{\sigma^n}, \quad \sigma \rightarrow \pm\infty \quad (\nu_0^- > \nu_0^+)$$

для решения задачи (10), (11) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\mu = \rho/\varepsilon \rightarrow 0$ в полосе $\{(x, t): x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T\}$ справедлива асимптотическая формула

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) = h_0\left(\frac{x}{\rho}, \frac{\varepsilon t}{\rho^2}\right) - R_{0,0,0}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + \Gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right) + O\left(\mu^{1/2} \ln \mu\right), \quad \text{где}$$

$$h_0(\sigma, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(s) \exp\left[-\frac{(\sigma-s)^2}{4\omega}\right] ds, \quad R_{0,0,0}(z) = \frac{\nu_0^-}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} \exp(-y^2) dy + \frac{\nu_0^+}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z \exp(-y^2) dy,$$

$z = \sigma/(2\sqrt{\omega})$, функция Γ — решение задачи Коши во внутренних переменных ($\eta = x/\varepsilon, \theta = t/\varepsilon$)

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi(\Gamma)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial \eta^2} = 0, \quad \Gamma(\eta, 0) = \begin{cases} \nu_0^-, & \eta < 0, \\ \nu_0^+, & \eta > 0. \end{cases}$$

Кроме того, методом ренормализации получена асимптотическая формула [9]

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) = \frac{1}{\nu_0^+ - \nu_0^-} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma\left(\frac{x - \rho s}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right) \nu'(s) ds + O(\mu^{1/4}).$$

Исследование асимптотических свойств решений задачи Коши (10), (11) продолжается. Доказано свойство универсальности найденного А. М. Ильиным решения, выражающегося через функцию Пирси, уравнения Бюргерса (Dubrovин В., Elaeva М. *Russ. J. Math. Phys.* 2012. Vol. 19, iss. 4. P. 449–460). Некоторые модификации задач о градиентной катастрофе и о переходе слабого разрыва в сильный с вырождением начальной функции рассматривались в работе [12], где также установлена их связь с теорией особенностей В. И. Арнольда и его школы. В данном выпуске журнала опубликованы новые результаты С. В. Захарова, относящиеся к задаче с большим начальным градиентом: получены формальные асимптотические решения в виде рядов по степеням двух малых параметров.

5. Асимптотика решений сингулярно возмущенных нелинейных дифференциальных уравнений с дополнительными асимптотическими слоями

В монографии [1, гл. II, § 3] Арлен Михайлович начал исследование нелинейных ОДУ с малым параметром и бисингулярных задач для них, асимптотики решений которых не укладывались в привычную схему из двух асимптотических слоев. Проблема большего числа слоев обусловлена тем, что в таких нелинейных задачах внешнее и внутреннее разложения решения оказываются не согласуемыми, что приводит к необходимости ввести третий масштаб переменных и отвечающее ему промежуточное разложение (а в некоторых случаях уже и трех слоев оказывается недостаточно) для того, чтобы в конце концов построить составное асимптотическое разложение, обеспечивающее равномерное приближение решения задачи с точностью до произвольной степени малого параметра.

Рассмотрим начальную задачу с малым параметром $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dU}{dt} = f(t, U, V), & \frac{dV}{dt} = g(t, U, V), \\ U(0, \varepsilon) = A > 0, & V(0, \varepsilon) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

для решения которой требуется построить равномерное по $t \in [0, T]$ асимптотическое разложение при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предположим дополнительно, что выполнены следующие условия.

1. Функции $f(t, U, V)$ и $g(t, U, V)$ бесконечно дифференцируемы на множестве

$$D = \{t, U, V : 0 \leq t \leq T, 0 \leq U \leq B, |V| \leq B\}, \quad 0 < A < B.$$

2. На множестве D при $t > 0, U > 0$ справедливо неравенство $\frac{\partial f}{\partial U}(t, U, V) < 0$.
3. Пусть в начале координат переменных (t, U, V) справедливы соотношения

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial U} = 0, \dots, \frac{\partial^{\kappa-1} f}{\partial U^{\kappa-1}} = 0,$$

где $\varkappa \geq 2$, целое число; $\frac{\partial^\varkappa f}{\partial U^\varkappa} < 0$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\frac{\partial^\varkappa f}{\partial U^\varkappa}(0, 0, 0) = -\varkappa!,$$

поскольку привести задачу к такому виду с сохранением всех остальных условий несложно с помощью линейной однородной замены переменных t и U .

4. $g(0, 0, 0) = 0$.

В таком виде при дополнительном ограничении $\varkappa = 2$ эта задача была впервые кратко опубликована в работе Арлена Михайловича Ильина и Олега Юрьевича Хачая [13] и затем, снабженная подробными доказательствами и примерами, была напечатана в статье [14]; после этого, в краткой заметке О. Ю. Хачая (*Дифференц. уравнения*. 2011. Vol. 47, no. 4. P. 605–608) было произведено ее исследование для случая $\varkappa \geq 3$.

Отметим, что задача (12) была достаточно хорошо изучена (подробная библиография имеется в монографии А. Б. Васильевой и В. Ф. Бутузова “Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений” 1990 г.) задолго до публикации статьи [14] в том случае, когда существует устойчивое решение предельной системы уравнения $U_0(t), V_0(t)$ такое, что

$$f(t, U_0(t), V_0(t)) \equiv 0, \quad V_0'(t) = g(t, U_0(t), V_0(t)), \quad V(0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial U}(t, U_0(t), V_0(t)) < 0.$$

Нарушение последнего условия хотя бы в одной точке (в данном случае в начальной точке $t = 0$) значительно усложняет процесс нахождения асимптотического разложения.

Кроме того, в монографии [1, гл. II, § 3] для случая $\varkappa = 2$, а в статьях О. Ю. Хачая (*Деп. в ВИНТИ*. 2005. Т. 16, №174-В2005. С. 1–46; *Дифференц. уравнения*. 2008. Vol. 44, № 2. С. 270–272) для произвольного значения $\varkappa \geq 3$ была исследована асимптотика решения задачи Коши для одного уравнения, получаемой из задачи (12) удалением второго дифференциального уравнения и всех зависимостей, связанных с функцией V . Существенное отличие задачи Коши для системы второго порядка (12) состоит в следующем. Для нее уже не удастся, как это было сделано для одного уравнения, построить правильное внешнее разложение в виде асимптотического ряда по кажущейся естественной калибровочной системе, состоящей только из степеней малого параметра. Коэффициенты построенного по степенной калибровочной системе разложения не определяются однозначно — каждый из коэффициентов содержит одну неопределенную постоянную.

Такая ситуация не является неожиданной и встречается во многих подобных задачах, когда неизвестные коэффициенты могут быть определены из согласования с другим асимптотическим разложением, которое должно быть построено при малых значениях t . Но особенно интересно, что ни при каких значениях этих произвольных постоянных построенные только по степеням ε формальные асимптотические разложения (ф.а.р.) не задают правильное асимптотическое разложение решения задачи (12), которое, оказывается, имеет степенно-логарифмический вид.

Отметим также, что Арлена Михайловича интересовало, при каких условиях на систему ОДУ происходит увеличение количества асимптотических слоев, необходимого для получения такого составного разложения. С этой целью в статье [15] была рассмотрена задача

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d}{dt} U_1 = -U_1^2 + U_2^3 + t, & \varepsilon \frac{d}{dt} U_2 = -U_2^2 + U_1^3 + t^2, \\ U_1(0) = \alpha, U_2(0) = \beta, & 0 \leq t \leq t_0, \end{cases}$$

асимптотическое разложение которой потребовало введения второго промежуточного слоя.

Кроме того, в работах О. Ю. Хачая 2013–2014 гг. (*Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2013. Т. 19, № 1. С. 300–315; *Дифференц. уравнения*. 2014. Vol. 50, № 5. С. 611–625) был рассмотрен широкий класс сингулярных начальных задач с одним малым параметром.

Для систем произвольного числа дифференциальных уравнений, в которых различные степени малого параметра являются коэффициентами при производных неизвестных функций, в статье 2013 г. были подробно произведены процедуры метода согласования асимптотических разложений [1] при переходе от одного асимптотического слоя к последующему в случае степенно-логарифмических ф.а.р. решения задачи в этих слоях. В работе 2014 г. была доказана равномерная оценка разности между составным разложением, построенным на основе таких ф.а.р., и точным решением указанной задачи Коши на некотором конечном промежутке.

Остановимся подробнее на результатах, связанных с задачей (12) при $\varkappa = 2$, опубликованных в статье [14]. Были выделены внутренний и промежуточный асимптотические слои, отвечающие соответственно заменам переменных

- $\tau = \varepsilon^{-1}t$, $U(\varepsilon\tau, \varepsilon) \equiv W(\tau, \varepsilon)$, $V(\varepsilon\tau, \varepsilon) \equiv Z(\tau, \varepsilon)$;
- $\eta = \varepsilon^{-2/3}t$, $u(\eta, \varepsilon) \equiv U(t, \varepsilon)$, $v(\eta, \varepsilon) \equiv V(t, \varepsilon)$.

Для искомых функций внутреннего масштаба $W(\tau, \varepsilon)$ и $Z(\tau, \varepsilon)$ будем искать ф.а.р. в виде

$$\widetilde{W}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(\tau), \quad \widetilde{Z}(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k z_k(\tau).$$

После подстановки рядов \widetilde{W} и \widetilde{Z} в соотношения (12) для коэффициентов этих рядов возникает следующая рекуррентная система задач Коши:

$$\frac{dw_0}{d\tau} = f(0, w_0(\tau), 0), \quad w_0(0) = A, \quad \frac{dz_1}{d\tau} = g(0, w_0(\tau), 0), \quad z_1(0) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dw_k}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial U}(0, w_0(\tau), 0)w_k + r_k(\tau), \quad w_k(0) = 0, \quad \frac{dz_{k+1}}{d\tau} = s_k(\tau), \quad z_{k+1}(0) = 0, \quad (14)$$

где $r_k(\tau)$ и $s_{k-1}(\tau)$ — это известные функции τ и функции $w_i(\tau)$ и $z_i(\tau)$ с индексами $i < k$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 6 [14]. *Решения задач Коши (13), (14) существуют и единственны, принадлежат $C^\infty[0, \infty)$ и обладают асимптотическими разложениями следующего вида при $\tau \rightarrow \infty$:*

$$\begin{aligned} w_0(\tau) &= t^{-1/(\varkappa-1)}\omega(\tau), & z_1(\tau) &= \omega(\tau) + b_1 \ln \tau, \\ w_k(\tau) &= \tau^{(3k-1)/(\varkappa-1)}\omega(\tau), & z_{k+1}(\tau) &= \tau^{3k}\omega(\tau), \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (15)$$

где символом $\omega(\tau)$ обозначены формальные ряды вида $\omega(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \tau^{-k} \sum_{l=0}^k c_{k,l}(\ln \tau)^l$. Все разложения (15) допускают почленное дифференцирование.

Переходим к построению промежуточного разложения. Если ряды \widetilde{W} и \widetilde{Z} переписать в новой переменной η и сгруппировать члены получившихся рядов по степеням ε и $\ln \varepsilon$, то получатся формальные ряды

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\eta, \varepsilon) &= \varepsilon u_1(\eta) + \sum_{m=2}^{\infty} \varepsilon^{m/3} \sum_{n=0}^{m-1} (\ln \varepsilon)^n v_{m,n}(\eta), \\ \tilde{v}(\eta, \varepsilon) &= \varepsilon(v_{3,0}(\eta) + v_{3,1}(\eta) \ln \varepsilon) + \sum_{m=4}^{\infty} \varepsilon^{m/3} \sum_{n=0}^{m-3} (\ln \varepsilon)^n v_{m,n}(\eta), \end{aligned} \quad (16)$$

в качестве коэффициентов $u_{m,n}(\eta)$ и $v_{m,n}(\eta)$ которых выступают задающие условия согласования внутреннего и промежуточного разложений формальные ряды

$$\bar{u}_{m,n}(\eta) = \eta^{-m} \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi(\eta) \ln^j(\eta); \quad (17)$$

$$\bar{v}_{3,1}(\eta) \equiv -1/3\gamma, \quad \bar{v}_{3,0}(\eta) = \gamma \ln \eta + \varphi(\eta); \quad \bar{v}_{m,n}(\eta) = \eta^{-m+3} \sum_{j=0}^{m-n-1} \varphi(\eta) \ln^j(\eta), \quad m \geq 4, \quad (18)$$

где использовано обозначение $\varphi(\eta)$ для формальных рядов вида

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i \eta^{3i}, \quad \text{а также } \gamma = \partial g / \partial U(0, 0, 0).$$

После подстановки рядов (16) в соотношения (12) для коэффициентов этих рядов возникает следующая рекуррентная система уравнений:

$$u'_{1,0}(\eta) - \eta + (u_{1,0}(\eta))^2 = 0, \quad v'_{3,0}(\eta) - \frac{\partial g}{\partial U} u_{1,0}(\eta) = 0; \quad (19)$$

$$u'_{m,n} + 2u_{1,0}u_{m,n} - G_{m,n}(\eta) = 0, \quad v'_{m+2,n} - H_{m+2,n}(\eta) = 0, \quad (20)$$

в которой функции $G_{m+\kappa,n}(\eta)$ выражаются через переменную η и функции $u_{i,j}(\eta)$ и $v_{i+2,j}(\eta)$ с индексами $i < m$, функция $H_{m+\kappa,n}(\eta)$ зависит от переменной η , от функции $u_{m,n}(\eta)$, а также от $u_{i,j}(\eta)$ и $v_{i+\kappa,j}(\eta)$ с индексами $i < m$.

Верна

Теорема 7 [14]. *Существуют функции $u_{m,n}(\eta)$ и $v_{m+2,n}(\eta)$ – решения системы уравнений (19), (20), принадлежащие $C^\infty(0, \infty)$, для которых соответственно ряды (17) и (18) являются асимптотическими представлениями при $\eta \rightarrow 0$. Ряды (16), \tilde{W} и \tilde{Z} согласованы:*

$$A_{(K+1)/3, \eta} A_{M, \tau} \tilde{W}(\tau, \varepsilon) = A_{M, \tau} A_{(K+1)/3, \eta} \tilde{u}(\eta, \varepsilon), \\ A_{(K+3)/3, \eta} A_{M+1, \tau} \tilde{Z}(\tau, \varepsilon) = A_{M+1, \tau} A_{(K+3)/3, \eta} \tilde{v}(\eta, \varepsilon).$$

Также для этих функций справедливы асимптотические разложения при $\eta \rightarrow \infty$

$$u_{m,n}(\eta) = \eta^{(m-n)/2} \sum_{k=0}^{m-n-1} \eta^{-k/2} \ln^k(\eta) \varphi(\eta^{-1/2}), \\ v_{m,n}(\eta) = \eta^{(m-n)/2} \sum_{k=0}^{m-n-3} \eta^{-k/2} \ln^k(\eta) \varphi(\eta^{-1/2}) + C(\ln \eta)^{m-n-2}. \quad (21)$$

Здесь вновь использовано обозначение $\varphi(\eta)$ для формальных рядов вида $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \eta^{3i}$.

После перехода в рядах (16) с использованием асимптотики (21) от переменной η при $\eta \rightarrow \infty$ к переменной t при $t \rightarrow 0$ получим правильные формулы для внешнего разложения

$$\tilde{U}(t, \varepsilon) = U_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=0}^i U_{i,j}(t) \ln^j \varepsilon, \quad \tilde{V}(t, \varepsilon) = V_0(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{j=0}^i V_{i,j}(t) \ln^j \varepsilon, \quad (22)$$

в качестве коэффициентов $U_{i,j}(t)$ и $V_{i,j}(t)$ которых выступают задающие условия согласования промежуточного и внешнего разложений формальные ряды

$$\bar{U}_{i,j}(t) = \sum_{k=1-i}^{\infty} t^{k/2} P_{i-j}(\ln t), \quad \bar{V}_{i,j}(t) = \sum_{k=3-i}^{\infty} t^{k/2} P_{i-j}(\ln t), \quad (23)$$

где $P_{i-j}(\ln t)$ — многочлены степени не выше $i - j$ от $\ln t$.

Подставляя ряды (22) в уравнения системы (12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную систему

$$\begin{cases} 0 = f(t, U_0(t), V_0(t)), & \frac{dV_0}{dt} = g(t, U_0(t), V_0(t)), \\ \frac{dU_{i-3,j}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial U}(P_0(t))U_{i,j} + \frac{\partial f}{\partial V}(P_0(t))V_{i,j} + F_{i,j}^U(t), \\ \frac{dV_{i,j}}{dt} = \frac{\partial g}{\partial U}(P_0(t))U_{i,j} + \frac{\partial g}{\partial V}(P_0(t))V_{i,j} + F_{i,j}^V(t), \end{cases} \quad (24)$$

где $i \geq 0$ и $0 \leq j \leq i$; функции $F_{i,j}^U(t)$ и $F_{i,j}^V(t)$ зависят от U_{i_1,j_1} и V_{i_2,j_2} с индексами i_1 и i_2 , меньшими, чем i ; функции $U_{i,j}$ при $i \leq -1$, а также при $j \geq i + 1$ введены для единообразия записи и определены тождественно равными нулю.

Верно следующее утверждение.

Теорема 8 [14]. *Существуют решения уравнений (24), которые принадлежат $C^\infty(0, t_0)$ для некоторого $t_0 > 0$ и имеют асимптотические разложения (23) при $t \rightarrow 0$. Ряды (16) и (22) согласованы: $A_{M,t}A_{N+1/3,\eta}\tilde{u}(\eta, \varepsilon) = A_{N+1/3,\eta}A_{M,t}\tilde{U}(t, \varepsilon)$, $A_{M,t}A_{N+1,\eta}\tilde{v}(\eta, \varepsilon) = A_{N+1,\eta}A_{M,t}\tilde{V}(t, \varepsilon)$.*

Введем в рассмотрение составное асимптотическое разложение решения $u(t, \varepsilon)$, $v(t, \varepsilon)$ исходной задачи (12)

$$\begin{aligned} X_N(t, \varepsilon) &= A_{N,t}\tilde{U}(t, \varepsilon) + A_{N,\tau}\tilde{W}(\tau, \varepsilon) + A_{N,\eta}\tilde{U}(\eta, \varepsilon) - A_{N,t}A_{N,\eta}\tilde{U}(\eta, \varepsilon) - A_{N,\eta}A_{N,\tau}\tilde{W}(\tau, \varepsilon), \\ Y_N(t, \varepsilon) &= A_{N,t}\tilde{V}(t, \varepsilon) + A_{N,\tau}\tilde{Z}(\tau, \varepsilon) + A_{N,\eta}\tilde{V}(\eta, \varepsilon) - A_{N,t}A_{N,\eta}\tilde{V}(\eta, \varepsilon) - A_{N,\eta}A_{N,\tau}\tilde{Z}(\tau, \varepsilon). \end{aligned}$$

Справедлива

Теорема 9 [14]. *При достаточно малых значениях параметра ε решение $u(t, \varepsilon)$, $v(t, \varepsilon)$ задачи (12) существует на отрезке $[0, t_0]$, где число $t_0 > 0$ определено в теореме 8. Справедлива равномерная по $t \in [0, t_0]$ оценка при $\varepsilon \rightarrow 0$ $|u(t, \varepsilon) - X_N(t, \varepsilon)| + |v(t, \varepsilon) - Y_N(t, \varepsilon)| = O(\varepsilon^{\gamma N})$, где $\gamma > 0$ и $N \in \mathbb{N}$ — произвольное достаточно большое число.*

6. Задачи с двумя независимыми малыми параметрами

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений, сингулярным образом зависящие от нескольких малых параметров, исследовались в сравнительно небольшом числе работ. Пионерскими в этом направлении являются работы А. Н. Тихонова и И. С. Градштейна, в которых, в частности, изучался предельный переход при стремлении к нулю параметров. Вопросы построения и обоснования асимптотики решения систем уравнений, содержащих при производных параметры различных порядков малости, рассматривались в работах А. Б. Васильевой.

Алгоритм асимптотического расщепления систем линейных дифференциальных уравнений, зависящих от двух малых параметров, на подсистемы меньшей размерности изложен в работах Н. А. Сотниченко, С. Ф. Фещенко. Вопрос о построении общего решения подобных систем при некоторых условиях на матрицу при производных и матрицу системы изучался в работах В. П. Яковца, М. А. Стрельникова.

Исследованию предельного перехода в некоторых сингулярно возмущенных задачах с малыми параметрами, зависящими от переменной дифференцирования, посвящены работы Н. А. Косиченко. В работах Р. П. Кузьминой исследуется задача Коши для почти регулярной системы, системы с целыми степенями малого параметра при производных, а также для системы с двойной сингулярностью. Эти задачи соответствуют различным способам вхождения малого параметра в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этих типов

задач приводится построение рядов, которые являются асимптотическими разложениями решений или сходятся к решению на соответствующих промежутках времени.

В работах Р. Е. О'Мэлли строились асимптотические разложения решений начальных и краевых задач. При этом предполагалась зависимость между малыми параметрами. Асимптотика решения линейного уравнения второго порядка, сингулярно зависящего от двух малых параметров, не связанных между собой, рассматривалась для краевой задачи Г. И. Шишкиным.

Тем не менее остается ряд невыясненных вопросов, касающихся прежде всего построения и обоснования асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач с несколькими малыми параметрами в случае, когда не предполагается никакой зависимости между параметрами при стремлении их к нулю.

В 2003 г. Арлен Михайлович поставил цель получить асимптотику решения следующей сингулярно возмущенной начальной задачи, равномерно пригодную при любых соотношениях между малыми параметрами:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t)y + f(t), \quad \mu \frac{dy}{dt} = c(t)x + d(t)y + g(t), \quad (25)$$

$$x|_{t=0} = x^0, \quad y|_{t=0} = y^0, \quad (26)$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $f(t)$, $g(t)$ — бесконечно дифференцируемые вещественные функции на $[0, T]$, удовлетворяющие условиям

$$a(t) < 0, \quad d(t) < 0, \quad D(t) = a(t)d(t) - b(t)c(t) > 0, \quad t \in [0, T], \quad (27)$$

$\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ — малые параметры.

Асимптотическое разложение решения задачи (25), (26) строится в предположении, что ε , μ независимо стремятся к нулю. Под асимптотическим разложением понимается ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(t, \varepsilon, \mu), \quad (28)$$

N -я частичная сумма которого является асимптотическим приближением к решению рассматриваемой задачи с точностью $O(\varepsilon^{N+1} + \mu^{N+1})$ равномерно по $t \in [0, T]$. При этом члены асимптотики должны определяться из более простых задач по сравнению с исходной задачей.

Обозначим $z(t, \varepsilon, \mu) = (x(t, \varepsilon, \mu), y(t, \varepsilon, \mu))^T$, $z^0 = (x^0, y^0)^T$. Асимптотическое разложение решения будем искать в виде

$$z(t, \varepsilon, \mu) = Z(t, \varepsilon, \mu) + \Psi(\tau, \varepsilon, \mu), \quad (29)$$

где $\Psi(\tau, \varepsilon, \mu)$ — так называемое внутреннее разложение, зависящее кроме параметров от новой растянутой переменной $\tau = t/(\varepsilon\mu)$, $Z(t, \varepsilon, \mu)$ — внешнее разложение, приближающее решение задачи равномерно на множестве $t_0 \leq t \leq T$, где $t_0 > 0$ как угодно близко к 0, но фиксировано при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$.

Сами разложения имеют структуру двойных рядов по степеням малых параметров. Так, $Z(t, \varepsilon, \mu)$ ищем в виде

$$Z(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon^m \mu^n z_{m,n}(t). \quad (30)$$

Подставляя разложение (30) в систему (25) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^m \mu^n$, последовательно определим коэффициенты ряда (30) из систем линейных алгебраических уравнений с матрицей $A(t)$ коэффициентов исходной системы (25). В частности, главный член внешнего разложения $z_{0,0}(t) = (x_{0,0}(t), y_{0,0}(t))^T$ является решением вырожденной системы, соответствующей исходной системе (25) (при $\varepsilon = \mu = 0$).

Внутреннее разложение представим в виде

$$\Psi(\tau, \varepsilon, \mu) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \varepsilon^m \mu^n \Psi_{m,n}(\tau, \varepsilon, \mu). \quad (31)$$

Для функций $\Psi_{m,n}(\tau, \varepsilon, \mu)$ удалось получить рекуррентные формулы, позволяющие находить их с использованием лишь только алгебраических операций. Подставляя полученные формулы в ряды (31), мы можем выделить агрегаты, зависящие только от параметров и коэффициентов системы, получить таким образом структуру рядов для задачи с двумя малыми параметрами. При этом частичная сумма построенного ряда (29) удовлетворяет начальным условиям задачи.

Арлен Михайлович Ильин и Ольга Олеговна Коврижных в 2004–2005 гг. получили оценки членов внутреннего разложения, которые являются ключевыми для обоснования построенной асимптотики.

Теорема 10 [16]. *Для функций $\Psi_{m,n}(\tau, \varepsilon, \mu)$, $m = 0, 1, \dots$, $n = 0, 1, \dots$, справедливы оценки*

$$\|\Psi_{m,n}(\tau, \varepsilon, \mu)\| \leq \frac{C}{\rho(\varepsilon, \mu)^{i_*}} \exp(-\sigma \rho(\varepsilon, \mu) \tau), \quad \tau \geq 0,$$

где $\rho(\varepsilon, \mu) = \frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon + \mu}$, $i_* = \min(m, n)$; $C > 0$ и $\sigma > 0$ не зависят от ε, μ, τ , а σ достаточно мало.

В частности, в силу последнего утверждения, определений τ и $\rho(\varepsilon, \mu)$ выполняется соотношение

$$\|\Psi_{0,0}(\tau, \varepsilon, \mu)\| \leq C \exp\left(-\sigma \frac{t}{\varepsilon + \mu}\right), \quad t \geq 0,$$

т. е. главный член внутреннего разложения при любом фиксированном $t \in (0, T]$ и $\varepsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$ экспоненциально стремится к нулю.

Теорема 11 [17]. *При выполнении условий (27) найдутся постоянные $\varepsilon_0 > 0, \mu_0 > 0$ и $C > 0$ такие, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, 0 < \mu \leq \mu_0$ решение $z(t, \varepsilon, \mu)$ задачи (25), (26) удовлетворяет неравенству*

$$\|z(t, \varepsilon, \mu) - z_N(t, \varepsilon, \mu)\| \leq C(\varepsilon^{N+1} + \mu^{N+1}) \quad \text{при } 0 \leq t \leq T,$$

где $z_N(t, \varepsilon, \mu)$ определяется формулой

$$z_N(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{m,n=0}^N \varepsilon^m \mu^n (z_{m,n}(t) + \Psi_{m,n}(\tau, \varepsilon, \mu)).$$

Отметим, что члены ряда (28) выражаются через $z_{m,n}(t)$ и $\Psi_{m,n}(\tau, \varepsilon, \mu)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, \varepsilon, \mu) &= z_{0,0}(t) + \Psi_{0,0}(\tau, \varepsilon, \mu), \\ \varphi_k(t, \varepsilon, \mu) &= \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \varepsilon^k \mu^i (z_{k,i}(t) + \Psi_{k,i}(\tau, \varepsilon, \mu)) + \varepsilon^i \mu^k (z_{i,k}(t) \right. \\ &\left. + \Psi_{i,k}(\tau, \varepsilon, \mu)) \right\} + \varepsilon^k \mu^k (z_{k,k}(t) + \Psi_{k,k}(\tau, \varepsilon, \mu)), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Далее О. О. Коврижных и А. Р. Данилиным была рассмотрена начальная задача для сингулярно возмущенной системы двух обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных (*Дифференц. уравнения.* 2008. Т. 44, № 6. С. 738–747):

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(t, x, y), \quad \mu \frac{dy}{dt} = g(t, x, y), \quad x|_{t=0} = x^0, \quad y|_{t=0} = y^0. \quad (32)$$

При некоторых естественных условиях на правые части системы (32) построено формальное асимптотическое разложение решения этой задачи, получены оценки членов асимптотики. Найден класс нелинейных систем, для которых формальное асимптотическое решение является истинным асимптотическим разложением решения рассматриваемой начальной задачи.

7. Задачи оптимального управления линейными стационарными системами, зависящими от малого параметра

В начале 1990-х годов наряду с продолжением исследований бисингулярных краевых задач для уравнений в частных производных Арлен Михайлович Ильин инициировал исследование ряда новых бисингулярных задач — задач теории оптимального управления, содержащих в своем описании малые параметры. Характерной особенностью таких задач является необходимость изучения систем уравнений, что в случае уравнений в частных производных является мало изученной областью. Отметим, что даже при рассмотрении задач оптимального управления, описываемых системами обыкновенных дифференциальных уравнений, возникают неожиданные результаты.

К этому времени задачи оптимального управления, описываемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений и зависящие от малого параметра, рассматривались в основном в форме систем с быстрыми и медленными переменными и с множеством ограничений на значения управления в виде многогранника. При этом были получены условия стремления значений функционалов качества к значениям аналогичных функционалов для предельных задач. Вид ограничивающего множества в ряде стандартных задач приводит к оптимальным управлениям, принимающим значения только в вершинах ограничивающих многоугольников, и тем самым вообще говоря, разрывным. Если же ограничивающее множество имеет гладкую границу, например, шар в евклидовом пространстве, то оптимальное управление непрерывно.

Первые исследования были связаны с задачей быстродействия (в классе кусочно-непрерывных управлений u) вида

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = Ax_\varepsilon + Bu_\varepsilon, & x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n, u_\varepsilon \in \mathbb{R}^m, \quad \|u_\varepsilon(t)\| \leq 1, \\ x_\varepsilon(0) = x_0 + \varepsilon y, & x_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) = 0, \quad \vartheta_\varepsilon \rightarrow \min, \end{cases} \quad (33)$$

где A и B — постоянные матрицы соответствующих размерностей, $\text{rank}(B) = m \in [2, n - 1]$, а $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^m .

В силу принципа максимума Понтрягина оптимальное управление в этой задаче имеет вид

$$u(t) = \frac{B^* \exp(-A^*t)l_\varepsilon}{\|B^* \exp(-A^*t)l_\varepsilon\|}$$

и тем самым полностью определяется вектором l_ε . При этом, если выполнено условие вполне управляемости системы из (33), то знаменатель в формуле оптимального управления может обращаться в нуль лишь в изолированных точках.

Подставляя управление указанного вида в (33), получим основное уравнение для нахождения l_ε :

$$\bar{x}_0 + \varepsilon \bar{y} = \int_{t_0}^{\vartheta_\varepsilon} \frac{C(t)l_\varepsilon}{\langle C(t)l_\varepsilon, l_\varepsilon \rangle^{1/2}} dt, \quad (34)$$

где $\bar{x}_0 := -\exp(-At_0)x_0$, $\bar{y} := -\exp(-At_0)y$, $C(t) := \exp(-At)BB^*\exp(-A^*t)$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение.

Таким образом, основная задача нахождения асимптотического разложения времени быстродействия ϑ_ε , состояний системы $x_\varepsilon(t)$ и оптимального управления $u_\varepsilon(t)$ сводится к нахождению асимптотического разложения вектора l_ε — решения уравнения (34).

Арлен Михайлович Ильин и Алексей Руфимович Данилин в работе (*Изв. РАН. Техническая кибернетика*. 1994. № 3. С. 96–103) рассмотрели частный случай задачи (33), соответствующий управлению материальной точкой на плоскости с помощью силы, ограниченной по величине. При этом x_0 соответствовало начальному положению и начальной скорости, вектора которых параллельны друг другу, а y_0 был вектором перпендикулярным. В этом случае при $\varepsilon = 0$ оптимальное управление имеет одну точку разрыва, а при $\varepsilon > 0$ оптимальное управление есть гладкая функция.

Позже был рассмотрен общий случай, когда при $\varepsilon = 0$ оптимальное управление имеет единственную точку разрыва, а при $\varepsilon > 0$ оптимальное управление есть гладкая функция (Данилин А. Р., Ильин А. М. *Фундамент. и прикл. математика*. 1998. Т. 4. № 3. С. 905–926).

Основная проблема, возникающая в рассмотренных случаях, заключается в том, что необходимо интеграл из (34) разложить в асимптотический ряд по двум малым величинам: ε и $r_\varepsilon = l_\varepsilon - l_0$, где вектор l_0 определяет оптимальное управление в задаче (33) с $\varepsilon = 0$. Для преодоления этой трудности приходится, как и в бисингулярных задачах для дифференциальных уравнений, рассматривать внешнее (вне малой окрестности нуля знаменателя в интеграле из (34)) разложение и внутреннее (в малой окрестности нуля знаменателя). При этом для нахождения асимптотического разложения интеграла был использован метод вспомогательного параметра (см., например, [18, § 30. II; 19]). В итоге был получен следующий результат.

Теорема 12 [19]. *Время быстрого действия ϑ_ε и компоненты вектора r_ε раскладываются в асимптотические ряды вида*

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k\left(\varepsilon, W(\varepsilon), \ln \frac{1}{W(\varepsilon)}\right),$$

где R_k — рациональные вектор-функции своих аргументов и $R_k\left(\varepsilon, W(\varepsilon), \ln \frac{1}{W(\varepsilon)}\right) = O(\varepsilon^k)$.

Если $m = 2$, то $W(\varepsilon)$ выражается через решение уравнения $\varepsilon = s \ln(1/s)$, не зависящее от \bar{y} . При этом R_k — рациональные вектор-функции от ε и $W(\varepsilon)$.

Отметим, что в этом случае не существует асимптотического разложения времени быстрого действия ϑ_ε даже по рациональным функциям от ε и $\ln \varepsilon$.

В статьях (Данилин А. Р. *Дифференц. уравнения*. 2006. Т. 42, № 11. С. 1473–1480; Данилин А. Р., Парышева Ю. В. *Докл. АН*. 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154) были исследованы задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными и терминальным критерием качества, который зависит только от медленных переменных, а в работах (Данилин А. Р., Коврижных О. О. *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*. 2012. Т. 18, № 2. С. 67–79; 2010. Т. 16, № 1. С. 63–75) и в [20] — задачи оптимального быстрого действия с быстрыми и медленными переменными и, вообще говоря, с дополнительным малым параметром в начальных условиях.

Отметим, что хотя сложная асимптотика времени быстрого действия изначально была получена для ситуации необщего положения, в дальнейшем нашлись задачи быстрого действия с начальными условиями общего положения, но с тем же характером асимптотического разложения [20] (это была одна из последних работ, представленных А. М. Ильиным в журнал “Доклады академии наук”).

В настоящее время исследования в этой области продолжают (см., например, работы А. Р. Данилина, О. О. Коврижных и А. А. Шабурова в данном номере журнала).

8. Задачи оптимального управления, описываемые сингулярно возмущенными уравнениями эллиптического типа

Бисингулярные задачи оптимального управления изучены в существенно меньшей степени, чем краевые задачи. Это связано с рядом причин. Одна из них обусловлена тем, что

условия оптимальности общих задач управления решениями различных задач для уравнений в частных производных имеют вид системы уравнений в частных производных, для которых недостаточно исследованы вопросы разрешимости и гладкости решений. Наиболее регулярными в этом смысле являются задачи, описываемые граничными задачами для уравнений эллиптического типа и квадратичным функционалом качества. В этом случае оптимальное управление и соответствующее ему решение являются решениями граничной задачи для системы сопряженных уравнений.

Другая причина как раз проистекает из необходимости исследования решений систем уравнений в частных производных и возникающих здесь технических трудностей.

Проведенное А. М. Ильиным исследование асимптотики решения первой краевой задачи для уравнения эллиптического типа в области с малой полостью (см., например, [1, гл. III, § 1]), естественным образом породило следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \mathcal{L}y_\varepsilon(x) = f(x) - u_\varepsilon(x), & x \in \Omega_\varepsilon, y_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ J_\varepsilon(u_\varepsilon) := \int_{\Omega_\varepsilon} (y_\varepsilon^2(x) + \nu u_\varepsilon^2(x)) dx \longrightarrow \inf, & u_\varepsilon \in U_\varepsilon, \end{cases} \quad (35)$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей (класса C^∞) $\partial\Omega$, содержащая начало координат O ; $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \varepsilon\omega$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; ω — аналогичная область такая, что $O \in \omega$ и $\mathbb{R}^3 \setminus \omega$ связно; $\nu > 0$, $H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ — соболевское пространство функций, равных нулю на границе $\partial\Omega_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y_\varepsilon &:= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial x_j} \right) - a_0(x) y_\varepsilon, \quad a_{ij} = a_{ji}, \\ f, a_{ij}, a_0 &\in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad a_0(x) \geq \eta_1 > 0 \quad \text{при } x \in \Omega, \\ \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j &\geq \eta_2 (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \quad \text{при всех } \xi_i \quad (\eta_2 > 0), \\ U_\varepsilon &:= \left\{ u_\varepsilon(\cdot) \in L_2(\Omega_\varepsilon) : \int_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon^2(x) dx \leq R^2 \right\}. \end{aligned}$$

Из результатов монографии (Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. М.: Мир, 1972) следует, что данная задача эквивалентна задаче Дирихле для системы двух уравнений, зависящей от скалярного параметра λ_ε

$$\begin{cases} \mathcal{L}y_\varepsilon + u_\varepsilon^{opt} = f, \quad \mathcal{L}u_\varepsilon^{opt} - \lambda_\varepsilon y_\varepsilon = 0, \quad y_\varepsilon, u_\varepsilon^{opt} \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ (\nu^{-1} - \lambda_\varepsilon) (R - \|u_\varepsilon^{opt}\|_\varepsilon) = 0, \quad \|u_\varepsilon^{opt}\|_\varepsilon \leq R, \quad 0 < \lambda_\varepsilon \leq \nu^{-1}. \end{cases} \quad (36)$$

Здесь $\|\cdot\|_\varepsilon$ — норма в пространстве $L_2(\Omega_\varepsilon)$.

Предельной для (36) является задача

$$\begin{cases} \mathcal{L}y_0 + u_0 = f, \quad \mathcal{L}u_0 - \lambda_0 y_0 = 0, \quad y_0, u_0 \in H_0^1(\Omega), \\ (\nu^{-1} - \lambda_0) (R - \|u_0\|) = 0, \quad \|u_0\| \leq R, \quad 0 < \lambda_0 \leq \nu^{-1}, \end{cases} \quad (37)$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$. При этом при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0$ и $y_\varepsilon \rightarrow y_0$, $u_\varepsilon^{opt} \rightarrow u_0$ в пространстве $H_0^1(\Omega)$. Если ограничения на управление по существу, т. е. $\lambda_0 < 1/\nu$, то $\|u_\varepsilon\|_\varepsilon = R$ при всех достаточно малых ε .

Формальное асимптотическое разложение решения указанной задачи Дирихле действительно является равномерным асимптотическим разложением: если для некоторого $\alpha > 0$ функции $y(x), u(x) \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ и $\lambda(\varepsilon)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}y + u - f &= o(\varepsilon^\alpha), \quad \mathcal{L}u - \lambda(\varepsilon)y = o(\varepsilon^\alpha), & x \in \Omega_\varepsilon, \\ y(x) &= o(\varepsilon^\alpha), \quad u(x) = o(\varepsilon^\alpha), \quad \|u\|_\varepsilon - R^2 = o(\varepsilon^\alpha), & x \in \partial\Omega_\varepsilon \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле метрики пространств $C^2(\Omega_\varepsilon)$, $C^2(\partial\Omega_\varepsilon)$ соответственно, а $\lambda(\varepsilon) - \lambda_0 = o(1)$, $y(x) - y_0(x) = o(1)$, $u(x) - u_0(x) = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле метрики $L_2(\Omega_\varepsilon)$, то $\lambda(\varepsilon) - \lambda_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha)$, $y(x) - y_\varepsilon(x) = o(\varepsilon^\alpha)$, $u_\varepsilon^{opt}(x) = o(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в метрике пространства $C(\bar{\Omega}_\varepsilon)$.

В отличие от [1] асимптотика коэффициентов разложения имеет логарифмические составляющие, что приводит и к смене асимптотической последовательности — вместе со степенями малого параметра здесь появляются и логарифмические члены: внешнее разложение ищется в виде

$$\mathcal{Y}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} y_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon, \quad \mathcal{U}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} u_{k,l}(x) \ln^l \varepsilon, \quad \lambda(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{l=0}^{k-2} \lambda_{k,l} \ln^l \varepsilon,$$

а внутреннее разложение для функций $z(\xi) := y(\varepsilon\xi)$ и $v(\xi) := u(\varepsilon\xi)$, где ξ ($x = \varepsilon\xi$) — внутренняя переменная, — в виде

$$\mathcal{Z}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} z_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon, \quad \mathcal{V}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \sum_{m=0}^{i-2} v_{i,m}(\xi) \ln^m \varepsilon.$$

Функции $y_{0,0}(x)$, $u_{0,0}(x)$ и число $\lambda_{0,0}$ — это решение предельной задачи (37): $y_0(x)$, $u_0(x)$ и λ_0 . При этом в силу сделанных предположений $y_0(x)$, $u_0(x) \in C^\infty(\Omega)$.

Стандартным образом получаются задачи для определения коэффициентов всех рядов. Алгоритм нахождения этих коэффициентов следующий: сначала по предыдущим коэффициентам определяется $\lambda_{k,l}$, а затем соответствующие коэффициенты внешнего и внутреннего разложений функций u_ε и y_ε . Коэффициенты $\lambda_{k,l}$ определяются из условия, аппроксимирующего норму управления u (при этом опять используется метод вспомогательного параметра для нахождения асимптотики интеграла, задающего норму), остальные же коэффициенты определяются с помощью метода согласования асимптотических разложений.

А. Р. Данилин в работах (*Мат. сб.* 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12; 2003. Т. 194, № 1. С. 31–60) рассмотрел задачу, аналогичную задаче (35) с оператором $\mathcal{L}_\varepsilon = \varepsilon^2 \Delta + \frac{\partial}{\partial y} - a_0$, зависящим от малого параметра $\varepsilon > 0$, и с областью Γ — квадратом без полости (как в задаче (4), (5)).

В дальнейшем рассматривались разные задачи управления с оператором, зависящим от малого параметра, в том числе и задачи управления потоком через границу [21; 22]. В настоящее время исследование в этой области продолжаются (см., например, работу А.Р. Данилина в предыдущем номере этого журнала).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
2. **Ильин А.М., Леликова Е.Ф.** Метод сращивания асимптотических разложений для уравнений $\varepsilon \Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ в прямоугольнике // *Мат. сб.* 1975. Т. 96, № 4. С. 568–583.
3. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН.* 2003. Т. 9, № 1. С. 107–119.
4. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками // *Мат. сб.* 2010. Т. 201, № 10. С. 93–108.
5. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных. // *Тр. Моск. мат. об-ва.* 2010. Т. 71. С. 162–199. ISBN: 978-5-397-01447-2.
6. **Леликова Е.Ф.** Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // *Докл. АН.* 2012. Т. 447, № 2. С. 136–139.
7. **Першин И.В.** Построение асимптотики функции Грина в окрестности особой точки // *Дифференц. уравнения.* 2001. Т. 37, № 6. С. 842–843.

8. **Першин И.В.** Асимптотика решения уравнения теплопроводности с особенностью на границе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Vol. 18, № 1. С. 268–272.
9. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 699–706.
10. **Захаров С.В., Ильин А.М.** От слабого разрыва к градиентной катастрофе // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 3–18.
11. **Захаров С.В.** Асимптотическое решение одной задачи Коши в окрестности градиентной катастрофы // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 6. С. 47–62.
12. **Захаров С.В.** Особенности A и B типов в асимптотическом анализе решений параболического уравнения // Функц. анализ. и его приложения. 2015. Т. 49, вып. 4. С. 82–85.
13. **Ильин А. М., Хачай О. Ю.** Сингулярная начальная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 4. С. 455–458.
14. **Ильин А.М., Леонычев Ю.А., Хачай О.Ю.** Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 1. С. 81–102. doi: 10.4213/sm7538.
15. **Ильин А.М., Хачай О.Ю.** Структура пограничных слоев в сингулярных задачах // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 256–258.
16. **Ильин А.М., Коврижных О.О.** Асимптотика решения системы линейных уравнений с двумя малыми параметрами // Докл. АН. 2004. Т. 396, № 1. С. 23–24.
17. **Коврижных О.О.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной системы линейных уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 10. С. 1322–1331.
18. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
19. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстро стабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
20. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
21. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 4. С. 1–4
22. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. № 2. С. 87–100.

Поступила 1.02.2017

Данилин Алексей Руфимович

д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: dar@imm.uran.ru

Захаров Сергей Викторович

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: svz@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

доцент

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: koo@imm.uran.ru

Леликова Елена Федоровна

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

профессор

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: lef@imm.uran.ru

Першин Игорь Викторович

математик 1-й кат.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: piv@imm.uran.ru

Хачай Олег Юрьевич

канд. физ.-мат. наук, доцент

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: khachay@yandex.ru

REFERENCES

1. P'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence, American Mathematical Society, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenij reshenij kraevykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.
2. P'in A.M., Lelikova E.F. A method of joining asymptotic expansions for the equation $\varepsilon\Delta u - a(x, y)u_y = f(x, y)$ in a rectangle. *Math. USSR-Sb.*, 1975, vol. 25, no. 4, pp. 533–548. doi: 10.1070/SM1975v025n04ABEH002461.
3. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with small parameter at a higher derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2003, suppl. 1, pp. S129–S143.
4. Lelikova E.F. The asymptotics of the solution of an equation with a small parameter in a domain with angular points. *Sbornik Math.*, 2010, vol. 201, no. 10, pp. 1495–1510. doi: 10.1070/SM2010v201n10ABEH004119.
5. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with a small parameter multiplying one of the highest order derivatives. *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 71, 2010, pp. 141–174. ISSN: 1547-738X.
6. Lelikova E.F. On the asymptotic behavior of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a boundary inflection point. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 756–759.
7. Pershin I.V. Construction of the asymptotics of the Green function in a neighborhood of a singular point. *Differ. Equ.*, 2001, vol. 37, no. 6, pp. 883–885. doi: 10.1023/A:1019211224598.
8. Pershin I.V. Asymptotics of a solution to the heat equation with a singularity at the boundary. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 1, pp. 268–272 (in Russian).
9. Zakharov S.V. The Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a large initial gradient and low viscosity. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 4, pp. 665–672. doi: 10.1134/S0965542510040081.
10. P'in A.M., Zakharov S.V. From weak discontinuity to gradient catastrophe. *Sb. Math.*, 2001, vol. 192, no. 10, pp. 1417–1433. doi: 10.1070/SM2001v192n10ABEH000599.
11. Zakharov S.V. Asymptotic solution of a Cauchy problem in a neighbourhood of a gradient catastrophe. *Sbornik Math.*, 2006, vol. 197, no. 6, pp. 835–851. doi: 10.1070/SM2006v197n06ABEH003780.
12. Zakharov S.V. Singularities of A and B types in asymptotic analysis of solutions of a parabolic equation. *Funct. Anal. Appl.*, 2015, vol. 49, no. 4, pp. 307–310. doi: 10.1007/s10688-015-0120-1.
13. P'in A.M., Khachay O.Y. Singular initial value problem for a system of ordinary differential equations with a small parameter. *Dokl. Math.*, 2008, vol. 78, no. 2, pp. 729–732. doi: 10.1134/S1064562408050232.
14. P'in A.M., Leonychev Y.A., Khachay O.Y. The asymptotic behaviour of the solution to a system of differential equations with a small parameter and singular initial point. *Sbornik Math.*, 2010, vol. 201, no. 1, pp. 79–101. doi: 10.1070/SM2010v201n01ABEH004066.
15. P'in A.M., Khachay O.Y. Structure of boundary layers in singular problems. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 1, pp. 497–499. doi: 10.1134/S1064562412040187.
16. P'in A.M., Kovrizhnykh O.O. The asymptotic behavior of solutions to systems of linear equations with two small parameters. *Dokl. Math.*, 2004, vol. 69, no. 3, pp. 336–337.
17. Kovrizhnykh O.O. Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed system of linear equations. *Differ. Equ.*, 2005, vol. 41, no. 10, pp. 1392–1402. doi: 10.1007/s10625-005-0291-2.
18. P'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3/hbk.

19. Danilin A.R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079. doi: 10.1134/S0965542506120062.
20. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi: 10.1134/S1064562413040364.
21. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotic expansion of solutions to optimal boundary control problems. *Dokl. Math.*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 665–668. doi: 10.1134/S106456241106024X.
22. Danilin A.R. Optimal boundary control in a small concave domain. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on February 1, 2017.

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru.

Sergei Viktorovich Zakharov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: svz@imm.uran.ru.

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru.

Elena Fedorovna Lelikova, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: lef@imm.uran.ru.

Igor' Viktorovich Pershin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: piv@imm.uran.ru.

Oleg Yur'evich Khachay, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: khachay@yandex.ru.

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ¹

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

При исследовании сингулярно возмущенных задач оптимального управления используется известный и хорошо развитый метод пограничных функций построения асимптотики решения краевых задач, к которым приводят условия оптимальности управления. Такой подход эффективен для задач с гладкими управляющими воздействиями из открытой области. Задачи с замкнутой и ограниченной областью управления исследованы менее полно. Как правило, изучаются случаи, когда управление является скалярной или многомерной функцией со значениями из выпуклого многогранника. В последнем случае оптимальное управление кусочно-постоянно со значениями в вершинах многогранника, поэтому ключевым здесь является описание асимптотики точек переключения оптимального управления. В настоящей работе исследована одна задача оптимального быстрогодействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы с гладкими геометрическими ограничениями на управление в виде шара. Основное отличие от ранее рассмотренных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае матрица при быстрых переменных представляет собой многомерный аналог жордановой клетки второго порядка с нулевым собственным числом и тем самым не удовлетворяет стандартному условию асимптотической устойчивости. Доказана разрешимость задачи. Получена и обоснована полная асимптотика по степенной асимптотической последовательности времени быстрогодействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстрогодействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem.

In the study of singularly perturbed optimal control problems, asymptotic solutions to the boundary value problem resulting from the optimality condition for the control are constructed by means of the well-known and well-developed method of boundary functions. This approach is effective for problems with smooth controls from an open domain. Problems with a closed bounded domain of the control have been investigated less thoroughly. The cases that are usually considered involve situations where the control is a scalar function or a multidimensional function with values in a convex polyhedron. In the latter case, since the optimal control is a piecewise constant function with values at the vertices of the polyhedron, it is important to describe the asymptotic behavior of the switching points of the optimal control. In this paper we investigate a time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system with smooth geometric constraints on the control in the form of a ball. The main difference of this case from systems with fast and slow variables studied earlier is that in this case the matrix at the fast variables is a multidimensional analog of the second-order Jordan cell with zero eigenvalue and, thus, does not satisfy the standard condition of asymptotic stability. The solvability of the problem is proved. Power asymptotic expansions of the optimal time and optimal control with respect to a small parameter at the derivatives in the equations of the system are constructed and substantiated.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problems, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-67-76

1. Постановка задачи

Рассмотрим одну из задач теории оптимального управления [1; 2] — задачу о быстрогодействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. об-

¹Работа выполнена при частичной поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.А03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

зор [3]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x, y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad u \in \mathbb{R}^{2n}, \\ \varepsilon \dot{y} = Jy + u, & \|u\| \leq 1, \quad \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

I_n — матрица тождественного отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Далее всюду будем обозначать единичные матрицы соответствующих размеров через I .

Цель настоящего исследования — получить асимптотические разложения времени быстрого действия, оптимального управления и компонент вектора состояния.

Ранее в работе [4] были получены основные соотношения для системы общего вида с многоугольником в качестве ограничивающего множества, в работах [5; 6] исследовано поведение областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что собственные значения матрицы при быстрых переменных равны нулю, и тем самым нарушено стандартное условие (см., например, [6, гл. 3, п. 3.2, предположение A1]) асимптотической устойчивости этой матрицы. В настоящей работе используются методы, основы подхода к которым заложены в [7], и общие соотношения, полученные в [8]. Отметим статью [9], в которой впервые была исследована асимптотика решения для другой системы, в которой матрица при быстрых переменных также не удовлетворяет условию асимптотической устойчивости. В настоящей работе будет показано, что время быстрого действия, как и остальные характеристики задачи, в отличие от работы [9] раскладывается в степенные асимптотические ряды в смысле Пуанкаре [10, Definition 2.5].

Обозначим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & \varepsilon^{-1}J \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad x_i, y_i, u_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2.$$

Вследствие критерия Калмана (см, например, [11, теорема 5]) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ из (1.3) вполне управляема.

Непосредственным вычислением из (1.2), (1.3) и равенства $J^2 = 0$ получаем, что

$$e^{Jt/\varepsilon} = I + \frac{t}{\varepsilon}J, \quad e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & tI + \frac{t^2}{2\varepsilon}J \\ 0 & I + \frac{t}{\varepsilon}J \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующую задачу о быстродействии, получающуюся из (1.1), если положить $\varepsilon = 0$ и $u_2 \equiv 0$ (т. е. не принимать во внимание неуправляемые объекты).

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -u_1, & x_2, u_1 \in \mathbb{R}^n, \\ x_2(0) = x_{2,0}, & \|u_1\| \leq 1, \\ x_2(T_0) = 0, \quad T_0 \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1.4)$$

Согласно принципу максимума [1; 11, с. 140] оптимальное управление $u_0(t) = u_1(t)$ имеет вид

$$u_0(t) \equiv q_0, \quad \|q_0\| = 1,$$

где постоянный вектор $q_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению

$$0 = x_{2,0} - T_0 q_0. \quad (1.5)$$

Естественным является предположение

$$x_{2,0} \neq 0. \quad (1.6)$$

Тогда из (1.5) получаем

$$T_0 = \|x_{2,0}\|, \quad q_0 = \frac{x_{2,0}}{\|x_{2,0}\|}. \quad (1.7)$$

Теорема 1. *При любом начальном векторе z_0 с компонентой $x_{2,0} \neq 0$ и любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ задача (1.1) разрешима и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon = T_0$.*

Доказательство. Рассмотрим управление $v_\varepsilon(t) = (v_{1,\varepsilon}^*(t), v_{2,\varepsilon}^*(t))^*$, $\|v_\varepsilon(t)\| \leq 1$, где $v_{1,\varepsilon}(t) := (1 - \varepsilon)V_\varepsilon$, $\|V_\varepsilon\| = 1$, $v_{2,\varepsilon}(t) := \varepsilon W_\varepsilon(t)$. Здесь и далее $*$ — знак операции транспонирования матриц. Покажем, что с помощью такого управления можно перевести систему из положения z_0 в начало координат за время $\theta_\varepsilon = T_0 + \theta(\varepsilon)$, где T_0 — оптимальное время (1.7) в вырожденной задаче (1.4), $\theta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Подставим управление $v_\varepsilon(t)$ в систему уравнений, получающуюся в силу формулы Коши из (1.1),

$$0 = z_0 + \int_0^{\theta_\varepsilon} e^{-A_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon v_\varepsilon(t) dt.$$

Покомпонентно эта система запишется в виде

$$\begin{cases} -2\varepsilon x_{1,0} = \int_0^{\theta_\varepsilon} (-2t(1 - \varepsilon)V_\varepsilon + t^2 W_\varepsilon(t)) dt, & x_{2,0} = \int_0^{\theta_\varepsilon} t W_\varepsilon(t) dt, \\ -\varepsilon y_{1,0} = \int_0^{\theta_\varepsilon} ((1 - \varepsilon)V_\varepsilon - t W_\varepsilon(t)) dt, & -y_{2,0} = \int_0^{\theta_\varepsilon} W_\varepsilon(t) dt. \end{cases} \quad (1.8)$$

Из второго и третьего уравнений системы (1.8) находим

$$(1 - \varepsilon)\theta_\varepsilon V_\varepsilon = x_{2,0} - \varepsilon y_{1,0}. \quad (1.9)$$

Отсюда

$$\theta_\varepsilon = \frac{\|x_{2,0} - \varepsilon y_{1,0}\|}{1 - \varepsilon} \stackrel{(1.7)}{=} T_0 + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.10)$$

Затем первое, второе и четвертое уравнения системы (1.8) с учетом (1.9) можно записать следующим образом:

$$\int_0^{\theta_\varepsilon} t^2 W_\varepsilon(t) dt = -2\varepsilon x_{1,0} + \theta_\varepsilon (x_{2,0} - \varepsilon y_{1,0}), \quad \int_0^{\theta_\varepsilon} t W_\varepsilon(t) dt = x_{2,0}, \quad \int_0^{\theta_\varepsilon} W_\varepsilon(t) dt = -y_{2,0}. \quad (1.11)$$

Вектор-функцию $W_\varepsilon(t)$ можно найти в виде $W_\varepsilon(t) = a_\varepsilon t^2 + b_\varepsilon t + c_\varepsilon$, где a_ε , b_ε и $c_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ — некоторые векторы. Действительно, система (1.11) преобразуется к системе линейных алгебраических уравнений относительно компонент a_ε , b_ε , c_ε с ненулевым определителем, обратная величина к которому есть $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, следовательно, однозначно разрешима. При этом в силу ограниченности правых частей системы (1.11) $a_\varepsilon, b_\varepsilon, c_\varepsilon = O(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, тем самым $W_\varepsilon(t) = O(1)$ на $[0, \bar{T}]$ для некоторого $\bar{T} > T_0$. Условие $\|v_\varepsilon(t)\| \leq 1$ равносильно

$$1 \geq \|v_{1,\varepsilon}(t)\|^2 + \|v_{2,\varepsilon}(t)\|^2 = (1 - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2 \|W_\varepsilon(t)\|^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \|W_\varepsilon(t)\|^2,$$

или

$$2 \geq \varepsilon(1 + \|W_\varepsilon(t)\|^2) \longrightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.12)$$

При достаточно малых ε неравенство (1.12) выполняется.

Таким образом, нашлось управление $v_\varepsilon \in \mathcal{U}$, переводящее систему из положения z_0 в начало координат за время, близкое к T_0 . Тогда найдется оптимальное управление, исходная задача (1.1) разрешима, и для оптимального времени справедлива оценка

$$T_\varepsilon \leq T_0 + \theta(\varepsilon), \quad (1.13)$$

где $\theta(\varepsilon)$ определяется формулой (1.10).

Далее, оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ и оптимальное время T_ε удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -2\varepsilon^2 x_{1,0} = \int_0^{T_\varepsilon} (-2\varepsilon t u_{1,\varepsilon}(t) + t^2 u_{2,\varepsilon}(t)) dt, & \varepsilon x_{2,0} = \int_0^{T_\varepsilon} t u_{2,\varepsilon}(t) dt, \\ -\varepsilon^2 y_{1,0} = \int_0^{T_\varepsilon} (\varepsilon u_{1,\varepsilon}(t) - t u_{2,\varepsilon}(t)) dt, & -\varepsilon y_{2,0} = \int_0^{T_\varepsilon} u_{2,\varepsilon}(t) dt. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений этой системы получаем соотношение

$$x_{2,0} = \varepsilon y_{1,0} + \int_0^{T_\varepsilon} u_{1,\varepsilon}(t) dt. \quad (1.14)$$

Тогда с учетом ограничения на оптимальное управление $\|u_\varepsilon\| \leq 1$ и оценки (1.13) справедлива цепочка неравенств

$$T_0 = \|x_{2,0}\| \leq \varepsilon \|y_{1,0}\| + \int_0^{T_\varepsilon} \|u_{1,\varepsilon}(t)\| dt \leq \varepsilon \|y_{1,0}\| + T_\varepsilon \leq \varepsilon \|y_{1,0}\| + T_0 + \theta(\varepsilon).$$

Отсюда в силу леммы о двустороннем ограничении $T_\varepsilon \rightarrow T_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Лемма 1. *Найдется последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$ такая, что $u_{1,\varepsilon_n}(t)$ сходится к u_0 почти всюду на $[0, T_0]$.*

Доказательство. Из соотношения (1.14) следует, что $\int_0^{T_\varepsilon} u_{1,\varepsilon}(t) dt \rightarrow x_{2,0}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Но $\int_0^{T_\varepsilon} u_{1,\varepsilon}(t) dt = \int_0^{T_0} u_{1,\varepsilon}(t) dt + \int_{T_0}^{T_\varepsilon} u_{1,\varepsilon}(t) dt$. Отсюда в силу теоремы 1 выполняется $\int_0^{T_0} u_{1,\varepsilon}(t) dt \rightarrow x_{2,0} = \int_0^{T_0} u_0 dt$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым, $\int_0^{T_0} (u_0 - u_{1,\varepsilon}(t)) dt \rightarrow 0$.

Пусть $u_{1,\varepsilon}(t) = \alpha_\varepsilon(t)u_0 + u_{1,\varepsilon}^\perp(t)$, где $u_{1,\varepsilon}^\perp(t) \perp u_0$. Поскольку $\|u_\varepsilon\| \leq 1$, справедливо $\|u_{1,\varepsilon}\| \leq 1$, следовательно, $|\alpha_\varepsilon(t)| \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{T_0} (u_0 - u_{1,\varepsilon}(t)) dt \right\|^2 &= \left\| \int_0^{T_0} (1 - \alpha_\varepsilon(t))u_0 dt \right\|^2 + \left\| \int_0^{T_0} u_{1,\varepsilon}^\perp(t) dt \right\|^2 \\ &= \left(\int_0^{T_0} (1 - \alpha_\varepsilon(t)) dt \right)^2 + \left\| \int_0^{T_0} u_{1,\varepsilon}^\perp(t) dt \right\|^2 \longrightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\int_0^{T_0} (1 - \alpha_\varepsilon(t)) dt \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поскольку $1 - \alpha_\varepsilon(t) \geq 0$ на $[0, T_0]$, функция $1 - \alpha_\varepsilon(t)$ сходится к нулю в среднем на $[0, T_0]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Значит (см. [12, с. 388]), можно выбрать такую последовательность $\varepsilon_n \rightarrow 0$, что $\alpha_{\varepsilon_n}(t)$ сходится к 1 почти всюду на $[0, T_0]$. Но

$$\alpha_{\varepsilon_n}^2(t) \leq \|u_{1,\varepsilon_n}(t)\|^2 = \alpha_{\varepsilon_n}^2(t) + \|u_{1,\varepsilon_n}^\perp(t)\|^2 \leq 1.$$

Тем самым, $u_{1,\varepsilon_n}^\perp(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} 0$ и $u_{1,\varepsilon_n}(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} u_0$ на $[0, T_0]$. \square

2. Основная система уравнений и асимптотика ее решения

В силу принципа максимума Понтрягина [1; 11, гл. 2, теорема 18] который в рассматриваемом случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, существует вектор $r_\varepsilon = (r_{1,\varepsilon}^*, r_{2,\varepsilon}^*)^*$, $r_{1,\varepsilon}, r_{2,\varepsilon} \in \mathbb{R}^{2n}$, такой, что оптимальное управление в задаче (1.1) имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\|}$$

при всех t таких, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon \neq 0$. Тогда в силу формулы Коши из (1.1) для r_ε получим векторное равенство

$$0 = z_0 + \int_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\|} dt. \quad (2.1)$$

Тем самым, вектор r_ε является вектором, порождающим оптимальное управление, тогда и только тогда, когда r_ε удовлетворяет соотношению (2.1). Таким образом, исходная задача сводится к исследованию уравнения (2.1).

Отметим важное следствие формулы (2.1), справедливое для любой задачи оптимального быстродействия для линейной системы с ограничивающим множеством в виде шара.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\langle \mathcal{A}_\varepsilon z_0, r_\varepsilon \rangle = \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* T_\varepsilon} r_\varepsilon\| - \|\mathcal{B}_\varepsilon^* r_\varepsilon\|. \quad (2.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножая уравнение (2.1) скалярно на $(-\mathcal{A}_\varepsilon^* r_\varepsilon)$, получим цепочку равенств, из которых непосредственно вытекает утверждение леммы

$$\begin{aligned} \langle z_0, \mathcal{A}_\varepsilon^* r_\varepsilon \rangle &= \int_0^{T_\varepsilon} \frac{\langle e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon, -\mathcal{A}_\varepsilon^* r_\varepsilon \rangle}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\|} dt = \int_0^{T_\varepsilon} \frac{\langle \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} (-\mathcal{A}_\varepsilon^*) r_\varepsilon \rangle}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\|} dt \\ &= \int_0^{T_\varepsilon} d\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\| = \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* T_\varepsilon} r_\varepsilon\| - \|\mathcal{B}_\varepsilon^* r_\varepsilon\|. \quad \square \end{aligned}$$

Отметим, что для исходной задачи выполняется $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} = \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* - \frac{t}{\varepsilon} I, -\frac{t}{\varepsilon^2} J^* + \frac{1}{\varepsilon} I \right)$.

Тогда для r_ε запишем

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\| = \left\| \frac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* r_{1,\varepsilon} - t \left(\frac{1}{\varepsilon} r_{1,\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} J^* r_{2,\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} r_{2,\varepsilon} \right\|.$$

Соотношение (2.2) примет вид

$$\langle y^0, r_{1,\varepsilon} \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \langle J y^0, r_{2,\varepsilon} \rangle + \frac{1}{\varepsilon} \|r_{2,\varepsilon}\| = \left\| \frac{T_\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} J^* r_{1,\varepsilon} - \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} \left(r_{1,\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} J^* r_{2,\varepsilon} \right) + \frac{1}{\varepsilon} r_{2,\varepsilon} \right\|.$$

Введем новые неизвестные векторы по формулам $l_\varepsilon = \varepsilon^{-1} r_{2,\varepsilon}$, $p_\varepsilon = r_{1,\varepsilon} + \varepsilon^{-1} J^* r_{2,\varepsilon}$. Тогда $J^* r_{1,\varepsilon} = J^* p_\varepsilon$.

Запишем основную систему уравнений (2.1)

$$\left\{ \begin{aligned} -x^0 &= \int_0^{T_\varepsilon} \left(\frac{t^2}{2\varepsilon^2} J - \frac{t}{\varepsilon} I \right) u_\varepsilon(t) dt, & -\varepsilon y^0 &= \int_0^{T_\varepsilon} \left(I - \frac{t}{\varepsilon} J \right) u_\varepsilon(t) dt, \end{aligned} \right.$$

где в новых обозначениях

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\frac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* p_\varepsilon - \frac{t}{\varepsilon} p_\varepsilon + l_\varepsilon}{\left\| \frac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* p_\varepsilon - \frac{t}{\varepsilon} p_\varepsilon + l_\varepsilon \right\|} \quad (2.3)$$

или “покоординатно”

$$\begin{aligned} u_{1,\varepsilon}(t) &= \frac{-\frac{t}{\varepsilon} p_{1,\varepsilon} + l_{1,\varepsilon}}{\sqrt{\left\| -\frac{t}{\varepsilon} p_{1,\varepsilon} + l_{1,\varepsilon} \right\|^2 + \left\| \frac{t^2}{2\varepsilon^2} p_{1,\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon} p_{2,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon} \right\|^2}}, \\ u_{2,\varepsilon}(t) &= \frac{\frac{t^2}{2\varepsilon^2} p_{1,\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon} p_{2,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon}}{\sqrt{\left\| -\frac{t}{\varepsilon} p_{1,\varepsilon} + l_{1,\varepsilon} \right\|^2 + \left\| \frac{t^2}{2\varepsilon^2} p_{1,\varepsilon} - \frac{t}{\varepsilon} p_{2,\varepsilon} + l_{2,\varepsilon} \right\|^2}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Равенство (2.2) преобразуется к виду

$$\langle y^0, p_\varepsilon - J^* l_\varepsilon \rangle + \langle J y^0, l_\varepsilon \rangle + \|l_\varepsilon\| = \left\| \frac{T_\varepsilon^2}{2\varepsilon^2} J^* p_\varepsilon - \frac{T_\varepsilon}{\varepsilon} p_\varepsilon + l_\varepsilon \right\|. \quad (2.5)$$

Поскольку выражение (2.3) положительно однородно относительно вектора $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, p_\varepsilon^*)^*$, то будем считать, что норма этого вектора равна единице. Из соотношения (2.5) и теоремы 1 следует, что вектор $\left(\frac{T_\varepsilon}{2\varepsilon^2} J^* - \frac{1}{\varepsilon} I \right) p_\varepsilon$ ограничен. Тем самым, $p_{1,\varepsilon} = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда

$$p_{1,\varepsilon} = \varepsilon \tilde{p}_{1,\varepsilon}, \quad \tilde{p}_{1,\varepsilon} = O(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Лемма 3. При условии нормировки вектора L_ε $\|l_\varepsilon\|^2 + \|p_\varepsilon\|^2 = 1$ справедливы соотношения

$$l_{1,\varepsilon} \rightarrow u_0, \quad l_{2,\varepsilon} = o(1), \quad p_{1,\varepsilon} = o(\varepsilon^2), \quad p_{2,\varepsilon} = o(\varepsilon) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Доказательство. В силу условия леммы множество векторов L_ε ограничено и, следовательно, имеет предельные точки. Пусть $(l_0^*, p_0^*)^*$ — одна из них, т. е. некоторая последовательность $(l_{\varepsilon_n}^*, p_{\varepsilon_n}^*)^* \rightarrow (l_0^*, p_0^*)^*$ при $\varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. В силу леммы 1 существует подпоследовательность $\varepsilon_{n_k} \rightarrow 0$ такая, что $u_{1,\varepsilon_{n_k}}(t)$ сходится почти всюду на $[0, T_0]$ к u_0 при $\varepsilon_{n_k} \rightarrow 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что $u_{1,\varepsilon_n}(t)$ и есть та самая подпоследовательность. При этом моменты времени $0 < t_1, t_2, t_1 \neq t_2$ таковы, что $u_{1,\varepsilon_n}(t_j) \rightarrow u_0$, $j = 1, 2$. Не ограничивая общности, считаем, что для всех n выполняется $\left\| -\frac{t_j}{\varepsilon_n} p_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n} \right\| \neq 0$, $j = 1, 2$.

С учетом (2.6) из (2.4) получим

$$u_{1,\varepsilon_n}(t_j) = \frac{\frac{-t_j \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n}}{\left\| -t_j \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n} \right\|}}{\sqrt{1 + \frac{\left\| \frac{t_j^2}{2\varepsilon_n} \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} - \frac{t_j}{\varepsilon_n} p_{2,\varepsilon_n} + l_{2,\varepsilon_n} \right\|^2}{\left\| -t_j \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n} \right\|^2}}} \rightarrow u_0, \quad \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.8)$$

Так как $\|u_0\| = 1$, то

$$\left\| \frac{t_j^2}{2\varepsilon_n} \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} - \frac{t_j}{\varepsilon_n} p_{2,\varepsilon_n} + l_{2,\varepsilon_n} \right\| = o_j(1) \| -t_j \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n} \|, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.9)$$

тем самым,

$$\left\| \frac{t_j^2}{2} \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} - t_j p_{2,\varepsilon_n} + \varepsilon_n l_{2,\varepsilon_n} \right\| = \varepsilon_n o_j(1) \| -t_j \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} + l_{1,\varepsilon_n} \| = o_j(\varepsilon_n).$$

Далее,

$$\left\{ \frac{1}{2} t_j^2 \tilde{p}_{1,\varepsilon_n} - t_j p_{2,\varepsilon_n} = o_j(\varepsilon_n), \quad j = 1, 2 \right.$$

есть система линейных уравнений относительно $\tilde{p}_{1,\varepsilon_n}$ и p_{2,ε_n} с определителем, отличным от нуля при $t_1 \neq t_2$. Тем самым, справедливы асимптотические равенства

$$\tilde{p}_{1,\varepsilon_n} = o(\varepsilon_n), \quad p_{1,\varepsilon_n} = o(\varepsilon_n^2), \quad p_{2,\varepsilon_n} = o(\varepsilon_n), \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \quad (2.10)$$

а из равенства (2.9) следует

$$l_{2,\varepsilon_n} = o(1). \quad (2.11)$$

Далее, из соотношений (2.8) получаем $l_{1,\varepsilon_n} \rightarrow u_0$.

Тем самым, $l_0 = (u_0^*, 0)^*$, $p_0 = 0$ — единственная предельная точка множества векторов L_ε , что означает $(l_\varepsilon^*, p_\varepsilon^*)^* \rightarrow (l_0^*, p_0^*)^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и с учетом (2.10), (2.11) справедливость асимптотических равенств в утверждении леммы. \square

Нормируем вектор L_ε :

$$\|l_{1,\varepsilon}\| = 1. \quad (2.12)$$

В силу леммы 3 и того, что $\|u_0\| = 1$, и для нормировки (2.12) справедливо соотношение (2.7). Введем новые неизвестные величины по формулам (их зависимость от ε для сокращения записи опустим)

$$T_\varepsilon = T_0 + \vartheta, \quad l_{1,\varepsilon} = u_0 + \lambda_1, \quad l_{2,\varepsilon} = \lambda_2, \quad p_{1,\varepsilon} = \varepsilon^2 \rho_1, \quad p_{2,\varepsilon} = \varepsilon \rho_2, \quad (2.13)$$

где $\omega = (\vartheta, \lambda^*, \rho^*)^* = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу (2.6). При этом

$$\|\lambda_1\|^2 + 2\langle \lambda_1, u_0 \rangle = 0, \quad (2.14)$$

так как $\|u_0\| = 1$.

В силу (2.12)–(2.14) имеем

$$\left\| \frac{t^2}{2\varepsilon^2} J^* p_\varepsilon - \frac{t}{\varepsilon} p_\varepsilon + l_\varepsilon \right\|^{-1} = \left(\|l_{1,\varepsilon} - \varepsilon t \rho_1\|^2 + \left\| \frac{t^2}{2} \rho_1 - t \rho_2 + \lambda \right\|^2 \right)^{-1/2} = 1 + F_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho),$$

где непрерывная по $t, \varepsilon, \lambda, \rho$ функция $F_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho) = O(\varepsilon \|\omega\| + \|\omega\|^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $t \in [0, \bar{T}]$, $\bar{T} > T_0$.

Тогда

$$u_{1,\varepsilon}(t) = (l_{1,\varepsilon} - \varepsilon t \rho_1)(1 + F_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho)) = u_0 + \lambda_1 + G_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho),$$

$$u_{2,\varepsilon}(t) = \left(\frac{t^2}{2} \rho_1 - t \rho_2 + \lambda_2 \right) (1 + F_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho)) = \frac{t^2}{2} \rho_1 - t \rho_2 + \lambda_2 + H_3(t, \varepsilon, \lambda, \rho).$$

Здесь и далее бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов $F_k, G_k, H_k = O((\varepsilon + \|\omega\|)^k)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $t \in [0, \bar{T}]$, $\bar{T} > T_0$. Указанные функции бесконечно дифференцируемы, поскольку раскладываются в равномерно сходящиеся (при $\varepsilon \leq 1$, $\|\omega\| \leq K(\bar{T})$, где $K(\bar{T})$ — некоторая известная константа) степенные ряды от бесконечно дифференцируемых функций.

Компоненты вектора ω_ε удовлетворяют следующей системе уравнений: уравнение (2.14) дополнено системой

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{2,0} - \varepsilon y_{1,0} = \int_0^{T_0+\vartheta} (l_{1,\varepsilon} + G_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho)) dt, \\ -\varepsilon^2 x_{1,0} = \int_0^{T_0+\vartheta} \left(-\varepsilon t (l_{1,\varepsilon} + G_2(t, \varepsilon, \lambda, \rho)) + \frac{t^4}{4} \rho_1 - \frac{t^3}{2} \rho_2 + \frac{t^2}{2} \lambda + \frac{t^2}{2} H_3(t, \varepsilon, \lambda, \rho) \right) dt, \\ \varepsilon x_{2,0} = \int_0^{T_0+\vartheta} \left(\frac{t^3}{2} \rho_1 - t^2 \rho_2 + t \lambda + t H_3(t, \varepsilon, \lambda, \rho) \right) dt, \\ -\varepsilon y_{2,0} = \int_0^{T_0+\vartheta} \left(\frac{t^2}{2} \rho_1 - t \rho_2 + \lambda + H_3(t, \varepsilon, \lambda, \rho) \right) dt. \end{array} \right. \quad (2.15)$$

3. Получение и обоснование асимптотики оптимального времени T_ε и оптимального управления $u_\varepsilon(t)$

Система (2.14), (2.15) имеет вид $P(\varepsilon, \omega) = 0$, где $P(\varepsilon, \omega)$ — бесконечно дифференцируемая функция своих аргументов в некоторой окрестности нуля переменных (ε, ω) , причем $P(0, 0) = 0$, а

$$P'_\omega(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & u_0^* & 0 \\ u_0 & T_0 I & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix}, \quad \text{где } L = \begin{pmatrix} \frac{T_0^3}{6} I & \frac{T_0^5}{20} I & -\frac{T_0^4}{8} I \\ \frac{T_0^2}{2} I & \frac{T_0^4}{8} I & -\frac{T_0^3}{3} I \\ T_0 I & \frac{T_0^3}{6} I & -\frac{T_0^2}{2} I \end{pmatrix} \text{ и } \det L \neq 0.$$

Тогда линейный оператор $P'_\omega(0, 0)$ непрерывно обратим, и применима теорема о неявном отображении, из которой следует, что в некоторой окрестности начала координат система (2.14), (2.15) единственным образом определяет $\omega = f(\varepsilon)$, где $f(\varepsilon)$ — бесконечно дифференцируемая функция. Тем самым, $f(\varepsilon)$ раскладывается в степенной асимптотический ряд $\sum_k^1 f_k \varepsilon^k$, и справедлив следующий основной результат.

Теорема 2. При выполнении предположения (1.6) время быстрого действия T_ε , оптимальное управление и компоненты вектора состояния раскладываются в асимптотические ряды по степеням $\{\varepsilon^k\}$, слагаемые которых однозначно определяются рядами для (2.13).

Формула (2.3) при подстановке в нее частичной суммы $\hat{\omega}_N$ без слагаемых порядка $O(\varepsilon^{N+1})$ дает так называемое субоптимальное управление $(N+1)$ -го порядка [13; 14]. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
4. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.

5. Дончев А. Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. Гичев Т.Р., Дончев А.Л. Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстродействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
7. Данилин А.Р., Ильин А.М. О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
8. Данилин А.Р., Коврижных О.О. О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып 14.)
9. Данилин А.Р., Коврижных О.О. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
10. Erdelyi A., Wymann M. The asymptotic evaluation of certain integrals // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. Vol. 14. P. 217–260.
11. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
13. Калинин А.И., Семенов К.В. Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
14. Данилин А.Р., Коврижных О.О. Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной линейной задаче быстродействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 63–75.

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Поступила 17.10.2016

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,
доцент УрФУ
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, New York, London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of control of movement. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ, 1968, 476 p.
3. Vassilyeva A.B., Dmitriev M.G. Singular perturbations in optimal control problems. *J. Math. Sci.*, 1986, vol. 34, iss. 3, pp. 1579–1629. doi: 10.1007/BF01262406.
4. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113.
5. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analysis of optimal control systems*, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1983, 161 p. doi: 10.1007/BFb0043612. Translated under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow, Mir Publ., 1987, 156 p.

6. Gichev T.R., Donchev A.L. Convergence of the solution of the linear singularly perturbed problem of time-optimal response. *J. Appl. Math. Mech.*, 1979, vol. 43, iss. 3, pp. 502–511. doi: 10.1016/0021-8928(79)90098-4.
7. Danilin A.R., Il'in A.M. On the structure of the solution of a perturbed optimal-time control problem. *Fundament. Prikl. Matematika*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 905–926 (in Russian).
8. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the dependence of the time-optimal control problem for a linear system of two small parameters. *Vestnik Chelyabinskogo Universiteta*, Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika 14, 2011, no. 27, pp. 46–60 (in Russian).
9. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi:10.1134/S1064562413040364.
10. Erdelyi A., Wyman M. The asymptotic evaluation of certain integrals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1963, vol. 14, pp. 217–260.
11. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. New York, London, Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635.
12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis* (Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961). Eastford: Martino Fine Books, 2012, 280 p. ISBN: 1614273049. Original Russian text published in *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*, Moscow, Nauka Publ., 1976, 544 p.
13. Kalinin A.I., Semenov K.V. Asymptotic optimization method for linear singularly perturbed systems with multidimensional control. *Comput. Mathematics and Math. Physics*, 2004, vol. 44, no. 3. p. 407–418.
14. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Asymptotics of the optimal time in a singular perturbed linear time-optimal problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 271, Suppl. 1, pp. 53–65. doi: 10.1134/S0081543810070059.

The paper was received by the Editorial Office on October 17, 2016.

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru.

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru.

УДК 517.955.8

АСИМПТОТИКА ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ДИСКА¹

А. А. Ершов, Ю. А. Крутова

Рассматривается задача Неймана вне малой окрестности круглого плоского диска в трехмерном пространстве. Поверхность этой окрестности предполагается гладкой, ее толщина характеризуется малым параметром ε . Методом согласования построено равномерное асимптотическое разложение решения этой задачи по малому параметру ε . Задача оказалась бисингулярной, поэтому вблизи краев диска было построено дополнительное внутреннее асимптотическое разложение в так называемых растянутых переменных. Физической интерпретацией решения данной краевой задачи является потенциал скоростей идеальной жидкости при ламинарном обтекании тонкого тела, представляющего собой окрестность диска. Предполагается, что на большом удалении от диска ламинарный поток жидкости движется с единичной скоростью, что равносильно условию на потенциал $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = x_3 + O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$, где r — расстояние до начала координат. Краевым условием данной задачи является условие непротекания жидкости через поверхность тела, т.е. $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ на границе. После вычитания x_3 из решения $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ мы имеем краевую задачу для потенциала $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ возмущенного движения жидкости. Поскольку интеграл по поверхности тела от функции $\partial \tilde{u} / \partial \mathbf{n}$ равен нулю, то $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что все коэффициенты внешнего асимптотического разложения по ε имеют такое же поведение на бесконечности. Однако при приближении к краю диска они, напротив, имеют нарастающие особенности, в чем и заключается бисингулярность задачи.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Лапласа, асимптотическое разложение, метод согласования, тонкое тело, ламинарный поток, идеальная жидкость.

A. A. Ershov, Yu. A. Krutova. Asymptotics of the velocity potential of an ideal fluid flowing around a thin body.

We consider the Neumann problem outside a small neighborhood of a planar disk in three-dimensional space. The surface of this neighborhood is assumed to be smooth, and its thickness is characterized by a small parameter ε . A uniform asymptotic expansion of the solution of this problem with respect to ε is constructed by the matching method. Since the problem turned out to be bisingular, an additional inner asymptotic expansion in the so-called stretched variables was constructed near the edge of the disk. A physical interpretation of the solution of this boundary value problem is the velocity potential of a laminar flow of an ideal fluid around a thin body, which is the neighborhood of the disk. It is assumed that this flow has unit velocity at a large distance from the disk, which is equivalent to the following condition for the potential: $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = x_3 + O(r^{-2})$ as $r \rightarrow \infty$, where r is the distance to the origin. The boundary condition of this problem is the impermeability of the surface of the body: $\partial u / \partial \mathbf{n} = 0$ at the boundary. After subtracting x_3 from the solution $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$, we get a boundary value problem for the potential $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ of the perturbed flow of the motion. Since the integral of the function $\partial \tilde{u} / \partial \mathbf{n}$ over the surface of the body is zero, we have $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon) = O(r^{-2})$ as $r \rightarrow \infty$. Hence, all the coefficients of the outer asymptotic expansion with respect to ε have the same behavior at infinity. However, these coefficients have increasing singularities at the approach to the edge of the disk, which implies the bisingularity of the problem.

Keywords: boundary value problem, Laplace equation, asymptotic expansion, matching method, thin body, laminar flow, ideal fluid.

MSC: 35C20, 35Q35

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-77-93

Введение

Рассматривается вторая краевая задача для уравнения Лапласа вне малой окрестности круглого диска, толщина которой характеризуется малым параметром ε . Ее решение физически интерпретируется как потенциал скоростей идеальной жидкости при ламинарном обтекании тонкого дискообразного тела. Целью данной работы является выяснение асимптотического

¹Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-10018).

поведения решения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Главный результат — алгоритм вычисления коэффициентов частичной суммы асимптотического разложения решения, сформулированный в разделе “Построение асимптотического разложения”. Кроме того, в теореме 3 дана явная оценка остатка в равномерной норме.

Впервые первая краевая задача для общего эллиптического уравнения с переменными коэффициентами вне малой окрестности отрезка была рассмотрена в [1]. В монографии [2, гл. III, § 2] был приведен упрощенный вариант этой задачи для уравнения Лапласа. Мы использовали схему построения асимптотики и ее обоснования из [2, гл. III, § 2]. Настоящая статья представляет собой обобщение на трехмерный случай работы [3]. Кроме того, в работе [4] была рассмотрена первая краевая задача вне той же области.

1. Постановка задачи

Пусть σ — диск $\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 = 0\}$ в пространстве \mathbb{R}^3 , $\bar{\sigma}$ — его замыкание, а σ_ε — окрестность σ (рис. 1). Край диска образует окружность

$$S = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0\}.$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, характеризующий ширину окрестности σ_ε , так что

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_\varepsilon = \sigma.$$

Всюду в этой статье будут употребляться обозначения $x = (x_1, x_2, x_3)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $r_2 = 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $r_c = \sqrt{r_2^2 + x_3^2}$. Точный вид окрестности σ_ε определим следующим образом. Пусть $\sigma_\varepsilon = \{x: 0 < r_2 \leq 1, \varepsilon g_-(r_2) < x_3 < g_+(r_2)\}$, где $g_\pm(r_2) \in C^\infty(0, 1)$. Иначе говоря, σ_ε получается из тела вращения σ_1 сжатием к плоскости $x_3 = 0$ с коэффициентом ε^{-1} . Это означает, что вблизи окружности S уравнение границы $\partial\sigma_1$ имеет вид $r_2 = \psi(x_3)$, где $\psi(x_3) \in C^\infty$. Ясно, что $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, $\psi''(0) \geq 0$, и дополнительно предположим, что $\psi''(0) > 0$, т. е. кривизна кривой $\partial\sigma_1 \cap \{x: x_2 = 0\}$ в точке $x = (-1, 0, 0)$ отлична от нуля. Без ограничения общности будем считать, что $\psi''(0) = 2$. Нетрудно показать, что указанные предположения эквивалентны следующему условию на функцию $g_\pm(r_2)$:

$$g_\pm(r_2) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}} \quad \text{при } r_2 \rightarrow 0, \quad g_1 = 1. \quad (1.1)$$

Пространство \mathbb{R}^3 с разрезом σ будем обозначать Ω . Пусть $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}_\varepsilon$, $S_\delta = \{x: r_c < \delta\}$, δ — некоторое фиксированное малое положительное число.

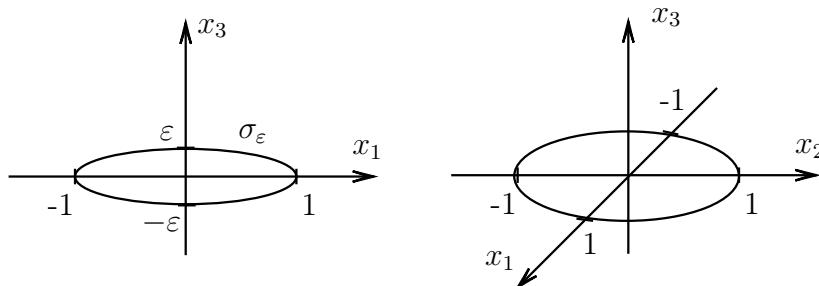


Рис. 1.

Посредством $u(x, \varepsilon) = u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ будем обозначать функцию из $u(x, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{\Omega_\varepsilon})$, которая удовлетворяет условиям

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega_\varepsilon, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x, \varepsilon) = 0, \quad x \in \partial\sigma_\varepsilon, \tag{1.3}$$

$$u(x, \varepsilon) = x_3 + O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty, \tag{1.4}$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к области σ_ε .

Итак, целью данной работы является построение и обоснование асимптотического разложения функции $u(x, \varepsilon)$ — решения задачи (1.2)–(1.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Задача (1.2)–(1.4) имеет следующую гидродинамическую интерпретацию [5, гл. V, § 37]. Рассматривается обтекание тела σ_ε ламинарным потоком идеальной несжимаемой жидкости. В таком случае движение жидкости является потенциальным, т. е. существует некоторая функция $u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$, называемая потенциалом скоростей, такая, что скорость жидкости $V = \text{grad } u$. Условие несжимаемости означает, что $\text{div } V = 0$, но тогда $\Delta u = \text{div grad } u = 0$, т. е. выполнено уравнение (1.2). Условие (1.3) есть условие непротекания жидкости через границу тела. Условие (1.4) интерпретируется как движение жидкости с постоянной единичной скоростью, параллельной оси Ox_3 , на большом удалении от нашего объекта [5, гл. VII, § 64, 66].

2. Внешнее разложение

Внешнее разложение решения задачи (1.2)–(1.4) будем искать в виде ряда

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x), \tag{2.1}$$

где

$$\Delta u_k = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\sigma}. \tag{2.2}$$

Условие (1.4) переходит в условия

$$u_0(x) = x_3 + O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

$$u_k(x) = O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty, \quad k > 0. \tag{2.3}$$

Граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ получаются следующим образом (рис. 2).

Для удобства введем функции $\hat{u}_k(r_2, x_3) \equiv u_k(x)$. По определению производной по направлению

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{x \in \sigma_\varepsilon} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial n}(r_2, \varepsilon g_\pm(r_2)) = (\nabla \hat{u}(r_2, \varepsilon g_\pm(r_2)), \mathbf{n}).$$

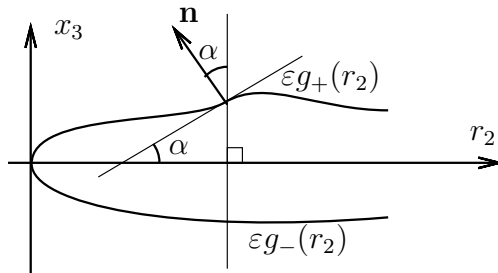


Рис. 2.

Здесь через n обозначена внешняя нормаль к области σ_ε , но выраженная через r_2 и ξ_3 . Заметим, что если мы зафиксируем точку на поверхности $\partial\sigma_\varepsilon$, то \mathbf{n} и n будут одним и тем же вектором, записанным в различных координатах.

Пусть α — угол между осью Ox_3 и нормалью \mathbf{n} . Тогда

$$\begin{aligned} n &= \pm(-\sin \alpha, \cos \alpha) = \pm\left(-\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha)}}\right) \\ &= \pm\left(-\frac{\varepsilon g'_\pm(r_2)}{\sqrt{1+\varepsilon^2 g'^2_\pm(r_2)}}, \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 g'^2_\pm(r_2)}}\right). \end{aligned}$$

По условию (1.3) нормальная производная на границе равна нулю, т. е.

$$-\varepsilon g'_\pm(r_2) \frac{\partial \hat{u}}{\partial r_2}(r_2, \varepsilon g_\pm(r_2)) + \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_3}(r_2, \varepsilon g_\pm(r_2)) = 0.$$

Подставляя в последнее равенство вместо \hat{u} ряд (2.1) и разлагая все функции по степеням ε , получим

$$-\varepsilon g'_\pm(r_2) \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{\partial^{j+1} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^j}(r_2, \pm 0) g_\pm^j(r_2) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{\partial^{j+1} \hat{u}_k}{\partial x_3^{j+1}}(r_2, \pm 0) g_\pm^j(r_2) = 0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 : \quad & \frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x_3}(r_2, \pm 0) = 0, \\ \varepsilon^n : \quad & -g'_\pm(r_2) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k-1)!} \frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}}(r_2, \pm 0) g_\pm^{n-k-1}(r_2) \\ & + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k+1} \hat{u}_k}{\partial x_3^{n-k+1}}(r_2, \pm 0) g_\pm^{n-k}(r_2) = 0, \quad n > 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из уравнения Лапласа в наших криволинейных координатах

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r_2^2} + \frac{1}{r_2-1} \frac{\partial u}{\partial r_2} + \frac{1}{(r_2-1)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0$$

вытекает соотношение

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial x_3^2} = -\frac{\partial^2 \hat{u}_k}{\partial r_2^2} - \frac{1}{r_2-1} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial r_2}. \quad (2.5)$$

Из уравнений (2.4) с учетом соотношения (2.5) можно выразить

$$\frac{\partial \hat{u}_n}{\partial x_3}(r_2, \pm 0) = \frac{1}{r_2-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{g_\pm^{n-k}(r_2)}{(n-k)!} (r_2-1) \frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}}(r_2, \pm 0) \right)'_{r_2}. \quad (2.6)$$

Таким образом, получаем следующие краевые задачи для асимптотических коэффициентов ряда (2.1):

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}, \\ \left. \frac{\partial u_0}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm 0} = 0, & x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u_0 = x_3 + O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_n = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{1}{r_2 - 1} \sum_{k=0}^{n-1} \left((r_2 - 1) \frac{g_{\pm}^{n-k}(r_2)}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}}(r_2, \pm 0) \right)'_{r_2}, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ u_n = O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Решение таких задач не представляло бы серьезных трудностей, если бы граничные условия на σ для функций $u_k(x)$ были непрерывны и интеграл от граничной функции по поверхности σ был равен нулю. Но оказывается, что функции $u_k(x)$ имеют особенности на краях диска σ . Порядок этих особенностей растет с ростом k . Кроме того, разрешимость этих задач неизвестна без знания асимптотик предыдущих коэффициентов $u_k(x)$ при $r_c \rightarrow 0$.

Начнем с изучения функции $u_0(x)$. Представим ее в виде суммы $u_0(x) = x_3 + \tilde{u}_0(x)$, где $\tilde{u}_0(x)$ является решением краевой задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \tilde{u}_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\sigma}, \\ \frac{\partial \tilde{u}_0}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ \tilde{u}_0 = O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

Решение такой задачи существует и непрерывно всюду, если считать различными берега разреза по диску σ , и, кроме того, оно представимо в виде некоторой суммы гармоник сплюснутого сфероида [6, § 28 б].

Удобно ввести естественные обозначения для классов функций. Классы $C(\bar{\Omega})$ ($C^N(\bar{\Omega})$) — это множества функций, определенных в $\bar{\Omega}$ и непрерывных (N раз непрерывно дифференцируемых) всюду, включая границу Ω . При этом точки на разных берегах разреза σ считаются различными точками (т. е. $(x_1, x_2, +0) \neq (x_1, x_2, -0)$ при $0 < r_2 \leq 1$). Если при этом функции определены лишь при $r_c < \delta$, то такие множества будут обозначаться $C(\bar{\Omega} \cap S_\delta)$ ($C^N(\bar{\Omega} \cap S_\delta)$). Посредством $C^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$ обозначим классы функций, бесконечно дифференцируемых всюду, кроме края диска $\bar{\sigma}$, а посредством $C^\infty(\bar{\Omega} \cap S_\delta \setminus S)$ — такие же функции, определенные при $r_c < \delta$. При этом берега разреза по-прежнему считаются различными.

Будем использовать криволинейные координаты (r_c, Θ, φ) , ранее введенные в работе [4] и такие, что

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = (1 - r_c \cos \Theta) \cos \varphi, \\ x_2 = (1 - r_c \cos \Theta) \sin \varphi, \\ x_3 = r_c \sin \Theta. \end{array} \right.$$

В той же работе были рассмотрены гармонические функции вида

$$\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta) = r_c^\alpha \cos(\alpha\Theta) + r_c^{\alpha+1} \Phi_1(\Theta) + r_c^{\alpha+2} \Phi_2(\Theta) + \dots, \quad (2.9)$$

$$\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta) = r_c^\alpha \sin(\alpha\Theta) + r_c^{\alpha+1} F_1(\Theta) + r_c^{\alpha+2} F_2(\Theta) + \dots, \quad (2.10)$$

где параметр $-\infty < \alpha < +\infty$. В случае $\alpha > -1$ функции $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta)$ представимы в виде сходящихся рядов

$$\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta) = r_c^\alpha \cos(\alpha\Theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj} \cos((\alpha - (k-1) + 2j)\Theta) \right),$$

$$\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta) = r_c^\alpha \sin(\alpha\Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj} \sin((\alpha - (k-1) + 2j)\Theta) \right).$$

В частности,

$$\tilde{S}_0(r_c, \Theta) = 0, \quad \tilde{C}_0(r_c, \Theta) = 1,$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) &= r_c^{-1/2} \cos \frac{\Theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-1}{4k} \right) r_c^{-1/2+j} \cos \frac{(j+1)\Theta}{2}, \\ \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) &= r_c^{-1/2} \sin \frac{\Theta}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^j \frac{2k-1}{4k} \right) r_c^{-1/2+j} \sin \frac{(j+1)\Theta}{2}.\end{aligned}$$

Используя представления вида

$$r_c^{\alpha+k} \cos(\alpha\Theta) = r_c^k \operatorname{Re}(r_2 + ix_3)^\alpha,$$

несложно доказать следующую лемму.

Лемма 1. Пусть параметр $\alpha > 0$. Тогда верны следующие равенства:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{C}_\alpha}{\partial r_2}(r_c, \Theta) &= \tilde{C}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \tilde{C}_{\alpha+k}(r_c, \Theta), \\ \frac{\partial \tilde{S}_\alpha}{\partial r_2}(r_c, \Theta) &= \tilde{S}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \tilde{S}_{\alpha+k}(r_c, \Theta), \\ \frac{\partial \tilde{C}_\alpha}{\partial x_3}(r_c, \Theta) &= -\tilde{S}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \tilde{S}_{\alpha+k}(r_c, \Theta), \\ \frac{\partial \tilde{S}_\alpha}{\partial x_3}(r_c, \Theta) &= \tilde{C}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \tilde{C}_{\alpha+k}(r_c, \Theta),\end{aligned}$$

где a_k, b_k, c_k и d_k — некоторые постоянные.

З а м е ч а н и е 1. Усложнение структуры функций $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta)$ при $\alpha < 0$ возникает при α равном $-1, -2, \dots$, из-за того, что мы приходим к уравнению вида $\Phi_{k+1}''(\Theta) + \beta^2 \Phi_{k+1}(\Theta) = \cos(\beta\Theta)$ при вычислении коэффициента $\Phi_{k+1}(\Theta)$ ряда (2.9) при $\alpha + k = 0$. Подробно данная ситуация описана в [4]. Аналогичная проблема возникает и при построении функции $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$. Однако до тех пор, пока $\alpha + k < 0$, все коэффициенты $\Phi_{k+1}(\Theta)$ из (2.9) представимы в виде суммы косинусов. Поэтому при отрицательном целом α функции $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta)$ представимы в виде

$$\begin{aligned}\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta) &= r_c^\alpha \cos(\alpha\Theta) + \sum_{\substack{\alpha+k \leq 0, \\ k \geq 1}} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj} \cos((\alpha - (k-1) + 2j)\Theta) \right) + \sum_{\alpha+k \geq 0} r_c^{\alpha+k} \Phi_k(\Theta), \\ \tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta) &= r_c^\alpha \sin(\alpha\Theta) + \sum_{\substack{\alpha+k \leq 0, \\ k \geq 1}} \left(r_c^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k-1} d_{kj} \sin((\alpha - (k-1) + 2j)\Theta) \right) + \sum_{\alpha+k \geq 0} r_c^{\alpha+k} F_k(\Theta).\end{aligned}$$

При отрицательных дробных α функции $\tilde{C}_\alpha(r_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(r_c, \Theta)$ сохраняют представления (2.9) и (2.10).

Отсюда следует, что лемма 1 также верна и для нецелых отрицательных α , а в случае целых отрицательных α выполняются равенства вида

$$\frac{\partial \tilde{C}_\alpha}{\partial x_3}(r_c, \Theta) = -\tilde{S}_{\alpha-1}(r_c, \Theta) + \sum_{k=0}^{-\alpha-1} c_k \tilde{S}_{\alpha+k}(r_c, \Theta) + p(x),$$

где $p(x)$ — некоторая функция без особенностей при $r_c \rightarrow 0$.

Из леммы 1 с учетом замечания 1, полноты системы функций $\{\tilde{C}_{j/2}, \tilde{S}_{j/2}\}_{j=0}^{\infty}$ (доказанной в [4, лемма 1; 3, теорема 1]) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть k — целое число, $h_+(r_2)$ и $h_-(r_2)$ — две функции, заданные при $0 < r_2 \leq \delta$ и такие, что $h_{\pm}(r_2) \in C^{\infty}(0, \delta]$,

$$h_{\pm}(r_2) = \left(\sum_{j=-k}^{\infty} \hat{c}_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

И пусть это равенство допускает многократное почленное дифференцирование. Тогда существует гармоническая в $\Omega_{\delta} \setminus S$ функция $u(x)$ такая, что $\frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) = -\frac{h'_{\pm}(r_2)}{1-r_2}$ при $r_2 \in (0, \delta]$, $u(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega} \cap \bar{S}_{\delta} \setminus S)$:

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} c_j \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) + \sum_{j=1}^{\infty} d_j \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta) = \sum_{j=-k}^{\infty} r_c^{j/2} \tilde{\Phi}_j(\Theta), \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Точно так же, как и в работе [4], отсюда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть выполнены все условия леммы 2 и заданы постоянные $d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-k}$, $k > 0$. Тогда существует функция $u(x)$, которая удовлетворяет тем же условиям, что и в лемме 2, только вместо асимптотического разложения (2.12) для нее справедливо асимптотическое разложение вида

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} c_j \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) + \sum_{j=-k}^{\infty} d_j \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta), \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Кроме того, из леммы 2 следует, что разложение функции $u_0(x)$ имеет вид

$$u_0(x) = d_{0,0} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(d_{j,0} \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta) + c_{j,0} \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) \right),$$

где $c_{1,0} = 0$, $c_{2,0} = 1$, остальные $d_{j,0}$ и $c_{j,0}$ — некоторые коэффициенты.

Итак, $u_1(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{\infty}(\bar{\Omega} \setminus S)$, но вблизи краев σ функция $u_1(x)$ не является гладкой. Используя разложения функций $g_{\pm}(r_2)$ и $u_0(x)$, можно получить, что

$$g_{\pm}(r_2) \frac{\partial u_0}{\partial r_2} \Big|_{r_2=\pm 0} = \left(\pm r_2^{1/2} + \left(\sum_{j=2}^{\infty} g_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}} \right) \left(d_{1,0} r_2^{-1/2} + \dots \right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) = \pm \frac{g_2}{4} r_2^{-1/2} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} h_{1,j} z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow +0, \quad (2.14)$$

где $h_{1,j}$ — некоторые коэффициенты, полученные в результате перемножения соответствующих рядов в (2.6) при $n = 1$, явный вид их не важен.

Исходя из этого граничного условия и следствия 1, можно определить вид асимптотического разложения функции $u_1(x)$ при $r_c \rightarrow 0$ и следующих асимптотических коэффициентов. Однако, так как $u_k(x)$ определены в более широкой области, нежели Ω_{δ} , и, кроме того, они должны удовлетворять на бесконечности условию (2.3), докажем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть k — целое число, функции $h_{\pm}(r_2) \in C^{\infty}(0, 1]$, для них справедливы асимптотические разложения (2.11) при $r_2 \rightarrow +0$ и, кроме того, они таковы, что составные функции

$$\tilde{h}_{\pm}(r_2) = \begin{cases} h_{\pm}(r_2), & 0 < r_2 \leq 1, \\ h_{\pm}(2-r_2), & 1 \leq r_2 < 2, \end{cases}$$

являются бесконечно дифференцируемыми ($\tilde{h}_\pm \in C^\infty(0, 2)$). В случае $k > 0$ пусть заданы постоянные $d_{-1}, d_{-2}, \dots, d_{-k}$.

Тогда существует функция $u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus S)$, гармоническая в Ω и удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_3}(x_1, x_2, \pm 0) &= \frac{h'_\pm(r_2)}{r_2 - 1}, \quad 0 < r_2 \leq 1, \\ u(x) &= O(r^{-2}), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $r_c \rightarrow 0$ для функции $u(x)$ справедливо асимптотическое разложение (2.12) при $k \leq 0$ и асимптотическое разложение (2.13) при $k > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что множество функций, имеющих разложение вида (2.11) является замкнутым относительно операций дифференцирования, умножения и сложения. Такие функции возникают вследствие преобразований ряда (1.1) при построении асимптотики. Условие (2.11) на функции $h_\pm(r_2)$ можно ослабить, однако нет необходимости выходить из класса функций, заданных рядами вида (2.11).

З а м е ч а н и е 3. Условие (2.15) связано с тем, что если решение задачи (1.2)–(1.4) после вычитания x_3 имеет асимптотику $O(r^{-2})$ на бесконечности, то и коэффициенты его асимптотического разложения по ε обязаны иметь такое же поведение на бесконечности. Опираясь на теорему 1, в дальнейшем мы будем проводить построение этих коэффициентов, поэтому условие (2.15) используется для их описания.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим вначале случай, когда $k \leq 0$. Как уже было отмечено во введении, в случае достаточной гладкости границы и краевых условий достаточным условием для того, чтобы наша функция $u(x)$ удовлетворяла условию (2.15) на бесконечности, является равенство нулю интеграла от граничной функции, т. е.

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 < r_2 \leq 1, \\ x_3 = 0}} \frac{h'_+(r_2)}{r_2 - 1} dS - \iint_{\substack{0 < r_2 \leq 1, \\ x_3 = 0}} \frac{h'_-(r_2)}{r_2 - 1} dS &= \begin{bmatrix} x_1 = (1 - r_2) \cos \varphi, \\ x_2 = (1 - r_2) \sin \varphi, \\ |I| = (1 - r_2) \end{bmatrix} \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 h'_+(r_2) dr_2 d\varphi + \int_0^{2\pi} \int_0^1 h'_-(r_2) dr_2 d\varphi \\ &= -2\pi \left(\lim_{r_2 \rightarrow 1-0} (h_+(r_2) - h_-(r_2)) - \lim_{r_2 \rightarrow +0} (h_-(r_2) - h_+(r_2)) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь $|I|$ — якобиан замены; условием является только последний знак равенства.

В силу (2.11) равенство (2.16) всегда выполняется при $k \leq 0$. Поскольку задача разрешима, то возьмем ее решение $u(x)$, которое стремится к нулю на бесконечности, и измерим значения функции $u(x)$ на торе $r_c = \delta$. Совокупность этих значений образует некоторую функцию $f(\Theta) \in C[0, 2\pi]$, а сама функция $u(x)$ является также и единственным решением из класса функций $C^\infty(\Omega \cap S_\delta) \cap C(\bar{\Omega} \cap \bar{S}_\delta)$ следующей смешанной краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega \cap S_\delta, \\ u|_{r=\delta} = f(\Theta), & \Theta \in [0, 2\pi], \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|_{x_3=\pm 0} = \frac{(h_\pm(r_2))'_{r_2}}{r_2 - 1} \underset{r_2 \rightarrow +0}{\text{ac.}} \left(\left(\sum_{j=-k}^{\infty} q_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}} \right)'_{r_2}. \end{cases}$$

В силу полноты системы $\{\tilde{C}_{j/2}, \tilde{S}_{j/2}\}_{j=0}^\infty$ в пространстве осесимметричных функций (не зависящих от φ), определенных на торе с надрезом $\bar{\Omega} \cap \bar{S}_\delta$ (см., [4]), у данной задачи существует решение в виде ряда

$$u(x) = \sum_{j=-k}^{\infty} \left(c_j \tilde{S}_{j/2}(r_c, \Theta) + d_j \tilde{C}_{j/2}(r_c, \Theta) \right),$$

где $c_{-k} = q_{-k}$, $c_{-k+1} = q_{-k+1} - q_{-k}/4, \dots$.

2. Предположим, что $h_{\pm}(r_2) = \left(\sum_{j=-1}^{\infty} c_j z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}$ при $r_2 \rightarrow +0$.

Представим в виде суммы $h_{\pm}(r_2) = s_{\pm}(x_1) + p_{\pm}(x_1)$, где $s_{\pm}(r_2) = \frac{c_{-1}}{\pm\sqrt{r_2}}\chi_1(r_2)$, $p_{\pm}(r_2) = h_{\pm}(r_2) - \frac{c_{-1}}{\pm\sqrt{x_1}}\chi_1(r_2)$, $\chi_1(r_2)$ — срезающая функция, которая тождественно равна единице при $r_2 \leq \delta_1 - \hat{\delta}$ и тождественно равна нулю при $r_2 \geq \delta_1 + \hat{\delta}$, $0 < \delta < 1$, $0 < \hat{\delta} \ll \delta_1$.

Функцию $u(x)$ будем искать в виде суммы $u_1(x) + u_2(x)$, где функция u_1 является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{s'_{\pm}(r_2)}{r_2 - 1}, & 0 < r_2 < 1, \\ u_1(x) = O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty, \end{cases}$$

а функция u_2 — решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{p'_{\pm}(r_2)}{r_2 - 1}, & 0 < r_2 < 1, \\ u_2(x) = O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

В случае с u_2 имеет место предыдущий случай. Рассмотрим функцию u_1 . В классе ограниченных бесконечно дифференцируемых функций эта задача неразрешима, поскольку интеграл поверхности σ от производной функции u_1 по внешней нормали к σ не только не равен нулю, но и вообще расходится. Однако эта задача разрешима в классе функций с особенностью на крае диска σ . Будем искать u_1 также в виде суммы $u_1(x) = c_{-1}\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c) + c_{-1}\tilde{u}_1(x)$, где $\tilde{u}_1(x)$ — гладкая функция, а $\chi_2(r_c)$ — гладкая функция, меняющая свое значение с 1 до 0 в $\hat{\delta}$ -окрестности поверхности $r_c = \delta_2$. Таким образом, $\tilde{u}_1(x)$ — это решение задачи

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_1(x) = -\Delta(\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{(\pm r_2^{-1/2}\chi_1(r_2))'_{r_2}}{r_2 - 1} - \frac{\partial}{\partial x_3}(\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)) \Big|_{x_3=\pm 0}, & 0 < r_2 \leq 1. \end{cases}$$

Докажем, что можно выбрать такое δ_2 , чтобы существовало решение $\tilde{u}(x)$, которое стремится к нулю на бесконечности, как $O(r^{-2})$. В этом случае $u_1(x)$ и вся функция $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$ будет стремиться к нулю на бесконечности, как $O(r^{-2})$. Заметим, что для того чтобы $\tilde{u}_1(x) = O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$, должно выполняться равенство

$$\iint_{\partial\sigma} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}} dS + \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \sigma} \Delta(\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)) dx = 0.$$

Вычислим эти два интеграла:

$$\begin{aligned} & \iint_{\partial\sigma} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \mathbf{n}} dS \approx 2(\delta_1^{-1/2} - \delta_2^{-1/2}), \\ & \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \sigma} \Delta(\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)) dx \\ &= \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \sigma} \left(\frac{\partial^2}{\partial r_c^2} + \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} - \frac{\cos \Theta}{1 - r_c \cos \Theta} \frac{\partial}{\partial r_c} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \right) (\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)\chi_2(r_c)) dx \end{aligned}$$

$$\approx \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus \sigma} \frac{1}{r_c} \frac{\partial}{\partial r_c} (\tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_2(r_c)) dx \approx \iint_{r_c = \delta_2} \frac{1}{\delta_2} (-\delta_2^{-1/2}) \sin \frac{\Theta}{2} dS = -8\pi \delta_2^{-3/2}.$$

Постоянную δ_2 можно приближенно найти из уравнения $2(\delta_1^{-1/2} - \delta_2^{-1/2}) \approx 8\pi \delta_2^{-3/2}$. Очевидно, что решение такого уравнения всегда существует, точное решение не важно.

Докажем, что существует функция $u_3(x) = \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) + \tilde{u}_3(r_c, \Theta)$, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u_3 = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u_3}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \sigma} = 0, & 0 < r_2 \leq 1, \\ u_3(x) = O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty, \end{cases}$$

где $\chi_3(r_c)$ — срезающая функция, аналогичная $\chi_2(r_c)$, меняющая свое значение с 1 до 0 в окрестности $r_c = \delta_3$, а $\tilde{u}_3(r_c, \Theta)$ — это гладкая функция, являющаяся решением задачи

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u}_3 = -\Delta(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial \sigma} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)), & 0 < r_2 \leq 1, \\ \tilde{u}_3(x) = O(r^{-2}), & r \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Действительно, в силу леммы 1 $\frac{\partial}{\partial x_3}(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)) \Big|_{x_3 = \pm 0} = 0$.

Используя первую формулу Грина (см., например, [7, § 6.1]), вычислим

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{R}^3 / \sigma} \Delta(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)) dx &= \iiint_K (1 \cdot \Delta(\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c)) - \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) \cdot \Delta 1) dx \\ &= \iint_K \left(1 \cdot \frac{\partial(\tilde{C}_{-1/2} \cdot \chi_3)}{\partial \mathbf{n}_K} - \tilde{C}_{-1/2} \cdot \chi_3 \frac{\partial 1}{\partial \mathbf{n}_K} \right) dS = \iint_K \frac{\partial(\tilde{C}_{-1/2} \chi_3)}{\partial \mathbf{n}_K} dS = \iint_{r_c = \delta_3 - \hat{\delta}} \frac{\partial \tilde{C}_{-1/2}}{\partial r_c} dS \\ &= - \iint_{\substack{r_c = \delta_3 - \hat{\delta}, \\ x_3 > 0}} \frac{\partial \tilde{C}_{-1/2}}{\partial r_c} dS - \iint_{\substack{r_c = \delta_3 - \hat{\delta}, \\ x_3 < 0}} \frac{\partial \tilde{C}_{-1/2}}{\partial r_c} dS = 0 \end{aligned}$$

в силу нечетности $\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta)$ относительно плоскости $x_3 = 0$. Здесь $K = \{\delta_3 - \hat{\delta} < r_c < \delta_3 + \hat{\delta}\} \setminus \sigma$ — область, внутри которой меняет свое значение срезающая функция $\chi_3(r_c)$, \mathbf{n}_K — внешняя нормаль к области K .

Заметим, что $u_3(x) \neq 0$, так как $\tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) \rightarrow \infty$ при $r_c \rightarrow 0$, а $\tilde{u}_3(x)$ — ограниченная функция.

Итак, $u(x) = c_{-1} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_2(r_c) + c_{-1} \tilde{u}_1(x) + u_2(x) + d_{-1} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) + d_{-1} \tilde{u}_3(x)$, где d_{-1} — произвольная постоянная. При этом $c_{-1} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_2(r_c) + d_{-1} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) \chi_3(r_c) = c_{-1} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta) + d_{-1} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta)$ при достаточно малых r_c , а функция $c_{-1} \tilde{u}_1(x) + u_2(x) + d_{-1} \tilde{u}_3(x)$ имеет разложение вида (2.12).

Таким образом, мы доказали, что для данного случая такая функция $u(x)$ существует и имеет разложение вида (2.13).

Аналогичные действия можно произвести в случае других особенностей краевых условий. Теорема 1 доказана.

Итак, согласно теореме 1 и условию (2.14)

$$u_1(x) = d_{0,1} + \frac{g_2}{2} r_c^{1/2} \sin \frac{\Theta}{2} + d_{1,1} r_c^{1/2} \cos \frac{\Theta}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} r_c^{j/2} \Phi_{j,1}(\Theta), \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.17)$$

Граничное условие для функции $u_2(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \frac{1}{r_2 - 1} \left(\frac{g_{\pm}^2(r_2)}{2} (r_2 - 1) \frac{\partial^2 \hat{u}_0}{\partial r_2 \partial x_3} (r_2, \pm 0) + g_{\pm}(r_2) (r_2 - 1) \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial r_2} (r_2, \pm 0) \right)'_{r_2}. \quad (2.18)$$

Согласно теореме 1 из этого вида граничного условия также следует разрешимость задачи на $u_2(x)$ в классе функций $C^\infty(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$.

Если учесть асимптотические разложения (1.1), (2.17) и краевое условие $\frac{\partial \hat{u}_0}{\partial x_3} = 0$ на поверхности диска σ_0 , то можно найти

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} \Big|_{x_3=\pm 0} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{d}_{j,2} z^j \right)_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow 0,$$

где $\tilde{d}_{j,2}$ — некоторые коэффициенты.

В соответствии с теоремой 1 можно построить гармоническую и ограниченную в Ω функцию $u_2(x) \in C^\infty(\bar{\Omega} \setminus C)$, которая удовлетворяет условию (2.18) и имеет следующее разложение при $r \rightarrow 0$:

$$u_2(x) = d_{0,2} + \sum_{j=1}^{\infty} r_c^{j/2} \Phi_{j,2}(\Theta).$$

Однако впоследствии окажется, что на самом деле функция $u_2(x)$ может иметь особенности на краю диска σ_0 , а в разложении не хватает слагаемого $d_{-1,2} \tilde{C}_{-1/2}(r_c, \Theta) + c_{-1,2} \tilde{S}_{-1/2}(r_c, \Theta)$.

Граничная функция для коэффициента $u_3(x)$ уже имеет неинтегрируемую особенность на краю диска $\bar{\sigma}_0$. Действительно, согласно условию (2.6)

$$\hat{u}_3(r_2, \pm 0) = \frac{1}{r_2 - 1} \left(\sum_{k=0}^2 \frac{g_{\pm}^{3-k}(r_2)}{(3-k)!} (r_2 - 1) \frac{\partial^{3-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{2-k-1}} (r_2, \pm 0) \right)'_{r_2} = \left(\sum_{j=-1}^{\infty} \tilde{c}_{j,3} z^j \right)'_{z=\pm\sqrt{r_2}}, \quad r_2 \rightarrow +0.$$

Следовательно, функция $u_3(x)$ неограничена около края диска σ_0 ; при приближении к краю σ_0 она растет, по крайней мере, как $r_c^{-1/2}$. Однако после согласования асимптотических разложений окажется, что она может расти, и как r_c^{-1} . В классе таких функций в соответствии с теоремой 1 существует решение $u_3(x)$, определенное с точностью до произвольных постоянных $c_{-1,3}$, $c_{-2,3}$.

Теорема 2. *Существуют функции $u_k(x)$, которые удовлетворяют соотношениям (2.2), (2.3), (2.6) и имеют асимптотические разложения*

$$u_k(x) = \sum_{j=-k+1}^{\infty} d_{j,k} \tilde{C}_{j/2}(x) + c_{j,k} \tilde{S}_{j/2}(x) = \sum_{j=-k+1}^{\infty} r_c^{j/2} \Phi_{j,k}(\Theta), \quad r_c \rightarrow 0. \quad (2.19)$$

При определении каждой функции $u_k(x)$ для $k \geq 2$ имеются произвольные постоянные $d_{-1,k}$, $d_{-2,k}$, \dots , $d_{-k+1,k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко провести по индукции, опираясь на теорему 1. При $k \leq 3$ это утверждение уже проверено. Если утверждение верно для всех $k < n$, то при построении функции $u_n(x)$ остается лишь убедиться в том, что асимптотическое разложение функции $(r_2 - 1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_{\pm}^{n-k}(r_2)}{(n-k)!} \frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}} (r_2, \pm 0)$ в граничном условии (2.6) начинается с члена $r_2^{(-n+1)/2}$. Действительно, главный член асимптотики в сомножителе $[g_{\pm}(r_2)]^{n-k}$ равен $r_2^{(n-k)/2}$, а в сомножителе $\frac{\partial^{n-k} \hat{u}_k}{\partial r_2 \partial x_3^{n-k-1}} (r_2, \pm 0)$ главный член по предположению индукции и в силу асимптотического разложения (2.19) равен $r_2^{-\frac{k-1}{2} - (n-k)}$. Отсюда и из теоремы 1 следует существование искомой функции $u_n(x)$.

Теорема 2 доказана.

3. Внутреннее разложение

Вблизи края диска коэффициенты внешнего асимптотического разложения имеют нарастающие особенности, поэтому в соответствии с методом согласования асимптотических разложений будем использовать в окрестности края диска другое асимптотическое разложение. В качестве внутренних переменных возьмем $\rho = \varepsilon^{-2}r$, $\rho_2 = \varepsilon^{-2}r_2$, $\rho_c = \varepsilon^{-2}r_c$, $\xi_3 = \varepsilon^{-2}x_3$, и те же самые углы φ и θ . Уравнение поверхности $\partial\sigma_\varepsilon$ в этих переменных примет вид

$$\xi_3 = \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_\pm(\rho_2, \varepsilon), \quad (3.1)$$

где

$$\Phi_\pm(\rho_2, \varepsilon) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_{j+2} \varepsilon^j z^{j+2} \right)_{z=\pm\sqrt{\rho_2}}, \quad \varepsilon\sqrt{\rho_2} \rightarrow 0.$$

Посредством D обозначим область $\{(\rho_2, \xi_3, \varphi) : \rho_2 < \xi_3^2, \xi_3 \in \mathbb{R}\}$, через n_D — внутреннюю нормаль к области D .

Граничное условие (1.3) для функции $v(\rho_2, \xi_3, \varepsilon) \equiv u(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$ переходит в равенство

$$\frac{\partial v}{\partial n}(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2} + \varepsilon\Phi_\pm(\rho_2, \varepsilon), \varepsilon) = 0. \quad (3.2)$$

Внутреннее разложение будем искать в виде ряда

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i v_i(\rho_2, \xi_3). \quad (3.3)$$

(Здесь $v_0(\rho_2, \xi_3) \equiv 0$, так как $\tilde{u}_0(0, 0) = 0$.)

Уравнение (1.2) в координатах (ρ_2, ξ_3, φ) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^2 v}{\partial r_2^2} - \frac{1}{\varepsilon^2(1 - \varepsilon^2 \rho_2)} \frac{\partial v}{\partial \rho_2} + \frac{1}{(1 - \varepsilon^2 \rho_2)^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_3^2} = 0.$$

Подставляя в него ряд (3.3), получим уравнения для коэффициентов внутреннего разложения

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} v_0 = 0, \quad \Delta_{\rho_2, \xi_3} v_{2i} = \sum_{j=0}^i \rho_2^j \frac{\partial v_{2(i-1)-2j}}{\partial \rho_2}, \quad i \geq 1, \quad (3.4)$$

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} v_1 = 0, \quad \Delta_{\rho_2, \xi_3} v_{1+2i} = \sum_{j=0}^i \rho_2^j \frac{\partial v_{2i-1-2j}}{\partial \rho_2}, \quad i \geq 1. \quad (3.5)$$

Заметим, что по построению данным уравнениям удовлетворяют коэффициенты разложения функций $\tilde{C}_\alpha(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)$ и $\tilde{S}_\alpha(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta)$ по ε .

Подставляя ряд (3.3) в граничное условие (3.2), можно получить граничные условия вида

$$\pm \frac{\partial v_k}{\partial n_D} \Big|_{\partial D} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4\rho_2}}} \frac{d}{d\rho_2} \Psi_{k, \pm}(\rho_2), \quad (3.6)$$

где $\Psi_{k, \pm}(\rho_2)$ — некоторые функции от ρ_2 , выражающиеся через функции v_0, \dots, v_{k-1} и Φ_\pm . Явная формула для функций $\Psi_{k, \pm}(\rho_2)$ при произвольном k не имеет большого значения, но важно следующее свойство функций v_k и пар функций $\Psi_{k, \pm}(\rho_2)$: все они разлагаются в ряды вида $v_k(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2}) = \sum_j c_{kj}(\pm\sqrt{\rho_2})^j$ при $\rho_2 \rightarrow \infty$, причем это свойство сохраняется при их сложении, перемножении и дифференцировании.

Приближенно заменяя границу (3.1) на параболу $\xi_3 = \pm\sqrt{\rho_2}$, будем искать функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ при $\rho_2 < \xi_3^2$. При нахождении $v_i(\xi, \eta)$ мы будем опираться на уже построенные функции $u_k(x)$ и на условие согласования рядов U и V .

Заметим, что для [2, лемма 2.2] мы можем сформулировать аналог, заменив первое краевое условие вторым, с аналогичным доказательством. Из него, в свою очередь, вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть ряд $\tilde{v} = \sum_{j=-k}^{\infty} \rho_c^{-j/2} \Phi_j(\Theta)$, где k — некоторое натуральное число, является ф. а. р. краевой задачи

$$\Delta_{\rho_2, \xi_3} v = F(\rho_2, \xi_3) \text{ в области } D, \quad (3.7)$$

$$\pm \frac{\partial v}{\partial n_D} \Big|_{\partial D} = \frac{2\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{4\rho_2 + 1}} \frac{d}{d\rho_2} \Psi_{\pm}(\rho_2), \quad \rho_2 \geq 0, \quad (3.8)$$

при $\rho \rightarrow \infty$, где $F(\rho_2, \xi_3) \in C^\infty(\overline{D})$, $\Psi_{\pm}(\rho_2) \in C^\infty(\{\rho_2 \geq 0\})$; кроме того, функции $\Psi_{\pm}(\rho_2)$ необходимым образом согласованы, чтобы обеспечить бесконечную дифференцируемость граничной функции в условии (3.8), записанной от переменной ξ_3 , по всей границе (в частности, $\Psi_+(0) = \Psi_-(0)$). Пусть $r_{0,+}$ и $r_{0,-}$ — это коэффициенты при нулевой степени ρ_2 при разложении функций $\Psi_{\pm}(\rho_2)$ в ряд при $\rho_2 \rightarrow \infty$, и пусть $r_{0,+} = r_{0,-} = r_0$. Предположим также, что равенства (3.7) и (3.8) допускают дифференцирование любого порядка в том смысле, что правые части этих равенств разлагаются в асимптотические ряды, полученные соответствующим почленным дифференцированием ряда \tilde{v} . Тогда существует функция $v(\rho_2, \xi_3, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{D})$, которая удовлетворяет уравнению (3.7) и соотношению (3.8) с точностью до $O(\varepsilon^2 \rho_c)$ и такая, что

$$v(\rho_2, \xi_3, \varepsilon) = \tilde{v} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{-j} \left(c_j \tilde{S}_{j/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta) + d_j \tilde{C}_{j/2}(\varepsilon^2 \rho_c, \Theta) \right), \quad \rho_c \in (\varepsilon^{-\beta}, \varepsilon^{-\alpha}), \quad (3.9)$$

где $0 < \alpha < \beta < 2$.

З а м е ч а н и е 4. Лемму 3 мы будем использовать при построении коэффициентов $v_k(\rho_2, \xi_3)$ внутреннего разложения. При этом коэффициенты разложения функции (3.9) по ε будут добавлены к функциям $v_k(\rho_2, \xi_3)$, $v_{k+2}(\rho_2, \xi_3)$, $v_{k+4}(\rho_2, \xi_3)$, ... Эти добавки будут удовлетворять рекуррентным уравнениям (3.4), (3.5), хотя граничные условия будут изменены.

4. Построение асимптотического разложения

Построение коэффициентов рядов (2.1) и (3.3) — функций $u_k(x)$ и $v_i(\xi)$ — удобно проводить, опираясь на таблицу согласования этих рядов (см., например, [2]). В нашей таблице второй индекс i будем брать по номеру раскладываемой функции внутреннего разложения.

Построим в соответствии с теоремой 2 функции u_k . При этом функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ определены однозначно, а для $k \geq 2$ при определении каждой функции имеется $k - 1$ произвольных постоянных $d_{-k+1,1}$, $d_{-k+2,2}$, ..., $d_{-1,k-1}$. Фиксируем пока эти постоянные каким-нибудь образом и выпишем в нижних частях клеток каждой строки в таблице асимптотическое разложение функции $\varepsilon^k u_k(x)$ при $r_c \rightarrow 0$. После перехода к внутренним переменным ρ_2 , ξ_3 (так что $r_c = \varepsilon^2 \rho_c$, а полярный угол Θ сохраняет свое значение) в столбцах таблицы появятся ряды $\varepsilon^i V_i$.

Т а б л и ц а

$U \setminus V$	$\varepsilon v_1(\rho_2, \xi_3)$	$\varepsilon^2 v_2(\rho_2, \xi_3)$	$\varepsilon^3 v_3(\rho_2, \xi_3)$...
$u_0(x)$	$\varepsilon \rho_c^{1/2} (d_{1,1} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^2 \rho_c (d_{2,2} \cos \Theta + c_{2,2} \sin \Theta)$	$\varepsilon^3 \rho_c^{3/2} (d_{3,3} \cos \frac{3\Theta}{2} + c_{3,3} \sin \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} d_{1,1} \cos \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{4} c_{1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$...
	$r_c^{1/2} (d_{1,1} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	$r_c (d_{2,2} \cos \Theta + c_{2,2} \sin \Theta)$	$r_c^{3/2} (d_{3,3} \cos \frac{3\Theta}{2} + c_{3,3} \sin \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} d_{1,1} \cos \frac{\Theta}{2} - \frac{1}{4} c_{1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	
$\varepsilon u_1(x)$	$\varepsilon d_{0,1}$	$\varepsilon^2 \rho_c^{1/2} (d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 \rho_c (d_{2,3} \cos \Theta + c_{2,3} \sin \Theta)$...
	$\varepsilon d_{0,1}$	$\varepsilon r_c^{1/2} (d_{1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon r_c (d_{2,3} \cos \Theta + c_{2,3} \sin \Theta)$	
$\varepsilon^2 u_2(x)$	$\varepsilon \rho_c^{-1/2} (d_{-1,1} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^2 d_{0,2}$	$\varepsilon^3 \rho_c^{1/2} (d_{1,3} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,3} \sin \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4} d_{-1,1} \cos \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} c_{-1,1} \sin \frac{3\Theta}{2})$...
	$\varepsilon^2 r_c^{-1/2} (d_{-1,1} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,1} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^2 d_{0,2}$	$\varepsilon^2 r_c^{1/2} (d_{1,3} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{1,3} \sin \frac{\Theta}{2} + \frac{1}{4} d_{-1,1} \cos \frac{3\Theta}{2} + \frac{1}{4} c_{-1,1} \sin \frac{3\Theta}{2})$	
$\varepsilon^3 u_3(x)$	$\varepsilon \rho_c^{-1} (d_{-2,1} \cos \Theta + c_{-2,1} \sin \Theta)$	$\varepsilon^2 \rho_c^{-1/2} (d_{-1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 (d_{0,3} + \frac{1}{4} d_{-2,1} \cos 2\Theta - \frac{1}{4} c_{-2,1} \sin 2\Theta)$...
	$\varepsilon^3 r_c^{-1} (d_{-2,1} \cos \Theta + c_{-2,1} \sin \Theta)$	$\varepsilon^3 r_c^{-1/2} (d_{-1,2} \cos \frac{\Theta}{2} + c_{-1,2} \sin \frac{\Theta}{2})$	$\varepsilon^3 (d_{0,3} + \frac{1}{4} d_{-2,1} \cos 2\Theta - \frac{1}{4} c_{-2,1} \sin 2\Theta)$	
...

Лемма 4. *Ряды V_i являются ф.а.р. краевых задач (3.4)–(3.6).*

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы из [2, гл. III, §2, лемма 4]. \square

Далее, опираясь на лемму 3, можно по асимптотическим рядам V_i построить функции $v_i(\xi, \eta)$ — решения задач (3.4)–(3.6). Если бы ряды V_i являлись асимптотическими рядами для функций $v_i(\rho_2, \xi_3)$ при $\rho_c \rightarrow \infty$, то по построению рядов V_i было бы выполнено условие согласования рядов (2.1) и (3.3). Но, как следует из леммы 3, асимптотический ряд для

функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ может отличаться от ряда V_i на некоторый ряд

$$H_i = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_c^{-j/2} \left(C_{j,i} \sin \frac{j\Theta}{2} + D_{j,i} \cos \frac{j\Theta}{2} \right),$$

удовлетворяющий однородному граничному условию $\frac{\partial H_i}{\partial n_D}(\rho_2, \pm\sqrt{\rho_2}) = 0$, поэтому построение функций $v_i(\rho_2, \xi_3)$ надо проводить последовательно.

Сначала построим функцию $v_1(\rho_2, \xi_3)$ по ряду V_1 . В результате первый столбец в таблице изменится, начиная с члена $\varepsilon^2 r_c^{-1/2} (d_{-1,1} \cos(\Theta/2) + c_{-1,1} \sin(\Theta/2))$: изменится коэффициент $c_{-1,1}$. Кроме того, изменятся столбцы правее V_1 : они заполнятся коэффициентами разложения соответствующей функции (3.9) по ε . Но в результате, опираясь на теорему 2, окончательно построим функцию $u_2(x)$.

Так как изменение функции $u_2(x)$ влечет за собой изменения в граничных условиях для следующих функций $u_k(x)$, то все они, вообще говоря, изменятся. Но их главные члены асимптотики, стоящие в первом столбце таблицы, уже окончательно определены. Ряды V_i при $i \geq 2$ также изменятся, но в силу леммы 4 они по-прежнему останутся ф.а.р. задач (3.4)–(3.6). Далее, в соответствии с леммой 3 построим функцию $v_2(\rho_2, \xi_3)$ по ряду V_2 , стоящему во втором столбце. Теперь этот столбец изменится, начиная с члена $\varepsilon^2 \rho_c^{-1/2} (d_{-1,2} \cos(\Theta/2) + c_{-1,2} \sin(\Theta/2))$. Это дает возможность окончательно определить $u_3(x)$ и т. д.

Таким образом, построены функции $u_k(x)$ — решения задач (2.7), (2.8) и функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ — решения задач (3.4)–(3.6), так что для рядов (2.1) и (3.3) выполнено условие согласования

$$A_{N_1, \xi} A_{N_2, x} U = A_{N_2, x} A_{N_1, \xi} V \quad \text{для любых } N_1, N_2,$$

где $A_{N, y}$ — оператор взятия частичной суммы, записанной в переменных y , содержащей степени ε с показателями не выше N (см. [2, с. 19]).

Тем самым построение асимптотических разложений решения задачи (1.2)–(1.4) закончено. Необходимо только отметить, что функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ определены лишь в области D , т. е. при $\rho_2 < \xi_3^2$. Однако в окрестности края диска требуется приблизить решение $u(x, \varepsilon)$ при $-\sqrt{\rho_2} + \varepsilon \Phi_-(\rho_2, \varepsilon) \leq \xi_3 \leq \sqrt{\rho_2} + \varepsilon \Phi_+(\rho_2, \varepsilon)$, т. е., может быть, в более широкой области, чем D . Для упрощения будем считать, что в некоторой фиксированной окрестности края $g_+(r_2) \geq \sqrt{r_2}$ и $g_-(r_2) \leq -\sqrt{r_2}$, так что функции $v_i(\rho_2, \xi_3)$ определены всюду в пересечении этой окрестности с Ω_ε .

5. Обоснование асимптотического разложения

Пусть срезающая функция $\chi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi(x) = 0$ вне $S_{2\delta}$ и $\chi(x) = 1$ внутри S_δ . Введем обозначение

$$T_N(x, \varepsilon) = A_{N, x} U + (A_{N, \xi} V - A_{N, \xi} A_{N, x} U) \chi(x) - u(x, \varepsilon),$$

где U — ряд (2.1), V — ряд (3.3).

Теорема 3. *Для всех достаточно больших N всюду в $\bar{\Omega}_\varepsilon$ справедлива оценка $|T_N(x, \varepsilon)| \leq M \varepsilon^{N/4-3}$, где постоянная M не зависит от x и ε .*

Доказательство можно провести полностью аналогично [2, гл. III, § 2]. Действительно, так как все функции осесимметричны, то можно воспользоваться полученной в [3] оценкой $\Delta T_N = O(\varepsilon^{N-1})$ в Ω_ε . Так же можно оценить

$$\left. \frac{\partial T_N}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\partial \sigma_\varepsilon} = O(\varepsilon^{N/4-11/4}).$$

Затем можно воспользоваться устойчивостью факторизованной задачи Неймана [8] и получить требуемое утверждение.

Теорема 3 доказана.

Следствие 2. В области $\Omega_\varepsilon \cap \{r_c > \varepsilon^\gamma\}$ ряд (2.1) является равномерным асимптотическим разложением решения задачи (1.2)–(1.4). В области $\Omega_\varepsilon \cap \{r_c < \varepsilon^\gamma\}$ ряд (3.3) является равномерным асимптотическим разложением той же задачи, где γ — любое число такое, что $0 < \gamma < 2$.

Доказательство аналогично [2, гл. III, § 2]. □

6. Заключение

Заметим, что с точки зрения построения асимптотики в трехмерном случае, в отличие от двумерного, интересными случаями тонких тел являются тела, сжатые по одной или двум координатам из трех. В работах [2, гл. III, § 2; 3] рассмотрены первая и вторая внешние краевые задачи вне сжатой по одному измерению двумерной области. В работе [9] рассмотрены первая и вторая краевые задачи в трехмерном пространстве вне области, представляющей собой малую окрестность отрезка, т. е. сильно сжатой по двум измерениям. В [4] и в настоящей работе рассмотрен случай сжатия дырки в трехмерном пространстве в одном измерении (первая и вторая краевые задачи соответственно). Таким образом, построена асимптотика решений внешних краевых задач для уравнения Лапласа во всех в некотором смысле основных случаях в двумерном и трехмерном пространствах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин А.М. Краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка в области с узкой щелью. 1. Двумерный случай // Мат. сб. 1976. Т. 99 (141), № 4. С. 514–537.
2. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 334 с.
3. Ершов А.А. Асимптотика решения задачи Неймана вне малой окрестности отрезка // Сб. тр. Том 2: Физика. Химия. Математика / отв. редакторы Е.Г. Екомасов, Б.Н. Хабибуллин. Уфа: РИЦ БашГУ, 2015. С. 177–182.
4. Ершов А.А. Задача об обтекании тонкого диска // Вестн. ЧелГУ. Сер. Математика. Механика. 2011. Вып. 14, № 27 (242). С. 61–78.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1950. 676 с.
6. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1954. 604 с.
7. Ильин А.М. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2005. 192 с.
8. Олейник О.А. Об устойчивости задачи Неймана // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, вып. 1 (67). С. 223–225.
9. Федорюк М.В. Задача Дирихле для оператора Лапласа во внешности тонкого тела вращения // Тр. семинара С. Л. Соболева. 1980. № 1. С. 113–131.

Ершов Александр Анатольевич

Поступила 30.11.2016

канд. физ.-мат. наук,

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

доцент кафедры вычислительной математики

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: ale10919@yandex.ru

Крутова Юлия Александровна

магистрант

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: lulia_74rus@mail.ru

REFERENCES

1. Il'in A.M. A boundary value problem for the elliptic equation of second order in a domain with a narrow slit. 1. The two-dimensional case. *Math. USSR-Sb.*, 1976, vol. 28, no. 4, pp. 459–480. doi: 10.1070/SM1976v028n04ABEH001663.
2. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence: AMS, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenij reshenij kraevykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 334 p.
3. Ershov A.A. Asymptotic behavior of the solution of the Neumann problem outside a small neighborhood of a segment. *Proceedings, vol. 2: Physics. Chemistry. Mathematics*, eds. E.G. Ekomasov, B.N. Khabibullin, Ufa, Editorial and Publishing Center (RITs) Bashkirskii Gos. Universitet, 2015, pp. 177–182 (in Russian).
4. Ershov A.A. The problem of the flow around a thin disk. *Vestn. Chelyainskii Gos. Universitet., Ser. Mat. Mekh. Inf.*, 2011, iss. 14, no. 27 (242), pp. 61–78 (in Russian).
5. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of liquids and gases*. New York etc., Pergamon Press, 1966, 804 p. Original Russian text published in *Mekhanika zhidkosti i gaza*, Moscow, Nauka Publ., 1950, 676 p.
6. Smythe W.R. *Static and dynamic electricity*, vol. 3. New York, Toronto, London: McGraw-Hill, 1950, 616 p. Translated under the title *Elektrostatika i elektrodinamika*, Moscow, Izd-vo Inostrannoi Literatury, 1954, 604 p.
7. Il'in A.M. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 192 p. ISBN: 978-5-9221-1036-5.
8. Oleinik O.A. On the stability of the Neumann problem. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1956, vol. 11, no. 1 (67), pp. 223–225 (in Russian).
9. Fedoryuk M.V. The Dirichlet problem for the Laplace operator in the exterior of a thin rotation solid. *Trudy Seminara S. L. Soboleva*, 1980, no. 1, pp. 113–131 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on November 30, 2016.

Aleksandr Anatol'evich Ershov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Chelyabinsk State University, 454001 Russian, e-mail: ale10919@yandex.ru.

Iuliya Aleksandrovna Krutova, graduate student, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russian, e-mail: lulia_74rus@mail.ru.

УДК 517.956.4:517.956.8

**ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ
В БИСИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ
ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹****С. В. Захаров**

Рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с малым параметром ε при старшей производной. Начальная функция, имеющая вид сглаженной ступеньки, зависит от “растянутой” переменной x/ρ , где ρ — другой малый параметр. Для приложений такая постановка задачи представляет интерес в качестве модели распространения нелинейных волн в физических системах при наличии малой диссипации. В случае, соответствующем волне сжатия, строятся асимптотические решения задачи по параметрам ε и ρ , независимо стремящимся к нулю. Предполагается, что $\rho/\varepsilon \rightarrow 0$. Вдали от линии разрыва предельного решения асимптотические решения строятся в виде рядов по степеням ε и ρ . В малой области линейного приближения асимптотическое решение строится в виде ряда по степеням отношения ρ/ε . Коэффициенты внутреннего разложения находятся из рекуррентной цепочки начальных задач. Изучена асимптотика этих коэффициентов на бесконечности. Найдено время перестройки масштаба внутренней пространственной переменной.

Ключевые слова: параболическое уравнение, задача Коши, асимптотика.

S. V. Zakharov. Two-parameter asymptotics in a bisingular Cauchy problem for a parabolic equation.

The Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a small parameter ε at the highest derivative is considered. The initial function, which has the form of a smoothed step, depends on a “stretched” variable x/ρ , where ρ is another small parameter. This problem statement is of interest in applications as a model of propagation of nonlinear waves in physical systems in the presence of small dissipation. In the case corresponding to a compression wave, asymptotic solutions of the problem are constructed in the parameters ε and ρ independently tending to zero. It is assumed that $\varepsilon/\rho \rightarrow 0$. Far from the line of discontinuity of the limit solution, asymptotic solutions are constructed in the form of series in powers of ε and ρ . In a small domain of linear approximation, an asymptotic solution is constructed in the form of a series in powers of the ratio ρ/ε . The coefficients of the inner expansion are found from a recurrence chain of initial value problems. The asymptotics of these coefficients at infinity is studied. The time of reconstruction of the scale of the inner space variable is found.

Keywords: parabolic equation, Cauchy problem, asymptotics.

MSC: 34E05, 34E10, 34K26, 35K15, 35K59

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-94-103

1. Введение

Одной из актуальных задач современной математической физики является изучение особых точек решений эволюционных уравнений в частных производных [1; 2], поскольку данное направление ведет к лучшему пониманию сложных волновых процессов в физических системах [3; 4], а кроме того, к созданию и развитию новых математических методов [5; 6]. В частности, интерес к детальному изучению свойств асимптотик вблизи особых точек объясняется тем, что подобные сингулярные события сами занимают очень малое время, но во многом определяют все последующее поведение системы на конечных и больших временах [7].

¹Работа выполнена при поддержке комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”).

Например, для нахождения сдвига фазы ударной волны, которая начинается в точке градиентной катастрофы, необходимо точно знать поведение коэффициентов асимптотического ряда в окрестности самой особой точки [8, гл. 6].

В настоящей работе рассматривается задача Коши для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0, \varepsilon, \rho) = \nu(x\rho^{-1}), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \rho > 0, \quad (1.2)$$

играющая важную роль в моделировании эволюционных процессов, таких как нелинейная диффузия, гидродинамическая турбулентность [9, гл. 4], акустические волны в диссипативных средах [10; 11]. В этой задаче большой начальный градиент порождает особую точку в начале координат.

Предполагается, что функция φ бесконечно дифференцируема, а ее вторая производная строго положительна, начальная функция ν ограничена и бесконечно дифференцируема. Тогда, как известно [12, гл. 5], существует единственное ограниченное бесконечно дифференцируемое по x и t решение $u(x, t, \varepsilon, \rho)$. В данной работе проводится его асимптотический анализ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow 0$. Для приложений такая постановка важна в качестве модели эволюции нелинейных волн с большим начальным градиентом при наличии малой диссипации в среде. Следует подчеркнуть, что параметры стремятся к нулю независимо. Как будет показано ниже, структура асимптотических рядов, приближающих решение $u(x, t, \varepsilon, \rho)$ или просто асимптотически удовлетворяющих уравнению (1.1) и условию (1.2), существенно зависит от соотношения параметров ε и ρ .

При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\rho = \text{const}$, в случае, когда обобщенное решение вырожденного уравнения первого порядка (уравнение (1.1) при $\varepsilon = 0$) является гладким при $t \geq 0$ всюду за исключением одной гладкой линии разрыва $\{(x, t): x = s(t, \rho), t \geq 0\}$, асимптотику решения с точностью до произвольной степени параметра ε построил и обосновал А. М. Ильин [13]. Заметим, что замена переменных $x = \rho\sigma$, $t = \rho\theta$ в уравнении (1.1) и начальном условии (1.2) приводит к задаче $u_\theta + [\varphi(u)]_\sigma = \delta u_{\sigma\sigma}$, $\delta = \varepsilon/\rho$, $u(\sigma, 0) = \nu(\sigma)$. Если $\delta \rightarrow 0$, то асимптотическое приближение решения такой задачи с точностью до произвольной степени параметра δ получается непосредственно из результатов Ильина [13, формулы (4.3), (4.16), (4.17)]. Например, разложение решения в окрестности точки опрокидывания волны $(x, t) = (0, \rho)$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k/4} \sum_{j=0}^{k-1} w_{k,j}(\xi, \tau) \ln^j \delta,$$

где коэффициенты $w_{k,j}(\xi, \tau)$ зависят от внутренних переменных, определяемых с помощью замены $x = \varepsilon^{3/4} \rho^{1/4} \xi$, $t = \rho + \varepsilon^{1/2} \rho^{1/2} \tau$, а главный коэффициент $w_{1,0} = -2[\varphi''(0)\Lambda]^{-1} \Lambda_\xi$ выражается через вещественный аналог функции Пирси $\Lambda(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-2z^4 + z^2\tau + z\xi) dz$.

Теперь пусть соотношение параметров ε и ρ таково, что

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow 0. \quad (1.3)$$

Будем считать, что функция ν , входящая в начальное условие (1.2), удовлетворяет следующим асимптотическим соотношениям:

$$\nu(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\nu_n^\pm}{\sigma^n}, \quad \sigma \rightarrow \pm\infty, \quad (1.4)$$

где $\nu_0^+ < \nu_0^-$, что физически соответствует волне сжатия. В работе [14, теорема 1] было впервые установлено, что асимптотика решения задачи (1.1), (1.2) при выполнении условий (1.3),

(1.4) имеет нестандартную структуру вблизи особой точки. А именно, возникают две области со специфическими пространственно-временными масштабами, а не одна, как в других известных задачах для уравнения (1.1). Затем в [15, Theorem 1] и [16, теорема 1] была строго доказана справедливость асимптотической формулы в главном приближении равномерно в полосе $\{(x, t): x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T\}$, $T = \text{const} > 0$.

В настоящей работе построен полный асимптотический ряд в меньшей из двух областей, непосредственно начинающейся от момента $t = 0$, подробно исследовано поведение его коэффициентов при переходе в другую область (промежуточного разложения), а также построены асимптотические ряды для областей, отделенных от особой точки и линии разрыва решения предельной задачи.

2. Асимптотика вдали от разрыва

Исследование задачи (1.1), (1.2) удобно начать, зная решение предельной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} \nu_0^-, & x < 0, \\ \nu_0^+, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

При $\nu_0^- > \nu_0^+$ методом характеристик [17] находим обобщенное решение

$$u_{0,0}(x, t) = \begin{cases} \nu_0^-, & x < ct, \\ \nu_0^+, & x > ct, \end{cases} \quad c = \frac{\varphi(\nu_0^+) - \varphi(\nu_0^-)}{\nu_0^+ - \nu_0^-}, \quad (2.2)$$

разрывное на линии $x = ct$, определяемой из соображений единственности решения задачи (2.1). Теоремы существования и единственности обобщенного решения вырожденного уравнения первого порядка содержатся в работе [18].

Прежде всего рассмотрим области вне окрестности линии разрыва и найдем внешнее разложение. Учитывая соотношение (1.4) при $\sigma \rightarrow +\infty$, в области

$$\Omega_0^+ = \{(x, t): x > ct + \varepsilon^{1-\delta_0}, 0 < \delta_0 < 1\}$$

справа от линии $x = ct$ будем строить асимптотическое решение уравнения (1.1) в виде ряда

$$\mathcal{U}^+(x, t, \varepsilon, \rho) = \nu_0^+ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \rho^{m-n} \varepsilon^n u_{m,n}^+(x, t). \quad (2.3)$$

В области $\Omega_0^- = \{(x, t): x < ct - \varepsilon^{1-\delta_0}\}$ слева от линии разрыва будем строить аналогичный ряд

$$\mathcal{U}^-(x, t, \varepsilon, \rho) = \nu_0^- + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \rho^{m-n} \varepsilon^n u_{m,n}^-(x, t). \quad (2.4)$$

Формально подставляя ряды (2.3) и (2.4) в уравнение (1.1) и собирая вместе коэффициенты при $\rho^{m-n} \varepsilon^n$, приходим к рекуррентной системе начальных задач

$$\frac{\partial u_{m,n}^{\pm}}{\partial t} + \varphi'(\nu_0^{\pm}) \frac{\partial u_{m,n}^{\pm}}{\partial x} = F_{m,n}^{\pm}, \quad u_{m,n}^{\pm}(x, 0) = \delta_{n,0} \nu_m^{\pm} x^{-m}, \quad (2.5)$$

где $\delta_{0,0} = 1$, $\delta_{n,0} = 0$ при $n \neq 0$,

$$F_{m,n}^{\pm} = \frac{\partial^2 u_{m-1,n-1}^{\pm}}{\partial x^2} - \sum_{q=2}^{m-n} \frac{\varphi^{(q)}(\nu_0^{\pm})}{q!} \sum_{\substack{i_1+\dots+i_q=m \\ j_1+\dots+j_q=n}} \frac{\partial (u_{i_1,j_1} \cdot \dots \cdot u_{i_q,j_q})}{\partial x}. \quad (2.6)$$

Методом характеристик находим коэффициенты внешнего разложения

$$u_{m,n}^{\pm}(x, t) = \frac{\delta_{n,0} \nu_m^{\pm}}{[x - \varphi'(\nu_0^{\pm})t]^m} + \int_0^t F_{m,n}^{\pm}(x - \varphi'(\nu_0^{\pm})(t - t'), t') dt'. \quad (2.7)$$

Поскольку $\varphi''(u) > 0$, функция $\varphi(u)$ является выпуклой книзу, а следовательно, справедливости неравенства $\varphi'(\nu_0^+) < \frac{\varphi(\nu_0^+) - \varphi(\nu_0^-)}{\nu_0^+ - \nu_0^-} < \varphi'(\nu_0^-)$. Отсюда и из формулы (2.2) для числа c вытекает, что линия $x = \varphi'(\nu_0^+)t$ не лежит в области Ω_0^+ , а линия $x = \varphi'(\nu_0^-)t$ не лежит в области Ω_0^- ; тем самым знаменатель в формуле (2.7) корректно определен. Учитывая формулу (2.2) и используя соотношения (2.6) и (2.7), по индукции приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. Для коэффициентов (2.7) асимптотических рядов (2.3) и (2.4) при всех $m \geq 1$ и $0 \leq n \leq m - 1$ справедлива формула

$$u_{m,n}^{\pm}(x, t) = \sum_{s=n}^{m-1} \frac{\alpha_{m,n,s}^{\pm} t^s}{[x - \varphi'(\nu_0^{\pm})t]^{m+s}}, \quad (2.8)$$

где $\alpha_{m,n,s}^{\pm}$ — однозначно определяемые константы, $\nu_0^{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \nu(x)$.

В качестве примера приведем формулы для коэффициентов при ρ , ρ^2 и $\rho\varepsilon$:

$$u_{1,0}^{\pm}(x, t) = \frac{\nu_1^{\pm}}{x - \varphi'(\nu_0^{\pm})t}, \quad u_{2,0}^{\pm}(x, t) = \frac{\nu_2^{\pm}}{[x - \varphi'(\nu_0^{\pm})t]^2} + \frac{(\nu_1^{\pm})^2 \varphi''(\nu_0^{\pm})t}{[x - \varphi'(\nu_0^{\pm})t]^3}, \quad u_{2,1}^{\pm}(x, t) = \frac{2\nu_1^{\pm}t}{[x - \varphi'(\nu_0^{\pm})t]^3}.$$

Согласно формуле (2.7) при $t = 0$ формальные ряды (2.3) и (2.4) переходят в асимптотические ряды для начальной функции: $\mathcal{U}^{\pm}(x, 0, \varepsilon, \rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \nu_m^{\pm} \left(\frac{\rho}{x}\right)^m$, тем самым асимптотически удовлетворяя начальному условию (1.2). В силу построения функций $u_{m,n}^{\pm}(x, t)$, которые являются решениями задач (2.5), ряды $\mathcal{U}^+(x, t, \varepsilon, \rho)$ и $\mathcal{U}^-(x, t, \varepsilon, \rho)$ также асимптотически удовлетворяют уравнению (1.1) в областях Ω_0^+ и Ω_0^- соответственно.

3. Окрестность особой точки

Из формулы (2.8) следует, что при достаточно малых x и t ряды (2.3) и (2.4) уже не являются асимптотическими. Для построения асимптотического решения вблизи точки $x = 0$, $t = 0$, удовлетворяющего начальному условию (1.2), естественно “растянуть” переменную x на величину ρ^{-1} . Чтобы уравнение (1.1) сохранило при этом эволюционный характер, производная по t должна быть того же порядка, что и правая часть, то есть порядка $\varepsilon\rho^{-2}$. Исходя из этих соображений, сделаем замену переменных

$$x = \rho\sigma, \quad t = \frac{\rho^2}{\varepsilon}\omega. \quad (3.1)$$

Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\frac{\partial h}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h}{\partial \sigma^2} = -\mu \frac{\partial \varphi(h)}{\partial \sigma}, \quad (3.2)$$

где $h(\sigma, \omega) \equiv u(\rho\sigma, \rho^2\omega/\varepsilon)$, с условием $\mu = \frac{\rho}{\varepsilon} \rightarrow 0$. Асимптотическое решение вблизи особой точки ищем в виде ряда

$$\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n h_n(\sigma, \omega), \quad (3.3)$$

для коэффициентов которого из уравнения (3.2) и условия (1.2) получаем рекуррентную цепочку начальных задач

$$\frac{\partial h_0}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial \sigma^2} = 0, \quad h_0(\sigma, 0) = \nu(\sigma), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial \varphi(h_0)}{\partial \sigma}, \quad h_1(\sigma, 0) = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial h_n}{\partial \omega} - \frac{\partial^2 h_n}{\partial \sigma^2} = -\frac{\partial E_n}{\partial \sigma}, \quad h_n(\sigma, 0) = 0, \quad (3.6)$$

где

$$E_n = \sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(h_0)}{q!} \sum_{n_1+\dots+n_q=n-1} \prod_{p=1}^q h_{n_p}, \quad n \geq 2. \quad (3.7)$$

Ряд (3.3) строится однозначно — все коэффициенты $h_n(\sigma, \omega)$ как решения системы задач (3.4)–(3.6) определяются единственным образом. Для нахождения области, в которой ряд (3.3) имеет смысл, и для построения асимптотик в других областях необходимо знать поведение функций $h_n(\sigma, \omega)$ на бесконечности. Как показано в работе [19], функция

$$h_0(\sigma, \omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} \nu(s) \exp\left[-\frac{(\sigma-s)^2}{4\omega}\right] ds, \quad (3.8)$$

т. е. решение задачи (3.4) с условием (1.4) при $|\sigma| + \omega \rightarrow \infty$ имеет асимптотику

$$h_0(\sigma, \omega) = R_{0,0,0}(z) + \sum_{m=1}^N \omega^{-m/2} [R_{0,m,0}(z) + \ln \omega R_{0,m,1}(z)] + O((\sigma^2 + \omega)^{-\gamma N}), \quad (3.9)$$

где

$$R_{0,0,0}(z) = \frac{\nu_0^-}{\sqrt{\pi}} \int_z^{+\infty} e^{-y^2} dy + \frac{\nu_0^+}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-y^2} dy, \quad z = \frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}},$$

$R_{0,m,0}$ и $R_{0,m,1}$ — гладкие функции, для которых имеют место оценки $R_{0,m,l}(z) = O(z^m e^{-z^2})$ при $|z| > 1$, $\gamma > 0$. Отметим, что согласно [16, теорема 1] для решения задачи (1.1), (1.2) равномерно в полосе $\{(x, t): x \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq T\}$, $T = \text{const} > 0$, справедлива формула

$$u(x, t, \varepsilon, \rho) = h_0\left(\frac{x}{\rho}, \frac{\varepsilon t}{\rho^2}\right) - R_{0,0,0}\left(\frac{x}{2\sqrt{\varepsilon t}}\right) + \Gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\mu^{1/2} \ln \mu)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, $\mu = \rho/\varepsilon \rightarrow 0$, где Γ — решение задачи Коши $\Gamma_\theta + [\varphi(\Gamma)]_\eta - \Gamma_{\eta\eta} = 0$,

$$\Gamma(\eta, 0) = \begin{cases} \nu_0^-, & \eta < 0, \\ \nu_0^+, & \eta \geq 0, \end{cases} \quad \text{во внутренних переменных } \eta = x/\varepsilon, \theta = t/\varepsilon.$$

Асимптотика решений задач (3.5) и (3.6), которые можно выразить в виде свертки

$$h_n(\sigma, \omega) = - \int_0^\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega-v)}} \exp\left[-\frac{(\sigma-s)^2}{4(\omega-v)}\right] \frac{\partial E_n}{\partial s} ds dv, \quad (3.10)$$

при $|\sigma| + \omega \rightarrow \infty$ находится тем же методом, что был использован в работе [19].

Теорема 2. Для решений задач (3.4)–(3.6), определяемых рекуррентно по формулам (3.8) и (3.10), при всех $n \geq 0$ справедливо асимптотическое представление (остающееся справедливым при дифференцировании по σ)

$$h_n(\sigma, \omega) = \omega^{n/2} \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-m/2} \sum_{l=0}^m (\ln \omega)^l R_{n,m,l}\left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}}\right) + O((\sigma^2 + \omega)^{-\gamma_n N}) \quad (3.11)$$

при $|\sigma| + \omega \rightarrow \infty$, где $N \geq 1$, $R_{n,m,l}$ — гладкие функции автомобильной переменной, $\gamma_n > 0$.

Доказательство. При $n = 0$ справедливость разложения (3.11) вытекает из формулы (3.9). Проводя далее доказательство по индукции, предположим, что разложение (3.11) справедливо для всех $h_l(\sigma, \omega)$ при $l < n$. Полосу интегрирования $S_\omega = \{s \in \mathbb{R}, 0 \leq v \leq \omega\}$ в формуле (3.10) разобьем на два множества $D_0 = \{0 \leq s^2 + v \leq (\sigma^2 + \omega)^p, 0 < p < 1\}$ и $D_1 = S_\omega \setminus D_0$; и по отдельности исследуем интегралы

$$h_n^{(0)}(\sigma, \omega) = - \iint_{D_0} \frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega - v)}} \exp \left[-\frac{(\sigma - s)^2}{4(\omega - v)} \right] \frac{\partial E_n}{\partial s} ds dv,$$

$$h_n^{(1)}(\sigma, \omega) = - \iint_{D_1} \frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega - v)}} \exp \left[-\frac{(\sigma - s)^2}{4(\omega - v)} \right] \frac{\partial E_n}{\partial s} ds dv.$$

После замены $v = \omega\beta$, $s = 2y\sqrt{\omega\beta}$ получаем

$$h_n^{(0)}(\sigma, \omega) = - \iint_{D'_0} \frac{\sqrt{\omega\beta}}{\sqrt{\pi(1 - \beta)}} \exp \left[-\frac{(z - y\sqrt{\beta})^2}{1 - \beta} \right] \frac{\partial E_n}{\partial y} dy d\beta, \quad (3.12)$$

где $D'_0 = \{0 \leq \beta(1 + 4y^2) \leq (\sigma^2 + \omega)^p/\omega\}$. Для независимых переменных рассмотрим отдельно множества $T_\alpha = \{(\omega, \sigma) : \omega \geq |\sigma|^\alpha\}$ и $X_\alpha = \{(\omega, \sigma) : \omega < |\sigma|^\alpha\}$, где $1 + p < \alpha < 2$. Пусть сначала $(\sigma, \omega) \in X_\alpha$, тогда при $(s, v) \in D_0$ и $(y, \beta) \in D'_0$ справедливы соотношения

$$\frac{s^2}{\omega - v} = \frac{4y^2\beta}{1 - \beta} = O((\sigma^2 + \omega)^{p-\alpha/2}) \rightarrow 0, \quad \left| \frac{\sigma s}{\omega - v} \right| = \left| \frac{4yz\sqrt{\beta}}{1 - \beta} \right| = O((\sigma^2 + \omega)^{(1+p-\alpha)/2}) \rightarrow 0,$$

$$\frac{\sigma^2}{\omega - v} \geq \frac{\sigma^2}{\omega} > |\sigma|^{2-\alpha}.$$

Отсюда вытекает оценка

$$\exp \left[-\frac{(\sigma - s)^2}{4(\omega - v)} \right] = O \left(\exp \left[-\frac{|\sigma|^{2-\alpha}}{4} \right] \right). \quad (3.13)$$

Кроме того, из предположения индукции, выражения (3.7) и оценки $v = O(\sigma^{2p})$, справедливой в области D_0 , следует, что

$$\frac{\partial E_n}{\partial s} = O(\sigma^{(n-2)p}). \quad (3.14)$$

Используя оценки (3.13) и (3.14), из формулы (3.12) получаем

$$|h_n^{(0)}(\sigma, \omega)| \leq K_n |\sigma|^{(n-2)p} \exp \left[-\frac{|\sigma|^{2-\alpha}}{4} \right] \iint_{D'_0} \frac{\sqrt{\omega\beta}}{\sqrt{1 - \beta}} dy d\beta \leq K'_n |\sigma|^{c_n} \exp \left[-\frac{|\sigma|^{2-\alpha}}{4} \right],$$

где c_n , K_n и K'_n — некоторые константы. Теперь пусть $(\sigma, \omega) \in T_\alpha$. В этом случае удобно сделать замену

$$y = \frac{s}{2\sqrt{v}}, \quad \chi = \frac{s^2 + v}{4\omega}, \quad ds dv = \frac{16\omega^{3/2}\sqrt{\chi}}{(1 + 4y^2)^{3/2}} dy d\chi.$$

Тогда

$$h_n^{(0)}(\sigma, \omega) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/2} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 4y^2 - 4\chi}} \exp \left[-\frac{(z\sqrt{1 + 4y^2} - 2y\sqrt{\chi})^2}{1 + 4y^2 - 4\chi} \right] \\ \times \left[\frac{2}{\sqrt{1 + 4y^2}} \frac{\partial E_n}{\partial y} + \frac{16y\chi}{(1 + 4y^2)^{3/2}} \frac{\partial E_n}{\partial \chi} \right] dy d\chi,$$

где $\varkappa_0 = \frac{(\sigma^2 + \omega)^p}{4\omega} = O((\sigma^2 + \omega)^{p-\alpha/2}) \rightarrow 0$. С помощью этого представления приходим к разложению

$$h_n^{(0)}(\sigma, \omega) = \sum_{|l|+r \neq 0} \varkappa_0^l (\ln \varkappa_0)^r c_{n,l}(z, \omega), \quad (\sigma, \omega) \in T_\alpha,$$

в котором точный вид коэффициентов $c_{n,l}(z, \omega)$ не имеет значения, что видно из дальнейшего.

Теперь исследуем функцию $h_n^{(1)}(\sigma, \omega)$. Поскольку $\iint_{D_1} \dots ds dv = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{4\varkappa_0/(1+4y^2)}^1 \dots d\beta$, используя предположение индукции и выражение (3.7) для E_n в правой части уравнения (3.6), получаем

$$\begin{aligned} E_n(s, v) &= v^{(n-1)/2} \sum_{m=0}^{N-1} v^{-m/2} \sum_{l=0}^m (\ln v)^l Q_{n,m,l}(y) + O((s^2 + v)^{-\gamma'_n N}), \\ h_n^{(1)}(\sigma, \omega) &= \omega^{n/2} \sum_{m=0}^{N-1} \omega^{-m/2} \sum_{l=0}^m (\ln \omega)^l \\ &\times \iint_{D'_1} \frac{\beta^{(n-m-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \sum_{r=0}^{m-l} (\ln \beta)^r \exp \left[-\frac{(z - y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \tilde{Q}_{n,m,l,r}(y) dy d\beta + O((\sigma^2 + \omega)^{-\gamma_n N}), \end{aligned}$$

где $Q_{n,m,l}$ и $\tilde{Q}_{n,m,l,r}$ — гладкие функции медленного роста, $D'_1 = \{y \in \mathbb{R}, 4\varkappa_0/(1+4y^2) \leq \beta \leq 1\}$, $\gamma'_n > 0$, $\gamma_n > 0$. При этом оценка интеграла $\iint_{D_1} \frac{1}{2\sqrt{\pi(\omega-v)}} \exp \left[-\frac{(\sigma-s)^2}{4(\omega-v)} \right] (s^2+v)^{-\gamma'_n N} ds dv$ получается из неравенства $s^2 + v \geq (\sigma^2 + \omega)^p$, справедливого в силу определения области D_1 . Для выделения особенности при $\beta \rightarrow 0$ в интеграле

$$\iint_{D'_1} \frac{\beta^{(n-m-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \sum_{r=0}^{m-l} (\ln \beta)^r \exp \left[-\frac{(z - y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \tilde{Q}_{n,m,l,r}(y) dy d\beta$$

при $m > n$ рассмотрим функцию

$$\Psi_{n,m,r}(y, \beta, z) = (\ln \beta)^r \beta^{(n-m-1)/2} \left\{ \exp \left[-\frac{(z - y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] - \exp(-z^2) \sum_{k=0}^{m-n} \beta^{k/2} P_{2k}(y, z) \right\};$$

в фигурных скобках из экспоненты вычитается ее частичная сумма ряда Тейлора при $\beta^{1/2} \rightarrow 0$, $P_{2k}(y, z)$ — полиномы по y и z степени $2k$. Тогда

$$\begin{aligned} &\iint_{D'_1} \frac{(\ln \beta)^r}{\sqrt{1-\beta}} \beta^{(n-m-1)/2} \exp \left[-\frac{(z - y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \tilde{Q}_{n,m,l,r}(y) dy d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int_0^1 \frac{\Psi_{n,m,r}(y, \beta, z)}{\sqrt{1-\beta}} d\beta dy - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int_0^{\frac{4\varkappa_0/(1+4y^2)}{1-\beta}} \frac{\Psi_{n,m,r}(y, \beta, z)}{\sqrt{1-\beta}} d\beta dy \\ &\quad + \exp(-z^2) \sum_{k=0}^{m-n} \int_{-\infty}^{\infty} P_{2k}(y, z) \tilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int_{\frac{4\varkappa_0/(1+4y^2)}{1-\beta}}^1 (\ln \beta)^r \beta^{(n-m-1+k)/2} d\beta dy. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы является функцией только от z ; второе и третье экспоненциально малы при $(\sigma, \omega) \in X_\alpha$, а при $(\sigma, \omega) \in T_\alpha$ представляют собой суммы по ненулевым степеням \varkappa_0 и $\ln \varkappa_0$, которые по лемме А. Р. Данилина [20, с. 2169] (см. также [21, гл. 7, § 30]) асимптотически сокращаются при сложении с $h_n^{(0)}(\sigma, \omega)$, поскольку можно

рассмотреть малую величину $\varkappa_1 = (\sigma^2 + \omega)^{-1/2}$ и представить суммы с \varkappa_0 в виде выражений, содержащих \varkappa_1 и $\ln \varkappa_1$ в степенях произвольного ненулевого параметра. Таким образом, приходим к разложению (3.11), в котором (при $m > n$)

$$R_{n,m,l}(z) = \sum_{r=0}^{m-l} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int_0^1 \frac{\Psi_{n,m,r}(y, \beta, z)}{\sqrt{1-\beta}} d\beta dy.$$

При $0 \leq m \leq n$ в процедуре регуляризации нет необходимости. В этом случае

$$R_{n,m,l}(z) = \sum_{r=0}^{m-l} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}_{n,m,l,r}(y) \int_0^1 \frac{(\ln \beta)^r \beta^{(n-m-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \exp \left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] d\beta dy;$$

в частности, при $m = l = 0$ получаем формулы

$$\begin{aligned} R_{1,0,0}(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \frac{d\varphi(R_{0,0,0}(y))}{dy} dy d\beta, \\ R_{n,0,0}(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\beta^{(n-1)/2}}{\sqrt{1-\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(z-y\sqrt{\beta})^2}{1-\beta} \right] \\ &\times \frac{d}{dy} \left[\sum_{q=1}^{n-1} \frac{\varphi^{(q)}(R_{0,0,0}(y))}{q!} \sum_{i_1+\dots+i_q=n-1} \prod_{\alpha=1}^q R_{i_\alpha,0,0}(y) \right] dy d\beta, \end{aligned}$$

определяющие асимптотику функций h_n в главном $h_n(\sigma, \omega) \sim \omega^{n/2} R_{n,0,0} \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{\omega}} \right)$. Теорема доказана.

4. Резюме

В настоящей работе выявлена структура формальных асимптотических решений задачи (1.1), (1.2) с двумя независимыми малыми параметрами ε и ρ . Резюмируем главные результаты. В областях Ω_0^\pm слева и справа от линии разрыва решения предельной задачи формальное асимптотическое решение строится в виде рядов по степеням ε и ρ с гладкими коэффициентами, зависящими от x и t :

$$\mathcal{U}^\pm(x, t, \varepsilon, \rho) = \nu_0^\pm + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{m-1} \rho^{m-n} \varepsilon^n u_{m,n}^\pm(x, t).$$

Коэффициенты рядов $\mathcal{U}^+(x, t, \varepsilon, \rho)$ и $\mathcal{U}^-(x, t, \varepsilon, \rho)$ определяются как решения начальных задач (2.5) и находятся методом характеристик, а $\nu_0^\pm = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \nu(x)$. Структура функций $u_{m,n}^\pm(x, t)$, установленная в теореме 1, определяется по существу левой частью уравнения (1.1), т.е. дифференциальным оператором первого порядка. В силу построения функций $u_{m,n}^\pm(x, t)$ ряды $\mathcal{U}^+(x, t, \varepsilon, \rho)$ и $\mathcal{U}^-(x, t, \varepsilon, \rho)$ также асимптотически удовлетворяют уравнению (1.1) в областях Ω_0^+ и Ω_0^- , соответственно. В области $\Omega_1 = \{(x, t) : t > 0, x^2 + \varepsilon t < \rho^{\delta_1} \varepsilon^{2-\delta_1}, 0 < \delta_1 < 2\}$ преобладающими являются линейные по u члены уравнения (1.1). Здесь формальное асимптотическое решение строится в виде ряда

$$\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n h_n(\sigma, \omega), \quad \text{где } \mu = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{x}{\rho}, \quad \omega = \frac{\varepsilon t}{\rho^2}.$$

Коэффициенты $h_n(\sigma, \omega)$ определяются как решения начальных задач (3.4)–(3.6) по формулам (3.8) и (3.10). В силу системы уравнений (3.4)–(3.6), которым удовлетворяют функции $h_n(\sigma, \omega)$, ряд $\mathcal{H}(\sigma, \omega, \mu) = \mathcal{H}(x/\rho, \varepsilon t/\rho^2, \rho/\varepsilon)$ асимптотически удовлетворяет уравнению (1.1) и сохраняет асимптотический характер в области Ω_1 . Теорема 2 утверждает, что разложение коэффициентов $h_n(\sigma, \omega)$ при $|\sigma| + \omega \rightarrow \infty$ имеет вид (3.11) в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\{(\sigma^2 + \omega)^{-\gamma_n N}\}_{N=1}^{\infty}$, где $\gamma_n > 0$. За время порядка $\varepsilon \mu^{\delta_1}$ в асимптотике происходит перестройка масштаба внутренней пространственной переменной от ρ к ε .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: Фазис, 1996. 334 с.
2. **Сулейманов Б.И.** О решении уравнения Кортевега — де Вриза, возникающего вблизи точки опрокидывания в задачах с малой дисперсией // Письма в журн. эксперимент. и теорет. физики. 1993. Т. 58, № 11. С. 906–910.
3. **Dubrovин В., Elaeva М.** On the critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity // Russ. J. Math. Phys. 2012. Vol. 19, iss. 4. P. 449–460. doi: 10.1134/S106192081204005X.
4. **Гарифуллин Р.Н., Сулейманов Б.И.** От слабых разрывов к бездиссипативным ударным волнам // Журн. эксперимент. и теорет. физики. 2010. Т. 137, вып. 1. С. 149–164.
5. **Теодорович Э.В.** Метод ренормализационной группы в задачах механики // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 2. С. 335–367.
6. On critical behaviour in systems of Hamiltonian partial differential equations / В. Dubrovин, Т. Grava, С. Klein, А. Moro // J. Nonlinear. Sci. 2015. Vol. 25, iss. 3. P. 631–707. doi: 10.1007/s00332-015-9236-y.
7. **Захаров С.В.** Сингулярные асимптотики в задаче Коши для параболического уравнения с малым параметром // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 97–104.
8. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
9. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 624 с.
10. **Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И.** Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.: Наука, 1990. 216 с.
11. **Кудашев В.Р., Сулейманов Б.И.** Влияние малой диссипации на процессы зарождения одномерных ударных волн // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 456–466.
12. **Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
13. **Ильин А.М.** Об асимптотике решений одной задачи с малым параметром // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1989. Т. 53, вып. 2. С. 258–275.
14. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с двумя малыми параметрами // Докл. Акад. Наук. 2008. Т. 422, № 6. С. 733–734.
15. **Zakharov S.V.** Two-parameter asymptotics in the Cauchy problem for a quasi-linear parabolic equation // Asympt. Analysis. 2009. Vol. 63, no. 1–2. P. 49–54. doi: 10.3233/ASY-2008-0927.
16. **Захаров С.В.** Задача Коши для квазилинейного параболического уравнения с большим начальным градиентом и малой вязкостью // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50, № 4. С. 699–706.
17. **Годунов С.К.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
18. **Олейник О.А.** Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 3(75). С. 3–73.
19. **Захаров С.В.** О распределении тепла в бесконечном стержне // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 3. С. 379–385.
20. **Данилин А.Р.** Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
21. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

Захаров Сергей Викторович

Поступила 12.12.2016

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: svz@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Arnold V.I. *Singularities of caustics and wave fronts*. Dordrecht: Kluwer, 1990, Math. and Its Appl. Ser., vol. 62, 259 p. ISBN: 0-7923-1038-1. Translated under the title *Osobennosti kaustik i volnovykh frontov*, Moscow, Fzis Publ., 1996, 334 p.
2. Suleimanov B.I. Solution of the Korteweg–de Vries equation which arises near the breaking point in problems with a slight dispersion. *JETP Letters*, 1993, vol. 5, no. 11, pp. 849–849.
3. Dubrovin B., Elaeva M. On the critical behavior in nonlinear evolutionary PDEs with small viscosity. *Russ. J. Math. Phys.*, 2012, vol. 19, iss. 4, pp. 449–460. doi: 10.1134/S106192081204005X.
4. Garifullin R.N., Suleimanov B.I. From weak discontinuities to nondissipative shock waves. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2010, vol. 110, iss. 1, pp. 133–146. doi:10.1134/S1063776110010164.
5. Teodorovich E.V. Renormalization group method in the problems of mechanics. *J. Appl. Math. Mech.*, 2004, vol. 68, no. 2, pp. 299–326.
6. Dubrovin B., Grava T., Klein C., Moro A. On critical behaviour in systems of Hamiltonian partial differential equations. *J. Nonlinear. Sci.*, 2015, vol. 25, iss. 3, pp. 631–707. doi: 10.1007/s00332-015-9236-y.
7. Zakharov S.V. Singular asymptotics in the Cauchy problem for a parabolic equation with a small parameter. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no. 1, pp. 97–104 (in Russian).
8. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence, AMS, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach*, Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.
9. Whitham G.B. *Linear and nonlinear waves*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1974, 636 p. ISBN: 0-471-94090-9. Original Russian text published *Lineinye i nelineinye volny*, Moscow, Mir Publ., 1977, 624 p.
10. Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. *Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles*. Manchester, Manchester University Press, 1991, 308 p. ISBN: 0-7190-3275-X. Original Russian text published *Nelineinye sluchainye volny v sredakh bez dispersii*, Moscow, Nauka Publ., 1990, 216 p.
11. Kudashev V.R., Suleimanov B.I. The effect of small dissipation on the onset of one-dimensional shock waves. *J. Appl. Math. Mech.*, 2001, vol. 65, no. 3, pp. 441–451. doi: 10.1016/S0021-8928(01)00050-8.
12. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Providence: AMS, 1968, 648 p. ISBN: 0821815733. Original Russian text published *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa*. Moscow, Nauka Publ., 1967, 736 p.
13. Il'in A.M. On the asymptotics of the solution of a problem with a small parameter. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1990, vol. 34, no. 2, pp. 261–279. doi: 10.1070/IM1990v034n02ABEH000629.
14. Zakharov S.V. The Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with two small parameters. *Dokl. Math.*, 2008, vol. 78, no. 2, pp. 769–770.
15. Zakharov S.V. Two-parameter asymptotics in the Cauchy problem for a quasi-linear parabolic equation. *Asympt. Analysis.*, 2009, vol. 63, no. 1–2, pp. 49–54. doi: 10.3233/ASY-2008-0927.
16. Zakharov S.V. Cauchy problem for a quasilinear parabolic equation with a large initial gradient and low viscosity. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 4, pp. 665–672. doi: 10.1134/S0965542510040081.
17. Godunov S.K. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 416 p.
18. Oleinik O.A. Discontinuous solutions of non-linear differential equations. *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2*, 1963, vol. 26, pp. 95–172.
19. Zakharov S.V. Heat distribution in an infinite rod. *Math. Notes* 2006, vol. 80, no. 3, pp. 366–371. doi:10.1007/s11006-006-0148-x.
20. Danilin A.R. Asymptotic behavior of the optimal cost functional for a rapidly stabilizing indirect control in the singular case. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2006, vol. 46, no. 12, pp. 2068–2079. doi: 10.1134/S0965542506120062.
21. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p.

The paper was received by the Editorial Office on December 12, 2016.

Sergei Viktorovich Zakharov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: svz@imm.uran.ru.

УДК 517.928

УРАВНЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ-II КАК МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ¹

Л. А. Калякин

Рассматривается система дифференциальных уравнений, которая описывает взаимодействие двух слабо связанных нелинейных осцилляторов. Начальные данные таковы, что при отсутствии связи один из осцилляторов находится вдали от равновесия, а другой вблизи равновесия; при этом собственные частоты близки. Исследуется эффект захвата в резонанс, когда частоты связанных осцилляторов остаются близкими, а амплитуды колебаний значительно меняются со временем, в частности, второй осциллятор уходит далеко от равновесия. Выяснено, что начальный этап захвата в резонанс описывается решением уравнения Пенлеве-II. Такое описание получено в асимптотическом приближении по малому параметру, который соответствует коэффициенту связи.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, малый параметр, асимптотика, осцилляция, резонанс.

L. A. Kalyakin. Painleve II equation as a model of a resonant interaction of oscillators.

We consider a system of differential equations that describes the interaction of two weakly connected nonlinear oscillators. The initial data are such that, if the connection is absent, the first oscillator is far from equilibrium and the second oscillator is near equilibrium; the eigenfrequencies of the oscillators are close to each other. The capture into resonance is investigated, when the frequencies of the connected oscillators remain close and the amplitudes of their oscillations undergo significant time variations; in particular, the second oscillator moves far from the equilibrium. We find that the initial stage of the resonance capture is described by a solution of the second Painleve equation. The description is obtained under an asymptotic approximation with respect to a small parameter corresponding to the connection factor.

Keywords: nonlinear equation, small parameter, asymptotics, oscillation, resonance.

MSC: 34E10, 34E13

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-104-116

1. Введение. Постановка задачи

Исходный объект – система двух слабо связанных нелинейных осцилляторов. Предполагается, что при отсутствии связи один осциллятор колеблется вдали от равновесия, второй находится вблизи устойчивого равновесия, и их частоты близки (резонансное условие). Исследуется явление захвата в резонанс, когда при наличии связи частоты осцилляторов остаются близкими в течение продолжительного времени. Результатом захвата оказывается значительное изменение энергии колебаний; в частности, второй осциллятор уходит далеко от равновесия. Резонансные эффекты такого типа обнаруживаются уже в простейшей модели с линейными связями. Исследование проводится на примере системы, задаваемой уравнениями Ньютона:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - 2x^3 = \varepsilon[f_0\xi + f_1\dot{\xi}], \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} + \omega^2\xi - w\xi^3 = \varepsilon[g_0x + g_1\dot{x}], \quad t > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (1.1)$$

Здесь $\omega, w, f_0, f_1, g_0, g_1 = \text{const}$. Правые части рассматриваются как возмущения с параметром ε , малость которого соответствует слабой связи. Конкретная структура уравнений в форме (1.1) не принципиальна; результаты можно перенести на общие системы осцилляторов с нелинейными возмущениями.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01004).

Напомним, что в подобных задачах для гамильтоновых систем возмущенные траектории (при $\varepsilon > 0$) большей частью находятся на торах, близких к невозмущенным. КАМ теория дает их описание в терминах условно-периодических функций на бесконечном временном промежутке [1; 2]. Для рассматриваемого примера такая ситуация возникает при отсутствии первых производных ($f_1 = g_1 = 0$), когда можно выписать возмущенный гамильтониан

$$H = \frac{1}{2g_0}\dot{x} + \frac{1}{2f_0}\dot{\xi} + \frac{g_0}{2}(x^2 - x^4) + \frac{f_0}{2}\left(\xi^2 - \frac{w\xi^4}{2}\right) - \varepsilon f_0 g_0 x \xi.$$

Под действием возмущения торы деформируются; величина деформации зависит от наличия резонансов. В частности, для обсуждаемой задачи деформация амплитуды колебаний вблизи равновесия может достигать порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$. Такие эффекты со значительным (по сравнению с ε) изменением амплитуды или энергии связываются с понятием нелинейного резонанса².

В теории нелинейных колебаний резонансные эффекты принято выявлять не из рядов КАМ теории, а путем асимптотического анализа решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ с использованием идеи многомасштабных разложений. Асимптотическая конструкция в главном члене обычно соответствует усреднению по быстрым переменным [3; 4]. Одно из преимуществ такого подхода заключается в том, что для начальных данных нет ограничений, которые возникают в КАМ теории. Правда, при этом не гарантируется свойство условной периодичности решения. Более того, возникают ограничения на длину временного промежутка, на котором можно обосновать асимптотику. Он оказывается конечным, хотя и большим при малом возмущении, например, порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{-2/3})$ в рассматриваемой задаче. Но главное преимущество метода усреднения — не нужна гамильтоновость возмущенной системы; в частности, в правые части (1.1) можно включить производные. Резонансные эффекты от негамильтоновых возмущений могут оказаться более сильными. Так, в примере (1.1) при $f_0 g_1 + g_0 f_1 < 0$ осциллятор, стартующий вблизи равновесия, выходит на колебания с медленным ростом энергии, которая достигает величины порядка единицы за время $t = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$. Под энергией здесь понимается функция двух переменных, определяющая первый интеграл невозмущенного уравнения. Такие решения обнаруживаются в численных экспериментах (см. рисунок слева). В них наряду с деформацией амплитуды наблюдается значительное изменение частот колебаний, при том что резонансное соотношение между частотами сохраняется. Ситуация напоминает известное явление авторезонанса (автофазировки), когда нелинейный осциллятор автоматически подстраивается под медленно меняющуюся внешнюю накачку, долго оставаясь в резонансе и значительно меняя свою энергию [5; 6].

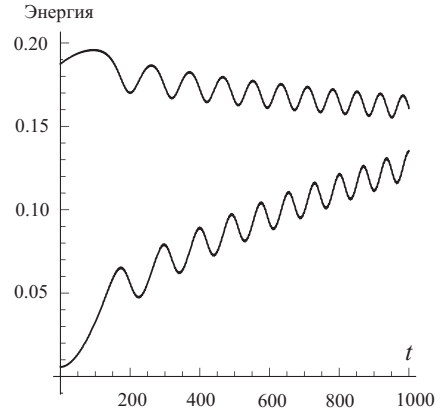
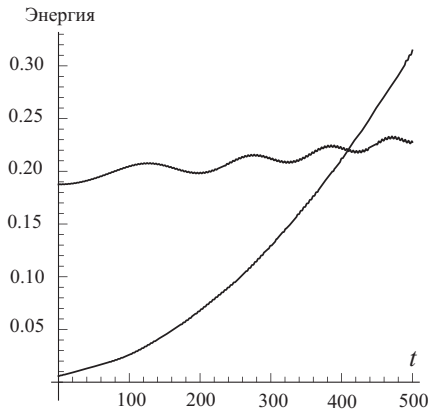
В данной работе для автономной системы (1.1) методом усреднения анализируется начальный этап захвата в резонанс. Главный результат состоит в появлении второго уравнения Пенлеве (называемого далее РII), которое описывает медленную эволюцию усредненной системы. Известная для этого уравнения асимптотика общего решения на бесконечности [7] позволяет сформулировать условия захвата в терминах коэффициентов возмущения f_k, g_k .

Если ориентироваться на строгую постановку задачи с обоснованием асимптотики, то дифференциальные уравнения следует дополнить начальными условиями в виде

$$x(0) = x_0 + \varepsilon^{2/3}x_1, \quad \dot{x}(0) = y_0 + \varepsilon^{2/3}y_1, \quad \xi(0) = \varepsilon^{1/3}\xi_1, \quad \dot{\xi}(0) = \varepsilon^{1/3}\eta_1. \quad (1.2)$$

В предельной форме (при $\varepsilon = 0$) они фиксируют невозмущенное решение. Начальная точка для первого осциллятора (x_0, y_0) предполагается отличной от равновесия; она определяет частоту невозмущенных колебаний Ω_0 . Дополнительные слагаемые определяют допустимые возмущения начальных данных. Значения x_1, y_1, ξ_1, η_1 берутся из произвольного компакта, не зависящего от ε . Предлагаемые ниже конструкции описывают асимптотику по малому параметру ε равномерно для пучка траекторий, стартующих из малой окрестности невозмущенной точки $(x_0, y_0, 0, 0)$. От компакта зависит оценка остатка асимптотики в теоремах обоснования.

²Вдали от равновесия характерный масштаб нелинейного резонанса несколько иной: $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$, (см. [8–12]).



Изменение энергии двух слабо связанных осцилляторов в резонансе при $\varepsilon = 10^{-2}$. Слева $f_1 g_0 + g_1 f_0 < 0$; справа $f_1 g_0 + g_1 f_0 > 0$, ($\omega, f_k, g_k \approx 1$, $w = 0.1$).

Забегая вперед, укажем, что в рассматриваемой задаче не возникает проблемы по нахождению области захвата — точек, из которых стартуют резонансные траектории. В отличие от известных результатов по авторезонансу здесь захват в резонанс если случается, то для почти всех x_1, y_1, ξ_1, η_1 из фиксированного компакта.

2. Переменные типа энергия-угол

Для асимптотического анализа задачи удобно использовать фазовое пространство с переменными типа энергия-угол и амплитуда-угол. Соответствующая математическая модель записывается в виде системы четырех уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \varepsilon F(E, r, \phi, \psi), & \frac{d\phi}{dt} &= \Omega(E) + \varepsilon \Phi(E, r, \phi, \psi), \\ \frac{dr}{dt} &= R(r, \psi) + \varepsilon g(E, \phi, \psi), & r \left[\frac{d\psi}{dt} - \omega \right] &= W(r, \psi) + \varepsilon \Psi(E, \phi, \psi). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Переход от (1.1) к системе (2.1) можно выполнять разными способами. Для первого осциллятора выгодно использовать общее решение невозмущенного уравнения, параметризованное значением первого интеграла (энергией): $\dot{x}^2 + x^2 - x^4 = E$. Вычислив значения E в неподвижных точках и проанализировав фазовый портрет, можно заключить, что фазовые траектории замкнуты при $0 < E < 1/4$ и поэтому соответствуют периодическим решениям $x = \hat{x}(t, E)$. Период зависит от E и определяется по формуле

$$T(E) = 4 \int_0^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - x^2 + x^4}},$$

где $x_+(E)$ — наименьший положительный корень уравнения $x^4 - x^2 + E = 0$. Соответственно определяется частота $\Omega(E) = 2\pi/T(E)$. Это семейство периодических решений $\hat{x}(t, E)$ можно идентифицировать начальными условиями

$$\dot{x}(0) = 0, \quad x(0) = \sqrt{E}, \quad 0 < E < 1/4.$$

Из фазового портрета видно, что определенная таким образом функция $\hat{x}(t, E)$ будет четной по t , а производная $\partial_t \hat{x}(t, E)$ нечетной. Для второго осциллятора удобно использовать решение уравнения, линейризованного вблизи равновесия: $\hat{\xi}(t, r) = r \cos(\omega t) \forall r = \text{const} > 0$.

Введенные таким образом функции приводятся к периоду 2π по угловым переменным ϕ, ψ :

$$X(\phi, E) \stackrel{def}{=} \hat{x}(\phi/\Omega(E), E), \quad r \cos \psi = \hat{\xi}(\psi/\omega, r).$$

Эти функции используются для замены переменных в исходных возмущенных уравнениях (1.1) по формулам

$$x(t) = X(\phi(t), E(t)), \quad \xi(t) = r(t) \cos(\psi(t)).$$

Фактически такая операция представляет собой применение метода вариации произвольных постоянных. Структура получаемых уравнений (2.1) зависит от выбора формул для замены производных. Например, при выборе

$$\dot{x}(t) = Y(\phi, E)^{def} = \partial_t \hat{x}(t, E)|_{t=\phi/\Omega} \equiv \Omega(E) \partial_\phi X(\phi, E), \quad \dot{\xi}(t) = -\omega r(t) \sin(\psi(t))$$

получаются уравнения (2.1) с функциями

$$\begin{aligned} F &= rY(\phi, E)[f_0 \cos \psi - f_1 \omega \sin \psi], & g &= -\sin \psi \frac{1}{\omega} [g_0 X(\phi, E) + g_1 Y(\phi, E)], \\ R &= -\frac{1}{\omega} \omega r^3 \cos^3 \psi \sin \psi, & W &= -\frac{1}{\omega} \omega r^3 \cos^4 \psi; \\ \Phi &= \Omega(E) \partial_E X(\phi, E)[f_0 r \cos \psi - f_1 \omega r \sin \psi], & \Psi &= -\cos \psi \frac{1}{\omega} [g_0 X(\phi, E) + g_1 Y(\phi, E)]. \end{aligned}$$

Уравнения дополняются начальными данными, соответствующими (1.2):

$$\begin{aligned} E|_{t=0} &= E_0 + \varepsilon^{2/3} E_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{4/3}), & r|_{t=0} &= \varepsilon^{1/3} r_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ \phi|_{t=0} &= \phi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), & \psi|_{t=0} &= \psi_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3}). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Задача состоит в построении асимптотики решения при $\varepsilon \rightarrow 0$ на большом промежутке времени.

З а м е ч а н и е. Переменные амплитуда-угол r, ψ соответствуют полярным координатам на фазовой плоскости. В таких переменных уравнение для фазы ψ вырождается при $r = 0$. Поэтому для корректности возмущенной задачи уравнения следует дополнить условием скачка для фазы ψ при прохождении через значение $r = 0$. Скачок берется равным π из соображений гладкости траектории при прохождении через начало координат:

$$\text{если } \lim_{t \rightarrow t^*-0} r(t) = 0, \quad \text{то } \lim_{t \rightarrow t^*+0} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow t^*-0} \psi(t) + \pi.$$

Если в начальной точке $r(0) = 0$, то начальное условие для ψ не ставится. Впрочем, в асимптотических конструкциях мы интересуемся значениями $r(t) \neq 0$, поэтому условие скачка не используется. При численных экспериментах удобно пользоваться соответствующими уравнениями в декартовых координатах, где никакого вырождения не бывает.

3. Подходы к решению задачи

Специфика задачи определяется ограничениями на исходные данные. Основным ограничением является *условие резонанса* — совпадение частот невозмущенных колебаний $\Omega(E_0) = \omega$. Подобные задачи о возмущении нелинейных осциллирующих систем давно и обстоятельно исследованы в одночастотном случае (с одной быстрой переменной), см. например, [12]. Особенностью рассматриваемой задачи является наличие двух быстрых угловых переменных ϕ, ψ . В общей ситуации здесь неизбежно появление малых знаменателей и связанных с этим проблем. Однако свойство начального совпадения частот $\Omega(E_0) = \omega$ приводит к эффекту захвата в резонанс, когда резонансное соотношение сохраняется длительное время, хотя каждая из частот меняется значительно. В таком случае можно выделить одну быструю переменную, и дело сводится к одночастотной ситуации.

Для одночастотной системы с быстро осциллирующим (неавтономным) возмущением эффект захвата в резонанс хорошо изучен (см. обзор [6]). Известные результаты основаны на

исследовании модельных уравнений, которые возникают при усреднении. Захват в резонанс описывается решениями с неограниченно растущей амплитудой. При этом существенным оказывается свойство неавтономности усредненных уравнений, обязанное медленной деформации либо параметров невозмущенной системы, либо параметров возмущения, например, деформации заданной частоты возмущения. Во многих ситуациях усредненная система оказывается неинтегрируемой, что препятствует полному исследованию проблемы захвата в резонанс.

В рассматриваемой здесь задаче возмущения берутся автономными. Однако каждый из осцилляторов, находясь под воздействием другого, фактически оказывается под неавтономным возмущением. Асимптотические конструкции приводят к специфической системе модельных уравнений, которая редуцируется к уравнению РП. Известные результаты об асимптотике общего решения этого уравнения [7; 13] обеспечивают исчерпывающее исследование проблемы захвата в резонанс. Отметим, что для системы осцилляторов вдали от равновесия возникает более простое интегрируемое автономное уравнение типа маятника; подобная задача исследована в [14; 15].

4. Асимптотические конструкции

4.1. Анзатц

Для углов вводится разность $s = \psi - \phi$, и исходные уравнения (2.1) переписываются для четверки функций E, r, s, ϕ : Получается система, похожая на ту, что анализировалась в [14; 15]:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \varepsilon F(E, r, \phi, \phi + s), & \frac{dr}{dt} &= R(r, \phi + s) + \varepsilon g(E, \phi, \phi + s), \\ r \left[\frac{ds}{dt} + \Omega(E) - \omega \right] &= W(r, \phi + s) + \varepsilon [\Psi(E, \phi, \phi + s) - r\Phi(E, r, \phi, \phi + s)], \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega(E) + \varepsilon \Phi(E, r, \phi, \phi + s). \end{aligned}$$

Специфика рассматриваемой здесь задачи связана с наличием равновесия для одного из невозмущенных осцилляторов $r = 0$. Это проявляется в структуре третьего уравнения. При приведении к нормальной форме оно имеет особенность при $r \rightarrow 0$, поскольку функция $\Psi \not\equiv 0$ и не зависит от r . Такое вырождение приводит к значительным отличиям от результатов [14; 15].

Анзатц для асимптотического решения³ берется в виде рядов по степеням малого параметра

$$\begin{aligned} E &= E_0 + \varepsilon^{2/3} \mathcal{E}(\tau) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \mathcal{E}_k(\tau, \phi), \\ r &= \varepsilon^{1/3} \rho(\tau) + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \rho_k(\tau, \phi), & s &= \sigma(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \sigma_k(\tau, \phi), \\ \phi &= \omega t + \varphi(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/3} \varphi_k(\tau, \phi). & \tau &= \varepsilon^{2/3} t \end{aligned} \quad (4.1)$$

с коэффициентами, периодическими по быстрой переменной ϕ . Масштабы амплитуды $r(t) \approx \varepsilon^{1/3}$ и медленного времени $\tau = \varepsilon^{2/3} t$ соответствуют известным результатам о начальном этапе захвата в резонанс вблизи равновесия [6]. Отметим, что степени ε , кратные $1/3$, обязаны кубическому резонансу в нелинейном осцилляторе вблизи равновесия [6], а не начальным условиям. Более того, анзатц (4.1) позволяет уточнить допустимые в таком подходе возмущения начальных данных. Попросту говоря, начальные условия в форме (2.2) берутся из согласования с анзатцем (4.1).

³Термин “асимптотическое решение” используется, чтобы избежать дискуссии по обоснованию асимптотики. Впрочем, вопрос обоснования можно считать решенным, например, в [16, с. 138].

Проблема состоит в выявлении условий, при которых поправка в энергии $|\mathcal{E}(\tau)|$ и главный член асимптотики амплитуды $\rho(\tau)$ неограниченно растут при $\tau \rightarrow \infty$. Неограниченно растущие по τ асимптотики соответствуют начальному росту резонансных решений, дальнейшую эволюцию которых следует анализировать в более медленном масштабе εt . Далекая эволюция резонансных решений выходит за рамки данной работы; подобная задача в одночастотном случае решена в [17].

4.2. Усредненные уравнения

Формальные построения полной асимптотики в виде бесконечных рядов можно выполнять разными способами. Отличия разных подходов обнаруживаются лишь в старших поправках. Они соответствуют возможности переразложения асимптотических рядов за счет зависимости от параметра ε в быстрой фазе ϕ . Впрочем, конструкция старших поправок не содержит новизны и здесь не обсуждается. Принципиальный вопрос о захвате в резонанс решается на уровне главного члена асимптотики.

Главные члены асимптотики определяются из усредненных уравнений, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} &= \rho [F_c \cos \sigma + F_s \sin \sigma], \\ \frac{d\rho}{d\tau} &= G_s \sin \sigma + G_c \cos \sigma, \quad \rho \left[\frac{d\sigma}{d\tau} + \Lambda \mathcal{E} - \lambda \rho^2 \right] = G_s \cos \sigma - G_c \sin \sigma, \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \Lambda \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

с соответствующими начальными данными

$$\mathcal{E}|_{\tau=0} = E_1, \quad \rho|_{\tau=0} = r_1, \quad \sigma|_{\tau=0} = s_0, \quad \varphi|_{t=0} = \phi_0.$$

Коэффициенты определяются через интегралы Фурье и вычисляются по формулам

$$F_c = -f_1 \omega Y_s, \quad F_s = -f_0 Y_s, \quad G_c = -\frac{g_1}{\omega} Y_s, \quad G_s = \frac{g_0}{\omega \Omega(E_0)} Y_s,$$

где

$$Y_s = \langle Y(\phi, E_0) \sin \phi \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y(\phi, E_0) \sin \phi d\phi.$$

Константы Λ , λ характеризуют нелинейные поправки к собственным частотам исходных невозмущенных осцилляторов. Они определяются из структуры невозмущенных уравнений:

$$\Lambda = \Omega'(E_0), \quad \lambda = -\frac{1}{\omega} w \langle \cos^4 \phi \rangle = -\frac{1}{\omega} 3w/8.$$

Как видим, первые три уравнения в (4.2) образуют замкнутую систему. Локальная разрешимость задачи Коши не вызывает сомнения. При исследовании нелинейных колебаний на этом этапе зачастую и останавливаются, предъявляя асимптотическое разложение (4.1) на конечном промежутке медленного времени $\tau \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 = \text{const} < \infty$. Однако в задаче о захвате в резонанс интерес представляет поведение при $\tau \rightarrow \infty$ медленно меняющихся коэффициентов в рядах (4.1). Точнее, требуется найти условия, при которых неограниченно растут коэффициенты, соответствующие энергии и амплитуде в главных членах асимптотики.

5. Анализ главных членов асимптотики

5.1. Редукция к уравнению Пенлеве

Система уравнений (4.2) имеет первый интеграл. Он легко обнаруживается, если использовать декартовы координаты вместо полярных ρ, σ . Наиболее простой вид уравнения приобретают при использовании нормирующего множителя $|G| = \sqrt{G_c^2 + G_s^2}$. Заметим, что в случае

$|G| = 0$ имеется тривиальный интеграл $\rho = \text{const}$, и система сводится к уравнению математического маятника. Этот случай не представляет интереса ввиду постоянства амплитуды ρ .

В общем случае при $|G| \neq 0$ делается замена переменных

$$z = \Lambda \mathcal{E} - \lambda \rho^2, \quad u = \rho(G_s \sin \sigma + G_c \cos \sigma)|G|^{-2}, \quad v = \rho(G_s \cos \sigma - G_c \sin \sigma)|G|^{-2}.$$

Если учесть вытекающие отсюда соотношения $\rho \sin \sigma = G_s u - G_c v$, $\rho \cos \sigma = G_c u + G_s v$, то система уравнений для функций u, v, z приобретает вид

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - vz, \quad \frac{dv}{d\tau} = uz, \quad \frac{dz}{d\tau} = \mu u + \nu v \quad (5.1)$$

с константами $\mu = \Lambda(F_s G_s + F_c G_c) - 2\lambda|G|^2$, $\nu = \Lambda(F_c G_s - F_s G_c)$.

В таких переменных первый интеграл определяется выражением

$$J = \frac{1}{2}z^2 + (\nu u - \mu v) - \nu \tau. \quad (5.2)$$

С использованием этого интеграла система трех уравнений из (4.2) сводится к уравнению второго порядка. Наиболее просто это получается дифференцированием первого уравнения, которое с учетом остальных уравнений приобретает вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = \mu \frac{du}{d\tau} + \nu \frac{dv}{d\tau} = \mu(1 + vz) + \nu uz = \mu + z(\nu u - \mu v).$$

Если здесь использовать выражение для первого интеграла, то приходим к уравнению

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = z(J + \nu \tau - \frac{1}{2}z^2) + \mu, \quad (5.3)$$

которое представляет общую форму уравнения РИ с параметрами $J, \mu, \nu = \text{const}$.

Отметим, что система, похожая на (5.1), возникала ранее при описании электрического поля в полупроводнике [18]; в этой же работе указан переход к уравнению РИ.

Легко понять, что сдвигом по τ уравнение (5.3) приводится к стандартной форме с двумя параметрами⁴. Знак коэффициента ν играет решающую роль в структуре асимптотики общего решения при $\tau \rightarrow \infty$. Эта константа вычисляется по формуле

$$\nu = \Lambda(F_c G_s - F_s G_c) = -\Omega'(E_0) \frac{1}{\omega} [f_1 g_0 + g_1 f_0] Y_s^2.$$

Интеграл $Y_s = \langle Y(\phi, E) \sin \phi \rangle \neq 0$ не обращается в нуль ввиду нечетности функции $Y(\phi, E_0)$. Для первого осциллятора, рассматриваемого вдали от равновесия, частота убывает с ростом энергии, так что $\Omega'(E) < 0$. Поэтому знак константы ν определяется знаком комбинации из коэффициентов возмущения: $\text{sgn}(\nu) = \text{sgn}(f_1 g_0 + g_1 f_0)$.

5.2. Системы без захвата в резонанс

В частном случае, когда $\nu = 0$, уравнение РИ оказывается автономным и интегрируется.

Теорема 1. *Если коэффициенты возмущения обладают свойством $f_1 g_0 + g_1 f_0 = 0$, то для системы (4.2) любое решение ограничено в компонентах энергии и амплитуды, а фаза растет:*

$$\mathcal{E}(\tau), \rho(\tau) = \mathcal{O}(1), \quad \sigma(\tau) = \varpi \tau + \mathcal{O}(1), \quad \tau \rightarrow \infty, \quad \varpi = \text{const}.$$

Захват в резонанс отсутствует.

⁴Если $\nu \neq 0$, то масштабным преобразованием дело сводится к уравнению с $\nu = \pm 1$.

Доказательство. При $\nu = 0$ уравнение (5.3) имеет первый интеграл

$$I = \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{8} z^4 - \frac{1}{2} J z^2 - \mu z.$$

Отсюда следует, что фазовая траектория z, \dot{z} на любом решении $z(\tau)$ будет ограничена. Кроме того, первый интеграл (5.2) при $\nu = 0$ приобретает вид $J = 1/2 z^2 - \mu v$. Отсюда вытекает ограниченность компоненты $v(\tau)$. Из первого уравнения системы (5.1) следует ограниченность компоненты $u(\tau)$. Поскольку $\rho^2 = (u^2 + v^2)|G|^2$, то на любом решении ограничена компонента $\rho(\tau)$. Наконец, из выражения $z = \Lambda \mathcal{E} - \lambda \rho^2$ следует ограниченность $\mathcal{E}(\tau)$.

Фазовый портрет уравнения (5.3) в автономном случае состоит из замкнутых траекторий, за исключением двух сепаратрис. Поэтому общее двухпараметрическое решение $z(\tau)$ будет периодической функцией. Из уравнений (5.1) и интеграла (5.2) следует, что при $\mu \neq 0$ тот же период имеют функции $u(\tau) = \mu^{-1} \dot{z}$, $v(\tau) = \mu^{-1} [z^2/2 - J]$. В таком случае периодическими будут $\rho^2(\tau) = (u^2 + v^2)|G|^2$ и сложные функции $\cos \sigma(\tau)$, $\sin \sigma(\tau)$. После этого из последнего уравнения системы (4.2) следует периодичность производной $\dot{\sigma}(\tau)$, которая определяет разность частот двух осцилляторов. Среднее значение этой функции не обязано быть нулем, поэтому первообразная $\sigma(\tau)$, определяющая разность фаз, может отличаться от периодической функции слагаемым $\varpi \tau$. Коэффициент ϖ будет кратным частоте рассматриваемого решения $z(\tau)$ ввиду известного периода сложных функций $\cos \sigma(\tau)$, $\sin \sigma(\tau)$. Теорема доказана.

5.3. Системы с захватом в резонанс

Иная ситуация возникает в ситуации общего положения, когда $f_1 g_0 + g_1 f_0 \neq 0$. Первый интеграл и уравнение РИ оказываются неавтономными из-за $\nu \neq 0$, и соответствующие решения не будут периодическими. Их асимптотика зависит от знака коэффициента ν .

Теорема 2. Пусть коэффициенты возмущения обладают свойством $f_1 g_0 + g_1 f_0 < 0$. Тогда для системы уравнений (1.1) существует четырехпараметрическое семейство асимптотических решений (4.1), у которых неограниченно растут энергия и амплитуда, а фаза стабилизируется:

$$\mathcal{E}(\tau) = \frac{\lambda}{\Lambda} \frac{\nu^2}{(\nu^2 + \mu^2)} |G|^2 \tau^2 + \mathcal{O}(\tau^{3/4}), \quad \rho(\tau) = \frac{-\nu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}} |G| \tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}),$$

$$\sigma(\tau) = \text{const} + \mathcal{O}(\tau^{-3/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Главные члены растущей асимптотики не зависят от выбора решения.

Доказательство. В данном случае $\nu < 0$. Асимптотика двухпараметрического решения уравнения РИ в главном описывается функциями Эйри [7] (см. также [13, с. 377]):

$$z(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \dot{z}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Два параметра общего решения содержатся в остатках асимптотики и здесь не выделяются. Отсюда получаем два асимптотических соотношения

$$\mu u + \nu v = \dot{z} = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \nu u - \mu v = \nu \tau + J - \frac{1}{2} z^2 = \nu \tau + \mathcal{O}(1).$$

Из них вытекают асимптотики для двух компонент решения

$$u(\tau) = \frac{\nu^2}{\nu^2 + \mu^2} \tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad v(\tau) = -\frac{\mu \nu}{\nu^2 + \mu^2} \tau + \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\rho^2 = (u^2 + v^2)|G|^2 = \frac{\nu^2}{\nu^2 + \mu^2}|G|^2\tau^2 + \mathcal{O}(\tau^{3/4}).$$

Отсюда с учетом $z = \Lambda\mathcal{E} - \lambda\rho^2$ следуют требуемые соотношения для $\mathcal{E}(\tau)$ и $\rho(\tau)$. Два параметра общего решения уравнения РИ, а также значение первого интеграла J содержатся в остатках асимптотики и не влияют на коэффициент при главном члене. Четвертый параметр определяет сдвиг фазы при интегрировании отдельного уравнения для быстрой фазы φ .

С учетом полученных асимптотик для $z(\tau), \rho(\tau)$ из последнего уравнения системы (4.2) следует убывание производной $\dot{\sigma}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{-1/4})$, $\tau \rightarrow \infty$. Это означает, что частоты двух осцилляторов со временем сближаются, а величина $\sigma(\tau)$, определяющая сдвиг фаз, стабилизируется⁵

$$\sigma(\tau) = \text{const} + \mathcal{O}(\tau^{-3/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Указанная здесь оценка остатка не следует из формального интегрирования приведенной выше грубой асимптотики для производной. При получении этой оценки надо учитывать быстроосциллирующие множители. Это можно делать либо путем построения полной асимптотики на бесконечности для решений системы (4.2) аналогично [19], либо путем оценок быстроосциллирующих интегралов, используя известную асимптотику РИ [7]. Теорема доказана.

5.4. Медленный захват в резонанс

В случае $\nu > 0$ складывается ситуация, необычная для рассматриваемого круга задач.

Теорема 3. Пусть коэффициенты возмущения обладают свойством $f_1g_0 + g_1f_0 > 0$. Тогда для системы уравнений (1.1) существует четырехпараметрическое семейство асимптотических решений (4.1), у которых неограниченно растут энергия, амплитуда и фаза:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\tau) &= c^2\tau^{1/2}\mathcal{E}_0[1 + o(1)], & \rho(\tau) &= c\tau^{1/4}\rho_0[1 + o(1)], \\ \sigma(\tau) &= -\frac{3}{2}\sqrt{2\nu}\tau^{3/2}[1 + \mathcal{O}(\tau^{-3/4})], & \tau &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Главные члены этой асимптотики зависят от выбора решения посредством константы $c > 0$ — (произвольного) амплитудного параметра решения РИ; коэффициенты определяются формулами

$$\rho_0 = |G|\sqrt{\frac{2\nu}{\mu^2 + \nu^2}}, \quad \mathcal{E}_0 = \frac{1}{\Lambda}(\lambda\rho_0^2 + \sqrt{2\nu}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теперь асимптотика общего решения уравнения Пенлеве в главном описывается формулами [7]

$$z(\tau) = \sqrt{2\nu\tau} + \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \dot{z}(\tau) = \mathcal{O}(\tau^{1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty,$$

которые вытекают из анзатца Бутру. Аналогично предыдущему доказательству из этих соотношений можно извлечь оценки

$$\mathcal{E}(\tau), \rho^2 = \mathcal{O}(\tau^{1/2}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Чтобы вычислить коэффициенты при главных членах асимптотики, надо учесть структуру первой поправки в анзатце Бутру [7] (см. также [13, с. 378]). В этой поправке удобно выделить амплитуду в виде произвольной константы $c > 0$ — параметра решения РИ:

$$z(\tau) = \sqrt{2\nu\tau}^{1/2} + \tau^{-1/4}c \cdot \cos(\eta)[1 + o(1)] + o(\tau^{-1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

⁵В этом случае уместно говорить о “захвате в резонанс”.

Обратим внимание на структуру поправки, которая содержит осциллирующую функцию с быстрой фазой

$$\eta = \frac{2}{3}\sqrt{2\nu}\tau^{3/2} + \alpha(c)\log(\nu^{1/3}\tau) + \theta.$$

Здесь $c, \theta = \text{const}$ — параметры решения РИ (константы интегрирования), множитель $\alpha(c)$ в сдвиге фазы зависит от параметра решения c и вычисляется по известной формуле [13].

Из этой асимптотики вытекают соотношения

$$\dot{z} = -\tau^{1/4}c\sqrt{2\nu}\sin\eta + o(1), \quad \frac{1}{2}z^2 - \nu\tau = \tau^{1/4}c\sqrt{2\nu}\cos\eta + o(1).$$

Если их использовать в уравнении $\mu u + \nu v = \dot{z}$ и в первом интеграле $\nu u - \mu v = \nu\tau + J - \frac{1}{2}z^2$, то можно найти асимптотику компонент $u(\tau), v(\tau)$:

$$(\mu^2 + \nu^2)u = -\tau^{1/4}c\sqrt{2\nu}[\mu\sin\eta + \nu\cos\eta][1 + o(1)],$$

$$(\mu^2 + \nu^2)v = -\tau^{1/4}c\sqrt{2\nu}[\nu\sin\eta - \mu\cos\eta][1 + o(1)].$$

Отсюда для $\rho = |G|\sqrt{u^2 + v^2}$ получается требуемая асимптотика, а из соотношения $\Lambda\mathcal{E} - \lambda\rho^2 = z$ выписывается асимптотика для $\mathcal{E}(\tau)$.

Как видим, параметр c из общего решения уравнения РИ определяет коэффициенты главных членов асимптотического решения. Второй параметр θ , а также значение первого интеграла J не влияют на энергию и амплитуду в главном.

С учетом полученных асимптотик для $z(\tau), \rho(\tau)$ из последнего уравнения системы (4.2) получается растущая асимптотика для производной фазы

$$\dot{\sigma}(\tau) = \sqrt{2\nu}\tau^{1/2} + \mathcal{O}(\tau^{-1/4}), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Это означает, что частоты двух осцилляторов со временем расходятся. Соответственно растет функция $\sigma(\tau)$, определяющая сдвиг фаз. Ее асимптотика с грубой оценкой остатка получается интегрированием последнего соотношения. Теорема доказана.

Из-за того, что растут три компоненты решения, полученный результат выглядит неприглядно, и использование термина “захват в резонанс” требует пояснения.

Пояснение о резонансе. В физике под резонансом понимают явление роста амплитуды вынужденных колебаний, иногда этот рост объясняется близостью собственной и вынуждающей частоты. В математике подход более формализован. Под резонансом понимается соизмеримость частот, в частности, их совпадение. Рост амплитуды колебаний объявляется следствием соизмеримости частот. На уровне решений дифференциальных уравнений такое свойство проявляется в росте интегралов Фурье, как это случается в тривиальном примере с произведением периодических функций:

$$2 \int_{\pi}^{\tau} \cos(\omega_1\eta) \cos(\omega_2\eta) d\eta = \tau + \mathcal{O}(1), \quad \tau \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad \omega_1 = \omega_2.$$

Растущее слагаемое здесь обязано ненулевому среднему значению. При отсутствии резонанса, когда $\omega_1 \neq \omega_2$, среднее значение равно нулю, и интеграл ограничен при $\tau \rightarrow \infty$.

Для рассмотренной системы (2.1) при $\nu > 0$ результаты свидетельствуют о расхождении частот $\dot{\psi} - \dot{\phi} = \dot{\sigma} = \mathcal{O}(\sqrt{\tau})$, $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, резонанс между осцилляторами формально отсутствует, и термин “захват в резонанс” выглядит неуместным. Более того, в этом случае можно привести правдоподобные рассуждения о невозможности роста амплитуды $\rho(\tau)$. Для этой функции как решения дифференциального уравнения из (4.2) выписывается представление через интеграл от правой части:

$$\rho(\tau) = \rho(0) + \int_0^{\tau} [G_s \sin \sigma(\eta) + G_c \cos \sigma(\eta)] d\eta.$$

Под интегралом фигурируют тригонометрические функции от быстро растущей фазы $\sigma(\tau)$. Обычно такие интегралы ограничены, например, при $\sigma(\eta) = \eta^\delta$, $\delta = \text{const} \geq 1$. В рассматриваемом случае главный член асимптотики фазы $\sigma(\eta)$ имеет как раз такую структуру с $\delta = 3/2$. Поэтому создается впечатление, что амплитуда $\rho(\tau)$, вычисляемая через быстро осциллирующий интеграл, должна быть ограничена при $\tau \rightarrow \infty$, что противоречит теореме 3.

Однако никакого противоречия не возникает, если учесть убывающие поправки в асимптотике фазы. Явление резонанса здесь выглядит более тонким, чем это принято считать в формальном подходе. В качестве иллюстрации можно привести похожий интеграл

$$J(\tau) = \int_{\pi}^{\tau} \cos \left(\eta^{3/2} - \eta^{-3/4} \sin \eta^{3/2} \right) d\eta.$$

Если при вычислении асимптотики выкинуть из фазы часть, убывающую на бесконечности, то получается интеграл, ограниченный при $\tau \rightarrow \infty$. Но такой результат оказывается неверным. Правильная асимптотика вычисляется с использованием разложения Тейлора для подынтегральной функции при $\eta^{-3/4} \rightarrow 0$:

$$\cos \left(\eta^{3/2} + \eta^{-3/4} \sin \eta^{3/2} \right) = \cos \eta^{3/2} + \eta^{-3/4} \sin^2 \eta^{3/2} + \mathcal{O}(\eta^{-3/2}), \quad \eta \rightarrow \infty.$$

В этом разложении с быстро осциллирующими коэффициентами присутствует слагаемое

$$\eta^{-3/4} \sin^2 \eta^{3/2} = \frac{1}{2} \eta^{-3/4} - \frac{1}{2} \eta^{-3/4} \cos 2\eta^{3/2},$$

из-за которого в интеграле обнаруживается рост

$$J(\tau) = 2\tau^{1/4} + \mathcal{O}(1), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Таким образом, утверждение теоремы 3 никак не противоречит свойствам быстро осциллирующих интегралов. Оно лишь указывает, что резонанс не следует отождествлять с соизмеримостью или совпадением частот. Более подходящим является понятие резонанса в физике, и в этом смысле теорема 3 описывает захват в резонанс, которому соответствует рисунок справа (см. разд. 1).

6. Заключение

В данной работе для системы возмущенных осцилляторов исследован эффект захвата в резонанс в случае, когда в невозмущенной задаче один из осцилляторов находится в равновесии. Выяснено, что в асимптотическом описании процесса захвата главную роль играет уравнение РII, которое получается при усреднении. Для этого уравнения используется известный факт о единообразии (в главном) асимптотики на бесконечности общего решения. Такое свойство вместе с формулами связи [13] позволяет заключить, что захват в резонанс случается почти при всех начальных возмущениях (1.2). Именно в этом месте обнаруживается принципиальное отличие от задачи о захвате в резонанс вдали от равновесия. Напомним, что вдали от равновесия усредненная система сводится к уравнению типа маятника, у которого существуют решения разного типа, и область захвата в резонанс ограничена сепаратрисной петлей [14; 15]. Новым также является результат теоремы 3 о резонансе с медленным расхождением частот.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, вып. 6 (114). С. 91–192.
2. Трещев Д.В. Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем. М.: ФАЗИС, 1998. 181 с.

3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
4. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
5. Fajans J., Friedland L. Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators // *Am. J. Phys.* 2001. Vol. 69, no. 10. P.1096–1102.
6. Калякин Л.А. Асимптотический анализ моделей авторезонанса // *Успехи мат. наук.* 2008. Т. 63, № 5. С. 3–72.
7. Капаев А. А. Асимптотические формулы для функций Пенлеве второго рода // *Теорет. и мат. физика.* 1988. Т. 77, № 3. С. 323–332.
8. Джакаля Г.Е. Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
9. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988. 368 с.
10. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. 560 с.
11. Чириков Б.В. Прохождение нелинейной колебательной системы через резонанс // *Докл. АН СССР.* 1959. Т. 125, № 5. С. 1015–1018.
12. Нейштадт А.И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // *Прикл. математика и механика.* 1984. Т. 48, вып. 2. С. 197–204.
13. Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана / А.Р. Итс, А.А. Капаев, В.Ю. Новокшенов, А.С. Фокас. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2005. 727 с.
14. Нейштадт А.И. Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах // *Тр. МИАН.* 2005. Т. 250. С. 198–218.
15. Нейштадт А.И. Усреднение, прохождение через резонансы и захват в резонанс в двухчастотных системах // *Успехи мат. наук.* 2014. Т. 69, № 5. С. 3–80.
16. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
17. Калякин Л.А. Усреднение в модели авторезонанса // *Мат. заметки.* 2003. Т. 73, вып. 3. С. 449–452.
18. Kudryashov N.A. The second Painleve equation as a model for the electric field in a semiconductor // *Physics Letters A.* 1997. Vol. 233. P. 397–400.
19. Калякин Л.А. Метод усреднения в задачах об асимптотике на бесконечности // *Уфим. мат. журн.* 2009. Т. 1, № 2. С. 29–52.

Калякин Леонид Анатольевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

главный науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа

e-mail: klenru@mail.ru

Поступила 3.04.2017

REFERENCES

1. Arnol'd V.I. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. *Russ. Math. Surveys*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 85–191. doi: 10.1070/RM1963v018n06ABEH001143.
2. Treshchev D.V. *Vvedenie v teoriyu vozmushchenii gamiltonovykh sistem* [Introduction to the theory of perturbations of Hamiltonian systems]. Moscow, FAZIS Publ., 1998, 181 p. ISBN: 5-7036-0045-6.
3. Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. New York, London: Gordon and Breach, Hindustan Publishing, 1961, 537 p. ISBN: 0677200501. Original Russian text published in *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy*. Moscow, Gos. Izd. Fiziko-Mat. Lit. Publ., 1958, 408 p.
4. Arnol'd V.I., Kozlov V.V., Neishtadt A.I. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*. Berlin: Springer-Verlag, 1993, Ser. Encyclopaedia Math. Sci. 3, 291 p. Original Russian text published in *Matematicheskie aspekty klassicheskoi i nebesnoi mekhaniki*, Moscow, VINITI Publ., 1985, 304 p.
5. Fajans J., Friedland L. Autoresonant (non stationary) excitation of a pendulum, Plutinos, plasmas and other nonlinear oscillators. *Am. J. Phys.*, 2001, vol. 69, no. 10, pp. 1096–1102.

6. Kalyakin L.A. Asymptotic analysis of autoresonance models. *Russ. Math. Surv.*, 2008, vol. 63, no. 5, pp. 791–857. doi: 10.1070/RM2008v063n05ABEH004560.
7. Капаев А.А. Asymptotic expressions for the second Painlevé functions. *Theoret. and Math. Phys.*, 1988, vol. 77, no. 3, pp. 1227–1234. doi:10.1007/BF01016976.
8. Giacaglia G.E.O. *Perturbation methods in non-linear systems*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1972, Ser. Appl. Math. Sci., vol. 8, 369 p. ISBN: 0387900543. Translated under the title *Metody teorii vozmushchenii dlya nelineinykh sistem*, Moscow, Nauka Publ., 1979, 319 p.
9. Zaslavskii G.M., Sagdeev R.Z. *Vvedenie v nelineinuyu fiziku* [Introduction to nonlinear physics]. *Ot mayatnika do turbulentnosti i khaosa*. [From the pendulum to turbulence and chaos]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 368 p. ISBN: 5-02-013822-3.
10. Rabinovich M.I., Trubetskov D.I. *Vvedenie v teoriyu kolebani i voln* [Introduction to the theory of oscillations and waves], Moscow, Nauka Publ., 1984, 432 p.
11. Chirikov B.V. The passage of a nonlinear oscillating system through resonance. *Sov. Phys., Dokl.*, 1959, vol. 4, pp. 390–394.
12. Neishtadt A.I. The separation of motions in systems with rapidly rotating phase. *J. Appl. Math. Mech.*, 1984, vol. 48, no. 2, pp. 133–139. doi: 10.1016/0021-8928(84)90078-9.
13. Fokas A.S., Its, A.R., Капаев А.А., Novokshenov V.Yu. *Painlevé transcendents. The Riemann-Hilbert approach*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2006, Ser. Math. Surveys and Monographs, 128, 560 p. ISBN: 082183651X. Original Russian text published in *Transdenty Penleve. Metod zadachi Rimana*. Moskva-Izhevsk: NITs “Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika” Publ., 2005, 727 p.
14. Neishtadt A.I. Capture into resonance and scattering on resonances in two-frequency systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, vol. 250, pp. 183–203.
15. Neishtadt A.I. Averaging, passage through resonances, and capture into resonance in two-frequency systems. *Russ. Math. Surveys.*, 2014, vol. 69, no. 5, pp. 771–843.
16. Arnol’d V.I. *Dopolnitel’nye glavy teorii obyknovennykh differentsial’nykh uravnenij* [Supplementary chapters to the theory of ordinary differential equations]. Moscow: Nauka Publ., 1978, 304 p.
17. Kalyakin L.A. Averaging in the autoresonance model. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 3, pp. 414–418. doi:10.1023/A:1023226330448.
18. Kudryashov N.A. The second Painleve equation as a model for the electric field in a semiconductor. *Physics Letters A.*, 1997, vol. 233, pp. 397–400.
19. Kalyakin L.A. Averaging method for the problems on asymptotics at infinity. *Ufimskii Mat. Zh.*, 2009, vol. 1, no. 2, pp. 29–52 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on April 3, 2017.

Leonid Anatol’evich Kalyakin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: klenru@mail.ru.

УДК 517.928, 517.937, 517.958

АВТОРЕЗОНАНС В МОДЕЛИ ГЕНЕРАТОРА ТЕРАГЕРЦЕВЫХ ВОЛН¹**О. М. Киселев, В. Ю. Новокшенов**

Изучается модель генератора электромагнитных волн, основанного на системе связанных джозефсоновских контактов. Она представляет собой цепочку связанных уравнений синус-Гордон на фазы электрического поля в контактах под действием диссипации и постоянной накачки. Выясняются условия резонансного возбуждения поля при различных параметрах системы. Оказывается, что в цепочке уравнений синус-Гордон возникает авторезонанс с определенной зависимостью частоты от величины джозефсоновского тока накачки. В работе строится асимптотика решения указанной цепочки при большой резонансной частоте. Асимптотика имеет линейные по времени главные члены для фаз электрического поля, что характерно для авторезонанса в системе связанных осцилляторов. Ключевую роль здесь играет уравнение главного резонанса, которое задает режим резонансного возбуждения цепочки. Это уравнение представляет собой уравнение математического маятника с периодически изменяющейся массой. Подробно исследуется класс решений такого уравнения, выделяются классы сепаратрисных решений, отвечающих нулевой скорости маятника. Доказывается, что существует сепаратрисное решение типа π -кинка, на котором реализуется режим авторезонанса в исходной цепочке уравнений синус-Гордон.

Ключевые слова: терагерцевый диапазон электромагнитных волн, джозефсоновский контакт, уравнение синус-Гордон, решение типа кинка, авторезонанс, уравнение главного резонанса, асимптотические разложения.

O. M. Kiselev, V. Yu. Novokshenov. Autoresonance in a model of a terahertz wave generator.

We study a model of an electromagnetic wave generator based on a system of coupled Josephson junctions. The model is a chain of coupled sine-Gordon equations for the phases of the electric field in the junctions under dissipation and constant pumping. We find conditions for a resonant field excitation under various parameters of the system. It turns out that the chain of sine-Gordon equations evokes an autoresonance with a certain dependence of the frequency on the magnitude of the Josephson pumping current. We construct an asymptotic expansion for a solution of the chain under a large resonant frequency. The leading terms of the expansion for the phases of the electric field are linear in time, which is typical of an autoresonance in a system of coupled oscillators. The key role here is played by the main resonance equation, which defines the mode of the resonant excitation of the chain. This equation is the equation of a mathematical pendulum with periodically changing mass. A class of solutions of this equation is studied in detail, and classes of separatrix solutions corresponding to the zero velocity of the pendulum are described. It is proved that there exists a separatrix π -kink type solution on which the autoresonance mode is realized in the original chain of sine-Gordon equations.

Keywords: terahertz band of electromagnetic waves, Josephson junction, sine-Gordon system, kink solution, autoresonance, main resonance equation, asymptotic expansions.

MSC: 78M35

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-117-132

Введение

Терагерцевый диапазон электромагнитных волн ($\sim 10^{12}$ Гц, длина волны 0.1–1 мм) слабо покрывается современными электронными и оптическими устройствами. В то же время этот диапазон важен для медицинских, контртеррористических, научных и других приложений ввиду высокой проникаемости в диэлектриках при малой мощности излучения. Открытый недавно источник излучения перестраиваемой частоты на основе стопки контактов Джозефсона может стать эффективным для этих приложений [1]. Изученные образцы, состоящие из сотен параллельных сверхпроводящих слоев, демонстрируют синхронизацию частот отдельных джозефсоновских контактов. Более того, мощность излучения растет как квадрат от числа слоев. Предложенная математическая модель данного устройства изучена слабо. Она

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-11-01004.

представляет собой цепочку уравнений синус-Гордон, где каждое уравнение линейно связано с ближайшими соседями, а также имеет члены, отвечающие диссипации и накачке энергии [2]:

$$\ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = (1 - \alpha \Delta_2) \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \sin \varphi_n + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - j_{ext} \right), \quad (0.1)$$

$$\frac{\partial \varphi_n(t, -L)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n(t, L)}{\partial x} = 0, \quad -L < x < L, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (0.2)$$

где φ_n — фаза электрического поля в n -м слое, α — числовой параметр, определяющий взаимодействие электрических полей в соседних слоях, $\omega_{res} = \pi \ell / L$ — резонансная частота излучения, j_{ext} — внешний ток накачки, $\varepsilon \ll 1$ — малая диссипация, Δ_2 — вторая разность, $\Delta_2 \varphi_n \equiv \varphi_{n+1} - 2\varphi_n + \varphi_{n-1}$. Необходимо найти начальные условия, а также значения параметров накачки и диссипации, обеспечивающие синхронизацию волновых мод в большинстве узлов цепочки. Эксперименты показывают, что подобные режимы достаточно редки, в общем положении синхронизация не наступает, что ведет к резкому падению мощности излучения [1; 3]. Традиционные механизмы синхронизации [4] посредством среднего поля, захвата фазы хаотических колебаний или образования кластеров с водителем ритма, по-видимому, неприменимы к данной системе. В силу специфики уравнений возможно образование устойчивых мод типа кинков или бризеров в каждом узле и их согласование по фазе. Контролем этого согласования здесь является вольт-амперная характеристика, или зависимость j_{ext} от частоты излучения. Эта зависимость носит типично резонансный характер, т. е. наблюдается частота, на которой затраты тока для генерации излучения максимальны. Обычно автофазировка — захват в резонанс — возникает для узкого и нетривиально устроенного множества фаз нелинейных волн. Объяснение резонансной зависимости параметров системы с автофазировкой составляет предмет настоящей работы.

В нелинейной цепочке (0.1), (0.2) имеются большие и малые параметры, которыми следует воспользоваться для построения теории возмущений. Оказывается, что при больших частотах ω_{res} цепочка асимптотически “расцепляется” и существует режим линейного по времени роста φ_n . Мы исследуем этот режим захвата в резонанс, выводя зависимость тока j_{ext} от частоты ω . Необходимым условием резонанса служит зависимость поля φ_n от пространственных переменных n и x . Показано, что в главном члене асимптотики необходимо выполнение “уравнения главного резонанса”. Здесь оно представляет собой уравнение математического маятника с периодически изменяющейся массой. В разд. 1 мы выводим асимптотику цепочки (0.1), (0.2) и устанавливаем существование решений уравнения главного резонанса. Затем изучаем его сепаратрисные решения и выделяем те из них, которые отвечают условиям авторезонанса.

В разд. 2 мы исследуем другую систему уравнений типа синус-Гордон, демонстрирующую эффект авторезонанса. Она представляет собой континуальный предел в системе (0.1), когда поле φ_n усредняется по слоям, т. е. берутся сумма и разность между соседними слоями (см. [5; 6]):

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi_{2m+1} + \varphi_{2m}), \quad \varphi_- = \frac{1}{2}(\varphi_{2m+1} - \varphi_{2m}),$$

В результате возникает система из двух уравнений типа синус-Гордон с малым трением и связанными правыми частями:

$$\frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} = -\sin \varphi_+ \cos \varphi_- + j_{ext}, \quad (0.3)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} = -\sin \varphi_- \cos \varphi_+,$$

Оказывается, что эта модель содержит все эффекты, присущие реалистической модели (0.1), (0.2). В ней мы также изучаем уравнение главного резонанса и устанавливаем класс его приближенных решений.

Используя свойства скалярной модели, рассмотренной в (0.3), мы обосновываем резонансную асимптотику для решений краевой задачи (0.1), (0.2) в разд. 3. Ключевую роль здесь играют структуры решений уравнения главного резонанса, в которых переход между положениями равновесия происходит в малой области. Тем самым выявляются аналитические свойства решений типа кинков, обнаруженных численно в работах [2; 6; 7].

1. Анализ дискретной модели

1.1. Асимптотика резонансного решения

В дискретной цепочке (0.1)

$$\ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} = (1 - \alpha \Delta_2) \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} + \sin \varphi_n + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} - j_{ext} \right)$$

будем предполагать дисперсию малой: $\varepsilon \ll 1$, а частоту $\omega \gg 1$ большой и близкой к резонансу $\omega = O(\pi \ell / L)$. Следуя [2], будем искать авторезонансное решение в виде

$$\varphi_n(x, t) = \omega t + A \cos \frac{\pi x \ell}{L} \sin(\omega t + \phi) + (-1)^n u(x) + \sum_{m=2}^{\infty} A_m \cos \frac{\pi x \ell m}{L} \sin(\omega t + \phi_m) + O(\omega^{-2}). \quad (1.1)$$

Здесь первые два слагаемых удовлетворяют невозмущенному волновому уравнению и граничным условиям (0.1) $\partial_x \varphi_n|_{x=0, L} = 0$, а величины A , ϕ и $u(x)$ будут определены ниже из учета нелинейности. Подставляя анзац (1.1) в цепочку уравнений (0.1), воспользуемся производящим соотношением для функций Бесселя [8]: $\exp \left[\frac{z(s - s^{-1})}{2} \right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z) s^k$. Оно позволяет при $s = e^{i(\omega t + \phi)}$ выразить экспоненту от высокочастотных гармоник (1.1) в виде ряда по тем же гармоникам:

$$\exp [i(\omega t + (-1)^n u(x) + z \sin(\omega t + \phi))] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(z) \exp [i((k+1)\omega t + k\phi + (-1)^n u(x))].$$

Заметим также, что разностный оператор Лапласа $\Delta_2 s(n) = s(n+1) - 2s(n) + s(n-1)$ действует на анзац (1.1) следующим образом:

$$\Delta_2 f(x, t) = 0,$$

$$\Delta_2 \sin [f(x, t) + (-1)^n u(x)] = (-1)^n 4 \sin u(x) \cos f(x, t).$$

Тогда, полагая

$$z = A \cos \frac{\pi x \ell}{L}, \quad \psi = \omega t + \phi, \quad \nu = \frac{\pi \ell}{L},$$

получим из цепочки (0.1) уравнения для главных членов асимптотики (1.1):

$$-\frac{\pi^2 \ell^2}{L^2} z \sin \psi = -z \omega^2 \sin \psi + \varepsilon \omega - j_{ext} + z \omega \cos \psi$$

$$+ [-J_{-2}(z) \sin(\psi + \phi) - J_{-1}(z) \sin \phi + J_0(z) \sin(\psi - \phi)] \cos u,$$

$$u'' = [J_{-2}(z) \cos(\psi + \phi) + J_{-1}(z) \cos \phi + J_0(z) \cos(\psi - \phi)] (-4\alpha) \sin u.$$

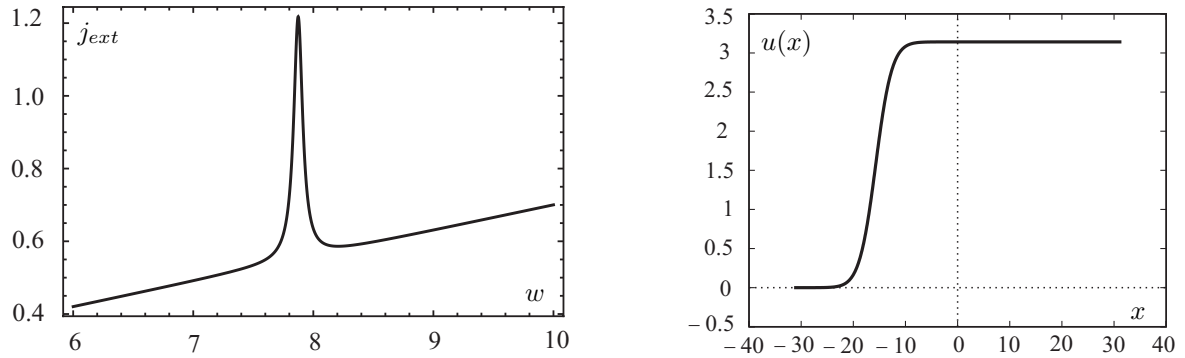


Рис. 1. Зависимость (1.7) джозефсоновского тока от частоты (слева) и решение уравнения (1.2) $u(x)$ из теоремы 1 (справа).

Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых гармониках $\sin \psi$ и $\cos \psi$, получим

$$u'' = -4\alpha J_{-1}(A \cos \nu x) \cos \phi \sin u, \quad (1.2)$$

$$j_{ext} = \varepsilon\omega - \frac{\sin \phi}{2L} \int_{-L}^L J_{-1}(A \cos \nu x) \cos u(x) dx, \quad (1.3)$$

$$\varepsilon\omega A = \frac{\sin \phi}{L} \int_{-L}^L [J_{-2}(A \cos \nu x) + J_0(A \cos \nu x)] \cos \nu x \cos u(x) dx, \quad (1.4)$$

$$A(\omega^2 - \nu^2) = \frac{\cos \phi}{L} \int_{-L}^L [-J_{-2}(A \cos \nu x) + J_0(A \cos \nu x)] \cos \nu x \cos u(x) dx. \quad (1.5)$$

Здесь постоянные в левых частях уравнений (1.3)–(1.5) определены как коэффициенты Фурье при $\cos \nu x$ в разложении правых частей в ряд $\sum s_m \cos m\nu x$. Воспользовавшись рекуррентным соотношением для функций Бесселя $zJ_{n-1}(z) + zJ_{n+1}(z) = 2nJ_n(z)$, легко привести интеграл в правой части (1.4) к интегралу (1.3). Это дает явное выражение для джозефсоновского тока

$$j_{ext} = \varepsilon\omega \left(1 + \frac{A^2}{4}\right). \quad (1.6)$$

При малой амплитуде $A \ll 1$ это выражение можно преобразовать в зависимость тока от частоты ω (см. рис. 1):

$$j_{ext} = \varepsilon\omega \left[1 + \frac{I^2}{(\omega^2 - \pi^2 \ell^2 / L^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2}\right], \quad (1.7)$$

где $I = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x \ell}{L} \cos u(x) dx$. Остальные коэффициенты ряда (1.1) находятся из рекуррентных соотношений следующего вида:

$$\begin{aligned} A_m \varepsilon \omega &= \frac{\sin \phi_m}{L} \int_{-L}^L \left[J_{-2} \left(A \cos \nu x + \sum_k A_k \cos \nu k x \right) \right. \\ &\left. + J_0 \left(A \cos \nu x + \sum_k A_k \cos \nu k x \right) \right] \cos \nu x \cos u(x) dx, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
 A_m (\omega^2 - \nu^2 m^2) &= \frac{\cos \phi m}{L} \int_{-L}^L \left[-J_{-2} \left(A \cos \nu x + \sum_k A_k \cos \nu k x \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_0 \left(A \cos \nu m x + \sum_k A_k \cos \nu k x \right) \right] \cos \nu m x \cos u(x) dx.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Отметим, что правые части (1.8) и (1.9) ограничены по ω и m , поскольку там фигурирует усреднение осциллирующих ограниченных функций. С другой стороны, вблизи резонансной частоты $\omega_{res} = \nu = \pi \ell / L$ множитель при A_m в левой части (1.9) $\omega^2 - \nu^2 m^2 = O(\omega^2)$, так что все амплитуды $A_m = O(\omega^{-2})$ при $m = 2, 3, \dots$.

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Система уравнений (0.1) имеет формальное асимптотическое решение

$$\varphi_n(x, t) = \omega t + A \cos \frac{\pi x \ell}{L} \sin(\omega t + \phi) + (-1)^n u(x) + O(\omega^{-2}), \quad \omega \rightarrow \infty, \tag{1.10}$$

при $\omega - \pi \ell / L = O(1)$, где величины A , ϕ и функция $u(x)$ удовлетворяют соотношениям (1.2)–(1.5).

З а м е ч а н и е. В выражениях для джозефсоновского тока (1.6) и (1.7) стоит множитель ε , имеющий смысл малой диссипации. Отсюда можно сделать вывод, что при нулевой диссипации $\varepsilon = 0$ ток становится равным нулю и джозефсоновское излучение пропадает. Однако в данной модели подобная ситуация невозможна. Здесь величина ε отвечает сопротивлению поперечного тока (flux-flow resistivity) через стопку контактов. В работе [9] изучена величина этого сопротивления в реальных образцах и показано, что она не обращается в нуль при любой сколь угодно малой температуре сверхпроводящих контактов. Этот факт связан со структурой джозефсоновских вихрей в рассматриваемых сверхпроводящих керамиках.

1.2. Уравнение главного резонанса

Для того чтобы главный член асимптотики (1.10) удовлетворял граничным условиям (0.2), достаточно потребовать $u'(-L) = u'(L) = 0$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (1.2) с этими граничными условиями на предмет устойчивости его решений относительно малых возмущений.

Для определенности будем полагать $\alpha \cos \phi > 0$, а также перепишем уравнение (1.2) в новых переменных

$$u(x) = U(z), \quad z = x\nu, \quad \epsilon = \frac{\nu}{2\sqrt{\alpha \cos \phi}},$$

где ϵ будем считать малым, так что $0 < \epsilon \ll 1$ и $\nu L = \pi \ell = O(1)$. Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$\epsilon^2 U'' = -J_{-1}(A \cos z) \sin U, \tag{1.11}$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя со значком $n = -1$.

Уравнение (1.11) — это уравнение математического маятника с медленно меняющейся периодической массой или силой натяжения. Для изучения свойств уравнений с медленно меняющимися параметрами удобно использовать метод двух масштабов [10]. Здесь быстрый масштаб изменений решения определяется исходя из коэффициента второй производной, этот масштаб связан с переменной $\zeta = z/\epsilon$, медленные изменения решения связаны с изменением параметра в уравнении — с переменной z . Для наглядности и формализации рассуждений удобно переписать уравнение (1.11) в терминах двух масштабов:

$$\partial_\zeta^2 U + J_{-1}(A \cos z) \sin U = -2\epsilon \partial_\zeta \partial_z U - \epsilon^2 \partial_z^2 U. \tag{1.12}$$

Локальное поведение решения уравнения (1.12) определяется быстрой переменной и, соответственно решением невозмущенного уравнения (1.12). Невозмущенное уравнение получается формальным переходом к $\epsilon = 0$ [11].

Рассмотрим решения невозмущенного (при $\epsilon = 0$) уравнения (1.12). Если $J_1(A \cos(z)) > 0$, тогда $U = (2n + 1)\pi$ — неустойчивые состояния равновесия типа седло, а $u = 2n\pi$ — центры. При изменении знака $J_1(A \cos(\epsilon z)) < 0$ седла и центры меняются местами.

На интервалах знакоопределенности $J_1(A \cos(z))$ можно классифицировать решения с нулевыми значениями производной на границе $U'(-\pi) = U'(\pi) = 0$. Покажем, что это решения с главным членом — эллиптической функцией с медленно меняющимися параметрами. Кроме того, это решения типа сепаратрис, траектории которых на фазовой плоскости отделяют колебательные решения маятника от вращательных. Такие сепаратрисы начинаются и заканчиваются в окрестностях неустойчивых положений равновесия — седел.

Теорема 2. *В ситуации общего положения асимптотическое решение краевой задачи $U'(-\pi) = U'(\pi) = 0$ для уравнения (1.11) имеет вид модулированной эллиптической функции в окрестностях $z = -\pi$ и $z = \pi$.*

Доказательство. Для решения краевой задачи с условием Неймана $U'(-\pi) = U'(\pi) = 0$ воспользуемся следующим приемом. Построим асимптотику двухпараметрического решения для уравнения (1.11). Затем покажем, что можно подобрать параметры так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Для построения асимптотики осциллирующих решений уравнения (1.11) на интервале знакоопределенности коэффициента $J_{-1}(A \cos z)$ воспользуемся асимптотической подстановкой, использованной Г. А. Кузмаком [12] и в дальнейшем обобщенной во многих работах по нелинейной динамике, например, в [13; 14]:

$$U = U_0(S, z, \epsilon), \quad S = \frac{\Omega(z)}{\epsilon} + \Phi(z, \epsilon).$$

Уравнение (1.11) примет вид

$$\begin{aligned} & (\Omega')^2 \partial_S^2 U + \epsilon (2\Omega'' \partial_S U + 2\Omega' \Phi' \partial_S^2 U + \Omega' \partial_S \partial_z U) \\ & + \epsilon^2 ((\Phi')^2 \partial_S^2 U + 2\Phi'' \partial_S U + \Phi' \partial_S \partial_z U + \partial_z^2 U) + J_{-1}(A \cos(z)) \sin U = 0 \end{aligned} \quad (1.13)$$

с краевыми условиями

$$(\Omega' \partial_S U + \epsilon (\Phi' \partial_S U + \partial_z U)) \Big|_{z=\pm\pi\ell} = 0.$$

Для построения формальной асимптотики интервал независимой переменной z удобно разбить на области знакоопределенности коэффициента $J_{-1}(A \cos(z))$. Пусть в некоторой окрестности $0 < z < \beta$ выполнено условие $J_{-1}(A \cos(z)) > 0$. Будем искать асимптотику в виде

$$u(S, z, \epsilon) = U_0(S, z) + \epsilon U_1(S, z) + O(\epsilon^2). \quad (1.14)$$

Тогда подстановка в уравнение (1.13) дает в главном порядке по ϵ

$$(\Omega')^2 \partial_S^2 U_0 + J_{-1}(A \cos(z)) \sin(U_0) = 0.$$

Здесь z — медленная по отношению к S переменная, так что в главном порядке имеет место аналог полной механической энергии

$$(\Omega')^2 \frac{(\partial_S U_0)^2}{2} - J_{-1}(A \cos(z)) \cos(U_0) = E(z).$$

Траектория в фазовом пространстве лежит на уровне полной энергии E . Величина параметра E определяет тип траектории в фазовом пространстве. При

$$E(z) \in (-J_{-1}(A \cos(z)), J_{-1}(A \cos(z)))$$

движение периодически по быстрой переменной. Определим замкнутую траекторию в фазовом пространстве

$$\mathcal{L} = \left\{ (U_0, \partial_S U_0) \mid (\Omega')^2 \frac{(\partial_S U_0)^2}{2} - J_{-1}(A \cos(z)) \cos(U_0) = E(z) \right\}.$$

Тогда для Ω' получится уравнение

$$\Omega' \int_{\mathcal{L}} \frac{dU_0}{\partial_S U_0} = 2\pi, \quad (1.15)$$

где период движения по траектории \mathcal{L} взят равным 2π .

Общее решение уравнения для U_0 на такой траектории определяется из обращения эллиптического интеграла:

$$S(z) - S_0(z) = \Omega' \int_{U_0(S, -\pi)}^{U_0(S, z)} \frac{d\xi}{\sqrt{2E(z) + 2J_{-1}(A \cos z) \cos \xi}}. \quad (1.16)$$

Решение этого уравнения содержит два параметра: фазовый сдвиг $S_0(z)$ и энергию осциллятора $E(z)$, которые связаны краевым условием $E(-\pi) = -J_{-1}(A \cos(U_0(S, -\pi)))$. Дифференциальное уравнение для E определяется из условия ограниченности U_1 по быстрой переменной S . Приравнявая к нулю в (1.13) члены первого порядка по ϵ , получим условие ограниченности в виде $\int_{\mathcal{L}} (2\Omega'' \partial_S U + 2\Omega' \Phi' \partial_S^2 U + E' \Omega' \partial_S \partial_E U) dU = 0$. В силу замкнутости траектории на плоскости $(U, \partial_S U)$ эта формула упрощается

$$\frac{d}{dz} \int_{\mathcal{L}} (\Omega' \partial_S U) dU = 0,$$

что эквивалентно адиабатичности действия

$$\mathcal{I} = \text{const}, \quad \mathcal{I} = \Omega' \int_{\mathcal{L}} (\partial_S U) dU.$$

Наконец, из условия периодичности по быстрой переменной получается трансцендентное уравнение для функции $E(z)$:

$$2 \int_{-B}^B \sqrt{2E(z) + 2J_{-1}(A \cos(z)) \cos(U)} dU = \mathcal{I},$$

$$B = \arccos \left(\frac{E}{J_{-1}(A \cos(z))} \right). \quad (1.17)$$

С формальной точки зрения обоснование построенного приближения для решения уравнения (1.11) в областях знакоопределенности коэффициента $J_{-1}(A \cos(z_k))$ известно. В частности обоснование подобных асимптотик с помощью перехода к переменным действие-угол и исследования треугольной системы уравнений имеется в работе [15]. Прямой подход к обоснованию таких асимптотических подстановок для неавтономных уравнений второго порядка был предложен в работе [16].

Для завершения доказательства покажем, что решения (1.15)–(1.17) удовлетворяют граничным условиям

$$\partial_S U_0 \Big|_{z=-\pi} = \partial_S U_0 \Big|_{z=\pi} = 0$$

при подходящем выборе констант интегрирования. В силу (1.17) приближение непригодно в окрестности z_k таких, что $J_{-1}(A \cos(z_k)) = 0$. Отрезок интегрирования $(-\pi, \pi)$ разбивается на конечное число отрезков (z_k, z_{k+1}) , на каждом из которых параметры $E(z_k)$ однозначно определяют решение U_0 (1.15), (1.17). При этом решения на соседних отрезках гладко склеены, поскольку в граничной точке первые производные совпадают.

В силу периодичности U_0 на каждом отрезке существуют точки $\bar{z}_k \in (z_k, z_{k+1})$, где $\partial_S U_0|_{z=\bar{z}_k} = 0$. Их координаты зависят от начального условия $U_k^- = U_0|_{z=\bar{z}_k}$ или от значения энергии $E(z_k) = -J_{-1}(A \cos(U_k^-))$. Таким образом, выбирая начальное условие $U_0|_{z=-\pi} = U_-$, $\partial_S U_0|_{z=-\pi} = 0$, можно добиться значения E на последнем отрезке такого, что формулы (1.15)–(1.17) дают нулевое значение производной $\partial_S U_0|_{z=\pi} = 0$. Подробности этого выбора параметров эллиптических функций можно найти в работе [17]. Теорема доказана.

Перейдем теперь к исследованию сепаратрисных решений уравнения (1.11). Быстро осциллирующие решения, как правило, затухают из-за диссипации, которая присутствует в исходной системе (0.1) (члены вида $\epsilon \partial \varphi_n / \partial t$). Препятствием к затуханию служат решения нетривиальной топологии, т. е. соединяющие различные точки равновесия на фазовой плоскости. Таковыми решениями являются сепаратрисные решения уравнения математического маятника. Они соответствуют переходу траектории от одного состояния равновесия к другому на большом интервале по быстрой переменной $x = z/\epsilon$.

Для исследования сепаратрисного решения в уравнении (1.11) нужно перейти к быстрой переменной ζ :

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + J_1(A \cos(\epsilon \zeta)) \sin(U) = 0.$$

Здесь важно заметить, что сепаратрисное решение экспоненциально быстро стремится к неустойчивым состояниям равновесия при $\zeta \rightarrow \pm 0$. Поэтому при построении решения основную роль играет окрестность $\zeta = 0$. Так что коэффициент в уравнении удобно представить в виде отрезка ряда Тейлора

$$J_1(A \cos(\epsilon \zeta)) = J_1(A) + \epsilon^2 \zeta^2 \frac{A J_1'(A)}{2} + O(\zeta^4 \epsilon^4).$$

Для краткости обозначим $k^2 = J_1(A)$, $k_1 = J_1'(A)A/2$, для определенности выберем A так, что $J_1(A) > 0$ и $k > 0$. Тогда уравнение для U можно переписать в виде

$$\frac{d^2 U}{d\zeta^2} + k^2 \sin(U) = -\epsilon^2 \zeta^2 k_1 \sin(U) + O(\zeta^4 \epsilon^4).$$

В главном по ϵ (при $\epsilon = 0$) получается уравнение математического маятника. Типичная сепаратриса уравнения математического маятника с постоянным коэффициентом имеет вид $v = 4 \arctan(e^{k\zeta}) - \pi$. Это решение соответствует переходу из окрестности седла $v = -\pi$ в окрестность седла $v = \pi$ за бесконечно большое время. Рассмотрим уравнение (1.11) при таких значениях A , что $J_1(A) > 0$. Тогда

$$U_0(\zeta) = 4 \arctan(e^{k\zeta}) + \pi \tag{1.18}$$

является главным членом асимптотики решения уравнения (1.11). Действительно, подставим в это уравнение выражение вида

$$U \sim u_0(\zeta) + \epsilon^2 u_1(\zeta), \tag{1.19}$$

Тогда для u_1 получится уравнение

$$U_1'' + k u_1 \cos(U_0) = -\zeta^2 k_1 \sin(U_0). \tag{1.20}$$

Покажем, что для такого уравнения существует равномерно ограниченное по ϵ решение U_1 с нулевыми граничными условиями.

Линеаризованное уравнение (1.20) без правой части имеет два линейно независимых решения

$$v_1 = \frac{2}{\operatorname{ch}(k\zeta)}, \quad v_2 = \frac{\operatorname{sh}(2k\zeta)}{8 \operatorname{ch}(k\zeta)} + \frac{k\zeta}{4 \operatorname{ch}(k\zeta)}.$$

Вронскиан этих решений $W = v_1 v_2' - v_1' v_2 = k$. Правая часть уравнения (1.20) может быть представлена в виде

$$f_1(\zeta) = -\zeta^2 k_1 \sin(U_0) = -2\zeta^2 k_1 \frac{\operatorname{th}(k\zeta)}{\operatorname{ch}(k\zeta)}$$

Явный вид решения уравнения U_1 —

$$u_1 = v_1(\zeta) \frac{1}{k} \int_0^\zeta f_1(x) v_2(x) dx - v_2(\zeta) \frac{1}{k} \left(\int_0^\zeta f_1(x) v_1(x) dx - C \right),$$

где $C = \int_0^\infty f_1(x) v_1(x) dx$. Формулы можно проинтегрировать явно, однако понадобятся лишь асимптотики при $\zeta \rightarrow \pm\infty$. Интеграл в первом слагаемом при $\zeta \pm \infty$ имеет порядок ζ^3 . Умножение на $v_1(\zeta)$ приводит к тому, что $v_1(\zeta) \frac{1}{k} \int_0^\zeta f_1(x) v_2(x) dx \rightarrow 0$, $\zeta \rightarrow \infty$. Рассмотрим второе слагаемое в формуле для u_1 . Интеграл в скобках — функция, четная по ζ . Поэтому достаточно рассмотреть его асимптотику при $\zeta \rightarrow +\infty$:

$$\int_0^\zeta f_1(x) v_1(x) dx - C = - \int_\zeta^\infty f_1(x) v_1(x) dx = O(\zeta^2 \exp(-2k\zeta)).$$

Значит,

$$v_2(\zeta) \frac{1}{k} \left(\int_0^\zeta f_1(x) v_1(x) dx - C \right) = O(\zeta^3 \exp(\mp k\zeta)) \rightarrow 0, \quad \zeta \rightarrow \pm\infty.$$

Следовательно, u_1 удовлетворяет нулевым граничным условиям при $\zeta \rightarrow \pm\infty$.

Полное асимптотическое разложение для близкого по свойствам уравнения осциллятора Дюффинга получено в [18]. Здесь же в качестве иллюстрации мы ограничимся численным сравнением главного члена U_0 с его приближением в виде кинка (1.18), показанным на рис. 2.

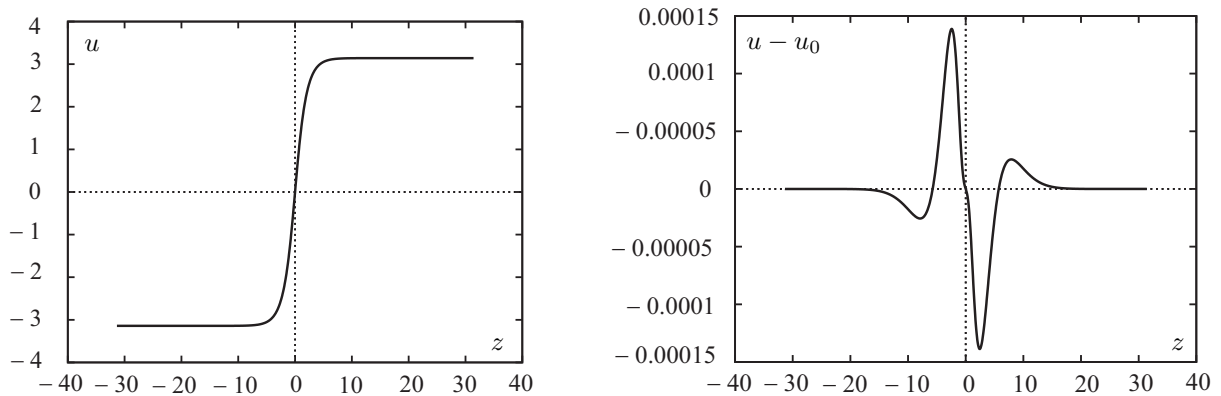


Рис. 2. Сравнение численного и асимптотического решений (1.19) уравнения (1.11) с граничными условиями $u(-z/\epsilon) = -\pi$, $u(z/\epsilon) = \pi$ при $A = 2$, $\epsilon = 0.1$. Слева показан кинк (1.18), а справа — его разность с численным решением.

2. Анализ континуальной модели

Ряд физических моделей (см., например, [5; 6]) изначально предполагает переход к континуальному пределу в цепочке (0.1). В самом деле, асимптотическое решение (1.10) показывает, что разность фаз соседних слоев не содержит высокочастотных компонент и, более того, зависит только от пространственной переменной. Полагая в цепочке (0.1)

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi_{2m+1} + \varphi_{2m}), \quad \varphi_- = \frac{1}{2}(\varphi_{2m+1} - \varphi_{2m}) \quad (2.1)$$

и предположив, что f_+ и f_- не зависят от $n = 2m$ и $n = 2m + 1$, приходим к системе уравнений синус-Гордон (0.3), связанной правыми частями

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} = -\sin \varphi_+ \cos \varphi_- - j_{ext}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} = -\sin \varphi_- \cos \varphi_+, \end{cases} \quad (2.2)$$

с граничными условиями (0.2)

$$\frac{\partial \varphi_{\pm}(-L, t)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_{\pm}(L, t)}{\partial x} = 0, \quad -L < x < L. \quad (2.3)$$

Покажем, что система (2.2) также обладает набором устойчивых авторезонансных решений.

Следуя [6], будем искать решение системы в виде

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, t) &= \omega t + v(x, t) + \omega^{-2} v_1(x, t) + o(\omega^{-2}), \\ \varphi_-(x, t) &= u(x) + \omega^{-2} u_1(x, t) + o(\omega^{-2}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Тогда для функции v получается выражение, аналогичное (1.1):

$$v(x, t) = \operatorname{Re} [\Omega \exp(-i\omega t)] \cos \nu x,$$

где

$$\Omega = \frac{iI}{\omega^2 - \nu^2 + i\varepsilon\omega}, \quad \nu = \frac{\pi\ell}{L}, \quad I = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \cos \frac{\pi x \ell}{L} \cos u(x) dx + O(\omega^{-1}),$$

а резонансное соотношение для джозефсоновского тока совпадает с (1.7).

Для главного члена асимптотики φ_- получается уравнение, аналогичное (1.2) (см. [6]):

$$u'' = -4\alpha \cos \frac{\nu x}{\ell} \sin u, \quad (2.5)$$

где $\alpha = \frac{\omega^2 - \nu^2}{(\omega^2 - \nu^2)^2 + \varepsilon^2 \omega^2}$. Граничные условия для уравнения (2.5) вытекают из (2.3)

$$u'(-L) = u'(L) = 0. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.5) также обладает набором решений типа кинков и антикинков модулированных эллиптических функций, однако их анализ проще с формальной точки зрения и не отличается от анализа соответствующих решений уравнения (1.2). Проиллюстрируем метод Крылова — Боголюбова, использованный в подразд. 2.2, на примере задачи (2.5), (2.6). По-прежнему считаем параметр ν большой величиной, поскольку он совпадает с резонансной частотой,

$\nu = \omega_{res} \gg 1$. Вблизи резонансной частоты $\omega - \nu = \varepsilon/2$, так что $\alpha = (2\varepsilon\nu)^{-1}$ и уравнение (2.5) примет вид

$$u_{zz} = -\cos(\varepsilon z) \sin u, \quad (2.7)$$

где $x = z \frac{\sqrt{\varepsilon\nu}}{2}$, $\epsilon = \frac{\nu\sqrt{\varepsilon\nu}}{\ell} \ll 1$.

Внешне уравнение (2.7) проще, чем (1.11). Однако с формальной стороны это тоже уравнение с медленно меняющимся коэффициентом. Поэтому общая теория об асимптотиках осциллирующих решений полностью аналогична рассмотренной в предыдущем разделе. В вычислениях необходимо лишь заметить $J_{-1}(A \cos(z))$ на $\cos(z)$. Приведем лишь результат.

Теорема 3. *Существует асимптотическое решение краевой задачи (2.6) для уравнения (2.7) такое, что в окрестностях $z = \pm\pi/\epsilon$ главный член может быть представлен в виде осциллирующей эллиптической функции. Главный член может быть построен так же, как функция U_0 из (1.14) с заменой в построениях $J_{-1}(A \cos(z))$ на $\cos(z)$.*

Рассмотрим возможные неосциллирующие решения уравнения (2.7). Состояния равновесия математического маятника, соответствующие этому уравнению, $u_n = \pi n$, $n \in \mathbb{N}$. Локально, при небольших значениях изменений z , если $-\pi < z < -\pi/2$ или $\pi/2 < z < \pi$, решения вблизи состояний равновесия $(2n\pi, 0)$ ведут себя как решения в окрестности седел. Вблизи состояний равновесия $((2n+1)\pi, 0)$ — как решения в окрестности центров. Обратно, при $|z| < \pi/2$ решения в окрестности $(2n\pi, 0)$ ведут себя как решения в окрестности центров, а в окрестности $((2n+1)\pi, 0)$ — как решения в окрестности седел.

Для уравнения (2.7) существует асимптотическое решение близкое к сепаратрисному:

$$u \sim u_0(z) + \epsilon^2 u_1(z), \quad u_0(z) = 4 \arctan(e^z) - \pi.$$

Уравнение для поправки имеет вид

$$u_1'' + \cos(\varepsilon z) u_1 \cos(u_0) = z^2 \frac{\text{th}(z)}{\text{ch}(z)}.$$

Решение уравнения для поправки можно представить в виде ограниченной функции, экспоненциально быстро стремящейся к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Разность точного и асимптотического решений здесь ведет себя так же, как в подразд. 1.2, соответствующие численные сравнения при $u(-\pi/\epsilon) = -\pi$, $u(\pi/\epsilon) = \pi$ и $\epsilon = 0.1$ совпадают с показанными на рис. 2.

Траектории, переходящие из одной малой окрестности состояния равновесия в малую окрестность другого состояния равновесия могут быть построены численно. В частности, траектории, проходящие из окрестности центра в окрестность другого центра, могут существенно меняться только в окрестности точек $\varepsilon z = \pm\pi/2$, так как осцилляции вокруг центров сохраняют значение переменной действие-площадь, заматаемую проекцией фазовой кривой на двумерную плоскость (u, u') .

Рассмотрим численное решение уравнения, переходящее из малой окрестности седла при $u(-\pi/\epsilon) = 0$ в малую окрестность седла при $u = (0)$ и затем в малую окрестность седла $u = 2\pi$. Сами переходы происходят в окрестностях точек $\varepsilon z = \pm\pi/2$, при переходе через которые локальные седла и центры меняются местами. Это решение качественно соответствует сепаратрисам обычного математического маятника, которые также проходят от окрестности одного неустойчивого положения равновесия к другому неустойчивому положению равновесия.

Справа на рис. 1 представлен другой тип траекторий, так называемый π -кинк, где траектория покидает малую окрестность локального седла. Переход происходит на малом интервале независимой переменной в окрестности $\varepsilon z = \pi/2$. Положение равновесия $\varepsilon z = \pi/2$ неустойчиво, поэтому π -кинк должен разрушаться при малом возмущении уравнения (2.7). Однако, как будет показано ниже, именно это решение отвечает асимптотикам (1.10) и (2.4). Дело в

том, что возмущению подвергаются не уравнения главного резонанса (1.11) и (2.7), а исходные системы типа синус-Гордон. Можно показать (см. [2]), что в асимптотиках (1.10) и (2.4) решения $u(x)$ типа π -кинка соответствуют минимуму полной энергии.

3. Обоснование формальных асимптотик

Формальные асимптотические решения (1.10) и (2.4), отвечающие дискретной и континуальной моделям, параметризуются функциями $u(x)$ — решениями уравнений главного резонанса (1.11) и (2.5). Эти уравнения в силу граничных условий (2.6) $u_x(-L) = u_x(L)$ имеют много решений, описанных в подразд. 1.2 и разд. 2. Выбор конкретного решения для резонансного режима исходной системы (0.1) или (2.2) затруднен. Дело в том, что функциональные уравнения (1.3)–(1.5) достаточно сложны для максимизации величины j_{ext} — джозефсоновского тока, отвечающего резонансному излучению. Поэтому выбор решения для уравнения главного резонанса мы осуществим из соображений обоснования асимптотик (1.10) и (2.4).

Заметим, что краевые задачи для исходных уравнений (0.1) и (2.2) недоопределены: в них отсутствуют начальные условия при $t = 0$. Этим обусловлена специфика задач об авторезонансе [4; 19]. Соответствующие физические модели должны обеспечивать резонансный режим при большинстве начальных условий. Поэтому мы будем предполагать, что начальные условия, отвечающие точным и асимптотическим решениям, совпадают:

$$\varphi_n(x, 0) = \varphi_n^{asym}(x, 0), \quad \frac{\partial \varphi_n(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_n^{asym}(x, 0)}{\partial t},$$

где решения $\varphi_n^{asym}(x, t)$ уравнения (0.1) имеют асимптотику (1.10)

$$\varphi_n(x, t) = \omega t + A \cos \frac{\pi x \ell}{L} \sin(\omega t + \phi) + (-1)^n u(x) + O(\omega^{-2}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

Предположим для простоты, что $\varphi_{n+1} = \varphi_{n-1}$ для всех n . Выполняя замену (2.1)

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi_n + \varphi_{n-1}), \quad \varphi_- = \frac{1}{2}(\varphi_n - \varphi_{n-1}),$$

приходим так же, как в разд. 2, к системе (2.2)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_+}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_+}{\partial t} = -\sin \varphi_+ \cos \varphi_- - j_{ext}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_-}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_-}{\partial t} = -\sin \varphi_- \cos \varphi_+. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для суммы $\varphi_n = \varphi_+ + \varphi_-$ из системы (2.2) вытекает скалярное уравнение синус-Гордон

$$\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} = -\sin \varphi_n - j_{ext}. \quad (3.1)$$

Полагая $\varphi_n = \varphi_n^{asym} + 2\chi$, получим уравнение для поправки

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \ell^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\sin \chi \cos(\varphi_n^{asym} + \chi) + f(x, t, \omega). \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) следует дополнить нулевыми краевыми и начальными условиями

$$\chi_x(-L, t) = \chi_x(L, t), \quad (3.3)$$

$$\chi(x, 0) = 0, \quad \chi_t(x, 0) = 0. \quad (3.4)$$

Заметим, что в правой части уравнения (3.2) стоят быстро осциллирующие функции

$$\frac{\partial \cos \varphi_n^{asym}}{\partial t} = O(\omega), \quad \frac{\partial f(x, t, \omega)}{\partial t} = O(\omega), \quad (3.5)$$

$$\langle \cos \varphi_n^{asym} \rangle = O(\omega^{-1}), \quad \langle f(x, t, \omega) \rangle = O(\omega^{-1}), \quad \langle \cdot \rangle - \text{усреднение по времени.}$$

Краевая задача (3.2)–(3.4) с быстро осциллирующими правыми частями вида (3.5) изучалась в работах [20–22]. Существование решения следует из оценок энергии

$$E(\chi) = \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{2} (\chi_t^2 + \ell^2 \chi_x^2) + \varepsilon \chi_t \chi + 1 - \frac{1}{4} \cos(2\chi + \varphi_n^{asym}) - \frac{1}{2} \sin \varphi_n^{asym} \right\} dx,$$

которая имеет вид (см. [22, лемма 2.2])

$$E^{1/2}(\chi) \leq e^{-\varepsilon t} E^{1/2}(\chi) \Big|_{t=0} + K_0(1 - e^{-\varepsilon t}).$$

Здесь постоянная K_0 пропорциональна длине интервала $2L$ и максимуму L_2 -нормы правой части $\omega^{-1}f(x, t, \omega)$ и $g(x, t, \omega) = \sin \varphi_n^{asym}$.

Теорема 4. *Краевая задача (3.2)–(3.4) имеет класс устойчивых решений с асимптотикой*

$$\chi(x, t, \omega) = \frac{\delta}{2} + 2 \arctan [\exp \sqrt{2D}(x - x_0)] + \omega^{-1}v(x, t, \omega), \quad \omega \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

где δ , D и x_0 – некоторые не зависящие от ω постоянные, а функция v ограничена в L_2 -норме на интервале $(-L, L)$.

Доказательство. Рассмотрим, следуя [20; 21], гамильтониан

$$H(\chi, p) = \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{2} (p^2 + \ell^2 \chi_x^2) - \frac{1}{4} \cos(2\chi + \psi + \varphi_n^{asym}) \right\} dx,$$

где $p = \chi_t$, а ψ удовлетворяет уравнению $\psi_{tt} + \varepsilon \psi_t = f(x, t, \omega)$. Усредняя по быстрым колебаниям с частотой ω , введем приближенный гамильтониан [21]

$$H(\Theta, P) = \int_{-L}^L \left\{ \frac{1}{2} (P^2 + \Theta_x^2) - C \cos(\Theta - \gamma) - \frac{1}{2} D \cos(2\Theta - \delta) \right\} dx, \quad (3.7)$$

где Θ и P – новые канонические переменные,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \cos(\psi + \varphi_n^{asym}), \quad \mathcal{B} = \sin(\psi + \varphi_n^{asym}), \\ \langle \mathcal{A} \rangle &= C \cos \gamma, \quad \langle \{\mathcal{A}\}_{-1}^2 \rangle - \langle \{\mathcal{B}\}_{-1}^2 \rangle = 2D \cos \delta, \\ \langle \mathcal{B} \rangle &= C \sin \delta, \quad \langle \{\mathcal{A}\}_{-1} \rangle \langle \{\mathcal{B}\}_{-1} \rangle = D \sin \delta, \end{aligned} \quad (3.8)$$

при этом $\{\cdot\}_{-1}$ – взятие первообразной функции.

В нашем случае в силу соотношений (3.5) имеем $C = O(\omega^{-1})$, так что в главном порядке соответствующая гамильтонова система примет вид

$$\Theta_t = P + O(\omega^{-3}), \quad P_t = \Theta_{xx} - \varepsilon P - D \sin(2\Theta - \delta) + O(\omega^{-3}).$$

Эта система имеет два неустойчивых положения равновесия (седла) при $\Theta = \delta/2$ и $\Theta = \pi + \delta/2$. Существует устойчивое сепаратрисное решение, связывающее эти точки. В главном порядке оно представляет собой π -кинк вида

$$\Theta(x, t, \omega) = \frac{\delta}{2} + 2 \arctan \left[\exp \sqrt{2D} \left(\frac{x - x_0 - ct}{\sqrt{1 - c^2}} \right) \right].$$

В нашем случае скорость кинка $c = 0$, поскольку, как показано в [21], она пропорциональна постоянному слагаемому в правой части уравнения (3.1). Переходя к исходным переменным χ и p , получим асимптотику (3.6). Оценка остатка следует из явных построений величин (3.7), (3.8). Теорема доказана.

Поскольку по построению $\varphi_n = \varphi_n^{asym} + \chi$, асимптотика (3.6) должна присутствовать в окончательной формуле для φ_n . Отсюда следует выбор решения уравнения главного резонанса в виде π -кинка (3.6).

Следствие. При условии $\varphi_{n+1} = \varphi_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, N$ в теореме 1 существует устойчивое решение задачи (0.1), (0.2), имеющее асимптотическое разложение

$$\varphi_n(x, t) = \omega t + A \cos \frac{\pi x \ell}{L} \sin(\omega t + \phi) + (-1)^n u(x) + \frac{\delta}{2} + O(\omega^{-1}), \quad \omega \rightarrow \infty,$$

где постоянные A , ϕ и δ определены формулами (1.3)–(1.5) и (3.8). Функция $u(x)$ отвечает решению типа π – кинка уравнения главного резонанса (2.7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Emission of coherent THz radiation from superconductors / L. Ozyuzer [et al.] // Science. 2007. Vol. 318, iss. 5854. P. 1291–1293. doi: 10.1126/science.1149802.
2. **Ну Х., Лин С.** Three-dimensional phase-kink state in a thick stack of Josephson junctions and terahertz radiation // Phys. Review B. 2008. Vol. 78, iss. 13, 134510. doi: 10.1103/PhysRevB.78.134510.
3. Demonstration of Josephson effect submillimeter wave sources with increased power / S. Han [et al.] // Phys. Lett. 1994. Vol. 64, iss. 11. P. 1424–1426. doi: 10.1063/1.111904.
4. **Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.** Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 432 p. ISBN-10: 052153352X.
5. **Bulaevskii L.N., Koshelev A.E.** Radiation due to Josephson oscillations in layered superconductors // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 99, iss. 5, 057002. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.057002.
6. **Koshelev A.E.** Alternating dynamic state self-generated by internal resonance in stacks of intrinsic Josephson junctions // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 78, iss. 17, 174509. doi: 10.1103/PhysRevB.78.174509.
7. **Revin L.S., Pankratov A.L.** Spectral and power properties of inline long Josephson junctions // Phys. Rev. B. 2012, Vol. 86, iss. 5, 054501. doi: 10.1103/PhysRevB.86.054501.
8. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. 296 p.
9. Novel features of Josephson flux-flow in Bi-2212: contribution of in-plane dissipation, coherent response to mm-wave radiation, size effect / Yn. I. Latyshev [et al.] // Physica C. 2002. Vol. 367. P. 365–375.
10. **Митропольский Ю.А.** Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. М.: Наука, 1964. 431 с.
11. **Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.** Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 408 с.
12. **Кузмак Г.А.** Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами // Прикл. математика и механика. 1959. Т. 23. С. 515–526.
13. **Доброхотов С.Ю., Маслов В.П.** Конечно-зонные почти периодические решения в ВКБ приближениях // Итоги науки. Современные проблемы математики. М.: Наука, 1980. Т. 15. С. 3–94.
14. **Bourland F.J., Haberman R.** The modulated phase shift for strongly nonlinear, slowly varying and weakly damped oscillators // SIAM J. Appl. Math. 1988. Vol. 48, iss. 4. P. 737–748. doi: 10.1137/0148042.
15. **Ажоткин В.Д., Бабич В.М.** О применении метода двухмасштабных разложений к одночастотной задаче теории нелинейных колебаний // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49, № 3. С. 377–383.

16. **Федорюк М.В.** Метод ВКБ для нелинейного уравнения второго порядка // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1986. Т. 26, № 2. С. 198–210.
17. **Butikov E.I.** The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model // Eur. J. Phys. 1999. Vol. 20. P. 429–441.
18. **Киселев О.М.** Осцилляции около сепаратрисы уравнения Дюффинга // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 141–153.
19. **Чириков Б.В.** Нелинейный резонанс. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977. 82 с.
20. **Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M.** Parametrically forced sine-Gordon equation and domain walls dynamics in ferromagnets // Phys. Rev. B. 1998. Vol. 57, iss. 9, 5033. doi: 10.1103/PhysRevB.57.5033.
21. **Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N.** π -kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems // Phys. Rev. 1998. Vol. 58, no. 1. doi: 10.1103/PhysRevE.58.R52.
22. **Birnir B., Grauer R.** An explicit description of the global attractor of the damped and driven sine-Gordon equation // Commun. Math. Phys. 1994. Vol. 162. P. 539–590.

Киселев Олег Михайлович

Поступила 05.12.2016

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, г. Уфа

e-mail: ok@ufanet.ru

Новокшенов Виктор Юрьевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

главный науч. сотрудник

Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН, г. Уфа

e-mail: novik53@mail.ru

REFERENCES

1. Ozyuzer L. et al. Emission of coherent THz radiation from superconductors. *Science*, 2007, vol. 318, iss. 5854, pp. 1291–1293. doi: 10.1126/science.1149802.
2. Hu X., Lin S. Three-dimensional phase-kink state in a thick stack of Josephson junctions and terahertz radiation. *Phys. Rev. B*, 2008, vol. 78, iss. 13, 134510. doi: 10.1103/PhysRevB.78.134510.
3. Han S. et al. Demonstration of Josephson effect submillimeter wave sources with increased power. *Phys. Lett.*, 1994, vol. 64, iss. 11, pp. 1424–1426. doi: 10.1063/1.111904.
4. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge: Cambridge University Press, 2003, 432 p. ISBN-10: 052153352X.
5. Bulaevskii L.N., Koshelev A.E. Radiation due to Josephson oscillations in layered superconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 2007, vol. 99, iss. 5, 057002. doi: 10.1103/PhysRevLett.99.057002.
6. Koshelev A.E. Alternating dynamic state self-generated by internal resonance in stacks of intrinsic Josephson junctions. *Phys. Rev. B.*, 2008, vol. 78, iss. 17, 174509. doi: 10.1103/PhysRevB.78.174509.
7. Revin L.S., Pankratov A.L. Spectral and power properties of inline long Josephson junctions. *Phys. Rev. B.*, 2012, vol. 86, iss. 5, 054501. doi: 10.1103/PhysRevB.86.054501.
8. Bateman H., Erdélyi A. *Higher transcendental functions*. New York; London, McGraw-Hill, 1953, 303 p. ISBN: 0070195455. Translated under the title *Vysshie transcendentnye funktsii*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 296 p.
9. Latyshev Yu. I. et al. Novel features of Josephson flux-flow in Bi-2212: contribution of in-plane dissipation, coherent response to mm-wave radiation, size effect. *Physica C*, 2002, vol. 367, pp. 365–375.
10. Mitropol'skii Yu.A. *Problems of the asymptotic theory of nonstationary vibrations*. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1965, 385 p. Original Russian text published in *Problemy asimptoticheskoy teorii nestacionarnykh kolebaniy*, Moscow, Nauka Publ., 1964, 431 p.
11. Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. Gordon and Breach, Hindustan Publishing, 1961, 537 p. ISBN: 0677200501. Original Russian text published in *Asimptoticheskie metody v teorii nelinejnykh kolebaniy*, Moscow, Gos. izd. fiz.-mat. lit. Publ., 408 p.

12. Kuzmak G.E. Asymptotic solutions of nonlinear differential equations of second order with variable coefficients. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1959, vol. 23, pp. 515–526 (in Russian).
13. Dobrokhotov S.Yu., Maslov V.P. Finite-zone almost periodic solutions in WKB-approximations. *J. Soviet Math.*, 1981, vol. 16, no. 6, pp. 1433–1487.
14. Bourland F.J., Haberman R. The modulated phase shift for strongly nonlinear, slowly varying and weakly damped oscillators. *SIAM J. Appl. Math.*, 1988, vol. 48, iss. 4, pp. 737–748. doi: 10.1137/0148042.
15. Azhotkin V.D., Babich V.M. Application of the method of two-scale expansions to the single-frequency problem of the theory of nonlinear oscillations. *J. Appl. Math. Mech.*, 1985, vol. 49, iss. 3, pp. 290–295.
16. Fedoryuk M.V. The WKB-method for a nonlinear equation of the second order. *USSR Comput. Mathematics and Math. Physics*, 1986, vol. 26, no. 1, pp. 121–128. doi: 10.1016/0041-5553(86)90195-3.
17. Butikov E.I. The rigid pendulum – an antique but evergreen physical model. *Eur. J. Phys.*, 1999, vol. 20, pp. 429–441.
18. Kiselev O.M. Oscillations near a separatrix in the Duffing equation. *Proc. Steklov Inst. Math. Suppl. Iss.*, 2013, vol. 281, suppl. 1, pp. 82–94. doi: 10.1134/S0081543813050088.
19. Chirikov B.V. *Nelineinyi rezonans* [Nonlinear resonance]. Novosibirsk, Novosibirsk State University Publ., 1977, 82 p.
20. Zharnitsky V., Mitkov I., Levi M. Parametrically forced sine-Gordon equation and domain walls dynamics in ferromagnets. *Phys. Rev. B.*, 1998, vol. 57, iss. 9, 5033. doi: 10.1103/PhysRevB.57.5033.
21. Zharnitsky V., Mitkov I., Gronbech-Jensen N. π -kinks in strongly ac driven sine-Gordon systems. *Phys. Rev.*, 1998, vol. 58, no. 1. doi: 10.1103/PhysRevE.58.R52.
22. Birnir B., Grauer R. An explicit description of the global attractor of the damped and driven sine-Gordon equation. *Commun. Math. Phys.*, 1994, vol. 162, pp. 539–590.

The paper was received by the Editorial Office on 5 December, 2016.

Oleg Mikhailovich Kiselev, Dr. Phys.-Math. Sci., Institute of Mathematics with Computer Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: ok@ufanet.ru.

Viktor Yur'evich Novokshenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics with Computer Center of Russian Academy of Sciences, Ufa, 450008 Russia, e-mail: novik53@mail.ru.

УДК 517.972

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ОДНОСТОРОННИМИ ПОТОЧЕЧНО ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ¹

А. А. Ковалевский

Рассмотрены последовательность выпуклых интегральных функционалов $F_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ и последовательность слабо полунепрерывных снизу и, вообще говоря, не интегральных функционалов $G_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, где $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в \mathbb{R}^n , содержащихся в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), и $p > 1$. Наряду с этим рассмотрена последовательность замкнутых выпуклых множеств $V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s): v \geq K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\}$, где K_s — отображение пространства $W^{1,p}(\Omega_s)$ во множество всех функций, определенных на Ω_s . Установлены условия, при которых минимизанты и минимальные значения функционалов $F_s + G_s$ на множествах V_s сходятся соответственно к минимизанту и минимальному значению некоторого функционала на множестве $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega): v \geq K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}$, где K — отображение пространства $W^{1,p}(\Omega)$ во множество всех функций, определенных на Ω . Эти условия включают, в частности, сильную связанность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, условие исчерпывания области Ω областями Ω_s , Γ -сходимость последовательности $\{F_s\}$ к некоторому функционалу $F: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и определенную сходимость последовательности $\{G_s\}$ к некоторому функционалу $G: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Предполагаются также выполненными определенные условия, характеризующие как внутренние свойства отображений K_s , так и их связь с отображением K . В частности, эти условия допускают изучение вариационных задач с односторонними переменными нерегулярными препятствиями и переменными ограничениями, сочетающими поточечную зависимость и функциональную зависимость интегрального вида.

Ключевые слова: переменные области, интегральный функционал, односторонние поточечно функциональные ограничения, минимизант, минимальное значение, Γ -сходимость, сильная связанность.

A. A. Kovalevsky. Variational problems with unilateral pointwise functional constraints in variable domains.

We consider a sequence of convex integral functionals $F_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ and a sequence of weakly lower semicontinuous and, in general, non-integral functionals $G_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, where $\{\Omega_s\}$ is a sequence of domains of \mathbb{R}^n contained in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) and $p > 1$. Along with this, we consider a sequence of closed convex sets $V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s): v \geq K_s(v) \text{ a.e. in } \Omega_s\}$, where K_s is a mapping of the space $W^{1,p}(\Omega_s)$ into the set of all functions defined on Ω_s . We establish conditions under which minimizers and minimum values of the functionals $F_s + G_s$ on the sets V_s converge to a minimizer and the minimum value, respectively, of a central functional on the set $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega): v \geq K(v) \text{ a.e. in } \Omega\}$, where K is a mapping of the space $W^{1,p}(\Omega)$ into the set of all functions defined on Ω . These conditions include, in particular, the strong connectedness of the spaces $W^{1,p}(\Omega_s)$ with the space $W^{1,p}(\Omega)$, the exhaustion condition of the domain Ω by the domains Ω_s , the Γ -convergence of the sequence $\{F_s\}$ to a functional $F: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, and a certain convergence of the sequence $\{G_s\}$ to a functional $G: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. We also assume certain conditions that characterize both the internal properties of the mappings K_s and their relation to the mapping K . In particular, these conditions admit the study of variational problems with unilateral varying irregular obstacles and with varying constraints combining the pointwise dependence and the functional dependence of the integral form.

Keywords: variable domains, integral functional, unilateral pointwise functional constraints, minimizer, minimum value, Γ -convergence, strong connectedness.

MSC: 49J40, 49J45

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-133-150

¹Работа выполнена в рамках комплексной программы ФНИ УрО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”), а также при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УРФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).

Введение

В статье рассмотрены последовательность интегральных функционалов $F_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ с интегрантами, удовлетворяющими определенным условиям выпуклости, роста и коэрцитивности, и последовательность слабо полунепрерывных снизу и, вообще говоря, не интегральных функционалов $G_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, где $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в \mathbb{R}^n , содержащихся в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), и $p > 1$. Наряду с этим рассмотрена последовательность замкнутых выпуклых множеств

$$V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s): v \geq K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\}, \quad (0.1)$$

где K_s — отображение пространства $W^{1,p}(\Omega_s)$ во множество всех функций, определенных на Ω_s . В работе установлен набор условий, обеспечивающих сходимость минимизантов и минимальных значений функционалов $F_s + G_s$ на множествах V_s соответственно к минимизанту и минимальному значению некоторого функционала на множестве $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega): v \geq K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}$, где K — отображение пространства $W^{1,p}(\Omega)$ во множество всех функций, определенных на Ω . Этот набор условий включает компактность вложения пространства $W^{1,p}(\Omega)$ в пространство $L^p(\Omega)$, сильную связанность последовательности пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, а также условие исчерпывания области Ω областями Ω_s . Кроме того, предполагаем определенное поведение функций, входящих в исходную двустороннюю оценку для интегрантов функционалов F_s . Полученный набор условий также включает Γ -сходимость последовательности $\{F_s\}$ к некоторому функционалу $F: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и определенную сходимость последовательности $\{G_s\}$ к некоторому функционалу $G: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Наконец, предполагаются выполненными определенные условия, характеризующие как внутренние свойства отображений K_s , так и их связь с отображением K .

Среди упомянутых условий относительно объектов, вовлеченных в рассмотренные задачи, прежде всего отметим сильную связанность пространств Соболева и Γ -сходимость функционалов, которые играют первостепенную роль при исследовании поведения решений вариационных задач в переменных областях. Понятие сильной связанности соболевских пространств, используемое в настоящей работе и, например, в статье [1] по близкой тематике, восходит к работе [2], где было введено условие сильной связанности n -мерных областей, являющееся по существу прообразом указанного понятия. Относительно понятия Γ -сходимости функционалов с единой областью определения см., например, [3; 4]. В случае переменных областей различной структуры соответствующие понятия Γ -сходимости функционалов с переменной областью определения изучались, например, в [5–8]. Понятие Γ -сходимости функционалов, используемое в настоящей работе и статье [1], является частным случаем понятия Γ -сходимости, рассмотренного в [5] для функционалов, определенных на переменных пространствах Соболева произвольного натурального порядка.

Отметим также важность условия исчерпывания области Ω областями Ω_s . Оно заключается в том, что для любой возрастающей последовательности $\{m_j\} \subset \mathbb{N}$ объединение всех множеств Ω_{m_j} имеет полную меру в Ω . Это условие существенно, в частности, при исследовании сходимости решений вариационных задач с нерегулярными односторонними и двусторонними препятствиями в переменных областях (по этому поводу см., например, [1; 9]).

Отметим, наконец, что сходимость решений вариационных задач для интегральных функционалов и решений вариационных неравенств для эллиптических операторов с обычными односторонними ограничениями, т. е. ограничениями вида $v \geq \varphi_s$, изучалась, например, в работах [10–12] в случае фиксированной области и в работах [9; 13; 14] в случае переменных областей. Насколько нам известно, сходимость минимизантов и минимальных значений функционалов на множествах вида (0.1) с нетривиальными отображениями K_s ранее не изучалась.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 1 сформулированы необходимые определения и предположения. В разд. 2 изложены основные результаты статьи (теоремы 1 и 2). В разд. 3 дан ряд следствий теоремы 1. Они относятся к вариационным задачам с односторонними и, в частности, нерегулярными препятствиями и вариационным задачам с односторон-

ними поточечными ограничениями, содержащими функционалы и, в частности, нерегулярные функции. По существу эти следствия предоставляют примеры выполнения всех требуемых условий относительно отображений K_s и K . В разд. 4 рассмотрены дополнительные примеры выполнения таких условий.

1. Определения и предположения

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n и $p > 1$. Пусть $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в \mathbb{R}^n , содержащихся в Ω .

Легко видеть, что если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$, то $v|_{\Omega_s} \in W^{1,p}(\Omega_s)$.

О п р е д е л е н и е 1. Если $s \in \mathbb{N}$, то q_s — отображение из $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{1,p}(\Omega_s)$ такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $q_s v = v|_{\Omega_s}$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что последовательность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ сильно связана с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, если существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ такая, что:

- (а) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;
- (б) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $q_s(l_s v) = v$ п. в. в Ω_s .

О п р е д е л е н и е 3. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $I_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть $I: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Γ -сходится к функционалу I , если выполняются следующие условия:

- (а) для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ существует последовательность $w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$ и $I_s(w_s) \rightarrow I(v)$;
- (б) для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такой, что $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$, имеем $\liminf_{s \rightarrow \infty} I_s(v_s) \geq I(v)$.

Для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ обозначим через $\mathcal{H}(v)$ множество всех последовательностей $\{v_s\}$ таких, что:

- (а) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$;
- (б) $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$;
- (с) $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|v_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$.

Легко видеть, что если $v \in W^{1,p}(\Omega)$, то $\{q_s v\} \in \mathcal{H}(v)$.

Перейдем к рассмотрению функционалов, для которых будет исследована сходимость их минимизантов и минимальных значений на множествах функций с односторонними поточечно функциональными ограничениями.

Пусть $c_1, c_2 > 0$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\mu_s \geq 0$ в Ω_s . Предположим, что последовательность норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ ограничена.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s: \Omega_s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot, \xi)$ измерима на Ω_s ; для почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на \mathbb{R}^n ; для почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1|\xi|^p - \mu_s(x) \leq f_s(x, \xi) \leq c_2|\xi|^p + \mu_s(x). \quad (1.1)$$

В силу предположений относительно функций f_s и μ_s для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ функция $f_s(x, \nabla v)$ суммируема на Ω_s .

О п р е д е л е н и е 4. Если $s \in \mathbb{N}$, то $F_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $F_s(v) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla v) dx$.

В силу условий относительно функций f_s для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал F_s является выпуклым и локально ограниченным. Поэтому для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал F_s слабо полунепрерывен снизу.

Далее, пусть $c_3, c_4 > 0$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $G_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ — слабо полунепрерывный снизу функционал. Предположим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ справедливо неравенство

$$G_s(v) \geq c_3 \|v\|_{L^p(\Omega_s)}^p - c_4. \quad (1.2)$$

Ясно, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $F_s + G_s$ слабо полунепрерывен снизу. Кроме того, в силу (1.1), (1.2) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ существуют положительные числа c_5 и c_6 такие, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем

$$(F_s + G_s)(v) \geq c_5 \|v\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}^p - c_6. \quad (1.3)$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{F}(\Omega_s)$ множество всех функций $v: \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем отображение $K_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega_s)$. Предположим, что выполняются следующие условия:

(A₁) существует последовательность $\psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что последовательность норм $\|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \geq K_s(\psi_s)$ п.в. в Ω_s ;

(A₂) если $s \in \mathbb{N}$ и $v_j \rightarrow v$ сильно в $W^{1,p}(\Omega_s)$, то $K_s(v_j) \rightarrow K_s(v)$ п.в. в Ω_s ;

(A₃) для любых $s \in \mathbb{N}$, $v, w \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $\tau \in [0, 1]$ имеем

$$K_s((1 - \tau)v + \tau w) \leq (1 - \tau)K_s(v) + \tau K_s(w) \text{ п.в. в } \Omega_s.$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $V_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : v \geq K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\}$. Из условий (A₁)–(A₃) следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$ множество V_s непусто, замкнуто и выпукло.

В силу указанных свойств функционалов $F_s + G_s$ и множеств V_s и известных результатов о существовании точек минимума функционалов (см., например, [15, гл. 3]) для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в V_s , минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве V_s .

2. Основные результаты

Обозначим через $\mathcal{F}(\Omega)$ множество всех функций $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Пусть $K: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$. Положим $V = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v \geq K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}$.

Теорема 1. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

(*₁) вложение $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ компактно;

(*₂) последовательность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ сильно связана с пространством $W^{1,p}(\Omega)$;

(*₃) для любой возрастающей последовательности $\{m_j\} \subset \mathbb{N}$ имеем $\text{meas}\left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_{m_j}\right) = 0$;

(*₄) для любой последовательности измеримых множеств $H_s \subset \Omega_s$ такой, что $\text{meas } H_s \rightarrow 0$, имеем $\int_{H_s} \mu_s dx \rightarrow 0$;

(*₅) существует функционал $F: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что последовательность $\{F_s\}$ Γ -сходится к функционалу F ;

(*₆) существует функционал $G: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$ имеем $G_s(v_s) \rightarrow G(v)$;

(*₇) если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, то существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \rightarrow 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(v_s) \geq K(v) - \alpha_s$ п.в. в Ω_s ;

(*) если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, то существуют последовательность функций $\sigma_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$, последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и число $\bar{s} \in \mathbb{N}$ такие, что $t_s \rightarrow 0$, $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$ и для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$, имеем $K_s(v_s) \leq K(v) + t_s \sigma_s$ п.в. в Ω_s и $z_s - K_s(z_s) \geq \sigma_s$ п.в. в Ω_s .

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в V_s , минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве V_s .

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V$ такие, что справедливы следующие утверждения:

- (i) функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве V ;
- (ii) $\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \rightarrow 0$;
- (iii) $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow (F + G)(u)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что согласно условию (*) существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ такая, что последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена и справедлива импликация

$$s \in \mathbb{N}, \quad v \in W^{1,p}(\Omega_s) \implies q_s(l_s v) = v \text{ п.в. в } \Omega_s. \quad (2.1)$$

Кроме того, ввиду условия (A₁) существует последовательность $\psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что

$$\sup_{s \in \mathbb{N}} \|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty, \quad (2.2)$$

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \psi_s \in V_s. \quad (2.3)$$

В силу условия (1.1), неравенства (2.2) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ последовательность $\{F_s(\psi_s)\}$ ограничена.

Покажем, что последовательность $\{G_s(\psi_s)\}$ ограничена. Действительно, предположим, что последовательность $\{G_s(\psi_s)\}$ не ограничена. Тогда существует возрастающая последовательность $\{\tilde{s}_k\} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$|G_{\tilde{s}_k}(\psi_{\tilde{s}_k})| \rightarrow +\infty. \quad (2.4)$$

В силу ограниченности последовательности норм $\|l_s\|$ и неравенства (2.2) последовательность $\{l_{\tilde{s}_k} \psi_{\tilde{s}_k}\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда ввиду рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega)$ и условия (*) существуют возрастающая последовательность $\{\bar{s}_j\} \subset \{\tilde{s}_k\}$ и функция $\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что $l_{\bar{s}_j} \psi_{\bar{s}_j} \rightarrow \psi$ сильно в $L^p(\Omega)$. Отсюда и из (2.1) вытекает, что

$$\|\psi_{\bar{s}_j} - q_{\bar{s}_j} \psi\|_{L^p(\Omega_{\bar{s}_j})} \rightarrow 0. \quad (2.5)$$

Определим последовательность $\{\bar{\psi}_s\}$ следующим образом:

$$\bar{\psi}_s = \begin{cases} \psi_s, & \text{если } s = \bar{s}_j \text{ при некотором } j \in \mathbb{N}, \\ q_s \psi, & \text{если } s \neq \bar{s}_j \text{ для любого } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{\psi}_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, ввиду (2.5) имеем $\|\bar{\psi}_s - q_s \psi\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$. Теперь, учитывая неравенство (2.2), заключаем, что $\{\bar{\psi}_s\} \in \mathcal{H}(\psi)$. Отсюда и из условия (*) следует, что $G_s(\bar{\psi}_s) \rightarrow G(\psi)$. Тогда $G_{\bar{s}_j}(\psi_{\bar{s}_j}) \rightarrow G(\psi)$. Поэтому последовательность $\{G_{\bar{s}_j}(\psi_{\bar{s}_j})\}$ ограничена, что противоречит (2.4). Полученное противоречие доказывает, что последовательность $\{G_s(\psi_s)\}$ ограничена.

В силу ограниченности последовательностей $\{F_s(\psi_s)\}$ и $\{G_s(\psi_s)\}$ существует число $M > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad (F_s + G_s)(\psi_s) \leq M. \quad (2.6)$$

Покажем, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Так как функция u_s минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве V_s , то ввиду (2.3) имеем

$$(F_s + G_s)(u_s) \leq (F_s + G_s)(\psi_s). \quad (2.7)$$

Кроме того, в силу (1.3) имеем

$$c_5 \|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}^p \leq (F_s + G_s)(u_s) + c_6. \quad (2.8)$$

Из (2.6)–(2.8) выводим неравенство $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}^p \leq (M + c_6)/c_5$, позволяющее заключить, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена.

Из ограниченности последовательностей норм $\|l_s\|$ и $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ вытекает, что последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Поэтому ввиду рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega)$ и условия $(*_1)$ существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$l_{s_j} u_{s_j} \rightarrow u \text{ сильно в } L^p(\Omega), \quad (2.9)$$

$$l_{s_j} u_{s_j} \rightarrow u \text{ п. в. в } \Omega. \quad (2.10)$$

В силу (2.1) и (2.9) имеем

$$\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Покажем, что $u \in V$. Определим последовательность $\{\bar{u}_s\}$ следующим образом:

$$\bar{u}_s = \begin{cases} u_s, & \text{если } s = s_j \text{ при некотором } j \in \mathbb{N}, \\ q_s u, & \text{если } s \neq s_j \text{ для любого } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{u}_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, ввиду (2.11) имеем

$$\|\bar{u}_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0. \quad (2.12)$$

Теперь, учитывая ограниченность последовательности норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$, заключаем, что $\{\bar{u}_s\} \in \mathcal{H}(u)$. Тогда в силу условия $(*_7)$ существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \rightarrow 0$ п. в. в Ω , и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(\bar{u}_s) \geq K(u) - \alpha_s$ п. в. в Ω_s . Следовательно, существует множество $E^{(1)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$s \in \mathbb{N}, x \in \Omega_s \setminus E^{(1)} \implies K_s(\bar{u}_s)(x) \geq K(u)(x) - \alpha_s(x). \quad (2.13)$$

Кроме того, так как для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $u_s \in V_s$, то существует множество $E^{(2)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$s \in \mathbb{N}, x \in \Omega_s \setminus E^{(2)} \implies u_s(x) \geq K_s(u_s)(x). \quad (2.14)$$

Заметим также, что в силу (2.1) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $q_s(l_s u_s) = u_s$ п. в. в Ω_s . Следовательно, существует множество $E^{(3)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$s \in \mathbb{N}, x \in \Omega_s \setminus E^{(3)} \implies (l_s u_s)(x) = u_s(x). \quad (2.15)$$

Вдобавок ввиду (2.10) и того, что $\alpha_s \rightarrow 0$ п. в. в Ω , существует множество $E^{(4)} \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$x \in \Omega \setminus E^{(4)} \implies (l_{s_j} u_{s_j})(x) \rightarrow u(x), \quad \alpha_{s_j}(x) \rightarrow 0. \quad (2.16)$$

Выделим еще одно множество меры нуль. Для любого $r \in \mathbb{N}$ положим $\tilde{E}_r = \Omega \setminus \bigcup_{j=r}^{\infty} \Omega_{s_j}$.

В силу условия $(*_3)$ для любого $r \in \mathbb{N}$ имеем $\text{meas } \tilde{E}_r = 0$. Положим $E^{(5)} = \bigcup_{r=1}^{\infty} \tilde{E}_r$. Ясно,

что $\text{meas } E^{(5)} = 0$. Положим $\tilde{E} = E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots \cup E^{(5)}$, и пусть $x \in \Omega \setminus \tilde{E}$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Поскольку $x \in \Omega \setminus E^{(4)}$, в силу (2.16) существует $j_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$j \in \mathbb{N}, \quad j \geq j_0 \implies u(x) \geq (l_{s_j} u_{s_j})(x) - \varepsilon, \quad \alpha_{s_j}(x) \leq \varepsilon. \quad (2.17)$$

Так как $x \in \Omega \setminus E^{(5)}$, то

$$x \in \bigcup_{j=j_0}^{\infty} \Omega_{s_j}.$$

Следовательно, существует $j \in \mathbb{N}$, $j \geq j_0$, такое, что $x \in \Omega_{s_j}$. Поэтому справедливо включение $x \in \Omega_{s_j} \setminus (E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup E^{(3)})$. Тогда из (2.13)–(2.15) вытекает, что $(l_{s_j} u_{s_j})(x) \geq K(u)(x) - \alpha_{s_j}(x)$. Отсюда и из (2.17), учитывая произвольность ε , получаем неравенство $u(x) \geq K(u)(x)$. Это позволяет заключить, что $u \geq K(u)$ п.в. в Ω . Значит, $u \in V$.

Далее, ввиду (2.12) и условия (*₅) справедливо неравенство $\liminf_{s \rightarrow \infty} F_s(\bar{u}_s) \geq F(u)$, а в силу включения $\{\bar{u}_s\} \in \mathcal{H}(u)$ и условия (*₆) имеем $G_s(\bar{u}_s) \rightarrow G(u)$. Следовательно,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} (F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \geq (F + G)(u). \quad (2.18)$$

Покажем, что функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве V . Пусть $v \in V$. В силу условия (*₅) существует последовательность $w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что

$$\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0, \quad (2.19)$$

$$F_s(w_s) \rightarrow F(v). \quad (2.20)$$

Учитывая ограниченность последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$, из условия (1.1) и предельных соотношений (2.19) и (2.20) выводим, что

$$\sup_{s \in \mathbb{N}} \|w_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty. \quad (2.21)$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\lambda_s = (\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} + 1/s)^{1/2}$. В силу (2.19) имеем $\lambda_s \rightarrow 0$. Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $v_s = \max\{w_s + \lambda_s, q_s v\}$, $E_s = \{w_s \leq q_s v - \lambda_s\}$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} &\leq \|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} + \lambda_s (\text{meas } \Omega)^{1/p}, \\ \sum_{i=1}^n \|D_i v_s\|_{L^p(\Omega_s)}^p &\leq \sum_{i=1}^n \|D_i w_s\|_{L^p(\Omega_s)}^p + \sum_{i=1}^n \|D_i v\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

Учитывая (2.19) и (2.21), из этих неравенств выводим, что

$$\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0, \quad \sup_{s \in \mathbb{N}} \|v_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty. \quad (2.22)$$

Таким образом, $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Тогда ввиду условия (*₈) существуют последовательность функций $\sigma_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$, последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и число $\bar{s} \in \mathbb{N}$ такие, что

$$t_s \rightarrow 0, \quad (2.23)$$

$$\sup_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty, \quad (2.24)$$

$$s \in \mathbb{N}, \quad s \geq \bar{s} \implies K_s(v_s) \leq K(v) + t_s \sigma_s \text{ п.в. в } \Omega_s, \quad z_s - K_s(z_s) \geq \sigma_s \text{ п.в. в } \Omega_s. \quad (2.25)$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\bar{v}_s = \frac{1}{1+t_s} v_s + \frac{t_s}{1+t_s} z_s$. Ясно, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{v}_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Отсюда и из (2.22)–(2.24) вытекает, что

$$\{\bar{v}_s\} \in \mathcal{H}(v). \quad (2.26)$$

Далее, пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$. Докажем, что $\bar{v}_s \in V_s$. Действительно, в силу условия (A₃) имеем

$$K_s(\bar{v}_s) \leq \frac{1}{1+t_s} K_s(v_s) + \frac{t_s}{1+t_s} K_s(z_s) \text{ п.в. в } \Omega_s. \quad (2.27)$$

Используя включение $v \in V$, очевидное неравенство $v_s \geq q_s v$ в Ω_s и (2.25), находим, что $K_s(v_s) - v_s \leq t_s \sigma_s$ п.в. в Ω_s и $K_s(z_s) - z_s \leq -\sigma_s$ п.в. в Ω_s . Отсюда и из (2.27) вытекает, что $\bar{v}_s \geq K_s(\bar{v}_s)$ п.в. в Ω_s . Следовательно, $\bar{v}_s \in V_s$. Тогда, учитывая, что функция u_s минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве V_s , получаем неравенство $(F_s + G_s)(u_s) \leq (F_s + G_s)(\bar{v}_s)$. Теперь можно заключить, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} (F_s + G_s)(u_s) \leq \limsup_{s \rightarrow \infty} (F_s + G_s)(\bar{v}_s). \quad (2.28)$$

Оценим сверху правую часть неравенства (2.28). Пусть $s \in \mathbb{N}$. Ввиду выпуклости функционала F_s имеем

$$F_s(\bar{v}_s) \leq \frac{1}{1+t_s} F_s(v_s) + \frac{t_s}{1+t_s} F_s(z_s). \quad (2.29)$$

Легко видеть, что

$$F_s(v_s) = F_s(w_s) - \int_{E_s} f_s(x, \nabla w_s) dx + \int_{E_s} f_s(x, \nabla(q_s v)) dx.$$

Отсюда, используя условие (1.1), получаем

$$F_s(v_s) \leq F_s(w_s) + 2 \int_{E_s} \mu_s dx + c_2 \int_{E_s} |\nabla v|^p dx.$$

Из этого неравенства и неравенства (2.29) следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$F_s(\bar{v}_s) \leq \frac{1}{1+t_s} F_s(w_s) + t_s |F_s(z_s)| + 2 \int_{E_s} \mu_s dx + c_2 \int_{E_s} |\nabla v|^p dx. \quad (2.30)$$

В силу (2.20) и (2.23) имеем $(1+t_s)^{-1} F_s(w_s) \rightarrow F(v)$. Ввиду (1.1), (2.24) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ последовательность $\{F_s(z_s)\}$ ограничена. Поэтому в силу (2.23) имеем $t_s |F_s(z_s)| \rightarrow 0$. Поскольку $\lambda_s \rightarrow 0$, имеем $\text{meas } E_s \rightarrow 0$. Тогда ввиду условия (*₄) имеем $\int_{E_s} \mu_s dx \rightarrow 0$. Ясно также, что $\int_{E_s} |\nabla v|^p dx \rightarrow 0$. Из (2.30) и указанных предельных соотношений вытекает неравенство

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} F_s(\bar{v}_s) \leq F(v). \quad (2.31)$$

Кроме того, в силу (2.26) и условия (*₆) имеем $G_s(\bar{v}_s) \rightarrow G(v)$. Отсюда и из (2.31) следует неравенство $\limsup_{s \rightarrow \infty} (F_s + G_s)(\bar{v}_s) \leq (F + G)(v)$, которое вместе с неравенством (2.28) приводит к заключению, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} (F_s + G_s)(u_s) \leq (F + G)(v). \quad (2.32)$$

Из (2.18) и (2.32) вытекает, что функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве V .

Поскольку в неравенстве (2.32) функция $v \in V$ произвольна и $u \in V$, имеем

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} (F_s + G_s)(u_s) \leq (F + G)(u). \quad (2.33)$$

Отсюда и из (2.18) выводим, что $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow (F + G)(u)$.

Таким образом, установлено, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V$ такие, что справедливы утверждения (i)–(iii) заключения теоремы. Тем самым доказательство теоремы завершено. \square

З а м е ч а н и е 1. Ясно, что если выполняются условия теоремы 1, то множество V непусто.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, причем функционал G является строго выпуклым. Пусть также выполняется следующее условие:

(*) если $v \in W^{1,p}(\Omega)$, то существует последовательность неотрицательных функций $\bar{\alpha}_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\bar{\alpha}_s \rightarrow 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(q_s v) \leq K(v) + \bar{\alpha}_s$ п.в. в Ω_s .

Тогда существует единственная функция $u \in V$, минимизирующая функционал $F + G$ на множестве V , и справедливы следующие предельные соотношения:

$$\|u_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0, \quad (2.34)$$

$$(F_s + G_s)(u_s) \rightarrow (F + G)(u). \quad (2.35)$$

Доказательство. Сначала покажем, что множество V выпукло. Пусть $v, w \in V$ и $\tau \in [0, 1]$. В силу условия (*) существует последовательность неотрицательных функций $\bar{\alpha}_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\bar{\alpha}_s \rightarrow 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$K_s(q_s v) \leq K(v) + \bar{\alpha}_s \text{ п.в. в } \Omega_s, \quad K_s(q_s w) \leq K(w) + \bar{\alpha}_s \text{ п.в. в } \Omega_s. \quad (2.36)$$

Положим $z = (1 - \tau)v + \tau w$. Ввиду условия (A₃) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$K_s(q_s z) \leq (1 - \tau)K_s(q_s v) + \tau K_s(q_s w) \text{ п.в. в } \Omega_s. \quad (2.37)$$

Кроме того, поскольку $\{q_s z\} \in \mathcal{H}(z)$, в силу условия (*₇) теоремы 1 существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \rightarrow 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(q_s z) \geq K(z) - \alpha_s$ п.в. в Ω_s . Поэтому ввиду (2.36) и (2.37) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K(z) \leq (1 - \tau)K(v) + \tau K(w) + \alpha_s + \bar{\alpha}_s$ п.в. в Ω_s . Следовательно, существует множество $E' \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$s \in \mathbb{N}, \quad x \in \Omega_s \setminus E' \implies K(z)(x) \leq ((1 - \tau)K(v) + \tau K(w))(x) + (\alpha_s + \bar{\alpha}_s)(x). \quad (2.38)$$

Вдобавок, поскольку $\alpha_s \rightarrow 0$ п.в. в Ω и $\bar{\alpha}_s \rightarrow 0$ п.в. в Ω , существует множество $E'' \subset \Omega$ меры нуль такое, что

$$\forall x \in \Omega \setminus E'' \quad (\alpha_s + \bar{\alpha}_s)(x) \rightarrow 0. \quad (2.39)$$

Для любого $r \in \mathbb{N}$ положим $\hat{E}_r = \Omega \setminus \bigcup_{s=r}^{\infty} \Omega_s$. В силу условия (*₃) теоремы 1 для любого $r \in \mathbb{N}$ имеем $\text{meas } \hat{E}_r = 0$. Положим $E''' = \bigcup_{r=1}^{\infty} \hat{E}_r$. Ясно, что $\text{meas } E''' = 0$. Пусть $x \in \Omega \setminus (E' \cup E'' \cup E''')$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $x \in \Omega \setminus E''$, то в силу (2.39) существует $s' \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s'$, имеем

$$(\alpha_s + \bar{\alpha}_s)(x) \leq \varepsilon. \quad (2.40)$$

Поскольку $x \in \Omega \setminus E'''$, существует $s \in \mathbb{N}$, $s \geq s'$, такое, что $x \in \Omega_s$. Значит, $x \in \Omega_s \setminus E'$. Тогда в силу (2.38) и (2.40) имеем $K(z)(x) \leq ((1 - \tau)K(v) + \tau K(w))(x) + \varepsilon$. Поэтому, учитывая произвольность $\varepsilon > 0$ и произвольность $x \in \Omega \setminus (E' \cup E'' \cup E''')$, заключаем, что

$$K(z) \leq (1 - \tau)K(v) + \tau K(w) \text{ п.в. в } \Omega. \quad (2.41)$$

Поскольку $v, w \in V$, имеем $K(v) \leq v$ п.в. в Ω и $K(w) \leq w$ п.в. в Ω . Отсюда и из (2.41) вытекает, что $K(z) \leq z$ п.в. в Ω . Следовательно, $(1 - \tau)v + \tau w \in V$. Значит, множество V выпукло.

Далее, ввиду выпуклости функционалов F_s и условия (*₅) теоремы 1 функционал F является выпуклым (по этому поводу см., например, доказательство теоремы 3.2 в [1]). Из выпуклости функционала F и строгой выпуклости функционала G вытекает, что функционал $F + G$ строго выпуклый.

В силу теоремы 1 существует функция $u \in V$, минимизирующая функционал $F + G$ на множестве V , причем справедливо неравенство (2.33). Стандартным образом используя выпуклость множества V и строгую выпуклость функционала $F + G$, устанавливаем, что u — единственная функция в V , минимизирующая функционал $F + G$ на множестве V (естественно, здесь единственность подразумевается с точностью до множества меры нуль).

Докажем справедливость предельного соотношения (2.34). Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\tau_s = \|u_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)}$. Предположим, что последовательность $\{\tau_s\}$ не сходится к нулю. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и возрастающая последовательность $\{m_k\} \subset \mathbb{N}$ такие, что $\{\tau_{m_k}\} \subset [\varepsilon, +\infty)$. Согласно условию $(*_2)$ теоремы 1 существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ со свойствами (а) и (б) из определения 2. В соответствии с изложенным в доказательстве теоремы 1 последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда, рассуждая таким же образом, как и в соответствующем месте доказательства теоремы 1, находим, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \{m_k\}$ и функция $u' \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что $l_{s_j} u_{s_j} \rightarrow u'$ сильно в $L^p(\Omega)$ и $l_{s_j} u_{s_j} \rightarrow u'$ п.в. в Ω . После этого аналогично изложенному в доказательстве теоремы 1 устанавливаем, что $u' \in V$ и функция u' минимизирует функционал $F + G$ на множестве V . Тогда, учитывая, что u — единственная функция в V , минимизирующая функционал $F + G$ на множестве V , заключаем, что $u = u'$ п.в. в Ω . Отсюда и из сильной сходимости $\{l_{s_j} u_{s_j}\}$ к u' в $L^p(\Omega)$ вытекает, что $\tau_{s_j} \rightarrow 0$. Но это противоречит включению $\{\tau_{m_k}\} \subset [\varepsilon, +\infty)$. Полученное противоречие доказывает, что предельное соотношение (2.34) справедливо. В силу этого соотношения и условий $(*_5)$ и $(*_6)$ теоремы 1 имеем $\liminf_{s \rightarrow \infty} (F_s + G_s)(u_s) \geq (F + G)(u)$. Отсюда и из неравенства (2.33) выводим предельное соотношение (2.35). Теорема доказана. \square

З а м е ч а н и е 2. Если выполняется условие $(*_8)$ теоремы 1, причем соответствующая последовательность функций σ_s имеет поточечную мажоранту $\sigma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, то, очевидно, выполняется и условие $(*)$ теоремы 2.

Относительно выполнения условий $(*_1)$ – $(*_6)$ теоремы 1 и строгой выпуклости функционала G см. [1]. Примеры выполнения исходных предположений относительно множеств K_s , условий $(*_7)$ и $(*_8)$ теоремы 1 и условия $(*)$ теоремы 2 рассмотрим в следующем разделе.

3. Следствия теоремы 1

3.1. Вариационные задачи с односторонними препятствиями

Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s: \Omega_s \rightarrow \mathbb{R}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(а₁) существует функция $\bar{\varphi} \in W^{1,p}(\Omega)$ такая, что $\bar{\varphi} \geq \varphi$ п.в. в Ω ;

(а₂) существует последовательность неотрицательных функций $\alpha_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\alpha_s \rightarrow 0$ п.в. в Ω и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s \geq \varphi - \alpha_s$ п.в. в Ω_s ;

(а₃) существуют последовательности $\{\sigma_s\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ и $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ такие, что последовательность $\{\sigma_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$, $t_s \rightarrow 0$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s \leq \varphi + t_s \sigma_s$ п.в. в Ω_s .

Положим $V(\varphi) = \{v \in W^{1,p}(\Omega): v \geq \varphi \text{ п.в. в } \Omega\}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$V_s(\varphi_s) = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s): v \geq \varphi_s \text{ п.в. в } \Omega_s\}.$$

Из условия (а₁) вытекает, что множество $V(\varphi)$ непусто. Более того, множество $V(\varphi)$ выпукло и замкнуто в $W^{1,p}(\Omega)$. В силу условий (а₁) и (а₃) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $q_s \bar{\varphi} + t_s q_s \sigma_s \in V_s(\varphi_s)$. Поэтому для любого $s \in \mathbb{N}$ множество $V_s(\varphi_s)$ непусто. Более того, для любого $s \in \mathbb{N}$ множество $V_s(\varphi_s)$ выпукло и замкнуто в $W^{1,p}(\Omega_s)$.

Ввиду неравенства (1.3), слабой полунепрерывности снизу функционалов $F_s + G_s$ и указанных свойств множеств $V_s(\varphi_s)$ для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в $V_s(\varphi_s)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi_s)$.

Следствие 1. Пусть дополнительно к условиям (a_1) – (a_3) выполняются условия $(*)$ – $(*_6)$ теоремы 1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в $V_s(\varphi_s)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi_s)$. Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V(\varphi)$ такие, что справедливы следующие утверждения: функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве $V(\varphi)$; $\|u_{s_j} - q_{s_j}u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \rightarrow 0$; $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow (F + G)(u)$.

Доказательство. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $K_s(v) = \varphi_s$. Положив для любого $s \in \mathbb{N}$ $\psi_s = q_s\bar{\varphi} + t_s q_s \sigma_s$, находим, что последовательность норм $\|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена. Кроме того, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \geq K_s(\psi_s)$ п.в. в Ω_s . Значит, условие (A_1) из разд. 1 выполняется. Выполнение условий (A_2) и (A_3) из разд. 1 очевидно.

Далее, пусть $K: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $K(v) = \varphi$.

Из условия (a_2) следует, что выполняется условие $(*_7)$ теоремы 1. Проверим выполнение условия $(*_8)$ этой теоремы. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Пусть t — мажоранта последовательности $\{t_s\}$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $z_s = q_s\bar{\varphi} + (t+1)|q_s\sigma_s|$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. При этом $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. Зафиксировав $s \in \mathbb{N}$, в силу условий (a_1) и (a_3) имеем $\varphi_s \leq \varphi + t_s \sigma_s$ п.в. в Ω_s и $z_s - \varphi_s \geq \sigma_s$ п.в. в Ω_s . Учитывая определение отображений K_s и K , из этих соотношений выводим, что $K_s(v_s) \leq K(v) + t_s \sigma_s$ п.в. в Ω_s и $z_s - K_s(z_s) \geq \sigma_s$ п.в. в Ω_s . Значит, условие $(*_8)$ теоремы 1 выполняется.

Учитывая определение множеств $V_s(\varphi_s)$ и $V(\varphi)$, а также отображений K_s и K , получаем, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad V_s(\varphi_s) = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : v \geq K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\},$$

$$V(\varphi) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v \geq K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Теперь, применяя теорему 1, получаем требуемое заключение. \square

З а м е ч а н и е 3. Ясно, что условие (a_3) выполняется, если выполняется следующее условие:

(a'_3) существуют функция $\sigma \in W^{1,p}(\Omega)$ и последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ такие, что $t_s \rightarrow 0$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s \leq \varphi + t_s \sigma$ п.в. в Ω_s .

При этом заметим, что если в последнем условии требование $\sigma \in W^{1,p}(\Omega)$ заменить на требование $\sigma \in W^{1,r}(\Omega)$ для любого $r \in (1, p)$, то полученное условие, вообще говоря, не будет гарантировать непустоту множеств $V_s(\varphi_s)$. Действительно, предположим, что Ω есть открытый единичный шар в \mathbb{R}^n и $p < n$. Предположим также, что все области Ω_s совпадают с Ω . Пусть w — функция на Ω такая, что $w(0) = 0$ и для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$ имеем $w(x) = |x|^{-(n-p)/p}$. Тогда для любого $r \in (1, p)$ имеем $w \in W^{1,r}(\Omega)$. При этом $w \notin W^{1,p}(\Omega)$. Предположим, что $\varphi = 0$ в Ω , и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s = s^{-1}w$. Ясно, что условия (a_1) и (a_2) выполняются. Кроме того, положив $\sigma = w$, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi_s \leq \varphi + s^{-1}\sigma$ п.в. в Ω_s . Значит, выполняется аналог условия (a'_3) с тем отличием от этого условия, что функция σ принадлежит пространству $W^{1,r}(\Omega)$ с любым $r \in (1, p)$, но не принадлежит пространству $W^{1,p}(\Omega)$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Предположим, что $V_s(\varphi_s) \neq \emptyset$. Взяв $v \in V_s(\varphi_s)$, находим, что $|w|^{np/(n-p)} \leq |sv|^{np/(n-p)}$ п.в. в Ω . Отсюда, учитывая включение $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и вложение $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^{np/(n-p)}(\Omega)$, выводим, что $w \in L^{np/(n-p)}(\Omega)$. Но из определения функции w следует, что $w \notin L^{np/(n-p)}(\Omega)$. Полученное противоречие доказывает, что $V_s(\varphi_s) = \emptyset$. Таким образом, для любого $s \in \mathbb{N}$

множество $V_s(\varphi_s)$ пусто. Установленный факт также показывает, что в рассмотренном случае условие (a_3) не выполняется.

Наконец, заметим, что если выполняется условие (a'_3) , то для отображений K_s и K , рассмотренных в доказательстве следствия 1, выполняется условие $(*)$ теоремы 2.

Приведем простой пример выполнения условий (a_1) – (a_3) .

Пример 1. Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная сверху функция, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\alpha_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — неотрицательная функция. Предположим, что $\alpha_s \rightarrow 0$ п.в. в Ω . Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\varphi_s = (\varphi - \alpha_s)|_{\Omega_s}$. Легко видеть, что функции φ и φ_s удовлетворяют условиям (a_1) – (a_3) . Ясно также, что выполняется условие (a'_3) .

3.2. Вариационные задачи с односторонними поточечными ограничениями, содержащими функционалы

Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$ в Ω , и пусть $\Phi: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем функционал $\Phi_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(b₁) существуют числа $\beta, \bar{\beta} \in \mathbb{R}$ и функция $z \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что $\beta > \bar{\beta}$, $z \geq \Phi(z) + \beta$ п.в. в Ω и $(1 - \varphi)z + \bar{\beta}\varphi \geq 0$ п.в. в Ω ;

(b₂) существует последовательность $\psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что последовательность норм $\|\psi_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\psi_s \geq \Phi_s(\psi_s)\varphi$ п.в. в Ω_s ;

(b₃) для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал Φ_s является выпуклым и непрерывным;

(b₄) если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$, то $\Phi_s(v_s) \rightarrow \Phi(v)$.

Положим $U = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v \geq \Phi(v)\varphi \text{ п.в. в } \Omega\}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$U_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : v \geq \Phi_s(v)\varphi \text{ п.в. в } \Omega_s\}.$$

В силу условия (b₁) имеем $z \geq \Phi(z)\varphi$ п.в. в Ω . Следовательно, $z \in U$. Поэтому множество U непусто. Вдобавок из условия (b₂) вытекает, что для любого $s \in \mathbb{N}$ множество U_s непусто. Заметим также, что ввиду условий (b₁) и (b₄) для достаточно больших $s \in \mathbb{N}$ имеем $q_s z \in U_s$. Кроме того, из условия (b₃) следует, что для любого $s \in \mathbb{N}$ множество U_s выпукло и замкнуто в $W^{1,p}(\Omega_s)$.

Ввиду неравенства (1.3), слабой полунепрерывности снизу функционалов $F_s + G_s$ и указанных свойств множеств U_s для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в U_s , минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s .

Следствие 2. Пусть дополнительно к условиям (b₁)–(b₄) выполняются условия $(*_1)$ – $(*_6)$ теоремы 1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в U_s , минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s . Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in U$ такие, что справедливы следующие утверждения: функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве U ; $\|u_{s_j} - q_{s_j}u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \rightarrow 0$; $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow (F + G)(u)$.

Доказательство. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $K_s(v) = \Phi_s(v)\varphi|_{\Omega_s}$. Из условий (b₂) и (b₃) следует, что выполняются условия (A_1) – (A_3) из разд. 1.

Далее, пусть $K: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $K(v) = \Phi(v)\varphi$.

Проверим выполнение условий $(*_7)$ и $(*_8)$ теоремы 1. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\alpha_s = |\Phi_s(v_s) - \Phi(v)|\varphi$. В силу условия (b₄) имеем $\alpha_s \rightarrow 0$ в Ω . Кроме того, для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $K_s(v_s) \geq K(v) - \alpha_s$ в Ω_s . Значит, условие $(*_7)$ теоремы 1 выполняется.

Пусть снова $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_s = \frac{\beta - \bar{\beta}}{2} \varphi, \quad t_s = \frac{2}{\beta - \bar{\beta}} |\Phi_s(v_s) - \Phi(v)|, \quad z_s = q_s z.$$

Таким образом, имеем последовательность функций $\sigma_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ и последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу условия (b₄) имеем $t_s \rightarrow 0$. Ясно также, что $\{z_s\} \in \mathcal{H}(z)$. Поэтому из условия (b₄) следует, что $\Phi_s(z_s) \rightarrow \Phi(z)$. Тогда существует $\bar{s} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$, имеем

$$|\Phi_s(z_s) - \Phi(z)| \leq \frac{\beta - \bar{\beta}}{2}. \quad (3.1)$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$. Для произвольного $x \in \Omega_s$ имеем

$$K_s(v_s)(x) = \Phi_s(v_s)\varphi(x) \leq \Phi(v)\varphi(x) + |\Phi_s(v_s) - \Phi(v)|\varphi(x) = K(v)(x) + t_s\sigma_s(x).$$

Значит, $K_s(v_s) \leq K(v) + t_s\sigma_s$ в Ω_s . В силу условия (b₁) существует множество $E \subset \Omega$ меры нуль такое, что для любого $x \in \Omega \setminus E$ имеем

$$z(x) \geq \Phi(z) + \beta, \quad (1 - \varphi(x))z(x) + \bar{\beta}\varphi(x) \geq 0. \quad (3.2)$$

Пусть $x \in \Omega_s \setminus E$. Ясно, что

$$z_s(x) - K_s(z_s)(x) = z(x) - \Phi_s(z_s)\varphi(x) = (1 - \varphi(x))z(x) + (z(x) - \Phi(z))\varphi(x) - (\Phi_s(z_s) - \Phi(z))\varphi(x).$$

Отсюда, используя (3.1) и (3.2), получаем

$$z_s(x) - K_s(z_s)(x) \geq (1 - \varphi(x))z(x) + \bar{\beta}\varphi(x) + \frac{\beta - \bar{\beta}}{2} \varphi(x) \geq \sigma_s(x).$$

Значит, $z_s - K_s(z_s) \geq \sigma_s$ п.в. в Ω_s . Таким образом, условие (*₈) теоремы 1 выполняется.

Учитывая определение множеств U_s и U , а также отображений K_s и K , получаем, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad U_s = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : v \geq K_s(v) \text{ п.в. в } \Omega_s\},$$

$$U = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v \geq K(v) \text{ п.в. в } \Omega\}.$$

Теперь, применяя теорему 1, получаем требуемое заключение. \square

З а м е ч а н и е 4. Из условия (b₄) вытекает, что отображения K_s и K , рассмотренные в доказательстве следствия 2, удовлетворяют условию (*) теоремы 2.

Теперь сделаем следующие изменения в предположениях, предшествующих определению множеств U и U_s . Допустим, что вместо условий (b₁) и (b₂) выполняются следующие условия:

$$(b'_1) \quad \varphi \in W^{1,p}(\Omega);$$

(b'₂) существует $r > 1$ такое, что для любых $s \in \mathbb{N}$, $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $t \in (0, 1)$ имеем $\Phi_s(tv) \leq t^r \Phi_s(v)$.

По-прежнему считаем, что условия (b₃) и (b₄) выполняются.

В силу условий (b'₂) и (b₄) для любых $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $t \in (0, 1)$ имеем $\Phi(tv) \leq t^r \Phi(v)$. Используя это, с учетом условия (b'₁) устанавливаем, что при некотором $\lambda_* > 0$ справедливо включение $\lambda_* \varphi \in U$. Значит, множество U непусто. В силу условий (b'₁) и (b₄) имеем $\Phi_s(q_s \varphi) \rightarrow \Phi(\varphi)$. Поэтому существует число $M > 1$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \Phi_s(q_s \varphi) \leq M^{r-1}. \quad (3.3)$$

Зафиксируем $t_* \in (0, 1/M)$. Используя (3.3) и условия (b'₁) и (b'₂), находим, что для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливо включение $t_* q_s \varphi \in U_s$. Значит, для любого $s \in \mathbb{N}$ множество U_s непусто. Ясно, что заключения о выпуклости и замкнутости множеств U_s и о существовании минимизантов функционалов $F_s + G_s$ на множествах U_s по-прежнему остаются справедливыми.

Следствие 3. Пусть дополнительно к условиям (b'_1) , (b'_2) , (b_3) и (b_4) выполняются условия $(*_1)$ – $(*_6)$ теоремы 1. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в U_s , минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве U_s . Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in U$ такие, что справедливы следующие утверждения: функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве U ; $\|u_{s_j} - q_{s_j}u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \rightarrow 0$; $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow (F + G)(u)$.

Доказательство. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $K_s(v) = \Phi_s(v)q_s\varphi$. Из включений $t_*q_s\varphi \in U_s$ следует, что выполняется условие (A_1) из разд. 1, а из условия (b_3) вытекает, что выполняются условия (A_2) и (A_3) из разд. 1.

Далее, пусть $K: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $K(v) = \Phi(v)\varphi$.

В силу условия (b_4) отображения K_s и K удовлетворяют условию $(*_7)$ теоремы 1. Это проверяется так же, как и в доказательстве следствия 2.

Проверим выполнение условия $(*_8)$ теоремы 1. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_s = t_*(1 - (Mt_*)^{r-1})\varphi, \quad t_s = \frac{1}{t_*(1 - (Mt_*)^{r-1})}|\Phi_s(v_s) - \Phi(v)|, \quad z_s = t_*q_s\varphi.$$

Таким образом, имеем последовательность функций $\sigma_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ и последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу условия (b_4) имеем $t_s \rightarrow 0$. Ясно также, что $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $K_s(v_s) \leq K(v) + t_s\sigma_s$ в Ω_s . Кроме того, в силу условия (b'_2) имеем $\Phi_s(z_s) \leq t_*^r\Phi_s(q_s\varphi)$. Тогда $K_s(z_s) \leq t_*^{r-1}\Phi_s(q_s\varphi)z_s$ в Ω_s . Отсюда и из (3.3) вытекает, что $z_s - K_s(z_s) \geq \sigma_s$ в Ω_s . Таким образом, условие $(*_8)$ теоремы 1 выполняется.

Теперь, применяя теорему 1, получаем требуемое заключение. \square

Рассмотрим примеры выполнения условий (b_1) – (b_4) .

Пример 2. Предположим, что выполняется следующее условие:

$(**)$ существует неотрицательная ограниченная измеримая функция $b: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любого открытого куба $Q \subset \Omega$ имеем $\text{meas}(Q \cap \Omega_s) \rightarrow \int_Q b dx$.

Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \varphi \leq 1$ в Ω , и пусть $\Phi: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $\Phi(v) = \int_{\Omega} b|v|^p dx$. Пусть $\lambda \geq 0$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\Phi_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $\Phi_s(v) = \int_{\Omega_s} |v|^p dx + \frac{\lambda}{s} \int_{\Omega_s} |\nabla v|^p dx$. Зафиксируем положительное число β_0 такое, что

$$\beta_0^{p-1} \int_{\Omega} b dx \leq \frac{1}{2}, \quad (3.4)$$

и положим $\beta = \beta_0/2$ и $\bar{\beta} = 0$. Кроме того, пусть z — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $z(x) = \beta_0$. Ясно, что $\beta > \bar{\beta}$ и $z \in W^{1,p}(\Omega)$. В силу неравенства (3.4) имеем $z \geq \Phi(z) + \beta$ в Ω , а ввиду того, что $\varphi \leq 1$ в Ω , имеем $(1 - \varphi)z + \bar{\beta}\varphi \geq 0$ в Ω . Значит, условие (b_1) выполняется. Условие (b_2) также выполняется. Для того чтобы убедиться в этом, в качестве соответствующих функций ψ_s достаточно взять функции, принимающие только нулевое значение в соответствующих областях. Выполнение условия (b_3) очевидно, а выполнение условия (b_4) является следствием условия $(**)$.

Пример 3. Предположим, что выполняется условие $(**)$ из примера 2. Пусть $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, причем $\varphi \geq 0$ в Ω . Пусть $\beta > 0$, и пусть $\Phi: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой

функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $\Phi(v) = \int_{\Omega} b|v|^p dx - \beta$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\Phi_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$

— функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $\Phi_s(v) = \int_{\Omega_s} |v|^p dx - \beta$.

Положим $\bar{\beta} = 0$, и пусть z — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $z(x) = 0$. Ясно, что $z \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\beta > \bar{\beta}$. Кроме того, $z = \Phi(z) + \beta$ в Ω и $(1 - \varphi)z + \bar{\beta}\varphi = 0$ в Ω . Значит, условие (b₁) выполняется. Условие (b₂) также выполняется. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что последовательность норм $\|q_s z\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $q_s z \geq \Phi_s(q_s z)\varphi$ в Ω_s . Как и в примере 2, выполнение условия (b₃) очевидно, а выполнение условия (b₄) является следствием условия (**).

З а м е ч а н и е 5. Легко видеть, что функционалы Φ_s , рассмотренные в примерах 2 и 3, удовлетворяют условию (b'₂).

4. Дополнительные примеры

Приведем два примера отображений K_s и K , удовлетворяющих условиям (A₁)–(A₃) из разд. 1 и условиям (*₇) и (*₈) теоремы 1, без формулировки соответствующих следствий теоремы 1.

П р и м е р 4. Пусть $m \in \mathbb{N}$, и пусть для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ имеем неотрицательную функцию $\varphi^{(i)} \in W^{1,p}(\Omega)$, функционал $\Phi^{(i)}: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и последовательность функционалов $\Phi_s^{(i)}: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$.

Предположим, что выполняются следующие условия:

(c₁) существует $r > 1$ такое, что для любых $i \in \{1, \dots, m\}$, $s \in \mathbb{N}$, $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $t \in (0, 1)$ имеем $\Phi_s^{(i)}(tv) \leq t^r \Phi_s^{(i)}(v)$;

(c₂) для любых $i \in \{1, \dots, m\}$ и $s \in \mathbb{N}$ функционал $\Phi_s^{(i)}$ является выпуклым и непрерывным;

(c₃) если $v \in W^{1,p}(\Omega)$, $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$ и $i \in \{1, \dots, m\}$, то $\Phi_s^{(i)}(v_s) \rightarrow \Phi^{(i)}(v)$.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $K_s(v) = \sum_{i=1}^m \Phi_s^{(i)}(v)q_s\varphi^{(i)}$.

Пусть $K: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $K(v) = \sum_{i=1}^m \Phi^{(i)}(v)\varphi^{(i)}$.

Положим $\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi^{(i)}$. В силу условий (c₁) и (c₃) найдется $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\lambda_0 q_s \varphi \geq K_s(\lambda_0 q_s \varphi)$ в Ω_s . Поэтому условие (A₁) из разд. 1 выполняется. Кроме того, из условия (c₂) вытекает, что выполняются условия (A₂) и (A₃) из разд. 1.

Далее, в силу условия (c₃) выполняется условие (*₇) теоремы 1. Проверим выполнение условия (*₈) теоремы 1. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Поскольку $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{q_s \varphi\} \in \mathcal{H}(\varphi)$, в силу условия (c₃) для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ имеем $\Phi_s^{(i)}(q_s \varphi) \rightarrow \Phi^{(i)}(\varphi)$. Следовательно, существует $M > 1$ такое, что для любых $i \in \{1, \dots, m\}$ и $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Phi_s^{(i)}(q_s \varphi) \leq M^{r-1}. \quad (4.1)$$

Зафиксируем $\lambda \in (0, 1/M)$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_s = (1 - (\lambda M)^{r-1})\lambda\varphi, \quad t_s = \frac{1}{\lambda(1 - (\lambda M)^{r-1})} \sum_{i=1}^m |\Phi_s^{(i)}(v_s) - \Phi^{(i)}(v)|, \quad z_s = \lambda q_s \varphi.$$

Таким образом, имеем последовательность функций $\sigma_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ и последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу условия (c₃) имеем $t_s \rightarrow 0$. Ясно также, что $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что $K_s(v_s) \leq K(v) + t_s \sigma_s$ в Ω_s . Теперь оценим функцию $K_s(z_s)$. Пусть $i \in \{1, \dots, m\}$. В силу условия (c₁) и (4.1) имеем

$\Phi_s^{(i)}(z_s) \leq \lambda^r \Phi_s^{(i)}(q_s \varphi) \leq \lambda^r M^{r-1}$. Поэтому $\Phi_s^{(i)}(z_s) q_s \varphi^{(i)} \leq (\lambda M)^{r-1} \lambda q_s \varphi^{(i)}$ в Ω_s . Тогда, суммируя по i от 1 до m , находим, что $K_s(z_s) \leq (\lambda M)^{r-1} \lambda q_s \varphi$ в Ω_s . Следовательно, $z_s - K_s(z_s) \geq \sigma_s$ в Ω_s . Значит, условие $(*_8)$ теоремы 1 выполняется.

Пример 5. Предположим, что выполняется условие $(**)$ из примера 2. Пусть $c, C \in \mathbb{R}$, $1 < c \leq C$, и пусть α — функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $c \leq \alpha(x) \leq C$. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $K_s: W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega_s)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и любого $y \in \Omega_s$ имеем $K_s(v)(y) = \|v\|_{L^p(\Omega_s)}^{\alpha(y)}$. Пусть $K: W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ — отображение такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любого $y \in \Omega$ имеем $K(v)(y) = \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha(y)}$.

Легко проверить, что для отображений K_s выполняются условия (A_1) – (A_3) из разд. 1. Кроме того, используя условие $(**)$ из примера 2, нетрудно показать, что выполняется условие $(*_7)$ теоремы 1. Проверим выполнение условия $(*_8)$ теоремы 1. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$. Положим $\omega = (\text{meas } \Omega)^{1/p}$ и зафиксируем число λ такое, что $0 < \lambda < \min\{\omega^{-1}, \omega^{-c/(c-1)}\}$. Ясно, что $\lambda^{c-1}\omega^c < 1$. Пусть $z: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — функция такая, что для любого $x \in \Omega$ имеем $z(x) = \lambda$. Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $\sigma_s = (1 - \lambda^{c-1}\omega^c)z$,

$$t_s = \frac{C}{\lambda(1 - \lambda^{c-1}\omega^c)} \left\{ 1 + \|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} + \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)} \right\}^C \left| \|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} - \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)} \right|, \quad z_s = q_s z.$$

Таким образом, имеем последовательность функций $\sigma_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, последовательность $\{t_s\} \subset [0, +\infty)$ и последовательность $z_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу включения $\{v_s\} \in \mathcal{H}(v)$ и условия $(**)$ из примера 2 имеем $\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}$. Поэтому $t_s \rightarrow 0$. Ясно также, что $\sup_{s \in \mathbb{N}} \|z_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} < +\infty$. Пусть $s \in \mathbb{N}$. Зафиксировав $y \in \Omega_s$, получаем

$$\begin{aligned} K_s(v_s)(y) &= K(v)(y) + \|v_s\|_{L^p(\Omega_s)}^{\alpha(y)} - \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}^{\alpha(y)} \\ &\leq K(v)(y) + \alpha(y) \left\{ \|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} + \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)} \right\}^{\alpha(y)-1} \left| \|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} - \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)} \right| \\ &\leq K(v)(y) + t_s \sigma_s(y), \\ K_s(z_s)(y) &\leq (\lambda \omega)^{\alpha(y)} \leq (\lambda \omega)^c = z_s(y) - \sigma_s(y). \end{aligned}$$

Следовательно, $K_s(v_s) \leq K(v) + t_s \sigma_s$ в Ω_s и $z_s - K_s(z_s) \geq \sigma_s$ в Ω_s . Значит, условие $(*_8)$ теоремы 1 выполняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kovalevsky A.A.** On the convergence of solutions to bilateral problems with the zero lower constraint and an arbitrary upper constraint in variable domains // *Nonlinear Anal.* 2016. Vol. 147. P. 63–79. doi: 10.1016/j.na.2016.09.001.
2. **Хруслов Е.Я.** Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // *Мат. сб.* 1978. Т. 106, № 4. С. 604–621.
3. **Жиков В.В.** Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления // *Изв. АН СССР. Сер. математическая* 1983. Т. 47, № 5. С. 961–998.
4. **Dal Maso G.** An introduction to Γ -convergence. Boston: Birkhäuser, 1993. 352 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0327-8.
5. **Ковалевский А.А.** О необходимых и достаточных условиях Γ -сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // *Нелинейн. граничн. задачи.* 1992. Вып. 4. С. 29–39.
6. **Ковалевский А.А.** О Γ -сходимости интегральных функционалов, определенных на слабо связанных соболевских пространствах // *Укр. мат. журн.* 1996. Т. 48, № 5. С. 614–628.
7. **Pankratov L.** Γ -convergence of nonlinear functionals in thin reticulated structures // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 2002. Vol. 335, no. 3. P. 315–320. doi: 10.1016/S1631-073X(02)02468-8.
8. **Amaziane B., Goncharenko M., Pankratov L.** Γ_D -convergence for a class of quasilinear elliptic equations in thin structures // *Math. Methods Appl. Sci.* 2005. Vol. 28, no. 15. P. 1847–1865. doi: 10.1002/mma.644.

9. **Kovalevsky A.A., Rudakova O.A.** Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains // *Differ. Equ. Appl.* 2009. Vol. 1, no. 4. P. 517–559. doi: 10.7153/dea-01-29.
10. **Dal Maso G.** Limits of minimum problems for general integral functionals with unilateral obstacles // *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8). 1983. Vol. 74. P. 55–61.
11. **Boccardo L., Murat F.** Homogenization of nonlinear unilateral problems // *Composite Media and Homogenization Theory. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* 5. Boston: Birkhäuser, 1991. P. 81–105. doi: 10.1007/978-1-4684-6787-1_6.
12. **Сандраков Г.В.** Осреднение вариационных неравенств и уравнений, определенных псевдомонотонным оператором // *Мат. сб.* 2008. Т. 199, № 1. С. 67–100.
13. **Ковалевский А.А.** О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // *Современный анализ и его приложения.* Киев: Наукова думка, 1989. С. 62–70.
14. **Ковалевский А.А.** G -сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // *Изв. РАН. Сер. математическая.* 1994. Т. 58, № 3. С. 3–35.
15. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.

Ковалевский Александр Альбертович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
ведущий науч. сотрудник

Поступила 06.01.2017

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
Институт естественных наук и математики
Уральского федерального университета, г. Екатеринбург
e-mail: alexkvl71@mail.ru

REFERENCES

1. Kovalevsky A.A. On the convergence of solutions to bilateral problems with the zero lower constraint and an arbitrary upper constraint in variable domains. *Nonlinear Anal.*, 2016, vol. 147, pp. 63–79. doi: 10.1016/j.na.2016.09.001.
2. Khruslov E.Ya., The asymptotic behavior of solutions of the second boundary value problem under fragmentation of the boundary of the domain. *Math. USSR-Sb.*, 1979, vol. 35, no. 2, pp. 266–282. doi: 10.1070/SM1979v035n02ABEH001474.
3. Zhikov V.V. Questions of convergence, duality and averaging for functionals of the calculus of variations. *Math. USSR-Izv.*, 1984, vol. 23, no. 2. pp. 243–276. doi: 10.1070/IM1984v023n02ABEH001466.
4. Dal Maso G. *An introduction to Γ -convergence.* Boston: Birkhäuser, 1993. 352 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0327-8.
5. Kovalevskii A.A. On necessary and sufficient conditions for the Γ -convergence of integral functionals with different domains of definition. *Nelinein. Granichnye Zadachi*, 1992, vol. 4, pp. 29–39 (in Russian).
6. Kovalevskii A.A. On the Γ -convergence of integral functionals defined on Sobolev weakly connected spaces. *Ukrainian Math. J.*, 1996, vol. 48, no. 5, pp. 683–698. doi:10.1007/BF02384235.
7. Pankratov L. Γ -convergence of nonlinear functionals in thin reticulated structures. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 2002, vol. 335, no. 3, pp. 315–320. doi: 10.1016/S1631-073X(02)02468-8.
8. Amaziane B., Goncharenko M., Pankratov L. Γ_D -convergence for a class of quasilinear elliptic equations in thin structures. *Math. Methods Appl. Sci.*, 2005, vol. 28, no. 15, pp. 1847–1865. doi: 10.1002/mma.644.
9. Kovalevsky A.A., Rudakova O.A. Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains. *Differ. Equ. Appl.*, 2009, vol. 1, no. 4, pp. 517–559. doi: 10.7153/dea-01-29.
10. Dal Maso G. Limits of minimum problems for general integral functionals with unilateral obstacles. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), 1983, vol. 74, pp. 55–61.
11. Boccardo L., Murat F. Homogenization of nonlinear unilateral problems. *Composite Media and Homogenization Theory. Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.* 5. Boston: Birkhäuser, 1991, pp. 81–105. doi: 10.1007/978-1-4684-6787-1_6.
12. Sandrakov G.V., Homogenization of variational inequalities and equations defined by pseudomonotone operators. *Sb. Math.*, 2008, vol. 199, no. 1, pp. 67–98. doi: 10.1070/SM2008v199n01ABEH003911.

13. Kovalevskii A.A. Some problems connected with the problem of averaging variational problems for functionals with a variable domain. *Sovremennyyi analiz i ego prilozheniya*, Kiev, Naukova dumka, 1989, pp. 62–70 (in Russian).
14. Kovalevskii A.A., G -convergence and homogenization of nonlinear elliptic operators in divergence form with variable domain. *Russ. Acad. Sci. Izv. Math.*, 1995, vol. 44, no. 3, pp. 431–460.
doi: 10.1070/IM1995v044n03ABEH001607.
15. Vainberg M.M. *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, New York: Wiley, 1974. 368 p. Original Russian text published in *Variatsionnyi metod i metod monotonnykh operatorov v teorii nelineinykh uravnenii*, Moskow: Nauka Publ, 1972, 416 p.

The paper was received by the Editorial Office on January 6, 2017.

Aleksandr Al'bertovich Kovalevsky, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Natural Sciences and Mathematics, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alexkv171@mail.ru.

УДК 517.977

О ПОЛИЭДРАЛЬНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СИНТЕЗА СТРАТЕГИЙ УПРАВЛЕНИЯ В МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМАХ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

Е. К. Костюсова

Работа посвящена решению задач синтеза управлений для линейных и билинейных многошаговых систем с неопределенностями и фазовыми ограничениями. Изучены два типа задач: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы. Для обеих задач рассмотрены случаи как без неопределенностей, так и с неопределенностями, включая аддитивные неопределенности и неопределенности в коэффициентах системы (матричные неопределенности) с заданными параллелопо-значными и интервальными ограничениями соответственно. В работе продолжено развитие методов “полиэдрального” синтеза управлений с использованием полиэдральных (параллелопо-значных) трубок разрешимости. А именно предложенная автором ранее техника для решения первой задачи развита на случай матричных неопределенностей. Далее для обеих задач разработана единообразная схема решения, развивающая для случая систем с фазовыми ограничениями другую предложенную ранее технику, позволяющую строить стратегии управления по явным формулам. Дано описание полиэдральных трубок разрешимости в виде систем нелинейных рекуррентных соотношений. Описаны стратегии управления, которые могут быть вычислены на основе этих трубок. Для первой задачи обе техники дают одинаковые полиэдральные трубки разрешимости, но стратегии управления оказываются разными; найдена взаимосвязь между управлениями обоих типов. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: синтез управлений, неопределенности, фазовые ограничения, трубки разрешимости, параллелопопы.

E. K. Kostousova. On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis in discrete-time systems with uncertainties and state constraints.

We consider control synthesis problems for linear and bilinear discrete-time systems under uncertainties and state constraints. Two types of problems are studied: when controls are additive and when they appear in the system's matrix. For both problems we consider cases without uncertainty and cases with uncertainty, including additive parallelotope-bounded uncertainties and interval uncertainties in the matrix of the system. We continue to develop the methods of “polyhedral” control synthesis with the use of polyhedral (parallelotope-valued) solvability tubes. Namely, the technique proposed by the author earlier for solving the first problem is extended to the case of matrix uncertainties. Further, for both problems, a uniform solution scheme is developed, which makes it possible to construct control strategies by explicit formulas; this scheme extends another technique proposed earlier to the case of systems with state constraints. We describe polyhedral solvability tubes in the form of systems of nonlinear recurrence relations as well as control strategies that can be constructed with the use of these tubes. For the first problem, these two techniques produce identical polyhedral solvability tubes, but the control strategies turn out to be different; the relation between the controls is specified. Computer simulation results are presented.

Keywords: control synthesis, uncertainties, state constraints, solvability tubes, parallelotopes.

MSC: 93C41, 93C55, 93B52, 93B40, 52B12

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-151-166

Введение

Работа посвящена решению задач терминального целевого управления по принципу обратной связи для линейных и билинейных многошаговых систем в условиях неопределенности. Известны подходы к решению задач такого рода, основанные на построении трубок разрешимости [1–3]. Практическое построение трубок траекторий, особенно для систем с фазовыми

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 15-01-02368а).

ограничениями (ФО) [3; 4], может быть достаточно затруднительным. Поэтому разрабатывались различные численные методы, в том числе методы, основанные на аппроксимации множеств политопами [5; 6] (здесь и ниже для примера даны только несколько ссылок из большого числа работ; см. также приведенную в ссылках библиографию). Такие методы предназначены для получения наиболее точных аппроксимаций, но могут потребовать большого объема вычислений, особенно для систем большой размерности. Другая группа методов основана на оценивании множеств областями фиксированной формы (в частности, эллипсоидами [2; 3; 7; 8], параллелотопами [9], в том числе брусами (интервальными векторами) [10]). Основное преимущество таких методов состоит в том, что они позволяют получать решения относительно простыми средствами. В целях более точных аппроксимаций А.Б. Куржанским было предложено использовать целые семейства таких простых оценок [2; 3; 9].

В настоящей работе продолжается развитие для многошаговых систем методов, относящихся ко второй вышеупомянутой группе — методов “полиэдрального” синтеза управлений с использованием полиэдральных (параллелотопо-значных) трубок разрешимости. Для линейных и билинейных многошаговых систем с неопределенностями и с ФО исследуются два типа задач терминального целевого синтеза управлений: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы. Для обеих задач рассматриваются случаи как без неопределенностей, так и с таковыми, включая аддитивные неопределенности и неопределенности в коэффициентах системы (иначе говоря, матричные неопределенности) с заданными параллелотопо-значными и интервальными ограничениями соответственно. Напомним, что в [11] был предложен “полиэдральный” синтез управлений для первой задачи, в том числе для систем с ФО, но без неопределенностей в матрицах, а в [12; 13] для систем без ФО была разработана другая полиэдральная техника решения обеих задач, позволяющая строить стратегии управления по явным формулам. Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию обеих техник: первой — для случая матричных неопределенностей, а второй — для систем с ФО. Представлены нелинейные системы рекуррентных соотношений, описывающие полиэдральные трубки разрешимости. Определены стратегии управления, которые могут быть вычислены на основе этих трубок. Указана взаимосвязь между решениями первой задачи, доставляемыми обеими вышеупомянутыми техниками. Приведены результаты численного моделирования.

В работе используются следующие обозначения: \mathbb{R}^n и $\mathbb{R}^{n \times m}$ — линейные пространства вещественных n -векторов и $n \times m$ -матриц соответственно; \top — знак транспонирования; $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение для $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\|x\|_2 = (x^\top x)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ — разные нормы вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$; $e^i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$ — единичный орт вдоль оси $0x_i$ (единица стоит на i -м месте); $e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ (для простоты обозначений используем один и тот же символ e для векторов такого рода разной размерности); $A = \{a_i^j\} = \{a^j\}$ — матрица с элементами a_i^j и со столбцами a^j (верхним индексом нумеруются столбцы, нижним — компоненты векторов); 0 — нулевая матрица (вектор) произвольной размерности; I — единичная матрица; E — матрица, все элементы которой — единицы; $\text{Abs } A$ — матрица абсолютных величин элементов матрицы $A = \{a_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$: $\text{Abs } A = \{|a_i^j|\}$; $\text{diag } \pi, \text{diag } \{\pi_i\}$ — диагональная матрица с компонентами π_i вектора π на диагонали; $\det A$ — определитель матрицы A ; $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_i^i$ — след матрицы A ; $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_i^j|$ — норма матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, индуцированная нормой $\|x\|_\infty$; $A * B = \{a_i^j b_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произведение $n \times n$ -матриц $A = \{a_i^j\}$ и $B = \{b_i^j\}$ в смысле Адамара (поэлементное произведение); $\text{int } \mathcal{X}$ — совокупность внутренних точек множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$; $\mathbf{E}(\mathcal{P})$ — совокупность вершин параллелепипеда $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$; $\text{Pr}_{[\underline{a}, \bar{a}]}(z)$ — проекция числа z на отрезок $[\underline{a}, \bar{a}] \subset \mathbb{R}^1$: равна \underline{a} , z , \bar{a} соответственно при $z < \underline{a}$, $\underline{a} \leq z \leq \bar{a}$, $z > \bar{a}$. Кроме того, используем для краткости обозначения типа $k = 1, \dots, n$ вместо $k = 1, 2, \dots, n$.

1. Постановка задач

Пусть состояние $x \in \mathbb{R}^n$ объекта описывается системой

$$x[k] = (A[k] + V[k] + U[k])x[k-1] + B[k]u[k] + C[k]v[k], k = 1, \dots, N, \quad x[N] \in \mathcal{M}, \quad (1.1)$$

где $A[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B[k] \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $C[k] \in \mathbb{R}^{n \times n_v}$ — известные матричные функции; $U[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управления, удовлетворяющие одному из следующих ограничений (1.2) и (1.3):

$$U[k] \equiv 0, \quad u[k] \in \mathcal{R}[k] \subset \mathbb{R}^{n_u}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.2)$$

$$U[k] \in \mathcal{U}[k] = \{U \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(U - \tilde{U}[k]) \leq \hat{U}[k]\}, \quad u[k] \equiv 0 \quad (1.3)$$

(т.е. считаем, что в системе может действовать только одно из управлений $u[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ или $U[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$). В системе присутствуют также неизвестные, но ограниченные возмущения: $v[k] \in \mathbb{R}^{n_v}$ и $V[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($V[k]$ — неопределенности в коэффициентах или, другими словами, матричные неопределенности), удовлетворяющие ограничениям

$$v[k] \in \mathcal{Q}[k] \subset \mathbb{R}^{n_v}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

$$V[k] \in \mathcal{V}[k] = \{V \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(V - \tilde{V}[k]) \leq \hat{V}[k]\}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (1.5)$$

Функции $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$, удовлетворяющие (1.4) и (1.5), будем называть *допустимыми*. Матричные и векторные неравенства ($\leq, <, \geq, >$) здесь и ниже понимаются покомпонентно; $\tilde{U}, \hat{U}, \tilde{V}, \hat{V}$ и \mathcal{R}, \mathcal{Q} — известные матричные и многозначные функции соответственно.

В дальнейшем при изучении системы будет удобно выделять следующие случаи:

- (A) *система без неопределенности*, когда функции v и $V \equiv 0$ известны, т.е. $\bar{Q} \equiv 0, \tilde{V} \equiv \hat{V} \equiv 0$;
- (B) *система в условиях неопределенности*, включая следующие возможности:
 - (B, i) *имеется только аддитивная неопределенность* ($\tilde{V} \equiv \hat{V} \equiv 0$);
 - (B, ii) *имеется также матричная неопределенность* ($\hat{V} \neq 0$).

Задано целевое терминальное множество $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$.

На траектории системы могут быть наложены ФО

$$x[k] \in \mathcal{Y}[k] \subset \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1.6)$$

где $\mathcal{Y}[k]$ — замкнутые выпуклые множества.

Будем предполагать, что множества $\mathcal{M}, \mathcal{R}[k]$ и $\mathcal{Q}[k]$ являются параллелепипедами, а $\mathcal{Y}[k]$ — полосами (при отсутствии ФО считаем $\mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^n$). Напомним соответствующие определения.

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, \|\xi\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$; $P = \{p_j^i\} = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — неособая матрица ($\det P \neq 0$) со столбцами p^i единичной длины ($\|p^i\|_2 = 1$); $\pi \in \mathbb{R}^n, \pi \geq 0$. Условие нормировки $\|p^i\|_2 = 1$ может быть опущено в целях упрощения формул. Можно сказать, что p — центр параллелепипеда, P — матрица ориентации, p^i — направления, π_i — величины его “полуосей”. Называем параллелепипед *невырожденным*, если $\pi > 0$.

Параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n, \bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}, m \leq n$ (p определяет центр параллелотопа, \bar{P} — форму). Называем параллелотоп \mathcal{P} *невырожденным*, если $m = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$.

Полосой (или *m-полосой*) $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) \subset \mathbb{R}^n$ называем пересечение $m \leq n$ *гиперполос* Σ^i : $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i, \Sigma^i = \Sigma(c_j, s^j, \sigma_j) = \{x \mid |(x, s^i) - c_i| \leq \sigma_i\}$ с линейно-независимыми векторами $s^i, \|s^i\|_2 = 1$ (условие нормировки может быть опущено для упрощения формул). Здесь $c \in \mathbb{R}^m; S = \{s^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица ранга m со столбцами $s^i; \sigma \in \mathbb{R}^m, \sigma \geq 0$.

Каждый параллелепипед $\mathcal{P}(p, P, \pi)$ — это параллелотоп $\mathcal{P}[p, \bar{P}]$ с $\bar{P} = P \text{diag } \pi$; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с $P = \bar{P} \text{diag } \{\|p^i\|_2^{-1}\}, \pi_i = \|p^i\|_2$ или, иначе, с $P = \bar{P}, \pi = e$, где $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Каждый параллелепипед является n -полосой; при $m = n$ полоса превращается в параллелепипед (формулы могут быть найдены в [14]).

Итак, везде ниже считаем выполненным следующее предположение.

Предположение 1. \mathcal{M} — это невырожденный параллелепипед, $\mathcal{R}[k]$ и $\mathcal{Q}[k]$ — параллелепипеды (удобно записывать их в виде параллелотопов), $\mathcal{Y}[k]$ — полосы (или $\mathcal{Y}[k] = \mathbb{R}^n$):

$$\mathcal{M} = \mathcal{P}(p_f, P_f, \pi_f) = \mathcal{P}[p_f, \bar{P}_f], \quad \bar{P}_f \in \mathbb{R}^{n \times n}, \det \bar{P}_f \neq 0, \\ \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]], \quad \bar{R}[k] \in \mathbb{R}^{n_u \times n_u}, \quad \mathcal{Q}[k] = \mathcal{P}[q[k], \bar{Q}[k]], \quad \bar{Q}(t) \in \mathbb{R}^{n_v \times n_v},$$

$$\mathcal{Y}[k] = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i[k], \quad \Sigma^i[k] = \Sigma(c_j[k], s^j[k], \sigma_j[k]) = \{x \mid |(x, s^i[k]) - c_i[k]| \leq \sigma_i[k]\},$$

все матрицы $D[k] = A[k] + \tilde{V}[k] + \tilde{U}[k]$ — невырожденные ($\det D[k] \neq 0$).

Рассмотрим следующую задачу, подобную задачам, исследованным в [2; 15; 16].

З а д а ч а 1. Дана система (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6). Для любого i , $0 \leq i \leq N - 1$, найти множество разрешимости $\mathcal{W}[i]$ и такую позиционную стратегию управления $u = u[k, x]$, $u[k, x] \in \mathcal{R}[k]$, чтобы всякое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + V[k])x[k - 1] + B[k]u[k, x[k - 1]] + C[k]v[k], \quad k = i + 1, \dots, N,$$

с начальным условием $x[i] \in \mathcal{W}[i]$ удовлетворяло включению $x[N] \in \mathcal{M}$ и фазовым ограничениям (1.6), каковы бы ни были допустимые функции $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$.

Мнозначную функцию $\mathcal{W}[k]$, $k = 0, \dots, N$, называют *трубкой разрешимости* $\mathcal{W}[\cdot]$.

Решение задачи 1 для случаев (А), (В,і) (т.е. без матричной неопределенности) известно (см. [11], а также [15] для случая (А)) и может быть описано следующими соотношениями:

$$\mathcal{W}[k - 1] = A[k]^{-1}((\mathcal{W}[k] \dot{-} C[k]Q[k]) + (-B[k])\mathcal{R}[k]) \cap \mathcal{Y}[k - 1], \quad k = N, \dots, 1, \quad \mathcal{W}[N] = \mathcal{M}, \quad (1.7)$$

$$u[k, x] \in \mathcal{U}[k, x] = \mathcal{R}[k] \cap \{u \mid B[k]u \in (\mathcal{W}[k] \dot{-} C[k]Q[k]) - A[k]x\}, \quad (1.8)$$

где $u[k, x]$ — произвольная функция со значениями в $\mathcal{U}[k, x]$. Здесь приведены рекуррентные соотношения для $\mathcal{W}[\cdot]$, включающие следующие операции с множествами: *сумму Минковского* ($\mathcal{X}^1 + \mathcal{X}^2 = \{y \mid y = x^1 + x^2, x^k \in \mathcal{X}^k\}$), *разность Минковского* ($\mathcal{X}^1 \dot{-} \mathcal{X}^2 = \{y \mid y + \mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}^1\}$), *аффинное преобразование* и *пересечение множеств*. Точное нахождение множеств $\mathcal{W}[k]$ по этим формулам может быть достаточно затруднительно. Поэтому разрабатывались эллипсоидальные методы решения задачи 1 (см. [15] для случая (А) и [16] для случаев (А), (В,і) без ФО).

Разрабатывались также методы “полиэдрального” синтеза управлений [11; 12]. В [11] для случаев (А), (В,і) были введены семейства внешних $\mathcal{P}^+[\cdot]$ и внутренних $\mathcal{P}^-[\cdot]$ параллелепипедозначных и параллелотопозначных (короче, *полиэдральных*) оценок для трубки $\mathcal{W}[\cdot]$ из (1.7) ($\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{W}[k] \subseteq \mathcal{P}^+[k]$) и предложены стратегии управления $u[k, x]$, которые могут быть построены путем решения систем линейных неравенств. Заметим, что если начальная точка $x[0]$ лежит вне по крайней мере одной из внешних оценок $\mathcal{P}^+[0]$, то нет гарантии, что состояние системы может быть переведено на целевое множество \mathcal{M} (с соблюдением фазовых ограничений) при любых допустимых возмущениях. Если же $x[0]$ принадлежит хотя бы одной из внутренних оценок $\mathcal{P}^-[0]$, то с использованием вышеупомянутой стратегии управления можно достичь \mathcal{M} . В [12] для случаев (А), (В,і), (В,іі) без фазовых ограничений была разработана другая полиэдральная техника синтеза управлений (входящих либо аддитивно, либо в матрицу системы), позволяющая строить стратегии управления по явным формулам.

Статья посвящена решению нижеприведенных задач 2 и 3 двух типов: когда управления входят аддитивно и когда они входят в матрицу системы; обе задачи касаются всех упомянутых случаев неопределенностей (А)–(В,іі) и учитывают наличие фазовых ограничений.

З а д а ч а 2. Пусть $U[k] \equiv 0$. Для системы (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}^-[N] = \mathcal{M}$, удовлетворяющую условиям $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{Y}[k]$, $k = 0, \dots, N - 1$, и соответствующую стратегию управления $u = u[k, x]$, удовлетворяющую ограничению $u[k, x] \in \mathcal{R}[k]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + V[k])x[k - 1] + B[k]u[k, x[k - 1]] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.9)$$

с $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ не выходило из трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$: $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были допустимые реализации $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$. Более того, ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$.

Заметим, что трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, дающие решения задачи 2, будут представлять собой внутренние оценки для трубки разрешимости в задаче 1 ($\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{W}[k]$).

З а д а ч а 3. Пусть $u[k] \equiv 0$. Для системы (1.1), (1.3)–(1.6) найти такие полиэдральную трубку $\mathcal{P}^-[k] = \mathcal{P}[p^-[k], \bar{P}^-[k]]$, $k = 0, 1, \dots, N$, с терминальным условием $\mathcal{P}^-[N] = \mathcal{M}$, удовлетворяющую условиям $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{Y}[k]$, $k = 0, \dots, N-1$, и соответствующую стратегию управления $U = U[k, x]$, удовлетворяющую ограничению $U[k, x] \in \mathcal{U}[k]$, $k = 1, \dots, N$, чтобы каждое решение $x[\cdot]$ уравнения

$$x[k] = (A[k] + U[k, x[k-1]] + V[k])x[k-1] + C[k]v[k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.10)$$

с $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ не выходило из трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$: $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$, $k = 1, \dots, N$, каковы бы ни были допустимые реализации $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$. Ввести семейство таких трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$.

2. Вспомогательные результаты: элементарные полиэдральные оценки

Первый способ решения задачи 2 основан на использовании свойств операций с параллелотопами (в частности, участвующих в (1.7), (1.8)) и построении элементарных оценок для результатов таких операций. Называем \mathcal{P}^+ (\mathcal{P}^-) *внешней* (*внутренней*) *оценкой для множества* $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{P}^+ \supseteq \mathcal{Q}$ ($\mathcal{P}^- \subseteq \mathcal{Q}$). Для удобства напомним вкратце некоторые результаты относительно упомянутых элементарных оценок.

Результат аффинного преобразования параллелотопа — это параллелотоп: $A\mathcal{P}[p, \bar{P}] + a = \mathcal{P}[Ap + a, A\bar{P}]$.

Внутренние параллелотопозначные оценки для суммы Минковского $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2$ двух параллелотопов $\mathcal{P}^k = \mathcal{P}[p^k, \bar{P}^k]$, $k = 1, 2$, $\bar{P}^1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\bar{P}^2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$, могут быть найдены [9] в виде $\mathcal{P}_\Gamma^-(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}[p^1 + p^2, \bar{P}^1 + \bar{P}^2\Gamma]$, где $\Gamma \in \mathcal{G}^{m \times n} = \{\Gamma = \{\gamma_\alpha^\beta\} \in \mathbb{R}^{m \times n} \mid \|\Gamma\| \leq 1\}$, $\|\Gamma\| = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |\gamma_i^j|$. Матричный параметр Γ определяет целое семейство оценок.

Разность Минковского $\mathcal{Q} = \mathcal{P}^1 - \mathcal{P}^2$ двух параллелотопов при условии $\det \bar{P}^1 \neq 0$ представляет собой либо параллелепипед, либо пустое множество [9]: если $\pi^* = e - \text{Abs}((\bar{P}^1)^{-1}\bar{P}^2)e \geq 0$, то $\mathcal{Q} = \mathcal{P}[p^1 - p^2, \bar{P}^1 \text{diag } \pi^*]$; иначе $\mathcal{Q} = \emptyset$. Напомним, что два вектора e в формуле для π^* могут, вообще говоря, быть разных размерностей (точнее, n и m соответственно).

Если имеем дело с матричной неопределенностью, возникает еще одна операция, а именно *умножение интервальной матрицы* $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \text{Abs}(A - \hat{A}) \leq \hat{A}\}$ на множество $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$: $\mathcal{A} \circ \mathcal{X} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = Ax, A \in \mathcal{A}, x \in \mathcal{X}\}$. Известно, что множество $\mathcal{A} \circ \mathcal{X}$ может быть невыпукло для выпуклого множества \mathcal{X} (см., например, [17; 18]).

Результат умножения интервальной матрицы на одноточечное множество — это параллелепипед вида $\mathcal{A} \circ x = \mathcal{P}(\tilde{A}x, I, \hat{A}(\text{Abs } x)) = \mathcal{P}[\tilde{A}x, \text{diag}(\hat{A}(\text{Abs } x))]$ [17].

Пусть \mathcal{Q} — это ограниченный политоп с непустой внутренностью, образованный пересечением $\Upsilon \geq n + 1$ полос: $\mathcal{Q} = \bigcap_{j=1}^{\Upsilon} \Sigma^j$, $\Sigma^j = \Sigma(c_j, s^j, \sigma_j) = \{x \mid |(x, s^j) - c_j| \leq \sigma_j\}$. В [14] был предложен следующий простой способ построения внутренних для \mathcal{Q} оценок $\mathcal{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q})$ с произвольными фиксированными центром $v \in \text{int } \mathcal{Q}$ и матрицей ориентации $V = \{v^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Пусть $A = \{a_i^j\} = \{a^j\} \in \mathbb{R}^{n \times \Upsilon}$, $b \in \mathbb{R}^\Upsilon$ и векторы ν^0 , $\nu^* \in \mathbb{R}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} a_i^j &= |(v^i, s^j)|, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, \Upsilon, \\ b_j &= \min\{\sigma_j + c_j - (v, s^j), \sigma_j - c_j + (v, s^j)\}, \quad j = 1, \dots, \Upsilon; \\ \nu_i^0 &= (1/n) \min\{b_j/a_i^j \mid j = 1, \dots, \Upsilon, a_i^j \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \nu^* &= \gamma \nu^0, \quad \gamma = \min\{b_j/(a^j, \nu^0) \mid j = 1, \dots, \Upsilon, (a^j, \nu^0) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Тогда $a^j \neq 0$, $j = 1, \dots, \Upsilon$, и $A \geq 0$, $b > 0$, имеем $\nu^0 > 0$, $\nu^* > 0$, и параллелепипед $\mathcal{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}(v, V, \nu^*)$ является внутренней оценкой для \mathcal{Q} : $\mathcal{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$ [14].

Выше предполагалось, что точка $v \in \text{int } \mathcal{Q}$ известна. Для некоторых множеств найти такую точку несложно [14]. В общем случае при фиксированной матрице V точку $x^* \in \text{int } \mathcal{Q}$ можно найти, в частности, путем решения некоторых оптимизационных задач [14], например $x^* \in \text{Argmax}\{\text{vol } \mathcal{P}_{v,V}^-(\mathcal{Q}) \mid v \in \mathcal{Q}\}$ (для численного решения может быть использован симплексный метод Нелдера — Мида).

3. Решение задачи 2: способ I

Перейдем к решению задачи 2. Рассмотрим полиэдральные трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, удовлетворяющие следующим рекуррентным соотношениям:

$$\mathcal{P}^-[k] = \begin{cases} \mathcal{P}^{0-}[k] & \text{если } \mathcal{P}^{0-}[k] \subseteq \mathcal{Y}[k], \\ \mathcal{P}_{p^-[k], P^-[k]}^-(\mathcal{P}^{0-}[k] \cap \mathcal{Y}[k]) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad k = N-1, \dots, 0. \quad (3.1)$$

Здесь трубка $\mathcal{P}^{0-}[\cdot] = \mathcal{P}[p^{0-}[\cdot], \bar{P}^{0-}[\cdot]]$ удовлетворяет соотношениям (в которых $k = N, \dots, 1$)

$$p^{0-}[k-1] = D[k]^{-1}(p^-[k] - B[k]r[k] - C[k]q[k]), \quad D[k] = A[k] + \tilde{V}[k], \quad (3.2)$$

$$\bar{P}^{0-}[k-1] = D[k]^{-1}(\bar{P}^-[k] \text{diag}(e - \gamma[k] - \beta[k]) - B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k]), \quad (3.3)$$

$$\gamma[k] = (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e, \quad (3.4)$$

$$\beta[k] = \max_{z \in \mathbf{E}(\mathcal{P}^{0-}[k-1])} (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1})\hat{V}[k] \text{Abs } z), \quad (3.5)$$

$$p^-[N] = p_f, \quad \bar{P}^-[N] = \bar{P}_f, \quad \mathcal{P}^-[N] = \mathcal{P}[p^-[N], \bar{P}^-[N]] = \mathcal{M}. \quad (3.6)$$

Символом $\mathbf{E}(\mathcal{P})$ обозначено множество всех вершин \mathcal{P} (т.е. множество точек вида $p + \sum_{i=1}^m \bar{p}^i \xi_i$, где $\xi_i \in \{-1, 1\}$); все $\Gamma[k] \in \mathcal{G}^{n_u \times n}$. Таким образом, на каждом шаге $k \in \{N-1, \dots, 0\}$ сначала находится параллелотоп $\mathcal{P}^{0-}[k]$ в силу соотношений (3.2), (3.3), правые части которых заданы явными формулами, за исключением векторов $\beta[k]$. Эти векторы $\beta[k]$ удовлетворяют системам нелинейных уравнений (3.5), которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta[k] &= H[k, \beta[k]], \\ H[k, \beta] &= \max_{\xi \in \mathbf{E}(\mathcal{C})} (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1})\hat{V}[k] \text{Abs}(p^{0-}[k-1] \\ &+ D[k]^{-1}((\bar{P}^-[k] \text{diag}(e - \gamma[k]) - B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k])\xi - \bar{P}^-[k] \text{diag } \xi \cdot \beta)), \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\mathcal{C} = \mathcal{P}(0, I, e)$. Затем вычисляются внутренние оценки для пересечения $\mathcal{P}^{0-}[k] \cap \mathcal{Y}[k]$ параллелотопа и полосы.

Варьируя матрицы $\Gamma[k]$, $P^-[k]$ и векторы $p^-[k]$, получаем целое параметрическое семейство трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$. Далее будем называть $\Gamma[\cdot]$, $P^-[k]$, $p^-[k]$ *допустимыми параметрами*, если они удовлетворяют условиям $\|\Gamma[k]\| \leq 1$, $k = N, \dots, 1$; $\det P^-[k] \neq 0$ и $p^-[k] \in \text{int}(\mathcal{P}^{0-}[k] \cap \mathcal{Y}[k])$, $k = N-1, \dots, 0$.

Пусть найдено решение этой системы (3.1)–(3.6), соответствующее некоторым фиксированным параметрам $\Gamma[\cdot]$, $P^-[k]$ и $p^-[k]$. Определим следующую стратегию управления (первого типа), связанную с найденной полиэдральной трубкой $\mathcal{P}^-[\cdot]$:

$$u^I[k, x] \in \mathcal{U}^-[k, x] = \mathcal{R}[k] \cap \{u \mid B[k]u \in \mathcal{P}^-[k] \dot{-} C[k] \mathcal{Q}[k] \dot{-} (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x\}. \quad (3.8)$$

Лемма 1. *Если параллелотоп $\mathcal{P}^-[k]$ невырожден и множество $\mathcal{P}^-[k] \dot{-} C[k] \mathcal{Q}[k] \dot{-} (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x$ оказывается непустым, то оно представляет собой параллелепипед*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^-[k] \dot{-} C[k] \mathcal{Q}[k] \dot{-} (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x &= \mathcal{P}^x[k] - D[k]x, \\ \mathcal{P}^x[k] &= \mathcal{P}[p^-[k] - C[k]q[k], \bar{P}^-[k] \cdot \text{diag}(e - \gamma[k] - (\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1}))\hat{V}[k] \text{Abs } x)]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Доказательство. Утверждение следует из явной формулы $(A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x = \mathcal{P}[(A[k] + \tilde{V}[k])x, \text{diag}(\hat{V}[k] \cdot \text{Abs } x)]$, двукратного использования формулы для разности Минковского для двух параллелотопов и формулы типа $(\text{Abs}(A \text{diag } \alpha))e = \sum_{j=1}^n (\text{Abs } a^j) \alpha_j = (\text{Abs } A) \alpha$, справедливой для любых $A = \{a^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$. Порядок выполнения операций “ $\dot{-}$ ” в (3.8) не важен ввиду известного правила [19, формула (3.1.14)]: $(\mathcal{X} \dot{-} \mathcal{Y}) \dot{-} \mathcal{Z} = \mathcal{X} \dot{-} (\mathcal{Y} + \mathcal{Z})$. \square

Теорема 1. Пусть для системы (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) выполнено предположение 1. Пусть система соотношений (3.1)–(3.6), где $\Gamma[\cdot]$, $P^-\cdot$, $p^-\cdot$ — произвольные допустимые параметры, определяет такие трубки $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^-\cdot$, что выполняются условия $e - \gamma[k] - \beta[k] \geq 0$, $k = N, \dots, 1$, и множества $\mathcal{P}^{0-}[k]$ и $\mathcal{P}^-[k]$ оказываются невырожденными параллелотопами при всех $k = N - 1, \dots, 0$. Тогда трубка $\mathcal{P}^-\cdot$ и стратегия управления $u^I[\cdot, \cdot]$ из (3.8), (3.9) дают частное решение задачи 2.

Доказательство. Пусть найдены параллелотопы $\mathcal{P}^-[k]$, $k = N, \dots, 0$, причем все $\det \bar{P}^-[k] \neq 0$. Выполнение фазовых ограничений $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{Y}[k]$ вытекает из (3.1) и фактов из разд. 2. Ограничения $u^I[k, x] \in \mathcal{R}[k]$ на управление следуют из (3.8). Остается проверить для каждого $k \in \{1, \dots, N\}$, что если $x[k-1] = x \in \mathcal{P}^-[k-1]$, то $\mathcal{U}^-[k, x] \neq \emptyset$ и с помощью произвольного управления $u^I[k, x] \in \mathcal{U}^-[k, x]$ система переводится в состояние $x[k] = (A[k] + V[k])x + B[k]u^I[k, x] + C[k]v[k] \in \mathcal{P}^-[k]$ независимо от $v[k] \in \mathcal{Q}[k]$ и $V[k] \in \mathcal{V}[k]$. Это обеспечит, в частности, выполнение терминального условия $x[N] \in \mathcal{P}^-[N] = \mathcal{M}$.

Итак, пусть $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$. Из (3.1)–(3.5) следует, что $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1] = D[k]^{-1}P_{\Gamma[k]}^-(\mathcal{P}^a[k] + (-B[k])\mathcal{R}[k])$, где $\mathcal{P}^a[k] = \mathcal{P}[p^-[k] - C[k]q[k], \bar{P}^-[k]\text{diag}(e - \gamma[k] - \tilde{\beta}[k])]$, $\tilde{\beta}[k] = \max_{z \in \mathcal{P}^{0-}[k-1]}(\text{Abs}(\bar{P}^-[k]^{-1}))\hat{V}[k]\text{Abs}z$. Здесь учтено, что ввиду свойств выпуклых функций (см. [12, лемма 4]) справедливо равенство $\beta[k] = \tilde{\beta}[k]$. Сравнивая формулы для $\mathcal{P}^x[k]$ из (3.9) и $\mathcal{P}^a[k]$, получаем, с учетом включения $x \in \mathcal{P}^{0-}[k-1]$, что $\mathcal{P}^a[k] \subseteq \mathcal{P}^x[k]$. Следовательно, $x \in D[k]^{-1}P_{\Gamma[k]}^-(\mathcal{P}^x[k] + (-B[k])\mathcal{R}[k]) \subseteq D[k]^{-1}(\mathcal{P}^x[k] + (-B[k])\mathcal{R}[k])$, откуда $D[k]x \in \mathcal{P}^x[k] + (-B[k])\mathcal{R}[k]$. Значит, найдутся $\bar{x} \in \mathcal{P}^x[k]$ и $\bar{u} \in \mathcal{R}[k]$ такие, что $D[k]x = \bar{x} - B[k]\bar{u}$. При этом $B[k]\bar{u} = \bar{x} - D[k]x \in \mathcal{P}^x[k] - D[k]x$. Ввиду формул (3.8), (3.9) это означает, что $\bar{u} \in \mathcal{U}^-[k, x]$. Следовательно, доказано, что $\mathcal{U}^-[k, x] \neq \emptyset$ для $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$.

Для такого x и произвольного $u^I[k, x] \in \mathcal{U}^-[k, x]$ получаем $(A[k] + V[k])x + B[k]u^I[k, x] + C[k]v[k] \subseteq (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x + (\mathcal{P}^-[k] - C[k]\mathcal{Q}[k]) \cdot (A[k] + \mathcal{V}[k]) \circ x + C[k]\mathcal{Q}[k] \subseteq \mathcal{P}^-[k]$ (здесь два раза было использовано свойство операций Минковского $(\mathcal{X}^1 \dot{-} \mathcal{X}^2) + \mathcal{X}^2 \subseteq \mathcal{X}^1$ [19, с. 133]). \square

З а м е ч а н и е 1. Для случаев (A), (B, i) уравнения (3.7) превращаются в явные формулы $\beta[k] = 0$. В случае (B, ii) при некоторых предположениях для численного решения (3.7) может быть использован метод последовательных приближений (подробнее см. в [12, разд. 4]).

З а м е ч а н и е 2. Важный частный случай многошаговых систем — это системы, являющиеся аппроксимациями аналогичных дифференциальных, например, полученные дискретизацией по схеме Эйлера [9; 12] (заметим, что при этом матрицы $D[k]$ оказываются неособыми, если шаг дискретизации h_N достаточно мал). Для систем такого типа может быть полезно обратиться к эвристическим способам построения матриц $\Gamma[k]$ по формулам, использующим значения матрицы $-\bar{P}^-[k]^{-1}B[k]\bar{\mathcal{R}}[k]$ аналогично [12, замечание 7], [9, с. 300], а для нахождения $\beta[k]$ в случае (B, ii) естественно задействовать метод последовательных приближений, так как оператор $H[k, \beta]$ оказывается сжимающим при достаточно малых h_N (см. [12, разд. 4]).

З а м е ч а н и е 3. Для определения $u^I[k, x]$ достаточно найти некоторую точку в множестве $\mathcal{U}^-[k, x]$, которое, как видно из (3.8), (3.9), представимо в виде пересечения нескольких гиперполос: $\bigcap_{i=1}^{\Upsilon} \Sigma^i$, $\Upsilon = n_u + n$. Для этого можно воспользоваться итерационными процессами фейеровского типа, где применяется проектирование на гиперполосы, например, процессом [20, с. 194–196]² $u^{j+1} = (1 - \lambda)T(u^j) + \lambda u^j$, $j = 0, 1, \dots$, где $T(u) = \Upsilon^{-1} \sum_{i=1}^{\Upsilon} \varphi_i(u)$, $\lambda = 1/2$;

²Этот процесс принадлежит к группе фейеровских процессов, которые сходятся при любом начальном приближении и которые можно применять для нахождения квазирешений несовместных систем линейных неравенств. Заметим, что если полученное при окончании процесса $u^* \notin \mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{\mathcal{R}}[k]]$, т. е. $\lambda^* < 1$, где $\lambda^* = \min_{1 \leq i \leq n_u} |(e^i)^\top \bar{\mathcal{R}}[k]^{-1}(u^* - r[k])|^{-1}$, то для удовлетворения ограничения (1.2) естественно “подправить” u^* до $u^{**} \in \mathcal{R}[k]$ (например, сдвинув u^* в направлении к центру $\mathcal{R}[k]$, полагая $u^{**} = r[k] + \lambda^*(u^* - r[k])$). Для упомянутых в замечании 2 систем в качестве начального приближения u^0 на шаге $k > 1$ естественно использовать управление, найденное на предыдущем шаге $k - 1$. В качестве начального приближения u^0 при $k = 1$ можно брать, например, центр параллелепипеда $\mathcal{R}[1]$.

проекции $\varphi_i(u)$ точки u на гиперполосы Σ^i определяются следующими явными формулами, вытекающими из [20, с. 78]: $\varphi_i(u) = u - \|s^i\|_2^{-2} s^i \phi_i(u)$; $\phi_i(u) = u^\top s^i - c_i - \sigma_i$, если $u^\top s^i - c_i - \sigma_i > 0$; $\phi_i(u) = u^\top s^i - c_i + \sigma_i$, если $u^\top s^i - c_i + \sigma_i < 0$; $\phi_i(u) = 0$ в остальных случаях.

4. Решение задачи 2: способ II

Рассмотрим семейство трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$, удовлетворяющих той же системе рекуррентных соотношений, но определим другую стратегию управления³ (стратегию второго типа):

$$u^{II}[k, x] = r[k] + \bar{R}[k]\lambda[k, x]\xi[k, x], \quad \xi[k, x] = \Gamma[k]\bar{P}^{0-}[k-1]^{-1}(x - p^{0-}[k-1]), \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.1)$$

где $\lambda[k, x]$ — это либо скалярные множители вида

$$\lambda[k, x] = \lambda^{(1)}[k, x] = \min\{1, (\|\xi[k, x]\|_\infty)^{-1}\}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

либо диагональные матрицы вида

$$\lambda[k, x] = \text{diag } \lambda^{(2)}[k, x], \quad \lambda_i^{(2)}[k, x] = \min\{1, |\xi_i[k, x]|^{-1}\}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Теорема 2. Пусть для системы (1.1), (1.2), (1.4)–(1.6) выполнено предположение 1. Пусть система соотношений (3.1)–(3.6), где $\Gamma[\cdot]$, $P^-[\cdot]$, $p^-[\cdot]$ — произвольные допустимые параметры, определяет такие трубки $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^-[\cdot]$, что выполняются условия $e - \gamma[k] - \beta[k] \geq 0$, $k = N, \dots, 1$, и множества $\mathcal{P}^{0-}[k]$ и $\mathcal{P}^-[k]$ оказываются невырожденными параллелотопами при всех $k = N - 1, \dots, 0$. Тогда трубка $\mathcal{P}^-[\cdot]$ вместе с каждой из стратегий управления $u^{II}[\cdot, \cdot]$ из (4.1), (4.2) и (4.1), (4.3) дают частное решение задачи 2, причем для начальных точек $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ обе стратегии оказываются одинаковыми, определяемыми формулами

$$u^{II}[k, x] = r[k] + \bar{R}[k]\xi[k, x], \quad \xi[k, x] = \Gamma[k]\bar{P}^{0-}[k-1]^{-1}(x - p^{0-}[k-1]), \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несложно видеть, что управления $u^{II}[k, x]$, определяемые формулами (4.1), (4.2) и (4.1), (4.3), удовлетворяют ограничениям $u^{II}[k, x] \in \mathcal{R}[k]$ при любых $x \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, N$, поскольку формулы (4.2) и (4.3) обеспечивают $\|\lambda[k, x]\xi[k, x]\|_\infty \leq 1$.

Пусть найдены параллелотопы $\mathcal{P}^-[k]$, $k = N, \dots, 0$, причем все $\det \bar{P}^-[k] \neq 0$. Рассмотрим решение $x[\cdot]$ системы (1.9), соответствующее $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ (где $x_0 = p^-[0] + \bar{P}^-[0]\zeta_0$, $\|\zeta_0\|_\infty \leq 1$), стратегии управления $u = u^{II}[k, x]$ из (4.1) и произвольным допустимым $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$ (т. е. $v[k] = q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k]$, $\|\chi[k]\|_\infty \leq 1$; $\text{Abs}(V[k] - \tilde{V}[k]) \leq \hat{V}[k]$ при всех k). Представим векторы $x[k]$ в виде

$$x[k] = p^-[k] + \bar{P}^-[k]\zeta[k] = p^{0-}[k] + \bar{P}^{0-}[k]\zeta^0[k], \quad k = 0, \dots, N. \quad (4.5)$$

Докажем по индукции, что если $x = x[k-1] \in \mathcal{P}^-[k-1]$, то $\|\zeta[k]\|_\infty \leq 1$, т. е. $x[k] \in \mathcal{P}^-[k]$.

Прежде всего заметим, что при $x \in \mathcal{P}^-[k-1]$ обе пары формул (4.1), (4.2) и (4.1), (4.3) превращаются в (4.4), поскольку для такого x имеем $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$, т. е.

$$x = p^{0-}[k-1] + \bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1], \quad \|\zeta^0[k-1]\|_\infty \leq 1, \quad (4.6)$$

и следовательно $\|\xi[k, x]\|_\infty = \|\Gamma[k]\zeta^0[k-1]\|_\infty \leq \|\Gamma[k]\| \cdot \|\zeta^0[k-1]\|_\infty \leq 1 \cdot 1 \leq 1$.

Теперь из (4.5) с учетом (1.9), (4.6), (3.2), (4.4) получаем следующие соотношения для $\zeta[\cdot]$:

$$\begin{aligned} \zeta[k] &= \bar{P}^-[k]^{-1}(x[k] - p^-[k]) = \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k](p^{0-}[k-1] + \bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1]) \\ &\quad + \Delta V[k]x + B[k]u^{II}[k, x] + C[k](q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k]) - p^-[k]) \\ &= \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k]\bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1] + \Delta V[k]x + B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k]\zeta^0[k-1] + C[k]\bar{Q}[k]\chi[k]), \end{aligned}$$

³Индекс k у $u^{II}[k, x]$ указывает, что $u^{II}[k, x]$ применяется в системе (1.9) на k -м шаге. Из формул (4.1) видно, что $u^{II}[k, x]$ определяется множеством $\mathcal{R}[k]$ и параметром $\Gamma[k]$ в момент k и параллелотопом $\mathcal{P}^{0-}[k-1]$ в момент $k-1$. Зависимость u^{II} от $k-1$ не указываем для упрощения обозначений.

где $\Delta V[k] = V[k] - \tilde{V}[k]$, $\text{Abs } \Delta V[k] \leq \hat{V}[k]$, $\|\chi[k]\|_\infty \leq 1$. Подставляя выражение для $D[k]\bar{P}^{0-}[k-1]$, вытекающее из (3.3), и обозначая $c[k, x] = \bar{P}^{-}[k]^{-1}(\Delta V[k]x + C[k]\bar{Q}[k]\chi[k])$, выводим

$$\zeta[k] = \text{diag}(e - \gamma[k] - \beta[k])\zeta^0[k-1] + c[k, x]. \quad (4.7)$$

При $x \in \mathcal{P}^{-}[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$ справедливы следующие оценки для $c[k, x]$:

$$\begin{aligned} \text{Abs } c[k, x] &\leq \text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1})\hat{V}[k] \max_{z \in \mathcal{P}^{-}[k-1]} \text{Abs } z + (\text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e \\ &\leq \text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1})\hat{V}[k] \max_{z \in \mathcal{P}^{0-}[k-1]} \text{Abs } z + \gamma[k] = \beta[k] + \gamma[k] \end{aligned}$$

(здесь была использована [12, лемма 4]). Поэтому если $e - \gamma[k] - \beta[k] \geq 0$, то

$$|\zeta_i[k]| \leq |1 - \gamma_i[k] - \beta_i[k]| \cdot |\zeta_i^0[k-1]| + |c_i[k, x]| \leq (1 - \gamma_i[k] - \beta_i[k]) \cdot 1 + \beta_i[k] + \gamma_i[k] \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

и желаемые неравенства $\|\zeta[k]\|_\infty \leq 1$ действительно имеют место для всех $k = 1, \dots, N$. \square

Следствие 1. В условиях теоремы 2 для случаев (A) и (B, i) (без матричной неопределенности) действие стратегии управления второго типа $u^{II}[k, x]$ при применении ее к $x \in \mathcal{P}^{-}[k-1]$ совпадает с действием одной из стратегий первого типа $u^I[k, x]$ из (3.8), (3.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно убедиться, что $B[k]u^{II}[k, x] \in \mathcal{P}^x[k] - D[k]x$, где параллелепипед $\mathcal{P}^x[k]$ определен в (3.9), т. е., что найдется $\xi[k-1]$ с $\|\xi[k-1]\|_\infty \leq 1$ такое, что

$$B[k]u^{II}[k, x] = p^{-}[k] - C[k]q[k] - D[k]x + \bar{P}^{-}[k]\text{diag}(e - \gamma[k])\xi[k-1]. \quad (4.8)$$

С учетом (4.6) левая часть из (4.8) в силу (4.4) принимает вид $B[k]u^{II}[k, x] = B[k]r[k] + B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k]\zeta^0[k-1]$, а правая часть из (4.8) с использованием формул (3.2), (3.3) приводится к виду $B[k]r[k] + B[k]\bar{R}[k]\Gamma[k]\zeta^0[k-1] + \bar{P}^{-}[k]\text{diag}(e - \gamma[k])(-\zeta^0[k-1] + \xi[k-1])$. Поэтому для обеспечения равенства в (4.8) достаточно положить $\xi[k-1] = \zeta^0[k-1]$. \square

Привлекательным свойством стратегий управления (4.1) является их явный вид.

5. Решение задачи 3

Для решения задачи 3 рассмотрим следующую систему нелинейных рекуррентных соотношений для параллелотопов $\mathcal{P}^{-}[k] = \mathcal{P}[p^{-}[k], \bar{P}^{-}[k]]^4$:

$$\mathcal{P}^{-}[k] = \begin{cases} \mathcal{P}^{0-}[k], & \text{если } \mathcal{P}^{0-}[k] \subseteq \mathcal{Y}[k], \\ \mathcal{P}_{p^{-}[k], \bar{P}^{-}[k]}^{-}(\mathcal{P}^{0-}[k] \cap \mathcal{Y}[k]) & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad k = N-1, \dots, 0, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{P}^{0-}[\cdot] = \mathcal{P}[p^{0-}[\cdot], \bar{P}^{0-}[\cdot]]$ удовлетворяют соотношениям (в которых $k = N, \dots, 1$)

$$p^{0-}[k-1] = D[k]^{-1}(p^{-}[k] - C[k]q[k]), \quad D[k] = A[k] + \tilde{U}[k] + \tilde{V}[k], \quad (5.2)$$

$$\bar{P}^{0-}[k-1] = H[k, \bar{P}^{0-}[k-1]], \quad k = N, \dots, 1, \quad (5.3)$$

$$H[k, P] = (D[k] - \Phi[k, P])^{-1}\bar{P}^{-}[k]\text{diag}(e - \beta[k, P] - \gamma[k]),$$

$$\Phi[k, P] = \Phi[k, P; \Omega[k], L[k]] = (\hat{U}[k] * \Omega[k])\text{diag } \eta[k, P]\Pi(L[k])^\top \text{diag } \kappa(P),$$

$$\eta[k, P] = \max\{0, \text{Abs } p^{0-}[k-1] - (\text{Abs } P)e\}, \quad (5.4)$$

$$\beta[k, P] = \max\{\text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1})\hat{V}[k] \text{Abs}(p^{0-}[k-1] + P\xi) \mid \xi \in \mathbf{E}(\mathcal{C})\},$$

$$\gamma[k] = (\text{Abs}(\bar{P}^{-}[k]^{-1}C[k]\bar{Q}[k]))e,$$

$$\kappa_i(P) = (e^i)^\top (\text{Abs } P)e^{-1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

⁴Заметим, что при отсутствии фазовых ограничений и $C[k] \equiv I$ соотношения (5.1)–(5.5) сводятся к [12, формулы (5.1)–(5.3)], где необходимо исправить опечатку, связанную с тем, что в формуле для $\Phi[k, P]$ был пропущен символ транспонирования у матрицы Π .

$$p^-[N] = p_f, \quad \bar{P}^-[N] = \bar{P}_f, \quad \mathcal{P}^-[N] = \mathcal{P}[p^-[N], \bar{P}^-[N]] = \mathcal{M}. \quad (5.5)$$

Здесь символом $*$ обозначена операция поэлементного произведения матриц, символом $\Pi(L)$ — матрица, определяемая перестановкой $L = \{l_1, \dots, l_n\}$ чисел $\{1, \dots, n\}$ и получаемая соответствующей перестановкой столбцов единичной матрицы: $\Pi(L) = \{e^{l_j}\}$; $L[k]$ — произвольные перестановки; $\Omega[k] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — произвольные матрицы, удовлетворяющие условиям

$$\Omega[k] \in \mathcal{O}, \quad k = 1, \dots, N, \quad \mathcal{O} = \{\Omega = \{\omega_i^j\} \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid |\omega_i^j| \leq 1, \quad i, j = 1, \dots, n\}.$$

Обозначим через \mathbb{L} и \mathbb{O} множества всех таких функций $L[\cdot]$ и $\Omega[\cdot]$ соответственно. Таким образом, опять имеем параметрическое семейство полиэдральных трубок, где параметрами являются матричная функция $\Omega[\cdot] \in \mathbb{O}$, вектор-функция $L[\cdot] \in \mathbb{L}$, а также матричная функция $P^-[\cdot]$ и вектор-функция $p^-[\cdot]$, которые фигурируют в формулах (5.1) для внутренних оценок пересечений параллелотопов с полосами (стесненные такими же условиями, как и в разд. 3 и 4 для решений задачи 2). Будем называть вышеупомянутые параметры *допустимыми*.

Рассмотрим стратегию управления $U = \{u_i^j\}$, связанную с трубками $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$ из (5.1)–(5.5) и определяемую следующими формулами (где $i, j = 1, \dots, n$):

$$u_i^j[k, x] = \tilde{u}_i^j[k] + \begin{cases} \Pr_{[-\hat{u}_i^j[k], \hat{u}_i^j[k]]} \left(-(x_{l_j} - p_{l_j}^{0-}[k-1])(x_j)^{-1} e^{i^\top} \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] e^{l_j} \right), & \text{если } x_j \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Лемма 2. Если $\det \bar{P}^{0-}[k-1] \neq 0$, то стратегия управления $U[k, x]$ вида (5.6) на шаге k определена и удовлетворяет условиям $U[k, x] \in \mathcal{U}[k]$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$. При этом для $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$ формулы (5.6) превращаются в

$$u_i^j[k, x] = \tilde{u}_i^j[k] + \begin{cases} -(x_{l_j} - p_{l_j}^{0-}[k-1])(x_j)^{-1} e^{i^\top} \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] e^{l_j}, & \text{если } x_j \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (5.7)$$

и стратегия управления действует по правилу

$$U[k, x] x = \tilde{U}[k] x - \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]](x - p^{0-}[k-1]). \quad (5.8)$$

Доказательство. Если матрица $\bar{P}^{0-}[k-1]$ неособая, то она не может иметь нулевых строк и, значит, $(e^i)^\top (\text{Abs } \bar{P}^{0-}[k-1]) e \neq 0$, т.е. все элементы матрицы Φ определены. С учетом свойств метрической проекции имеем $U[k, x] \in \mathcal{U}[k]$ при любом $x \in \mathbb{R}^n$.

Выпишем выражения для элементов $\varphi_i^{l_j}$ матрицы $\Phi = \{\varphi^j\}$, фигурирующих в (5.6). В силу соотношений $e^{l_j} = \Pi(L)e^j$ и ортогональности матриц $\Pi(L)$ получаем $\Pi(L)^\top e^{l_j} = e^j$ и, значит,

$$\varphi_i^{l_j} = e^{i^\top} \Phi e^{l_j} = e^{i^\top} (\hat{U} * \Omega) \text{diag } \eta \Pi^\top e^{l_j} \kappa_{l_j} = e^{i^\top} (\hat{U} * \Omega) e^j \eta_j \kappa_{l_j} = \hat{u}_i^j \omega_i^j \eta_j \kappa_{l_j} \quad (5.9)$$

(здесь и в ряде мест ниже для сокращения опущены аргументы у функций).

При $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$ имеем (4.6) и аналогично [12, доказательство теоремы 2] можно проверить, что $u_i^j[k, x]$, вычисленные по формулам (5.7), (5.9), удовлетворяют неравенствам $|u_i^j - \tilde{u}_i^j| \leq \hat{u}_i^j$ и, значит, формулы (5.6) превращаются в (5.7).

Для доказательства (5.8) при условии $x \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$ достаточно убедиться, что если $x_j = 0$, то $\varphi^{l_j} = 0$, поскольку тогда с учетом (5.7) получится $(U - \tilde{U})x = -\sum_{j: x_j \neq 0} (x_{l_j} - p_{l_j}^{0-}) (x_j)^{-1} \varphi^{l_j} x_j - \sum_{j: x_j = 0} \varphi^{l_j} (x_{l_j} - p_{l_j}^{0-}) = -\sum_{l=1}^n \varphi^l (x_l - p_l^{0-})$. Равенства $\varphi^{l_j} = 0$ при $x_j = 0$ могут быть доказаны с учетом (5.9) аналогично [12, доказательство леммы 3]. \square

Теорема 3. Пусть для системы (1.1), (1.3), (1.4)–(1.6) выполнено предположение 1. Пусть система соотношений (5.1)–(5.5), где $\Omega[\cdot]$, $L[\cdot]$, $P^-[\cdot]$, $p^-[\cdot]$ — произвольные допустимые параметры, определяет такие трубки $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$ и $\mathcal{P}^-[\cdot]$, что выполняются условия $e - \gamma[k] - \beta[k] > 0$, $k = N, \dots, 1$, и множества $\mathcal{P}^{0-}[k]$ и $\mathcal{P}^-[k]$ оказываются невырожденными параллелотопами при всех $k = N - 1, \dots, 0$. Тогда трубка $\mathcal{P}^-[\cdot]$ и стратегия управления $U[\cdot, \cdot]$ из (5.6) дают частное решение задачи 3, причем для начальных то-

чек $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$ получается, что действие стратегии управления определяется формулами (5.7), (5.8).

Доказательство. Включения $\mathcal{P}^-[k] \subseteq \mathcal{Y}[k]$ вытекают из (5.1). Следуя схеме доказательства теоремы 2 и используя аналогичные обозначения, приведем выкладки для решения $x[\cdot]$ системы (1.10), соответствующего $x[0] = x_0 \in \mathcal{P}^-[0]$, стратегии управления $U = U[k, x]$ из (5.6) и произвольным допустимым $v[\cdot]$ и $V[\cdot]$. Опять представим векторы $x[k]$ в виде (4.5). Пусть $x = x[k-1] \in \mathcal{P}^-[k-1] \subseteq \mathcal{P}^{0-}[k-1]$. Тогда из (4.5), (1.10), (4.6) и (1.4) имеем

$$\begin{aligned} \zeta[k] &= \bar{P}^-[k]^{-1}(x[k] - p^-[k]) = \bar{P}^-[k]^{-1}((D[k] + U[k, x] - \tilde{U}[k] + \Delta V[k])x + C[k]v[k] - p^-[k]) \\ &= \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k](p^{0-}[k-1] + \bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1]) + (U[k, x] - \tilde{U}[k])x \\ &\quad + \Delta V[k]x + C[k](q[k] + \bar{Q}[k]\chi[k]) - p^-[k]). \end{aligned}$$

Учитывая равенство $D[k]p^{0-}[k-1] + C[k]q[k] - p^-[k] = 0$, вытекающее из (5.2), получаем

$$\zeta[k] = \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k]\bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1] + (U[k, x] - \tilde{U}[k])x) + c[k, x], \quad (5.10)$$

где $c[k, x]$ — такое же, как и в доказательстве теоремы 2. Используя (5.8) из леммы 2, формулу (4.6) и вытекающее из (5.3) равенство $(D[k] - \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]])\bar{P}^{0-}[k-1] = \bar{P}^-[k] \text{diag}(e - \beta[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] - \gamma[k])$, выводим из (5.10) формулу для $\zeta[k]$, аналогичную (4.7):

$$\begin{aligned} \zeta[k] &= \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k]\bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1] - \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]](x - p^{0-}[k-1])) + c[k, x] \\ &= \bar{P}^-[k]^{-1}(D[k] - \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k-1]])\bar{P}^{0-}[k-1]\zeta^0[k-1] + c[k, x] \\ &= \text{diag}(e - \beta[k, \bar{P}^{0-}[k-1]] - \gamma[k])\zeta^0[k-1] + c[k, x]. \end{aligned}$$

Как и в конце доказательства теоремы 2, приходим к желаемому неравенству $\|\zeta[k]\|_\infty \leq 1$. \square

В [13] для решения задачи 3 без ФО был предложен метод с использованием однопараметрического семейства полиэдральных трубок, где параметром служит произвольная функция $J[\cdot] \in \mathbb{L}$. Следующее следствие из теоремы 3 (где аналогом J служит L^*) обеспечивает развитие вышеупомянутого метода на случай систем с фазовыми ограничениями, а также показывает, что теорема 3 дает, вообще говоря, более богатое семейство трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$.

Следствие 2. Если в теореме 3 взять перестановки $L^*[k] = \{l_1^*[k], \dots, l_n^*[k]\}$ таким образом, что $\Pi(L^*[k]) = \Pi(L[k])^\top$, и положить $\Omega[k] = \Pi(L^*[k])^\top$, то получится семейство трубок, зависящих от трех параметров: $L^*[\cdot] \in \mathbb{L}$, $P^-[\cdot]$ и $p^-[\cdot]$. При этом матрицы Φ из (5.4) превращаются в диагональные вида

$$\Phi[k, P] = \text{diag} \alpha[k, P], \quad \alpha_i[k, P] = \alpha_i[k, P; L^*[k]] = \hat{u}_i^{l_i^*}[k] \eta_i^*[k, P] \kappa_i(P), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.11)$$

а закон управления (5.6) формулируется как

$$e^{i\top}(U[k, x] - \tilde{U}[k]) = \begin{cases} \text{Pr}_{[-\hat{u}_i^{l_i^*}[k], \hat{u}_i^{l_i^*}[k]]}(-\alpha_i[k, \bar{P}^{0-}[k-1]](x_i - p_i^{0-}[k-1])(x_i^*)^{-1})(e^{l_i^*})^\top, & \text{если } x_i^* \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (5.12)$$

Доказательство. Несложно заметить, что при $\Omega = \Pi(L^*)^\top$ строки матрицы $\hat{U} * \Omega$ могут быть записаны в виде $\hat{u}_i^{l_i^*}(e^{l_i^*})^\top$. Поэтому аналогично (5.9) получаем $\varphi_i^j = e^{i\top} \Phi e^j = e^{i\top}(\hat{U} * \Pi(L^*)^\top) \text{diag} \eta \Pi(L^*) e^j \kappa_j = \hat{u}_i^{l_i^*}(e^{l_i^*})^\top e^{l_j^*} \eta_j^* \kappa_j = \hat{u}_i^{l_i^*} \delta_{l_i^*}^{l_j^*} \eta_j^* \kappa_j$, где использованы символы Кронекера δ_i^j . Следовательно, $\varphi_i^j = \hat{u}_i^{l_i^*} \eta_j^* \kappa_j$ при $i = j$, и $\varphi_i^j = 0$ при $i \neq j$, т.е. имеем (5.11). Подобно этому из (5.9) можно получить $\varphi_i^j = e^{i\top}(\hat{U} * \Pi(L)) \text{diag} \eta \Pi(L)^\top e^{l_j} \kappa_{l_j} =$

$e^{i\top} \{\hat{u}_j^j e^{lj}\} e^j \eta_j \kappa_{lj} = \hat{u}_j^j e^{i\top} e^{lj} \eta_j \kappa_{lj} = \hat{u}_j^j \delta_i^{lj} \eta_j \kappa_{lj}$, где ненулевые правые части могут появиться только при таких i и j , что $l_j = i$. Учитывая это, а также что равенство $l_j = i$, как несложно видеть из определения перестановки L^* ($\Pi(L[k]) = \Pi(L^*[k])^\top$), эквивалентно равенству $j = l_i^*$, приходим к (5.12). \square

З а м е ч а н и е 4. Для нахождения матриц $\bar{P}^{0-}[k]$ нужно решать системы нелинейных уравнений $P = H[k, P]$ вида (5.3), (5.4). Справедливы замечания, подобные замечанию 1 и [12, замечание 8], касающиеся ситуации со сжимающими операторами $H[k, P]$.

З а м е ч а н и е 5. Для многошаговых систем, полученных дискретизацией по схеме Эйлера [9; 12], могут быть полезны следующие эвристические рекомендации для выбора параметров $\Omega[k]$. Используя соображения “локальной оптимизации” объема сечений трубки $\mathcal{P}^{0-}[\cdot]$, аналогичные [9], будем искать $\Omega[k]$ из условия максимума $\text{tr } \Phi[k, \bar{P}^{0-}[k]]$, где Φ вычисляется по формулам (5.4). Введем перестановку $L^*[k]$ такую, что $\Pi(L^*[k]) = \Pi(L[k])^\top$. Тогда, как несложно видеть, $\text{tr } \Phi = \sum_{i=1}^n \omega_i^{l_i^*} \hat{u}_i^{l_i^*} \eta_i^* \kappa_i \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i$, где α вычисляется по формулам (5.11). Очевидно, что максимум $\text{tr } \Phi$ по $\Omega \in \mathcal{O}$ при фиксированном значении L^* достигается на матрицах, удовлетворяющих $\omega_i^{l_i^*} = 1$, $i = 1, \dots, n$, и в частности при $\Omega = E$, где E — матрица, все элементы которой — единицы: $(e^i)^\top E e^j = 1$, $i, j = 1, \dots, n$, и при $\Omega = \Pi(L^*)^\top$.

З а м е ч а н и е 6. Упомянем некоторые эвристические способы выбора параметров Ω и L :

(1) “Вручную” задать некоторые (например, постоянные) допустимые функции Ω и L .

(2) Задать функцию L и взять $\Omega \equiv \Pi(L)$.

(3) Задать функцию Ω (например, положить $\Omega \equiv E$) и найти значения $L[k]$ при каждом k , решая оптимизационные задачи (конечного перебора) типа $f(L, \Omega) \rightarrow \max_L$. Здесь в качестве f можно взять либо (а) $f = f^*$, где $f^* = \text{vol } \mathcal{P}^{0-}[k - 1]$, либо, в условиях замечания 5, (б) $f = f^{**}$, где $f^{**} = \text{tr } \tilde{\Phi}[k, \bar{P}^-[k]]$, а $\tilde{\Phi}[k, \bar{P}^-[k]]$ вычисляется по формулам (5.4) для $\Phi[k, \bar{P}^-[k]]$ с заменой η на $\tilde{\eta}[k, \bar{P}^-[k]] = \max\{0, \text{Abs } p^-[k] - (\text{Abs } \bar{P}^-[k])e\}$.

(4) Считать $\Omega = \Omega(L) = \Pi(L)$ и находить L (а значит и Ω) как решение задач типа $f(L, \Omega(L)) \rightarrow \max_L$, аналогичных вышеупомянутым в вариантах (3)(а) и (3)(б).

З а м е ч а н и е 7. При неудачном выборе допустимых параметров в формулах из теорем 1–3 не исключен случай, когда в некоторый момент k может получиться пустое множество $\mathcal{P}^-[k]$ и не сможем построить решение задачи с использованием этих параметров. Также следует иметь в виду, что использование предлагаемых в теореме 3 управлений исчерпывает, вообще говоря, не все потенциальные возможности управления в системе (1.1), (1.3)–(1.6).

6. Примеры

П р и м е р 1. Проиллюстрируем решение задачи 2, возникающей при рассмотрении дискретного аналога задачи о синтезе управления, успокаивающего колебания подвешенной цепи из двух нагруженных пружин. За основу примем пример 4.5 из [3, с. 175]), полагая $n = 4$, $A \equiv I + h_N \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$, $M = \text{diag } \{m_i\}$, $m_1 = m_2 = 2$, $k_1 = 1.3$, $k_2 = 2$, $B \equiv h_N m_2^{-1} e^4$, $C \equiv 0$, $\tilde{V} \equiv 0$, $\hat{V} \equiv 0$, $\mathcal{R} \equiv \mathcal{P}(0, I, 1)$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(0, I, 0.1e)$, $h_N = \theta/N$, $\theta = 7$, $N = 350$. Рассмотрим два случая, а именно случай (А) без неопределенности и без ФО и случай (В, ii; ФО) с ФО $|x_2| \leq 1.8$ и матричной неопределенностью с $\hat{v}_3^1 = h_N m_1^{-1} \hat{k}_1$, порождаемой условием $|k_1 - 1.3| \leq \hat{k}_1 = 0.05$; при моделировании полагаем $V[\cdot] \equiv \tilde{V}[\cdot] + \hat{V}[\cdot]$. Рассмотрим три начальных точки: $x_0^{(1)} = -(1.4944, 1.9014, 0.2686, 1.2829)^\top$ (такая же, как в [3, с. 175; рис. 4.37]), $x_0^{(2)} = -(1.3633, 1.7546, 0.0319, 0.6246)^\top$ и $x_0^{(3)} = (1.2481, 1.5478, 0.0610, 0.5843)^\top$.

Результаты моделирования показаны на рис. 1. В верхней части, соответствующей случаю (А), представлены проекции на три координатные плоскости сечений $\mathcal{P}^-[0]$ нескольких трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$ из теорем 2 и 1 и траекторий, отвечающих двум типам управления (пунктирные

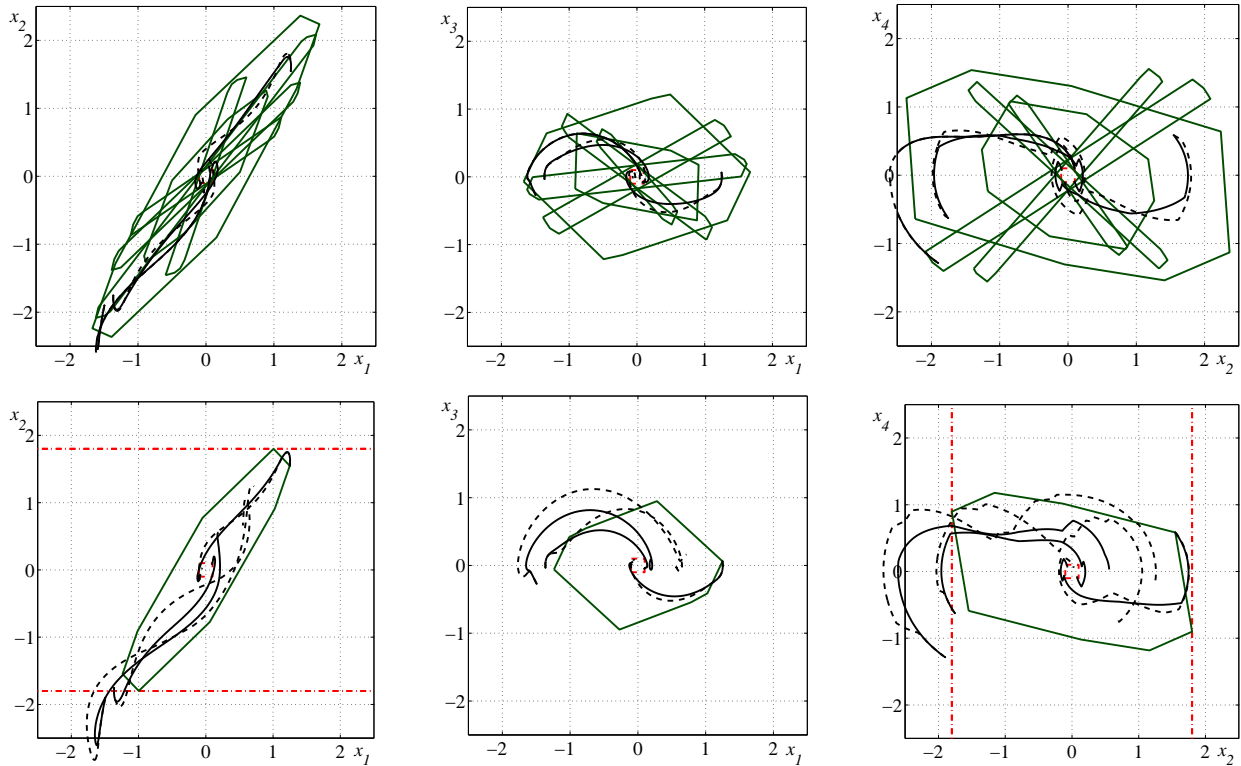


Рис. 1. Полиэдральный синтез в примере 1: верхние рисунки — случай (А), нижние — случай (В,ii;FO)

линии для u^I и сплошные — для u^{II}). При построении трубок использованы следующие значения параметров: $\Gamma[k]$ найдены по формулам, аналогичным [9, с. 300]; параметры $P^-[k]$ и $p^-[k]$, как и ниже в примере 2, берутся в виде $P^-[k] = P^{0-}[k]$, $k = N - 1, \dots, 0$; $p^-[k]$ — как указано в конце разд. 2. Нижняя часть рис. 1 подобна верхней, но относится к случаю (В,ii;FO); здесь приведены проекции $\mathcal{P}^-[0]$ для трубки, у которой $\Gamma[k]$ найдены с использованием соображений “локальной” оптимизации объема. Множество \mathcal{M} и FO показаны пунктирными и штрихпунктирными линиями соответственно.

Для случая (А) каждая из точек $x_0^{(i)}$ принадлежат одному из найденных множеств $\mathcal{P}^-[0]$, полученные отклонения от \mathcal{M} составляют порядка 10^{-8} и 10^{-13} для u^I и u^{II} соответственно; траектории, отвечающие $x_0^{(1)}$, практически не различаются (порядок разности — 10^{-2}) и подобны траектории из [3, рис. 4.37]. Для случая (В,ii;FO) расстояния от $x_0^{(i)}$, $i = 1, 2, 3$, до $\mathcal{P}^-[0]$ составили 0.8469, 0.2464, 0, а “промахи” от \mathcal{M} получились равными 1.3013, 0.9845, 0.0000 и 0.4662, 0.0000, 0.0000 для u^I и u^{II} соответственно. Для обеих траекторий, выходящих из $x_0^{(3)}$, FO не нарушаются. Для точек $x_0^{(i)} \notin \mathcal{P}^-[0]$, $i = 1, 2$, действие управления u^I оказалось хуже, чем для u^{II} , и по “промаху” от \mathcal{M} , и в смысле нарушения FO.

Пример 2. Рассматривается задача 3 при $n = 2$, $A \equiv I$, $C \equiv h_N(0, 1)^\top$, $h_N = \theta/N$, $\theta = 0.25$, $N = 200$, $\tilde{U} \equiv h_N \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\hat{U} \equiv h_N \begin{bmatrix} 1.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1.5 \end{bmatrix}$, $\tilde{V} \equiv 0$, $\hat{V} \equiv 0$ или $\hat{V} \equiv h_N \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$, $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}(0, I, 0)$ или $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{P}(0, I, 0.1)$, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(e, I, 0.1e)$ для четырех начальных точек $x_0^{(1)} = (0.12, 0.62)^\top$, $x_0^{(2)} = (0.2, 0.4)^\top$, $x_0^{(3)} = (0.1, 0.5)^\top$, $x_0^{(4)} = (0.6, 0.4)^\top$. На рис. 2 представлены результаты моделирования для случая (А) без неопределенности и без FO (левый рисунок) и для случая (В,ii;FO) с FO $|x_2 - 0.65| \leq 0.35$ и с неопределенностями обоих типов — матричной и аддитивной (средний и правый рисунки); во втором случае при моделировании выбираем $v[\cdot]$ аналогично [9] и $V[\cdot] \equiv \tilde{V}[\cdot] - \hat{V}[\cdot]$; содержание первых двух рисунков подобно рис. 1.

Параметры Ω и L , фигурирующие в теореме 3, выбирались в соответствии со следующими

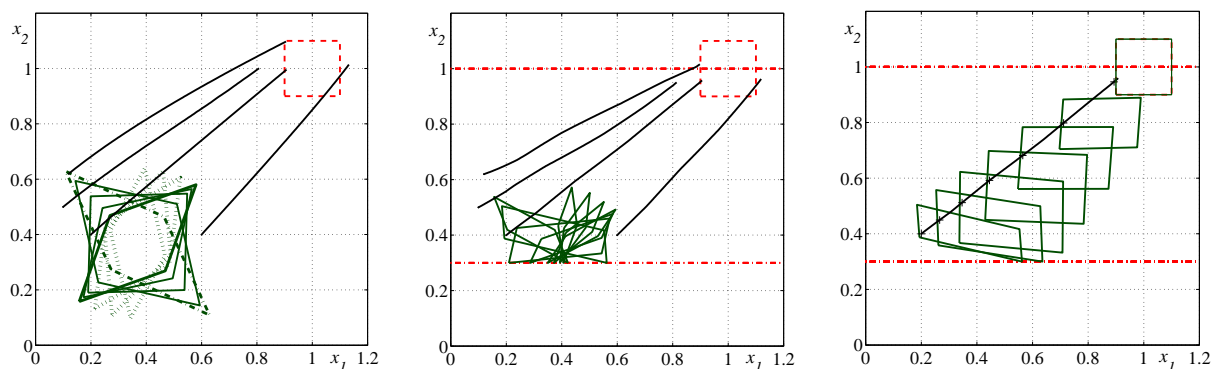


Рис. 2. Полиэдральный синтез в примере 2: левый рисунок — случай (A), средний и правый — случай (B,ii;FO). На правом рисунке показано несколько сечений трубки $\mathcal{P}^-[\cdot]$, использованной для $x_0^{(2)}$

способами из замечания 6: (3) при двух сериях значений Ω : $\Omega \equiv \begin{bmatrix} 1 & \delta \\ \delta & 1 \end{bmatrix}$ и $\Omega \equiv \begin{bmatrix} \delta & \delta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ с $\delta = 0.75, 0.5, 0.25$ (на левом рис. 2 сечения $\mathcal{P}^-[0]$ показаны сплошными и точечными⁵ линиями соответственно; результаты при способах (3)(a) и (3)(b) получались одинаковыми); (3) при $\Omega \equiv E$ (результат выделен жирной линией; такой же получается способом (1) при $\Omega \equiv E$, $L \equiv \{1, 2\}$); (4) (результат показан штрихпунктирной линией; такой же получается способом (2) при $L \equiv \{1, 2\}$ и при $L \equiv \{2, 1\}$, а также способом (3) при $\Omega \equiv I$). Для каждой из точек $x_0^{(i)}$ при построении управлений использовалась, как и в примере 1, та из найденных трубок $\mathcal{P}^-[\cdot]$, для которой расстояние от $x_0^{(i)}$ до $\mathcal{P}^-[0]$ оказывалось наименьшим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
4. Gusev M.I. Application of penalty function method to computation of reachable sets for control systems with state constraints // AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1773. P. 050003-1–050003-9. doi: 10.1063/1.4964973.
5. Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Аппроксимационные схемы и конечноразностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона–Якоби // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
6. Построение множества разрешимости в задаче проводки самолета при ветровом возмущении / С.И. Кумков, В.С. Пацко, С.Г. Пятко, А.А. Федотов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11, № 1. С. 149–159.
7. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
8. Filippova T.F. Estimates of reachable sets of impulsive control problems with special nonlinearity // AIP Conf. Proc. 2016. Vol. 1773. P. 100004-1–100004-10. doi: 10.1063/1.4964998.
9. Kostousova E.K. Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 2001. Vol. 14, no. 4. P. 267–310. doi: 10.1080/10556780108805805.
10. Jaulin L. Inner and outer set-membership state estimation // Reliable Computing. 2016. Vol. 22. P. 47–55.
11. Костоусова Е.К. О полиэдральных оценках в задачах синтеза стратегий управления в линейных многошаговых системах // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2006. Вып. 9. С. 84–105.

⁵При варьировании δ во второй серии значений Ω “замечается” такая область, что, например, точку $x_0^{(5)} = (0.25, 0.6)^T$ захватить не удается.

12. Костоусова Е.К. О полиэдральном методе решения задач синтеза стратегий управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 153–167.
13. Kostousova E.K. On target control synthesis under set-membership uncertainties using polyhedral techniques // IFIP Advances in Information and Communication Technology (IFIP AICT). 2014. Vol. 443. P. 170–180. doi: 10.1007/978-3-662-45504-3_16.
14. Костоусова Е.К. О внутренних полиэдральных оценках множеств достижимости линейных систем с фазовыми ограничениями // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений: сб. науч. тр. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2001. Вып. 5. С. 167–187.
15. Важенцев А.Ю. О внутренних эллипсоидальных аппроксимациях для задач синтеза управления при ограниченных координатах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2000. № 3. С. 70–77.
16. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances // Automatica. 2011. Vol. 47, no. 7. P. 1414–1426. doi:10.1016/j.automatica.2011.02.009.
17. Barmish B.R., Sankaran J. The propagation of parametric uncertainty via polytopes // IEEE Trans. Automat. Control. 1979. Vol. AC-24, no. 2. P. 346–349. doi: 10.1109/TAC.1979.1102011.
18. Лисин Д.В., Филиппова Т.Ф. Об оценивании траекторных трубок дифференциальных включений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1–2. С. 435–445.
19. Schneider R.G. Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. 490 p. doi: 10.1017/CBO9780511526282.
20. Васин В.В., Еремин И.И. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. Теория и приложения. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2005. 210 с.

Костоусова Елена Кирилловна

Поступила 03.04.2017

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: kek@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. New York: Springer, 1988. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Kurzhanski A.B., Vályi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Boston: Birkhäuser, 1997, 321 p.
3. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes: theory and computation*. Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
4. Gusev M.I. Application of penalty function method to computation of reachable sets for control systems with state constraints. *AIP Conf. Proc.*, 2016, vol. 1773, pp. 050003-1–050003-9. doi: 10.1063/1.4964973.
5. Taras'yev A.M., Uspenskiy A.A., Ushakov V.N. Approximation schemas and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. *J. Comput. Systems Sci. Internat.*, 1995, Vol. 33, no. 6, pp. 127–139.
6. Kumkov S.I., Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Construction of the solvability set in a problem of guiding an aircraft under wind disturbance. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, Suppl. 1, pp. S163–S174.
7. Chernousko F.L. *State estimation for dynamic systems*. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.
8. Filippova T.F. Estimates of reachable sets of impulsive control problems with special nonlinearity. *AIP Conf. Proc.*, 2016, vol. 1773, pp. 100004-1–100004-10. doi: 10.1063/1.4964998.
9. Kostousova E.K. Control synthesis via parallelotopes: optimization and parallel computations. *Optimiz. Methods & Software*, 2001, vol. 14, no. 4, pp. 267–310. doi: 10.1080/10556780108805805.
10. Jaulin L. Inner and outer set-membership state estimation. *Reliable Computing*, 2016, vol. 22, pp. 47–55.
11. Kostousova E.K. On polyhedral estimates in problems of the synthesis of control strategies in linear multistep systems. *Algoritmy i programmnye sredstva parallelnykh vychislenii*. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2006, vol. 9, pp. 84–105. (in Russian).
12. Kostousova E.K. On the polyhedral method of solving problems of control strategy synthesis. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, Suppl. 1, pp. S140–S155. doi: 10.1134/S0081543816020127.

13. Kostousova E.K. On target control synthesis under set-membership uncertainties using polyhedral techniques. *IFIP Advances in Information and Communication Technology (IFIP AICT)*, 2014, vol. 443, pp. 170–180. doi: 10.1007/978-3-662-45504-3_16.
14. Kostousova E.K. On internal polyhedral estimates of reachable sets of linear systems with state constraints. *Algoritmy i programmnye sredstva parallelnykh vychislenii*. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2001, vol. 5, pp. 167–187 (in Russian).
15. Vazhentsev A.Yu. On internal ellipsoidal approximations for problems of control synthesis with bounded coordinates. *J. Comput. Systems Sci. Internat.*, 2000, Vol. 39, no. 3, pp. 399–406.
16. Kurzhanskiy A.A., Varaiya P. Reach set computation and control synthesis for discrete-time dynamical systems with disturbances. *Automatica*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1414–1426. doi:10.1016/j.automatica.2011.02.009.
17. Barmish B.R., Sankaran J. The propagation of parametric uncertainty via polytopes. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1979, vol. AC-24, no. 2., pp. 346–349. doi: 10.1109/TAC.1979.1102011.
18. Filippova T.F., Lisin D.V. On the estimation of trajectory tubes of differential inclusions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2000, vol. Suppl. 2, pp. S28–S37.
19. Schneider R.G. *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993. 490 p. doi: 10.1017/CBO9780511526282.
20. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operatory i iteratsionnye protsessy feierovskogo tipa. Teoriya i prilozheniya* [Operators and iterative processes of Fejér type. Theory and applications]. Ekaterinburg: UrO RAN Publ., 2005, 210 p.

The paper was received by the Editorial Office on April 3, 2017.

Elena Kirillovna Kostousova, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: kek@imm.uran.ru.

УДК 517.977 + 514.74

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВЛОЖЕНИЯ ЕВКЛИДОВОЙ И ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИЙ

В. А. Кыров, Г. Г. Михайличенко

Как известно, n -мерная геометрия максимальной подвижности допускает группу движений размерности $n(n+1)/2$. Многие из таких геометрий хорошо известны, в частности, евклидова и псевдоевклидова геометрии. Такие геометрии являются феноменологически симметричными, т.е. для них метрические свойства эквивалентны групповым. В данной работе на примере евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий разрабатывается аналитический метод их вложения. Таким образом ищутся все возможные функции вида

$$f = f((x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2, z_i, z_j),$$

где, например, x_i, y_i, z_i — координаты точки i . Оказывается, что существуют только следующие вложения:

$$f = (x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

$$f = [(x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2] \exp(2z_i + 2z_j).$$

Заметим, что получены как хорошо известные трехмерные геометрии (евклидова и псевдоевклидова), так и малоизвестные (трехмерные особые расширения евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий). Установлено, что все эти геометрии допускают шестимерные группы движений. Для решения поставленной задачи по условию локальной инвариантности метрической функции записывается функциональное уравнение

$$2[(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j))] \frac{\partial f}{\partial \theta} + X_3(i) \frac{\partial f}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0,$$

все компоненты в котором — аналитические функции. Затем это уравнение разлагается в ряд Тейлора, после чего сравниваются коэффициенты разложения перед одинаковыми степенями произведений переменных. Пакет математических программ Maple 15 существенно упрощает задачу перебора коэффициентов. По полученным результатам записываются дифференциальные уравнения, интегрируя которые, находим решения сформулированной выше задачи вложения.

Ключевые слова: евклидова геометрия, функциональное уравнение, дифференциальное уравнение, метрическая функция.

V. A. Kyrov, G. G. Mikhailichenko. An analytic method for the embedding of the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries.

It is known that an n -dimensional geometry of maximum mobility admits a group of motions of dimension $n(n+1)/2$. Many of these geometries are well-known, for example, the Euclidean and pseudo-Euclidean geometries. Such geometries are phenomenologically symmetric; i.e., their metric properties are equivalent to their group properties. In this paper we consider the examples of the two-dimensional Euclidean and pseudo-Euclidean geometries to develop an analytical method for their embedding. More exactly, we search for all possible functions of the form $f = f((x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2, z_i, z_j)$, where, for example, x_i, y_i, z_i are the coordinates of a point i . It turns out that there exist only the following embeddings: $f = (x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ and $f = [(x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2] \exp(2z_i + 2z_j)$. Note that we obtain not only the well-known three-dimensional geometries (Euclidean and pseudo-Euclidean) but also less known geometries (three-dimensional special extensions of the two-dimensional Euclidean and pseudo-Euclidean geometries). It is found that all these geometries admit six-dimensional groups of motions. To solve the formulated problem, according to the condition of local invariance of the metric function, we write the functional equation

$$2[(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j))] \frac{\partial f}{\partial \theta} + X_3(i) \frac{\partial f}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0,$$

where all the components are analytic functions. This equation is expanded in a Taylor series and the coefficients of the expansion at identical products of powers of the variables are compared. This task is greatly simplified by using the Maple 15 computing environment. The obtained results are used to write differential equations, which are then integrated to find solutions to the embedding problem formulated earlier.

Keywords: Euclidean geometry, functional equation, differential equation, metric function.

MSC: 34K37, 26E05, 22F99

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-167-181

Введение

В статье изучаются n -мерные геометрии максимальной подвижности, допускающие группу движений размерности $n(n+1)/2$ [1]. Многие из таких геометрий хорошо известны, к их числу относятся евклидова геометрия, псевдоевклидова, симплектическая геометрия, сферическая, геометрия Лобачевского и др. Полная же классификация таких геометрий неизвестна [2].

В работах второго соавтора [2; 3] дается полная классификация двумерных феноменологически симметричных геометрий, которые являются геометриями максимальной подвижности, т. е. фактически построена полная классификация двумерных геометрий максимальной подвижности. Эта классификация, кроме хорошо известных двумерных геометрий (евклидовой, псевдоевклидовой, симплектической, сферической и др.), содержит и неизвестные геометрии (симплициальная, гельмгольцава, псевдогельмгольцава и дуальногельмгольцава). Отметим, что группы движений всех этих геометрий трехпараметрические. Методы, разработанные Г. Г. Михайличенко для классификации таких геометрий, неприменимы при построении классификации геометрий большей размерности.

В. Х. Лев другим методом построил классификацию трехмерных феноменологически симметричных геометрий (геометрий максимальной подвижности) [4], которая также содержит как известные, так и неизвестные геометрии. Группы движений таких геометрий шестипараметрические. Методом Лева классификацию четырехмерных геометрий и геометрий более высокой размерности ввиду больших технических сложностей построить не удалось.

В данной работе разрабатывается новый метод классификации феноменологически симметричных геометрий (геометрий максимальной подвижности), который позволит построить классификацию феноменологически симметричных геометрий более высоких размерностей. Он назван *методом вложения*, и его суть состоит в нахождении метрических функций всех феноменологически симметричных геометрий по известным метрическим функциям феноменологически симметричных геометрий размерности на единицу меньше, содержащих их внутри себя как аргумент. С помощью этого метода здесь перепроверяется часть классификации Лева, в полноте которой уверенности нет. Вложение иллюстрирует хорошо известная трехмерная евклидова геометрия с метрикой

$$d^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2,$$

где i, j — две произвольные точки пространства, а (x_i, y_i, z_i) и (x_j, y_j, z_j) — их координаты. Эта метрика, очевидно, внутри себя содержит метрику евклидовой плоскости $\rho^2(i, j) = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$, т. е.

$$d^2(i, j) = \rho^2(i, j) + (z_i - z_j)^2.$$

Аналогичный пример дает и псевдоевклидова геометрия. Возникает задача о вложении, состоящая в поиске всех метрических функций трехмерного пространства, содержащих внутри себя метрики евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей и допускающих шестимерные группы движений, т. е. нахождение всех функций вида

$$f = f((x_i - x_j)^2 \pm (y_i - y_j)^2, z_i, z_j).$$

В этой статье задача о вложении решается аналитически, т. е. неизвестные ищутся в виде рядов Тейлора. Подобная задача в классе дифференцируемых как минимум два раза, но неаналитических функций исследуется в работах первого соавтора [5; 6].

Задача о вложении ранее также решалась в геометрии двух множеств (ГДМ) [7]. Так, по функции $g = x\xi$, задающей феноменологически симметричную (ФС) геометрию двух множеств (ГДМ) ранга (2,2), находится функция, задающая ФС ГДМ ранга (3,2)

$$f = x\xi + \eta,$$

которая оказалась единственной. Здесь x — локальная координата произвольной точки первого многообразия, а (ξ, η) — локальные координаты точки второго многообразия. Решение ищется в виде

$$f = \chi(x\xi, \eta).$$

Аналогично решаются задачи о вложении ФС ГДМ ранга (3,2) в ФС ГДМ ранга (4,2) и ФС ГДМ ранга (4,2) в ФС ГДМ ранга (5,2). Доказывается, что ФС ГДМ ранга (5,2) не существует.

1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим аналитическое трехмерное многообразие M . Локальные координаты в M обозначим через (x, y, z) . Пусть задана функция $f: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, называемая *метрической*, с открытой и плотной в $M \times M$ областью определения S_f . Выполнение метрических аксиом не предполагается.

Аксиома аналитичности. Метрическая функция $f: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ аналитическая во всех точках области определения S_f .

Рассмотрим множество четверок $\langle i_1, i_2, i_3, i \rangle, \langle i, i_1, i_2, i_3 \rangle \in M^4: \langle i, i_1 \rangle, \langle i, i_2 \rangle, \langle i, i_3 \rangle \in S_f, \langle i_1, i \rangle, \langle i_2, i \rangle, \langle i_3, i \rangle \in S_f$. Пусть выполняется следующая аксиома.

Аксиома невырожденности. Для открытого и плотного в M^4 множества четверок $\langle i_1, i_2, i_3, i \rangle$ и $\langle i, i_1, i_2, i_3 \rangle$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial(f(i, i_1), f(i, i_2), f(i, i_3))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0, \quad \frac{\partial(f(i_1, i), f(i_2, i), f(i_3, i))}{\partial(x_i, y_i, z_i)} \neq 0,$$

где (x_i, y_i, z_i) — координаты точки $i \in M$.

Рассмотрим множество пятерок $\langle i_1, \dots, i_5 \rangle \in M^5: \langle i_p, i_q \rangle \in S_f, p, q = 1, \dots, 5, p \neq q$.

Аксиома феноменологической симметрии. Для некоторой окрестности пятерки точек $\langle i_1, \dots, i_5 \rangle$ из плотного в M^5 множества выполняется тождество:

$$\Phi(f(i_1, i_2), \dots, f(i_4, i_5)) = 0,$$

где Φ — аналитическая функция, причем $\text{rang} \Phi = 1$.

О п р е д е л е н и е. Говорят, что на аналитическом многообразии M метрическая функция f задает феноменологически симметричную геометрию, если выполняются аксиомы *аналитичности*, *невырожденности* и *феноменологической симметрии* [2, §1, с. 12].

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в открытой области $U \in M$. Это означает, что задано аналитическое отображение

$$\lambda: U \times G \rightarrow U',$$

где $U' \in M$ — открытая область. Действие λ_a , определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j \rangle \in S_f, \langle \lambda_a(i), \lambda_a(j) \rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j , причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают [2, §2, с. 18].

Множество всех так определенных движений образует аналитическую группу Ли движений. Доказано, что размерность группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии равна 6 (см. [2, §2, с. 36]). Двухточечным инвариантом такой группы является метрическая функция. Также доказано, что по метрической функции можно найти уравнения группы движений.

Алгебра Ли группы движений состоит из операторов вида (см. [8, § 16])

$$X = X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + X_3 \partial_z, \quad (1.1)$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, z)$ — аналитическая функция в U , $\alpha = 1, 2, 3$. Через операторы (1.1) записывается условие локальной инвариантности метрической функции (см. [8, § 17])

$$X(i)f(i, j) + X(j)f(i, j) = 0, \quad (1.2)$$

которое выполняется в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j , причем метрическая функция $f(i, j)$ определена и аналитична в $U(i) \times U(j)$.

Рассмотрим метрические функции евклидовой и псевдоевклидовой плоскостей:

$$\theta = (x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2, \quad (1.3)$$

где (x_i, y_i) и (x_j, y_j) — локальные координаты точек i и j , $\epsilon = \pm 1$, причем для евклидовой геометрии $\epsilon = +1$, а для псевдоевклидовой геометрии $\epsilon = -1$.

Как известно, алгебры Ли групп движений двумерных евклидовой и псевдоевклидовой геометрий трехмерны, поэтому их базисы состоят из трех линейно независимых операторов (см. [2, § 6, с. 89])

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y, \quad X^3 = -\epsilon y \partial_x + x \partial_y. \quad (1.4)$$

Произвольный же оператор является их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами.

Цель данной работы — нахождение всех трехмерных феноменологически симметричных геометрий с метрическими функциями в подходящих координатах, принимающих следующий вид:

$$f(i, j) = f(\theta, z_i, z_j) = f((x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2, z_i, z_j). \quad (1.5)$$

Поскольку метрическая функция (1.5) невырождена, ее координаты не “выпадают”:

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_i} \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z_j} \neq 0. \quad (1.6)$$

Пусть $k \in M$ — произвольная точка и $U(k)$ — ее координатная окрестность. Пусть произвольные точки $i, j \in U(k)$, $U(i), U(j) \subset U(k)$, т.е. $U(i) \cup U(j) \subset U(k)$. Тогда в окрестности $U(k)$ вводим систему координат с началом в точке k , т.е. в этих координатах $k(0, 0, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (1.1) и метрической функции (см. [9, гл. 11])

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = X_1(z) + D_1(X_1)(z)x + D_2(X_1)(z)y \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(z)x^2 + D_{1,2}(X_1)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(z)y^2 + \dots, \\ X_2 = X_2(z) + D_1(X_2)(z)x + D_2(X_2)(z)y \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(z)x^2 + D_{1,2}(X_2)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(z)y^2 + \dots, \\ X_3 = X_3(z) + D_1(X_3)(z)x + D_2(X_3)(z)y \\ + \frac{1}{2}D_{1,1}(X_3)(z)x^2 + D_{1,2}(X_3)(z)xy + \frac{1}{2}D_{2,2}(X_3)(z)y^2 + \dots, \end{array} \right. \quad (1.7)$$

$$f(\theta, z_i, z_j) = f(z_i, z_j) + D_1(f)(z_i, z_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f)(z_i, z_j)\theta^2 + \dots. \quad (1.8)$$

Теорема. *Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и ее координатную окрестность $U(k)$. Возьмем также две точки $i, j \in U(k)$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что*

$$U(i) \cup U(j) \subset U(k), \quad \text{причем } \langle i, j \rangle, \langle i', j' \rangle \in S_f \quad \forall i' \in U(i), \forall j' \in U(j).$$

Тогда метрическая функция $f(i, j)$, в аналитическом многообразии M задающая трехмерную феноменологически симметричную геометрию, в окрестности $U(i) \times U(j)$ в подходящих локальных координатах и масштабном преобразовании (аналитическая функция от метрической функции $\varphi(f) \rightarrow f$) имеет вид

$$f(i, j) = (x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2, \quad (1.9)$$

$$f(i, j) = [(x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2] \exp[2z_i + 2z_j]. \quad (1.10)$$

Базисные операторы алгебр Ли этих групп движений следующие:

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y, \quad X^3 = -\epsilon y \partial_x + x \partial_y, \quad X^4 = \partial_z, \quad X^5 = -z \partial_x + x \partial_z, \quad X^6 = -\epsilon y \partial_z + z \partial_y, \quad (1.11)$$

$$\begin{cases} X^1 = \partial_x, & X^2 = \partial_y, & X^3 = -\epsilon y \partial_x + x \partial_y, & X^4 = \partial_z, \\ X^5 = (-x^2 + \epsilon y^2) \partial_x - 2xy \partial_y + x \partial_z, & X^6 = -2xy \partial_x + (\epsilon x^2 - y^2) \partial_y + y \partial_z, \end{cases} \quad (1.12)$$

где $\epsilon = \pm 1$.

Заметим, что выражение (1.9) дает только две различные метрические функции трехмерных феноменологически симметричных геометрий — метрическую функцию евклидовой геометрии при $\epsilon = 1$ и метрическую функцию псевдоевклидовой геометрии при $\epsilon = -1$. Выражение (1.10) — это тоже две метрические функции трехмерных феноменологически симметричных геометрий: при $\epsilon = 1$ — трехмерное особое расширение евклидовой двумерной геометрии, а при $\epsilon = -1$ — трехмерное особое расширение псевдоевклидовой двумерной геометрии.

В процессе доказательства теоремы ищутся как метрические функции трехмерных феноменологически симметричных геометрий в виде (1.5), так и базисные операторы алгебр Ли групп движений этих геометрий. Заметим, что эти алгебры шестимерны, поэтому их базисы состоят из шести независимых операторов, три из которых совпадают с операторами (1.4):

$$X^1 = \partial_x, \quad X^2 = \partial_y, \quad X^3 = -\epsilon y \partial_x + x \partial_y, \quad X^{4,5,6} = X_1^{4,5,6} \partial_x + X_2^{4,5,6} \partial_y + X_3^{4,5,6} \partial_z.$$

Произвольный же оператор алгебр Ли этих геометрий имеет вид (1.1) и является линейной комбинацией шести базисных операторов.

2. Доказательство теоремы

Искомая метрическая функция (1.5) является двухточечным инвариантом шестимерной группы движений, поэтому условие локальной инвариантности (1.2) в явном виде записывается так:

$$\begin{aligned} & 2[(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j))] \frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta} \\ & + X_3(i) \frac{\partial f(i, j)}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial f(i, j)}{\partial z_j} = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где X_1, X_2, X_3 — компоненты произвольного оператора (1.1). Заметим, что выражение (2.1) выполняется тождественно по координатам точек i и j из окрестностей $U(i)$ и $U(j)$, причем $U(i) \cup U(j) \subset U(k)$, где $U(k)$ — координатная окрестность.

Лемма 1. В тождестве (2.1)

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) \neq 0.$$

Доказательство. Предположим противное, пусть выполняется тождество

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) = 0.$$

Продифференцируем это тождество дважды по x_i и x_j , y_i и y_j , x_i и y_j , z_i и x_j , z_i и y_j :

$$X_{1x}(i) + X_{1x}(j) = 0, \quad X_{2y}(i) + X_{2y}(j) = 0, \quad X_{1y}(j) + \epsilon X_{2x}(i) = 0, \quad X_{1z}(i) = 0, \quad X_{2z}(i) = 0.$$

Затем разделяем переменные:

$$X_{1x} = 0, \quad X_{2y} = 0, \quad X_{2x} = a = \text{const}, \quad X_{1y} = -\epsilon a = \text{const}, \quad X_{1z} = 0, \quad X_{2z} = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получаем первые две компоненты произвольного оператора (1.1) алгебры Ли группы движений:

$$X_1 = -\epsilon ay + b, \quad X_2 = ax + c,$$

где a, b, c — произвольные вещественные постоянные интегрирования.

В тождестве (2.1) с учетом сделанного выше предположения возможны случаи:

$$\text{либо } X_3 = 0, \quad \text{либо } X_3 \neq 0.$$

Пусть сначала $X_3 = 0$. Тогда произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии с метрической функцией (1.5) имеет вид

$$X = (-\epsilon ay + b)\partial_x + (ax + c)\partial_y.$$

Придавая постоянным (a, b, c) значения $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, получаем три базисных оператора (1.4), а должно быть шесть. Противоречие.

Пусть теперь $X_3 \neq 0$. Тогда

$$X_3(i) \frac{\partial f(i, j)}{\partial z_i} + X_3(j) \frac{\partial f(i, j)}{\partial z_j} = 0. \quad (2.2)$$

От выражения (2.2) переходим к тождеству

$$\frac{X_3(i)}{X_3(j)} = \varphi(\theta, z_i, z_j), \quad (2.3)$$

для чего левую и правую части делим на произведение $X_3(j) \frac{\partial f(i, j)}{\partial z_i}$ и вводим обозначение $\varphi(\theta, z_i, z_j) = -\frac{\partial f(i, j)/\partial z_j}{\partial f(i, j)/\partial z_i}$, θ берем из (1.3). Дифференцируем (2.3) по x_i и по x_j :

$$\frac{X_{3x}(i)}{X_3(j)} = 2(x_i - x_j)\varphi_\theta, \quad -\frac{X_3(i)X_{3x}(j)}{X_3^2(j)} = -2(x_i - x_j)\varphi_\theta,$$

где $\varphi_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$, затем складываем результаты и разделяем переменные:

$$\frac{X_{3x}(i)}{X_3(i)} = \frac{X_{3x}(j)}{X_3(j)} = \alpha = \text{const}.$$

Уравнение (2.3) теперь дифференцируем по y_i и по y_j , затем снова складываем и разделяем переменные:

$$\frac{X_{3y}(i)}{X_3(i)} = \frac{X_{3y}(j)}{X_3(j)} = \beta = \text{const}.$$

Таким образом, получаем

$$X_{3x} = \alpha X_3, \quad X_{3y} = \beta X_3.$$

Общий интеграл найденных уравнений

$$X_3 = c(z)e^{\alpha x + \beta y} \neq 0,$$

где $c(z)$ — некоторая аналитическая функция. Полученное подставляем в (2.3):

$$e^{\alpha u + \beta v} = \frac{\varphi(u^2 + \epsilon v^2, z_i, z_j)}{c(z_i)c(z_j)}, \quad u = x_i - x_j, \quad v = y_i - y_j.$$

Это равенство дифференцируем по u и по v :

$$\alpha e^{\alpha u + \beta v} = \frac{2u\varphi'(u^2 + \epsilon v^2, z_i, z_j)}{c(z_i)c(z_j)}, \quad \beta e^{\alpha u + \beta v} = \frac{2\epsilon v\varphi'(u^2 + \epsilon v^2, z_i, z_j)}{c(z_i)c(z_j)}.$$

Затем первое полученное равенство умножаем на ϵv и вычитаем из него второе, умноженное на u :

$$(\alpha \epsilon v - \beta u)e^{\alpha u + \beta v} = 0.$$

Из последнего, очевидно, следует $\alpha = \beta = 0$. Тогда $X_3 = c(z)$. Подставляя найденное в (2.2), имеем

$$c(z_i)\frac{\partial f(i, j)}{\partial z_i} + c(z_j)\frac{\partial f(i, j)}{\partial z_j} = 0.$$

Вводим замену: $\int dz/c(z) = \bar{z}$. Тогда в новых координатах $X_3 = 1$.

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии с метрической функцией (1.5) имеет вид

$$X = (-\epsilon ay + b)\partial_x + (ax + c)\partial_y + \partial_{\bar{z}}.$$

Придавая произвольным постоянным (a, b, c) значения $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 0, 0)$, получаем базисные операторы

$$\partial_x + \partial_{\bar{z}}, \quad \partial_y + \partial_{\bar{z}}, \quad -\epsilon y\partial_x + x\partial_y + \partial_{\bar{z}}, \quad \partial_{\bar{z}}.$$

Видно, что таких операторов четыре, а должно быть шесть. Противоречие. \square

Лемма 2. В тождестве (2.1)

$$X_3 \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть в (2.1) $X_3 = 0$. Тогда из леммы 1 следует $\frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta} = 0$, что противоречит условию невырожденности (1.6) метрической функции (1.5). \square

Лемма 3. В тождестве (2.1) функция $X_3(x, y, z)$ явно зависит либо от x , либо от y , т. е.

$$\left(\frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3(x, y, z)}{\partial y}\right)^2 \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, пусть

$$X_3 = X_3(z) \neq 0.$$

Тогда в тождестве (2.1) осуществляем замену координат: $\int dz/X_3(z) = \bar{z}$. Очевидно, в новых координатах $X_3(\bar{z}) = 1$. В результате (2.1) примет вид

$$2[(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j))] \frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial \bar{z}_j} = 0. \quad (2.4)$$

Деля тождество (2.4) на ненулевую производную $\frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta}$, получаем функциональное уравнение

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) = \phi(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j), \quad (2.5)$$

где

$$\phi(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j) = -\left(\frac{\partial f(i, j)}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial f(i, j)}{\partial \bar{z}_j}\right) / 2 \frac{\partial f(i, j)}{\partial \theta}.$$

Затем решаем уравнение (2.5) методом, описанным подробно при доказательстве леммы 1. Тогда тождество (2.5) дифференцируем по x_i , по x_j , по y_i , по y_j :

$$\begin{cases} X_1(i) - X_1(j) + (x_i - x_j)X_{1x}(i) + \epsilon(y_i - y_j)X_{2x}(i) & = 2(x_i - x_j)\phi_\theta(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j), \\ X_1(i) - X_1(j) + (x_i - x_j)X_{1x}(j) + \epsilon(y_i - y_j)X_{2x}(j) & = 2(x_i - x_j)\phi_\theta(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j), \\ \epsilon(X_2(i) - X_2(j)) + (x_i - x_j)X_{1y}(i) + \epsilon(y_i - y_j)X_{2y}(i) & = 2\epsilon(y_i - y_j)\phi_\theta(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j), \\ \epsilon(X_2(i) - X_2(j)) + (x_i - x_j)X_{1y}(j) + \epsilon(y_i - y_j)X_{2y}(j) & = 2\epsilon(y_i - y_j)\phi_\theta(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j). \end{cases} \quad (2.6)$$

Далее из первого уравнения вычитаем второе, а из третьего — четвертое:

$$\begin{cases} (x_i - x_j)(X_{1x}(i) - X_{1x}(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_{2x}(i) - X_{2x}(j)) = 0, \\ (x_i - x_j)(X_{1y}(i) - X_{1y}(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_{2y}(i) - X_{2y}(j)) = 0. \end{cases}$$

Теперь полученное дифференцируем дважды в следующем порядке: по x_i и x_j ; x_i и y_j ; y_i и x_j ; y_i и y_j ; x_i и \bar{z}_j ; y_i и \bar{z}_j :

$$\begin{cases} X_{1xx}(i) + X_{1xx}(j) = 0, & X_{1yx}(i) + X_{1yx}(j) = 0, \\ \epsilon X_{2xx}(i) + X_{1xy}(j) = 0, & \epsilon X_{2yx}(i) + X_{1yy}(j) = 0, \\ X_{1xy}(i) + \epsilon X_{2xx}(j) = 0, & X_{1yy}(i) + \epsilon X_{2yx}(j) = 0, \\ X_{2xy}(i) + X_{2xy}(j) = 0, & X_{2yy}(i) + X_{2yy}(j) = 0, \\ X_{1x\bar{z}}(j) = 0, & X_{1y\bar{z}}(j) = 0, & X_{2x\bar{z}}(j) = 0, & X_{2y\bar{z}}(j) = 0. \end{cases}$$

В полученных равенствах разделяем переменные:

$$X_{1xx} = X_{1xy} = X_{1yy} = X_{1x\bar{z}} = X_{1y\bar{z}} = 0, \quad X_{2xx} = X_{2xy} = X_{2yy} = X_{2x\bar{z}} = X_{2y\bar{z}} = 0.$$

Интегрируя полученную систему уравнений, имеем

$$X_{1x} = a = \text{const}, \quad X_{1y} = b = \text{const}, \quad X_{2x} = c = \text{const}, \quad X_{2y} = d = \text{const}.$$

Новую систему также интегрируем:

$$X_1 = ax + by + A(\bar{z}), \quad X_2 = cx + dy + B(\bar{z}).$$

Затем найденное подставляем в (2.6):

$$\begin{cases} 2a(x_i - x_j) + b(y_i - y_j) + A(\bar{z}_i) - A(\bar{z}_j) + \epsilon c(y_i - y_j) & = 2(x_i - x_j)\phi_\theta(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j), \\ \epsilon c(x_i - x_j) + 2\epsilon d(y_i - y_j) + \epsilon(B(\bar{z}_i) - B(\bar{z}_j)) + b(x_i - x_j) & = 2\epsilon(y_i - y_j)\phi_\theta(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j). \end{cases}$$

Далее первое уравнение умножаем на $\epsilon(y_i - y_j)$ и из него вычитаем второе, умноженное на $(x_i - x_j)$:

$$\begin{aligned} & 2a\epsilon(y_i - y_j)(x_i - x_j) + b\epsilon(y_i - y_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)(A(\bar{z}_i) - A(\bar{z}_j)) + c(y_i - y_j)^2 \\ & - \epsilon c(x_i - x_j)^2 - 2\epsilon d(x_i - x_j)(y_i - y_j) - \epsilon(x_i - x_j)(B(\bar{z}_i) - B(\bar{z}_j)) - b(x_i - x_j)^2 = 0. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты, будем иметь $a - d = 0$, $\epsilon b + c = 0$, $b + \epsilon c = 0$, $A(\bar{z}_i) - A(\bar{z}_j) = 0$, $B(\bar{z}_i) - B(\bar{z}_j) = 0$, $A(\bar{z}) = A = \text{const}$, $B(\bar{z}) = B = \text{const}$. Поэтому для компонент оператора алгебры Ли имеем

$$X_1 = ax + by + A, \quad X_2 = -\epsilon bx + ay + B.$$

Таким образом, произвольный оператор алгебры Ли группы движений трехмерной феноменологически симметричной геометрии

$$X = (ax + by + A)\partial_x + (-\epsilon bx + ay + B)\partial_y + \partial_z.$$

Придавая постоянным (a, b, A, B) значения $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 0)$, получаем пять базисных операторов, а должно быть шесть. Противоречие. \square

Функциональное уравнение (2.1) удобно переписать в виде

$$(x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) + X_3(i)F_1 + X_3(j)F_2 = 0, \quad (2.7)$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f(i, j)/\partial z_i}{2 \partial f(i, j)/\partial \theta}, \quad F_2(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f(i, j)/\partial z_j}{2 \partial f(i, j)/\partial \theta}. \quad (2.8)$$

Из (1.6) и (1.8), очевидно, следуют аналитичность функций (2.8) и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда имеем разложение в ряд Тейлора (см. [9, гл. 11])

$$\begin{cases} F_1(\theta, z_i, z_j) = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_1)(z_i, z_j)\theta^2 + \dots, \\ F_2(\theta, z_i, z_j) = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f_2)(z_i, z_j)\theta^2 + \dots. \end{cases} \quad (2.9)$$

Далее разложения (1.7) и (2.6) подставляем в тождество (2.7) и сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i , y_i , x_j , y_j . Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ Maple 15 (см. [10]).

Сравниваем коэффициенты перед степенью 0: $X_3(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_3(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0$.

Сравниваем коэффициенты перед степенями 1:

$$\begin{cases} D_1(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) + X_1(z_i) - X_1(z_j) = 0, \\ D_2(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) + \epsilon X_2(z_i) - \epsilon X_2(z_j) = 0, \\ D_1(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) - X_1(z_i) + X_1(z_j) = 0, \\ D_2(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) - \epsilon X_2(z_i) + \epsilon X_2(z_j) = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Затем сравниваем все коэффициенты перед степенями 2:

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2(X_1)(z_i) + \epsilon D_1(X_2)(z_i) + D_{1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \\ -D_1(X_1)(z_i) - D_1(X_1)(z_j) - 2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) - 2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0, \\ -\epsilon D_1(X_2)(z_i) - D_2(X_1)(z_j) = 0, \\ -\epsilon D_1(X_2)(z_j) - D_2(X_1)(z_i) = 0, \\ -D_2(X_2)(z_i) - D_2(X_2)(z_j) - 2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) - 2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = 0, \\ D_2(X_1)(z_j) + \epsilon D_1(X_2)(z_j) + D_{1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ 2D_1(X_1)(z_i) + 2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + 2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_{1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \\ 2\epsilon D_2(X_2)(z_i) + 2\epsilon X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + 2\epsilon X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_{2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \\ 2D_1(X_1)(z_j) + 2X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + 2X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_{1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ 2\epsilon D_2(X_2)(z_j) + 2\epsilon X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) + 2\epsilon X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + D_{2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0. \end{array} \right.$$

Разделяя переменные в третьем уравнении, получаем

$$-D_1(X_2)(z_i) = \epsilon D_2(X_1)(z_j) = a = \text{const},$$

следовательно,

$$D_1(X_2) = -a, \quad D_2(X_1) = \epsilon a.$$

Далее вычитаем из второго уравнения пятое:

$$-D_1(X_1)(z_i) - D_1(X_1)(z_j) = -D_2(X_2)(z_i) - D_2(X_2)(z_j),$$

откуда после разделения переменных имеем

$$D_1(X_1) = D_2(X_2).$$

Из первого и шестого уравнений системы получаем

$$D_{1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, \quad D_{1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0.$$

Из последних уравнений следует, что

$$\begin{cases} D_{1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, & D_{1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, & D_{2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0. \end{cases}$$

Тогда $D_1(X_1) = D_2(X_2) = d = \text{const}$, $X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -d$.

Таким образом, получается результат

$$\begin{cases} D_1(X_1) = d, & D_2(X_1) = \epsilon a, & D_1(X_2) = -a, & D_2(X_2) = d, \\ D_{1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, & D_{1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, & D_{2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) + X_3(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -d. \end{cases} \quad (2.11)$$

Сравниваем коэффициенты перед степенями 3, а затем комбинируем получаемые уравнения и разделяем переменные:

$$\begin{cases} D_{1,1}(X_1) = b, & D_{1,2}(X_1) = c, & D_{2,2}(X_1) = -\epsilon b = \text{const}, \\ D_{1,1}(X_2) = -\epsilon c, & D_{1,2}(X_2) = b, & D_{2,2}(X_2) = c = \text{const}, \\ 2D_1(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = -b, & 2D_1(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -b, \\ 2D_2(X_3)(z_i)D_1(f_1)(z_i, z_j) = -c, & 2D_2(X_3)(z_j)D_1(f_2)(z_i, z_j) = -c, \\ D_{1,1,1}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, & D_{1,1,1}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{1,1,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, & D_{1,1,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{1,2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, & D_{1,2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0, \\ D_{2,2,2}(X_3)(z_i)f_1(z_i, z_j) = 0, & D_{2,2,2}(X_3)(z_j)f_2(z_i, z_j) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

Аналогично поступаем с более высокими степенями.

Полученные результаты можно просуммировать и записать компактно:

$$D_1(X_3)(z_i)\overline{F_1} = 0, \quad D_1(X_3)(z_j)\overline{F_2} = 0, \quad D_2(X_3)(z_i)\overline{F_1} = 0, \quad D_2(X_3)(z_j)\overline{F_2} = 0, \quad (2.13)$$

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_i)F_1 = 0, \quad D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3)(z_j)F_2 = 0, \quad D_{\beta_1, \beta_2, \dots}(X_1) = 0, \quad D_{\gamma_1, \gamma_2, \dots}(X_2) = 0, \quad (2.14)$$

причем $\overline{F_1} = F_1 - f_1(z_i, z_j) - D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta$, $\overline{F_2} = F_2 - f_2(z_i, z_j) - D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta$, $\alpha_n = 1, 2$, $\beta_m = 1, 2$, $\gamma_s = 1, 2$, $n = 2, 3, 4, \dots$, $m, s = 3, 4, 5, \dots$. Из (2.14), очевидно, следует

$$D_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}(X_3) = 0, \quad \alpha_n = 1, 2, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (2.15)$$

Лемма 4. *Справедливо неравенство $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 = 0$. С учетом (2.15) получаем противоречие с леммой 3. \square

Таким образом, $(D_1(X_3))^2 + (D_2(X_3))^2 \neq 0$. Из системы (2.13) тогда следует

$$D_{\delta_1, \delta_2, \dots}(f_1)(z_i, z_j) = 0, \quad D_{\delta_1, \delta_2, \dots}(f_2)(z_i, z_j) = 0,$$

где $\delta_s = 1$, $s = 3, 4, 5, \dots$.

Итак, ряды (1.7) и (2.9) обрываются и записываются в виде многочленов

$$\begin{cases} X_1 = X_1(z) + dx + \epsilon ay + \frac{1}{2}bx^2 + cxy - \frac{1}{2}\epsilon by^2, \\ X_2 = X_2(z) - ax + dy - \frac{1}{2}\epsilon cx^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2, \\ X_3 = X_3(z) + D_1(X_3)(z)x + D_2(X_3)(z)y, \\ F_1 = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i, z_j)\theta, \quad F_2 = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_2)(z_i, z_j)\theta. \end{cases} \quad (2.16)$$

Первые два многочлена подставляем в первое слагаемое выражения (2.7) и приводим подобные:

$$\begin{aligned} (x_i - x_j)(X_1(i) - X_1(j)) + \epsilon(y_i - y_j)(X_2(i) - X_2(j)) &= (x_i - x_j)(X_1(z_i) - X_1(z_j)) \\ &+ \epsilon(y_i - y_j)(X_2(z_i) - X_2(z_j)) + d\theta + \left(\frac{1}{2}b(x_i + x_j) + \frac{1}{2}c(y_i + y_j)\right)\theta. \end{aligned} \quad (2.17)$$

В левую часть равенства (2.7) подставляем (2.17), а также третье и четвертое выражения из (2.16), затем учитываем (2.10)–(2.12), после преобразований получим тождественный нуль. Из (2.12), очевидно, следует

$$\begin{cases} D_1(X_3)(z_i) \frac{\partial D_1(f_1)(z_i, z_j)}{\partial z_j} = 0, & D_1(X_3)(z_j) \frac{\partial D_1(f_2)(z_i, z_j)}{\partial z_i} = 0, \\ D_2(X_3)(z_i) \frac{\partial D_1(f_1)(z_i, z_j)}{\partial z_j} = 0, & D_2(X_3)(z_j) \frac{\partial D_1(f_2)(z_i, z_j)}{\partial z_i} = 0. \end{cases}$$

Поэтому $D_1(f_1)(z_i, z_j) = D_1(f_1)(z_i)$, $D_1(f_2)(z_i, z_j) = D_1(f_2)(z_j)$. Тогда третья и четвертая строки системы (2.12) принимают вид

$$\begin{cases} 2D_1(X_3)(z)D_1(f_1)(z) = 2D_1(X_3)(z)D_1(f_2)(z) = -b, \\ 2D_2(X_3)(z)D_1(f_1)(z) = 2D_2(X_3)(z)D_1(f_2)(z) = -c. \end{cases} \quad (2.18)$$

Поэтому $D_1(f_1)(z) = D_1(f_2)(z)$.

Значит, последнее уравнение системы (2.11) принимает вид

$$X_3(z_i)D_1(f_1)(z_i) + X_3(z_j)D_1(f_1)(z_j) = -d.$$

Разделяя переменные, получаем

$$X_3(z)D_1(f_1)(z) = -\frac{d}{2}. \quad (2.19)$$

Далее рассматриваются два случая: $D_1(f_1)(z) = 0$ и $D_1(f_1)(z) \neq 0$.

1. Пусть сначала $D_1(f_1)(z) = 0$. Тогда из (2.18) и (2.19) следует, что

$$d = b = c = 0.$$

Из (2.10) при $D_1(X_3)(z) \neq 0$ получаем

$$f_1(z_i, z_j) = \frac{X_1(z_j) - X_1(z_i)}{D_1(X_3)(z_i)}, \quad f_2(z_i, z_j) = \frac{X_1(z_i) - X_1(z_j)}{D_1(X_3)(z_j)}. \quad (2.20)$$

Иначе $D_2(X_3)(z) \neq 0$, и аналогично находим $f_1(z_i, z_j)$ и $f_2(z_i, z_j)$. Найденное подставляем в (2.8) и учитываем (2.16):

$$\begin{cases} F_1(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f / \partial z_i}{2 \partial f / \partial \theta} = f_1(z_i, z_j) = \frac{X_1(z_j) - X_1(z_i)}{D_1(X_3)(z_i)}, \\ F_2(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f / \partial z_j}{2 \partial f / \partial \theta} = f_2(z_i, z_j) = \frac{X_1(z_i) - X_1(z_j)}{D_1(X_3)(z_j)}. \end{cases}$$

Приводя к общему знаменателю, имеем

$$D_1(X_3)(z_i) \frac{\partial f}{\partial z_i} = 2(X_1(z_j) - X_1(z_i)) \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad D_1(X_3)(z_j) \frac{\partial f}{\partial z_j} = 2(X_1(z_i) - X_1(z_j)) \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (2.21)$$

Складывая эти два выражения, приходим к дифференциальному уравнению

$$D_1(X_3)(z_i) \frac{\partial f}{\partial z_i} + D_1(X_3)(z_j) \frac{\partial f}{\partial z_j} = 0,$$

интегрируя которое, получаем (см. [11, гл. 5])

$$f(\theta, z_i, z_j) = \varphi(\theta, M(z_i) - M(z_j)), \quad M'(z) = \frac{1}{D_1(X_3)(z)}.$$

Найденное подставляем в (2.21), получаем уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = 2(X_1(z_j) - X_1(z_i)) \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad w = M(z_i) - M(z_j), \quad (2.22)$$

следовательно,

$$X_1(z_j) - X_1(z_i) = \psi(\theta, w) = \frac{\partial \varphi / \partial w}{2 \partial \varphi / \partial \theta}.$$

В этом равенстве дифференцируем по z_i и по z_j : $-X'(z_i) = M'(z_i) \psi'_w$, $X'(z_j) = -M'(z_j) \psi'_w$, значит, $-X'(z_i)/M'(z_i) = \psi'_w$, $-X'(z_j)/M'(z_j) = \psi'_w$. Потом приравниваем левые части и разделяем переменные: $X'(z)/M'(z) = \alpha = \text{const}$, получаем

$$X(z) = \alpha M(z) + \beta, \quad \beta = \text{const}.$$

Найденное подставляем в (2.22):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} + 2\alpha w \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0.$$

Интегрируя это уравнение [11, гл. 5], имеем

$$f(i, j) = \chi((x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2 - \alpha(M(z_i) - M(z_j))^2).$$

Затем вводим следующие замену координат и масштабное преобразование метрической функции:

а) При $\epsilon = 1$ и $\alpha < 0$: $\sqrt{-\alpha}M(z) = \bar{z}$, $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $\chi^{-1}(f) \rightarrow f$, тогда получаем метрическую функцию евклидовой трехмерной геометрии, которая в прежних обозначениях координат (x, y, z) имеет вид (1.9) с $\epsilon = 1$.

б) При $\epsilon = 1$ и $\alpha > 0$: $\sqrt{\alpha}M(z) = \bar{x}$, $x = \bar{y}$, $y = \bar{z}$, $\chi^{-1}(f) \rightarrow -f$, следовательно получаем метрическую функцию псевдоевклидовой трехмерной геометрии, которая в прежних обозначениях координат (x, y, z) имеет вид (1.9) с $\epsilon = -1$.

с) При $\epsilon = -1$ и $\alpha < 0$: $\sqrt{-\alpha}M(z) = \bar{z}$, $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, $\chi^{-1}(f) \rightarrow f$, поэтому снова имеем метрическую функцию псевдоевклидовой трехмерной геометрии.

д) При $\epsilon = -1$ и $\alpha > 0$: $\sqrt{\alpha}M(z) = \bar{x}$, $x = \bar{y}$, $y = \bar{z}$, $\chi^{-1}(f) \rightarrow -f$, и также будем иметь метрическую функцию псевдоевклидовой трехмерной геометрии.

2. Пусть теперь $D_1(f_1)(z) \neq 0$. Из (2.18) и (2.19) получаем

$$D_1(X_3)(z) = -\frac{b}{2D_1(f_1)(z)}, \quad D_2(X_3)(z) = -\frac{c}{2D_1(f_1)(z)}, \quad X_3(z) = -\frac{d}{2D_1(f_1)(z)}. \quad (2.23)$$

Следует заметить, что в силу леммы $4b^2 + c^2 \neq 0$ и с точностью до переобозначений будем считать $b \neq 0$. Тогда система (2.20) с учетом (2.23) принимает вид

$$f_1(z_i, z_j) = \frac{2(X_1(z_i) - X_1(z_j))D_1(f_1)(z_i)}{b}, \quad f_2(z_i, z_j) = \frac{2(X_1(z_j) - X_1(z_i))D_1(f_1)(z_j)}{b}.$$

Найденное подставляется в выражения (2.8) с учетом рядов Тейлора (2.9):

$$F_1(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f / \partial z_i}{2 \partial f / \partial \theta} = f_1(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_i)\theta = \frac{2(X_1(z_i) - X_1(z_j))D_1(f_1)(z_i)}{b} + D_1(f_1)(z_i)\theta,$$

$$F_2(\theta, z_i, z_j) = \frac{\partial f / \partial z_j}{2 \partial f / \partial \theta} = f_2(z_i, z_j) + D_1(f_1)(z_j)\theta = \frac{2(X_1(z_j) - X_1(z_i))D_1(f_1)(z_j)}{b} + D_1(f_1)(z_j)\theta.$$

откуда следует, что

$$\begin{cases} \frac{1}{D_1(f_1)(z_i)} \frac{\partial f}{\partial z_i} = 2 \left(\frac{2(X_1(z_i) - X_1(z_j))}{b} + \theta \right) \frac{\partial f}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{D_1(f_1)(z_j)} \frac{\partial f}{\partial z_j} = 2 \left(\frac{2(X_1(z_j) - X_1(z_i))}{b} + \theta \right) \frac{\partial f}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (2.24)$$

В данной системе $2(X_1(z_i) - X_1(z_j))/b + \theta \neq 0$ и $2(X_1(z_j) - X_1(z_i))/b + \theta \neq 0$, поскольку противное противоречит неравенствам (1.6). Складывая выражения из (2.24), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{D_1(f_1)(z_i)} \frac{\partial f}{\partial z_i} + \frac{1}{D_1(f_1)(z_j)} \frac{\partial f}{\partial z_j} = 4\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Осуществим замену координат: $\int D_1(f_1)(z)dz = \bar{z}$. Тогда в новых координатах получим уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} - 4\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} = 0,$$

откуда после интегрирования (см. [11, гл. 5]) следует

$$f(\theta, \bar{z}_i, \bar{z}_j) = \varphi(\theta e^{4\bar{z}_i}, \theta e^{4\bar{z}_j}).$$

Очевидно, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \neq 0$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} \neq 0$, где $u = \theta e^{4\bar{z}_i}$, $v = \theta e^{4\bar{z}_j}$, поскольку иначе $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 4u \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 4v \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, что противоречит неравенствам (1.6). Этот интеграл подставляем в (2.24) с учетом сделанной выше замены и приводим подобные:

$$(b\theta - 2(X_1(\bar{z}_i) - X_1(\bar{z}_j)))u \frac{\partial \varphi}{\partial u} = (b\theta + 2(X_1(\bar{z}_i) - X_1(\bar{z}_j)))v \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Из данного равенства следует

$$\frac{b\theta - 2(X_1(\bar{z}_i) - X_1(\bar{z}_j))}{b\theta + 2(X_1(\bar{z}_i) - X_1(\bar{z}_j))} = \eta(u, v) = \frac{v \partial \varphi / \partial v}{u \partial \varphi / \partial u}.$$

Методом дифференцирования и разделения переменных несложно доказать, что $\eta(u, v) = 1$. Тогда в последнем выражении, приводя к общему знаменателю, получим простое дифференциальное уравнение

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial u} - v \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0,$$

интегрируя которое [3], имеем функцию

$$f(i, j) = \chi \left([(x_i - x_j)^2 + \epsilon(y_i - y_j)^2] e^{4(z_i + z_j)} \right).$$

Затем вводим масштабное преобразование метрической функции $\sqrt{\chi^{-1}(f)} \rightarrow f$. Таким образом, получаем метрическую функцию (1.10) трехмерного особого расширения евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий.

Вторая часть теоремы уже доказана в работе [12], где найдены базисные операторы (1.11), (1.12). Метод доказательства проиллюстрирован в леммах 1 и 3.

Теорема доказана полностью. \square

Заклучение

Итак, поставленная выше задача об аналитическом вложении евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий полностью решена. В результате получились трехмерные геометрии максимальной подвижности: евклидова, псевдоевклидова, особые расширения евклидовой и псевдоевклидовой двумерных геометрий. Полученные метрические функции содержатся в классификации В. Х. Лева [4], которая, как говорилось выше, построена совершенно другим методом. Аналогично можно решить задачи об аналитическом вложении симплектической, симплицальной, псевдогольмгольцевой, дуальногольмгольцевой и собственно гольмгольцевой двумерных геометрий, т. е. найти все трехмерные геометрии максимальной подвижности с метрическими функциями вида

$$f(i, j) = f(x_i y_j - x_j y_i, z_i, z_j),$$

$$f(i, j) = f\left(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, z_i, z_j\right),$$

$$f(i, j) = f\left(\frac{(y_i - y_j)^\beta}{x_i - x_j}, z_i, z_j\right),$$

$$f(i, j) = f\left((x_i - x_j)^2 e^{\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, z_i, z_j\right),$$

$$f(i, j) = f\left([(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2] e^{2\gamma \arctg \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}}, z_i, z_j\right),$$

где $\beta, \gamma = \text{const}$, $\beta \neq -1, 0, 1$, $\gamma \neq 0$. Первая из них решена в работе [6].

Задачу о вложении можно также поставить и для трехмерных геометрий, т. е. когда метрические функции четырехмерных геометрий ищутся в виде

$$f = \chi(g(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j), w_i, w_j),$$

где g — метрические функции известных трехмерных геометрий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михайличенко Г.Г. О групповой и феноменологической симметриях в геометрии // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 5. С. 99–113.
2. Михайличенко Г.Г. Полиметрические геометрии. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. 144 с.
3. Михайличенко Г.Г. Двумерные геометрии // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 4. С. 803–805.
4. Лев В.Х. Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычислительные систем ИМ СОАН СССР. 1988. Вып. 125. С. 90–103.
5. Кыров В.А. Функциональные уравнения в псевдоевклидовой геометрии // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 38–51.
6. Кыров В.А. Функциональные уравнения в симплектической геометрии // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №2. С. 149–153.
7. Кыров В.А. Вложение феноменологически симметричных геометрий двух множеств ранга $(N, 2)$ в феноменологически симметричные геометрии двух множеств ранга $(N + 1, 2)$ // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, №3. С. 312–323. doi: 10.20537/vm160302.
8. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 344 с.
9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 2 т. М.: Физматгиз, 1963. Т. 2. 656 с.
10. Дьяков В. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. М.: ДМК ПРЕСС, 2014. 800 с. ISBN: 978-5-94074-751-2.

11. Эльсгольц Э.Л. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
12. Кыров В.А. Шестимерные алгебры Ли групп движений трехмерных феноменологически симметричных геометрий: Приложение к книге Г. Г. Михайличенко “Полиметрические геометрии”. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2001. 144 с.

Кыров Владимир Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
кафедра физики и информатики
Горно-Алтайский госуниверситет, г. Горно-Алтайск
e-mail: kyrovVA@yandex.ru

Поступила 20.06.2016

Михайличенко Геннадий Григорьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
кафедра физики и информатики
Горно-Алтайский госуниверситет, г. Горно-Алтайск
e-mail: mikhailichenko@gasu.ru

REFERENCES

1. Mikhailichenko G.G. Group and phenomenological symmetries in geometry. *Sib. Math. J.*, 1984, vol. 25, pp. 764–774.
2. Mikhailichenko G.G. *Polimetricheskie geometrii* [Polymetric geometries]. Novosibirsk: Novosibirskii Gos. Universitet Publ., 2001, 144 p.
3. Mikhailichenko G.G. Two-dimensional geometries. *Soviet Mathematics. Doklady*, 1981, vol. 24, pp. 346–348.
4. Lev V.Kh. Three-dimensional geometries in the theory of physical structures. *Vychislitel'nye sistemy*, Novosibirsk: Institute of Mathematics Publ., 1988, iss. 125, pp. 90–103 (in Russian).
5. Kyrov V.A. Functional equations in pseudo-Euclidean geometry. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2010, vol. 13, no. 4, pp. 38–51 (in Russian).
6. Kyrov V.A. Functional equations in symplectic geometry. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 149–153 (in Russian).
7. Kyrov V.A. Embedding of phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N, 2)$ into phenomenologically symmetric geometries of two sets of the rank $(N + 1, 2)$. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 3, pp. 312–323 (in Russian). doi: 10.20537/vm160302.
8. Ovsyannikov L.V. *Grupповой анализ дифференциальных уравнений* [Group analysis of differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 344 p.
9. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course in differential and integral calculus]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, vol. 2, 656 p.
10. D'yakov V. *Maple 10/11/12/13/14 v matematicheskikh raschetakh* [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moscow: DMK-Press, 2014, 800 с. ISBN: 978-5-94074-751-2.
11. Elsgolts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and the calculus of variations]. Moscow: Nauka, 1969, 424 p.
12. Kyrov V.A. *Shestimernye algebry Li grupp dvizhenij trehmernyh fenomenologicheskii simmetrichnyh geometrii* [Six-dimensional Lie algebras of the groups of motions of three-dimensional phenomenologically symmetric geometries], Appendix to the book G. G. Mikhailichenko, Polymetric geometries, Novosibirsk: Novosibirskii Gos. Universitet Publ., 2001, 144 p.

The paper was received by the Editorial Office on June 20, 2016.

Vladimir Aleksandrovich Kyrov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, 649000 Russia, e-mail: kyrovVA@yandex.ru .

Gennadii Grigor'evich Mikhailichenko, Dr. Phys.-Math. Sci., Gorno-Altai State University, Gorno-Altai, 649000 Russia, e-mail: mikhailichenko@gasu.ru .

УДК 517.956

**ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ
С КУСОЧНО ГЛАДКОЙ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ**

Е. Ф. Леликова

В работе исследуется асимптотическое поведение решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в случае, когда малый параметр входит множителем только при одной из старших производных, а предельное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением. Рассматривается случай, когда граничная функция кусочно гладкая. При этом, точка нарушения гладкости есть точка разрыва первого рода и совпадает с точкой, в которой характеристика предельного уравнения касается границы внутренним образом. Несмотря на то, что порядок предельного уравнения тот же самый, что и у исходного уравнения, рассматриваемая задача является бисингулярной. В работе асимптотическое поведение решения этой задачи исследуется методом согласования асимптотических разложений.

Ключевые слова: сингулярные задачи, краевые задачи для уравнений в частных производных, асимптотические разложения, метод согласования.

E. F. Lelikova. On the asymptotics of a solution to a second-order elliptic equation with a small parameter and a piecewise smooth boundary function.

We study the asymptotic behavior of a solution to the first boundary value problem for a second-order elliptic equation in the case when the small parameter is a factor at only one of the highest derivatives and the limit equation is an ordinary differential equation. We consider the case when the boundary function is piecewise smooth. Moreover, the point where the smoothness is violated is a point of jump discontinuity and coincides with the point where a characteristic of the limit equation touches the boundary from inside. Although the limit equation has the same order as the original equation, the problem under consideration is bisingular. We investigate the asymptotic behavior of the solution to this problem using the method of matched asymptotic expansions.

Keywords: singular problems, boundary value problems for partial differential equations, asymptotic expansions, matching method.

MSC: 34E05, 34E10, 34K26, 35K15, 35K59

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-182-195

Введение

В данной работе исследуется поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения первой краевой задачи

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u &= \varepsilon u_{xx} + u_{yy} + b(x, y)u_y + a(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, y) &= h(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{0.1}$$

в ограниченной области D с границей Γ , имеющей точку, в которой характеристика предельного уравнения (прямая, параллельная оси y) касается границы изнутри области. Предполагается, что параметр $\varepsilon > 0$, коэффициенты и правая часть уравнения (0.1) — достаточно гладкие функции, а граничная функция $h(x, y)$ — кусочно гладкая. Предполагается также, что существует ограниченное решение задачи (0.1), которое мы будем обозначать через $u_\varepsilon(x, y)$, и для него справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(x, y)| \leq M \left(\max_{(x, y) \in D} |f(x, y)| + \max_{(x, y) \in \Gamma} |h(x, y)| \right),$$

где постоянная M не зависит от ε . (Это условие выполнено, например, при $a(x, y) \leq \alpha < 0$.)

Задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовали многие авторы, и библиография по этому вопросу достаточно известна (см., например, статьи [1; 2] и монографии [3–5]).

Особенностью исследуемой задачи является то, что малый параметр входит множителем только при одной из старших производных, так что порядок предельного уравнения тот же самый, что и исходного уравнения. Кроме того, рассматривается случай, когда предельное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением.

В случае, когда граничная функция $h(x, y)$ гладкая, задача (0.1) исследована в работах [6; 7] — точки внешнего касания и угловые точки границы, [8] — точки внутреннего касания границы, [9] — точки перегиба границы.

Задачи такого рода весьма сложны, в [5] они называются *бисингулярными*. Одним из методов их решения является метод согласования асимптотических разложений [4; 5]. Этот метод состоит из двух частей, не зависящих, вообще говоря, друг от друга. Сначала строятся формальные асимптотические решения (ФАР) исходной задачи в различных подобластях рассматриваемой области изменения независимых переменных, т. е. строятся согласованные между собой асимптотические ряды по некоторым последовательностям функций параметра ε , частичные суммы которых с достаточно высокой степенью точности (по ε) удовлетворяют исходному уравнению и граничному условию в этих подобластях. Далее из частичных сумм этих ФАР строится составное разложение, являющееся ФАР исходной задачи уже всюду в рассматриваемой области изменения переменных. Затем проводится обоснование построенного разложения. Для задач, аналогичных рассматриваемой, обоснование построенного ФАР не вызывает трудностей и достаточно подробно в аналогичных ситуациях описано в работе [5]. Поэтому основным содержанием данной работы является построение ФАР в окрестности рассматриваемой точки внутреннего касания.

Основные трудности в задачах описанного выше типа появляются именно при построении ФАР. Как правило, возникают ситуации, когда в окрестности “особого” подмножества существуют два “внутренних” (по отношению к исходным переменным x, y) асимптотических разложения, которые взаимно определяют друг друга, т. е. не могут быть построены независимо. Для того чтобы реализовать процедуру согласования, необходимо исследовать структуру координатной асимптотики одного из этих внутренних разложений.

Отличием данной работы от описанных выше является рассмотрение случая кусочно гладкой граничной функции. Оказывается, в случаях, когда точка разрыва совпадает с угловой точкой, либо с точкой касания извне области, либо с точкой перегиба, либо является точкой гладкой границы, исследование поведения решения проводится совершенно аналогично тому, как это было сделано в указанных выше работах, и не требует дополнительных усилий.

Что же касается случая, когда точка разрыва граничной функции совпадает с точкой касания изнутри области, задача требует дополнительных исследований и новых построений.

В данной работе так же, как и в работе [8], методом согласования асимптотических разложений построено и обосновано асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ задачи (0.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ в окрестности отрезка прямой, параллельной оси y , касающейся границы Γ области D в точке разрыва граничной функции h изнутри области.

1. Внешнее разложение и его особенности

Будем считать, что точка касания совпадает с началом координат $(0, 0)$, порядок касания первый, а граница Γ области D в некоторой фиксированной окрестности начала координат совпадает с кривой $x = y^2$ и двумя гладкими кривыми $y = \gamma^-(x)$ и $y = \gamma^+(x)$, лежащими в нижней и верхней полуплоскостях соответственно ($\gamma^-(x) < -\sqrt{x}$, $\gamma^+(x) > \sqrt{x}$). Таким образом, рассматриваем область $D_\delta = \{(x, y) \in D, -\delta \leq x \leq \delta, \delta > 0\}$, ограниченную параболой $x = y^2$, кривыми $y = \gamma^\pm(x)$ и отрезками прямых $x = -\delta$, $x = \delta$. Будем строить асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в этой области D_δ .

Не ограничивая общности рассмотрений, будем предполагать, что граничная функция $h(x, y) \equiv 0$ при $(x, y) \in \gamma^\pm(x)$. Обозначим $h(x, y) = h^+(x, y)$ при $y > 0$, $h(x, y) = h^-(x, y)$ при $y < 0$. Отметим, что $h^+(0, 0) \neq h^-(0, 0)$.

Внешнее разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ будем строить в виде

$$U(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y). \quad (1.1)$$

Подставляя ряд (1.1) в уравнение (0.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему рекуррентных соотношений

$$L_0 u_0 = f(x, y), \quad L_0 u_k = -\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x^2}, \quad k \geq 1, \quad (1.2)$$

где обозначено $L_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(x, y)$.

При $x < 0$ прямые, проведенные через точки области D_δ параллельно оси y , пересекают границу области только в двух точках, принадлежащих Γ : $\gamma^-(x)$ и $\gamma^+(x)$.

Определим в этой части области D_δ коэффициенты внешнего разложения $u_k(x, y)$ как решения рекуррентной системы уравнений (1.2) при $\gamma^-(x) < y < \gamma^+(x)$, удовлетворяющие граничным условиям из (0.1), которые в рассматриваемой области принимают вид

$$u_k(x, \gamma^-(x)) = 0, \quad u_k(x, \gamma^+(x)) = 0. \quad (1.3)$$

При $x > 0$ прямая, проведенная через внутреннюю точку области D_δ параллельно оси y , пересекает границу области в четырех точках и состоит из двух отрезков, один из которых лежит между кривыми $y = \sqrt{x}$ и $\gamma^+(x)$, а второй — между кривыми $\gamma^-(x)$ и $y = -\sqrt{x}$.

При $\sqrt{x} \leq y \leq \gamma^+(x)$ (на первом из отрезков) определим коэффициенты $u_k(x, y)$ как решения рекуррентной системы (1.2), удовлетворяющие условиям

$$u_k(x, \sqrt{x}) = h^+(x, \sqrt{x}), \quad u_k(x, \gamma^+(x)) = 0. \quad (1.4)$$

При $\gamma^-(x) \leq y \leq -\sqrt{x}$ (на втором из отрезков) определим коэффициенты $u_k(x, y)$ как решения рекуррентной системы (1.2), удовлетворяющие условиям

$$u_k(x, \gamma^-(x)) = 0, \quad u_k(x, -\sqrt{x}) = h^-(x, -\sqrt{x}). \quad (1.5)$$

Построенное внешнее асимптотическое разложение — это по существу три различных асимптотических ряда, коэффициенты которых определяются как решения трех различных краевых задач: (1.2), (1.3); (1.2), (1.4) и (1.2), (1.5). Очевидно, что функции $u_k(x, y)$, вообще говоря, разрывны на прямой $x = 0$.

Функции $u_k(x, y)$ — это решения обыкновенных дифференциальных уравнений по переменной y , бесконечно дифференцируемые по переменной y во всей области D_δ . Кроме того, они зависят от параметра x . По предположению, функции $\gamma^\pm(x)$ бесконечно дифференцируемы в окрестности начала координат, и, следовательно, функции $u_k(x, y)$ также бесконечно дифференцируемы и по параметру x слева от прямой $x = 0$ (т. е. при $x < 0$). При $x > 0$ функции $u_k(x, y)$ зависят еще и от параметра \sqrt{x} , и нетрудно предвидеть, что они могут иметь особенности по переменной x при $x \rightarrow +0$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. При $x \rightarrow +0$, $\sqrt{x} \leq y \leq \gamma^+(x)$ функции $u_k(x, y)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$u_0(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/2} u_{0j}^+(y), \quad u_k(x, y) = x^{-2k} \sum_{j=1}^{\infty} x^{j/2} u_{kj}^+(y),$$

$k \geq 1$, которые допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Теорема 2. При $x \rightarrow +0$, $\gamma^-(x) \leq y \leq -\sqrt{x}$ функции $u_k(x, y)$ разлагаются в асимптотические ряды

$$u_0(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/2} u_{0j}^-(y), \quad u_k(x, y) = x^{-2k} \sum_{j=1}^{\infty} x^{j/2} u_{kj}^-(y),$$

$k \geq 1$, которые допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Доказательство этих теорем полностью повторяет доказательство теорем 1.1, 1.2 работы [8]. \square

2. Внутреннее разложение в окрестности прямой $x = 0$

В окрестности оси $x = 0$ перейдем от переменной x к новой, “внутренней”, переменной $\zeta = x\varepsilon^{-1/2}$ и будем строить “внутреннее” асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$V(\zeta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} v_k(\zeta, y). \quad (2.1)$$

Стандартным образом, т. е. переходя в исходном уравнении (0.1) к переменной ζ , разлагая коэффициенты $b(x, y)$, $a(x, y)$ и правую часть $f(x, y)$ в ряды Тейлора в окрестности прямой $x = 0$, заменяя в получившихся разложениях x на $\sqrt{\varepsilon}\zeta$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , приходим к системе рекуррентных соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 v_0 = f(0, y), \quad L_1 v_1 = 0, \\ L_1 v_2 = \zeta \frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \zeta \frac{\partial b}{\partial x}(0, y) \frac{\partial v_0}{\partial y} - \zeta \frac{\partial a}{\partial x}(0, y) v_0, \quad L_1 v_3 = -\zeta \frac{\partial b}{\partial x}(0, y) \frac{\partial v_1}{\partial y} - \zeta \frac{\partial a}{\partial x}(0, y) v_1, \\ L_1 v_{2j} = \frac{\zeta^j}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, y) - \sum_{i=1}^j \frac{\zeta^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0, y) \frac{\partial v_{2j-2i}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0, y) v_{2j-2i} \right], \\ L_1 v_{2j+1} = - \sum_{i=1}^j \frac{\zeta^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0, y) \frac{\partial v_{2j+1-2i}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0, y) v_{2j+1-2i} \right]. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь обозначено $L_1 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(0, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(0, y) = \Delta_{\zeta, y} + b(0, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(0, y)$.

В переменных ζ, y уравнения границ $y = \gamma^\pm(x)$ принимают вид $y = \gamma^\pm(x) = \gamma^\pm(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^\pm \varepsilon^{j/2} \zeta^j$, а уравнение параболы $y = \pm\sqrt{x}$ принимает вид $y = \pm\varepsilon^{1/4} \sqrt{\zeta}$, и таким образом при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестность прямой $x = 0$ в переменных ζ, y переходит в бесконечную полосу с разрезом вдоль положительной полуоси

$$\Omega = \{ (\zeta, y) : \gamma^-(0) < y < \gamma^+(0), \quad 0 < \theta < 2\pi \}, \quad (2.3)$$

где θ — полярный угол точки (ζ, y) ; $r = \sqrt{\zeta^2 + y^2}$.

Потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на ветвях параболы $y = \varepsilon^{1/4} \sqrt{\zeta}$ и $y = -\varepsilon^{1/4} \sqrt{\zeta}$, получаем

$$h^\pm(\varepsilon^{1/2} \zeta, \pm \varepsilon^{1/4} \sqrt{\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} v_k(\zeta, \pm \varepsilon^{1/4} \sqrt{\zeta}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \frac{\partial^i v_k}{\partial y^i}(\zeta, \pm 0) \varepsilon^{i/4} (\pm \sqrt{\zeta})^i \right].$$

Приравнивая нулю коэффициенты при степенях ε , получаем на верхней и нижней сторонах разреза

$$\begin{cases} v_0(\zeta, \pm 0) = h^\pm(0, 0), & v_1(\zeta, \pm 0) = \mp \frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, \pm 0) \sqrt{\zeta} + h_y^\pm(0, 0) \sqrt{\zeta}, \\ v_2(\zeta, \pm 0) = \mp \frac{\partial v_1}{\partial y}(\zeta, \pm 0) \sqrt{\zeta} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}(\zeta, \pm 0) \zeta + \alpha_2^\pm \zeta, \dots, \\ v_k(\zeta, \pm 0) = - \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial y^l}(\zeta, \pm 0) (\pm 1)^l \zeta^{l/2} + \alpha_k^\pm \zeta^{k/2}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь α_k^\pm — некоторые константы, зависящие от значений производных функций $h^\pm(x, y)$ в точке $(0, 0)$.

Отметим, что здесь $h^+(0, 0) \neq h^-(0, 0)$ (в отличие от [8]).

Далее, потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на границах $y = \gamma^\pm(x)$, получим граничные условия для коэффициентов $v_k(\zeta, y)$ на прямых $y = \gamma^\pm(0)$:

$$\begin{cases} v_0(\zeta, \gamma^\pm(0)) = 0, & v_1(\zeta, \gamma^\pm(0)) = 0, & v_2(\zeta, \gamma^\pm(0)) = -\zeta \gamma_1^\pm \frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, \gamma^\pm(0)), \\ v_3(\zeta, \gamma^\pm(0)) = -\zeta \gamma_1^\pm \frac{\partial v_1}{\partial y}(\zeta, \gamma^\pm(0)), \dots, & v_k(\zeta, \gamma^\pm(0)) = S_k^\pm(\zeta), \end{cases} \quad (2.5)$$

где граничная функция $S_k^\pm(\zeta)$ имеет вид $S_k^\pm(\zeta) = \sum \beta_{ljs} \frac{\partial^l v_{k-2j}}{\partial y^l}(\zeta, \gamma^\pm(0)) \zeta^s$, $j \leq \left[\frac{k}{2} \right]$, $l + s \leq k - 2$.

Итак, необходимо построить функции $v_k(\zeta, y)$ — решения эллиптических уравнений (2.2) в полосе Ω (см. (2.3)), удовлетворяющие на границах этой полосы условиям (2.4), (2.5).

Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с угловыми точками рассматривали многие авторы. Наиболее полно такие задачи исследованы в работе [10], где кроме вопросов существования решений в специальных классах функций было детально рассмотрено асимптотическое поведение решений в окрестностях самих угловых точек.

Воспользовавшись результатами работы [10], нетрудно установить, что решения $v_k(\zeta, y)$ задач (2.2), (2.4), (2.5), начиная с некоторого k , будут иметь особенности в начале координат. Следовательно, асимптотическое разложение (2.1) становится непригодным в окрестности начала координат и там необходимо строить другое асимптотическое разложение. Кроме того, так же, как в аналогичных задачах (см. например, [7; 8]), в классе неограниченных функций решения задач (2.2), (2.4), (2.5) определяются неединственным образом, и поэтому асимптотическое разложение (2.1) может быть построено только после исследования асимптотического поведения решения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности начала координат.

3. Внутреннее асимптотическое разложение в окрестности начала координат

В окрестности начала координат перейдем от переменных x, y к новым, “внутренним”, переменным $\xi = x\varepsilon^{-1}$, $\eta = y\varepsilon^{-1/2}$ и будем строить еще одно, “внутреннее”, асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде (который отличен от вида соответствующего разложения в [8])

$$W(\xi, \eta, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \ln^j \varepsilon w_{kj}(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \ln^m \varepsilon \sum_{k=2m}^{\infty} \varepsilon^{k/4} w_{km}(\xi, \eta). \quad (3.1)$$

Парабола $x = y^2$ в новых переменных примет вид $\xi = \eta^2$, а область D_δ в окрестности начала координат перейдет в неограниченную область $\Omega_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\xi, \eta) : \xi > 0, \eta^2 < \xi\}$ — внешность области, расположенной в полуплоскости $\xi > 0$ и ограниченной параболой $\xi = \eta^2$.

Для того чтобы получить рекуррентные соотношения для определения коэффициентов $w_k(\xi, \eta)$, разложим коэффициенты $b(x, y)$, $a(x, y)$ и правую часть $f(x, y)$ исходного уравнения (0.1) в ряды Тейлора в окрестности начала координат и перейдем в получившихся разложениях к внутренним переменным ξ, η :

$$b(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} x^i y^j = \sum_{i,j \geq 0} b_{ij} \varepsilon^i \xi^i \varepsilon^{j/2} \eta^j = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} g_j^{(1)}(\xi, \eta),$$

$$a(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} g_j^{(2)}(\xi, \eta), \quad f(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} f_{ij} x^i y^j = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{j/2} g_j^{(3)}(\xi, \eta).$$

Стандартным образом, т.е. переходя в исходном уравнении (0.1) к внутренним переменным ξ, η , заменяя коэффициенты $b(x, y)$, $a(x, y)$ и правую часть $f(x, y)$ выписанными выше разложениями в окрестности начала координат и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим, что коэффициенты $w_{kj}(\xi, \eta)$ внутреннего разложения (3.1) должны удовлетворять в области Ω_1 системе рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} \Delta w_{2m,0} = - \sum_{j=0}^{m-1} g_j^{(1)}(\xi, \eta) \frac{\partial w_{2m-2-2j,0}}{\partial \eta} - \sum_{j=0}^{m-2} g_j^{(2)}(\xi, \eta) w_{2m-4-2j,0} + g_{m-2}^{(3)}(\xi, \eta), \\ \Delta w_{2m+1,0} = - \sum_{j=0}^{m-1} g_j^{(1)}(\xi, \eta) \frac{\partial w_{2m-1-2j,0}}{\partial \eta} - \sum_{j=0}^{m-2} g_j^{(2)}(\xi, \eta) w_{2m-3-2j,0}, \\ \Delta w_{2m+s,m} = - \sum_{j=0}^{m-1} g_j^{(1)}(\xi, \eta) \frac{\partial w_{2m+s-2-2j,m}}{\partial \eta} - \sum_{j=0}^{m-2} g_j^{(2)}(\xi, \eta) w_{2m+s-4-2j,m}, \quad m > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Для нескольких “первых” функций w_{kj} соотношения (3.2) принимают вид $\Delta w_{00} = 0$, $\Delta w_{10} = 0$, $\Delta w_{20} = -b(0,0) \frac{\partial w_{00}}{\partial \eta}$, $\Delta w_{30} = -b(0,0) \frac{\partial w_{10}}{\partial \eta}$.

Кроме того, потребовав, чтобы асимптотический ряд (3.1) удовлетворял краевым условиям исходной задачи, получим краевые условия для функций $w_{km}(\xi, \eta)$:

$$w_{2n,0}(\xi, \pm \sqrt{\xi}) = h_n^{\pm} \xi^{n/2}, \quad w_{2n+1,0}(\xi, \pm \sqrt{\xi}) = 0, \quad w_{km}(\xi, \pm \sqrt{\xi}) = 0, \quad m > 0. \quad (3.3)$$

Здесь h_k^{\pm} — некоторые константы, зависящие от производных функций $h^{\pm}(x, y)$ в начале координат, $h_0^{\pm} = h^{\pm}(0,0)$, $h_1^{\pm} = \pm h_y^{\pm}(0,0)$, $h_2^{\pm} = h_x^{\pm}(0,0) + 1/2 h_{yy}^{\pm}(0,0)$.

Соотношениями (3.2), (3.3) функции $w_k(\xi, \eta)$ — решения задач в неограниченной области Ω_1 вообще говоря, не определяются однозначно. Необходимо задать еще некоторые дополнительные условия для этих функций при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$, которые должны быть получены из условий согласования асимптотических разложений (2.1) и (3.1). Построение функций $w_k(\xi, \eta)$ и $v_k(\zeta, y)$ проводится одновременно. Эта ситуация типична для сингулярно возмущенных задач (см. [4; 5]).

4. Вспомогательные построения

Пусть (r, θ) — полярные координаты на плоскости (ζ, y) . Для целых k будем рассматривать функции

$$U_{k,0}^{(1)}(\zeta, y) = r^{k/2} \sin \frac{k\theta}{2}, \quad U_{k,0}^{(2)}(\zeta, y) = r^{k/2} \cos \frac{k\theta}{2}. \quad (4.1)$$

При $k = 2n, n \geq 0$, функции $U_{k,0}^{(j)}$ — это гармонические полиномы.

Функции $U_k^{(j)}(\zeta, y)$ — сопряженные гармонические функции в плоскости (ζ, y) с разрезом вдоль положительной полуоси ζ :

$$\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial y} = -\frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial \zeta}. \quad (4.2)$$

Из явных формул (4.1) легко получаются соотношения

$$\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial y} = \frac{k}{2} U_{k-2,0}^{(2)}, \quad -\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{k}{2} U_{k-2,0}^{(1)}, \quad (4.3)$$

а также соотношения

$$\begin{aligned} \zeta U_{k,0}^{(1)} &= \frac{1}{2} U_{k+2,0}^{(1)} + \frac{1}{2} r^2 U_{k-2,0}^{(1)}, & \zeta U_{k,0}^{(2)} &= \frac{1}{2} U_{k+2,0}^{(2)} + \frac{1}{2} r^2 U_{k-2,0}^{(2)}, \\ y U_{k,0}^{(1)} &= -\frac{1}{2} U_{k+2,0}^{(2)} + \frac{1}{2} r^2 U_{k-2,0}^{(2)}, & y U_{k,0}^{(2)} &= \frac{1}{2} U_{k+2,0}^{(1)} - \frac{1}{2} r^2 U_{k-2,0}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

которые в общем виде могут быть записаны следующим образом:

$$\zeta^m y^p U_{k,0}^{(j)} = \sum_{s=0}^{m+p} \alpha_s^{(m,p)} U_{k+2m+2p-4s,0}^{(l)} r^{2s}, \quad (4.5)$$

где $l = j$ при четном p , $l \neq j$ при нечетном p . При этом в случае, когда $U_k^{(j)}$ — гармонический полином, т. е. когда $k = 2n$, $n \geq 0$, те из коэффициентов $\alpha_s^{(m,p)}$ в соотношении (4.5), для которых $k + 2m + 2p - 4s < 0$, следует считать равными нулю.

Будем говорить, что функция $v(\zeta, y)$ вида $v(\zeta, y) = r^\alpha \Phi(\theta)$ имеет порядок α . Множество линейных комбинаций функций вида $v(\zeta, y) = \zeta^m y^p U_{k,0}^{(j)}$, где m, p — целые неотрицательные, будем обозначать через $\mathcal{W}^{(0)}$. Подмножество множества $\mathcal{W}^{(0)}$, все элементы которого имеют фиксированный порядок $s/2$, будем обозначать через $\mathcal{W}_s^{(0)}$.

Поскольку $\zeta = U_{2,0}^{(2)}(\zeta, y)$, $y = U_{2,0}^{(1)}(\zeta, y)$, то в силу соотношений (4.5) любой многочлен $Q(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(0)}$, а любой однородный многочлен $Q_n(\zeta, y)$ степени n является элементом множества $\mathcal{W}_{2n}^{(0)}$.

Из соотношения (4.5) следует, что функция $v(\zeta, y)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}_q^{(0)}$, имеет вид

$$v(\zeta, y) = \sum_{m,k,j} \beta_{m,k,j} r^{2m} U_{k,0}^{(j)},$$

где $m \geq 0$, $1 \leq j \leq 2$, $k + 4m = q$.

Далее, из соотношений (4.3), (4.4) следует, что если функция $v(\zeta, y) \in \mathcal{W}_q^{(0)}$, то

$$\frac{\partial v}{\partial \zeta} \in \mathcal{W}_{q-2}^{(0)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \in \mathcal{W}_{q-2}^{(0)}, \quad \zeta^m y^p v(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{q+2m+2p}^{(0)}.$$

При $n \geq 1$ определим гармонические функции $U_{k,n}^{(j)}$ следующим образом:

$$U_{k,n}^{(j)} = \frac{\partial^n}{\partial k^n} U_{k,0}^{(j)}. \quad (4.6)$$

Воспользовавшись соотношениями (4.6), нетрудно получить рекуррентные соотношения для функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ вида

$$U_{k,n}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k [\ln r U_{k,n-1}^{(1)} + \theta U_{k,n-1}^{(2)}], \quad U_{k,n}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^k [\ln r U_{k,n-1}^{(2)} - \theta U_{k,n-1}^{(1)}].$$

Для этих функций справедливы соотношения (4.2), а также соотношения, аналогичные соотношениям (4.3):

$$-\frac{\partial U_{k,n}^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial U_{k,n}^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{k}{2}U_{k-2,n}^{(1)} + \frac{n}{2}U_{k-2,n-1}^{(1)}, \quad \frac{\partial U_{k,n}^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_{k,n}^{(1)}}{\partial y} = \frac{k}{2}U_{k-2,n}^{(2)} + \frac{n}{2}U_{k-2,n-1}^{(2)}$$

и соотношения, аналогичные соотношениям (4.4):

$$\zeta U_{k,n}^{(1)} = \frac{1}{2}U_{k+2,n}^{(1)} + \frac{1}{2}r^2U_{k-2,n}^{(1)}, \quad \zeta U_{k,n}^{(2)} = \frac{1}{2}U_{k+2,n}^{(2)} + \frac{1}{2}r^2U_{k-2,n}^{(2)},$$

$$yU_{k,n}^{(1)} = -\frac{1}{2}U_{k+2,n}^{(2)} + \frac{1}{2}r^2U_{k-2,n}^{(2)}, \quad yU_{k,n}^{(2)} = \frac{1}{2}U_{k+2,n}^{(1)} - \frac{1}{2}r^2U_{k-2,n}^{(1)}.$$

Выпишем явные формулы для нескольких “первых” функций $U_{k,n}^{(j)}$ при $n \geq 1$:

$$U_{0,0}^{(1)} \equiv 0, \quad U_{0,0}^{(2)} \equiv 1, \quad U_{0,1}^{(1)} = \theta, \quad U_{0,1}^{(2)} = \ln r, \quad U_{0,2}^{(1)} = 2\theta \ln r, \quad U_{0,2}^{(2)} = \ln^2 r - \theta^2.$$

При $k \neq 0$:

$$U_{k,0}^{(1)} = r^{k/2} \sin \frac{k\theta}{2}, \quad U_{k,0}^{(2)} = r^{k/2} \cos \frac{k\theta}{2},$$

$$U_{k,1}^{(1)} = \frac{1}{2}r^{k/2} \left[\ln r \sin \frac{k\theta}{2} + \theta \cos \frac{k\theta}{2} \right], \quad U_{k,1}^{(2)} = \frac{1}{2}r^{k/2} \left[\ln r \cos \frac{k\theta}{2} - \theta \sin \frac{k\theta}{2} \right].$$

Нетрудно выписать и общий вид функций $U_{k,n}^{(j)}$ для всех k, n . При $k \neq 0$ имеем

$$U_{k,n}^{(1)} = r^{k/2} \left(\sin \frac{k\theta}{2} \sum_{s=0}^{[n/2]} \gamma_s^{(k,n)} (\ln r)^{n-2s} \theta^{2s} + \theta \cos \frac{k\theta}{2} \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \omega_s^{(k,n)} (\ln r)^{n-1-2s} \theta^{2s} \right), \quad (4.7)$$

$$U_{k,n}^{(2)} = r^{k/2} \left(\cos \frac{k\theta}{2} \sum_{s=0}^{[n/2]} \gamma_s^{(k,n)} (\ln r)^{n-2s} \theta^{2s} + \theta \sin \frac{k\theta}{2} \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \omega_s^{(k,n)} (\ln r)^{n-1-2s} \theta^{2s} \right), \quad (4.8)$$

где $\gamma_0^{(k,n)} = 1$, $\omega_0^{(k,n)} = n$.

При $k = 0$:

$$U_{0,n}^{(1)} = \theta \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \gamma_s^{(0,n)} (\ln r)^{n-1-2s} \theta^{2s}, \quad U_{0,n}^{(2)} = \sum_{s=0}^{[n/2]} \gamma_s^{(0,n)} (\ln r)^{n-2s} \theta^{2s}. \quad (4.9)$$

Для функции $u(\zeta, y)$ вида

$$U(\zeta, y) = r^{k/2} \sum_{i=0}^m (\ln r)^{m-i} \Phi_i(\theta) \quad (4.10)$$

число $k/2$ будем называть *порядком* этой функции, а число m — ее *индексом*.

Очевидно, что представления (4.7)–(4.9) могут быть записаны в виде, аналогичном (4.10):

$$U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y) = r^{k/2} \sum_{i=0}^n (\ln r)^{n-i} \Phi_{ij}^{(k,n)}(\theta), \quad k \neq 0,$$

$$U_{0,n}^{(1)}(\zeta, y) = \sum_{i=0}^n (\ln r)^{n-1-i} \Phi_{i1}^{(0,n)}(\theta), \quad U_{0,n}^{(2)}(\zeta, y) = \sum_{i=0}^n (\ln r)^{n-i} \Phi_{i2}^{(0,n)}(\theta),$$

т. е. при $k \neq 0$ функции $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ имеют порядок $k/2$ и индекс n ; при $k = 0$ функции $U_{0,n}^{(j)}$ имеют нулевой порядок, индекс функции $U_{0,n}^{(2)}$ равен n , но индекс функции $U_{0,n}^{(1)}$ равен $n - 1$.

Множество линейных комбинаций функций вида $w(\zeta, y) = \ln^s r \zeta^m y^p U_{k,n}^{(j)}$, где m, p, s — целые неотрицательные, n — целое положительное, будем обозначать через \mathcal{W} . Подмножество множества \mathcal{W} , все элементы которого имеют фиксированный порядок $k/2$, будем обозначать через \mathcal{W}_k . Для фиксированного $m \geq 0$ подмножество множества \mathcal{W}_k , индекс которого не превосходит m ($s + n \leq m$), будем обозначать через $\mathcal{W}_k^{(m)}$.

Из соотношения (4.5) следует, что функция $w(\zeta, y)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}_s^{(q)}$, имеет вид $w(\zeta, y) = \sum_{m,k,j,l} P_l^{m,k,j}(\ln r) r^{2m} U_{k,n}^{(j)}$, где $m \geq 0, 1 \leq j \leq 2, k + 4m = s, P_l(t)$ — полином от t степени не выше, чем q .

Далее, из соотношений (4.5), (4.7) следует, что если функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_q^{(n)}$, то

$$\frac{\partial(r^2 w)}{\partial \zeta} \in \mathcal{W}_{q+2}^{(n)}, \quad \frac{\partial(r^2 w)}{\partial y} \in \mathcal{W}_{q+2}^{(n)}, \quad \zeta^m y^p \ln^i r w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{q+2m+2p}^{(n+i)}.$$

В дальнейшем нам понадобится вид функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ на границах разреза $\zeta > 0, y = \pm 0$. Для этого воспользуемся соотношениями (4.7)–(4.9).

Рассмотрим сначала функции $U_{k,n}^{(1)}(\zeta, y)$. Прежде всего, отметим, что эти функции при всех (допустимых в их определении) значениях k, n обращаются в нуль на верхней границе разреза $U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) = 0, \theta = 0$. Для $n = 0$ это следует из определения функций $U_{k,0}^{(1)}(\zeta, y)$ (см. (4.1)), а для $n \geq 1$ — из соотношения (4.7). При $\theta = 2\pi$ (на нижней стороне разреза) соотношение (4.7) принимает вид

$$U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) = |\zeta|^{k/2} (Q_{n-1}^{(k,n;1)}(\ln |\zeta|)),$$

где $Q_{n-1}^{(k,n;1)}(t)$ — полином степени $n - 1$ вида

$$Q_{n-1}^{(k,n;1)}(t) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \gamma_q^{(k,n;1)} t^{n-1-2q}, \quad \gamma_0^{(k,n;1)} = n.$$

Перейдем к функциям $U_{k,n}^{(2)}(\zeta, y)$. Из соотношения (4.8) получаем, что при всех k

$$U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) = \zeta^{k/2} \ln^n \zeta, \quad \theta = 0; \quad U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) = \zeta^{k/2} S_n^{(k,n;2)}(\ln \zeta), \quad \theta = 2\pi,$$

где $S_n^{(k,n;2)}(t)$ — полином степени n .

Лемма 1. Пусть k и n целые и $n \geq 0$. Тогда

1. Существует гармоническая функция $u(\zeta, y)$, удовлетворяющая условиям $u(\zeta, 0) = 0, \theta = 0; u(\zeta, 0) = \zeta^{k/2} \ln^n \zeta, \theta = 2\pi$. Функция $u(\zeta, y)$ имеет вид

$$u(\zeta, y) = \sum_{m=0}^n \gamma_m U_{k,q-m}^{(1)}(\zeta, y),$$

где $q = n$ при $k \neq 2s, q = n + 1$ при $k = 2s$.

2. Существует гармоническая функция $u(\zeta, y)$, удовлетворяющая условиям $u(\zeta, 0) = \zeta^{k/2} \ln^n \zeta, \theta = 0; u(\zeta, 0) = 0, \theta = 2\pi$. Функция $u(\zeta, y)$ имеет вид

$$u(\zeta, y) = U_{k,n}^{(2)}(\zeta, y) + \sum_{m=0}^n \tilde{\gamma}_m U_{k,m-l}^{(1)}(\zeta, y),$$

где $q = n$ при $k \neq 2s, q = n + 1$ при $k = 2s$.

Доказательство леммы аналогично доказательствам лемм 4.1, 4.2 работы [11] и основано на использовании представлений (выписанных выше) функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ на границах разреза $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$. \square

Доказательства следующих лемм также аналогичны доказательству соответствующих лемм из [11].

Лемма 2. Пусть m, k, q целые, $m \geq 0, q > 0$.

1. Если $k \neq -2(m+1)$, то существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+4m+4}^{(0)}$, которая является решением уравнения $\Delta z = r^{2m} U_{k,0}^{(j)}$ и имеет вид

$$z(\zeta, y) = \frac{1}{4(m+1)(m+1+k/2)} r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)}.$$

2. Если $k \neq -2(m+1)$, то существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+4m+4}^{(q)}$, которая является решением уравнения $\Delta z = r^{2m} \ln^q r U_{k,0}^{(j)}$ и имеет вид $z = r^{2m+2} P_q(\ln r) U_{k,0}^{(j)}$, где $P_q(t)$ — полином степени q :

$$P_q(t) = \sum_{i=0}^q \gamma_i(q, m) t^{q-i}, \quad \gamma_0(q, m) = \frac{1}{(m+1)(q+1)}.$$

3. Если $k = -2(m+1)$, то существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+4m+4}^{(q+1)}$, которая является решением уравнения $\Delta z = r^{2m} \ln^q r U_{k,0}^{(j)}$ и имеет вид $z = r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)} \ln r S_q(\ln r)$, где $S_q(t)$ — полином степени q :

$$S_q(t) = \sum_{i=0}^q \tilde{\gamma}_i(q, m) t^{q-i}, \quad \tilde{\gamma}_0(q, m) = -\frac{3}{2qk}.$$

Лемма 3. Пусть m, k, n целые, $m \geq 0, n > 0$.

1. Если $k \neq -2(m+1)$, то существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+4m+4}^{(n)}$, которая является решением неоднородного уравнения $\Delta w = r^{2m} U_{k,n}^{(j)}$ и имеет вид $w(\zeta, y) = \frac{\partial^n z}{\partial k^n}$, где функция $z(\zeta, y)$ — решение неоднородного уравнения, построенное в лемме 2 ($n. 1$).

2. Если $q \geq 0$ и $k \neq -2(m+1)$, то существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+4m+4}^{(q+n)}$, которая является решением неоднородного уравнения $\Delta w = r^{2m} \ln^q r U_{k,n}^{(j)}$ и имеет вид

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2} \sum_{s=0}^n P_q^{(s)}(\ln r) U_{k,n-s}^{(j)}(\zeta, y),$$

где $P_q^{(s)}(t)$ — полиномы от t степени q .

3. Если $q \geq 0$ и $k = -2(m+1)$, то существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+4m+4}^{(q+n+1)}$, которая является решением неоднородного уравнения $\Delta w = r^{2m} \ln^q r U_{k,n}^{(j)}$ и имеет вид

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2} \ln r \sum_{s=0}^n \tilde{P}_q^{(s)}(\ln r) U_{k,n-s}^{(j)}(\zeta, y),$$

где $\tilde{P}_q^{(s)}(t)$ — полиномы от t степени q .

Решения $w(\zeta, y)$ неоднородных уравнений строятся в соответствии с определением (4.6) функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ при $n > 0$ как производные по параметру k от решений неоднородных уравнений, построенных в лемме 2.

Теорема 3. Пусть m, k, q, n целые, $m \geq 0, n \geq 0, q \geq 0, j = 1, 2$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+4m+4}^{(l(k,m))}$, которая является решением краевой задачи

$$\Delta w = r^{2m} \ln^q r U_{k,n}^{(j)}, \quad 0 < \theta < 2\pi; \quad w(\zeta, +0) = w(\zeta, -0) = 0, \quad \zeta > 0.$$

Здесь $l(k, m) = q + n$ при $k \neq -2(m+1)$, $l(k, m) = q + n + 1$ при $k = -2(m+1)$.

Доказательство этой теоремы при различных комбинациях показателей m, k, q, n вытекает из лемм 1–3. \square

5. Построение ФАР для внутренних разложений

Как уже было отмечено во введении, целью настоящей работы является построение формальных асимптотических решений внутренних краевых задач (3.2), (3.3) при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$, т. е. таких асимптотических рядов, частичные суммы которых с достаточно высокой степенью точности удовлетворяют уравнениям (3.2) и граничным условиям (3.3). Существование ФАР позволит построить “настоящие” решения задач (3.2), (3.3) и одновременно с этим построить и решения задач (2.2), (2.4) таким образом, что асимптотические разложения (2.1) и (3.1) будут согласованы в соответствующих областях. Для задач, аналогичных рассматриваемой, такая процедура разработана в монографии [5].

Процедура построения ФАР в настоящей работе несколько отличается от аналогичных процедур в рассматриваемых ранее задачах (см., например, [7; 8]) и была применена в работе [11]. Сначала с помощью доказанных в предыдущем разделе лемм строятся ФАР при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$ задач (2.2), (2.4), а затем проводится стандартная процедура: берется ряд (2.1), функции $v_k(\zeta, y)$ заменяются на их ФАР при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$, получившееся представление переписывается в переменных ξ, η , и в результате получаются ряды, которые являются ФАР задач (3.2), (3.3) при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$. Одновременно с этим станет понятным и выбор асимптотической последовательности в разложении (3.1).

Перейдем к реализации этого плана. Прежде всего отметим, что $\zeta = \xi\varepsilon^{1/2}$, $y = \eta\varepsilon^{1/2}$, $r = \rho\varepsilon^{1/2}$. Полярный угол θ в переменных ξ, η не меняется.

В предыдущем разделе рассматривались декартовы координаты (ζ, y) и были введены множества $\mathcal{W}_k^{(q)}$, “порожденные” гармоническими функциями $U_{k,0}^{(j)}(\zeta, y)$. В этом разделе будут рассматриваться и другие декартовы координаты (ξ, η) и соответствующие множества, “порожденные” гармоническими функциями $U_{k,0}^{(j)}(\xi, \eta)$. Поэтому будем использовать обозначения $\mathcal{W}_k^{(q)}(\zeta, y)$ или $\mathcal{W}_k^{(q)}(\xi, \eta)$ в зависимости от того, какие координаты в данный момент рассматриваются.

Отметим далее, что для любой функции $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_s^{(n)}(\zeta, y)$ справедливо соотношение

$$z(\zeta, y) = \varepsilon^{s/4} \sum_{l=0}^n [\ln^{n-l} \varepsilon \omega_s^{(l)}(\xi, \eta)], \quad \text{где } \omega_s^{(l)}(\xi, \eta) \in \mathcal{W}_s^{(l)}(\xi, \eta). \quad (5.1)$$

В справедливости этого утверждения нетрудно убедиться, если учесть, что для функции $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_s^{(n)}$ имеет место представление $z(\zeta, y) = r^{s/2} \sum_{l=0}^n \ln^{n-l} r \Phi_l(\theta)$.

Теорема 4. *Существуют асимптотические ряды*

$$Y_{kj} = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{k-m,m}^{(n(k)-j)}(\xi, \eta), \quad \omega_{k-m,m}^{(n(k)-j)}(\xi, \eta) \in \mathcal{W}_{k-m}^{(n(k)-j)}, \quad n(k) = \left[\frac{k}{2} \right],$$

которые при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$ являются ФАР задач (3.2), (3.3).

Доказательство. Рассмотрим функцию $v_0(\zeta, y)$. Она является решением первой из задач (2.2), (2.4): $L_1 v_0 = f(0, y)$, $v_0(\zeta, \pm 0) = h^{\pm}(0, 0)$. Будем строить ФАР задачи для функции $v_0(\zeta, y)$ при $r \rightarrow 0$ в виде $v_0(\zeta, y) = z_{0,0}(\zeta, y) + z_{1,0}(\zeta, y) + z_{2,0}(\zeta, y) + \dots$.

Заменим в уравнении для функции $v_0(\zeta, y)$ коэффициенты $b(0, y)$, $a(0, y)$ и правую часть $f(0, y)$ рядами Тейлора и определим функции $z_{s,0}(\zeta, y)$ как решения задач

$$\Delta_{\zeta,y} z_{0,0} = 0, \quad z_{0,0}(\zeta, +0) = h^+(0, 0), \quad z_{0,0}(\zeta, -0) = h^-(0, 0), \quad \Delta_{\zeta,y} z_{1,0} = 0,$$

$$z_{1,0}(\zeta, \pm 0) = 0, \quad \Delta_{\zeta,y} z_{2,0} = -b(0, 0) \frac{\partial z_{0,0}}{\partial y}, \quad z_{2,0}(\zeta, \pm 0) = 0,$$

$$\Delta_{\zeta,y} z_{j,0} = - \sum_{i=1}^j \frac{y^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial y^i}(0,0) \frac{\partial z_{j-1-i,0}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial y^i}(0,0) \right] + \frac{y^{j-2}}{(j-2)!} \frac{\partial^{j-2} f}{\partial y^{j-2}}(0,0), \quad z_{j,0}(\zeta, \pm 0) = 0.$$

Нетрудно проверить, что $z_{0,0}(\zeta, y) = h^+(0,0) + \frac{h^-(0,0) - h^+(0,0)}{2\pi} \theta$ или, что то же самое (см. (4.1), (4.7)), $z_{0,0}(\zeta, y) = h^+(0,0)U_{00}^{(2)}(\zeta, y) + \delta(h)U_{01}^{(1)}$. Здесь обозначено $\delta(h) = \frac{h^-(0,0) - h^+(0,0)}{2\pi}$. Очевидно, что $z_{0,0}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_0^{(0)}(\zeta, y)$.

Положим далее $z_{1,0}(\zeta, y) = U_{10}^{(1)}(\zeta, y) = r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \in \mathcal{W}_1^{(0)}(\zeta, y)$. Перейдем к функции $z_{2,0}(\zeta, y)$. Правая часть уравнения для определения этой функции имеет вид

$$F_2(\zeta, y) = -b(0,0) \frac{\partial z_{0,0}}{\partial y} = -b(0,0)\delta(h) \frac{\partial U_{0,1}^{(1)}}{\partial y}.$$

В соответствии с соотношением (4.3) перепишем правую часть в виде $F_2(\zeta, y) = -b(0,0)\delta(h) \times U_{-2,0}^{(2)}(\zeta, y)$ и обратимся к п. 3 леммы 2, где $k = -2$, $m = 0$, $j = 2$, $q = 0$. Согласно этой лемме решение неоднородного уравнения $\Delta z = F_2$ имеет вид $z_1(\zeta, y) = A\delta(h)r^2 \ln r U_{-2,0}^{(2)}(\zeta, y)$, где константа $A \neq 0$ и определяется соотношением из этой леммы.

Функция $z_1(\zeta, y)$ не удовлетворяет нулевым граничным условиям на границах $y = \pm 0$: $z_1(\zeta, \pm 0) = A\delta(h)\zeta \ln \zeta$. В соответствии с леммой 1 построим гармоническую функцию

$$z_2(\zeta, y) = -A\delta(h)U_{2,1}^{(2)}(\zeta, y) = -A\delta(h)r(\ln r \cos \theta - \theta \sin \theta).$$

Функцию $z_{2,0}(\zeta, y)$ определим как сумму $z_{2,0}(\zeta, y) = z_1(\zeta, y) + z_2(\zeta, y)$. Очевидно, что $z_{2,0}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_2^{(1)}(\zeta, y)$.

Продолжая этот процесс далее, последовательно используя леммы 1–3, построим функции $z_{l,0}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_l^{(n(l))}(\zeta, y)$, где $n(l) = \left[\frac{l}{2} \right]$. Все функции $z_{l,0}(\zeta, y)$ могут быть выписаны явно с помощью соотношений из лемм.

Аналогичным образом строятся ФАР при $r \rightarrow 0$ и для любой функции $v_k(\zeta, y)$ при $k > 0$. Можно проверить, что $v_k(\zeta, y) = \sum_{l=0}^{\infty} z_{l,k}(\zeta, y)$, $z_{l,k}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{-k+l}^{(n(l))}(\zeta, y)$.

Отметим, что согласно соотношению (5.1) $z_{l,k}(\zeta, y) = \varepsilon^{(-k+l)/4} \sum_{j=0}^{n(l)} \ln^{n(l)-j} \varepsilon \omega_{-k+l,k}^{(j)}(\xi, \eta)$, где $\omega_{-k+l,k}^{(j)}(\xi, \eta) \in \mathcal{W}_{-k+l}^{(j)}(\xi, \eta)$, $n(l) = \left[\frac{l}{2} \right]$.

В соответствии с методом согласования [5] для того, чтобы получить ФАР при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$ задач (3.2), (3.3), рассмотрим ряд $V(\zeta, y)$ (см. (2.1)), заменим в нем функции $v_j(\zeta, y)$ их ФАР при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$ и перейдем в получившемся соотношении от переменных ζ, y к переменным ξ, η . Воспользовавшись равенством (5.1) и представлением функции $z_{l,k}(\zeta, y)$, получим

$$\begin{aligned} V(\zeta, y, \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} v_k(\zeta, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \sum_{l=0}^{\infty} z_{l,k}(\zeta, y) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{(-k+l)/4} \sum_{j=0}^{n(l)} (\ln \varepsilon)^{n(l)-j} \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{k-m,m}^{(j)}(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \sum_{j=0}^{n(k)} (\ln \varepsilon)^j \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{k-m,m}^{n(k)-j}(\xi, \eta), \end{aligned}$$

где $\omega_{k-m,m}^{n(k)-j}(\xi, \eta) \in \mathcal{W}_{k-m}^{n(k)-j}(\xi, \eta)$.

Обозначим $Y_{k,j}(\xi, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_{k-m,m}^{n(k)-j}(\xi, \eta)$. По построению асимптотический ряд $Y_{k,j}(\xi, \eta)$ является ФАР задачи (3.2), (3.3) для функции $w_{k,j}(\xi, \eta)$ при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
2. Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника — Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 4(154). С. 123–156.
3. Найфэ А. Метод возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. Леликова Е. Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 107–119.
7. Леликова Е. Ф. Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 10. С. 93–108.
8. Леликова Е. Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных. // Тр. Моск. мат. об-ва. 2010. Т. 71. С. 162–199. ISBN: 978-5-397-01447-2.
9. Леликова Е. Ф. Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Докл. РАН, 2012. Т. 447, № 2. С. 136–139.
10. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. // Тр. Моск. мат. об-ва. 1967. Т.16. С. 209–292.
11. Леликова Е. Ф. Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 197–211.

Леликова Елена Федоровна

Поступила 20.02.2017

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет

e-mail: lef@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Vishik M.I., Lyusternik L.A. Regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with small parameter. *Uspechi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5(77), pp. 3–122 (in Russian).
2. Trenogin V.A. The development and applications of the asymptotic method of Lyusternik and Vishik. *Russian Math. Surveys*, 1970, vol. 25, no. 4, pp. 119–156. doi: 10.1070/RM1970v025n04ABEH001262.
3. Nayfeh Ali H. *Perturbation methods*. New York, John Wiley and Sons, 1973, 425 p. ISBN: 0471630594. Translated under the title *Metod vozmushchenii*, Moscow, Mir Publ., 1976, 455 p.
4. Dyke M. van *Perturbation methods in fluid mechanics*. New York, London, Academic Press, 1964, 229 p. ISBN: 0127130500. Translated under the title *Metody vozmushchenii v mekhanike zhidkosti*, Moscow, Mir Publ., 1967, 310 p.
5. P'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence, American Mathematical Society, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in “Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach”, Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.
6. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with small parameter at a higher derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2003. Suppl. 1, pp. S129–S143.
7. Lelikova E.F. The asymptotics of the solution of an equation with a small parameter in a domain with angular points. *Sbornik: Math.*, 2010, vol. 201, no. 10, pp. 1495–1510. doi: 10.1070/SM2010v201n10ABEH004119.
8. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution of a second order elliptic equation with a small parameter multiplying one of the highest order derivatives. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 2010, vol. 71, pp. 141–174. ISSN: 1547-738X.

9. Lelikova E.F. On the asymptotic behavior of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a boundary inflection point. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 86, no. 3, pp. 756–759.
10. Kondrat'ev V.A. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, vol. 16, 1967, pp. 209–292 (in Russian).
11. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a point of inflexion. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 197–211 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on February 20, 2017.

Elena Fedorovna Lelikova, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: lef@imm.uran.ru .

УДК 517.977

РАСЧЕТ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ МАССИВНЫХ ТЕЛ КРУГОВЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

И. В. Першин

При математическом моделировании технологических процессов электрошлаковой и лазерной сварки, газопламенной закалки, плазменной обработки поверхностей деталей возникает задача о нагреве полубесконечного тела источником тепла малых размеров в трехмерном случае. Для определения полей температур, скоростей охлаждения, градиентов температур и потоков тепла часто возникает необходимость провести исследования в области, непосредственно прилегающей к источнику нагрева. Важно учитывать распределение плотности теплового потока по площади нагрева, которое может иметь весьма сложный характер. Практически не встречаются примеры исследования решения при произвольном распределении плотности теплового потока. В данной статье рассматривается задача при наличии кругового источника тепла.

Ключевые слова: краевые задачи для уравнений в частных производных, асимптотика решения.

I. V. Pershin. Calculation of thermal fields of massive bodies heated by a radial heat source in the three-dimensional case.

In the mathematical modeling of technological processes of electroslag welding, laser welding, gas-flame hardening, and plasma processing of surfaces, there arises the problem of heating a semi-infinite body by a small source in the three-dimensional case. To find the fields of temperatures, cooling rates, temperature gradients, and heat fluxes, it is often necessary to investigate the areas directly adjacent to the heat source. An important issue is the distribution of the heat flux density over the heating surface, which can be very complex. There are virtually no examples of studying the solutions for an arbitrary distribution of the heat flux density. In this paper the problem is considered in the presence of a circular heat source.

Keywords: boundary value problems for partial differential equations, asymptotics of a solution.

MSC: 35K20, 80A20

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-196-199

Задача о нагреве полубесконечного тела источником тепла малых размеров используется для анализа процессов электрошлаковой сварки, газопламенной закалки, плазменной обработки и др. Для определения полей температур, скоростей охлаждения, градиентов температур часто возникает необходимость провести исследования в области, непосредственно прилегающей к источнику нагрева. Важно учитывать распределение плотности теплового потока по площади нагрева, которое может иметь весьма сложный характер. Практически не встречаются примеры исследования решения при произвольном распределении плотности теплового потока.

Рассмотрим следующую задачу: на поверхности полубесконечного тела действует источник тепла, заданный на некоторой области (пятне) заданного размера. Не ограничивая общности, можно считать, что источник тепла задан в круге, радиус которого много меньше размеров нагреваемого тела. Распределение теплового потока по пятну определяется функцией, зависящей от физических характеристик источника тепла.

Предполагаются выполненными следующие условия:

- распространение тепла в теле происходит только с помощью теплопроводности, при этом теплофизические свойства материала не зависят от температуры;
- отсутствуют фазовые и структурные превращения;
- граничная поверхность теплоизолирована;

— источник нагрева распределен в круге заданного радиуса, эффективная мощность источника постоянна во времени и обратно пропорциональна величине пятна нагрева (радиусу круга).

Источник тепла действует на границе $x = 0$; так как мы будем исследовать поведение решения вблизи источника тепла, можно считать, что он неподвижен. Случай с подвижным источником тепла может быть получен тривиальной заменой переменных.

Задача описывается трехмерным уравнением теплопроводности в декартовых координатах и граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \varphi(y, z, t, \varepsilon), \\ T(x, y, z, 0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области $0 < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$, $t > 0$.

Здесь $a = \lambda / (c\rho)$ — коэффициент температуропроводности, λ — коэффициент теплопроводности, ε — радиус пятна нагрева источника тепла.

Функция φ характеризует плотность распределения теплового потока по ширине полосы нагрева и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y, z, \varepsilon) dy dz = Q, \quad \text{где } Q = \text{const.}$$

Другими словами, функция $\varphi(y, z, \varepsilon)$ такова, что эффективная мощность источника тепла остается постоянной, когда радиус пятна источника тепла ε стремится к нулю, а удельный тепловой поток — к бесконечности.

Не теряя общности, для упрощения исследования можно считать коэффициенты температуропроводности и теплопроводности по величине равными 1, к чему их можно привести путем элементарной замены переменных. Также можно принять эффективную мощность источника $Q \equiv 1$.

Функцию $\varphi(y, z, \varepsilon)$ определим так:

$$\varphi(y, z, \varepsilon) = \frac{\psi(y, z, \varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Плотность распределения теплового потока $\psi(y, z, \varepsilon)$ задается в виде

$$\psi(y, z, \varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(y, z, \varepsilon), & y^2 + z^2 \leq \varepsilon^2, \\ 0, & y^2 + z^2 > \varepsilon^2, \end{cases}$$

где функция $\psi_1(y, z, \varepsilon)$ — ограниченная гладкая функция. В предельном случае при $\varepsilon \equiv 0$ функция $\psi(y, z, \varepsilon)$ вырождается в дельта-функцию Дирака.

Решение задачи (1) явно выписывается в виде [1]

$$\begin{aligned} T(x, y, z, t) = & \int_0^t \frac{1}{8\pi(t-\omega)^{3/2}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2 + (y-\eta_1)^2 + (z-\zeta_1)^2}{4(t-\omega)}\right) \\ & \times \varphi\left(\frac{\eta_1}{\varepsilon}, \frac{\zeta_1}{\varepsilon}\right) d\eta_1 d\zeta_1 d\omega. \end{aligned} \quad (2)$$

Ниже проведено исследование поведения решения (2) в случае, когда мощность источника тепла постоянна, а площадь нагрева стремится к нулю.

Известно, что вблизи источника тепла на небольшом участке пространства температура резко меняется (решение резко возрастает или убывает), возникают большие температурные градиенты (производные от решения по пространственным переменным также резко меняются, причем значительно сильнее, чем само решение). Другими словами, вблизи источника тепла возникает пограничный слой. Для того чтобы можно было правильно представить это быстрое изменение решения и его производных, в области, по размерам в несколько раз превосходящей ширину пограничного слоя, вводятся новые внутренние “растянутые” переменные.

Перейдем к новым переменным, тогда в этой области решение исходной задачи и его производные будут вести себя как гладкие функции. Размер внутренней области, а также параметры “растяжения” новых переменных зависят от параметров исходной задачи.

В поставленной задаче указанным параметром является линейный размер (ширина) источника тепла. Для представления решения (2) вблизи источника тепла введем новые переменные

$$\xi = \frac{x}{\varepsilon}, \quad \eta = \frac{\eta_1 - y}{\varepsilon}, \quad \zeta = \frac{\zeta_1 - z}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{(t - \omega)}{\varepsilon^2}.$$

Сделав замену переменных в (2), получим внутреннее решение в виде

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{t/\varepsilon^2} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{4\tau}\right) \times \psi\left(\eta + \frac{y}{\varepsilon}, \zeta + \frac{z}{\varepsilon}\right) d\eta d\zeta d\tau.$$

Обозначим $s = \eta + u$, $u = \frac{y}{\varepsilon}$, $r = \zeta + \nu$, $\nu = \frac{z}{\varepsilon}$, $\vartheta = \frac{t}{\varepsilon^2}$, получим

$$w(\xi, \eta, \zeta, t) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(\xi^2 + (s - u)^2 + (r - \nu)^2)}{4\tau}\right) \psi(s, r) ds dr d\tau.$$

Представим это решение в виде

$$w(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\xi, s, r) \psi(s, r) ds dr,$$

где

$$H(s, r) = \int_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{(\xi^2 + (s - u)^2 + (r - \nu)^2)}{4\tau}\right) d\tau = \int_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\tau}\right),$$

а $\alpha^2 = \xi^2 + (s - u)^2 + (r - \nu)^2$.

Можно показать, что этот интеграл равен

$$H(s, r) = \int_0^{\vartheta} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\tau}\right) = \frac{\pi}{\alpha} - 2\sqrt{\pi} \frac{Erf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\vartheta}}\right)}{\alpha},$$

здесь $Erf(z) = \int_0^z \exp(-t^2) dt$ — функция ошибок [2].

Тем самым, доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема. Решение (2) задачи (1) в окрестности источника тепла примет вид

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s, r) \frac{\left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} Erf\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\vartheta}}\right)\right)}{\alpha} ds dr. \quad (3)$$

Для практического применения наиболее интересен случай стационарного решения (при больших временах), когда $\vartheta \gg \alpha$. Для этого случая справедливо утверждение

$$\frac{\pi}{\alpha} \gg 2\sqrt{\pi} \frac{\operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{\vartheta}}\right)}{\alpha},$$

и решение исходной задачи имеет вид

$$T(x, y, z) = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(s, r)}{\sqrt{\xi^2 + (s-u)^2 + (r-\nu)^2}} ds dr. \quad (4)$$

Таким образом, получены формулы (3) и (4), по которым определяется решение (температура) в непосредственной близости от источника тепла. Выбрав конкретный вид распределения мощности источника тепла по пятну нагрева, нетрудно получить соответствующие значения температуры. Получены точные аналитические формулы для решения при равномерном и линейном распределениях источника тепла. В том случае, когда непосредственно проинтегрировать полученную функцию невозможно (как, например, в случае нормально распределенного источника тепла), нетрудно получить результат с помощью стандартных методов численного интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
2. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. 2-е изд. М.: Физматлит, 1963. 359 с.

Першин Игорь Викторович
математик 1-й кат.

Поступила 16.02.2017

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург
e-mail: piv@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Polyanin A.D. *Spravochnik po lineinym uravneniyam matematicheskoi fiziki* [Handbook of linear equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ. 2001. 575 p.
2. Lebedev N.N. *Special functions and their applications*. New York, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965, 308 p. Original Russian text published in *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya*. Moscow: Fizmatlit, 1963, 359 p.

The paper was received by the Editorial Office on 16 February, 2017.

Igor' Viktorovich Pershin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, piv@imm.uran.ru .

УДК 517.977

К ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ИДЕАЛЬНЫМ ГАЗОМ¹

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Для системы уравнений Эйлера, описывающей установившееся движение идеального политропного газа, рассматривается задача об обтекании тела, поверхность которого известна, в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций. Используются подходы геометрического метода, развиваемого авторами. В первой части работы задача об обтекании заданного тела решается в специальном классе течений, для которого уравнение неразрывности выполняется тождественно. Показано, что класс решений не пуст. Получено одно точное решение. Во второй части статьи рассматривается общий случай стационарных течений идеального политропного газа. Система уравнений Эйлера сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, для которой получено точное решение задачи при заданном на теле давлении. Рассмотрены примеры, демонстрирующие особенности полученных точных решений. Показано, что такие решения позволяют выделять на гладкой обтекаемой поверхности точки, в которых наблюдается обострение, сильные или слабые разрывы.

Ключевые слова: система уравнений Эйлера, политропный газ, задача об обтекании, установившееся движение, точные решения.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. On the problem of the flow of an ideal gas around bodies.

For Euler equations describing a steady motion of an ideal polytropic gas, we consider the problem of a flow around a body with known surface in the class of twice continuously differentiable functions. We use approaches of the geometric method developed by the authors. In the first part of the paper, the problem of a flow around a given body is solved in a special class of flows for which the continuity equation holds identically. We show that the class of solutions is nonempty and obtain one exact solution. In the second part of the paper we consider the general case of stationary flows of an ideal polytropic gas. The Euler equations are reduced to a system of ordinary differential equations, for which we obtain an exact solution for a given pressure on the body. Examples illustrating the properties of the obtained exact solutions are considered. It is shown that such solutions make it possible to find points of a smooth surface of a body where blowups or strong or weak discontinuities occur.

Keywords: Euler equations, polytropic gas, flow around bodies, stationary flows, exact solutions.

MSC: 76F02, 76F45, 76M45, 76R05, 76U05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-200-209

Введение

Авторы в ряде работ развивают геометрический метод решения нелинейных уравнений и систем уравнений в частных производных. Метод позволяет получать точные решения и сводить системы уравнений в частных производных к системам ОДУ, решать некоторые начальные и краевые задачи.

Цель этой статьи — продемонстрировать возможности геометрического метода на примере решения задачи об обтекании с использованием широко известной модели Эйлера для идеального газа. Эту модель нередко применяют при решении такой задачи [1–3].

При использовании в задачах обтекания модели Эйлера для идеального газа на теле обычно задается условие непротекания [4] в отличие от решения задачи обтекания, когда используются уравнения Навье — Стокса и на теле задают условия прилипания $u = v = w = 0$ (см. например, [5]). Как правило, задачи обтекания решаются численными методами. В этом случае особую трудность представляет достаточно точная аппроксимация уравнения неразрывности [6].

¹Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УРО РАН (проект 15-16-1-10).

В статье рассматривается модель идеального политропного газа [7] для установившегося движения в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций

$$\rho[(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}] = -\nabla p, \quad \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma. \quad (0.1)$$

Здесь \mathbf{V} — вектор скорости с компонентами $\{u, v, w\}$; p — давление; ρ — плотность; γ — показатель политропы; $\{x, y, z\}$ — независимые переменные; $p_0 = \text{const}$; $\rho_0 = \text{const}$.

В разд. 1 рассмотрен такой класс течений, для которого тождественно выполняются уравнение неразрывности и краевое условие непротекания на заданном обтекаемом теле. Для этого класса система уравнений Эйлера сводится к системе трех уравнений для трех неизвестных функций. В работе с использованием подходов геометрического метода показано, что даже в том случае, когда одна из этих функций выбрана специальным образом, переопределенная система оказывается совместной.

В разд. 2 разработанный ранее метод сведения системы уравнений в частных производных к системе ОДУ [8] используется для решения одной задачи об обтекании. Для сведения системы уравнений Эйлера к системе ОДУ предложен вид независимой переменной, включающий в себя две произвольные функции одного аргумента. В работе показано, что такие функции можно не только задавать произвольно, как в [8], но и подбирать так, чтобы они позволили решить поставленную краевую задачу.

1. Об одном классе течений идеального газа

Рассмотрим течения идеального газа, удовлетворяющие условию

$$\rho\mathbf{V} = \nabla a \times \nabla b, \quad (1.1)$$

где $a = a(x, y, z)$, $b = b(x, y, z)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Из (1.1) следует, что скалярные произведения $(\nabla a, \rho\mathbf{V}) = 0$, $(\nabla b, \rho\mathbf{V}) = 0$. Предположим, что $b(x, y, z)$ — известная функция. Пусть, например, $b(x, y, z) = z - \xi(x, y) = 0$ — поверхность обтекаемого тела. Если считать, что описанные выше функции — решения системы (0.1), то будет ли такой класс решений не пуст? В рамках этого класса система уравнений Эйлера сводится к переопределенной системе четырех уравнений для двух неизвестных функций $\rho(x, y, z)$ и $a(x, y, z)$. Отметим сразу, что несложно проверить, что уравнение неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0$ на данном классе течений обращается в тождество, следовательно, достаточно показать, что система оставшихся трех уравнений для двух неизвестных функций совместна.

Утверждение 1. Пусть компоненты скорости (u, v, w) в системе (0.1) удовлетворяют условиям (1.1), где $b(x, y, z) = z - \xi(x, y) = 0$ — заданное уравнение обтекаемого тела. Тогда существует такое давление, при котором система уравнений (0.1) имеет решение на поверхности обтекаемого тела.

Доказательство. Положим в (1.1) $a = a(r)$, где $r = \ln \rho$. Так как $b(x, y, z) = z - \xi(y, x) = 0$ — известное уравнение поверхности обтекаемого тела, (1.1) можно переписать в виде

$$u = a' \alpha, \quad v = a' \beta, \quad w = a' \delta, \quad \alpha = r_y b_z - r_z b_y, \quad \beta = r_z b_x - b_z r_x, \quad \delta = b_y r_x - r_y b_x. \quad (1.2)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по ρ . Подставив (1.2) в систему (0.1), получаем

$$\alpha\alpha_x + \beta\alpha_y + \delta\alpha_z = f_1(r)r_x, \quad \alpha\beta_x + \beta\beta_y + \delta\beta_z = f_1(r)r_y, \quad \alpha\delta_x + \beta\delta_y + \delta\delta_z = f_1(r)r_z, \quad (1.3)$$

$$f_1(r) = \frac{g(r)}{(a'(r))^2}, \quad g(r) = -\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right) \exp[r(\gamma - 1)].$$

Найдя r_x из соотношения для β в (1.3), а r_y — из соотношения для α в (1.3) и подставив эти выражения в соотношение для δ в (1.3), получим зависимость $\delta = -[\alpha(b_x/b_z) + \beta(b_y/b_z)]$. Из полученной зависимости найдем производные функции δ и, подставив их в третье уравнение системы (1.3), будем иметь

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{b_x}{b_z}\right)(\alpha\alpha_x + \beta\alpha_y + \delta\alpha_z) - \left(\frac{b_y}{b_z}\right)(\alpha\beta_x + \beta\beta_y + \delta\beta_z) - \alpha\left[\alpha\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_x + \beta\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_x\right] \\ & - \beta\left[\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_y + \beta\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_y\right] - \delta\left[\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_z + \beta\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_z\right] = f_1 r_z. \end{aligned}$$

Подставляя в выписанное соотношение вместо $(\alpha\alpha_x + \beta\alpha_y + \delta\alpha_z)$ и $(\alpha\beta_x + \beta\beta_y + \delta\beta_z)$ правые части соответствующих уравнений из системы (1.3), а вместо α , β , δ — их выражения через производные функции r из (1.2), получим уравнение первого порядка относительно функции $r(x, y, z)$

$$\begin{aligned} & (r_y b_z - r_z b_y)\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_z \left[(r_y b_z - r_z b_y)\left(\frac{b_x}{b_z}\right) + (r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_y}{b_z}\right) \right] \\ & + (r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_z \left[(r_y b_z - r_z b_y)\left(\frac{b_x}{b_z}\right) + (r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_y}{b_z}\right) \right] \\ & - (r_y b_z - r_z b_y)^2 \left(\frac{b_x}{b_z}\right)_x - (r_y b_z - r_z b_y)(r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_y}{b_z}\right)_x \\ & - (r_y b_z - r_z b_y)(r_z b_x - r_x b_z)\left(\frac{b_x}{b_z}\right)_y - (r_z b_x - r_x b_z)^2 \left(\frac{b_y}{b_z}\right)_y \\ & - f_1 \left[\left(\frac{b_x}{b_z}\right) r_x + \left(\frac{b_y}{b_z}\right) r_y + r_z \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Итак, решение системы (0.1) сведено к решению переопределенной системы трех уравнений для определения функции $r(x, y, z)$ — двух первых уравнений из системы (1.3) и уравнения (1.4).

Пусть на теле задано давление, тогда можно считать, что на теле задано $r(\xi(x, y), x, y) = q(x, y)$. Отсюда

$$r_x(\xi(x, y), x, y) = q_x - r_z(\xi(x, y), x, y)\xi_x, \quad r_y(\xi(x, y), x, y) = q_y - r_z(\xi(x, y), x, y)\xi_y.$$

Подставив эти значения r_x , r_y в (1.4), определим

$$r_z(\xi(x, y), x, y) = \frac{\xi_{xx} q_y^2 - 2\xi_{xy} q_x q_y + \xi_{yy} q_x^2 + f_1(q_x \xi_x + q_y \xi_y)}{f_1(\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1)} = p(x, y, f_1).$$

Тогда, продифференцировав по x и по y $r_x(\xi(x, y), x, y)$, $r_y(\xi(x, y), x, y)$, $r_z(\xi(x, y), x, y)$, получим

$$\begin{aligned} r_{zx} &= p_x - \frac{dp}{df_1} f_1' q_x - r_{zz} \xi_x, & r_{zy} &= p_y - \frac{dp}{df_1} f_1' q_y - r_{zz} \xi_y, \\ r_{xx} &= q_{xx} - 2r_{zx} \xi_x - r_{zz} \xi_x^2 - r_z \xi_{xx}, & r_{xy} &= q_{xy} - r_{zy} \xi_x - r_{xz} \xi_y - r_{zz} \xi_x \xi_y - r_z \xi_{xy}, \\ r_{yy} &= q_{yy} - 2r_{zy} \xi_y - r_{zz} \xi_y^2 - r_z \xi_{yy}. \end{aligned}$$

Таким образом, все производные второго порядка на теле определяются, если будет известна $r_{zz}(\xi(x, y), x, y)$. Подставив все известные вторые производные в первое и второе соотношения (1.3), получим

$$q_x q_y - q_y q_{xx} = f_1(q_y - r_z \xi_y), \quad q_y q_x - q_x q_{yy} = f_1(q_x - r_z \xi_x).$$

Как видим, $r_{zz}(\xi(x, y), x, y)$ в эти выражения не вошла. Подставим сюда $r_z(\xi(x, y), x, y)$, выразим f_1 из каждого уравнения и приравняем полученные выражения. Тогда на заданном обтекаемом теле функция $q(x, y)$ должна удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{(q_x q_{xy} - q_y q_{xx})(\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1) + \xi_y(\xi_{xx} q_y^2 - 2\xi_{xy} q_x q_y + \xi_{yy} q_x^2)}{q_y(\xi_x^2 + 1) - q_x \xi_x \xi_y} \\ &= \frac{(q_y q_{xy} - q_x q_{yy})(\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1) + \xi_x(\xi_{xx} q_y^2 - 2\xi_{xy} q_x q_y + \xi_{yy} q_x^2)}{q_x(\xi_y^2 + 1) - q_y \xi_x \xi_y}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Из этих же выражений получаем

$$f_1 = \frac{(q_x \xi_x - q_y \xi_y) q_{xy} - q_y \xi_x q_{xx} + q_x \xi_y q_{yy}}{q_y \xi_x - q_x \xi_y}. \quad (1.6)$$

В уравнении (1.5) все члены, зависящие от производных первого порядка от функции $q(x, y)$, перенесем в правую часть уравнения. Обе части получившегося уравнения приравняем к пока произвольной функции $g(q)$. Получим

$$\begin{aligned} & (\xi_x^2 + \xi_y^2 + 1) \left[\frac{q_x q_{xy} - q_y q_{xx}}{q_y(\xi_x^2 + 1) - q_x \xi_x \xi_y} - \frac{q_y q_{xy} - q_x q_{yy}}{q_x(\xi_y^2 + 1) - q_y \xi_x \xi_y} \right] = g(q), \\ & (\xi_{xx} q_y^2 - 2\xi_{xy} q_x q_y + \xi_{yy} q_x^2) \left[\frac{\xi_x}{q_x(\xi_y^2 + 1) - q_y \xi_x \xi_y} - \frac{\xi_y}{q_y(\xi_x^2 + 1) - q_x \xi_x \xi_y} \right] = g(q). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для второго уравнения системы (1.7) выпишем расширенную систему уравнений характеристик [9], выбрав в качестве параметра, изменяющегося вдоль характеристик, переменную q . Замкнем полученную систему ОДУ, потребовав, чтобы первое уравнение системы (1.7) было первым интегралом расширенной системы характеристик, и аналогично потребуем, чтобы уравнение (1.6) также было первым интегралом расширенной системы уравнений характеристик. Получим систему ОДУ, решив которую, найдем $q(x, y)$, $g(q)$ и $f_1(q)$. Используя полученные $f_1(q)$ и $q(x, y)$, найдем сначала $a'(\rho)$, а затем u, v, w на теле (см. (1.2)). Так как при этом все три соотношения (два первых уравнения из системы (1.3) и уравнения (1.4)) обращаются в тождество, приходим к решению системы (0.1) с условиями (1.1).

Итак, на поверхности тела найдено решение задачи об обтекании в классе функций (1.1). Что и требовалось доказать. \square

П р и м е р. Если $b(x, y, z) = x = 0$, то $\rho u = 0$, $\rho v = a_z$, $\rho w = -a_y$, $\alpha = 0$, $\beta = r_z$, $\delta = -r_y$. Система уравнений Эйлера приводится к виду

$$r_x = 0, \quad r_z r_{yz} - r_y r_{zz} = f_1 r_y, \quad r_y r_{yz} - r_z r_{yy} = f_1 r_z.$$

На теле имеем $r(0, y, z) = q(y, z)$, $r_z(0, y, z) = q_z$, $r_y(0, y, z) = q_y$, $r_{yz}(0, y, z) = q_{yz}$, $r_{zz}(0, y, z) = q_{zz}$, $r_{yy}(0, y, z) = q_{yy}$. Подставляя соответствующие значения в полученную систему уравнений Эйлера, имеем на теле $q_z q_{yz} - q_y q_{zz} = f_1 q_y$, $q_y q_{yz} - q_z q_{yy} = f_1 q_z$. Отсюда получаем уравнение для функции $q(y, z)$: $\frac{q_z q_{yz} - q_y q_{zz}}{q_y} = \frac{q_y q_{yz} - q_z q_{yy}}{q_z}$ и выражение для f_1 : $f_1 = \frac{q_z^2 q_{yy} - q_{zz} q_y^2}{q_y^2 - q_z^2}$.

Выберем частное решение уравнения для функции $q(z, y)$: $q(y, z) = y^2 + z^2$; тогда $f_1 = -2$, $a' = \pm \sqrt{-0.5g(q)}$, $v = 2za'$, $w = -2ya'$. Следовательно, получаем

$$u = 0, \quad v = \pm z \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \exp[q(\gamma - 1)]}, \quad w = \mp y \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \exp[q(\gamma - 1)]},$$

$$\rho = \exp q, \quad p = p_0 \left(\frac{\exp q}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad q(y, z) = y^2 + z^2.$$

Нетрудно проверить, что имеем решение системы (0.1), удовлетворяющее условию непротекания.

2. К построению решения задачи об обтекании

Рассмотрим общий случай стационарных течений идеального политропного газа. Пусть в системе уравнений Эйлера (0.1) $u = u(\psi)$, $v = v(\psi)$, $w = w(\psi)$, $\rho = \rho(\psi)$, где $\psi = \psi(x, y, z)$. Тогда система (0.1) приводится [8] к виду

$$\begin{aligned} (u + v f_1 + w f_2)u' + \frac{\gamma p_0^\gamma}{\rho_0} \rho^{(\gamma-2)} \rho' &= 0, \\ (u + v f_1 + w f_2)v' + \frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} f_1 \rho^{(\gamma-2)} \rho' &= 0, \\ (u + v f_1 + w f_2)w' + \frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} f_2 \rho^{(\gamma-2)} \rho' &= 0, \\ (u + v f_1 + w f_2)\rho' + \rho(u' + f_1 v' + f_2 w') &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ — произвольные функции. Штрих обозначает дифференцирование по переменной ψ . Аналогично [8] $\psi_y/\psi_x = f_1(\psi)$, $\psi_z/\psi_x = f_2(\psi)$ (в предположении, что $\psi_x \neq 0$). Чтобы система (2.1), рассматриваемая как система алгебраических уравнений относительно u' , v' , w' , ρ' , имела нетривиальное решение, определитель при производных должен быть равен нулю. Приравняв определитель нулю, получаем, что

$$a) \quad \rho = \left[\frac{\rho_0^\gamma (u + v f_1 + w f_2)^2}{\gamma p_0 (1 + f_1^2 + f_2^2)} \right]^{1/(\gamma-1)} \quad \text{или} \quad b) \quad u + v f_1 + w f_2 = 0.$$

Отметим, что в случае $b)$ из системы (2.1) имеем $\rho = \text{const}$.

Нетрудно проверить, что $\psi = \psi(s)$, $s = x + f_1(s)y + f_2(s)z$ является решением системы $\psi_y/\psi_x = f_1(\psi)$, $\psi_z/\psi_x = f_2(\psi)$. Тогда можно считать, что $u = u(s)$, $v = v(s)$, $w = w(s)$, $\rho = \rho(s)$, $f_1(s) = s_y/s_x$, $f_2(s) = s_z/s_x$. Задавая функции $f_1(s)$ и $f_2(s)$, из выражения $s = x + f_1(s)y + f_2(s)z$ можно определить $s(x, y, z)$. Подставив это выражение в $u = u(s)$, $v = v(s)$, $w = w(s)$, $\rho = \rho(s)$, сведем систему (0.1) к ОДУ (см. [8]).

Покажем, как такой подход может быть использован при решении одной задачи об обтекании тела. Рассмотрим последовательно каждый из случаев существования нетривиального решения системы (2.1).

Утверждение 2. *Если $u + v f_1 + w f_2 \neq 0$, а на поверхности обтекаемого тела известна плотность газа, то на поверхности тела существует течение, удовлетворяющее условиям непротекания.*

Доказательство. Так как $u + v f_1 + w f_2 \neq 0$, выполняется условие $a)$. Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\rho)$, $\rho = \eta(y, z) - x$. Тогда система (0.1) примет вид

$$\begin{aligned} u' &= \frac{-(p_0 \gamma / \rho_0) \rho^{(\gamma-2)}}{u + v g_1 + w g_2}, \\ v' &= \frac{-(p_0 \gamma / \rho_0) g_1 \rho^{(\gamma-2)}}{u + v g_1 + w g_2}, \\ w' &= \frac{-(p_0 \gamma / \rho_0) g_2 \rho^{(\gamma-2)}}{u + v g_1 + w g_2}, \\ (u + v g_1 + w g_2) + \rho(u' + g_1 v' + g_2 w') &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь штрих обозначает дифференцирование по переменной ρ , $g_1(\rho) = -\eta_y$, $g_2(\rho) = -\eta_z$, где g_1 , g_2 удовлетворяют зависимости

$$\rho = \left[\frac{\rho_0^\gamma (u + v g_1 + w g_2)^2}{\gamma p_0 (1 + g_1^2 + g_2^2)} \right]^{1/(\gamma-1)}. \quad (2.3)$$

Таким образом, в данном рассмотрении роль независимой переменной в системе ОДУ (2.2) играет переменная ρ (вместо ψ или s) и вместо произвольных функций $f_1(s)$, $f_2(s)$ рассматриваются произвольные функции $g_1(\rho)$, $g_2(\rho)$, которые ниже будут определены в зависимости от плотности, заданной на поверхности тела. Итак, решаем обратную задачу. В выражении $\rho = x + g_1(\rho)y + g_2(\rho)z$ известны ρ , x , y , z , требуется определить $g_1(\rho)$ и $g_2(\rho)$.

Зададим уравнение поверхности обтекаемого тела $b(x, y, z) = 0$ в параметрическом виде $x = x(q, r)$, $y = y(q, r)$, $z = z(q, r)$, тогда $b_x = y_q z_r - y_r z_q$, $b_y = x_r z_q - x_q z_r$, $b_z = x_q y_r - x_r y_q$. Так как предполагается, что плотность газа ρ на теле известна, пусть $\rho = \rho(q, r)$. Продифференцировав соотношение $\rho(q, r) = \rho(x(q, r), y(q, r), z(q, r))$ сначала по q , затем по r , найдем из полученных выражений $-\eta_y = g_1(q, r) = [(z_q \rho_r - z_r \rho_q) + (x_r z_q - x_q z_r)] / (y_q z_r - y_r z_q)$ и $-\eta_z = g_2(q, r) = [(y_r \rho_q - y_q \rho_r) + (x_q y_r - x_r y_q)] / (y_q z_r - y_r z_q)$.

Далее зафиксируем $r = r^*$ и подставим $\rho(q, r^*)$ в (2.3), тогда из этого выражения можно получить

$$u + v g_1(q, r^*) + w g_2(q, r^*) = \left[\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} [1 + g_1^2(q, r^*) + g_2^2(q, r^*)] \rho^{(\gamma-1)}(q, r^*) \right]^{1/2}. \quad (2.4)$$

Подставив (2.4) в (2.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dq} &= -\frac{d\rho}{dq} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1 + g_1^2 + g_2^2} \right)^{1/2}, & \frac{dv}{dq} &= -g_1 \frac{d\rho}{dq} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1 + g_1^2 + g_2^2} \right)^{1/2}, \\ \frac{dw}{dq} &= -g_2 \frac{d\rho}{dq} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1 + g_1^2 + g_2^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Умножим левые части системы (2.5) на компоненты вектора нормали к обтекаемому телу, получим

$$\begin{aligned} &(y_q z_r - y_r z_q) \frac{du}{dq} + (x_r z_q - x_q z_r) \frac{dv}{dq} + (x_q y_r - x_r y_q) \frac{dw}{dq} \\ &= -\frac{d\rho}{dq} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1 + g_1^2 + g_2^2} \right)^{1/2} [(y_q z_r - y_r z_q) + (x_r z_q - x_q z_r) g_1 + (x_q y_r - x_r y_q) g_2]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Выпишем условия непротекания $(y_q z_r - y_r z_q)u + (x_r z_q - x_q z_r)v + (x_q y_r - x_r y_q)w = 0$. Продифференцировав это выражение по q и учитывая зависимость (2.6), получим

$$\begin{aligned} &(y_q z_r - y_r z_q)_q u + (x_r z_q - x_q z_r)_q v + (x_q y_r - x_r y_q)_q w \\ &= \frac{d\rho}{dq} \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \frac{\rho^{(\gamma-3)}}{1 + g_1^2 + g_2^2} \right)^{1/2} [(y_q z_r - y_r z_q) + (x_r z_q - x_q z_r) g_1 + (x_q y_r - x_r y_q) g_2]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из соотношений (2.4), (2.7) и условия непротекания имеем на обтекаемой поверхности

$$u(q, r^*) = \frac{D_1}{D}, \quad v(q, r^*) = \frac{D_2}{D}, \quad w(q, r^*) = \frac{D_3}{D}, \quad (2.8)$$

где $D = (x_r z_q - x_q z_r)(x_q y_r - x_r y_q)_q - (x_q y_r - x_r y_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q + g_1 [(x_q y_r - x_r y_q)(y_q z_r - y_r z_q)_q - (y_q z_r - y_r z_q)(x_q y_r - x_r y_q)_q] + g_2 [(y_q z_r - y_r z_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q - (x_r z_q - x_q z_r)(y_q z_r - y_r z_q)_q]$,

$$\begin{aligned} D_1 &= \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma} \right)^{1/2} \rho^{[(\gamma-3)/2]} \left[\frac{\rho_q}{\sqrt{1 + g_1^2 + g_2^2}} [g_1(x_q y_r - x_r y_q) - g_2(x_r z_q - x_q z_r)] \right. \\ &\quad \times [(y_q z_r - y_r z_q) + g_1(x_r z_q - x_q z_r) + g_2(x_q y_r - x_r y_q)] \\ &\quad \left. + \rho [(x_r z_q - x_q z_r)(x_q y_r - x_r y_q)_q - (x_q y_r - x_r y_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q] \sqrt{1 + g_1^2 + g_2^2} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{[(\gamma-3)/2]} \left[\frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}} [g_2(y_q z_r - y_r z_q) - (x_q y_r - x_r y_q)] \right. \\
&\quad \times [(y_q z_r - y_r z_q) + g_1(x_r z_q - x_q z_r) + g_2(x_q y_r - x_r y_q)] \\
&\quad \left. + \rho [(x_q y_r - x_r y_q)(y_q z_r - y_r z_q)_q - (y_q z_r - y_r z_q)(x_q y_r - x_r y_q)_q] \sqrt{1+g_1^2+g_2^2} \right], \\
D_3 &= \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{[(\gamma-3)/2]} \left[\frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2+g_2^2}} [(x_r z_q - x_q z_r) - g_1(y_q z_r - y_r z_q)] \right. \\
&\quad \times [(y_q z_r - y_r z_q) + g_1(x_r z_q - x_q z_r) + g_2(x_q y_r - x_r y_q)] \\
&\quad \left. + \rho [(y_q z_r - y_r z_q)(x_r z_q - x_q z_r)_q - (x_r z_q - x_q z_r)(y_q z_r - y_r z_q)_q] \sqrt{1+g_1^2+g_2^2} \right].
\end{aligned}$$

Аналогично получаются значения компонент скорости при всех r . Итак, найдено искомое течение на заданной поверхности тела.

Что и требовалось доказать. \square

Формулы (2.8) позволяют выделять особые точки на поверхности обтекаемого тела (обострение, если $D = 0$, $D_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$), или неопределенности, когда и числитель, и знаменатель стремятся к нулю).

Например, рассмотрим обтекание сферы $x = a \cos q \sin r$, $y = a \sin q \sin r$, $z = a \cos r$, $a = \text{const}$ — радиус сферы, когда на сфере задана плотность $\rho = \eta(y) - x$ (при таком распределении плотности $g_2 = 0$). Тогда

$$\begin{aligned}
D &= -a^4 \sin^3 r \cos r (g_1 \sin q + \cos q), \\
D_1 &= \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{(\gamma-3)/2} \sin^3 r \cos r \left[\frac{a^4 \rho_q g_1}{\sqrt{1+g_1^2}} (\cos q + g_1 \sin q) - \rho a^4 \cos q \sqrt{1+g_1^2} \right], \\
D_2 &= -\left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{[(\gamma-3)/2]} \sin^3 r \cos r \left[\frac{a^4 \rho_q}{\sqrt{1+g_1^2}} (\cos q + g_1 \sin q) - \rho a^4 \sin q \sqrt{1+g_1^2} \right], \\
D_3 &= \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{[(\gamma-3)/2]} \sin^4 r \left[\frac{a^4 \rho_q}{\sqrt{1+g_1^2}} (\sin q - g_1 \cos q) \times (\cos q + g_1 \sin q) + a^4 \rho \sqrt{1+g_1^2} \right], \\
\rho_q &= a \sin r (g_1 \cos q + \sin q).
\end{aligned}$$

При подстановке полученных значений D , D_i , ($i = 1, 2, 3$) в (2.8) имеем, что $D = 0$, если $-g_1 \cos r \sin q - \cos r \cos q = 0$. В частности, если $z = 0$ ($\cos r = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$), то $D = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 0$. Раскрывая неопределенности, получаем

$$\begin{aligned}
\lim_{z \rightarrow 0} u &= \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{(\gamma-3)/2} \left(\frac{\rho \cos q}{g_1 \sin q + \cos q} \sqrt{1+g_1^2} - \frac{\rho_q g_1}{\sqrt{1+g_1^2}} \right), \\
\lim_{z \rightarrow 0} v &= \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0^\gamma}\right)^{1/2} \rho^{(\gamma-3)/2} \left(\frac{\rho \sin q}{g_1 \sin q + \cos q} \sqrt{1+g_1^2} + \frac{\rho_q}{\sqrt{1+g_1^2}} \right), \quad \lim_{z \rightarrow 0} w = \infty,
\end{aligned}$$

следовательно, в точке $z = 0$ при обтекании сферы наступает обострение.

Завершив рассмотрение случая а) и иллюстрирующего примера, обратимся к случаю б).

Утверждение 3. Если на поверхности обтекаемого тела $u + v f_1(q) + w f_2(q) = 0$, то существуют компоненты скорости, удовлетворяющие условию непротекания.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если на поверхности тела ($x = x(q, r)$, $y = y(q, r)$, $z = z(q, r)$) выполнено условие $u + v f_1(q) + w f_2(q) = 0$, то из системы (2.1) следует, что $\rho(q, r) = \text{const}$, $u' + v' f_1 + w' f_2 = 0$. Зафиксируем некоторую линию на поверхности тела, положив $r = r^*$. Продифференцируем соотношение $u + v f_1(q) + w f_2(q) = 0$ по q (считаем $r = r^*$ и учтем, что $u' + v' f_1 + w' f_2 = 0$). Получим $v f_1' + w f_2' = 0$. Добавив к имеющимся соотношениям условие непротекания, получим систему алгебраических уравнений для определения компонент скорости на теле

$$\begin{aligned} u(y_q z_r - y_r z_q) + v(x_r z_q - x_q z_r) + w(x_q y_r - x_r y_q) &= 0, \\ u + v f_1(q) + w f_2(q) = 0, \quad v f_1' + w f_2' &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Если определитель системы (2.9) отличен от нуля, то на теле выполняются условия прилипания $u(q, r^*) = 0$, $v(q, r^*) = 0$, $w(q, r^*) = 0$. Приравнявая определитель нулю, получаем

$$(f_1 f_2' - f_2 f_1')(y_q z_r - y_r z_q) - f_2'(x_r z_q - x_q z_r) + f_1'(x_q y_r - x_r y_q) = 0.$$

Сравнивая это соотношение с условием непротекания, полагаем, что $u = \lambda(f_1 f_2' - f_2 f_1')$, $v = -\lambda f_2'$, $w = \lambda f_1'$, $\lambda = \text{const}$. С другой стороны, компоненты скорости можно представить в виде $u = f_1(x_q y_r - x_r y_q) - f_2(x_r z_q - x_q z_r)$, $v = f_2(y_q z_r - y_r z_q) - (x_q y_r - x_r y_q)$, $w = (x_r z_q - x_q z_r) - f_1(y_q z_r - y_r z_q)$ (см. (1.1) и вид $f_1(\psi)$, $f_2(\psi)$ в системе (2.1)). При таком представлении первые два уравнения системы (2.9) выполняются, а так как определитель системы равен нулю, то выполнено и третье уравнение системы. Учитывая два представления компонент скорости, получаем

$$-\lambda f_2' = f_2(y_q z_r - y_r z_q) - (x_q y_r - x_r y_q), \quad \lambda f_1' = (x_r z_q - x_q z_r) - f_1(y_q z_r - y_r z_q). \quad (2.10)$$

Отсюда определим функции $f_1(q)$ и $f_2(q)$ при каждом r , а затем искомое течение.

Что и требовалось доказать. \square

Например, пусть $x = q \sin r$, $y = q \cos r$, $z = q^2$. Тогда, подставляя соответствующие производные в (2.10), получим

$$-\lambda f_2' = 2q^2 f_2 \sin r + q, \quad \lambda f_1' = 2q^2 \cos r - 2q^2 f_1 \sin r. \quad (2.11)$$

Из второго и третьего соотношения (2.11) найдем $f_2(q)$, $f_1(q)$ и получим, что на заданной поверхности вектор скорости имеет вид $u = \lambda(f_1 f_2' - f_2 f_1')$, $v = -\lambda f_2'$, $w = \lambda f_1'$, где

$$f_1 = \zeta(r) \exp(-2q^3 \sin r/3) + \text{ctg } r, \quad f_2 = \exp(-2q^3 \sin r/3) \left(\eta(r) - \int q \exp(2q^3 \sin r/3) dq \right).$$

Здесь произвольные функции $\zeta(r)$, $\eta(r)$ и $\lambda = \text{const}$ могут быть использованы для стыковки полученного течения с течениями в соседних областях.

3. Заключение

Подавляющую часть физических процессов и явлений, которые происходят в сплошных средах, можно описать с помощью нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Надежное количественное описание тех эффектов, которые заключает в себе именно нелинейность модели и которые теряются при линеаризации, особенно важно при создании новой техники. Поскольку современные ЭВМ и численные методы не всегда улавливают такие особенности, необходимо сочетание вычислительных методов с применением аналитических конструкций и результатов исследований качественных особенностей нелинейных задач механики сплошной среды [10].

Предложенные методы построения течения газа вблизи тела, поверхность которого задана аналитически, позволяют сводить задачу, которая описывается нелинейной моделью Эйлера, к решению краевой задачи для системы ОДУ в случае, если известна плотность газа. Для гладких кусков поверхности обтекаемого тела данные решения могут использоваться в качестве тестов.

Даже при обтекании гладких поверхностей могут возникать особенности, требующие внимания. В работе рассмотрен пример, когда знаменатель в формулах (2.8) обращается в ноль. Формулы (2.8) для каждой обтекаемой поверхности позволяют определять места на поверхности, где могут наблюдаться обострения, для которых $D \rightarrow 0$, а числители дробей при этом не обращаются в ноль, а также слабые и сильные разрывы, когда знаменатель и числитель в формуле (2.8) обращаются в ноль одновременно.

В работе также рассмотрен специальный класс течений (см. (1.1)). Для этого класса течений при заданной поверхности обтекаемого тела получено нелинейное уравнение в частных производных (1.5), которому должно удовлетворять давление на заданном обтекаемом теле, и показано, как, используя решение такого уравнения, получить решение системы Эйлера, удовлетворяющее условию непротекания на обтекаемом теле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лифшиц Ю.Б.** Об обтекании тел вращения звуковым потоком идеального газа // Ученые записки ЦАГИ. 1973. Т. 4, № 6. С. 1–7.
2. **Крайко А.Н., Пьянков К.С., Яковлев Е.А.** Обтекание клина сверхзвуковым потоком идеального газа со "слабыми" и "сильными" скачками // Прикл. математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 451–470.
3. **Луцкий А.Г., Меньшов И.С., Ханхасаева Я.В.** Использование метода свободной границы для решения задач обтекания движущихся тел // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 93. С. 1–16.
4. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. М.: Наука, 1976. 400 с.
5. **Galdi G.P.** On the motion of a rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications // Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Amsterdam, 2002. Vol. I. P. 653–791.
6. **Рубина Л.И.** Расчет обтекания осесимметричных тел методом крупных частиц с использованием оптимальных криволинейных сеток // Моделирование в механике. 1989. Т. 3 (20), № 6. С. 136–140.
7. **Руденко О.В., Солюян С.И.** Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 288 с.
8. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении некоторых уравнений нелинейной акустики // Акустический журн. 2015. Т. 61, № 5. С. 576–582.
9. **Rubina L.I., Ulyanov O.N.** On some method for solving a nonlinear heat equation // Sib. Math. J. 2012. Vol. 53, no. 5. P. 872–881.
10. **Сидоров А.Ф.** Аналитические методы математической физики и математический эксперимент // Число и мысль: сб. ст. М.: Знание, 1987. Вып. 10. С. 75–100.

Рубина Людмила Ильинична

Поступила 16.06.2016

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

e-mail: rli@imm.uran.ru

Ульянов Олег Николаевич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

ученый секретарь института

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург

доцент

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: secretary@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lifshits Yu.B. On the flow around the bodies of revolution by the sound flow of an ideal gas. *Uchenye Zapiski TsAGI*, 1973, vol. 4, no. 6, pp. 1–7.
2. Kraiko A.N., P'Yankov K.S., Yakovlev Y.A. The flow of a supersonic ideal gas with “weak” and “strong” shocks over a wedge. *J. Appl. Math. Mech.*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 318–330. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2014.12.002 .
3. Lutsky A. E., Men'shov I. S., Khankhasaeva Y.V. The use of free boundary method for solving the problem of the flow past moving bodies. *Keldysh Institute Preprints*, 2014, no. 093, pp. 1–16 (in Russian).
4. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ia., Kraiko A.N., Prokopov G.P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 400 p.
5. Galdi G.P. On the motion of a rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications. *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, Amsterdam, 2002, vol. I, pp. 653–791.
6. Rubina L.I. Calculation of the flow around axisymmetric bodies by the large-particle method using optimal curvilinear grids. *Modelirovanie v Mekhanike*, Novosibirsk, 1989, vol. 3 (20), no. 6, pp. 136–140.
7. Rudenko O.V., Soluyan S.I. *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*. Plenum, Consultants Bureau, 1977, Ser. Studies in Soviet Science, 274 p. doi: 10.1002/jcu.1870060222 . Original Russian text published in *Teoreticheskie osnovy nelineinoy akustiki*, Moscow, Nauka Publ., 1975, 274 p.
8. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On solving certain nonlinear acoustics problems *Acoust. Phys.*, 2015, vol. 61, no. 5, pp. 527–533. doi:10.1134/S1063771015050152 .
9. Rubina L.I., Ul'yanov O.N. On some method for solving a nonlinear heat equation. *Sib. Math. J.*, 2012, vol. 53, no. 5, pp. 872–881. doi:10.1134/S0037446612050126 .
10. Sidorov A.F. Analiticheskie metody matematicheskoi fiziki i matematicheskii eksperiment *Chislo i mysl'*, Moscow: Znanie, 1987, iss. 10, pp. 75–100.

The paper was received by the Editorial Office on June 16, 2016.

Lyudmila Il'inichna Rubina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: rli@imm.uran.ru .

Oleg Nikolaevich Ul'yanov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: secretary@imm.uran.ru .

УДК 517.948

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ КОНЕЧНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ¹**А. И. Сидикова**

Решается обратная граничная задача для уравнения теплопроводности. Эта задача сводится к интегральному уравнению первого рода, которое с использованием дискретизации по двум переменным сводится к конечномерному уравнению. К этому уравнению применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации по принципу невязки. Принцип невязки учитывает погрешность дискретизации. Показано, что для данной задачи не выполняется условие В.К. Иванова, позволяющее при оценке погрешности приближенного решения задачи использовать модуль непрерывности обратного оператора. Поэтому для оценки погрешности приближенного решения предложен численный подход, использующий дискретизацию задачи. Дано сравнение данной оценки с классической оценкой через модуль непрерывности. Предложенный в работе подход позволяет значительно расширить класс задач, к которым он применим.

Ключевые слова: некорректная задача, интегральное уравнение, оценка погрешности, регуляризирующий алгоритм, конечномерная аппроксимация.

A. I. Sidikova. On the approximate solution of an inverse boundary value problem by the method of finite-dimensional approximation of the regularized solution.

We solve the inverse boundary value problem for the heat equation. The problem is reduced to an integral equation of the first kind, which in turn is reduced to a finite-dimensional equation by means of discretization in two variables. The latter equation is solved by means of A. N. Tikhonov's regularization method with the regularization parameter chosen according to the residual principle with discretization error taken into account. It is shown that the problem does not satisfy V. K. Ivanov's condition, which would allow to employ the modulus of continuity of the inverse operator. That is why, to estimate the error of the approximate solution, we propose a numerical approach using the discretization of the problem. The obtained estimate is compared with the classical estimate in terms of the modulus of continuity. The approach proposed in this paper makes it possible to considerably extend the class of problems to which it is applicable.

Keywords: ill-posed problem, integral equation, estimation of error, regularizing algorithm, finite-dimensional approximation.

MSC: 45B05, 45Q05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-210-219

Введение

К настоящему моменту получено большое число результатов, посвященных теории конечномерной аппроксимации (см., например, [1–3]) и др.

В данной работе обратная граничная задача для уравнения теплопроводности сводится к интегральному уравнению первого рода, к которому применяется конечномерная аппроксимация, позволяющая свести задачу к системе линейных алгебраических уравнений. Получена оценка погрешности приближенного решения, учитывающая конечномерную аппроксимацию задачи. Для вычисления погрешности приближенного решения использован численный подход, заключающийся в выделении конечного числа допустимых точных решений и определении среди них максимально удаленного до приближенного решения задачи. Для получения оценки через модуль непрерывности $\omega(\tau, r)$, следуя работе [4], необходимо найти собственные

¹Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (постановление № 211 от 16.03.2013 г., соглашение № 02.A03.21.0011).

функции и собственные значения операторов, используемых в задаче и требующих выполнения достаточно жестких условий, а оценка, приведенная в данной работе, не требует выполнения этих условий.

1. Постановка прямой задачи

Задачу определения функции $w(x, t) \in C([0, 1] \times [0, T]) \cap C^{2,1}((0; 1) \times (0, T))$ по известной функции $h(t)$ из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T, \\ w(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} + \bar{k}w(1, t) &= 0, & \bar{k} > 0, & \quad 0 \leq t \leq T, \\ w(0, t) &= h(t), & 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $h(t) \in C^2[0, T]$, $h(0) = h'(T) = 0$, $h'(0) = a$, $a > 0$, будем называть *прямой задачей*.

Сделаем замену

$$v(x, t) = w(x, t) + \left[\frac{\bar{k}}{\bar{k} + 1}x - 1 \right] h(t),$$

перейдем к следующей задаче:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \left[\frac{\bar{k}}{\bar{k} + 1}x - 1 \right] h'(t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \tag{1.2}$$

$$v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad v(0, t) = 0, \quad v'_x(1, t) + \bar{k}v(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{1.3}$$

Решая задачу (1.2), (1.3) методом разделения переменных, получим

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t) \sin \lambda_i x, \tag{1.4}$$

где λ_i — положительные решения уравнения $\operatorname{tg} \lambda = -\lambda/\bar{k}$,

$$v_i(t) = 2b_i \int_0^t e^{-\lambda_i^2(t-\tau)} h'(\tau) d\tau, \tag{1.5}$$

$$b_i = -\frac{4}{2\lambda_i - \sin 2\lambda_i}, \quad \lambda_i = \frac{2i+1}{2}\pi + \gamma_i,$$

$\gamma_i \rightarrow +0$ при $i \rightarrow \infty$ (см. формулы (2.6)–(2.10) в [5]).

Интегрируя (1.5) по частям, получим

$$v_i(T) = -\frac{2b_i a}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2 T} - \frac{2b_i}{\lambda_i^2} \int_0^T e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} h''(\tau) d\tau. \tag{1.6}$$

В выражении (1.6) положим $g(\tau) := -h''(\tau)$.

2. Постановка обратной задачи

Пусть функция $h(t)$, используемая в условии (1.1), неизвестна, а вместо нее дана функция $f(x) = v(x, T)$.

Предположим, что при $f(x) = f_0(x)$ существует функция $g_0(t)$ такая, что $g_0(t) \in C[0, T]$, а решение $v(x, t)$ задачи (1.2), (1.3) с функцией $h_0(t) = -\int_0^t \int_T^s g_0(\xi) d\xi ds$ удовлетворяет условию

$$v(x, T) = f_0(x), \quad \|g_0(t)\|_{C[0, T]} \leq r, \quad \int_0^T g_0(\xi) d\xi = a > 0, \quad (2.1)$$

где r — известное число, но $f_0(x)$ нам неизвестна, а вместо нее даны функция $f_\delta(x) \in L_2[0, 1]$ и число $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(x) - f_0(x)\|_{L_2[0, 1]} \leq \delta. \quad (2.2)$$

Требуется, используя исходные данные задачи (f_δ, δ, r) , определить приближенное решение $h_\delta(t)$ задачи (1.2), (1.3), (2.1) и оценить уклонение $\|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2}$ приближенного решения $h_\delta(t)$ от точного $h_0(t)$.

Из формул (1.4), (1.5) следует, что обратную задачу (1.2), (1.3), (2.1) можно свести к интегральному уравнению Фредгольма первого рода в том смысле, что если $h(\tau)$ — решение обратной задачи, то $u(\tau) := h'(\tau)$ есть решение уравнения

$$A[u(\tau)] := \int_0^T P(x, \tau) u(\tau) d\tau = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.3)$$

где $P(x, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} b_i e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} \sin \lambda_i x$, $u(0) = a > 0$.

Введем оператор B , отображающий пространство $L_2[0, T]$ в $L_2[0, T]$, формулой

$$B[g(\tau)] = a - \int_0^\tau g(\xi) d\xi \quad (2.4)$$

и оператор C — формулой $C[g(\tau)] = AB[g(\tau)]$, где $g(\tau) \in L_2[0, T]$, $C[g(\tau)] \in L_2[0, 1]$.

Тогда уравнение (2.3) при условии, что $g(\tau) := -u'(\tau)$, эквивалентно уравнению

$$C[g(\tau)] := \int_0^T K(x, \tau) g(\tau) d\tau = \psi(x), \quad (2.5)$$

где $K(x, \tau) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2(T-\tau)} \sin \lambda_i x$, $\psi(x) = f(x) + 2a \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{\lambda_i^2} e^{-\lambda_i^2 T} \sin \lambda_i x$.

3. Конечномерная аппроксимация оператора C

Для численного решения уравнения (2.5) заменим оператор C конечномерным оператором $C_{n,m}$ и оценим величину $\|C_{n,m} - C\|$.

Разобьем отрезок $[0, T]$ на n равных частей точками $\tau_j = jT/n$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, а также отрезок $[0, 1]$ — на m равных частей точками $x_k = k/m$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Обозначим через G_n конечномерное подпространство пространства $L_2[0, T]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, а через X_m — подпространство пространства $L_2[0, 1]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[x_k, x_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Оператор $C_{n,m}$ определим формулой

$$C_{n,m}[g(\tau)] = \int_0^T K_{nm}(x, \tau)g(\tau)d\tau, \quad g(\tau) \in L_2[0, T], \quad C_{n,m}[g(\tau)] \in L_2[0, 1],$$

где $K_{nm}(x, \tau) = K_{jk}$ при $\frac{k}{m} \leq x \leq \frac{k+1}{m}$, $\frac{jT}{n} \leq \tau \leq \frac{(j+1)T}{n}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Пусть $\bar{K}_{nm}(x, \tau)$ — метрическая проекция функции $K(x, \tau)$ на подпространство кусочно-постоянных функций $G_n \times X_m$, $\bar{K}_{nm}(x, \tau) = pr[K(x, \tau), G_n \times X_m]$,

$$\bar{K}_{ij} = \frac{nm}{T} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x, \tau) dx d\tau, \quad \mu_{nm}^2 = \int_0^T \int_0^1 [K(x, \tau) - \bar{K}_{nm}(x, \tau)]^2 dx d\tau.$$

4. Метод невязки

Пусть P_n — оператор метрического проектирования пространства $L_2[0, T]$ на G_n , а Q_m — оператор метрического проектирования пространства $L_2[0, 1]$ на X_m , через \bar{C}_m обозначим сужение оператора $Q_m C$ на G_n , а через $\bar{C}_{n,m}$ — сужение оператора $C_{n,m}$ на G_n . Следующая лемма позволяет использовать величину $\|C - C_{n,m}\|$ для оценки нормы $\|Q_m \bar{C}_m - Q_m \bar{C}_{n,m}\|$, которая нужна для перехода от пространств $L_2[0, T]$, $L_2[0, 1]$, в которых действуют операторы C и $C_{n,m}$, к конечномерным пространствам G_n и X_m .

Лемма. Пусть C и $C_{n,m}$ — линейные ограниченные операторы, отображающие пространство $L_2[0, T]$ в $L_2[0, 1]$. Тогда $\|Q_m \bar{C}_m - Q_m \bar{C}_{n,m}\| \leq \|C - C_{n,m}\|$.

Доказательство. Используя то, что $\|Q_m\| = 1$, имеем

$$\|Q_m Cg - Q_m C_{n,m}g\| = \|Q_m \{Cg - C_{n,m}g\}\| \leq \|Cg - C_{n,m}g\|.$$

Следовательно,

$$\sup_{\|g\| \leq 1} \|Q_m Cg - Q_m C_{n,m}g\| \leq \sup_{\|g\| \leq 1} \|Cg - C_{n,m}g\|. \quad (4.1)$$

Из (4.1) имеем $\|Q_m C - Q_m C_{n,m}\| \leq \|C - C_{n,m}\|$.

Тогда

$$\|Q_m \bar{C}_m - Q_m \bar{C}_{n,m}\| \leq \sup_{g \in G_n, \|g\| \leq 1} \|Q_m Cg - Q_m C_{n,m}g\| = \|Q_m C - Q_m C_{n,m}\|.$$

Окончательно получим $\|Q_m \bar{C}_m - Q_m \bar{C}_{n,m}\| \leq \|C - C_{n,m}\|$.

Лемма доказана.

Пусть $g_0^n(\tau) \in G_n$ и $g_0^n(\tau_j) := -u_0'(\tau_j)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $\|\psi_0(x) - \psi_\delta(x)\|_{L_2} \leq \delta$, $A[u_0(t)] = f_0(x)$.

Из формулы Лагранжа следуют оценки

$$|u_0(\tau) - u_0(\tau_j)| \leq \max_{\tau_j \leq \tau \leq \tau_{j+1}} |g(\tau)| \cdot (\tau - \tau_j) \leq \max_{0 \leq \tau \leq T} |g(\tau)| \cdot \frac{T}{n} \leq \frac{rT}{n}, \quad \tau_j \leq \tau \leq \tau_{j+1},$$

$$\|u_0(\tau) - u_0^n(\tau)\|_{L_2[0,T]}^2 = \int_0^T |u_0(\tau) - u_0^n(\tau)|^2 d\tau \leq \max_{0 \leq \tau \leq T} |u_0(\tau) - u_0^n(\tau)|^2 \cdot \int_0^T d\tau \leq \frac{r^2 T^2}{n^2} T,$$

$$\|u_0(\tau) - u_0^n(\tau)\|_{L_2[0,T]} \leq \frac{r\sqrt{T^3}}{n}.$$

Для приближенного решения уравнения (2.5) воспользуемся результатом леммы и конечномерным вариантом метода невязки, предложенным в работе [6]. Этот метод заключается в сведении уравнения (2.5) к вариационной задаче на условный экстремум:

$$\inf \left\{ \|g(\tau)\|^2 : g(\tau) \in G_n, \quad \|C_{n,m}g(\tau) - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \delta \right\}, \quad (4.2)$$

где $\psi_\delta^m(x) = Q_m[\psi_\delta(x)]$, $\hat{d} = \left[\int_0^1 dx \int_0^T P^2(x, \tau) d\tau \right]^{1/2}$.

В работе [6, теорема 3] доказано, что при условии

$$\|\psi_\delta^m(x)\| > r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \delta \quad (4.3)$$

вариационная задача (4.2) имеет единственное решение $\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)$, которое удовлетворяет равенству

$$\|C_{n,m}\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau) - \psi_\delta^m(x)\| = r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \delta.$$

Из работы [7, теорема 1] следует, что задача (4.2) сводится к вариационной задаче на безусловный экстремум

$$\inf \left\{ \|C_{n,m}g(\tau) - \psi_\delta^m(x)\|^2 + \alpha \|g(\tau)\|^2 : g(\tau) \in G_n \right\}, \quad \alpha > 0. \quad (4.4)$$

Задача (4.4) имеет единственное решение $g_{\delta, \mu_{n,m}}^\alpha(\tau)$, в котором параметр α выбирается из принципа невязки [8, с. 173]

$$\|C_{n,m}g_{\delta, \mu_{n,m}}^\alpha(\tau) - \psi_\delta^m(x)\|^2 = r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \delta, \quad (4.5)$$

где $g_{\delta, \mu_{n,m}}^\alpha(\tau)$ — решение задачи (4.4).

Известно (см. [8, теорема 3]), что при выполнении условия (4.3) уравнение (4.5) относительно α имеет единственное решение $\alpha(n, m)$.

Таким образом, при выполнении условия (4.3) получим решение задачи (4.2)

$$g_{\delta, \mu_{n,m}}^{\alpha(n,m)}(\tau) := \bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau), \quad \bar{u}_{\delta, \mu_{nm}}(\tau) = B\bar{g}_{\delta, \mu_{nm}}(\tau), \quad (4.6)$$

$$\bar{h}_{\delta, \mu_{nm}}(t) = \int_0^t \bar{u}_{\delta, \mu_{nm}}(\tau) d\tau.$$

5. Оценка погрешности приближенного решения обратной задачи (1.2), (1.3), (2.1), (2.2)

Одним из подходов к численной оценке погрешности приближенного решения уравнения (2.5) являются выделение конечного числа допустимых точных решений уравнения (2.5) и определение максимального отклонения приближенного решения уравнения от этих решений.

Для выделения конечного числа допустимых точных решений разобьем отрезок $[-r, r]$ на $2l$ равных по длине отрезков точками

$$g_0 < g_1 < \dots < g_{2l}, \quad g_0 = -r, \quad g_{2l} = r, \quad g_{p+1} - g_p = \frac{r}{l}, \quad p = 0, 1, \dots, 2l - 1.$$

Для определения конечного числа допустимых точных решений уравнения (2.5) рассмотрим множество $S_r^{n,l} \subset L_2[0, T]$:

$$S_r^{n,l} = \left\{ g(\tau) : g(\tau) = g_{p_j}, \tau_j \leq \tau < \tau_{j+1}, j \in \overline{0, n-1}, p_j \in \overline{0, 2l-1}, \sum_{j=0}^{n-1} g_{p_j}^2 \leq r^2 \right\}, \quad g_{p_j} = \text{const.}$$

Определим множество $M_r^{n,l} = B[S_r^{n,l}]$.

Далее введем множество $\Omega_r^{n,l} \subset M_r^{n,l}$.

$$\begin{aligned} \Omega_r^{n,l} = \left\{ u(\tau) : u(\tau) \in M_r^{n,l}, u(\tau) = Bg(\tau), \|C_{n,m}[g(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} \right. \\ \left. + \frac{r\sqrt{T^3}\widehat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}\widehat{c}}{l} + \delta \right\}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\widehat{c} = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} K_{j,k}^2 \right]^{1/2}$.

Введем функцию $\gamma(\delta, r, \bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau))$ формулой

$$\gamma(\delta, r, \bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)) = \max_{u(\tau)} \left\{ \|\bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau) - u(\tau)\|_{L_2[0, T]} : u(\tau) \in \Omega_r^{n,l} \right\}, \quad (5.2)$$

где множество $\Omega_r^{n,l}$ определено формулой (5.1).

Из формулы (2.4) следует, что $u_0^n(\tau)$ для любого $j \in \overline{0, n-1}$ будет непрерывной кусочно-линейной функцией на отрезке $[\tau_j, \tau_{j+1}]$. Непрерывную кусочно-линейную функцию достаточно определить в точках τ_j . Используя функцию $g_0^n(\tau)$, определим функцию

$$u_0^n(\tau) := B[g_0^n(\tau)]. \quad (5.3)$$

Из $u_0(\tau_j) := a - \int_0^{\tau_j} g_0^n(\xi) d\xi$ получим $u_0^n(\tau_j) = u_0(\tau_j)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, $u_0(\tau) = B[g_0(\tau)]$.

Теорема 1. Пусть функция $\bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)$ определена (4.6), $u_0^n(\tau)$ — формулой (5.3). Тогда справедлива оценка

$$\|\bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau) - u_0^n(\tau)\| \leq \gamma(\delta, r, \bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)) + \frac{r\sqrt{T}}{l}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что $\Omega_r^{n,l} \neq \emptyset$. Для этого рассмотрим функцию $g_0(\xi) \in C[0, T]$ такую, что $C[g_0(\tau)] := \psi_0(x)$.

Из формулы Лагранжа следует, что для любого $j \in \overline{0, n-1}$ существует $\theta_j \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ такое, что для любого $\tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ $g_0^n(\tau) = g_0(\theta_j)$.

Тогда $\sup_{0 \leq t \leq T} |g_0^n(\tau)| \leq r$ и $\|g_0^n(\tau)\|_{L_2[0, T]} \leq r\sqrt{T}$.

Так как $u_0(\tau) := B[g_0(\tau)]$ и $u_0^n(\tau) := B[g_0^n(\tau)]$, по формуле Лагранжа имеем для любого $\tau \in [0, T]$

$$|u_0^n(\tau) - u_0(\tau)| \leq \frac{rT}{n}, \quad \|u_0^n(\tau) - u_0(\tau)\|_{L_2[0, T]} \leq \frac{r\sqrt{T^3}}{n}. \quad (5.4)$$

Теперь оценим величину $\|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\|_{L_2[0,1]}$.

Ввиду того, что для любого $g(\tau) \in L_2[0, T]$ $C_{n,m}g(\tau) \in X_m$, будет иметь место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| &\leq \|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta(x)\| \leq \|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - C[g_0^n(\tau)]\| + \|C[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta(x)\| \\ &\leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \|C[g_0^n(\tau)] - C[g_0(\tau)]\| + \|\psi_0(x) - \psi_\delta(x)\|. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Из (5.4) и (5.5) следует, что

$$\|C_{n,m}[g_0^n(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \delta. \quad (5.6)$$

Далее возьмем функцию $\hat{g}(\tau) \in S_r^{n,l}$ такую, что для любого $\tau \in [0, T]$ $|\hat{g}(\tau)| \leq r$ и

$$|\hat{g}(\tau) - g_0^n(\tau)| \leq \frac{r}{l}. \quad (5.7)$$

Из (5.6) и (5.7) следует, что

$$\|C_{n,m}[\hat{g}(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \frac{r\sqrt{T}}{l}\hat{c} + \delta. \quad (5.8)$$

Учитывая (5.1), (5.8), получим $\hat{u}(\tau) = B[\hat{g}(\tau)] \in \Omega_r^{n,l}$.

Перейдем к оценке величины $\|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - u_0^n(\tau)\|$.

Заметим, что

$$\|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - u_0^n(\tau)\| \leq \sup_{g(\tau)} \left\{ \|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - Bg(\tau)\|_{L_2} : g(\tau) \in G_n \cap C[0, T], \right.$$

$$\left. \|g(\tau)\|_{C[0,T]} \leq r, \|C_{n,m}[g(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \delta \right\}.$$

Ввиду компактности множества допустимых решений уравнения (2.5) найдется функция $\bar{g}_0^n(\tau) \in G_n \cap C[0, T]$, $\|\bar{g}_0^n(\tau)\|_{C[0,T]} \leq r$ и $\|C_{n,m}[\bar{g}_0^n(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \delta$ такая, что

$$\|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[\bar{g}_0^n(\tau)]\| = \sup \left\{ \|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[g(\tau)]\|_{L_2} : g(\tau) \in G_n \cap C[0, T], \right.$$

$$\left. \|g(\tau)\|_{C[0,T]} \leq r, \|C_{n,m}[g(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \delta \right\}. \quad (5.9)$$

Из (5.7) следует существование функции $\hat{g}(\tau) \in S_r^{n,l}$ такой, что $B[\hat{g}(\tau)] \in M_r^{n,l}$ и

$$\|C_{n,m}[\hat{g}(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \frac{r\sqrt{T}}{l}\hat{c} + \delta, \quad (5.10)$$

$$\|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[\hat{g}(\tau)]\| \leq \|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[g_0^n(\tau)]\| + \frac{r\sqrt{T}}{l}. \quad (5.11)$$

Из (5.9)–(5.11) следует, что

$$\|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - u_0^n(\tau)\| \leq \sup_{g(\tau)} \left\{ \|\bar{u}_{\delta,\mu_{n,m}}(\tau) - B[g(\tau)]\| : B[g(\tau)] \in M_r^{n,l} \right\},$$

$$\|C_{n,m}[g(\tau)] - \psi_\delta^m(x)\| \leq r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{r\sqrt{T^3\hat{d}}}{n} + \frac{r\sqrt{T}}{l}\hat{c} + \frac{r\sqrt{T}\hat{c}}{l} + \delta.$$

Из (5.2) и (5.11) следует оценка $\|\bar{u}_{\delta, \mu_n, m}(\tau) - u_0^n(\tau)\| \leq \gamma(\delta, r, \bar{u}_{\delta, \mu_n, m}(\tau)) + \frac{r\sqrt{T}}{l}$.

Тем самым теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что $\|\bar{h}_{\delta, \mu_n, m}(t) - h_0^n(t)\| \leq \gamma(\delta, r, \bar{u}_{\delta, \mu_n, m}(\tau)) + \frac{r\sqrt{T}}{l}$.

Хорошо известно, что одной из основных оценочных функций при определении погрешности методов является модуль непрерывности обратного оператора [4, с. 144]

$$\omega(\tau, r) = \sup \left\{ \|Bg\|_{L_2[0, T]} : g \in L_2[0, T], \|g\|_{L_2[0, T]} \leq r, \|Cg\|_{L_2[0, T]} \leq \tau \right\}, \text{ где } r \text{ и } \tau > 0.$$

В связи с этим важную роль приобретает умение вычислять $\omega(\tau, r)$. В работе [9] предложена общая методика вычисления $\omega(\tau, r)$.

Одним из условий, позволяющих вычислить модуль непрерывности обратного оператора $\omega(\tau, r)$, является коммутативность операторов $C_1 = C^*C$ и $B_1 = BB^*$ (см. [4, с. 144]).

Рассмотрим оператор C_1 :

$$C_1g(\tau) = C^*Cg(\tau) = \int_0^T K_1(t, \tau)g(\tau)d\tau, \quad C_1 : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T], \quad (5.12)$$

где $K_1(t, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} e^{-\lambda_i^2[2T-(\tau+t)]}$, и оператор B_1 :

$$B_1g(\tau) = B^*Bg(\tau), \quad B_1 : L_2[0, T] \rightarrow L_2[0, T]. \quad (5.13)$$

Покажем, что для операторов B_1 и C_1 , определенных в данной статье формулами (5.12) и (5.13), это условие не выполняется.

Утверждение. Пусть операторы C_1 и B_1 определены формулами (5.12), (5.13), а $T > 3/2$. Тогда $B_1C_1 \neq C_1B_1$.

Доказательство. У оператора B_1 существует система собственных чисел $\left\{ \frac{2T}{\pi(2j+1)} \right\}$ кратности 1 и соответствующих им собственных функций $\left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi(2j+1)\tau}{2T} \right\}$.

Положим $j = 1$ и обозначим $\sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{3\pi\tau}{2T}$ через $\varphi_0(\tau)$. Покажем, что $\varphi_0(\tau)$ не является собственной функцией оператора C_1 . Имеем

$$\begin{aligned} C_1 \sin \frac{3\pi\tau}{2T} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \int_0^T e^{-\lambda_i^2(2T-(\tau+t))} \sin \frac{3\pi\tau}{2T} d\tau \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \frac{6T\pi e^{-\lambda_i^2(2T-t)} - 4T^2 e^{-\lambda_i^2(T-t)} \lambda_i^2}{9\pi^2 + 4T^2 \lambda_i^4}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Возьмем значение $\tau_0 = 2T/3$ и проверим, что для любого $\lambda \neq 0$ $C_1\varphi_0(\tau_0) \neq \lambda\varphi_0(\tau_0)$. При $t = \tau_0$ и $T > 3/2$ из того, что $|b_i| \leq \frac{4}{\lambda_i}$, $\lambda_i > \pi i \geq \pi$, и условия (5.14) получим

$$C_1\varphi_0(\tau_0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-4)b_i}{\lambda_i^5} \frac{6T\pi e^{-\lambda_i^2 \frac{4T}{3}} - 4T^2 e^{-\lambda_i^2 \frac{T}{3}} \lambda_i^2}{9\pi^2 + 4T^2 \lambda_i^4} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{4b_i\pi(4T^2 - 6T) e^{-\lambda_i^2 \frac{T}{3}}}{\lambda_i^5(9\pi^2 + 4T^2 \lambda_i^4)} < 0.$$

Так как $\varphi_0(\tau_0) = 0$, то для любого $\lambda \neq 0$

$$C_1\varphi_0(\tau) \neq \lambda\varphi_0(\tau). \quad (5.15)$$

Для доказательства некоммутативности операторов B_1 и C_1 предположим противное, т. е.

$$B_1 C_1 = C_1 B_1, \quad (5.16)$$

тогда

$$B_1 \varphi_0(\tau) = \frac{2T}{3\pi} \varphi_0(\tau), \quad C_1 B_1 \varphi_0(\tau) = \frac{2T}{3\pi} C_1 \varphi_0(\tau). \quad (5.17)$$

Из (5.16), (5.17) получим

$$B_1 C_1 \varphi_0(\tau) = C_1 B_1 \varphi_0(\tau) = \frac{2T}{3\pi} C_1 \varphi_0(\tau). \quad (5.18)$$

Так как спектр оператора B_1 простой, то из (5.17) и (5.18) следует существование $\lambda \neq 0$ такого, что

$$C_1 \varphi_0(\tau) = \lambda \varphi_0(\tau). \quad (5.19)$$

Равенство (5.19) противоречит (5.15). Утверждение доказано.

Следующая теорема показывает связь полученной оценки с модулем непрерывности обратного оператора.

Теорема 2. Пусть функция $\gamma(\delta, r, \bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau))$ определена (5.2). Тогда справедлива оценка

$$\gamma(\delta, r, \bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)) \leq 2\omega \left(2r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{2r\sqrt{T^3}\hat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}\hat{c}}{l} + \delta, r\sqrt{T} \right).$$

Доказательство. Так как $\|\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)\| \leq r\sqrt{T}$, а $B[g(\tau)] \in \Omega_r^{n,l}$, то $\|g(\tau)\| \leq r\sqrt{T}$ и

$$\|C_{n,m}[\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)] - C_{n,m}[g(\tau)]\| \leq 2r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{2r\sqrt{T^3}\hat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}\hat{c}}{l} + 2\delta.$$

Пусть $g(\tau) \in S_r^{n,l}$,

$$\|C_{n,m}[\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)] - C[g(\tau)]\| \leq \|C - C_{n,m}\| \|\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)\| + \|C_{n,m}[\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)] - C_{n,m}[g(\tau)]\|,$$

$$\|C_{n,m}[\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)] - C[g(\tau)]\| \leq \|C_{n,m}[\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)] - C_{n,m}[g(\tau)]\| + \|C - C_{n,m}\| \|\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)\|.$$

Учитывая вышесказанное, получим следующее неравенство:

$$\|C_{n,m}[\bar{g}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)] - C[g(\tau)]\| \leq 4r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{4r\sqrt{T^3}\hat{d}}{n} + \frac{2r\sqrt{T}\hat{c}}{l} + 2\delta.$$

Тогда $\gamma(\delta, r, \bar{u}_{\delta, \mu_{n,m}}(\tau)) \leq 2\omega \left(2r\sqrt{T}\mu_{n,m} + \frac{2r\sqrt{T^3}\hat{d}}{n} + \frac{r\sqrt{T}\hat{c}}{l} + \delta, r\sqrt{T} \right)$.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Танана В.П.** Об одном оптимальном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1279–1282.
2. **Васин В.В.** Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризирующих алгоритмов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 11–21.
3. **Данилин А.Р.** Об оптимальных по порядку оценках конечномерных аппроксимаций решений некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25, № 8. С. 1123–1130.
4. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.

5. **Танана В.П., Сидикова А.И.** О гарантированной оценке точности приближенного решения одной обратной задачи тепловой диагностики // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 238–252.
6. **Иванов В.К.** О приближенном решении операторных уравнений первого рода // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 6. С. 1089–1094.
7. **Васин В.В.** О связи некоторых вариационных методов приближенного решения некорректных задач // Мат. заметки. 1970. Т. 7, № 3. С. 265–272.
8. **Морозов В.А.** О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6, № 1. С. 170–175.
9. **Иванов В.К., Королюк Т.И.** Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1969. Т. 9, № 1. С. 30–41.

Сидикова Анна Ивановна

Поступила 10.12.2015

канд. физ.-мат. наук

доцент кафедры вычислительной математики

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: 7413604@mail.ru

REFERENCES

1. Tanana V.P. On an optimal algorithm for operator equations of the first kind with a perturbed operator. *Soviet Math. Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 292–295.
2. Vasin V.V. Discrete convergence and finite-dimensional approximation of regularizing algorithms. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1979, vol. 19, no. 1, pp. 8–19. doi: 10.1016/0041-5553(79)90062-4.
3. Danilin A.R. Order-optimal estimates of finite-dimensional approximations of solutions of ill-posed problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1985, vol. 25, no. 4. P. 102–106. doi: 10.1016/0041-5553(85)90152-1.
4. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. Berlin: Walter de Gruyter, 2002, 294 p., ISBN: 9783111826141. Original Russian text published in *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya*, Moscow, Nauka Publ., 1978, 206 p.
5. Tanana V.P., Sidikova A.I. On the guaranteed accuracy estimate of an approximate solution of one inverse problem of thermal diagnostics. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 2, pp. 238–252 (in Russian).
6. Ivanov V.K. The approximate solution of operator equations of the first kind. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, no. 6, pp. 197–205. doi: 10.1016/0041-5553(66)90171-6.
7. Vasin V.V. Relationship of several variational methods for the approximate solution of ill-posed problems. *Math. Notes*, 1970, vol. 7, pp. 161–165. doi: 10.1007/BF01093105.
8. Morozov V.A. Regularization of incorrectly posed problems and the choice of regularization parameter. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, vol. 6, no. 1, pp. 242–251. doi: 10.1016/0041-5553(66)90046-2.
9. Ivanov V.K., Korolyuk T.I. Error estimates for solutions of incorrectly posed linear problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1969, vol. 9, no. 1, pp. 35–49. doi: 10.1016/0041-5553(69)90005-6.

The paper was received by the Editorial Office on December 10, 2015.

Anna Ivanovna Sidikova, Cand. Sci. (Phys.-Math.) South Ural state university (national research university), Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: 7413604@mail.ru .

УДК 517.583

ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СИНУСА, СОДЕРЖАЩЕГО ТРИ ПЕРВЫХ ЧЛЕНА РАЗЛОЖЕНИЯ

А. А. Соловьев

В статье предлагается простой способ нахождения асимптотического разложения эллиптического синуса $z = \operatorname{sn}(u; k)$ по степеням $(k^2 - 1)$. В литературных источниках выписаны только первые два члена разложения. Предлагаемый метод позволяет найти последующие члены разложения. Недостатком метода является большой объем вычислений. Для остаточного члена $R(u, k)$ асимптотического представления, содержащего три первых члена разложения, верно предельное равенство

$$\lim_{z \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow 1} R(u, k) \frac{(1-z)^2}{(1-k^2)^3} \neq 0.$$

Основным результатом работы является оценка остаточного члена. Доказывается, что

$$|R(u, k)| \leq \operatorname{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \frac{(1-k^2)^3}{(1-z)^3}.$$

Ключевые слова: эллиптический синус, асимптотическое разложение, гиперболические функции.

A. A. Solov'ev. A bound for the remainder term in the asymptotic expansion of the elliptic sine containing the first three terms.

We propose a simple method for finding an asymptotic expansion of the elliptic sine $z = \operatorname{sn}(u; k)$ in powers of $k^2 - 1$. In the literature only the first two terms of the expansion have been written. The proposed method makes it possible to find subsequent terms of the expansion. The disadvantage of this method is its computational intensity. We prove that the remainder term $R(u, k)$ in the asymptotic expansion containing the first three terms of the expansion satisfies the limit equality

$$\lim_{z \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow 1} R(u, k) \frac{(1-z)^2}{(1-k^2)^3} \neq 0.$$

The main result of this paper is an estimate for the remainder term. We prove that

$$|R(u, k)| \leq \operatorname{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \frac{(1-k^2)^3}{(1-z)^3}.$$

Keywords: elliptic sine, asymptotic expansions, hyperbolic functions.

MSC: 33E05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-220-229

1. Введение

Задача нахождения асимптотики эллиптического синуса $z = \operatorname{sn}(u, k)$ при $k \rightarrow 1$ представляет интерес для исследователя, так как эта функция давно уже стала неотъемлемой частью современной математики и полная асимптотическая формула в виде ряда с указанием его общего члена до сих пор является нерешенной задачей. В справочниках по специальным функциям [1; 2] выписаны только два первых члена разложения. Тем не менее ни в одном из источников не указан метод их нахождения. Вопрос о построении последующих членов разложения и обосновании асимптотики остается открытым.

Напомним, что *эллиптическим интегралом I рода в форме Якоби* [3;4] называется функция

$$u = u(z; k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}},$$

где k — параметр, $0 < k < 1$, и рассматривается одна из ветвей корня в верхней t -плоскости. Эллиптический интеграл $u(z; k)$ конформно отображает верхнюю полуплоскость $D = \{\text{Im}z > 0\}$ на прямоугольник L с вершинами в точках $\{\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k'), -\mathbf{K}(k) + i\mathbf{K}(k'), -\mathbf{K}(k)\}$ на u -плоскости, где

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$$

— полный эллиптический интеграл и $k' = \sqrt{1-k^2}$ —дополнительный модуль.

Таким образом, в прямоугольнике L определена однозначная функция $z = \text{sn}(u; k)$, называемая эллиптическим синусом, обратная к функции $u(z; k)$, значения которой принадлежат полуплоскости D .

Требуется найти ее асимптотическое разложение при $k \rightarrow 1$ и исследовать его на равномерность по $u \in (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$.

В статье предлагается простой метод нахождения первых трех членов разложения функции $\text{sn}(u; k)$ по степеням $(k^2 - 1)$. Найденный подход позволяет получить оценку остаточного члена.

Ранее (см. [1;2]) был оценен остаточный член для асимптотического представления, содержащего первые два члена разложения

$$\text{sn}(u, k) = \tanh u - \frac{1}{4} \left(\tanh u - \frac{u}{\cosh^2 u} \right) (k^2 - 1) + R(u, k).$$

Было доказано, что вблизи $k = 1$ остаточный член $R(u, k)$ может принимать сколь угодно большие значения при $u \in (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$ и имеет место оценка

$$|R(u, k)| \leq \frac{(1 - k^2)^2}{\cosh^2 u (1 - z)^2}.$$

2. Асимптотическое разложение эллиптического синуса

Опишем формально метод нахождения членов асимптотического разложения эллиптического синуса по степеням $(k^2 - 1)$.

Иногда для удобства изложения вместо k^2 будем писать τ и наоборот. Разложим функцию $u(z; k)$ по формуле Тейлора по степеням $(\tau - 1)$:

$$u(z; k) = u(z; 1) + (\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 + \frac{1}{6}(\partial_\tau^3 u)(z; 1)(\tau - 1)^3 + \dots,$$

где через ∂_τ^m обозначена производная порядка m по переменной τ . Введем обозначения:

$$u^{(0)}(z) = u(z; 1) = \int_0^z \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}, \quad \text{тогда} \quad z = \tanh u^{(0)}(z).$$

На втором шаге разложим функцию $z = \tanh u^{(0)}$ в ряд Тейлора по степеням $(u^{(0)} - u)$:

$$z = \tanh u^{(0)}(z) = \tanh u + \partial_u \tanh u (u^{(0)} - u) + \frac{1}{2} \partial_u^2 \tanh u (u^{(0)} - u)^2 + \frac{1}{6} \partial_u^3 \tanh u (u^{(0)} - u)^3 + \dots$$

Заменяем $(u^{(0)} - u)$ разложением

$$-(u^{(0)} - u) = (\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 + \frac{1}{6}(\partial_\tau^3 u)(z; 1)(\tau - 1)^3 + \dots$$

и соберем коэффициенты при одинаковых степенях $(\tau - 1)$. Получим

$$z = \tanh u + \sum_{m \geq 1} (-1)^m \frac{1}{m!} (\partial_u^m \tanh u) ((\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 + \dots)^m.$$

Собирая выражения при одинаковых степенях $(\tau - 1)$, получим

$$z = \tanh u - (\partial_u \tanh u)(\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1) + \frac{1}{2} [- (\partial_u \tanh u)(\partial_\tau^2 u)(z; 1) + (\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(z; 1)] (k - 1)^2 + \dots$$

Переменную z в $(\partial_\tau u)^m(z; 1)$, $m = 1, 2, \dots$, заменим на $\tanh u^{(0)}$ и разложим функцию $\tanh u^{(0)}$ по степеням $(u^{(0)} - u)$.

Этот прием позволит выделить следующий член разложения функции $z = \operatorname{sn}(u; k)$ в ряд по степеням $(k^2 - 1)$. Указанным методом были найдены коэффициенты второго и третьего членов разложения.

3. Обоснование разложения эллиптического синуса

Предложенный метод получения последующих членов разложения позволяет оценить остаточные члены асимптотического представления разложения эллиптического синуса по степеням $(1 - k^2)$.

Теорема 1. *Имеет место разложение*

$$z = \operatorname{sn}(u; k) = u^{-1}(u; k) = \tanh u + \left(\frac{\tanh u}{4} - \frac{u}{4 \cosh^2 u} \right) (1 - k^2) - \left(\frac{1}{16} u^2 \frac{\sinh u}{\cosh^3 u} + \frac{9}{64} \frac{u}{\cosh^2 u} + \frac{11 \sinh u}{64 \cosh u} - \frac{1}{32} \sinh u \cosh u \right) (1 - k^2)^2 + R(u, k), \quad (3.1)$$

где $u \in (-\mathbf{K}(\mathbf{k}), \mathbf{K}(\mathbf{k}))$. Для остаточного члена имеет место предельное равенство

$$\lim_{z \rightarrow 1} \lim_{k \rightarrow 1} R(u, k) \frac{(1 - z)^2}{(1 - k^2)^3} \neq 0.$$

В частности, асимптотическое разложение не является равномерным по u на промежутке $(-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$ при $k \rightarrow 1$.

Доказательство. Будем считать, что z , $0 < z < 1$, фиксировано. Рассмотрим

$$u = u(z; k) = \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - \tau t^2}}.$$

Следуя предложенной схеме, на первом шаге разложим функцию $u = u(z; k)$ по степеням $(\tau - 1)$:

$$u(z; k) = u(z; 1) + (\partial_\tau^1 u)(z; 1)(\tau - 1) + \frac{1}{2} (\partial_\tau^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 + R_2(z, k)(\tau - 1)^3. \quad (3.2)$$

При $\tau \rightarrow 1$ имеем

$$u(z; k) \rightarrow \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z} = u(z; 1) = u^{(0)}(z),$$

в частности, $z \equiv \tanh u^{(0)}(z)$.

На втором шаге разложим функцию $\tanh u^{(0)}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме по степеням $(u^{(0)} - u)$:

$$z = \tanh u^{(0)}(z) = \tanh u + \frac{u^{(0)} - u}{\cosh^2 u} + \frac{(u^{(0)} - u)^2}{2!} \frac{\tanh u}{\cosh^2 u} + T_2(z, k)(u^{(0)} - u)^3. \quad (3.3)$$

В (3.3) заменим $(u^{(0)} - u)$ разложением

$$(u^{(0)} - u) = -(\partial_\tau^1 u)(z; 1)(\tau - 1) - \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 - R_2(z, k)(\tau - 1)^3.$$

Получим

$$z = \tanh u + \left(-(\partial_\tau^1 u)(z; 1)(\tau - 1) - \frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 - R_2(z, k)(\tau - 1)^3 \right) \frac{1}{\cosh^2 u} + \frac{1}{2} \left(-(\partial_\tau^1 u)(z; 1)(\tau - 1) - R_1(u, k)(\tau - 1)^2 \right)^2 \frac{\tanh u}{\cosh^2 u} + T_2(z, u)(u^{(0)} - u)^3.$$

Выделим слагаемые, входящие в остаточный член. Позднее к ним добавятся остаточные компоненты разложения $(\partial_\tau^1 u)(z, 1)$ и $(\partial_\tau^2 u)(z, 1)$ по степеням $(u^{(0)} - u)$. Имеем

$$\left[-R_2(z, k) \frac{1}{\cosh^2 u} + \frac{\tanh u}{\cosh^2 u} (\partial_\tau^1 u)(z; 1) R_1(u, k) + R_1^2(u, k) \frac{\tanh u}{\cosh^2 u} (\tau - 1) + T_2(u, k) \left(\frac{u^{(0)} - u}{\tau - 1} \right)^3 \right] (\tau - 1)^3. \quad (3.4)$$

Устремим τ к 1, $0 < \tau < 1$. Получим

$$R_2(z, k) = \frac{5}{16} \int_0^z \frac{t^6 dt}{\sqrt{1-t^2}(1-m_2 t^2)^{7/2}} \rightarrow \frac{5}{16} \int_0^z \frac{t^6 dt}{(1-t^2)^4} = \gamma(z) \frac{1}{(1-z)^3},$$

где $\tau < m_2 < 1$. Подобным образом находим

$$R_1(z, k) = \frac{3}{8} \int_0^z \frac{t^4 dt}{\sqrt{1-t^2}(1-m_1 t^2)^{5/2}} \rightarrow \frac{3}{8} \int_0^z \frac{t^4 dt}{(1-t^2)^3} = \frac{\beta(z)}{(1-z)^2},$$

где $\tau < m_1 < 1$. Наконец, $T_2(u, k)$ представим в виде

$$T_2(u, k) = -\frac{1}{(u^{(0)} - u)^3} \int_u^{u^{(0)}} (u^{(0)} - \nu)^2 \frac{P_2(\tanh \nu)}{\cosh^2 \nu} d\nu,$$

где $P_2(u) = 1 - 3 \tanh^2 u$. При $\tau \rightarrow 1$ имеем $u \rightarrow u^{(0)}$. По правилу Лопиталья находим, что

$$T_2(z, k) \rightarrow -\frac{1}{3} \frac{1}{\cosh^2 u^{(0)}} (1 - 3 \tanh^2 u^{(0)}) = -\frac{1}{3} (1 - z^2)(1 - 3z^2) = \delta(z)(1 - z).$$

Далее, воспользуемся равенством

$$(\partial_\tau^1 u)(z; 1) = \frac{1}{2} \int_0^z \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^2} = \alpha(z) \frac{1}{1-z} \text{ при } \tau \rightarrow 1,$$

и предельным соотношением при $\tau \rightarrow 1$

$$\frac{u^{(0)} - u}{1 - \tau} = \frac{1}{1 - \tau} \left[\int_0^z \frac{dt}{1 - t^2} - \int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2} \sqrt{1 - \tau t^2}} \right] \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^z \frac{t^2 dt}{(1 - t^2)^2} = \frac{\alpha(z)}{1 - z}. \quad (3.5)$$

В пределе при $\tau \rightarrow 1$ найдем значение выражения в скобках в (3.4):

$$\begin{aligned} & \left(-\gamma(z) \frac{1}{(1 - z)^3 \cosh^2 u^{(0)}} + \frac{\tanh u^{(0)}}{\cosh^2 u^{(0)}} \frac{\alpha(z)}{(1 - z)} \frac{\beta(z)}{(1 - z)^2} - \delta(z)(1 - z) \frac{\alpha^3(z)}{(1 - z)^3} \right) \\ &= \left(-\gamma(z) \frac{1 + z}{(1 - z)^2} + z(1 - z^2) \alpha(z) \frac{\beta(z)}{(1 - z)^3} - \delta(z) \alpha^3(z) \frac{1}{(1 - z)^2} \right) \\ &= \left[-\gamma(z)(1 + z) + z(1 + z) \alpha(z) \beta(z) - \delta(z) \alpha^3(z) \right] \frac{1}{(1 - z)^2}. \end{aligned}$$

Вычисляя пределы при $z \rightarrow 1$, например, с помощью правила Лопиталя, находим, что

$$\gamma(z) \rightarrow \frac{5}{3} \cdot 2^{-8}, \quad \beta(z) \rightarrow 3 \cdot 2^{-7}, \quad \delta(z) \rightarrow \frac{4}{3}, \quad \alpha(z) \rightarrow \frac{1}{8} \text{ при } z \rightarrow 1.$$

Таким образом, предел выражения в квадратных скобках равен

$$-\frac{5}{3} \cdot 2^{-7} + 3 \cdot 2^{-9} - \frac{1}{3} \cdot 2^{-7} \neq 0. \quad (3.6)$$

К ранее выделенным слагаемым остаточного члена добавятся остаточные слагаемые разложения по степеням $(u^{(0)} - u)$ выражений

$$\frac{1}{2} (\partial_\tau^1 u)^2(z; 1) \frac{\tanh u}{\cosh^2 u} (\tau - 1)^2 = I_1(z, \tau)$$

и

$$\left(-(\partial_\tau^1 u)(z; 1)(\tau - 1) + (\partial_\tau^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 \right) \frac{1}{\cosh^2 u} = I_2(z, \tau) + I_3(z, \tau).$$

Нас интересуют множители остаточных членов и их пределы при $\tau \rightarrow 1$.

Если $f(z)$ — функция вещественного переменного z , то применительно к $I_1(z, \tau)$ и $I_3(z, \tau)$ отношение

$$\frac{f(\tanh u^{(0)}) - f(\tanh u)}{\tau - 1}$$

перепишем в виде

$$\frac{f(\tanh u^{(0)}) - f(\tanh u)}{\tanh u^{(0)} - (\tanh u)} \cdot \frac{\tanh u^{(0)} - (\tanh u)}{u^{(0)} - u} \cdot \frac{u^{(0)} - u}{\tau - 1}.$$

Так как при $\tau \rightarrow 1$ верно соотношение $u \rightarrow u^{(0)}$, то в пределе получим

$$f'_z(\tanh u^{(0)}) \frac{1}{\cosh u^{(0)}} \frac{-\alpha(z)}{1 - z} = -f'_z(z) \alpha(z) (1 + z).$$

Для $I_1(z, \tau)$ возьмем $f(z) = \frac{1}{2} (\partial_\tau^1 u)^2(z; 1) \frac{\tanh u}{\cosh^2 u}$. Тогда

$$\begin{aligned} & -\lim_{z \rightarrow 1} f'_z(\tanh u^{(0)}) \alpha(z) (1 + z) (1 - z)^2 \\ &= -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{4} \frac{\tanh u^{(0)}}{\cosh^2 u^{(0)}} \left(\int_0^z \frac{t^2}{(1 - t^2)^2} dt \right) \frac{z^2}{(1 - z^2)^2} \alpha(z) (1 + z) (1 - z)^2 \end{aligned}$$

$$= -\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{2} z^3 \alpha^2(z) = -\frac{1}{2^7}. \quad (3.7)$$

Аналогично поступим с $I_3(z, \tau)$, взяв $f(z) = -\frac{1}{2}(\partial_\tau^2 u)(z; 1) \frac{1}{\cosh^2 u}$. Тогда

$$\frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{\cosh^2 u^{(0)}} \frac{z^4}{(1-z^2)^3} \alpha(z)(1+z)(1-z)^2 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^4}{(1+z)} \alpha(z) = \frac{1}{32}. \quad (3.8)$$

Наконец, рассмотрим $I_2(z, 1)$, взяв $f(z) = -(\partial_\tau^1 u)(z; 1) \frac{1}{\cosh^2 u}$. В этом случае потребуется слагаемое второго порядка относительно $(\tau - 1)$ разложения функции $f(\tanh u^{(0)})$. С этой целью найдем предел

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow 1} \frac{f(\tanh u^{(0)}) - f(\tanh u) - f'_z(\tanh u)(\tanh u^{(0)} - \tanh u)}{(\tau - 1)^2} \\ &= f''(\tanh u^{(0)}) \lim_{\tau \rightarrow 1} \left(\frac{\tanh u^{(0)} - \tanh u}{u^{(0)} - u} \right)^2 \left(\frac{u^{(0)} - u}{\tau - 1} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Так как

$$f''(z) = \frac{-z}{(1-z^2)^2} \frac{1+z^2}{1-z^2} \frac{1}{\cosh^2 u^{(0)}},$$

то в (3.9) при $\tau \rightarrow 1$ в пределе получим

$$-\frac{z}{(1-z^2)^2} \frac{1+z^2}{(1-z^2)} \left(\frac{1}{\cosh^2 u^{(0)}} \right)^3 \left(\frac{u^{(0)} - u}{\tau - 1} \right)^2 = -z(1+z^2) \left(\frac{\alpha(z)}{1-z} \right)^2.$$

Поэтому

$$-\lim_{z \rightarrow 1} (\partial_\tau^1 u)(z, 1) \frac{1}{\cosh^2 u} (1-z)^2 = -2 \frac{1}{64} = -\frac{1}{32}. \quad (3.10)$$

Таким образом, из (3.6)–(3.8) и (3.10) следует, что предел остаточного члена сначала по $\tau \rightarrow 1$ и затем по $z \rightarrow 1$ равен

$$-\frac{5}{3} \cdot 2^{-7} + 3 \cdot 2^{-9} - \frac{1}{3} \cdot 2^{-7} - 2^{-7} + 2^{-5} - 2^{-5} \neq 0.$$

Это доказывает, что разложение (3.1) не является равномерным по $u \in (-\mathbf{K}(k), \mathbf{K}(k))$ при $k \rightarrow 1$. Теорема доказана.

В следующей теореме получена оценка остаточного члена.

Теорема 2. В обозначениях предыдущей теоремы для остаточного члена $R(u, k)$ верна оценка

$$|R(u, k)| \leq \text{const} \frac{(1-k^2)^3}{\cosh^2 u (1-z)^3},$$

константа не зависит от z и k^2 .

Доказательство. Постоянные, не зависящие от z и k^2 , будем обозначать как const. Далее будем пользоваться доказанным ранее неравенством

$$u^{(0)} - u \leq \alpha(z) \frac{1-\tau}{1-z},$$

где $\alpha(z)$ — ограниченная функция. Как и в теореме 1, на первом шаге рассмотрим разложение

$$u(z; k) = u(z; 1) + (\partial_z u)(z; 1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}(\partial_z^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 + R_2(u, k)(\tau - 1)^3. \quad (3.11)$$

На втором шаге функцию $\tanh u^{(0)}$ разложим по степеням $(u^{(0)} - u)$:

$$z = \tanh u^{(0)} = \tanh u + (\partial_u \tanh u)(u^{(0)} - u) + \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(u^{(0)} - u)^2 + T_2(u, k)(u^{(0)} - u)^3. \quad (3.12)$$

Подставим (3.11) в (3.12). Получим

$$\begin{aligned} z = \tanh u - (\partial_u \tanh u) & \left[(\partial_z u)(z; 1)(\tau - 1) + \frac{1}{2}(\partial_z^2 u)(z; 1)(\tau - 1)^2 + R_2(u, k)(\tau - 1)^3 \right] \\ & + \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(u^{(0)} - u)^2 + T_2(u, k)(u^{(0)} - u)^3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Оценим вклад каждого слагаемого в остаточный член разложения $\operatorname{sn}(z; k)$ по степеням $(\tau - 1)$, начиная с последнего слагаемого.

Так как

$$\begin{aligned} T_2(u, k) &= \operatorname{const} \frac{1}{(u^{(0)} - u)^3} \int_u^{u^{(0)}} (u^{(0)} - \nu)^2 (\partial_u^3 \tanh \nu) d\nu \\ &= \operatorname{const} \frac{1}{(u^{(0)} - u)^3} \int_u^{u^{(0)}} (u^{(0)} - \nu)^2 \frac{P(\tanh \nu)}{\cosh^2 \nu} d\nu \leq \operatorname{const} \frac{1}{\cosh^2 u}, \end{aligned}$$

где $P(t)$ — многочлен второго порядка. Поэтому последнее слагаемое имеет оценку

$$T_2(u, k)(u^{(0)} - u)^3 \leq \operatorname{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \frac{(1 - \tau)^3}{(1 - z)^3}.$$

В (3.13) слагаемое $\frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(u^{(0)} - u)^2$ перепишем в виде суммы

$$\frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(z; 1)(\tau - 1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)[(u^{(0)} - u)^2 - (\partial_\tau u)^2(z; 1)(\tau - 1)^2]. \quad (3.14)$$

Последнее слагаемое в этой сумме представим в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)[(u^{(0)} - u) - (\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1)] [(u^{(0)} - u) + (\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1)] \\ &= \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(-R_1(u, k)(1 - \tau)^2)[(u^{(0)} - u) + (\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Как следует из предыдущей теоремы, для $R_1(u, k)$ верна оценка

$$|R_1(u, k)| \leq \frac{\beta(z)}{(1 - z)^2}.$$

Согласно ранее доказанному имеем

$$(u^{(0)} - u) \leq \operatorname{const} \frac{\alpha(z)}{1 - z}(1 - \tau), \quad (\partial_\tau u)(z; 1)(1 - \tau) \leq \operatorname{const} \frac{\alpha(z)}{1 - z}(1 - \tau), \quad |\partial_u^2 \tanh u| \leq \operatorname{const} \frac{1}{\cosh^2 u}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\partial_u^2 \tanh u| (u^{(0)} - u)^2 \\ & \leq \frac{1}{2} |\partial_u^2 \tanh u| (\partial_\tau u)^2(z; 1) (1 - \tau)^2 + \operatorname{const} \left(\frac{1}{\cosh^2 u} \frac{\beta(z)}{(1 - z)^2} (1 - \tau)^2 \frac{\alpha(z)}{1 - z} (1 - \tau) \right). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое не превосходит $\frac{\text{const}}{\cosh^2 u} \frac{(1-\tau)^3}{(1-z)^3}$. Оценим первое слагаемое в (3.14):

$$\frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(z; 1)(\tau - 1)^2 = \frac{1}{8}(\partial_u^2 \tanh u) \left(\frac{2z}{(1-z^2)} - \log \frac{1+z}{1-z} \right) (\tau - 1)^2.$$

При $z = \tanh u^{(0)}$ имеем $(\partial_\tau u)(\tanh u^{(0)}; 1) = \frac{1}{4}(2 \sinh u^{(0)} \cosh u^{(0)} - u^{(0)})$. Поэтому для производной $\partial_\xi[(\partial_\tau u)(\tanh \xi; 1)]$ верна оценка

$$|\partial_\xi[(\partial_\tau u)(\tanh \xi; 1)]| \leq \text{const}(\sinh^2 \xi).$$

По формуле Тейлора находим, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial_\xi^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(\tanh^{(0)}; 1)(\tau - 1)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u)(\partial_\tau u)^2(\tanh u; 1)(\tau - 1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_u^2 \tanh u) \partial_\xi (\partial_\tau u)^2(\tanh \xi; 1)(u^{(0)} - u)(\tau - 1)^2, \end{aligned}$$

где $u < \xi < u^{(0)}$. Для остаточного слагаемого верна оценка

$$\begin{aligned} \text{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \sinh^2 \xi \frac{\alpha(z)}{1-z} (1-\tau)^3 &\leq \text{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \sinh^2 u^{(0)} \frac{\alpha(z)}{1-z} (1-\tau)^3 \\ &\leq \text{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \frac{z^2}{(1-z^2)^2} \frac{(1-\tau)^3}{(1-z)^2} \leq \text{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \frac{(1-\tau)^3}{(1-z)^3}. \end{aligned}$$

Слагаемое $(\partial_u \tanh u)R_2(u, k)(1-\tau)^3$ не превосходит

$$\text{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \gamma(z) \frac{1}{(1-z)^3} (1-\tau)^3 \leq \text{const} \frac{1}{\cosh^2 u} \frac{(1-\tau)^3}{(1-z)^3}.$$

Оценим вклад в остаточный член второго слагаемого в квадратных скобках в (3.13)

$$\frac{1}{2}(\partial_u \tanh u)(\partial_\tau^2 u)(z; 1)(1-\tau)^2.$$

Имеем

$$(\partial_u^2 u)(\tanh u^{(0)}; 1) = \int_0^z \frac{t^4}{(1-t^2)^3} dt = \frac{2z(5z^2-3)}{(1-z^2)^2} + 3 \log \frac{1+z}{1-z} = I(z).$$

Так как $(1 - \tanh^2 u)^{-1} = \cosh^2 u$, то

$$\begin{aligned} I(\tanh u) &= 2 \sinh u \cosh u (2 \sinh^2 u - 3) + 6u \\ &= \sinh 2u (\cosh 2u - 4) + 6u = \left(\frac{1}{2} \sinh 4u - 4 \sinh 2u \right) + 6u. \end{aligned}$$

Производная $I(\tanh u)$ по переменной u равна

$$\begin{aligned} 2 \cosh 4u - 8 \cosh 2u + 6 &= 2(\cosh 4u - 1) - 8(\cosh 2u - 1) = 4 \sinh^2 2u - 16 \sinh^2 u \\ &= 16 \sinh^2 u \cosh^2 u - 16 \sinh^2 u = 16 \sinh^2 u (\cosh^2 u - 1) = 16 \sinh^2 u \sinh^2 u = 16 \sinh^4 u. \end{aligned}$$

Таким образом, $\partial_u((\partial_\tau^2 u)(z; 1)) = 16 \sinh^4 u$. Тогда

$$\begin{aligned} & \partial_u(\tanh u)(\partial_\tau^2 u)(z; 1)(1-\tau)^2 \\ &= \partial_u(\tanh u)(\partial_\tau^2 u)(\tanh u; 1)(1-\tau)^2 + 16 \partial_u(\tanh u)(\sinh^4(\xi))(1-\tau)^2(u^{(0)} - u), \end{aligned}$$

где $u < \xi < u^{(0)}$. Для последнего слагаемого верна оценка

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cosh^2 u} \sinh^3 \xi \cosh \xi (1 - \tau)^3 \left(\frac{u^{(0)} - u}{1 - \tau} \right) \\ & \leq \frac{\sinh^3 u^{(0)} \cosh u^{(0)}}{\cosh^2 u} \frac{\alpha(z)}{1 - z} (1 - \tau)^3 \leq \frac{\text{const}}{\cosh^2 u (1 - z)^3} (1 - \tau)^3. \end{aligned}$$

Оценим остаточную составляющую слагаемого $(\partial_u \tanh u)(\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1)$ в (3.13). Имеем

$$\begin{aligned} & (\partial_u \tanh u)(\partial_\tau u)(z; 1)(\tau - 1) \\ & = \frac{\tau - 1}{\cosh^2 u} \frac{1}{2} \int_0^z \frac{t^2}{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} (\sinh u^{(0)} \cosh u^{(0)} - u^{(0)}) \frac{\tau - 1}{\cosh^2 u} \\ & = \frac{1}{2} (\sinh u \cosh u - u) \frac{\tau - 1}{\cosh^2 u} + \sinh^2 u \frac{\tau - 1}{\cosh^2 u} (u^{(0)} - u) + \sinh \xi \cosh \xi \frac{\tau - 1}{\cosh^2 u} (u^{(0)} - u)^2, \end{aligned}$$

где $u < \xi < u^{(0)}$. Последнее слагаемое, обозначим его через $U_2(\xi, \eta)$, оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} |U_2(\xi, \eta)| & \leq \text{const} \tanh \xi \cosh^2 \xi \frac{(1 - \tau)^3}{\cosh^2 u} \frac{(u^{(0)} - u)^2}{(1 - \tau)^2} \\ & \leq \frac{z}{1 - z^2} \frac{\alpha^2(z)}{(1 - z)^2} \frac{(1 - \tau)^3}{\cosh^2 u} \leq \text{const} \frac{(1 - \tau)^3}{\cosh^2 u} \frac{1}{(1 - z)^3}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует утверждение теоремы.

4. Заключение

В данной работе исследовалось асимптотическое поведение эллиптического синуса при $k \rightarrow 1$. Ранее были найдены два первых члена разложения. Их можно найти в справочнике [1] и статье [2] (без указания метода вычисления). В работе выписан третий член разложения. Справедливости ради следует отметить, что указанные члены разложения могут быть получены в пакете Mathematica.

Доказано, что на промежутке $(-\mathbf{K}(\mathbf{k}), \mathbf{K}(\mathbf{k}))$ найденное асимптотическое разложение не является равномерным по u . Основным результатом работы является оценка остаточного члена

$$\frac{\text{const} (1 - k^2)^3}{\cosh^2 u (1 - z)^3}$$

с константой, не зависящей от z и k . Из предельного равенства, доказанного в теореме 1, следует, что оценка не может быть улучшена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abramowitz M., Stegun I.A.** Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Washington: Tenth Printing, December 1972. 1046 p.
2. **Арефьева И.Я. Волович И.В. Писковский Е.В.** Скатывание в модели Хиггса и эллиптические функции // Теорет. мат. физика. 2012. Т. 172, № 1. Р. 138–154. doi: 10.4213/tmf6925.
3. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т. 1. 486 с.
4. **Ахиезер Н.И.** Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.

Соловьев Александр Артемович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Челябинский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: alsol@csu.ru

Поступила 6.12.2016

REFERENCES

1. Abramowitz M., Stegun I.A. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington: Tenth Printing, December 1972, 1046 p.
2. Arefeva I.Ya., Volovich I.V., and Piskovskiy E.V. Rolling in the Higgs model and elliptic functions. *Theor. Math. Phys.*, 2012, vol. 172, no. 1, pp. 1001–1016. doi:10.1007/s11232-012-0091-9.
3. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funktsii* [The theory of analytical functions]. M.: Nauka, 1967, 486 p.
4. Akhiezer N.I. *Elements of the theory of elliptic functions*. Providence: AMS, 1990. Ser. Thranslations of Mathematical Monographs, vol. 79, 237 p. Original Russian text published in *Elementy teorii ellipticheskikh funktsii*, M.: Nauka, 1970, 304 c. ISBN-10: 0821809008.

The paper was received by the Editorial Office on December 12, 2016.

Aleksandr Artemovich Solov'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: alsol@csu.ru.

УДК 517.948

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СРАВНЕНИЮ ОЦЕНОК ПОГРЕШНОСТИ В ТОЧКЕ И НА МНОЖЕСТВЕ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

В. П. Танана

При нахождении приближенного решения некорректно поставленных задач методом регуляризации всегда возникает вопрос об оценках возникающей погрешности. Наиболее распространены равномерные оценки на всем классе корректности, которые выражаются через модуль непрерывности обратного оператора на этом классе. Значительно менее изучены локальные оценки погрешности, так называемые оценки погрешности в точке. Так как в реальных некорректных задачах искомое решение единственно, то, получая оценку погрешности на всем классе корректности, значительно загроубляют истинную оценку погрешности полученного приближенного решения. В настоящей статье для специального класса некорректных задач исследуется вопрос о том, насколько оценка погрешности на классе корректности может быть больше оценки погрешности в точке. Предполагая, что точное решение является кусочно-гладкой функцией, доказано, что оценка погрешности в точке является величиной бесконечно малой по сравнению с точной оценкой на классе корректности.

Ключевые слова: некорректная задача, регуляризация, оценка погрешности в точке, оценка погрешности на множестве.

V. P. Tanana. One approach to the comparison of error bounds at a point and on a set in the solution of ill-posed problems.

The approximate solution of ill-posed problems by the regularization method always involves the issue of evaluating the error. It is a common practice to use uniform bounds on the whole class of well-posedness in terms of the modulus of continuity of the inverse operator on this class. Local error bounds, which are also called error bounds at a point, have been studied much less. Since the solution of a real-life ill-posed problem is unique, an error bound obtained on the whole class of well-posedness roughens to a great extent the true error bound. In the present paper we study the difference between error bounds on the class of well-posedness and error bounds at a point for a special class of ill-posed problems. Assuming that the exact solution is a piecewise smooth function, we prove that an error bound at a point is infinitely smaller than the exact bound on the class of well-posedness.

Keywords: ill-posed problem, regularization, evaluation of the error at a point, evaluation of the error on a set.

MSC: 65J20

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-230-238

Введение

Как правило, в постановке некорректной задачи требуется существование единственного решения, отвечающего точному значению правой части. При этом нужно, используя исходные данные задачи, определить некоторое приближение этого решения и оценить его отклонение от точного. Трудность такой оценки вызвана неопределенностью точного решения задачи.

Для решения этой проблемы в исходные данные задачи включали класс корректности, содержащий точное решение. Затем оценка погрешности определялась на этом классе [1]. При этом всегда стояла проблема сравнения оценок погрешности на классе корректности и в точке. В настоящей статье сделано такое сравнение при условии, что точное решение задачи является образом Фурье кусочно-гладкой функции.

Для специального класса некорректных задач доказано, что погрешность в точке является величиной бесконечно малой по сравнению с оценкой на классе корректности.

1. Постановка задачи

Пусть $L_2(-\infty, \infty)$ — комплексное пространство, а F — расширение на пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ преобразования Фурье.

Элемент $v(x) \in V$ тогда и только тогда, когда

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) + \sum_{j=1}^m \psi_j(x) + h(x) \quad x \in \mathbb{R},$$

где

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} a_i(x^2 - x_i^2), & |x| \leq x_i, \\ 0, & |x| > x_i, \end{cases} \quad \psi_j(x) = \begin{cases} b_j \sin \frac{\pi x}{l_j}, & |x| \leq l_j, \\ 0, & |x| > l_j, \end{cases}$$

$a_i, b_j \neq 0, \quad x_i, l_j > 0$ и $h(x) \in W_2^2(-\infty, \infty)$.

Предположим, что $Z \subset L_2(-\infty, \infty)$ и $Z = F[V]$, а оператор T определим формулой

$$Tf(\xi) = t(\xi)f(\xi), \quad f(\xi) \in D(T), \tag{1.1}$$

где

$$D(T) = \{f(\xi) : f(\xi) \in L_2(-\infty, \infty), t(\xi)f(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)\}.$$

Поставим задачу вычисления значений Tf оператора T , определяемого формулой (1.1) в точке $f \in D(T)$,

$$Tf = u. \tag{1.2}$$

Предположим, что при $f = f_0$ элемент $u_0 = Tf_0 \in Z$, но f_0 неизвестен, а вместо него даны $f_\delta \in L_2(-\infty, \infty)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \leq \delta. \tag{1.3}$$

Требуется по f_δ, δ и Z определить приближенное решение $u_\delta \in L_2(-\infty, \infty)$ задачи (1.1)–(1.3) и оценить уклонение $\|u_\delta - u_0\|_{L_2}$.

2. Нелинейный метод проекционной регуляризации

В нелинейном методе проекционной регуляризации [2; 3] используется регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha f(\xi) = \begin{cases} Tf(\xi), & |\xi| \leq \alpha, \\ 0, & |\xi| > \alpha. \end{cases} \tag{2.1}$$

Используя (2.1), определим семейство регуляризованных решений $\{u_\delta^\alpha(\xi) : \alpha > 0\}$ формулой

$$u_\delta^\alpha(\xi) = T_\alpha f_\delta(\xi), \tag{2.2}$$

а в (2.2) параметр регуляризации $\alpha(f_\delta, \delta)$, следуя формуле (2.3) работы [3], определим из уравнения

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} |f_\delta(\xi)|^2 d\xi + \int_{\alpha}^{\infty} |f_\delta(\xi)|^2 d\xi = 16\delta^2. \tag{2.3}$$

Наложим некоторые условия на оператор T . Предположим, что

$$t(\xi) \in C(-\infty, \infty), \quad t(-\xi) = t(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t(\xi) \rightarrow \infty \text{ при } \xi \rightarrow \infty$$

и

$$t(\xi) \text{ строго возрастает на } [0, \infty), \quad t(0) > 0. \quad (2.4)$$

В [4, лемма 1] доказано, что при условиях (2.4) и $\|f_\delta(\xi)\| > 4\delta$ уравнение (2.3) имеет решение $\alpha(f_\delta, \delta)$, которое однозначно определяет элемент $u_\delta(\xi)$:

$$u_\delta(\xi) = u_\delta^{\alpha(f_\delta, \delta)}(\xi).$$

Таким образом, формулы (2.2) и (2.3) определяют отображение пространства $L_2(-\infty, \infty)$ в себя

$$T_\delta f(\xi) = \begin{cases} T_{\alpha(f_\delta, \delta)} f(\xi), & \|f(\xi)\| > 4\delta, \\ 0, & \|f(\xi)\| \leq 4\delta. \end{cases} \quad (2.5)$$

Из теоремы 5, доказанной в [4], следует, что при выполнении условий (2.4) на оператор T отображение T_δ , определяемое формулой (2.5), непрерывно на пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

О п р е д е л е н и е. Семейство $\{T_\delta: 0 < \delta \leq \delta_0\}$ операторов T_δ , непрерывно отображающих пространство $L_2(-\infty, \infty)$ в $L_2(-\infty, \infty)$, будем называть методом решения задачи (1.2), (1.3), если для любого $u_0 \in Z$

$$\sup \{ \|T_\delta f_\delta - u_0\|: f_\delta \in L_2(-\infty, \infty), \|f_\delta - T^{-1}u_0\| \leq \delta \} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

В дальнейшем будет доказано, что семейство операторов $\{T_\delta: 0 < \delta \leq \delta_0\}$, определенное формулой (2.5), является методом решения задачи (1.2), (1.3), а величину

$$\Delta_\delta(u_0) = \sup \{ \|T_\delta f_\delta - T f_0\|: f_\delta \in L_2(-\infty, \infty), \|f_\delta - f_0\| \leq \delta \},$$

где $u_0 = T f_0$ назовем погрешностью $\Delta_\delta(u_0)$ метода $\{T_\delta: 0 < \delta \leq \delta_0\}$ в точке $u_0 \in Z$.

3. Об оценке погрешности нелинейного метода проекционной регуляризации на классе M_r

Оператор G , отображающий пространство $L_2(-\infty, \infty)$ в $L_2(-\infty, \infty)$, определим формулой

$$Gu(\xi) = g(\xi)u(\xi), \quad u(\xi) \in D(G), \quad (3.1)$$

где

$$D(G) = \{u(\xi): u(\xi) \in L_2(-\infty, \infty), g(\xi)u(\xi) \in L_2(-\infty, \infty)\}.$$

Предположим, что функция $g(\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} g(\xi) \in C(-\infty, \infty), \quad g(-\xi) = g(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad g(\xi) \rightarrow \infty \text{ при } \xi \rightarrow \infty; \\ g(0) > 0 \text{ и } g(\xi) \text{ возрастает на } [0, \infty). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Пусть

$$M_r = \{u: u \in R(T) \cap D(G), \|Gu\| \leq r\}.$$

Тогда погрешность Δ_δ метода $\{T_\delta: 0 < \delta \leq \delta_0\}$ на множестве M_r определим формулой

$$\Delta_\delta = \sup \{ \|T_\delta f_\delta - T f_0\|: T f_0 \in M_r, \|f_\delta - f_0\| \leq \delta \}. \quad (3.3)$$

Обозначим через $\omega(\delta, r)$ функцию, определяемую формулой

$$\omega(\delta, r) = \sup \{ \|u(\xi)\| : u(\xi) \in M_r, \|T^{-1}u(\xi)\| \leq \delta \}, \quad (3.4)$$

и назовем ее модулем непрерывности в нуле оператора T на множестве $T^{-1}(M_r)$.

Из [5, лемма 2.1] следует, что если $\alpha(\delta, r)$ является решением уравнения

$$t(\alpha)g(\alpha) = \frac{r}{\delta}, \quad \alpha > 0, \quad (3.5)$$

а функции $t(\alpha)$ и $g(\alpha)$ удовлетворяют условиям (2.4) и (3.2) соответственно, то для функции, определенной (3.4), справедливо равенство

$$\omega(\delta, r) = \frac{r}{g[\alpha(\delta, r)]}. \quad (3.6)$$

Кроме того, из лемм 1.3 и 1.4, приведенных в работе [5], следует, что погрешность Δ_δ на множестве M_r , определенная (3.3), удовлетворяет соотношению

$$\Delta_\delta \geq \omega(\delta, r). \quad (3.7)$$

Сделаем еще одно полезное замечание относительно принадлежности элемента $u(\xi)$ множеству M_r . Из (3.1) и (3.2) следует, что $u(\xi) \in M_r$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(\xi)|u(\xi)|^2 d\xi \leq r^2. \quad (3.8)$$

В теореме 1 из [6] говорится, что если функции $t(\xi)$ и $g(\xi)$ удовлетворяют условиям (2.4) и (3.2), соответственно, то

$$\Delta_\delta \leq \frac{7r}{g[\alpha(\delta, r)]}, \quad (3.9)$$

где $\alpha(\delta, r)$ — решение уравнения (3.5).

4. О связи функций $g(\xi)$ и $\omega(\delta, r)$

Пусть $g_1(\xi)$ и $g_2(\xi)$ удовлетворяют условию (3.2), а

$$\frac{g_1(\xi)}{g_2(\xi)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.1)$$

Обозначим через $\omega^1(\delta, r_1)$ модуль непрерывности, порожденный функцией $g_1(\xi)$ и через $\omega^2(\delta, r_2)$ — порожденный функцией $g_2(\xi)$.

Приведем пример, иллюстрирующий, что условие (4.1) не влечет

$$\frac{\omega^2(\delta, r_2)}{\omega^1(\delta, r_1)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Пусть $t_1(\xi) = t_2(\xi) = \xi$, $r_1 = r_2 = 1$; $\xi g_1(\xi) = e^\xi$, $\xi g_2(\xi) = e^{2\xi}$.

Тогда из (3.5) следует, что $\alpha_1(\delta, 1) = -\ln^{-1} \delta$, $\alpha_2(\delta, 1) = -\frac{1}{2} \ln^{-1} \delta$.

Из (3.6) следует, что $\omega^1(\delta, 1) = \delta \ln \frac{1}{\delta}$, $\omega^2(\delta, 1) = \frac{\delta}{2} \ln \frac{1}{\delta}$.

Таким образом, в нашем примере функции $g_1(\xi)$ и $g_2(\xi)$ удовлетворяют соотношению (4.1), а для любого $\delta > 0$

$$\frac{\omega^2(\delta, 1)}{\omega^1(\delta, 1)} = \frac{1}{2}.$$

В лемме 6 работы [2] сформулированы достаточные условия, при выполнении которых соотношение (4.1) влечет (4.2).

Лемма 1. Если для любого $k > 0$ существуют d_1 , d_2 и $\xi_0 > 0$ такие, что для любого ξ такого, что $|\xi| > \xi_0$,

$$d_1 \leq \frac{g_1(\xi)}{g_1(k\xi)} \leq d_2,$$

а функция $g_2(\xi)$ удовлетворяет условию (4.1), то

$$\frac{\omega^2(\delta, r_2)}{\omega^1(\delta, r_1)} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство приведено в лемме 6 работы [2].

5. Сравнения оценок погрешностей $\Delta_\delta(u_0)$ в точке u_0 и Δ_δ на множестве M_r

Для сравнения оценок погрешностей $\Delta_\delta(u_0)$ в точке $u_0(\xi) \in Z$ и Δ_δ на множестве M_r для метода $\{T_\delta: 0 < \delta \leq \delta_0\}$, определенного формулой (2.5), введем условие

$$\{u_1(x), u_2(x)\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} nM_r, \quad (5.1)$$

где

$$u_1(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{\xi^2} \left[\cos \xi - \frac{\sin \xi}{\xi} \right], \quad (5.2)$$

а

$$u_2(\xi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi^2 - \pi^2}. \quad (5.3)$$

Лемма 2. Если функция $g(\xi)$, определяющая множество M_r , удовлетворяет условиям (3.2) и (5.1), то

$$\int_0^{\infty} \frac{g^2(\xi)}{1 + \xi^4} d\xi < \infty.$$

Доказательство. Из (5.2) следует, что при $\xi > \frac{4}{\sqrt{2}}$ и $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \xi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 3, 4, \dots$, $|u_1(\xi)| \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi^2}$. Откуда при $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \xi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k = 3, 4, \dots$, $|u_1(\xi)| \geq \frac{1}{2\xi^2}$.

Из (5.1) следует существование n_0 такого, что $u_1(\xi) \in M_{n_0 r}$, а из (3.8) следует, что

$$\sum_{k=3}^{\infty} \int_{-\frac{\pi}{4} + \pi k}^{\frac{\pi}{4} + \pi k} \frac{g^2(\xi)}{1 + \xi^4} d\xi < \infty.$$

Теперь перейдем к функции $u_2(\xi)$.

Из (5.3) следует, что если $\xi \geq 2\pi$ и $\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \xi \leq \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k = 2, 3, \dots$, то $|u_2(\xi)| \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{3} \frac{1}{\xi^2}$.

Тогда из (3.8) вытекает, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{4} + \pi k}^{\frac{3\pi}{4} + \pi k} \frac{g^2(\xi)}{1 + \xi^4} d\xi < \infty.$$

Из доказанного выше следует, что $\int_0^{\infty} \frac{g^2(\xi)}{1 + \xi^4} d\xi < \infty$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 3. Если выполнено условие (5.1) и $\frac{g^2(\xi)}{1 + \xi^4}$ убывает на $[0, \infty)$, то существует функция $g_1(\xi)$, удовлетворяющая (3.2), такая, что

$$\int_0^\infty \frac{g_1^2(\xi)}{1 + \xi^4} d\xi < \infty \quad \text{и} \quad \frac{g(\xi)}{g_1(\xi)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Так как функция $\frac{g^2(\xi)}{1 + \xi^4}$ убывает на $[0, \infty)$, то из того, что $\int_0^\infty \frac{g^2(\xi)}{1 + \xi^4} d\xi < \infty$, следует $\sum_{n=0}^\infty \frac{g^2(n)}{1 + n^4} < \infty$.

Обозначим выражение $\frac{g^2(n)}{1 + n^4}$ через a_n .

Тогда

$$\sum_{n=0}^\infty a_n < \infty. \tag{5.4}$$

Если положим

$$b_n = \sqrt{\sum_{k=n}^\infty a_k} - \sqrt{\sum_{k=n+1}^\infty a_k}, \tag{5.5}$$

то из (5.4) и (5.5) будет следовать, что

$$\sum_{n=0}^\infty b_n < \infty \tag{5.6}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0. \tag{5.7}$$

Из (3.2), (5.7) и того, что для любого n $a_n > 0$, следует существование N такого, что для любого $n \geq N$

$$a_n \leq b_n. \tag{5.8}$$

Из (5.8) следует, что для любого $n \geq N$

$$a_n(1 + n^4) \leq b_n(1 + n^4). \tag{5.9}$$

Так как для любого n

$$g(n) = a_n(1 + n^4), \tag{5.10}$$

то из (5.10) вытекает, что последовательность $\{a_n(1 + n^4)\}$ возрастает и

$$a_n(1 + n^4) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \tag{5.11}$$

Из (5.9) и (5.11) следует, что

$$b_n(1 + n^4) \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \tag{5.12}$$

Теперь проверим возрастание последовательности $\{b_n(1+n^4)\}$:

$$[1+(n+1)^4]b_{n+1} = \frac{[1+(n+1)^4]a_{n+1}}{\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k}}, \quad (5.13)$$

$$(1+n^4)b_n = \frac{(1+n^4)a_n}{\sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}}. \quad (5.14)$$

Так как для любого n $(1+n^4)a_n \leq [1+(n+1)^4]a_{n+1}$, а

$$\sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+2}^{\infty} a_k} < \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} a_k} + \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k},$$

то из (5.13) и (5.14) вытекает, что $(1+n^4)b_n \leq [1+(n+1)^4]b_{n+1}$.

Далее последовательность $\{(1+n^4)b_n\}$ четным образом, кусочно-линейно продолжим до функции $g_1(\xi) \in C(-\infty, \infty)$ такой, что $g_1(0) > 0$ и для любого n $g_1(n) = (1+n^4)b_n$.

Ввиду соотношения (5.6) следует утверждение леммы.

Лемма 4. Если функция $g(\xi)$ удовлетворяет условиям (3.2) и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4} d\xi < \infty,$$

а множество M_1 порождено этой функцией, то для любой функции $u_0(\xi) \in Z$ следует, что

$$u_0(\xi) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} nM_1.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2.

Теорема. Если выполнены условия лемм 1–3, то для любой функции $u_0(\xi) \in Z$ и любой функции $g(\xi)$, удовлетворяющей условию (3.2) и определяющей множество M_r , справедливо соотношение

$$\frac{\Delta_\delta(u_0)}{\Delta_\delta} \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0.$$

Доказательство. Так как $u_0(\xi) \in Z$, а

$$\int_0^{\infty} \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4} d\xi < \infty, \quad (5.15)$$

то на основании леммы 4 существует $r > 0$ такое, что $u_0(\xi) \in M_r$, где M_r определено функцией $g(\xi)$.

Из (5.12) и (5.15) на основании леммы 3 следует существование функции $g_1(\xi)$, удовлетворяющей (3.2), такой, что $\frac{g(\xi)}{g_1(\xi)} \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, а

$$\int_0^{\infty} \frac{g_1^2(\xi)}{1+\xi^4} d\xi < \infty. \quad (5.16)$$

Из (5.16) следует существование числа r_1 такого, что

$$u_0(\xi) \in M_{r_1}^1, \tag{5.17}$$

где

$$M_{r_1}^1 = \left\{ u(\xi) : u(\xi) \in L_2(-\infty, \infty), \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(\xi) |u(\xi)|^2 d\xi \leq r_1^2 \right\}. \tag{5.18}$$

Из (5.17) и (5.18) вытекает, что

$$\Delta_\delta(u_0) \leq \Delta_\delta^1, \tag{5.19}$$

где

$$\Delta_\delta^1 = \sup\{\|T_\delta f_\delta - T f_0\| : T f_0 \in M_{r_1}^1, \|f_\delta - f_0\| \leq \delta\}. \tag{5.20}$$

Из (3.4)–(3.6), (3.9), (5.18) и (5.20) получаем, что

$$\Delta_\delta^1 \leq 7 \bar{\omega}(\delta, r_1), \tag{5.21}$$

где

$$\bar{\omega}(\delta, r_1) = \sup\{\|T f\| : T f \in M_{r_1}^1, \|f\| \leq \delta\}. \tag{5.22}$$

Из леммы 6, доказанной в [2], и леммы 3 следует, что

$$\frac{\bar{\omega}(\delta, r_1)}{\omega(\delta, r)} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0. \tag{5.23}$$

Так как $u_0 \in M_{r_1}^1$, то из (3.6), (3.9) и (5.19) следует, что

$$\Delta_\delta(u_0) \leq 7 \bar{\omega}(\delta, r_1). \tag{5.24}$$

Из (3.7) вытекает, что

$$\Delta_\delta \geq \omega(\delta, r). \tag{5.25}$$

Из (5.21)–(5.25) следует, что

$$\frac{\Delta_\delta(u_0)}{\Delta_\delta} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Тем самым теорема доказана.

Заключение. В настоящей статье рассмотрено приближенное решение нелинейным методом проекционной регуляризации специального класса некорректных задач. В предположение, что точное решение является образом Фурье кусочно-гладкой функции, доказано, что оценка погрешности в точке является величиной бесконечно малой по сравнению с оценкой на классе корректности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
2. **Танана В.П.** О новом подходе к оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 4. С. 150–163.
3. **Танана В.П., Бредихина А.Б., Камалтдинова Т.С.** Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 281–288.
4. **Танана В.П., Япарова Н.М.** Об оптимальном по порядку методе решения условно-корректных задач // Сиб. журн. вычисл. математики. 2006. Т. 9, № 4. С. 353–368.
5. **Танана V.P., Rudakova T.N.** The optimum of the M.M. Lavrent'ev method // *Inverse Ill-Posed Problems*. 2011. V.18, pp. 935–944. doi: 10.1515/JIP.2011.012.
6. **Бредихина А.Б.** Нелинейный метод проекционной регуляризации // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. №37 (254). Р. 4–10.

Танана Виталий Павлович

Поступила 10.11.2015

д-р физ.-мат. наук, профессор

зав. кафедрой вычислительной математики

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

e-mail: tvpa@susu.ac.ru

REFERENCES

1. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications*. Utrecht: VSP, 2002, 281 p.
2. Tanana V.P. On a new approach to error estimation for methods for solving ill-posed problems. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2002, vol. 5, no. 4, pp. 150–163 (in Russian).
3. Tanana V.P., Bredikhina A.B., Kamaltdinova T.S. On an error estimate for an approximate solution for an inverse problem in the class of piecewise smooth functions. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2012, vol. 18, no. 1, pp. 281–288 (in Russian).
4. Tanana V.P., Yaparova N.M. The optimum in order method of solving conditionally-correct problems. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2006, vol. 9, no. 4, pp. 353–368 (in Russian).
5. Tanana V.P., Rudakova T.N. The optimum of the M.M. Lavrent'ev method. *Inverse Ill-Posed Problems*, 2011, vol. 18, pp. 935–944. doi: 10.1515/JIP.2011.012.
6. Bredikhina A.B. The nonlinear projection regularization method. *Vestnik Yuzhno Ural'skogo Gos. Universiteta. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2011, no. 10, pp. 4–11 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on November 10, 2015.

Vitalii Pavlovich Tanana, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., South Ural State University (national research university), Chelyabinsk, 454080 Russia e-mail: tvpa@susu.ac.ru.

УДК 517.955.8

**ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ПОГРАНФУНКЦИЙ
ДЛЯ БИСИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ В КРУГЕ****Д. А. Турсунов**

Целью исследования является развитие асимптотического метода пограничных функций. Работа посвящена построению полных асимптотических разложений решений бисингулярных краевых задач для линейного неоднородного эллиптического уравнения второго порядка. Особенности уравнения заключаются в присутствии малого параметра при операторе Лапласа и в том, что соответствующее невозмущенное (предельное) уравнение имеет особенности на границе и внутри круга одновременно. Бисингулярные задачи Дирихле, Неймана и Робэна исследуются в круге. Полное асимптотическое разложение решения бисингулярных задач строится обобщенным методом пограничных функций. Предлагаемый обобщенный метод пограничных функций отличается от метода согласования тем, что нарастающие особенности внешнего разложения фактически из него убираются и с помощью вспомогательных асимптотических рядов полностью вносятся во внутренние разложения. Полученные решения являются асимптотическими в смысле Эрдей. Асимптотические ряды также представляют собой ряды Пуизэ. Причем главные члены асимптотических разложений решений имеют отрицательные дробные степени по малому параметру. Полученные асимптотические разложения решений краевых задач обоснованы принципом максимума.

Ключевые слова: асимптотическое разложение решения, бисингулярная задача, эллиптическое уравнение второго порядка, модифицированные функции Бесселя, задача Дирихле, задача Неймана, задача Робэна, обобщенный метод погранфункций, малый параметр, принцип максимума.

D. A. Tursunov. The generalized boundary function method for bisingular problems in a disk.

The aim of the research is the development of the asymptotic method of boundary functions. This work is devoted to constructing complete asymptotic expansions of the solutions of boundary value problems for a bisingular inhomogeneous linear second-order elliptic equation. The equation has the following singularities: there is a small parameter at the Laplace operator and the corresponding unperturbed (limit) equation has singularities both at the boundary of the disk and inside it. Bisingular Dirichlet, Neumann and Robin problems are studied in the disk. Complete asymptotic expansions of the solutions of the bisingular problems are constructed by the generalized method of boundary functions, which differs from the matching method in that the growing singularities of the outer expansion are actually removed from it and included in the inner expansions with the help of auxiliary asymptotic series. The resulting solutions are asymptotic in the sense of Erdelyi, and the asymptotic expansions are Puiseux series. The leading terms of the asymptotic expansions of the solutions are negative fractional powers of the small parameter. The obtained asymptotic expansions of the solutions of the boundary value problems are justified by means of the maximum principle.

Keywords: asymptotic expansion of the solution, bisingular problem, second-order elliptic equation, modified Bessel functions, Dirichlet problem, Neumann problem, Robin problem, generalized boundary function method, small parameter, maximum principle.

MSC: 35J15, 35J25, 35B25, 35B40, 35C20

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-239-249

1. Введение

Краевые задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных занимают в математике особое место. К ним непосредственно сводятся многие задачи естествознания. Различные задачи для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных исследовали многие авторы, и библиография по этому вопросу обширна и достаточно известна. Однако в последнее время внимание исследователей стали привлекать так называемые бисингулярные задачи, в которых одна особенность связана с сингулярной зависимостью решения от малого параметра, а другая заключается в том, что соответствующее невозмущенное уравнение имеет негладкое решение [1–3].

В работах [1;4–6] и в цитируемых в них работах методом согласования исследованы асимптотические поведения решений различных классов бисингулярных задач. А в [7;8] с помощью обобщенного метода пограничных функций были рассмотрены различные бисингулярные задачи Дирихле. Мы продолжаем исследование бисингулярных задач с помощью обобщенного метода пограничных функций.

В данной работе доказывается применимость данного метода к задачам Неймана и Робэна и обобщается результат работы [7].

2. Постановка задачи

Исследуем задачи, порожденные уравнением

$$\varepsilon \Delta u_\varepsilon(\rho, \varphi) - (1 - \rho)^n (\rho - \alpha)^{2m} p(\rho, \varphi) u_\varepsilon(\rho, \varphi) = f_\varepsilon(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad (1)$$

и одним из граничных условий вида

$$u_\varepsilon(1, \varphi) = \psi_{1,\varepsilon}(\varphi), \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon(1, \varphi)}{\partial \rho} = \psi_{2,\varepsilon}(\varphi), \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon(1, \varphi)}{\partial \rho} + h(\varphi) u_\varepsilon(1, \varphi) = \psi_{3,\varepsilon}(\varphi). \quad (4)$$

Здесь $u_\varepsilon(\rho, \varphi)$ — искомая функция; $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $0 < \alpha < 1$, $n, m \in \mathbb{N}$; $\psi_\varepsilon(\varphi)$, $f_\varepsilon(\rho, \varphi)$, $p(\rho, \varphi)$ — заданные функции;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\rho \partial \rho} + \frac{\partial^2}{\rho^2 \partial \varphi^2}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат (ρ, φ) ;

$D = \{(\rho, \varphi) \mid 0 < \rho < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, $p(\rho, \varphi) > 0$, $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$, $p \in C^\infty(\bar{D})$;

$h(\varphi) \leq 0$, $h \in C^\infty[0, 2\pi]$;

$\psi_{j,\varepsilon}(\varphi) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \psi_{j,k}(\varphi)$, $\psi_{j,k} \in C^\infty[0, 2\pi]$, $j = 1, 2, 3$;

$f_\varepsilon(\rho, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_k(\rho, \varphi)$, $f_k \in C^\infty(\bar{D})$, $f_0(1, \varphi) \neq 0$, $f_0(\alpha, \varphi) \neq 0$.

В дальнейшем ряды, используемые в статье, являются асимптотическими разложениями соответствующих функций.

Задача (1), (2) — задача Дирихле (первая краевая задача), (1), (3) — задача Неймана (вторая краевая задача) и (1), (4) — задача Робэна (третья краевая задача).

В работе [7] исследована задача Дирихле в случае $n = 1$, $m = 1$, $p(\rho, \varphi) \equiv 1$.

Если к вышеперечисленным задачам Дирихле, Неймана и Робэна применить преобразование

$$u_\varepsilon(\rho, \varphi) = z(\rho) \tilde{u}_\varepsilon(\rho, \varphi), \quad \text{где } z(\rho) = 1 - \rho^2/2 > 0,$$

то относительно $\tilde{u}_\varepsilon(\rho, \varphi)$ получим задачи, порожденные уравнением

$$\varepsilon \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\rho, \varphi) - \frac{2\varepsilon \rho}{z(\rho)} \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon(\rho, \varphi)}{\partial \rho} - \left((1 - \rho)^n (\rho - \alpha)^{2m} p(\rho, \varphi) + \frac{2\varepsilon}{z(\rho)} \right) \tilde{u}_\varepsilon(\rho, \varphi) = \frac{f_\varepsilon(\rho, \varphi)}{z(\rho)}, \quad (\rho, \varphi) \in D,$$

и одним из граничных условий вида, соответственно

$$\tilde{u}_\varepsilon(1, \varphi) = 2\psi_{1,\varepsilon}(\varphi),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon(1, \varphi)}{\partial \rho} - 2\tilde{u}_\varepsilon(1, \varphi) = 2\psi_{2,\varepsilon}(\varphi),$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon(1, \varphi)}{\partial \rho} - (2 - h(\varphi)) \tilde{u}_\varepsilon(1, \varphi) = 2\psi_{3,\varepsilon}(\varphi).$$

Заметим, что $(1 - \rho)^n(\rho - \alpha)^{2m}p(\rho, \varphi) + 2\varepsilon/z(\rho) > 0$ при $(\rho, \varphi) \in \overline{D}$ и $\varepsilon > 0$. Поэтому решения этих задач существуют, единственны [9], и для решения задач Дирихле, Неймана, Робэна справедлива оценка $u_\varepsilon(\rho, \varphi) = O(1/\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $(\rho, \varphi) \in \overline{D}$.

Особенности задач. Первая сингулярность — решение предельного уравнения ($\varepsilon = 0$)

$$u(\rho, \varphi, 0) = -\frac{f_0(\rho, \varphi)}{(1 - \rho)^n(\rho - \alpha)^{2m}p(\rho, \varphi)}$$

не удовлетворяет краевым условиям.

Вторая сингулярность — решение предельного уравнения не является гладкой функцией, внешнее разложение решения задач в виде степенных по ε рядов имеют особенности вида

$$U_\varepsilon(\rho, \varphi) = \frac{1}{(1 - \rho)^n(\rho - \alpha)^{2m}} \sum_{k \geq 0} \frac{\varepsilon^k F_k(\rho, \varphi)}{(1 - \rho)^{(n+2)k}(\rho - \alpha)^{(2m+2)k}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где $F_k \in C^\infty(\overline{D})$.

Значит, данные задачи являются бисингулярными по терминологии А. М. Ильина [1; 2].

Требуется построить полные асимптотические разложения решений задач Дирихле, Неймана и Робэна. Для этого сначала построим формальные асимптотические разложения решений (ФАРР) этих задач, а потом приведем обоснования этих разложений.

3. Построение ФАРР

ФАРР для всех 3 задач ищем в виде

$$u_\varepsilon(\rho, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \chi_1(\rho) \sum_{k \geq -n} \mu^k w_k(\tau, \varphi) + \chi_2(\rho) \sum_{k \geq -2m} \lambda^k q_k(\eta, \varphi), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (5)$$

Здесь $1 - \rho = \mu\tau$; $\rho - \alpha = \lambda\eta$; $\mu = \sqrt[n+2]{\varepsilon}$; $\lambda = \sqrt[2m+2]{\varepsilon}$; $\chi_{1,2}(\rho)$ — функции срезки; $\chi_{1,2}(\rho) \in [0, 1]$; $\chi_{1,2} \in C^\infty[0, 1]$;

$$\begin{aligned} \chi_1(\rho) &= 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq 1 - \rho \leq \delta/3, \quad \text{и} \quad \chi_1(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad 2\delta/3 \leq 1 - \rho; \\ \chi_2(\rho) &= 1 \quad \text{при} \quad |\rho - \alpha| \leq \delta/3, \quad \text{и} \quad \chi_2(\rho) = 0 \quad \text{при} \quad 2\delta/3 \leq |\rho - \alpha|, \end{aligned}$$

$(0, \min\{\alpha/2, (1 - \alpha)/2\}) \ni \delta$ — достаточно малое число, независящее от ε .

Подставляя соотношение (5) в уравнение (1) получим

$$\Delta v_{k+1}(\rho, \varphi) + \tilde{v}_{k+1}(\rho, \varphi) - (1 - \rho)^n(\alpha - \rho)^{2m}p(\rho, \varphi)v_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - h_k(\rho, \varphi), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \mu^k \left(\frac{\partial^2 w_{k-n}(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \frac{\mu}{1 - \mu\tau} \frac{\partial w_{k-n}(\tau, \varphi)}{\partial \tau} + \frac{\mu^2}{(1 - \mu\tau)^2} \frac{\partial^2 w_{k-n}(\tau, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) - \tau^n (1 - \alpha - \mu\tau)^{2m} p(1 - \tau\mu, \varphi) w_{k-n}(\tau, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \mu^{(n+2)k} h_k^1(1 - \tau\mu, \varphi), \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \lambda^k \left(\frac{\partial^2 q_{k-2m}(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} + \frac{\lambda}{\alpha + \lambda\eta} \frac{\partial q_{k-2m}(\eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\lambda^2}{(\alpha + \lambda\eta)^2} \frac{\partial^2 q_{k-2m}(\eta, \varphi)}{\partial \varphi^2} \right) - \eta^{2m} (1 - \alpha - \lambda\eta)^n p(\alpha + \lambda\eta, \varphi) q_{k-2m}(\eta, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \lambda^{(2m+2)k} h_k^\alpha(\alpha + \eta\lambda, \varphi). \quad (8) \end{aligned}$$

В равенствах (6)–(8) введены новые, пока неизвестные, “регуляризующие” асимптотические ряды

$$\sum_{k \geq 0} \varepsilon^k h_k(\rho, \varphi) = \chi_1(\rho) \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k h_k^1(\rho, \varphi) + \chi_2(\rho) \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k h_k^\alpha(\rho, \varphi),$$

они конкретизируются ниже, а функции $\tilde{v}_k(\rho, \varphi)$ в равенстве (6) имеют вид

$$\tilde{v}_k(\rho, \varphi) = \tilde{w}_k(\rho, \varphi)\tilde{\chi}_1(\rho) + 2\frac{\partial\tilde{w}_k(\rho, \varphi)}{\partial\rho}\chi'_1(\rho) + \tilde{q}_k(\rho, \varphi)\tilde{\chi}_2(\rho) + 2\frac{\partial\tilde{q}_k(\rho, \varphi)}{\partial\rho}\chi'_2(\rho),$$

$$\tilde{w}_k(\rho, \varphi) = \sum_{j=0}^{(n+2)k} \frac{w_{j-n, (n+2)k+n-j}(\varphi)}{(1-\rho)^{(n+2)k+n-j}}, \quad \tilde{q}_k(\rho, \varphi) = \sum_{j=0}^{(2m+2)k} \frac{q_{j-2m, (2m+2)k+2m-j}(\varphi)}{(\rho-\alpha)^{(2m+2)k+2m-j}},$$

$\tilde{\chi}_j(\rho) = \chi''_j(\rho) + \frac{\chi'_j(\rho)}{\rho}$, функции $w_{j,k}$, $q_{j,k} \in C^\infty[0, 2\pi]$ определяются из асимптотических разложений

$$w_{(n+2)k-l}(\tau, \varphi) = \sum_{j \geq 0} \frac{w_{(n+2)k-l, (n+2)j+l}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j+l}}, \quad l = 1, 2, \dots, n+2, \quad k \in N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

$$q_{(2m+2)k-l}(\eta, \varphi) = \sum_{j \geq 0} \frac{q_{(2m+2)k-l, (2m+2)j+l}(\varphi)}{\eta^{(2m+2)j+l}}, \quad l = 1, 2, \dots, 2m+2, \quad \eta \rightarrow \pm\infty.$$

Справедливость этих асимптотических разложений доказывается ниже.

Для функции $v_k(\rho, \varphi)$, из равенства (6) получаем

$$v_k(\rho, \varphi) = -\frac{g_k(\rho, \varphi) - h_k(\rho, \varphi)}{(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho, \varphi)} + \frac{\tilde{v}_{k-1}(\rho, \varphi)}{(1-\rho)^n(\rho-\alpha)^{2m}p(\rho, \varphi)}, \quad k \in N_0,$$

где $g_k(\rho, \varphi) = f_k(\rho, \varphi) - \Delta v_{k-1}(\rho, \varphi)$, $v_{-1}(\rho, \varphi) \equiv 0$, $\tilde{v}_{-1}(\rho, \varphi) \equiv 0$.

Определим теперь коэффициенты асимптотического ряда $h_k(\rho, \varphi)$ так, чтобы

$$v_k \in C^\infty(\bar{D}), \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} w_k(\tau, \varphi) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} q_k(\eta, \varphi) = 0.$$

Отсюда $v_k \in C^\infty(\bar{D})$, когда

$$h_k^1(\rho, \varphi) = \sum_{j=0}^{n-1} g_{k,j}(\varphi)(1-\rho)^j + \sum_{j \geq n} h_{k,j}^1(\varphi)(1-\rho)^j,$$

$$h_k^\alpha(\rho, \varphi) = \sum_{j=0}^{2m-1} \tilde{g}_{k,j}(\varphi)(\rho-\alpha)^j + \sum_{j \geq 2m} h_{k,j}^\alpha(\varphi)(\rho-\alpha)^j,$$

где $g_{k,j}(\varphi) = (-1)^j \frac{\partial^j g_k(1, \varphi)}{j! \partial \rho^j}$, $\tilde{g}_{k,j}(\varphi) = \frac{\partial^j g_k(\alpha, \varphi)}{j! \partial \rho^j}$, а $h_{k,j}^1(\varphi)$, $h_{k,j}^\alpha(\varphi)$ конкретизируются ниже при определении $w_k(\tau, \varphi)$, $q_k(\eta, \varphi)$.

Теперь перейдем к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k \geq -n} \mu^k w_k(\tau, \varphi)$. Равенство (7) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \mu^k \left(\frac{\partial^2 w_{k-n}(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \frac{\partial w_{k-n-1}(\tau, \varphi)}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 w_{k-n-2}(\tau, \varphi)}{\partial \varphi^2} - \sum_{j=0}^k a_j(\varphi) \tau^{j+n} w_{k-n-j}(\tau, \varphi) \right) \\ = \sum_{k \geq 0} \mu^{(n+2)k} \sum_{j \geq 0} (\mu \tau)^j h_{k,j}^1(\varphi), \end{aligned}$$

Здесь $a(\rho, \varphi) := (\rho-\alpha)^{2m}p(\rho, \varphi)$; $a(\rho, \varphi) = \sum_{k \geq 0} a_k(\varphi)(1-\rho)^k$ — ее асимптотическое разложение по $\{(1-\rho)^k\}$; $a_k(\varphi) = (-1)^k \frac{\partial^k a(1, \varphi)}{k! \partial \rho^k}$; $a_0(\varphi) > 0$; $h_{k,j}^1(\varphi) = g_{k,j}(\varphi)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Отсюда имеем

$$Lw_{-n} \equiv \frac{\partial^2 w_{-n}(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n a_0(\varphi) w_{-n}(\tau, \varphi) = h_{0,0}^1(\varphi), \quad (\tau, \varphi) \in D_1; \quad (9)$$

$$Lw_{(n+2)k-n+j} = P_{(n+2)k-n+j}(\tau, \varphi), \quad k \in N_0, \quad j = 1, \dots, n+1, \quad (\tau, \varphi) \in D_1, \quad (10)$$

где $D_1 = \{(\tau, \varphi) \mid 0 < \tau < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$;

$$P_{(n+2)k-n+j}(\tau, \varphi) = \sum_{s=1}^{(n+2)k+j} a_s(\varphi) \tau^{s+n} w_{(n+2)k+j-s-n}(\tau, \varphi) + \sum_{s=0}^k \tau^{(n+2)(k-s)+j} h_{s, (n+2)(k-s)+j}^1(\varphi) + \frac{\partial w_{(n+2)(k-1)+j+1}(\tau, \varphi)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{(n+2)(k-1)+j}(\tau, \varphi)}{\partial \varphi^2}.$$

Равенства (2)–(4) порождают граничные условия соответственно

$$w_{(n+2)k}(0, \varphi) = \psi_{1,k}(\varphi) - v_k(1, \varphi), \quad k \in N_0, \quad w_s(0, \varphi) = 0, \quad s \neq (n+2)k; \quad (11)$$

$$\frac{\partial w_{(n+2)k+1}(0, \varphi)}{\partial \tau} = \frac{\partial v_k(1, \varphi)}{\partial \rho} - \psi_{2,k}(\varphi), \quad k \in N_0, \quad \frac{\partial w_s(0, \varphi)}{\partial \tau} = 0, \quad s \neq (n+2)k+1; \quad (12)$$

$$\frac{\partial w_{(n+2)k+1}(0, \varphi)}{\partial \tau} = h(\varphi)(v_k(1, \varphi) + w_{(n+2)k}(0, \varphi)) + \frac{\partial v_k(1, \varphi)}{\partial \rho} - \psi_{3,k}(\varphi), \quad k \in N_0,$$

$$\frac{\partial w_s(0, \varphi)}{\partial \tau} = 0, \quad s \neq (n+2)k+1. \quad (13)$$

Разрешимость и единственность решений задач (9), (10) основаны на следующем утверждении.

Лемма 1. Пусть $F(\tau)\Phi(\varphi) \in C^\infty(\overline{D_1})$, $a(\varphi) > 0$,

$$\frac{\partial^2 z(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n a(\varphi) z(\tau, \varphi) = F(\tau)\Phi(\varphi), \quad (\tau, \varphi) \in D_1, \quad (14)$$

$$z(0, \varphi) = z^0(\varphi), \quad (15)$$

$$\frac{\partial z(0, \varphi)}{\partial \tau} = z^1(\varphi). \quad (16)$$

Тогда задачи (14), (15) и (14), (16) имеют единственные решения $z(\tau, \varphi) \in C^\infty(\overline{D_1})$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ , когда $\tau \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Положим $t = \sqrt[n+2]{a(\varphi)}\tau$, тогда уравнение (14) примет вид

$$\frac{\partial^2 z(t, \varphi)}{\partial t^2} - t^n z(t, \varphi) = \frac{F(t)\Phi(\varphi)}{\sqrt[n+2]{a^2(\varphi)}}.$$

Решения задач (14), (15) и (14), (16) ищем в виде $z(t, \varphi) = \tilde{z}(t) \frac{\Phi(\varphi)}{\sqrt[n+2]{a^2(\varphi)}}$, тогда относительно $\tilde{z}(t)$ получим задачи соответственно

$$\tilde{z}''(t) - t^n \tilde{z}(t) = F(t), \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}^0, \quad t \in (0, +\infty);$$

$$\tilde{z}''(t) - t^n \tilde{z}(t) = F(t), \quad \tilde{z}'(0) = \tilde{z}^1, \quad t \in (0, +\infty).$$

Как известно [10], уравнение $\tilde{z}''(t) - t^n \tilde{z}(t) = 0$ имеет два независимых решения: $z_1(t) = \sqrt{t} I_{1/2p}(t^p/p)$, $z_2(t) = \sqrt{t} K_{1/2p}(t^p/p)$, где $2p = n+2$, $I_\nu(s)$, $K_\nu(s)$ — модифицированные функции Бесселя. Отметим известные важные свойства функций $I_\nu(s)$, $K_\nu(s)$, $0 < \nu < 1$:

- а) $I_\nu(s) \sim \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}$, $K_\nu(s) \sim e^{-s} \sqrt{\frac{\pi}{2s}}$, $s \rightarrow +\infty$; б) $I_\nu(0) = 0$, $K_\nu(s) = O(1/s^\nu)$, $s \rightarrow 0$;
 в) Вронскиан $W(I_\nu(s), K_\nu(s)) = -1/s$.

Из этих свойств следует, что

$$z_1(t) \sim \sqrt{\frac{p}{2\pi}} t^{\frac{1-p}{2}} e^{tp/p}, \quad z_2(t) \sim \sqrt{\frac{p\pi}{2}} t^{\frac{1-p}{2}} e^{-tp/p}, \quad t \rightarrow +\infty;$$

$$z_1(0) = 0, \quad z_1'(0) = O(1), \quad z_2(t) = O(1), \quad z_2'(t) = O(1), \quad t \rightarrow 0, \quad W(z_1(t), z_2(t)) = -1.$$

Таким образом, решения задач (14), (15) и (14), (16) имеют вид соответственно

$$z(t, \varphi) = \frac{z^0(\varphi)}{z_2(0)} z_2(t) - \frac{\Phi(\varphi)}{n+2\sqrt{a^2(\varphi)}} \left(z_2(t) \int_0^t F(s) z_1(s) ds + z_1(t) \int_t^{+\infty} F(s) z_2(s) ds \right)$$

и

$$z(t, \varphi) = \frac{c(\varphi)}{z_2'(0)} z_2(t) - \frac{\Phi(\varphi)}{n+2\sqrt{a^2(\varphi)}} \left(z_2(t) \int_0^t F(s) z_1(s) ds + z_1(t) \int_t^{+\infty} F(s) z_2(s) ds \right),$$

где $c(\varphi) = \left(\frac{z^1(\varphi)}{n+2\sqrt{a(\varphi)}} + \frac{z_1'(0)\Phi(\varphi)}{n+2\sqrt{a^2(\varphi)}} \int_0^{+\infty} F(s) z_2(s) ds \right)$, $t = n+2\sqrt{a(\varphi)}\tau$.

Отсюда получим, что если $F(\tau) = O(\tau^k)$, $\tau \rightarrow +\infty$, то $z(\tau, \varphi) = O(\tau^{k-n})$, $\tau \rightarrow +\infty$. \square

С помощью леммы 1 стандартным образом доказаны существование и единственность решений задач (9), (10), (11); (9), (10), (12); (9), (10), (13) в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени τ .

Асимптотическое разложение решений задач (9), (10) дает

Лемма 2. Пусть $0 < a(\varphi) \in C^\infty[0, 2\pi]$ и функции $p_j(\tau, \varphi) \in C^\infty(\overline{D_1})$ разлагаются в асимптотические ряды

$$p_j(\tau, \varphi) = \tau^{n-1} \sum_{k \geq 0} \frac{p_{j, (n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n+1, \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Тогда в области D_1 существуют решения уравнений

$$\frac{\partial^2 z_j(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n a(\varphi) z_j(\tau, \varphi) = p_j(\tau, \varphi), \quad j = 0, 1, \dots, n+1, \quad \tau \rightarrow +\infty, \quad (17)$$

которые разлагаются в асимптотические ряды

$$z_j(\tau, \varphi) = \frac{1}{\tau} \sum_{k \geq 0} \frac{z_{j, (n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}}, \quad j = 0, 1, \dots, n+1, \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (18)$$

При этом ряды (18) можно многократно почленно дифференцировать, и они являются асимптотическими разложениями решений уравнений (17).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно заметить, что дифференцируемость рядов (18) вытекает непосредственно из уравнений (17). ФАРР ищем в виде (18), где $z_{j,k}(\varphi)$ — пока неизвестные функции.

Подставляя ряды (18) в уравнения (17) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях τ , получаем рекуррентные системы уравнений для $z_{j,k}(\varphi)$: $-z_{j,j}(\varphi)a(\varphi) = p_{j,j}(\varphi)$,

$$((n+2)k+j+1)((n+2)k+j+2)z_{j, (n+2)k+j}(\varphi) - z_{j, (n+2)(k+1)+j}(\varphi)a(\varphi) = p_{j, (n+2)(k+1)+j}(\varphi).$$

Отсюда найдем

$$z_{j,j}(\varphi) = -p_{j,j}(\varphi)/a(\varphi),$$

$$z_{j,(n+2)(k+1)+j}(\varphi) = ((n+2)k+j+1)((n+2)k+j+2)z_{j,(n+2)k+j}(\varphi) - p_{j,(n+2)(k+1)+j}(\varphi)/a(\varphi).$$

Теперь оценим остаточные члены рядов (18):

$$r_j(\tau, \varphi) = z_j(\tau, \varphi) - \frac{1}{\tau} \sum_{k=0}^s \frac{z_{j,(n+2)k+j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)k+j}}, \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Для остаточных членов получим уравнения

$$\frac{\partial^2 r_j(\tau, \varphi)}{\partial \tau^2} - \tau^n a(\varphi) r_j(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{(n+2)s+3+j}), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Учитывая лемму 1, получаем оценку для остаточных членов

$$r_j(\tau, \varphi) = O(1/\tau^{(n+2)(s+1)+j+1}), \quad \tau \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, ряды (18) действительно являются асимптотическими разложениями решений уравнений (17). \square

Для получения асимптотик решений соответствующих задач справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть

$$h_{k,n+j}^1(\varphi) = - \sum_{s=1}^{(n+2)k+n} a_{s+j}(\varphi) w_{(n+2)k-s,s}(\varphi), \quad k, j \in N_0.$$

Тогда при $\tau \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотические разложения

$$w_{(n+2)k+s}(\tau, \varphi) = \sum_{j \geq 1} \frac{w_{(n+2)k+s,(n+2)j-s}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j-s}}, \quad s = 0, 1, \dots, n+1, \quad k = -1, 0, 1, \dots$$

Доказательство. Применяя лемму 2 для уравнения (9), получаем

$$w_{-n}(\tau, \varphi) = \sum_{j \geq 1} \frac{w_{-n,(n+2)j-2}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j-2}}, \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (19)$$

Здесь $w_{-n,n}(\varphi) = -\frac{h_{0,0}^1(\varphi)}{a_0(\varphi)}$, $w_{-n,(n+2)k+n}(\varphi) = \frac{((n+2)k-2)((n+2)k-1)w_{-n,(n+2)k-2}(\varphi)}{a_0(\varphi)}$, $k \in N$.

Точно так же, применяя лемму 2 для уравнений (10) при $k = 0, j = 1, 2, \dots, n-1$, получим

$$w_{j-n}(\tau, \varphi) = \sum_{s \geq 0} \frac{w_{j-n,n-j+(n+2)s}(\varphi)}{\tau^{n-j+(n+2)s}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

Теперь в остальных уравнениях (10) мы должны выбрать неизвестные функции $h_{k,j}^1(\varphi)$ так, чтобы максимальная степень разложения правых частей равенств (10) по τ не превышало $n-1$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Подробно рассмотрим один конкретный случай выбора $h_{k,j}^1(\varphi)$, остальные выбираются аналогичным образом. Рассмотрим правую часть равенства (10) при $k = 0, j = n$:

$$P_0(\tau, \varphi) = \sum_{s=1}^n a_s(\varphi) \tau^{s+n} w_{-s}(\tau, \varphi) + \tau^n h_{0,n}^1(\varphi) + \frac{\partial w_{-1}(\tau, \varphi)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 w_{-2}(\tau, \varphi)}{\partial \varphi^2}.$$

Учитывая разложения (19), (20) и $h_{0,n}^1 = -\sum_{s=1}^n a_s(\varphi)w_{-s,s}(\varphi)$, получаем

$$P_0(\tau, \varphi) = \sum_{j \geq 0} \frac{p_{0,(n+2)j+2}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j+2}}.$$

В силу леммы 2 имеем $w_0(\tau, \varphi) = \sum_{j \geq 1} \frac{w_{0,(n+2)j}(\varphi)}{\tau^{(n+2)j}}$. Аналогично доказываются и остальные случаи. \square

Перейдем к определению членов асимптотического ряда $\sum_{k \geq -2m} \lambda^k q_k(\eta, \varphi)$. Равенство (8) запишем в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq 0} \lambda^k \left(\frac{\partial^2 q_{k-2m}(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial q_{k-2m-1}(\eta, \varphi)}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 q_{k-2m-2}(\eta, \varphi)}{\partial \varphi^2} - \sum_{j=0}^k b_j(\varphi) \eta^{j+2m} w_{k-2m-j}(\eta, \varphi) \right) \\ = \sum_{k \geq 0} \lambda^{(2m+2)k} \sum_{j \geq 0} (\mu \eta)^j h_{k,j}^\alpha(\varphi), \end{aligned}$$

Здесь $b(\rho, \varphi) = (1 - \rho)^n p(\rho, \varphi)$; $b(\rho, \varphi) = \sum_{k \geq 0} b_k(\varphi)(\rho - \alpha)^k$; $b_k(\varphi) = \frac{\partial^k b(\alpha, \varphi)}{k! \partial \rho^k}$; $b_0(\varphi) > 0$; $h_{k,j}^\alpha(\varphi) = \tilde{g}_{k,j}(\varphi)$, $j = 0, 1, \dots, 2m - 1$.

Отсюда имеем

$$\tilde{L}q_{-2m} \equiv \frac{\partial^2 q_{-2m}(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} - \eta^{2m} b_0(\varphi) q_{-2m}(\eta, \varphi) = h_{0,0}^\alpha(\varphi), \quad (\eta, \varphi) \in D_2; \quad (21)$$

$$\tilde{L}q_{(2m+2)k-2m+j} = \tilde{P}_{(2m+2)k-2m+j}(\eta, \varphi), \quad k \in N_0, \quad j = 1, \dots, 2m + 1, \quad (\eta, \varphi) \in D_2, \quad (22)$$

где $D_2 = \{(\eta, \varphi) \mid -\infty < \eta < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$;

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(2m+2)k-2m+j}(\eta, \varphi) &= \sum_{s=1}^{(2m+2)k+j} b_s(\varphi) \eta^{s+n} q_{(2m+2)k+j-s-2m}(\eta, \varphi) \\ &+ \sum_{s=0}^k \eta^{(2m+2)(k-s)+j} h_{s,(2m+2)(k-s)+j}^\alpha(\varphi) + \frac{\partial q_{(2m+2)(k-1)+j+1}(\eta, \varphi)}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 q_{(2m+2)(k-1)+j}(\eta, \varphi)}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Разрешимость и единственность решений задач (21), (22) основаны на следующем утверждении.

Лемма 4. Пусть $F(\eta)\Phi(\varphi) \in C^\infty(\overline{D_2})$, $b(\varphi) > 0$. Тогда задача

$$\frac{\partial^2 z(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} - \eta^{2m} b(\varphi) z(\eta, \varphi) = F(\eta)\Phi(\varphi), \quad (\eta, \varphi) \in D_2, \quad (23)$$

имеет единственное решение $z(\eta, \varphi) \in C^\infty(\overline{D_2})$ в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени η , когда $\eta \rightarrow \pm\infty$.

Доказательство. Пусть $t = \sqrt[2m+2]{b(\varphi)} \eta / \sqrt[2m+2]{m+1}$, тогда задача (23) примет вид

$$\frac{\partial^2 z(t, \varphi)}{\partial t^2} - (m+1)^2 t^{2m} z(t, \varphi) = \sqrt[2m+2]{\frac{(m+1)^2}{b(\varphi)}} F(t)\Phi(\varphi). \quad (24)$$

Решение уравнения (24) ищем в виде $z(t, \varphi) = z(t) \sqrt[2m+2]{\frac{(m+1)^2}{b(\varphi)}} \Phi(\varphi)$, тогда получаем

$$z''(t) - (m+1)^2 t^{2m} z(t) = F(t). \quad (25)$$

Как известно [10], фундаментальная система решений однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 z(t, \varphi)}{\partial t^2} - (m+1)^2 t^{2(m+1)-2} z(t, \varphi) = 0$$

имеет вид $\{U_{2(m+1)}(t), U_{2(m+1)}(-t)\}$, где $U_{2(m+1)}(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K_{1/2(m+1)}(t^{m+1})$, $K_{1/2(m+1)}$ — функция Макдональда.

Приведем известные свойства фундаментальной системы решений $\{U_{2(m+1)}(t), U_{2(m+1)}(-t)\}$:

- а) Вронскиан $W(U_{2(m+1)}(t), U_{2(m+1)}(-t)) = 2(m+1)\operatorname{cosec}(\pi/(2m+2))$;
- б) $U_{2m+2}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{m+2} \sqrt{2^m}} \Gamma\left(\frac{1}{2m+2}\right)$, $U'_{2m+2}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^{m+2} \sqrt{2^{m+2}}} \Gamma\left(-\frac{1}{2m+2}\right)$;
- в) $U_{2m+2}(t) \sim \frac{1}{\sqrt{t^m} e^{tm+1}}$, $t \rightarrow +\infty$;
- г) $U_{2m+2}(t) = \sqrt{\frac{2|t|}{\pi}} \left(\pi \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2m+2} I_{1/(2m+2)}(|t|^{m+1}) + K_{1/(2m+2)}(|t|^{m+1}) \right)$, $t < 0$;
- д) $U_{2m+2}(t) \sim \frac{e^{|t|^{m+1}}}{\sqrt{|t|^m}}$, $t \rightarrow -\infty$.

С помощью фундаментальной системы решений можем записать явное решение уравнения (25), а из свойств а)–д) следует, что это решение находится в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени t , когда $t \rightarrow \pm\infty$.

Отсюда получим, что если $F(\eta) = O(\eta^k)$, $\eta \rightarrow \pm\infty$, то $z(\eta, \varphi) = O(\eta^{k-2m})$, $\eta \rightarrow \pm\infty$, $k = \operatorname{const}$. \square

С помощью леммы 4 доказаны существование и единственность решений задач (21), (22) в классе функций, растущих не быстрее какой-либо степени η .

Для задач (21), (22) справедливы следующие леммы, аналогичные леммам 2, 3.

Лемма 5. Пусть $0 < a(\varphi) \in C^\infty[0, 2\pi]$ и функции $p_j(\eta, \varphi) \in C^\infty(\overline{D_2})$ разлагаются в асимптотические ряды

$$p_j(\eta, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \frac{p_{j, (2m+2)k-j}(\varphi)}{\eta^{(2m+2)k-j}}, \quad j = 0, 1, \dots, 2m-1, \quad \eta \rightarrow \pm\infty.$$

Тогда в области D_2 существуют решения уравнений

$$\frac{\partial^2 z_j(\eta, \varphi)}{\partial \eta^2} - \eta^{2m} a(\varphi) z_j(\eta, \varphi) = p_j(\eta, \varphi), \quad \eta \rightarrow \pm\infty, \quad (26)$$

которые разлагаются в асимптотические ряды

$$z_j(\eta, \varphi) = \sum_{k \geq 0} \frac{z_{j, 2m-j+(2m+2)k}(\varphi)}{\eta^{2m-j+(2m+2)k}}, \quad \eta \rightarrow \pm\infty. \quad (27)$$

При этом ряды (27) можно многократно почленно дифференцировать, и они являются асимптотическими разложениями решений уравнений (26).

Лемма 6. Пусть $h_{k, 2m+j}^\alpha(\varphi) = - \sum_{s=1}^{(2m+2)k+2m} b_{s+j}(\varphi) q_{(2m+2)k-s, s}(\varphi)$, $k, j \in N_0$.

Тогда при $\eta \rightarrow \pm\infty$ справедливы асимптотические разложения

$$q_{(2m+2)k+s}(\eta, \varphi) = \sum_{j \geq 1} \frac{q_{(2m+2)k+s, (2m+2)j-s}(\varphi)}{\eta^{(2m+2)j-s}}, \quad s = 0, 1, \dots, 2m+1, \quad k = -1, 0, 1, \dots$$

Доказательство лемм 5 и 6 аналогично доказательствам лемм 2, 3 соответственно. \square

Таким образом, нами построено формальное асимптотическое разложение решения бисингулярных задач Дирихле, Неймана и Робэна. Перейдем к обоснованию ФАРР.

4. Обоснование ФАРР

Пусть $R_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi) = u_\varepsilon(\rho, \varphi) - u_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi)$, где

$$u_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi) = \sum_{k=0}^s \varepsilon^k v_k(\rho, \varphi) + \chi_1(\rho) \sum_{k=-n}^{(n+2)s+1} \mu^k w_k(\tau, \varphi) + \chi_2(\rho) \sum_{k=-2m}^{(2m+2)s+1} \lambda^k q_k(\eta, \varphi)$$

— частичная сумма построенных рядов.

Тогда для остаточных функций $R_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi)$ получим задачи

$$\varepsilon \Delta R_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi) - (1 - \rho)^n (\rho - \alpha)^{2m} p(\rho, \varphi) R_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi) = O(\varepsilon^{s+1}), \quad (\rho, \varphi) \in D, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (28)$$

$$R_{\varepsilon,s}(1, \varphi) = O(\varepsilon^{s+1}); \quad (29)$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon,s}(1, \varphi)}{\partial \rho} = O(\varepsilon^{s+1}); \quad (30)$$

$$\frac{\partial R_{\varepsilon,s}(1, \varphi)}{\partial \rho} + h(\varphi) R_{\varepsilon,s}(1, \varphi) = O(\varepsilon^{s+1}). \quad (31)$$

После применения к задачам (28), (29); (28), (30); (28), (31) преобразования $R_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi) = z(\rho) \tilde{u}_\varepsilon(\rho, \varphi)$, где $z(\rho) = 1 - \rho^2/2 > 0$, и принципа максимума, имеем

$$\tilde{u}_\varepsilon(\rho, \varphi) = O(\varepsilon^s), \quad (\rho, \varphi) \in \bar{D}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что $R_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi) = O(\varepsilon^s)$, $(\rho, \varphi) \in \bar{D}$, $\varepsilon \rightarrow 0$ для всех бисингулярных задач Дирихле, Неймана и Робэна.

Следовательно, справедлива

Теорема. Для решения бисингулярных задач Дирихле (1), (2), Неймана (1), (3) и Робэна (1), (4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое разложение (5) с соответствующими функциями $w_k(\tau, \varphi)$, так как $v_k(\rho, \varphi)$, $q_k(\eta, \varphi)$ не зависят от граничных условий. \square

З а к л ю ч е н и е. Обобщенным методом пограничных функций построены полные равномерные асимптотические разложения решений бисингулярных задач Дирихле, Неймана и Робэна для круга. Асимптотическое разложение решения обосновано с помощью принципа максимума. Отметим, что методом дифференциальных неравенств его тоже можно обосновать, т. е. получить оценку для остаточной функции $R_{\varepsilon,s}(\rho, \varphi)$.

Аналогично исследуется асимптотическое поведение решений задач Дирихле, Неймана и Робэна для уравнения

$$\varepsilon \Delta u_\varepsilon(\rho, \varphi) - (1 - \rho)^n (\rho - \alpha_1)^{2m_1} \dots (\rho - \alpha_k)^{2m_k} p(\rho, \varphi) u_\varepsilon(\rho, \varphi) = f_\varepsilon(\rho, \varphi), \quad (\rho, \varphi) \in D,$$

где $\alpha_i \in (0, 1)$, $m_i \in N$.

Исследованные задачи можно обобщить на многомерный шар или на многомерную ограниченную область с достаточно гладкой границей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 336 с.
2. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
3. **Розов Н.Х.** Некоторые замечания о бисингулярных краевых задачах // Современная математика и ее приложения. 2005. Т. 35, Ч. 2. С. 44–47.
4. **Данилин А.Р.** Асимптотика решений системы сингулярных эллиптических уравнений в прямоугольнике // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 1. С. 31–60. doi: 10.4213/sm705.

5. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 197–211.
6. Хачай О.Ю. Асимптотическое разложение решения одной бисингулярной задачи Коши для нелинейного обыкновенного уравнения первого порядка. Деп. в ВИНТИ. 2005. Т. 16, № 174-V2005. С. 1–46.
7. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения с особенностями // Уфим. мат. журн. 2016. Т. 8, № 1. С. 102–112.
8. Турсунов Д.А., Эркебаев У.З. Асимптотика решения задачи Дирихле для бисингулярно возмущенного уравнения в кольце // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютер. науки. 2015. Т. 25, №. 4. С. 517–525.
9. Олейник О.А. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа // Мат. сб. 1952. Т. 30(72), №. 3. С. 695–702.
10. Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович

Поступила 09.06.2016

д-р физ.-мат. наук, доцент

профессор кафедры информатики

Ошский государственный университет, г. Ош, Кыргызстан

e-mail: tdaosh@gmail.com

REFERENCES

1. P'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. Providence, RI: AMS, 1992, Ser. Transl. Math. Monogr., 102, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5.
2. P'in A. M., Danilin, A. R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 248 p. ISBN: 978-5-9221-1056-3.
3. Rozov N.Kh. Some remarks on bisingular boundary-value problems. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2007, vol. 144, no. 4, pp. 4241–4245. doi: 10.1007/s10958-007-0266-3.
4. Danilin A.R. Asymptotic behaviour of solutions of a singular elliptic system in a rectangle. *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 1, pp. 31–61. doi: 10.1070/SM2003v194n01ABEH000705.
5. Lelikova E.F. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a point of inflexion. *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 1, pp. 197–211 (in Russian).
6. Khachai O.Yu. Asymptotic expansion of the solution of the bisingular Cauchy problem for nonlinear first-order ordinary differential equation. *Dep. VINITI*, 2005, vol. 16, no. 174-V2005, pp. 1–46 (in Russian).
7. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotic expansions of solutions to Dirichlet problem for elliptic equation with singularities. *Ufa Math. J.*, 2016, vol. 8, no. 1, pp. 97–107. doi: 10.13108/2016-8-1-97.
8. Tursunov D.A., Erkebaev U.Z. Asymptotics of the Dirichlet problem solution for a bisingular perturbed equation in the ring. *Vestnik Udmurtskogo Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 4, pp. 517–525 (in Russian).
9. Oleinik O.A. On properties of solutions of certain boundary problems for equations of elliptic type. *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30(72), pp. 695–702 (in Russian).
10. Fedoryuk M.V. *Asymptotic analysis: linear ordinary differential equations*. Berlin, Springer-Verlag, 1993, 363 p. doi: 10.1007/978-3-642-58016-1. Original Russian text published in *Asimptoticheskie metody dlja linejnyh obyknovennyh differencial'nyh uravnenij*, Moscow, Nauka Publ., 1983, 352 p.

The paper was received by the Editorial Office on June 9, 2016.

Dilmurat Abdillazhanovich Tursunov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Osh State University, Osh, 723500 Kyrgyzstan, e-mail: tdaosh@gmail.com

УДК 517.928.4

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ВБЛИЗИ ТОЧКИ КАТАСТРОФЫ ТИПА “БАБОЧКА”¹

О. Ю. Хачай

В рамках метода согласования асимптотических разложений рассматривается решение трехмерного нелинейного волнового уравнения $-U''_{TT} + U''_{XX} + U''_{YY} + U''_{ZZ} = f(\varepsilon T, \varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, U)$. Здесь ε – малый положительный параметр и правая часть представляет собой плавно меняющийся источниковый член уравнения. Около типичной точки катастрофы типа “бабочка” строится формальное асимптотическое разложение решения исходного уравнения во внутреннем масштабе. При этом для приближаемого решения предполагается наличие стандартного внешнего асимптотического разложения, пригодного вне малой окрестности точки катастрофы. Исследуется нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка с тремя параметрами $u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x$ для главного члена внутреннего асимптотического разложения. Это уравнение описывает возникновение контрастной структуры типа “ступенька” вблизи точки катастрофы. Кратко приведена процедура получения такого уравнения. На ограниченном множестве параметров установлена равномерная асимптотика на бесконечности решения этого ОДУ, удовлетворяющего условиям согласования. Численными методами показана возможность нахождения ударного слоя вне окрестности нуля внутреннего масштаба. Приведены иллюстрации найденных численно интегральных кривых.

Ключевые слова: согласование асимптотических разложений, нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, нелинейное уравнение математической физики, катастрофа типа “бабочка”, численные методы.

O. Yu. Khachai. Asymptotics of a solution of a three-dimensional nonlinear wave equation near a butterfly catastrophe point.

In the framework of the method of matched asymptotic expansions, a solution of the three-dimensional nonlinear wave equation $-U''_{TT} + U''_{XX} + U''_{YY} + U''_{ZZ} = f(\varepsilon T, \varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, U)$ is considered. Here ε is a small positive parameter and the right-hand side is a smoothly changing source term of the equation. A formal asymptotic expansion of the solution of the equation is constructed in terms of the inner scale near a typical “butterfly” catastrophe point. It is assumed that there exists a standard outer asymptotic expansion of this solution suitable outside a small neighborhood of the catastrophe point. We study a nonlinear second-order ordinary differential equation (ODE) for the leading term of the inner asymptotic expansion depending on three parameters: $u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x$. This equation describes the appearance of a step-like contrast structure near the catastrophe point. We briefly describe the procedure for deriving this ODE. For a bounded set of values of the parameters, we obtain a uniform asymptotics at infinity of a solution of the ODE that satisfies the matching conditions. We use numerical methods to show the possibility of locating a shock layer outside a neighborhood of zero in the inner scale. The integral curves found numerically are presented.

Keywords: matched asymptotic expansions, nonlinear ordinary differential equation, nonlinear equation of mathematical physics, butterfly catastrophe, numerical methods.

MSC: 34E05, 35C20, 34K28

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-250-265

Введение

Данная статья продолжает начатое в работе [1] исследование поведения решений трехмерного нелинейного волнового уравнения в частных производных (УЧП)

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} = f(\varepsilon T, \varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z, U) \quad (0.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00222).

с малым положительным параметром ε . Основное внимание здесь сконцентрировано на описании локального участка решения вблизи точки катастрофы типа “бабочка”, имеющего вид сглаженной ударной волны, так называемой контрастной структуры типа ступеньки; подробную информацию о структурах этого типа можно найти в обзорной статье [2] и в работах из ее библиографического списка. Отметим, что поскольку в функцию f , стоящую в правой части уравнения (0.1), входят 4 независимые переменные (T, X, Y, Z) , то для открытых областей пространства переменных (T, X, Y, Z, U) являются типичными точки катастрофы, соответствующие нулям функции f вплоть до 5-го порядка по искомой функции U , что соответствует типу “бабочка”. Вариант уравнения с двумя независимыми переменными и соответственной типичной точкой катастрофы типа “сборка” был рассмотрен в статье [3], а подробное исследование специального решения и получение его равномерного асимптотического разложения были осуществлены в статьях [4; 5]; данная работа в основном следует подходам, примененным в этих трудах.

В статье [1] было выведено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка

$$u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x, \tag{0.2}$$

зависящее от трех параметров (y, z, t) , которому удовлетворяет специальное решение, связанное с контрастной структурой типа “ступенька”.

Цель настоящей работы — получить асимптотику специального решения нелинейного ОДУ (0.2) при $x \rightarrow \infty$, равномерную на произвольном ограниченном множестве изменения параметров (y, z, t) , и, дополнительно, продемонстрировать отличительную особенность катастрофы типа “бабочка” от исследованной ранее [3–5] катастрофы типа “сборка” — возможность локализации ударного слоя (резкого скачка решения) вне конечной окрестности точки $x = 0$.

1. Постановка задачи

Запись точной формулировки задачи для поиска специального решения ОДУ (0.2) удобно сочетать с процессом вывода самого этого уравнения. Поэтому воспроизведем здесь кратко некоторые этапы вывода ОДУ (0.2), выполненного в [1, разд. 1, 2], делая акцент на условиях, налагаемых на составные части задачи.

1.1. Связь ОДУ (0.2) с задачей поиска асимптотики уравнения (0.1)

С помощью сжимающей замены переменных $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3, s_4) = \varepsilon(T, X, Y, Z)$, $V(\varepsilon, \mathbf{s}) = U(\varepsilon, T, X, Y, Z)$ приведем уравнение (0.1) к стандартному виду сингулярных уравнений с малым параметром при старших производных:

$$\varepsilon^2 \sum_{n=1}^4 A_n \frac{\partial^2 V}{\partial s_n^2} = f(\mathbf{s}, V), \tag{1.3}$$

где $-A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 1$.

Пусть будут выполнены следующие условия:

- функция $f(\mathbf{s}, V)$ является гладкой и удовлетворяет неравенству $f'_V(\mathbf{s}, V) \neq 0$ на некоторой области $(\mathbf{s}, V) \in \Omega_{\mathbf{s}} \times \Omega_V$; здесь и далее все области предполагаются открытыми;
- соблюдаются соответствующие уравнению (1.3) условия, выделяющие некоторое решение задачи на области $\Omega_{\mathbf{s}}$, приближаемое рядом внешнего асимптотического разложения вида

$$V(\varepsilon, \mathbf{s}) = V_0(\mathbf{s}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n V_n(\mathbf{s}), \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad f(\mathbf{s}, V_0(\mathbf{s})) = 0, \tag{1.4}$$

на области $\Omega_{\mathbf{s}}$, за исключением некоторой окрестности ее границы.

Конкретные примеры постановок задач, удовлетворяющих данным условиям, представлены, например, в монографиях [6; 7] и статьях [2; 4].

На границе множества Ω_s могут типичным образом находиться точки вырождения отображения $f(s, V)$ по искомой функции — нули отображения $f'_V(s, V)$, которые могут содержать многообразия точек складки, сборки, гладкие линии катастрофы типа “ласточкин хвост” и изолированные точки катастрофы типа “бабочка”.

Пусть точка (s°, V°) на границе области $\Omega_s \times \Omega_V$ является изолированной точкой катастрофы [8, с. 12, 17] типа “бабочка” функции $f(s, V)$. Тогда асимптотическое тейлоровское разложение функции f в окрестности этой точки имеет вид

$$f(s, V) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(b_m + G_m(s) + \widetilde{G}_m(s) \right) (V - V^\circ)^m, \quad (s, V) \rightarrow (s^\circ, V^\circ),$$

где

$$G_m(s) = \sum_{j=1}^4 b_{m,j} (s_j - s_j^\circ), \quad \widetilde{G}_m(s) = \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} b_{m,\alpha} (s - s^\circ)^\alpha, \quad s \rightarrow s^\circ,$$

$$0 = b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4, \quad (1.5)$$

$$b_5 = \varkappa \neq 0 \quad (1.6)$$

(в статье используется операция возведения векторной величины в степень с показателем-мультииндексом, как, например, в монографии [9, с. 15]). Обозначим $\mathbf{B} = (b_{n-1,j})_{n,j=1,\dots,4}$. Обращение в нуль пяти коэффициентов (1.5) достигается за счет выбора значений пяти координат точки (s°, V°) . Существование такого решения системы пяти уравнений $\frac{\partial^k}{\partial V^k} f(s, V) = 0$, $k = 0, \dots, 4$, с пятью неизвестными является типичной ситуацией, при этом выполнение еще каких-либо независимых соотношений уже не будет типичным для функций $f(s, V)$, что, в частности, делает закономерными предположение (1.6) и неравенство $\det \mathbf{B} \neq 0$.

Применение подхода [8, с. 45, 46, 52] позволяет получить специальный диффеоморфизм $(s, V) = \Psi(\sigma, \mathcal{W})$, покомпонентно имеющий вид:

$$s = \Psi[s](\sigma, \mathcal{W}) \equiv s^\circ + \mathbf{B}^{-1} \sigma, \quad V = \Psi[V](\sigma, \mathcal{W}), \quad (1.7)$$

отображающий некоторую окрестность начала координат переменных (σ, \mathcal{W}) на некоторую окрестность точки (s°, V°) , удовлетворяющий тождеству

$$f(s, V) \equiv f(\Psi(\sigma, \mathcal{W})) \equiv -\varphi_1(\sigma) - \varphi_2(\sigma)\mathcal{W} - \varphi_3(\sigma)\mathcal{W}^2 - \varphi_4(\sigma)\mathcal{W}^3 + \varkappa\mathcal{W}^5,$$

коэффициенты в правой части которого имеют асимптотические представления

$$\varphi_n(\sigma) = \sigma_n + \sum_{|\alpha|=2}^{\infty} c_{n,\alpha} \sigma^\alpha, \quad n = 1, \dots, 4, \quad \sigma \rightarrow \mathbf{0}.$$

Кроме того, диффеоморфизм (1.7) удовлетворяет асимптотическим соотношениям

$$\Psi[V](\sigma, \mathcal{W}) = V^\circ + H_0(\sigma) + \mathcal{W}(1 + H_1(\sigma)) + \sum_{m=2}^{\infty} \mathcal{W}^m (C_m + H_m(\sigma)), \quad (\sigma, \mathcal{W}) \rightarrow (\mathbf{0}, 0),$$

$$H_m(\sigma) = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} C_{m,\alpha} \sigma^\alpha, \quad \sigma \rightarrow \mathbf{0}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

с некоторым набором числовых коэффициентов $C_m, C_{m,\alpha}$.

Осуществим нелинейную замену переменных

$$(\mathbf{s}, V(\varepsilon, \mathbf{s})) = (\mathbf{s}^\circ + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\sigma}, V(\varepsilon, \mathbf{s}^\circ + \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\sigma})) = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{W}(\varepsilon, \boldsymbol{\sigma})),$$

которую можно записать покомпонентно следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= G_{n-1}(\mathbf{s}), \quad n = 1, \dots, 4; \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}(\mathbf{s} - \mathbf{s}^\circ), \\ V(\varepsilon, \mathbf{s}) &= \Psi[V](\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s}), \mathcal{W}(\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{s}))). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Совершим растяжение координат

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \varepsilon^{\beta_n} S_n, \quad n = 1, \dots, 4; \quad \mathcal{W}(\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}) = \varepsilon^\gamma W(\varepsilon, \mathbf{S}), \\ \beta_n &= (n + 1)\gamma, \quad n = 1, \dots, 4, \quad \gamma = 1/7, \end{aligned}$$

и введем в рассмотрение формальный ряд внутреннего асимптотического разложения

$$W(\varepsilon, \mathbf{S}) = w(\mathbf{S}) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n\gamma} w_n(\mathbf{S}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \tag{1.9}$$

Нужно отметить, что в [1, формулы (2.4), (2.5)] были допущены неточности, связанные с отсутствием в записи диффеоморфной замены переменных [1, формула (2.4)] нелинейной части $\Psi[V]$ диффеоморфизма $\Psi(\boldsymbol{\sigma}, \mathcal{W})$, и в формулах (1.7)–(1.8) они исправлены. В (1.9) уточнен показатель степени ε в сумме ряда [1, формула (2.10)]. Указанные опечатки, однако, не сказались на правильности самого ОДУ (0.2).

Значение γ было найдено в [1] в соответствии с практикой применения метода согласования асимптотических разложений [7] при переходе ко внутреннему масштабу и подстановке ряда (1.9) в уравнение (1.3). Тогда при фиксированном значении \mathbf{S} и $\varepsilon \rightarrow 0$ данное уравнение приняло вид

$$N \frac{\partial^2}{\partial (S_1)^2} w(\mathbf{S}) + S_1 + S_2 w(\mathbf{S}) + S_3 w^2(\mathbf{S}) + S_4 w^3(\mathbf{S}) - \varkappa w^5(\mathbf{S}) = O(\varepsilon^\gamma),$$

где $N = -(b_{0,1})^2 + (b_{0,2})^2 + (b_{0,3})^2 + (b_{0,4})^2$. Затем, в результате предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ и линейной замены с постоянными коэффициентами $(\mathbf{S}, W) \rightarrow ((x, y, z, t), u)$ было получено искомое нелинейное ОДУ второго порядка

$$\text{sgn}(N) u''_{xx} = u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x,$$

в котором переменные y, z, t стали уже просто параметрами.

1.2. Постановка задачи для ОДУ (0.2)

Рассмотрим асимптотическую задачу

$$A(u) \equiv -u''_{xx} + u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x = 0, \tag{1.10}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |u(x; y, z, t) - H_{\pm}(x; y, z, t)| = 0, \tag{1.11}$$

где функции H_- и H_+ суть гладкие ветви корня конечного уравнения

$$\omega(u, x; y, z, t) \equiv u^5 - tu^3 - zu^2 - yu - x = 0, \tag{1.12}$$

максимально продолженные, соответственно, вправо из окрестности точки $x = -\infty$ и влево из окрестности точки $x = +\infty$. Предельное соотношение (1.11) представляет собой необходимое

условие для согласования внутреннего (1.9) и внешнего (1.4) асимптотических разложений на уровне главных членов — функций $w(\mathbf{S})$ и $V_0(\mathbf{s})$.

Для удобства объявления новых объектов условимся, что все обозначения, вводимые ниже в статье, никак не связаны с использованными в подразд. 1.1. Введем норму $\|\mathbf{a}\| = \max\{|a_1|, \dots, |a_m|\}$ для векторной величины $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m)$. Договоримся, что в обозначениях вида M_b^a , верхний индекс не является показателем степени, а указывает на переменную, ограничение на изменение которой устанавливается соотношением, содержащим данное обозначение; для возведения такой величины в степень будем предварительно заключать ее в скобки.

2. Асимптотика при $x \rightarrow \infty$ для ограниченных значений параметров y, z, t

Ниже нам потребуется следующая лемма об асимптотике глобально единственного корня конечного уравнения вида (1.12), определенного на некоторой окрестности точки $x = \infty$.

Лемма. Пусть задано конечное уравнение

$$y^5 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y - x = 0 \quad (2.1)$$

с некоторым набором вещественных коэффициентов $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Тогда найдется числовая функция $M_0^x = M_0^x(\mathbf{a})$, удовлетворяющая ограничению

$$M_0^x < M(1 + (M^{\mathbf{a}})^{5/2}) \quad (2.2)$$

с некоторой постоянной $M > 0$, такая что для произвольного ограниченного множества \mathbf{A} рассматриваемых наборов коэффициентов \mathbf{a} : $\|\mathbf{a}\| \leq M^{\mathbf{a}}$ будут верны следующие утверждения.

На множестве $\{|x| > M_0^x\}$ существует единственное решение $y(x; \mathbf{a})$ уравнения (2.1), причем $y'_x(x; \mathbf{a}) > 0$ при $|x| > M_0^x$ и справедливо асимптотическое разложение вида

$$y(x; \mathbf{a}) = x^{1/5} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\mathbf{a}) x^{-j/5} \right), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

допускающее почленное дифференцирование по x .

Кроме того, на множестве $\{|x| > M_0^x\}$ является строго положительным выражение

$$\lambda(y; \mathbf{a}) = 5y^4 + 3a_1 y^2 + 2a_2 y + a_3 \quad (2.4)$$

и справедлива равномерная оценка

$$\frac{1}{2}|x|^{1/5} < y(x; \mathbf{a}) \operatorname{sgn} x < 2|x|^{1/5}, \quad |x| > M_0^x, \quad \mathbf{a} \in \mathbf{A}. \quad (2.5)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$F(s, q; \mathbf{a}) = q^5 + a_1 s^2 q^3 + a_2 s^3 q^2 + a_3 s^4 q - 1. \quad (2.6)$$

Заметим, что если совершить подстановку

$$s = x^{-1/5}, \quad q = x^{-1/5} y \quad (2.7)$$

в функцию $F(s, q; \mathbf{a})$ и полученное выражение умножить на x , мы получим в точности выражение в правой части уравнения (2.1). Таким образом, уравнение $F(s, q; \mathbf{a}) = 0$ с учетом подстановки (2.7) эквивалентно уравнению (2.1) при $x \neq 0$.

Отметим также, что полином (2.6) удовлетворяет соотношениям $F(0, 1; \mathbf{a}) = 0$ и $F'_q(0, 1; \mathbf{a}) \neq 0$. Следовательно, согласно теореме о неявной функции (см., например, [10, с. 560]), существует функция $q = q(s; \mathbf{a})$ — решение уравнения $F(s, q; \mathbf{a}) = 0$ в некоторой окрестности точки $(s, q) = (0, 1)$ при фиксированном значении \mathbf{a} . Но, поскольку нам требуется равномерная пригодность искомой окрестности и функции $q(s; \mathbf{a})$ для всех значений параметров $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, мы проведем более подробно рассуждение, подобное доказательству теоремы о неявной функции [10, с. 560–563], но отличающееся от него на начальном этапе. Для этого зафиксируем $\delta_q = 1/2$ и найдем число $0 < \delta_s < 1$ такое, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$F'_q(s, q; \mathbf{a}) > 0 \quad \forall (s, q) \in (-\delta_s, \delta_s) \times (1 - \delta_q, 1 + \delta_q); \tag{2.8}$$

$$F(s, 1 + \delta_q; \mathbf{a}) > 0, \quad F(s, 1 - \delta_q; \mathbf{a}) < 0 \quad \forall s \in (-\delta_s, \delta_s). \tag{2.9}$$

Воспользовавшись условием, что рассматриваемые значения параметров удовлетворяют неравенству $|a_i| \leq M^a$, $i = 1, 2, 3$, получим некоторый диапазон допустимых чисел $0 < \delta_s < 1$, удовлетворяющих соотношению (2.8). Запишем

$$F'_q(s, q) = q^4(5 + h_1(s, q; \mathbf{a})), \quad h_1(s, q; \mathbf{a}) = 3a_1s^2q^{-2} + 2a_2s^3q^{-3} + a_3s^4q^{-4} \tag{2.10}$$

и, оценивая $1/2 < q < 3/2$, $\max\{q^{-2}, q^{-3}, q^{-4}\} < 2^4$, $\max\{s^2, |s^3|, s^4\} < (\delta_s)^2$, получим, что $|h_1(s, q; \mathbf{a})| < 16(6M^a)(\delta_s)^2$, откуда в соответствии с (2.10) легко видеть, что допустимыми являются все числа

$$0 < \delta_s < \left(\frac{96}{5}M^a\right)^{-1/2}. \tag{2.11}$$

Подобным образом найдем диапазон допустимых чисел $0 < \delta_s < 1$, удовлетворяющих соотношению (2.9). Запишем

$$F(s, 1 \pm \delta_q; \mathbf{a}) = \pm \delta_q \left(1 + \sum_{i=1}^4 (1 \pm \delta_q)^i\right) + h_2(s, q; \mathbf{a}), \quad h_2(s, q; \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^3 a_i s^{i+1} (1 \pm \delta_q)^{-i-1} \tag{2.12}$$

и, оценивая $1/2 \leq 1 \pm \delta_q \leq 3/2$; $(1 \pm \delta_q)^{-i-1} \leq 2^4$, $|s^{i+1}| < (\delta_s)^2$, $i = 1, 2, 3$, получим, что $|h_2(s, q; \mathbf{a})| < 16(3M^a)(\delta_s)^2$, а тогда, имея ввиду, что скобка, умножаемая на $\pm \delta_q$ в равенстве (2.12), больше 1, легко установить, что допустимыми являются все числа $\delta_s > 0$, удовлетворяющие ограничению

$$\delta_s < (\delta_q)^{1/2} (48M^a)^{-1/2}. \tag{2.13}$$

Итак, учитывая оба достаточных условия (2.11), (2.13), определим δ_s и δ_q формулами

$$\delta_q = \frac{1}{2}, \quad \delta_s = \min \left\{ 1, \left(\frac{96}{5}M^a\right)^{-1/2}, (\delta_q)^{1/2} (48M^a)^{-1/2} \right\}, \tag{2.14}$$

не зависящими от выбора параметров $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ и удовлетворяющими соотношениям (2.8), (2.9).

Далее, строго следуя рассуждению доказательства теоремы о неявной функции [10, с. 560–563], приходим к выводу, что при каждом $s \in (-\delta_s, \delta_s)$ уравнение $F(s, q; \mathbf{a}) = 0$ имеет в точности один корень $q = q(s; \mathbf{a}) \in (1 - \delta_q, 1 + \delta_q)$. Причем данный корень $q = q(s; \mathbf{a})$ является бесконечно дифференцируемой по переменной $s \in (-\delta_s, \delta_s)$ функцией и имеет тейлоровское разложение вида

$$q(s; \mathbf{a}) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j(\mathbf{a})s^j, \quad s \rightarrow 0. \tag{2.15}$$

Применяя подстановку (2.7) в обратную сторону, мы получим, что при любом выборе значения $M_0^x \geq (\delta_s)^{-5}$ на множестве $|x| > M_0^x$ существует решение уравнения (2.1), определяемое формулой

$$y(x; \mathbf{a}) = x^{1/5} q(x^{-1/5}; \mathbf{a}), \tag{2.16}$$

причем

$$|x|^{1/5}(1 - \delta_q) < |y(x; \mathbf{a})| < |x|^{1/5}(1 + \delta_q). \quad (2.17)$$

Легко видеть, что из асимптотики (2.15) следует асимптотическое разложение (2.3) для решения (2.16). Кроме того, поскольку выражение (2.4), есть $s^{-4}F'_q(s, q; \mathbf{a})$ в терминах подстановки (2.7), то в силу неравенства (2.8) оно является строго положительным на множестве $|x| > M_0^x$.

Осталось доказать глобальную единственность и строгое возрастание корня (2.16) уравнения (2.1) на множестве $|x| > M_0^x$, при необходимости увеличив значение M_0^x .

Вначале рассмотрим однозначную функцию

$$x(y; \mathbf{a}) = y^5 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y, \quad (2.18)$$

при каждом вещественном y определяющую глобально единственный корень $x = x(y; \mathbf{a})$ уравнения (2.1). Если положить

$$\Delta^y = \max \left\{ 1, \left(\frac{6}{5} M^{\mathbf{a}} \right)^{1/2} \right\}, \quad (2.19)$$

то на всем множестве $|y| > \Delta^y$ функция (2.18) строго возрастает. Действительно, в силу (2.19) $\partial x / \partial y(y; \mathbf{a}) = \lambda(y; \mathbf{a}) > (\Delta^y)^4(5 - 3M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^{-2} - 2M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^{-3} - M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^{-4}) \geq (\Delta^y)^4(5 - 6M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^{-2}) \geq 0$. Заметим также, что функция (2.18) удовлетворяет неравенству $|x(y; \mathbf{a})| \leq \Delta^x$ на множестве $(y, \mathbf{a}) \in [-\Delta^y, \Delta^y] \times \mathbf{A}$, где

$$\Delta^x = (\Delta^y)^5 + 3M^{\mathbf{a}}(\Delta^y)^3. \quad (2.20)$$

Поэтому никакая точка $(x, y; \mathbf{a})$, удовлетворяющая соотношениям $|x| > \Delta^x$, $|y| \leq \Delta^y$ и $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, не может обращать в верное равенство уравнение (2.1).

Обозначим теперь

$$M_0^x = \max \left\{ (\delta_s)^{-5}, \Delta^x, (\Delta^y / (1 - \delta_q))^5 \right\} \quad (2.21)$$

и предположим от противного, что существует некоторая удовлетворяющая уравнению (2.1) тройка $(x_0, y_0; \mathbf{a}_0)$, где $x_0: |x_0| > M_0^x$, $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}$ и число y_0 , отличное от значения $y(x_0; \mathbf{a}_0)$, определяемого формулой (2.16). Если предположить, что $|y_0| \leq \Delta^y$, то получится, что нашлась точка $(x_0, y_0; \mathbf{a}_0)$, удовлетворяющая и соотношениям $|x_0| > \Delta^x$, $|y_0| \leq \Delta^y$, $\mathbf{a}_0 \in \mathbf{A}$, и уравнению (2.1), что противоречит доказанному выше. Следовательно, осталось рассмотреть только случай $|y_0| > \Delta^y$. Заметим, что тогда согласно формуле (2.21) и соотношению (2.17) выполняется неравенство $|y(x_0; \mathbf{a}_0)| > \Delta^y$. Значит, нашлись две точки $(x_0, y_0; \mathbf{a}_0)$ и $(x_0, y(x_0; \mathbf{a}_0); \mathbf{a}_0)$, одновременно удовлетворяющие и ограничению $|y| > \Delta^y$, и уравнению (2.1), но это противоречит тому, что на множестве $|y_0| > \Delta^y$ глобально единственный корень $x = x(y; \mathbf{a})$ уравнения (2.1) строго возрастает. Таким образом, предположение о нарушении глобальной единственности корня (2.16) уравнения (2.1) на множестве $|x| > M_0^x$ неправильно. Поэтому функция (2.16) является строго возрастающей как обратная к строго возрастающей функции (2.18), а с помощью неравенства (2.17) мы сразу же устанавливаем справедливость оценки (2.5).

Осталось отметить, что из соотношений (2.14), (2.19), (2.20), (2.21) следует неравенство (2.2). Действительно, оценим асимптотику величины M_0^x при $M^{\mathbf{a}} \rightarrow \infty$, проанализировав каждый член в фигурных скобках в формуле (2.21). Пусть $f \sim g$ означает, что величина $\lim f/g$ при $M^{\mathbf{a}} \rightarrow \infty$ есть некоторое ненулевое число. Из формулы (2.19) следует, что $\Delta^y \sim (M^{\mathbf{a}})^{1/2}$. Учет этого соотношения в равенстве (2.20) позволяет заключить, что $\Delta^x \sim (M^{\mathbf{a}})^{5/2}$. Тогда в силу формулы (2.14) мы приходим к выводу, что $\delta_s \sim (M^{\mathbf{a}})^{-1/2}$ и $M_0^x \sim (M^{\mathbf{a}})^{5/2}$. Из этой асимптотической оценки сразу вытекает неравенство (2.2).

Лемма полностью доказана.

Применив лемму к уравнению (1.12), мы получим, что существует числовая функция $M_1^x = M_1^x(M^z)$, удовлетворяющая ограничению $M_1^x < M(1 + (M^z)^{5/2})$ с некоторой постоянной $M > 0$, такая что для выбранного произвольно ограниченного множества \mathbf{D} изменения

параметров $(y, z, t) = \mathbf{z}$: $\|\mathbf{z}\| < M^z$ будет справедливо высказывание, что на лучах $(-\infty, -M_1^x)$ и $(M_1^x, +\infty)$ функции $H_-(x; y, z, t)$ и $H_+(x; y, z, t)$ соответственно, участвующие в соотношении (1.11), определены, являются глобально единственными корнями уравнения (1.12), строго возрастают, имеют одинаковые асимптотические разложения вида

$$H_{\pm}(x; y, z, t) = x^{1/5} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_j(y, z, t) x^{-j/5} \right), \quad x \rightarrow \infty$$

и удовлетворяют равномерной по $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ оценке

$$2x^{1/5} < H_-(x; \mathbf{z}) < \frac{1}{2}x^{1/5}, \quad x < -M_1^x, \quad \frac{1}{2}x^{1/5} < H_+(x; \mathbf{z}) < 2x^{1/5}, \quad x > M_1^x. \quad (2.22)$$

Проведенный в [1, разд. 4, 6] анализ найденных численным методом интегральных кривых дает основания полагать, что в дальнейшем удастся доказать существование функции $u(x; y, z, t)$ — решения задачи (1.10), (1.11), удовлетворяющего неравенствам

$$H_-(x; \mathbf{z}) < u(x; \mathbf{z}) < 0 \text{ при } x < -M_1^x, \quad 0 < u(x; \mathbf{z}) < H_+(x; \mathbf{z}) \text{ при } x > M_1^x. \quad (2.23)$$

Далее в статье мы будем опираться на это предположение.

Займемся теперь непосредственно асимптотикой функции $u(x; y, z, t)$ при $x \rightarrow \infty$ для значений параметров $(y, z, t) = \mathbf{z}$ из ограниченного множества \mathbf{D} . Заметим, что уравнение (1.10) допускает построение формального асимптотического разложения (ФАР) в виде следующего ряда:

$$\tilde{u}(x; y, z, t) = x^{1/5} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(y, z, t) x^{-j/5}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.24)$$

Коэффициенты c_j этого разложения, являющиеся многочленами по \mathbf{z} , последовательно находятся после приравнивания членов при одинаковых степенях x результата подстановки в уравнение (1.10) ряда (2.24).

Найдем несколько первых коэффициентов:

- при x^{-5} : $0 = (c_0(\mathbf{z}))^5 - 1$; $c_0(\mathbf{z}) = 1$;
- при x^{-4} : $0 = 5c_1(\mathbf{z})$; $c_1(\mathbf{z}) = 0$;
- при x^{-3} : $0 = 5c_2(\mathbf{z}) - t$; $c_2(\mathbf{z}) = t/5$;
- при x^{-2} : $0 = 5c_3(\mathbf{z}) - z$; $c_3(\mathbf{z}) = z/5$.

В общем случае, при $k \geq -4$, имеют место уравнения следующего вида:

$$5c_{k+5}(\mathbf{z}) = G_k(\mathbf{z}), \quad (2.25)$$

где $G_k(\mathbf{z})$ есть некоторый полином по переменным c_0, c_1, \dots, c_{k+4} и параметрам (y, z, t) . Таким образом, уравнения (2.25) вместе с равенством $c_0(\mathbf{z}) = 1$ образуют рекуррентную систему, из которой последовательно определяются все коэффициенты c_0, c_1, c_2, \dots .

Теорема. Для произвольного ограниченного множества изменения параметров $\mathbf{D} = \{(y, z, t) = \mathbf{z} : \|\mathbf{z}\| < M^z\}$ и для любого значения $M_{0,n}^Y > 0$ найдутся числа $M_{1,n}^Y$ и $M_{2,n}^x > 0$ такие, что для произвольного решения $u(x; y, z, t)$ уравнения (1.10), удовлетворяющего неравенствам (2.23), и найденных выше коэффициентов ряда (2.24) равномерно по $(x, \mathbf{z}) \in \{|x| > M_{2,n}^x\} \times \mathbf{D}$ будут выполняться оценки

$$\left| u(x; y, z, t) - x^{1/5} \left(1 + \sum_{j=1}^n c_j(y, z, t) x^{-j/5} \right) \right| \leq M_{0,n}^Y |x|^{(1-n)/5}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.26)$$

$$\left| u'_x(x; y, z, t) - x^{-4/5} \left(\frac{1}{5} + \sum_{j=1}^n \frac{1-j}{5} c_j(y, z, t) x^{-j/5} \right) \right| \leq M_{1,n}^Y |x|^{(-4-n)/5}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.27)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольные числа $n \in \mathbb{N}$ и $M_{0,n}^Y > 0$. Определим две вспомогательные функции

$$Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) = P_n(x; \mathbf{z}) \pm \frac{1}{2} M_{0,n}^Y |x|^{(1-n)/5}, \quad P_n(x; \mathbf{z}) = x^{1/5} \left(1 + \sum_{j=1}^n c_j(\mathbf{z}) x^{-j/5} \right). \quad (2.28)$$

Докажем, что можно определить не зависящее от x и \mathbf{z} число $M_{3,n}^x > \max\{1, M_1^x\}$ так, чтобы равномерно на множестве

$$\mathbf{E}(M_{3,n}^x) = \{(x, \mathbf{z}) : |x| > M_{3,n}^x, \mathbf{z} \in \mathbf{D}\} \quad (2.29)$$

выполнялись неравенства

$$A(Y_{+,n}(x; \mathbf{z})) > 0, \quad A(Y_{-,n}(x; \mathbf{z})) < 0. \quad (2.30)$$

Здесь M_1^x – число, участвовавшее в соотношениях (2.22), (2.23); оператор $A(\cdot)$ определен формулой (1.10). Отметим, что все рассуждения остаются в силе при увеличении значения $M_{3,n}^x$.

Действительно, поскольку коэффициенты $c_j(\mathbf{z})$, найденные из уравнений (2.25), являются гладкими функциями параметров $(y, z, t) = \mathbf{z}$, то при достаточно большом $M_{3,n}^x$ равномерно на множестве (2.29) будут справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} |x|^{1/5} < P_n(x; \mathbf{z}) \operatorname{sgn} x < 2|x|^{1/5}, \quad (2.31)$$

$$|A(P_n(x; \mathbf{z}))| \leq M_{1,n}^A |x|^{(4-n)/5}. \quad (2.32)$$

Далее, значение оператора $A(\cdot)$ от функций (2.28) можно записать в виде

$$A(Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z})) = A(P_n(x; \mathbf{z})) \pm \frac{5}{2} (P_n(x; \mathbf{z}))^4 M_{0,n}^Y |x|^{(1-n)/5} + Q_{1,n}(x; \mathbf{z}). \quad (2.33)$$

Здесь $Q_{1,n}(x; \mathbf{z})$ представляет собой линейную, с равномерно ограниченными на множестве (2.29) коэффициентами, комбинацию следующих произведений:

$$(P_n(x; \mathbf{z}))^k |x|^{(1-n)i/5}, \quad 0 \leq k \leq 3, \quad 1 \leq i \leq 5,$$

и потому допускает равномерную на множестве (2.29) оценку

$$|Q_{1,n}(x; \mathbf{z})| \leq M_n^Q |x|^{(4-n)/5}. \quad (2.34)$$

Подставляя оценки (2.31), (2.32) и (2.34) в равенство (2.33), получим, что для некоторой постоянной $M_{2,n}^Y > 0$ равномерно на множестве (2.29) выполняется соотношение

$$\pm A(Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z})) > \pm |x|^{(5-n)/5} \left(\frac{5}{32} M_{0,n}^Y - |x|^{-1/5} M_{2,n}^Y \right).$$

Дополнительно увеличивая значение $M_{3,n}^x$, мы легко получим, что сомножитель в скобках в правой части будет оставаться положительным на всем множестве $|x| > M_{3,n}^x$. Таким образом, неравенства (2.30) установлены.

Зафиксируем произвольное решение $u(x; \mathbf{z})$ уравнения (1.10), удовлетворяющее неравенствам (2.23), и определим еще три пары вспомогательных функций $R_{\pm,n}$, $T_{\pm,n}$ и $Q_{\pm,n}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) &= \pm(u(x; \mathbf{z}) - Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z})), & T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) &= \max\{|u(x; \mathbf{z})|, |Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z})|\}, \\ Q_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) &= S_{5,\pm,n}(x; \mathbf{z}) - tS_{3,\pm,n}(x; \mathbf{z}) - zS_{2,\pm,n}(x; \mathbf{z}) - y, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где

$$S_{m,\pm,n}(x; \mathbf{z}) = \sum_{i=0}^{m-1} (u(x; \mathbf{z}))^i (Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^{m-i-1}, \quad m = 2, 3, 5. \quad (2.36)$$

Тогда, записывая с помощью этих обозначений результаты вычитания из неравенств (2.30) уравнения (1.10), получим:

$$R''_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) > R_{\pm,n}(x; \mathbf{z})Q_{\pm,n}(x; \mathbf{z}). \quad (2.37)$$

Подберем значение величины $M_{3,n}^x > 1$ таким образом, чтобы равномерно на множестве (2.29) выполнялось неравенство

$$Q_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) > 1. \quad (2.38)$$

Отметим, что для достаточно больших значений $M_{3,n}^x$ равномерно на множестве (2.29) верны оценки

$$\frac{1}{3}|x|^{1/5} < Y_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) \operatorname{sgn} x < 3|x|^{1/5}, \quad T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) > 1. \quad (2.39)$$

Также согласно неравенствам (2.22), (2.23) при $M_{3,n}^x > M_1^x$ на множестве (2.29) выполняется соотношение

$$0 < u(x; \mathbf{z}) \operatorname{sgn} x < 2|x|^{1/5}. \quad (2.40)$$

Функции (2.41) легко оценить следующим образом:

$$S_{5,\pm,n}(x; \mathbf{z}) \geq (T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^4; \quad |S_{m,\pm,n}(x; \mathbf{z})| \leq m(T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^{m-1}, \quad m = 2, 3, \quad (2.41)$$

и тогда, учитывая условие $\max\{|y|, |z|, |t|\} = \|\mathbf{z}\| < M^z$, на множестве (2.29) получим $Q_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) > (T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^4 - M^z(3(T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}))^2 + 2T_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) + 1)$. Отсюда, потребовав дополнительно выполнение неравенства $M_{3,n}^x > (6M^z + 1)^{1/2}$, сразу выводим неравенство (2.38).

Дальнейшее рассуждение связано с использованием [5, лемма 1.1]. Для удобного различения переменных переобозначим здесь переменные x и x_1 , участвующие в формулировке данной леммы, через ξ и ξ_1 соответственно. Проверим условия указанной леммы в применении ее к неравенству (2.37) относительно независимой переменной $\xi = x$, неизвестной функции $u(\xi) = R_{\pm,n}(\xi; \mathbf{z})$ при произвольном фиксированном $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ для $\beta = 1$ и $\xi_1 = M_{3,n}^x$. Легко видеть, что согласно неравенствам (2.39), (2.40) верна оценка $|R_{\pm,n}(x; \mathbf{z})| < 3|x|^{1/5}$, поэтому, очевидно, выполняется условие [5, лемма 1.1, формула (1.2)]. Неравенство [5, лемма 1.1, формула (1.1)] очевидным образом следует из доказанных выше неравенств (2.37), (2.38). Итак, все условия [5, лемма 1.1] выполнены. Совершенно аналогично можно получить справедливость условий данной леммы по отношению к неравенству (2.37) для независимой переменной $\xi = -x$, неизвестной функции $u(\xi) = R_{\pm,n}(-\xi; \mathbf{z}) = R_{\pm,n}(x; \mathbf{z})$ при произвольном фиксированном $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ для $\beta = 1$ и $\xi_1 = M_{3,n}^x$. Объединяя полученные результаты, приходим к выводу, что для некоторого фиксированного значения $M_{3,n}^x$ при любых $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ справедливы соотношения

$$R_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) \leq |R_{\pm,n}(M_{3,n}^x; \mathbf{z})| \exp(M_{3,n}^x - x), \quad x > M_{3,n}^x, \\ R_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) \leq |R_{\pm,n}(-M_{3,n}^x; \mathbf{z})| \exp(M_{3,n}^x + x), \quad x < -M_{3,n}^x.$$

Используя их вместе с оценкой $|R_{\pm,n}(x; \mathbf{z})| < 3|x|^{1/5}$ при $|x| > M_{3,n}^x$ и применяя известное соотношение $\exp(-|x|) = o(|x|^{-n/5})$ при $x \rightarrow \infty$, мы можем легко найти число $M_{2,n}^x > M_{3,n}^x$ такое, что

$$R_{\pm,n}(x; \mathbf{z}) < \frac{1}{2}M_{0,n}^Y |x|^{(1-n)/5}, \quad |x| > M_{2,n}^x. \quad (2.42)$$

Подставив равенства (2.28) и (2.35) в оценку (2.42), мы сразу придем к требуемому неравенству (2.26).

Займемся оценкой (2.27); для удобства докажем ее только для положительных значений x из множества $|x| > M_{2,n}^x$, поскольку доказательство для отрицательных чисел из этого множества совершенно аналогичное. Также удобно рассматривать лишь достаточно большие $n > N_0$, но очевидно, что полученный результат легко можно распространить на случай произвольного $n \in \mathbb{N}$. Заметим вначале, что справедливо следующее равенство:

$$u'(x; \mathbf{z}) = \int_x^{+\infty} \omega(u(\xi; \mathbf{z}), \xi; \mathbf{z}) d\xi, \quad x > M_{2,n}^x, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{D}, \quad (2.43)$$

где функция $\omega(u, x; y, z, t)$ определена тождеством, входящим в состав соотношения (1.12). Действительно, рассмотрим последовательность $x_k(\mathbf{z}) = M_{2,n}^x + n \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку при $k \rightarrow \infty$ выполняется $P'_n(x; \mathbf{z}) \rightarrow 0$, то $P_n(x_k + 1; \mathbf{z}) - P_n(x_k; \mathbf{z}) \rightarrow 0$ и, значит, согласно (2.26) разность $u(x_k + 1; \mathbf{z}) - u(x_k; \mathbf{z}) \rightarrow 0$, а тогда из формулы конечных приращений вытекает существование последовательности $\theta_k \rightarrow +\infty$ такой, что $u'(\theta_k; \mathbf{z}) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, несложно видеть, что из неравенства (2.26) следует оценка

$$|\omega(u(x; \mathbf{z}), x; \mathbf{z}) - \omega(P_n(x; \mathbf{z}), x; \mathbf{z})| < M_n^\omega |x|^{-n_0}, \quad |x| > M_{2,n}^x, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{D}. \quad (2.44)$$

Здесь и ниже $n_i = n_i(n)$ — такие натуральные числа, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (n_i(n)/n) = 1/5$; M_n^ω — положительная постоянная. Заметим также, что в силу рекуррентной системы уравнений для коэффициентов $c_j(\mathbf{z})$ справедлива оценка $\omega(P_n(\xi; \mathbf{z}), \xi; \mathbf{z}) = O(\xi^{-9/5})$ при $\xi \rightarrow \infty$. Согласно неравенству (2.44) такая же оценка справедлива и для $\omega(u(\xi; \mathbf{z}), \xi; \mathbf{z})$, а значит, интеграл в правой части соотношения (2.43) сходится. Поэтому, интегрируя уравнение (1.10) в пределах от x до θ_k и переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, мы сразу получим равенство (2.43).

Далее, интегрируя оценку (2.44) в пределах от x до $+\infty$ и используя равенство (2.43), при $x > M_{2,n}^x$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{D}$ выводим

$$\begin{aligned} \left| P'_n(x; \mathbf{z}) - \int_x^{+\infty} \omega(P_n(\xi; \mathbf{z}), \xi; \mathbf{z}) d\xi \right| &\leq M_{1,n}^P x^{-n_1}, \\ |u'(x; \mathbf{z}) - P'_n(x; \mathbf{z})| &\leq M_{2,n}^P x^{-n_2}, \end{aligned}$$

где $M_{1,n}^P, M_{2,n}^P$ — положительные постоянные. Отсюда стандартным асимптотическим способом легко прийти к искомой оценке (2.27). Теорема доказана.

3. Смещение ударного слоя из точки $x = 0$

Цель данного раздела — показать дополнительную сложность получения равномерной асимптотики главного члена внутреннего разложения решения исходного УЧП (0.1) — решения задачи (1.10), (1.11) — при $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \rightarrow \infty$ по сравнению со случаем катастрофы типа “сборка”, исследованным в статьях [3–5]. Здесь кроме исчезновения при $z \neq 0$ нечетности линия корня уравнения (1.12) может происходить смещение абсциссы центра локализации ударного слоя (резкого изменения решения) за пределы конечной окрестности точки $x = 0$.

Ниже приведены результаты численных расчетов для решения задачи (1.10), (1.11) с фиксированными коэффициентами $y = -20$, $z = 0$, $t = 8.5$, выбранными таким образом, чтобы линия корня уравнения (1.12) была нечетной и имела при положительных x два ярко выраженных изгиба, отстоящих от линии $x = 0$ (см. рис. 1–3). Нечетность линии корня позволяет строить решение задачи (1.10), (1.11) в виде продолженного по нечетности на отрицательную полуось решения $u(x)$ задачи Коши для уравнения

$$u_{xx} = u^5 - 8.5u^3 + 20u - x \quad (3.1)$$

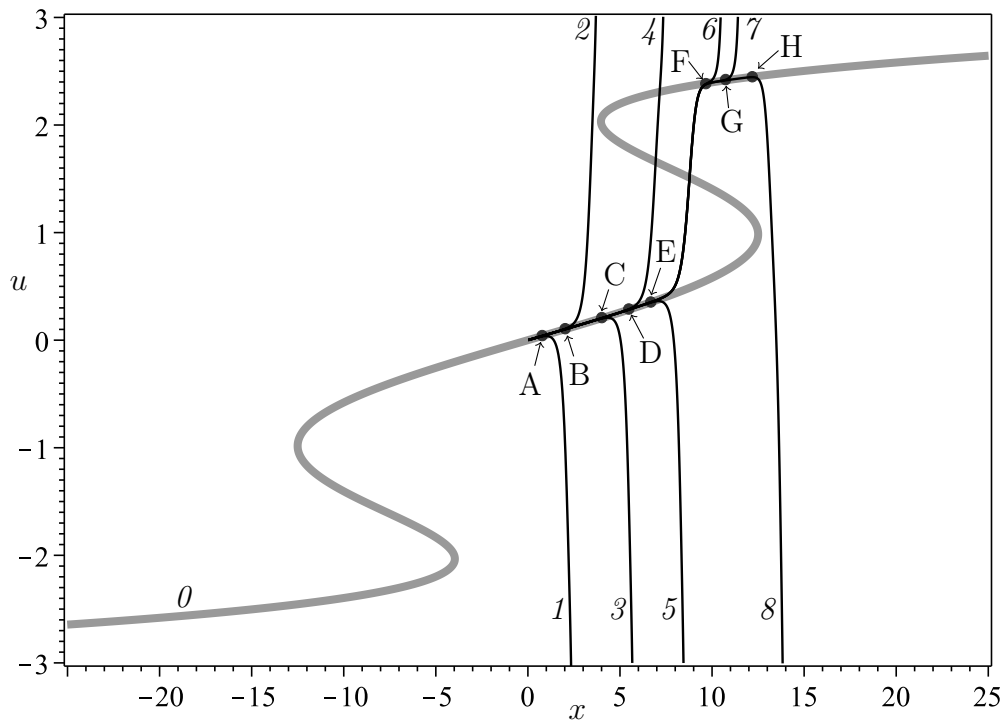


Рис. 1. Численно найденные интегральные кривые задачи Коши (3.1), (3.2) с начальными скоростями, определенными в результате процедуры бинарного поиска. Нумерация кривых: 1 — результат выполнения 10 шагов алгоритма, 2 — 20 шагов, . . . , 7 — 70 шагов, 8 — 85 шагов; 0 — линия корня уравнения (1.12). Буквами А–Н показаны точки, в которых наступает срыв соответствующей кривой 1–8.

с начальными условиями

$$u(0) = 0, \quad u_x(0) = \alpha \tag{3.2}$$

и вновь, как и в статье [1], воспользоваться бинарным поиском начальной скорости α , принцип которого состоит в следующем.

Для выбираемого на m -м шаге поиска значения начальной скорости $\alpha = \alpha_m$ была найдена интегральная кривая задачи Коши (3.1), (3.2) с использованием явного метода Рунге — Кутты — Фельберга (4,5) [11] с переменным шагом интегрирования и контролем точности. Такая интегральная кривая либо проходит сквозь линию корня $u = H_+(x) = H_+(x; -20, 0, 8.5)$ и быстро уходит вверх, стремясь к $+\infty$ (первое состояние), либо, если начальная скорость (3.2) оказывается недостаточной, не может приблизиться к этой линии и срывается вниз, к $-\infty$ (второе состояние). Такая дискретность поведения интегральных кривых связана с тем, что верхняя ветвь $u = H_+(x)$ линии корня уравнения (1.12) состоит из точек отталкивания, затухающего при приближении к линии и быстро растущего при удалении от нее вверх или вниз (как, впрочем, и нижняя ветвь $u = H_-(x)$, которая в данном случае не оказывает влияния на интегральную кривую, поскольку находится левее точки $x = 0$). При этом другие части линии корня, среди которых есть и участки, состоящие из точек притяжения, являются ограниченными в горизонтальном направлении, в связи с чем оказывают влияние на поведение интегральной кривой только на ограниченном интервале значений x .

Перед запуском алгоритма поиска вручную подбирался исходный диапазон $[a_0, b_0]$ значений начальной скорости $\alpha = u_x(0)$ с единственным требованием к числам a_0, b_0 : интегральная кривая задачи (3.1), (3.2) с $\alpha = b_0$ должна находиться в первом состоянии, а кривая, соответствующая $\alpha = a_0$, — во втором состоянии. В качестве α_{m+1} всегда выбиралась середина отрезка $[a_m, b_m]$, $m = 0, 1, \dots$, а в качестве нового диапазона $[a_{m+1}, b_{m+1}]$ — тот из отрезков $[a_m, \alpha_{m+1}]$, $[\alpha_{m+1}, b_m]$, границы которого соответствуют интегральным кривым, находящимся в различных состояниях.

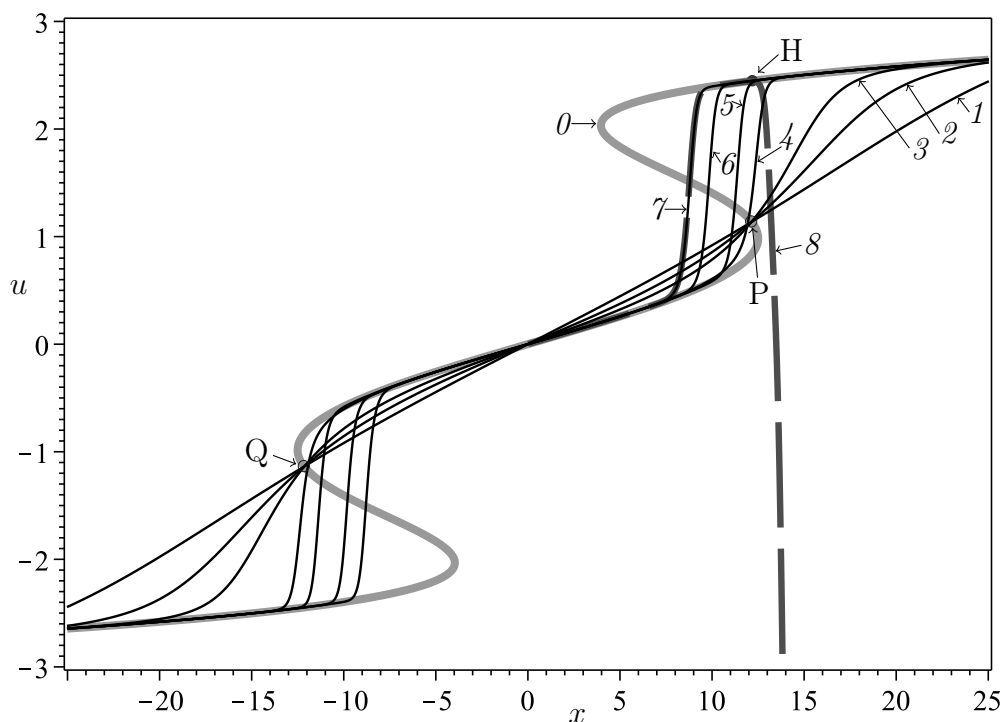


Рис. 2. Результаты применения итерационной процедуры (3.3). Нумерация кривых: 1 — результат выполнения 100 итераций, 2 — 500 итераций, 3 — 1000, 4 — 4000, 5 — 10 000, 6 — 30 000, 7 — 120 000 итераций. Кроме того, на рисунке представлены под номером 8 интегральная кривая задачи Коши (3.1), (3.2), т. е. кривая 8 рис. 1 с указанием точки срыва Н, и под номером 0 — линия корня уравнения (1.12). Буквами Р и Q отмечены точки, остающиеся неподвижными для первых 2 000 итераций.

На рис. 1 приведена интегральная кривая 8, полученная на 85-м шаге такого алгоритма при начальной скорости $\alpha = 0.0500159995213570833355675$, а также указаны интегральные кривые 1–7, найденные на некоторых предшествующих шагах (10–70). Важно подчеркнуть, что данные кривые хорошо приближают искомое решение задачи (1.10), (1.11) только до соответствующих точек срыва, обозначенных на рис. 1 буквами А–Н; части кривых, лежащие правее соответствующих точек срыва, не рассматриваются в дальнейших рассуждениях.

Использование данного метода приближения позволило за относительно небольшое количество шагов бинарного поиска получить точное представление о месте резкого скачка приближаемого решения, который происходит между абсциссами $x = 7.6$ и $x = 9.2$. Ограничения применимости этого подхода связаны с потенциальной неустойчивостью явного метода Рунге — Кутты — Фельберга (4,5) для уравнения второго порядка (1.10) с нелинейностью 5-го порядка в правой части и невозможностью его применения без знания начальной точки, что представляет затруднение при решении задачи (1.10), (1.11) для значений $z \neq 0$. Кроме того, построенные таким образом кривые хорошо приближают искомое решение лишь на небольшом интервале значений $0 < x < x_m$ и срываются вниз или вверх при $x > x_m$.

Поэтому наряду с данным методом применялась давно зарекомендовавшая себя как устойчивая схема простой итерации, не требующая знания такой начальной точки и позволяющая сразу строить кривую на широком интервале абсцисс. Была задана равномерная сетка $x[k] = k\Delta x$, $k = -K, -K + 1, \dots, K$, где $K = 3200$, $\Delta x = M^\Delta/R$, $M^\Delta = 28.7$, $R = 800$. Число M^Δ было выбрано так, чтобы, с одной стороны, при $x > M^\Delta$ функция $u = H_+(x)$ была глобально единственным корнем уравнения (1.12), а с другой — интервал $|x| < M^\Delta$ не слишком сильно превосходил зону всех основных изгибов линии корня (1.12), рядом с которыми можно было бы ожидать появления скачка решения. Начальные значения искомой функции

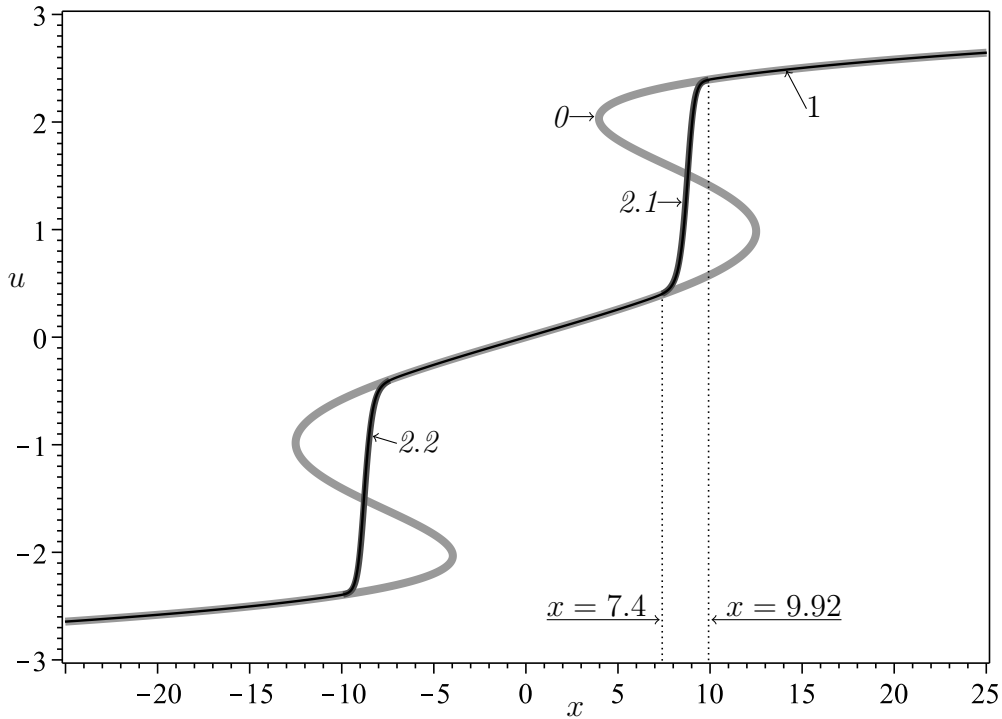


Рис. 3. Локализация ударного слоя и объединение результатов, полученных двумя методами. Здесь 1 – это линия 7 рис. 2; линия 2.1 – первый участок ударного слоя – представляет собой фрагмент кривой 8 рис. 1; линия 2.2 – второй участок ударного слоя – получена симметричным отражением линии 2.1; 0 – линия корня уравнения (1.12).

были заданы принадлежащими линии корня $u = H_{\pm}(x)$ при $|x| \geq M^{\Delta}$:

$$u[k, 0] = H_{-}(x[k]), \quad k = -K, \dots, -R, \quad u[k, 0] = H_{+}(x[k]), \quad k = R, \dots, K$$

и лежащими на соединительной прямой линии при $|x| < M^{\Delta}$:

$$u[k, 0] = k \left((u[R, 0] - u[-R, 0]) / (2R) \right) + u[-R, 0], \quad k = -R + 1, \dots, R - 1.$$

Итерационная процедура при переходе от i -го к $(i + 1)$ -му шагу была определена формулами

$$P[k, i + 1] = -f(x[k], u[k, i]) + \frac{(u[k - 1, i] - 2u[k, i] + u[k + 1, i])}{(\Delta x)^2}, \quad k = -K + 1, \dots, K - 1;$$

$$u[k, i + 1] = u[k, i] + 0.05 (\Delta x)^2 P[k, i + 1], \quad k = -K + 1 \dots, K - 1; \quad u[\pm K, i + 1] = u[\pm K, i]. \quad (3.3)$$

По этой схеме было произведено 120 000 итераций расчеты производились в системе Maple с повышенной до 80 десятичных знаков в мантиссе числа точностью вычислений; на рис. 2 выборочно представлены результаты этих вычислений. Как видно, в интервалах абсцисс, характеризующих глобальной единственностью корня уравнения (1.12), соответствующие участки кривых быстро приходят в стационарное положение, совпадающее в общих точках (и с учетом ограничения – только до точки срыва Н) с интегральной кривой 8 рис. 2.

Автору статьи представляется интересным следующее наблюдение. Для кривых, полученных на начальных (с номерами примерно до 2 000) итерациях, отчетливо видны две симметрично расположенные общие точки (отмечены буквами Р и Q на рис. 2) всех этих кривых, в которых все они пересекают линию корня уравнения (1.12). При дальнейшем повторении итерационной процедуры точки пересечения кривых и линии корня перестают быть неподвижными точками Р и Q и начинают смещаться соответственно по направлениям к участкам 2.1 и 2.2, выделенным на рис. 3.

На рис. 3 произведено объединение результатов, полученных двумя методами. Под номером 1 здесь выступает линия 7 рис. 2, найденная при выполнении 120 000 итераций; она с большой точностью приближает решение задачи (1.10), (1.11) на всем рассматриваемом промежутке $|x| < 25$. Ударный слой здесь показан линиями 2.1 и 2.2, первая из которых представляет собой фрагмент кривой 8 рис. 1, являющейся интегральной кривой задачи Коши (3.1), (3.2); а линия 2.2 получена отражением по нечетности линии 2.1.

Итак двумя независимыми методами численного расчета было установлено, что ударный слой для решения задачи (1.10), (1.11) может иметь локализацию вне конечной окрестности точки $x = 0$. Для рассмотренного выше примера (3.1), согласно рис. 3, таких ударных слоев два, они расположены симметрично, приблизительно в интервалах $7.4 < x < 9.92$ и $-9.92 < x < -7.4$, и гарантированно не входят в пределы окрестности нуля $|x| < 6.5$.

4. Заключение

В работе рассмотрено трехмерное нелинейное волновое уравнение с плавным изменением источникового члена уравнения во времени и в пространстве за счет наличия малого параметра. В рамках метода согласования асимптотических разложений произведен анализ поведения решения этого УЧП около типичной точки катастрофы типа “бабочка”. Исследование было сфокусировано на нелинейном ОДУ второго порядка, зависящем от трех параметров, которому должен удовлетворять главный член внутреннего асимптотического разложения, построенного вблизи точки катастрофы. Была доказана теорема о равномерной на ограниченном множестве изменения параметров асимптотике на бесконечности по независимой переменной специального решения, описывающего быструю перестройку решения исходного УЧП в малой окрестности точки катастрофы, согласующегося с разложением во внешнем слое. Кроме того, в статье приведен пример значений параметров, при которых ударный слой локализуется вне конечной окрестности нуля. Возможность возникновения такой ситуации представляет собой существенное отличие катастрофы типа “бабочка” от исследованной ранее катастрофы типа “сборка”.

Автор выражает глубокую признательность Б. И. Сулейманову за полезные советы и обсуждение результатов работы, а также Р. Н. Гарифуллину за ценные замечания о процедуре метода простой итерации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khachay O.Y., Nosov P.A. On some numerical integration curves for PDE in neighborhood of “butterfly” catastrophe point // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 127–140. <https://umjuran.ru/index.php/umj/article/view/66>. doi: 10.15826/umj.2016.2.011.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 799–851.
3. Сулейманов Б.И. Катастрофа сборки в медленно меняющихся положениях равновесия // Журн. эксперимент. и теор. физики. 2002. Т. 122, № 5 (11). С. 1093–1106.
4. Ильин А.М., Сулейманов Б.И. О двух специальных функциях, связанных с особенностью сборки // Докл. РАН. 2002. Т. 387, № 2. P. 156–158.
5. Ильин А.М., Сулейманов Б.И. Зарождение контрастных структур типа ступеньки, связанное с катастрофой сборки // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 12. С. 27–46.
6. Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса. Эволюция диссипативных структур. М.: Наука, 1987, 352 с.
7. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989, 336 с.
8. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Т.1 М: Мир, 1984. 350 с.
9. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2004. 400 с.

10. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. I. 4-е, исправленное изд. М.: МЦНМО, 2002. 664 с.
11. Fehlberg E. Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control // NASA Technical Report R-315. 1969. 43 p.

Хачай Олег Юрьевич
канд. физ.-мат. наук,
доцент

Поступила 21.02.2017

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: khachay@yandex.ru

REFERENCES

1. Khachay O. Y., Nosov P.A. On some numerical integration curves for PDE in neighborhood of “butterfly” catastrophe point. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 127–140.
<https://umjuran.ru/index.php/umj/article/view/66>. doi: 10.15826/umj.2016.2.011.
2. Vasil’eva A.B., Butuzov V.F., Nefedov N.N. Contrast structures in singularly perturbed problems. *Fundam. Prikl. Mat.*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 799–851 (in Russian).
3. Suleimanov B.I. Cusp catastrophe in slowly varying equilibriums. *J. Exp. Theor. Phys.*, 2002, vol. 95, no. 5, pp. 944–956. doi: 10.1134/1.1528687.
4. П’ин А.М., Сuleimanov B.I. On two special functions related to fold singularities. *Doklady Mathematics*, 2002, vol. 66, no. 3, pp. 327–329.
5. П’ин А.М., Сuleimanov B.I. *Birth of step-like contrast structures connected with a cusp catastrophe*. *Sbornik Mathematics*, 2004, vol. 195, no. 12, pp. 1727–1746. doi: 10.1070/SM2004v195n12ABEH000863.
6. Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. *Mathematical modelling of heat and mass transfer processes*. Ser. Mathematics and its Appl., vol. 348, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1995, 316 p. ISBN: 0-7923-3789-1. Transl. from the 1987 Russian original *Matematicheskoe modelirovanie protsessov teplomassoperenosa. Evolyutsiya dissipativnykh struktur*, Moscow, Nauka Publ., 1987, 352 p.
7. П’ин А.М. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Ser. Transl. Math. Monogr, vol. 102, Providence, Amer. Math. Soc., 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5. Original Russian text published in *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenij reshenij kraevykh zadach* Moscow, Nauka Publ., 1989, 336 p.
8. Gilmore R. *Catastrophe theory for scientists and engineers*. New York: Dover Publications, 1993, 666 p. ISBN: 0486675394. A reprint of the Wiley edition of 1981. Translated under the title *Prikladnaja teorija katastrof*. Vol. 1. M: Mir Publ., 1984. 350 p.
9. Vladimirov V.S., Jarinov V.V. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2004, 400 p. ISBN: 5-9221-0310-5.
10. Zorich Vladimir A. *Mathematical Analysis I*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 2004, 574 p. ISBN: 978-3-540-87451-5. Original Russian text published in *Matematicheskij analiz. Ch. I*. Moscow Publ.: MCNMO, 2002, 664 p.
11. Fehlberg E. Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control. *NASA Technical Report R-315*, 1969, 43 p.

The paper was received by the Editorial Office on February 21, 2017.

Oleg Jur’evich Khachay, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: khachay@yandex.ru

УДК 517.968.4

О НЕТРИВИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА УРЫСОНА¹

Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, А. А. Сисакян

Статья посвящена изучению и решению одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на положительной полупрямой. Частные случаи рассматриваемых уравнений применяются в различных областях математической физики. Такие уравнения возникают, в частности, в кинетической теории газов, в теории переноса излучения и в p -адической математической физике. Предполагается, что сверточный оператор Гаммерштейна со степенной нелинейностью является минорантой в смысле М. А. Красносельского для исходного оператора Урысона. Доказывается теорема существования неотрицательных нетривиальных и ограниченных решений. Более того, найден предел построенного решения в бесконечности. В одном частном случае установлена монотонность построенного решения. Доказательство основной теоремы носит конструктивный характер. Подход к доказательству теоремы основан на построении инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора Урысона. Приведены частные примеры рассматриваемых уравнений, представляющие самостоятельный интерес.

Ключевые слова: уравнение Урысона, условие Каратеодори, уравнение Вольтерра, итерация, монотонность, ограниченное решение.

Kh. A. Khachatryan, A. S. Petrosyan, A. A. Sisakyan. On the nontrivial solvability of one class of nonlinear integral equations of the Urysohn type.

This paper is devoted to the study and solution of one class of nonlinear integral equations of the Urysohn type on the positive half-line. Special cases of such equations are applied in various areas of mathematical physics. They appear, in particular, in kinetic gas theory, in radiative transfer theory, and in p -adic mathematical physics. It is assumed that the Hammerstein convolution operator with a power nonlinearity is a minorant in the Krasnoselskii sense for the Urysohn operator. We prove a theorem of existence of nonnegative nontrivial bounded solutions. In addition, we find the limit of the constructed solution at infinity. The monotonicity of the solution is established in a special case. The proof of the main theorem is of constructive nature. The proof is based on the construction of invariant conical segments for the corresponding nonlinear Urysohn operator. In the end of the paper, we give examples of equations of the described type that are of independent interest.

Keywords: Urysohn equation, Caratheodory condition, Volterra equation, iteration, monotonicity, bounded solution.

MSC: 47H30

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-266-273

1. Введение и формулировка основного результата

1.1. Введение

Работа посвящена исследованию класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона

$$f(x) = \int_0^{\infty} U(x, t, f(t)) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+ \equiv [0, +\infty), \quad (1)$$

относительно искомой измеримой и вещественной функции $f(x)$. В уравнении (1) ядро Урысона $U(x, t, z)$ определено на множестве $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, принимает вещественные значения, удовлетворяет условию “критичности”:

$$U(x, t, 0) \equiv 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (2)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта No SCS 16YR-1A002.

и некоторым дополнительным условиям (см. формулировку теоремы).

Следует отметить, что различными частными случаями уравнения (1) описывается ряд задач в математической физике. В частности, такие уравнения возникают в кинетической теории газов, в p -адической теории струны, в теории переноса излучения (см. [1–3]).

История изучения и решения нелинейных интегральных уравнений началась в 1920-е годы с работы [4], где соответствующие нелинейные уравнения были рассмотрены на ограниченных множествах. В дальнейшем в работах М.А. Красносельского, Ф. Браудера, П. П. Забрейко, Н. Бобылева, Дж. Банаса эти уравнения были подробно и систематически исследованы (см. [5–7] и ссылки в них). Этими авторами разработан ряд интересных и эффективных методов построения неотрицательных (нетривиальных) решений для подобных уравнений.

Однако следует отметить, что классическая теория, как правило, ограничивается исследованием тех нелинейных уравнений, у которых соответствующие операторы являются компактными в рассматриваемых банаховых пространствах. В большинстве случаев сами уравнения исследуются на ограниченных множествах числовой прямой.

В недавних работах [8–10] проведены детальные и систематические исследования нелинейных уравнений вида (1) в случае, когда для соответствующего оператора Урысона линейной минорантой в смысле М.А. Красносельского служат различные модификации консервативного интегрального оператора Винера — Хопфа.

В настоящей статье в предположении, что сверточный оператор Гаммерштейна со степенной нелинейностью является минорантой для исходного оператора Урысона, доказано существование неотрицательного нетривиального и ограниченного решения уравнения (1). Более того, найден предел построенного решения в бесконечности. В конце работы приведены частные примеры уравнения (1), для которых выполняются все условия сформулированной теоремы.

1.2. Формулировка основного результата

Пусть функция $K(\tau)$ определена на множестве \mathbb{R} и удовлетворяет следующим условиям:

$$K \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^j K(\tau) d\tau < +\infty, \quad j = 1, 2; \quad (3)$$

$$K(-x) = K(x), \quad x \geq 0; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) d\tau = 1; \quad K(\tau) \downarrow \text{ по } \tau \text{ на } \mathbb{R}^+; \quad (4)$$

$$K(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Пусть далее $\lambda(x)$ определена на \mathbb{R}^+ и обладает свойствами

$$0 \leq \lambda(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}^+; \quad x^j(1 - \lambda(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad \lambda \in C(\mathbb{R}^+), \quad j = 0, 1; \quad (6)$$

$$\lambda(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+ \text{ и } \lim_{x \rightarrow +\infty} \lambda(x) = 1. \quad (7)$$

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема. Пусть существуют числа $\xi > 0$ и $\alpha \in (0, 1)$ такие, что

- 1) $U(x, t, z) \geq \lambda(x)(K(x-t) - K(x+t))z^\alpha \xi^{1-\alpha} \quad \forall (x, t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times [0, \xi] \equiv \Omega_\xi;$
- 2) при каждом фиксированном $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ функция $U(x, t, z) \uparrow$ по z на $[0, \xi];$
- 3) $\int_0^\infty U(x, t, \xi) dt \leq \xi \quad \forall x \in \mathbb{R}^+;$

4) функция $U(x, t, z)$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу z на множестве Ω_ξ , т. е. при каждом фиксированном $z \in [0, \xi]$ функция $U(x, t, z)$ измерима по $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ и почти при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ эта функция непрерывна по z на отрезке $[0, \xi]$;

5) для каждой измеримой функции $\varphi(t): 0 \leq \varphi(t) \leq \xi, t \in \mathbb{R}^+$, функция $\int_0^\infty U(x, t, \varphi(t)) dt$ измерима по x .

Тогда уравнение (1) имеет неотрицательное и нетривиальное решение $f(x)$, причем

$$0 \leq f(x) \leq \xi, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \xi.$$

2. Доказательство теоремы и частные примеры

2.1. Доказательство теоремы

Проведем пошаговое доказательство.

Шаг I. Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее однородное интегральное уравнение Вольтерра с переменным нижним пределом:

$$\psi(x) = \int_x^\infty [v(t-x) - v(t+x)]\psi(t) dt, \quad x \geq 0, \quad (8)$$

относительно искомой функции $\psi(x)$, где

$$v(x) = 2K(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (9)$$

Нетрудно можно убедиться, что уравнение (8) обладает неотрицательным нетривиальным монотонно возрастающим непрерывным и ограниченным решением $\psi(x)$, которое зафиксируем для дальнейшего изложения (см. [11]).

Шаг II. Рассмотрим теперь интегральное уравнение

$$\sigma(x) = \lambda(x) \int_x^\infty [v(t-x) - v(t+x)]\sigma(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (10)$$

Ниже убедимся, что уравнение (10) обладает неотрицательным нетривиальным монотонно возрастающим непрерывным и ограниченным решением $\sigma(x)$.

С этой целью рассмотрим неоднородное интегральное уравнение

$$\rho(x) = (1 - \lambda(x))\psi(x) + \lambda(x) \int_x^\infty [v(t-x) - v(t+x)]\rho(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (11)$$

Прямой проверкой можно убедиться, что $\rho_1(x) = \psi(x)$ удовлетворяет уравнению (11).

Убедимся, что уравнение (11), кроме этого решения, обладает также неотрицательным суммируемым и ограниченным решением $\rho^*(x)$. Для этого сначала рассмотрим неоднородное интегральное уравнение типа свертки

$$Q(x) = (1 - \lambda(x)) \sup_{x \geq 0} \psi(x) + \int_x^\infty v(t-x)Q(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (12)$$

Из результатов работы [12, § 3, лемма 3.6] следует, что при условиях (3)–(7), (9) уравнение (12) имеет неотрицательное непрерывное суммируемое и ограниченное решение $Q(x)$.

Теперь для уравнения (11) рассмотрим простые итерации

$$\rho_{n+1}(x) = (1 - \lambda(x))\psi(x) + \lambda(x) \int_x^\infty [v(t - x) - v(t + x)]\rho_n(t)dt, \rho_0(x) \equiv 0, n = 0, 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}^+.$$

Индукцией по n можно легко убедиться в достоверности следующих фактов:

- a) $\rho_n \in C(\mathbb{R}^+)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- b) $\rho_n(x) \uparrow$ по n , $x \in \mathbb{R}^+$;
- c) $\rho_n(x) \leq Q(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}^+$;
- d) $\rho_n(x) \leq \psi(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}^+$.

Таким образом, последовательность непрерывных функций $\{\rho_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет поточечный предел при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x) = \rho^*(x)$, причем предельная функция удовлетворяет уравнению (11) по теореме Б. Леви (см. [13, гл. 5, §5, теорема 7]).

Из b) и c) следует также, что

$$(1 - \lambda(x))\psi(x) \leq \rho^*(x) \leq Q(x), \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{13}$$

Так как $Q \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то из (13) следует, что $\rho^* \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$. Поскольку свертка двух суммируемых и ограниченных функций — непрерывная функция, то с учетом того, что $\lambda, \psi \in C(\mathbb{R}^+)$, из (11) следует $\rho^* \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, $\rho^* \in C(\mathbb{R}^+)$. Из d) вытекает также, что $\rho^*(x) \leq \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Поскольку функции ρ^* и ψ имеют разные асимптотические поведения, то $\rho^*(x) \neq \psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Очевидно, что функция $\sigma(x) = \psi(x) - \rho^*(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяет уравнению (10) и обладает свойствами

$$\sigma(x) \geq 0, \quad \sigma(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

$$\sigma \in L_\infty(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+).$$

Шаг III. Докажем, что уравнение (10) обладает также монотонно возрастающим решением $\sigma^*(x) : \sigma^*(x) \geq \sigma(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$. Для этого рассмотрим следующие итерации:

$$\sigma_{n+1}(x) = \lambda(x) \int_x^\infty [v(t - x) - v(t + x)]\sigma_n(t)dt, \quad \sigma_0(x) = \sup_{x \geq 0} \sigma(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Индукцией по n можно проверить, что

- 1) $\sigma_n(x) \downarrow$ по n ;
- 2) $\sigma_n \in C(\mathbb{R}^+)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- 3) $\sigma_n(x) \geq \sigma(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, x \in \mathbb{R}^+$;
- 4) $\sigma_n(x) \uparrow$ по x на \mathbb{R}^+ , $n = 0, 1, 2, \dots$.

Значит, последовательность функций $\{\sigma_n(x)\}_{n=0}^\infty$ имеет предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma^*(x)$, причем

- a) σ^* удовлетворяет уравнению (10) по теореме Б. Леви;
- b) σ^* — непрерывная функция на \mathbb{R}^+ (доказывается аналогично, как при шаге II);
- c) $\sigma^*(x) \uparrow$ по x на \mathbb{R}^+ ;
- d) $\sigma^*(x)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$\sigma(x) \leq \sigma^*(x) \leq \sup_{x \geq 0} \sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

В силу линейности уравнения (10) функция

$$\tilde{\sigma}(x) = \frac{\sigma^*(x)}{\delta} \xi \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{14}$$

будет также удовлетворять уравнению (10) и обладать свойствами b) и c), где $\delta \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma^*(x)$.

Шаг IV. Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна со степенной нелинейностью:

$$\omega(x) = \lambda(x) \int_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t)) \omega^\alpha(t) \xi^{1-\alpha} dt, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (15)$$

Для уравнения (15) введем специальные последовательные приближения

$$\omega_{n+1}(x) = \lambda(x) \int_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t)) \omega_n^\alpha(t) \xi^{1-\alpha} dt, \quad (15')$$

$$\omega_0(x) \equiv \xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Индукцией по n докажем, что

$$\omega_n \downarrow \text{ по } n,$$

$$\omega_n(x) \geq \tilde{\sigma}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+. \quad (16)$$

В силу того что $K(x-t) \geq K(x+t) \forall (x, t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $1 \geq \lambda(x) \geq 0$, имеем

$$\omega_1(x) \leq \int_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t)) \omega_0^\alpha(t) \xi^{1-\alpha} dt \leq \xi \int_0^{\infty} K(x-t) dt \leq \xi = \omega_0(x),$$

ибо $\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) d\tau = 1$.

Предполагая, что $\omega_n(x) \leq \omega_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ и учитывая монотонность функции z^α , $\alpha \in (0, 1)$, $z \in \mathbb{R}^+$, из (15') получим $\omega_{n+1}(x) \leq \omega_n(x)$. Теперь докажем (16). При $n = 0$ в силу (14) будем иметь

$$\omega_0(x) \equiv \xi \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/(1-\alpha)} \xi \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/(1-\alpha)} \xi \frac{\sigma^*(x)}{\delta} = \tilde{\sigma}(x).$$

Предположим, что $\omega_n(x) \geq \tilde{\sigma}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Тогда из (15') и (14) выводим

$$\begin{aligned} \omega_{n+1}(x) &\geq \lambda(x) \int_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t)) \xi^{1-\alpha} (\tilde{\sigma}(t))^\alpha dt \\ &\geq 2\lambda(x) \int_0^{\infty} (K(x-t) - K(x+t)) \tilde{\sigma}(t) dt \geq \lambda(x) \int_x^{\infty} (v(t-x) - v(t+x)) \tilde{\sigma}(t) dt = \tilde{\sigma}(x). \end{aligned}$$

Индукцией также можно убедиться, что

$$\omega_n(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\omega_n \in C(\mathbb{R}^+), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, имеем

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(x) = \omega(x),$$

$$\omega \in C(\mathbb{R}^+), \quad \omega(x) \uparrow \text{ по } x \text{ на } \mathbb{R}^+,$$

$$\tilde{\sigma}(x) \leq \omega(x) \leq \xi, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

ω удовлетворяет уравнению (15).

Обозначим через $\beta \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega(x) > 0$. Тогда в силу предельных соотношений для операции свертки из (15) получим $\beta = \xi^{1-\alpha} \beta^\alpha \Rightarrow \beta = \xi$, ибо $\beta > 0$.

Шаг 5. Для основного уравнения (1) рассмотрим итерации

$$f_{n+1}(x) = \int_0^\infty U(x, t, f_n(t)) dt, \quad f_0(x) = \omega(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Индукцией по n можно доказать, что

$$f_n(x) \uparrow \text{ по } n,$$

f_n — измеримые функции,

$$f_n(x) \leq \xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, причем

$f(x)$ — измеримая функция,

$f(x)$ удовлетворяет уравнению (1),

$$\omega(x) \leq f(x) \leq \xi, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

По теореме о двух милиционерах существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \xi$. Теорема доказана.

2.2. Частные примеры

В конце работы приведем несколько примеров функции $U(x, t, z)$, для которой выполняются все условия доказанной теоремы:

I) $U(x, t, z) = K(x - t)G(z)$,

II) $U(x, t, z) = \lambda(x)K(x - t)G(z)$,

III) $U(x, t, z) = \lambda(x)(K(x - t) - K(x + t))G(z) + K(x + t)G_0(z)$,

где функции λ и K обладают свойствами (3)–(7), а G и G_0 удовлетворяют следующим условиям:

1) $G(z) \geq z^\alpha \xi^{1-\alpha}$, $z \in [0, \xi]$, $G_0(z) \geq 0$, $z \in [0, \xi]$,

2) $G(\xi) = G_0(\xi) = \xi$,

3) G и $G_0 \uparrow$ по z на отрезке $[0, \xi]$,

4) $G, G_0 \in C[0, \xi]$.

Конкретными примерами функций G и G_0 могут служить функции

a) $G(z) = z^\alpha \xi^{1-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$,

a₀) $G_0(z) = z^p \xi^{1-p}$, $p > 0$,

b) $G(z) = z^\alpha \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^{1-\alpha} + \sin^2 \alpha z$,

b₀) $G_0(z) = z + \frac{\xi}{\pi n} \sin^2 \frac{\pi n z}{\xi}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Подробно остановимся на примере b) для функции $G(z)$. Проверим выполнение условий (1)–(4), накладываемых на G . Действительно, если в качестве ξ выберем любой член из последовательности $\left\{ \frac{\pi n}{\alpha} \right\}_{n=1}^\infty$, то при $z \in \left[0, \frac{\pi n}{2} \right]$ ($n \in \mathbb{N}$ фиксирована) будем иметь

$$G(z) \geq z^\alpha \xi_n^{1-\alpha}, \quad \xi_n = \frac{\pi n}{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$G(\xi_n) = \xi_n + \sin^2 \pi n = \xi_n,$$

$$G'(z) = \alpha z^{\alpha-1} \left(\frac{\pi n}{\alpha} \right)^{1-\alpha} + \alpha \sin 2\alpha z \geq \alpha z^{\alpha-1} z^{1-\alpha} + \alpha \sin 2\alpha z = \alpha(1 + \sin 2\alpha z) \geq 0.$$

Следовательно, $G(z) \uparrow$ по z на $[0, \xi_n]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** Качественное различие решений для стационарных модельных уравнений Больцмана в линейном и нелинейном случаях // Теорет. мат. физика. 2014. Т. 180, № 2. С. 272–288.
2. **Владимиров В.С., Волович Я.И.** О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны // Теорет. мат. физика. 2004. Т. 138, № 3. С. 355–368.
3. **Енгибарян Н.Б.** Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2, № 1. С. 31–36.
4. **Урысон П.С.** Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Мат. сб. 1923. Т. 31, № 2. С. 236–255.
5. **Красносельский М.А.** Положительные решения операторных уравнений. М.: Изд. физ.-мат. лит., 1962. 394 с.
6. **Забрейко П.П., Пустыльник Е.И.** О непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в пространствах L_p // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 2. С. 204–505.
7. **Brezis H., Browder F.E.** Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. Vol. 81, no. 1. P. 73–78.
8. **Арабаджян Л.Г.** Решения одного интегрального уравнения типа Гаммерштейна // Изв. НАН Армении. Математика. 1997. Т. 32, № 1. С. 21–28.
9. **Хачатрян А.Х., Хачатрян Х.А.** О построении неотрицательного решения одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона на полуоси // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 4. С. 110–118.
10. **Хачатрян Х.А.** Об одном классе интегральных уравнений типа Урысона с сильной нелинейностью // Известия РАН. Сер. Математика. 2012. Т. 76, № 1. С. 173–200.
11. **Хачатрян Х.А.** О нетривиальных решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений типа свертки // Материалы конференции “VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике”. Ростов-на-Дону, 2016. С. 40–41. URL: <http://rus-arm.sfedu.ru/thethis.pdf>.
12. **Арабаджян Л.Г., Енгибарян Н.Б.** Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Мат. анализ. 1984. Т. 22. С. 175–242.
13. **Колмогоров А.Н., Фомин В.С.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.

Хачатрян Хачатур Агавардович

д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник отдела методов мат. физики

Институт математики НАН Армении, г. Ереван

e-mails: Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru

Петросян Айкануш Самвеловна

канд. физ.-мат. наук, ассистент каф. высшей математики и теор. механики

Армянский национальный аграрный университет, г. Ереван

e-mail: Naukuhi25@mail.ru

Сисакян Арусяк Арамовна

ассистент каф. высшей математики и теор. механики

Армянский национальный аграрный университет, г. Ереван

e-mail: Sisakyan64@mail.ru

Поступила 7.11.2016

REFERENCES

1. Khachatryan A.Kh., Khachatryan Kh.A. Qualitative difference between solutions of stationary model Boltzmann equations in the linear and nonlinear cases. *Theor. Math. Phys.*, 2014, vol. 180, no. 2, pp. 990–1004. doi: 10.1007/s11232-014-0194-6.
2. Vladimirov V.S., Volovich Y.I. Nonlinear Dynamics equation in p-adic string theory. *Theor. Math. Phys.*, 2004, vol 138, no. 3, pp. 355–368. doi: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29.
3. Engibaryan N.B. On a problem in nonlinear radiative transfer. *Astrophysics*, 1966, vol. 2, iss. 1, pp. 12–14. doi: 10.1007/BF01014505.
4. Urysohn P. One type of nonlinear integral equations. *Mat. Sbornik*, 1923, vol. 31, no. 2, pp. 236–255 (in Russian).
5. Krasnoselskii M. A. Positive solutions of operator equations. Groningen: P. Noordhoff, 1964, 381 p. Original Russian text published in *Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravnenii*, Moscow: Fiziko-Matematicheskoy Literatury Publ., 1962, 394 p.
6. Zabreiko P. P., Pustyl'nik E. I. On continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L_p spaces. *Uspehi Mat. Nauk*, 1964, vol 19, no. 2 (116), pp. 204–205 (in Russian).
7. Brezis H., Browder F.E.. Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1975, vol. 81, no. 1, pp. 73–78.
8. Arabadzhyan L.G. Solutions of an integral equation of Hammerstein type. *J. Contemp. Math. Anal.*, 1997, vol. 32, no. 1, pp. 17–24.
9. Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A. On the construction of a nonnegative solution for one class of Urysohn-type nonlinear integral equations on a semiaxis. *Ukrainian Math. J.*, 2011, vol. 63, no. 1, pp. 134–145. doi: 10.1007/s11253-011-0492-1.
10. Khachatryan Kh.A. On a class of integral equations of Urysohn type with strong non-linearity. *Izv. Math.*, 2012, vol. 76, no. 1, pp. 163–189. doi: 10.1070/IM2012v076n01ABEH002579.
11. Khachatryan Kh.A. On nontrivial solutions of one class convolution type nonlinear integral equations. VI *Russian-Armenian conference on Mathematical Physics and Analytical Mechanics*, Rostov-on-Don, 2016, pp. 40–41 (in Russian). Available at: <http://rus-arm.sfedu.ru/thethis.pdf>.
12. Arabadzhyan L.G., Engibaryan N.B. Convolution equations and nonlinear functional equations. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 36, no. 6, pp. 745–791. doi: 10.1007/BF01085507.
13. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Jelementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow, Nauka, 1981, 544 p.

The paper was received by the Editorial Office on November 7, 2016.

Khachatur Agavardovich Khachatryan. Dr. Phys.-Math. Sci., Head Scientist Researcher of National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, 0019 Armenia,
e-mails: Khach82@rambler.ru, Khach82@mail.ru.

Aikanush Samvelovna Petrosyan. Assistant of the Department of Higher Mathematics and Theoretical Mechanics of National Agrarian University of Armenia, Yerevan, 0009 Armenia,
e-mail: Haykuhi25@mail.ru.

Arusyak Aramovna Sisakyan. Assistant of the Department of Higher Mathematics and Theoretical Mechanics of National Agrarian University of Armenia Yerevan, 0009 Armenia,
e-mail: Sisakyan64@mail.ru.

УДК 517.928.1

ВОЗМУЩЕНИЕ ВОЛНОВОДА УЗКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ¹

И. Х. Хуснуллин

Исследована краевая задача в полосе с граничным условием Фурье, моделирующая волновод, возмущенный узким комплексным потенциалом с большой интенсивностью. Потенциал зависит от малого и большого параметров. Малый параметр соответствует диаметру носителя потенциала, большой — его максимальному значению, а их произведение стремится к нулю. Задача соответствует математическим моделям квантовый и акустический волноводов. В такой постановке задача отличается от ранее исследованных тем, что на соотношение параметров наложены более слабые ограничения, на границе полосы заданы условия Фурье. Основным содержанием работы является построение специального преобразования, который переводит исходный оператор к оператору с малым локализованным возмущением. При этом данное преобразование не меняет спектр исходного оператора. Получено условие на потенциал, при которых из края непрерывного спектра возникает собственное значение, а так же условие отсутствия такого собственного значения. В случае возникновения, построены главные члены его асимптотики. Полученные результаты сформулированы в виде теоремы.

Ключевые слова: возмущение, волновод, собственное значение.

I. Kh. Khusnullin. Perturbation of a waveguide by a narrow potential.

We study a boundary value problem in a band with Fourier boundary condition. The problem models a waveguide perturbed by a narrow complex potential of large intensity. The potential depends on a small parameter and a large parameter. The small parameter corresponds to the diameter of the support of the potential, and the large parameter corresponds to the maximum value of the potential. The product of the parameters tends to zero. The problem corresponds to mathematical models of a quantum waveguide and an acoustic waveguide. In this statement, in contrast to the statements considered earlier, a weaker constraint is imposed on the ratio of the parameters and the Fourier conditions are given at the boundary of the band. The main content of this paper is the construction of a special transform that takes the original operator to an operator with a small localized perturbation; the transform preserves the spectrum of the operator. We obtain a condition on the potential under which an eigenvalue appears from the edge of the continuous spectrum; in this case, we find the leading terms of the asymptotics of the eigenvalue. We also obtain a condition for the absence of such an eigenvalue. The results are formulated in a theorem.

Keywords: perturbation, waveguide, eigenvalue.

MSC: 34E10, 76M45, 81Q15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-274-284

Посвящается Рустему Рашитовичу Гадьльшину

Введение

Хорошо известно, что при возмущении квантового волновода из края непрерывного спектра может возникать собственное значение. В частности, для слабо изогнутых волноводов в [1; 2] было доказано существование такого собственного значения, а в [3] была сосчитана его асимптотика. В [3] также были приведены условия, при которых из края непрерывного спектра возникает собственное значение при возмущении квантового волновода малым потенциалом, и построена его асимптотика.

В [4] был предложен метод, который позволил получить необходимые и достаточные условия возникновения собственных значений для волноводов при достаточно произвольных малых локализованных возмущениях. В случае возникновения собственных значений были по-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-31-00066 мол-а) и частично гранта Республики Башкортостан молодым ученым и молодежным научным коллективам (договор № 4).

строены их асимптотики. В [5] этот подход был применен к квантовому волноводу с потенциалом, носитель которого сжимается в точку, а значение самого потенциала неограниченно растет при стремлении к нулю малого параметра, характеризующего возмущение.

В [6; 7] на основе методов, предложенных в [8; 9] соответственно, были рассмотрены двухпараметрические возмущения операторов Шредингера и Хилла на оси. Получены условия на возмущения, при которых из края непрерывного спектра возникают собственные значения. В [10] на основе подхода, предложенного в [11], результаты, полученные в [6], были обобщены на более широкий класс параметров.

В [12] рассмотрено достаточно произвольное малое локализованное возмущение волноводов с различными типами граничных условий. Развита методика, предложенная при подобном возмущении в [8; 9] для операторов Шредингера и Хилла на оси и в [4] для квантового волновода. Однако в отличие от [4], где исследовался только эффект возникновения собственных значений из непрерывного спектра, в [12] изучается и качественная структура спектра возмущенного оператора.

Новизна данной работы состоит в том, что на соотношение параметров возмущения накладываются более слабые ограничения и задаются граничные условия Фурье. Содержание работы следующее. На основе подхода, предложенного в [11], строится преобразование, которое переводит исходный оператор к оператору с малым локализованным возмущением, но при этом не меняет спектр. Далее, к новому оператору применяются результаты, полученные в [12].

1. Постановка задачи и формулировка результатов

Всюду далее Ω — интервал $(0, \pi)$, $\Pi := (-\infty, \infty) \times \Omega$, $L_2(G)$ — множество квадратично интегрируемых по Лебегу в G функций, а $H^n(G)$ — пространства Соболева.

Через $\mathcal{H}_0(\mathcal{D})$ (через $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$) обозначим оператор $(-\Delta)$, определенный на функциях из $H^2(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям $u(x_1, 0) = 0$, $(\frac{\partial u}{\partial x_2} + \alpha u)|_{x_2=\pi} = 0$ (граничным условиям $(\frac{\partial u}{\partial x_2} - \alpha u)|_{x_2=0} = 0$, $u(x_1, \pi) = 0$), где $\alpha \geq 0$. Хорошо известно (см., например [13]), что определенные таким образом операторы $\mathcal{H}_0(\cdot)$ являются самосопряженными операторами в $L_2(\Pi)$ и соответствуют математическим моделям волноводов.

Следуя работе [13], непрерывный спектр $\sigma_c(\mathcal{H})$ оператора \mathcal{H} определим в терминах характеристических последовательностей. Точечным спектром $\sigma_p(\mathcal{H})$ назовем множество собственных значений оператора \mathcal{H} . Через $\sigma_r(\mathcal{H}) := \sigma(\mathcal{H}) \setminus (\sigma_c(\mathcal{H}) \cup \sigma_p(\mathcal{H}))$ обозначим остаточный спектр оператора.

Известно (см., например, [13]), что для операторов $\mathcal{H}_0(\mathcal{D})$, $\mathcal{H}_0(\mathcal{F})$ справедливы равенства

$$\sigma(\mathcal{H}_0(\cdot)) = \sigma_c(\mathcal{H}_0(\cdot)) = [\mu_1(\cdot), \infty), \quad \sigma_p(\mathcal{H}_0(\cdot)) = \emptyset,$$

где $\mu_1(\cdot)$ — минимальное собственное значение для оператора $-\Delta' := -d^2/dx_2^2$, определенного на функциях из $H^2(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = 0$, $u'(\pi) + \alpha u(\pi) = 0$ (для $\mu_1(\cdot) = \mu_1(\mathcal{D})$) и $u'(0) - \alpha u(0) = 0$, $u(\pi) = 0$ (для $\mu_1(\cdot) = \mu_1(\mathcal{F})$).

Пусть $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots$ — собственные значения оператора $\mathfrak{h}(\cdot)$, n_j — кратность собственного значения μ_j , $\{\phi_{j,i}(x_2)\}_{i=1}^{n_j}$ — соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции.

Обозначим $\langle g \rangle := \int_{\Pi} g(t) dt$.

Функции $\phi_{j,i}(x)$ будем считать определенными на Π следующим образом: $\phi_{j,i}(x)$ равны $\phi_{j,i}(x_2)$ при любом x_1 .

Обозначим $Q := (a, b) \times \Omega$, где (a, b) — конечный интервал. В [12] был рассмотрен оператор

$$\mathcal{H}_0(\cdot) - \varepsilon \mathcal{L}_\varepsilon,$$

где $\{\mathcal{L}_\varepsilon\}$ — семейство линейных отображений $H_{\text{loc}}^2(\Pi)$ в $L_2(\Pi; Q)$ таких, что

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon u\|_{L_2(Q)} \leq C(\mathcal{L})\|u\|_{H^2(Q)}, \quad (1.1)$$

где постоянная $C(\mathcal{L})$ не зависит от ε , $H_{\text{loc}}^2(\Pi)$ — множество функций, определенных в Π и таких, что сужение их на любую ограниченную область $M \subset \Pi$ принадлежит $H^2(M)$, $L_2(\Pi; M)$ — подмножество функций из $L_2(\Pi)$ с носителями из \overline{M} . Отображение \mathcal{L}_ε является неограниченным оператором в $L_2(\Pi)$ с областью определения $H_{\text{loc}}^2(\Pi)$.

Пусть $V(x)$ — комплекснозначная функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, параметры $0 < \mu, \varepsilon \ll 1$ удовлетворяют соотношению

$$\varepsilon\mu^{-1} = o(1). \quad (1.2)$$

Будем предполагать, что Q содержит начало координат и $\text{supp}V(x) \subset Q$.

В $L_2(\Pi)$ на областях определения операторов $\mathcal{H}_0(\cdot)$ определим операторы $\mathcal{H}_{\varepsilon, \mu}(\cdot)$ как

$$\mathcal{H}_{\varepsilon, \mu}(\cdot) := \mathcal{H}_0(\cdot) + \mu^{-1}V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (1.3)$$

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Пусть выполнено условие (1.2). Тогда если

$$\text{Re}\langle V \rangle < 0, \quad (1.4)$$

то существует единственное и простое собственное значение $\lambda_{\varepsilon, \mu}$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon, \mu}(\cdot)$, стремящегося к μ_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Его асимптотика имеет вид

$$\lambda_{\varepsilon, \mu} = \mu_1 - \frac{1}{4}(\varepsilon^2\mu^{-1})^2 (\phi_{1,1}^2(0)\langle V \rangle)^2 + O(\varepsilon^5\mu^{-2} + \varepsilon^6\mu^{-3}|\ln \varepsilon|^2). \quad (1.5)$$

Если

$$\text{Re}\langle V \rangle > 0, \quad (1.6)$$

то оператор $\mathcal{H}_{\varepsilon, \mu}(\cdot)$ не имеет собственных значений, стремящихся к μ_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Вспомогательные утверждения

Далее, мы следуем подходу, предложенному в [11]. Обозначим через $W(\xi)$ решение уравнения

$$\Delta_\xi W(\xi) = V(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (2.1)$$

определяемое формулой

$$W(\xi) = - \int_{\mathbb{R}^2} E(\xi - z)V(z)dz, \quad (2.2)$$

где

$$E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| \quad (2.3)$$

— фундаментальное решение оператора Лапласа в \mathbb{R}^2 . Через $\chi(x)$ обозначим бесконечно дифференцируемую срезающую функцию, равную единице в окрестности начала координат и нулю — вне большей окрестности. Большую окрестность будем предполагать достаточно малой.

Положим

$$\varphi_{\varepsilon, \mu}(x) = 1 + \varepsilon^2\mu^{-1}|\ln \varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (2.4)$$

где

$$W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{|\ln \varepsilon|}W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2.5)$$

Оператор умножения на функцию $\varphi_{\varepsilon,\mu}(x)$ обозначим через $U_{\varepsilon,\mu}$:

$$U_{\varepsilon,\mu}[v] := \varphi_{\varepsilon,\mu}(x)v. \tag{2.6}$$

Собственные значения оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$ совпадают с собственными значениями оператора $U_{\varepsilon,\mu}^{-1}\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu}$ (см. [11]).

Лемма 1. Для функций $W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $W(x)$ при $x \in Q$ справедливы равенства

$$W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = -\frac{\langle V \rangle}{2\pi} + O\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|}\right), \quad x \in Q, \tag{2.7}$$

$$\left\|W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{C(Q)} \leq C_{3,Q}, \tag{2.8}$$

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right\|_{C(Q)} \leq C_{1,Q}, \quad i = 1, 2, \tag{2.9}$$

$$\left\|W(x)\right\|_{C(Q)} \leq C_{2,Q}, \tag{2.10}$$

где постоянные $C_{1,Q}, C_{2,Q}, C_{3,Q}$ зависят только от Q .

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [14, лемма 4.6] было показано, что функция $W(x)$ имеет при $|x| \rightarrow \infty$ дифференцируемую асимптотику

$$W(x) = \frac{\langle V \rangle}{2\pi} \ln |x| + C_{1,1} \frac{x_1}{|x|^2} + C_{1,2} \frac{x_2}{|x|^2} + \sum_{i=2}^{\infty} Y_i(x)|x|^{-2i},$$

где $C_{1,1}, C_{1,2}$ — постоянные, $Y_i(x)$ — однородные гармонические полиномы порядка i . Из (2.5) и последнего равенства при $|x|\varepsilon^{-1} \rightarrow \infty$ последовательно получаем

$$\begin{aligned} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= -\frac{\langle V \rangle}{2\pi} + \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \frac{\langle V \rangle}{2\pi} \ln |x| - \frac{\varepsilon}{|\ln \varepsilon|} \left(C_{1,1} \frac{x_1}{|x|^2} + C_{1,2} \frac{x_2}{|x|^2}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{|\ln \varepsilon|}\right), \quad x \in Q, \\ \frac{\partial}{\partial x_1}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \frac{\langle V \rangle x_1}{2\pi|x|^2} - \frac{\varepsilon}{|\ln \varepsilon|} \left(C_{1,1}\left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_1^2}{|x|^4}\right) - 2C_{1,2} \frac{x_1x_2}{|x|^4}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{|\ln \varepsilon|}\right), \quad x \in Q, \\ \frac{\partial}{\partial x_2}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) &= \frac{1}{|\ln \varepsilon|} \frac{\langle V \rangle x_2}{2\pi|x|^2} - \frac{\varepsilon}{|\ln \varepsilon|} \left(C_{1,2}\left(\frac{1}{|x|^2} - \frac{2x_2^2}{|x|^4}\right) - 2C_{1,1} \frac{x_1x_2}{|x|^4}\right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{|\ln \varepsilon|}\right), \quad x \in Q. \end{aligned}$$

Из последних равенств вытекают оценки (2.7)–(2.9).

Далее, из (2.2) и (2.3) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|W(x)\|_{C(Q)} &= \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\mathbb{R}^2} \ln |x-z| V(z) dz \right\|_{C(Q)} = \frac{1}{2\pi} \left\| \int_Q \ln |x-z| V(z) dz \right\|_{C(Q)} \\ &\leq C_V \left\| \int_Q dz \right\|_{C(Q)} = C_{2,Q}. \end{aligned}$$

Неравенство (2.10) доказано. Лемма 1 доказана.

Далее везде C_i — некоторые константы, не зависящие от ε, μ .

Лемма 2. Пусть выполнено условие (1.2), тогда для оператора $U_{\varepsilon,\mu}$ справедливы оценки

$$|U_{\varepsilon,\mu}^{-1}[1]| \leq C_1, \quad x \in Q, \tag{2.11}$$

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1}[1] = 1 + O(\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln \varepsilon|), \quad x \in Q. \tag{2.12}$$

Доказательство. Из (2.4) и (2.6) следует

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1}[1] = \frac{1}{\varphi_{\varepsilon,\mu}(x)} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \chi(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}.$$

В силу (2.7) из последнего равенства вытекает

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1}[1] = \frac{1}{1+q}, \quad (2.13)$$

где $q = -\varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \frac{\langle V \rangle}{2\pi} \chi(x) + O(\varepsilon^2 \mu^{-1})$, $x \in Q$. Из (2.13) и оценки $|q| \leq C_q \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon|$, $x \in Q$, следует

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1}[1] = 1 + O(q) = 1 + O(\varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon|).$$

Оценка (2.12) доказана. Неравенство (2.11) непосредственно вытекает из (2.12). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть выполнено условие (1.2), тогда

$$U_{\varepsilon,\mu}^{-1} \mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot) U_{\varepsilon,\mu} = \mathcal{H}_0(\cdot) - \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}, \quad (2.14)$$

где $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ — дифференциальный оператор второго порядка с ограниченными финитными коэффициентами, удовлетворяющий оценке

$$\|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} u\|_{L_2(Q)} \leq C_2 \|u\|_{H^2(Q)}. \quad (2.15)$$

Доказательство. Из (1.3), (2.4)–(2.6) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot) U_{\varepsilon,\mu} &= \left(\mathcal{H}_0(\cdot) + \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \left[1 + \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \chi(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \\ &= \mathcal{H}_0(\cdot)[1] + \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \mathcal{H}_0(\cdot) \left[\chi(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 \mu^{-2} |\ln \varepsilon| \chi(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

В силу определения оператора $\mathcal{H}_0(\cdot)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\cdot) \left[\chi(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] &= -W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\chi(x)] - \chi(x) \Delta_x \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \chi(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathcal{H}_0(\cdot)[1] \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^2 \left(W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \chi(x) \frac{\partial}{\partial x_i} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

Из последних двух равенств следует

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot) U_{\varepsilon,\mu} &= \mathcal{H}_0(\cdot)[1] + \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 \mu^{-2} |\ln \varepsilon| \chi(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &\quad - \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\chi(x)] - \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \chi(x) \Delta_x \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \chi(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathcal{H}_0(\cdot)[1] \\ &\quad - 2\varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \sum_{i=1}^2 \left(W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \chi(x) \frac{\partial}{\partial x_i} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \quad (2.16) \end{aligned}$$

Пусть $\xi = x\varepsilon^{-1}$, тогда в силу уравнения (2.1) и равенства (2.5) последовательно получаем, что

$$\begin{aligned} \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \chi(x) \Delta_x \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] &= \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \mu^{-1} |\ln \varepsilon| \chi(x) \Delta_\xi W_1(\xi) \\ &= \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \mu^{-1} \chi(x) \Delta_\xi W(\xi) = \mu^{-1} V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \mu^{-1} \chi(x) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = 0. \end{aligned}$$

Из (2.16) с учетом последнего равенства вытекает

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu} &= \mathcal{H}_0(\cdot)[1] + \varepsilon^2\mu^{-2}|\ln \varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \\ &- \varepsilon^2\mu^{-1}|\ln \varepsilon|W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Delta_x[\chi(x)] + \varepsilon^2\mu^{-1}|\ln \varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\mathcal{H}_0(\cdot)[1] \\ &- 2\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln \varepsilon|\sum_{i=1}^2\left(W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

В свою очередь из этого равенства и (2.4)–(2.6) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)U_{\varepsilon,\mu} &= U_{\varepsilon,\mu}\mathcal{H}_0(\cdot)[1] + \varepsilon^2\mu^{-2}|\ln \varepsilon|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \varepsilon^2\mu^{-1}|\ln \varepsilon|W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Delta_x[\chi(x)] \\ &- 2\varepsilon^2\mu^{-1}|\ln \varepsilon|\sum_{i=1}^2\left(W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

Из последнего равенства вытекает равенство (2.14), где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} &= -U_{\varepsilon,\mu}^{-1}\mu^{-1}\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + U_{\varepsilon,\mu}^{-1}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Delta_x[\chi(x)] \\ &+ 2U_{\varepsilon,\mu}^{-1}\sum_{i=1}^2\left(W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Покажем, что оператор $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ удовлетворяет оценке (2.15). Из (2.17) и оценки (2.11) получаем оценку

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}u\|_{L_2(Q)} &\leq C_1\mu^{-1}\left\|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u\right\|_{L_2(Q)} + C_1\left\|W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Delta_x[\chi(x)]u\right\|_{L_2(Q)} \\ &+ 2C_1\sum_{i=1}^2\left\|W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2(Q)} + 2C_1\sum_{i=1}^2\left\|\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u\right\|_{L_2(Q)} \\ &+ 2C_1\sum_{i=1}^2\left\|\chi(x)\frac{\partial}{\partial x_i}W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2(Q)}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Из определения функции $\chi(x)$ и оценки (2.8) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \left\|W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\Delta_x[\chi(x)]u\right\|_{L_2(Q)} &\leq C_3\|u\|_{L_2(Q)} \leq C_3\|u\|_{H^2(Q)}, \\ \sum_{i=1}^2\left\|W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2(Q)} &\leq C_4\sum_{i=1}^2\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L_2(Q)} \leq 2C_4\|u\|_{H^2(Q)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В [5] было доказано, что для любой функции u из $H^2(Q)$ справедливо неравенство (лемма 3.1)

$$\int_{\varepsilon Q} |u|^2 dx \leq C_5\varepsilon^2|\ln \varepsilon|\|u\|_{H^2(Q)}^2,$$

где εQ — сжатие множества Q в ε^{-1} раз.

Из (1.2), (2.5), (2.10) в силу последнего неравенства последовательно выводим оценку

$$\mu^{-1}\left\|\chi(x)W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u\right\|_{L_2(Q)} = \frac{\mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|}\left\|W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u\right\|_{L_2(\varepsilon Q)}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|} \|W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{C(\varepsilon Q)} \|V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u\|_{L_2(Q)} = \frac{\mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|} \|W(x)\|_{C(Q)} \|V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u\|_{L_2(Q)} \\ &\leq C_{2,Q} \frac{\mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|} \|V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u\|_{L_2(\varepsilon Q)} \leq C_6 \frac{\mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|} \|u\|_{L_2(\varepsilon Q)} \leq C_7 \frac{\mu^{-1}\varepsilon}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}} \|u\|_{H^2(Q)} \leq C_8 \|u\|_{H^2(Q)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Далее, в силу оценки (2.9) и определения функции χ получаем следующие оценки:

$$\sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)u \right\|_{L_2(Q)} \leq C_{1,Q} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial \chi}{\partial x_i} u \right\|_{L_2(Q)} \leq C_9 \|u\|_{L_2(Q)} \leq C_{10} \|u\|_{H^2(Q)}, \quad (2.21)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left\| \chi(x) \frac{\partial}{\partial x_i} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \leq C_{1,Q} \sum_{i=1}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_2(Q)} \leq 2C_{1,Q} \|u\|_{H^2(Q)}. \quad (2.22)$$

Из (2.18)–(2.22) вытекает неравенство (2.15). Лемма 3 доказана.

3. Доказательство теоремы

Из леммы 3 следует, что оператор $\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu}$ удовлетворяет неравенству (1.1). В качестве малого параметра в силу (1.2) примем параметр $\varepsilon_1 := \varepsilon^2 \mu^{-1} |\ln \varepsilon|$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu} &:= -\mu^{-1} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\chi(x)] \\ &+ 2 \sum_{i=1}^2 \left(W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + \chi(x) \frac{\partial}{\partial x_i} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\begin{aligned} \phi_{1,1} \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} &= -\mu^{-1} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) + W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\chi(x)] \phi_{1,1}^2(x) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^2 \left\{ \phi_{1,1}(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} + \phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \chi(x) \phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} \right\}, \\ \langle \phi_{1,1} \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle &= -\mu^{-1} \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx + \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\chi(x)] \phi_{1,1}^2(x) dx \\ &+ 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Pi} \left\{ \phi_{1,1}(x) W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} + \phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \chi(x) \phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

С учетом равенства

$$\begin{aligned} &\phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] + \chi(x) \phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} \\ &= \phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \left(\phi_{1,1}(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \chi(x) \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} \right) = \phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x) \chi(x)] \end{aligned}$$

из (3.2) следует, что

$$\langle \phi_{1,1} \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle = -\mu^{-1} \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left\{ \Delta_x[\chi(x)]\phi_{1,1}^2(x) + 2 \sum_{i=1}^2 \phi_{1,1}(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} \right\} dx \\
 & + 2 \sum_{i=1}^2 \int_{\Pi} \left\{ \phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] \right\} dx.
 \end{aligned}$$

А в свою очередь из равенства

$$\begin{aligned}
 \Delta_x[\chi(x)]\phi_{1,1}^2(x) + 2 \sum_{i=1}^2 \phi_{1,1}(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} & = \Delta_x[\chi(x)]\phi_{1,1}^2(x) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}^2(x)] \\
 & = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right]
 \end{aligned}$$

следует, что

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{1,1} \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon, \mu} \phi_{1,1} \rangle & = -\mu^{-1} \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx + \int_{\Pi} \sum_{i=1}^2 \left\{ W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right] \right. \\
 & \quad \left. + 2\phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] \right\} dx. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

В силу определения функции χ , интегрируя по частям, из последнего равенства последовательно получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{\Pi} \phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] dx & = \int_Q \phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] dx \\
 & = - \int_Q W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] \right] dx = - \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] \right] dx.
 \end{aligned}$$

С учетом последнего равенства формула (3.3) примет вид

$$\begin{aligned}
 \langle \phi_{1,1} \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon, \mu} \phi_{1,1} \rangle & = -\mu^{-1} \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx \\
 & + \int_{\Pi} \sum_{i=1}^2 W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] \right] \right\} dx. \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

Далее, из (3.4) и равенства

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right] - 2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] \right] \right\} \\
 & = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - 2\phi_{1,1}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}(x)\chi(x)] \right\} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -\phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} - 2\chi(x)\phi_{1,1}(x) \frac{\partial \phi_{1,1}}{\partial x_i} \right\} \\
 & = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \phi_{1,1}^2(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \chi(x) \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}^2(x)] \right\} \\
 & = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)] \right] = -\Delta_x [\phi_{1,1}^2(x)\chi(x)]
 \end{aligned}$$

вытекает равенство

$$\langle \phi_{1,1} \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle = -\mu^{-1} \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx - \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\phi_{1,1}^2(x) \chi(x)] dx. \quad (3.5)$$

Интегрируя по частям два раза, в силу определения функции χ и (2.1), (2.5) последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\phi_{1,1}^2(x) \chi(x)] dx = \int_Q W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\phi_{1,1}^2(x) \chi(x)] dx \\ &= - \int_Q \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \frac{\partial}{\partial x_i} [\phi_{1,1}^2(x) \chi(x)] dx = \int_Q \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \phi_{1,1}^2(x) \chi(x) dx \\ &= \int_Q \Delta_x \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \phi_{1,1}^2(x) \chi(x) dx = \varepsilon^{-2} \int_Q \Delta_\xi \left[W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right] \phi_{1,1}^2(x) \chi(x) dx \\ &= \frac{\varepsilon^{-2}}{|\ln \varepsilon|} \int_Q V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) \chi(x) dx = \frac{\varepsilon^{-2}}{|\ln \varepsilon|} \int_Q V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx. \end{aligned}$$

После разложения функции $\phi_{1,1}(x)$ в ряд и замены переменной выводим, что

$$\int_Q V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx = \varepsilon^2 (\phi_{1,1}(0))^2 \langle V \rangle + O(\varepsilon^3).$$

С учетом последнего равенства имеем

$$\int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \Delta_x [\phi_{1,1}^2(x) \chi(x)] dx = \frac{1}{|\ln \varepsilon|} (\phi_{1,1}(0))^2 \langle V \rangle + O\left(\frac{\varepsilon}{|\ln \varepsilon|}\right). \quad (3.6)$$

Оценим первый интеграл в равенстве (3.5). В силу (2.10) последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \mu^{-1} \left| \int_{\Pi} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx \right| = \mu^{-1} \left| \int_{\varepsilon Q} W_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \phi_{1,1}^2(x) dx \right| \\ & \leq \frac{\mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|} \|W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{C(\varepsilon Q)} \|V\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\|_{C(\varepsilon Q)} \|\phi_{1,1}^2(x)\|_{C(\varepsilon Q)} \left| \int_{\varepsilon Q} dx \right| \\ & = \frac{\varepsilon^2 \mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|} \|W(x)\|_{C(Q)} \|V(x)\|_{C(Q)} \|\phi_{1,1}^2(x)\|_{C(\varepsilon Q)} \leq \frac{\varepsilon^2 \mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|} C_{11} \|\phi_{1,1}^2(x)\|_{C(Q)} = C_{12} \frac{\varepsilon^2 \mu^{-1}}{|\ln \varepsilon|}. \end{aligned}$$

Из последней оценки и (3.5), (3.6) следует равенство

$$\langle \phi_{1,1} \tilde{\mathcal{L}}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle = -\frac{1}{|\ln \varepsilon|} (\phi_{1,1}(0))^2 \langle V \rangle + O\left(\frac{\varepsilon}{|\ln \varepsilon|}\right). \quad (3.7)$$

Далее, из (2.17), (3.1), (3.7) в силу (2.12) вытекает

$$\langle \phi_{1,1} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle = -\frac{1}{|\ln \varepsilon|} (\phi_{1,1}(0))^2 \langle V \rangle + O\left(\frac{\varepsilon}{|\ln \varepsilon|} + \varepsilon^2 \mu^{-1}\right). \quad (3.8)$$

Из леммы 6.1 и следствия 5.2 работы [12] следует, что если

$$\operatorname{Re} k_{\varepsilon,\mu} > 0, \quad (3.9)$$

то $\lambda_{\varepsilon,\mu}$, определяемое равенством

$$\lambda_{\varepsilon,\mu} = \mu_1 - (k_{\varepsilon,\mu})^2, \tag{3.10}$$

является единственным и к тому же простым собственным значением оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$, где

$$k_{\varepsilon,\mu} = \varepsilon_1 \frac{1}{2} \langle \phi_{1,1} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle + \varepsilon_1^2 \frac{1}{2} \langle \phi_{1,1} T_{\varepsilon,\mu}^{(1)}(k) \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle + O(\varepsilon_1^3), \tag{3.11}$$

k — комплексный параметр, оператор $T_{\varepsilon,\mu}^{(1)}(k)$ является ограниченно-голоморфным оператором в $L_2(\Pi; Q)$.

Обозначим $K_1 := |\langle \phi_{1,1} \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle|$, $K_2 := |\langle \phi_{1,1} T_{\varepsilon,\mu}^{(1)}(k) \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle|$.

Из (3.8) следует, что

$$K_1 = O\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|}\right). \tag{3.12}$$

В силу определения оператора $T_{\varepsilon,\mu}^{(1)}(k)$ и неравенства (2.15) последовательно получаем оценку

$$\begin{aligned} |\langle \phi_{1,1} T_{\varepsilon,\mu}^{(1)}(k) \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1} \rangle| &\leq \|\phi_{1,1}\|_{L_2(Q)} \|T_{\varepsilon,\mu}^{(1)}(k) \mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1}\|_{L_2(Q)} \leq C_\phi C_T \|\mathcal{L}_{\varepsilon,\mu} \phi_{1,1}\|_{L_2(Q)} \\ &\leq C_\phi C_T C_2 \|\phi_{1,1}\|_{H^2(Q)} = C_{13}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$K_2 = O(1). \tag{3.13}$$

Пусть выполнено условие (1.2), тогда из (3.11) и оценок (3.12), (3.13) следует, что знак $\operatorname{Re} k_{\varepsilon,\mu}$ совпадает со знаком $-\operatorname{Re} \langle V \rangle$. Следовательно, из неравенства (3.9) следует, что достаточным условием существования единственного и простого собственного значения $\lambda_{\varepsilon,\mu}$ оператора $\mathcal{H}_{\varepsilon,\mu}(\cdot)$, стремящегося к μ_1 при $\varepsilon \rightarrow 0$, является неравенство (1.4). Если верно неравенство (1.6), то такого собственного значения не существует.

Из равенств (3.8), (3.10), (3.11) и оценок (3.12), (3.13) вытекает асимптотика (1.5).

Теорема доказана.

Автор выражает признательность Д. И. Борисову за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Exner P., Seba P.** Bound states in curved quantum waveguides // J. Math. Phys. 1989. Vol. 30, no. 11. P. 2574–2580. doi: 10.1063/1.528538.
2. **Exner P.** Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature // J. Math. Phys. 1993. Vol. 34, no. 1. P. 23–28. doi: 10.1063/1.530378.
3. **Duclos P., Exner P.** Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions // Rev. Math. Phys. 1995. Vol. 7, no. 1. P. 73–102. doi:10.1142/S0129055X95000062.
4. **Гадыльшин Р.Р.** О локальных возмущениях квантовых волноводов // Теорет. и мат. физика. 2005. Vol. 145, № 3. С. 358–371. doi: 10.4213/tmf1905.
5. **Bikmetov A., Gadyl'shin R.** On quantum waveguide with shrinking potential // Russian J. Math. Phys. 2010. Vol. 17, no. 1. P. 19–25. doi:10.1134/S1061920810010024.
6. **Гадыльшин Р. Р., Хуснуллин И. Х.** Оператор Шредингера на оси с потенциалами, зависящими от двух параметров // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 6. С. 50–66.
7. **Гадыльшин Р. Р., Хуснуллин И. Х.** Возмущение периодического оператора узким потенциалом // Теорет. и мат. физика. 2012. Т. 173, № 1. С. 127–134. doi: 10.4213/tmf8324.
8. **Гадыльшин Р.Р.** О локальных возмущениях оператора Шредингера на оси // Теорет. и мат. физика. 2002. Т. 132, № 1. С. 97–104. doi: 10.4213/tmf349.
9. **Борисов Д.И., Гадыльшин Р.Р.** О спектре периодического оператора с малым локализованным возмущением // Изв. РАН. Сер. математическая. 2008. Т. 72, № 4. С. 37–66. doi: 10.4213/im1146.
10. **Бикметов А.Р., Вильданова В.Ф., Хуснуллин И. Х.** О возмущении оператора Шредингера на оси узкими потенциалами // Уфим. мат. журн. 2015. Т. 7, № 4. С. 25–33.

11. **Борисов Д.И., Шарапов Т.Р., Каримов Р.** Оценка начальных масштабов для волноводов с некоторыми случайными сингулярными потенциалами // Уфим. мат. журн. 2015. Т. 7, № 2. С. 35–56.
12. **Bikmetov A.R., Gadyl'shin R.R.** On local perturbations of waveguides // Russian J. Math. Phys. 2016. Vol. 23, no. 1. P. 1–19. doi: 10.1134/S1061920816010015.
13. **Глазман И.М.** Прямые методы спектрального качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1963. 339 с.
14. **Бикметов А. Р., Гадильшин Р. Р.** Возмущение эллиптического оператора узким потенциалом в n -мерной области // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 28–64.

Хуснуллин Ильфат Хамзиевич

Поступила 01.08.2016

канд. физ.-мат. наук,

ст. преподаватель

физ.-мат. факультет БГПУ им. М. Акмуллы, г. Уфа

e-mail: Khusnullinikh@mail.ru

REFERENCES

1. Exner P., Seba P. Bound states in curved quantum waveguides. *J. Math. Phys.*, 1989, vol. 30, no. 11, pp. 2574–2580. doi: 10.1063/1.528538.
2. Exner P. Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature. *J. Math. Phys.*, 1993, vol. 34, no. 1, pp. 23–28. doi: 10.1063/1.530378.
3. Duclos P., Exner P. Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions. *Rev. Math. Phys.*, 1995, vol. 7, no. 1, pp. 73–102. doi:10.1142/S0129055X95000062.
4. Gadyl'shin R.R. Local perturbations of quantum waveguides. *Theor. Math. Phys.*, 2005, vol. 145, iss. 3, pp. 1678–1690. doi: 10.1007/s11232-005-0190-y.
5. Bikmetov A., Gadyl'shin R. On quantum waveguide with shrinking potential. *Russian J. Math. Phys.*, 2010, vol. 17, no. 1, pp. 19–25. doi: 10.1134/S1061920810010024.
6. Gadyl'shin R.R., Khusnullin I. Kh. Schrodinger operator on the axis with potentials depending on two parameters. *St. Petersburg Math. J.*, 2011, vol. 22, no. 6, pp. 883–894. doi: 10.1090/S1061-0022-2011-01174-4.
7. Gadyl'shin R.R., Khusnullin I. Kh. Perturbation of a periodic operator by a narrow potential. *Theor. Math. Phys.*, 2012, vol. 173, iss. 1, pp. 1438–1444. doi:10.1007/s11232-012-0124-4.
8. Gadyl'shin R.R. Local perturbations of the Schrodinger operator on the axis. *Theor. Math. Phys.*, 2002, vol. 132, iss. 1. pp. 976–982. doi: 10.1023/A:1019615509634.
9. Borisov D.I., Gadyl'shin R.R. On the spectrum of a periodic operator with a small localized perturbation. *Izvestiya: Mathematics*, 2008, vol. 72, no. 4, pp. 659–688. doi: 10.1070/IM2008v072n04ABEH002420.
10. Bikmetov A.R., Vil'danova V.F., Khusnullin I.Kh. On perturbation of a Schrodinger operator on axis by narrow potentials. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 24–31. doi: 10.13108/2015-7-4-24.
11. Borisov D.I., Karimov R.Kh., Sharapov T.F. Initial length scale estimate for waveguides with some random singular potentials. *Ufa Math. J.*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 33–54. doi: 10.13108/2015-7-2-33.
12. Bikmetov A.R., Gadyl'shin R.R. On local perturbations of waveguides. *Russian J. Math. Phys.*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 1–19. doi: 10.1134/S1061920816010015.
13. Glazman I.M. *Direct methods of qualitative spectral analysis of singular differential operators*. New York, Davey, 1965, 234 p. Original Russian text published in *Prямые методы спектрального качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов*, М.: Физматлит Publ., 1963, 339 p.
14. Bikmetov A.R., Gadyl'shin R.R. Perturbation of an elliptic operator by a narrow potential in an n -dimensional domain. *Ufmskii Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 28–64 (in Russian).

The paper was received by the Editorial Office on August 1, 2016.

Il'fat Khamzievich Khusnullin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Bashkortostan, Ufa, 450000 Russian, e-mail: Khusnullinikh@mail.ru.

УДК 519.6

**ИТЕРАЦИИ СТАБИЛЬНОСТИ И ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ
С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ЧИСЛО ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ¹****А. Г. Ченцов**

Рассматривается вариант метода программных итераций для решения дифференциальной игры сближения-уклонения, именуемый итерациями стабильности. Установлена связь итерационной процедуры с решением задачи уклонения при ограничении на число переключений: итерации стабильности определяют множество успешной разрешимости упомянутой задачи. Доказано, что осуществление уклонения возможно тогда и только тогда, когда осуществимо строгое уклонение (уклонение по отношению к окрестностям множеств, определяющих игру сближения-уклонения). Указано представление стратегий, гарантирующих уклонение с ограничением на число переключений. Данные стратегии определяются в виде триплетов, элементами которых являются всякий раз многозначная позиционная стратегия формирования управлений, стратегия коррекции, реализуемая содержательно в виде отображения, сопоставляющего позиции игры неупреждающий мультифункционал на пространстве траекторий и определяющего конкретный выбор моментов переключения, а также натуральное число, удовлетворяющее ограничению на число переключений и задающее количество переключений формируемого управления. Использование неупреждающих мультифункционалов в качестве инструмента формирования управлений игрока-уклониста существенно. Работа лежит в русле исследований свердловской школы Н. Н. Красовского по теории управления и теории дифференциальных игр.

Ключевые слова: неупреждающий мультифункционал, оператор стабильности, стратегия коррекции.

A. G. Chentsov. Stability iterations and an evasion problem with a constraint on the number of switchings.

For an approach–evasion differential game, we consider a variant of the method of program iterations called stability iterations. A connection is established between the iterative procedure and the solution of an evasion problem with a constraint on the number of switchings: the stability iterations define the successful solvability set of the problem. It is proved that the evasion is possible if and only if the strict evasion is possible (i.e., the evasion with respect to neighborhoods of sets defining the approach–evasion game). We specify a representation of the strategies that guarantee the evasion with a constraint on the number of switchings. These strategies are defined as triplets whose elements are a multidimensional positional control strategy, a correction strategy realized as a mapping that takes a game position to a nonanticipating multifunctional on the trajectory space and defines the choice of the switching times, and a positive integer that satisfies the constraints on the number of switchings and specifies the number of switchings of the control. It is important that we use nonanticipating multifunctionals as a tool for generating the controls of the evading player. The paper is in line with the research carried out by N. N. Krasovskii's school on control theory and the theory of differential games.

Keywords: nonanticipating multifunctional, stability operator, correction strategy.

MSC: 49J15, 49K15, 93C15, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-285-302

Введение

Исследуются задачи теории дифференциальных игр (ДИ); см. [1–3]. Рассматривается один из вариантов метода программных итераций (МПИ) [4–7], связываемый далее с итерациями стабильности. Данный вариант (см. [8; 9, гл. V]) реализует в виде предела последовательности итераций множество позиционного поглощения (МПП) в смысле альтернативы Н. Н. Красовского, А. И. Субботина [2; 10], но (одновременно) доставляет [11; 12] на каждом этапе итерационной процедуры множество успешной разрешимости задачи уклонения с дополнительными ограничениями на число переключений формируемого управления. Основные результаты настоящей работы анонсированы в [11]. Постановке игровой задачи с упомянутым ограничением

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 16-01-00505, 16-01-00649).

отвечают (на идейном уровне) некоторые инженерные задачи управления в условиях помех (управление “по функционалу”), где смена режима функционирования системы осуществляется по мере наступления того или иного события (например, достижения заданной высоты). Представляется поэтому, что более подробное в сравнении с [11;12] изложение математических конструкций может быть полезным специалистам в области систем управления.

1. Содержательное обсуждение задачи

Рассматривается n -мерное арифметическое пространство \mathbb{R}^n и (невырожденный) отрезок $T \triangleq [t_o, \vartheta_o]$, где $t_o \in \mathbb{R}$, $\vartheta_o \in \mathbb{R}$ и $t_o < \vartheta_o$ (здесь и ниже \triangleq — равенство по определению, \mathbb{R} — вещественная прямая). В \mathbb{R}^n (это фазовое пространство) функционирует система

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (1.1)$$

где f — непрерывная n -вектор-функция на $T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q$, P и Q — конечномерные непустые компакты, $P \subset \mathbb{R}^p$, $Q \subset \mathbb{R}^q$. Полагаем, что в (1.1) $u \in P$ и $v \in Q$ суть управляющие параметры игроков I и II, преследующих противоположные цели. Полагаем также для простоты, что при каждом заданном $t_* \in T$ игроки могут формировать только кусочно-постоянные (к.-п.), непрерывные справа (н. спр.) и непрерывные слева (н. сл.) в точке ϑ_o функции $u(\cdot) = u_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_o}$, $v(\cdot) = v_{t_*}(\cdot)_{\vartheta_o}$ на $[t_*, \vartheta_o]$ со значениями в P и Q соответственно. Пусть система (1.1) удовлетворяет условиям обобщенной единственности и равномерной ограниченности решений, подобным [13]. Рассмотрим вариант [11, § 2] формирования вектор-функции $v(\cdot)$, полагая заданным число $s \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\}$. Пусть объектом выбора игрока II является триплет (V, γ, k) . Здесь V — отображение, сопоставляющее каждой позиции $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ непустое подмножество (п/м) Q . Полагаем далее (см. [11; 12]), что γ есть система отображений γ_t , $t_* \leq t \leq \vartheta_o$, где t_* определяется начальной позицией $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$. При $t \in [t_*, \vartheta_o]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ $\gamma_t(x)$ есть многозначный неупреждающий [11, с. 7, 8] функционал на множестве $C_n([t, \vartheta_o])$ всех непрерывных n -вектор-функций на $[t, \vartheta_o]$, принимающий значения в $[t, \vartheta_o]$. Наконец, $k \in \mathbb{N}$ таково, что $k \leq s$.

Общая логика управления, связанная с поэтапным построением $v(\cdot)$ в виде склейки k векторов из Q , состоит в следующем. В начальный момент $\tau_1 = t_*$ выбирается $v_1 \in V(t_*, x_*)$ и “включается” правило $g_1 = \gamma_{t_*}(x_*)$ слежения за будущей траекторией. Константа v_1 вместе с помеховым (по смыслу) управлением $u(\cdot)$ порождает траекторию $x_1(\cdot)$, стартующую из $(t_*, x_*) = (\tau_1, x(\tau_1))$. По мере ее развития правило g_1 формирует момент $\tau_2 \in g_1(x_1(\cdot))$, зависящий только от начального “отрезка” $(x_1(t), t_* \leq t \leq \tau_2)$ траектории $x_1(\cdot)$. В момент τ_2 выбирается $v_2 \in V(\tau_2, x_1(\tau_2))$ и новое правило $g_2 = \gamma_{\tau_2}(x_1(\tau_2))$ слежения за будущей траекторией. В результате воздействия v_2 и управления $u(\cdot)$ из позиции $(\tau_2, x_1(\tau_2))$ развивается траектория $x_2(\cdot)$, определяющая момент $\tau_3 \in g_2(x_2(\cdot))$ (сейчас имеем в виду случай $k > 3$), когда выбирается $v_3 \in V(\tau_3, x_2(\tau_3))$ и правило $g_3 = \gamma_{\tau_3}(x_2(\tau_3))$. Дальнейшее построение аналогично; оно продолжается вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1, k}$. В итоге реализуется “совокупная” траектория $x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o])$, склеенная из фрагментов “частичных” траекторий $x_1(\cdot), \dots, x_k(\cdot)$. Поскольку выбор $u(\cdot)$ может быть произвольным (это любая к.-п., н. спр. и н. сл. в точке ϑ_o функция со значениями в P), то стратегии — триплету (V, γ, k) — сопоставляется на самом деле целый пучок $\mathcal{X}(t_*, x_*, V, \gamma, k)$, являющийся непустым п/м $C_n([t_*, \vartheta_o])$. Полагаем, что (V, γ, k) разрешает ту или иную задачу, если требуемое решение достигается на всех траекториях из упомянутого пучка.

Допустим сейчас, что заданы два п/м $T \times \mathbb{R}^n$, а именно, M и N . Определим цель выбора триплета (V, γ, k) для заданной позиции $(t_*, x_*) \in N$ посредством требования: $\forall x(\cdot) \in \mathcal{X}(t_*, x_*, V, \gamma, k) \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \implies (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, x(t)) \notin N). \quad (1.2)$$

Осуществление (1.2) называем (M, N) -уклонением (траектории $x(\cdot)$). Если допустимый триплет (V, γ, k) со свойством гарантированной реализации (1.2) существует, то позицию (t_*, x_*) назовем успешной для игрока II. Целью нашего исследования является: 1) нахождение множества \mathcal{N} всех таких успешных (для игрока II) позиций, а также для всякой позиции $(t_*, x_*) \in \mathcal{N}$, 2) построение триплета (V, γ, k) , $k \leq s$, гарантирующего (1.2). Решение данной задачи анонсировано в [11] и связывается (в [11]) с вышеупомянутым вариантом МПИ (итерациями стабильности), предложенным для решения ДИ сближения-уклонения, отвечающего альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина.

2. Обозначения и определения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связи, \emptyset — пустое множество). Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Каждому объекту z сопоставляем синглетон $\{z\}$, содержащий z в качестве своего элемента. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ (через $\mathcal{P}'(X)$) обозначаем семейство всех (всех непустых) п/м X . Для непустого семейства \mathcal{X} и множества Y

$$\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \quad (2.1)$$

(след \mathcal{X} на множество Y). В терминах (2.1) определяются, в частности, подпространства (п/п) топологических пространств (ТП) и измеримых пространств (ИП). Если A и B — непустые множества, то, следуя [14, с. 77], через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B (при $\mathbf{f} \in B^A$ и $a \in A$ в виде $\mathbf{f}(a) \in B$ имеем значение \mathbf{f} в точке a); при $g \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$ отображение $(g|C) \triangleq (g(x))_{x \in C} \in B^C$ есть обычное сужение g на множество C .

Традиционные обозначения \mathbb{R} и \mathbb{N} соответствует разд. 1; $\mathbb{N}_o \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$ и $\overline{r_1, r_2} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_o \mid (r_1 \leq k) \& (k \leq r_2)\}$ при $r_1 \in \mathbb{N}_o, r_2 \in \mathbb{N}_o$. Пусть $\overline{m, \infty} \triangleq \{k \in \mathbb{N}_o \mid m \leq k\}$ при $m \in \mathbb{N}_o$. Если H — множество и $k \in \mathbb{N}$, то вместо $H^{\overline{1, k}}$ используем традиционное обозначение H^k , полагая, что элементы \mathbb{N}_o (неотрицательные целые числа) не являются множествами. Если \mathbb{H} — множество, $(H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathbb{N}}$ и $H \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$, то $((H_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow H) \stackrel{\text{def}}{\iff} ((H = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i) \& (H_{j+1} \subset H_j \forall j \in \mathbb{N}))$. Для любых ТП (X, τ) и множества $Y \in \mathcal{P}(X)$ через $\text{cl}(Y, \tau)$ обозначаем замыкание Y в (X, τ) ; в виде $(Y, \tau|_Y)$ имеем п/п (X, τ) .

Если E — множество и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то через $\sigma_E^o(\mathcal{E})$ обозначаем σ -алгебру п/м E , порожденную семейством \mathcal{E} . В связи с описанием п/п ИП отметим, что при $H \in \mathcal{P}(E)$ $\sigma_H^o(\mathcal{E}|_H) = \sigma_E^o(\mathcal{E})|_H$ и, в случае $H \in \sigma_E^o(\mathcal{E})$, $\sigma_H^o(\mathcal{E}|_H) = \{\Sigma \in \sigma_E^o(\mathcal{E}) \mid \Sigma \subset H\}$. Меры, определенные на σ -алгебре борелевских п/м ТП, называем *борелевскими*. Для ИП (S, \mathcal{S}) через $(\sigma - \text{add})_+[S]$ обозначаем множество (точнее, конус при поточечном определении линейных операций) всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) счетно-аддитивных (с.-а.) мер на σ -алгебре \mathcal{S} .

3. Обобщенные программные управления и движения

В настоящем разделе вводятся обобщенные программные управления-меры и отвечающие им движения — скользящие режимы, в терминах которых будет определен затем нужный вариант оператора программного поглощения, именуемый также *оператором стабильности*. Пусть T, P и Q соответствуют разд. 1. При $t \in T$ получаем непустые конечномерные компакты $[t, \vartheta_o]$, $Y_t \triangleq [t, \vartheta_o] \times P$ и $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_o] \times P \times Q$. Упомянутые компакты оснащаем σ -алгебрами борелевских п/м: $\mathcal{T}_t, \mathcal{K}_t$ и \mathcal{C}_t соответственно. Получаем стандартные ИП $([t, \vartheta_o], \mathcal{T}_t)$, (Y_t, \mathcal{K}_t) , $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$ (символика в основном соответствует [8;9]). Если $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$, то ИП $([\theta, \vartheta_o], \mathcal{T}_\theta)$, $(Y_\theta, \mathcal{K}_\theta)$ и $(\Omega_\theta, \mathcal{C}_\theta)$ таковы, что $\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_t|_{[\theta, \vartheta_o]} = \{\Gamma \in \mathcal{T}_t \mid \Gamma \subset [\theta, \vartheta_o]\}$, $\mathcal{K}_\theta = \mathcal{K}_t|_{Y_\theta} = \{K \in \mathcal{K}_t \mid K \subset Y_\theta\}$, $\mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_t|_{\Omega_\theta} = \{C \in \mathcal{C}_t \mid C \subset \Omega_\theta\}$ (согласованность п/п). Через λ обозначаем след меры Лебега на σ -алгебру \mathcal{T}_t . Заметим, что [15, с. 17] при $t \in T$ $\Omega_t = Y_t \times Q$. Кроме того, при $K \in \mathcal{K}_t$ имеем, что

$K \times Q \in \mathcal{C}_t$ (используется легкопроверяемое свойство, что $\{S \in \mathcal{K}_t \mid S \times Q \in \mathcal{C}_t\}$ есть σ -алгебра п/м Y_t , содержащая топологию Y_t , порождающую \mathcal{K}_t), а при $\Gamma \in \mathcal{T}_t$ $\Gamma \times P \times Q = (\Gamma \times P) \times Q \in \mathcal{C}_t$ и $\Gamma \times P \in \mathcal{K}_t$. С учетом этого (см. [8; 9, гл. IV]) полагаем при $t \in T$:

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda(\Gamma) \quad \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}; \quad (3.1)$$

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{K}_t] \mid \mu(\Gamma \times P) = \lambda(\Gamma) \quad \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}; \quad (3.2)$$

$$\pi_t(\mu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(K \times Q) = \mu(K) \quad \forall K \in \mathcal{K}_t\} \quad \forall \mu \in \mathcal{R}_t. \quad (3.3)$$

Меры из множеств (3.1) являются аналогами пар $(u(\cdot), v(\cdot))$ к.-п., н. спр. и н. сл. в точке ϑ_o вектор-функций $u(\cdot) \in P^{[t, \vartheta_o]}$ и $v(\cdot) \in Q^{[t, \vartheta_o]}$, а меры из \mathcal{R}_t (3.2) — аналоги упомянутых вектор-функций $u(\cdot)$. Наконец, меры из множеств (3.3) являются аналогами пар вектор-функций (данного типа) $(u(\cdot), v(\cdot))$, где $u(\cdot)$ фиксировано, т. е. $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$, а $v(\cdot)$ варьируется. В последующих построениях важную роль будут играть “совокупные” ОУ, реализующиеся при совместном действии ОУ $\mu \in \mathcal{R}_t$ и обычного управления-константы $v \in Q$; здесь $t \in T$. В интересах точного определения введем сначала σ -алгебру \mathcal{B} борелевских п/м компакта Q и при $v \in Q$ меру Дирака $\delta_v \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{B}]$ посредством правила: $\forall B \in \mathcal{B} ((v \in B) \Rightarrow (\delta_v(B) \triangleq 1)) \& ((v \notin B) \Rightarrow (\delta_v(B) \triangleq 0))$. Заметим, что семейство $\mathcal{K}_t \{ \times \} \mathcal{B} \triangleq \{K \times B : K \in \mathcal{K}_t, B \in \mathcal{B}\}$ является полу-алгеброй п/м Ω_t , порождающей σ -алгебру \mathcal{C}_t . Тогда при $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $v \in Q$ через $\mu \otimes v$ обозначаем единственную меру из $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{C}_t]$, для которой $(\mu \otimes v)(K \times B) = \mu(K)\delta_v(B) \quad \forall K \in \mathcal{K}_t \quad \forall B \in \mathcal{B}$. С учетом (3.1) и (3.3) легко проверяется, что $\mu \otimes v \in \pi_t(\mu)$.

Всюду в дальнейшем при $t \in T$ через $C([t, \vartheta_o])$, $C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ обозначаем множества всех непрерывных в/з функций на $[t, \vartheta_o]$, Ω_t и Y_t соответственно, получая (при оснащении этих множеств нормами равномерной сходимости) три банаховых пространства. Нам потребуются также пространства $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Y_t)$ линейных непрерывных функционалов на $C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ соответственно. По теореме Рисса меры из \mathcal{H}_t и \mathcal{R}_t (все они являются регулярными [16]) отождествимы с (неотрицательными) элементами $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Y_t)$, что позволяет оснащать \mathcal{H}_t и \mathcal{R}_t соответствующими относительными $*$ -слабыми топологиями (см. [9, гл. IV, § 2]), которые метризуемы в силу сепарабельности пространств $C(\Omega_t)$ и $C(Y_t)$ в оснащении упомянутыми нормами. При $t \in T$ множества \mathcal{H}_t , \mathcal{R}_t и $\pi_t(\mu)$, $\mu \in \mathcal{R}_t$, сильно ограничены и $*$ -слабо замкнуты (см. свойства, отмеченные в [9, с. 163]), а потому $*$ -слабо компактны в силу теоремы Алаоглу. Как следствие, относительные $*$ -слабые топологии упомянутых множеств секвенциально компактны. Замкнутость их п/м в смысле упомянутых топологий эквивалентна секвенциальной замкнутости (упомянутые свойства см. в [17, гл. V]), кроме того, см. [18, § 2.7]. Это позволяет обходиться в последующих построениях секвенциальной сходимостью, для обозначения которой используется символ \rightharpoonup . Иными словами, упомянутые относительные топологии полностью описываются посредством сходящихся последовательностей (подробнее см. в [9, гл. IV]). Отметим следующее свойство: если $t \in T$, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}_t$, $\mu \in \mathcal{R}_t$, то

$$((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu) \implies ((\mu_i \otimes v)_{i \in \mathbb{N}} \rightharpoonup \mu \otimes v \quad \forall v \in Q). \quad (3.4)$$

В связи с проверкой (3.4) отметим построения [19, гл. 5] (в частности, см. [19, теорема 5.5.2]), а также конструкции [20, § III.2]. Напомним, что (см. (1.1)) $f : T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ является непрерывным (по совокупности переменных) отображением, а при $t \in T$ $C_n([t, \vartheta_o])$ есть множество всех непрерывных отображений из $[t, \vartheta_o]$ в \mathbb{R}^n , оснащаемое метрикой равномерной сходимости. Для обозначения упомянутой равномерной сходимости используем символ \rightrightarrows . Если $x(\cdot) = (x(\xi))_{\xi \in [t, \vartheta_o]} \in C_n([t, \vartheta_o])$, то $(\xi, u, v) \mapsto f(\xi, x(\xi), u, v) : \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть непрерывное отображение. Тогда (покомпонентно) определяются интегралы

$$\int_{[t, \theta] \times P \times Q} f(\xi, x(\xi), u, v) \eta(d(\xi, u, v)) \in \mathbb{R}^n \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad \forall \theta \in [t, \vartheta_o] \quad (3.5)$$

(в (3.5) может использоваться простейшая схема [19, гл. 3]). При $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$

$$\begin{aligned} \Phi(t_*, x_*, \eta) &\triangleq \left\{ x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \mid x(t) \right. \\ &= x_* + \int_{[t_*, t] \times P \times Q} f(\xi, x(\xi), u, v) \eta(d(\xi, u, v)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_o] \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

(интегральная воронка, отвечающая триплету (t_*, x_*, η)). Постулируем, что множество (3.6) одноэлементно при всяком выборе $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$. Полагаем при $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_t$, что n -вектор-функция $\varphi(\cdot, t, x, \eta) = (\varphi(\xi, t, x, \eta))_{\xi \in [t, \vartheta_o]} \in C_n([t, \vartheta_o])$ реализует равенство $\Phi(t, x, \eta) = \{\varphi(\cdot, t, x, \eta)\}$ (введено программное движение, отвечающее (t, x, η)). Если $\kappa \in [0, \infty[$, то $B_n(\kappa) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq \kappa\}$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^n . Полагаем в дальнейшем, что $\forall a \in [0, \infty[\exists b \in [0, \infty[: \varphi(\xi, t, x, \eta) \in B_n(b) \quad \forall t \in T \quad \forall x \in B_n(a) \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_t \quad \forall \xi \in [t, \vartheta_o]$. Напомним, что (см. [21]) при $t \in T$ оператор $(x, \eta) \mapsto \varphi(\cdot, t, x, \eta) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t \rightarrow C_n([t, \vartheta_o])$ непрерывен (при этом $\mathbb{R}^n \times \mathcal{H}_t$ оснащается топологией произведения \mathbb{R}^n в топологии покоординатной сходимости и \mathcal{H}_t в относительной $*$ -слабой топологии). Из данного свойства следует (см. (3.4)), что при $t \in T$ и $v \in Q$ оператор $(x, \mu) \mapsto \varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v) : \mathbb{R}^n \times \mathcal{R}_t \rightarrow C_n([t, \vartheta_o])$ непрерывен: если $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{R}_t$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $\mu \in \mathcal{R}_t$, то

$$((x_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow x) \& ((\mu_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \mu) \implies ((\varphi(\cdot, t, x_i, \mu_i \otimes v))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t, x, \mu \otimes v)). \quad (3.7)$$

Ниже используются также свойства [21, (4.12), (4.13)], связанные с “нарезкой-склежкой” ОУ. Из (3.7) вытекает, что при $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $v \in Q$ $\mathcal{X}_{\Pi}(t_*, x_*, v) \triangleq \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \otimes v) : \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\} \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_o]))$ есть компакт в $C_n([t_*, \vartheta_o])$ с топологией равномерной сходимости.

4. Операторы стабильности и их свойства

Оснащаем $T \times \mathbb{R}^n$ обычной топологией \mathbf{t} покоординатной сходимости, получая ТП, метризуемое, в частности, метрикой ρ следующего вида:

$$((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \mapsto \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\}) : (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \rightarrow [0, \infty[.$$

Как обычно, при $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $z \in T \times \mathbb{R}^n$ определяем расстояние от z до множества H : $\rho(z; H) \triangleq \inf(\{\rho(z, h) : h \in H\}) \in [0, \infty[$. Если $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$, то $\rho(\cdot; H) \triangleq (\rho(z; H))_{z \in T \times \mathbb{R}^n}$ есть равномерно непрерывная в/з функция (см. [18, (2.7.14)]), определенная на метрическом пространстве $(T \times \mathbb{R}^n, \rho)$. Полагаем, что \mathcal{F} есть def семейство всех замкнутых в ТП $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ п/м $T \times \mathbb{R}^n$. При $H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$

$$S_o(H, \varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z; H) \leq \varepsilon\} \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$$

есть (замкнутая) окрестность H в упомянутом ТП. Полагая $\tau_{\partial} \triangleq \mathcal{P}(T)$, получаем в виде (T, τ_{∂}) дискрет с “единицей” T (дискретное ТП). Через $\tau_{\partial} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$, где $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ есть обычная топология покоординатной сходимости на \mathbb{R}^n , обозначаем естественную топологию произведения ТП (T, τ_{∂}) и $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$; см. [21, с. 127]. Для семейства \mathfrak{F} всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в ТП $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_{\partial} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, имеем простое представление в терминах сечений. При $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$ $H\langle t \rangle \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in H\}$ — сечение H гиперплоскостью $t = \text{const}$. Тогда

$$\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \mid F\langle t \rangle \in \mathbf{F} \quad \forall t \in T\},$$

где \mathbf{F} есть def семейство всех п/м \mathbb{R}^n , замкнутых в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Ясно, что $\mathbf{t} \subset \tau_{\partial} \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ и $\mathcal{F} \subset \mathfrak{F}$. Если $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$\text{Supp}(\Lambda) \triangleq \{t \in T \mid \Lambda\langle t \rangle \neq \emptyset\}. \quad (4.1)$$

При $S \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ введем $(\|\cdot\| - \inf)[x; S] \triangleq \inf(\{\|x - y\| : y \in S\})$. Если $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, то функция $(\|\cdot\| - \inf)[\cdot; L] \triangleq ((\|\cdot\| - \inf)[x; L])_{x \in \mathbb{R}^n}$ равномерно непрерывна на \mathbb{R}^n , а потому $B_n^o(L, \varepsilon) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|\cdot\| - \inf)[x; L] \leq \varepsilon\} \in \mathbf{F} \setminus \{\emptyset\} \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[$. Получили (замкнутые) окрестности L в $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. С учетом (4.1) имеем, что при $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $t \in \text{Supp}(\Lambda)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ определено $B_n^o(\Lambda(t), \varepsilon) \in \mathbf{F} \setminus \{\emptyset\}$. Полагаем, что

$$\mathbb{S}(H, \varepsilon) \triangleq \{(t, x) \in \text{Supp}(H) \times \mathbb{R}^n \mid x \in B_n^o(H(t), \varepsilon)\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[.$$

При $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in]0, \infty[$ непременно $\mathbb{S}(H, \varepsilon) \in \mathfrak{F}$. Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то оператор

$$\mathbb{A}[M]: \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad (4.2)$$

определяется следующими условиями:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}[M](H) \triangleq \{ & (t, x) \in H \mid \forall v \in Q \exists \mu \in \mathcal{R}_t \exists \vartheta \in [t, \vartheta_0]: ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \mu \otimes v)) \in M) \& \\ & ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \mu \otimes v)) \in H \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Множество M в (4.2), (4.3) играет роль целевого для игрока I. Предполагается, что оператор (4.2) реализует сжатие фазовых ограничений (ФО) в задаче сближения. Называем (4.2), (4.3) оператором стабильности, имея в виду связь с понятием, введенным Н. Н. Красовским. Данная связь проявляется при рассмотрении неподвижных точек оператора (4.2). Отметим, что (см. (4.3)) при $M_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $H_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $H_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$((M_1 \subset M_2) \& (H_1 \subset H_2)) \implies (\mathbb{A}[M_1](H_1) \subset \mathbb{A}[M_2](H_2)).$$

Предложение 4.1. Если $M \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, $F \in \mathfrak{F}$ и $(t_*, x_*) \in F \setminus \mathbb{A}[M](F)$, то $\exists \varepsilon \in]0, \infty[: (t_*, x_*) \notin \mathbb{A}[S_o(M, \varepsilon)](\mathbb{S}(F, \varepsilon))$.

Доказательство использует *-слабую компактность множеств (3.2) и осуществляется от противного с использованием построений, подобных [21]; оно не содержит трудностей принципиального характера и по этой причине опущено в настоящем изложении.

Предложение 4.2. Если $M \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathfrak{F}$, то $\mathbb{A}[M](F) \in \mathfrak{F}$.

Доказательство подобно обоснованию аналогичного положения [21].

По аналогии с [21, предложение 5.2] устанавливается также следующее

Предложение 4.3. Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F)$, то $M \in \mathcal{F}$, $F \in \mathfrak{F}$ и $(\mathbb{A}[M_i](F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F)$.

5. Итерационная процедура

В настоящем разделе излагается итерационная процедура [8, § 11] (см. также [9, гл. V, § 4]), реализующаяся в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и при естественных предположениях топологического характера доставляющая (в пределе) МПП. Если $\alpha \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)}$ (т. е. α — оператор, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$), то последовательность $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_o}: \mathbb{N}_o \longrightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)^{\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)}$ степеней α определяется следующими традиционными условиями: $(\alpha^o(H) \triangleq H \quad \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)) \& (\alpha^{k+1} = \alpha \circ \alpha^k \quad \forall k \in \mathbb{N}_o)$, где символ \circ используется для обозначения композиции отображений. Поэтому при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $k \in \mathbb{N}_o$ определен оператор $\mathbb{A}[M]^k$, действующий в $\mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$. Полагаем

$$\mathcal{W}_k(M, N) \triangleq \mathbb{A}[M]^k(N) \quad \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall k \in \mathbb{N}_o. \quad (5.1)$$

Из (5.1) получаем, что $\forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$(\mathcal{W}_o(M, N) = N) \& (\mathcal{W}_{s+1}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}_s(M, N)) \subset \mathcal{W}_s(M, N) \quad \forall s \in \mathbb{N}_o). \quad (5.2)$$

Наконец, имеем также $\forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\mathcal{W}(M, N) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_o} \mathcal{W}_k(M, N) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_k(M, N) \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \quad (5.3)$$

Легко видеть, что $(\mathcal{W}_k(M, N))_{k \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}(M, N) \quad \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$.

Предложение 5.1. Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}_s(M, N) \in \mathfrak{F} \quad \forall s \in \mathbb{N}_o$.

Доказательство следует из (5.2) и предложения 4.2. С учетом (5.3) получаем

Следствие 5.1. Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}(M, N) \in \mathfrak{F}$.

Из предложений 4.3 и 5.1 вытекает следующее

Предложение 5.2. Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $\mathcal{W}(M, N) = \mathbb{A}[M](\mathcal{W}(M, N))$.

Отметим два очевидных, но полезных свойства: 1) если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $H \in \mathcal{P}(N)$, то $(H = \mathbb{A}[M](H)) \implies (H \subset \mathcal{W}(M, N))$; 2) если $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ и $L \in \mathcal{P}(N)$, то $(\mathcal{W}(M, N) \subset L) \implies (\mathcal{W}(M, N) = \mathcal{W}(M, L))$. Из предложения 4.3 вытекает

Предложение 5.3. Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$(((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N)) \implies ((\mathcal{W}_s(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}_s(M, N) \quad \forall s \in \mathbb{N}_o).$$

Следствие 5.2. Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$(((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N)) \implies ((\mathcal{W}(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathcal{W}(M, N)).$$

Доказательство получаем комбинацией (5.3) и предложения 5.3. Из определений следует, что при $M_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $N_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ $((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)) \implies (\mathcal{W}_s(M_1, N_1) \subset \mathcal{W}_s(M_2, N_2) \quad \forall s \in \mathbb{N}_o)$; как следствие получаем импликацию $((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)) \implies (\mathcal{W}(M_1, N_1) \subset \mathcal{W}(M_2, N_2))$. Из предложения 5.3 вытекает

Предложение 5.4. Если $M \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, $N \in \mathfrak{F}$, $s \in \mathbb{N}$ и $(t_*, x_*) \in N \setminus \mathcal{W}_s(M, N)$, то $\exists \varepsilon \in]0, \infty[: (t_*, x_*) \notin \mathcal{W}_s(S_o(M, \varepsilon), \mathbb{S}(N, \varepsilon))$.

Отметим, что при $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$ в виде $\mathcal{W}(M, N)$ имеем МПП, которое исчерпывает возможности успешного решения задачи наведения на M при ФО, определяемых сечениями N , в классе квазистратегий. В этой связи см. [8, теорема 11.1; 21, теорема 10.1].

6. Слои пространства позиций: общие свойства

В настоящем разделе схема МПИ (итерации стабильности) конкретизируется в интересах исследования задач уклонения с ограничением на число переключений. Всюду в дальнейшем

$$(\mathbf{M} \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}) \& (\mathbf{N} \in \mathfrak{F}) \quad (6.1)$$

(наряду с множествами (6.1) будем рассматривать их окрестности); \mathbf{M} играет роль целевого множества задачи сближения, а сечения \mathbf{N} определяют ФО упомянутой задачи. Полагаем, что

$(W_s \triangleq \mathcal{W}_s(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \ \forall s \in \mathbb{N}_o) \ \& \ (W \triangleq \mathcal{W}(\mathbf{M}, \mathbf{N}))$. Тогда $W_s \in \mathfrak{F}$ при $s \in \mathbb{N}_o$; кроме того, $W \in \mathfrak{F}$. При $\varepsilon \in]0, \infty[$ реализуются множества $S_o(\mathbf{M}, \varepsilon) \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ и $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \in \mathfrak{F}$. Имеем $\forall \varepsilon \in]0, \infty[$

$$(W_s^{(\varepsilon)} \triangleq \mathcal{W}_s(S_o(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)) \ \forall s \in \mathbb{N}_o) \ \& \ (W^{(\varepsilon)} \triangleq \mathcal{W}(S_o(\mathbf{M}, \varepsilon), \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon))).$$

При $\varepsilon \in]0, \infty[$ реализуются свойства $(W_s^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{F} \ \forall s \in \mathbb{N}_o) \ \& \ (W^{(\varepsilon)} \in \mathfrak{F})$. В силу предложения 5.4

$$\forall s \in \mathbb{N} \ \forall (t, x) \in \mathbf{N} \setminus W_s \ \exists \varepsilon \in]0, \infty[: (t, x) \notin W_s^{(\varepsilon)}. \quad (6.2)$$

Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то определяем слои пространства позиций:

$$(\mathbb{F}_o^{(\varepsilon)} \triangleq ((T \times \mathbb{R}^n) \setminus \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)) \cup W^{(\varepsilon)}) \ \& \ (\mathbb{F}_s^{(\varepsilon)} \triangleq W_s^{(\varepsilon)} \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)} \ \forall s \in \mathbb{N}).$$

Предложение 6.1. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$ и $s \in \mathbb{N}$, то $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_s^{(\varepsilon)} = \bigcup_{k=1}^s \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)}$.

Предложение 6.2. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то последовательность $(\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)})_{k \in \mathbb{N}}$ образует разбиение множества $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)}$:

$$\left(\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W^{(\varepsilon)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)} \right) \ \& \ (\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)} \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)} = \emptyset \ \forall k_1 \in \mathbb{N} \ \forall k_2 \in \mathbb{N} \setminus \{k_1\}).$$

Следствие 6.1. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, то $\{\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)} : k \in \mathbb{N}_o\}$ есть разбиение $T \times \mathbb{R}^n$:

$$\left(T \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_o} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)} \right) \ \& \ (\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)} \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)} = \emptyset \ \forall k_1 \in \mathbb{N}_o \ \forall k_2 \in \mathbb{N}_o \setminus \{k_1\}).$$

Следствие 6.2. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$ и $t \in T$, то $\{\mathbb{F}_k^{(\varepsilon)} \langle t \rangle : k \in \mathbb{N}_o\}$ есть разбиение \mathbb{R}^n :

$$\left(\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_o} \mathbb{F}_k^{(\varepsilon)} \langle t \rangle \right) \ \& \ (\mathbb{F}_{k_1}^{(\varepsilon)} \langle t \rangle \cap \mathbb{F}_{k_2}^{(\varepsilon)} \langle t \rangle = \emptyset \ \forall k_1 \in \mathbb{N}_o \ \forall k_2 \in \mathbb{N}_o \setminus \{k_1\}).$$

7. Процедуры уклонения, 1: построение траекторий

Ниже уточняются построения разд. 1 для задач уклонения с ограничением на число переключений. Через \mathfrak{V} обозначаем множество всех отображений из $T \times \mathbb{R}^n$ в $\mathcal{P}'(Q)$: $\mathfrak{V} \triangleq \mathcal{P}'(Q)^{T \times \mathbb{R}^n}$. Элементы \mathfrak{V} (позиционные стратегии) — суть непустозначные мультифункционалы из $T \times \mathbb{R}^n$ в Q , что идейно соответствует определению позиционных стратегий в [2; 3].

Если $t \in T$, то через $G^*(t)$ обозначаем множество всех отображений $g^* \in \mathcal{P}'([t, \vartheta_o])^{C_n([t, \vartheta_o])}$, обладающих каждое следующим свойством: $\forall g_1 \in C_n([t, \vartheta_o]) \ \forall g_2 \in C_n([t, \vartheta_o]) \ \forall \theta \in [t, \vartheta_o]$

$$((g_1| [t, \theta]) = (g_2| [t, \theta])) \implies (g^*(g_1) \cap [t, \theta] = g^*(g_2) \cap [t, \theta]) \quad (7.1)$$

(см. [11; 12]). Элементы $G^*(t)$ — суть неупреждающие (см. (7.1)) мультифункционалы на $C_n([t, \vartheta_o])$. Отображения-константы являются элементами $G^*(t)$. Через $\mathbb{G}_o^*(t)$ обозначаем множество всех отображений из \mathbb{R}^n в $G^*(t)$: $\mathbb{G}_o^*(t) \triangleq G^*(t)^{\mathbb{R}^n}$. Наконец, пусть при $\theta \in T$

$$\mathbb{G}_\theta^* \triangleq \prod_{t \in [\theta, \vartheta_o]} \mathbb{G}_o^*(t) \quad (7.2)$$

(\mathbb{G}_θ^* есть декартово произведение множеств $\mathbb{G}_o^*(t)$, $t \in [\theta, \vartheta_o]$). Элементы (7.2) называем стратегиями коррекции на $[\theta, \vartheta_o]$ (см. [11, с. 8]). Каждая стратегия коррекции из множества (7.2)

является отображением на $[\theta, \vartheta_o]$, значения которого при $t \in [\theta, \vartheta_o]$ содержатся в $\mathbb{G}_o^*(t)$ и являются всякий раз отображением из \mathbb{R}^n в $G^*(t)$. Итак, при $\theta \in T$, $\gamma \in \mathbb{G}_\theta^*$, $t \in [\theta, \vartheta_o]$ и $x \in \mathbb{R}^n$ в виде $\gamma(t)(x)$ имеем неупреждающий мультифункционал из множества $G^*(t)$. Если $t \in T$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$ и $\tau \in [t, \vartheta_o]$, то (см. (7.2)) определено сужение

$$(\gamma|[\tau, \vartheta_o]) \in \mathbb{G}_\tau^* \quad (7.3)$$

исходного отображения γ на отрезок $[\tau, \vartheta_o]$. Наконец, располагая позицией (t, x) и $s \in \mathbb{N}$, мы определяем множество допустимых процедур уклонения из данной позиции в виде $\mathfrak{V} \times \mathbb{G}_t^* \times \overline{1, s}$. Здесь s задает ограничение на число переключений формируемого управления.

Рассмотрим вопрос о траекториях, порождаемых стратегиями-тройками из множества $\mathfrak{V} \times \mathbb{G}_t^* \times \mathbb{N}$. Сначала введем несколько вспомогательных определений. Если $t \in T$ и $m \in \mathbb{N}$, то $\Delta_m[t] \triangleq \{(\tau_i)_{i \in \overline{1, m+1}} \in [t, \vartheta_o]^{m+1} \mid (\tau_1 = t) \& (\tau_{m+1} = \vartheta_o) \& (\tau_j \leq \tau_{j+1} \ \forall j \in \overline{1, m})\}$. Каждый кортеж из последнего множества порождает разбиение $[t, \vartheta_o]$ в сумму m промежутков (некоторые из них могут быть вырожденными). Если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $v \in Q$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$, то полагаем, что $\mathcal{X}_\Pi^{(\theta)}(t, x, v) \triangleq \{\mathbf{x}|[t, \theta] : \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v)\}$, получая непустое множество n -вектор-функций на $[t, \theta]$. Если $V \in \mathfrak{V}$, $t \in T$, $m \in \mathbb{N}$, $(\tau_i)_{i \in \overline{1, m+1}} \in \Delta_m[t]$ и $\mathbf{x} \in C_n([t, \vartheta_o])$, то

$$\begin{aligned} & \mathfrak{M}_Q[V; t; m; (\tau_i)_{i \in \overline{1, m+1}}; \mathbf{x}] \\ & \triangleq \left\{ (v_i)_{i \in \overline{1, m}} \in \prod_{i=1}^m V(\tau_i, \mathbf{x}(\tau_i)) \mid (\mathbf{x}|[\tau_k, \tau_{k+1}]) \in \mathcal{X}_\Pi^{(\tau_{k+1})}(\tau_k, \mathbf{x}(\tau_k), v_k) \ \forall k \in \overline{1, m} \right\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

(не исключается, что множество (7.4) может быть пустым). Разумеется, (7.4) представляет интерес при условии, что $\mathbf{x} = x(\cdot)$ — траектория системы. Далее, если $V \in \mathfrak{V}$, $t \in T$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$, $\mathbf{x} \in C_n([t, \vartheta_o])$ и $m \in \mathbb{N}$, то полагаем

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{pos}}[V; t; \gamma; \mathbf{x}; m] & \triangleq \{(\tau_i)_{i \in \overline{1, m+1}} \in \Delta_m[t] \mid (\mathfrak{M}_Q[V; t; m; (\tau_i)_{i \in \overline{1, m+1}}; \mathbf{x}] \neq \emptyset) \& \\ & (\tau_{k+1} \in \gamma(\tau_k)(\mathbf{x}(\tau_k))(\mathbf{x}|[\tau_k, \vartheta_o])) \ \forall k \in \overline{1, m-1}\}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

В (7.5) указаны возможные “временные сценарии” организации коррекций, согласованных с (V, γ, m) и “привязанных” к вектор-функции \mathbf{x} . Теперь сопоставим стратегии-тройке множество не противоречащих ей траекторий: если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$ и $m \in \mathbb{N}$, то

$$\mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; m] \triangleq \{\mathbf{x} \in C_n([t, \vartheta_o]) \mid (\mathbf{x}(t) = x) \& (\Delta_{\text{pos}}[V; t; \gamma; \mathbf{x}; m] \neq \emptyset)\}. \quad (7.6)$$

Элементы (7.6) — траектории системы, которые стартуют из позиции (t, x) и не противоречат стратегии-тройке (V, γ, m) . Эти траектории называем *порожденными стратегией-тройкой*.

З а м е ч а н и е 7.1. В (7.6) допускается, что формируемое на основе (V, γ, m) обычное управление $v(\cdot)$ со значениями в Q воздействует на систему вместе с некоторой обобщенной помехой $\mu \in \mathcal{R}_t$. Итак, мы существенно расширяем возможности игрока I в части формирования помеховых воздействий. Отметим вариант [11] излагаемой ниже конструкции, в рамках которого допускалось использование игроком I только обычных помеховых управлений. \square

Из (7.4)–(7.6) вытекает свойство: если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$ и $\gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^*$, то

$$\mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; 1] = \bigcup_{v \in V(t_*, x_*)} \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, v) \in \mathcal{P}'(C_n([t_*, \vartheta_o])). \quad (7.7)$$

Предложение 7.1. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^*$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in C_n([t_*, \vartheta_o])$ и $(\tau_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \Delta_{\text{pos}}[V; t_*; \gamma; \mathbf{x}; m+1]$, то $(\tau_{i+1})_{i \in \overline{1, m+1}} \in \Delta_{\text{pos}}[V; \tau_2; (\gamma|[\tau_2, \vartheta_o]); (\mathbf{x}|[\tau_2, \vartheta_o]); m]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из определений.

Из (7.6) и предложения 7.1 вытекает

Предложение 7.2. Если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^*$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; m+1]$ и $(\tau_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \Delta_{\text{pos}}[V; t_*; \gamma; \mathbf{x}; m+1]$, то $(\mathbf{x} | [\tau_2, \vartheta_o]) \in \mathfrak{X}[\tau_2; \mathbf{x}(\tau_2); V; (\gamma | [\tau_2, \vartheta_o]); m]$.

Ниже используется “обычная” операция склеивания: если $t \in T$, $\theta \in [t, \vartheta_o]$, $g_1: [t, \vartheta_o] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g_2: [\theta, \vartheta_o] \rightarrow \mathbb{R}^n$, то $g_1 \square g_2: [t, \vartheta_o] \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяется условиями

$$((g_1 \square g_2)(\xi) \stackrel{\Delta}{=} g_1(\xi) \quad \forall \xi \in [t, \theta[) \& ((g_1 \square g_2)(\xi) \stackrel{\Delta}{=} g_2(\xi) \quad \forall \xi \in [\theta, \vartheta_o]). \quad (7.8)$$

Ясно, что при $g_1 \in C_n([t, \vartheta_o])$ и $g_2 \in C_n([\theta, \vartheta_o])$

$$(g_1(\theta) = g_2(\theta)) \implies (g_1 \square g_2 \in C_n([t, \vartheta_o])). \quad (7.9)$$

Предложение 7.3. Если $(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$ и $m \in \mathbb{N}$, то $\mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; m] \neq \emptyset$.

Доказательство осуществляется по индукции с учетом (7.7)–(7.9).

Итак, каждой стратегии-тройке сопоставляется непустое множество — пучок траекторий, порожденных данной стратегией. Из (7.7) следует

Предложение 7.4. Если $(t_*, x_*) \in W_1$, то $\forall V \in \mathfrak{V} \quad \forall \gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^* \quad \exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; 1] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[)$.

Предложение 7.5. Если $s \in \mathbb{N}$, $(t, x) \in W_s$, $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$ и $k \in \overline{1, s}$, то $\exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; k] \quad \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]: ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in \mathbf{N} \quad \forall \xi \in [t, \vartheta[)$.

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{N} \stackrel{\Delta}{=} \{s \in \mathbb{N} \mid \forall (t, x) \in W_s \quad \forall V \in \mathfrak{V} \quad \forall \gamma \in \mathbb{G}_t^* \quad \forall k \in \overline{1, s} \quad \exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; k] \quad \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]: ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in \mathbf{N} \quad \forall \xi \in [t, \vartheta[)\}. \quad (7.10)$$

Из предложения 7.4 вытекает, что $1 \in \mathfrak{N}$. Выберем произвольно $m \in \mathfrak{N}$. Пусть, кроме того, $(t_*, x_*) \in W_{m+1}$, $V \in \mathfrak{V}$ и $\kappa \in \mathbb{G}_{t_*}^*$. Тогда $V(t_*, x_*) \in \mathcal{P}'(Q)$ и, в частности, $V(t_*, x_*) \neq \emptyset$. Пусть $v_* \in V(t_*, x_*)$, при этом $W_{m+1} = \mathbb{A}[\mathbf{M}](W_m)$. Для некоторых $\mu_* \in \mathcal{R}_{t_*}$ и $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta_*, \mathbf{x}^*(\vartheta_*)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \mathbf{x}^*(t)) \in W_m \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_*[), \quad (7.11)$$

где $\mathbf{x}^* \stackrel{\Delta}{=} \varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu_* \otimes v_*)$. Тогда $\kappa(t_*)(x_*)(\mathbf{x}^*) \in \mathcal{P}'([t_*, \vartheta_o])$. Пусть

$$t^* \in \kappa(t_*)(x_*)(\mathbf{x}^*). \quad (7.12)$$

Рассмотрим позицию $(t^*, \mathbf{x}^*(t^*)) \in T \times \mathbb{R}^n$. Фиксируя $r \in \overline{1, m}$, получаем стратегию-тройку $(V, \bar{\kappa}, r)$, где $\bar{\kappa} \stackrel{\Delta}{=} (\kappa | [t^*, \vartheta_o]) \in \mathbb{G}_{t^*}^*$ (см. (7.3)). В силу предложения 7.3 $\mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); V; \bar{\kappa}; r] \in \mathcal{P}'(C_n([t^*, \vartheta_o]))$. Используя (7.12), нетрудно показать, что

$$\mathbf{x}^* \square \mathbf{y} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; V; \kappa; r+1] \quad \forall \mathbf{y} \in \mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); V; \bar{\kappa}; r]. \quad (7.13)$$

При этом $(\vartheta_* \leq t^*) \vee (t^* < \vartheta_*)$. Оба упомянутых случая рассмотрим отдельно.

1) Пусть $\vartheta_* \leq t^*$. Тогда с учетом непустоты $\mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); V; \bar{\kappa}; r]$ выберем произвольно $\bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{X}[t^*; \mathbf{x}^*(t^*); V; \bar{\kappa}; r]$, получая (см. (7.13)) $\bar{\mathbf{z}} \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{x}^* \square \bar{\mathbf{x}} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; V; \kappa; r+1]$ со свойством $\bar{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{x}^*(t) \quad \forall t \in [t_*, t^*]$. В силу (7.11) получаем, что $((\vartheta_*, \bar{\mathbf{z}}(\vartheta_*)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \bar{\mathbf{z}}(t)) \in W_m \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_*[)$. Итак, установлена следующая импликация

$$(\vartheta_* \leq t^*) \implies (\exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; \mathbf{x}_*; V; \kappa; r+1] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[)). \quad (7.14)$$

2) Пусть $t^* < \vartheta_*$. Тогда $t^* \in [t_*, \vartheta_*[$ и согласно (7.11) $(t^*, \mathbf{x}^*(t^*)) \in W_m$, $r \in \overline{1, m}$, $\mathbb{V} \in \mathfrak{V}$, $\bar{\kappa} \in \mathbb{G}_{t^*}^*$. По выбору m имеем (см. (7.10)) для некоторых $\mathbf{x}^\natural \in \mathfrak{X}[t^*, \mathbf{x}^*(t^*); \mathbb{V}; \bar{\kappa}; r]$ и $\vartheta^\natural \in [t^*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta^\natural, \mathbf{x}^\natural(\vartheta^\natural)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \mathbf{x}^\natural(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t^*, \vartheta^\natural[). \quad (7.15)$$

В силу (7.13) $\mathbf{x}_*^\natural \triangleq \mathbf{x}^* \square \mathbf{x}^\natural \in \mathfrak{X}[t_*, x_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1]$, причем $\mathbf{x}_*^\natural(t) = \mathbf{x}^*(t) \quad \forall t \in [t_*, t^*]$. Тогда из (7.11) получаем, что $(t, \mathbf{x}_*^\natural(t)) = (t, \mathbf{x}^*(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, t^*]$ (учли вложение $W_m \subset \mathbf{N}$), откуда в силу (7.15) получаем, что $((\vartheta^\natural, \mathbf{x}_*^\natural(\vartheta^\natural)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \mathbf{x}_*^\natural(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta^\natural[)$. Итак,

$$(t^* < \vartheta_*) \Rightarrow (\exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; r+1] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: \\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[)). \quad (7.16)$$

Поскольку выбор $r \in \overline{1, m}$ был произвольным, из (7.14) и (7.16) вытекает, что

$$\forall s \in \overline{2, m+1} \quad \exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; s] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: \\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[). \quad (7.17)$$

С другой стороны, $W_{m+1} \subset W_1$, а потому $(t_*, x_*) \in W_1$ и с учетом предложения 7.4 и (7.17) $\forall s \in \overline{1, m+1} \quad \exists \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbb{V}; \kappa; s] \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \& ((t, \mathbf{x}(t)) \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta[)$. Поскольку выбор (t_*, x_*) , \mathbb{V} и κ был произвольным, установлено, что $m+1 \in \mathfrak{N}$. Получили импликацию $(m \in \mathfrak{N}) \Rightarrow (m+1 \in \mathfrak{N})$. Следовательно, $(1 \in \mathfrak{N}) \& (k+1 \in \mathfrak{N} \quad \forall k \in \mathfrak{N})$, а потому $\mathfrak{N} = \mathbb{N}$ и с учетом (7.10) получаем требуемое утверждение. \square

Итак, установлено, что при $s \in \mathbb{N}$ и $(t, x) \in W_s$ гарантированное (\mathbf{M}, \mathbf{N}) -уклонение в классе стратегий-троек (V, γ, k) , $V \in \mathfrak{V}$, $\gamma \in \mathbb{G}_t^*$, $k \in \overline{1, s}$, невозможно.

8. Процедуры уклонения, 2 (связь с методом итераций)

В настоящем разделе рассматривается вопрос о процедурах, гарантирующих строгое уклонение при ограничении на число переключений (см. [11; 12]). Согласно (6.2)

$$\Xi_s(t, x) \triangleq \{\varepsilon \in]0, \infty[\mid (t, x) \notin W_s^{(\varepsilon)}\} \in \mathcal{P}'(]0, \infty[) \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall (t, x) \in \mathbf{N} \setminus W_s. \quad (8.1)$$

Введем в рассмотрение аналог позиционной стратегии [12, (5.5), (5.6)], для чего отметим сначала, что $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)} \quad \exists v \in Q \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v) \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin W_{s-1}^{(\varepsilon)}). \quad (8.2)$$

При $\varepsilon \in]0, \infty[$ полагаем (см. (8.2), следствие 6.2), что $\mathbf{V}_\varepsilon \in \mathfrak{V}$ имеет вид

$$(\mathbf{V}_\varepsilon(t, x) \triangleq Q \quad \forall (t, x) \in \mathbb{F}_o^{(\varepsilon)}) \& (\mathbf{V}_\varepsilon(t, x) \triangleq \{v \in Q \mid \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v) \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o] \\ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin W_{s-1}^{(\varepsilon)}\}) \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}). \quad (8.3)$$

При $t \in T$ полагаем, что $\Theta_t^o \in G^*(t)$ определяется условием $\Theta_t^o(g) \triangleq \{\vartheta_o\} \quad \forall g \in C_n([t, \vartheta_o])$. Для построения работоспособных стратегий коррекции потребуются некоторые вспомогательные определения. Если $t \in T$, $\Gamma \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что

$$C_t[\Gamma; \Lambda] \triangleq \{g \in C_n([t, \vartheta_o]) \mid \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]: ((\vartheta, g(\vartheta)) \in \Lambda) \& ((\xi, g(\xi)) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])\}. \quad (8.4)$$

О п р е д е л е н и е 8.1. Если $\Gamma \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$, то мультифункционал $\theta^o[\Gamma; \Lambda; t]: C_n([t, \vartheta_o]) \rightarrow \mathcal{P}'([t, \vartheta_o])$ определяем следующими условиями:

$$(\theta^o[\Gamma; \Lambda; t](g) \triangleq \{\vartheta \in [t, \vartheta_o] \mid ((\vartheta, g(\vartheta)) \in \Lambda) \& ((\xi, g(\xi)) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])\} \quad \forall g \in C_t[\Gamma; \Lambda]) \& \\ (\theta^o[\Gamma; \Lambda; t](g) \triangleq \{\vartheta_o\} \quad \forall g \in C_n([t, \vartheta_o]) \setminus C_t[\Gamma; \Lambda]). \quad (8.5)$$

Предложение 8.1. Если $\Gamma \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $t \in T$, то $\theta^o[\Gamma; \Lambda; t] \in G^*(t)$.

Доказательство. Фиксируем Γ , Λ и t в соответствии с условиями. Пусть $g_1 \in C_n([t, \vartheta_o])$, $g_2 \in C_n([t, \vartheta_o])$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ таковы, что $(g_1|_{[t, \theta]}) = (g_2|_{[t, \theta]})$. Введем $\mathbb{T}_1 \triangleq \theta^o[\Gamma; \Lambda; t](g_1)$ и $\mathbb{T}_2 \triangleq \theta^o[\Gamma; \Lambda; t](g_2)$.

1) Пусть $g_1 \in C_t[\Gamma; \Lambda]$ и $\vartheta_1 \in \mathbb{T}_1 \cap [t, \theta]$. Тогда (см. (8.5))

$$((\vartheta_1, g_1(\vartheta_1)) \in \Lambda) \& ((\xi, g_1(\xi)) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t, \vartheta_1]). \quad (8.6)$$

Поскольку $\vartheta_1 \leq \theta$, из (8.6) легко следует, что $\vartheta_1 \in \mathbb{T}_2 \cap [t, \theta]$. Итак, в случае 1) $\mathbb{T}_1 \cap [t, \theta] \subset \mathbb{T}_2 \cap [t, \theta]$. Получили импликацию $(g_1 \in C_t[\Gamma; \Lambda]) \implies (\mathbb{T}_1 \cap [t, \theta] \subset \mathbb{T}_2 \cap [t, \theta])$.

2) Пусть теперь $g_1 \in C_n([t, \vartheta_o]) \setminus C_t[\Gamma; \Lambda]$. Из определения 8.1 следует, что $\mathbb{T}_1 = \{\vartheta_o\}$, а из (8.4) и совпадения $g_1(t)$ и $g_2(t)$ на $[t, \theta]$ вытекает, что $\forall \vartheta \in [t, \theta]$

$$((\vartheta, g_2(\vartheta)) \in \Lambda) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta]: (\xi, g_2(\xi)) \in \Gamma).$$

Допустим, что $(\mathbb{T}_1 \cap [t, \theta]) \setminus (\mathbb{T}_2 \cap [t, \theta]) \neq \emptyset$. Пусть $\bar{\vartheta} \in (\mathbb{T}_1 \cap [t, \theta]) \setminus (\mathbb{T}_2 \cap [t, \theta])$. Тогда $\bar{\vartheta} \notin \mathbb{T}_2$ и, вместе с тем, $\bar{\vartheta} = \vartheta_o$. Получили, что $\vartheta_o \notin \mathbb{T}_2$, что означает в силу определения 8.1 справедливость включения $g_2 \in C_t[\Gamma; \Lambda]$. При этом

$$\mathbb{T}_2 = \{\vartheta \in [t, \vartheta_o] \mid ((\vartheta, g_2(\vartheta)) \in \Lambda) \& ((\xi, g_2(\xi)) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])\} \subset [t, \vartheta_o[. \quad (8.7)$$

Тогда $\mathbb{T}_2 \cap [t, \theta] = \emptyset$ (действительно, при $\hat{\vartheta} \in \mathbb{T}_2 \cap [t, \theta]$ имеем $\hat{\vartheta} < \vartheta_o$ и, вместе с тем, с учетом (8.7) $((\hat{\vartheta}, g_1(\hat{\vartheta})) \in \Lambda) \& ((\xi, g_1(\xi)) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t, \hat{\vartheta}])$; поэтому при $\mathbb{T}_2 \cap [t, \theta] \neq \emptyset$ имеем в силу (8.4), что $g_1 \in C_t[\Gamma; \Lambda]$, а это невозможно). Кроме того, при $\theta = \vartheta_o$ имеем равенство $g_1 = g_2$, а тогда $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2$ и $\mathbb{T}_2 = \{\vartheta_o\}$, что невозможно в силу (8.7). Стало быть $\theta < \vartheta_o$, а потому $\mathbb{T}_1 \cap [t, \theta] = \{\vartheta_o\} \cap [t, \theta] = \emptyset$ и наше предположение о непустоте $(\mathbb{T}_1 \cap [t, \theta]) \setminus (\mathbb{T}_2 \cap [t, \theta])$ неверно. Таким образом, $\mathbb{T}_1 \cap [t, \theta] \subset \mathbb{T}_2 \cap [t, \theta]$ и в рассматриваемом случае 2). Получаем окончательно, что $((g_1|_{[t, \theta]}) = (g_2|_{[t, \theta]})) \implies (\mathbb{T}_1 \cap [t, \theta] \subset \mathbb{T}_2 \cap [t, \theta])$. Поскольку g_1 , g_2 и θ выбирались произвольно, установлено требуемое свойство неупреждаемости. \square

О п р е д е л е н и е 8.2. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$ и $t \in T$, то полагаем, что отображение $\tilde{\theta}_t^{(\varepsilon)} \in \mathbb{G}_o^*(t)$ имеет следующий вид:

$$(\tilde{\theta}_t^{(\varepsilon)}(x) \triangleq \Theta_t^o \quad \forall x \in \mathbb{F}_o^{(\varepsilon)}(t)) \& (\tilde{\theta}_t^{(\varepsilon)}(x) \triangleq \theta^o[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}; t] \quad \forall s \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}(t)).$$

С учетом определения 8.2 имеем теперь, что

$$\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t] \triangleq (\tilde{\theta}_\xi^{(\varepsilon)})_{\xi \in [t, \vartheta_o]} \in \mathbb{G}_t^* \quad \forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \forall t \in T. \quad (8.8)$$

Таким образом (см. (8.3), (8.8)), при $\varepsilon \in]0, \infty[$, $t \in T$ и $s \in \mathbb{N}$ ($\mathbf{V}_\varepsilon, \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t], s) \in \mathfrak{V} \times \mathbb{G}_t^* \times \mathbb{N}$ (построена стратегия-тройка). Легко видеть, что справедливо

Предложение 8.2. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $(t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_s^{(\varepsilon)}$ и $v \in \mathbf{V}_\varepsilon(t, x)$, то

$$\mathcal{X}_{\Pi}(t, x, v) \subset C_t[\mathbf{S}_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}].$$

Из предложения 8.2 вытекает (см. определение 8.2), что при $\varepsilon \in]0, \infty[$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $(t, x) \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}$, $v \in \mathbf{V}_\varepsilon(t, x)$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_{\Pi}(t, x, v)$

$$\begin{aligned} & \theta^o[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}; t](\mathbf{x}) \\ &= \{\vartheta \in [t, \vartheta_o] \mid ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{s-1}^{(\varepsilon)}) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin S_o(\mathbf{M}, \varepsilon) \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])\}. \end{aligned}$$

В силу (7.7) $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \forall (t, x) \in \mathbb{F}_1^{(\varepsilon)} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; 1] \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta]: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)). \quad (8.9)$$

Предложение 8.3. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, $s \in \mathbb{N}$, $(t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_s^{(\varepsilon)}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; s]$ и $\vartheta \in [t, \vartheta_o]$, то $((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)])$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon \in]0, \infty[$ и введем множество

$$\mathfrak{N} \triangleq \left\{ s \in \mathbb{N} \mid \forall (t, x) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_s^{(\varepsilon)} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; s] \quad \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o] \right. \\ \left. ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)] \right\}. \quad (8.10)$$

Из (8.9), (8.10) имеем включение $1 \in \mathfrak{N}$. Пусть вообще $m \in \mathfrak{N}$. Выберем произвольно

$$(t_*, x_*) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_{m+1}^{(\varepsilon)}, \quad h \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; \mathbf{V}_\varepsilon; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*]; m+1], \quad \vartheta_* \in [t_*, \vartheta_o]. \quad (8.11)$$

Тогда $h \in C_n([t_*, \vartheta_o])$, $h(t_*) = x_*$ и $\Delta_{\text{pos}}[\mathbf{V}_\varepsilon; t_*; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*]; h; m+1] \neq \emptyset$. С учетом этого выберем и зафиксируем $(\theta_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \Delta_{\text{pos}}[\mathbf{V}_\varepsilon; t_*; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*]; h; m+1]$, получая, в частности, что $(\theta_i)_{i \in \overline{1, m+2}} \in \Delta_{m+1}[t_*]$ и $\theta_2 \in [t_*, \vartheta_o]$. В силу (7.3) и предложения 7.2 имеем, что $(h|[\theta_2, \theta_o]) \in \mathfrak{X}[\theta_2; h(\theta_2); \mathbf{V}_\varepsilon; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[\theta_2]; m]$. Заметим, что $\theta_2 \in \tilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*)(h)$, где $\tilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*) \in G^*(t_*)$. Заметим здесь же, что $\mathfrak{M}_Q[\mathbf{V}_\varepsilon; t_*; m+1; (\theta_i)_{i \in \overline{1, m+2}}; h] \neq \emptyset$.

С использованием этого свойства выберем $(v_i^*)_{i \in \overline{1, m+1}} \in \mathfrak{M}_Q[\mathbf{V}_\varepsilon; t_*; m+1; (\theta_i)_{i \in \overline{1, m+2}}; h]$. Тогда, в частности, $v_1^* \in \mathbf{V}_\varepsilon(t_*, x_*)$ и для некоторой траектории $h_1 \in \mathcal{X}_\Pi(t_*, x_*, v_1)$ имеет место $(h| [t_*, \theta_2]) = (h_1| [t_*, \theta_2])$, откуда в силу неупреждаемости $\tilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*)$ получаем, что

$$\theta_2 \in \tilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*)(h_1). \quad (8.12)$$

Согласно (8.11) и предложения 8.2 $h_1 \in C_{t_*}[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_m^{(\varepsilon)}]$. Данное свойство допускает уточнение: по выбору (t_*, x_*) имеем в силу предложения 6.1, что для некоторого $r \in \overline{1, m+1}$ выполнено $(t_*, x_*) \in \mathbb{F}_r^{(\varepsilon)}$, а потому $x_* \in \mathbb{F}_r^{(\varepsilon)}\langle t_* \rangle$. Как следствие (см. определение 8.2)

$$\tilde{\theta}_{t_*}^{(\varepsilon)}(x_*) = \theta^o[S_o(\mathbf{M}, \varepsilon); (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}; t_*]. \quad (8.13)$$

С учетом (8.12) и (8.13) получаем, что

$$((\theta_2, h(\theta_2)) = (\theta_2, h_1(\theta_2)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}) \& ((t, h(t)) \notin S_o(\mathbf{M}, \varepsilon) \quad \forall t \in [t_*, \theta_2]). \quad (8.14)$$

Из (8.14) имеем, в частности, импликацию

$$((\vartheta_*, h(\vartheta_*)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\theta_2 < \vartheta_*). \quad (8.15)$$

Отдельно рассмотрим случаи $r = 1$ и $r \in \overline{2, m+1}$.

1) При $r = 1$ имеем, что $(\theta_2, h(\theta_2)) \notin S_o(\mathbf{N}, \varepsilon)$ и с учетом (8.15) получаем в рассматриваемом случае $r = 1$ импликацию

$$((\vartheta_*, h(\vartheta_*)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists t \in [t_*, \vartheta_*[: (t, h(t)) \notin S_o(\mathbf{N}, \varepsilon)). \quad (8.16)$$

2) Пусть $r \in \overline{2, m+1}$. Тогда в силу (8.14)

$$((\theta_2, h(\theta_2)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)) \vee ((\theta_2, h(\theta_2)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}). \quad (8.17)$$

В первом, из указанных в (8.17), случае имеем сразу (см. (8.15)) импликацию (8.16). Пусть $(\theta_2, h(\theta_2)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_{r-1}^{(\varepsilon)}$. Поскольку $W_m^{(\varepsilon)} \subset W_{r-1}^{(\varepsilon)}$, получаем, что $(\theta_2, h(\theta_2)) \in \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon) \setminus W_m^{(\varepsilon)}$. Поэтому по выбору m имеем следующее свойство: $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[\theta_2; h(\theta_2); \mathbf{V}_\varepsilon; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[\theta_2]; m] \quad \forall \vartheta \in [\theta_2, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [\theta_2, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)]. \quad (8.18)$$

Из (8.15) и (8.18) следует, что $((\vartheta_*, h(\vartheta_*)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [\theta_2, \vartheta_*[: (\xi, h(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)])$. Поскольку $[\theta_2, \vartheta_*[\subset [t_*, \vartheta_*[$, имеем в силу (8.15), что (8.16) истинно и во втором случае в (8.17).

Таким образом, (8.16) истинно при $r \in \overline{2, m+1}$. Мы установили, что (8.16) истинно во всех возможных случаях. Поскольку выбор (t_*, x_*) , h и ϑ_* (см. (8.11)) был произвольным, получаем, что $m+1 \in \mathfrak{N}$ (см. (8.10)). Итак, $(1 \in \mathfrak{N}) \& (k+1 \in \mathfrak{N} \ \forall k \in \mathfrak{N})$. Получили (см. (8.10)) требуемое утверждение. \square

С учетом (8.1) и предложения 8.3 имеем конкретные варианты процедур, гарантирующих строгое уклонение: $\forall s \in \mathbb{N} \ \forall (t, x) \in \mathbf{N} \setminus W_s \ \forall \varepsilon \in \Xi_s(t, x) \ \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; \mathbf{V}_\varepsilon; \tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t]; s] \ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o] \ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon))$.

9. Условия разрешимости задач уклонения с ограничением на число переключений

В настоящем разделе указываются необходимые и достаточные условия, обеспечивающие возможность успешного решения задач уклонения с тем или иным ограничением на число переключений формируемого управления. Из (8.1), предложений 7.5 и 8.3 вытекает

Теорема 9.1. *Если $s \in \mathbb{N}$, то справедливо следующее равенство:*

$$\mathbf{N} \setminus W_s = \{(t, x) \in \mathbf{N} \mid \exists \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists V \in \mathfrak{V} \ \exists \gamma \in \mathbb{G}_t^* \ \exists k \in \overline{1, s} \ \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; k] \ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o] \ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon))]\}.$$

В свою очередь, из теоремы 9.1 и предложения 7.5 следует

Теорема 9.2. *Если $s \in \mathbb{N}$, то справедливо равенство:*

$$\mathbf{N} \setminus W_s = \{(t, x) \in \mathbf{N} \mid \exists V \in \mathfrak{V} \ \exists \gamma \in \mathbb{G}_t^* \ \exists k \in \overline{1, s} \ \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t; x; V; \gamma; k] \ \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o] \ ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \implies (\exists \xi \in [t, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbf{N}])\}.$$

Следствие 9.1. *Если $s \in \mathbb{N}$ и $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$, то*

$$\begin{aligned} & (\exists V \in \mathfrak{V} \ \exists \gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^* \ \exists k \in \overline{1, s} \ \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k] \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o] \\ & ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in \mathbf{M}) \implies (\exists \xi \in [t_*, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbf{N}]) \iff \\ & (\exists \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists V \in \mathfrak{V} \ \exists \gamma \in \mathbb{G}_{t_*}^* \ \exists k \in \overline{1, s} \ \forall \mathbf{x} \in \mathfrak{X}[t_*; x_*; V; \gamma; k] \ \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o] \\ & ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in S_o(\mathbf{M}, \varepsilon)) \implies (\exists \xi \in [t_*, \vartheta[: (\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon))]. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к непосредственной комбинации теорем 9.1 и 9.2. Следствие 9.1 показывает, что при заданных $s \in \mathbb{N}$ и $(t_*, x_*) \in \mathbf{N}$ задача “обычного” (\mathbf{M}, \mathbf{N}) -уклонения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача строгого уклонения (т. е. уклонения по отношению к некоторым окрестностям \mathbf{M} и \mathbf{N}).

10. Некоторые топологические свойства и вопросы потенциальной реализуемости процедур уклонения

Рассмотрим некоторые следствия построений [12, теорема 10.2], связанные с вопросом о потенциальной реализуемости процедур уклонения, рассматриваемых в разд. 8. В связи с определениями разд. 7 отметим важную роль (7.5), где, в частности, оговаривается правило выбора моментов коррекции управлений игрока Π (см. также (7.6)). Речь идет о селекции упомянутых моментов из множеств — значений неупреждающих мультифункционалов. Реально такая селекция предусматривает достаточную оперативность выбора моментов коррекции, а сам же конструктивный вариант выбора при этом не оговаривается. В построениях разд. 8

указан (см. (8.8)) более понятный тип процедуры: коррекцию предлагается осуществлять (см. определение 8.2) по мере наступления события, связанного с выталкиванием траектории из множества, определяемого нужной итерацией на основе оператора стабильности. Само же выталкивание обеспечивается (см. (8.3)) позиционной стратегией \mathbf{V}_ε , где $\varepsilon > 0$, но момент его наступления зависит от реализации помехи и, в общем случае, не может быть указан заранее (в момент предыдущей коррекции). Возможность конкретного применения стратегии коррекции (8.8) можно на гипотетическом уровне связать с ненулевой временной протяженностью события, связанного с выталкиванием. Надо отметить здесь, что реализация (строгого) уклонения может осуществиться и “раньше”, чем будут выполнены все существенные в упомянутом смысле коррекции. Тогда “правильная” реализация оставшихся после фактического осуществления уклонения коррекций уже не представляет интереса, так как цель игрока Π уже достигнута. Такой взгляд на вещи излагается ниже. Прежде всего напомним (см. (2.1)), что при $N \in \mathfrak{F}$ в виде $\mathbf{t}|_N = \{N \cap G : G \in \mathbf{t}\}$ имеем топологию N , а в виде $\mathcal{F}|_N$ — семейство всех п/м N , замкнутых в ТП $(N, \mathbf{t}|_N)$; последнее является п/п $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$. Если $N \in \mathcal{F}$, то $\mathcal{F}|_N \subset \mathcal{F}$. С учетом [12, лемма 10.1] имеем, что $\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F}|_N \forall M \in \mathcal{F} \forall N \in \mathfrak{F} \forall F \in \mathcal{F}|_N$ (доказательство подобно [21, предложение 7.1]). Рассуждением по индукции получаем, что

$$\mathcal{W}_k(M, N) \in \mathcal{F}|_N \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathfrak{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_o. \quad (10.1)$$

Из (10.1) по свойствам замкнутых множеств имеем, что $\mathcal{W}(M, N) \in \mathcal{F}|_N \forall M \in \mathcal{F} \forall N \in \mathfrak{F}$.

Предложение 10.1. Если $N \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathcal{F}|_N$ и $(t_*, x_*) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus F$, то

$$((t_*, x_*) \notin N) \vee (\exists \delta \in]0, \infty[: \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho((t, x), (t_*, x_*)) < \delta\} \cap F = \emptyset).$$

Доказательство очевидно (см. (2.1) и определение \mathcal{F}). Также очевидно

Следствие 10.1. Если $N \in \mathfrak{F}$, $F \in \mathcal{F}|_N$, $t_* \in T$, $\mathbf{x} \in C_n([t_*, \vartheta_o])$, $t^* \in [t_*, \vartheta_o]$ и $(t^*, \mathbf{x}(t^*)) \in N \setminus F$, то

$$\exists \kappa \in]0, \infty[: (t, \mathbf{x}(t)) \notin F \quad \forall t \in]t^* - \kappa, t^* + \kappa[\cap [t_*, \vartheta_o].$$

Предложение 10.2. Если $t \in [t_o, \vartheta_o[$, $\Gamma \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$, $\Lambda \in \mathbf{t}|_N$ и $\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; \Lambda]$, то

$$\exists a \in [t, \vartheta_o] \quad \exists b \in]a, \vartheta_o[:]a, b[\subset \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_o\}.$$

Доказательство. Фиксируем t , Γ , N , Λ и \mathbf{x} в соответствии с условиями предложения. Из (8.4) следует по выбору \mathbf{x} , что для некоторого $\vartheta^o \in [t, \vartheta_o]$

$$((\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in \Lambda) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t, \vartheta^o]). \quad (10.2)$$

Отметим, что в силу первого положения в (10.2) $(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in N$ (действительно, $\Lambda \subset N$). Поскольку $\Lambda \subset (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)$, из (10.2) вытекает включение $(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)$. Поэтому (см. (8.4), (10.2)) $\mathbf{x} \in C_t[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)]$. Как следствие (см. (8.5))

$$\begin{aligned} & \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) \\ &= \{\vartheta \in [t, \vartheta_o] \mid ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t, \vartheta])\}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Из (10.2) следует, что $\vartheta^o \in [t, \vartheta_o]$ обладает свойствами

$$((\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \quad \forall \xi \in [t, \vartheta^o]). \quad (10.4)$$

Поэтому (см. (10.3), (10.4)) $\vartheta^o \in \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x})$. Заметим, что согласно (10.2) $(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \in N \setminus (N \setminus \Lambda)$, где $N \setminus \Lambda \in \mathcal{F}|_N$. В силу следствия 10.1 для некоторого $\kappa \in]0, \infty[$

$$(\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin N \setminus \Lambda \quad \forall \xi \in]\vartheta^o - \kappa, \vartheta^o + \kappa[\cap [t, \vartheta_o]. \quad (10.5)$$

Кроме того, в силу (10.4) $(\vartheta^o, \mathbf{x}(\vartheta^o)) \notin \Gamma$ и, поскольку $\Gamma \in \mathcal{F}$, для некоторого $\bar{\kappa} \in]0, \infty[$ $(\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \forall \xi \in]\vartheta^o - \bar{\kappa}, \vartheta^o + \bar{\kappa}[\cap [t, \vartheta_o]$. При $\hat{\kappa} \triangleq \inf(\{\kappa, \bar{\kappa}\}) \in]0, \infty[$ имеем в силу (10.5), что $\forall \xi \in]\vartheta^o - \hat{\kappa}, \vartheta^o + \hat{\kappa}[\cap [t, \vartheta_o]$ $((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda)) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma)$. Пусть $\alpha \triangleq \sup(\{t; \vartheta^o - \hat{\kappa}\})$ и $\beta \triangleq \inf(\{\vartheta^o + \hat{\kappa}; \vartheta_o\})$, тогда $\alpha \in [t, \vartheta_o]$ и $\beta \in]\alpha, \vartheta_o]$. Поэтому из (10.4) следует, что $((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \in (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda) \forall \vartheta \in]\alpha, \beta]) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin \Gamma \forall \xi \in [t, \beta])$. С учетом (10.3) и неравенства $\beta \leq \vartheta_o$ получаем, что $]\alpha, \beta[\subset \theta^o[\Gamma; (T \times \mathbb{R}^n) \setminus (N \setminus \Lambda); t](\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_o\}$. \square

Следствие 10.2. Если $\varepsilon \in]0, \infty[$, $t \in [t_o, \vartheta_o[$, $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$, $x \in \mathbb{F}_s^{(\varepsilon)}(t)$, $v \in \mathbb{V}_\varepsilon(t, x)$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\Pi(t, x, v)$, то $(\exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]: ((\vartheta, \mathbf{x}(\vartheta)) \notin \mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)) \& ((\xi, \mathbf{x}(\xi)) \notin S_0(\mathbf{M}, \varepsilon) \forall \xi \in [t, \vartheta])) \vee (\exists a \in [t, \vartheta_o[\exists b \in]a, \vartheta_o]:]a, b[\subset \tilde{\theta}_t^{(\varepsilon)}(x)(\mathbf{x}) \setminus \{\vartheta_o\})$.

Доказательство следует из предложений 6.1 и 10.2 с учетом определения 8.2.

Напомним определения разд. 7, 8, фиксируя $\varepsilon \in]0, \infty[$. Рассмотрим на содержательном уровне реализацию совокупного воздействия позиционной стратегии \mathbf{V}_ε и стратегии коррекции $\tilde{\theta}^{(\varepsilon)}[t_*]$ на одном отдельно взятом этапе построения траектории; здесь t_* отвечает “началу” формируемой траектории. Полагаем, что данное воздействие отвечает уже сформировавшемуся моменту $t^* \in [t_*, \vartheta_o[$ на траектории $\bar{\mathbf{x}}$, развивающейся из позиции (t_*, x_*) , где $x_* \in \mathbb{R}^n$. Тогда реализуется управление $v^* \in \mathbf{V}_\varepsilon(t^*, \bar{\mathbf{x}}(t^*))$, которое вместе с помехой определяет продолжение $\mathbf{x}: [t^*, \vartheta_o] \rightarrow \mathbb{R}^n$ получившейся к данному моменту траектории. Стратегия коррекции реагирует на это продолжение множеством $\tilde{\theta}_{t^*}^{(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$. Для нас интересен случай $\bar{\mathbf{x}}(t^*) \in \mathbb{F}_r^{(\varepsilon)}(t^*)$, где $r \in \overline{1, s}$ (s определяет ограничение на число переключений). В этих условиях действие v^* сводится к выталкиванию всех траекторий пучка $\mathcal{X}_\Pi(t^*, \bar{\mathbf{x}}(t^*), v^*)$ из множества $W_{r-1}^{(\varepsilon)}$ до встречи с $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$. Моменты времени из $\tilde{\theta}_{t^*}^{(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$ соответствуют в силу свойства, подобного (7.1), упомянутому выталкиванию реализующейся траектории из пучка (см. определение 8.2). Согласно следствию 10.2, если не происходит выхода из $\mathbb{S}(\mathbf{N}, \varepsilon)$ до попадания на множество $S_0(\mathbf{M}, \varepsilon)$, то множество $\tilde{\theta}_{t^*}^{(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{x}}(t^*))(\mathbf{x})$ содержит интервал ненулевой длины. Это касается v -траекторий, где $v = v^*$, но свойство неупреждаемости мультифункционала $\tilde{\theta}_{t^*}^{(\varepsilon)}(\bar{\mathbf{x}}(t^*))$ позволяет применить упомянутое положение к анализу траектории, порожденной соответствующей стратегией-тройкой (данная траектория является склейкой v -траекторий). Это обстоятельство позволяет принципиально зафиксировать осуществление выталкивания (на промежутке положительной длины) и осуществить новую коррекцию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 516 с.
4. Ченцов А. Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
5. Ченцов А. Г. К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
6. Чистяков С. В. К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
7. Ухоботов В. И. Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
8. Ченцов А. Г. Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНТИ, № 1933-79. Свердловск, 1979. 102 с.
9. Субботин А. И., Ченцов А. Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 286 с.
10. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.

11. **Ченцов А. Г.** О задаче управления с ограниченным числом переключений / УПИ им. С. М. Кирова. Деп. в ВИНТИ, № 4942-B87. Свердловск, 1987. 44 с.
12. **Ченцов А. Г.** О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, 2 / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНТИ, № 5406-80. Свердловск, 1980. 55 с.
13. **Кряжимский А. В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
14. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
15. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
16. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 352 с.
17. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
18. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
19. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2009. 389 с.
20. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
21. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций в игровой задаче наведения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 304–321. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321.

Ченцов Александр Георгиевич

Поступила 21.12.2016

чл.-корр. РАН, профессор

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург,

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games*. New York: John Wiley and Sons, 1965, 408 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow, Mir Publ., 1967, 480 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems*. New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamic system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of converging. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 224, no. 6, pp. 1272–1275 (in Russian).
5. Chentsov A.G. On a game problem of guidance. *Sov. Math. Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
6. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1979, vol. 41, pp. 845–852.
7. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354.
8. Chentsov A.G. *Metod programmnykh iteratsii dlya differentsial'noi igry sblizheniya-ukloneniya* [The method of program iterations for a differential approach-evasion game]. Sverdlovsk, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Scientific Center of the USSR Academy of Sciences. Deponent VINITI, No. 1933-79, 1979, 102 p.
9. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of guarantee in control problems], Moscow, Nauka Publ., 1981, 286 p.
10. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965.
11. Chentsov A.G. *O zadache upravleniya s ogranichennym chislom pereklyuchenii* [On a control problem with a bounded number of switchings]. Sverdlovsk, Ural'skii Politekhnikeskii Institut Publ. Deponent VINITI, No. 4942-B87, 1987, 44 p.
12. Chentsov A.G. *O differentsial'nykh igrakh s ogranicheniem na chislo korrektsii, 2* [On differential games with restriction on the number of corrections, 2]. Sverdlovsk, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Scientific Center of the USSR Academy of Sciences, Deponent VINITI, No. 5406-80, 1980, 55 p.
13. Kryazhinskii A.V. On the theory of positional differential games of approach-evasion. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1978, vol. 239, no. 4, pp. 779–782 (in Russian).

14. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*. Amsterdam, North-Holland Publishing Company, Warszawa, PWN — Polish Scientific Publisher, 1967. 417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*, Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
15. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis*. New York, London, Acad. Press, 1960, 361 p. Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow, Mir Publ., 1964, 430 p.
16. Billingsley P. *Convergence of probability measures*. New York, Wiley, 1968, 253 p. ISBN: 0471072427. Translated under the title *Skhodimost' veroyatnostnykh mer*, Moscow, Nauka, 1977, 352 p.
17. Dunford N.J., Schwartz J.T. *Linear operators. Part I: general theory*. New York-London, Interscience Publ. 1958. 874 p. ISBN: 0470226056. Translated under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*. M.: Izd-vo Inostr. Lit., 1962, 895 p.
18. Chentsov A.G., Morina S.I. Extensions and relaxations. Dordrecht, Boston, London, Kluwer Acad. Publ., 2002, 408 p.
19. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery. I*. [Elements of finitely additive measure theory. I]. Ekaterinburg, Ural State Technical University, 2008, 389 p.
20. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability*. San Francisco, Holden-Day, 1965, 223 p. Translated under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnosti*, Moscow, Mir, 1969, 309 p.
21. Chentsov A.G. The program iteration method in a game problem of guidance. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 304–321 (in Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321.

The paper was received by the Editorial Office on December 21, 2016.

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: chentsov@imm.uran.ru.

УДК 517.977

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ
СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ
ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ \mathbb{R}^n
С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА**

А. А. Шабуров

Рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества линейной стационарной управляемой системой в классе кусочно–непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление. В общем случае для такой задачи принцип максимума Понтрягина является необходимым и достаточным условием оптимальности. В работе в общем случае выводится уравнение, которому удовлетворяет начальный вектор сопряженной системы. Затем это уравнение уточняется на задачу оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для линейной системы с быстрыми и медленными переменными. Показывается, что решение соответствующего уравнения при стремлении малого параметра к нулю стремится к решению уравнения, соответствующего предельной задаче. Затем полученные результаты применяются к исследованию задачи, описывающей движение материальной точки в \mathbb{R}^n на фиксированном промежутке времени. Строится асимптотика начального вектора сопряженного состояния, который определяет вид оптимального управления. Показано, что асимптотика имеет степенной характер.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярно возмущенные задачи, асимптотические разложения, малый параметр.

A. A. Shaburov. Asymptotic expansion of a solution of a singularly perturbed optimal control problem in the space \mathbb{R}^n with an integral convex performance index.

We consider an optimal control problem with an integral convex performance index for a linear stationary control system in the class of piecewise continuous controls with a smooth constraint on the control. In the general case, the Pontryagin maximum principle is a necessary and sufficient optimality condition in this problem. We derive an equation for the initial vector of the adjoint system in the general case. Then this equation is adapted to the optimal control problem with an integral convex performance index for a linear system with fast and slow variables. We show that the solution of this equation tends to the solution of the equation corresponding to the limit problem as the small parameter tends to zero. The obtained results are applied to study a problem describing the motion of a material point in \mathbb{R}^n on a fixed time interval. We construct the asymptotics of the initial vector of the adjoint state; this vector defines the form of the optimal control. It is shown that the asymptotics is of power type.

Keywords: optimal control, singularly perturbed problems, asymptotic expansions, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-303-310

Статья посвящена исследованию асимптотики начального вектора сопряженного состояния и оптимального значения функционала качества в задаче оптимального управления [1–3] линейной системой с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [4]), с интегральным выпуклым функционалом качества [3, гл. 3] и гладкими геометрическими ограничениями на управление.

В данной работе получено основное уравнение для нахождения асимптотики начального вектора сопряженного состояния рассматриваемой задачи и оптимального управления. Общие соотношения применены к нахождению полной асимптотики решения задачи оптимального управления точкой малой массы в n -мерном пространстве под действием силы, ограниченной по величине.

В [5; 6] рассматривались проблемы, связанные с предельной задачей для задач оптимального управления линейной системой с быстрыми и медленными переменными. В других постановках асимптотика решений возмущенных задач управления рассматривалась в [7–9].

1. Общая постановка задачи и условия оптимальности

В классе кусочно-непрерывных управлений рассмотрим следующую задачу оптимального управления линейной стационарной системой с интегральным выпуклым функционалом качества

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, & z(0) = z^0, \quad \|u(t)\| \leq 1, \quad t \in [0; T], \\ J(u) = \varphi(z(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $z \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$, $u \in \mathbb{R}^r$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в \mathbb{R}^r , \mathcal{A} , \mathcal{B} — постоянные матрицы соответствующей размерности, а $\varphi(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^{\tilde{n}}$ выпуклая функция.

Отметим, что в рассматриваемом интегральном выпуклом критерии качества J первое слагаемое можно интерпретировать как штраф за ошибку управления в конечный момент времени T , а второе — как учет энергозатрат на реализацию управления.

Предположение 1. Будем предполагать, что пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ вполне управляема, т. е.

$$\text{rank}(\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \dots, \mathcal{A}^{\tilde{n}-1}\mathcal{B}) = \tilde{n}.$$

При сформулированных условиях в задаче (1.1) принцип максимума Понтрягина есть необходимое и достаточное условие оптимальности. При этом задача принципа максимума Понтрягина имеет единственное решение [3, п. 3.5, теорема 14]: существует единственное решение z , η системы уравнений (1.1) и

$$\dot{\eta} = -\mathcal{A}^*\eta, \quad \eta(T) = -\nabla\varphi(z(T)), \quad (1.2)$$

а оптимальное управление u^o определяется из принципа максимума

$$-\|u^o(t)\|^2 + \langle \mathcal{B}^*\eta(t), u^o(t) \rangle = \max_{\|u\| \leq 1} (-\|u\|^2 + \langle \mathcal{B}^*\eta(t), u \rangle). \quad (1.3)$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в \mathbb{R}^r , а $*$ — знак транспонирования матриц.

Вычислив максимум в (1.3), находим

$$u^o(t) = \frac{\mathcal{B}^*\eta(t)}{S(\|\mathcal{B}^*\eta(t)\|)}, \quad \text{где } S(\xi) := \begin{cases} 2, & 0 \leq \xi \leq 2, \\ \xi, & \xi > 2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Отметим, что из определения функции $S(\cdot)$ следует справедливость неравенства

$$\forall w_1, w_2 \in \mathbb{R}^r \quad \left\| \frac{w_1}{S(\|w_1\|)} - \frac{w_2}{S(\|w_2\|)} \right\| \leq \|w_1 - w_2\|. \quad (1.5)$$

Положим $\lambda := \eta(T)$. Тогда

$$\eta(t) = e^{-\mathcal{A}^*(t-T)}\lambda, \quad z(t) = e^{\mathcal{A}t}z^0 + \int_0^t e^{\mathcal{A}(t-s)}\mathcal{B}u^o(s)ds.$$

В конечный момент времени $t = T$ имеем

$$z(T) = e^{\mathcal{A}T}z^0 + \int_0^T \frac{e^{\mathcal{A}(T-s)}\mathcal{B}\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(T-s)}\lambda}{S(\|\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(T-s)}\lambda\|)} ds.$$

Сделав замену переменной $\tau := T - s$, получим

$$z(T) = e^{\mathcal{A}T}z^0 + \int_0^T \frac{e^{\mathcal{A}(\tau)}\mathcal{B}\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(\tau)}\lambda}{S(\|\mathcal{B}^*e^{\mathcal{A}^*(\tau)}\lambda\|)} d\tau.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть выполнено предположение 1, $z(t)$, $u(t)$ есть решение системы из (1.1), а $\eta(t)$ — решение системы (1.2). Тогда $z(t)$, $\eta(t)$, $u(t)$ есть решение задачи принципа максимума (1.1)–(1.3) тогда и только тогда, когда $\eta(T) = \lambda$, $u(t)$ определяется формулой (1.4), а вектор λ есть единственное решение уравнения

$$-\lambda = \nabla \varphi \left(e^{AT} z^0 + \int_0^T e^{A\tau} B \frac{B^* e^{A^* \tau} \lambda}{S(\|B^* e^{A^* \tau} \lambda\|)} d\tau \right). \quad (1.6)$$

При этом $u(t)$ — единственное оптимальное управление в задаче (1.1).

Вектор λ , удовлетворяющий уравнению (1.6), назовем вектором, определяющим оптимальное управление в задаче (1.1).

Утверждение 2. Пусть $u^o(t)$ — оптимальное управление в задаче (1.1). Тогда $u^o(t)$ непрерывно на $[0; T]$ и бесконечно дифференцируемо в точках \tilde{t} таких, что $\|B^* e^{A^*(T-\tilde{t})} \lambda\| \neq 2$. Здесь λ — вектор, определяющий оптимальное управление в задаче (1.1).

Доказательство. Справедливость утверждения следует из (1.4) и аналитичности матричной экспоненты e^{A^*t} . □

2. Задача оптимального управления с быстрыми и медленными переменными

Рассмотрим частный случай задачи (1.1), когда управляемая система содержит быстрые и медленные переменные, а терминальная часть функционала качества зависит только от медленных переменных:

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = A_{11}x_\varepsilon + A_{12}y_\varepsilon + B_1u, & t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = A_{21}x_\varepsilon + A_{22}y_\varepsilon + B_2u, & x_\varepsilon(0) = x^0, \quad y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J(u) := \sigma(x_\varepsilon(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$; $A_{ij}, B_i, i, j = 1, 2$, — постоянные матрицы соответствующей размерности, ε — малый положительный параметр, а $\sigma(\cdot)$ — непрерывно дифференцируемая на \mathbb{R}^n выпуклая функция.

Предположение 2. Все собственные значения матрицы A_{22} имеют отрицательные вещественные части.

При каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ задача (2.1) совпадает с задачей (1.1):

$$z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z_\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad A_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad B_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{n} = n + m, \quad \varphi(z_\varepsilon) = \sigma(x_\varepsilon).$$

Вырожденной задачей для (2.1) называется задача

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = A_0x_0 + B_0u, & t \in [0, T], \quad \|u\| \leq 1, \\ A_0 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, & B_0 := B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \quad x_0(0) = x^0, \\ J(u) := \sigma(x_0(T)) + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min. \end{cases} \quad (2.2)$$

Предположение 3. Пары (A_0, B_0) и (A_{22}, B_2) вполне управляемы.

При выполнении предположений 2 и 3 существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что пара $(A_\varepsilon, B_\varepsilon)$ вполне управляема при всех $\varepsilon: 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ [5, Theorem 1].

Отметим, что поскольку $\nabla\varphi(z_\varepsilon) = \begin{pmatrix} \nabla\sigma(x_\varepsilon) \\ 0 \end{pmatrix}$, то вектор λ_ε , определяющий оптимальное управление в задаче (2.1), имеет вид $\lambda_\varepsilon = \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}$, $l_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$.

Вектор l_ε тоже будем называть *вектором, определяющим оптимальное управление в задаче (2.1)*.

Пусть

$$e^{A_\varepsilon t} := \begin{pmatrix} \mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t) & \mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t) \\ \mathcal{W}_\varepsilon^{21}(t) & \mathcal{W}_\varepsilon^{22}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

тогда в силу (2.3) уравнение (1.6) переходит в уравнение

$$-l_\varepsilon = \nabla\sigma \left(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(T)x^0 + \mathcal{W}_\varepsilon^{12}(T)y^0 + \int_0^T (\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t)B_1 + \varepsilon^{-1}\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t)B_2) \frac{(B_1^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t))^* + \varepsilon^{-1}B_2^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t))^*)l_\varepsilon}{S(\|(B_1^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t))^* + \varepsilon^{-1}B_2^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t))^*)l_\varepsilon\|)} dt \right). \quad (2.4)$$

Отметим, что оптимальное управление $u_\varepsilon^0(t)$ в задаче (2.1) выражается через вектор l_ε следующим образом:

$$u_\varepsilon^0(T-t) = \frac{(B_1^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t))^* + \varepsilon^{-1}B_2^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t))^*)l_\varepsilon}{S(\|(B_1^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t))^* + \varepsilon^{-1}B_2^*(\mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t))^*)l_\varepsilon\|)}. \quad (2.5)$$

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 2 и 3. Тогда $l_\varepsilon \rightarrow l_0$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, где l_ε — единственное решение уравнения (2.4), а l_0 — единственное решение уравнения

$$-l_0 = \nabla\sigma \left(e^{A_0 T} x^0 + \int_0^T e^{A_0 t} B_0 \frac{B_0^* e^{A_0^* t} l_0}{S(\|B_0^* e^{A_0^* t} l_0\|)} dt \right). \quad (2.6)$$

Доказательство. Известно, что множество достижимости управляемой системы из (2.1) к моменту времени T равномерно ограничено при $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ (см., например, [6, теорема 3.1]). Тем самым в силу (2.4) векторы $\{l_\varepsilon\}$ тоже ограничены при $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что все частичные пределы $\{l_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ равны l_0 .

В силу теории А. Б. Васильевой (см., например, [10, гл. 3]) существует $\gamma > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t) &= e^{A_0 t} + O(\varepsilon), & \mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t) &= -\varepsilon e^{A_0 t} A_{12} A_{22}^{-1} + O(\varepsilon e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon^2), \\ \mathcal{W}_\varepsilon^{21}(t) &= -A_{22}^{-1} A_{21} e^{A_0 t} + O(e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon), & \mathcal{W}_\varepsilon^{22}(t) &= O(e^{-\gamma t/\varepsilon}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

При этом асимптотические оценки равномерны по $t \in [0; T]$.

Тем самым в силу (2.2) — определения матриц A_0 и B_0 — и формул (2.7) выражение, стоящее под $\nabla\sigma$ в формуле (2.4), имеет вид

$$e^{A_0 T} x^0 + O(\varepsilon) + \int_0^T (e^{A_0 t} B_0 + O(e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon)) \frac{(B_0^* e^{A_0^* t} + O(e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon))l_\varepsilon}{S(\|(B_0^* e^{A_0^* t} + O(e^{-\gamma t/\varepsilon}) + O(\varepsilon))l_\varepsilon\|)} dt. \quad (2.8)$$

Разбивая интеграл из (2.8) на два слагаемых $\int_0^T = \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^T$, учитывая равномерную ограниченность подынтегрального выражения и то, что $O(e^{-\gamma/\sqrt{\varepsilon}}) = O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого $\alpha > 0$, из (2.4) и (2.8) получим

$$-l_\varepsilon = \nabla \sigma \left(e^{A_0 T} x^0 + O(\varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}) + \int_{\sqrt{\varepsilon}}^T e^{A_0 t} B_0 \frac{(B_0^* e^{A_0^* t} + O(\varepsilon)) l_\varepsilon}{S(\|(B_0^* e^{A_0^* t} + O(\varepsilon)) l_\varepsilon\|)} dt \right). \quad (2.9)$$

Пусть \bar{l} — частичный предел векторов $\{l_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow +0$, т.е. $l_{\varepsilon_k} \rightarrow \bar{l}$ для некоторой $\{\varepsilon_k\}$ такой, что $\varepsilon_k \rightarrow +0$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (2.9), получим, что \bar{l} есть решение уравнения (2.6). В силу единственности такого решения $\bar{l} = l_0$. \square

Основная задача, которая ставится для (2.1), есть нахождение полного асимптотического разложения по степеням малого параметра ε оптимального управления, оптимального значения функционала качества и оптимального процесса. Формулы (2.5) и (1.5) показывают, что если удастся получить полное асимптотическое разложение вектора l_ε , определяющего оптимальное управление в задаче (2.1), то из него получатся и асимптотические разложения указанных величин.

3. Построение полного асимптотического разложения вектора l_ε для одной задачи оптимального управления с быстрыми и медленными переменными

Рассмотрим частный случай задачи (2.1):

$$\begin{cases} \dot{x}_\varepsilon = y_\varepsilon, & t \in [0, T], & \|u\| \leq 1, \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon = -y_\varepsilon + u, & x_\varepsilon(0) = x^0, & y_\varepsilon(0) = y^0, \\ J(u) := \frac{1}{2} \|x_\varepsilon(T)\|^2 + \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $x_\varepsilon, y_\varepsilon, u \in \mathbb{R}^n$.

Задача (3.1) моделирует движение материальной точки малой массы $\varepsilon > 0$ с коэффициентом сопротивления среды, равным 1, в пространстве \mathbb{R}^n , под действием ограниченной управляющей силы $u(t)$.

Здесь $A_{11} = 0, A_{12} = I, A_{21} = 0, A_{22} = -I, B_1 = 0, B_2 = I$, а 0 и I — нулевая и единичные матрицы размерности $n \times n$ соответственно. Для вырожденной задачи $A_0 = 0, B_0 = I$, и тем самым предположения 2 и 3 выполнены.

Вычислив $e^{A_\varepsilon t}$ и $\nabla \left(\frac{1}{2} \|x_\varepsilon(T)\|^2 \right)$, получим

$$\mathcal{W}_\varepsilon^{11}(t) = I, \quad \mathcal{W}_\varepsilon^{12}(t) = \varepsilon(1 - e^{-t/\varepsilon})I, \quad \mathcal{W}_\varepsilon^{21}(t) = 0, \quad \mathcal{W}_\varepsilon^{22}(t) = e^{-t/\varepsilon}I, \quad \nabla \left(\frac{1}{2} \|x_\varepsilon(T)\|^2 \right) = x_\varepsilon(T).$$

Поэтому уравнения (2.4) и (2.6) для l_ε и l_0 принимают вид

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \int_0^T \frac{(1 - e^{-t/\varepsilon})^2 l_\varepsilon}{S(\|(1 - e^{-t/\varepsilon}) l_\varepsilon\|)} dt, \quad -l_0 = x^0 + T \frac{l_0}{S(\|l_0\|)}. \quad (3.2)$$

Если вектор-функция $f_\varepsilon(t)$ такова, что $f_\varepsilon(t) = O(\varepsilon^\alpha)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого $\alpha > 0$ равномерно по $t \in [0; T]$, то вместо $f_\varepsilon(t)$ будем писать \mathcal{O} . В частности, $e^{-\gamma T/\varepsilon} = \mathcal{O}$.

Из (3.2) получим

$$\begin{aligned} 1. \quad \|x^0\| < T + 2 &\implies l_0 = -\frac{2}{2+T}x^0 && \text{и} \quad \|l_0\| < 2. \\ 2. \quad \|x^0\| > T + 2 &\implies l_0 = -\frac{\|x^0\| - T}{\|x^0\|}x^0 && \text{и} \quad \|l_0\| > 2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

1. Рассмотрим сначала случай $\|x^0\| < T + 2$.

В силу (3.3) и теоремы 1 при всех достаточно малых ε будет справедливо неравенство $\|l_\varepsilon\| < 2$. Учитывая, что $(1 - e^{-t/\varepsilon}) \leq 1$ при всех $t \geq 0$ и $\varepsilon > 0$, из (3.2) для l_ε получим уравнение

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon y^0 + \mathbb{O} + \frac{1}{2} \int_0^T (1 - e^{-t/\varepsilon})^2 dt l_\varepsilon. \quad (3.4)$$

Вычисляя интеграл $\int_0^T (1 - e^{-t/\varepsilon})^2 dt = T - 3/(2\varepsilon) + \mathbb{O}$, из (3.4) находим

$$l_\varepsilon = -\frac{4(x^0 + \varepsilon y^0 + \mathbb{O})}{4 + 2T - 3\varepsilon}.$$

Из этого представления следует, что l_ε разлагается в асимптотический ряд по степеням ε .

Утверждение 3. Пусть $\|x^0\| < T + 2$. Тогда вектор l_ε , определяющий оптимальное управление в задаче (3.1), при $\varepsilon \rightarrow 0$ раскладывается в степенной асимптотический ряд

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k, \quad \text{где, в частности,} \quad l_1 = -\frac{3l_0 + 4y^0}{4 + 2T}.$$

2. Теперь рассмотрим случай $\|x^0\| > T + 2$.

В силу (3.3) и теоремы 1 при всех достаточно малых ε будет справедливо неравенство $\|l_\varepsilon\| < 2$. Так как при фиксированном ε функция $(1 - e^{-t/\varepsilon})\|l_\varepsilon\|$ монотонно возрастает от 0 при $t = 0$ до $(1 - e^{-T/\varepsilon})\|l_\varepsilon\|$ при $t = T$ (что при достаточно малых ε дает неравенство $(1 - e^{-T/\varepsilon})\|l_\varepsilon\| > 2$), то существует единственное $t_{1,\varepsilon} \in (0; T)$ такое, что $(1 - e^{-t_{1,\varepsilon}/\varepsilon})\|l_\varepsilon\| = 2$, или

$$(1 - e^{-t_{1,\varepsilon}/\varepsilon})\|l_\varepsilon\| = 2, \quad t_{1,\varepsilon} = -\varepsilon \ln \left(1 - \frac{2}{\|l_\varepsilon\|}\right). \quad (3.5)$$

Поэтому уравнение (3.2) принимает вид

$$-l_\varepsilon = x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 + \frac{1}{2} \int_0^{t_{1,\varepsilon}} (1 - e^{-t/\varepsilon})^2 dt l_\varepsilon + \int_{t_{1,\varepsilon}}^T (1 - e^{-t/\varepsilon}) dt \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}. \quad (3.6)$$

Вычисляя интегралы в (3.6) и перенося $(-l_\varepsilon)$ в правую часть, получим

$$\begin{aligned} 0 = F(\varepsilon, l_\varepsilon) := & l_\varepsilon + x^0 + \varepsilon(1 - e^{-T/\varepsilon})y^0 - \varepsilon \left(\frac{1}{\|l_\varepsilon\|} + \frac{1}{\|l_\varepsilon\|^2} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2}{\|l_\varepsilon\|}\right) \right) l_\varepsilon \\ & + \left(T + \varepsilon \ln \left(1 - \frac{2}{\|l_\varepsilon\|}\right) + \varepsilon e^{-T/\varepsilon} - \varepsilon + \varepsilon \frac{2}{\|l_\varepsilon\|} \right) \frac{l_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\|}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теорема 2. Пусть $\|x^0\| > T + 2$. Тогда вектор l_ε , определяющий оптимальное управление в задаче (3.1), при $\varepsilon \rightarrow 0$ раскладывается в степенной асимптотический ряд

$$l_\varepsilon \stackrel{as}{=} l_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k l_k.$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение $0 = F(\varepsilon, l)$, где $F(\cdot, \cdot)$ определена в (3.7). Доопределим $e^{-T/\varepsilon}$ в точке $\varepsilon = 0$ нулем. Тогда получим, что $0 = F(0, l_0)$ и $F(\cdot, \cdot)$ бесконечно дифференцируема по ε и l в некоторой окрестности точки $(0; l_0)$. Поскольку

$$\mathcal{F}\rho := \left. \frac{\partial F(\varepsilon, l)}{\partial l} \right|_{\varepsilon=0, l=l_0} \rho = \rho + \frac{\|l_0\|^2 \rho - \langle l_0, \rho \rangle l_0}{\|l_0\|^3} T,$$

то оператор \mathcal{F} непрерывно обратим и

$$\mathcal{F}^{-1}g = \left(g + \frac{T \langle l_0, g \rangle l_0}{\|l_0\|^3} \right) \frac{\|l_0\|}{T + \|l_0\|}. \quad (3.8)$$

Тем самым, применима теорема о неявно заданной функции, из которой следует, что l_ε (как функция от ε) бесконечно дифференцируема по ε при всех малых ε , и поэтому l_ε разлагается в степенной асимптотический ряд. Коэффициенты этого ряда находятся по стандартной процедуре: подставив ряд в уравнение (3.7), разложив величины, зависящие от ε , в асимптотические ряды по степеням ε и приравняв слагаемые одинакового порядка малости по ε , получим уравнения вида $\mathcal{F}l_k = g_k$ с известными правыми частями. После этого по формуле (3.8) найдем l_k .

В частности, для l_1 получим уравнение

$$\mathcal{F}l_1 = g_1 := -x^0 - y^0 + \left(\frac{1}{\|l_0\|} + \frac{1}{\|l_0\|^2} + \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2}{\|l_0\|} \right) \right) l_0 - \left(\ln \left(1 - \frac{2}{\|l_0\|} \right) - 1 + \frac{2}{\|l_0\|} \right) \frac{l_0}{\|l_0\|}.$$

Откуда в силу (3.8) получим $l_1 = \left(g_1 + \frac{T \langle l_0, g_1 \rangle l_0}{\|l_0\|^3} \right) \frac{\|l_0\|}{T + \|l_0\|}$. \square

З а м е ч а н и я. 1. И в первом, и во втором из рассматриваемых случаев из (3.2), (3.5) и асимптотического разложения l_ε стандартно получаются асимптотические разложения и функционала качества, и оптимального управления, и оптимального состояния системы. При этом асимптотические разложения оптимального управления и состояния системы будут иметь экспоненциально убывающие пограничные слои в окрестности точки $t = 0$. Более того, если $t \geq \varepsilon^\beta$ и $\beta \in (0; 1)$, то оптимальное управление $u^o(t)$ есть константа плюс асимптотический ноль.

2. Из формулы (3.7) следует, что l_ε лежит в подпространстве Π , порожденном векторами x^0 и y^0 . Поэтому при всех $t \in [0; T]$ и $u_\varepsilon^o(t)$, и $x_\varepsilon(t)$, и $y_\varepsilon(t)$ лежат в этом же подпространстве Π . Тем самым, задача (3.1) эквивалентна соответствующей двумерной задаче.

Автор выражает благодарность А. Р. Данилину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
4. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
5. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
6. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
7. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
8. **Данилин А.Р., Парышева Ю.В.** Асимптотика оптимального значения значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154.

9. Данилин А.Р., Коврижных О.О. О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614. doi: 10.7868/S086956521325004X.
10. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.

Шабуров Александр Александрович
аспирант

Поступила 27.02.2017

Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: alexandershaburov@mail.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Krassovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of Control of Movement. Linear Systems]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
3. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1967, 576 p. ISBN: 0898748070. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
4. Vassilyeva A.B., Dmitriev M.G. *Mathematical analysis. The results of science and technology*. Moscow, VINITI, 1982, vol. 20, pp. 3–77 (in Russian).
5. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113. doi: 10.1109/CDC.1974.270427.
6. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analysis of optimal control systems*. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, Springer-Verlag, 1983, 156 p. ISBN-10: 0387124632. Translated under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow, Mir Publ., 1987, 157 p.
7. Kalinin A.I., Semenov K.V. Asymptotic optimization method for linear singularly perturbed systems with multidimensional control. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 3, pp. 407–418.
8. Danilin A.R., Parysheva Yu.V. Asymptotics of the optimal cost functional in a linear optimal control problem. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 478–481. doi: 10.1134/S1064562409040073.
9. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi: 10.1134/S1064562413040364.
10. Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii* [Asymptotic expansion of solutions for singularly perturbed equations]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 272 p.

The paper was received by the Editorial Office on February 27, 2017.

Aleksandr Aleksandrovich Shaburov, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: alexandershaburov@mail.ru.

INTEGRABILITY AND INVARIANT ALGEBRAIC CURVES FOR A CLASS OF KOLMOGOROV SYSTEMS

Rachid Boukoucha

There are many natural phenomena which can be modeled by Kolmogorov systems such as mathematical ecology, population dynamics, etc..

One of the more classical problems in the qualitative theory of planar differential systems is to characterize the existence or not of first integrals. For a two dimensional system the existence of a first integral completely determines its phase portrait. The question to determine the invariant algebraic curves of a given planar vector field, or to decide that no such curves exist, is part of a problem set forth by Poincaré. There are strong relationships between the integrability of a system, and its number of invariant algebraic curves. It is shown that the existence of a certain number of algebraic curves for a system implies its Darboux integrability, that is the first integral is the product of the algebraic solutions with complex exponents. The study of the number and location of limit cycles is one of the most important topics which is related to the second part of the unsolved Hilbert 16th problem. In this paper we introduce an explicit expression of invariant algebraic curves, then we prove that these systems are Darboux integrable and introduce an explicit expression of a Liouvillian first integral. Then we discuss the possibility of existence and non-existence of limit cycles of the two dimensional Kolmogorov systems of the form

$$\begin{cases} x' = x \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \\ y' = y \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \end{cases}$$

where $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, $S(x, y)$, $N(x, y)$ and $M(x, y)$ are homogeneous polynomials of degree n, m, n, m, a and a , respectively. The elementary method used in this paper seems to be fruitful to investigate more general planar differential Kolmogorov systems of ODEs in order to obtain explicit expression of invariant algebraic curves and for first integrals in order to characterize their trajectories. Finally, we discuss the possibility of existence and non-existence of limit cycles.

Keywords: Kolmogorov System, first integral, invariant algebraic curves, limit cycle, Hilbert 16th problem.

Рашид Букуша. Интегрируемость и инвариантные алгебраические кривые для класса систем Колмогорова.

Многие природные явления, например, явления, изучаемые в математической экологии и популяционной динамике, могут моделироваться системами Колмогорова. Одной из классических задач качественной теории двумерных дифференциальных систем является вопрос существования первого интеграла системы. Для двумерной системы ее фазовый портрет полностью определяется существованием первого интеграла. Вопрос существования и нахождения инвариантных алгебраических кривых заданного плоского векторного поля является частью набора задач, поставленных А. Пуанкаре. Между интегрируемостью системы и количеством ее инвариантных алгебраических кривых есть тесная связь. Доказано, что из существования у системы некоторого количества алгебраических кривых следует ее интегрируемость по Дарбу, т. е. первый интеграл является произведением алгебраических решений с комплексными показателями. Одним из важнейших вопросов, связанных со второй частью нерешенной 16-й проблемы Гильберта, является изучение количества и расположения предельных циклов. В данной работе дано явное выражение для инвариантных алгебраических кривых. Доказано, что эти системы являются интегрируемыми по Дарбу, и приведено явное выражение для первого интеграла Лиувилля. Затем обсуждается возможность существования предельных циклов двух систем Колмогорова следующего вида:

$$\begin{cases} x' = x \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \\ y' = y \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \end{cases}$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$, $S(x, y)$, $N(x, y)$ и $M(x, y)$ — неоднородные многочлены степени n, m, n, m, a и a , соответственно. Представляется возможным использовать простой метод, предложенный в статье, для исследования более общих двумерных систем дифференциальных уравнений колмогоровского типа

получения явных выражений для инвариантных алгебраических кривых, а также первых интегралов, описывающих траектории системы. В работе также обсуждается возможность существования предельных циклов.

Ключевые слова: система Колмогорова, первый интеграл, инвариантные алгебраические кривые, предельный цикл, 16-я проблема Гильберта.

MSC: 34C05, 34C07, 37C27, 37K10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-2-311-318

1. Introduction

Many mathematical models in biology science and population dynamics, frequently involve the systems of ordinary differential equations having the form

$$\begin{cases} x' = \frac{dx}{dt} = x(t) F(x(t), y(t)), \\ y' = \frac{dy}{dt} = y(t) G(x(t), y(t)), \end{cases} \quad (1.1)$$

where F, G are two functions in the variables x and y , $x(t)$ and $y(t)$ represent the population density of two species at time t , and $F(x, y), G(x, y)$ are the capita growth rate of each specie, usually, such systems are called Kolmogorov systems. Kolmogorov models are widely used in ecology to describe the interaction between two populations, and a limit cycle corresponds to an equilibrium state of the system. There are many natural phenomena which can be modeled by the Kolmogorov systems such as mathematical ecology and population dynamics [14; 18; 20; 21] chemical reactions, plasma physics [15], hydrodynamics [5], economics, etc..

In the classical Lotka–Volterra–Gause model, F and G are linear and it is well known that there are no limit cycles [11; 16]. There can, of course, only be one critical point in the interior of the realistic quadrant ($x > 0, y > 0$) in this case, but this can be a center, however, there are no isolated periodic solutions. We remind that in the phase plane, a limit cycle of system (1.1) is an isolated periodic orbit in the set of all periodic orbits of system (1.1). There exist three main open problems in the qualitative theory of real planar differential systems [1; 2; 4; 10; 17; 19], the distinction between a centre and a focus, the determination of the number of limit cycles and their distribution, and the determination of its integrability. The determination of the number of limit cycles most important topics is related to the second part of the unsolved Hilbert 16th problem [13]. The importance for searching first integrals of a given system was already noted by Poincaré in his discussion on a method to obtain polynomial or rational first integrals [23].

System (1.1) is integrable on an open set Ω of \mathbb{R}^2 if there exists a non constant C^1 function $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, called a first integral of the system on Ω , which is constant on the trajectories of the system (1.1) contained in Ω , i.e. if

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} x F(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} y G(x, y) \equiv 0 \quad \text{in the points of } \Omega.$$

Moreover, $H = h$ is the general solution of this equation, where h is an arbitrary constant. One of the classical tools in the classification of all trajectories of a dynamical system is to find first integrals, for a two dimensional system the existence of a first integral completely determines its phase portrait. Of course, the easiest planar integrable systems are the Hamiltonian ones. The planar integrable systems which are not Hamiltonian can be in general very difficult to detect, for or more details about first integral see for instance [3; 12]. It is well known that for differential systems defined on the plane \mathbb{R}^2 the existence of a first integral determines their phase portrait [6].

A real or complex polynomial $U(x, y)$ is called algebraic solution of the polynomial differential system (1.1) if

$$\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} x F(x, y) + \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} y G(x, y) = K(x, y) U(x, y),$$

for some polynomial $K(x, y)$, called the cofactor of $U(x, y)$. The corresponding cofactor of $U(x, y)$ is always polynomial whether $U(x, y)$ is algebraic or non algebraic. If U is real, the curve $U(x, y) = 0$ is an invariant under the flow of differential system (1.1) and the set $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, U(x, y) = 0\}$ is formed by orbits of system (1.1). There are strong relationships between the integrability of system (1.1) and its number of invariant algebraic solutions. It is shown [9] that the existence of a certain number of algebraic solutions for a system implies the Darboux integrability of the system, that is the first integral is the product of the algebraic solutions with complex exponents [7; 8]. In [22], it is proved that, if a polynomial system (1.1) has a Liouvillian first integral, then it can be computed by using the invariant algebraic solutions and the exponential factors of the systems (1.1).

In this paper we introduce an explicit expression of invariant algebraic curves, then we proved that these systems are Darboux integrable and introduced an explicit expression of a Liouvillian first integral of the two dimensional Kolmogorov systems of the form

$$\begin{cases} x' = x \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \\ y' = y \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} + \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| \right), \end{cases} \tag{1.2}$$

where $P(x, y), Q(x, y), R(x, y), S(x, y), N(x, y)$ and $M(x, y)$ are homogeneous polynomials of degree n, m, n, m, a and a , respectively.

We define the trigonometric functions

$$f_1(\theta) = \cos^2 \theta \frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)} + \sin^2 \theta \frac{R(\cos \theta, \sin \theta)}{S(\cos \theta, \sin \theta)}, \quad f_2(\theta) = \ln \left| \frac{N(\cos \theta, \sin \theta)}{M(\cos \theta, \sin \theta)} \right|,$$

$$f_3(\theta) = \cos \theta \sin \theta \frac{R(\cos \theta, \sin \theta)}{S(\cos \theta, \sin \theta)} - \cos \theta \sin \theta \frac{P(\cos \theta, \sin \theta)}{Q(\cos \theta, \sin \theta)}.$$

2. Main result

Our main result on the expression of invariant algebraic curves and the existence of a Darboux first integral and the periodic orbits of the Kolmogorov system (1.2) is the following.

Theorem. *Consider a Kolmogorov system (1.2), then the following statements hold.*

(h₁) *If $Q(x, y)S(x, y) \neq 0$ and $N(x, y)M(x, y) > 0$ then the curve*

$$U(x, y) = xy \frac{R(x, y)}{S(x, y)} - xy \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0$$

is an invariant algebraic curve of system (1.2).

(h₂) *If $f_3(\theta) \neq 0, Q(\cos \theta, \sin \theta)S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0, N(\cos \theta, \sin \theta)M(\cos \theta, \sin \theta) > 0$ and $n - m \neq 1$, then the system (1.2) has the first integral*

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{n-m}{2}} \exp \left((m - n) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) - (n - m) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left((m - n) \int_0^s A(\omega) d\omega \right) B(s) ds, \tag{2.1}$$

where $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$ and $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$.

Moreover, the system (1.2) has no limit cycle.

(h₃) If $f_3(\theta) \neq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $N(\cos \theta, \sin \theta) M(\cos \theta, \sin \theta) > 0$ and $n - m = 1$, then the system (1.2) has the first integral

$$H(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2)} \exp\left(-\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) - \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds. \tag{2.2}$$

Moreover, the system (1.2) has no limit cycle.

(h₄) If $f_3(\theta) = 0$ for all $\theta \in \mathbb{R}$, then the system (1.2) has the first integral

$$H(x, y) = \frac{y}{x}.$$

Moreover, the system (1.2) has no limit cycle.

Proof.

Proof of statement (h₁). Suppose that $Q(x, y) S(x, y) \neq 0$ and $N(x, y) M(x, y) > 0$.

We prove that $U(x, y) = xy \frac{R(x, y)}{S(x, y)} - xy \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0$ is an invariant algebraic curve of the differential system (1.2).

Indeed, we have

$$\frac{\partial U}{\partial x} x \left(\ln \left|\frac{N}{M}\right| + \frac{P}{Q}\right) + \frac{\partial U}{\partial y} y \left(\ln \left|\frac{N}{M}\right| + \frac{R}{S}\right) = \frac{\partial U}{\partial x} x \ln \left|\frac{N}{M}\right| + \frac{\partial U}{\partial y} y \ln \left|\frac{N}{M}\right| + \frac{\partial U}{\partial x} x \frac{P}{Q} + \frac{\partial U}{\partial y} y \frac{R}{S}.$$

Then, taking into account that if $P(x, y), Q(x, y), R(x, y)$ and $S(x, y)$ are homogeneous polynomials of degree n, m, n, m respectively, we have

$$x \frac{\partial P}{\partial x} + y \frac{\partial P}{\partial y} = nP, \quad x \frac{\partial Q}{\partial x} + y \frac{\partial Q}{\partial y} = mQ, \quad x \frac{\partial R}{\partial x} + y \frac{\partial R}{\partial y} = nR \quad \text{and} \quad x \frac{\partial S}{\partial x} + y \frac{\partial S}{\partial y} = mS.$$

Then, we have

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial x} x \ln \left|\frac{N}{M}\right| + \frac{\partial U}{\partial y} y \ln \left|\frac{N}{M}\right| = x \frac{\partial}{\partial x} \left(xy \frac{R}{S} - xy \frac{P}{Q}\right) \ln \left|\frac{N}{M}\right| + y \frac{\partial}{\partial y} \left(xy \frac{R}{S} - xy \frac{P}{Q}\right) \ln \left|\frac{N}{M}\right| \\ = & xy \left(2 \frac{R}{S} - 2 \frac{P}{Q} + \frac{P(xQ_x + yQ_y) - Q(xP_x + yP_y)}{Q^2} + \frac{S(xR_x + yR_y) - R(xS_x + yS_y)}{S^2}\right) \ln \left|\frac{N}{M}\right| \\ = & xy \left(2 \frac{R}{S} - 2 \frac{P}{Q} + \frac{mP - nP}{Q} + \frac{nR - mR}{S}\right) \ln \left|\frac{N}{M}\right| \\ = & (n - m + 2) xy \left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q}\right) \ln \left|\frac{N}{M}\right| = (n - m + 2) U \ln \left|\frac{N}{M}\right|. \end{aligned}$$

On the other hand, substituting

$$y \frac{\partial P}{\partial y} = nP - x \frac{\partial P}{\partial x}, \quad y \frac{\partial Q}{\partial y} = mQ - x \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad x \frac{\partial R}{\partial x} = nR - y \frac{\partial R}{\partial y} \quad \text{and} \quad x \frac{\partial S}{\partial x} = mS - y \frac{\partial S}{\partial y},$$

in what follows, we get

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial x} x \frac{P}{Q} + \frac{\partial U}{\partial y} y \frac{R}{S} = \frac{\partial \left(xy \frac{R}{S} - xy \frac{P}{Q}\right)}{\partial x} x \frac{P}{Q} + \frac{\partial \left(xy \frac{R}{S} - xy \frac{P}{Q}\right)}{\partial y} y \frac{R}{S} \\ = & xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + x \frac{SR_x - RS_x}{S^2} \frac{P}{Q} - x \frac{QP_x - PQ_x}{Q^2} \frac{P}{Q} + y \frac{SR_y - RS_y}{S^2} \frac{R}{S} - y \frac{QP_y - PQ_y}{Q^2} \frac{R}{S}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \frac{xS^2PR_x - xSRPS_x + yQSR R_y - yQR^2S_y}{S^3Q} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-xSQPP_x + xSP^2Q_x - yRQ^2P_y + yQRPQ_y}{Q^3S} \right) \\
&= xy \left(\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \frac{-xS^3P(QP_x - PQ_x) + xRQS^2(QP_x - PQ_x) - nS^2RQ^2P + mS^2Q^2RP}{S^3Q^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-ySPQ^2(SR_y - RS_y) + yQ^3R(SR_y - RS_y) + nS^2Q^2PR - mS^2RPQ^2}{S^3Q^3} \right) \\
&= xy \left[\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} - x \frac{P(QP_x - PQ_x)}{Q^2} + x \frac{R(QP_x - PQ_x)}{S} - y \frac{P(SR_y - RS_y)}{Q} + y \frac{R(SR_y - RS_y)}{S} \right] \\
&= xy \left[\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} - \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right) \frac{P}{Q} + \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right) \frac{R}{S} \right] \\
&= xy \left[\frac{R^2}{S^2} - \frac{P^2}{Q^2} + \left(x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right) \left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} \right) \right] \\
&= xy \left(\frac{R}{S} - \frac{P}{Q} \right) \left[\frac{R}{S} + \frac{P}{Q} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right] = U \left[\frac{R}{S} + \frac{P}{Q} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right].
\end{aligned}$$

In short, we have

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial x} x \left(\ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{P}{Q} \right) + \frac{\partial U}{\partial y} y \left(\ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{R}{S} \right) \\
&= \left[(n - m + 2) \ln \left| \frac{N}{M} \right| + \frac{P}{Q} + \frac{R}{S} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{Q} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R}{S} \right) \right] U.
\end{aligned}$$

Therefore, $U(x, y) = xy \frac{R(x, y)}{S(x, y)} - xy \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0$ is an invariant algebraic curve of the polynomial differential systems (1.2) with the cofactor

$$K(x, y) = (n - m + 2) \ln \left| \frac{N(x, y)}{M(x, y)} \right| + \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} + \frac{R(x, y)}{S(x, y)} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \right) + y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} \right).$$

Hence, statement (h_1) is proved. \square

Proof of statement (h_2) , (h_3) and (h_4) . In order to prove our results (h_2) , (h_3) and (h_4) we write the polynomial differential system (1.2) in polar coordinates (r, θ) , defined by $x = r \cos \theta$ and $y = r \sin \theta$, then the system (1.2) becomes

$$\begin{cases} r' = f_1(\theta) r^{n-m+1} + f_2(\theta) r, \\ \theta' = f_3(\theta) r^{n-m}, \end{cases} \quad (2.3)$$

where the trigonometric functions $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ are given in introduction,

$$r' = \frac{dr}{dt} \quad \text{and} \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt}.$$

Suppose that

$$f_3(\theta) \neq 0, \quad Q(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0, \quad N(\cos \theta, \sin \theta) M(\cos \theta, \sin \theta) > 0 \quad \text{and} \quad n - m \neq 1.$$

Taking as independent variable the coordinate θ , this differential system (2.3) writes

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta)r + B(\theta)r^{1-n+m}, \quad (2.4)$$

where $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$ and $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$, which is a Bernoulli equation. By introducing the standard change of variables $\rho = r^{n-m}$ we obtain the linear equation

$$\frac{d\rho}{d\theta} = (n-m)(A(\theta)\rho + B(\theta)). \quad (2.5)$$

The general solution of linear equation (2.5) is

$$\rho(\theta) = \exp\left((n-m)\int_0^\theta A(\omega)d\omega\right)\left[\mu + (n-m)\int_0^\theta \exp\left((m-n)\int_0^s A(\omega)d\omega\right)B(s)ds\right],$$

where $\mu \in \mathbb{R}$, which has the first integral (2.1).

Since this first integral is a function that can be expressed by quadratures of elementary functions, it is a Liouvillian function, and consequently system (1.2) is Darboux integrable.

Let Γ be a periodic orbit surrounding an equilibrium located in one of the open quadrants, and let $h_\Gamma = H(\Gamma)$.

The curves $H = h$ with $h \in \mathbb{R}$, which are formed by trajectories of the differential system (1.2), in Cartesian coordinates are written as

$$x^2 + y^2 = \left[h \exp\left((n-m)\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega)d\omega\right) + (n-m)\exp\left((n-m)\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega)d\omega\right)\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left((m-n)\int_0^s A(\omega)d\omega\right)B(s)ds \right]^{\frac{2}{n-m}},$$

where $h \in \mathbb{R}$.

Therefore the periodic orbit Γ is contained in the curve

$$x^2 + y^2 = \left[h_\Gamma \exp\left((n-m)\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega)d\omega\right) + (n-m)\exp\left((n-m)\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega)d\omega\right)\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left((m-n)\int_0^s A(\omega)d\omega\right)B(s)ds \right]^{\frac{2}{n-m}}.$$

But this curve cannot contain the periodic orbit Γ and consequently no limit cycle contained in the realistic quadrant ($x > 0, y > 0$), because this curve in realistic quadrant has at most a unique point on every straight line $y = \eta x$ for all $\eta \in]0, +\infty[$.

To be convinced by this fact, one has to compute the abscissa points of intersection of this curve with straight line $y = \eta x$ for all $\eta \in]0, +\infty[$, the abscissa is given by

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} \left[h \exp\left((n-m)\int_0^{\arctan \eta} A(\omega)d\omega\right) + (n-m)\exp\left((n-m)\int_0^{\arctan \eta} A(\omega)d\omega\right)\int_0^{\arctan \eta} \exp\left((m-n)\int_0^s A(\omega)d\omega\right)B(s)ds \right]^{\frac{1}{n-m}},$$

at most a unique value of x on every half straight OX^+ , consequently at most a unique point in realistic quadrant ($x > 0, y > 0$). So this curve cannot contain the periodic orbit, consequently no limit cycle.

Hence statement (h_2) is proved. □

Suppose now that

$$f_3(\theta) \neq 0, \quad Q(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0, \quad N(\cos \theta, \sin \theta) M(\cos \theta, \sin \theta) > 0 \quad \text{and} \quad n - m = 1.$$

Taking as independent variable the coordinate θ , this differential system (2.3) writes

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta)r + B(\theta). \tag{2.6}$$

The general solution of linear equation (2.6) is

$$r(\theta) = \exp\left(\int_0^\theta A(\omega) d\omega\right) \left[\mu + \int_0^\theta \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds \right],$$

where $\mu \in \mathbb{R}$, which has the first integral (2.2).

Let Γ be a periodic orbit surrounding an equilibrium located in one of the realistic quadrant ($x > 0, y > 0$), and let $h_\Gamma = H(\Gamma)$.

The curves $H = h$ with $h \in \mathbb{R}$, which are formed by trajectories of the differential system (1.2), in Cartesian coordinates are written as

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) + \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds,$$

where $h \in \mathbb{R}$.

Therefore the periodic orbit Γ is contained in the curve

$$\sqrt{x^2 + y^2} = h_\Gamma \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) + \exp\left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega\right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds,$$

But this curve cannot contain the periodic orbit Γ , and consequently no limit cycle contained in the realistic quadrant ($x > 0, y > 0$), because this curve in realistic quadrant has at most a unique point on every straight line $y = \eta x$ for all $\eta \in]0, +\infty[$.

To be convinced by this fact, one has to compute the abscissa points of intersection of this curve with straight line $y = \eta x$ for all $\eta \in]0, +\infty[$, the abscissa is given by

$$x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left[h_\Gamma \exp\left(\int_0^{\arctan \eta} A(\omega) d\omega\right) + \exp\left(\int_0^{\arctan \eta} A(\omega) d\omega\right) \int_0^{\arctan \eta} \exp\left(-\int_0^s A(\omega) d\omega\right) B(s) ds \right],$$

at most a unique value of x on every half straight OX^+ , consequently at most a unique point in realistic quadrant ($x > 0, y > 0$). So this curve cannot contain the periodic orbit, consequently no limit cycle.

Hence statement (h_3) is proved. □

Assume now that $f_3(\theta) = 0$ for all $\theta \in \mathbb{R}$, then from system (2.3) it follows that $\theta' = 0$. So the straight lines through the origin of coordinates of the differential system (1.2) are invariant by the flow of this system. Hence, $\frac{y}{x}$ is a first integral of the system, then curves which are formed by the trajectories of the differential system (1.2), in Cartesian coordinates are written as $y - hx = 0$, where $h \in \mathbb{R}$, since all straight lines through the origin are formed by trajectories, clearly the system has no periodic orbits, consequently no limit cycle.

This completes the proof of statement (h_4) and Theorem 1. □

REFERENCES

1. Bendjeddou A., Llibre J., Salhi T. Dynamics of the differential systems with homogenous nonlinearity and a star node. *J. Differential Equations*, 2013, vol. 254, pp. 3530–3537. doi: 10.1016/j.jde.2013.01.032 .
2. Boukoucha R. On the dynamics of a class of Kolmogorov systems. *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2016, vol. 9, no. 1, pp. 11–16. doi: 10.17516/1997-1397-2016-9-1-11-16 .
3. Boukoucha R. On the dynamics of a class of Kolmogorov systems. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2016, vol. 13, pp. 734–739. doi: 10.17377/semi.2016.13.058 .
4. Boukoucha R., Bendjeddou A. On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems. *J. of Nonlinear Math. Phys.*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 21–27. doi: 10.1080/14029251.2016.1135629 .
5. Busse F.H. *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route*. Berlin: Springer-Verlag, 1978, Ser. SSSYN, vol. 11, pp. 36–44. doi: 10.1007/978-3-642-68304-6_4 .
6. Cairó L., Llibre J. Phase portraits of cubic polynomial vector fields of Lotka–Volterra type having a rational first integral of degree 2. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2007, vol. 40, pp. 6329–6348. doi: 10.1088/1751-8113/40/24/005 .
7. Chavarriga J., Grau M. A family of non-Darboux-integrable quadratic polynomial differential systems with algebraic solutions of arbitrarily high degree. *Appl. Math. Lett.*, 2003, vol. 16, no. 6, pp. 833–837. doi: 10.1016/S0893-9659(03)90004-8 .
8. Christopher C. , Llibre J. Integrability via invariant algebraic curves for planar polynomial differential systems. *Ann. Differential Equations*, 2000, vol. 16, no. 1, pp. 5–19.
9. Darboux G. Memoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré. *Bull. Sci. Math. (2)*, 1878, vol. 2, no. 1, pp. 60–96; pp. 123–144; pp. 151–200.
10. Dumortier F., Llibre J., Artés J., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*, Berlin, Springer, 2006, 298 p., ser. Qualitative. ISBN: 3-540-32893-9 .
11. Gao P. Hamiltonian structure and first integrals for the Lotka–Volterra systems. *Phys. Lett. A*, 2000, vol. 273, iss. 1-2, pp. 85–96. doi: 10.1016/S0375-9601(00)00454-0 .
12. Gasull A., Giacomini H., Torregrosa J., Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems, *J. Comput. Appl. Math.*, 2007, vol. 200, iss. 1, pp. 448–457. doi: 10.1016/j.cam.2006.01.003 .
13. Hilbert D., Mathematische probleme, *Lecture to the Second Internat. Congr. Math.* (Paris, 1900), Nachr. Ges. Wiss. Gttingen Math. Phys. Kl., 1900, pp. 253–297; English transl, Bull. Amer. Math. Soc. 1902, vol. 8, pp. 437–479.
14. Huang X., Limit in a Kolmogorov-type model. *Internat J. of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1990, vol. 13, no. 3, pp. 555–566. doi: 10.1155/S0161171290000795 .
15. Laval G., Pellat R. Plasma Physics. *Proc. of Summer School of Theoretical Physics*, New York, Gordon and Breach, 1975.
16. Li C., Llibre J. The cyclicity of period annulus of a quadratic reversible Lotka–Volterra system. *Nonlinearity*, 2009, vol. 22, no. 12, pp. 2971–2979. doi:10.1088/0951-7715/22/12/009 .
17. Llibre J., Salhi T. On the dynamics of class of Kolmogorov systems. *J. Appl. Math. Comput.*, 2013, vol. 225, pp. 242–245. doi: 10.1016/j.amc.2013.09.017 .
18. Llibre J., Valls C. Polynomial, rational and analytic first integrals for a family of 3-dimensional Lotka–Volterra systems. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2011, vol. 62, iss. 5, pp. 761–777. doi: 10.1007/s00033-011-0119-2 .
19. Llibre J., Yu J., Zhang X. On the limit cycle of the polynomial differential systems with a linear node and Homogeneous nonlinearities. *Internat. J. Bifur. Chaos*, 2014, vol. 24, no. 5, ser. Appl. Sci. Engrg., pp. 1–7. doi: 10.1142/S0218127414500655 .
20. Llyod N.G., Pearson J.M., Saez E., Szanto I. Limit cycles of a cubic Kolmogorov system. *Appl. Math. Lett.*, 1996. vol. 9, no. 1, pp. 15–18. doi: 10.1016/0893-9659(95)00095-X .
21. May R.M. *Stability and complexity in model ecosystems*. Princeton, New Jersey, 1974. 304 p. ISBN-10: 0691088616 .
22. Singer M.F. Liouvillian first integrals of differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1990, vol. 333, pp. 673–688.
23. Poincaré H. Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre et du premier degré I and II. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1891, vol. 5, pp. 161–91.

The paper was received by the Editorial Office on October 30, 2016.

СОДЕРЖАНИЕ

Владимир Васильевич Васин (К 75-летию юбилею).....	5
А. Л. Агеев, Т. В. Антонова. Алгоритмы повышенной точности аппроксимации линий разрыва зашумленной функции.....	10
В. А. Баранский, Т. А. Сеньчонок. О пороговых графах и реализациях графических разбиений.....	22
А. В. Горшков, Е. Ю. Просвиряков. Аналитические решения стационарной сложной конвекции, описывающие поле касательных напряжений разного знака.....	32
А. Р. Данилин, С. В. Захаров, О. О. Коврижных, Е. Ф. Леликова, И. В. Першин, О. Ю. Хачай. Екатеринбургское наследие Арлена Михайловича Ильина..	42
А. Р. Данилин, О. О. Коврижных. Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи о быстром действии.....	67
А. А. Ершов, Ю. А. Крутова. Асимптотика потенциала скоростей идеальной жидкости при обтекании тонкого диска.....	77
С. В. Захаров. Двухпараметрические асимптотики в бисингулярной задаче Коши для параболического уравнения.....	94
Л. А. Калякин. Уравнение Пенлеве-II как модель резонансного взаимодействия осцилляторов.....	104
О. М. Киселев, В. Ю. Новокшенов. Авторезонанс в модели генератора терагерцевых волн.....	117
А. А. Ковалевский. Вариационные задачи с односторонними поточно функциональными ограничениями в переменных областях.....	133
Е. К. Костоусова. О полиэдральном методе решения задач синтеза стратегий управления в многошаговых системах с неопределенностями и фазовыми ограничениями	151
В. А. Кыров, Г. Г. Михайличенко. Аналитический метод вложения евклидовой и псевдоевклидовой геометрий.....	167
Е. Ф. Леликова. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром с кусочно гладкой граничной функцией.....	182
И. В. Першин. Расчет тепловых полей массивных тел круговым источником тепла в трехмерном случае.....	196
Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов. К задаче об обтекании тел идеальным газом.....	200
А. И. Сидикова. О приближенном решении одной обратной граничной задачи методом регуляризованного решения конечномерной аппроксимации.....	210
А. А. Соловьев. Оценка остаточного члена для асимптотического представления эллиптического синуса, содержащего три первых члена разложения.....	220

В. П. Танана. Об одном подходе к сравнению оценок погрешности в точке и на множестве при решении некорректных задач	230
Д. А. Турсунов. Обобщенный метод погранфункций для бисингулярных задач в круге	239
О. Ю. Хачай. Исследование асимптотики решения трехмерного нелинейного волнового уравнения вблизи точки катастрофы типа “бабочка”	250
Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, А. А. Сисакян. О нетривиальной разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений типа Урысона	266
И. Х. Хуснуллин. Возмущение волновода узким потенциалом	274
А. Г. Ченцов. Итерации стабильности и задача уклонения с ограничением на число переключений	285
А. А. Шабуров. Асимптотическое разложение решения одной сингулярно возмущенной задачи оптимального управления в пространстве \mathbb{R}^n с интегральным выпуклым критерием качества	303
Rachid Boukoucha. Integrability and invariant algebraic curves for a class of Kolmogorov systems	311

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале “Труды Института математики и механики УрО РАН” публикуются оригинальные работы теоретического характера по современным разделам математики и механики.

“Труды Института математики и механики УрО РАН” являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы в виде математических утверждений и доказаны (нетривиальность и новизна). В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В “Труды Института математики и механики” не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла “Трудов Института математики и механики”).

Для решения вопроса о целесообразности публикации в “Трудах Института математики и механики” редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей.

С 2000 г. статьи журнала (по решению редколлегии) выходят на английском языке в издательстве Pleiades Publishing, Ltd; МАИК “НАУКА/INTERPERIODICA” под названием “Selected articles from Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN” как приложение к “Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics”.

Автор представляет в редакцию электронный вариант статьи (tex-формат и pdf-формат).

К статье должны быть приложены:

- Сопроводительное письмо в отсканированном виде от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.
- Информация со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. В настоящее время также не взимается плата за публикацию рукописей и других авторов.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтom математики и механики Уральского отделения РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Правила оформления рукописей:

- В статье должны быть сформулированы и доказаны **НОВЫЕ** результаты в виде теорем, утверждений, предложений.
- Текст статьи должен быть набран в LATEX2 ϵ в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.
- Представляемая в “Труды Института математики и механики УРО РАН” статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов на русском и английском языках. Аннотация (не менее 10-15 предложений) должна быть информативной (не содержать общих слов), оригинальной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований), структурированной. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул. После аннотации должен быть указан код MSC от 1 до 5 значений (Mathematics Subject Classification).
- Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.
- Включение рисунков в статью теоретического характера носит исключительный характер и должно быть обосновано. Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.
- Файлы со статьями — tex-источник и pdf-вариант статьи — высылаются на адрес e-mail: trudy@imm.uran.ru.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23

№ 2

2017

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редакторы Н. Н. Моргунова, Е. Е. Понизовкина
TeX-редактор Г. Ф. Корнилова
Отв. за выпуск А. Е. Эльберт

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 25.05.17. Формат 60 × 84¹/₈. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 37,4. Уч.-изд. л. 32,3 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
<http://journal.imm.uran.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО “Типография ДЛЯ ВАС”
620026, г. Екатеринбург, ул. Розы Люксембург, 52а, оф. 3