РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Том 23, № 1 2017

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 23 № 1 2017

ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 23, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2017. 318 с.

ISSN 0134–4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-5-7

НИНА НИКОЛАЕВНА СУББОТИНА

К юбилею

2 августа 2016 года члену-корреспонденту РАН Нине Николаевне Субботиной исполнилось 70 лет. Нина Николаевна широко известна в научном мире своими трудами в области теории оптимального управления, дифференциальных игр и теории уравнений Гамильтона — Якоби.

Н.Н. Субботина родилась в 1946 году в г. Свердловске. Ее родители, Николай Максимович и Зоя Николаевна Барабановы, работали на Уралмаше с основания завода и до выхода на пенсию: отец — экономистом, мама — архивариусом. Одним из приоритетов семьи было воспитание у детей, Володи и Нины, любознательности, интереса к знаниям, учебе и стремления к профессиональному росту. От родителей Нина Николаевна восприняла глубокое убеждение в том, что крепкая семья обеспечивает человеку спокойствие и уверенность в завтрашнем дне, что позволяет добиться успехов в делах, в том числе и науке.

Интерес к занятиям математикой у Нины Субботиной появился в школьные годы. В 68-й свердловской школе, где она училась, математику преподавала Мария Сергеевна Коротаева — одна из лучших учителей города. Как и многие выпускники 68-й школы, Нина последовала совету Марии Сергеевны и подала заявление на математико-механический факультет Уральского государственного университета (УрГУ). Поступив на матмех, Н. Субботина сосредоточилась на учебе, которая, разумеется, требовала больших усилий, особенно в первые годы. Интересы юной студентки не ограничивались изучением только специальных предметов. Она активно участвовала в общественной и спортивной жизни факультета, проявляла интерес к другим наукам, в частности к биологии. Ей посчастливилось слушать лекции знаменитого биолога Н. В. Тимофеева-Ресовского.

Когда на третьем курсе встал вопрос о дальнейшей специализации в математическом образовании, выбор оказался большим и нетривиальным. Было много сильных кафедр, пользовавшихся у студентов популярностью. К этому времени член-корреспондент Николай Николаевич Красовский — будущий академик АН СССР, создал в УрГУ кафедру прикладной математики. Ее сотрудниками стали молодые кандидаты наук Эрнст Генрихович Альбрехт, Александр Борисович Куржанский, Юрий Сергеевич Осипов, Андрей Измайлович Субботин, Владимир Евгеньевич Третьяков, Геннадий Степанович Шелементьев. Проводимые на кафедре спецкурсы и спецсеминары знакомили студентов с новыми и перспективными областями математики — теорией устойчивости, стабилизации и оптимального управления. Высокий уровень лекций и занятий стимулировал у слушателей живой интерес и обеспечивал им прочную теоретическую базу и основательные практические навыки. Тема диплома, выбранная Ниной Субботиной, находилась на стыке математики и биологии и была связана с математическими моделями фотосинтеза. Научным руководителем по биологическим аспектам был Адольф

Трофимович Мокроносов, будущий академик, а по математическим — Юрий Сергеевич Осипов, также будущий академик и президент РАН.

В 1969 году Нина Николаевна закончила университет с красным дипломом и получила распределение в Свердловское отделение Математического института им. В. А. Стеклова, которое вскоре было преобразовано в Институт математики и механики. В созданном Н. Н. Красовским отделе динамических систем выпускница продолжала заниматься математическим моделированием в биологии совместно с сотрудниками Института экологии растений и животных, изучавшими действие радиации на мышей. Одновременно она увлеклась исследованием задач теории дифференциальных игр.

1970-е годы — период становления и развития теории оптимального управления и теории дифференциальных игр, в котором ключевую роль сыграл Николай Николаевич Красовский. Он определял основные направления исследований отдела динамических систем, формулировал проблемы и задачи. Большой его заслугой являлось создание творческой атмосферы в отделе, где велась интенсивная научная работа; на семинарах отдела регулярно выступали с докладами маститые и начинающие ученые как из различных регионов Советского Союза, так и из-за рубежа. Семинары проводились при активном участии Андрея Измайловича Субботина. Становление его как крупного ученого и широкое признание в научном мире пришлись именно на эти годы. В научной деятельности Нины Николаевны работы, выполненные совместно с Андреем Измайловичем, имеют принципиальное значение. В начале 1970-х годов супруги получили базовые результаты в теории позиционных дифференциальных игр, а в 1980-е — 1990-е годы в продолжение этих результатов Андрей Измайлович создал теорию обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби, в которую Нина Николаевна внесла свой существенный вклад. Ее достижения относятся к изучению свойств непрерывных стратегий в позиционных дифференциальных играх, описанию связей принципа максимума Понтрягина, динамического программирования Беллмана и метода характеристик Коши.

В настоящее время Нина Николаевна Субботина — известный ученый-математик, автор свыше 120 научных публикаций, в том числе двух монографий. Область ее научных интересов — математическая теория оптимального управления, дифференциальные игры, теория уравнений Гамильтона — Якоби. Н. Н. Субботиной были получены следующие важные результаты:

- для позиционной дифференциальной игры доказана невозможность аппроксимации разрывных оптимальных позиционных стратегий непрерывными и многозначными стратегиями, а также невозможность оптимального синтеза;

- в задачах оптимального управления обоснованы необходимые и одновременно достаточные условия оптимальности первого порядка, установлена связь принципа максимума Понтрягина, метода динамического программирования и метода характеристик Коши, описана структура оптимального синтеза в случае локально липшицевых входных данных;

- разработаны и обоснованы новые эффективные численные методы решения задач оптимального управления с помощью сеточного оптимального синтеза;

- в области теории обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана для задачи Коши описана структура минимаксных/вязкостных решений (инфинитезимальная и в терминах классических характеристик); обоснована сингулярная аппроксимация этих решений; предложены и обоснованы новые численные методы построения минимаксных / вязкостных решений на базе классических характеристик; установлена связь этих решений с одномерными законами сохранения; исследованы обобщенные решения в задаче с фазовыми ограничениями.

Н. Н. Субботина — главный научный сотрудник, зав. сектором Института математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, профессор кафедры прикладной математики в

Уральском федеральном университете им. Б. Н. Ельцина, под ее руководством защищены две кандидатские диссертации. Н. Н. Субботина является членом российского отделения Международного общества динамических игр (ISDG Rus — The International Society of Dynamic Games, Russian Chapter) и Международного общества индустриальной и прикладной математики (SIAM – Society of Industrial and Applied Mathematics, USA), членом редколлегии журналов "Труды Института математики и механики УрО РАН" (Екатеринбург), "Вестник УдГУ. Математика. Механика. Компьютерные науки" (Ижевск), "Minimax Theory and Its Applications" (Germany).

Сын Измаил, дизайнер по интерьеру, вместе с женой Викторией воспитывают внуков Нины Николаевны и Андрея Измайловича — Елену, Дмитрия и Илью.

Друзья, коллеги и ученики сердечно поздравляют Нину Николаевну с юбилеем и желают успехов в научной, педагогической и общественной деятельности, крепкого здоровья и большого личного счастья!

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-8-11

ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ УШАКОВ

К 70-летнему юбилею

25 ноября 2016 года исполнилось 70 лет члену-корреспонденту РАН, главному научному сотруднику отдела динамических систем Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН Владимиру Николаевичу Ушакову.

Владимир Николаевич родился и вырос в Оренбуржье в семье школьных учителей. Детство провел в селе Октябрьское на родине матери, учился в местной школе с прекрасными традициями, в которой преподавали родители. Педагоги основательно знали свои предметы. Отец, Николай Иванович, преподавал в школе математику. В молодости он сам мечтал о большой науке, но планам не суждено было сбыться из-за начавшейся Великой Отечественной войны. С четвертого курса физико-математического факультета Казанского университета он был переведен в инженерно-авиационную академию в Йошкар-Оле и, пройдя сокращенный курс обучения, попал на фронт. После окончания войны Николай Иванович завершил обучение в Оренбургском пединституте и посвятил себя учительскому делу. В родительском доме всегда было много книг, выписывались журналы, в том числе “Знание — сила”, “Наука и жизнь” и даже научный журнал “Успехи математических наук”. Наметившийся в СССР в 50-60-х годах XX века научно-технический прогресс и царивший в семье культ знания значительно повлияли на жизненный выбор сына.

В 1963 году Владимир Ушаков поступил на математико-механический факультет Уральского государственного университета, где и определились его научные интересы. Будучи студентом третьего курса, он вошел в первую специализированную группу, обучавшуюся на кафедре прикладной математики, только что созданной академиком Николай Николаевичем Красовским. Там же познакомился с его учеником, также будущим академиком Андреем Измайловичем Субботиным, сыгравшим особую роль в его судьбе, с другими выдающимися исследователями. Именно в тот период определилась и основная тематика, которой Владимир Николаевич занимается по сей день. По этой тематике, относящейся к оптимальному управлению и дифференциальным играм, на кафедре читали прекрасные лекции и вели занятия будущие академики Александр Борисович Куржанский и Юрий Сергеевич Осипов. Консультации по научным вопросам также проводили Э. Г. Альбрехт, В. Е. Третьяков, Г. С. Шелементьев. Курсовую работу В. Ушаков писал у А. Б. Куржанского, а дипломную — у Н. Н. Красовского.

После окончания университета В. Н. Ушакова призвали в Вооруженные Силы РФ. Служил он в Забайкалье, у границы с Китаем, командиром обычного мотострелкового взвода, но и там находил время для занятий математикой — во многом благодаря поддержке А. И. Субботина, присылавшего ему специальную литературу. Демобилизовавшись, Владимир Николаевич вернулся в Свердловск и поступил на работу в Институт математики и механики (тогда СОМИ), где под руководством Н. Н. Красовского и А. И. Субботина продолжил изучение темы, начатой в университете. В 1975 году защитил кандидатскую диссертацию “Некоторые задачи теории дифференциальных игр”, а в 1991 — докторскую “Процедуры построения стабильных мостов в дифференциальных играх”.

После безвременного ухода из жизни академика А. И. Субботина Владимир Николаевич заменил его на посту заведующего отделом динамических систем, проработав в должности 18 лет. Во многом благодаря его усилиям отдел сохранился и продолжает развиваться. Огромное внимание В. Н. Ушаков уделяет преподаванию, активно участвует в пропаганде математических знаний среди учителей и учащихся школ Урала. Длительный период работал профессором в Уральском федеральном университете, Челябинском и Удмуртском университетах. Под руководством Владимира Николаевича защищены 10 кандидатских диссертаций, среди его учеников — два доктора наук.

В. Н. Ушаков — известный, признанный в кругу специалистов математик, автор более 230 научных работ в области дифференциальных игр, теории оптимального управления, негладкого анализа, а также теории чисел. Он получил фундаментальные результаты в теории позиционных дифференциальных игр. Им исследовано ключевое в теории дифференциальных игр свойство стабильности и предложено обобщение метода унификации Н. Н. Красовского при описании свойства стабильности. Он является автором метода регуляризации недифференцируемых функций и множеств с негладкой границей на основе локальных выпуклых оболочек, который служит базой для численных процедур построения аппроксимационных решений дифференциальных игр и задач управления.

Под руководством В. Н. Ушакова разработаны и реализованы в виде вычислительных процедур алгоритмы построения игровых задач о сближении для нелинейных управляемых систем. На основе полученных теоретических результатов проведено математическое моделирование ряда специальных задач управления для механических систем по прикладной тематике.

В результате поиска новых подходов к решению задач управления Владимир Николаевич ввел в научный оборот понятие дефекта стабильности множества, позволяющее расширить концепцию стабильности. Еще одно новое понятие — мера невыпуклости множества — позволило разработать методологию исследования невыпуклых множеств и обогатить новыми методами арсенал негладкого анализа.

В. Н. Ушаков — член редколлегии журналов “Труды Института математики и механики УрО РАН”, “Вестник Южно-Уральского университета”, “Вестник Удмуртского университета”. Он является руководителем секции процессов управления, дифференциальных уравнений и механики ученого совета ИММ, председателем диссертационного совета Д004.006.01 по специальности “01.01.02 — “Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление”, экспертом РФФИ, руководителем Программы фундаментальных научных исследований Президиума РАН, проектов УрО РАН, проектов РНФ и РФФИ.

Мы, его коллеги и ученики, от души поздравляем Владимира Николаевича с юбилеем и желаем ему дальнейших успехов в его многогранной научной, образовательной и общественной деятельности, крепкого здоровья и новых творческих достижений!

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 621.452

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ТЕПЛООБМЕНА ВО ВРАЩАЮЩИХСЯ РЕГЕНЕРАТИВНЫХ ВОЗДУХОПОДОГРЕВАТЕЛЯХ[1]

А. А. Азамов, М. А. Бекимов

В работе предлагается математическая модель процесса теплообмена во вращающемся регенеративном воздухоподогревателе тепловых электростанций. Модель получена дискретизацией процесса в результате усреднения как временной, так и пространственных переменных. При наложении на процесс ряда упрощающих предположений составлена линейная дискретная система $z(n+1) = Az(n) + r(n)$ порядка $2m$ с мономиальной матрицей $A = (a_{ij})$ размера $(2m \times 2m)$, в которой $a_{ij} = \alpha_i$ при $i = 1, j = 2m$ и при $i = 2, \ldots, 2m$, $j = i - 1$, а все остальные элементы равны 0. С использованием соотношения $A^{2m} = \big(\prod_{i=1}^{2m} \alpha_i\big)E$ и формулы Коши изучены устойчивость, периодичность, сходимость средних по Чезаро и другие свойства. Далее, рассмотрена задача идентификации системы, состоящая в определении коэффициентов $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, 2m$, на основе значений $z(1), z(2), \ldots, z(2m)$. В предположении $r(n) = r = \mathrm{const}$ при $n = 1, 2, \ldots, 2m$ она приведена к матричному уравнению $AY = B$, где квадратная матрица Y составлена из столбцов $y_1 = t = r-(E-A)z_0$, $y_2 = Ay_1+t, \ldots, y_{2m} = Ay_{2m-1}+t$, а $B = [t-y_2, t-y_3, \ldots, t-y_{2m-1}]$. Выведена рекурентная формула для $detY$. Установлено, что если $\Delta = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m - \alpha_{m+1}\alpha_{m+2} \ldots \alpha_{2m} \neq 0$, то $detY \neq 0$ и $A = BY^{-1}$.

Ключевые слова: процесс теплообмена, мономиальная матрица, усреднение, линейное дискретное уравнение, формула Коши, установившийся режим, периодический режим, средние Чезаро, задача идентификации.

A. A. Azamov, M. A. Bekimov. A discrete model of the heat exchange process in rotating regenerative air preheaters.

We propose a mathematical model of the heat transfer process in a rotating regenerative air preheater of a thermal power plant. The model is obtained by discretizing the process as a result of averaging both temporal and spatial variables. Making a number of simplifying assumptions, we write a linear discrete system $z(n+1) = Az(n)+r(n)$ of order $2m$ with a monomial $2m\times 2m$ matrix $A = (a_{ij})$ in which $a_{ij} = \alpha_i$ for $i = 1$, $j = 2m$ and for $i = 2, \ldots, 2m$, $j = i-1$, whereas all the other elements are zero. Using the relation $A^{2m} = \left(\prod_{i=1}^{2m} \alpha_i\right) E$ and the Cauchy formula, we study the stability, periodicity, and convergence of the Cesàro means and other properties. We also consider the identification problem consisting in finding unknown coefficients α_i, $i = 1, 2, \ldots, 2m$, from the values $z(1), z(2), \ldots, z(2m)$ of the trajectory. Under the assumption $r(n) = r = \mathrm{const}$ for $n = 1, 2, \ldots, 2m$, we transform the problem to the matrix equation $AY = B$, where the square matrix Y is composed of the columns $y_1 = t = r - (E - A)z_0$, $y_2 = Ay_1 + t$, …, $y_{2m} = Ay_{2m-1} + t$ and $B = [t - y_2, t - y_3, \ldots, t - y_{2m-1}]$. A recurrence relation is derived for $\det Y$. It is proved that, if $\Delta = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_m - \alpha_{m+1}\alpha m + 2 \ldots \alpha_{2m} \neq 0$, then $\det Y \neq 0$ and $A = BY^{-1}$.

Keywords: heat transfer process, cyclic process, monomial matrix, averaging, linear discrete equation, Cauchy formula, steady state behavior, periodic mode, Cesáro mean, identification.

MSC: 65Q10, 65F40, 80A20, 97M50

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-12-19

Введение

Вращающийся регенеративный воздухоподогреватель (ВРВП) является специальным агрегатом, подключаемым к теплоэлектростанциям (ТЭС) с целью повышения к.п.д. за счет подогрева воздуха, вдуваемого в котел станции отработанной горячей смесью дыма и газа (в дальнейшем *газ*), образуемой в результате сжигания топлива. Использование ВРВП позволяет также заметно уменьшить тепловое загрязнение атмосферы [1; 2].

[1]Работа выполнена при поддержке Комитета по координации развития науки и технологий при Кабинете министров Республики Узбекистан (проект Ф4-ФА-Ф014).

В настоящее время в ТЭС применяется несколько типов ВРВП. Здесь будет рассмотрен случай агрегата, основной блок которого состоит из вращающего цилиндрического барабана с металлическими насадками высокой теплопроводности. Область пространства, занимаемая барабаном ВРВП, делится на две части, B_A и B_G, фиксированной условной плоскостью, проходящей через ось цилиндра. В процессе работы ВРВП сквозь часть B_A проходит атмосферный воздух в одном направлении, параллельном оси барабана, нагреваясь за счет отбора тепла из насадок, снижая тем самым их температуру. Сквозь часть B_G проходит газ в обратном направлении, охлаждаясь за счет отдачи тепла насадкам. Конечная передача тепла из горячего газа в холодный воздух происходит за счет вращения барабана вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

Наблюдение и контроль за температурой насадок и выходящих из ВРВП воздуха и газа (называемых вместе словом “теплоноситель”) составляют задачу, важную для эффективной эксплуатации ВРВП [1–3]. Непосредственное измерение температуры входящих и выходящих теплоносителей легко осуществляется, в то время как наблюдение и контроль за температурой насадок требуют применения сложной измерительной техники. Поэтому на практике широко применяется математическое моделирование ВРВП.

К настоящему времени предложены различные математические модели процесса теплообмена в ВРВП (см. [1–6]). Необходимо отметить, что к математическому моделированию работы ВРВП в принципе можно применять уравнения термодинамики твердого тела и газа [3]. Однако при этом приходится иметь дело с рядом сложностей, влияющих на адекватность модели. Первая из них состоит в том, что конфигурация насадок имеет довольно сложную геометрию, из-за чего граничные условия, в том числе условия сопряжения на поверхности насадок, становятся далеко не простыми. Вторая сложность связана с тем, что потоки теплоносителей, проходящих сквозь барабан ВРВП, не являются ламинарными, сопровождаясь турбулентностью [3; 4]. Дополнительную сложность привносит и необходимость учета вращения барабана. В силу этих и других особенностей все математические модели ВРВП строятся при тех или иных упрощающих предположениях.

В настоящей работе предлагается математическая модель термодинамического процесса теплообмена в ВРВП, основанная на дискретизации параметров, описывающих как сам процесс, так и геометрическую структуру барабана и его вращение. При этом модель описывается линейной дискретной системой с мономиальной матрицей [7], что позволяет достаточно полно рассмотреть вопросы качественного поведения решений и исследовать задачу идентификации.

1. Вывод уравнений начально-краевой задачи

Пусть барабан ВРВП представлен цилиндром $x^2 + y^2 \le R^2$, $0 \le z \le H$. Будем считать, что часть B_A определяется условием $y \ge 0$, а часть B_G — условием $y \le 0$. Температуру в момент времени t в точке (x, y, z), принадлежащей области, занимаемой насадками, обозначим через $\Theta(t, x, y, z)$, а температуру теплоносителя (воздуха или газа) в точке (x, y, z) вне насадок — через $T(t, x, y, z)$. Пара величин $\Theta(t, x, y, z)$, $T(t, x, y, z)$ полностью характеризуют процесс теплообмена в барабане ВРВП, но, как это было отмечено выше, выписать динамические уравнения и начально-граничную задачу для них не является простой задачей, а исследование получаемой таким путем задачи аналитическими методами практически невозможно.

В связи с этим перейдем к дискретной модели ВРВП, а именно, делим каждую из частей B_A и B_G на m равных секторов плоскостями, проходящими через ось барабана. Эти секторы обозначим S_1, $S_2, \ldots$, S_{2m}. (Секторы от S_1 до S_m составляют B_A.)

Пусть h — время, за которое барабан повернется на угол π/m, $I(n) = [nh,\ (n+1)h]$, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $V(X)$ — объем части X. Обозначим через B_k^* часть сектора S_k, занятую насадками, затем положим $B_k^o = S_k \backslash B_k^*$. Введем в рассмотрение осредненные величины

$$x_k(n) = \frac{1}{hV(B_k^*)} \int\limits_{I(n)} \int\limits_{B_k^*} \Theta(t,\, x,\, y,\, z) dxdydzdt, \quad u_k(n) = \frac{1}{hV(B_k^o)} \int\limits_{I(n)} \int\limits_{B_k^o} T(t,\, x,\, y,\, z) dxdydzdt.$$

Уравнения, связывающие эти величины, выведем при следующих упрощающих предположениях:

1. При $nh \le t < (n+1)h$ барабан ВРВП остается неподвижным, порция теплоносителя, заполнявшая часть $B_k^o,\ k = 1,\, 2\, \ldots, m$ (соответственно $B_k^o,\ k = m{+}1,\, \ldots, 2m,$) также остается неподвижной, теплообмен между теплоносителем и насадками происходит в соответствии с линейным законом Ньютона [2].

2. В момент времени $t = (n+1)h$ нагретая порция воздуха с температурой $u_k(n),\ k = 1,\, 2\ldots, m$, покидает область $B_k^o,\ k = 1,\, 2\, \ldots, m$, остывшая до температуры $u_k(n),\ k = m + 1,\, \ldots,\, 2m$, порция газа покидает область $B_k^o,\ k = m+1, \ldots, 2m$, барабан скачком поворачивается на угол $180^o/m$; после этого часть $B_k^o,\ k = 1,\, 2,\, \ldots, m$, заполняется новой порцией воздуха из внешней среды (или из калорифера в случае, если он подключен к ВРВП), с температурой $q_k(n),\ k = 1,\, 2\ldots, m$, а часть $B_k^o,\ k = m+1,\, \ldots, 2m$, заполняется новой порцией газа с температурой $q_k(n),\ k = m+1,\, \ldots, 2m$.

В соответствии с законом Ньютона для температуры насадок имеют место соотношения

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= (1 - \bar{\alpha}_1 h) x_{2m}(n) + \bar{\beta}_1 h q_1(n), \\ x_k(n+1) &= (1 - \bar{\alpha}_k h) x_{k-1}(n) + \bar{\beta}_k h q_k(n), \quad k = 2, 3, \ldots, 2m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

а для температуры выходящих из ВРВР теплоносителей — соотношения

$$u_k(n) = q_k(n) + \bar{\gamma}_k h (x_k(n) - q_k(n)), \quad k = 1, 2, \ldots, 2m-1, 2m. \tag{1.2}$$

Здесь $\bar{\alpha}_k,\, \bar{\beta}_k,\, \bar{\gamma}_k$ — параметры $(k = 1, 2, \ldots, 2m)$, характеризующие процесс теплообмена в ВРВП (геометрию и теплоемкость корпуса барабана и системы насадок, состав, плотность и влажность воздуха и газа, коэффициенты теплопроводности и диффузии; в эти же параметры включены и характеристики теплообмена на поверхностях контакта насадок с теплоносителями). Следует отметить, что значение этих величин может меняться в течение процесса, например из-за износа насадок, осадки сажи, отклонения теплообмена от линейного закона и т. п. На них может влиять и теплообмен на корпусе ВРВП. Здесь предполагается, что набор величин $\bar{\alpha}_k,\, \bar{\beta}_k,\, \bar{\gamma}_k$ остается неизменным. При этом предположении соотношения (1.1), (1.2) представляют собой замкнутую систему линейных дискретных уравнений [8]. Необходимо особо подчеркнуть, что выведенная система не относится к типу разностных уравнений, получаемых из дифференциальных уравнений в результате замены производных отношением приращений, так как при $h \to 0$ равенства (1.1), (1.2) не переходят в систему дифференциальных уравнений. Это обстоятельство связано с вращением барабана ВРВП и поэтому является математическим выражением данной особенности.

Система (1.1), (1.2) получена в результате довольно сильных упрощающих предположений о процессе теплообмена в ВРВП. Тем не менее благодаря такому упрощению она допускает достаточно полный анализ и может служить базовой моделью для описания работы ВРВП.

2. Анализ системы

Матрица системы (1.1), (1.2), как это было подчеркнуто выше, мономиальная: на каждой строке и на каждом столбце лишь один элемент отличен от 0. Если $A = (\alpha_{ij}), i, j = 1,\, 2, \ldots, 2m$, то в данном случае $\alpha_{1,\,2m} = \alpha_{2m} = 1 - \bar{\alpha}_{2m} h$, $\alpha_{i,i-1} = \alpha_i = 1 - \bar{\alpha}_i h$ при $i = 2, 3, \ldots, 2m$ и $\alpha_{ij} = 0$ для других пар индексов $(i,\, j)$ (каждая такая пара называется позицией). В дальнейшем будем пользоваться обозначением индексов по модулю $2m$, сдвинутым на 1. А именно, индекс с любым целым значением k считается равным числу из $\{1, 2, \dots, 2m\}$, которое сравним с k по модулю $2m$. Например, $\alpha_0 = \alpha_{2m}, \alpha_{2m+1} = \alpha_1, \alpha_{-1} = \alpha_{2m-1}$. Тогда мономиальная матрица A определится единым соотношением: $\alpha_{i,i-1} = \alpha_i = 1 - \bar{\alpha}_i h$ для всех $i = 1, 2, 3, \dots, 2m$, а первое соотношение в (1.1) получится из второго при $k = 1$.

Введя в рассмотрение векторы $z(n) = (x_1, x_2, \dots, x_{2m})^T$, $r(n) = h(\bar{\beta}_1 q_1(n), \bar{\beta}_2 q_2(n), \dots, \bar{\beta}_{2m} q_{2m}(n))^T$ (где T — знак транспортирования, превращающий вектор-строку в вектор-столбец), систему (1.1), (1.2) можно записать в стандартном виде

$$z(n+1) = Az(n) + r(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.3}$$

Все дальнейшие рассуждения проводятся в предположении $0 < \bar{\alpha}_k h$, $\bar{\beta}_k h < 1$, $k = 1, \dots, 2m$. Совокупность этих неравенств будем называть *условием адекватности* модели, так как только при этом условии температура газа, проходящего сквозь ВРВП, убывает, а температура воздуха возрастает.

Пусть $\mu = \sqrt[2m]{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2m}}$. В силу условия адекватности $0 < \mu < 1$. Тогда собственные числа матрицы A будут равны $\lambda_k = \mu e^{\pi k i/m}$, $k = 0, 1, \dots, 2m-1$. Поскольку они лежат внутри единичного круга, то все решения системы (1.1), (1.2) асимптотически устойчивы [8]. Имеет место также

Теорема 1. a) *если последовательность $r(n)$ ограничена (стремится к пределу r_* при $n \to \infty$), то все решения также ограничены (соответственно, стремятся к пределу $(E - A)^{-1} r_*$);*

b) *если последовательность $r(n)$ периодическая, т. е. $r(n + T) \equiv r(n)$ для некоторого целого T, $T \geq 2$, то существует единственное периодическое решение (период которого совпадает с T);*

c) *если средние по Чезаро $R_n = \dfrac{1}{n}[r(0) + r(1) + \cdots + r(n-1)]$ имеют предел R_*, то для каждого решения $z(n)$ средние по Чезаро $Z_n = \dfrac{1}{n}[z(1) + z(2) + \cdots + z(n)]$ также имеют предел (равный $(E - A)^{-1} R_*$).*

Доказательство. Эти свойства легко выводятся из формулы Коши [9]

$$z(n) = A^n z(0) + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k} r(k), \tag{2.4}$$

которую в рассматриваемом случае можно переписать в более удобной для вычислений форме. Как легко заметить, $A^{2m} = \mu^{2m} E$, где E — единичная матрица. Поэтому сумму в (2.4) с растущим числом матричных слагаемых можно заменить на разложение по конечной и фиксированной системе $E, A, A^2, \dots, A^{2m-1}$. Пусть $n = 2m\sigma + \rho, m$ — целое положительное, $\rho \in \{0, 1, 2, \dots, 2m-1\}$ (результат деления n на $2m$ с остатком). Тогда

$$z(n) = Ef_0(n) + Af_1(n) + \cdots + A^{2m-1} f_{2m-1}(n), \tag{2.5}$$

где

$$f_k(n) = \sum_{j=0}^{\sigma} \mu^{j\sigma} r[2m - (j\sigma + k)] \quad \text{при} \quad k = 0,\ 2, \dots, \rho,$$

$$f_k(n) = \sum_{j=0}^{\sigma-1} \mu^{j\sigma} r[2m - (j\sigma + k)] \quad \text{при} \quad k = \rho + 1,\ \rho + 2, \dots, 2m - 1.$$

Тогда, принимая во внимание $A^n = \mu^{2m\sigma} A^\rho$, получим требуемое выражение (2.5). Отсюда с учетом условия $0 < \mu < 1$ следует справедливость утверждений теоремы.

Помимо теоремы 1 с опорой на (2.5) можно доказать и другие предельные свойства решений системы (1.1), (1.2) (в работе [10] несколько таких свойств установлено для $m = 1$, соответствующие доказательства с небольшими изменениями обобщаются на случай произвольного m).

3. Синтез системы

Как было отмечено выше, значения параметров $\bar{\alpha}_k,\ \bar{\beta}_k,\ \bar{\gamma}_k$ $(k = 1,\ 2,\ \dots,\ 2m)$ зависят от многочисленных и разнообразных по природе факторов. Более того, трудно даже указать, на основе каких физических законов их можно определить. В связи с этим естественно рассмотреть обратную задачу — нахождение значений $\bar{\alpha}_k,\ \bar{\beta}_k,\ \bar{\gamma}_k$ $(k = 1,\ 2,\ \dots,\ 2m)$, исходя из значений $z_n,\ u_n$ (т. е. температур насадок и теплоносителей), определяемых посредством измерений. Эту задачу естественно назвать *синтезом системы* (1.1), (1.2). В первую очередь заметим, что следует разделить ее на две ступени. Задача синтеза первой ступени состоит в определении параметров $\bar{\alpha}_k$ на основе z_n для конечного числа значений n. Задача второй ступени — определение всех параметров $\bar{\alpha}_k,\ \bar{\beta}_k,\ \bar{\gamma}_k$ $(k = 1,\ 2,\ \dots,\ 2m)$ с учетом значений лишь переменных u_n, измерение которых легче осуществить на практике.

Задача синтеза второй ступени — более важная для приложений, но является нелинейной (см. (1.2)). Здесь она не затрагивается. В отличие от нее задача первой ступени линейная и поддается решению.

В дальнейшем будем считать $r_n = r = \mathrm{const}$. Такое предположение, равносильное неизменности температур входящих в ВРВП воздуха и газа, выполняется, как правило, на интервалах времени по крайней мере до нескольких часов. Замена $y_n = z_n - z_0$ приведет (2.3) к системе

$$y_{n+1} = Ay_n + t, \quad y_0 = 0, \tag{3.6}$$

где $t = r - (E - A)z_0$.

Введем в рассмотрение $(2m \times 2m)$-матрицы

$$Y = [y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_{2m}], \quad B = [t - y_2,\ t - y_3,\ \dots,\ t - y_{2m+1}].$$

Тогда цепочка равенств $y_1 = t,\ \ y_2 = Ay_1 + t,\ \dots,\ y_{2m} = Ay_{2m-1} + t$ запишется в виде

$$AY = B. \tag{3.7}$$

Теорема 2. *Пусть вектор $t = (t_1,\ t_2,\ \dots,\ t_{2m})$ выбран так, что $t_k = 1$ для $k = 1$ и $k = m+1$ и $t_k = 0$ для остальных значений k. Тогда если $\Delta = \alpha_m \dots \alpha_2\alpha_1 - \alpha_{2m} \dots \alpha_{m+2}\alpha_{m+1} \neq 0$, то матрица Y обратима.*

Доказательство. Поскольку $y_1 = t,\ y_2 = t + At,\ y_3 = t + At + A^2t, \dots,\ y_{2m} = t + At + A^2t + \dots + A^{2m-1}t$, то, вычитая из k-го столбца $(k = 2m,\ 2m-1, \dots, 3,\ 2)$ предыдущий столбец, получим $\det Y = \det[t,\ At,\ A^2t, \dots, A^{2m-1}t]$.

Пусть $[k,l]$ — так называемая матричная единица [11], у которой элемент в позиции (k,l) равен 1, а все остальные элементы равны 0. Если в традиционном обозначении $A = (x_{ij})$, то $A = \sum_{i,j} x_{ij}[i,j]$. В рассматриваемом случае $A = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j[j+1,\ j]$ (в соответствии с принятым соглашением $\alpha_0 = \alpha_{2m}$, $[1,\ 0] = [1,\ 2m]$).

Матричные единицы перемножаются по правилам [11]

$$[i,\ j] \cdot [k,\ l] = [i,\ l], \ \text{если} j = k;$$

$$[i,j] \cdot [k,l] = O \,(\text{нулевая матрица}) \ \text{при}\, j \neq k.$$

Пользуясь этими правилами, легко вычислить

$$A^k = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j\alpha_{j-1} \dots \alpha_{j-k+1}[j+1, j-k+1].$$

Например,

$$A^2 = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j[j+1,j] \sum_{l=0}^{2m-1} \alpha_l[l+1,l].$$

Произведение $[j+1, j] \cdot [l+1, l]$ равно $[j+1, j-1]$ при $j = l-1$ и O для остальных значений l, поэтому

$$A^2 = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j \alpha_{j-1} [j+1, j-1].$$

Аналогично

$$A^k = \sum_{j=0}^{2m-1} \alpha_j \alpha_{j-1} \ldots \alpha_{j-k+1} [j+1, j-k+1].$$

При умножении A^k на вектор t отличными от 0 будут только те компоненты вектора $A^k t$, в которых участвуют элементы A^k из 1-го и $(m+1)$-го столбцов, чему соответствуют $j-k+1 = 1$ и $i-k+1 = m+1$. Таким образом, у вектора $A^k t$ отличны от 0 только компоненты с номерами $j = k,\ j = m+k$, которые равны соответственно $\alpha_k \alpha_{k-1} \ldots \alpha_1$ и $\alpha_{k+m} \alpha_{k+m-1} \ldots \alpha_{m+1}$.

В частности, при $k = m$ получаем вектор, у которого отличны от нуля только 1-я и $(m+1)$-я компоненты, равные соответственно

$$\alpha_{2m} \alpha_{2m+1} \ldots \alpha_{m+2} \alpha_{m+1} \quad \text{и} \quad \alpha_m \alpha_{m-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1. \tag{3.8}$$

Эти рассуждения удобно изобразить в виде следующей таблицы.

	0	1	2	$\ldots$	$m-1$	m	$m+1$	$\ldots$	$2m-2$	$2m-1$
1	1	0	0	$\ldots$	0	$\alpha_{2m} \ldots \alpha_{m+1}$	0	$\ldots$	0	0
2	0	α_1	0	$\ldots$	0	0	$\alpha_1 \ldots \alpha_{m+1}$	$\ldots$	0	0
3	0	0	$\alpha_2 \alpha_1$	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0	0
$\ldots$				$\ldots$					$\ldots$	
$m-2$	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0	0
$m-1$	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	0	$\alpha_{m-2} \ldots \alpha_{m+1}$	0
m	0	0	0	$\ldots$	$\alpha_{m-1} \ldots \alpha_1$	0	0	$\ldots$	0	$\alpha_{m-1} \ldots \alpha_{m+1}$
$m+1$	1	0	0	$\ldots$	0	$\alpha_m \ldots \alpha_1$	0	$\ldots$	0	0
$m+2$	0	α_{m+1}	0	$\ldots$	0	0	$\alpha_{m+1} \ldots \alpha_1$	$\ldots$	0	0
$m+3$	0	0	$\alpha_{m+2} \alpha_{m+1}$	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0	0
$\ldots$		$\ldots$					$\ldots$			
$2m-2$	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0	0
$2m-1$	0	0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	$\alpha_{2m-2} \ldots \alpha_1$	0
$2m$	0	0	0	$\ldots$	$\alpha_{2m-1} \ldots \alpha_{m+1}$	0	0	$\ldots$	0	$\alpha_{2m-1} \ldots \alpha_1$

(Первый столбец состоит из номеров координат векторов $A^k t$, сами эти векторы записаны в последующих столбцах; в первой строке указаны значения k; для краткости в произведениях прописаны лишь первые и последние множители; всюду индексы убывают (с учетом редукции по модулю $2m$ со сдвигом), например, первая и $(m+1)$-я координаты вектора $A^m t$ равны (3.8) соответственно.)

Далее, эту таблицу будем интерпретировать как определитель $\det Y$. Если из $(m+1)$-й строки вычесть почленно первую, то у полученного определителя можно вычеркнуть 1-й столбец и 1-ю строку. У оставшегося определителя $(2m-1)$-го порядка m-й столбец будет иметь вид $(0,\,0, \ldots, 0,\,\Delta,\,0,\,\ldots,\,0)^T$, у которого все координаты равны 0 за исключением, возможно, m-й координаты $\Delta = \alpha_m \alpha_{m-1} \ldots \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_{2m} \alpha_{2m-1} \ldots \alpha_{m+2} \alpha_{m+1}$. Следовательно, $\det Y$ редуцируется к определителю $\det Y'$, где Y' — квадратная матрица $(2m-2)$-порядка.

После вынесения из первых $m-1$ строк определителя $detY$ общего множителя α_1, из оставшихся строк — общего множителя α_{m+1}, Δ получится определитель вида

1	0	$\ldots$	0	0	$\alpha_{2m} \ldots \alpha_{m+2}$	$\ldots$	0	0
0	α_2	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0	0
0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	$\alpha_{m-2} \ldots \alpha_{m+2}$	0
0	0	$\ldots$	$\alpha_{m-1} \ldots \alpha_2$	0	0	$\ldots$	0	$\alpha_{m-1} \ldots \alpha_{m+2}$
0	0	$\ldots$	0	$\alpha_m \ldots \alpha_2$	0	$\ldots$	0	0
1	0	$\ldots$	0	0	$\alpha_{m+1} \ldots \alpha_2$	$\ldots$	0	0
0	α_{m+2}	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	0	0
0	0	$\ldots$	0	0	0	$\ldots$	$\alpha_{2m-2} \ldots \alpha_2$	0
0	0	$\ldots$	$\alpha_{2m-1} \ldots \alpha_{m+2}$	0	0	$\ldots$	0	$\alpha_{2m-1} \ldots \alpha_2$

Положим $\alpha_1 \alpha_m = \beta_m$, $\alpha_{m+1} \alpha_{2m} = \beta_{2m}$. Если теперь первоначальный определитель $\det Y$ переобозначить как $Y_{2m}(\,\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{2m})$, то приходим к рекуррентной формуле

$$Y_{2m}(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_{2m}) = \alpha_1^{m-1} \alpha_{m+1}^{m-1} \Delta Y_{2m-2}(\alpha_2,\,\ldots,\,\alpha_{m-1}, \beta_m, \alpha_{m+1} \ldots, \alpha_{2m-1},\,\beta_{2m}).$$

Отметим, что величина Δ совпадает с прежней:

$$\beta_m\alpha_{m-1}\ldots\alpha_2-\beta_{2m}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{m+2}=\alpha_m\alpha_{m-1}\ldots\alpha_2\alpha_1-\alpha_{2m}\alpha_{2m-1}\ldots\alpha_{m+2}\alpha_{m+1}.$$

Отсюда следует $\det Y=\alpha_1^{m-1}\alpha_{m+1}^{m-1}\alpha_2^{m-2}\alpha_{m+2}^{m-2}\cdots\alpha_{m-1}\alpha_{2m-1}\Delta^m$. Чтобы t имел нужный вид, т. е. $(1,0,\ldots,0,1,0,\ldots 0)$, следует выбрать r и z_0 так, чтобы вектор $r-(E-A)z_0$ совпадал с t, что нетрудно осуществить. Теорема доказана.

Следствие. *Если* $\Delta\neq 0$, *то матрица* Y *обратима и* $A=BY^{-1}$.

В заключение отметим, что параметры $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ связаны с теплообменном между насадками и воздухом, в то время как $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\ldots,\alpha_{2m}$ — между насадками и газом, и поэтому они заметно отличаются. А именно если считать, что все параметры из первой группы равны α_*, а параметры из второй группы равны α^*, то на практике $\eta=|\alpha^*-\alpha_*|>0$. Тем самым можно считать, что условие $\Delta=\alpha_*^m-\alpha^{*\,m}\neq 0$ выполняется для реальных ВРВП.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кирсанов Ю.А.** Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухоподогревателях. М.: Физматлит, 2007. 240 с.
2. Регенеративные вращающиеся воздухоподогреватели / В. К. Мигай, В. С. Назаренко, И. Ф. Новожилов, Т. С. Добряков. Л.: Энергия, 1971. 168 с.
3. **Kovalevskii V.P.** Simulation of heat and aerodynamic processes in regenerators of continuous and periodic operation. I. Nonlinear mathematical model and numerical algorithm // J. Eng. Phys. Thermophys. 2004. Vol. 77, no. 6. P. 1096–1109. doi: 10.1007/s10891-005-0004-y .
4. **Chi-Liang Lee.** Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system // J. Chinese Inst. Eng. 2009. Vol. 32, no. 5. P. 703–710. doi: 10.1080/02533839.2009.9671552 .
5. Analysis on thermal stress deformation of rotary air-preheater in a thermal power plant / H. Wang, L. Zhao, Z. Xu et al. // Korean J. Chem. Eng. 2009. Vol. 26. P. 833–839. doi: 10.1007/s11814-009-0139-1 .
6. The study on heat transfer model of tri-sectional rotary air preheater based on the semi-analytical method / H. Wang, L. Zhao, Z. Xu et al. // Appl. Therm. Eng. 2008. Vol. 28, no. (14-15). P. 1882–1888. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2007.11.023 .
7. **Hazewinkel M.** Monomial representation // Encyclopedia Math. New York: Springer, 2001. ISBN: 978-1-55608-010-4.
8. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 432 с.
9. **Романко В.К.** Курс разностных уравнений. М.: Физматлит, 2012. 200 с.
10. **Azamov A.A., Bekimov M.A.** Simplified model of the heat exchange process in rotary regenerative air pre-heater // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 27–36. doi: 10.15826/umj.2016.2.003 .
11. **Ван-дер-Варден Б.Л.** Алгебра. М.: Мир, 1976. 648 с.

Азамов Абдулла Азамович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека
e-mail: abdulla.azamov@gmail.com

Поступила 21.11.2016

Бекимов Мансур Адамбаевич
старший науч. сотрудник-соискатель
Институт математики при Национальном университете Узбекистана им. М. Улугбека
e-mail: mansu@mail.ru

REFERENCES

1. Kirsanov Yu.A. *Tsiklicheskie teplovye protsessy i teoriya teploprovodnosti v regenerativnykh vozdukhopodogrevatelyakh* [Cyclic thermal processes and the theory of heat conduction in regenerative air heaters]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2007, 240 p.
2. Migai V.K., Nazarenko B.S., Novozhilov I.F., Dobryakov T.S. *Regenerativnye vrashchayushchiesya vozdukhopodogrevateli* [Regenerative rotating air preheaters]. Leningrad: Energiya Publ., 1971. 168 p.

3. Kovalevskii V.P. Simulation of heat and aerodynamic processes in regenerators of continuous and periodic operation. I. Nonlinear mathematical model and numerical algorithm. *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2004, vol. 77, no. 6, pp. 1096–1109. doi: 10.1007/s10891-005-0004-y .
4. Chi-Liang Lee. Regenerative air preheaters with four channels in a power plant system. *J. Chinese Inst. Eng.*, 2009, vol. 32, no. 5, pp. 703–710. doi: 10.1080/02533839.2009.9671552 .
5. Wang H., Zhao L., Xu Z. et al. Analysis on thermal stress deformation of rotary air-preheater in a thermal power plant. *Korean J. Chem. Eng.*, 2009, vol. 26, pp. 833–839. doi: 10.1007/s11814-009-0139-1 .
6. Wang H., Zhao L., Xu Z. et al. The study on heat transfer model of tri-sectional rotary air preheater based on the semi-analytical method. *Appl. Therm. Eng.*, 2008, vol. 28, no. (14-15), pp. 1882–1888. doi: 10.1016/j.applthermaleng.2007.11.023 .
7. Hazewinkel M. Monomial representation. *Encyclopedia Math.*, ed. M. Hazewinkel, New York: Springer, 2001. ISBN: 978-1-55608-010-4.
8. Gelfond A.O. *Calculus of finite differences.* Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1971, 451 p.
9. Romanko V.K. *Kurs raznostnykh uravnenii* [The course of difference equations]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2012, 200 p.
10. Azamov A.A., Bekimov M.A. Simplified model of the heat exchange process in rotary regenerative air pre-heater. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2, pp. 27–36. doi: 10.15826/umj.2016.2.003 .
11. Van der Waerden B.L. *Algebra I und Algebra zweiter Teil.* Algebra I 8. Aufl., zweiter Teil 5 Aufl. Berlin Heidelberg: Springer Verlag, 1967.

A. A. Azamov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, 700174 Tashkent, Uzbekistan, e-mail: abdulla.azamov@gmail.com .

M. A. Bekimov, PhD Researcher, National University of Uzbekistan named after M. Ulugbek, 700174 Tashkent, Uzbekistan, e-mail: mansu@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 531.36; 62-50

УПРАВЛЕНИЕ ПЛАТФОРМОЙ С ОСЦИЛЛЯТОРАМИ В ПРИСУТСТВИИ СУХОГО ТРЕНИЯ[1]

И. М. Ананьевский, Т. А. Ишханян

Исследуется локальная задача управления системой, состоящей из несущего твердого тела и нескольких прикрепленных к нему линейных диссипативных осцилляторов. Несущее тело перемещается по горизонтальной прямой с помощью горизонтальной управляющей силы. Рассматриваемая система представляет собой простое приближение к модели, описывающей управляемые перемещения сосуда с вязкой жидкостью. Состояние жидкости в сосуде в каждый момент времени неизвестно, поэтому физические параметры осцилляторов и их фазовые состояния также считаются неизвестными. Предполагается, что между несущим телом и прямой действует сила сухого трения, параметры которого неизвестны и непостоянны. Требуется остановить несущее тело в заданном терминальном положении и удерживать его там, при этом на поведение осцилляторов после остановки тела условий не накладывается. Предложен закон ограниченного по модулю управления в форме обратной связи, который приводит несущее тело из окрестности терминального положения в это положение за конечное время. Управление задается гладкой (аналитической) всюду, кроме терминального состояния, функцией, которая может трактоваться как линейная обратная связь с коэффициентами, зависящими от фазовых переменных. Эти коэффициенты бесконечно возрастают при приближении несущего тела к терминальному состоянию, однако управление остается ограниченным. Эффективность управления продемонстрирована с помощью численного моделирования.

Ключевые слова: линейная управляемая система, система осцилляторов, обратная связь, сухое трение.

I. M. Anan'evskii, T. A. Ishkhanyan. Control of a platform with oscillators under the action of dry friction.

We study a local control problem for a system consisting of a solid carrier and several linear dissipative oscillators attached to it. The carrier moves along a horizontal straight line under a horizontal steering force. The system is a simple approximation of a model describing controlled motions of a vessel with a viscous fluid. Since the state of the fluid in the vessel is unknown at any specific time, the physical parameters of the oscillators and their phase states are also considered unknown. It is assumed that a dry fiction force acts between the carrier and the straight line, and the parameters of the dry friction are unknown and varying. It is required to bring the carrier to a stop at a given terminal position and to keep it at that position; no constraints are imposed on the behavior of the oscillators after the carrier stops. We propose a feedback control law with bounded absolute value that brings the carrier from a neighborhood of the terminal position to this position in a finite time. The control is given by a function that is smooth (analytic) everywhere except for the terminal position. This function can be interpreted as a linear feedback with coefficients depending on the state variables. Although the coefficients grow unboundedly as the carrier approaches the terminal position, the control remains bounded. The efficiency of the control is illustrated by means of numerical modelling.

Keywords: linear control system, system of oscillators, feedback, dry friction.

MSC: 93C41, 93C05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-20-26

Введение

Рассматривается задача управления системой, представляющей собой упрощенную модель прецизионной поворотной платформы, которая устанавливаеся на орбитальном космическом аппарате и предназначена для снижения кажущегося ускорения закрепленного на платформе контейнера с полезной нагрузкой.

В земных условиях из-за наличия гравитационного поля невозможно проведение некоторых технологических процессов, однако и на орбитальных космических аппаратах (КА) тела, механически связанные с КА, подвергаются микроускорениям относительно “квазиинерциальной” системы отсчета. Такие микроускорения вредны для гравитационно-чувствительных

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 16-11-10343).

технологических процессов, причем наибольшее отрицательное воздействие оказывает проекция микроускорения на плоскость, перпендикулярную характерному направлению процесса. Для снижения влияния микроускорения используется управляемая поворотная платформа, с помощью которой можно изменять ориентацию контейнера с гравитационно-чувствительной средой и тем самым минимизировать в каждый момент времени боковую составляющую микроускорения контейнера [1]. Платформа представляет собой двухстепенной карданов подвес, оси вращения рамок которого пересекаются под прямым углом. В подшипниках осей вращения рамок подвеса платформы присутствует сухое трение, которое оказывает существенное влияние на управление и точность ориентации, причем параметры трения заранее не известны и могут изменяться в процессе движения.

Поскольку вращения рамок осуществляются независимо, то задачи управления вращением контейнера относительно каждой из осей можно изучать раздельно.

В [2; 3] такая задача исследована для случая, когда контейнер представляет собой твердое тело. Применяемая же на практике среда в контейнере может рассматриваться как вязкая жидкость. В качестве простого приближения к такой модели будем считать контейнер твердым телом, несущим на себе несколько прикрепленных к нему гармонических диссипативных осцилляторов. Состояние среды в контейнере в каждый момент времени неизвестно, поэтому физические параметры осцилляторов и их фазовые состояния также считаются неизвестными. Требуется привести контейнер (несущее тело) за конечное время в заданное состояние покоя и удерживать его там.

1. Постановка задачи

Переформулируем задачу следующим образом. По шероховатой горизонтальной прямой под действием управляющей силы движется твердое тело с прикрепленными к нему с помощью пружин n горизонтально колеблющимися материальными точками (осцилляторами). Взаимодействия между телом и осцилляторами описываются упругими силами с вязким трением. Между несущим телом и опорной прямой действует сила сухого трения с неизвестными и непостоянными параметрами.

Уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned} m_0\ddot{x} &= u + \mu(t, x, \dot{x}) + \sum_{i=1}^{n}(c_i y_i + \gamma_i \dot{y}_i), \\ m_i(\ddot{x} + \ddot{y}_i) &= -c_i y_i - \gamma_i \dot{y}_i. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь переменная x описывает текущее положение несущего тела на прямой; u — приложенная к нему горизонтально направленная управляющая сила; m_0 — масса несущего тела, $\mu(t, x, \dot{x})$ — сухое трение, действующее между телом и опорной прямой и удовлетворяющее неравенству

$$|\mu(t, x, \dot{x})| \leq M;$$

y_i — смещение материальной точки массой m_i i-го осциллятора; $c_i > 0$ — жесткость пружины, $\gamma_i > 0$ — коэффициент вязкого трения i-го осциллятора, $i = 1, 2, \ldots, n$. Массы точек, коэффициенты жесткости пружин и коэффициенты вязкого трения, а также функция $\mu(t, x, \dot{x})$ считаются неизвестными, фазовые координаты и скорости осцилляторов не доступны измерениям. Требуется построить управление в форме обратной связи (т. е. как функцию переменных $x, \dot{x}$), которое удовлетворяет ограничению

$$|u(x, \dot{x})| \leq U, \quad U > 0,$$

и которое остановит несущее тело в начале координат за конечное время и удержит его там. Состояния осцилляторов в момент прихода несущего тела в терминальное положение не важны, удержание тела в начале координат приведет к постепенному затуханию колебаний осцилляторов в силу наличия диссипации.

Имея в виду физическую модель, которая лежит в основе математической постановки задачи, примем ряд дополнительных условий, оправданных с практической точки зрения. Именно будем считать, что ресурсы управления настолько превосходят величину силы сухого трения, что выполнено неравенство

$$(3-\sqrt{3})U/6 > M. \tag{1.2}$$

Предположим также, что начальная энергия осцилляторов достаточно мала и что несущее тело в начальный момент находится достаточно близко от терминального положения. Последнее означает, что ориентация контейнера нуждается лишь в небольшой коррекции с целью слежения за вектором кажущегося ускорения.

Обозначим через f силу, действующую со стороны осцилляторов на несущее тело:

$$f(y,\dot y) = \sum_{i=1}^{n}(c_i y_i + \gamma_i \dot y_i), \quad y = (y_1,\dots,y_n).$$

Положим

$$u_0(x,\dot x) = m_0^{-1}u(x,\dot x), \quad v_0(t,x,\dot x,y,\dot y) = m_0^{-1}\left(\mu(t,x,\dot x) + f(y,\dot y)\right)$$

и перепишем первое уравнение (1.1) в виде

$$\ddot x = u_0 + v_0. \tag{1.3}$$

Будем рассматривать u_0 как новое управление,

$$|u_0(x,\dot x)| \le \bar U, \quad \bar U = U/m_0, \tag{1.4}$$

а v_0 — как неизвестное, ограниченное в силу сделанных выше предположений возмущение,

$$|v_0(t,x,\dot x,y,\dot y)| \le \bar V, \tag{1.5}$$

которое задается произвольной скалярной функцией, удовлетворяющей условию существования решений дифференциального уравнения (1.3). Допустимые значения величины $\bar V$ будут указаны ниже.

Сформулированная задача примет вид дифференциальной игры, в которой один игрок с помощью управления u_0 стремится привести несущее тело в начало координат фазовой плоскости $x, \dot x$, а другой с помощью функции v_0 этому препятствует. Условие разрешимости этой игры $\bar U > \bar V$ известно, а ее решение может быть найдено, например, методами теории оптимального управления. В силу произвольности возмущений такое решение будет содержать участки со скользящими режимами, которых желательно избегать на практике. Ниже используется другой подход, предложенный в [4; 5] и позволяющий строить закон управления, задаваемый гладкой (даже аналитической) всюду, кроме терминального состояния, функцией. Ранее [3] этот подход был применен для случая, когда контейнер вместе с полезной нагрузкой описывался как твердое тело. Покажем, что он эффективен и для рассматриваемой упругой модели.

2. Управление и его свойства

Положим

$$\begin{aligned} &u_0(x,\dot x) = -\frac{6x}{T^2(x,\dot x)} - \frac{3\dot x}{T(x,\dot x)}, \quad x^2+\dot x^2 \ne 0,\\ &u_0(0,0) = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь функция $T(x, \dot{x})$ задается неявно уравнением

$$dT^4 - \dot{x}^2T^2 - 4x\dot{x}T - 6x^2 = 0, \quad d > 0. \tag{2.2}$$

В [4] установлено, что уравнение (2.2) относительно T имеет единственное положительное решение при $x^2 + \dot{x}^2 \neq 0$. Функция $T(x, \dot{x})$ является аналитической во всем фазовом пространстве, кроме нуля, так как соотношение (2.2) представляет собой полиномиальное уравнение относительно T с коэффициентами, зависящими от фазовых переменных $x, \dot{x}$. Кроме того, функция T может быть доопределена в нуле по непрерывности: $T(0, 0) = 0$.

Функция T выполняет роль функции Ляпунова для системы (1.3). Закон управления (2.1) имеет форму обратной связи с бесконечно возрастающими коэффициентами при фазовых переменных $x, \dot{x}$ и стремлении этих переменных к нулю. Тем не менее управление (2.1) ограничено во всем фазовом пространстве. Выбором параметра d в уравнении (2.2) обеспечивается выполнение условия (1.4).

Рассуждая, как и в [3], можно показать справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть*

$$d = \bar{U}^2/9 \tag{2.3}$$

и выполнено соотношение

$$\bar{V} < (3 - \sqrt{3})\bar{U}/6. \tag{2.4}$$

Тогда функция (2.1) *подчиняется ограничению* (1.4) *и найдется такое* σ, $0 < \sigma \leq 1$, *что производная функции* T *в силу системы* (1.3), *управляемой по закону* (2.1), *удовлетворяет неравенству*

$$\dot{T} < -\sigma. \tag{2.5}$$

Из утверждения теоремы вытекает, что функция $T(x, \dot{x})$ обращается в нуль через конечный промежуток времени, т. е. любая траектория системы (1.3) достигает начала координат за конечное время. Это означает, что несущее тело остановится в заданном положении и будет удерживаться там с помощью управления (2.1).

Заметим, что чем меньше уровень возмущений $\bar{V}$, тем больше может быть выбрана константа σ. В частности, как установлено в [3], если возмущения отсутствуют, т. е. $v_0 \equiv 0$, то справедливо равенство $\dot{T} = -1$. В этом случае в каждой точке фазового пространства значение функции $T(x, \dot{x})$ равно времени движения несущего тела из начального состояния $x, \dot{x}$ до начала координат под действием управления (2.1).

Соотношение (2.4) представляет собой достаточное условие применимости алгоритма и показывает, насколько ресурсы управления должны превосходить максимально допустимый уровень возмущений, чтобы предложенный закон управления останавливал несущее тело в начале координат за конечное время.

Если осцилляторы отсутствуют, то в качестве возмущения выступает лишь сила сухого трения μ и соотношение (2.4) может быть записано в виде

$$(3 - \sqrt{3})\bar{U}/6 > \bar{M}, \quad \bar{M} = M/m_0.$$

В этом случае теорема 1 применима во всем фазовом пространстве $x, \dot{x}$, т. е. управление (2.1) является решением задачи при любых начальных состояниях несущего тела.

При наличии осцилляторов сила f, действующая с их стороны на несущее тело, в процессе движения может оказаться столь большой, что величина $\bar{V}$, которая ограничивает модуль суммарного возмущения v_0, не будет удовлетворять условию (2.4). Покажем, что при начальных состояниях системы (1.1), близких к началу координат, и достаточно малой величине $\bar{M}$ условие (2.4) будет выполняться вдоль траектории движения.

Из определения функции T и соотношения $dT^4 = (T\dot{x} + 2x)^2 + 2x^2$, полученного путем преобразования (2.2), вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Функция $T(x, \dot{x})$ допускает бесконечно большой низший предел, т. е.*

$$\lim_{x^2+\dot{x}^2\to\infty} T(x, \dot{x}) = \infty.$$

Положим

$$E(\dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(c_i y_i^2 + m_i(\dot{x} + \dot{y}_i)^2\right)$$

и введем в рассмотрение функцию Ляпунова $W(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = T(x, \dot{x}) + E(\dot{x}, y, \dot{y})$. Эта функция положительно определена, а ее производная в силу системы (1.1) вычисляется как

$$\dot{W} = \dot{T} - \sum_{i=1}^{n}\gamma_i \dot{y}_i^2 - Q(\dot{x}, y, \dot{y}), \quad Q(\dot{x}, y, \dot{y}) = \sum_{i=1}^{n}(c_i y_i + \gamma_i \dot{y}_i)\,\dot{x}. \tag{2.6}$$

Выберем число $\bar{V}$ из условия

$$(3 - \sqrt{3})\bar{U}/6 > \bar{V} > \bar{M}. \tag{2.7}$$

Такое число $\bar{V}$ существует в силу неравенства (1.2). Положим

$$\bar{F} = \bar{V} - \bar{M}. \tag{2.8}$$

Пусть σ – константа из утверждения теоремы 1, отвечающая выбранному $\bar{V}$. Из теоремы 2 и положительной определенности квадратичной формы $E(\dot{x}, y, \dot{y})$ вытекает, что существует такое $W_0 > 0$, что в области $G = \left\{(x, \dot{x}, y, \dot{y}) \in \mathbb{R}^{2n+2} \colon W(x, \dot{x}, y, \dot{y}) < W_0\right\}$ справедливы оценки

$$|m_0^{-1} f(y, \dot{y})| \le \bar{F}, \quad |Q(\dot{x}, y, \dot{y})| < \sigma/2. \tag{2.9}$$

Первая из этих оценок вместе с (2.7) и (2.8) гарантируют выполнение в области G условий (1.5), (2.4) и, следовательно, неравенства (2.5). Из неравенства (2.5), выражения (2.6) и второй оценки (2.9) получаем, что до прихода траектории несущего тела в начало координат фазового пространства $x, \dot{x}$, т. е. пока выполнено (2.5), имеет место неравенство $\dot{W} < 0$. Следовательно, траектории, начинающиеся в области G, не покидают ее и приведенное выше рассуждение корректно.

Следующая теорема служит итогом наших рассуждений.

Теорема 3. *Существует такое $W_0 > 0$, что все траектории системы* (1.3)*, управляемой по закону* (2.1)*, начинающиеся в области G, не покидают эту область, а траектории движения несущего тела приходят в начало координат фазового пространства $x, \dot{x}$ за конечное время.*

3. Результаты компьютерного моделирования

Для проверки эффективности алгоритма управления было осуществлено численное моделирование динамики системы с тремя осцилляторами. Расчеты проведены при следующих значениях безразмерных параметров:

$$m_0 = 5; \quad m_i = 1, \quad \gamma_i = 2, \quad i = 1, 2, 3; \quad c_1 = 2, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0.5.$$

Были выбраны следующие начальные состояния:

$$x^0 = 0.1, \quad \dot{x}^0 = 0.2; \quad y_1^0 = 0.1, \quad \dot{y}_1^0 = -0.2, \quad y_2^0 = 0, \quad \dot{y}_2^0 = 0.3, \quad y_3^0 = -0.2, \quad \dot{y}_3^0 = 0.$$

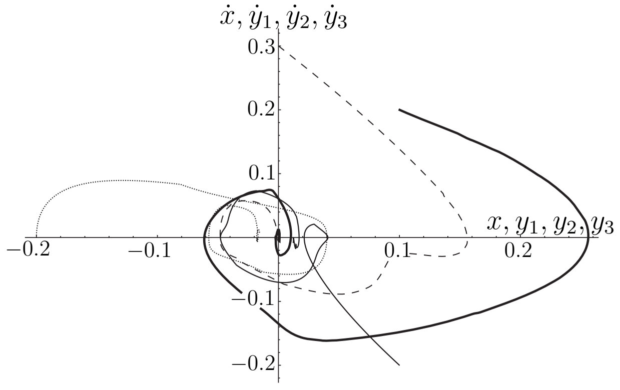


Рис. 1.

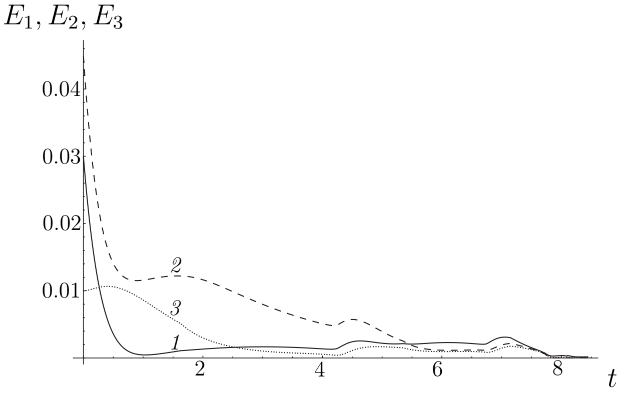


Рис. 2.

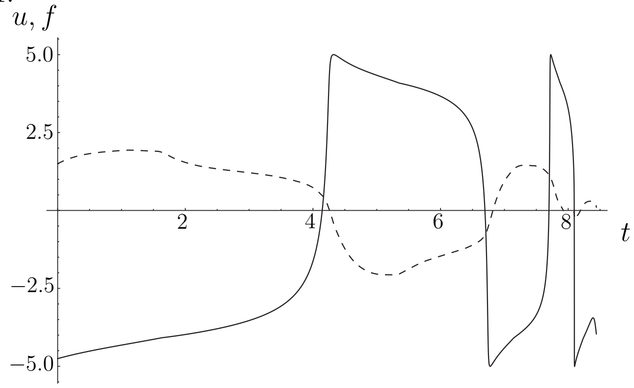


Рис. 3.

Предполагалось, что на систему действует сила сухого трения $\mu(\dot x) = -0.5\,\mathrm{sign}(\dot x)$.

Постоянная d в уравнении (2.2) выбрана равной 1/9. В этом случае согласно (2.3) максимально допустимая величина управляющей силы $u(x, \dot x)$ ограничена константой $U = 5$.

На рис. 1 представлены фазовые траектории несущего тела (толстая сплошная линия) и 1-го, 2-го и 3-го осцилляторов (тонкая сплошная, штриховая и пунктирная линии соответственно). Через промежуток времени, равный 8.4, несущее тело останавливается в начале координат.

На рис. 2 приведены графики зависимости от времени энергии каждого осциллятора (номера осцилляторов указаны на графиках):

$$E_i(\dot x, y, \dot y) = \frac{1}{2}\left(c_i y_i^2 + m_i(\dot x + \dot y_i)^2\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

На рис. 3 представлены графики управляющей функции $u(t)$ (сплошная линия) как функции времени, вычисленной вдоль траектории системы, и силы f, действующей со стороны осцилляторов на несущее тело в процессе движения (пунктирная линия).

Заметим, что закон управления (2.1) зависит только от фазовых переменных $x, \dot x$ и может быть формально применен при любом поведении осцилляторов. Из графиков, приведенных на рис. 3, видно, что сила f, действующая со стороны осцилляторов на несущее тело, достигает почти половины максимально допустимой величины управления U. Это означает, что для набора параметров системы, выбранного при моделировании, условие (2.4) нарушается. Тем не менее несущее тело приходит в заданное состояние за конечное время, что говорит об эффективности предложенного закона управления в более широком диапазоне параметров и начальных условий, чем те, что удовлетворяют условиям теорем 1 и 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Комплекс технических средств обеспечения контролируемых динамических условий при проведении исследований гравитационно-чувствительных систем / А.Е. Борисов, В.Л. Левтов, В.В. Романов, Н.В. Тарасенко // Космонавтика и ракетостроение. 2007. Т. 4, № 49. С. 168–173.
2. Квазиоптимальное управление поворотом твердого тела вокруг неподвижной оси с учетом трения / Л.Д. Акуленко, Н.Н. Болотник, А.Е. Борисов, А.А. Гавриков, Г.А. Емельянов // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2015. № 3. С. 3–21. doi: 10.7868/S0002338815030026 .
3. **Ананьевский И.М., Ишханян Т.А.** Управление поворотной платформой на подвижном основании в присутствии возмущений // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2016. № 2. С. 154–162. doi: 10.7868/S0002338816030045 .
4. **Ананьевский И.М., Анохин Н.В., Овсеевич А.И.** Синтез ограниченного управления линейными динамическими системами с помощью общей функции Ляпунова // Докл. АН. 2010. Т. 434, № 3. С. 319–323.
5. **Ovseevich A.** A local feedback control bringing a linear system to equilibrium // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 165, no. 2. P. 532–544. doi: 10.1007/s10957-014-0636-1 .

Поступила 31.10.2016

Ананьевский Игорь Михайлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лабораторией
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
e-mail: anan@ipmnet.ru

Ишханян Тигран Артурович
аспирант
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН
Московский физико-технический институт (ГУ)
Институт физических исследований НАН РА
e-mail: tishkhanyan@gmail.com

REFERENCES

1. Borisov A.E., Levtov V.L., Romanov V.V., Tarasenko N.V. A set of technical means to ensure the controlled dynamic conditions for investigation of the gravity-sensing system research. *Kosmonavtika i raketostroenie*, 2007, vol. 4, no. 49, pp. 168–173 (in Russian).
2. Akulenko L.D., Bolotnik N.N., Borisov A.E., Gavrikov A.A. Quasi-optimal control of rotation of a rigid body about a fixed axis taking friction into account. *J. Comput. Sys. Sci. Int.*, 2015, vol. 54, no. 3, pp. 331–348. doi:10.1134/S1064230715030028 .
3. Anan'evskii I.M., Ishkhanyan T.A. Control of a turntable on a mobile base in the presence of perturbations. *J. Comput. Sys. Sci. Int.*, 2016, vol. 55, no. 3, pp. 483–491. doi: 10.1134/S1064230716030047 .
4. Ananievskii I.M., Anokhin I.M., Ovseevich A.I. Bounded feedback controls for linear dynamic systems by using common Lyapunov function. *Dokl. Math.* 2010, vol. 82, no. 2, pp. 831–834. doi: 10.1134/S106456241005039X .
5. Ovseevich A. A local feedback control bringing a linear system to equilibrium. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 165, no. 2, pp. 532–544. doi:10.1007/s10957-014-0636-1 .

I. M. Anan'evskii, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia, e-mail: anan@ipmnet.ru

T. A. Ishkhanyan, doctoral student, Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, 119526 Russia; Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow Region, 141701, Russian; Institute for Physical Research, National Academy of Sciences of Armenia, Ashtarak-2, 0203, Republic of Armenia, e-mail: tishkhanyan@gmail.com

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ФАКТОРОВ РИСКА[1]

С. М. Асеев

Рассматривается задача оптимизации динамики управляемой системы в ситуации, когда в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задано некоторое множество M (“зона риска”) нахождение в котором возможно, но нежелательно с точки зрения безопасности системы или в силу неустойчивости ее функционирования. В классической теории оптимального управления наличие такого нежелательного множества M обычно моделируется при помощи задания дополнительного фазового ограничения, что означает запрет на нахождение траекторий системы в зоне риска M. В случае, когда динамика системы описывается автономным дифференциальным включением, а зона риска M — открытое множество, для соответствующей задачи оптимального управления при помощи метода аппроксимаций получены необходимые условия оптимальности первого порядка в форме гамильтонова включения Кларка. Основная новизна полученного результата состоит в том, что он доказан для наиболее важного случая, когда множество M открыто. В этом случае имеется естественная связь рассматриваемой задачи с классической задачей оптимального управления с фазовым ограничением. Полученные необходимые условия оптимальности включают нестандартное дополнительное условие стационарности гамильтониана.

Ключевые слова: зона риска, фазовые ограничения, оптимальное управление, дифференциальное включение, гамильтоново включение, принцип максимума Понтрягина.

S. M. Aseev. Optimization of dynamics of a control system in the presence of risk factors.

The paper is concerned with the problem of optimization of dynamics of a control system in the situation when there is a set M (“risk zone”) in the state space $\mathbb{R}^n$ which is unfavorable due to reasons of safety or instability of the system. In the classical setting the presence of such unfavorable set M is modeled usually via introducing an additional state constraint in the problem that means the ban on the presence of the trajectories in the risk zone M. Necessary optimality conditions in the form of Clarke's Hamiltonian inclusion are developed for the corresponding optimal control problem in the case when the system's dynamics is described by an autonomous differential inclusion and the risk zone M is an open set. The main novelty of the result is that it is proved in the most important case when the risk zone M is an open set. There is a natural relation of the problem under consideration to the classical optimal control problem with state constraints in this case. The result obtained involves an additional nonstandard stationarity condition for the Hamiltonian.

Keywords: risk zone, state constraints, optimal control, differential inclusion, Hamiltonian inclusion, Pontryagin maximum principle.

MSC: 49KXX

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-27-42

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Стандартная задача оптимального управления (Q) имеет следующий вид (см. [16]):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^T g(x(t),u(t))\,dt \to \min\,, \tag{1.1}$$

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t)), \quad u(t) \in U, \tag{1.2}$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1. \tag{1.3}$$

Здесь $x(t) = (x^1(t),\dots,x^n(t)) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) = (u^1(t),\dots,u^m(t)) \in \mathbb{R}^m$ — значения фазового вектора системы (1.2) и вектора управления в момент времени $t \geq 0$; U — непустой компакт из $\mathbb{R}^m$;

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

M_0, M_1 — непустые замкнутые множества из $\mathbb{R}^n$. Функции $f\colon \mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$ и $g\colon \mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^1$ предполагаются непрерывными вместе со своими частными производными $f_x\colon \mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^{n\times n}$ и $g_x\colon \mathbb{R}^n\times U\to\mathbb{R}^n$. Момент времени окончания процесса управления $T>0$ будем считать фиксированным, а в качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ будем рассматривать все измеримые (по Лебегу) вектор-функции $u\colon [0,T]\to U$. Если $u(\cdot)$ — допустимое управление, то соответствующая ему допустимая траектория — это абсолютно непрерывное решение $x(\cdot)$ дифференциального уравнения (1.2) на интервале $[0,T]$, удовлетворяющее краевым условиям (1.3). Допустимая пара $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ называется *оптимальной*, если функционал (1.1) принимает на ней свое минимальное возможное значение.

Как известно, основные необходимые условия оптимальности первого порядка классической теории оптимального управления (принцип максимума Понтрягина) получены при стандартных предположениях о непрерывной дифференцируемости функций $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ по фазовой переменной x (см. [16]). При этом общий вид негладких концевых ограничений (1.3) каких либо существенных трудностей не вызывает. Как показано в [13], задачи с общими негладкими концевыми ограничениями вида (1.3) сводятся к случаю задач без ограничений при помощи метода метрических аппроксимаций (см. также [14]).

В дальнейшем эти результаты были распространены на случай, когда непрерывные функции $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ удовлетворяют по фазовой переменной x более слабому условию Липшица. Заметим, что рассмотрение случая липшицевых по фазовой переменной x функций $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ было связано с большими трудностями, что дало толчок развитию методов негладкого анализа (см. [12]).

Однако в задачах экологии и экономики, а также при рассмотрении процессов управления техническими системами часто возникает ситуация, когда обе функции $f(\cdot,\cdot)$ и $g(\cdot,\cdot)$ (или одна из них) не обязательно липшицевы (или даже не обязательно непрерывны) по фазовой переменной x. В частности, задачи с разрывной по фазовой переменной x функцией $g(\cdot,\cdot)$, характеризующей качество процесса управления в каждый момент времени $t\ge 0$, естественно возникают в случае, когда нахождение управляемой системы в некотором заданном множестве M фазового пространства $\mathbb{R}^n$ физически возможно, но нежелательно, например, с точки зрения безопасности системы или в силу неустойчивости ее функционирования в этом множестве. В дальнейшем такое множество $M\subset\mathbb{R}^n$ будем называть *зоной риска*. Если управляемая система (1.2) описывает динамику экологической системы, то зона риска M может соответствовать множеству состояний системы с высокой вероятностью ее деградации. В случае, когда система (1.2) описывает динамику экономической системы, зона риска M может соответствовать состояниям с высокой вероятностью наступления кризиса или банкротства (примеры различных разрывных функций мгновенной полезности, возникающих в теории управления рисками, см. в [23]). В случае задачи управления технической системой зона риска M может соответствовать состояниям перегрузки системы.

В классической теории оптимального управления наличие заданного нежелательного множества состояний системы M обычно моделируется включением в постановку задачи дополнительного *фазового ограничения* вида (см. [16, гл. 6])

$$x(t)\in G=\mathbb{R}^n\setminus M,\quad t\in[0,T]. \tag{1.4}$$

Содержательно задание фазового ограничения (1.4) означает запрет на нахождение допустимой траектории $x(\cdot)$ в зоне риска M. При этом наибольший интерес представляет случай, когда задающее фазовое ограничение множество G (“зона безопасности”) является замкнутым (в этом случае зона риска M — открытое множество). Действительно, в случае открытого множества G каждая оптимальная траектория $x_*(\cdot)$ (если такая существует) является внутренней и поэтому автоматически удовлетворяет принципу максимума Понтрягина для задачи без фазового ограничения. С другой стороны, замкнутость множества, задающего фазовое ограничение, важна для доказательства различных теорем существования решения (см. [24]).

Задание фазовых ограничения вносит в динамику системы разрывы. Это приводит к качественно новым эффектам, которые необходимо учитывать в соответствующих необходимых условиях оптимальности. В частности, соотношения общего варианта принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями [10; 11] могут вырождаться, выполняясь на любой допустимой траектории. Исследованию задач с фазовыми ограничениями посвящена обширная библиография (см. например, обзор [26]). Эффект вырождения принципа максимума изучался в работах [1–4; 7–9; 21; 25] и ряде других.

Заметим также, что в исследованиях, связанных с анализом рисков (см., например, [23]), понятие риска обычно ассоциируется с некоторыми неопределенными исходами, ведущими к потерям различного рода. Каждому исходу (потерям) приписывается некоторая вероятность; используется понятие рисковых предпочтений. В случае задачи с фазовым ограничением зона риска M содержательно соответствует состояниям системы с высокой вероятностью крупных потерь, т. е. зоне критического риска. Предполагается, что этих потерь следует избегать, поэтому в случае задачи с фазовым ограничением процесс характеризуется несклонностью к риску или неприятием риска. Основное отличие рассматриваемой здесь задачи от задачи с фазовым ограничением состоит в том, что она допускает нахождение траекторий системы в зоне риска M.

Впервые задача оптимального управления, включающая в свою постановку множество возможных, но нежелательных состояний системы, как задача об оптимальном прохождении через заданное множество была рассмотрена в работе [17] в случае линейной управляемой системы, выпуклого замкнутого множества M и при априорных предположениях регулярности относительно оптимальной траектории $x_*(\cdot)$. Именно в [17] предполагается, что число моментов времени, в которых рассматриваемая оптимальная траектория $x_*(\cdot)$ пересекает границу множества M, конечно. В статье [18] при тех же предположениях линейности управляемой системы изучается случай, когда выпуклое замкнутое множество $M = M(t)$ зависит от времени. В [5; 6] при помощи метода аппроксимаций (см. [3; 21; 22]) была рассмотрена задача об оптимальном прохождении через заданное замкнутое множество M в случае аффинной по управлению системы, причем без каких-либо априорных предположений о характере пересечения оптимальной траекторией границы множества M. В статье [19] эти результаты (для замкнутого множества M) были обобщены на случай более общего интегрального функционала, характеризующего качество процесса управления.

Основное отличие настоящей работы от предыдущих публикаций в этом направлении состоит в том, что рассматриваемое нежелательное множество M (зона риска) предполагается открытым. В этом случае рассматриваемая задача является естественным обобщением стандартной задачи оптимального управления с фазовым ограничением. В дальнейшем для упрощения изложения изучается случай, когда управляемая система описывается автономным дифференциальным включением, а момент времени окончания процесса управления $T > 0$ фиксирован.

Рассмотрим следующую задачу (P):

$$J(x(\cdot)) = \varphi(x(0), x(T)) + \lambda \int_0^T \delta_M(x)\, dt \to \min\,, \tag{1.5}$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{1.6}$$

$$x(0) \in M_0, \quad x(T) \in M_1. \tag{1.7}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, M_0, M_1 — непустые замкнутые множества из $\mathbb{R}^n$, λ — положительное число, $F\colon \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ — локально липшицевое (относительно хаусдорфовой метрики) многозначное отображение с непустыми выпуклыми компактными значениями, $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ — локально липшицевая функция, а $\delta_M(\cdot)$ — характеристическая функция заданного множества M (зоны риска) из $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M, \\ 0, & x \notin M. \end{cases} \tag{1.8}$$

Предполагается, что множество M открытое, не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$ и, кроме того, касательный конус Кларка $T_G(x)$ к замкнутому множеству $G = \mathbb{R}^n \setminus M$ в любой точке $x \in G$ (см. [12]) имеет непустую внутренность, т. е. $\operatorname{int} T_G(x) \neq \varnothing$.

Момент окончания процесса управления $T > 0$ в задаче (P) будем считать фиксированным, а в качестве допустимых траекторий будем рассматривать все абсолютно непрерывные решения $x(\cdot)$ дифференциального включения (1.6) на интервале времени $[0, T]$, удовлетворяющие краевым условиям (1.7). Допустимая траектория $x_*(\cdot)$ является оптимальной в задаче (P), если функционал (1.5) достигает на ней своего наименьшего возможного значения.

Заметим, что основное отличие задачи (P) от стандартной задачи оптимального управления (Q) состоит в наличии в функционале (1.5) "штрафующего" интегрального члена с разрывным интегрантом $\delta_M(\cdot)$.

В дальнейшем будем обозначать через $N_G(x) = T_G^*(x)$ нормальный конус Кларка [12] к замкнутому множеству $G = \mathbb{R}^n \setminus M$ в точке $x \in G$, через $\hat{N}_A(a)$ — конус обобщенных нормалей [14] к замкнутому множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in A$, а через ∂A — границу множества A. Далее, через $H(F(x), \psi) = \max_{f \in F(x)} \langle f, \psi \rangle$ будем обозначать значение гамильтониана $H(F(\cdot), \cdot)$ дифференциального включения (1.6) в точке $(x, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, через $\partial H(F(x), \psi)$ — субдифференциал Кларка локально липшицевой функции $H(F(\cdot), \cdot)$ в точке $(x, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ [12], а через $\hat{\partial}\varphi(x_1, x_2)$ — обобщенный градиент локально липшицевой функции $\varphi(\cdot, \cdot)$ в точке $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ [14].

Пусть $\xi(\cdot)$ — заданная на сегменте $[0, T]$ скалярная функция. Следуя [15, гл. 9, § 6], точку $\tau \in [0, T)$ будем называть *точкой правой аппроксимативной непрерывности функции* $\xi(\cdot)$, если существует такое измеримое множество $E \subset [\tau, T]$, имеющее τ точкой правой плотности, что функция $\xi(\cdot)$ непрерывна справа вдоль E в точке τ.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P). Тогда существуют такие постоянная $\psi^0 \geq 0$, абсолютно непрерывная функция $\psi\colon [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ и ограниченная регулярная борелевская мера η на $[0, T]$, что выполняются следующие условия:*

1) *мера η сосредоточена на множестве $\mathfrak{M} = \{t \in [0, T]\colon x_*(t) \in \partial G\}$ и неположительна на множестве непрерывных функций $y\colon \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$, принимающих значения $y(t) \in T_G(x_*(t))$ при $t \in \mathfrak{M}$, т. е.* $\displaystyle\int_{\mathfrak{M}} y(t)\, d\eta \leq 0$;

2) *при п.в. $t \in [0, T]$ выполняется гамильтоново включение*

$$(-\dot{\psi}(t), \dot{x}_*(t)) \in \partial H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int_0^t d\eta\right);$$

3) *для $t = T$, а также для каждой точки $t \in (0, T)$, являющейся точкой правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$, выполняется равенство (условие стационарности гамильтониана)*

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int_0^t d\eta\right) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(t)) = H(x_*(0), \psi(0)) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(0));$$

4) *выполняется условие трансверсальности*

$$\left(\psi(0), -\psi(T) - \lambda \int_0^T d\eta\right) \in \psi^0 \hat{\partial}\phi(x_*(0), x_*(T)) + \hat{N}_{\tilde{M}_0} \times \hat{N}_{\tilde{M}_1};$$

5) *выполняется условие нетривиальности*

$$\psi^0 + \|\psi(0)\| + \|\eta\| \neq 0.$$

Здесь множества $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}_1$ определяются равенствами

$$\tilde{M}_0 = \begin{cases} M_0, & x_*(0) \in M, \\ M_0 \bigcap G, & x_*(0) \in G \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{M}_1 = \begin{cases} M_1, & x_*(0) \in M, \\ M_1 \bigcap G, & x_*(0) \in G. \end{cases} \tag{1.9}$$

Доказательство теоремы 1, приведенное ниже в разд. 3, так же, как и доказательство аналогичного результата для задачи оптимального управления с фазовым ограничением, основано на использовании метода аппроксимаций (см. [3; 21; 22]). Основное отличие теоремы 1 от варианта принципа максимума Понтрягина для задачи с фазовым ограничением, полученного в [3; 21], состоит в форме условия стационарности 3). При этом в случае, когда $x_*(t) \in G$ при всех $t \in [0, T]$, условие 3) влечет следующее известное для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями условие на скачок меры η:

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int_0^t d\eta\right) = H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int_0^t d\eta - \lambda\eta(t)\right), \quad t \in [0, T].$$

Как и в случае задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, условие 3) может быть использовано при исследовании невырожденности соотношений принципа максимума (теоремы 1).

Заметим, что аналогично [3; 21] данный результат с небольшими изменениями может быть перенесен на случай задач со свободным временем $T > 0$, а также на случай, когда управляемая система описывается неавтономным (липшицевым по совокупности переменных (t, x)) дифференциальным включением.

2. Построение последовательности аппроксимирующих задач

Для $i = 1, 2, \ldots$ и $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\tilde{\delta}_i(x) = \min\{i\rho(x, G), \delta_M(x)\}$, где $\rho(x, G) = \min\{\|x - \xi\| : \xi \in G\}$ — расстояние от точки x до непустого замкнутого множества $G = \mathbb{R}^n \backslash M$, а функция $\delta_M(\cdot)$ определена равенством (1.8).

Далее, для $i = 1, 2, \ldots$ определим функцию $\delta_i \colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^1$ следующим образом:

$$\delta_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\delta}_i(x + y)\omega_i(y)\, dy. \tag{2.1}$$

Здесь $\omega_i(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — гладкая вероятностная плотность с носителем $\operatorname{supp} \omega_i(\cdot) \subset 1/2^i B$, где B — замкнутый единичный шар из $\mathbb{R}^n$ с центром в 0. Для любого $i = 1, 2, \ldots$ так определенная функция $\delta_i \colon \mathbb{R}^n \mapsto [0, 1]$ является гладкой (класса $C^\infty(\mathbb{R}^n)$), как свертка с гладкой функцией.

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем*

$$\delta_i(x) \leq \delta_M(x) + \frac{i}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если $x \in M$, то $\delta_M(x) = 1$. Поскольку $\delta_i(x) \le 1$, $i = 1, 2, \dots$, то неравенство (2.2) в этом случае очевидно выполняется. Пусть $x \notin M$. Тогда $x \in G$, $\delta_M(x) = 0$ и $\tilde{\delta}_i(x+y) \le i\rho(x+y, G) \le iy \le i/2^i$ для любого $y \in \operatorname{supp}\omega_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$. Согласно определению функции $\delta_i(\cdot)$ (см. (2.1)) в этом случае

$$\delta_i(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \tilde{\delta}_i(x+y)\omega_i(y)\,dy \le \frac{i}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Поскольку $\delta_M(x) = 0$, то неравенство (2.2) в данном случае также выполняется. □

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ *непрерывных функций* $x_i\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ *сходится равномерно на интервале* $[0,T]$ *к непрерывной функции* $\tilde{x}\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$\liminf_{i\to\infty} \int\limits_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \ge \int\limits_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для $t \in [0,T]$ выполняется включение $\tilde{x}(t) \in M$. Тогда $\delta_M(\tilde{x}(t)) = 1$ и в силу открытости множества M и сходимости последовательности $\{x_i(t)\}_{k=1}^{\infty}$ к $\tilde{x}(t)$ существуют такие число $\varepsilon_0 > 0$ и номер $i_0 \ge 1/\varepsilon_0$, что для всех $i \ge i_0$ выполняется включение $x_i(t) + \varepsilon_0 B \subset M$. Тогда для всех $i \ge i_0$ согласно определению функции $\delta_i(\cdot)$ (см. (2.1)) справедливо равенство $\delta_i(x_i(t)) = 1$. Следовательно, в этом случае $\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \delta_M(\tilde{x}(t)) = 1$. Пусть теперь для $t \in [0,T]$ имеем $\tilde{x}(t) \notin M$. Тогда $\delta_M(\tilde{x}(t)) = 0$. Поскольку $\delta_i(x_i(t)) \ge 0$ для любого $t \in [0,T]$ и всех $i = 1, 2, \dots$ (см. (2.1)), то в этом случае получаем $\liminf_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) \ge \delta_M(\tilde{x}(t))$.

Таким образом, для любого $t \in [0,T]$ выполняется неравенство

$$\liminf_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) \ge \delta_M(\tilde{x}(t)).$$

Отсюда в силу леммы Фату (см. [24, Lemma 8.7.i.]) вытекает неравенство (2.3). □

Теорема 2. *Интегральный функционал* $J_M\colon C([0,T], \mathbb{R}^n) \mapsto \mathbb{R}^1$, *определенный равенством*

$$J_M(x(\cdot)) = \int\limits_0^T \delta_M(x(t))\,dt,$$

полунепрерывен снизу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть последовательность $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ непрерывных функций $x_i\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$ сходится равномерно на интервале $[0,T]$ к непрерывной функции $\tilde{x}(\cdot)$. Тогда в силу леммы 1 имеем

$$J_M(x_i(\cdot)) = \int\limits_0^T \delta_M(x_i(t))\,dt \ge \int\limits_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt - \frac{i}{2^i}, \quad i = 1, 2, \dots .$$

Откуда согласно лемме 2, переходя к пределу при $i \to \infty$, получаем

$$\liminf_{i\to\infty} J_M(x_i(\cdot)) \ge \liminf_{i\to\infty} \int\limits_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \ge \int\limits_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt = J_M(\tilde{x}(\cdot)).$$ □

Следствие 1. *Пусть хотя бы одно из множеств* M_0 *или* M_1 *— компакт и существует по крайней мере одна допустимая траектория* $x(\cdot)$ *системы* (1.6) *на интервале* $[0,T]$. *Тогда существует оптимальная допустимая траектория* $x_*(\cdot)$ *в задаче* (P).

Д о к а з а т е л ь с т в о немедленно вытекает из компактности в этом случае множества допустимых траекторий (см. [20]), теоремы 2 и теоремы Вейерштрасса (см. [11, § 0.1]). □

Пусть теперь $x_*(\cdot)$ — произвольная оптимальная траектория в задаче (P). Для $i = 1, 2, \ldots$ определим задачу (P_i) следующим образом:

$$J_i(x(\cdot)) = \varphi(x(0), x(T)) + \int\limits_0^T \left[\lambda\delta_i(x(t)) + \|x(t) - x_*(t)\|^2\right] dt \to \min\,, \tag{2.4}$$

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \tag{2.5}$$

$$\|x(t) - x_*(t)\| \le 1, \quad t \in [0, T], \tag{2.6}$$

$$x(0) \in \tilde{M}_0, \quad x(T) \in \tilde{M}_1. \tag{2.7}$$

Здесь функция $\varphi(\cdot,\cdot)$, многозначное отображение $F(\cdot)$, число $\lambda > 0$, а также момент времени T — те же самые, что и в задаче (P). Множества $\tilde{M}_0$ и $\tilde{M}_1$ определятся равенствами (1.9). Так же, как и в задаче (P), в качестве допустимых траекторий в задаче (P_i), $i = 1, 2, \ldots$, рассматриваются все абсолютно непрерывные решения $x(\cdot)$ дифференциального включения (2.5) на интервале времени $[0, T]$, удовлетворяющие краевым условиям (2.7). Заметим, что задача (P_i) содержит дополнительное фазовое ограничение (2.6).

Для любого $i = 1, 2, \ldots$ задача (P_i) является стандартной задачей оптимального управления для дифференциального включения с фазовым ограничением и фиксированным временем окончания процесса управлениям $T > 0$. Поскольку оптимальная в задаче (P) траектория $x_*(\cdot)$ является допустимой в задаче (P_i), то в силу теоремы существования Филиппова (см. [24, теорема 9.3.i]) для любого $i = 1, 2, \ldots$ в задаче (P_i) существует оптимальная траектория $x_i(\cdot)$.

Так построенную последовательность $\{(P_i)\}_{k=1}^{\infty}$ будем называть *последовательностью аппроксимирующих задач* (соответствующей оптимальной траектории $x_*(\cdot)$).

Теорема 3. *Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная допустимая траектория в задаче (P), $\{(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность аппроксимирующих задач, а $x_i(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P_i), $i = 1, 2, \ldots$. Тогда*

$$\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = x_*(\cdot) \quad \textit{в} \quad C([0,T], \mathbb{R}^n), \tag{2.8}$$

$$\lim_{i\to\infty} \dot{x}_i(\cdot) = \dot{x}_*(\cdot) \quad \textit{слабо в} \quad L^1([0,T], \mathbb{R}^n), \tag{2.9}$$

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_0^T \delta_i(x_i(t))\, dt = \int\limits_0^T \delta_M(x_*(t))\, dt. \tag{2.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $x_i(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P_i), $i = 1, 2, \ldots$, а $x_*(\cdot)$ — допустимая траектория системы (2.5), то в силу леммы 1 выполняются следующие неравенства (см. (2.4) и (2.2)):

$$\varphi(x_i(0), x_i(T)) + \int\limits_0^T \left[\lambda\delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\right] dt \le \varphi(x_*(0), x_*(T)) + \lambda \int\limits_0^T \delta_i(x_*(t))\, dt$$

$$\le \varphi(x_*(0), x_*(T)) + \lambda \int\limits_0^T \delta_M(x_*(t))\, dt + \frac{i\lambda T}{2^i}. \tag{2.11}$$

Далее, множество всех допустимых траекторий в задаче (P), удовлетворяющих фазовому ограничению (2.6), является компактом в пространстве $C([0,T], \mathbb{R}^n)$. Пусть $\tilde{x}(\cdot)$ — предельная точка последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ в $C([0,T], \mathbb{R}^n)$. Тогда $\tilde{x}(\cdot)$ — допустимая траектория системы (2.5) и, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$. Далее, траектория $x_*(\cdot)$ — оптимальная в задаче (P), а траектория $\tilde{x}(\cdot)$ — допустимая в этой задаче. Поэтому

$$\varphi(x_*(0),x_*(T)) + \lambda\int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt \le \varphi(\tilde{x}(0),\tilde{x}(T)) + \lambda\int_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt.$$

Откуда согласно (2.11) для $i=1,2,\dots$ получаем

$$\varphi(x_i(0),x_i(T)) - \varphi(\tilde{x}(0),\tilde{x}(T)) + \lambda\int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt - \lambda\int_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt$$

$$+\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt \le \frac{i\lambda T}{2^i}. \tag{2.12}$$

Поскольку $\lim_{i\to\infty} x_i(\cdot) = \tilde{x}(\cdot)$ в $C([0,T],\mathbb{R}^n)$, то исходя из леммы 2 для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число i_0, что для всех $i \ge i_0$ выполняются неравенства

$$\varphi(x_i(0),x_i(T)) - \varphi(\tilde{x}(0),\tilde{x}(T)) \ge -\varepsilon, \qquad \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt - \int_0^T \delta_M(\tilde{x}(t))\,dt \ge -\varepsilon.$$

Откуда в силу (2.12) получаем, что для любого $i \ge i_0$

$$\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt \le \varepsilon(1+\lambda) + \frac{i\lambda T}{2^i}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i\to\infty$, получаем

$$\limsup_{i\to\infty}\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt \le \varepsilon(1+\lambda).$$

С учетом произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего неравенства вытекает, что

$$\lim_{i\to\infty}\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt = 0,$$

откуда в силу произвольности выбора предельной точки $\tilde{x}(\cdot)$ последовательности $\{x(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ следует равенство (2.8). Равенство (2.9) выводим из (2.8) и того факта, что последовательность $\{\dot{x}_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ ограничена в $L_\infty([0,T],\mathbb{R}^n)$.

Докажем условие (2.10). В силу неравенства (2.11) для $i=1,2,\dots$ имеем

$$\int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \le \int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt + \frac{\varphi(x_*(0),x_*(T)) - \varphi(x_i(0),x_i(T))}{\lambda}$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^T \|x_i(t)-x_*(t)\|^2\,dt + \frac{iT}{2^i}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $i \to \infty$ в силу (2.8), (2.9) и леммы 2, получаем

$$\int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt \le \liminf_{i\to\infty} \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \le \lim_{i\to\infty} \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt$$

$$\le \limsup_{i\to\infty} \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt \le \int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt.$$

Следовательно,

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^T \delta_i(x_i(t))\,dt = \int_0^T \delta_M(x_*(t))\,dt. \qquad \square$$

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы* 3, *переходя, если нужно, в последовательности* $\{\delta_i(x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ *к подпоследовательности, можно считать, что*

$$\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \lim_{i\to\infty} \delta_M(x_*(t)) \quad \textit{при п.в.} \quad t \in [0,T].$$

Доказательство. В силу открытости множества M для всех $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in M$, из определения функций $\delta_M(\cdot)$ и $\delta_i(\cdot)$, $i = 1,2,\dots$, (см. (1.8) и (2.1)) и условия (2.8) вытекает $\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \lim_{i\to\infty} \delta_M(x_*(t)) = 1$. Рассмотрим теперь множество тех $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in G$. В этом случае $\delta_M(x_*(t)) = 0$ и согласно (2.10)

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{t\in[0,T]\colon x_*(t)\in G} \delta_i(x_i(t))\ dt = 0.$$

Откуда с учетом неотрицательности функций $\delta_i(x_i(\cdot))$, $i = 1,2,\dots$, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{meas}\{t \in [0,T]\colon x_*(t) \in G,\, \delta_i(x_i(t)) > \varepsilon\} = 0,$$

т. е. последовательность $\{\delta_i(x_i(\cdot))\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к 0 на множестве $\{t \in [0,T]\colon x_*(t) \in G\}$ по мере. Значит, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\{\delta_i(x_i(\cdot))\}_{i=1}^{\infty}$ сходится к 0 при п.в. $t \in [0,T]$, для которых $x_*(t) \in G$, и, следовательно, для п.в. $t \in [0,T]$. $\square$

3. Доказательство основного результата

Пусть $x_*(\cdot)$ — оптимальная траектория в задаче (P), а $\{(P_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность аппроксимирующих задач (см. (2.4)–(2.7)).

Пусть $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность оптимальных траекторий в задачах (P_i), $i = 1,2,\dots$. В силу теоремы 3 справедливы равенства (2.8) и (2.9). Исходя из (2.8), не ограничивая общности, можно считать, что все траектории $x_i(\cdot)$ являются для фазового ограничения (2.6) внутренними. Отсюда вытекает, что для любого $i = 1,2,\dots$ траектория $x_i(\cdot)$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности в форме гамильтонового включения Кларка (см. [12, теорема 5.2.1]) для задач без фазовых ограничений и с негладкими концевыми ограничениями [13]. Именно существуют такие число $\psi_i^0 \ge 0$ и абсолютно непрерывная функция $\tilde{\psi}_i\colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^n$, что выполняются следующие условия:

$$(-\dot{\tilde{\psi}}_i(t), \dot{x}_i(t)) \overset{\text{п.в.}}{\in} \partial H(x_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) - \psi_i^0 \Big(\lambda \frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x} + 2(x_i(t) - x_*(t)), 0\Big), \tag{3.1}$$

$$(\tilde{\psi}_i(0), -\tilde{\psi}_i(T)) \in \hat{\partial}\varphi(x_i(0), x_i(T)) + \hat{N}_{\tilde{M}_1}(x_i(0)) \times \hat{N}_{\tilde{M}_2}(x_i(T)), \tag{3.2}$$

$$\dot{h}_i(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -2\psi_i^0\langle x_i(t) - x_*(t), \dot{x}_*(t)\rangle, \tag{3.3}$$

$$\psi_i^0 + \|\tilde{\psi}_i(0)\| \neq 0, \tag{3.4}$$

где абсолютно непрерывная функция $h_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, определяется равенством

$$h_i(t) = H(x_i(t), \tilde{\psi}_i(t)) - \psi_i^0\left(\lambda\delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\right), \quad t \in [0, T]. \tag{3.5}$$

Нормируем (в силу (3.4)) сопряженные переменные ψ_i^0, $\tilde{\psi}_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$\psi_i^0 + \|\tilde{\psi}_i(0)\| + \psi_i^0\int_0^T \left\|\frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x}\right\| dt = 1 \tag{3.6}$$

и введем новые переменные

$$\eta_i(t) = \psi_i^0\frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x}, \quad \psi_i(t) = \tilde{\psi}_i(t) - \lambda\int_0^t \eta_i(s)\,ds, \quad t \in [0, T].$$

В терминах этих новых переменных гамильтоново включение (3.1) запишется в виде

$$(-\dot{\psi}_i(t), \dot{x}_i(t)) \overset{\text{п.в.}}{\in} \partial H\left(x_i(t), \psi_i(t) + \lambda\int_0^t \eta_i(s)\,ds\right) - 2\psi_i^0(x_i(t) - x_*(t), 0). \tag{3.7}$$

В силу условия (3.6), переходя, если нужно, к подпоследовательности и не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i^0 \to \psi^0 \geq 0$, $\psi_i(0) = \tilde{\psi}_i(0) \to \psi_0$, $\|\psi_0\| \leq 1$ при $i \to \infty$, а согласно теореме Хелли (см., например, [24, Theorem 15.1.i.]) последовательность $\{\eta_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ сходится слабо при $i \to \infty$ к регулярной борелевской мере η на $[0, T]$.

С учетом включения (3.7) и предложения 3.2.4 из [12] имеем $\|\dot{\psi}_i(t)\| \leq k(\|\psi_i(t)\| + 1)$, где $k \geq 0$ — некоторая постоянная. Следовательно, в силу леммы Гронуолла (см., например, [24, Lemma 18.1.i]), не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i(\cdot) \to \psi(\cdot)$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $\dot{\psi}_i(\cdot) \to \dot{\psi}(\cdot)$ слабо в $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ при $i \to \infty$, где $\psi\colon [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$ — липшицевая функция.

Докажем утверждение 1) теоремы 1. Прежде всего заметим, что если $x_*(\tau) \in M$ (или $x_*(\tau) \in \operatorname{int} G$), то согласно определению функций $\delta_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \dots$, (см. (2.1)) и равномерной сходимости последовательности $\{x_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ к функции $x_*(\cdot)$ существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что $x_*(\tau) + \varepsilon B \subset M$ (или $x_*(\tau) + \varepsilon B \subset G$) и для всех достаточно больших номеров i имеем $\delta_i(x_i(t)) \equiv 1$ (или $\delta_i(x_i(t)) \equiv 0$) при всех t, лежащих в δ-окрестности точки τ в $[0, T]$. Отсюда получаем, что мера η сосредоточена на множестве $\mathfrak{M} = \{t \in [0, T]\colon x_*(t) \in \partial G\}$.

Очевидно, множество $\mathfrak{M}$ замкнуто. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то условие 1) выполняется. Пусть $\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и $y(\cdot)\colon \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$ — такая непрерывная функция, что $y(t) \in T_G(x_*(t))$, $t \in \mathfrak{M}$. В силу условия $\operatorname{int} T_G(x) \neq \varnothing$, $x \in G$, и полунепрерывности сверху (в этом случае) нормального конуса Кларка (см. [12]) можно показать, что существует такое $\delta > 0$, что $y(t) \in N_\delta^*(t)$ для всех $t \in \mathfrak{M}$ (см. [21, Section 3]). Здесь

$$N_\delta(t) = \left\{\gamma y\colon \|y - x\| \leq \delta,\, x \in N_G(x_*(t)),\, \|x\| = 1,\, \gamma \geq 0\right\}$$

— коническая δ-окрестность нормального конуса Кларка $N_G(x_*(t))$ и $N_\delta^*(t)$ — конус, сопряженный к $N_\delta(t)$.

Выберем произвольную точку $\tau \in \mathfrak{M}$ и покажем, что существует такое $\varepsilon(\tau) > 0$, что

$$\frac{\delta_i(x_i(t))}{\partial x} \in N_{\delta/2}(\tau) \tag{3.8}$$

для всех достаточно больших номеров i и всех $t \in \mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)]$.

Если $x_*(\tau) \in \operatorname{int} G$, то $N_G(x_*(\tau)) = \{0\}$ и условие (3.8) очевидно выполняется. Пусть $x_*(\tau) \in \partial G$ и условие (3.8) нарушается. Тогда существует такая последовательность $t_i \to \tau$, $i \to \infty$, $t_i \in \mathfrak{M}$, что

$$\frac{\delta_i(x_i(t_i))}{\partial x} \notin N_{\delta/2}(\tau).$$

Согласно определению

$$\frac{\delta_i(x_i(t_i))}{\partial x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial\tilde{\delta}_i(x_i(t_i)+y)}{\partial x}\omega_i(y)\,dy$$

$$= \int\limits_{\{y\colon i\rho(x_i(t_i)+y,G)\le 1\}} \frac{\partial\tilde{\delta}_i(x_i(t_i)+y)}{\partial x}\omega_i(y)\,dy = i \int\limits_{\{y\colon i\rho(x_i(t_i)+y,G)\le 1\}} \frac{\partial\rho(x_i(t_i)+y,G)}{\partial x}\omega_i(y)\,dy.$$

Тогда существует такая последовательность $y_i \to 0$, $i \to \infty$, что

$$v_i = \frac{\partial\rho_i(x_i(t_i)+y_i,G)}{\partial x} \notin N_{\delta/2}(\tau), \quad i = 1,2,\dots . \tag{3.9}$$

В силу свойств функции расстояния $\|v_i\| = 1$ и $v_i \in N_G(z_i)$, где $z_i \in G$ — ближайшая точка из G к $x_i(t_i)+y_i$, $i = 1,2,\dots$. Поскольку $x_i(t_i) \to x_*(\tau)$ и $y_i \to 0$ при $i \to \infty$, то $z_i \to x_*(\tau)$ при $i \to \infty$.

Переходя к подпоследовательности, получаем $v_i \to v$ при $i \to \infty$, где $\|v\| = 1$. В силу полунепрерывности сверху нормального конуса Кларка в случае $\operatorname{int} T_G(x) \neq \varnothing$ получаем включение $v \in N_G(x_*(\tau))$, что противоречит условию (3.9). Таким образом, условие (3.8) доказано. Оставшаяся часть доказательства условия 1) теоремы 1 практически дословно совпадает с аналогичным доказательством, приведенным в [21].

Доказательство условия нетривиальности 5) теоремы 1 с небольшими изменениями совпадает с доказательством аналогичного условия (f) в [21, Theorem 1] и проводится методом от противного. Действительно, предположим противное. Тогда $\psi^0 = 0$, $\|\psi(0)\| = 0$ и $\|\eta\| = 0$. В этом случае из условия (3.6) получаем

$$\lim_{i\to\infty} \psi_i^0 \int\limits_0^T \left\| \frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x} \right\| dt = 1. \tag{3.10}$$

Снова рассмотрим замкнутое множество $\mathfrak{M} = \{t \in [0,T]\colon x_*(t) \in G\}$. Если $\mathfrak{M} = \varnothing$, то для всех достаточно больших номеров i имеем $\partial\delta_i(x_i(t))/\partial x \equiv 0$, $t \in [0,T]$, что противоречит равенству (3.10). Следовательно, в этом случае условие 5) выполняется.

Предположим, что $\mathfrak{M} \neq \varnothing$. Тогда в силу условия $\operatorname{int} T_G(x_*(t)) \neq \varnothing$, $t \in \mathfrak{M}$, существуют такая непрерывная функция $q\colon \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^n$ и число $\delta > 0$, что $\|q(t)\| = 1$ и $\{y \in \mathbb{R}^n\colon \|y - q(t)\| \le 2\delta\} \subset T_G(x_*(t))$ при всех $t \in \mathfrak{M}$. Тогда, очевидно, имеем

$$\langle q(t), y\rangle \le -2\delta\|y\|, \quad y \in N_G(x_*(t)), \quad t \in \mathfrak{M}.$$

Покажем, что отсюда вытекает неравенство

$$\int\limits_0^T q(t)\,d\eta \le -\frac{\delta}{2}.$$

Действительно, в силу (3.8) для любого $\tau \in \mathfrak{M}$ существует такое $\varepsilon(\tau) > 0$, что для всех достаточно больших номеров i имеем

$$\frac{\partial\delta_i(x_i(t))}{\partial x} \in N_{\delta/2}(\tau), \quad t \in \mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)].$$

Следовательно, для любого $t \in \mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau - \varepsilon(\tau)]$ существуют такие $z(t) \in N_G(x_*(t))$, $\|z(t)\| = 1$, и $\xi(t)$, $\|\xi(t)\| \le \delta/2$, что

$$\frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x} = (z(t) + \xi(t)) \Big\| \frac{\partial \delta_i(x_i(t))}{\partial x} \Big\|. \tag{3.11}$$

В силу непрерывности функции $q(\cdot)$, уменьшая, если необходимо, $\varepsilon(\tau) > 0$, получаем

$$\langle q(t), z \rangle \le -\delta \|z\| \quad \text{для всех} \quad z \in N_G(x_*(t)) \quad \text{и} \quad t \in \mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)].$$

Откуда согласно (3.11) вытекает справедливость для всех достаточно больших номеров i неравенства

$$\int\limits_{\mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)]} \Big\langle q(s), \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\rangle \, ds \le -\frac{\delta}{2} \int\limits_{\mathfrak{M} \bigcap [\tau - \varepsilon(\tau), \tau + \varepsilon(\tau)]} \Big\| \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\| \, ds.$$

В силу компактности множества $\mathfrak{M}$ существует такой конечный набор непересекающихся полуинтервалов $\{I_j\}_{j=1}^N$, что $\mathfrak{M} \subset \bigcup_{j=1}^N I_j$, и для всех достаточно больших номеров i имеем

$$\int\limits_{I_j \bigcap \mathfrak{M}} \Big\langle q(s), \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\rangle \, ds \le -\frac{\delta}{2} \int\limits_{I_j \bigcap \mathfrak{M}} \Big\| \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\| \, ds, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \Big\langle q(s), \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\rangle \, ds \le -\frac{\delta}{2} \int\limits_{\mathfrak{M}} \Big\| \frac{\partial \delta_i(x_i(s))}{\partial x} \Big\| \, ds.$$

Из последнего неравенства с учетом определения меры η и условия (3.10) получаем

$$\int\limits_0^T q(s) \, d\eta \le -\frac{\delta}{2} < 0.$$

Следовательно, мера η ненулевая. Условие 5) доказано.

Докажем условие 3) теоремы 1. Определим функции $p_i \colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^1$ и $q_i \colon [0,T] \mapsto \mathbb{R}^1$, $i = 1, 2, \dots$, следующим образом:

$$p_i(t) = H\bigg(x_i(t), \psi_i(t) + \lambda \int\limits_0^t \eta_i(s) \, ds\bigg), \quad q_i(t) = \psi_i^0 \left(\lambda \delta_i(x_i(t)) + \|x_i(t) - x_*(t)\|^2\right), \quad t \in [0,T].$$

Тогда для любого $i = 1, 2, \dots$ справедливо равенство $h_i(t) = p_i(t) - q_i(t)$, $t \in [0,T]$ (см. (3.5)). В силу леммы 1 и концевого ограничения в момент 0 (см. (2.7)) имеем

$$p_i(0) = H(x_i(0), \psi_i(0)) \to H(x_*(0), \psi_0) \quad \text{при} \quad i \to \infty,$$

$$q_i(0) = \psi_i^0 \left(\lambda \delta_i(x_i(0)) + \|x_i(0) - x_*(0)\|^2\right) \to \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(0)) \quad \text{при} \quad i \to \infty.$$

Значит, последовательность $\{|h_i(0)|\}_{i=1}^\infty$ ограничена, а исходя из (3.3) последовательность $\{\dot{h}_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ сходится к 0 в $L^\infty([0,T], \mathbb{R}^1)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что

$$\lim_{i \to \infty} h_i(t) = h(t) \equiv H(x_*(0), \psi_0) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(0)), \quad t \in [0,T]. \tag{3.12}$$

С другой стороны, для $t = T$ согласно определению меры η и концевого ограничения в момент T (см. (2.7)) имеем

$$h(T) = \lim_{i \to \infty} h_i(T) = \lim_{i \to \infty} \bigg\{ H\bigg(x_i(T), \psi_i(T) + \lambda \int\limits_0^T \eta_i(s) \, ds\bigg) - \psi_i^0 \big(\lambda \delta_i(x_i(T)) + \|x_i(T) - x_*(T)\|^2\big) \bigg\}$$

$$= H\left(x_*(T), \psi(T) + \lambda \int\limits_0^T d\eta\right) - \psi_i^0 \lambda \delta_M(x_*(T)).$$

Откуда в силу условия (3.12) вытекает выполнение условия 3) теоремы 1 в момент T.

Пусть теперь $\tau \in (0, T)$ — точка правой аппроксимативной непрерывности функции $\delta_M(x_*(\cdot))$. Тогда функция $\delta_M(x_*(\cdot))$ непрерывна справа в точке τ вдоль некоторого измеримого множества E, имеющего точку τ точкой правой плотности. В силу следствия 2, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\lim_{i\to\infty} \delta_i(x_i(t)) = \delta_M(x_*(t))$ для п.в. всех $t \in E$. Поэтому существует такая последовательность $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\tau_i \in E$, $i = 1, 2, \ldots$, что $\tau_i \to \tau$ при $i \to \infty$ и $\lim_{j\to\infty} \delta_j(x_j(\tau_i)) = \delta_M(x_*(\tau_i))$ для любого $i = 1, 2, \ldots$. Следовательно, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $\delta_i(x_i(\tau_i)) \to \delta_M(x_*(\tau))$ при $i \to \infty$. Поскольку

$$\int\limits_0^\tau d\eta = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{\tau+\varepsilon} \eta_i(s)\, ds,$$

то снова, переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\int\limits_0^\tau d\eta = \lim_{i\to\infty} \int\limits_0^{\tau_i} \eta_i(s)\, ds.$$

Значит,

$$h(\tau) = \lim_{i\to\infty} h_i(\tau_i) = \lim_{i\to\infty} \left[H\left(x_i(\tau_i), \psi_i(\tau_i) + \lambda \int\limits_0^{\tau_i} \eta_i(s)\, ds\right) - \psi_i^0\big(\lambda\delta_i(x_i(\tau_i)) + \|x_i(\tau_i) - x_*(\tau)\|^2\big)\right]$$

$$= H\left(x_*(\tau), \psi(\tau) + \lambda \int\limits_0^\tau \eta(s)\, ds\right) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(\tau)).$$

Откуда в силу (3.12) для п.в. $t \in (0, T)$ получаем

$$H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int\limits_0^t \eta(s)\, ds\right) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(t)) = H(x_*(0), \psi_0) - \psi^0 \lambda \delta_M(x_*(0)).$$

Таким образом, условие 3) теоремы 1 доказано.

Докажем условие 2) теоремы 1. Действительно, как показано выше, не ограничивая общности, можно считать, что $\psi_i(\cdot) \to \psi(\cdot)$ в $C([0, T], \mathbb{R}^n)$ и $\dot\psi_i(\cdot) \to \dot\psi(\cdot)$ слабо в $L^1([0, T], \mathbb{R}^n)$ при $i \to \infty$. В силу определения меры η имеем

$$\int\limits_0^t d\eta = \lim_{i\to\infty} \int\limits_0^t \eta_i(s)\, ds \quad \text{при} \quad \text{п.в.} \quad t \in [0, T].$$

В силу полунепрерывности сверху субдифференциала Кларка [12] получаем:

$$\limsup_{i\to\infty} \partial H\left(x_i(t), \psi_i(t) + \lambda \int\limits_0^t \eta_i(s)\, ds\right) \subset \partial H\left(x_*(t), \psi(t) + \lambda \int\limits_0^t d\eta\right) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T].$$

Согласно теореме Мазура [11] из последнего включения и включения (3.7) следует справедливость утверждения 2) теоремы 1.

Условие 4) теоремы 1 вытекает из включения (3.2) в силу полунепрерывности сверху конуса обощенных нормалей $\hat N_{\tilde M_i}(\cdot)$ к замкнутому множеству $\tilde M_i$, $i = 1, 2$, и полунепрерывности сверху обобщенного градиента $\hat\partial\varphi(\cdot,\cdot)$ локально липшицевой функции $\varphi(\cdot,\cdot)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арутюнов А.В.** Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности // Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 27. С. 147–235.
2. **Арутюнов А.В.** Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 254 p.
3. **Арутюнов А.В., Асеев С.М.** Принцип максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Невырожденность и устойчивость // Докл. РАН. 1994. Т. 334, № 2. С. 134–137.
4. **Арутюнов А.В., Тынянский Н.Т.** О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. Техн. кибернетика. 1984. № 4. С. 60–68.
5. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального прохождения через заданную область // Докл. РАН. 2004. Т. 395, № 5. С. 583–585.
6. **Асеев С.М., Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности первого порядка для задачи оптимального прохождения через заданную область // Нелинейная динамика и управление: сб. ст. М.: Физматлит, 2004. Т. 4. С. 179–204.
7. **Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А.** Необходимые условия сильного минимума в задачах оптимального управления с вырождением концевых и фазовых ограничений // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 2. С. 175–176.
8. **Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А.** Принцип максимума в регулярных задачах оптимального управления, у которых концы фазовой траектории лежат на границе фазового ограничения // Автоматика и телемеханика. 1987. № 12. С. 25–33.
9. **Дубовицкий А.Я., Дубовицкий В.А.** Критерий существования содержательного принципа максимума в задаче с фазовыми ограничениями // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1611–1616.
10. **Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.** Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1965. Т. 5, № 3. С. 395–453.
11. **Иоффе А.Д., Тихомиров В. М.**, Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 481 с.
12. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
13. **Мордухович Б.Ш.** Принцип макисмума в задачах оптимального быстродействия с негладкими ограничениями // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, вып. 6. С. 1014–1023.
14. **Мордухович Б.Ш.** Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1988. 360 с.
15. **Натансон И.П.** Теория функций вещественной переменной. 3-е изд. М.: Наука, 1974. 480 с.
16. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
17. **Пшеничный Б.Н., Очилов С.** О задаче оптимального прохождения через заданную область // Кибернетика и вычисл. техника. 1993. Т. 99. С. 3–8.
18. **Пшеничный Б.Н., Очилов С.** Об одной специальной задаче оптимального быстродействия // Кибернетика и вычисл. техника. 1994. Т. 101. С. 11–15.
19. **Смирнов А.И.** Необходимые условия оптимальности для одного класса задач оптимального управления с разрывным интегрантом // Тр. МИАН. 2008. Т. 262. С. 222–239.
20. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Московск. ун-та. № 2. С. 25–32.
21. **Arutyunov A.V., Aseev S.M.** Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, no. 3. P. 930–952.
22. **Aseev S.M.** Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization // J. Math. Sci. 1999. Vol. 94, no. 3. P. 1366–1393.
23. **Ermoliev Yu., Norkin V.**, Risk and extended utility functions: optimization approaches. IIASA Interim Report: IIASA IR-03-033. Laxenburg, 2003. 25 p.
24. **Cesari L.** Optimization – theory and applications. problems with ordinary differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983. 542 p. (Appl. Math.; vol. 17.)

25. **Fontes F.A.C.C., Frankowska H.** Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints // J. Optim. Theory Appl. 2015. Vol. 166, iss. 1. P. 115–136. doi:10.1007/s10957-015-0704-1 .
26. **Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G.** A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints // SIAM Review. 1995. Vol. 37, no. 2. P. 181–218. doi: 10.1137/1037043 .

Асеев Сергей Миронович
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом дифференциальных уранений
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: aseev@mi.ras.ru

Поступила 30.11.2016

REFERENCES

1. Arutyunov A.V. Perturbations of extremal problems with constraints and necessary optimality conditions. *J. Soviet Math.*, 1991, vol. 54, no. 6, pp. 1342–1400. doi: 10.1007/BF01373649 .
2. Arutyunov A.V. *Optimality conditions: abnormal and degenerate problems.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, Ser. Math. Its Appl., vol. 526, 299 p. Original Russian text published in *Usloviya ekstremuma. Anormal'nye i vyrozhdennye zadachi*, Moscow: Faktorial Publ., 1997, 254 p.
3. Arutyunov A.V., Aseev S.M. The maximum principle in optimal control problems with phase constraints. Nondegeneracy and stability. *Russ. Acad. Sci., Dokl. Math.*, 1994, vol. 49, no. 1, pp. 38–42.
4. Arutyunov A.V., Tynyanskij, N.T. The maximum principle in a problem with phase constraints. *Sov. J. Comput. Syst. Sci.*, 1985, vol. 23, no. 1, pp. 28–35.
5. Aseev S.M., Smirnov A.I. The Pontryagin maximum principle for the problem of optimally crossing a given domain. *Dokl. Math.*, 2004, vol. 69, no. 2, pp. 243–245.
6. Aseev S.M., Smirnov A.I. Necessary first-order conditions for optimal crossing of a given region. *Comput. Math. Model.*, 2007, vol. 18, pp. 397–419. doi:10.1007/s10598-007-0034-8 .
7. Dubovitskii A.Ya., Dubovitskii V.A. Necessary conditions for a strong minimum in optimal control problems with degeneracy of the end-point and phase constraints. *Russian Math. Surveys*, 1985, vol. 40, no. 2, pp. 209–210. doi: 10.1070/RM1985v040n02ABEH003563 .
8. Dubovitskii A.Ya., Dubovitskii V.A. The maximum principle in regular optimal control problems where the ends of the phase path are on the boundary of the phase constraint. *Avtomatika i Telemekhanika*, 1987, no. 12, pp. 25–33 (in Russian).
9. Dubovitskii A.Ya., Dubovitskii V.A. A criterion for the existence of a meaningful maximum principle in a problem with phase constraints. *Diff. Equat.*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1595–1602.
10. Dubovitskii A.Ya., Milyutin A.A. Extremum problems in the presence of restrictions. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1965, vol. 5, no. 3, pp. 1–80. doi: 10.1016/0041-5553(65)90148-5 .
11. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Amsterdam: Elsevier North-Holland, 1979, 460 p. Original Russian text published in *Teoriya ekstremal'nykh zadach*, Moscow: Nauka Publ., 1974, 481 p.
12. Clarke H. *Optimization and nonsmooth analysis.* New York, Wiley, 1983, 308 p. Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p.
13. Mordukhovich B.Sh. Maximum principle in the problem of time optimal response with nonsmooth constraints. *J. Appl. Math. Mech.* 1976, vol. 40, iss. 6, pp. 960–969. doi: 10.1016/0021-8928(76)90136-2 .
14. Mordukhovich, B.Sh. *Metody approksimatsij v zadachakh optimizatsii i upravleniya* [Approximation methods in problems of optimization and control]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 360 p.
15. Natanson I.P. *Teoriya funktsii veshchestvennoi peremennoi* [Theory of functions of a real variable], 3-e izd., Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
16. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, New York; London: Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
17. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On the problem of the optimal passage through a given domain. *Kibernetika i Vychisl. Tekhnika*, 1993, no. 99, pp. 3–8 (in Russian).

18. Pshenichnyi B.N., Ochilov S. On a special time-optimality problem. *Kibernetika i Vychisl. Tekhnika*, 1994, no. 101, pp. 11–15 (in Russian).
19. Smirnov A.I. Necessary optimality conditions for a class of optimal control problems with discontinuous integrand. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2008, vol. 262, pp. 213-230. doi: 10.1134/S0081543808030176 .
20. Filippov A.F. On some questions in the theory of optimal regulation. *J. SIAM Control. Ser A.*, 1962, vol. 1, pp. 76–84.
21. Arutyunov A.V., Aseev S.M. Investigation of the degeneracy phenomenon of the maximum principle for optimal control problems with state constraints. *SIAM J. Control Optim.*, 1997, vol. 35, no. 3, pp. 930–952.
22. Aseev S.M. Methods of regularization in nonsmooth problems of dynamic optimization. *J. Math. Sci.*, 1999, vol. 94, no. 3, pp. 1366–1393.
23. Ermoliev Yu., Norkin V. Risk and extended utility functions: optimization approaches. *IIASA Interim Report: IIASA IR-03-033*, Laxenburg, 2003, 25 p.
24. Cesari L. Optimization – theory and applications. problems with ordinary differential equations. New York: Springer-Verlag, 1983, Ser. Appl. Math., vol. 17, 542 p.
25. Fontes F.A.C.C., Frankowska H. Normality and nondegeneracy for optimal control problems with state constraints. *J. Optim. Theory Appl.*, 2015, vol. 166, iss. 1, pp. 115–136. doi:10.1007/s10957-015-0704-1 .
26. Hartl R.F., Sethi S.P., Vickson R.G. A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints. *SIAM Review*, 1995, vol. 37, no. 2, pp. 181–218. doi: 10.1137/1037043 .

Aseev S.M. Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russian, e-mail: e-mail: aseev@mi.ras.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

СВОЙСТВА СТАБИЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ ГОРИЗОНТОМ[1]

А. Л. Багно, А. М. Тарасьев

В статье исследуется функция цены в задаче оптимального управления на бесконечном горизонте с подынтегральным индексом, входящим в функционал качества с дисконтирующим множителем. Проведен анализ ее свойств для случая, когда функционал платы управляемой системы содержит индекс качества, который представлен неограниченной функцией. Дана верхняя оценка роста функции цены. Получены необходимые и достаточные условия, при которых функция цены обладает свойствами стабильности в инфинитезимальной форме. Рассмотрен вопрос о совпадении функции цены с обобщенным минимаксным решением уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса. Показана единственность соответствующего минимаксного решения. Дано описание асимптотики роста функции цены для функционалов качества логарифмического, степенного и экспоненциального видов, встречающихся в экономическом и финансовом моделировании. Полученные результаты могут быть использованы для построения сеточных методов апроксимации функции цены как обобщенного минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса. Эти методы являются эффективными средствами в моделировании процессов экономического роста.

Ключевые слова: оптимальное управление, уравнение Гамильтона — Якоби, минимаксное решение, бесконечный горизонт, функция цены, свойства стабильности.

A. L. Bagno, A. M. Tarasyev. Stability properties of the value function in an infinite horizon optimal control problem.

Properties of the value function are examined in an infinite horizon optimal control problem with an integrand index appearing in the quality functional with a discount factor. The properties are analyzed in the case when the payoff functional of the control system includes a quality index represented by an unbounded function. An upper estimate is given for the growth rate of the value function. Necessary and sufficient conditions are obtained to ensure that the value function satisfies the infinitesimal stability properties. The question of coincidence of the value function with the generalized minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation is discussed. The uniqueness of the corresponding minimax solution is shown. The growth asymptotic behavior of the value function is described for the logarithmic, power, and exponential quality functionals, which arise in economic and financial modeling. The obtained results can be used to construct grid approximation methods for the value function as the generalized minimax solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman–Isaacs equation. These methods are effective tools in the modeling of economic growth processes.

Keywords: optimal control, Hamilton–Jacobi equation, minimax solution, infinite horizon, value function, stability properties.

MSC: 49K15, 49L25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-43-56

Введение

Начало изучения свойств стабильности в теории оптимального управления было положено Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным в монографии [9] для решения задачи преследования и убегания. Их исследование было продолжено в работе А. И. Субботина [13], в которой были сформулированы свойства стабильности в инфинитезимальной форме, введено понятие минимаксных решений уравнений Гамильтона — Якоби и доказаны теоремы существования, единственности и корректности. В дальнейшем эти свойства были перенесены Н. Н. Субботиной на обобщенный метод характеристик [11]. Вопросам построения вычислительных методов

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 15-11-10018.

на основе свойств стабильности в инфинитезимальной форме посвящены работы В. Н. Ушакова и его сотрудников [15].

В настоящей статье свойства стабильности используются при решении важной задачи управления на бесконечном горизонте. Ее история восходит к созданию фундаментальных моделей экономического роста Рамсея [2] и Солоу [3]. Однако математическая постановка этой задачи впервые была дана в терминах теории оптимального управления в статье И. Ц. Капуццо Дольчетта и Х. Ишии [1]. Их идеи развили Р. А. Адиатулина и А. М. Тарасьев в работе [4], где они исследовали некоторые свойства функции цены для этой задачи. Следует сказать, что систематический характер изучения задач управления с бесконечным горизонтом на основе принципа максимума Понтрягина был заложен в монографии С. М. Асеева и А. В. Кряжимского [5].

В упомянутых работах процесс описывался как управляемая система на бесконечном горизонте с функционалом качества, содержащим дисконтирующий множитель, а также индекс качества, который представлен ограниченной функцией. Долгое время без рассмотрения оставался случай, когда индекс качества является неограниченной функцией. Этому вопросу посвящена статья М. С. Никольского [12], в которой рассматривались проблемы существования функций цены.

Далее изучение таких задач получило развитие в предыдущей статье авторов [6], в которой были изучены свойства асимптотического роста функции цены, исследована непрерывность функции цены и построены оценки для гёльдеровских параметров непрерывности. В настоящей статье эта работа продолжена в направлении анализа свойств стабильности функций цены.

В разд. 1 найдены необходимые и достаточные условия, при которых функция цены обладает свойствами стабильности, и рассматриваются важные частные случаи для функционалов качества логарифмического, степенного и экспоненциального вида, встречающихся в моделях экономического роста и финансовой математике (см. [7; 10]). В разд. 2 показано, что функция цены является единственным минимаксным решением уравнения Беллмана — Айзекса, классического для теории оптимального управления, частного случая уравнения Гамильтона — Якоби.

1. Свойства стабильности функции цены

В этой статье рассматривается следующая управляемая система:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \tag{1.1}$$

$$x(t_0) = 0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$ (P — компакт). Функционал качества задается равенством

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad \lambda > 0, \quad t_0 > 0. \tag{1.2}$$

Предполагается, что выполнены следующие условия.

1. Функции f и h непрерывны по совокупности переменных на $\mathbb{R}^n \times P$.

2. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ при любом p справедливы соотношения Липшица по аргументу x:

$$\|f(x_1, p) - f(x_2, p)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{1.3}$$

$$|h(x_1, p) - h(x_2, p)| \leqslant L\|x_1 - x_2\|, \tag{1.4}$$

где L — константа.

3. Также для любых x, p выполняется условие подлинейного роста по аргументу x:

$$\|f(x,p)\| \leqslant \varkappa(1+\|x\|), \tag{1.5}$$

$$|h(x,p)| \leqslant \varkappa(1+\|x\|), \tag{1.6}$$

где $\varkappa$ — положительная константа.

Для исследования системы будет удобно ввести переменную

$$\widetilde{y} = e^{-\lambda\tau}h(x(\tau),u(\tau)).$$

Пусть $u(\cdot)$ — измеримое по Лебегу программное управление на конечном интервале $[t_0,T]$. Множество управлений $u(\cdot)$ на интервале $[t_0,T]$ обозначим символом U_T.

Определение 1. *Функцией цены в задаче с конечным горизонтом* для начальной позиции (t_0,z_0), где $t_0 \in (0,T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, называется величина

$$w_T(t_0,z_0) = \sup_{u(\cdot)\in U}\left(\widetilde{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}h(x(\tau),u(\tau))\,d\tau\right),$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет условию $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t))$, τ пробегает значения внутри отрезка $[t_0,T]$, $x(t_0) = x_0$.

Также нам потребуется определение функции цены в задаче с бесконечным горизонтом. Символом U обозначим множество всех программных измеримых по Лебегу управлений $u(\cdot)$ на интервале $[t_0,+\infty]$.

Определение 2. *Функцией цены в задаче с бесконечным горизонтом* для начальной позиции (t_0,z_0), где $t_0 \in (0,T)$, $z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \widetilde{y}_0 \end{pmatrix}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}$, называется величина

$$w(t_0,z_0) = \sup_{u(\cdot)\in U}\lim_{T\to+\infty}\left(\widetilde{y}_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}h(x(\tau),u(\tau))\,d\tau\right), \tag{1.7}$$

где $x(\cdot)$ удовлетворяет условию $\dot{x}(t) = f(x(t),u(t))$, τ пробегает значения внутри отрезка $[t_0,T]$, $x(t_0) = x_0$.

Заметим, что

$$w_T(t_0,z_0) = -\inf_{u(\cdot)\in U}\left(-\widetilde{y}_0 - \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}h(x(\tau),u(\tau))\,d\tau\right) = \widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U}\left(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau),u(\tau)))\,d\tau\right).$$

Если мы обозначим $g(x,u) = -h(x,u)$, $y = -\widetilde{y}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$, то сможем записать

$$w_T(t_0,z_0) = -\widetilde{y}_0 - \inf_{u(\cdot)\in U}\left(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}g(x(\tau),u(\tau))\,d\tau\right) = -\omega_T(t_0,z_0)$$

и также считать функцию $\omega_T(t_0,z_0)$ функцией цены. Отметим, что h удовлетворяет свойствам (1.4) и (1.6), а для параметра y справедливо

$$y = -\widetilde{y} = -e^{-\lambda\tau}h(x(\tau),u(\tau)) = e^{-\lambda\tau}g(x(\tau),u(\tau)).$$

Таким же образом для функции цены $w(t_0, z_0)$ введем ее аналог:

$$w(t_0, z_0) = -\inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \left(-\widetilde{y}_0 - \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} h(x(\tau), u(\tau))\, d\tau \right)$$

$$= -y_0 - \inf_{u(\cdot)\in U} \lim_{T\to+\infty} \left(\int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau} (g(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \right) = -\omega(t_0, z_0).$$

В дальнейшем будем исследовать свойства именно функции $\omega(t_0, z_0)$.

Определим множества, которые нам потребуются дальше. Пусть $z = (x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, $u \in P$, $S = \{s \in \mathbb{R}^m : \|s\| = 1\}$, $t \in [0, +\infty)$. Положим

$$F_1(t, x) = \mathrm{co}\{(f(x, u), e^{-\lambda t} g(x, u)) : u \in P\}, \tag{1.8}$$

$$F_2(t, x, u) = (f(x, u), e^{-\lambda t} g(x, u)).$$

Здесь символом $\mathrm{co}\{x : x \in X\}$ обозначена выпуклая оболочка множества X.

Определим гамильтониан задачи управления соотношением

$$H(x, s) = \frac{1}{\lambda} \min_{u\in P} (\langle s, f(x, u)\rangle + g(x, u)). \tag{1.9}$$

Нетрудно увидеть, что функция $H(x, s)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу x с константой L из условий (1.3), (1.4):

$$|H(x_1, s) - H(x_2, s)| \leqslant L|x_1 - x_2|. \tag{1.10}$$

Символом $Z_1(t, z)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$, отображающих $[t, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяющих почти всюду на каждом конечном интервале времени дифференциальному включению

$$\dot{z}(\tau) \in F_1(\tau, x(\tau)), \tag{1.11}$$

где $\tau \in [t, +\infty]$, и начальному условию $z(t) = z_0$.

Символом $Z_2(t, z, u)$ обозначим множество абсолютно непрерывных функций $z(\cdot)$, отображающих $[t, +\infty)$ в $\mathbb{R}^{m+1}$ и удовлетворяющих почти всюду на каждом конечном интервале времени дифференциальному включению $\dot{z}(\tau) = F_2(\tau, x(\tau), u)$, $u \in P$, где $\tau \in [t, +\infty]$, и начальному условию $z(t) = z_0$.

Будем следовать терминологии [9], где движения из множеств $Z_1(t, z)$, $Z_2(t, z, u)$ называются *обобщенными движениями*. Для обобщенных движений справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $t_0 \in [0, +\infty)$, $z_0 = (x_0, y_0)$, $u \in P$ и движение $z(t) = (x(t), y(t))$, где $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, лежит во множестве $Z_1(0, (x_0, 0))$, тогда в этом множестве $Z_1(0, (x_0, 0))$ также лежит и движение $z_*(t) = (x(t - t_0), e^{-\lambda t_0} y(t - t_0) + y_0)$, где $t \in [t_0, +\infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению множества $Z_1(0, (x_0, 0))$

$$\dot{z}(\tau - t_0) \in \mathrm{co}\{f(x(\tau - t_0), u), e^{-\lambda(\tau - t_0)} g(x(\tau - t_0), u) : u \in P\}$$

для почти всех $\tau > t_0$. Поэтому для функции $z_*(t)$, определенной как

$$z_*(t) = (x(t - t_0), e^{-\lambda t_0} y(t - t_0) + y_0),$$

выполняется соотношение $\dot{z_*}(\tau) \in \mathrm{co}\{f(x_*(\tau), u), e^{-\lambda(\tau)} g(x_*(\tau), u)) : u \in P\}$. Так как выполнено $z_*(t_0) = (x(0), e^{-\lambda t_0} y(0) + y_0) = (x_0, y_0)$, то получаем, что $z_*(\cdot)$ лежит во множестве $Z_1(0, (x_0, 0))$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $\lambda > \varkappa$. Тогда для функции цены в задаче с бесконечным горизонтом справедлива оценка*

$$|\omega(t_0, z_0)| \leqslant A + B\|x_0\|, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

где

$$A = |y_0| + \frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\lambda t_0}, \tag{1.13}$$

$$B = \frac{1}{\lambda - \varkappa} e^{-\lambda t_0}. \tag{1.14}$$

Доказательство. Пусть $\omega(t_0, z_0)$ — функция цены в задаче с бесконечным горизонтом. Покажем справедливость оценки (1.12).

По определению функции цены (1.7)

$$|\omega(t_0, z_0)| = |w(t_0, z_0)| \leqslant \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \left| y_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \right|$$

$$\leqslant |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau), u(\tau)))|\, d\tau = |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}| \cdot |-h(x(\tau), u(\tau))|\, d\tau$$

$$= |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}| \cdot |g(x(\tau), u(\tau))|\, d\tau \leqslant |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int_{t_0}^{T} \varkappa e^{-\lambda\tau}(1 + \|x(\tau)\|)\, d\tau$$

$$\leqslant |y_0| + \lim_{T \to \infty} \int_{t_0}^{T} \varkappa e^{-\lambda\tau}(1 + \|x_0\| e^{\varkappa(\tau - t_0)})\, d\tau = |y_0| + \int_{t_0}^{+\infty} \varkappa e^{-\lambda\tau}\, d\tau + \int_{t_0}^{+\infty} \varkappa \|x_0\| e^{-\lambda\tau + \varkappa(\tau - t_0)}\, d\tau$$

$$= |y_0| + \frac{\varkappa}{-\lambda} e^{-\lambda\tau} \Big|_{t_0}^{+\infty} + \frac{\|x_0\|}{-\lambda + \varkappa} e^{-\lambda\tau + \varkappa(\tau - t_0)} \Big|_{t_0}^{+\infty} = |y_0| + \frac{\varkappa}{\lambda} e^{-\lambda t_0} + \frac{\|x_0\|}{\lambda - \varkappa} e^{-\lambda t_0} = A + B\|x_0\|.$$

Мы получили оценку (1.12). Отметим, что условие $\lambda > \varkappa$ обеспечивает сходимость интегралов.

Теорема доказана.

Особый интерес представляют частные случаи, встречающиеся в моделях экономического роста (см., например, [7, с. 167] и [10, с. 109]), когда подынтегральный индекс $-h(x, u) = g(x, u)$ принимает одно из следующих выражений — во всех этих случаях управляющий параметр максимизируется: $G(x) = \max\limits_{u \in P} |g(x, u)|$.

1. $$G(x) = \max\{0, -ke^{-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i} + k\}, \text{ где } \ k > 0, \ \ a_i > 0, \ \ t \in [0, T]. \tag{1.15}$$

$$|\omega(t_0, z_0)| = |w(t_0, z_0)| \leqslant \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \left| y_0 + \int_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau), u(\tau)))\, d\tau \right|$$

$$\leqslant |y_0| + \sup_{u \in U} \lim_{T \to \infty} \int_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}| \cdot |g(x(\tau), u(\tau))|\, d\tau \leqslant \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \| \max\{0, -ke^{-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i} + k\} \|\, d\tau$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau} \max\{0, -ke^{-\|x_0\| e^{\varkappa(\tau - t_0)}} + k\}\, d\tau.$$

Легко увидеть, что теперь выражение внутри максимума стало положительно. Тогда получаем

$$\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\max\{0, -ke^{-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}+k\}\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{+\infty} -ke^{-\lambda\tau}e^{-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}+ke^{-\lambda\tau}\,d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} -k\|x_0\|e^{-\lambda\tau-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} ke^{-\lambda\tau}\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} -k\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} ke^{-\lambda\tau}\,d\tau$$

$$= ke^{-\|x_0\|e^{\varkappa(\tau-t_0)}}\Big|_{t_0}^{+\infty} + \frac{k}{-\lambda}e^{-\lambda\tau}\Big|_{t_0}^{+\infty} = 0 - ke^{-\|x_0\|} + \frac{k}{\lambda}e^{-\lambda t_0}.$$

Итак, оценка функции цены для этого случая имеет вид

$$|\omega(t_0,z_0)| \leqslant 0 - ke^{-\|x_0\|} + \frac{k}{\lambda}e^{-\lambda t_0}. \tag{1.16}$$

При $t_0 = 0$ эта оценка равна

$$-ke^{-\|x_0\|} + \frac{k}{\lambda}.$$

2. $$G(x) = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-b_i}x_i^{1-b_i}, \text{ где } 0 < b_i < 1, \quad a_i > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{1.17}$$

$$|\omega(t_0,z_0)| = |w(t_0,z_0)| \leqslant \sup_{u\in U}\lim_{T\to\infty}\left|y_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau),u(\tau)))\,d\tau\right|$$

$$\leqslant |y_0| + \sup_{u\in U}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{t_0}^{T}|e^{-\lambda\tau}|\cdot|g(x(\tau),u(\tau))|\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\left\|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{1-b_i}x_i^{1-b_i}\right\|d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\beta\|x_0\|^{\alpha}e^{\alpha\varkappa(\tau-t_0)}\,d\tau = \beta\|x_0\|^{\alpha}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau+\alpha\varkappa\tau-\alpha\varkappa t_0}\,d\tau$$

$$= \beta\|x_0\|^{\alpha}e^{-\alpha\varkappa t_0}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau+\alpha\varkappa\tau}\,d\tau = \frac{\beta\|x_0\|^{\alpha}e^{-\alpha\varkappa t_0}}{\alpha\varkappa-\lambda}e^{(\alpha\varkappa-\lambda)t_0}\Big|_{t_0}^{+\infty} = \frac{\beta\|x_0\|^{\alpha}e^{-\alpha\varkappa t_0}}{\alpha\varkappa-\lambda}(-e^{(\alpha\varkappa-\lambda)t_0}).$$

Здесь $\beta = \max\limits_{i=1,\dots,n}\left\{\dfrac{a_i}{1-b_i}\right\}$; $\alpha = \max\limits_{i=1,\dots,n}\{1-b_i\}$ в случае если $\|x_0\| \geq 1$; $\alpha = \min\limits_{i=1,\dots,n}\{1-b_i\}$ в случае если $\|x_0\| < 1$.

Функция цены ограничена сверху:

$$|\omega(t_0,z_0)| \leqslant \frac{\beta\|x_0\|^{\alpha}e^{-\alpha\varkappa t_0}}{\alpha\varkappa-\lambda}(-e^{(\alpha\varkappa-\lambda)t_0}). \tag{1.18}$$

При $t_0 = 0$ эта оценка равна

$$\frac{\beta\|x_0\|^{\alpha}}{\alpha\varkappa-\lambda}.$$

3. $$G(x) = \max\Big\{0, \sum_{i=1}^{n} a_i\ln x_i\Big\}, \text{ где } a_i > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{1.19}$$

$$|\omega(t_0,z_0)| = |w(t_0,z_0)| \leqslant \sup_{u\in U}\lim_{T\to\infty}\left|y_0 + \int\limits_{t_0}^{T} e^{-\lambda\tau}(-h(x(\tau),u(\tau)))\,d\tau\right|$$

$$\leqslant |y_0| + \sup_{u\in U}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{t_0}^{T} |e^{-\lambda\tau}|\cdot|g(x(\tau),u(\tau))|\,d\tau \leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\Big\|\max\Big\{0,\sum_{i=1}^{n} a_i\ln x_i\Big\}\Big\|\,d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\max\Big\{0,\ln\|x_0\| + (\tau-t_0)\varkappa\sum_{i=1}^{n}a_i\Big\}\,d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\max\{0,\ln\|x_0\|\}\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\max\Big\{0,(\tau-t_0)\varkappa\sum_{i=1}^{n}a_i\Big\}\,d\tau$$

$$\leqslant \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\max\{0,\ln\|x_0\|\}\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}(\tau-t_0)\varkappa\sum_{i=1}^{n}a_i\,d\tau$$

$$= \max\{0,\ln\|x_0\|\}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\,d\tau - \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\varkappa t_0\sum_{i=1}^{n}a_i\,d\tau + \int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{-\lambda\tau}\tau\varkappa\sum_{i=1}^{n}a_i\,d\tau$$

$$= \max\{0,\ln\|x_0\|\}\,\frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\Big|_{t_0}^{+\infty} - \varkappa t_0\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\Big|_{t_0}^{+\infty} + \varkappa\tau\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\Big|_{t_0}^{+\infty} - \varkappa\sum_{i=1}^{n}a_i\int\limits_{t_0}^{+\infty}\frac{e^{-\lambda\tau}}{-\lambda}\,d\tau$$

$$\leqslant \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda}\max\{0,\ln\|x_0\|\} + \varkappa t_0\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{e^{-\lambda t_0}}{-\lambda}\Big|_{t_0}^{+\infty} + \varkappa t_0\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda} - \varkappa\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{e^{-\lambda\tau}}{\lambda^2}\Big|_{t_0}^{+\infty}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda}\max\{0,\ln\|x_0\|\} + \varkappa\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda^2}.$$

Таким образом, имеем

$$|\omega(t_0,z_0)| \leqslant \frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda}\max\{0,\ln\|x_0\|\} + \varkappa\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{e^{-\lambda t_0}}{\lambda^2}. \tag{1.20}$$

При $t_0 = 0$ эта оценка равна

$$\frac{1}{\lambda}\max\{0,\ln\|x_0\|\} + \frac{\varkappa\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}{\lambda^2}.$$

Отметим, что во всех трех случаях условие $\lambda > \varkappa$ не используется.

В статье [6, лемма 4] было показано, что функция цены $\omega(t,z)$ представима в виде

$$\omega(t,z) = y + e^{-\lambda t}\omega(0,x,0).$$

Используя этот факт, мы докажем следующую теорему. Для удобства дальнейших выкладок обозначим $v(x) = \omega(0,(x,0))$ и будем называть эту функцию *стационарной функцией цены.*

Теорема 2. *Пусть* $\lambda > \varkappa$. *Функция* $v\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *является функцией цены задачи оптимального управления* (1.1), (1.2) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.*

1. *Функция* v *непрерывна и для любого момента времени* $t \in [0,+\infty)$ *она ограничена:*

$$|v(x)| \leqslant A + B\|x\|,$$

где параметры A и B удовлетворяют соотношениям (1.13), (1.14).

2. *Для всех $t \in [0,+\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$ существуют движения $z(t) = (x(t), y(t))$, где $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, из множества $Z_1(0,(x,0))$ (из множества решений дифференциального включения* (1.11)*, правая часть которого порождается выпуклой оболочкой* (1.8) *по управлениям $u \in P$) такие, что*

$$e^{-\lambda t} v(x(t)) + y(t) \leqslant v(x). \tag{1.21}$$

3. *Для всех $t \in [0,+\infty)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ найдутся движения $z(t) = (x(t), y(t))$ из множества $Z_2(0,(x,0),u)$, где $y(t) = e^{-\lambda t} g(x(t), u(t))$, такие, что*

$$e^{-\lambda t} v(x(t)) + y(t) \geqslant v(x). \tag{1.22}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть v — функция цены задачи (1.1) (1.2). Покажем, что выполняются условия 1–3. Начнем с первого условия. По теореме 1 имеем

$$|v(x)| = |\omega(0,(x,0))| \leq A + B\|x\|, \quad \text{где} \quad A = \frac{\varkappa}{\lambda}, \quad B = \frac{1}{\lambda - \varkappa}.$$

Покажем справедливость условия 2. По определению цены игры для любого положительного ε найдется стратегия u такая, что

$$\lim_{\theta \to +\infty} y(\theta) \leqslant v(x_0) + \varepsilon$$

для всех $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$. Следовательно,

$$y_0(t) + e^{-\lambda t} v(x_0(t)) = \omega(t, z_0(t)) = \sup_u \lim_{\theta \to +\infty} y(\theta) \leqslant v(x_0) + \varepsilon.$$

Здесь $u \in U$, $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$. Итак, для любого положительного ε нашлось движение z_0 такое, что выполняется условие 2. Условие 3 доказывается аналогично.

Теперь покажем справедливость утверждения в обратную сторону. Пусть некоторая функция φ удовлетворяет условиям 1–3 и $x_0 \in \mathbb{R}^m$. Покажем, что $\varphi(x_0) = v(x_0)$. По условию 2 найдется движение $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot)) \in Z_1(0,(x_0,0))$ такое, что $e^{-\lambda(t-t_0)} \varphi(x(t-t_0)) + y(t-t_0) \leqslant \varphi(x_0)$. Дважды пользуясь условием 2, получаем

$$e^{-\lambda t} \varphi(x(t-t_0)) + e^{-\lambda t_0} y(t-t_0) + y_0 \leqslant e^{-\lambda t_0} \varphi(x_0) + y_0 \leqslant \varphi(x_0).$$

По лемме 1 движение $(x(\tau - t_0), e^{-\lambda t_0} y(\tau - t_0) + y)$, где $\tau \in [t_0, +\infty)$, лежит во множестве $Z_1(t_0, x_0)$, $z_0 = (x_0, y_0)$. Теперь можно воспользоваться леммой 15.1 из [9]. А именно для каждого числа $T \in (0,+\infty)$ найдется стратегия u такая, что для любого движения $z(\cdot) = (x(\cdot), y(\cdot))$ выполняется неравенство $e^{-\lambda T} \varphi(x(T)) + y(T) \leqslant \varphi(x_0)$. Пользуясь теоремой 1, можем записать

$$-e^{-\lambda T}(A + B\|x(T)\|) + y(T) \leqslant \varphi(x_0), \tag{1.23}$$

откуда по определению цены $\omega_T(0,(x_0,0))$ получим

$$-e^{-\lambda T}(A + B\|x(T)\|) + w_T(0,(x_0,0)) \leqslant \varphi(x_0), \quad T \in (0,+\infty).$$

Теперь воспользуемся неравенством Гроноулла:

$$-e^{-\lambda T} A - e^{-\lambda T} B\|x_0\| e^{\varkappa(\tau - t_0)} + w_T(0,(x_0,0)) \leqslant \varphi(x_0), \quad T \in (0,+\infty).$$

Далее устремим T к бесконечности. Первое слагаемое, очевидно, стремится к нулю, второе слагаемое также стремится к нулю, поскольку $\lambda > \varkappa$. В результате имеем $v(x_0) \leqslant \varphi(x_0)$. Аналогично можно показать, что $v(x_0) \geqslant \varphi(x_0)$.

Теорема доказана.

Сделаем замечание относительно формулировки теоремы 2 для частных случаев (1.15), (1.17), (1.19). При выводе оценок для их функций цены условие $\lambda > \varkappa$ не требуется. В доказательстве теоремы 2 данное условие необходимо для выполнения оценки (1.23), являющейся аналогом оценок (1.16), (1.18), (1.20). Таким образом, для рассмотренных случаев условие $\lambda > \varkappa$ в формулировке теоремы 2 можно опустить.

2. Связь функции цены с минимаксными решениями уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса

В данном разделе мы будем рассматривать уравнение вида

$$-\varphi + \frac{1}{\lambda}\min_u(\langle\nabla\varphi, f(x,u)\rangle + g(x,u)) = 0. \tag{2.1}$$

Введем некоторые обозначения и определения, которые нам потребуются дальше:

$$S = \{s \in \mathbb{R}^n\colon \|s\| = 1\}, \quad A(x) = \{f \in \mathbb{R}^n\colon \|f\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1 + \|x\|)\},$$

$$A_{\text{в}}(x,q) = \{f \in A(x)\colon \langle f, q\rangle \geqslant H(x,q)\}, \quad A_{\text{н}}(x,p) = \{f \in A(x)\colon \langle f, p\rangle \leqslant H(x,p)\}, \text{ где } q, p \in \mathbb{R}^n.$$

Будем считать, что выполнено условие $\lambda > \varkappa$.

Символом $X_{\text{в}}(x,q)$ ($X_{\text{н}}(x,p)$) обозначим множества абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих при почти всех t дифференциальным включениям

$$\dot{x}(t) \in A_{\text{в}}(x,q) \quad (\dot{x}(t) \in A_{\text{н}}(x,p))\,.$$

Напомним основные определения [13].

Верхним решением уравнения (2.1) называется полунепрерывная снизу функция φ такая, что $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой при любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $q \in S$ найдутся функции $z_{\text{в}} = (x_{\text{в}}(\cdot), y_{\text{в}}(\cdot))$ из множества $X_{\text{в}}(x,q)$, удовлетворяющие условию

$$e^{-\tau}\varphi(x_{\text{в}}(\tau)) + y_{\text{в}}(\tau) \leqslant \varphi(x). \tag{2.2}$$

Нижним решением уравнения (2.1) называется полунепрерывная сверху функция φ такая, что $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, для которой при любых $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $p \in S$ найдутся функции $z_{\text{н}} = (x_{\text{н}}(\cdot), y_{\text{н}}(\cdot))$ из множества $X_{\text{н}}(x,p)$, удовлетворяющие условию

$$e^{-\tau}\varphi(x_{\text{н}}(\tau)) + y_{\text{н}}(\tau) \geqslant \varphi(x). \tag{2.3}$$

Непрерывная функция $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, являющаяся одновременно верхним и нижним решениями уравнения (2.1), называется *минимаксным решением* этого уравнения.

Нижней (*верхней*) *производной Дини по направлению* d называется функция

$$\partial_-\omega(x)|(d) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \inf_{(\delta,d')\in\Delta_\varepsilon(x,d)} \frac{\omega(x+\delta d') - \omega(x)}{\delta}$$

$$\Big(\partial_+\omega(x)|(d) = \lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{(\delta,d')\in\Delta_\varepsilon(x,d)} \frac{\omega(x+\delta d') - \omega(x)}{\delta}\Big),$$

где $\Delta_\varepsilon(x,d) = \{(\delta,d') \in (0,\varepsilon) \times \mathbb{R}^n\colon \|d - d'\| \leqslant \varepsilon\}$.

Для свойств стабильности (1.21), (1.22) известны следующие два утверждения (подробнее см. теоремы 5.4 и 5.5 в [14]).

Утверждение 1. *Пусть φ — непрерывная функция. Тогда условия* (1.21), (1.22) *эквивалентны* (2.4), (2.5)*:*

$$\min_{d=(d_1,d_2)\in A_{\text{в}}(x,q)}\{d_2 + \partial_-\varphi(x)|(d_1)\} - \varphi(x) \leqslant 0, \tag{2.4}$$

$$\max_{d=(d_1,d_2)\in A_{\text{н}}(x,p)}\{d_2 + \partial_+\varphi(x)|(d_1)\} - \varphi(x) \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Утверждение 2. *Пусть φ — непрерывная функция. Тогда условия* (2.4), (2.5) *эквивалентны* (2.6), (2.7)*:*

$$\sup_{d\in\mathbb{R}}\{\langle s, d\rangle - \partial_-\varphi(x)|(d)\} \geqslant -\varphi(x) + H(x,s), \tag{2.6}$$

$$\inf_{d\in\mathbb{R}}\{\langle s, d\rangle - \partial_+\varphi(x)|(d)\} \leqslant -\varphi(x) + H(x,s). \tag{2.7}$$

Лемма 2. *Любое нижнее решение уравнения* (2.1), *удовлетворяющее условиям подлинейного роста* (1.5), (1.6), *не превосходит любое верхнее решение, т. е.* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi_{в}(x) \geqslant \varphi_{н}(x). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi_{\text{в}}(x)$, $\varphi_{\text{н}}(x)$ — верхнее и нижнее решения, удовлетворяющие условиям подлинейного роста (1.12). Возьмем $k \in \mathbb{N}$. Полагаем

$$N_k = 2^k, \quad T_k = k, \quad \delta_k = \frac{T_k}{N_k},$$

где $i \in \{0, 1, \cdots N_k\}$. Рассмотрим дифференциальные включения

$$\dot{x^k_{\text{в}}}(t) \in A_{\text{в}}(x^k_{\text{в}}(\tau_{ik}), \varphi(x^k_{\text{в}}(\tau_{ik}))), \quad \dot{x^k_{\text{н}}}(t) \in A_{\text{н}}(x^k_{\text{н}}(\tau_{ik}), \varphi(x^k_{\text{н}}(\tau_{ik}))),$$

где $t \in [\tau_{ik}, \tau_{i+1k})$, $i = \overline{0, N_k - 1}$, с начальными условиями $x^k_{\text{в}}(0) = x^k_{\text{н}}(0) = x_0$. Выберем решения включений так, чтобы они были непрерывны в точках τ_{ik} и выполнялись неравенства

$$\varphi_{\text{в}}(x^k_{\text{в}}(\tau_{i+1k})) \leqslant \varphi_{\text{в}}(x^k_{\text{в}}(\tau_{ik})), \quad \varphi_{\text{н}}(x^k_{\text{н}}(\tau_{i+1k})) \geqslant \varphi_{\text{н}}(x^k_{\text{н}}(\tau_{ik})).$$

Отсюда и из определений верхнего (2.2) и нижнего решения (2.3) следует, что

$$\varphi_{\text{в}}(x) \geqslant e^{-T_k}\varphi_{\text{в}}(x^k_{\text{в}}(T_k)) + y^k_{\text{в}}(T_k), \quad \varphi_{\text{н}}(x) \leqslant e^{-T_k}\varphi_{\text{н}}(x^k_{\text{н}}(T_k)) + y^k_{\text{н}}(T_k).$$

Теперь, если мы покажем, что $x_{\text{в}}(\cdot) = x_{\text{н}}(\cdot)$, то отсюда легко будет следовать, что нижнее решение не превосходит верхнее. Для этого докажем, что $\lim\limits_{k \to +\infty} \|x^k_{\text{в}}(\cdot) - x^k_{\text{н}}(\cdot)\| = 0$. Обозначим

$$M = \max\{\sqrt{2}\varkappa(1 + \|x\|) \colon x \in A(x)\}.$$

Так как $\dot{x}^k_{\text{в}}(\cdot)$ и $\dot{x}^k_{\text{н}}(\cdot)$ содержатся во множестве $A(x)$, то

$$\|\dot{x}^k_{\text{в}}(t)\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1 + \|x^k_{\text{в}}\|) \leqslant M, \quad \|\dot{x}^k_{\text{н}}(t)\| \leqslant \sqrt{2}\varkappa(1 + \|x^k_{\text{н}}\|) \leqslant M.$$

Отсюда следует $\|x^k_{\text{в}}(t) - x^k_{\text{в}}(\tau_{ik})\| \leqslant M\delta_k$, $\|x^k_{\text{н}}(t) - x^k_{\text{н}}(\tau_{ik})\| \leqslant M\delta_k$. Для упрощения дальнейших выкладок примем $s_k(t) = x^k_{\text{н}}(t) - x^k_{\text{в}}(t)$. По неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\begin{gathered}\langle s_k(t) - s_k(\tau_{ik}), \dot{x}^k_{\text{н}}(t) - \dot{x}^k_{\text{в}}(t)\rangle \\ \leqslant \|x^k_{\text{в}}(t) - x^k_{\text{в}}(\tau_{ik})\|\|\dot{x}^k_{\text{н}}(t) - \dot{x}^k_{\text{в}}(t)\| + \|x^k_{\text{н}}(t) - x^k_{\text{н}}(\tau_{ik})\|\|\dot{x}^k_{\text{н}}(t) - \dot{x}^k_{\text{в}}(t)\| \leqslant 4M^2\delta_k.\end{gathered} \tag{2.9}$$

По определению $x^k_{\text{в}}(t)$ и $x^k_{\text{в}}(\tau_{ik})$ и свойствам подлинейного роста (1.12) уравнения (2.1) выводим

$$x^k_{\text{в}}(t) \in A_{\text{в}}(x^k_{\text{в}}(t)) \subseteq A_{\text{в}}(x^k_{\text{н}}(t)) \subseteq A_{\text{в}}(x(t)), \quad x^k_{\text{н}}(t) \in A_{\text{н}}(x^k_{\text{н}}(t)) \subseteq A_{\text{н}}(x(t)).$$

По определению множеств $A_{\text{в}}(x)$ и $A_{\text{н}}(x)$ получаем

$$\langle s_k(\tau_{ik}), x^k_{\text{в}}(t)\rangle \geqslant H(x^k_{\text{в}}(t), \varphi_{\text{н}}(x(t))), \quad \langle s_k(\tau_{ik}), x^k_{\text{н}}(t)\rangle \leqslant H(x^k_{\text{в}}(t), \varphi_{\text{н}}(x(t))).$$

Благодаря липшицевости функции $H(x, s)$ (1.10) можем записать

$$\langle s_k(\tau_{ik}), \dot{x}^k_{\text{н}}(t) - \dot{x}^k_{\text{в}}(t)\rangle \leqslant L\|s_k(\tau_{ik})\| \cdot \|s_k(t)\|.$$

Заметим, что

$$\|s_k(\tau_{ik})\| - \|s_k(t)\| \leqslant \|s_k(\tau_{ik}) - s_k(t)\| \leqslant 2M\delta_k, \quad \|s_k(t)\| \leqslant \|x^k_{\text{н}}(t) - x\| + \|x^k_{\text{в}}(t) - x\| \leqslant 2MT_k.$$

Отсюда следует, что $\langle s_k(\tau_{ik}), \dot{s}_{\text{н}}^k(t)\rangle \leqslant L\|s_k(t)\|^2 + 4LM^2\delta_k T_k$. Преобразуя левую часть и пользуясь оценкой (2.9), получаем

$$\frac{d\|s_k(t)\|^2}{dt} = 2\langle s_k(t), \dot{s}_k(t)\rangle = 2\langle s_k(\tau_{ik}), \dot{s}_k(t)\rangle + 2\langle s_k(t) - s_k(\tau_{ik}), \dot{s}_k(t)\rangle$$

$$\leqslant 2L\|s_k(t)\|^2 + 8M^2\delta_k(LT_k + 1).$$

Учитывая это и соотношение $\|s_k(0)\|^2 = 0$, имеем

$$\|s_k(t)\|^2 = \int\limits_0^t \frac{d\|s_k(\tau)\|^2}{dt} d\tau \leqslant 2L \int\limits_0^t \|s_k(t)\|^2 d\tau + 8M^2\delta_k(LT_k + 1)T_k.$$

По неравенству Гронуолла можем записать

$$\|s_k(t)\|^2 \leqslant 8M^2\delta_k(LT_k + 1)T + e^{2LT_k} 8M^2\delta_k L(LT_k + 1)T_k^2.$$

Устремив $k \to +\infty$, получаем $\lim\limits_{k\to+\infty} \|s^k(T_k)\| = \lim\limits_{k\to+\infty} \|x_{\text{в}}^k(T_k) - x_{\text{н}}^k(T_k)\| = 0$. Отсюда, из определений верхнего (2.2) и нижнего решения (2.3), выбора $\{T_k\}_1^\infty$ и условий подлинейного роста (1.12) следует, что

$$\varphi_{\text{в}}(x) \geqslant \varphi_{\text{н}}(x).$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *Существует единственное минимаксное решение уравнения* (2.1)*, удовлетворяющее условию подлинейного роста* (1.12)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению минимаксного решения оно одновременно является и верхним, и нижним решением. Другими словами, для него справедливо равенство

$$\varphi_{\text{в}}(x) = \varphi_{\text{н}}(x). \tag{2.10}$$

Предположим, что уравнение (2.1) имеет другое минимаксное решение, для которого

$$\varphi_{\text{в}}(x) = \varphi_{\text{н}}(x). \tag{2.11}$$

По лемме 2 $\varphi_{\text{н}}(x) \leqslant \varphi_{\text{в}}(x)$. Отсюда, из (2.10) и (2.11) следует $\varphi_{\text{в}}(x) \leqslant \varphi_{\text{н}}(x)$. Однако строгое неравенство противоречит условию (2.8) леммы 2. Таким образом,

$$\varphi_{\text{н}}(x) = \varphi_{\text{в}}(x) = \varphi_{\text{н}}(x) = \varphi_{\text{в}}(x),$$

т. е. оба минимаксных решения совпадают.

Теорема доказана.

Перед доказательством следующей теоремы напомним, что функция $v(x) = \omega(0, (x, 0))$ — стационарная функция цены.

Теорема 4. *Функция цены v задачи* (1.1), (1.2) *является минимаксным решением уравнения* (2.1)

$$-\varphi + \frac{1}{\lambda}\min_u(\langle\nabla\varphi, f(x,u)\rangle + g(x,u)) = 0,$$

которое удовлетворяет условию подлинейного роста

$$|\omega(t,x)| \leqslant A + B\|x\|, \tag{2.12}$$

где параметры A и B удовлетворяют соотношениям (1.13), (1.14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что выполняется неравенство

$$\min\{d_2 + \partial_- v(x)|(d_1)\colon d = (d_1, d_2) \in F_1(0, x)\} \leqslant \lambda v(x). \tag{2.13}$$

Рассмотрим разбиение временной оси $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда по условию 2 из теоремы 2 найдется движение $z_k(\cdot) = (x_k(\cdot), y_k(\cdot))$ из множества $Z_1(0, (x, 0))$ такое, что

$$v(x) \geqslant e^{-\lambda\tau_k} v(x_k(\tau_k)) + y_k(\tau_k).$$

Добавим в обе части слагаемое $-e^{-\lambda\tau_k} v(x)$ и поделим на τ_k:

$$\frac{v(x) - e^{-\lambda\tau_k} v(x)}{\tau_k} \geqslant e^{-\lambda\tau_k} \frac{v(x_k(\tau_k)) - v(x)}{\tau_k} + \frac{y_k(\tau_k)}{\tau_k}.$$

Отметим, что функции $z_k(\cdot)$ локально липшицевы, так как функции f и g ограничены на каждом компактном множестве. Для локально липшицевых функций справедлива теорема о среднем [8, с. 12], по которой

$$z_k(\tau_k) = (x, 0) + d_k\tau_k,$$

здесь $d_k \in F_1(\theta_k\tau_k, x_k(\theta_k\tau_k))$, $\theta_k \in (0, 1)$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку многозначное отображение $F_1(t, x)$ непрерывно, то $F_1(\theta_k\tau_k, x_k(\theta_k\tau_k))$ сходится к компакту $F_1(0, x)$ при $k \to \infty$. Поэтому найдется вектор $d = (d_1, d_2) \in F_1(0, x)$, являющийся пределом некоторой последовательности из $\{d_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. можно считать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k(\tau_k) - (x, 0)}{\tau_k} = d = (d_1, d_2).$$

По определению нижней производной Дини по направлению

$$\partial_- v(x)|(d_1) \leqslant \frac{v(x_k(\tau_k)) - v(x)}{\tau_k}.$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$, получаем $\lambda v(x) \geqslant \partial_- v(x)|(d_1) + d_2$, т. е. выполняется неравенство (2.13). Очевидно, что

$$\sup\{\langle s, d\rangle - \partial_- v(x)|(d)\colon d \in \mathbb{R}^m\} \geqslant \langle s, d_1\rangle - \partial_- v(x)|(d_1) \geqslant \langle s, d_1\rangle + d_2 - \lambda v(x)$$

$$\geqslant \min\{\langle s, d_1\rangle + d_2\colon d = (d_1, d_2) \in F_1(0, x)\} - \lambda v(x).$$

Отсюда, из определений множества $F_1(0, x)$ (1.8) и уравнения $H(x, s)$ (1.9) следует

$$\sup\{\langle s, d\rangle - \partial_- v(x)|(d)\colon d \in \mathbb{R}^m\} \geqslant -\lambda v(x) + \min_u(\langle s, f(x, u)\rangle + g(x, u)),$$

где $u \in P$. Аналогично получаем второе неравенство

$$\inf\{\langle s, d\rangle - \partial_+ v(x)|(d)\colon d \in \mathbb{R}^m\} \leqslant -\lambda v(x) + \min_u(\langle s, f(x, u)\rangle + g(x, u))$$

для всех $x, s \in \mathbb{R}^m$, где $u \in P$. Из последних двух оценок, определения минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса вида $-\varphi + H(x, \nabla\varphi) = 0$, утверждений 1 и 2 следует, что функция v является удовлетворяющим условию подлинейного роста (2.12) минимаксным решением уравнения

$$-\lambda\varphi + \min_u(\langle\nabla\varphi, f(x, u)\rangle + g(x, u)) = 0. \tag{2.14}$$

Согласно теореме 3 функция v — единственное минимаксное решение уравнения (2.14). Поделив (2.14) на λ, получим уравнение (2.1).

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H.** Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory // Appl. Math. Optimiz. 1984. Vol. 11, no. 2. P. 161–181. doi: 10.1007/bf01442176 .
2. **Ramsey F.P.** A mathematical theory of saving // The Economic Journal. December 1928. P. 543–559. doi: 10.2307/2224098 .
3. **Solow R.M.** Technical change and the aggregate production function // The Review of Economics and Statistics. 1957. Vol. 39, no. 3. P. 312–320. doi: 10.2307/1926047 .
4. **Адиатулина Р.А., Тарасьев А.М.** Дифференциальная игра неограниченной продолжительности // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 4. С. 531–537.
5. **Асеев С.М., Кряжимский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271.
6. **Багно А.Л., Тарасьев А.М.** Свойства функции цены в задачах оптимального управления с бесконечным горизонтом // Вест. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 3–14. doi: 10.20537/vm160101 .
7. **Интрилигатор М.** Математические методы оптимизации и экономическая теория / пер. с англ. Г. И. Жуковой, Ф. Я. Кельмана. М.: Айрис-пресс, 2002. 576 с.
8. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
9. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
10. **Крушвиц Л.** Финансирование и инвестиции / пер. с нем.; под ред. В. В. Ковалев, З. А. Сабов. СПб.: Питер, 2000. 381 с.
11. Метод характеристик для уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова / УрО РАН. Екатеринбург, 2013. 244 с.
12. **Никольский М.С.** О локальной липшицевости функции Беллмана в одной оптимизационной задаче // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, no. 2. С. 106–115.
13. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
14. **Султанова Р.А.** Минимаксные решения уравнений в частных производных: дис. . . . канд. физ.-матем. наук / Урал. гос. ун-т им. А.М. Горького. Екатеринбург, 1995. 192 с.
15. **Тарасьев А.М., Ушаков В.Н., Успенский А.А.** Аппроксимационные схемы и конечноразностные операторы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.

Багно Александр Леонидович
аспирант
Уральский федеральный университет
e-mail: bagno.alexander@gmail.com

Поступила 1.11.2016

Тарасьев Александр Михайлович
д-р физ.-мат. наук, зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
профессор
Уральский федеральный университет
e-mail: tam@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Capuzzo Dolcetta I.C., Ishii H. Approximate solution of the Bellman equation of deterministic control theory. *Appl. Math. Optimiz*, 1984, vol. 11, no. 2, pp. 161–181. doi: 10.1007/bf01442176 .
2. Ramsey F.P. A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, December 1928, pp. 543–559. doi: 10.2307/2224098 .
3. Solow R.M. Technical change and the aggregate production function. *The Review of Economics and Statistics*, 1957, August, Vol. 39, no. 3, pp. 312–320. doi: 10.2307/1926047 .
4. Adiatulina R.A., Tarasyev A.M. A differential game of unlimited duration. *J. Appl. Math. Mech.*, 1987, vol. 51, no. 4, pp. 415–420. doi: 10.1016/0021-8928(87)90077-3 .

5. Aseev S.M., Kryazhimskii A.V. The Pontryagin maximum principle and optimal economic growth problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2007, vol. 257, pp. 1–255. doi: 10.1134/s0081543807020010 .
6. Bagno A.L.,Tarasyev A.M. Properties of the value function in optimal control problems with infinite horizon. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, vol. 26, no. 1, pp. 3–14 (in Russian).
7. Intriligator M. *Mathematical Optimization and Economic Theory.* Philadelphia: SIAM, 2002, Ser. Classics Appl. Math., 499 p. Translated under the title *Matematicheskie metody optimizatsii i ekonomicheskaya teoriya.* Moscow, AIRIS PRESS, 2002, 576 p. doi: 10.1137/1.9780898719215 .
8. Clarke F. *Optimization and Nonsmooth Analysis.* New York: Wiley Interscience, 1983, 308 p. doi: 10.1137/1.9781611971309 . Translated under the title *Optimizatsiya i negladkii analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1988, 280 p.
9. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
10. L. Kruschwitz. *Finanzierung und Investition.* München/Wien: Oldenbourg Verlag, 1999, 408 S. Translated under the title *Finansirovanie i investitsii.* St. Petersburg, Piter Publ., 2000, 381 p. doi: 10.1524/9783486716078 .
11. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniy Gamil'tona–Yakobi– Bellmana* [The method of characteristics for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation]. Yekaterinburg, 2013, 244 p.
12. Nikol'skii M.S. On the local Lipschitz property of the Bellman function in an optimization problem. Proc. Steklov Inst. Math, 2004, suppl. 2, pp. S115–S125.
13. Subbotin A.I. *Minimaxnye neravenstva i uravneniya Gamiltona — Yakobi* [Minimax Inequalities and Hamilton–Jacobi Equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p. (in Russian).
14. Sultanova R.A. *Minimaksnye resheniya uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Minimax solutions of partial differential equations]. Dissertation, Cand. Sci. (Phys.–Math.), Yekaterinburg, 1995, 192 p. (in Russian).
15. Tarasyev A.M., Uspenskii A.A., Ushakov V.N. Approximation schemes and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Izv. Akad. Sci. Tekhn. Kibernet*, 1994, no. 3, pp. 173–185 (in Russian).

A. L. Bagno, doctoral student, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: bagno.alexander@gmail.com .

A. M. Taras'ev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: tam@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.988.68

ДВУХЭТАПНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ[1]

В. В. Васин, А. Ф. Скурыдина

Для уравнения с нелинейным дифференцируемым оператором, действующим в гильбертовом пространстве, исследуется двухэтапный метод построения регуляризующего алгоритма. А именно сначала используется схема регуляризации Лаврентьева, а затем к регуляризованному уравнению применяется метод Ньютона, либо нелинейные аналоги α-процессов: метод минимальной ошибки, метод минимальной невязки и метод наискорейшего спуска. Для этих процессов устанавливается линейная скорость сходимости и свойство фейеровости итераций. Рассматриваются два случая: оператор задачи является либо монотонным, либо оператор – конечномерный, производная которого имеет неотрицательный спектр. Для двухэтапного метода с монотонным оператором дается оценка погрешности, оптимальная по порядку на классе истокообразно представимых решений. Для второго случая погрешность метода оценивается по невязке. Обсуждаются результаты численного эксперимента при реализации исследуемых методов и их модифицированных аналогов для трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии.

Ключевые слова: схема регуляризации Лаврентьева, метод Ньютона, нелинейные α-процессы, двухэтапный метод, обратные задачи гравиметрии и магнитометрии.

V. V. Vasin, A. F. Skurydina. A two-stage method of construction of regularizing algorithms for nonlinear ill-posed problems.

For an equation with a nonlinear differentiable operator acting in a Hilbert space, we study a two-stage method of construction of a regularizing algorithm. First, we use Lavrientiev's regularization scheme. Then, we apply to the regularized equation either Newton's method or nonlinear analogs of α-processes: the minimum error method, the minimum residual method, and the steepest descent method. For these processes we establish the linear convergence rate and the Fejér property of iterations. Two cases are considered: when the operator of the problem is monotone and when the operator is finite-dimensional and its derivative has nonnegative spectrum. For the two-stage method with a monotone operator, we give an error bound, which has optimal order on the class of sourcewise representable solutions. In the second case, the error of the method is estimated by means of the residual. The proposed methods and their modified analogs are implemented numerically for three-dimensional inverse problems of gravimetry and magnetometry. The results of the numerical experiment are discussed.

Keywords: Lavrentiev regularization scheme, Newton's method, nonlinear α-processes, two-stage algorithm, inverse gravimetry and magnetometry problems.

MSC: 65J15, 65J20, 45L05

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-57-74

1. Введение

Рассматривается нелинейное уравнение

$$A(u) = f \tag{1.1}$$

в гильбертовом пространстве U с непрерывно дифференцируемым по Фреше оператором A, для которого обратные операторы $A'(u)^{-1}$, A^{-1} разрывны, что влечет некорректность задачи (1.1). Для построения регуляризующего алгоритма (РА) предлагается двухэтапный метод, предусматривающий на первом этапе использование регуляризации по схеме Лаврентьева

$$A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta = 0, \tag{1.2}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-01-00629, 15-01-05984, 16-51-50064).

где $\|f - f_\delta\| \leq \delta$, u^0 — некоторое приближение к решению; а на втором этапе для аппроксимации регуляризованного решения u_α применяются либо регуляризованный метод Ньютона (РМН)

$$u^{k+1} = u^k - \gamma(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u^k) + \alpha(u^k - u^0) - f_\delta) \equiv T(u^k), \tag{1.3}$$

либо нелинейные аналоги α-процессов

$$u^{k+1} = u^k - \gamma \frac{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle}{\langle (A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{\varkappa+1} S_\alpha(u^k), S_\alpha(u^k)\rangle} S_\alpha(u^k) \equiv T(u^k) \tag{1.4}$$

при $\varkappa = -1, 0, 1$. Здесь $\alpha, \bar{\alpha}$ — положительные параметры регуляризации, $\gamma > 0$ — демпфирующий множитель (параметр шага), $S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta$.

Предполагается, что либо оператор $A'(u^k)$ — неотрицательно определенный оператор, как это имеет место для монотонного оператора A, либо $A'(u^k)$ имеет неотрицательный спектр, состоящий из различных собственных чисел, когда $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (конечномерный случай). При этих предположениях операторы $(A'(u^k) + \bar{\alpha}I)^{-1}$ существуют и ограничены, следовательно, процессы (1.3), (1.4) определены корректно.

Итеративно регуляризованный метод Ньютона ($\gamma = 1$, $\bar{\alpha} = \alpha = \alpha_k$) для вариационных неравенств был предложен и исследован ранее в [1; 2]. Подход основан на том, что априори выбирается подходящим образом последовательность параметров $\alpha_{k(\delta)}$ и при некоторых условиях, в том числе на вторую производную оператора A, доказывается сходимость итераций к решению уравнения (1.1). В данной работе в предположении, что производная $A'(u)$ удовлетворяет условию Липшица, устанавливаются линейная скорость сходимости методов (1.3), (1.4) и свойство фейеровости итераций. При истокообразной представимости решения асимптотическое правило останова итераций $k(\delta)$ определяется из равенства оценок погрешности для итераций и регуляризованного решения u_α.

Необходимо отметить, что в рамках двухэтапного подхода в работах [3–5] исследовались модифицированные варианты процессов (1.3), (1.4) ($1 \leq \varkappa < \infty$), когда вместо $A'(u^k)$ используется производная в начальной точке $A'(u^0)$ в ходе всего итерационного процесса, где $A'(u^0)$—самосопряженный неотрицательно определенный оператор.

Очевидно, что если A — линейный оператор и $\alpha = \bar{\alpha} = 0$, $\gamma = 1$, то процессы (1.4) при $\varkappa = -1, 0, 1$ переходят в метод минимальной ошибки (ММО), метод наискорейшего спуска (МНС) и метод минимальных невязок (ММН). Поэтому (1.4) можно рассматривать как нелинейные регуляризованные аналоги ММО, МНС и ММН. Для краткости сохраним эти названия и для нелинейных аналогов как для $\gamma = 1$, так и для $\gamma > 0$.

В заключение обзора заметим, что в линейном случае для неотрицательно определенного оператора A иной подход к построению итеративно-регуляризованных α-процессов $-1 \leq \varkappa < \infty$ предложен в [2].

Статья организована следующим образом. В разд. 2 для монотонного оператора A с производной $A'(u)$, удовлетворяющих условию Липшица, исследуется метод Ньютона (1.3), для которого доказывается сходимость к регуляризованному решению, устанавливаются оценка погрешности и свойство фейеровости оператора шага. В разд. 3 при тех же условиях на оператор и с тех же позиций рассматриваются процессы (1.4). Раздел 4 посвящен итерационным процессам (1.3), (1.4) для операторного уравнения (1.1) в конечномерном пространстве, когда $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и матрица $A'(u^k)$ имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений. В разд. 5 устанавливаются регуляризующие свойства двухэтапного метода, состоящего из схемы регуляризации в форме (1.2) и итерационной аппроксимации регуляризованного решения одним из процессов (1.3), (1.4). Результаты численных экспериментов для обратных задач гравиметрии и магнитометрии представлены в разд. 6.

2. Метод Ньютона для монотонного оператора

Для доказательства теорем сходимости и получения оценок погрешности нам понадобятся условия на оператор A и его производную:

$$\|A(u) - A(v)\| \le N_1\|u - v\| \quad \forall u, v \in U, \tag{2.1}$$

$$\|A'(u) - A'(v)\| \le N_2\|u - v\| \quad \forall u, v \in U. \tag{2.2}$$

Кроме того, предполагается, что известна оценка для нормы производной в точке u^0 (начальном приближении), т. е.

$$\|A'(u^0)\| \le N_0 \le N_1, \quad \|u^0 - u_\alpha\| \le r, \quad \|A'(u^0)\| \ne 0. \tag{2.3}$$

З а м е ч а н и е 2.1. Начальное приближение в неравенстве (2.3) в общем случае не обязано совпадать с u^0 в схеме (1.2). Однако для простоты изложения будем считать, что это один и тот же элемент. Кроме того, для монотонного оператора A оператор $A + \alpha I$ равномерно монотонный, поэтому при выполнении условия 2.1 согласно [6, теорема 43.7] регуляризованное уравнение (1.2) имеет единственное решение.

Теорема 2.1. *Пусть A — монотонный оператор, для которого выполнены условия* (2.1), (2.2) *для $u, v \in S_r(u_\alpha)$, $r \le \alpha/N_2$, $0 < \alpha \le \bar\alpha$, $u^0 \in S_r(u_\alpha)$.*

Тогда для процесса (1.3) *с $\gamma = 1$ имеет место линейная скорость сходимости метода при аппроксимации единственного решения u_α регуляризованного уравнения* (1.2)

$$\|u^k - u_\alpha\| \le q^k r, \quad q = \Bigl(1 - \frac{\alpha}{2\bar\alpha}\Bigr). \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая, что для монотонного оператора A $\|(A'(u)+\bar\alpha I)^{-1}\| \le 1/\bar\alpha$ а из (2.2) следует справедливость разложения

$$A(u_\alpha) = A(u^k) + A'(u^k)(u_\alpha - u^k) + \xi, \quad \|\xi\| \le \frac{N_2}{2}\|u_\alpha - u^k\|^2,$$

приходим к соотношению

$$u^{k+1} - u_\alpha = u^k - u_\alpha - (A'(u^k) + \bar\alpha I)^{-1}\bigl(A(u^k) - A(u_\alpha) + \alpha(u^k - u_\alpha)\bigr) = u^k - u_\alpha$$
$$- (A'(u^k) + \bar\alpha I)^{-1}\bigl(A'(u^k)(u^k - u_\alpha) + \bar\alpha(u^k - u_\alpha) - \xi + (\alpha - \bar\alpha)(u^k - u_\alpha)\bigr).$$

Из полученного соотношения вытекает оценка

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \le \frac{1}{\bar\alpha}\Bigl(\frac{N_2\|u^k - u_\alpha\|^2}{2} + (\bar\alpha - \alpha)\|u^k - u_\alpha\|\Bigr) = \Bigl(1 - \frac{\alpha}{\bar\alpha} + \frac{N_2}{2\bar\alpha}\|u^k - u_\alpha\|\Bigr)\|u^k - u_\alpha\|.$$

Имея $\|u^0 - u_\alpha\| \le r \le \alpha/N_2$ и предполагая $\|u^k - u_\alpha\| \le q^k r$, по индукции приходим к оценке (2.4). □

Усиленное свойство Фейера [7, определение 1.3] для оператора T означает, что для некоторого $\nu > 0$ выполнено соотношение

$$\|T(u) - z\|^2 \le \|u - z\|^2 - \nu\|u - T(u)\|^2, \tag{2.5}$$

где $z \in Fix(T)$ — множество неподвижных точек оператора T. Это влечет для итерационных точек u^k, порождаемых процессом $u^{k+1} = T(u^k)$, выполнение неравенства

$$\|u^{k+1} - z\|^2 \le \|u^k - z\|^2 - \nu\|u^k - u^{k+1}\|^2. \tag{2.6}$$

Важным свойством фейеровских операторов является замкнутость относительно операций произведения и взятия выпуклой суммы. Располагая итерационными процессами с фейеровским оператором шага и общим множеством неподвижных точек, можно конструировать разнообразные гибридные методы, а также учитывать в итерационном алгоритме априорные ограничения на решение в виде системы линейных или выпуклых неравенств.

Установим усиленное свойство Фейера для оператора шага T в методе (1.3).

Теорема 2.2. *Пусть для монотонного оператора A выполнены условия* (2.1)–(2.3), $A'(u^0)$ *— самосопряженный оператор,* $\|u_\alpha - u^0\| \le r$ *и для параметров справедливы соотношения*

$$0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} \ge 4N_1, \quad r \le \alpha/8N_2. \tag{2.7}$$

Тогда для оператора $F(u) = (A'(u) + \bar{\alpha}I)^{-1}(A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta)$ *справедлива оценка снизу*

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle \ge \frac{\alpha}{4\bar{\alpha}}\|u - u_\alpha\|^2 \quad \forall u \in S_r(u_\alpha). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $B(u) = A'(u) + \bar{\alpha}I$. Принимая во внимание, что u_α — решение уравнения (1.2), имеем

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle = \langle F(u) - F(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle = \alpha\langle B^{-1}(u)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle + \langle B^{-1}(u)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle. \tag{2.9}$$

Учитывая, что $A'(u^0)$ — самосопряженный и, ввиду монотонности A, неотрицательно определенный оператор, для первого слагаемого в правой части равенства (2.9), получаем

$$\begin{aligned}
&\alpha\langle B^{-1}(u)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle = \alpha\langle B^{-1}(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\
&+ \alpha\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(u - u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \ge \frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0}\|u - u_\alpha\|^2 \\
&- \alpha\big|\big\langle B^{-1}(u)(B(u^0) - B(u))B^{-1}(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \big\rangle\big| \ge \Big(\frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{\alpha N_2\|u - u^0\|}{\bar{\alpha}^2}\Big)\|u - u_\alpha\|^2 \\
&\ge \Big(\frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{2\alpha N_2 r}{\bar{\alpha}^2}\Big)\|u - u_\alpha\|^2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

с учетом неравенства $\|u - u^0\| \le \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \le 2r$. Для второго слагаемого в правой части (2.9) имеем

$$\begin{aligned}
&\langle B^{-1}(u)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle = \langle B^{-1}(u^0)(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \rangle \\
&+ \big\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \big\rangle \\
&= \Big\langle B^{-1}(u^0)\int_0^1 \big(A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0)\big)d\theta(u - u_\alpha), u - u_\alpha \Big\rangle + \big\langle B^{-1}(u^0)A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha \big\rangle \\
&+ \big\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))(A(u) - A(u_\alpha)), u - u_\alpha \big\rangle \ge -\frac{N_2}{\bar{\alpha}}\int_0^1 \|u_\alpha + \theta(u - u_\alpha) - u^0\|d\theta\|u - u_\alpha\|^2 \\
&- \frac{1}{\bar{\alpha}^2}\big(\|A'(u) - A'(u^0)\| \cdot \|A(u) - A(u_\alpha)\| \cdot \|(u - u_\alpha)\|\big) \\
&\ge -\frac{N_2}{2\bar{\alpha}}\big(\|u_\alpha - u^0\| + \|u - u^0\|\big)\|u - u_\alpha\|^2 - \frac{N_1 N_2}{\bar{\alpha}^2}\|u - u^0\|\|u - u_\alpha\|^2 \\
&\ge -\frac{3N_2 r}{2\bar{\alpha}}\|u - u_\alpha\|^2 - \frac{2rN_1N_2}{\bar{\alpha}^2}\|u - u_\alpha\|^2.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Объединяя (2.10), (2.11), выводим неравенство

$$\langle F(u), u - u_\alpha \rangle \ge \Big(\frac{\alpha}{\bar{\alpha} + N_0} - \frac{2N_2 r\alpha}{\bar{\alpha}^2} - \frac{3N_2 r}{2\bar{\alpha}} - \frac{2rN_1N_2}{\bar{\alpha}^2}\Big)\|u - u_\alpha\|^2,$$

откуда с учетом условий (2.7) на параметры α, $\bar{\alpha}$, r, а также неравенства $N_1 \ge N_0$, приходим к оценке (2.8). $\square$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда при*

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2} \tag{2.12}$$

оператор шага T *процесса* (1.3) *при*

$$\nu = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2\gamma(N_1+\alpha)^2} - 1 \tag{2.13}$$

удовлетворяет неравенству (2.5), *для итераций* u^k *справедливо соотношение* (2.6) *и имеет место сходимость*

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0. \tag{2.14}$$

Если параметр γ *принимает значение*

$$\gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2}, \tag{2.15}$$

то справедлива оценка

$$\|u^k - u_\alpha\| \le q^k r, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}. \tag{2.16}$$

Доказательство. В условиях теоремы справедливо неравенство

$$\|F(u)\|^2 \le \|B^{-1}(u)\|^2 \|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2 \le \frac{(N_1+\alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\|u - u_\alpha)\|^2, \tag{2.17}$$

которое вместе с (2.8) влечет соотношение

$$\|F(u)\|^2 \le \frac{4(N_1+\alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}\langle F(u), u - u_\alpha\rangle. \tag{2.18}$$

Условие (2.5) на оператор шага T эквивалентно

$$\|F(u)\|^2 \le \frac{2}{\gamma(1+\nu)}\langle F(u), u - u_\alpha\rangle. \tag{2.19}$$

Сравнивая неравенства (2.18) и (2.19), получаем условие (2.12) для γ и выражение (2.13) для ν.

При $u = u^k$ из неравенства (2.5) вытекает (2.6) и соотношение

$$\|u^k - T(u^k)\| = \gamma\|F(u^k)\| \to 0, \quad k\to\infty,$$

что вместе с (2.8) влечет сходимость (2.14). Принимая во внимание (2.8), (2.17), имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|u^{k+1} - u_\alpha\|^2 &= \|u^k - u_\alpha\|^2 - 2\gamma\langle F(u^k), u^k - u_\alpha\rangle + \gamma^2\|F(u^k)\|^2 \\ &\le \Big(1 - \gamma\frac{\alpha}{2\bar{\alpha}} + \gamma^2\frac{(N_1+\alpha)^2}{\bar{\alpha}^2}\Big)\|u^k - u_\alpha\|^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

При значениях $\gamma = \gamma_{opt}$ из (2.15) выражение в круглых скобках неравенства (2.20) достигает минимума, и при $\gamma = \gamma_{opt}$ параметр q вычисляется по формуле, представленной в (2.16). □

3. Сходимость процессов (1.4)

Сначала опишем экстремальные принципы, которые используются при построении процессов (1.4) для нелинейного монотонного оператора A. Используя разложение Тейлора в точке u^k и удерживая лишь два члена, приходим к линейному уравнению

$$A(u^k) + A'(u^k)(u - u^k) = f_\delta.$$

Зададим итерационный процесс в следующем виде: $u^{k+1} = u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta)$ — и найдем параметр β из условия

$$\min_\beta \|u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - z\|^2, \tag{3.1}$$

где z — решение уравнения $A'(u^k)z = F^k$, $F^k = f_\delta + A'(u^k)u^k - A(u^k)$. Заменяя теперь оператор $A(u)$ — на $A(u) + \alpha(u - u^0)$, а $A'(u^k)$ на $A'(u^k) + \bar{\alpha}I$, получаем процесс (1.4) при $\varkappa = -1$ и $\gamma = 1$, т. е. нелинейный регуляризованный вариант ММО. Если теперь вместо (3.1) использовать экстремальные принципы

$$\min_\beta \big\{ \langle A'(u^k)u^{k+1}, u^{k+1} \rangle - 2\langle u^{k+1}, F(u^k) \rangle \big\}$$

либо

$$\min_\beta \big\{ \|A'(u^k)(u^k - \beta(A(u^k) - f_\delta) - F(u^k)\|^2 \big\}, \tag{3.2}$$

то получаем после тех же замен нелинейный регуляризованный аналог МНС, т. е. (1.4) при $\varkappa = 0$ и $\gamma = 1$, либо ММН, т. е. (1.4) при $\varkappa = 1$, $\gamma = 1$, с учетом следующего замечания.

З а м е ч а н и е 3.1. Формула (1.4) при $\varkappa = 1$ справедлива лишь для самосопряженного оператора $A'(u)$. В общем же случае знаменатель дроби при $\varkappa = 1$ необходимо заменить на $\|(A'(u) + \alpha I)S_\alpha(u)\|^2$, как это следует из условия минимума задачи (3.2). Это обстоятельство будет учтено во всех выкладках в разд. 3, 4.

Установим сходимость процесса (1.4) при $\varkappa = -1, 0, 1$ к решению уравнения (1.2). Как и прежде, используем обозначения $B(u) = A'(u) + \bar{\alpha}I$, $S_\alpha(u) = A(u) + \alpha(u - u^0) - f_\delta$, а также введем новое

$$\beta^\varkappa = \frac{\langle B^\varkappa(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\langle B^{\varkappa+1}(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}, \quad F^\varkappa(u) = \beta^\varkappa S_\alpha(u),$$

где при $\varkappa = 1$ в $\beta^\varkappa$ следует заменить знаменатель на $\|B(u)S_\alpha(u)\|^2$ (см. замечание 3.1).

Теорема 3.1. *Пусть для монотонного оператора A выполнены условия* (2.1)–(2.3) *и $A'(u^0)$ — самосопряженный оператор. Кроме того, для* ММО *параметры α, $\bar{\alpha}$, r, N_2, N_0 удовлетворяют дополнительным соотношениям*

$$\alpha \le \bar{\alpha}, \quad r \le \alpha/8N_2, \quad \bar{\alpha} \ge N_0. \tag{3.3}$$

Тогда справедливы соотношения

$$\|F^\varkappa(u)\|^2 \le \mu_\varkappa \langle F^\varkappa(u), u - u_\alpha\rangle, \quad \varkappa = -1, 0, 1, \tag{3.4}$$

где

$$\mu_{-1} = \frac{4(N_1+\alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}^2}, \quad \mu_1 = \frac{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^2}{\alpha\bar{\alpha}^3} \tag{3.5}$$

соответственно для ММО, МНС, ММН.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ММО, т.е. (1.4) при $\varkappa = -1$. Принимая во внимание монотонность оператора A, самосопряженность и неотрицательность $A'(u^0)$ и условия на параметры (3.3), имеем (ниже $F^{-1}(u)$, $B^{-1}(u)$ означают $F^{\varkappa}(u)$, $B^{\varkappa}(u)$ при $\varkappa = -1$)

$$\langle F^{-1}(u), u-u_\alpha\rangle = \beta^{-1}(u)\langle A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u-u_\alpha), u-u_\alpha\rangle \ge \alpha\beta^{-1}(u)\|u-u_\alpha\|^2$$
$$\ge \alpha\left(\frac{\langle B^{-1}(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} - \frac{|\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle|}{\|S_\alpha(u)\|^2}\right)\|u-u_\alpha\|^2$$
$$\ge \Big(\frac{\alpha}{N_0+\bar\alpha} - \alpha\|B^{-1}(u)\|\cdot\|B^{-1}(u^0)\|\|A'(u)-A'(u^0)\|\Big)\|u-u_\alpha\|^2$$
$$\ge \Big(\frac{\alpha}{N_0+\bar\alpha} - \frac{2\alpha N_2 r}{\bar\alpha^2}\Big)\|u-u_\alpha\|^2 \ge \frac{\alpha}{4\bar\alpha}\|u-u_\alpha\|^2, \tag{3.6}$$

где учтено, что $\|u-u^0\| \le \|u-u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \le 2r$. Кроме того, выполнены неравенства

$$\|F^{-1}(u)\|^2 = |\beta^{-1}(u)|^2\|A(u)-A(u_\alpha)+\alpha(u-u_\alpha)\|^2 \le (N_1+\alpha)^2\|B^{-1}(u)\|^2\|u-u_\alpha\|^2$$
$$\le \frac{(N_1+\alpha)^2}{\bar\alpha^2}\|u-u_\alpha\|^2. \tag{3.7}$$

Объединяя (3.6) и (3.7), получаем

$$\|F^{-1}(u)\|^2 \le \frac{4(N_1+\alpha)^2}{\alpha\bar\alpha}\langle F^{-1}(u), u-u_\alpha\rangle. \tag{3.8}$$

Перейдем к оценке МНС ($\varkappa = 0$). Из соотношений

$$\langle F^0(u), u-u_\alpha\rangle = \beta^0(u)\langle A(u)-A(u_\alpha)+\alpha(u-u_\alpha), u-u_\alpha\rangle \ge \alpha\beta^0(u)\|u-u_\alpha\|^2$$
$$= \alpha\frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\langle A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle + \bar\alpha\|S_\alpha(u)\|^2}\|u-u_\alpha\|^2 \ge \frac{\alpha}{N_1+\bar\alpha}\|u-u_\alpha\|^2, \tag{3.9}$$
$$\|F^0(u)\|^2 = \|\beta^0(u)\|^2\|S_\alpha(u) - S_\alpha(u_\alpha)\|^2$$
$$\le \frac{(N_1+\alpha)^2\|S_\alpha(u)\|^4\|u-u_\alpha\|^2}{|\langle A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle + \bar\alpha\|S_\alpha(u)\|^2|^2} \le \frac{(N_1+\alpha)^2}{\bar\alpha^2}\|u-u_\alpha\|^2 \tag{3.10}$$

приходим к неравенству

$$\|F^0(u)\|^2 \le \frac{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar\alpha)}{\alpha\bar\alpha^2}\langle F^0(u), u-u_\alpha\rangle.$$

Обратимся теперь к ММН (см. замечание (3.1)). Имеем неравенства

$$\langle F^1(u), u-u_\alpha\rangle \ge \alpha\beta^1(u)\|u-u_\alpha\|^2 = \alpha\frac{\langle (A'(u)+\bar\alpha I)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2}\|u-u_\alpha\|^2$$
$$\ge \frac{\alpha\bar\alpha}{\|B(u)\|^2}\|u-u_\alpha\|^2 \ge \frac{\alpha\bar\alpha}{(N_1+\bar\alpha)^2}\|u-u_\alpha\|^2, \tag{3.11}$$
$$\|F^1(u)\| \le \frac{(N_1+\alpha)\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2}\|u-u_\alpha\| \le \frac{(N_1+\alpha)\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\langle B(u)S_\alpha(u), B(u)S_\alpha(u)\rangle}\|u-u_\alpha\|$$
$$= \frac{(N_1+\alpha)\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle\|u-u_\alpha\|}{\|A'(u)S_\alpha(u)\|^2 + \bar\alpha\langle A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle + \bar\alpha\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle} \le \frac{N_1+\alpha}{\bar\alpha}\|u-u_\alpha\|, \tag{3.12}$$

из которых вытекает оценка

$$\|F^1(u)\|^2 \le \frac{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar\alpha)^2}{\alpha\bar\alpha^3}\langle F^1(u), u-u_\alpha\rangle.$$

Таким образом, доказана справедливость неравенства (3.4) при значениях $\mu_\varkappa$ из (3.5). $\square$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* (3.1). *Тогда при*

$$\gamma_\varkappa < \frac{2}{\mu_\varkappa} \quad (\varkappa = -1, 0, 1) \tag{3.13}$$

для последовательности $\{u^k\}$, *порождаемой процессом* (1.4) *при соответствующем* $\varkappa$, *имеет место сходимость*

$$\lim_{k\to\infty} \|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при

$$\gamma_\varkappa^{opt} = \frac{1}{\mu_\varkappa} \tag{3.14}$$

справедлива оценка

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \le q_\varkappa^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar\alpha^2}{(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar\alpha)^2}}, \quad q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar\alpha^4}{(N_1+\bar\alpha)^4}}\,. \tag{3.15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сопоставляя неравенство (2.19) при $F(u) = F^\varkappa(u)$ $\quad(\varkappa = -1, 0, 1)$ с соотношением (3.4), находим, что при $\gamma_\varkappa$, удовлетворяющем (3.13), условие фейеровости выполняется для всех трех процессов. Поэтому сходимость итераций при выполнении условия (3.13) устанавливается аналогично теореме (2.3), касающейся метода Ньютона. Подставляя в (2.20) $F^\varkappa(u^k)$ и используя оценки (3.7), (3.8) (при $\varkappa = -1$), (3.9), (3.10) (при $\varkappa = 0$), (3.11), (3.12) (при $\varkappa = 1$), вычисляем выражение в круглых скобках в правой части неравенства (2.20) для каждого метода. Минимизируя это выражение по γ, получаем значение $\gamma_\varkappa^{opt}$, определяемое формулой (3.14), и вычисляем коэффициенты $q_\varkappa$, которые принимают вид из (3.15). $\square$

4. Операторные уравнения с положительным спектром

В предыдущих разделах для монотонного оператора A проведено полное исследование сходимости итерационных процессов (1.3), (1.4) и установлена оценка погрешности итераций. Следует, однако, отметить, что условие монотонности оператора A — очень сильное требование, которое не выполняется во многих важных прикладных задачах, например в задачах гравиметрии и магнитометрии.

Цель этого раздела — несколько ослабить условие монотонности и обосновать сходимость процессов (1.3), (1.4).

Рассмотрим конечномерный случай, когда оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, для которого матрица $A'(u)$ в некоторой окрестности решения имеет спектр, состоящий из различных неотрицательных собственных значений.

Лемма 4.1. *Пусть* $n \times n$-*матрица* $A'(u)$ *не имеет кратных собственных значений* λ_i *и числа* λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *различны и неотрицательны. Тогда при* $\bar\alpha > 0$ *матрица имеет представление* $A'(u) + \bar\alpha I = S(u)\Lambda S^{-1}(u)$ *и справедлива оценка*

$$\|(A'(u) + \bar\alpha I)^{-1}\| \le \frac{\mu(S(u))}{\bar\alpha + \lambda_{\min}} \le \frac{\mu(S(u))}{\bar\alpha}, \tag{4.1}$$

где столбцы матрицы $S(u)$ *составлены из собственных векторов матрицы* $A'(u) + \bar\alpha I$, Λ — *диагональная матрица, ее элементы — собственные значения матрицы* $A'(u) + \bar\alpha I$, $\mu(S(u)) = \|S(u)\| \cdot \|S^{-1}(u)\|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия леммы следует, что матрица $A'(u) + \bar{\alpha} I$ имеет n положительных различных собственных значений $\lambda_i + \alpha$. Тогда согласно [8, замечание 1] справедливо представление

$$A'(u) + \bar{\alpha} I = S(u)\Lambda S^{-1}(u), \quad (A'(u) + \bar{\alpha} I)^{-1} = S(u)\Lambda^{-1} S^{-1}(u) \tag{4.2}$$

Из (4.2) следует оценка (4.1). □

4.1. Обратимся к регуляризованному методу Ньютона, для которого была доказана теорема (2.3) о сходимости итераций и оценке погрешности для монотонного оператора. Рассмотрим теперь вариант этой теоремы, когда оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и его производная имеет неотрицательный спектр, удовлетворяющий условиям леммы 4.1, причем функция $\mu(S(u))$ при фиксированном α равномерно ограничена по u в шаре $S_r(u_\alpha)$, т. е.

$$\sup\{\mu(S(u))\colon u \in S_r(u_\alpha)\} \le \bar{S} < \infty. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия* (4.3), (2.1)–(2.3), $A'(u^0)$ *— симметричная матрица и для параметров справедливы соотношения* $0 < \alpha \le \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} \ge 4N_0$, $r \le \alpha/8N_2\bar{S}$, $\|u_\alpha - u^0\| \le r$.

Тогда для метода (1.3) *справедливо заключение теоремы* 2.3, *где соотношения* (2.12), (2.13) *для* γ *и выражение для* q *в* (2.16) *соответственно принимают вид*

$$\gamma < \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}, \quad \gamma_{opt} = \frac{\alpha\bar{\alpha}}{4(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}, \quad q = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{16(N_1+\alpha)^2\bar{S}^2}}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом оценки (4.1) доказательство с несущественными поправками проводится по схеме из теоремы 2.3.

З а м е ч а н и е 4.1. При доказательстве теоремы вместо условия (4.3) достаточно требовать ограниченность величины $\sup\{\mu(S(u^k)) : u^k \in S_r(u_\alpha)\}$, где u^k — итерационные точки метода. Причем при регулярном правиле останова итераций $k(\delta)$ супремум берется по конечному набору номеров $k \le k(\delta)$, что автоматически влечет ограниченность супремума и выполнение оценки вида (2.16) при этих значениях k. Кроме того, для модифицированного метода Ньютона, в котором производная $A'(u^0)$ вычисляется в фиксированной точке u^0, величина $\mu(S(u^0)) = \|S(u^0)\| \cdot \|S^{-1}(u^0)\| = \bar{S} < \infty$.

4.2. При тех же условиях на оператор, что и для метода Ньютона в п. 4.1, исследуем процессы (1.4).

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия* (2.1)–(2.3). *Пусть при* $u \in S_r(u_\alpha)$ *матрица* $A'(u)$ *имеет спектр, состоящий из неотрицательных различных собственных значений,* $A'(u^0)$ *— симметричная неотрицательно определенная матрица. Пусть параметры удовлетворяют следующим условиям*

$$\text{ММО:}\quad 0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad r \le \alpha/6\bar{S}N_2, \quad \bar{\alpha} \ge N_0, \tag{4.4}$$

$$\text{МНС:}\quad 0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad r \le \alpha/3N_2, \tag{4.5}$$

$$\text{ММН:}\quad 0 < \alpha \le \bar{\alpha}, \quad r \le \alpha/6N_2. \tag{4.6}$$

Тогда справедливы соотношения (3.4), *где*

$$\mu_{-1} = \frac{8\bar{S}^2(N_1+\alpha)^2}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \mu_0 = \frac{18(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})}{\alpha\bar{\alpha}^2}, \quad \mu_1 = \frac{18(N_1+\alpha)^2(N_1+\bar{\alpha})^4}{\alpha\bar{\alpha}^5}. \tag{4.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\varkappa = -1$ и тех же обозначениях, которые были приняты в разд. 3, имеем (верхний индекс (-1) соответствует методу (1.4) при $\varkappa = -1$):

$$\langle F^{-1}(u), u - u_\alpha\rangle = \beta^{-1}(u)[\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha\rangle + \alpha\|u - u_\alpha\|^2].$$

Оценим каждое из слагаемых в правой части равенства с учетом условий (4.4):

$$\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha\rangle + \alpha\|u - u_\alpha\|^2 = \alpha\|u - u_\alpha\|^2$$

$$+ \left\langle \int_0^1 (A'(u_\alpha + \theta(u - u_\alpha)) - A'(u^0))(u - u_\alpha)d\theta, u - u_\alpha \right\rangle + \langle A'(u^0)(u - u_\alpha), u - u_\alpha\rangle$$

$$\geq \alpha\|u-u_\alpha\|^2 - \frac{N_2(\|u^0 - u_\alpha\| + \|u - u^0\|)^2}{2}\|u-u_\alpha\|^2 \geq \Big(\alpha - \frac{3N_2 r}{2}\Big)\|u-u_\alpha\|^2 \geq \frac{3\alpha}{4}\|u-u_\alpha\|^2, \quad (4.8)$$

$$\beta^{-1}(u) = \frac{\langle (A'(u) + \bar\alpha I)^{-1}S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} = \frac{\langle (A'(u^0) + \bar\alpha I)^{-1}S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2}$$

$$+ \frac{\langle (B^{-1}(u) - B^{-1}(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\|S_\alpha(u)\|^2} \geq \frac{1}{N_0 + \bar\alpha} - \frac{\bar S N_2\|u - u^0\|}{\bar\alpha^2} \geq \frac{1}{N_0 + \bar\alpha} - \frac{2\bar S N_2 r}{\bar\alpha^2} \geq \frac{1}{6\bar\alpha}, \quad (4.9)$$

где учтены условия (4.4) и соотношение $\|u - u^0\| \leq \|u - u_\alpha\| + \|u_\alpha - u^0\| \leq 2r$.

Кроме того, имеем оценку

$$\|F^{-1}(u)\|^2 \leq (\beta^{-1})^2\|A(u) - A(u_\alpha) + \alpha(u - u_\alpha)\|^2$$

$$\leq \|B^{-1}(u)\|^2(N_1 + \alpha)^2\|u - u_\alpha\|^2 \leq \frac{\bar S^2(N_1 + \alpha)^2}{\bar\alpha^2}\|u - u_\alpha\|^2 \quad (4.10)$$

Объединяя (4.8)–(4.10), получаем, что в соотношении (3.4) μ_{-1} выражается величиной из (4.7).

Исследуем теперь МНС, т. е. процесс (1.4) при $\varkappa = 0$. Аналогично предыдущему методу устанавливаем, что

$$\langle A(u) - A(u_\alpha), u - u_\alpha\rangle + \alpha\|u - u_\alpha\|^2 \geq \Big(\alpha - \frac{3N_2 r}{2}\Big)\|u - u_\alpha\|^2. \quad (4.11)$$

Кроме того, имеем $\beta^0(u) = \dfrac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle} \geq \dfrac{1}{\|B(u)\|} \geq \dfrac{1}{\|A'(u) + \bar\alpha I\|} \geq \dfrac{1}{N_1 + \bar\alpha}$. Объединяя последнее соотношение с (4.11), получаем оценку снизу

$$\langle F^0(u), u - u_\alpha\rangle \geq \frac{1}{N_1 + \bar\alpha}\Big(\alpha - \frac{3N_2 r}{2}\Big)\|u - u_\alpha\|^2. \quad (4.12)$$

Аналог оценки (4.10) для $F^0(u)$ выводим из следующих неравенств:

$$\|F^0(u)\| \leq \beta^0(u)(\|A(u) - A(u_\alpha)\| + \alpha\|u - u_\alpha\|) \leq \beta^0(u)(N_1 + \alpha)\|u - u_\alpha\|, \quad (4.13)$$

$$\beta^0(u) = \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\bar\alpha\|S_\alpha(u)\|^2 + \langle A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle + \langle (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}$$

$$\leq \frac{\|S_\alpha(u)\|^2}{\bar\alpha\|S_\alpha(u)\|^2 - |\langle (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle|} \leq \frac{1}{\bar\alpha - N_2\|u - u^0\|} \leq \frac{1}{\bar\alpha - 2N_2 r}. \quad (4.14)$$

Из (4.12)–(4.14) при значениях параметров из (4.5) получаем значения μ_0 в (4.7).

Наконец, рассмотрим процесс (1.4) при $\varkappa = 1$ с учетом замечания 3.1. Как и в предыдущем методе, при оценке снизу величины $\langle F^1(u), u - u_\alpha\rangle\rangle$, справедливо соотношение (4.11). Для параметра $\beta^1(u)$ получаем

$$\beta^1(u) = \frac{\langle B(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle}{\|B(u)S_\alpha(u)\|^2}$$

$$\geq \frac{\langle A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle + \bar\alpha\langle S_\alpha(u), S_\alpha(u)\rangle - \|A'(u) - A'(u^0)\| \cdot \|S_\alpha(u)\|^2}{(N_1 + \bar\alpha)^2\|S_\alpha(u)\|^2}$$

$$\geq \frac{\bar{\alpha} - N_2\|u - u^0\|}{(N_1 + \bar{\alpha})^2} \geq \frac{\bar{\alpha} - 2N_2 r}{(N_1 + \bar{\alpha})^2},$$

что при условиях на параметры (4.6) дает оценку

$$\langle F^1(u), u - u_\alpha\rangle \geq \Big(\alpha - \frac{3N_2 r}{2}\Big)\frac{\bar{\alpha} - 2N_2 r}{(N_1 + \bar{\alpha})^2}\|u - u_\alpha\|^2 \geq \frac{\alpha\bar{\alpha}}{2(N_1 + \bar{\alpha})^2}\|u - u_\alpha\|^2. \tag{4.15}$$

Поскольку $\|F^1(u)\| \leq \beta^1(u)(\|A(u) - A(u_\alpha)\| + \alpha\|u - u_\alpha\|) \leq \beta^1(u)(N_1 + \alpha)\|u - u_\alpha\|$, то

$$\|\beta^1(u)\| \leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha})\|S_\alpha(u)\|^2}{\|A'(u)S_\alpha(u)\|^2 + 2\bar{\alpha} < A'(u)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > +\bar{\alpha}^2\|S_\alpha(u)\|^2},$$

$$\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha})\|S_\alpha(u)\|^2}{2\bar{\alpha} < A'(u^0)S_\alpha(u), S_\alpha(u) > -2\bar{\alpha}| < (A'(u) - A'(u^0))S_\alpha(u), S_\alpha(u) > | + \bar{\alpha}^2\|S_\alpha(u)\|^2}$$

$$\leq \frac{(N_1 + \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\alpha}N_2\|u - u^0\|} \leq \frac{N_1 + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}(\bar{\alpha} - 4N_2 r)} \leq \frac{3(N_1 + \bar{\alpha})}{\bar{\alpha}^2}.$$

Окончательно получаем для $\|F^1(u)\|^2$ оценку сверху

$$\|F^1(u)\|^2 \leq \frac{3^2(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}{\bar{\alpha}^4}\|u - u_\alpha\|^2. \tag{4.16}$$

Объединяя соотношения (4.15) и (4.16) и условия (4.6), получаем значение μ_1, представленное в (4.7). □

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* 4.1. *Тогда при* $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa$, $\varkappa = -1, 0, 1$, *где значения* μ_k *определяются соотношениями* (4.7), *последовательности* u^k, *порождаемые процессом* (1.4) *при* $\varkappa = -1, 0, 1$, *сходятся к* u_α, *т. е.*

$$\lim_{k\to\infty}\|u^k - u_\alpha\| = 0,$$

а при $\gamma_\varkappa^{opt} = 1/\mu_\varkappa$ *справедлива оценка*

$$\|u^{k+1} - u_\alpha\| \leq q_\varkappa^k r,$$

где

$$q_{-1} = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{64\bar{S}^2(N_1 + \alpha)^2}}, \quad q_0 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^2}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^2}},$$

$$q_1 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2\bar{\alpha}^6}{36(N_1 + \alpha)^2(N_1 + \bar{\alpha})^6}}. \tag{4.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставляя в соотношение (2.20) вместо $F(u^k)$ последовательность $F^\varkappa(u^k)$ ($\varkappa = -1, 0, 1$) и используя оценки (4.8), (4.9) ($\varkappa = -1$), (4.9), (4.10) ($\varkappa = 0$), (4.11), (4.12) ($\varkappa = 1$), а также условия на параметры (4.4)–(4.6), получаем после минимизации по γ значения для $q_\varkappa$, представленные в (4.17). При выполнении условия $\gamma_\varkappa < 2/\mu_\varkappa$ выражение в круглых скобках в правой части неравенства (2.20) принимает значение, которое меньше единицы, что влечет сходимость итераций для всех трех методов. □

З а м е ч а н и е 4.2. Предложенный подход к получению оценок скорости сходимости итерационных процессов полностью переносится на случай, когда спектр матрицы $A'(u^k)$, состоящий из различных вещественных значений, содержит набор малых по абсолютной величине отрицательных собственных значений. Пусть λ_1 — отрицательное собственное значение с наименьшим модулем $|\lambda_1|$ и $\bar{\alpha} - |\lambda_1| = \bar{\alpha}_1 < \alpha^*$. Тогда оценка (4.1) трансформируется в неравенство

$$\|(A'(u^k) + \bar{\alpha} I)^{-1}\| \le \frac{\mu(S(u^k))}{\bar{\alpha}^*} \le \frac{\bar{S}}{\bar{\alpha}^*} \tag{4.18}$$

Все утверждения, т. е. теоремы (4.1)–(4.3), остаются справедливыми при замене $\bar{\alpha}$ на $\bar{\alpha}^*$ во всех оценках, где используется (4.18).

Замечание 4.3. Если рассматривать модифицированные варианты методов (1.3), (1.4), когда вместо $A'(u^k)$ в операторе шага используется $A'(u^0)$ в процессе итераций, то при условиях на оператор, принятых в данном разделе, для получения аналогичных результатов о сходимости и оценке погрешности наряду с неотрицательностью спектра достаточно требовать симметричность матрицы $A'(u^0)$ [3–5]. Заметим, что при исследовании основных методов (1.3), (1.4) существование симметричной матрицы для некоторого элемента u^0 предполагается.

5. Оценка погрешности двухэтапного метода

5.1. Полученные в разд. 2, 3 оценки скорости сходимости для итерационных процессов (1.3), (1.4) и результаты по аппроксимации точного решения уравнения (1.1) семейством регуляризованных решений u_α позволяют получить оценку погрешности двухэтапного метода.

Согласно [9, теоремы 3.1, 3.2], при условии монотонности оператора и истокообразной представимости решения $\hat{u}$ уравнения (1.1)

$$u^0 - \hat{u} = A'(\hat{u})v \tag{5.1}$$

справедлива оценка погрешности регуляризованного решения

$$\|u_\alpha^\delta - \hat{u}\| \le \|u_\alpha^\delta - u_\alpha\| + \|u_\alpha - \hat{u}\| \le \frac{\delta}{\alpha} + k_0\alpha, \tag{5.2}$$

где $k_0 = (1 + N_2\|v\|/2)\|v\|$, u_α^δ, u_α — решения уравнения (1.2) с возмущенной f_δ и точной f правой частью уравнения (1.1) соответственно. Минимизируя правую часть соотношения (5.2) по α, имеем $\alpha(\delta) = \sqrt{\delta/k_0}$, что дает оценку

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - \hat{u}\| \le 2\sqrt{\delta k_0}. \tag{5.3}$$

В разд. 2, 3 для итерационных процессов (1.3), (1.4) получены оценки вида

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^{\delta}\| \le q^k(\delta) r. \tag{5.4}$$

Заметим, что вместо используемого ранее элемента u_α в этом разделе введены переобозначения, а именно через u_α^δ теперь дается решение уравнения (1.2) с возмущенной правой частью f_δ, а через u_α — решение уравнения (1.2) с точной правой частью. Кроме того, вместо u^k используется $u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k}$, чтобы подчеркнуть зависимость от параметров δ, α.

Объединяя (5.3), (5.4), приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Пусть для решения $\hat{u}$ уравнения* (1.1) *с монотонным оператором справедливо условие* (5.1) *и для метода* (1.4) *выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда при выборе числа итераций по правилу*

$$k(\delta) = \Big[\frac{\ln(2\sqrt{k_0\delta}/r)}{\ln q(\delta)}\Big] \tag{5.5}$$

справедлива оптимальная по порядку оценка погрешности двухэтапного метода

$$\|u_{\alpha(\delta)}^{\delta,k} - u_{\alpha(\delta)}^{\delta}\| \le 4\sqrt{k_0\delta}. \tag{5.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Объединяя (5.3), (5.4), получаем

$$\|u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)} - \hat{u}\| \le \|u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)} - u^{\delta}_{\alpha(\delta)}\| + \|u^{\delta}_{\alpha(\delta)} - \hat{u}\| \le rq^k(\delta) + 2\sqrt{k_0\delta}. \tag{5.7}$$

Приравнивая слагаемые в правой части (5.7), получаем выражение для числа итераций (5.5) и оценку (5.6). Оптимальность по порядку оценки (5.6) устанавливается аналогично [10] с использованием методологии оценивания погрешности метода через модуль непрерывности обратного линейного оператора [11; 12]. □

5.2. Для оператора $A'(u)$ с положительным спектром так же, как и для случая монотонного оператора, в разд. 4 доказана линейная скорость сходимости, однако, в отличие от монотонного оператора здесь оценок типа (5.2) не существует, поэтому нельзя получить общую оценку для двухэтапного метода. Тем не менее в этой ситуации для двухэтапного алгоритма можно установить оценку для невязки — основной характеристики точности метода при решении задачи с реальными данными.

Предположим, что уравнение (1.2) разрешимо, тогда для его решения $u^{\delta}_{\alpha(\delta)}$ справедливо соотношение

$$\|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| = \alpha(\delta)\|u^{\delta}_{\alpha(\delta)} - u^0\|. \tag{5.8}$$

Пусть для некоторой связи $\alpha(\delta)$ ограничена величина $\|u^{\delta}_{\alpha(\delta)} - u^0\| \le m < \infty$, что влечет оценку

$$\|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| \le \alpha(\delta)m \tag{5.9}$$

и сходимость $\lim_{\delta\to 0}\|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| = 0$ при $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$. Пусть $u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}$ — итерационные точки, полученные одним из методов (1.3), (1.4). Имеем

$$\|A(u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| \le \|A(u^{\delta,k}_{\alpha(\delta)}) - A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)})\| + \|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| \le N_1 q^k(\delta) + \alpha(\delta)m. \tag{5.10}$$

Выбирая, например, $\alpha(\delta) = \delta^p$ и приравнивая слагаемые в правой части (5.10), получаем правило выбора числа итерации $k(\delta) = [\ln(m\delta^p/N)/\ln q(\delta)]$, при котором справедлива оценка для невязки двухэтапного метода

$$\|A(u^{\delta}_{\alpha(\delta)}) - f_\delta\| \le 2m\delta^p. \tag{5.11}$$

З а м е ч а н и е 5.1. Соотношения (5.8)–(5.11) остаются справедливыми для случая, когда матрицы $A'(u^k)$ содержат набор малых отрицательных собственных значений с тем лишь отличием, что в неравенстве (5.10) параметр q во всех методах теперь вычисляется по формулам из разд. 4, в которых параметр $\bar{\alpha}$ заменен на α^* (см. замечание 4.2).

6. Численные эксперименты для обратных задач гравиметрии и магнитометрии

6.1. Обратная задача гравиметрии

Рассмотрим уравнение гравиметрии в декартовой системе координат с осью z, направленной вниз

$$\gamma\Delta\sigma\Big\{\iint\limits_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{1/2}}dx'dy' - \iint\limits_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x',y')]^{1/2}}dx'dy'\Big\} = \Delta g(x,y), \tag{6.1}$$

где γ — гравитационная постоянная, $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ — скачок плотности на поверхности раздела сред, описываемой функцией $u(x, y)$ и подлежащей определению, $f(x, y)$ — аномальное гравитационное поле, вызванное отклонением поверхности от асимптотической плоскости $z = H$ для искомого решения $u(x, y)$. Запишем (6.1) в виде операторного уравнения

$$[A(u)](x, y) = -\iint\limits_D \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x', y')]^{1/2}} dx'dy' = f(x, y), \tag{6.2}$$

где $f(x, y) = \Delta g(x, y)/\gamma\Delta\sigma - A(H)$. Тогда производная оператора A в точке $u^0(x, y)$ определяется формулой $[A'(u^0)]h = \iint_D \dfrac{u^0(x', y')h(x', y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (u^0(x', y'))^2]^{3/2}} dx'dy'$. После дискретизации интегрального уравнения (6.2) двумерным аналогом формулы прямоугольников с равномерной сеткой по каждой переменной с шагом Δx, Δy получаем систему нелинейных уравнений относительно неизвестного вектора $u_{ji} = u(x_j, y_i)$ $(j = 1, 2, \ldots, m_1,\ i = 1, 2, \ldots, m_2)$, которая в векторно-матричном виде может быть записана следующим образом:

$$A_n(u_n) = f_n, \tag{6.3}$$

где u_n, f_n — векторы размерности $n = m_1 \times m_2$. Дискретный аналог производной $A'(u^0)$ принимает форму

$$[A_n'(u_n)h_n]_{k,l} = \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_1} \Delta x \Delta y \frac{u_{ji} h_{ji}}{[(x_k - x_j')^2 + (y_l - y_i')^2 + (u_{ji}^0)^2]^{3/2}}, \tag{6.4}$$

где при $u_n = u_n^0$ — const $A_n'(u_n^0)$ — симметричная матрица, компоненты которой вычисляются по формуле (6.4).

Рассматриваемая модель двухслойной среды, в которой поверхность раздела задается функцией $u(x, y)$, определяется формулой [13, с. 160]

$$\hat{u}(x, y) = 5 - 3.21e^{-(x/10.13-6.62)^6 - (y/9.59-2.93)^6} - 2.78e^{-(x/9.89-4.12)^6 - (y/8.63-7.43)^6}$$
$$+\ 3.13e^{-(x/9.89-4.82)^6 - (y/8.72-4.33)^6}, \tag{6.5}$$

заданной в области $D = \{0 \le x \le 100, 0 \le y \le 110\}$. Была выбрана сетка с шагом $\Delta x = \Delta y = 1$ (км), что приводит к размерности $n = 11000$ для искомого вектора u_n, а также принято, что $\Delta\sigma = 0.21$ (г/см^3), $H = 5$ (км) ($z = H = 5$ — асимптотическая плоскость для $\hat{u}(x, y)$).

Цель численного эксперимента — сравнить по экономичности (затратам машинного времени) методы (1.3), (1.4) с их модифицированными вариантами, когда производная $A'(u^k)$, входящая в оператор шага этих процессов, вычисляется в фиксированной точке u^0 в течение всего процесса итераций, т. е. $A'(u^k)$ в (1.3), (1.4) заменяется на $A'(u^0)$ (см. [4; 5]). В результате численного эксперимента по восстановлению модельного решения (6.5) было установлено, что не только матрица $A_n'(u^0)$ имеет n различных неотрицательных собственных значений, но это свойство имеет место и для $A'(u_n^k)$. Тем самым выполняются условия, при которых получены результаты в разд. 4, 5 по сходимости и оценке погрешности процессов (1.3), (1.4) для немонотонного оператора A с положительным спектром.

При анализе числа обусловленности $\mu(A_n'(u_n^k))$ было установлено, что эта величина для всех четырех процессов незначительно колеблется около значений $\mu = 10^{17}$. Выход из процесса итераций каждого из методов осуществляется по правилу

$$\frac{\|\hat{u}_n - \tilde{u}_n\|_{\mathbb{R}^n}}{\|\tilde{u}_n\|_{\mathbb{R}^n}} \le 10^{-2}, \tag{6.6}$$

где $\hat{u}_n$ — точное решение системы уравнений (6.3), а $\tilde{u}_n$ — восстановленное каждым из четырех итерационных методов. Таким образом, точность численного решения, полученного процессами (1.3), (1.4) и их модифицированными аналогами, гарантированно не превышала $\varepsilon = 10^{-2}$.

Т а б л и ц а 1

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0048	0.0020	0.0024	0.0023
	0.0094	0.0019	0.0019	0.0021
N	17	21	20	16
	22	23	23	16
T, с	214	11	14	15
	328	7	7	7

Т а б л и ц а 2

Методы	ММО	МНС	ММН	РМН
Δ	0.0636	0.0699	0.0802	0.0368
	0.0569	0.0575	0.0595	0.0369
N	4	4	4	5
	4	4	4	5
T, с	7	6	6	22
	5	3	3	3

П р и м е ч а н и е. В табл. 1 представлены результаты численных расчетов для обратной задачи гравиметрии, в табл. 2 — для обратной задачи магнитометрии. Здесь Δ — относительная величина невязки (6.7) для восстановленного решения; N — число итераций в процессе для достижения точности, определяемой неравенством (6.6); T — машинное время реализации метода. В позициях для Δ, N, T верхняя строка соответствует данным для основных (немодифицированных) процессов (1.3), (1.4) , а нижняя — для модифицированных вариантов (1.3), (1.4).

При значениях параметров $\bar{\alpha} = \alpha = 10^{-3}$, $\gamma = 1$ в табл. 1 представлены результаты численных расчетов, где относительная регуляризованная невязка для восстановленного решения вычисляется как

$$\Delta = \frac{\|A_n(\tilde{u}_n) + \alpha(\tilde{u}_n - u^0) - f_n\|_{\mathbb{R}^n}}{\|f_n\|_{\mathbb{R}^n}}. \tag{6.7}$$

6.2. Обратная задача магнитометрии

Уравнение магнитометрии при тех же предположениях, что и в задаче 6.1, имеет вид

$$\Delta J \Big\{ \iint\limits_D \frac{H}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + H^2]^{3/2}} dx'dy'$$

$$- \iint\limits_D \frac{u(x',y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x',y')]^{3/2}} dx'dy' \Big\} = \Delta G(x,y), \tag{6.8}$$

где ΔJ — усредненный скачок z-компоненты вектора намагниченности, $z = H$ — асимптотическая плоскость, $u(x,y)$ — функция, описывающая аномальное поле, $z = u(x,y)$ — искомая функция, описывающая поверхность раздела сред с различными свойствами намагниченности. Уравнение (6.8) можно переписать в форме

$$[D(u)](x,y) = \iint\limits_D \frac{u(x',y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + u^2(x',y')]^{3/2}} dx'dy' = F(x,y), \tag{6.9}$$

где $F(x,y) = D(H) - \Delta G(x,y)/\Delta J$, тогда производная оператора D в точке $u^0(x,y)$ определится формулой $[A'(u^0)]h = \iint_D \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 - 2(u^0(x',y'))^2}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (u^0(x',y'))^2]^{5/2}} h(x',y')dx'dy'$.

После дискретной аппроксимации, подобно задаче гравиметрии уравнения (6.9), приходим к системе нелинейных уравнений

$$D_n(u_n) = F_n \tag{6.10}$$

относительно вектора u_n $(n = m_1 \times m_2)$ с компонентами u_{ji} $(j = 1, 2, \ldots, m_1,\ i = 1, 2, \ldots, m_2)$, при этом компоненты производной оператора D_n в точке u_n^0 вычисляются по формуле

$$[D'_n(u_n^0)h_n]_{k,l} = \sum_{i=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{m_1} \Delta x \Delta y \frac{(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 - 2u_{ji}^2}{[(x_k - x'_j)^2 + (y_l - y'_i)^2 + u_{ji}^2]^{5/2}} h_{ji},$$

причем при $u_n^0 = \{u^0(x'_j, y'_i), 1 \le j \le m_1, 1 \le i \le m_2\} = \mathrm{const}\ D'_n(u_n^0)$ — симметричная матрица.

Модельное решение уравнения (6.10), определяющее поверхность раздела сред, задается формулой [14, с. 6]

$$\hat{u}(x,y) = 5 - 2e^{-(x/10-3.5)^6-(y/10-2.5)^6} - 3^{-(x/10-5.5)^6-(y/10-4.5)^6} \tag{6.11}$$

на области $D = \{0 \le x \le 100, 0 \le y \le 100\}$. Сетка строилась с шагом $\Delta x = \Delta y = 1$ (км), что влечет размерность $n = 10000$ для искомого вектора u_n.

Для $\Delta J = 0.4$ был выполнен численный эксперимент по восстановлению модельного решения задачи (6.8) процессами (1.3), (1.4) при $\bar{\alpha} = 0.01$, $\alpha = 0.0001$, $\beta = 1$, а также их модифицированными аналогами, когда производная $D'(u^k)$ вычисляется в фиксированной точке $u_n^0 = H = 5$ (км). Число обусловленности $\mu(D'_n(u_n^0)) = 1.8 \cdot 10^7$. После вычисления спектра матрицы $D'_n(u_n^k)$ выяснилось, что она имеет различные неотрицательные собственные значения; это с учетом данных разд. 4, 5 при подходящем выборе параметра β и начальном приближении u_n^0 гарантирует сходимость итерационных схем и двухэтапного метода. Окончание итерационных процессов выполнялось по правилу (6.6).

Результаты численных расчетов для задачи (6.10) по восстановлению модельного решения (6.11) представлены в табл. 2.

Анализируя результаты численного эксперимента для задачи гравиметрии, можно отметить, что для достижения одной и той же точности приближенного решения в соответствии с правилом (6.6) число итераций для модифицированных методов, как правило, больше, чем немодифицированных процессов (1.3), (1.4). Однако затраты машинного времени при реализации модифицированных процессов, за исключением ММО, существенно меньше. Поэтому можно сделать вывод, что модифицированные МНС, ММН и РМН более экономичны и, следовательно, более предпочтительны для некоторых классов нелинейных задач большой размерности. Существенно более затратная по времени реализация ММО, по сравнению с МНС и ММН, связана прежде всего с тем, что в коэффициенте $\beta^{-1}(u^k)$ необходимо не только вычислять скалярные произведения, но и обращать на каждом шаге оператор $B_k = A'(u^k) + \alpha I$. Следует сказать, что для уравнения (1.1) ММО обычно не используется. Его применение целесообразно для эквивалентного уравнения $A'(u) * (A(u) - f) = 0$, для которого ММО преобразуется к виду, где операция обращения отсутствует [7, формула (5.8)]. Заметим также, что в методе ММО и РМН вычисление элемента вида $W = (A'(u^k) + \alpha I)^{-1}V$ заменялось приближенным решением системы $(A'(u^k)+\alpha I)W = V$ с помощью метода минимальных невязок, т. е. в этом случае фактически реализуется гибридная схема градиентно-ньютоновского типа.

Как можно видеть из табл. 2, тенденция по затратам машинного времени для модифицированных вариантов процессов (1.3), (1.4) (включая ММО) также сохраняется и для обратной задачи магнитометрии.

Авторы признательны рецензенту за внимательное прочтение статьи и высказанные замечания, что позволило устранить многочисленные технические погрешности, допущенные авторами статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бакушинский А.Б.** Регуляризующий алгоритм на основе метода Ньютона-Канторовича для решения вариационных неравенств // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1976. Т. 16, № 6. С. 1397–1604.
2. **Bakushinsky A., Goncharsky A.** Ill-posed problems: Theory and applications. Berlin; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1994. 258 p. (Math. and Its Appl.; vol. 301). doi: 10.1007/978-94-011-1026-6 .
3. **Васин В.В., Акимова Е.Н., Миниахметова А.Ф.** Итерационные алгоритмы ньютоновского типа и их приложения к обратной задаче гравиметрии // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. 2013. Vol. 6, № 3. С. 26–37.

4. **Vasin V.V.** Modified Newton type processes generating Fejer approximations of regularized solutions to nonlinear equations // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. Vol. 284. Suppl. 1. P. S145–S158. doi:10.1134/S0081543814020138.
5. **Vasin V.V.** Regularized modified α-processes for nonlinear equations with monotone operators // Dokl. Math. 2016. Vol. 94, no. 1. P. 361–364. doi:10.1134/S1064562416040062.
6. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 308 с.
7. **Vasin V.V., Eremin I.I.** Operators and iterative processes of Fejer Type. Theory and application. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2009. 155 p. (Inverse and Ill-Posed Problems Series 53). ISBN 978-3-11-021819-0.
8. **Стренг Г.** Линейная алгебра и ее применения. М.: Мир, 1980. 454 с.
9. **Tautenhahn U.** On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill–posed problems // Inverse Problems. 2002. Vol. 18, no. 1. P. 191–207.
10. **Vasin V.V.** Modified steepest descent method for nonlinear irregular operator equation // Dokl. Math. 2015. Vol. 91, no. 3. P. 300–303. doi: 10.1134/S1064562415030187.
11. **Иванов В.К.** Об оценке устойчивости квазирешений на некомпактных множествах // Известия вузов. Математика. 1974. №5 (144). С. 97–103.
12. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Theory of linear Ill-posed problems and its applications. Utrecht: VSP, 2002. 296 p. (Inverse and Ill-Posed Problems; book 36). ISBN-10: 906764367X.
13. Градиентные методы решения структурных обратных задач гравиметрии и магнитометрии на суперкомпьютере “Уран” / Е.Н. Акимова, В.Е. Мисилов, А.Ф. Скурыдина, А.И. Третьяков // Вычислительные методы и программирование. 2015. Vol. 16, № 1. С. 155–164.
14. **Акимова Е.Н., Мисилов В.Е, Дергачев Е.А.** Алгоритмы решения структурной обратной задачи магнитометрии // Тр. 41-й сессии Междунар. семинара им.Д. Г. Успенского / ИГФ УрО РАН. Екатеринбург, 2014. С. 4–6.

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН
гл. научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский Федеральный университет
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Поступила 13.10.2016

Скурыдина Алия Фиргатовна
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
ассистент
Уральский Федеральный университет
e-mail: afinapal@gmail.com

REFERENCES

1. Bakushinskii A.B. A regularizing algorithm on the basis of the Newton–Kantorovich method for the solution of variational inequalities. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1976, vol. 16, no. 6, pp. 16–23. doi: 10.1016/0041-5553(76)90037-9.
2. Bakushinsky A., Goncharsky A. *Ill-posed problems: Theory and applications.* Berlin, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1994, Ser. Math. and Its Appl., vol. 301, 258 p. doi: 10.1007/978-94-011-1026-6.
3. Vasin V.V., Akimova E.N., Miniakhmetova A.F. Iterative Newton type algorithms and its applications to inverse gravimetry problem. *Vestnik Yuzhno-Ural. Gos. Univ.*, 2013, vol. 6, no. 3, Ser. Mat. Modelirovanie i Programmirovanie, pp. 26–37.
4. Vasin V.V. Modified Newton type processes generating Fejer approximations of regularized solutions to nonlinear equations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. S145–S158. doi:10.1134/S0081543814020138.
5. Vasin V.V. Regularized modified α-processes for nonlinear equations with monotone operators. *Dokl. Math.*, 2016, vol. 94, no. 1, pp. 361–364. doi:10.1134/S1064562416040062.

6. Kufner A., Fučik S. *Nonlinear differential equations.* Amsterdam, New York, Elsevier, 1980, 359 p. Translated under the title *Nelinejnye differencial'nye uravnenija*, Moscow, Nauka, 1988, 308 p.
7. Vasin V.V., Eremin I.I. *Operators and iterative processes of Fejer Type. Theory and application.* Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2009, Inverse and Ill-Posed Probl. Ser. 53, 155 p. ISBN 978-3-11-021819-0 .
8. Strang G. *Linear algebra and its applications.* New York, Acad. Press., 1976, 385 p. ISBN-10: 0126736502 . Translated under the title *Linejnaja algebra i ee primenenija*, Moscow, Mir, 1980, 454 p.
9. Tautenhahn U. On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill–posed problems. *Inverse Problems*, 2002, vol. 18, no. 1, pp. 191–207.
10. Vasin V.V. Modified steepest descent method for nonlinear irregular operator equation. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 91, no. 3, pp. 300–303. doi: 10.1134/S1064562415030187 .
11. Ivanov V.K. The estimation of the stability of quasisolutions on noncompact sets. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij*, 1974, no. 5, pp. 97–103 (in Russian).
12. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Theory of linear Ill-posed problems and its applications. Utrecht: VSP, 2002, 296 p, Ser. Inverse and Ill-Posed Problems, book 36. ISBN-10: 906764367X .
13. Akimova E.N., Misilov V.E., Skurydina A.F., Tret'yakov A.I. Gradient methods for solving inverse gravimetry and magnetometry problems on the Uran supercomputer. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie*, 2015, vol. 16, no. 1, pp. 155–164 (in Russian).
14. Akimova E.N., Misilov V.E. Dergachev E.A. Algorithms for solving structural inverse magnetometry problem. *Trudy* 41 *sessii Mezhdunarodnogo seminara im. D.G. Uspenskogo* [Proceedings of the 41st session of the International seminar named D.G. Uspenkskii]. Ekaterinburg, 2014, pp. 4–6 (in Russian).

V. V. Vasin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: vasin@imm.uran.ru .

A. F. Skurydina, graduate student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: afinapal@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов

В статье рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается линейными функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа, а показатель качества состоит из двух слагаемых: первое оценивает историю движения системы, сформировавшуюся к терминальному моменту времени, второе представляет собой интегрально-квадратичную оценку соответствующих реализаций управлений игроков. Для вычисления цены и построения оптимальных законов управления в этой дифференциальной игре предлагается подход, основанный на решении подходящей вспомогательной дифференциальной игры, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается уже при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, а показатель качества содержит оценку движения только в терминальный момент времени. Для нахождения цены и седловой точки во вспомогательной дифференциальной игре используется так называемый метод выпуклых сверху оболочек, который в рассматриваемом случае в силу определенной структуры показателя качества и геометрических ограничений на управляющие воздействия игроков приводит к эффективному решению. Работоспособность предложенного подхода иллюстрируется на примере, представлены результаты численных экспериментов. При этом построенные оптимальные законы управления сравниваются с разработанными авторами ранее процедурами оптимального управления с конечномерными аппроксимирующими поводырями.

Ключевые слова: дифференциальные игры, системы нейтрального типа, оптимальные стратегии управления, численные методы.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems.

The paper deals with a zero-sum differential game, in which the dynamic of a conflict-controlled system is described by linear functional differential equations of neutral type and the quality index is the sum of two terms: the first term estimates the history of motion of the system realized by the terminal time, and the second term is an integral–quadratic estimation of the corresponding realizations of the players' controls. To calculate the value and construct the optimal control laws in this differential game, we propose an approach based on solving a suitable auxiliary differential game, in which the motion of a conflict-controlled system is described by ordinary differential equations and the quality index contains an estimation of the motion at the terminal time only. To find the value and the saddle point in the auxiliary differential game, we apply the so-called upper convex hull method, which leads to an effective solution in the case under consideration due to the specific structure of the quality index and the geometric constraints on the control actions of the players. The efficiency of the approach is illustrated by an example, and the results of numerical simulations are presented. The constructed optimal control laws are compared with the optimal control procedures with finite-dimensional approximating guides, which were developed by the authors earlier.

Keywords: differential games, neutral-type systems, optimal control strategies, numerical methods.

MSC: 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-75-87

Введение

В статье в рамках позиционного подхода [1–5] рассматривается антагонистическая дифференциальная игра двух лиц. Движение конфликтно-управляемой системы описывается линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа. Показатель качества состоит из двух слагаемых: первое оценивает историю движения системы, сформировавшуюся к терминальному моменту времени, второе представляет собой интегрально-квадратичную оценку реализаций управлений игроков. Дифференциальная игра формализуется в

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 15-11-10018).

классах чистых позиционных стратегий [6]. Ставится задача о вычислении цены и построении оптимальных законов управления в этой дифференциальной игре.

Для решения задачи предлагается подход, основанный на ее сведении к нахождению цены и седловой точки во вспомогательной дифференциальной игре, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается уже при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, а показатель качества содержит оценку движения только в терминальный момент времени. Сведение базируется на функциональной трактовке процесса управления [7] и опирается на конструкции конечномерных информационных образов, состоящих из специальных прогнозов движения. Для нахождения цены и седловой точки во вспомогательной дифференциальной игре используется так называемый метод выпуклых сверху оболочек [3; 8]. В силу определенной структуры рассматриваемого показателя качества и геометрических ограничений на управляющие воздействия игроков требуемые выпуклые сверху оболочки функций удается [3, § 29; 9] построить в явном виде. Как следствие, метод оказывается эффективным даже при больших размерностях фазового вектора во вспомогательной игре. Ранее такой подход применялся для решения дифференциальных игр и задач динамической оптимизации гарантии в системах с запаздыванием по состоянию [10] и/или по управлению [11; 12]. Таким образом, настоящая работа продолжает эти исследования, развивая их для динамических систем нейтрального типа.

Работоспособность предложенного подхода иллюстрируется на примере, приводятся результаты численных экспериментов. При этом, следуя [13], конструкции оптимальных законов управления сравниваются с процедурами оптимального управления исходной системой с использованием конечномерных аппроксимирующих поводырей [14].

1. Постановка задачи

Пусть движение конфликтно-управляемой динамической системы описывается линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа:

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x(t) - A_\tau(t)x(t-\tau)\big) = A(t)x(t) + A_h(t)x(t-h) + B(t)u(t) + C(t)v(t),\\ t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in P \subset \mathbb{R}^r, \quad v(t) \in Q \subset \mathbb{R}^s,\end{gathered} \tag{1.1}$$

задано начальное условие

$$x(t_0 + \xi) = \varphi_0(\xi), \quad \xi \in [-h, 0], \tag{1.2}$$

и показатель качества процесса управления имеет вид

$$\gamma = \Big(\int\limits_{\vartheta-h}^{\vartheta} \|x(t)\|^2 \mathrm{d}t\Big)^{1/2} + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle u(t), \Phi(t)u(t)\rangle - \langle v(t), \Psi(t)v(t)\rangle\big)\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

Здесь t — текущее время, $x(t)$ — значение фазового вектора в момент времени t, $u(t)$ и $v(t)$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; P и Q — заданные компактные множества; $\tau > 0$ и $h > 0$ — постоянные величины запаздываний (для определенности полагаем, что $h \geqslant \tau$); t_0 и ϑ — начальный и терминальный моменты промежутка времени управления; матрицы $A(t)$, $A_h(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ непрерывны на $[t_0, \vartheta]$; матрица $A_\tau(t)$ удовлетворяет условиям

$$\|A_\tau(t)\| < 1, \quad \|A_\tau(t) - A_\tau(\xi)\| \leqslant K|t - \xi|, \quad K = \mathrm{const} > 0, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad \xi \in [t_0, \vartheta]. \tag{1.4}$$

Имеет место включение $\varphi_0(\cdot) \in \mathrm{Lip}$, где через Lip обозначено множество функций $\varphi(\cdot)$ из $[-h, 0]$ в $\mathbb{R}^n$, каждая из которых с некоторой своей константой Липшица $L > 0$ удовлетворяет условию $\|\varphi(t) - \varphi(\xi)\| \leqslant L|t - \xi|$, $t \in [-h, 0]$, $\xi \in [-h, 0]$. Матрицы $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ являются симметричными, непрерывно меняются на $[t_0, \vartheta]$, при этом квадратичные формы $\langle u, \Phi(t)u\rangle$ и $\langle v, \Psi(t)v\rangle$ положительно определены. Символ $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму вектора и согласованную с ней норму матрицы, а символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение векторов.

Для динамической системы (1.1), начального условия (1.2) и показателя качества (1.3) рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой первый игрок нацелен на минимизацию показателя качества, а цель второго игрока, соответственно, противоположна.

З а м е ч а н и е 1. При сделанных предположениях дифференциальная игра (1.1)–(1.3) удовлетворяет всем требованиям из работы [6]. Таким образом, к ней, в частности, применимы все результаты, полученные в этой работе в общем нелинейном случае. Однако следует отметить, что в линейном случае, являющемся предметом исследования в настоящей статье, часть из указанных выше условий может быть ослаблена. Например, можно отказаться от, вообще говоря, обременительного условия $\|A_\tau(t)\| < 1$ (см. замечание 2).

Всякую пару $(t, \varphi(\cdot)) \in G = [t_0, \vartheta] \times \mathrm{Lip}$ будем называть позицией системы (1.1), имея в виду, что функция $\varphi(\cdot)$ определяет историю движения системы на отрезке времени $[t-h, t]$, так что $x(t+\xi) = \varphi(\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$. Пусть выбрана позиция $(t_*, \varphi_*(\cdot)) \in G$. Допустимыми реализациями управлений игроков на промежутке $[t_*, \vartheta)$ считаем измеримые функции $u : [t_*, \vartheta) \to P$ и $v : [t_*, \vartheta) \to Q$, для которых, следуя [2], будем использовать обозначения $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ соответственно. Из позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$ пара таких реализаций $u[t_*[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ единственным образом порождает [6] (см. также [15, Ch. 9, Theorem 1.1; 16, Theorem 1] для линейного случая) движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) — абсолютно непрерывную функцию $x : [t_*-h, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условию $x(t_*+\xi) = \varphi_*(\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$, и вместе с $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяет уравнению (1.1) при почти всех $t \in [t_*, \vartheta]$. Отметим, что для реализующихся вдоль этого движения позиций $(t, x_t(\cdot))$, где $x_t(\xi) = x(t+\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$, справедливо включение $(t, x_t(\cdot)) \in G$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

Формализация дифференциальной игры (1.1)–(1.3) проводится в классах чистых позиционных стратегий игроков по схеме из работы [6]. Согласно результатам этой работы в рассматриваемой игре (1.1)–(1.3) существуют цена $\rho^0 = \rho^0(t_0, \varphi_0(\cdot))$ и оптимальные стратегии управления игроков $U^0(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) \in P$ и $V^0(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) \in Q$, $(t, \varphi(\cdot)) \in G$, $\varepsilon > 0$, составляющие седловую точку $\{U^0(\cdot), V^0(\cdot)\}$ этой игры.

В частности, это означает следующее: для любого числа $\zeta > 0$ можно указать такие число $\varepsilon_* > 0$ и функцию $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, что, каковы бы ни были число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, число $\delta \in (0, \delta_*(\varepsilon)]$ и разбиение

$$\Delta_\delta = \big\{t_j : t_1 = t_0,\ 0 < t_{j+1} - t_j \leqslant \delta,\ j = \overline{1,k},\ t_{k+1} = \vartheta\big\} \tag{1.5}$$

промежутка времени управления $[t_0, \vartheta]$, имеют место следующие утверждения.

С одной стороны, пошаговый закон управления первого игрока $\{U^0(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$, формирующий кусочно-постоянную реализацию управления первого игрока по правилу

$$u(t) = U^0(t_j, x_{t_j}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad x_{t_j}(\xi) = x(t_j + \xi), \quad \xi \in [-h, 0], \quad j = \overline{1,k},$$

при любой допустимой реализации управления второго игрока $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ обеспечивает для соответствующего значения γ показателя качества (1.3) выполнение неравенства

$$\gamma \leqslant \rho^0 + \zeta. \tag{1.6}$$

С другой стороны, закон управления второго игрока $\{V^0(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$, который формирует кусочно-постоянную реализацию управления второго игрока

$$v(t) = V^0(t_j, x_{t_j}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad x_{t_j}(\xi) = x(t_j + \xi), \quad \xi \in [-h, 0], \quad j = \overline{1,k},$$

при любой допустимой реализации управления первого игрока $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ обеспечивает выполнение неравенства

$$\gamma \geqslant \rho^0 - \zeta. \tag{1.7}$$

Основным результатом настоящей работы является эффективный метод для приближенного вычисления цены ρ^0 дифференциальной игры (1.1)–(1.3) и построения оптимальных законов управления первого и второго игроков, которые с наперед заданной точностью $\zeta > 0$ гарантируют выполнение неравенств (1.6) и (1.7) соответственно.

В следующем разделе в качестве предварительных построений проводится аппроксимация показателя качества (1.3), и решение дифференциальной игры (1.1)–(1.3) сводится к нахождению цены и оптимальных стратегий в дифференциальной игре для исходной динамической системы (1.1), заданного начального условия (1.2) и аппроксимирующего показателя качества.

2. Аппроксимация показателя качества

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$, положим

$$\Delta h = h/m, \quad \vartheta_i = \vartheta - h + i\Delta h, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.1}$$

и рассмотрим дифференциальную игру для системы (1.1), начального условия (1.2) и показателя качества

$$\gamma^{(m)} = \left(\sum_{i=1}^{m} \|x(\vartheta_i)\|^2 \Delta h \right)^{1/2} + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle u(t), \Phi(t)u(t) \rangle - \langle v(t), \Psi(t)v(t) \rangle \big) \mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

аппроксимирующего исходный показатель (1.3). Цену и седловую точку в этой игре обозначим соответственно через $\rho^{(m)} = \rho^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot))$ и $\{U^{(m)}(\cdot), V^{(m)}(\cdot)\}$.

Утверждение 1. *Для любого числа $\zeta > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для любого натурального $m \geqslant M$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Выполняется неравенство*
$$|\rho^0 - \rho^{(m)}| \leq \zeta.$$

2. *Существуют такие число $\varepsilon^{(m)} > 0$ и функция $\delta^{(m)}(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(m)}]$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon^{(m)}]$, $\delta \in (0, \delta^{(m)}(\varepsilon)]$ и Δ_δ из* (1.5), *с одной стороны, закон управления $\{U^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ первого игрока гарантирует неравенство* (1.6) *какова бы ни была допустимая реализация $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ управления второго игрока, а с другой стороны, закон управления $\{V^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ второго игрока обеспечивает неравенство* (1.7) *при любой допустимой реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ управления первого игрока.*

Доказательство утверждения 1 может быть проведено по схеме из [8]. □

В соответствии с этим утверждением вычисление цены и построение оптимальных законов управления в исходной дифференциальной игре с показателем качества (1.3) сводятся к вычислению цены и построению оптимальных стратегий в дифференциальной игре с аппроксимирующим показателем качества (2.2) при достаточно больших значениях m.

Решение дифференциальной игры (1.1), (1.2), (2.2) основывается на использовании подходящего информационного образа позиции $(t, \varphi(\cdot)) \in G$ системы (1.1), который составляется из специальных прогнозов движения этой системы на каждый из моментов времени ϑ_i из показателя (2.2).

3. Информационный образ

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и позицию $(t_*, \varphi_*(\cdot)) \in G$. Прежде чем определить информационный образ этой позиции, проведем следующие вспомогательные построения.

Рассмотрим движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), порожденное из позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$ парой допустимых реализаций $u[t_*[\cdot]\vartheta)$, $v[t_*[\cdot]\vartheta)$ управлений игроков. Для этого движения справедливо представление:

$$x(t) = \big(F(t,t_*) - F(t,t_*+\tau)A_\tau(t_*+\tau)\big)\varphi_*(0) + \int\limits_{t_*}^{t_*+\tau} F(t,\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\big(A_\tau(\xi)\varphi_*(\xi - t_* - \tau)\big)\mathrm{d}\xi$$

$$+ \int\limits_{t_*}^{t_*+h} F(t,\xi)A_h(\xi)\varphi_*(\xi - t_* - h)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{t_*}^{t} F(t,\xi)\big(B(\xi)u(\xi) + C(\xi)v(\xi)\big)\mathrm{d}\xi, \quad t \in [t_*, \vartheta]. \tag{3.3}$$

Здесь матрица $F(t,s)$ при фиксированном $s \in [t_0, \vartheta + h]$ удовлетворяет условиям

$$F(t,s) = 0, \quad t \in [t_0 - h, s), \quad F(s,s) = E, \tag{3.4}$$

где E — единичная матрица, и при этом является кусочно-непрерывным справа решением интегрального уравнения

$$F(t,s) = E + A_\tau(t)F(t-\tau,s) + \int\limits_{s}^{t} A(\xi)F(\xi,s)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{s+h}^{t} A_h(\xi)F(\xi - h, s)\mathrm{d}\xi, \quad t \in [s, \vartheta]. \tag{3.5}$$

С другой стороны, при каждом фиксированном $t \in [t_0, \vartheta]$ эту матрицу можно определить как кусочно-непрерывное слева решение интегрального уравнения

$$F(t,s) = E + F(t, s+\tau)A_\tau(s+\tau) + \int\limits_{s+\tau}^{t} F(t,\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}A_\tau(\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$+ \int\limits_{s+h}^{t} F(t,\xi)A_h(\xi)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{s}^{t} F(t,\xi)A(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad s \in [t_0, t], \tag{3.6}$$

при условиях

$$F(t,s) = 0, \quad s \in (t, \vartheta + h], \quad F(t,t) = E. \tag{3.7}$$

Существование и единственность решения задачи (3.4), (3.5), эквивалентность такого определения матрицы $F(t,s)$ ее определению как единственного решения задачи (3.6), (3.7) и справедливость формулы (3.3) могут быть выведены из результатов [17, Theorem 2.4, Lemmas 2.1, 2.2] с учетом конкретного вида системы (1.1). Тем не менее отметим, что доказательство существования и единственности кусочно-непрерывных решений интегральных уравнений (3.5) и (3.6) с кусочно-непрерывными начальными условиями (3.4) и (3.7) может быть проведено по аналогии с доказательством существования и единственности решения исходного уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2), например по схеме из [16, Theorem 1], а справедливость формулы (3.3) и эквивалентность приведенных двух определений матрицы $F(t,s)$ могут быть проверены непосредственно. Отметим также, что соотношение (3.5) используется в данной работе при обосновании устанавливаемых утверждений, а соотношение (3.6) — при численной реализации развиваемых конструкций.

Для позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$ и момента времени ϑ_i, $i = \overline{1,m}$, из показателя (2.2) определим вектор $w_i(t_*, \varphi_*(\cdot)) \in \mathbb{R}^n$ по следующему правилу. При $t_* < \vartheta_i$ этот вектор определяется как то значение фазового вектора $x(\vartheta_i)$, которое в момент ϑ_i реализуется на движении $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$

системы (1.1), порожденном из позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$ нулевыми реализациями управлений игроков $u(t) \equiv 0$ и $v(t) \equiv 0$. Таким образом, применяя формулу (3.3), при $t_* < \vartheta_i$ получаем

$$w_i(t_*, \varphi_*(\cdot)) = \big(F(\vartheta_i, t_*) - F(\vartheta_i, t_* + \tau) A_\tau(t_* + \tau)\big)\varphi_*(0)$$
$$+ \int\limits_{t_*}^{t_*+\tau} F(\vartheta_i, \xi) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\big(A_\tau(\xi)\varphi_*(\xi - t_* - \tau)\big)\mathrm{d}\xi + \int\limits_{t_*}^{t_*+h} F(\vartheta_i, \xi) A_h(\xi)\varphi_*(\xi - t_* - h)\mathrm{d}\xi.$$

Если $t_* \geqslant \vartheta_i$, то учитывая, что в этом случае в силу (2.1) имеет место оценка $\vartheta_i > \vartheta - h \geqslant t_* - h$ и, стало быть, $x(\vartheta_i) = \varphi_*(\vartheta_i - t_*)$, полагаем $w_i(t_*, \varphi_*(\cdot)) = \varphi_*(\vartheta_i - t_*)$.

Из векторов $w_i(t_*, \varphi_*(\cdot))$, $i = \overline{1, m}$, составим вектор

$$\widehat{w}^{(m)}(t_*, \varphi_*(\cdot)) = \big\{w_1(t_*, \varphi_*(\cdot)), w_2(t_*, \varphi_*(\cdot)), \ldots, w_m(t_*, \varphi_*(\cdot))\big\} \in \mathbb{R}^{nm}, \tag{3.8}$$

который назовем информационным образом позиции $(t_*, \varphi_*(\cdot))$. Запись в (3.8) означает, что первые n координат вектора $\widehat{w}^{(m)}(t_*, \varphi_*(\cdot))$ совпадают с координатами вектора $w_1(t_*, \varphi_*(\cdot))$, следующие n координат вектора $\widehat{w}^{(m)}(t_*, \varphi_*(\cdot))$ совпадают с координатами вектора $w_2(t_*, \varphi_*(\cdot))$ и так далее; последние n координат вектора $\widehat{w}^{(m)}(t_*, \varphi_*(\cdot))$ совпадают с координатами вектора $w_m(t_*, \varphi_*(\cdot))$.

Определим далее матрицы

$$\widehat{B}^{(m)}(t) = \big\{B_1(t), B_2(t), \ldots, B_m(t)\big\}, \quad \widehat{C}^{(m)}(t) = \big\{C_1(t), C_2(t), \ldots, C_m(t)\big\}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{3.9}$$

где $B_i(t) = F(\vartheta_i, t)B(t)$, $C_i(t) = F(\vartheta_i, t)C(t)$, $i = \overline{1, m}$. По аналогии с (3.8) запись в (3.9) означает, что первые n строк матрицы $\widehat{B}^{(m)}(t)$ совпадают со строками матрицы $B_1(t)$, следующие n строк матрицы $\widehat{B}^{(m)}(t)$ совпадают со строками матрицы $B_2(t)$ и так далее; последние n строк матрицы $\widehat{B}^{(m)}(t)$ совпадают со строками матрицы $B_m(t)$. Матрица $\widehat{C}^{(m)}(t)$ составляется из матриц $C_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, по такому же правилу.

Непосредственно по построению, если учесть соотношения (3.3)–(3.5), имеет место

Утверждение 2. *Пусть движение $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ системы* (1.1) *порождено из начальной позиции $(t_0, \varphi_0(\cdot))$* (1.2) *допустимыми реализациями $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ и $v[t_0[\cdot]\vartheta)$. Тогда для любого числа $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения*:

1. *Для любых $t_* \in [t_0, \vartheta]$ и $t^* \in [t_*, \vartheta]$ информационные образы позиций $(t_*, x_{t_*}(\cdot))$ и $(t^*, x_{t^*}(\cdot))$, реализовавшихся на этом движении, связаны соотношением*

$$\widehat{w}^{(m)}(t^*, x_{t^*}(\cdot)) = \widehat{w}^{(m)}(t_*, x_{t_*}(\cdot)) + \int\limits_{t_*}^{t^*} \big(\widehat{B}^{(m)}(\xi)u(\xi) + \widehat{C}^{(m)}(\xi)v(\xi)\big)\mathrm{d}\xi.$$

2. *В терминальный момент времени ϑ выполняется равенство*

$$\widehat{w}^{(m)}(\vartheta, x_\vartheta(\cdot)) = \big\{x(\vartheta_1), x(\vartheta_2), \ldots, x(\vartheta_m)\big\}.$$

В качестве следствия из утверждения 2 получаем, что, во-первых, динамика информационного образа $\widehat{w}^{(m)}(t, x_t(\cdot))$ в силу движения $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) описывается уравнением

$$\mathrm{d}\widehat{w}^{(m)}(t, x_t(\cdot))/\mathrm{d}t = \widehat{B}^{(m)}(t)u(t) + \widehat{C}^{(m)}(t)v(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{3.10}$$

а во-вторых, аппроксимирующий показатель качества (2.2) может быть записан в виде

$$\gamma^{(m)} = \sqrt{\Delta h}\, \|\widehat{w}^{(m)}(\vartheta, x_\vartheta(\cdot))\| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle u(t), \Phi(t)u(t)\rangle - \langle v(t), \Psi(t)v(t)\rangle\big)\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

Соотношения (3.10) и (3.11) определяют вспомогательную дифференциальную игру, которая рассматривается в следующем разделе.

4. Вспомогательная дифференциальная игра

Зафиксируем число $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим вспомогательную дифференциальную игру, в которой движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением

$$\mathrm{d}\widehat{z}^{(m)}(t)/\mathrm{d}t = \widehat{B}^{(m)}(t)u(t) + \widehat{C}^{(m)}(t)v(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad \widehat{z}^{(m)} \in \mathbb{R}^{nm}, \quad u(t) \in P, \quad v(t) \in Q, \tag{4.1}$$

начальное условие определяется по правилу

$$\widehat{z}^{(m)}(t_0) = \widehat{z}_0^{(m)} = \widehat{w}^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot)) \tag{4.2}$$

и показатель качества имеет вид

$$\widehat{\gamma}^{(m)} = \sqrt{\Delta h}\, \|\widehat{z}^{(m)}(\vartheta)\| + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle u(t), \Phi(t)u(t)\rangle - \langle v(t), \Psi(t)v(t)\rangle\big)\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

Здесь матрицы $\widehat{B}^{(m)}(t)$ и $\widehat{C}^{(m)}(t)$ определяются в соответствии с соотношением (3.9); $\widehat{w}^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot))$ — информационный образ (3.8) начальной позиции $(t_0, \varphi_0(\cdot))$ (1.2).

Подчеркнем, что в отличие от исходной дифференциальной игры (1.1)–(1.3) во вспомогательной дифференциальной игре движение динамической системы (4.1) описывается уже обыкновенным дифференциальным уравнением, а показатель качества (4.3) зависит от значения фазового вектора $\widehat{z}^{(m)}(\vartheta)$ этой системы только в терминальный момент времени ϑ.

Согласно [2, теорема 29.2, § 32] дифференциальная игра (4.1)–(4.3) имеет цену $\widehat{\rho}^{(m)} = \widehat{\rho}^{(m)}(t_0, \widehat{z}_0^{(m)})$ и седловую точку $\{u^{(m)}(\cdot), v^{(m)}(\cdot)\}$, состоящую из оптимальных чистых позиционных стратегий $u^{(m)}(t, \widehat{z}^{(m)}, \varepsilon) \in P$ и $v^{(m)}(t, \widehat{z}^{(m)}, \varepsilon) \in Q$, $(t, \widehat{z}^{(m)}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^{nm}$, $\varepsilon > 0$.

Утверждение 3. *Для любого числа $m \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Цены $\rho^{(m)}$ и $\widehat{\rho}^{(m)}$ в дифференциальных играх* (1.1), (1.2), (2.2) *и* (4.1)–(4.3) *совпадают:*

$$\rho^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot)) = \widehat{\rho}^{(m)}\big(t_0, \widehat{w}^{(m)}(t_0, \varphi_0(\cdot))\big).$$

2. *Стратегии управления игроков*

$$U_*^{(m)}(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) = u^{(m)}\big(t, \widehat{w}^{(m)}(t, \varphi(\cdot)), \varepsilon\big), \quad V_*^{(m)}(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) = v^{(m)}\big(t, \widehat{w}^{(m)}(t, \varphi(\cdot)), \varepsilon\big), \\ (t, \varphi(\cdot)) \in G, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.4}$$

являются оптимальными в дифференциальной игре (1.1), (1.2), (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения 3 устанавливается по схеме из [12, теорема 2.1] с опорой на утверждение 2. □

З а м е ч а н и е 2. Упомянутая схема доказательства не использует вытекающий из результатов работы [6] факт о том, что в дифференциальной игре (1.1), (1.2), (2.2) существуют цена и седловая точка: этот факт устанавливается по ходу доказательства. Таким образом, предложенные конструкции информационного образа (3.8) и соответствующая вспомогательная дифференциальная игра (4.1)–(4.3) могут быть применены для непосредственного доказательства существования цены и седловой точки в игре (1.1), (1.2), (2.2), а следовательно, если учесть утверждение 1, и в исходной игре (1.1)–(1.3). Кроме того, можно показать, что такой подход, опирающийся на линейность исходной системы (1.1), останется работоспособным и в случае, когда матрица $A_\tau(t)$ не удовлетворяет первому из условий в (1.4) и результаты работы [6] неприменимы.

З а м е ч а н и е 3. Развитые в настоящей работе конструкции по сведению дифференциальной игры (1.1), (1.2), (2.2) к вспомогательной дифференциальной игре (4.1)–(4.3) не используют специфики показателя (2.2). Принципиальным является то, что этот показатель зависит только от конечного числа значений фазового вектора системы в зафиксированные моменты времени.

В согласии с утверждениями 1 и 3 вычисление цены и построение оптимальных законов управления в исходной дифференциальной игре (1.1)–(1.3) сводятся к нахождению цены и оптимальных стратегий во вспомогательной дифференциальной игре (4.1)–(4.3) при достаточно больших значениях m. С точки зрения численной реализации соответствующих разрешающих процедур основным недостатком при этом является большая размерность nm фазового вектора во вспомогательной игре (4.1)–(4.3). Однако в случае, когда множества P и Q, задающие геометрические ограничения на управляющие воздействия игроков, «достаточно велики», предложенные конструкции приводят к эффективному решению.

А именно предположим, что справедливы включения

$$\big\{u \in \mathbb{R}^r : \|u\| \leqslant R\big\} \subset P, \quad \big\{v \in \mathbb{R}^s : \|v\| \leqslant R\big\} \subset Q, \tag{4.5}$$

причем число $R > 0$ удовлетворяет условиям

$$\|\Phi^{-1}(t)B^T(t)F^T(\xi,t)\| \leqslant 2R, \quad \|\Psi^{-1}(t)C^T(t)F^T(\xi,t)\| \leqslant 2R, \quad t \in [t_0,\vartheta], \quad \xi \in [\vartheta - h, \vartheta],$$

где матрица $F(\xi,t)$ определяется согласно (3.4), (3.5), верхние символы $^{-1}$ и ^{T} обозначают взятие обратной матрицы и транспонирование соответственно. Тогда в силу (3.9) для любого числа $m \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства $\|\Phi^{-1}(t)\widehat{B}^{(m)T}(t)\| \leqslant 2R$, $\|\Psi^{-1}(t)\widehat{C}^{(m)T}(t)\| \leqslant 2R$, $t \in [t_0,\vartheta]$, и, стало быть, с учетом вида показателя качества (4.3) можно считать [2, §34; 3, §29], что во вспомогательной дифференциальной игре (4.1)–(4.3) геометрические ограничения на управляющие воздействия игроков отсутствуют: $u \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^s$. В этом случае решение вспомогательной игры (4.1)–(4.3) даже при относительно большой размерности фазового вектора может быть эффективно найдено при помощи метода выпуклых сверху оболочек. Подробное описание этого метода применительно к дифференциальной игре вида (4.1)–(4.3), а также репрезентативные формулы для цены и оптимальных стратегий игроков можно найти, например, в [3, § 29] (см. также [9; 13, Sec. 3]).

В разд. 6 предложенный подход к решению дифференциальной игры (1.1)–(1.3) иллюстрируется на модельном примере. При этом по аналогии с [13] разработанные конструкции оптимальных законов управления сравниваются с процедурами управления системой (1.1), основанными на использовании конечномерных аппроксимирующих систем в качестве поводырей [14]. В следующем разделе эти процедуры описываются с учетом конкретного вида системы (1.1) и показателя качества (1.3).

5. Управление с конечномерным поводырем

Зафиксируем натуральное число $m \geqslant 2$ и в соответствии с (2.1) определим число Δh, при этом для простоты формул будем считать, что $l = \tau/\Delta h \in \mathbb{N}$. Рассмотрим дифференциальную игру, описываемую динамической системой

$$\begin{cases} \mathrm{d}y^{[0]}(t)/\mathrm{d}t = A(t)y^{[0]}(t) + A_h(t)y^{[m]}(t) + B(t)\widetilde{u}(t) + C(t)\widetilde{v}(t), & t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \\ \mathrm{d}y^{[1]}(t)/\mathrm{d}t = \big(y^{[0]}(t) + A_\tau(t)y^{[l]}(t) - y^{[1]}(t)\big)/\Delta h, & y^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0,m}, \\ \mathrm{d}y^{[i]}(t)/\mathrm{d}t = \big(y^{[i-1]}(t) - y^{[i]}(t)\big)/\Delta h, \quad i = \overline{2,m}, & \widetilde{u} \in P, \quad \widetilde{v} \in Q, \end{cases} \tag{5.1}$$

начальным условием

$$y^{[0]}(t_0) = y_0^{[0]} = \varphi_0(0) + A_\tau(t_0)\varphi_0(-l\Delta h), \quad y^{[i]}(t_0) = y_0^{[i]} = \varphi_0(-i\Delta h), \quad i = \overline{1,m}, \tag{5.2}$$

и показателем качества

$$\widetilde{\gamma}^{(m)} = \bigg(\sum_{i=1}^{m} \|y^{[i]}(\vartheta)\|^2 \Delta h\bigg)^{1/2} + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \big(\langle \widetilde{u}(t), \Phi(t)\widetilde{u}(t)\rangle - \langle \widetilde{v}(t), \Psi(t)\widetilde{v}(t)\rangle\big)\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

В соответствии с [2, теорема 29.2] эта игра имеет цену $\widetilde{\rho}^{(m)} = \widetilde{\rho}^{(m)}(t_0, y_0^{[0]}, y_0^{[1]}, \ldots, y_0^{[m]})$ и седловую точку $\{\widetilde{u}^{(m)}(\cdot), \widetilde{v}^{(m)}(\cdot)\}$, которая состоит из оптимальных чистых позиционных стратегий $\widetilde{u}^{(m)}(t, y^{[0]}, y^{[1]}, \ldots, y^{[m]}, \varepsilon) \in P$ и $\widetilde{v}^{(m)}(t, y^{[0]}, y^{[1]}, \ldots, y^{[m]}, \varepsilon) \in Q$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $y^{[i]} \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, m}$, $\varepsilon > 0$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и разбиение Δ_δ (1.5). Следуя [14], рассмотрим процедуру формирования управлений игроков в исходной дифференциальной игре (1.1)–(1.3) с использованием аппроксимирующей системы (5.1) в качестве моделирующего поводыря. С учетом наличия интегральных слагаемых в показателях качества (1.3) и (5.3), обозначая

$$\alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \big(\langle u(\xi), \Phi(\xi) u(\xi)\rangle - \langle v(\xi), \Psi(\xi) v(\xi)\rangle\big) \mathrm{d}\xi$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t} \big(\langle \widetilde{u}(\xi), \Phi(\xi) \widetilde{u}(\xi)\rangle - \langle \widetilde{v}(\xi), \Psi(\xi) \widetilde{v}(\xi)\rangle\big) \mathrm{d}\xi, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{5.4}$$

для первого игрока имеем

$$\begin{gathered}
u(t) = u_j \in \operatorname*{argmin}_{u \in P} \big(\langle B(t_j) u, x(t_j) - A_\tau(t_j) x(t_j - \tau) - y^{[0]}(t_j)\rangle + \langle u, \Phi(t_j) u\rangle \alpha(t_j)\big), \\
\widetilde{v}(t) = \widetilde{v}_j \in \operatorname*{argmax}_{\widetilde{v} \in Q} \big(\langle C(t_j) \widetilde{v}, x(t_j) - A_\tau(t_j) x(t_j - \tau) - y^{[0]}(t_j)\rangle - \langle \widetilde{v}, \Psi(t_j) \widetilde{v}\rangle \alpha(t_j)\big), \\
\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}^{(m)}\big(t_j, y^{[0]}(t_j), y^{[1]}(t_j), \ldots, y^{[m]}(t_j), \varepsilon\big), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{1, k}.
\end{gathered} \tag{5.5}$$

Аналогично, с понятными изменениями, для второго игрока получаем:

$$\begin{gathered}
v(t) = v_j \in \operatorname*{argmax}_{v \in Q} \big(\langle C(t_j) v, y^{[0]}(t_j) - x(t_j) + A_\tau(t_j) x(t_j - \tau)\rangle - \langle v, \Psi(t_j) v\rangle \alpha(t_j)\big), \\
\widetilde{u}(t) = \widetilde{u}_j \in \operatorname*{argmin}_{\widetilde{u} \in P} \big(\langle B(t_j) \widetilde{u}, y^{[0]}(t_j) - x(t_j) + A_\tau(t_j) x(t_j - \tau)\rangle + \langle \widetilde{u}, \Phi(t_j) \widetilde{u}\rangle \alpha(t_j)\big), \\
\widetilde{v}(t) = \widetilde{v}^{(m)}\big(t_j, y^{[0]}(t_j), y^{[1]}(t_j), \ldots, y^{[m]}(t_j), \varepsilon\big), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{1, k}.
\end{gathered} \tag{5.6}$$

Утверждение 4. *Для любого числа $\zeta > 0$ можно указать такое число $M > 0$, что для любого натурального $m \geqslant M$ справедливы следующие утверждения:*

1. *Выполняется неравенство $|\rho^0 - \widetilde{\rho}^{(m)}| \leq \zeta$.*

2. *Существуют такие число $\widetilde{\varepsilon}^{(m)} > 0$ и функция $\widetilde{\delta}^{(m)}(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}^{(m)}]$, что для любых $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}^{(m)}]$, $\delta \in (0, \widetilde{\delta}^{(m)}(\varepsilon)]$ и Δ_δ (1.5), с одной стороны, процедура формирования управления первого игрока (5.5) гарантирует неравенство (1.6) при любой допустимой реализации управления $v[t_0[\cdot]\vartheta)$ второго игрока, а с другой стороны, процедура формирования управления второго игрока (5.6) обеспечивает неравенство (1.7) при любой допустимой реализации $u[t_0[\cdot]\vartheta)$ управления первого игрока.*

Доказательство утверждения 4 проводится по схеме, указанной в [13]. □

Отметим, что, как и во вспомогательной дифференциальной игре (4.1)–(4.3), цена $\widetilde{\rho}^{(m)}$ и оптимальные стратегии $\widetilde{u}^{(m)}(\cdot)$ и $\widetilde{v}^{(m)}(\cdot)$ в игре (5.1)–(5.3) могут быть найдены методом выпуклых сверху оболочек [3; 8]. При этом получаемые разрешающие конструкции допускают эффективную реализацию в случае, когда для геометрических ограничений P и Q выполняются включения (4.5), причем число R удовлетворяет неравенствам

$$\|\Phi^{-1}(t) B^T(t) F_m^T(\vartheta, t)\| \leqslant 2R, \quad \|\Phi^{-1}(t) C^T(t) F_m^T(\vartheta, t)\| \leqslant 2R, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где через $F_m(\vartheta, t)$ обозначена матрица Коши системы (5.1).

Подчеркнем, что основное отличие описанного в этом разделе подхода к построению приближенного решения дифференциальной игры (1.1)–(1.3) от конструкций, предложенных в предыдущих разделах, заключается в том, что в согласии с (5.5), (5.6) при формировании управлений на текущем шаге $[t_j, t_{j+1})$ каждому из игроков требуется дополнительная информация о величине $\alpha(t_j)$ (5.4), оценивающей реализации управлений обоих игроков на промежутке $[t_0, t_j)$.

6. Пример

Рассмотрим дифференциальную игру, в которой движение системы описывается следующим линейным функционально-дифференциальными уравнением нейтрального типа:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_1(t)/\mathrm{d}t = x_2(t), \\ \mathrm{d}\big(x_2(t) + 0.4x_3(t-0.5) - 0.4(4-t)x_4(t-0.5)\big)/\mathrm{d}t = -2x_1(t) - 0.4x_2(t) \\ \qquad + 0.02x_3(t) - x_1(t-1) - 0.4x_2(t-1) + 0.4x_3(t-1) - x_4(t-1) \\ \qquad + (5-t)u_1(t) + 2v_1(t), \\ \mathrm{d}x_3(t)/\mathrm{d}t = x_4(t), \\ \mathrm{d}\big(x_4(t) + 0.5x_1(t-0.5) - 0.5(2-t)x_4(t-0.5)\big)/\mathrm{d}t = 0.01x_1(t) - x_3(t), \\ \qquad - 0.1x_4(t) - 0.2x_1(t-1) + 0.7x_2(t-1) - 0.4x_3(t-1) + 0.5x_4(t-1) \\ \qquad + (4-0.5t)u_2(t) + 3v_2(t), \end{cases} \tag{6.1}$$

$$0 \leqslant t \leqslant 4, \quad x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, \quad u_1^2 + u_2^2 \leqslant 9, \quad v_1^2 + v_2^2 \leqslant 9,$$

задано начальное условие

$$x_1(\xi) = \sin(\xi), \quad x_2(\xi) = \cos(\xi), \quad x_3(\xi) = \cos(\xi), \quad x_4(\xi) = -\sin(\xi), \quad \xi \in [-1, 0], \tag{6.2}$$

и показатель качества процесса управления имеет вид

$$\gamma = \bigg(\int\limits_3^4 \big(x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + x_4^2(t)\big)\mathrm{d}t \bigg)^{1/2} + \int\limits_0^4 \big(u_1^2(t) + u_2^2(t) - v_1^2(t) - v_2^2(t)\big)\mathrm{d}t. \tag{6.3}$$

Для нахождения цены и построения оптимальных законов управления игроков в дифференциальной игре (6.1)–(6.3) применялись предложенные в работе конструкции.

Вычисления проводились при различных значениях параметров $m \geqslant 2$, $\varepsilon > 0$ и равномерных разбиениях Δ_δ (1.5) с диаметром $\delta > 0$. При этом моделировались следующие способы формирования управляющих воздействий игроков:

1. Первый и второй игроки используют соответственно законы управления $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и $\{V_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ на базе стратегий $U_*^{(m)}(\cdot)$ и $V_*^{(m)}(\cdot)$ из (4.4).

2. Первый игрок использует закон управления $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$, второй игрок формирует управляющие воздействия на основе процедуры управления с поводырем (5.6).

3. Первый игрок формирует управляющие воздействия на основе процедуры управления с поводырем (5.5), второй игрок использует закон управления $\{V_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$.

4. Первый игрок использует закон управления $\{U_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$, второй игрок применяет закон управления $\{V(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ на базе стратегии

$$V(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) = \begin{cases} 1/2\Psi^{-1}(t)C^T(t)\varphi(0)/\|\varphi(0)\|, & \text{если } \varphi(0) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \quad (t, \varphi(\cdot)) \in G, \quad \varepsilon > 0.$$

5. Первый игрок применяет закон управления $\{U(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$ на базе стратегии

$$U(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) = \begin{cases} -1/2\Phi^{-1}(t)B^T(t)\varphi(0)/\|\varphi(0)\|, & \text{если } \varphi(0) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \quad (t, \varphi(\cdot)) \in G, \quad \varepsilon > 0,$$

второй игрок использует закон управления $\{V_*^{(m)}(\cdot), \varepsilon, \Delta_\delta\}$.

6. Первый игрок использует закон управления $\{U_*^{(m)}(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$, второй игрок выбирает нулевое управление $v(t)\equiv 0$.

7. Первый игрок выбирает нулевое управление $u(t)\equiv 0$, второй игрок использует закон управления $\{V_*^{(m)}(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$.

В таблице приведены полученные результаты. На рис. 1 и 2 изображены движение системы (6.1) и соответствующие реализации управлений игроков при выборе первого и шестого способов формирования управляющих воздействий.

Результаты численного моделирования в дифференциальной игре (6.1)–(6.3)

m	ε	δ	$\rho^{(m)}$	$\widetilde{\rho}^{(m)}$	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	γ_5	γ_6	γ_7
10	0.1	0.01	1.844	2.178	1.853	1.388	2.082	0.126	3.189	1.296	10.68
20	0.05	0.005	1.842	2.005	1.845	1.81	1.953	0.12	3.102	1.332	10.597
50	0.02	0.002	1.84	1.905	1.842	1.829	1.885	0.13	3.052	1.36	10.608
100	0.01	0.001	1.839	1.872	1.84	1.834	1.861	0.135	3.036	1.369	10.621

Здесь $\rho^{(m)}$ и $\widetilde{\rho}^{(m)}$ — цены дифференциальных игр (1.1), (1.2), (2.2) и (5.1)–(5.3) соответственно, γ_i — значение показателя качества (6.3), реализовавшееся при выборе i-го способа формирования управляющих воздействий игроков, $i=\overline{1,7}$.

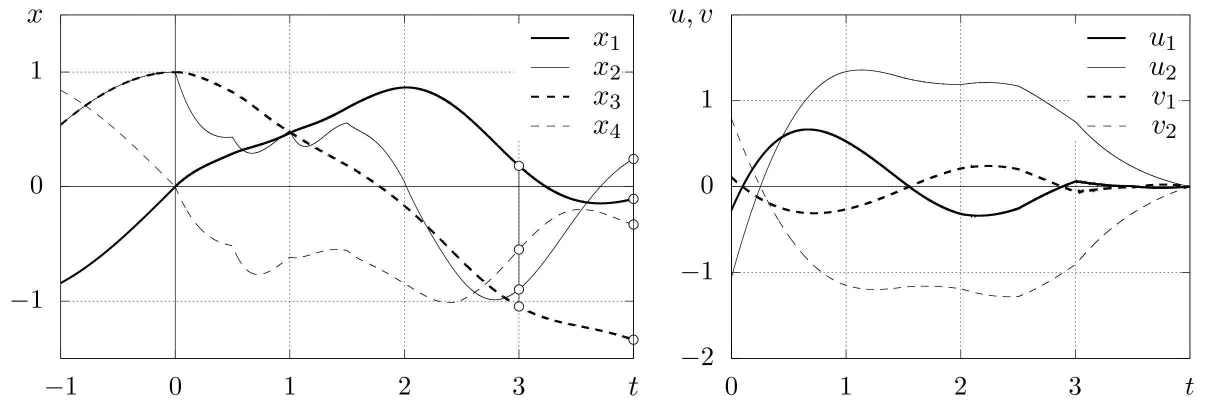


Рис. 1. Движение системы (6.1) и реализации управлений игроков, сформировавшиеся при действии законов управления $\{U_*^{(m)}(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$ и $\{V_*^{(m)}(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$ (см. (4.4)) при $m=100$, $\varepsilon=0.01$, $\delta=0.001$.

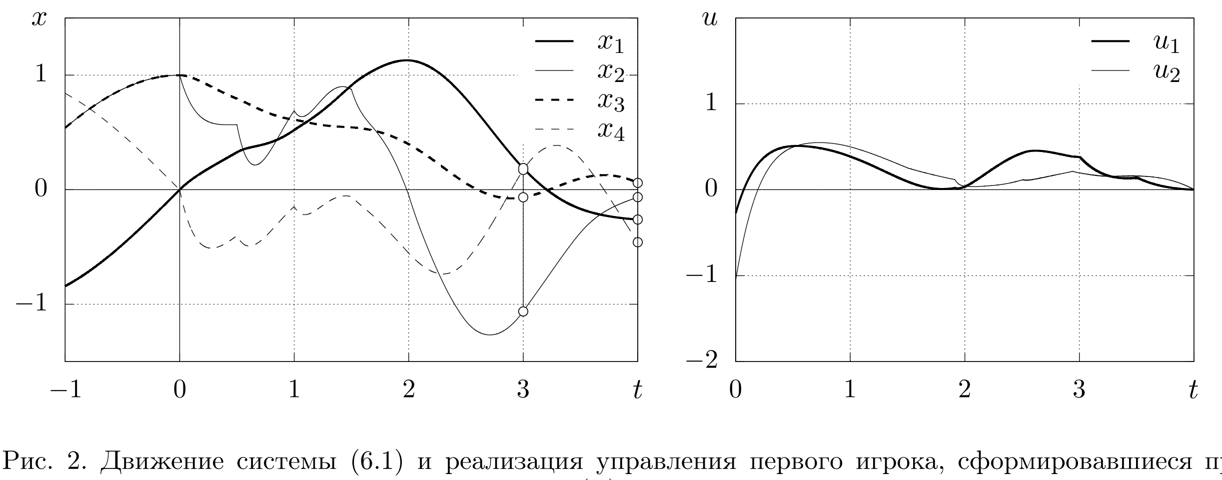


Рис. 2. Движение системы (6.1) и реализация управления первого игрока, сформировавшиеся при действии закона управления первого игрока $\{U_*^{(m)}(\cdot),\varepsilon,\Delta_\delta\}$ (см. (4.4)) при $m=100$, $\varepsilon=0.01$, $\delta=0.001$ и нулевой реализации управления второго игрока $v(t)\equiv 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p.
4. **Субботина Н.Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 11. С. 1890–1896.
5. **Ушаков В.Н.** К свойству стабильности в игровой задаче о сближении с фиксированным моментом окончания // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 1034–1046.
6. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 101–112. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112 .
7. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
8. **Лукоянов Н.Ю.** К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 188–198.
9. **Лукоянов Н.Ю.** Об одной дифференциальной игре с интегральным критерием качества // Дифференц. уравнения. 1994. Т 30, № 11. С. 1905–1913.
10. **Лукоянов Н.Ю., Решетова Т.Н.** Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 4. С. 586–597.
11. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Оптимизация гарантии в функционально-дифференциальных системах с последействием по управлению // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 4. С. 515–525.
12. **Гомоюнов М.И.** Линейно-выпуклые задачи оптимизации гарантии при запаздывании в управлении // Изв. ИМИ УдГУ. 2015. Вып. 1(45). С. 37–105.
13. **Gomoyunov M., Plaksin A.** On a problem of guarantee optimization in time-delay systems // IFAC PapersOnLine. 2015. Vol. 48, iss. 25. P. 172–177. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079 .
14. **Лукоянов Н.Ю.** Конечномерные поводыри систем нейтрального типа // Междунар. конф. “Динамические системы: обратные задачи, устойчивость и процессы управления”, посвящен. 80-летию акад. Ю.С. Осипова (Москва, 22–23 сентября 2016 г.): тез. докл. С. 67–70.
15. **Hale J.K., Lunel S.M.V.** Introduction to functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1993. 447 p. (Appl. Math. Sci.; vol. 99).
16. **Hale J.K., Meyer K.R.** A class of functional equations of neutral type // Mem. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 76. 65 p.
17. **Kent G.A.** Optimal control of functional differential equations of neutral type // Thesis (Ph.D.)–Brown University. Ann Arbor: ProQuest LLC, 1971. 132 p.

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Поступила 8.11.2016

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр., профессор
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: nyul@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamic system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under lack of information.* Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p.
4. Subbotina N.N. Universal optimal strategies in positional differential games. *Differentsial'nye Uravneniya*, 1983, vol. 19, no. 11, pp. 1890–1896 (in Russian).
5. Ushakov V.N. On the stability property in a game-theoretic approach problem with fixed terminal time. *Diff. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 7, pp. 1046–1058. doi: 10.1134/S0012266111070147.
6. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Existence of the value and saddle point in positional differential games for neutral-type systems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2016, vol. 22, no. 2, pp. 101–112 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112.
7. Krasovskii N.N. *Stability of motion: Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay.* Stanford: Stanford Univ. Press, 1963, 188 p. This book is a translation, with alterations and additions, of N.N. Krasovskii, *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1959, 211 p.
8. Lukoyanov N.Yu. The problem of computing the value of a differential game for a positional functional. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 177–186.
9. Lukoyanov N.Yu. A differential game with integral performance criterion. *Diff. Equat.*, 1994, vol. 30, no. 11, pp. 1759–1766.
10. Lukoyanov N.Yu., Reshetova T.N. Problems of conflict control of high dimensionality functional systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 4, pp. 545–554.
11. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. Guarantee optimization in functional-differential systems with a control aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 369–377. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.002.
12. Gomoyunov M.I. Linear-convex guarantee optimization problems with control delay. *Izv. IMI UdGU*, 2015, no. 1(45), pp. 37–105 (in Russian).
13. Gomoyunov M., Plaksin A. On a problem of guarantee optimization in time-delay systems. *IFAC PapersOnLine*, 2015, vol. 48, iss. 25, pp. 172–177. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.079.
14. Lukoyanov N.Yu. Finite-dimensional guides of neutral-type systems. *Mezhdunarodnaya konferentsiya "Dinamicheskie sistemy: obratnye zadachi, ustoichivost' i protsessy upravleniya", posvyashchennaya vos'midesyatiletiyu akademika Yu.S. Osipova, Tezisy dokl.* [Abstr. Internat. Conf., Dynamical Systems: Inverse Problems, Stability, and Control Processes, dedicated to the 80-th birthday of Academician Yu. S. Osipov], Moscow, 2016, pp. 67–70. Available at: http://dynsys2016.cs.msu.ru (in Russian).
15. Hale J.K., Lunel S.M.V. Introduction to functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1993, Ser. Appl. Math. Sci., vol. 99, 447 p.
16. Hale J.K., Meyer K.R. A class of functional equations of neutral type. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1967, vol. 76, 65 p.
17. Kent G.A. Optimal control of functional differential equations of neutral type. *Thesis* (*Ph.D.*)*–Brown University*, Ann Arbor: ProQuest LLC, 1971, 132 p.

M. I. Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com .

N. Yu. Lukoyanov, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: nyul@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.27

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СВЕРХУ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, В ВИДЕ НИЖНИХ ОГИБАЮЩИХ СЕМЕЙСТВ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ[1]

В. В. Гороховик

Известно, что вещественнозначная функция, определенная на метрическом пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) в том и только том случае, когда она является нижней (верхней) огибающей некоторого семейства непрерывных функций. В статье для функций, определенных на вещественных нормированных пространствах, этот классический результат уточняется следующим образом: ограниченная сверху (снизу) вещественнозначная функция, определенная на нормированном пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) тогда и только тогда, когда она может быть представлена как нижняя (верхняя) огибающая семейства выпуклых (вогнутых) функций, удовлетворяющих на всем пространстве условию Липшица. Показано, что для положительно однородных функций требование ограниченности сверху (снизу) может быть опущено: положительно однородная функция, определенная на нормированном пространстве, полунепрерывна сверху (снизу) в том и только том случае, когда она является нижней (верхней) огибающей семейства непрерывных сублинейных (суперлинейных) функций. Данная характеристика распространяет на произвольные нормированные пространства аналогичное утверждение, ранее доказанное В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым для положительно однородных функций, определенных на конечномерных пространствах, и распространенное А. Удерзо на случай равномерно выпуклых банаховых пространств. Этот результат позволяет распространить на негладкие функции, определенные на нормированных пространствах, понятия верхнего и нижнего экзостеров, введенные в конечномерных пространствах В. Ф. Демьяновым.

Ключевые слова: полунепрерывные функции, верхние и нижние огибающие, выпуклые и вогнутые функции, условие Липшица, положительно однородные функции.

V. V. Gorokhovik. On the representation of upper semicontinuous functions defined on infinite-dimensional normed spaces as lower envelopes of families of convex functions.

It is well known that a real-valued function defined on a metric space is upper (lower) semicontinuous if and only if it is a lower (upper) envelope of a family of continuous functions. In this paper, for functions defined on real normed spaces, this classical result is refined as follows. An upper (lower) bounded real-valued function defined on a normed space is upper (lower) semicontinuous if and only if it can be represented as a lower (upper) envelope of a family of convex (concave) functions that satisfy the Lipschitz condition on the whole space. It is shown that the requirement of upper (lower) boundedness may be omitted for positively homogeneous functions: a positively homogeneous function defined on a normed space is upper (lower) semicontinuous if and only if it is a lower (upper) envelope of a family of continuous sublinear (superlinear) functions. This characterization extends to arbitrary normed spaces a similar statement proved earlier by V. F. Demyanov and A. M. Rubinov for positively homogeneous functions defined on finite-dimensional spaces and later extended by A. Uderzo to the case of uniformly convex Banach spaces. The latter result allows to extend the notions of upper and lower exhausters introduced by V. F. Demyanov in finite-dimensional spaces to nonsmooth functions defined on arbitrary real normed spaces.

Keywords: semicontinuous functions, upper and lower envelopes, convex and concave functions, Lipschitz continuity, positively homogeneous functions.

MSC: 49J52, 54C35, 26B25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-88-102

Введение

Отправным пунктом для исследований, результаты которых представлены в настоящей статье, явились работы В. Ф. Демьянова и А. М. Рубинова, а также их учеников и последова-

[1]Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект Ф15-035).

телей, посвященные исчерпывающим семействам верхних выпуклых (нижних вогнутых) аппроксимаций и экзостерам положительно однородных функций.

Так, в 1982 г. В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [1, теорема 2.1] (см. также [2, лемма 4.3]) доказали, что для того чтобы вещественнозначная положительно однородная функция, определенная на $\mathbb{R}^n$, была полунепрерывной сверху (снизу), необходимо и достаточно, чтобы она была нижней (верхней) огибающей некоторого семейства таких ее сублинейных мажорант (суперлинейных минорант), которые принимают конечные значения на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Такие семейства, в терминологии Демьянова — Рубинова, называются исчерпывающими семействами верхних выпуклых (нижних вогнутых) аппроксимаций. Используя данную характеристику (полу)непрерывных положительно однородных функций и классическую двойственность Минковского, В. Ф. Демьянов [3;4] построил для таких функций двойственные им объекты, которые он назвал *экзостерами*, и тем самым фактически распространил двойственность Минковского на существенно более общие функции, чем сублинейные или даже разностно-сублинейные. Экзостеры, являясь двойственными объектами по отношению к полунепрерывным положительно однородным функциям, могут эффективно использоваться для их глобального анализа. Что же касается произвольных вещественнозначных функций, то в том случае, когда они являются в том или ином смысле дифференцируемыми по направлениям, экзостеры, соответствующие производным по направлениям, обобщают понятия субдифференциала [5; 6] и квазидифференциала [2; 7] и, следовательно, являются инструментом локального анализа таких функций. Описанная схема использования экзостеров для исследования негладких функций успешно развивалась в последние десятилетия в многочисленных работах, часть из которых указана в библиографических ссылках в статье [8].

В 2000 г. А. Удерзо [9], следуя идейно доказательству из [2], распространил приведенную выше характеристику свойства полунепрерывности на вещественнозначные положительно однородные функции, областью определения которых являются равномерно выпуклые банаховы пространства. Одним из основных результатов настоящей статьи является доказательство того, что данная характеристика полунепрерывности остается справедливой и для положительно однородных функций, определенных на произвольных нормированных пространствах. Данное здесь доказательство этой характеристики (точнее, доказательство ее необходимой части) существенно отличается от соответствующих доказательств из [1; 2] и [9]. Схема нашего доказательства и статьи в целом следующая.

Прежде всего, в разд. 1 мы вводим для множеств, принадлежащих векторному пространству, понятие выпуклой компоненты, под которой понимается максимальное (по включению) выпуклое подмножество данного множества, и доказываем, что рецессивный конус любого непустого множества совпадает с пересечением рецессивных конусов его выпуклых компонент. Как показано в статье [10], телесность рецессивного конуса является характеристическим признаком глобальной эпилипшицевости множества. Этим признаком мы пользуемся в дальнейшем для характеристики надграфиков (подграфиков) функций, удовлетворяющих условию Липшица.

В разд. 2 для функций, определенных на вещественных векторных пространствах и принимающих значения в расширенной вещественной прямой, вводятся понятия минимальных выпуклых мажорант и максимальных вогнутых минорант, которые распространяют на функции понятие выпуклой компоненты множества. Так, выпуклые компоненты надграфика функции являются надграфиками минимальных выпуклых мажорант, а выпуклые компоненты подграфика — подграфиками максимальных вогнутых минорант. Доказывается (теорема 2.1), что любая функция, которая не принимает значение $-\infty$, в частности, любая вещественнозначная функция, определенная на векторном пространстве, является точной нижней огибающей семейства всех ее минимальных выпуклых мажорант, а любая функция, которая не принимает значение $+\infty$, — точной верхней огибающей семейства всех ее максимальных вогнутых минорант. Недостатком такого представления функций в виде точных огибающих является то, что даже в случае, когда рассматриваемая функция принимает только конечные вещественные значения, среди ее минимальных выпуклых мажорант и среди максимальных вогнутых минорант могут содержаться такие, которые принимают бесконечные значения. Вместе с тем, как показано в теореме 2.2, вещественнозначная функция, определенная на нормированном векторном пространстве, удовлетворяет на всем пространстве условию Липшица в том и только том случае, когда любая ее минимальная выпуклая мажоранта (или, эквивалентно, любая ее максимальная вогнутая миноранта) принимает только конечные вещественные значения и удовлетворяет на всем пространстве условию Липшица, причем множество констант Липшица, соответствующих всем минимальным выпуклым мажорантам (максимальным вогнутым минорантам), ограничено сверху. Естественно возникает вопрос: а нельзя ли охарактеризовать класс таких вещественнозначных функций, определенных на нормированном векторном пространстве, которые являются нижними (верхними) огибающими семейств вещественнозначных выпуклых (вогнутых) функций, удовлетворяющих на всем пространстве условию Липшица? Частичный ответ на этот вопрос дается в разд. 3 в теореме 3.2. Как установлено в этой теореме, классу таких функций принадлежат все ограниченные сверху (снизу) вещественнозначные функции, которые являются полунепрерывными сверху (снизу) на всем пространстве. В разд. 4 показано, что если ограничиться рассмотрением только положительно однородных функций, то данный класс можно охарактеризовать полностью. Так, в теореме 4.3 установлено, что для того чтобы вещественнозначная положительно однородная функция, определенная на нормированном векторном пространстве, была полунепрерывной сверху (снизу) на всем пространстве, необходимо и достаточно, чтобы она была нижней (верхней) огибающей некоторого семейства таких ее сублинейных мажорант, которые принимают только конечные вещественные значения и являются непрерывными (равносильно, удовлетворяют условию Липшица) на всем пространстве. Таким образом, эта теорема решает поставленную в самом начале данного введения задачу о распространении на произвольные нормированные пространства характеристики полунепрерывных функций, установленной ранее В. Ф. Демьяновым и А. М. Рубиновым [1; 2] для конечномерных нормированных пространств, а А. Удерзо [9] для равномерно выпуклых банаховых пространств. Самостоятельный интерес представляет также теорема 4.2, в соответствии с которой вещественнозначная положительно однородная функция, определенная на нормированном пространстве, является полунепрерывной сверху (снизу) в том и только том случае, когда она является нижней (верхней) огибающей невозрастающей (неубывающей) последовательности вещественнозначных положительно однородных функций, удовлетворяющих на всем пространстве условию Липшица.

Перейдем к детальному изложению результатов статьи.

1. Выпуклые компоненты и рецессивный конус множества

Пусть X — вещественное векторное пространство, Q — произвольное множество из X.

Любое максимальное (в смысле включения) выпуклое подмножество множества Q будем называть *выпуклой компонентой множества* Q.

Существование выпуклых компонент для произвольного непустого множества Q следует из леммы Цорна [11]. Действительно, так как любое одноточечное множество из X выпукло, то совокупность всех выпуклых подмножеств, принадлежащих непустому множеству Q, непуста. Кроме того, поскольку для любой цепи выпуклых подмножеств из Q объединение составляющих ее подмножеств также является выпуклым подмножеством множества Q, то совокупность всех выпуклых подмножеств, принадлежащих непустому множеству Q, индуктивно упорядочена по возрастанию в смысле отношения включения. Следовательно, в силу леммы Цорна семейство максимальных выпуклых подмножеств (выпуклых компонент) множества Q непусто и, более того, для любого выпуклого подмножества из Q существует содержащее его максимальное выпуклое подмножество (выпуклая компонента) множества Q. Совокупность всех выпуклых компонент множества Q обозначим через $\sigma(Q)$.

Сказанное выше сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 1.1. *Семейство выпуклых компонент $\sigma(Q)$ произвольного непустого множества $Q \subset X$ непусто, при этом для любого выпуклого подмножества C, принадлежащего Q, существует выпуклая компонента $S \in \sigma(Q)$ множества Q такая, что $C \subset S$. Более того, справедливо равенство*

$$Q = \bigcup \{S \mid S \in \sigma(Q)\}, \tag{1.1}$$

т. е. семейство выпуклых компонент $\sigma(Q)$ является покрытием множества Q.

Доказательство. Справедливость равенства (1.1) вытекает из того, что любое одноточечное множество выпукло и, следовательно, содержится в некоторой выпуклой компоненте. □

В случае, когда множество $Q \subset X$ является *конусом*, т. е. множество Q таково, что из $x \in Q$ следует $\lambda x \in Q$ для любого $\lambda > 0$, то любая его выпуклая компонента также есть (выпуклый) конус.

Если X является отделимым (хаусдорфовым) топологическим векторным пространством, а Q — замкнутое подмножество из X, то любая выпуклая компонента множества Q также является замкнутым множеством.

По-видимому, впервые семейства максимальных выпуклых подмножеств множества использовались для глобального анализа данного множества еще в тридцатые годы прошлого века Ф. А. Валентайном в монографии [12]. Равенство (1.1) было установлено ранее С. Р. Смитом в небольшой заметке [13]. Выпуклыми компонентами максимальные выпуклые подмножества названы в статье [14], посвященной невыпуклым полиэдральным множествам.

Покажем, что рецессивный конус любого множества есть пересечение рецессивных конусов всех его выпуклых компонент.

Напомним, что вектор $y \in X$ определяет рецессивное направление для подмножества Q векторного пространства X, если $x + ty \in Q$ для всех $x \in Q$ и всех $t \in [0, +\infty)$.

Совокупность всех векторов, которые определяют рецессивные направления для множества Q, будем обозначать символом Q^∞. Нетрудно проверить, что Q^∞ является заостренным ($0 \in Q^\infty$) выпуклым конусом, причем для любого собственного подмножества $Q \subset X$ справедливо равенство $Q^\infty = \{y \in X \mid -y \in (X \setminus Q)^\infty\}$, т. е. $Q^\infty = -(X \setminus Q)^\infty$. Распространяя это равенство на несобственные подмножества, полагаем $\varnothing^\infty = X$.

Теорема 1.2. *Для любого непустого множества Q вещественного векторного пространства X справедливо равенство*

$$Q^\infty = \bigcap \{S^\infty \mid S \in \sigma(Q)\}.$$

Доказательство. Пусть $y \in Q^\infty$ и пусть $S \in \sigma(Q)$. Рассмотрим множество $S_1 := \{z = x + ty \mid x \in S, t \in [0, +\infty)\}$. Нетрудно проверить, что множество S_1 является выпуклым, принадлежит Q и, кроме того, $S \subset S_1$. Вследствие максимальности S заключаем, что $S = S_1$ и, значит, $x + ty \in S$ для всех $x \in S$ и всех $t \in [0, +\infty)$. Таким образом, $y \in S^\infty$ для всех $S \in \sigma(Q)$.

Обратно, если $y \in \bigcap \{S^\infty \mid S \in \sigma(Q)\}$, то из равенства $Q = \bigcup\{S \mid S \in \sigma(Q)\}$ легко следует, что $x + ty \in Q$ для всех $x \in Q$ и всех $t \in [0, +\infty)$, т. е. $y \in Q^\infty$. Теорема доказана.

Следует отметить, что в качестве объекта, характеризующего строение неограниченных множеств на бесконечности, рецессивный конус Q^∞ часто используется в выпуклом и нелинейном анализе (см., например, [6; 15]).

2. Минимальные выпуклые мажоранты и максимальные вогнутые миноранты функций

Пусть X — вещественное векторное пространство и пусть $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — функция, определенная на X и принимающая значения в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Множества $\operatorname{epi} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \le \alpha\}$ и $\operatorname{hypo} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \,|\, f(x) \ge \alpha\}$ называются соответственно *надграфиком* и *подграфиком* функции f.

Функцию $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *l-собственной*, если $f(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и ее надграфик $\operatorname{epi} f$ есть непустое множество в $X \times \mathbb{R}$. Если же $f(x) < +\infty$ для всех $x \in X$ и подграфик $\operatorname{hypo} f$ есть непустое множество в $X \times \mathbb{R}$, то функцию $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть *u-собственной*.

Функция $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой*, если она является l-собственной и

$$\varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y) \text{ для всех } x,\, y \in X \text{ и всех } \lambda \in [0,\, 1],$$

или, эквивалентно, φ выпукла, если $\varphi(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и ее надграфик $\operatorname{epi}\varphi$ есть непустое выпуклое множество в $X \times \mathbb{R}$.

Функция $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *вогнутой*, если $-\psi$ является выпуклой функцией или, эквивалентно, если $\psi(x) < +\infty$ для всех $x \in X$ и ее подграфик $\operatorname{hypo}\psi$ является непустым выпуклым множеством в $X \times \mathbb{R}$.

Выпуклая функция $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *выпуклой мажорантой* функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если $\operatorname{epi}\varphi \subset \operatorname{epi} f$ или, эквивалентно, если $f(x) \le \varphi(x)$ для всех $x \in X$.

Минимальной выпуклой мажорантой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть такую ее выпуклую мажоранту $\varphi_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$, которая является минимальной (в смысле поточечного упорядочения функций, определенных на X и принимающих значения в $\overline{\mathbb{R}}$) в семействе всех выпуклых мажорант функции f, т. е. такую выпуклую мажоранту φ_0 функции f, для которой не существует другой выпуклой мажоранты φ функции f, отличной от φ_0 и удовлетворяющей неравенству $\varphi(x) \le \varphi_0(x)$ для всех $x \in X$.

Семейство всех минимальных выпуклых мажорант функции f будем обозначать ниже символом $\Sigma(f)$.

Теорема 2.1. *Для любой l-собственной функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенной на векторном пространстве X, семейство ее минимальных выпуклых мажорант $\Sigma(f)$ является непустым, при этом*

$$f(x) = \min_{\varphi \in \Sigma(f)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим семейство $\sigma(\operatorname{epi} f)$, состоящее из выпуклых компонент надграфика функции f. Так как вектор $(0_X,\, 1) \in X \times \mathbb{R}$ (0_X — нулевой вектор пространства X) принадлежит рецессивному конусу $(\operatorname{epi} f)^\infty$ надграфика f, то в силу теоремы 1.2 $(0_X,\, 1) \in T^\infty$ для любого $T \in \sigma(\operatorname{epi} f)$. Поскольку функция f является l-собственной и $T \subset \operatorname{epi} f$, то для любой точки $x \in X$ либо прямая $\{x\} \times \mathbb{R} := \{(x,\, \gamma)\} \,|\, \gamma \in \mathbb{R}\}$ не пересекается с T, либо их пересечение есть непустой бесконечный полуинтервал, который неограничен сверху и такой, что $f(x) \le \inf\{\gamma \,|\, (x,\, \gamma) \in T\}$. Следовательно, каждая выпуклая компонента $T \in \sigma(\operatorname{epi} f)$ надграфика функции f определяет на X выпуклую функцию $\varphi_T : x \to \varphi_T(x) := \inf\{\gamma \,|\, (x,\, \gamma) \in T\}$ (по общепринятому соглашению $\inf \varnothing = +\infty$). Из включения $T \subset \operatorname{epi} f$ заключаем, что $f(x) \le \varphi_T(x)$ для всех $x \in X$, т. е. функция φ_T является выпуклой мажорантой функции f, причем, вследствие того что T есть выпуклая компонента надграфика f, φ_T есть минимальная (по отношению поточечного упорядочения) выпуклая мажоранта функции f. Таким образом, семейство минимальных выпуклых мажорант функции f является непустым.

Из того что в силу теоремы 1.1 семейство выпуклых компонент $\sigma(\operatorname{epi} f)$ образует покрытие надграфика $\operatorname{epi} f$, вытекает, что для каждой точки $x \in X$ найдется выпуклая компонента $T_x \in \sigma(\operatorname{epi} f)$, содержащая $(x,\, f(x))$. Следовательно, для каждой точки $x \in X$ имеем $f(x) = \varphi_{T_x}(x)$. Из этого заключаем, что $f(x) = \min\limits_{T \in \sigma(\operatorname{epi} f)} \varphi_T(x)$ для всех $x \in X$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2.1. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что выпуклая функция $\varphi_0 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является минимальной выпуклой мажорантой l-собственной функции f в том и только том случае, когда ее надграфик $\operatorname{epi}\varphi_0$ является выпуклой компонентой надграфика $\operatorname{epi} f$ функции f.

Заметим также, что даже в том случае, когда функция $f : X \to \mathbb{R}$ принимает всюду на X конечные вещественные значения, среди ее минимальных выпуклых мажорант могут быть и такие, которые принимают на некоторой части пространства X значение $+\infty$. Например, функции

$$\varphi_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_1 = 0, \\ +\infty, & \text{если } x_1 \neq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \varphi_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 = 0, \\ +\infty, & \text{если } x_2 \neq 0, \end{cases}$$

принимающие значение $+\infty$, являются минимальными выпуклыми мажорантами функции $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$. Нетрудно видеть, что если их удалить из $\Sigma(f)$, то равенство (2.1) не будет выполняться на прямых $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$.

Теорема 2.2. *Пусть X — нормированное пространство и пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на X и принимающая значения в $\mathbb{R}$. Для того чтобы функция f удовлетворяла на всем пространстве X условию Липшица с константой $L > 0$, необходимо и достаточно, чтобы все минимальные выпуклые мажоранты функции f также принимали конечные вещественные значения для всех $x \in X$ и удовлетворяли на X условию Липшица с константой, не превосходящей L.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно убедиться, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет на X условию Липшица с константой $L > 0$ в том и только том случае, когда выпуклый конус $E_L := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid L\|x\| \le \alpha\}$ принадлежит рецессивному конусу $(\operatorname{epi} f)^\infty$ ее надграфика $\operatorname{epi} f$. Так как в силу теоремы 1.2 $(\operatorname{epi} f)^\infty = \bigcap\{T^\infty \mid T \in \sigma(\operatorname{epi} f)\}$, где $\sigma(\operatorname{epi} f)$ — семейство выпуклых компонент надграфика $\operatorname{epi} f$, то включение $E_L \subset (\operatorname{epi} f)^\infty$ эквивалентно условию, что $E_L \subset T^\infty$ для всех $T \in \sigma(\operatorname{epi} f)$. Поскольку (см. замечание 2.1) выпуклые компоненты надграфика $\operatorname{epi} f$ и только они являются надграфиками минимальных выпуклых мажорант функции f, то последнее условие равносильно тому, что $E_L \subset (\operatorname{epi}\varphi)^\infty$ для всех $\varphi \in \Sigma(f)$, а это, в свою очередь, равносильно тому, что каждая минимальная выпуклая мажоранта функции f удовлетворяет на X условию Липшица с константой Липшица, не превосходящей L. Теорема доказана.

Двойственным по отношению к минимальным выпуклым мажорантам является понятие максимальных вогнутых минорант функции.

Вогнутая функция $\psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *вогнутой минорантой* функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, если $\operatorname{hypo}\psi \subset \operatorname{hypo} f$ или, эквивалентно, если $\psi(x) \le f(x)$ для всех $x \in X$.

Максимальной вогнутой минорантой функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ будем называть такую ее вогнутую миноранту, которая является максимальной (в смысле поточечного упорядочения функций, определенных на X и принимающих значения в $\overline{\mathbb{R}}$) в семействе всех вогнутых минорант функции f, т. е. такую вогнутую миноранту ψ_0 функции f, для которой не существует другой вогнутой миноранты ψ функции f, отличной от ψ_0 и удовлетворяющей неравенству $\psi(x) \ge \psi_0(x)$ для всех $x \in X$.

В качестве следствия теорем 2.1 и 2.2 получаем аналогичные утверждения для u-собственных функций.

Теорема 2.3. *Любая u-собственная функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенная на векторном пространстве X, может быть представлена в виде*

$$f(x) = \max_{\varphi \in \Xi(f)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X,$$

где $\Xi(f)$ — семейство всех максимальных вогнутых минорант функции f.

Если X — нормированное пространство, то вещественнозначная функция $f : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет на всем пространстве X условию Липшица с константой $L > 0$ в том и *только том случае, когда все максимальные вогнутые миноранты функции f принимают конечные вещественные значения для всех $x \in X$ и удовлетворяют на X условию Липшица с константой, не превосходящей L.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательства теорем 2.1 и 2.2, с заменой в рассуждениях надграфика функции f на ее подграфик. □

3. Представление полунепрерывных сверху (снизу) функций в виде огибающих семейств вещественнозначных выпуклых мажорант (вогнутых минорант), удовлетворяющих условию Липшица

Как следует из теорем 2.1 и 2.3, любая l-собственная функция $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ является точной нижней огибающей семейства всех ее минимальных выпуклых мажорант, а любая u-собственная функция — точной верхней огибающей всех ее максимальных вогнутых минорант. Как показывает пример функции $f(x_1, x_2) = \sqrt{|x_1 x_2|}$, даже в том случае, когда рассматриваемая функция f принимает только конечные вещественные значения, среди ее минимальных выпуклых мажорант, а также среди ее максимальных вогнутых минорант могут быть такие, которые принимают бесконечные значения. В то же время если функция вещественнозначна и удовлетворяет на всем пространстве условию Липшица, то в силу теоремы 2.3 все ее минимальные выпуклые мажоранты и все максимальные вогнутые миноранты также принимают только вещественные значения и удовлетворяют на всем пространстве условию Липшица.

Основная цель настоящего раздела — выделить класс таких вещественнозначных функций $f : X \to \mathbb{R}$, определенных на нормированном векторном пространстве X, которые являются нижней (не обязательно точной) огибающей некоторого семейства Φ, состоящего из выпуклых функций, принимающих на X конечные значения и удовлетворяющих условию Липшица, т. е. класс таких функций f, для которых найдется описанное выше семейство Φ такое, что

$$f(x) = \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Ключевую роль при этом будут играть теоремы 2.1–2.3, а также следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть X — метрическое пространство и пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — ограниченная сверху (снизу) вещественнозначная функция, определенная на X. Для того чтобы f была полунепрерывной сверху (снизу) на X, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде поточечного предела невозрастающей (неубывающей) последовательности вещественнозначных функций, удовлетворяющих на X условию Липшица.*

Доказательство. Докажем утверждение для полунепрерывных сверху функций.

Достаточность. Предположим, что функция $f : X \to \mathbb{R}$ представима в виде $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ \forall\, x \in X$, где $\{f_n : X \to \mathbb{R}\}$ — невозрастающая последовательность функций, удовлетворяющих условию Липшица на X и, следовательно, непрерывных на X. Вследствие того что для каждого x числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является невозрастающей, ее предел равен точной нижней грани, т. е. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\ \forall\, x \in X$. Как нижняя огибающая семейства непрерывных функций, функция f является полунепрерывной сверху (см., например, [16]).

Необходимость. Так как функция f ограничена сверху на X, то для некоторого вещественного числа M имеем $f(x) \le M\ \forall\, x \in X$.

Для каждого вещественного числа $k > 0$ определим функцию

$$f_k(x) = \sup_{y\in X} \left(f(y) - kd(y, x)\right), \tag{3.1}$$

где $d : X \times X \to \mathbb{R}$ — функция расстояния на X.

Непосредственно из определения функции f_k видим, что $M \geq f_k(x) \geq f(x)\ \forall\ x \in X$ (второе неравенство получим, положив в (3.1) $y = x$.)

Для любых точек $x_1, x_2, y \in X$ имеем $f(y) - kd(y, x_1) \geq f(y) - kd(y, x_2) - kd(x_2, x_1)$. Переходя в обеих частях последнего неравенства к точной верхней грани по y и умножая на -1, выводим $f_k(x_2) - f_k(x_1) \leq kd(x_1, x_2)$. Меняя x_1 и x_2 местами, окончательно получаем

$$|f_k(x_1) - f_k(x_2)| \leq kd(x_1, x_2).$$

Следовательно, при каждом $k > 0$ функция f_k удовлетворяет на X условию Липшица с константой Липшица $L = k$.

Нетрудно видеть также, что если $0 < k_1 \leq k_2$, то $f_{k_2}(x) \leq f_{k_1}(x)\ \forall\ x \in X$. Следовательно, семейство функций $\{f_k, k > 0\}$ является невозрастающим по k.

Поскольку $f_k(x) \geq f(x)\ \forall\ x \in X$, то $\lim\limits_{k \to +\infty} f_k(x) = \inf\limits_{k > 0} f_k(x) \geq f(x)\ \forall\ x \in X$. Покажем, что верно и обратное неравенство $f(x) \geq \inf\limits_{k>0} f_k(x)\ \forall\ x \in X$, и, таким образом, установим равенство $f(x) = \inf\limits_{k>0} f_k(x)\ \forall\ x \in X$.

Зафиксируем $\bar{x} \in X$ и положим, что k принимает значения из множества натуральных чисел $\mathbb{N}$. Для каждого $k = n \in \mathbb{N}$ выберем точку $y_n \in X$ такую, что

$$f(y_n) - nd(y_n, \bar{x}) \geq f_n(\bar{x}) - \frac{1}{n}.$$

Так как $M \geq f(x)\ \forall\ x \in X$ и $f_n(x) \geq f(x)\ \forall\ x \in X$, то $nd(y_n, \bar{x}) \leq M - f_n(\bar{x}) + \dfrac{1}{n} \leq M - f(\bar{x}) + 1$, откуда следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} d(y_n,\, \bar{x}) = 0$ и, значит, $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \bar{x}$.

Воспользуемся далее неравенством

$$f(y_n) \geq f(y_n) - nd(y_n, \bar{x}) \geq f_n(\bar{x}) - \frac{1}{n}.$$

Так как функция f полунепрерывна сверху на X, то

$$f(\bar{x}) \geq \limsup_{y \to \bar{x}} f(y) \geq \limsup_{n \to +\infty} f(y_n) \geq \lim_{n \to \infty} f_n(\bar{x}) - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\bar{x}) = \inf_{k > 0} f_k(\bar{x}).$$

В силу произвольного выбора $\bar{x} \in X$ заключаем, что $f(x) = \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)\ \forall\ x \in X$.

Таким образом, необходимая часть критерия полунепрерывности сверху ограниченных сверху функций, а следовательно, и критерий в целом доказаны.

Если $f : X \to \mathbb{R}$ — ограниченная снизу функция, то, применив к $-f$ доказанный критерий полунепрерывности сверху, придем к сформулированному в теореме критерию полунепрерывности снизу ограниченных снизу функций. Теорема доказана.

Как оказалось, данное здесь доказательство необходимой части теоремы 3.1 содержится, фактически, в книге [17, с. 238].[2] Однако там оно приводится как доказательство того, что всякая полунепрерывная снизу функция, которая, кроме того, ограничена снизу, принадлежат первому классу Бэра, т. е. является поточечным пределом (неубывающей) последовательности непрерывных функций. Данное доказательство воспроизводится здесь, чтобы показать, что на самом деле сходящаяся последовательность может быть выбрана так, что каждая входящая в нее функция не просто непрерывна, а удовлетворяет условию Липшица.

Теорема 3.2. *Пусть X — нормированное векторное пространство и пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — вещественнозначная функция, определенная на X.*

[2]Автор благодарен В. А. Мильману, который обратил его (автора) внимание на русский перевод книги Ф. Хаусдорфа [17].

(*i*) *Если функция f ограничена сверху, то для того чтобы f была полунепрерывной сверху на всем пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде*

$$f(x) = \inf_{\varphi \in \Phi(f)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X, \tag{3.2}$$

где $\Phi(f)$ – некоторое семейство выпуклых мажорант функции f, принимающих конечные вещественные значения для всех $x \in X$ и удовлетворяющих на X условию Липшица.

(*ii*) *Если функция f ограничена снизу, то для того чтобы f была полунепрерывной снизу на всем пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде*

$$f(x) = \sup_{\psi \in \Psi(f)} \psi(x) \text{ для всех } x \in X,$$

где $\Psi(f)$ – некоторое семейство вогнутых мажорант функции f, принимающих конечные вещественные значения для всех $x \in X$ и удовлетворяющих на X условию Липшица.

Доказательство. Ограничимся только доказательством утверждения (i), поскольку утверждение (ii) может быть получено как следствие (i) или же доказано по той же схеме.

Достаточность. Так как функции семейства $\Phi(f)$ непрерывны, то из представления функции f в виде (3.2) следует, что f полунепрерывна сверху.

Необходимость. Если ограниченная сверху функция f является, кроме того, полунепрерывной сверху, то в силу теоремы 3.1 для нее можно указать невозрастающую последовательность вещественнозначных функций $\{f_n\}$, удовлетворяющих на X условию Липшшица и такую, что

$$f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) \ \forall\ x \in X. \tag{3.3}$$

Воспользовавшись далее теоремой 2.1, представим каждую функцию f_n данной последовательности в виде

$$f_n(x) = \min_{\varphi \in \Sigma(f_n)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X, \tag{3.4}$$

где $\Sigma(f_n)$ — семейство минимальных выпуклых мажорант функции f_n, которые в силу теоремы 2.2 принимают на X конечные вещественные значения и удовлетворяют на всем пространстве X условию Липшица.

Положим $\Phi(f) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Sigma(f_n)$. Так как $f \le f_n \ \forall\ n$ и $f_n \le \varphi \ \forall\ \varphi \in \Sigma(f_n)$, то любая функция $\varphi \in \Phi(f)$ является выпуклой мажорантой функции f, удовлетворяющей условию Липшица. Кроме того, из (3.3) и (3.4) получаем требуемое для f представление

$$f(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \min_{\varphi \in \Sigma(f_n)} \varphi(x) = \inf_{\varphi \in \Phi(f)} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Необходимость доказана.

4. Полунепрерывные сверху (снизу) положительно однородные функции как огибающие семейств непрерывных сублинейных мажорант (суперлинейных минорант)

Напомним, что функция $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$, определенная на векторном пространстве X и принимающая значения в расширенной вещественной прямой $\overline{\mathbb{R}}$, называется *положительно однородной*, если

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ для всех } x \in X \text{ и всех } \lambda > 0. \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует, что в точке $x = 0$ положительно однородная функция может принимать одно из следующих трех значений: либо 0, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Условимся, что ниже мы будем рассматривать только такие положительно однородные функции $p : X \to \mathbb{R}$, для которых $p(0) = 0$.

Выпуклая положительно однородная функция $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *сублинейной*, а вогнутая положительно однородная функция $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$ — *суперлинейной.*

Напомним, что в соответствии с определением выпуклые, и, следовательно, сублинейные функции являются l-собственными, а суперлинейные — u-собственными.

Теорема 4.1. *Любая минимальная выпуклая мажоранта l-собственной положительно однородной функции является сублинейной функцией, а любая максимальная вогнутая миноранта u-собственной положительно однородной функции — суперлинейной функцией.*

Доказательство. Докажем утверждение только для минимальных выпуклых мажорант l-собственной положительно однородной функции. Поскольку надграфик $\operatorname{epi} p$ l-собственной положительно однородной функции p есть конус, не содержащий вертикальных прямых, то каждая выпуклая компонента надграфика p является выпуклым конусом, не содержащим вертикальных прямых, и, следовательно, соответствующая ей (выпуклой компоненте) минимальная выпуклая мажоранта, является выпуклой положительно однородной функцией, т. е. сублинейной. Теорема доказана.

Из теорем 2.1 и 4.1 следует, что *для любой l-собственной положительно однородной функции $p : X \to \overline{\mathbb{R}}$ существует такое семейство Φ, состоящее из сублинейных функций, определенных на X и принимающих значения в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, что*

$$p(x) = \min_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Этот факт ранее был установлен другим методом М. Кастеллани [18; 19].

Вместе с тем В. Ф. Демьянов и А. М. Рубинов [1; 2] доказали, что для любой полунепрерывной сверху положительно однородной функции $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенной на конечномерном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ и принимающей конечные вещественные значения при всех $x \in \mathbb{R}^n$, можно указать такое семейство Φ сублинейных мажорант, что

$$p(x) = \inf_{\varphi \in \Phi} \varphi(x) \text{ для всех } x \in X,$$

при этом Φ состоит только из таких сублинейных функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, которые также принимают конечные значения на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. А. Удерзо [9] распространил этот результат на случай, когда областью определения вещественнозначной полунепрерывной снизу функции $p : X \to \mathbb{R}$ является равномерно выпуклое банахово пространство X.

В настоящем разделе будет показано, что данное утверждение справедливо также для вещественнозначных полунепрерывных сверху положительно однородных функций, определенных на произвольном нормированном пространстве X.

Начнем со следующей теоремы.

Теорема 4.2. *Пусть X — нормированное векторное пространство. Для того чтобы вещественнозначная положительно однородная функция $p : X \to \mathbb{R}$ была полунепрерывной сверху* (*снизу*) *на X, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде поточечного предела невозрастающей* (*неубывающей*) *последовательности вещественнозначных положительно однородных функций, удовлетворяющих на X условию Липшица.*

Доказательство. Заметим, что данная теорема, хотя и похожа по формулировке на теорему 3.1, не является ее прямым следствием, поскольку, во-первых, положительно однородная функция p не предполагается ограниченной сверху (снизу) и, во-вторых, из теоремы 3.1 следует только то, что полунепрерывная сверху (снизу) положительно однородная функция является поточечным пределом невозрастающей (неубывающей) последовательности липшицевых функций, которые, вообще говоря, могут не быть положительно однородными. Покажем, какие дополнения следует внести в доказательство теоремы 3.1, чтобы убедиться в справедливости теоремы 4.2. Заметим, что такие дополнения требуются лишь в доказательстве необходимой части теоремы. Рассмотрим случай полунепрерывной сверху положительно однородной функции $p : X \to \mathbb{R}$.

Если вещественнозначная функция $p : X \to \mathbb{R}$ является полунепрерывной сверху на всем пространстве X, то она полунепрерывна сверху в точке $x = 0$ и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $p(x) \leq p(0) + \varepsilon = \varepsilon$ для всех $x \in B_\delta(0)$. Откуда получаем, что $p(x) \leq \dfrac{\varepsilon}{\delta}\|x\|$ для все $x \in X$. Значит, $p(x) \leq M\|x\|$ для всех $x \in X$, где M — некоторое положительное вещественное число.

Так же, как и при доказательстве теоремы 3.1, для каждого вещественного числа $k > 0$ по функции p определим на X функцию

$$p_k : x \to p_k(x) := \sup_{y \in Y}(p(y) - k\|y - x\|).$$

Поскольку p положительно однородна, то для всех $x \in X$ и всех $\lambda > 0$ справедливо равенство

$$p_k(\lambda x) = \sup_{y \in X}(p(y) - k\|y - \lambda x\|) = \lambda \sup_{y \in X}(p(\lambda^{-1}y) - k\|\lambda^{-1}y - x\|) = \lambda p_k(x),$$

из которого следует, что p_k также положительно однородная функция. Кроме того, как было показано при доказательстве теоремы 3.1, при любом $k > 0$ функция p_k является липшицевой на X и удовлетворяет для всех $x \in X$ неравенству $p(x) \leq p_k(x)$. Если же $k > M$, то справедливо и неравенство $p_k(x) \leq M\|x\|$ для всех $x \in X$. Следовательно, при каждом $k > M$ функция p_k принимает конечные вещественные значения. При доказательстве теоремы 3.1 было показано также то, что построенное семейство функций $\{p_k,\, k > 0\}$ является невозрастающим по k на $(0, +\infty)$.

В связи с тем, что для любого $x \in X$ числовая функция $k \to p_k(x)$ ограничена снизу числом $p(x)$, существует предел $\lim\limits_{k \to \infty} p_k(x)$, причем

$$\lim_{k \to \infty} p_k(x) = \inf_{k > 0} p_k(x) \geq p(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{4.2}$$

Покажем, что неравенство в (4.2) выполняется на самом деле при всех $x \in X$ как равенство.

Докажем сначала, что для любого заданного $x \in X$ и любого числа $k > M$ множество

$$\mathcal{L}_\alpha(x,\, k) = \{y \in X \mid p(y) - k\|y - x\| \geq \alpha\}$$

является непустым, замкнутым и ограниченным при любом $\alpha \leq p(x)$. Непосредственно из определения множества $\mathcal{L}_\alpha(x,\, k)$ видно, что при любом $\alpha \leq p(x)$ оно содержит точку x и, соответственно, является непустым. Замкнутость множества $\mathcal{L}_\alpha(x,\, k)$ следует из полунепрерывности сверху функции $y \to p(y) - k\|y - x\|$.

Для доказательства ограниченности $\mathcal{L}_\alpha(x,\, k)$ предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{y_n\} \subset \mathcal{L}_\alpha(x,\, k)$ такая, что $\|y_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$. Без ограничения общности мы можем считать, что $y_n \neq 0\ \forall\, n$. Из неравенства $\alpha \leq p(y_n) - k\|y_n - x\| \leq M\|y_n\| - k\|y_n - x\|$ имеем

$$\frac{\alpha}{\|y_n\|} \leq M - k\Big\|\frac{y_n}{\|y_n\|} - \frac{x}{\|y_n\|}\Big\|,$$

откуда получаем

$$\frac{\alpha}{\|y_n\|} \leq M - k\Big(1 - \frac{\|x\|}{\|y_n\|}\Big).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, выводим неравенство $0 \leq M - k$, которое противоречит выбору k.

Полученное противоречие доказывает ограниченность множества $\mathcal{L}_\alpha(x,\, k)$.

Зафиксируем $k^* > M$ и рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in X$. Поскольку $p_k(\bar{x}) = \sup\limits_{y \in X}(p(y) - k\|y - \bar{x}\|)$, то для любого k существует точка $y_k := y_k(\bar{x}) \in X$ такая, что

$$p(y_k) - k\|y_k - \bar{x}\| > p_k(\bar{x}) - \frac{1}{k}. \tag{4.3}$$

Из этого неравенства для любого $k \geq k^*$ имеем

$$p(y_k) - k^*\|y_k - \bar{x}\| \geq p(y_k) - k\|y_k - \bar{x}\| \geq p_k(\bar{x}) - \frac{1}{k} \geq p(\bar{x}) - 1. \tag{4.4}$$

Последнее неравенство показывает, что при $k \geq k^*$ точка y_k принадлежит множеству $\mathcal{L}_{p(\bar{x})-1}(\bar{x}, k^*)$, которое, как это было установлено выше, является замкнутым и ограниченным, и, следовательно, последовательность $\{y_k\}$ также является ограниченной. Покажем, что последовательность $\{y_k\}$ сходится при $k \to \infty$ к точке $\bar{x}$.

Из неравенств (4.4) имеем $p(y_k) - k\|y_k - \bar{x}\| \geq p(\bar{x}) - 1$, откуда, учитывая, что $p(x) \leq p_k(x) \leq p_{k^*}(x)$ для всех $x \in X$, получаем

$$k\|y_k - \bar{x}\| \leq p_{k^*}(y_k) - p(\bar{x}) + 1. \tag{4.5}$$

Поскольку функция p_{k^*} является липшицевой и, следовательно, непрерывной, то из ограниченности последовательности $\{y_k\}$ вытекает ограниченность последовательности $\{p_{k^*}(y_k)\}$. Из (4.5) заключаем, что последовательность $\{k\|y_k - \bar{x}\|\}$ также является ограниченной, а это, в свою очередь, влечет $y_k \to \bar{x}$ при $k \to \infty$.

Воспользуемся далее неравенством $p(y_k) \geq p_k(\bar{x}) - \dfrac{1}{k}$, которое следует из (4.3). Учитывая равенство $\inf\limits_{k \geq k^*} p_k(x) = \lim\limits_{k \to \infty} p_k(x)$ и то, что функция p полунепрерывна сверху на X, получаем

$$p(\bar{x}) \geq \limsup_{y \to \bar{x}} p(y) \geq \limsup_{k \to \infty} p(y_k) \geq \lim_{k \to \infty} \left(p_k(\bar{x}) - \frac{1}{k}\right) = \inf_{k \geq k^*} p_k(\bar{x}).$$

В силу произвольного выбора точки $\bar{x} \in X$ из последнего неравенства и неравенства (4.2) заключаем, что $p(x) = \lim\limits_{k \to \infty} p_k(x) = \inf\limits_{k > 0} p_k(x)$ для всех $x \in X$. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть X — произвольное нормированное пространство. Для того чтобы вещественнозначная положительно однородная функция $p : X \to \mathbb{R}$ была полунепрерывной сверху (снизу) на X, необходимо и достаточно, чтобы она была нижней (верхней) огибающей некоторого семейства ее непрерывных сублинейных мажорант (суперлинейных минорант), принимающих конечные значения на всем X.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 3.2, но на первом этапе доказательства необходимости вместо теоремы 3.1 надо воспользоваться теоремой 4.2 и учесть в окончательной формулировке, что липшицевость сублинейных функций на всем пространстве X эквивалентна их непрерывности на X. □

В заключение отметим, что теорема 4.3 позволяет распространить понятие экзостера, введенное В. Ф. Демьяновым [3] в конечномерных пространствах, не только на полунепрерывные положительно однородные функции, определенные на равномерно выпуклых банаховых пространствах, как это сделал А. Удерзо в [9], но и на полунепрерывные положительно однородные функции, определенные на любом нормированном пространстве. Для этого надо воспользоваться тем, что каждой непрерывной сублинейной функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$, определенной на нормированном пространстве X, в силу классической двойственности Минковского соответствует w^*-слабо компактное выпуклое подмножество $\partial\varphi \subset X^*$ (X^* — пространство непрерывных линейных функционалов на X) такое, что

$$\varphi(x) = \max_{x^* \in \partial\varphi} \langle x,\, x^* \rangle \text{ для всех } x \in X,$$

где $\langle \cdot,\, \cdot \rangle$ — билинейная форма, приводящая X и X^* в двойственность.

Используя эту двойственность и теорему 4.3, каждой полунепрерывной сверху положительно однородной функции $p : X \to \mathbb{R}$, определенной на произвольном нормированном пространстве X, может быть поставлено в соответствие семейство $E^*(p)$, состоящее из w^*-слабо компактных выпуклых подмножеств пространства X^*, такое, что

$$p(x) = \inf_{A \in E^*(p)} \max_{x^* \in A} \langle x,\, x^* \rangle \text{ для всех } x \in X.$$

Данное семейство $E^*(p)$ является, если следовать терминологии В. Ф. Демьянова, верхним экзостером функции p.

Подобным образом, используя классическую двойственность Минковского и теорему 4.3, для каждой полунепрерывной снизу положительно однородной функции, определенной на нормированном пространстве, может быть определен нижний экзостер Демьянова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Элементы квазидифференциального исчисления // Негладкие задачи теории оптимизации и управления. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. С. 5–127.
2. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
3. **Demyanov V.F.** Exhausters of a positively homogeneous function // Optimization. 1999. Vol. 45, no. 1. P. 13–29.
4. **Demyanov V.F.** Exhausters and convexificators — new tools in nonsmooth analysis // Quasidifferentiability and Related Topics / eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 85–137. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 43). doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_4.
5. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
6. **Рокафеллар Р.Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.
7. **Гороховик В.В.** Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Минск: Наука и техника, 1990. 239 с.; 2-е изд.: Москва: УРСС, 2012. 256 с.
8. **Gorokhovik V.V., Trafimovich M.F.** Positively homogeneous functions revisited // J. Optim. Theory Appl. 2016. Vol. 171, no. 2. P. 481–503. doi: 10.1007/s10957-016-0891-4.
9. **Uderzo A.** Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problems // Quasidifferentiability and Related Topics / eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 297–327. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 43). doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_12.
10. **Гороховик В.В., Гороховик С.Я.** Критерий глобальной эпилипшицевости множеств // Изв. АН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 1995. № 1. С. 118–120.
11. **Келли Дж.Л.** Общая топология. М.: Наука, 1981. 432 с.
12. **Valentine A.F.** Convex Sets. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964. 238 p.
13. **Smith C.R.** A characterization of star-shaped sets // American Math. Monthly. 1968. Vol. 75, no. 4. P. 386.
14. **Gorokhovik V.V., Zorko O.I.** Piecewise affine functions and polyhedral sets // Optimization. 1994. Vol. 31, no. 2. P. 209–221. doi: 10.1080/02331939408844018.
15. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 456 с.
16. **Бурбаки Н.** Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства: Сводка результатов: Словарь. М.: Наука, 1975. 408 с.
17. **Хаусдорф Ф.** Теория множеств. М.; Л.: Объединен. науч.-техн. изд-во НКТП СССР. Гл. ред. техн.-теорет. лит., 1937. 304 с.

18. **Castellani M.** A dual representation for proper positively homogeneous functions // J. Global Optim. 2000. Vol. 16, no. 4. P. 393–400. doi: 10.1023/A:1008394516838.
19. **Castellani M.** Dual representation of classes of positively homogeneous functions // Quasidifferentiability and Related Topics / eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. P. 73–84. (Nonconvex Optim. Appl.; vol. 43). doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_3.

Гороховик Валентин Викентьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор,
чл.-корр. НАН Беларуси
зав. отделом
Институт математики НАН Беларуси
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Поступила 28.10.2016

REFERENCES

1. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Elementy kvazidifferentsial'nogo ischisleniya* [Elements of quasidifferential calculus]. In: Negladkie zadachi teorii optimizatsii i upravleniya [Nonsmooth problems of optimization theory and control], Leningrad: Leningrad University Press, 1982, pp. 5–127.
2. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Osnovy negladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie* [Foundations of nonsmooth analysis and quasidifferential calculus]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 432 p.
3. Demyanov V.F. Exhausters of a positively homogeneous function. *Optimization*, 1999, vol. 45, no. 1, pp. 13–29.
4. Demyanov V.F. Exhausters and convexificators — new tools in nonsmooth analysis. *Quasidifferentiability and Related Topics*, eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, Ser. Nonconvex Optim. Appl., vol. 43, pp. 85–137. doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_4.
5. Pshenichny B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow : Nauka Publ., 1980, 320 p.
6. Rockafellar R.T. *Convex analysis.* Princeton: Princeton University Press, 1970, 260 p. Translated under the title *Vypuklyi analiz*, Moskow: Mir Publ., 1973, 469 p.
7. Gorokhovik V.V. *Vypuklye i negladkie zadachi vektornoi optimizatsii* [Convex and nonsmooth vector optimization problems]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1990, 239 p.; 2nd ed.: Moscow: URSS Publ., 2012, 256 p.
8. Gorokhovik V.V., Trafimovich M.F. Positively homogeneous functions revisited *J. Optim. Theory Appl.*, 2016, vol. 171, no. 2, pp. 481–503. doi: 10.1007/s10957-016-0891-4.
9. Uderzo A. Convex approximators, convexificators and exhausters: applications to constrained extremum problems. *Quasidifferentiability and Related Topics*, eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, Ser. Nonconvex Optim. Appl., vol. 43, pp. 297–327. doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_12.
10. Gorokhovik V.V., Gorokhovik S.Ya. The global criterion of epilipschitzness of sets. *Proc. AS of Belarus, Ser. Fiz.-Mat. Nauk.*, 1995, no. 1, pp. 118–120 (in Russian).
11. Kelley J.L. *General topology.* New York: Springer-Verlag, 2nd printing 1975, Ser. Graduate Texts in Mathematics, vol. 27, 298 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moskow, Nauka Publ., 1984, 432 p.
12. Valentine A.F. Convex Sets. New York: McGraw-Hill Book Company, 1964, 238 p.
13. Smith C.R. A characterization of star-shaped sets. *American Math. Monthly*, 1968, vol. 75, no. 4, p. 386.
14. Gorokhovik V.V., Zorko O.I. Piecewise affine functions and polyhedral sets. *Optimization*, 1994, vol. 31, no. 2, pp. 209–221. doi: 10.1080/02331939408844018.
15. Krasnosel'skii M.A., Vainikko G.M., Zabreiko P.P., Rutitskii Ya.B., Stetsenko V.Ya. *Approximate solution of operator equations.* Groningen: Wolters-Noordhoff, 1972, 484 p. doi: 10.1007/978-94-010-2715-1. Original Russian text published in *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravnenii*, Moskow: Nauka Publ., 1969, 456 p.
16. Bourbaki N. *Éléments de Mathématique, Premièr partie, Livre III, volume Topologie Générale.* HERMANN, troisième édition. 1960. Translated under the title *Obshchaya topologiya. Ispol'zovanie veshchestvennykh chisel v obshchei topologii. Funktsional'nye prostranstva. Svodka rezul'tatov. Slovar'.* Moskow: Nauka Publ., 1975, 408 p.

17. Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig: von Veit, 1914. *Mengenlehre. 2nd ed.* Berlin, Leipzig: Walter de Gruyter, 1927, 285 p. Translated under the title *Teorija mnozhestv.* Moskow, Leningrad: Gl. red. tehn.-teoret. lit., 1937, 304 p.
18. Castellani M. A dual representation for proper positively homogeneous functions. *J. Global Optim*, 2000, vol. 16, no. 4, pp. 393–400. doi: 10.1023/A:1008394516838.
19. Castellani M. Dual representation of classes of positively homogeneous functions. *Quasidifferentiability and Related Topics*, eds. V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, Ser. Nonconvex Optim. Appl., vol. 43, pp. 73–84. doi: 10.1007/978-1-4757-3137-8_3.

V. V. Gorokhovik, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of NAS of Belarus, Prof., Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, 220072 Minsk,
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977.1

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ГРАНИЧНЫХ ТОЧЕК МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ[1]

М. И. Гусев , И. В. Зыков

Известно, что управление, переводящее траекторию управляемой системы на границу множества достижимости, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Этот факт справедлив для систем с поточечными ограничениями на управление. В данной работе мы рассмативаем систему с интегральными квадратичными ораничениями. Рассматриваемая управляемая система нелинейна по фазовым переменным и линейна по управлению. Показано, что любое допустимое управление, переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления с интегральным квадратичным функционалом, если соответствующая линеаризованная система вполне управляема. Доказательство данного факта опирается на теорему Грейвса для накрывающих отображений. Отсюда следует принцип максимума для управлений, ведущих на границу множества достижимости. В работе обсуждается также алгоритм построения множества достижимости, основанный на принципе максимума.

Ключевые слова: Управляемая система, интегральные ограничения, множество достижимости, принцип максимума.

M. I. Gusev, I. V. Zykov. On extremal properties of the boundary points of reachable sets for control systems with integral constraints.

It is well known that any control that steers the trajectory of a control system to the boundary of the reachable set satisfies the Pontryagin maximum principle. This fact is valid for systems with pointwise constraints on the control. We consider a system with quadratic integral constraints on the control. The system is nonlinear in the state variables and linear in the control. It is shown that any admissible control that steers the system to the boundary of its reachable set is a local solution of some optimal control problem with integral quadratic functional if the corresponding linearized system is completely controllable. The proof of this fact is based on the Graves theorem on covering mappings. This implies the maximum principle for the controls that steer the trajectories to the boundary of the reachable set. We also discuss an algorithm for constructing the reachable set based on the maximum principle.

Keywords: control system, integral constraints, reachable set, maximum principle.

MSC: 93B03

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-103-115

1. Введение и постановка задачи

Статья посвящена описанию граничных точек множеств достижимости управляемой системы с интегральными ограничениями на управление. Задачи управления в системах с интегральными ограничениями были предметом многих исследований (см., например, [1; 2]). Игровые постановки задач управления с интегральными ограничениями на управления игроков рассматривались в [3–5]. Свойства множеств достижимости в нелинейных системах с интегральными ограничениями исследованы в работах [6; 7]. Алгоритмы построения множеств достижимости, основанные на дискретных аппроксимациях, изучались в [8; 9]. В [10–12] исследовались свойства и алгоритмы построения информационных множеств в задачах оценивания и идентификации при интегральных ограничениях на возмущения, эти множества являются аналогами множеств достижимости в задачах управления.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №16-11-10146.

Цель данной работы — доказательство того, что управление, удовлетворяющее интегральным ограничениям и переводящее систему на границу множества достижимости, является локальным решением некоторой задачи оптимального управления. Этот факт позволяет для отыскания точек множеств достижимости применять соотношения принципа максимума Понтрягина и теорию дифференциальных уравнений и неравенств Гамильтона — Якоби [13].

Будем далее использовать следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через $A^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, 0 — это нулевой вектор подходящей размерности, либо нулевая матрицу, либо число ноль. Под символом I будем понимать единичную матрицу. Для $x, y \in \mathbb{R}^k$ $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма в конечномерном пространстве, $B_r(\bar{x})\colon B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x - \bar{x}\| \le r\}$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $\bar{x}$, x^i — вектор с индексом i, а x_j — j-я координата вектора x. Для вещественной прямоугольной $k \times m$ матрицы A через $\| A \|_{k\times m}$ обозначаем норму матрицы, подчиненную евклидовым нормам векторов. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символом ∂S обозначаем границу S, $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x)$ — матрица Якоби отображения $g(x)$. Через $\mathbb{L}_1$, $\mathbb{L}_2$ и C будем обозначать, соответственно, пространства суммируемых, суммируемых с квадратом и непрерывных вектор-функций на $[t_0, t_1]$. Нормы в этих пространствах будем обозначать символами $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_1}$, $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_2}$, $\|\cdot\|_C$.

Известно, что управление $u(t)$, переводящее траекторию $x(t)$ управляемой системы

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \le t \le t_1, \quad x(t_0) = x^0,$$

($x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ при п.в. $t \in [t_0, t_1]$, Ω — произвольное ограничивающее множество, не обязательно компактное) в точку $x(t_1)$, лежащую на границе множества достижимости $G(t_1)$ в момент t_1, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [14, гл. 4, т. 3].

Для линейных систем принцип максимума вытекает из того факта, что управление, переводящее траекторию системы на границу множества достижимости, максимизирует терминальный функционал $I(u(\cdot)) = (a, x(t_1))$ для некоторого $a \in \mathbb{R}^n, a \ne 0$. При этом $p(t_1) = a$ — вектор нормали опорной гиперплоскости к множеству $G(t_1)$ в точке $x(t_1)$, и принцип максимума дает необходимое и достаточное условие принадлежности $x(t_1)$ границе $G(t_1)$. Для нелинейных систем это условие не является достаточным; кроме того, неясно, является ли в общем случае управление, полученное из условий принципа максимума, решением какой-либо задачи оптимального управления.

Далее мы будем рассматривать управляемые системы с интегральными ограничениями на управление. Начнем со случая линейной управляемой системы:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x^0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $A(t), B(t)$ — суммируемые на $[t_0, t_1]$ матричные функции. В качестве управлений рассматриваются функции из пространства $\mathbb{L}_2$. Ограничения на управление заданы интегральным неравенством

$$u(\cdot) \in U = \left\{ u(\cdot) \in \mathbb{L}_2 \colon J(u(\cdot)) = \| u(\cdot) \|^2_{\mathbb{L}_2} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \| u(t) \|^2 \, dt \le \mu^2 \right\}, \tag{1.2}$$

где $\mu > 0$ — заданная константа. Пусть $G(t_1)$ — множество достижимости системы (1.1) в момент t_1 при ограничениях (1.2).

Определим симметричную матрицу $W(t)$ (грамиан управляемости) равенством

$$W(t) = \int\limits_{t_0}^{t} X(t, \tau) B(\tau) B^\top(\tau) X^\top(t, \tau) d\tau,$$

где $X(t, \tau)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x} = Ax$.

Известно, что система (1.1) вполне управляема на $[t_0, t_1]$ в том и только том случае, когда $W(t_1)$ положительно определена. В этом случае $G(t_1)$ — невырожденный эллипсоид

$$G(t_1) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : (x - \hat{x})^\top W^{-1}(t_1)(x - \hat{x}) \le \mu^2\right\}.$$

Если система не является вполне управляемой, то множество достижимости представляет из себя вырожденный эллипсоид (эллипсоид, лежащий в подпространстве размерности меньшей, чем n).

Известно (см. [21, Assertion 1]), что для вполне управляемой линейной системы (1.1) управление $u(\cdot) \in U$ переводит траекторию в точку $x^1 \in \partial G$ тогда и только тогда, когда $J(u(\cdot)) \to \min$ с дополнительным условием $x(t_1) = x^1$ (x^1 — заданная точка $\mathbb{R}^n$) и величина минимума функционала J равна μ^2.

В настоящей статье дано доказательство аналога приведенной характеризации граничных точек множеств достижимости (в части необходимых условий) для нелинейных систем с интегральными ограничениями на управление. Мы будем рассматривать управляемые системы вида

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t))u(t), \quad t_0 \le t \le t_1, \; x(t_0) = x^0, \tag{1.3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}^r$ — управляющий параметр, $f_1 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n\times r}$ — непрерывные отображения с интегральными ограничениями на управление, заданные неравенством (1.2).

Далее будем предполагать, что функции f_1 и f_2 непрерывно дифференцируемы по x, а также удовлетворяют соответственно условиям подлинейного роста и ограниченности:

$$\| f_1(t, x) \| \le l_1(t)(1 + \| x \|), \tag{1.4}$$

$$\| f_2(t, x) \|_{n\times r} \le l_2(t), \tag{1.5}$$

где $l_1(\cdot) \in \mathbb{L}_1$, $l_2(\cdot) \in \mathbb{L}_2$.

Решением (*траекторией*) системы (1.3), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, будем называть абсолютно непрерывную функцию $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$, для которой равенство (1.3) выполняется для почти всех $t \in [t_0, t_1]$.

О п р е д е л н и е 1. Множеством достижимости $G(t_1)$ системы (1.3) будем называть совокупность всех концов траекторий $x(t_1)$ в $\mathbb{R}^n$, отвечающих управлениям из U.

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы (1.3).

З а д а ч а 1.

$$J(u) \to \min, \quad u(\cdot) \in \mathbb{L}_2, \quad x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1.$$

Управление $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$, удовлетворяющее ограничению задачи 1, назовем *допустимым управлением.*

О п р е д е л н и е 2. Допустимое управление $u(\cdot)$ доставляет локальный минимум функционалу $J(u)$ в задаче 1, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого допустимого $v(\cdot)$ такого, что $\| u(\cdot) - v(\cdot) \|_{\mathbb{L}_2} < \varepsilon$ имеет место неравенство $J(u) \le J(v)$.

О п р е д е л н и е 3. Пусть $u(t)$ — управление из $\mathbb{L}_2$, $x(t)$ — отвечающая этому управлению траектория. Систему

$$\dot{\delta x} = A(t)\delta x + B(t)\delta v,$$

где $A(t) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) + \dfrac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x(t))u(t)]$, $B(t) = f_2(t, x(t))$ назовем *линеаризацией системы* (1.3) *вдоль пары* $(x(t), u(t))$.

В данной работе показано, что любое управление, переводящее траекторию системы из начального состояния на границу множества достижимости, доставляет локальный минимум в задаче 1, если линеаризованная вдоль пары $(x(t), u(t))$ система вполне управляема.

2. Вспомогательные результаты

Утверждение 1. *Пусть функции* $f_1(t,x), f_2(t,x)$ *непрерывны, непрерывно дифференцируемы по* x *и удовлетворяют условиям* (1.4) *и* (1.5). *Тогда для любого* $u(\cdot) \in \mathbb{L}_2$ *система* (1.3) *имеет, и притом единственное, решение* $x = x(t)$, *определенное на всем отрезке* $[t_0, t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения аналогичны доказательству [15, гл. 6, § 1, т. 1] при несколько иных предположениях. $\square$

Утверждение 2. *Пусть функции* $f_1(t,x), f_2(t,x)$ *удовлетворяют условиям утверждения* 1. *Тогда множество траекторий системы* (1.3) *компактно в пространстве* $C = C[t_0, t_1]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем равномерную ограниченность траекторий системы (1.3). Заменяя уравнение (1.3) интегральным тождеством, получим

$$\|x(t)\| = \left\| x^0 + \int_{t_0}^{t} [f_1(s,x(s)) + f_2(s,x(s))u(s)]ds \right\| \le \|x^0\| + \int_{t_0}^{t} l_1(s)(1 + \|x(s)\|)ds$$

$$+ \int_{t_0}^{t} l_2(s)\|u(s)\|ds \le \|x^0\| + \mu \sqrt{\int_{t_0}^{t} l_2^2(s)ds} + \int_{t_0}^{t} l_1(s)ds + \int_{t_0}^{t} l_1(s)\|x(s)\|ds.$$

Из леммы Гронуолла [17, гл. 4, § 4, т. 2] следует, что

$$\|x(t)\| \le \left(\|x^0\| + \mu \sqrt{\int_{t_0}^{t} l_2^2(s)ds} + \int_{t_0}^{t} l_1(s)ds \right) e^{\int_{t_0}^{t} l_1(s)ds}.$$

Равностепенная непрерывность множества траекторий вытекает из оценки

$$\|x(t'') - x(t')\| = \left\| \int_{t'}^{t''} [f_1(s,x(s)) + f_2(s,x(s))u(s)]ds \right\| \le \int_{t'}^{t''} l_1(s)(1 + \|x(s)\|)ds$$

$$+ \int_{t'}^{t''} l_2(s)\|u(s)\|ds \le k_1 \int_{t'}^{t''} l_1(s)ds + \mu \sqrt{\int_{t'}^{t''} l_2^2(s)ds} \;\; \forall\, t', t'' \in [t_0, t_1], \quad t'' > t',$$

и равномерной непрерывности функций $\phi_1(t) = \int_{t_0}^{t} l_1(s)ds$ и $\phi_2(t) = \int_{t_0}^{t} {l_2}^2(s)ds$ на отрезке $[t_0, t_1]$.

Здесь и всюду ниже k_1, k_2, k_3, k_4, M_1, а также c_1, c_2, c_3 означают постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Из теоремы Арцела следует относительная компактность множества в пространстве непрерывных функций. Зададим пару последовательностей $(u^p(\cdot), x^p(\cdot))$, где $u^p(\cdot) \in U$ отображается в $x^p(\cdot)$ посредством системы (1.3). Учитывая слабую компактность гильбертова шара U и относительную компактность множества траекторий, найдем последовательность $p_k \to \infty$, $k \to \infty$ такую, что $x^{p_k}(\cdot) \to \bar{x}(\cdot)$ в C и $u^{p_k}(\cdot) \to \bar{u}(\cdot) \in U$ слабо в $\mathbb{L}_2$.

Тогда

$$x^{p_k}(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x^{p_k}(s))ds + \int_{t_0}^{t} f_2(s, x^{p_k}(s))u^{p_k}(s)ds = x^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x^{p_k}(s))ds$$

$$+\int_{t_0}^{t} f_2(s,\bar{x}(s))u^{p_k}(s)ds + \int_{t_0}^{t} [f_2(s,x^{p_k}(s)) - f_2(s,\bar{x}(s)]u^{p_k}(s)ds.$$

В силу равномерной сходимости $x^{p_k}(\cdot)$ к $\bar{x}(\cdot)$ и слабой сходимости $u^{p_k}(\cdot)$ можно перейти к пределу в обеих частях равенства. В итоге получим

$$\bar{x}(t) = x^0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s,\bar{x}(s))ds + \int_{t_0}^{t} f_2(s,\bar{x}(s))\bar{u}(s)ds, \tag{2.1}$$

т. е. $\bar{x}(\cdot)$ есть решение системы (1.3), отвечающее $\bar{u}(\cdot) \in U$, что и доказывает компактность множества траекторий. □

З а м е ч а н и е 1. Аналогичный результат доказан в [7] при несколько иных предположениях.

Утверждение 3. *Пусть $u^p(\cdot) \in U$ есть последовательность управлений из $\mathbb{L}_2$, а $x^p(\cdot)$ — последовательность траекторий, соответствующая последовательности $u^p(\cdot)$. Если $u^p(\cdot) \to u(\cdot)$, $p \to \infty$ в $\mathbb{L}_2$, то $x^p(\cdot) \to x(\cdot)$ в C, где $x(\cdot)$ — траектория, отвечающая $u(\cdot)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим от противного: $\|x^p(\cdot)-x(\cdot)\|_C \not\to 0$, $p \to \infty$, тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность x^{p_k} такие, что $\|x^{p_k}(\cdot) - x(\cdot)\|_C \geq \varepsilon$, $p_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что подпоследовательность $x^{p_k}(\cdot)$ равномерно сходится к траектории $\bar{x}(\cdot)$ в силу компактности траекторий системы (1.3). Из доказательства утверждения 2 следует равенство (2.1), т. е. $\bar{x}(t)$ — решение, соответствующее управлению $u(t)$. В силу единственности решения $\bar{x}(t) = x(t)$. Полученное противоречие доказывает утверждение. □

Зададим последовательность управлений $v^m(\cdot)$, которая отображается в последовательность траекторий $x^m(\cdot)$. Линеаризованная вдоль $(x^m(\cdot), u^m(\cdot))$ система задается парой матриц $(A_m(t), B_m(t))$, где

$$A_m(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x^m(t)) + \frac{\partial}{\partial x}[f_2(t, x^m(t))\, v^m(t)], \quad B_m(t) = f_2(t, x^m(t)).$$

Справедлива

Лемма 1. *Если $u^m(\cdot) \to u(\cdot)$ в $\mathbb{L}_2$ и пара $(A(t), B(t))$, отвечающая управлению $u(\cdot)$, вполне управляема, то, начиная с некоторого m, пара $(A_m(t), B_m(t))$ будет вполне управляемой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем сходимость последовательностей матричных функций $A_m(\cdot) \to A(\cdot)$ в $\mathbb{L}_1$ и $B_m(\cdot) \to B(\cdot)$ в C. Представим $f_2(t,x)u$ в виде $f_2(t,x)u = \sum_{i=1}^{r} f_2^i(t,x)u_i$, где $f_2^i(t,x)$ — n-мерные вектор-столбцы матрицы $f_2(t,x)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}[f_2^i(t,x)u] = \sum_{i=1}^{r} \Big[\frac{\partial}{\partial x} f_2^i(t,x)\Big] u_i,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x} f_2^i(t,x)$ — матрица Якоби отображения $x \to f_2^i(t,x)$.

Справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t_1} \|A(t) - A_m(t)\|_{n\times n} dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \Big\|\frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x(t)) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(t, x^m(t))\Big\|_{n\times n} dt$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t))u(t)]-\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t))u^m(t)]\Big\|_{n\times n}dt$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x(t))u^m(t)]-\frac{\partial}{\partial x}[f_2(t,x^m(t))u^m(t)]\Big\|_{n\times n}dt.$$

Проводя элементарные преобразования, приходим к неравенствам

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\|A(t)-A_m(t)\|_{n\times n}dt\le(t_1-t_0)\max_t\Big\|\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x(t))-\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x^m(t))\Big\|_{n\times n}$$

$$+\max_{i,t}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(t,x(t))\Big\|_{n\times n}r\sqrt{t_1-t_0}\,\|u(\cdot)-u^m(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}$$

$$+\max_{i,t}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(t,x(t))-\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(t,x^m(t))\Big\|_{n\times n}r\sqrt{t_1-t_0}\,\left(\|u(\cdot)-u^m(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}+\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}\right), \qquad (2.2)$$

где максимум берется по $t\in[t_0,t_1],\ i=1,\dots,r$. Для матриц $B(\cdot),B_m(\cdot)$ получаем

$$\|B(\cdot)-B_m(\cdot)\|_C=\max_t\|f_2(t,x(t))-f_2(t,x^m(t))\|_{n\times r}. \qquad (2.3)$$

Из равномерной сходимости $x^m(\cdot)$ к $x(\cdot)$ (см. утверждение 3) и непрерывности $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ следует сходимость правых частей неравенств (2.2) и (2.3) к нулю, что и доказывает сходимость $A_m(\cdot)$ к $A(\cdot)$ и $B_m(\cdot)$ к $B(\cdot)$.

Осталось обосновать предельный переход под знаком интеграла в грамиане управляемости. Положим

$$M(t)=e^{\int\limits_{t_0}^{t}A(\tau)d\tau},\quad M_m(t)=e^{\int\limits_{t_0}^{t}A_m(\tau)d\tau},$$

где e^D — матричная экспонента. Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(M(t)-M_m(t)\right)=A(t)M(t)-A_m(t)M_m(t)=A(t)\left(M(t)-M_m(t)\right)+\left(A(t)-A_m(t)\right)M_m(t),$$

$$M(t)-M_m(t)=\int\limits_{t_0}^{t}A(\tau)(M(\tau)-M_m(\tau))d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}(A(\tau)-A_m(\tau))M_m(\tau)d\tau,$$

следовательно,

$$\|M(t)-M_m(t)\|_{n\times n}\le\int\limits_{t_0}^{t}\|A(\tau)\|_{n\times n}\|M(\tau)-M_m(\tau)\|_{n\times n}d\tau+\int\limits_{t_0}^{t}\|A(\tau)-A_m(\tau)\|_{n\times n}\|M_m(\tau)\|_{n\times n}d\tau.$$

Из леммы Гронуола и неравенства $\|e^D\|\le e^{\|D\|}$ выводим

$$\|M(t)-M_m(t)\|_{n\times n}\le e^{\|A_m(\cdot)\|_{\mathbb{L}_1}}\|A(\cdot)-A_m(\cdot)\|_{\mathbb{L}_1}e^{\|A(\cdot)\|_{\mathbb{L}_1}}.$$

Запишем соответствующие грамианы управляемости:

$$W=\int\limits_{t_0}^{t_1}M(t)^{-1}B(t)B(t)^{\top}\left(M(t)^{\top}\right)^{-1}dt,\quad W^m=\int\limits_{t_0}^{t_1}M_m(t)^{-1}B_m(t)B_m(t)^{\top}\left(M_m(t)^{\top}\right)^{-1}dt.$$

Из равномерной сходимости $M_m(t)\to M(t)$ следует, что $W^m\to W,\ m\to\infty$. Так как $\det W\ne0$, то для достаточно больших m $\det W^m\ne0$, т. е. пара $(A_m(\cdot),B_m(\cdot))$ вполне управляема. □

3. Экстремальные свойства граничных точек множества достижимости

Определим отображение $F : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$Fu(\cdot) = x(t_1),$$

где $x(t)$ — траектория системы (1.3), отвечающая $u(\cdot)$. Справедлива

Лемма 2. *Пусть функции $f_1(t,x)$, $f_2(t,x)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют условиям* (1.4) *и* (1.5). *Тогда функция F непрерывно дифференцируема по Фреше $\forall\, u(\cdot) \in \mathbb{L}_2[t_0,t_1]$, ее производная Фреше $F'\colon \mathbb{L}_2 \to \mathbb{R}^n$ определена равенством*

$$F'(u(\cdot))\delta u(\cdot) = \delta x(t_1). \tag{3.1}$$

Здесь $\delta x(t)$ — решение линеаризованной вдоль $(u(t),x(t))$ системы (1.3), *отвечающее управлению $\delta u(t)$ и нулевому начальному условию.*

Доказательство. Берем произвольные $u(\cdot),\Delta u(\cdot)$, где $\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} \le 1$. Решения, отвечающие $u(\cdot)$ и $u(\cdot)+\Delta u(\cdot)$, обозначим через $x(t)$ и $x(t)+\Delta x(t)$ соответственно. Записывая для них интегральные тождества и вычитая одно из другого, получим

$$\|\Delta x(t)\| = \bigg\| \int\limits_{t_0}^{t} \big[f_1(s,x(s)+\Delta x(s)) - f_1(s,x(s))\big]ds$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \big[f_2(s,x(s)+\Delta x(s)) - f_2(s,x(s))\big]u(s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} f_2(s,x(s)+\Delta x(s))\Delta u(s)ds\bigg\|.$$

Применяя теорему о среднем, имеем

$$f_1(s,x(s)+\Delta x(s)) - f_1(s,x(s)) = \frac{\partial}{\partial x} f_1[s,x(s)+\theta\Delta x(s)]\Delta x(s), \quad \theta(s,x) = \mathrm{diag}\,\{\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_n\},$$

где $0 \le \theta_i(s,x) \le 1$. В силу непрерывности $\dfrac{\partial f_1}{\partial x}$ $\|f_1(s,x(s)+\Delta x(s)) - f_1(s,x(s))\| \le c_1\|\Delta x(s)\|$ для достаточно малых $\Delta x(s)$.

Посредством похожих рассуждений приходим к соотношению

$$\big\|[f_2(s,x(s)+\Delta x(s)) - f_2(s,x(s))]u(s)\big\| \le c_2 \sum_{i=1}^{r} |u_i(s)| \cdot \|\Delta x(s)\|$$

для почти всех s.

Таким образом, $\|\Delta x(t)\| \le \displaystyle\int_{t_0}^{t} \Big(c_1 + c_2 \sum_{i=1}^{r} |u_i(s)|\Big)\|\Delta x(s)\|ds + c_3\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}$.

Применяя лемму Гронуолла, получим

$$\|\Delta x(t)\| \le c_3\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} \exp \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(c_1 + c_2 \sum_{i=1}^{r} |u_i(s)|\Big)ds$$

$$\le c_3 \exp\big[c_1(t_1-t_0) + c_2\, r\sqrt{t_1-t_0}\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}\big]\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}, \tag{3.2}$$

следовательно, $\|\Delta x(\cdot)\|_C = O\,(\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2})$.

Для любой функции $\Delta u(\cdot) \in \mathbb{L}_2[t_0,t_1]$ имеем $F(u(\cdot)+\Delta u(\cdot)) - F(u(\cdot)) = \Delta x(t_1)$. В силу непрерывности производных по x представим их в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} f_1[t,x(t)+\theta\Delta x(t)] = \frac{\partial}{\partial x} f_1[t,x(t)] + \alpha(t,x(t),\theta\Delta x(t)),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}f_2^i[t,x(t)+\xi^i\Delta x(t)]=\frac{\partial}{\partial x}f_2^i[t,x(t)]+\beta_i(t,x(t),\xi^i\Delta x(t)),$$

где $\xi^i(s,x)=\mathrm{diag}\ \{\xi_{i1},\xi_{i2},\dots,\xi_{in}\},\ 0\le\xi_{ij}(s,x)\le 1$. Если $\|\Delta x(\cdot)\|_C\to 0$ то равномерно на $[t_0,t_1]$ $\|\alpha(t,x(t),\theta\Delta x(t))\|_{n\times n}\to 0$ и $\|\beta_i(t,x(t),\xi^i\Delta x(t))\|_{n\times n}\to 0$ $\Big($поскольку функции $\dfrac{\partial f_i}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой ограниченной области $t_0\le t\le t_1,\ \|x\|\le M_1\Big)$.

Представим $\Delta x(t)$ в виде

$$\Delta x(t)=\int\limits_{t_0}^{t}A(s)\Delta x(s)ds+\int\limits_{t_0}^{t}B(s)\Delta u(s)ds+\omega(t),$$

где

$$\omega(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\alpha(s,x(s),\theta\Delta x(s))\Delta x(s)ds+\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{r}\big[\beta_i(s,x(s),\xi^i\Delta x(s))\big]\Delta x(s)u_i(s)ds$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{r}\big[\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(s,x(s))\big]\Delta x(s)\Delta u_i(s)ds+\int\limits_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{r}\big[\beta_i(s,x(s),\xi^i\Delta x(s))\big]\Delta x(s)\Delta u_i(s)ds.$$

Дифференцируя $\Delta x(t)$ по t, для почти всех t получим $\Delta\dot x(t)=A(t)\Delta x(t)+B(t)\Delta u(t)+\dot\omega(t)$. По формуле Коши

$$\Delta x(t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}X(t_1,\tau)B(\tau)\Delta u(\tau)d\tau+\int\limits_{t_0}^{t_1}X(t_1,\tau)\dot\omega(\tau)d\tau,$$

где $X(t,\tau)=Y(t)Y^{-1}(\tau)$ и $Y(t)$ — решение уравнения $\dfrac{dy}{dt}=A(t)y,\ y(0)=0$.

Оценим последний член равенства:

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t_1}X(t_1,\tau)\dot\omega(\tau)d\tau\Big\|\le\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}\cdot\Big[k_1\max_{\tau}\big\|\alpha(\tau,x(\tau),\theta\Delta x(\tau))\big\|_{n\times n}+k_2\max_{i,\tau}\big\|\beta_i(\tau,x(\tau),\xi^i\Delta x(\tau))\big\|_{n\times n}$$

$$+\ k_3\max_{i,\tau}\Big\|\frac{\partial}{\partial x}f_2^i(\tau,x(\tau))\Big\|_{n\times n}\cdot\|u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}+\ k_4\max_{i,\tau}\big\|\beta_i(\tau,x(\tau),\xi^i\Delta x(\tau))\big\|_{n\times n}\Big].$$

Из оценки (3.2) следует

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t_1}X(t_1,\tau)\dot\omega(\tau)d\tau\Big\|=o(\Delta u(\cdot)),\qquad\frac{o(\Delta u(\cdot))}{\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2}}\to 0,\quad\Delta u(\cdot)\to 0.$$

Таким образом, $F(u(\cdot)+\Delta u(\cdot))-F(u(\cdot))=\delta x(t_1)+o(\|\Delta u(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2})$. Согласно определению функция F дифференцируема по Фреше, и ее производная определяется равенством (3.1). Непрерывность производной следует из леммы 1. □

Теорема. *Пусть*:

1) $x^1\in\partial G(t_1)$, *где* $\partial G(t_1)$ — *граница множества достижимости*;

2) $u(\cdot)\in U$ — *управление, переводящее систему из* $x(t_0)=x^0$ *в* $x(t_1)=x^1$, $x(t)$ — *отвечающая этому управлению траектория*;

3) *линеаризованная вдоль* $(x(t),u(t))$ *система* (1.3) *вполне управляема на* $[t_0,t_1]$.

Тогда управление $u(t)$ *доставляет локальный минимум в задаче* 1 *и величина минимума* $J(u(\cdot))=\mu^2$.

Доказательство. Проведем доказательство от противного. Пусть найдется $u(\cdot)$, переводящее систему из $x(t_0) = x^0$ в $x(t_1) = x^1 \in \partial G(t_1)$, которое не является локально оптимальным в задаче 1, иначе говоря, для любого p существует допустимое управление $u^p(\cdot)$ такое, что

$$\|u(\cdot) - u^p(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} < 1/p, \quad J(u^p(\cdot)) < J(u(\cdot))$$

либо $J(u(\cdot)) < \mu^2$. Тогда существует последовательность $u^p(\cdot) \to u(\cdot)$, $p \to \infty$ в $\mathbb{L}_2$ такая, что $x^p(t_1, u^p(\cdot)) = x^1$, а $J(u^p(\cdot)) < \mu^2$. Далее, выберем p настолько большим, чтобы пара $(A_p(t), B_p(t))$ была вполне управляемой (см. лемму 1). Обозначим

$$\delta = \mu - \sqrt{J(u^p(\cdot))} > 0.$$

Тогда $\|u^p(\cdot)\|_{\mathbb{L}_2} = \mu - \delta < \mu - \delta/2$. Из леммы 2, учитывая, что линеаризованная вдоль $(u^p(\cdot), x^p(\cdot))$ система вполне управляема, получаем $ImF'(u^p(\cdot)) = \mathbb{R}^n$.

Тогда по теореме Грейвса [16, с. 105] для некоторого $m > 0$ и всех достаточно малых r, удовлетворяющих неравенству $0 < r < \delta/2$, выполняется включение $B(x^1, mr) \subset F(B(u^p(\cdot), r))$.

Таким образом,

$$B(u^p(\cdot), r) \subset U \Rightarrow F(B(u^p(\cdot), r)) \subset F(U) \subset G(t_1),$$

отсюда вытекает $B(x^1, mr) \subset G(t_1)$, что противоречит условию $x^1 \in \partial G(t_1)$. □

Из доказанной теоремы следует, что управление $u(\cdot)$, переводящее траекторию системы на границу множества достижимости, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина. Форма принципа максимума, в отличие от [14, гл. 4, т. 3], здесь отвечает задаче минимизации интегрального функционала.

Выпишем необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума для задачи 1. Функция Понтрягина для данной задачи имеет вид

$$H(p, t, x, u) = -p_0 u^\top u + p^\top (f_1(t, x) + f_2(t, x)u), \quad p_0 \geq 0.$$

Локально оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума (см., например, [18, § 5, т. 2]): существуют $(p_0, p(\cdot)) \neq 0$ такие, что

$$H(p(t), t, x(t), u(t)) = \max_{v \in \mathbb{R}^r} H(p(t), t, x(t), v),$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial f}{\partial x} H(p(t), x(t), u(t)) = -A^\top(t) p(t).$$

Через $(A(t), B(t))$, как и ранее, обозначаем матрицы линеаризованной вдоль $(x(t), u(t))$ системы. Если эта линеаризованная на $(x(t), u(t))$ система вполне управляема, то $p_0 \neq 0$.

Действительно, если $p_0 = 0$, то $p(\cdot) \neq 0$ и из принципа максимума получаем

$$p^\top(t) B(t) u(t) = \max_{v \in \mathbb{R}^2} \; p^\top(t) B(t) v$$

для почти всех t. Это имеет место только при $p^\top(t) B(t) \equiv 0$, что невозможно, так как $p(t) \not\equiv 0$ есть решение системы $\dot{p}(t) = -A^\top(t) p(t)$ и пара $(A(t), B(t))$ вполне управляема. Поэтому можно принять $p_0 = 1/2$. Тогда из принципа максимума выводим $u(t) = f_2^\top(t, x(t)) p(t)$.

Замыкая исходную систему данным управлением, имеем

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f_1(t, x(t)) + f_2(t, x(t)) f_2^\top(t, x(t)) p(t), \; x(t_0) = x^0, \\ &\dot{p}(t) = -\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}^\top (t, x(t)) + D^\top\big(t, x(t), f_2^\top(t, x(t)) p(t)\big)\Big) p(t), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где обозначено: $D(t, x, v) = \dfrac{\partial}{\partial x}(f_2(t, x) v)$.

Соотношение (3.3) можно положить в основу следующего *алгоритма построения границы множества достижимости*.

Выбирая $p(t_0) \neq 0$ и интегрируя систему (3.3), мы получим управление и траекторию, удовлетворяющие принципу максимума. Перебирая $p(t_0)$ из регулярной сетки, аппроксимирующей область $\{p \in \mathbb{R}^n \colon |p_i| \leq a_i, \ i = 1, \ldots, n\}$, интегрируя систему (3.3) и отбирая те траектории, для которых $|J(u(\cdot)) - \mu^2|$ не превосходит малого $\delta > 0$, мы получим аппроксимацию части границы множества достижимости, образованную точками $x(t_1)$. Для достаточно больших a_i аппроксимироваться будет вся граница, если на каждой из возможных траекторий выполняется условие полной управляемости линеаризованной системы. Заметим, что если условие отбора управлений заменить неравенством $J(u(\cdot)) \leq \mu^2$, то мы имеем точки из множества достижимости. При этом каждая из точек может быть получена как решения системы (3.3). Действительно, если $x \in G(t_1)$, то решая задачу 1 мы приходим к выводу, что оптимальное управление также удовлетворяет системе (3.3), если выполнено условие управляемости. Отличие этих двух случаев в следующем: системе (3.3) удовлетворяет *любое* управление, ведущее на границу $G(t_1)$; среди управлений, ведущих во внутренние точки $G(t_1)$, *существует* управление, для которого выполняется (3.3).

4. Пример

Рассмотрим нелинейную управляемую систему (уницикл), описываемую уравнениями

$$\dot{x}_1 = \cos x_3, \quad \dot{x}_2 = \sin x_3, \quad \dot{x}_3 = u, \quad x_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in [0, 3],$$

с интегральным ограничением на управление

$$\int\limits_0^3 u^2(t)dt \leq 2.$$

При ограничении на амплитуду управления ($|u(t)| \leq 1$) проекции множества достижимости данной системы на двумерное пространство координат (x_1, x_2) были исследованы в [19]. Общая трехмерная картина множества достижимости получена в [20].

На рисунке приведены результаты построения проекции множества достижимости на плоскость (x_1, x_2) при интегральном ограничении на помеху. На левой части рисунка представлен итог построения границы множества достижимости, когда траектории системы (3.3) отбирались по критерию $|J(u(\cdot)) - 2| \leq \delta$. Часть точек, которые выглядят как внутренние, — это результат проектирования на двумерную плоскость граничных точек множества достижимости в трехмерном пространстве. Отметим область вблизи точки с координатами $(3, 0)$, в которую не попала ни одна из проекций точек $x(3)$, хотя точка $(3, 0)$ принадлежит границе.

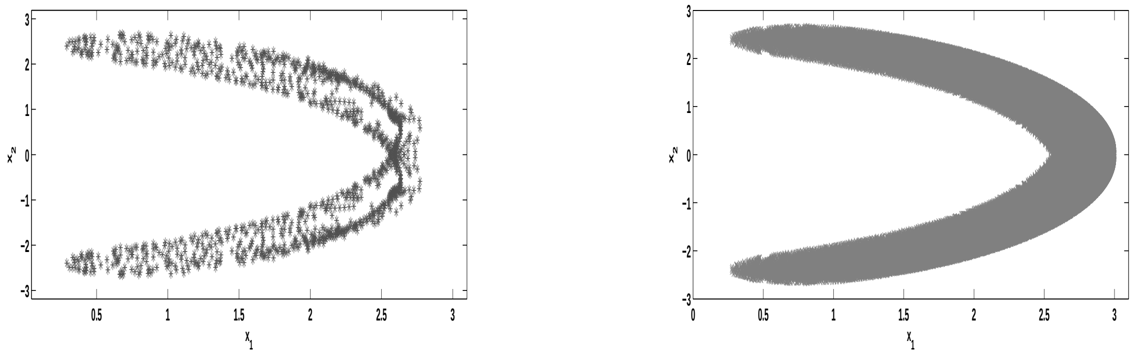
Действительно, управление $u(t) \equiv 0$ переводит систему в точку $(3, 0, 0)$. Так как, очевидно, $x_1(3) \leq 3$ для любого управления, то $(3, 0, 0)$ — граничная точка множества достижимости, а $(3, 0)$ — граничная точка его проекции. Управление $u(t) \equiv 0$ здесь решает задачу минимизации, но при этом

$$J(u(\cdot)) = \int\limits_0^3 u^2(t)dt = 0 < 2.$$

Отвечающая управлению $u(t) \equiv 0$ траектория имеет вид $x_1(t) = t, x_2(t) = 0, x_3(t) = 0$. Линеаризованная вдоль данной траектории система

$$\dot{\delta x}_1 = 0, \quad \dot{\delta x}_2 = \delta x_3, \quad \dot{\delta x}_3 = \delta v$$

не является вполне управляемой. Данный пример показывает, что условие полной управляемости в теореме 2 является существенным.



Проекции множества достижимости на плоскость x_1, x_2.

На правой части рисунка показаны проекции на плоскость x_1, x_2 правых концов траекторий системы (3.3), отобранных по критерию $J(u(\cdot)) \leq 2$. Очевидно, что точка $(3, 0)$ и близкие к ней точки попадают в заштрихованную часть рисунка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
3. **Субботин А. И., Ушаков В. Н.** Альтернатива для дифференциальной игры сближения-уклонения при интегральных ограничениях на управления игроков // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, № 3. С. 387–396.
4. **Ухоботов В.И.** Об одном классе дифференциальных игр с интегральными ограничениями // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 819–824.
5. **Ушаков В.Н.** Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 1. С. 15–23.
6. **Polyak B.T.** Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A: Math. Anal. 2004. Vol. 11. P. 255–267.
7. **Huseyin N., Huseyin A.** Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affineintegral equation // Appl. Math. Comput. 2013. Vol. 219. P. 8416–8424. doi: 10.1016/j.amc.2013.03.005 .
8. **Guseinov Kh. G., Nazlipinar A. S.** Attainable sets of the control system with limited resources // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 261–268.
9. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls / K.G. Guseinov, O. Ozer, E. Akyar, V.N. Ushakov // NoDEA Nonlinear Diff. Equat. Appl. 2007. Vol. 14, no. 1-2. P. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
10. **Куржанский А.Б., Пищулина И.Я.** Минимаксная фильтрация при квадратичных ограничениях I–III // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 8. С. 1434–1446; № 9. С. 1568–1579; № 12. С. 2149–2158.
11. **Ананьев Б.И.** О коррекции движения при коммуникационных ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2010. № 3. С. 3–15.
12. **Gusev M.I.** On optimal control problem for the bundle of trajectories of uncertain system // LSSC 2009: Large-Scale Scientific Computing. 2010. P. 286–293. (Lecture Notes in Computer Sciences; vol. 5910). doi: 10.1007/978-3-642-12535-5_33 .
13. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
14. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
15. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации. М.: Факториал пресс, 2002. 824 с.
16. **Иоффе А.Д.** Метрическая регулярность и субдифференциальное исчисление // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 3 (333). Р. 103–162. doi: 10.4213/rm292 .
17. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства. М.: Наука, 1965. 276 с.

18. **Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал пресс, 2006. 144 с.
19. **Cockayne E. J., Hall G. W. C.** Plane motion of a particle subject to curvature constraints // SIAM J. Control. 1975. Vol. 13, no. 1. P. 197–220. doi:10.1137/0313012 .
20. **Пацко В. С., Пятко С. Г., Федотов А. А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 320–328.
21. **Gusev M.I., Zykov I.V.** A numerical method for solving linear–quadratic control problems with constraints // Ural Math. J. 2016. Vol. 2, no. 2. P. 108–116. doi: 10.15826/umj.2016.2.009 .

Гусев Михаил Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: gmi@imm.uran.ru

Поступила 31.10.2016

Зыков Игорь Владимирович
аспирант
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: zykoviustu@mail.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
2. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
3. Subbotin A.I., Ushakov V.N. Alternative for an encounter-evasion differential game with integral constraints on the players' controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 367–375. doi: 10.1016/0021-8928(75)90001-5 .
4. Ukhobotov V.I. On a class of differential games with an integral constraint // *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 838–844. doi: 10.1016/0021-8928(77)90166-6 .
5. Ushakov V.N. Extremal strategies in differential games with integral constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1972, vol. 36, no. 1, pp. 12–19. doi: 10.1016/0021-8928(72)90076-7 .
6. Polyak B.T. Convexity of the reachable set of nonlinear systems under l2 bounded controls. *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal.*, 2004, vol. 11, no. 2-3, pp. 255–267.
7. Huseyin N., Huseyin A. Compactness of the set of trajectories of the controllable system described by an affineintegral equation. *Appl. Math. Comput.*, 2013, vol. 219, pp. 8416–8424. doi: 10.1016/j.amc.2013.03.005 .
8. Guseinov Kh.G. Nazlipinar A.S. Attainable sets of the control system with limited resources. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN.* 2010, vol. 16, no. 5, pp. 261–268.
9. Guseinov K.G., Ozer O., Akyar E., Ushakov V.N. The approximation of reachable sets of control systems with integral constraint on controls. *NoDEA Nonlinear Diff. Equat. Appl.*, 2007, vol. 14, no. 1-2, pp. 57–73. doi: 10.1007/s00030-006-4036-6 .
10. Kurzhanskii A.B., Pishchulina I.Ya. Minimax filtering under quadratic constraints. I–III. *Differentsial'nye uravneniya*, 1976, vol. 12, no. 8, pp. 1434–1446; no. 9, pp. 1568–1579; no. 12, pp. 2149–2158 (in Russian).
11. Anan'ev B.I. Correction of motion under communication constraints. *Autom. Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 3, pp. 367–378. doi: 10.1134/S000511791003001X .
12. Gusev M.I. On optimal control problem for the bundle of trajectories of uncertain system. *LSSC* 2009*: Large-Scale Scientific Computing*, 2010, Ser. Lecture Notes in Computer Sciences, vol. 5910, pp. 286–293. doi: 10.1007/978-3-642-12535-5_33 .
13. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniy Gamil'tona–Yakobi– Bellmana* [The method of characteristics for the Hamilton–Jacobi–Bellman equation]. Yekaterinburg, UrO RAN Publ., 2013, 244 p.

14. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
15. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: Faktorial press Publ., 2002, 824 p.
16. Ioffe A.D. Metric regularity and subdifferential calculus. *Russian Math. Surveys*, 2000, vol. 55, no. 3, pp. 501–558, doi: 10.1070/RM2000v055n03ABEH000292 .
17. Beckenbach Edwin F., Richard Bellman Richard. Inequalities. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1961, 198 p. doi: 10.1007/978-3-642-64971-4 . Translated under the title *Neravenstva*, Moscow, Nauka Publ., 1965, 276 p.
18. Arutyunov A.V., Magaril-Ilyaev G.G., Tikhomirov V.M. *Printsip maksimuma Pontryagina. Dokazatel'stvo i prilozheniya.* [Pontryagin maximum principle: Proofs and applications]. Moscow, Factorial Press, 2006, 144 p. ISBN 5-7339-0585-9.
19. Cockayne E.J., Hall G. W.C. Plane motion of a particle subject to curvature constraints. *SIAM J. Control*, 1975, vol. 13, no. 1, pp. 197–220. doi: 10.1137/0313012 .
20. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
21. Gusev M.I., Zykov I.V. A numerical method for solving linear–quadratic control problems with constraints. *Ural Math. J.*, 2016, vol. 2, no. 2. pp. 108–116. doi: 10.15826/umj.2016.2.009 .

M.I. Gusev, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: gusev@imm.uran.ru .

I. V. Zykov, doctoral student, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: zykoviustu@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

АППРОКСИМАЦИЯ СЕЧЕНИЙ МНОЖЕСТВА ТРАЕКТОРИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ РЕСУРСАМИ УПРАВЛЕНИЙ

А. Гусейин, Н. Гусейин, Х. Г. Гусейнов

Изучается аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Урысона. Предполагается, что ресурс управлений системой является ограниченным. Замкнутый шар пространства L_p, $p>1$, с радиусом r и центром в начале координат выбирается в качестве множества допустимых управлений. Шаг за шагом множество допустимых управлений заменяется множеством, которое состоит из конечного числа управляющих функций и порождает конечное число траекторий. Доказывается, что сечения множества траекторий могут быть аппроксимированы с сечениями множества, состоящего из конечного числа траекторий.

Интегральное уравнение Урысона, управляемая система, интегральное ограничение, множество траекторий, аппроксимация.

A. Huseyin, N. Huseyin, Kh. Guseinov. Approximation of sections of the set of trajectories for a control system with bounded control resources.

The approximation of the set of trajectories is studied for a control system described by the Urysohn integral equation. It is assumed that the system has limited control resources. The closed ball of the space L_p, $p>1$, with radius r centered at the origin is chosen as the set of admissible control functions. The set of admissible control functions is replaced step by step by a set that consists of a finite number of control functions and generates a finite number of trajectories. It is proved that sections of the set of trajectories can be approximated by sections of a set consisting of a finite number of trajectories.

Keywords: Urysohn integral equation, control system, integral constraint, set of trajectories, approximation.

MSC: 93B03, 49M25, 65R20, 45G15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-116-127

Введение

Математические модели разных процессов в физике, механике, биологии, экономике описываются интегральными уравнениями. В частности, решения задачи Коши и краевых задач для дифференциальных уравнений могут быть выражены как решения подходящих интегральных уравнений. Некоторые процессы, описываемые интегральными уравнениями, имеют внешние воздействия, которые могут быть охарактеризованы как управляющие воздействия. Многие управляющие воздействия, например энергия, топливо, финансы, продукты питания при использовании заканчиваются. Обычно такие управляющие воздействия характеризуются интегральными ограничениями на функции управления (см., например, [1–5]). Например, математическая модель летающего объекта с быстро меняющейся массой описывается в виде управляемой системы с интегральными ограничениями на управление (см., например [2; 6]).

Управляемые системы, описываемые интегральными уравнениями, рассматриваются в исследованиях [7–10]. В работе [9] анализируется аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Вольтерра с интегральным ограничением на функции управления. В [10] изучается аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Урысона, где система является афинной относительно вектора управления. Управляемость и существование оптимальных управлений в задачах управления, где система описывается интегральным уравнением Урысона, исследуются в работах [7; 8]. В данной работе рассматривается управляемая система, описываемая интегральным уравнением Урысона с интегральным ограничением на функции управления. Доказывается, что при подходящем выборе параметров дискретизации хаусдорфово расстояние между сечениями множества траекторий и сечением множества, состоящего из конечного числа траекторий, становится достаточно малым. Заметим, что аппроксимация сечений множества траекторий позволяет предсказать разные модели поведения управляемой системы и определить управляющую функцию с требуемыми свойствами (см., например, [11]).

1. Динамика системы

Рассмотрим управляемую систему, описываемую интегральным уравнением Урысона

$$x(\xi) = f(\xi, x(\xi)) + \lambda \int\limits_a^b K(\xi, s, x(s), u(s))ds, \tag{1.1}$$

где $x(s) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u(s) \in \mathbb{R}^m$ — вектор управления, $\xi \in [a,b]$, $\lambda \geq 0$ — действительное число.

Для заданных $p > 1$ и $r > 0$ полагаем

$$U_{p,r} = \left\{ u(\cdot) \in L_p\left([a,b]; \mathbb{R}^m\right) : \ \|u(\cdot)\|_p \leq r \right\},$$

где $\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_a^b \|u(s)\|^p \, ds \right)^{1/p}$, $L_p\left([a,b]; \mathbb{R}^m\right)$ является пространством измеримых по Лебегу функций $u(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ таких, что $\|u(\cdot)\|_p < \infty$, $\|\cdot\|$ означает евклидову норму. $U_{p,r} \subset L_p\left([a,b]; \mathbb{R}^m\right)$ называется *множеством допустимых управлений*, а каждая функция $u(\cdot) \in U_{p,r}$ — *допустимым управлением.*

Предполагается, что функции $f(\cdot) : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $K(\cdot) : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и число $\lambda \in [0, \infty)$, заданные в уравнении (1.1), удовлетворяют следующим условиям.

A. Функции $f(\cdot)\colon [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $K(\cdot)\colon [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ непрерывны по совокупности аргументов.

B. Существуют числа $L_0 \in [0,1)$, $L_1 \geq 0$, $H_1 \geq 0$, $L_2 \geq 0$, $H_2 \geq 0$, $L_3 \geq 0$ и $H_3 \geq 0$ такие, что

$$\|f(\xi, x_1) - f(\xi, x_2)\| \leq L_0 \|x_1 - x_2\|$$

при всех $(\xi, x_1) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$, $(\xi, x_2) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$,

$$\big\|K(\xi_1, s, x_1, u_1) - K(\xi_2, s, x_2, u_2)\big\| \leq \left[L_1 + H_1\left(\|u_1\| + \|u_2\|\right)\right] |\xi_1 - \xi_2|$$
$$+ \left[L_2 + H_2\left(\|u_1\| + \|u_2\|\right)\right] \|x_1 - x_2\| + \left[L_3 + H_3\left(\|x_1\| + \|x_2\|\right)\right] \|u_1 - u_2\|$$

для любых $(\xi_1, s, x_1, u_1) \in [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $(\xi_2, s, x_2, u_2) \in [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

C. Выполняется неравенство $0 \leq \lambda \Big(L_2\,(b-a) + 2H_*(b-a)^{(p-1)/p} r \Big) < 1 - L_0$, где

$$H_* = \max\left\{H_1, H_2, H_3\right\}. \tag{1.2}$$

Пусть $u(\cdot) \in U_{p,r}$. Непрерывная функция $x(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая уравнению (1.1) для всех $\xi \in [a,b]$, называется траекторией системы (1.1), порожденной допустимым управлением $u(\cdot) \in U_{p,r}$.

Условия A–C гарантируют, что каждое допустимое управление порождает единственную траекторию (см. [12, теорема 3.1]). Символом $\mathbb{X}_{p,r}$ обозначаем совокупность траекторий системы (1.1), порожденных всеми допустимыми управлениями $u(\cdot) \in U_{p,r}$. Множество $\mathbb{X}_{p,r}$ называется *множеством траекторий системы* (1.1). Согласно [12, теорема 4.1] $\mathbb{X}_{p,r}$ является ограниченным подмножеством пространства $C\left([a,b]; \mathbb{R}^n\right)$, т. е. существует $\gamma_* > 0$ такая, что

$$\|x(\cdot)\|_C \leq \gamma_* \tag{1.3}$$

при всех $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$, где $C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$ — пространство непрерывных функций $x(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x(\cdot)\|_C = \max\left\{ \|x(\xi)\| : \xi \in [a,b]\right\}$. Для фиксированной $\xi \in [a,b]$ обозначаем

$$\mathbb{X}_{p,r}(\xi) = \left\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}\right\}. \tag{1.4}$$

$\mathbb{X}_{p,r}(\xi)$ называется *сечением множества траекторий* в ξ.

Обозначим

$$L(\lambda) = L_0 + \lambda\bigl(L_2\,(b-a) + 2H_*(b-a)^{(p-1)/p} r\bigr),$$

$$g_* = \frac{\lambda\,(L_3 + 2\gamma_* H_3)}{1 - L(\lambda)}, \tag{1.5}$$

где H_* определена соотношением (1.2), γ_* — соотношением (1.3).

Справедливость следующего утверждения вытекает из условий A–C и утверждения 1 из [10], которое заменяет неравенство Гронуола при оценке рассогласования между траекториями через порождающих их управлений.

Утверждение 1. *Пусть $x_1(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$ и $x_2(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$ — произвольные траектории системы* (1.1), *порожденные соответственно допустимыми управлениями $u_1(\cdot) \in U_{p,r}$ и $u_2(\cdot) \in U_{p,r}$. Тогда*

$$\|x_1(\xi) - x_2(\xi)\| \le g_* \int\limits_a^b \|u_1(s) - u_2(s)\|\, ds \quad \text{для всех} \quad \xi \in [a,b].$$

Полагаем

$$B_n(\gamma_*) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \|x\| \le \gamma_*\right\}, \quad B_n = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon\ \|x\| \le 1\right\},$$

$$B_C(1) = \left\{x(\cdot) \in C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right) :\ \|x(\cdot)\|_C \le 1\right\}, \quad D_1 = [a,b] \times B_n(\gamma_*),$$

$$\omega_0(\Delta) = \max\left\{ \|f(\xi_2,x) - f(\xi_1,x)\| :\ |\xi_2 - \xi_1| \le \Delta,\ (\xi_1,x) \in D_1,\ (\xi_2,x) \in D_1\right\},$$

$$\varphi\,(\Delta) \ = \ \frac{1}{1-L_0}\Bigl\{\omega_0\,(\Delta) + \lambda\bigl[L_1(b-a) + 2H_1\,(b-a)^{(p-1)/p}\, r\bigr]\Delta\Bigr\}. \tag{1.6}$$

Согласно условию A имеем, что $\omega_0(\Delta) \to 0^+$, $\varphi(\Delta) \to 0^+$ при $\Delta \to 0^+$.

Хаусдорфово расстояние между множествами $D \subset \mathbb{R}^n$ и $E \subset \mathbb{R}^n$ обозначается символом $h_n(D,E)$, а между множествами $G \subset C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$ и $W \subset C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$ — символом $h_C(G,W)$ (см. [13]).

Утверждение 2 [12, утверждение 5.1]. *Для любых $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$, $\xi_1 \in [a,b]$, $\xi_2 \in [a,b]$ выполняется неравенство $\|x(\xi_2) - x(\xi_1)\| \le \varphi\left(|\xi_2 - \xi_1|\right)$, и, следовательно,*

$$h_n\left(\mathbb{X}_{p,r}(\xi_2), \mathbb{X}_{p,r}(\xi_1)\right) \le \varphi\left(|\xi_2 - \xi_1|\right),$$

где $\mathbb{X}_{p,r}(\xi_1)$ и $\mathbb{X}_{p,r}(\xi_2)$ определены соотношением (1.4), *$\varphi(\cdot)$ — равенством* (1.6).

Из утверждения 2 вытекает, что многозначное отображение $\xi \to \mathbb{X}_{p,r}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$, непрерывно. Более того, поскольку множество траекторий является ограниченным в пространстве $C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$, то из утверждения 2 имеем, что множество траекторий $\mathbb{X}_{p,r}$ — это предкомпактное подмножество пространства $C\left([a,b];\mathbb{R}^n\right)$ (см. [12, теорема 5.1]).

2. Функции управления со смешанными ограничениями

Для заданной $\alpha > 0$ полагаем

$$U_{p,r}^{\alpha} = \left\{ u(\cdot) \in U_{p,r} \colon \, \|u(s)\| \leq \alpha \text{ при всех } s \in [a,b] \right\},$$

и пусть $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha}$ является множеством траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$. Пусть

$$\kappa_* = 2r^p g_*, \tag{2.1}$$

где g_* определена равенством (1.5).

Утверждение 3. *Для любой* $\alpha \in (0, \infty)$ *справедливо неравенство*

$$h_C(\mathbb{X}_{p,r}, \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha}) \leq \frac{\kappa_*}{\alpha^{p-1}},$$

где κ_* *задана соотношением* (2.1).

Доказательство. Пусть $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$ — произвольно выбранная траектория, которая порождена допустимым управлением $u(\cdot) \in U_{p,r}$, и пусть функция управления $u_*(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$ определена соотношением

$$u_*(s) = \begin{cases} u(s), & \text{если} \quad \|u(s)\| \leq \alpha, \\ \alpha \dfrac{u(s)}{\|u(s)\|}, & \text{если} \quad \|u(s)\| > \alpha, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $s \in [a,b]$. Нетрудно проверить, что $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$. Пусть $x_*(\cdot)$ — траектория системы (1.1), порожденной функцией управления $u_*(\cdot)$. Обозначив

$$V = \left\{ s \in [a,b] \colon \, \|u(s)\| > \alpha \right\},$$

из (2.2) и утверждения 1 получаем

$$\|x(\xi) - x_*(\xi)\| \leq g_* \int\limits_V \|u(s) - u_*(s)\| \, ds \tag{2.3}$$

для любых $\xi \in [a,b]$, где $x_*(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha}$, g_* определена равенством (1.5).

Так как $V \subset [a,b]$, $u(\cdot) \in U_{p,r}$ и $\|u(s)\| > \alpha$ при всех $s \in V$, то имеем что

$$\alpha^p \, \mu(V) \leq \int\limits_V \|u(s)\|^p \, ds \leq \int\limits_a^b \|u(s)\|^p \, ds \leq r^p,$$

и, следовательно,

$$\mu(V) \leq \frac{r^p}{\alpha^p}, \tag{2.4}$$

где $\mu(V)$ означает меру Лебега множества V. Из включений $u(\cdot) \in U_{p,r}$, $u_*(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$, неравенства Гельдера, соотношений (2.1), (2.3) и (2.4) вытекает, что

$$\|x(\xi) - x_*(\xi)\| \leq 2r \left[\mu(V)\right]^{(p-1)/p} g_* \leq \frac{\kappa_*}{\alpha^{p-1}}$$

для всех $\xi \in [a,b]$, и, следовательно,

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_C \leq \frac{\kappa_*}{\alpha^{p-1}}.$$

Учитывая, что $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}$ произвольно выбрана, заключаем, что

$$\mathbb{X}_{p,r} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha} + \frac{\kappa_*}{\alpha^{p-1}} B_C(1). \tag{2.5}$$

Поскольку справедливо включение $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha} \subset \mathbb{X}_{p,r}$, то из (2.5) получаем доказательство утверждения.

3. Функции управления, удовлетворяющие условию Липшица

Определим новое множество управляющих функций, полагая

$$U_{p,r}^{\alpha,lip} = \big\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha} \colon u(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m \text{ удовлетворяет условию Липшица}\big\}.$$

Символом $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}$ обозначим совокупность траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip}$, и пусть

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}(\xi) = \big\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}\big\}, \quad \xi \in [a,b]. \tag{3.1}$$

Утверждение 4. *Для любой $\alpha > 0$ выполняется равенство*

$$h_C\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha}, \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}\big) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о может быть проведено по схеме [14, теорема 2].

Теперь определим множество управляющих функций, которое является компактным множеством.

Для заданной $K > 0$ обозначим

$$\begin{aligned} U_{p,r}^{\alpha,lip,K} \quad = \big\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip} \colon u(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m \ &\text{ удовлетворяет условию Липшица} \\ &\text{и постоянное Липшица не превышает } K\big\}, \end{aligned}$$

и пусть $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}$ является множеством траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip,K}$. Для заданной $\xi \in [a,b]$ положим

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi) = \big\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}\big\}. \tag{3.2}$$

Нетрудно проверить, что для любых фиксированных $\alpha > 0$ и $K > 0$ множество управляющих функций $U_{p,r}^{\alpha,lip,K}$ и множество траекторий $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}$ являются компактными подмножествами пространств $C\big([a,b];\mathbb{R}^m\big)$ и $C\big([a,b];\mathbb{R}^n\big)$ соответственно. Более того, для каждой $\xi \in [a,b]$ выполняется равенство

$$\lim_{K\to\infty} \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi) = cl\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}(\xi)\big). \tag{3.3}$$

Здесь cl означает замыкания, множества $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}(\xi)$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$ определены соответственно соотношениями (3.1) и (3.2), $\lim\limits_{K\to\infty} \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$ есть предел Куратовского множественной последовательности $\big\{\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)\big\}_{K=1}^{\infty}$ (см. [13]).

С учетом соотношения (3.3) и утверждения 2, по схеме доказательства теоремы 3 из [14], вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5. *Пусть $\alpha > 0$ фиксирован. Тогда для каждой $\varepsilon > 0$ существует $K_1(\varepsilon,\alpha) > 0$ такое, что для всех $K \geq K_1(\varepsilon,\alpha)$ и $\xi \in [a,b]$ выполняется неравенство*

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)\big) < \varepsilon.$$

В следующем утверждении получена оценка для хаусдорфова расстояния между множествами $\mathbb{X}_{p,r}(\xi)$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$, где множества $\mathbb{X}_{p,r}(\xi)$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$ определены соответственно соотношениями (1.4) и (3.2).

Утверждение 6. *Для каждой $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha(\varepsilon) > 0$ и $K_*(\varepsilon) = K_*(\varepsilon,\alpha(\varepsilon)) > 0$ такие, что для всех $K \geq K_*(\varepsilon)$ выполняется неравенство*

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),lip,K}(\xi)\big) < \varepsilon$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о утверждения следует из утверждений 3–5.

4. Кусочно-постоянные функции управления

Пусть $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ является равномерным разбиением замкнутого отрезка $[a,b]$, $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i, \quad i = 0, 1, \ldots N-1$,

$$U_{p,r}^{\alpha,\Delta} = \left\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha} \colon u(\xi) = u_i,\ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\ u(b) = u_{N-1}\right\},$$

$$\begin{aligned} V_{p,r}^{\alpha,\Delta,K} = \quad & \left\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha} \colon u(\xi) = u_i,\ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\right. \\ & \left.\|u_{i+1} - u_i\| \le K\Delta,\ i = 0, 1, \ldots, N-2,\ u(b) = u_{N-1}\right\}. \end{aligned}$$

Символами $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}$ и $\mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$ обозначим совокупности траекторий системы (1.1), порожденных соответственно функциями управлений $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta}$ и $u(\cdot) \in V_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$. Для заданной $\xi \in [a,b]$ положим

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}(\xi) &= \left\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}\right\}, \\ \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}(\xi) &= \left\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}\right\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Утверждение 7. *Для любых $\alpha > 0$, $K > 0$ и равномерного разбиения $\Gamma = \left\{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\right\}$ отрезка $[a,b]$, справедливо включение*

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K} \subset \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K} + g_* K(b-a)\Delta B_C(1),$$

и, следовательно,

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi) \subset \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}(\xi) + g_* K(b-a)\Delta B_n$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где g_* определено соотношением (1.5), *$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}(\xi)$ и $\mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}(\xi)$ — соответственно соотношениями* (3.2) *и* (4.1), *$\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}$, которая порождена функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip,K}$, и определим новую функцию управления $v(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$\begin{aligned} v(\xi) \quad &= \quad \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} u(s)ds, \quad \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \quad i = 0, 1, \ldots, N-1, \\ v(\xi_N) \quad &= \quad v(\xi_{N-1}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Очевидно, что $\|v(\xi)\| \le \alpha$ для любой $\xi \in [a,b]$. Из (4.2) и неравенства Гельдера следует, что $\displaystyle\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|v(s)\|^p\, ds \le \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|u(s)\|^p\, ds$ при всех $i = 0, 1, \ldots, N-1$, и, следовательно,

$$\int\limits_a^b \|v(s)\|^p\, ds \le \int\limits_a^b \|u(s)\|^p\, ds \le r^p.$$

Таким образом, получаем, что $v(\cdot) \in U_{p,r}$. Так как $\|v(\xi)\| \le \alpha$ для всех $\xi \in [a,b]$, то имеем $v(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$.

Обозначим $v(\xi_i) = v_i$ при $i = 0, 1, \ldots, N$. Тогда $v(\xi) = v_i$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, и $v(\xi_N) = v_N = v_{N-1}$. Так как $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,lip,K}$, то $\|u(\xi_*) - u(\xi^*)\| \le K\,|\xi_* - \xi^*|$ при всех $\xi_* \in [a,b]$ и $\xi^* \in [a,b]$. Из соотношения (4.2) имеем, что неравенство

$$\|v_{i+1} - v_i\| = \|v(\xi_{i+1}) - v(\xi_i)\| = \left\|\frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_{i+1}}^{\xi_{i+2}} u(s)ds - \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} u(s)ds\right\|$$

$$\leq \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|u(s+\Delta) - u(s)\| \, ds \leq K\Delta \tag{4.3}$$

справедливо для любого $i < N-1$. Так как $v(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha}$, то из (4.2) и (4.3) заключаем, что $v(\cdot) \in V_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$. Символом $z(\cdot)$ обозначим траекторию системы (1.1), порожденной функцией управления $v(\cdot) \in V_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$. Тогда $z(\cdot) \in \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$, и из утверждения 1 получаем, что

$$\|x(\xi) - z(\xi)\| \leq g_* \int\limits_a^b \|u(s) - v(s)\| \, ds \tag{4.4}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Возьмем произвольную $s \in [a,b)$. В этом случае существует $i = 0, 1, \ldots, N-1$ такое, что $s \in [\xi_i, \xi_{i+1})$. Поскольку функция управления $u(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной K, то из (4.2) вытекает, что

$$\|u\,(s) - v\,(s)\| \leq \frac{1}{\Delta} \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \|u(s) - u(\tau)\| \, d\tau \leq \frac{1}{\Delta} K \int\limits_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} |s-\tau| \, d\tau \leq K\Delta. \tag{4.5}$$

Так как $s \in [a,b)$ произвольно выбрана, то из (4.4) и (4.5) следует, что

$$\|x(\xi) - z(\xi)\| \leq g_* K(b-a)\Delta \tag{4.6}$$

при всех $\xi \in [a,b]$. Итак, из (4.6) имеем, что для произвольно выбранной $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,lip,K}$ существует $z(\cdot) \in \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha,\Delta,K}$ такая, что выполняется неравенство $\|x(\cdot) - z(\cdot)\|_C \leq g_* K(b-a)\Delta$.

Итак, утверждение доказано.

Теперь сформулируем утверждение, где оценивается хаусдорфово расстояние между сечениями множеств траекторий $\mathbb{X}_{p,r}$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}$.

Утверждение 8. *Для заданной $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha\,(\varepsilon) > 0$ и $\Delta_*\,(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого равномерного разбиения Γ замкнутого отрезка $[a,b]$, где $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство*

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где Δ — диаметр разбиения Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно утверждению 6 для заданной $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha\,(\varepsilon) > 0$ и $K_*\,(\varepsilon) = K_*\,(\varepsilon, \alpha(\varepsilon)) > 0$ такие, что при всех $\xi \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),lip,K_*(\varepsilon)}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.7}$$

Далее, из утверждения 7 получаем, что для заданых $\alpha(\varepsilon) > 0$, $K_*(\varepsilon) > 0$ и равномерного разбиения $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ отрезка $[a,b]$ выполняется включение

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),lip,K_*(\varepsilon)}(\xi) \subset \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,K_*(\varepsilon)}(\xi) + g_* K_*(\varepsilon)(b-a)\Delta B_n \tag{4.8}$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Обозначим $\Delta_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4 g_* K_*(\varepsilon)(b-a)}$. Из (4.8) следует, что для всех $\Delta > 0$ таких, что $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, справедливо включение

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),lip,K_*(\varepsilon)}(\xi) \subset \mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,K_*(\varepsilon)}(\xi) + \frac{\varepsilon}{4} B_n \tag{4.9}$$

при всех $\xi \in [a,b]$. Поскольку

$$\mathbb{Z}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,K_*(\varepsilon)}(\xi) \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi) \tag{4.10}$$

для любых $\xi \in [a,b]$, то из (4.7), (4.9) и (4.10) имеем, что если $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, то

$$\mathbb{X}_{p,r}(\xi) \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi) + \frac{\varepsilon}{2} B_n \tag{4.11}$$

при всех $\xi \in [a,b]$. Так как справедливо включение $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi) \subset \mathbb{X}_{p,r}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$, то (4.11) завершает доказательство.

5. Функции управления с нормами из равномерного разбиения

В этом разделе мы сужаем множество управляемых функций $U_{p,r}^{\alpha,\Delta}$ и вводим новое множество управляемых функций. Пусть $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ есть равномерное разбиение замкнутого отрезка $[a,b]$, $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, $\alpha > 0$ и $\Lambda = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_q = \alpha\}$ является равномерным разбиением замкнутого отрезка $[0,\alpha]$, $\delta = w_{j+1} - w_j$, $j = 0,1,\ldots,q-1$. Обозначим

$$U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} = \Big\{ u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha} \colon u(\xi) = u_i,\ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ \|u_i\| \in \Lambda,\ i = 0,1,\ldots,N-1,\ u(b) = u(\xi_{N-1}) \Big\}.$$

Символом $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$ обозначим множество траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$. Для заданной $\xi \in [a,b]$ положим

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}(\xi) = \big\{ x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} \big\}. \tag{5.1}$$

Утверждение 9. *Для любых $\alpha > 0$, равномерного разбиения $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ отрезка $[a,b]$ и равномерного разбиения $\Lambda = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_q = \alpha\}$ отрезка $[0,\alpha]$ выполняется неравенство*

$$h_C\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}, \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}\big) \le g_*(b-a)\delta,$$

и, следовательно,

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}(\xi)\big) \le g_*(b-a)\delta$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где g_* определена соотношением (1.5), $\Delta > 0$ — диаметр разбиения Γ, $\delta > 0$ — диаметр разбиения Λ.

Доказательство. Пусть $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}$ — произвольно выбранная траектория, порожденная функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta}$. Так как $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta}$, то имеем, что $u(\xi) = u_i$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0,1,\ldots,N-1$, $u(b) = u_{N-1}$ и, более того,

$$\Delta \sum_{i=0}^{N-1} \|u_i\|^p \le r^p, \quad \|u_i\| \le \alpha \ \text{ при всех } i = 0,1,\ldots,N-1. \tag{5.2}$$

Если $\|u_i\| < \alpha$ $(i = 0,1,\ldots,N-1)$, то существует $w_{j_i} \in \Lambda$ такое, что

$$\|u_i\| \in [w_{j_i}, w_{j_i+1})\,. \tag{5.3}$$

Определим функцию $u_0(\cdot) : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$u_0(\xi) = \begin{cases} \dfrac{u_i}{\|u_i\|} w_{j_i}, & \text{если} \quad 0 < \|u_i\| < \alpha, \\ u_i, & \text{если} \quad \|u_i\| = 0 \text{ или } \|u_i\| = \alpha, \end{cases} \tag{5.4}$$

где $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $w_{j_i} \in \Lambda$ определено в (5.3) и $u_0(b) = u_0(\xi_{N-1})$. Учитывая (5.3) и (5.4), получаем, что $\|u_0(\xi)\| \le \|u(\xi)\|$ для всех $\xi \in [a,b]$, и, следовательно, из (5.2) имеем, что $u_0(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$. Далее, из (5.3) и (5.4) вытекает, что

$$\|u(\xi) - u_0(\xi)\| \le \delta \tag{5.5}$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где δ является диаметром разбиения Λ.

Теперь траекторию системы (1.1), порожденной функцией управления $u_0(\cdot)$, обозначим символом $x_0(\cdot)$. Тогда $x_0(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$, и из (5.5) и утверждения 1 вытекает, что

$$\|x(\xi) - x_0(\xi)\| \le g_*(b-a)\delta$$

при всех $\xi \in [a,b]$, и, следовательно,

$$\|x(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C \le g_*(b-a)\delta. \tag{5.6}$$

Таким образом, из (5.6) имеем, что

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} + g_*(b-a)\delta B_C(1). \tag{5.7}$$

Поскольку $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\Lambda} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta}$, то из (5.7) получаем доказательство утверждения.

6. Конечное число управляющих функций

Пусть $\sigma > 0$ — заданное число, $S = \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\| = 1\}$ и $S_\sigma = \{s_1, s_2, \ldots, s_g\}$ является конечной σ-сетью на S. Определим новое множество управляющих функций, состоящее из конечного числа функций управления, полагая

$$\begin{aligned} U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma} \; = \; & \big\{u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} \colon u(\xi) = w_{j_i} s_{l_i},\ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}), \\ & \quad w_{j_i} \in \Lambda,\ s_{l_i} \in S_\sigma,\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\ u(b) = u(\xi_{N-1})\big\}. \end{aligned}$$

Отметим, что множество $U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ можно определить и равенством

$$\begin{aligned} U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma} = \; & \Big\{u(\cdot) \in L_p\left([a,b]; \mathbb{R}^m\right) : u(\xi) = w_{j_i} s_{l_i},\ \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ w_{j_i} \in \Lambda, \\ & s_{l_i} \in S_\sigma,\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\ \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} w_{j_i}^p \le r^p,\ u(b) = u(\xi_{N-1})\Big\}, \end{aligned}$$

где Δ — диаметр равномерного разбиения $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$, δ — диаметр равномерного разбиения $\Lambda = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_q = \alpha\}$.

Пусть $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ является множеством траекторий системы (1.1), порожденных функциями управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$. Очевидно, что множество $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ состоит из конечного числа траекторий. Для заданной $\xi \in [a,b]$ положим

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}(\xi) = \big\{x(\xi) \in \mathbb{R}^n \colon x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}\big\}. \tag{6.1}$$

Утверждение 10. *Для каждых $\alpha > 0$, равномерного разбиения $\Gamma = \{a = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N = b\}$ отрезка $[a,b]$, равномерного разбиения $\Lambda = \{0 = w_0, w_1, \ldots, w_q = \alpha\}$ отрезка $[0,\alpha]$ и σ-сети S_σ, выполняется неравенство*

$$h_C\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}, \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}\big) \le g_*\alpha(b-a)\sigma,$$

и, следовательно,

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}(\xi)\big) \le g_*\alpha(b-a)\sigma$$

при всех $\xi \in [a,b]$, где g_* определена соотношением (1.5), *а $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}(\xi)$ и $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}(\xi)$ — соответственно соотношениями* (5.1) *и* (6.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольную траекторию $x(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$, которая порождена функцией управления $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$. Из включения $u(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$ следует, что $\|u(\xi)\| = w_{j_i}$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, $u(b) = u(\xi_{N-1})$ и $\Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} w_{j_i}^p \leq r^p$, где $w_{j_i} \in \Lambda$, $\Delta = \xi_{i+1} - \xi_i$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, является диаметром разбиения Γ.

Так как $\|u(\xi)\| = w_{j_i}$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$ и $u(\cdot)$ постоянная на отрезке $[\xi_i, \xi_{i+1})$, то существует $b_i \in S$ такое, что $u(\xi) = w_{j_i} b_i$ для всех $\xi \in [\xi_i, \xi_{i+1})$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, где $u(b) = u(\xi_{N-1})$. Из включения $b_i \in S$ получаем, что существует $s_{l_i} \in S_\sigma$ такой, что $\|b_i - s_{l_i}\| \leq \sigma$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Определим новую функцию управления $u_0(\cdot)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$, полагая

$$u_0(\xi) = w_{j_i} s_{l_i} \text{ при всех } \xi \in [\xi_i, \xi_{i+1}),\ i = 0, 1, \ldots, N-1,\ u_0(b) = u_0(\xi_{N-1}).$$

Можно установить, что $u_0(\cdot) \in U_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ и

$$\|u(\xi) - u_0(\xi)\| \leq \alpha\sigma \tag{6.2}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Пусть $x_0(\cdot)$ является траекторией, порожденной функцией управления $u_0(\cdot)$. Тогда $x_0(\cdot) \in \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}$ и согласно утверждению 1 и соотношению (6.2) имеем, что

$$\|x(\xi) - x_0(\xi)\| \leq g_* \alpha (b-a) \sigma$$

при всех $\xi \in [a,b]$, и, следовательно,

$$\|x(\cdot) - x_0(\cdot)\|_C \leq g_* \alpha (b-a) \sigma. \tag{6.3}$$

Из (6.3) выводим, что

$$\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma} + g_*(b-a)\alpha\sigma B_C(1). \tag{6.4}$$

Поскольку $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma} \subset \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta}$, то из включения (6.4) получаем доказательство утверждения.

7. Аппроксимация сечений множества траекторий

Итак, здесь докажем, что сечения множества траекторий $\mathbb{X}_{p,r}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$, могут быть аппроксимированы множествами $\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha,\Delta,\delta,\sigma}(\xi)$, $\xi \in [a,b]$, которые состоят из конечного числа точек.

Теорема. *Для каждой $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha(\varepsilon) > 0$, $\Delta_*(\varepsilon) > 0$, $\delta_*(\varepsilon) > 0$ и $\sigma_*(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого равномерного разбиения Γ замкнутого отрезка $[a,b]$, равномерного разбиения Λ замкнутого отрезка $[0, \alpha(\varepsilon)]$ и σ-сети S_σ, где $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, $\delta < \delta_*(\varepsilon)$, $\sigma < \sigma_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство*

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,\delta,\sigma}(\xi)\big) \leq \varepsilon$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Здесь Δ — диаметр разбиения Γ, δ — диаметр разбиения Λ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из утверждения 8 имеем, что для заданной $\varepsilon > 0$ существуют $\alpha(\varepsilon) > 0$ и $\Delta_*(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого равномерного разбиения Γ замкнутого отрезка $[a,b]$, где $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.1}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Пусть $\delta_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4g_*(b-a)}$, где g_* определена соотношением (1.5). Согласно утверждению 9 для заданной $\alpha(\varepsilon) > 0$, для заданного равномерного разбиения Γ отрезка $[a,b]$ такого, что $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, и для заданного равномерного разбиения Λ отрезка $[0,\alpha(\varepsilon)]$ такого, что $\delta < \delta_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,\delta}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{7.2}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Пусть $\sigma_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4g_*\alpha(\varepsilon)(b-a)}$. Из утверждения 10 получаем, что для заданной $\alpha(\varepsilon) > 0$, для любого равномерного разбиения Γ отрезка $[a,b]$ такого, что $\Delta < \Delta_*(\varepsilon)$, для любого равномерного разбиения Λ отрезка $[0,\alpha(\varepsilon)]$ такого, что $\delta < \delta_*(\varepsilon)$, и для любой σ-сети S_σ такой, что $\sigma < \sigma_*(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$h_n\big(\mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,\delta}(\xi), \mathbb{X}_{p,r}^{\alpha(\varepsilon),\Delta,\delta,\sigma}(\xi)\big) \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{7.3}$$

при всех $\xi \in [a,b]$.

Из (7.1)–(7.3) следует доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Chentsov A.G.** Approximative realization of integral constraints and generalized constructions in the class of vector finitely additive measures // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 2. P. S10–S60.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением: Линейные системы. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И., Ушаков В.Н.** Минимаксная дифференциальная игра // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 2. С. 277–280.
4. **Subbotina N.N., Subbotin A.I.** Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players controls // J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol. 39, no. 3. P. 376–385.
5. **Vdovina O.I., Sesekin A.N.** Numerical construction of attainability domains for systems with impulse control // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Suppl. 1. P. S246–S255.
6. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. Челябинск: Изд-во ЧелГУ, 2005. 124 с.
7. **Angell T.S., George R.K., J.P. Sharma J.P.** Controllability of Urysohn integral inclusions of Volterra type // Electron. J. Diff. Equat. 2010. Vol. 79. P. 1–12.
8. **Bennati M.L.** An existence theorem for optimal controls of systems defined by Uryson integral equations // Ann. Mat. Pura. Appl. 1979. Vol. 121, no. 4. P. 187–197.
9. **Huseyin A., Huseyin N., Guseinov Kh.G.** Approximation of the sections of the set of trajectories of the control system described by a nonlinear Volterra integral equation // Math. Model. Anal. 2015. Vol. 20, no. 4. P. 502–515.
10. **Гусейин Н., Гусейин А., Гусейнов Х.Г.** Аппроксимация множества траекторий управляемой системы, описываемой интегральным уравнением Урысона // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 59–72.
11. **Matviichuk A.R., Ushakov V.N.** On the construction of resolving controls in control problems with phase constraints // J. Comput. Syst. Sci. Int. 2006. Vol. 45, no. 1. P. 1–16. doi: 10.1134/S1064230706010011 .
12. **Huseyin A.** On the existence of ε-optimal trajectories of the control systems with constrained control resources // Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 2017. Vol. 66, no. 1. P. 75–84. doi: 10.1501/Commua1_0000000776 .
13. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston: Birkhäuser, 1990. 461 p.
14. **Huseyin A.** On the approximation of the set of trajectories of control system described by a Volterra integral equation // Nonlin. Anal. Model. Contr. 2014. Vol. 19, no. 2. P. 199-208.

Поступила 10.08.2016

Гусейин Анар
д-р философии, старший преподаватель
исследователь
Университет Джумхурийет, Турция
e-mail: ahuseyin@cumhuriyet.edu.tr

Гусейин Несир
д-р философии, старший преподаватель
исследователь
Университет Джумхурийет, Турция
e-mail: nhuseyin@cumhuriyet.edu.tr

Гусейнов Халик Гаракиши оглы
д-р физ.-мат. наук, профессор
исследователь
Университет Анадолу, Турция
e-mail: kguseynov@anadolu.edu.tr

REFERENCES

1. Chentsov A.G. Approximative realization of integral constraints and generalized constructions in the class of vector finitely additive measures. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, Suppl. 2, pp. S10–S60.
2. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 475 p.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I., Ushakov V.N. A minimax differential game. *Dokl. AN SSSR*, 1972, vol. 206, no. 2, pp. 277–280 (in Russian).
4. Subbotina N.N., Subbotin A.I. Alternative for the encounter-evasion differential game with constraints on the momenta of the players controls. *J. Appl. Math. Mech.*, 1975, vol. 39, no. 3, pp. 376–385.
5. Vdovina O.I., Sesekin A.N. Numerical construction of attainability domains for systems with impulse control. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2005, Suppl. 1, pp. S246–S255.
6. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* [Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide]. Chelyabinsk: Chelyabinskiy Gos. Univer. Publ., 2005, 124 p.
7. Angell T.S., George R.K., J.P. Sharma J.P. Controllability of Urysohn integral inclusions of Volterra type. *Electron. J. Diff. Equat.*, 2010, vol. 79, 1–12 pp.
8. Bennati M.L. An existence theorem for optimal controls of systems defined by Uryson integral equations. *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 1979, vol. 121, no. 4, pp. 187–197.
9. Huseyin A., Huseyin N., Guseinov Kh.G. Approximation of the sections of the set of trajectories of the control system described by a nonlinear Volterra integral equation. *Math. Model. Anal.*, 2015, vol. 20, no. 4, pp. 502–515.
10. N. Huseyin, A. Huseyin, Kh. G. Guseinov. Approximation of the set of trajectories of a control system described by the Urysohn integral equation. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2015, vol. 21, no. 2, pp. 59-72 (in Russian).
11. Matviichuk A.R., Ushakov V.N. On the construction of resolving controls in control problems with phase constraints. *J. Comput. Syst. Sci. Int.*, 2006, vol. 45, no. 1, pp. 1–16. doi: 10.1134/S1064230706010011 .
12. Huseyin A. On the existence of ε-optimal trajectories of the control systems with constrained control resources. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 2017, vol. 66, no. 1, pp. 75–84. doi: 10.1501/Commua1_0000000776 .
13. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-valued analysis.* Boston: Birkhäuser, 1990, 461 p.
14. Huseyin A. On the approximation of the set of trajectories of control system described by a Volterra integral equation. *Nonlin. Anal. Model. Contr.*, 2014, vol. 19, no. 2, pp. 199–208.

A. Huseyin, Ph. D., Assistant Professor, Faculty of Science, Cumhuriyet University, Sivas, Turkey, e-mail: ahuseyin@cumhuriyet.edu.tr

N. Huseyin, Ph. D., Assistant Professor, Faculty of Education, Cumhuriyet University, Sivas, Turkey, e-mail: nhuseyin@cumhuriyet.edu.tr

Kh. Guseinov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Anadolu University, Mathematics Department, Eskisehir 26470, Turkey, e-mail: kguseynov@anadolu.edu.tr

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ[1]

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального распределенного управления в плоской выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при старших производных эллиптического оператора. На границе области в этой задаче задано нулевое условие Дирихле, а управление аддитивно входит в неоднородность. В качестве множества допустимых управлений используется единичный шар в соответствующем пространстве функций, суммируемых с квадратом. Решение получающихся краевых задач рассматриваются в обобщенном смысле как элементы некоторого гильбертова пространства. В качестве критерия оптимальности выступает сумма квадрата нормы отклонения состояния от заданного и квадрата нормы управления с некоторым коэффициентом. Такая структура критерия оптимальности позволяет, при необходимости, усилить роль либо первого, либо второго слагаемого в этом критерии. В первом случае более важным является достижение заданного состояния, а во втором случае — минимизация ресурсных затрат. Подробно изучена асимптотика задачи, порожденная оператором Лапласа с малым коэффициентом, к которому прибавлен дифференциальный оператор первого порядка. Особенностью задачи является наличие характеристик предельного оператора, которые касаются границы области. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения задачи в случае, когда оптимальное управление есть внутренняя точка множества допустимых управлений.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin. Asymptotics of the solution to the singular problem of optimal distributed control in a convex domain.

We consider the problem of optimal distributed control in a planar convex domain with smooth boundary and a small parameter at the highest derivatives of an elliptic operator. A zero Dirichlet condition is given at the boundary of the domain, and the control enters the inhomogeneity additively. The set of admissible controls is the unit ball in the corresponding space of square integrable functions. The solutions of the obtained boundary value problems are considered in the generalized sense as elements of some Hilbert space. The optimality index is the sum of the squared norm of the deviation of the state from a given state and the squared norm of the control with some coefficient. This structure of the optimality index makes it possible to strengthen, if necessary, the role of either the first or the second term of the index. In the first case it is more important to attain the desired state, whereas in the second case it is more important to minimize the resource consumption. We present a detailed study of the asymptotics of the problem generated by the sum of the Laplace operator with a small coefficient and a first-order differential operator. A special feature of the problem is the presence of characteristics of the limiting operator that are tangent to the boundary of the domain. We obtain a complete asymptotic expansion of the solution in powers of the small parameter in the case where the optimal control is an interior point of the set of admissible controls.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

MSC: 35C20, 35B25, 76M45, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-128-142

Статья посвящена исследованию асимптотики решения задачи оптимального распределенного управления [1] в плоской выпуклой области с гладкой границей и малым параметром при старших производных эллиптического оператора. Асимптотика решения задачи Дирихле для подобного эллиптического уравнения в подобной области была исследована А. М. Ильиным [2, гл. IV, § 3]. Асимптотика распределенного управления для оператора с малым коэффициентом при старшей производной, но в существенно другой области, рассматривалась в [3; 4]. Другие задачи оптимального управления решениями краевых задач, содержащих малый параметр, с построением асимптотических разложений данных решений рассмотрены в [5–7].

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

1. Общая постановка задачи и условия оптимальности

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2,\, 3)$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma := \partial\Omega$ (Ω — многообразие класса C^∞ с краем).

Рассмотрим следующую билинейную форму в соболевском пространстве $H_0^1(\Omega)$ функций, равных нулю на Γ:

$$F(v, w) = (A\nabla v, \nabla w) + (B \cdot \nabla v, w) + (av, w). \tag{1.1}$$

Здесь $A = A(x) = (a_{ij}(x))$, $i, j \in \overline{1, n}$, $B = B(x) = (b_i(x))$, $i \in \overline{1, n}$, a_{ij}, b_i, a — заданные гладкие в $\overline{\Omega}$ функции, ν — единичный вектор внешней нормали к границе Γ, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, а $B \cdot C$ — скалярное произведение n-мерных векторов B и C в $\mathbb{R}^n$. Для норм в пространствах $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ используются обозначения $\|\cdot\|$ и $|||\cdot|||$ соответственно, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будет обозначаться скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$. Нормы в пространствах $C(\overline{\Omega})$ и $C(\Gamma)$ будут обозначаться $\|\cdot\|_C$ и $|||\cdot|||_C$ соответственно.

Если для всех $x \in \overline{\Omega}$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$(A(x)\xi, \xi) \geqslant \gamma\|\xi\|^2, \quad \gamma > 0, \quad a(x) \geqslant \alpha > 0, \quad a(x) - \frac{1}{2}\operatorname{div} B(x) \geqslant \alpha_1 > 0, \tag{1.2}$$

то

$$F(v, v) = (A\nabla v, \nabla v) + \Big(\Big(a - \frac{1}{2}\operatorname{div} B\Big)v, v\Big) \geqslant \gamma\|\nabla v\|^2 + \alpha_1\|v\|^2. \tag{1.3}$$

Пусть $L_2(\Omega) \supset \mathcal{U}$ — строго выпуклое и замкнутое в $L_2(\Omega)$ множество.

Рассмотрим управляемое состояние $z = z(u) \in H_0^1(\Omega)$, определяемое соотношением

$$\forall\, w \in H_0^1(\Omega) \quad F(z, w) = (f + u, w), \quad u \in \mathcal{U}, \tag{1.4}$$

где $L_2(\Omega) \ni f$ — заданная функция.

Согласно теореме Лакса — Мильграмма (см., например, [8; 9, п. 5.8]) задача (1.4) имеет единственное решение. В силу формулы Грина

$$\forall\, v, w \in H_0^1(\Omega) \quad (A\nabla v, \nabla w) = -(\nabla \cdot (A\nabla v), w) \tag{1.5}$$

(см. [1, гл. 1, п. 3.4]) на $z(u)$ можно смотреть как на слабое решение краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}z := -\nabla \cdot (A(x)\nabla z) + B(x) \cdot \nabla z + a(x)z = f(x) + u(x), & x \in \Omega, \\ z = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.6}$$

Отметим, что для всех v, $w \in H_0^1(\Omega)$

$$F(v, w) = (\nabla v, A^*\nabla w) - (v, B \cdot \nabla w) - (v, w \operatorname{div} B) + (v, aw). \tag{1.7}$$

Здесь * — символ сопряжения линейных операторов.

В качестве критерия управления рассмотрим функционал

$$J(u) = \|z(u) - z_d\|^2 + \beta^{-1}||u||^2 \longrightarrow \min : \; u \in \mathcal{U}, \tag{1.8}$$

где z_d —заданная функция, а β — положительный параметр.

Используя схему Лионса [1, гл. 2, п. 2.1.], найдем условие отпимальности для задачи (1.6), (1.8).

В силу (1.1), (1.2) и (1.4) состояние $z(u)$ дифференцируемо по Гато (как отображение $z : \mathcal{U} \subset L_2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$) и для любого $\widetilde{v} \in L_2(\Omega)$ величина $Dz(u)\widetilde{v} \in H_0^1(\Omega)$ — значение дифференциала Гато отображения z в точке $u \in \mathcal{U}$ на элементе $\widetilde{v} \in L_2(\Omega)$ — определяется из соотношения

$$\forall\, w \in H_0^1(\Omega) \quad F(Dz(u)\widetilde{v}, w) = (\widetilde{v}, w). \tag{1.9}$$

В связи с этим дифференцируем по Гато и функционал $J(u)$. Тогда

$$\forall\, \widetilde{v} \in L_2(\Omega) \quad DJ(u)\widetilde{v} = 2(Dz(u)\widetilde{v}, z(u) - z_d) + 2\beta^{-1}(\widetilde{v}, u). \tag{1.10}$$

Поскольку множество $\mathcal{U}$ строго выпукло и замкнуто, то единственное оптимальное управление $u_{opt} \in \mathcal{U}$ характеризуется условием (см., например, [1, гл. 1, теорема 1.3])

$$\forall\, \widetilde{v} \in \mathcal{U} \quad DJ(u_{opt})(\widetilde{v} - u_{opt}) \geqslant 0. \tag{1.11}$$

Следуя Лионсу, определим сопряженное состояние $p = p(u) \in H_0^1(\Omega)$, соответствующее состоянию $z = z(u)$, соотношением

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega) \quad F(v, p) = (v, z - z_d). \tag{1.12}$$

Исходя из формулы Грина (1.5) и (1.7) на $p(u)$ можно смотреть как на слабое решение краевой задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* p := -\nabla \cdot (A(x)^* \nabla p) - B(x) \cdot \nabla p + \big(a(x) - \operatorname{div} B(x)\big) p = z - z_d, & x \in \Omega, \\ p = 0, & x \in \Gamma. \end{cases} \tag{1.13}$$

Из определения p и формулы (1.10) получим, что для всех $\widetilde{v} \in \mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} DJ(u_{opt})(\widetilde{v} - u_{opt}) &= (Dz(u_{opt})(\widetilde{v} - u_{opt}), z(u_{opt}) - z_d) + \beta^{-1}\big(u_{opt}, (\widetilde{v} - u_{opt})\big) \\ &\overset{(1.12)}{=} F(Dz(u_{opt})(\widetilde{v} - u_{opt}), p) + \beta^{-1}\big(u_{opt}, (\widetilde{v} - u_{opt})\big) \\ &\overset{(1.9)}{=} \big((\widetilde{v} - u_{opt}), p\big) + \beta^{-1}\big(u_{opt}, (\widetilde{v} - u_{opt})\big) = \big(p + \beta^{-1} u_{opt}, (\widetilde{v} - u_{opt})\big) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Тем самым условие (1.11) эквивалентно следующему:

$$\forall\, \widetilde{v} \in \mathcal{U} \quad \big(p + \beta^{-1} u_{opt}, (\widetilde{v} - u_{opt})\big) \geqslant 0. \tag{1.14}$$

Таким образом, справедливо утверждение

Утверждение 1. *Единственное оптимальное управление в задаче* (1.6), (1.8) *определяется из соотношения* (1.14), *где p — решение задачи* (1.13).

2. Рассматриваемая задача и определяющие соотношения

Конкретизируем общую задачу следующим образом: $n = 2$ (при этом вернемся к стандартным обозначениям независимых переменных $x := x_1$, $y := x_2$), $A(x, y) = \varepsilon^2 I$, (здесь I — тождественный оператор), $0 < \varepsilon \ll 1$, $B(x, y) = (0, b(x))^*$, а множество допустимых управлений $\mathcal{U}$ имеет вид

$$\mathcal{U} := \{u \in L_2(\Omega) \colon \|u\| \leqslant 1\}.$$

Как показано в [10, формула (5)], в этом случае условие (1.14) эквивалентно следующему

$$\exists\, \lambda \in (0; \beta] \colon \big(u_{opt}(\cdot) = -\lambda p(\cdot)\big) \wedge \big(\lambda \|p\| \leqslant 1\big) \wedge \big((\beta - \lambda)\,(1 - \lambda \|p\|) = 0\big).$$

Обозначив оптимальное управление u_{opt} через u_ε, а соответствующие ему состояния $z(u_{opt})$, $p(u_{opt})$ и параметр λ через z_ε, p_ε и λ_ε соответственно, получим в силу утверждения 1 следующую систему для определения z_ε, p_ε и λ_ε:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z_\varepsilon + b(x) \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial y} + a(x, y) z_\varepsilon = f(x, y) - \lambda_\varepsilon p_\varepsilon, & (x, y) \in \Omega, \\ \mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta p_\varepsilon - b(x) \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial y} + a(x, y) p_\varepsilon = z_\varepsilon - z_d, & (x, y) \in \Omega, \\ z_\varepsilon = 0, \quad p_\varepsilon = 0, & (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\big(u_\varepsilon = -\lambda_\varepsilon p_\varepsilon\big) \wedge \big(\lambda_\varepsilon \in (0;\beta]\big) \wedge \big(\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| \leqslant 1\big) \wedge \big((\beta-\lambda_\varepsilon)\big(1-\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\|\big)=0\big). \tag{2.2}$$

Цель работы — изучить поведение z_ε, p_ε и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ и найти асимптотические разложения указанных величин при $\varepsilon \to 0$.

В дальнейшем положительные константы, которые зависят только от области Ω и функций $b(x)$ и $a(x,y)$, часто будем обозначать одной и той же буквой K (возможно, с индексами).

Наряду с (2.1) рассмотрим также систему более общего вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z + \lambda p = f_1(x,y), & \mathcal{L}_\varepsilon^* p - z = f_2(x,y), \quad (x,y)\in\Omega,\\ z = g_1, & p = g_2, \qquad\qquad\qquad (x,y)\in\Gamma. \end{cases} \tag{2.3}$$

Теорема 1. *Задача* (2.3) *разрешима единственным образом при любых $f_i \in L_2(\Omega)$, $g_i \in H^{3/2}(\Gamma)$ и $\varepsilon > 0$ $(i = 1,\ 2)$, ее решение $z,\ p \in H^2(\Omega)$. При этом если $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и $g_i \in C^\infty(\Gamma)$, то $z,\ p \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [7]. □

Отметим, что если $g_1 = g_2 = 0$ и z и p — решения системы (2.3), то для любых $v, w \in H_0^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2(\nabla z,\nabla v) + \Big(b(x)\frac{\partial}{\partial y}z, v\Big) + (a(x,y)z,v) + \lambda(p,v) = (f_1,v),\\ &\varepsilon^2(\nabla p,\nabla w) - \Big(b(x)\frac{\partial}{\partial y}p, w\Big) + (a(x,y)p,w) - (z,w) = (f_2,w),\\ &\Big(b(x)\frac{\partial}{\partial y}z, z\Big) = \Big(b(x)\frac{\partial}{\partial y}p, p\Big) = 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Поэтому, взяв $v = p$, а $w = z$ и вычитая из первого равенства из (2.4) второе, получим

$$\|z\|^2 + \lambda\|p\|^2 = (f_1,p) - (f_2,z). \tag{2.5}$$

Утверждение 2. *Пусть z_ε, p_ε и λ_ε — решение системы* (2.1), (2.2). *Тогда $\|z_\varepsilon\| = O(1)$ и $\|p_\varepsilon\| = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$, и существует $\lambda_* > 0$ такое, что $\lambda_\varepsilon \geqslant \lambda_* > 0$.*

Доказательство. Пусть $z_{\varepsilon,0}$ — состояние управляемой системы (1.6) при $u \equiv 0$. Тогда в силу априорных оценок решений краевых задач для эллиптических уравнений (см., например, [11, гл. 3, формула (1.5)]) и условия (1.2) справедливо неравенство $\|z_{\varepsilon,0}\|_C \leqslant \|f\|_C/\alpha$. Но в силу определения z_ε, p_ε и λ_ε получим $\|z_\varepsilon - z_d\|^2 + \lambda_\varepsilon\|u_\varepsilon\|^2 \leqslant \|z_{\varepsilon,0} - z_d\|^2$. Отсюда следует, что $\|z_\varepsilon\| = O(1)$. Из второго уравнения системы (2.1) в силу (1.3) и с учетом уже доказанного соотношения получим, что $\varepsilon^2\|\nabla p_\varepsilon\|^2 + \alpha\|p_\varepsilon\|^2 \leqslant K\|p_\varepsilon\|$, т.е. $\|p_\varepsilon\| = O(1)$. Наконец, если $\lambda_{\varepsilon_n} \to 0$ для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$, то и $\lambda_{\varepsilon_n}\|p_{\varepsilon_n}\| \to 0$, что противоречит соотношению 2.2). □

Теорема 2. *Пусть $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g_i \in C^\infty(\Gamma)$, $i = 1,2$, а $\lambda \in [\lambda_*;\lambda^*]$, $\lambda_* > 0$. Тогда для z, p — решений задачи* (2.3) — *справедливы оценки*

$$\max\{\varepsilon^3\|z\|_C, \varepsilon^3\|p\|_C\} \leqslant K(\|f_1\|_C + \|f_2\|_C + \|g_1\|_C + \|g_2\|_C).$$

Доказательство. Обозначим $F := \|f_1\|_C + \|f_2\|_C + \|g_1\|_C + \|g_2\|_C$. Пусть z_1 и p_1 — решения системы $\mathcal{L}_\varepsilon z_1 = f_1$, $\mathcal{L}_\varepsilon^* p_1 = f_2$, $z_1\Big|_\Gamma = g_1$ и $p_1\Big|_\Gamma = g_2$. Эта система состоит из двух эллиптических задач, для которых справедливы априорные оценки (см., например, [11, гл. 3, формула (1.5)]). Поэтому (как и при доказательстве утверждения 2)

$$\|z_1\|_C \leqslant \|g_1\|_C + \|f_1\|_C/\alpha \leqslant KF, \quad \|p_1\|_C \leqslant \|g_2\|_C + \|f_2\|_C/\alpha \leqslant KF. \tag{2.6}$$

Положим $z_2 := z - z_1$ и $p_2 := p - p_1$. Тогда $\mathcal{L}_\varepsilon z_2 + \lambda p_2 = -\lambda p_2$, $\mathcal{L}^*_\varepsilon p_2 - z_2 = z_1$ и $z_2\big|_\Gamma = 0$, $p_2\big|_\Gamma = 0$. Поэтому в силу (2.5) $\|z_2\|^2 + \lambda\|p_2\|^2 \leqslant \lambda\|p_1\|\cdot\|p_2\| + \|z_1\|\cdot\|z_2\|$. Решая это квадратичное неравенство и учитывая (2.6), получим

$$\|z_2\| \leqslant \|z_1\| + \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\|p_1\| \leqslant K_1F, \quad \|p_2\| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\|z_1\| + \|p_1\| \leqslant K_1F. \tag{2.7}$$

Подставляя в (2.4) $z = v = z_2$, $p = w = p_2$, $f_1 = -\lambda p_1$, $f_2 = z_1$ и учитывая (1.2) и (1.3), получим

$$\varepsilon^2\|\nabla z_2\|^2 + \alpha\|z_2\|^2 \leqslant \lambda\|z_2\|\big(\|p_1\| + \|p_2\|\big), \quad \varepsilon^2\|\nabla p_2\|^2 + \alpha\|p_2\|^2 \leqslant \|p_2\|\big(\|z_1\| + \|z_2\|\big).$$

Тем самым с учетом (2.7)

$$\|\nabla z_2\| \leqslant \varepsilon^{-1}K_2F, \quad \|\nabla p_2\| \leqslant \varepsilon^{-1}K_2F. \tag{2.8}$$

Но $-\varepsilon^2\Delta z_2 = -b(x)\dfrac{\partial}{\partial y}z_2 - a(x,y)z_2 - \lambda(p_1+p_2)$ и $z_2\big|_\Gamma = 0$, поэтому в силу формулы (8.25) из [9] получим $\|z_2\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{-2}R_4\big(\|\nabla z_2\| + \|z_2\| + \lambda\|p_1\| + \lambda\|p_2\|\big) \overset{(2.7),(2.8)}{\leqslant} \varepsilon^{-3}K_3F$.

Аналогично $\|p_2\|_{H^2(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{-3}K_4F$.

Теперь осталось применить теоремы вложения (см. [12, п. 8, теорема 1]) и неравенство треугольника для норм. □

Для обоснования асимптотических разложений решений задачи (2.1), (2.2) нужны теоремы об оценке уклонения точного решения z_ε, p_ε и λ_ε этой задачи от решений z_m, p_m и λ_m аппроксимационной задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_m + \lambda_m p_m = f(x) + f_{1,m}(x), & x \in \Omega, \\ \mathcal{L}^*_\varepsilon p_m - z_m = -z_d + f_{2,m}(x), & x \in \Omega, \\ z_m = g_{1,m}(x), \quad p_m = g_{2,m}(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.9}$$

в случае, когда при $\varepsilon \to 0$

$$f_{i,m} \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ g_{i,m} \in C^\infty(\Gamma), \quad \|f_{i,m}\|_C = O\big(\varepsilon^m\big), \quad \|g_{i,m}\|_C = O\big(\varepsilon^m\big),\ i = 1,2, \tag{2.10}$$

и задана аппроксимация условия (2.2).

Если при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполнено условие

$$\lambda_\varepsilon\|p_\varepsilon\| < 1, \tag{2.11}$$

то в этом случае (2.2) переходит в равенство $\lambda_\varepsilon = \beta$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. При этом $\lambda_m = \beta$ при всех m.

Достаточным условием выполнения (2.11) является неравенство $\|z_{\varepsilon,0} - z_d\| < 1$ — см. доказательство утверждения 2.

В дальнейшем будем считать, что условие (2.11) выполнено и тем самым

$$\lambda_\varepsilon = \beta. \tag{2.12}$$

В этом случае теорема 2 дает необходимые оценки погрешности аппроксимаций.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.2), (2.10) *и* (2.11). *Если z_ε, p_ε, и λ_ε — решение задачи* (2.1), (2.12), *а $z_{m,\beta}$ и $p_{m,\beta}$ — решение задачи* (2.9) *с $\lambda_m = \beta$, то*

$$\max\big\{\|z_\varepsilon - z_{m,\beta}\|_C, \|z_\varepsilon - z_{m,\beta}\|_C\big\} = O\big(\varepsilon^{m-3}\big)$$

при $\varepsilon \to 0$. □

В дальнейшем считаем, что область Ω *строго выпукла.*

Тогда существуют точки $M_i = (x_i, y_i) \in \Gamma$, $i = 1, 2$, в которых уравнение касательной к Γ имеет вид $x = x_i$ соответственно. Точки M_i разбивают границу Γ на две части Γ_j — нижнюю ($j = 1$) и верхнюю ($j = 2$). Обе эти части являются графиками функций $\varphi_j(x)$, $x \in [x_1; x_2]$. При этом

$$\varphi_j(x) \in C([x_1; x_2]) \cap C^\infty(x_1; x_2), \quad \varphi_j(x_i) = y_i, \quad \varphi_j'(x_i - (-1)^i 0) = \infty. \tag{2.13}$$

В окрестностях точек M_i существует еще одна параметризация границы Γ: $x = \psi_i(y)$ соответственно. Отметим, что ψ_1 — выпуклая ($\psi_1'' \geqslant 0$), а ψ_2 — вогнутая ($\psi_1'' \leqslant 0$) функции и $\psi_i(x_i) = 0$.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\begin{aligned}&f(x,y), a(x,y), z_d(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega_\delta}), \quad b(x) \in C^\infty([x_1; x_2]), \quad g \in C^\infty(\Gamma),\\ &\forall\,(x,y) \in \overline{\Omega_\delta}\;\; a(x,y) \geqslant \alpha > 0, \quad \forall\, x \in [x_1; x_2]\;\; b(x) \geqslant \alpha > 0,\end{aligned} \tag{2.14}$$

где Ω_δ — некоторая δ-окрестность области Ω, а также (для технической простоты) что

$$x_1 = y_1 = 0, \quad \psi_1''(y_1) > 0, \quad \psi_2''(y_2) < 0. \tag{2.15}$$

Отметим, что вертикальные прямые $x = \mathrm{const}$ являются характеристиками операторов $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_0^*$, получающихся из $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}_\varepsilon^*$, если в определении последних положить $\varepsilon = 0$.

3. Внешнее асимптотическое разложение

Как и в [4], внешнее асимптотическое разложение для z_ε и p_ε имеет экспоненциально убывающие пограничные слои для обеих функций в окрестностях Γ_1 и Γ_2.

Внешнее разложение для z_ε и p_ε ищем в виде

$$\begin{aligned}&\overset{out}{z} := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k}\big(z_{2k}(x,y) + \overset{1}{z}_{2k}(x,\eta_1) + \overset{2}{z}_{2k}(x,\eta_2)\big),\\ &\overset{out}{p} := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k}\big(p_{2k}(x,y) + \overset{1}{p}_{2k}(x,\eta_1) + \overset{2}{p}_{2k}(x,\eta_2)\big),\\ &\eta_j = (-1)^j\big(\varphi_j(x) - y\big)/\varepsilon^2.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Подставим ряды (3.1) в систему (2.1) и приравняем слагаемые одинакового вида и одинакового порядка малости. При этом для нахождения коэффициентов функций $\overset{j}{z}_k$ и $\overset{j}{p}_k$ из пограничных слоев надо разложить функцию $a(x,y)$ в ряды Тейлора по второй переменной в окрестности точек $\varphi_j(x)$ и заменить $(y - \varphi_j(x))$ на $(-1)^{j+1}\varepsilon^2\eta_j$. В результате для определения функций z_{2k}, p_{2k}, $\overset{j}{z}_{2k}$, $\overset{j}{p}_{2k}$ и λ_{2k} получим уравнения

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 z_0 + \beta p_0 = f(x,y), & \mathcal{L}_0^* p_0 - z_0 = -z_d(x,y),\\ \mathcal{L}_0 z_{2k} + \beta p_{2k} = \Delta z_{2k-2}, & \mathcal{L}_0^* p_{2k} - z_{2k} = \Delta p_{2k-2}, \quad k \geqslant 2,\end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \overset{j}{\mathcal{M}}_1 \overset{j}{z}_0 = 0, & \overset{j}{\mathcal{M}}_2 \overset{j}{p}_0 = 0, & j = 1, 2,\\ \overset{j}{\mathcal{M}}_1 \overset{j}{z}_{2k} = \overset{j,1}{\mathcal{F}}_{2k}(x, \eta_j; \overset{j}{\mathbf{z}}_{2k-2}, \overset{j}{\mathbf{p}}_{2k-2}), & \overset{j}{\mathcal{M}}_2 \overset{j}{p}_{2k} = \overset{j,2}{\mathcal{F}}_{2k}(x, \eta_j; \overset{j}{\mathbf{z}}_{2k-2}, \overset{j}{\mathbf{p}}_{2k-2}), & k \geqslant 2,\end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$\overset{j}{\mathcal{M}}_m := -\gamma_j(x)\frac{\partial^2}{\partial \eta_j^2} + (-1)^{j+m} b(x)\frac{\partial}{\partial \eta_j}, \quad \gamma_j(x) := \varphi_j'(x)^2 + 1, \quad j, m = 1, 2, \tag{3.4}$$

$$\overset{j}{\mathbf{z}}_s := (\overset{j}{z}_0, \overset{j}{z}_1, \ldots, \overset{j}{z}_s), \quad \overset{j}{\mathbf{p}}_s := (\overset{j}{p}_0, \overset{j}{p}_1, \ldots, \overset{j}{p}_s),$$

$$\begin{cases} \overset{j,1}{\mathcal{F}}_{2k}(x, \eta_j; \overset{j}{\mathbf{z}}_{2k-2}, \overset{j}{\mathbf{p}}_{2k-2}) := (-1)^j \Big(2\varphi_j'(x) \dfrac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial x} \overset{j}{z}_{2k-2} + \varphi_j''(x) \dfrac{\partial}{\partial \eta_j} \overset{j}{z}_{2k-2} \Big) \\ \qquad + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \overset{j}{z}_{2k-4} - \beta \overset{j}{p}_{2k-2} - \displaystyle\sum_{s=0} \overset{j}{a}_s(x) \eta_j^s \overset{j}{z}_{2k-2-2s}, \\ \overset{j,2}{\mathcal{F}}_{2k}(x, \eta_j; \overset{j}{\mathbf{z}}_{2k-2}, \overset{j}{\mathbf{p}}_{2k-2}) := (-1)^j \Big(2\varphi_j'(x) \dfrac{\partial^2}{\partial \eta_j \partial x} \overset{j}{p}_{2k-2} + \varphi_j''(x) \dfrac{\partial}{\partial \eta_j} \overset{j}{p}_{2k-2} \Big) \\ \qquad + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \overset{j}{p}_{2k-4} + \overset{j}{z}_{2k-2} - \displaystyle\sum_{s=0} \overset{j}{a}_s(x) \eta_j^s \overset{j}{p}_{2k-2-2s}, \end{cases} \tag{3.5}$$

а $\overset{j}{a}_s(x)$ — известные гладкие функции — коэффициенты разложения функции $a(x,y)$ в окрестности границ Γ_j: $a\big(x, \varphi_j(x) - (-1)^j \varepsilon^2 \eta_j\big) = \sum_{s=0}^{\infty} \overset{j}{a}_s(x) \varepsilon^{2s} \eta_j^s$.

При этом считается, что если у функции один из индексов отрицателен, то она тождественно равна нулю.

Проделав аналогичную процедуру с граничными условиями из (2.1), получим соотношения

$$z_{2k}(x, \varphi_j(x)) + \overset{j}{z}_{2k}(x, 0) = 0, \quad p_{2k}(x, \varphi_j(x)) + \overset{j}{p}_{2k}(x, 0) = 0, \quad j = 1, 2. \tag{3.6}$$

В силу того что оба характеристических числа оператора $\overset{1}{\mathcal{M}}_1$ неотрицательны (см. (3.4)), уравнение $\overset{1}{\mathcal{M}}_1 \overset{1}{z} = e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_1(x)} R_s(\eta_1; x)$, где $R_s(\eta_1; x)$ — многочлен по η_1 степени s с коэффицинтами, гладко зависящими от x, имеет единственное решение аналогичного вида $\overset{1}{z} = e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_1(x)} \widetilde{R}_s(\eta_1; x)$ с многочленом $\widetilde{R}_s(\eta_1; x)$ по η_1 той же степени s. Уравнение же $\overset{2}{\mathcal{M}}_1 \overset{1}{p} = e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)} R_s(\eta_1; x)$ имеет общее решения вида $\overset{1}{p} = e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)} \big(C(x) + \eta_1 \widetilde{R}_s(\eta_1; x)\big)$, где $\widetilde{R}_s(\eta_1; x)$ — известный аналогичный многочлен по η_1 степени s, а функция $C(x)$ (многочлен нулевой степени) подлежит определению. Аналогичная ситуация и на Γ_2 (с заменой $\overset{2}{z}$ на $\overset{2}{p}$, и наоборот). С учетом вида функций $\overset{j,m}{\mathcal{F}}_{2k}$ $(j, m = 1, 2)$ получим следующую структуру функций $\overset{j}{z}_{2k}$ и $\overset{j}{p}_{2k}$:

$$\begin{aligned} \overset{1}{z}_{2k} &= e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_2(x)} \overset{1}{P}_{2k-2}(\eta_1; x), & \overset{1}{p}_{2k} &= e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)} \overset{1}{Q}_{2k}(\eta_1; x), \\ \overset{2}{z}_{2k} &= e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_2(x)} \overset{2}{P}_{2k}(\eta_2; x), & \overset{2}{p}_{2k} &= e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_2(x)} \overset{2}{Q}_{2k-2}(\eta_2; x). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь, как и выше, $\overset{1}{Q}_{2k}(\eta_1; x)$, $\overset{2}{P}_{2k}(\eta_2; x)$, $(\overset{1}{P}_{2k-2}(\eta_1; x)$, $\overset{2}{Q}_{2k-2}(\eta_2; x))$ — многочлены по η_j степени $2k$ (степени $2k-2$) с коэффицинтами, гладко зависящими от x.

Отметим, что $\overset{1}{z}_{2k}$ и $\overset{2}{p}_{2k}$ определяются однозначно предыдущими членами рядов (3.1), а $\overset{2}{z}_{2k}$ и $\overset{1}{p}_{2k}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \overset{2}{z}_{2k} &= e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_2(x)} D_{2k}(x) + e^{-\eta_2 b(x)/\gamma_2(x)} \eta_2 \widetilde{P}_{2k-1}(\eta_2; x), \\ \overset{1}{p}_{2k} &= e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)} C_{2k}(x) + e^{-\eta_1 b(x)/\gamma_1(x)} \eta_1 \widetilde{Q}_{2k-1}(\eta_1; x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

где $\widetilde{P}_{2k-1}(\eta_2; x)$ и $\widetilde{Q}_{2k-1}(\eta_1; x)$ определяются однозначно предыдущими членами рядов (3.1).

Таким образом, алгоритм определения z_{2k}, $\overset{j}{z}_{2k}$, p_{2k} и $\overset{j}{p}_{2k}$ имеют следующий вид:

1) найти $\overset{1}{z}_{2k}$ и $\overset{2}{p}_{2k}$;
2) положить $z_{2k}(x, \varphi_1(x)) = -\overset{1}{z}_{2k}(x, 0)$, $p_{2k}(x, \varphi_2(x)) = -\overset{2}{p}_{2k}(x, 0)$;
3) решить задачу (3.2) с условиями из 2);
4) найти $\overset{2}{z}_{2k}$ и $\overset{1}{p}_{2k}$ из условий $\overset{2}{z}_{2k}(x, 0) = -z_{2k}(x, \varphi_2(x))$, $\overset{1}{p}_{2k}(x, 0) = -p_{2k}(x, \varphi_1(x))$ (3.9)

(т. е. определить $D_{2k}(x)$ и $C_{2k}(x)$).

Лемма 1. *Рассмотрим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметра* $x \in (x_1 - \delta; x_2 + \delta)$:

$$\frac{\partial}{\partial y} v = A(x,y)v, \tag{3.10}$$

где $A(x,y) = \big(a_{ij}(x,y)\big)$ *— матрица с непрерывными в области* Ω_δ *коэффициентами, причем для всех* $(x,y) \in \Omega_\delta$

$$a_{22}(x,y) = -a_{11}(x,y), \quad \max\{a_{12}(x,y)a_{21}(x,y)\} \leqslant -\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Пусть $\Phi(x,y) = \big(\Phi_{ij}(x,y)\big)$ *— фундаментальная матрица системы* (3.10) *с начальным условием* $\Phi(x,\varphi_1(x)) \equiv I$ *— единичная матрица. Тогда*

$$\exists\, \gamma_1 > 0\ \forall\,(x,y) \in \Omega,\ \forall\, i = 1,2 \quad \Phi_{ii}(x,y) \geqslant \gamma_1. \tag{3.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теорем о зависимости решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений от параметра функции $\Phi_{ij}(x,y)$ непрерывны в Ω_δ. Докажем справедливость (3.11) для Φ_{22} (для Φ_{11} доказательство аналогично).

Рассмотрим функцию $F(x,y) := \Phi_{12}(x,y)\Phi_{22}(x,y)$. Поскольку $\big(\Phi_{12}(x,y), \Phi_{22}(x,y)\big)^*$ есть решение системы (3.10), то

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x,y) = a_{21}(x,y)\Phi_{12}^2(x,y) + a_{12}(x,y)\Phi_{22}^2(x,y) \leqslant -\gamma_1\big(\Phi_{12}^2(x,y) + \Phi_{22}^2(x,y)\big) \leqslant 0,$$

т. е. $F(x,y)$ убывает по y. Но $\Phi_{12}(x,\varphi_1(x)) = 0$, поэтому $F(x,y) \leqslant 0$. Предположим, что заключение леммы для Φ_{22} неверно. Тогда найдется $\{(x_k,y_k)\} \in \Omega$ такая, что $x_k \to \overline{x} \geqslant x_0$, $y_k \to \overline{y} \in \big[\varphi_1(\overline{x}); \varphi_2(\overline{x})\big]$ и $\Phi_{22}(x_k,y_k) \to 0$. Но $\Phi_{22}(x_k,\varphi_1(x_k)) \equiv 1$, поэтому $\varphi_1(\overline{x}) < \overline{y}$. Тем самым $F(\overline{x},\overline{y}) = 0$, что в силу монотонности $F(x,y)$ по y и равенства $F(\overline{x},\varphi_1(\overline{x})) = 0$ дает $F(\overline{x},y) \equiv 0$ при $y \in \big[\varphi_1(\overline{x}); \overline{y}\big]$. Так как $\Phi_{22}(\overline{x},\varphi_1(\overline{x})) = 1$, то в некоторой малой окрестности (по y) точки $\varphi_1(\overline{x})$ справедливо неравенство $\Phi_{22}(\varphi_1(\overline{x}),y) \neq 0$. Поэтому в этой окрестности $\Phi_{12}(\varphi_1(\overline{x}),y) \equiv 0$, что в силу системы (3.10) дает $\Phi_{22}(\varphi_1(\overline{x}),y) \equiv 0$ — противоречие, доказывающее лемму. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $f_i(x,y) \in C(\overline{\Omega} \setminus \{M_1,M_2\})$, $g_i(x) \in C(x_1;x_2)$. *Тогда задача*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 z + \beta p = f_1(x,y), \quad \mathcal{L}_0^* p - z = f_1(x,y), \\ z(x,\varphi_1(x)) = g_1(x), \quad p(x,\varphi_2(x)) = g_2(x) \end{cases} \tag{3.12}$$

разрешима единственным образом. При этом если $f_i(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{M_1,M_2\})$, $g_i(x) \in C^\infty(x_1; x_2)$, *то и* $z(x,y)$, $p(x,y) \in C^\infty(\overline{\Omega} \setminus \{M_1,M_2\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(x,y) = \big(\Phi_{ij}(x,y)\big)$ — фундаментальная матрица системы (3.12), приведенной к виду (3.10) (путем деления на $b(x) \geqslant \alpha > 0$). Тогда в силу формулы Коши

$$\begin{pmatrix} z(x,y) \\ p(x,y) \end{pmatrix} = \Phi(x,y) \begin{pmatrix} g_1(x) \\ P(x) \end{pmatrix} + \frac{\Phi(x,y)}{b(x)} \int\limits_{\varphi_1(x)}^{y} \Phi^{-1}(x,\eta) \begin{pmatrix} f_1(x,\eta) \\ f_2(x,\eta) \end{pmatrix} d\eta, \tag{3.13}$$

где $P(x) := p\big(x,\varphi_1(x)\big)$.

Покажем, что существует единственное $P(x)$ такое, что $p\big(x,\varphi_2(x)\big) = g_2(x)$. В силу (3.13)

$$g_2(x) = \Phi_{22}(x,\varphi_2(x))P(x) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\Phi(x,y)}{b(x)} \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \Phi^{-1}(x,\eta) \begin{pmatrix} f_1(x,\eta) \\ f_2(x,\eta) \end{pmatrix} d\eta. \tag{3.14}$$

Но $\Phi_{22}(x,\varphi_2(x)\big) \geqslant \gamma_1 > 0$ в силу (3.11), поэтому уравнение (3.14) разрешимо единственным образом. $\square$

Из доказанной леммы 2 с использованием (3.9) получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (2.13) *и* (2.14). *Тогда задача* (3.2), (3.3), (3.6) *разрешима единственным образом и все ее решения бесконечно дифференцируемы в* $\overline{\Omega}\backslash\{M_1,M_2\}$. $\square$

Итак, внешнее разложение построено. Оно по построению является формальным асимптотическим решением (ФАР) задачи (2.1) с $\lambda_\varepsilon=\beta$ в тех подобластях области Ω, где ряды (3.1) не теряют своей асимптотичности.

Покажем, что эти ряды теряют асимптотический характер в некоторых малых окрестносях точек M_1, M_2. В силу одинаковости рассмотрения окрестностей этих точек мы подробно рассмотрим лишь окрестность точки $M_1=(0,0)$.

Обозначим $c:=\sqrt{2\psi_1''(0)}$, тогда функции φ_j, определяющие Γ_j, имеют при $x\to+0$ асимптотические разложения

$$\varphi_j(x)=(-1)^j c x^{1/2}+\sum_{s=2}^{\infty} c_s x^{s/2},\quad x\to+0. \tag{3.15}$$

Через $\sigma(x)$ (возможно, с индексами) мы будем обозначать гладкие в окрестности точки $x=+0$ функции, имеющие асимтотическое разложение при $x\to+0$ вида $\sum_{s=0}^{\infty} q_s x^{s/2}$, которое можно дифференцировать сколько угодно раз.

Через $\sigma(x,y)$ (возможно, с индексами) мы будем обозначать гладкие в окрестности точки $(+0,0)$ функции, имеющие равномерное по y асимтотическое разложение при $x\to+0$ вида $\sum_{s=0}^{\infty} x^{s/2} q_s\big(y/\sqrt{x}\big)$, где $q_s(\theta)\in C^\infty(-1-\gamma_2;1+\gamma_2)$, а $0<\gamma_2$ — достаточно малая константа, которое можно дифференцировать сколько угодно раз.

Согласно (3.4) и (3.15)

$$\begin{gathered}\varphi_j(x)=(-1)^j c x^{1/2}+x\sigma(x),\quad \gamma_j(x)=\frac{c^2}{4x}+x^{-1/2}\sigma(x)=x^{-1}\sigma(x),\\ \frac{b(x)}{\gamma_j(x)}=\frac{4b(0)x}{c^2}+x^{3/2}\sigma(x)=x\sigma(x).\end{gathered} \tag{3.16}$$

В силу возможности почленного дифференцирования и интегрирования рядов из определения $\sigma(x,y)$ и с учетом равенства $x^{-3/2}y=x^{-1}(y/\sqrt{x})$ и соотношений (3.16) получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,y)=x^{-1}\sigma(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\sigma(x,y)=x^{-1/2}\sigma(x,y),\\ \int\limits_{\varphi_1(x)}^{y}\sigma(x,\eta)\,d\eta=x^{1/2}\sigma(x,y)+x^{1/2}\sigma(x).\end{gathered} \tag{3.17}$$

Утверждение 3. *Коэффициенты внешнего разложения* (3.1) *имеют следующие асимптотические разложениия при* $x\to x_i-(-1)^i 0:$

$$\begin{gathered}z_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(1-3k)/2}\sigma(|x-x_i|,y),\quad p_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(1-3k)/2}\sigma(|x-x_i|,y),\\ \overset{1}{z}_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(2-3k)/2}e^{-\eta_1|x-x_i|\sigma(|x-x_i|)}\sum_{s=0}^{2k-2}(|x-x_i|\eta_1)^s\sigma_s(|x-x_i|),\ k\geqslant1,\\ \overset{2}{z}_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(1-3k)/2}e^{-\eta_2|x-x_i|\sigma(|x-x_i|)}\sum_{s=0}^{2k}(|x-x_i|\eta_2)^s\sigma_s(|x-x_i|),\\ \overset{1}{p}_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(1-3k)/2}e^{-\eta_1|x-x_i|\sigma(|x-x_i|)}\sum_{s=0}^{2k}(|x-x_i|\eta_1)^s\sigma_s(|x-x_i|),\\ \overset{2}{p}_{2k}(x,y)=|x-x_i|^{(2-3k)/2}e^{-\eta_2|x-x_i|\sigma(|x-x_i|)}\sum_{s=0}^{2k-2}(|x-x_i|\eta_2)^s\sigma_s(|x-x_i|),\ k\geqslant1.\end{gathered} \tag{3.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что $\Phi(x,y) = \big(\sigma_{ij}(x,y)\big)$ и $\Phi^{-1}(x,y) = \big(\sigma_{ij}(x,y)\big)$. При определении вида решений используются (3.7), (3.8), алгоритм (3.9) и обозначения из (3.12).

Пусть $k=0$. В этом случае $\overset{1}{z}_0 = 0$, $\overset{2}{p}_0 = 0$, $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $f_1(x,y) = f(x,y) = \sigma(x,y)$ и $f_2(x,y) = -z_d(x,y) = \sigma(x,y)$. В силу (3.14) и (3.17) $P(x) = 0\cdot\sigma(x) + x^{1/2}\sigma(x) = x^{1/2}\sigma(x)$, поэтому из (3.13) получим $z_0(x,y) = \sigma(x,y)x^{1/2}\sigma(x) + \sigma(x,y)\big(x^{1/2}\sigma(x,y) + x^{1/2}\sigma(x)\big) = x^{1/2}\sigma(x,y)$ и $p_0(x,y) = x^{1/2}\sigma(x,y)$. Тем самым (с учетом (3.16)) $\overset{2}{z}_0(x,\eta_2) = x^{1/2}\sigma(x)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$ и $\overset{1}{p}_0(x,\eta_1) = x^{1/2}\sigma(x)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$.

Для $k=1$ в силу (3.2) и (3.17) имеем $f_i = x^{-3/2}\sigma(x,y)$, $i=1,2$. По формулам (3.5) с учетом соотношений для $k=0$ получим $\overset{1,1}{\mathcal{F}}_0 = x^{1/2}\sigma(x)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$, $\overset{1,2}{\mathcal{F}}_0 = \big(\sigma(x) + \eta_1 x\sigma(x)\big)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$, $\overset{2,1}{\mathcal{F}}_0 = \big(\sigma(x) + \eta_2 x\sigma(x)\big)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$, $\overset{2,2}{\mathcal{F}}_0 = x^{1/2}\sigma(x)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$. Поэтому $\overset{1}{z}_2 = x^{-1/2}\sigma(x)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$, а $\overset{2}{p}_2 = x^{-1/2}\sigma(x)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$, значит, $g_i = x^{-1/2}\sigma(x)$, $i=1,2$. Аналогично случаю $k=0$ из (3.14) и (3.17) получим, что $P(x) = x^{-1}\sigma(x)$, $z_2(x,y) = x^{-1}\sigma(x,y)$, а $p_2(x,y) = x^{-1}\sigma(x,y)$. После чего находятся $\overset{2}{z}_2(x,0) = x^{-1}\sigma(x)$, $\overset{1}{p}_2(x,0) = x^{-1}\sigma(x)$, а по ним определяется вид $\overset{2}{z}_2(x,\eta_2)$ и $\overset{1}{p}_2(x,\eta_1)$: $\overset{2}{z}_2 = x^{-1}\big(\sigma(x) + x\sigma(x)\eta_2 + x^2\sigma(x)\eta_2^2\big)e^{-\eta_2 x\sigma(x)}$, $\overset{1}{p}_2 = x^{-1}\big(\sigma(x) + x\sigma(x)\eta_1 + x^2\sigma(x)\eta_1^2\big)e^{-\eta_1 x\sigma(x)}$.

Далее доказательство проводится методом математической индукции по k с использованием формул (3.2), (3.5), (3.17), (3.13) и (3.14). $\square$

Прямо по построению и в силу (3.18) ряды (3.1) ФАР задачи (2.1) с $\lambda_\varepsilon = \beta$ при $|x - x_i| > \varepsilon^{\overline{\alpha}}$, $\overline{\alpha} \in (0;4/3)$, и теряют асимптотический характер при $|x - x_i| < \varepsilon^{\overline{\alpha}}$, $\overline{\alpha} > 4/3$. Кроме этого, при $k \geqslant 1$ коэффициенты внешнего разложения не принадлежат $L_2(\Omega)$.

Получившийся характер особенностей коэффициентов внешнего разложения в окрестности точек M_i аналогичен характеру особенностей внешнего разложения решения краевой задачи, рассмотренной в [2, гл. IV, § 3, лемма 3.1].

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (2.13) *и* (2.14), z_ε, p_ε *— решение системы* (2.1) *с* $\lambda = \beta$, *а* z_0, p_0 *— решение первой системы из* (3.2) *с условиеми из* (3.6). *Тогда*

$$\|z_\varepsilon - z_0\| \to 0, \quad \|p_\varepsilon - p_0\| \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что в силу (3.18) при $\varepsilon \to 0$

$$\|\overset{2}{z}_0\| = O(\varepsilon), \quad \|\overset{1}{p}_0\| = O(\varepsilon). \tag{3.19}$$

Рассмотрим функции $\overset{0}{z}_r := \chi_r(x)\big(z_0 + \overset{2}{z}_0\big)$ и $\overset{0}{p}_r := \chi_r(x)\big(p_0 + \overset{1}{p}_0\big)$, где r — вспомогательный малый положительный параметр, а $\chi_r(x)$ — срезающая функция, т. е.

$$\chi_r(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \ \ |\chi_r(x)| \leqslant 1, \quad \chi_r(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; r/2) \cup (x_2 - r/2; +\infty), \\ 1, & x \in [\delta; x_2 - r]. \end{cases}$$

Через $O_r(\varepsilon^m)$ будем обозначать величину, зависящую от ε и r, которая при каждом фиксированном r имеет по ε порядок $O(\varepsilon^m)$.

В силу определения функций z_0, p_0, $\overset{2}{z}_0$, $\overset{1}{p}_0$, формулы Грина (1.5) и (3.19) для любых $v, w \in H_0^1(\Omega)$ получим

$$\varepsilon^2\langle \nabla \overset{0}{z}_r, \nabla v\rangle = -\varepsilon^2(\Delta \overset{0}{z}_r, v) = O(\varepsilon^2\|v\|) - \varepsilon^2(\Delta(\chi_r(x)\overset{2}{z}_0), v).$$

Вычисляя $\Delta(\chi_r(x)\overset{2}{z}_0)$, имеем

$$-\varepsilon^2\big(\Delta(\chi_r(x)\overset{2}{z}_0, v\big) = -\big(\chi_r''(x)\overset{2}{z}_0), v\big) - \Big(\chi_r'(x)(\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\overset{2}{z}_0 + \frac{\partial}{\partial \eta_2}\overset{2}{z}_0\varphi_2'(x)), v\Big)$$

$$-\Big(\chi_r(x)\Big(\varepsilon^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\overset{2}{z}_0+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\varphi_2'(x)+\frac{\partial}{\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\varphi_2''(x)\Big),v\Big)-\Big(\chi_r(x)\Big((1+{\varphi_2'}^2(x))\frac{\partial^2}{\partial\eta_2^2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big)$$

$$\overset{(3.3)}{=}O\big(\varepsilon^3\|v\|\big)+O_r\big(\varepsilon\|v\|\big)+\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big).$$

Аналогично находится $-\varepsilon^2\big(\Delta(\chi_r(x)\overset{1}{p}_0,w\big)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}&-\varepsilon^2\big(\Delta(\chi_r(x)\overset{2}{z}_0,v\big)=O_r\big(\varepsilon\|v\|\big)+\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)Ds\frac{\partial}{\partial\eta_2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big),\\&-\varepsilon^2\big(\Delta(\chi_r(x)\overset{1}{p}_0,w\big)=O_r\big(\varepsilon\|w\|\big)-\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{\partial\eta_1}\overset{1}{p}_0\Big),v\Big).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Имея ввиду, что

$$\Big(\Big(b(x)\frac{\partial}{\eta_2}\overset{0}{z}_r\Big),v\Big)=-\varepsilon^{-2}\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{\eta_2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big)+\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{y}z_0\Big),v\Big)$$

$$\overset{(3.2)}{=}-\varepsilon^{-2}\Big(\chi_r(x)\Big(b(x)\frac{\partial}{\eta_2}\overset{2}{z}_0\Big),v\Big)+\big(\chi_r(x)(-a(x,y)z_0+f(x,y)),v\big),$$

с учетом (3.20) получим

$$\varepsilon^2\langle\nabla\overset{0}{z}_r,\nabla v\rangle+\Big(\Big(b(x)\frac{\partial}{y}\overset{0}{z}_r\Big),v\Big)+(a(x,y)\overset{0}{z}_r,v)=\big(\chi_r(x)f(x,y),v\big)+O_r(\varepsilon\|v\|).\tag{3.21}$$

Аналогично

$$\varepsilon^2\langle\nabla\overset{0}{p}_r,\nabla w\rangle-\Big(\Big(b(x)\frac{\partial}{y}\overset{0}{p}_r\Big),w\Big)+(a(x,y)\overset{0}{p}_r,w)=\big(\chi_r(x)-z_d(x,y),w\big)+O_r(\varepsilon\|w\|).\tag{3.22}$$

Обозначим $\widetilde{z}:=z_\varepsilon-\overset{0}{z}_r$, $\widetilde{p}:=p_\varepsilon-\overset{0}{p}_r$. Вычтем из соответствующих равенств в (2.4) (где $z=z_\varepsilon$, $p=p_\varepsilon$, $f_1=f$, $f_2=-z_d$, $\lambda=\beta$, $g_1=g$, $g_2=0$) равенства (3.21) и (3.22) и учтем, что $\|(1-\chi_r(x))f(x,y)\|=O(r^{1/2})$, $\|(1-\chi_r(x))z_d(x,y)\|=O(r^{1/2})$ при $r\to 0$, имеем

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\langle\nabla\widetilde{z},\nabla v\rangle+\Big(b(x)\frac{\partial}{y}\widetilde{z},v\Big)+(a(x,y)\widetilde{z},v)=O_r(\varepsilon\|v\|)+O(r^{1/2}\|v\|),\\&\varepsilon^2\langle\nabla\widetilde{p},\nabla w\rangle-\Big(b(x)\frac{\partial}{y}\widetilde{p},w\Big)+(a(x,y)\widetilde{p},w)=O_r(\varepsilon\|w\|)+O(r^{1/2}\|w\|).\end{aligned}\tag{3.23}$$

В получившихся равенствах (3.23) возьмем $v=\widetilde{p}$, $w=\widetilde{z}$, вычтем из первого равенства второе и учтем, что силу утверждения 2 и (3.19) $\|\widetilde{z}\|=O(1)$, $\|\widetilde{p}\|=O(1)$): $\|\widetilde{z}\|^2+\beta\|\widetilde{p}\|^2=O_r(\varepsilon)+O(r^{1/2})$, т. е.

$$\|\widetilde{z}\|=O_r(\varepsilon^{1/2})+O(r^{1/4}),\quad \|\widetilde{p}\|=O_r(\varepsilon^{1/2})+O(r^{1/4}).\tag{3.24}$$

Но $\|\widetilde{z}\|=\|z_\varepsilon-z_0-\chi_r(x)(z_0+\overset{2}{z}_0)+z_0)\|\leqslant\|z_\varepsilon-z_0\|+O(\varepsilon)+O(r^{1/2})$, что с учетом (3.24) дает $\|z_\varepsilon-z_0\|=O_r\varepsilon^{1/2})+O(r^{1/4})$. Тем самым $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\|z_\varepsilon-z_0\|=O(r^{1/4})\to 0$ при $r\to 0$, т. е. $\|z_\varepsilon-z_0\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Аналогично получается и соотношение $\|p_\varepsilon-p_0\|\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. □

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* (2.13) *и* (2.14), *а* z_0, p_0 *— решение первой системы из* (3.2) *с условиеми из* (3.6). *Если* $\beta\|p_0\|<1$, *то при всех малых* $\varepsilon>0$ *условие* (2.11) *выполнено и решение задачи* (2.1), (2.2) *совпадает с решением задачи* (2.1), $\lambda_\varepsilon=\beta$.

4. Внутреннее асимптотическое разложение и полная асимптотика решения

В связи с тем что внешнее разложение непригодно в малой окрестности точек M_i, необходимо в окрестностях этих точек рассмотреть новое — “внутреннее” — разложение в растянутых переменных.

Чтобы не писать дробных степеней ε, введем в этой части статьи новый малый параметр $\mu := \varepsilon^{1/3}$. При этом подробно рассмотрим лишь окрестность точки $M_1 = (0,0)$, поскольку внутреннее разложение решения рассматриваемой задачи в окрестности точки M_2 аналогично.

В окрестности точки M_1 введем новые растянутые переменные подобно тому, как это было сделано в [2, гл. IV, § 3, (3.13)]:

$$x = \mu^4\xi, \quad y = \mu^2\tau. \tag{4.1}$$

В этих переменных функции $V_\varepsilon(\xi,\tau) := z_\varepsilon\big(\mu^4\xi, \mu^2\tau\big)$, $W_\varepsilon(\xi,\tau) := p_\varepsilon\big(\mu^4\xi, \mu^2\tau\big)$ будут удовлетворять системе

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}V_\varepsilon + b\big(\mu^4\xi\big)\dfrac{\partial}{\partial\tau}V_\varepsilon + \mu^2 a\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)V_\varepsilon + \mu^2\beta W_\varepsilon + \mu^4\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}V_\varepsilon = \mu^2 f\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big), \\ -\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}W_\varepsilon - b\big(\mu^4\xi\big)\dfrac{\partial}{\partial\tau}W_\varepsilon + \mu^2 a\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)W_\varepsilon - \mu^2 V_\varepsilon + \mu^4\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}W_\varepsilon = -\mu^2 z_d\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big) \end{cases} \tag{4.2}$$

в области

$$\mu^4\xi \geqslant \psi\big(\mu^2\tau\big), \quad \xi < \mu^{\widetilde{\alpha}},$$

для некоторого $\widetilde{\alpha} > 0$ и граничным условиям

$$V_\varepsilon\big(\psi(\mu^2\tau),\mu^2\tau\big) = 0 = W_\varepsilon\big(\psi(\mu^2\tau),\mu^2\tau\big). \tag{4.3}$$

.

Внутреннее разложение для z_ε и p_ε ищем в виде

$$\overset{in}{z} := \sum_{l=1}^{\infty}\mu^{2l}v_{2l}(\xi,\tau), \quad \overset{in}{p} := \sum_{l=1}^{\infty}\mu^{2l}w_{2l}(\xi,\tau). \tag{4.4}$$

Подставим ряды (4.4) в систему (4.2) и приравняем слагаемые одинакового порядка малости. При этом для нахождения коэффициентов надо разложить функции $b\big(\mu^4\xi\big)$, $a\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)$, $f\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)$ и $z_d\big(\mu^4\xi,\mu^2\tau\big)$ в ряды Тейлора в окрестности точки $M_1 = (0,0)$. В результате для определения функций v_{2l} и w_{2l} получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}v_{2l} - b(0)\dfrac{\partial}{\partial\tau}v_{2l} = \overset{1}{\mathcal{G}}_{2k}(\xi,\tau;\mathbf{v}_{2k-2},\mathbf{w}_{2l-2}), \\ \dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}w_{2l} + b(0)\dfrac{\partial}{\partial\tau}w_{2l} = \overset{2}{\mathcal{G}}_{2l}(\xi,\tau;\mathbf{v}_{2k-2},\mathbf{w}_{2k-2}), \end{cases} \tag{4.5}$$

где

$$\mathbf{v}_s := (v_2, v_4, \ldots, v_s), \quad \mathbf{w}_s := (w_2, w_4, \ldots, w_s),$$

$$\begin{cases} \overset{1}{\mathcal{G}}_2(\xi,\tau) = -f(0,0), \quad \overset{2}{\mathcal{G}}_2(\xi,\tau) = z_d(0,0), \\ \overset{1}{\mathcal{G}}_4(\xi,\tau) = -f_2(\xi,\tau) + a(0,0)v_2 + \beta w_2, \\ \overset{2}{\mathcal{G}}_4(\xi,\tau) = z_{d,2}(\xi,\tau) + a(0,0)w_2 - v_2, \\ \overset{1}{\mathcal{G}}_{2k}(\xi,\tau;\mathbf{v}_{2l-2},\mathbf{w}_{2k-2}) = -f_{2l-2}(\xi,\tau) + \beta w_{2l-2} - \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}v_{2l-4} + \displaystyle\sum_{s=0}^{l-1} d_{2l,2s}(\xi,\tau)v_{2k-2-2s}, \\ \overset{2}{\mathcal{G}}_{2k}(\xi,\tau;\mathbf{v}_{2l-2},\mathbf{w}_{2k-2}) = z_{d,2l-2}(\xi,\tau) - \beta v_{2l-2} - \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}w_{2l-4} + \displaystyle\sum_{s=0}^{l-1} \widetilde{d}_{2l,2s}(\xi,\tau)w_{2k-2-2s}, \end{cases} \tag{4.6}$$

а $f_{2s}(\xi,\tau)$, $z_{d,2s}(\xi,\tau)$, $d_{2l,2s}(\xi,\tau)$ и $\widetilde{d}_{2l,2s}(\xi,\tau)$ — известные полиномы (однородные $2s$-*параболической степени*, т.е. когда степень монома $\xi^n\tau^m$ считается равной $2n+m$), полученные из разложений функций f, z_d, a и b в окрестности точки $M_1=(0,0)$.

При этом каждая из систем в (4.5) рассматривается в неограниченной области D: $\xi\geqslant\tau^2$, $\tau\in\mathbb{R}$, с граничными условиями

$$v_2(\tau^2,\tau)=0=w_2(\tau^2,\tau),\quad v_{2l}(\tau^2,\tau)=g_{v,2l}(\tau),\quad w_{2l}(\tau^2,\tau)=g_{w,2l}(\tau), \tag{4.7}$$

определяемыми предыдущими v_{2s} и w_{2s} согласно (4.3).

Решения систем из (4.5), (4.6) неограниченны в рассматриваемой области и в силу этого не единственны. Однако нас интересуют такие решения, которые согласуются с внешним разложением.

Подставим во внешнее разложение вместо x, y и η_j их выражение через ξ и τ из (4.1). С учетом (3.1) получим, что

$$-\eta_1\frac{b(x)}{\varphi_1(x)}=-\frac{\big(\mu^2\tau-\varphi_1(\mu^4\xi)\big)b(\mu^4\xi)}{\mu^6\gamma_1(\mu^4\xi)}\overset{(3.16)}{=}-\frac{4b(0)(\tau+c\sqrt{\xi})\xi}{c^2}+O\big(\mu^2\xi^2\big).$$

Аналогично $-\eta_2 b(x)/\varphi_2(x)=-4b(0)(c\sqrt{\xi}-\tau)\xi/c^2+O\big(\mu^2\xi^2\big)$.

Тем самым $\mu^4\xi^2$ мало при $\xi=x\mu^{-4}\ll\mu^{-1}$, т.е. при $x\ll\mu^3=\varepsilon$. Таким образом, при $\xi\in\big(\varepsilon^{\overline{\alpha}};\varepsilon^{\widetilde{\alpha}}\big)$, $4/3>\overline{\alpha}>\widetilde{\alpha}>1$ ряды (3.1) можно переразложить по ξ и τ. Проделав такую процедуру, получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\big(z_{2k}(x,y)+\overset{1}{z}_{2k}(x,\eta_1)+\overset{2}{z}_{2k}(x,\eta_2)\big)=\sum_{l=1}^{\infty}\mu^{2l}\big(\overset{z}{H}_{0,2l}(\xi,\tau)+\overset{z}{H}_{1,2l}(\xi,\tau)+\overset{z}{H}_{2,2l}(\xi,\tau)\big),$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{2k}\big(p_{2k}(x,y)+\overset{1}{p}_{2k}(x,\eta_1)+\overset{2}{p}_{2k}(x,\eta_2)\big)=\sum_{l=1}^{\infty}\mu^{2l}\big(\overset{p}{H}_{0,2l}(\xi,\tau)+\overset{p}{H}_{1,2l}(\xi,\tau)+\overset{p}{H}_{2,2l}(\xi,\tau)\big),$$

где

$$\overset{z}{H}_{0,2l}=\xi^{l/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\widetilde{q}_{l,s}(\tau/\sqrt{\xi}),$$
$$\overset{z}{H}_{1,2}=0,\ \overset{z}{H}_{1,2l}=e^{-\left(4b(0)\xi(c\sqrt{\xi}+\tau)/c^2\right)}\xi^{2l-9/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\sum_{s_1=0}^{2s-2}F_1(\xi,\tau)^{s_1}\widetilde{\sigma}_{l,1,s_1}(\xi),$$
$$\overset{z}{H}_{2,2l}=e^{-\left(4b(0)\xi(c\sqrt{\xi}-\tau)/c^2\right)}\xi^{2l-3/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\sum_{s_1=0}^{2s}F_2(\xi,\tau)\widetilde{\sigma}_{l,2,s_1}(\xi),$$

$$\overset{p}{H}_{0,2l}=\xi^{l/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\widetilde{q}_{l,s}(\tau/\sqrt{\xi}),$$
$$\overset{p}{H}_{1,2l}=e^{-\left(4b(0)\xi(c\sqrt{\xi}+\tau)/c^2\right)}\xi^{2l-3/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\sum_{s_1=0}^{2s}F_1(\xi,\tau)\widetilde{\sigma}_{l,1,s_1}(\xi),$$
$$\overset{p}{H}_{2,2}=0,\ \overset{p}{H}_{2,2l}=e^{-\left(4b(0)\xi(c\sqrt{\xi}-\tau)/c^2\right)}\xi^{2l-9/2}\sum_{s=0}^{\infty}\xi^{-3s/2}\sum_{s_1=0}^{2s-2}F_2(\xi,\tau)^{s_1}\widetilde{\sigma}_{l,1,s_1}(\xi).$$

Здесь $F_j(\xi,\tau)=\xi\big(c\sqrt{\xi}-(-1)^j\tau\big)$, а $\widetilde{\sigma}(\xi)$ — линейные комбинации степеней $\xi^{-\widetilde{s}/2}$, $\widetilde{s}=0,1,\ldots$. При этом получившиеся ряды являются ФАР системы (4.2) при $\xi\to+\infty$.

Теорема 6. *Существуют функции $v_{2l}(\xi,\tau)$ и $w_{2l}(\xi,\tau)$ такие, что они являются решениями системы* (4.5), (4.7) *и имеют при $\xi\to+\infty$ асимптотические разложения $\overset{z}{H}_{0,2l}(\xi,\tau)+\overset{z}{H}_{1,2l}(\xi,\tau)+\overset{z}{H}_{2,2l}(\xi,\tau)\big)$ и $\overset{p}{H}_{0,2l}(\xi,\tau)+\overset{p}{H}_{1,2l}(\xi,\tau)+\overset{p}{H}_{2,2l}(\xi,\tau)\big)$ соответственно.*

Доказательство. Поскольку при каждом l рассматриваемая система распадается на два независимых уравнения, и при этом в силу вида области второе уравнение заменой $\tau_1:=-\tau$ переходит в уравнение первого вида в той же области, то существование нужного решения можно получить, следуя доказательству теоремы 3.1 из [2, гл. IV, § 3]. □

По построению внешнее разложение (3.1) согласовано в окрестности точки $M_1 = (0,0)$ с внутренним разложением (4.4) (см., [2, (формула (0.9)]), т. е. при $N_1 \geqslant 1$ и $N_2 \geqslant 1$

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{N_2,\xi,\tau}(\mathcal{A}_{N_1,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{z}) = \mathcal{A}_{N_1,x,y,\eta_1,\eta_2}(\mathcal{A}_{N_2,\xi,\tau} \overset{in}{z}), \\ &\mathcal{A}_{N_2,\xi,\tau}(\mathcal{A}_{N_1,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{p}) = \mathcal{A}_{N_1,x,y,\eta_1,\eta_2}(\mathcal{A}_{N_2,\xi,\tau} \overset{in}{p}), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где $\mathcal{A}_{N,(\cdot)}$ — оператор взятия N-й частичной суммы соответствующего ряда (при этом обе части равенств из (4.8) необходимо привести к одинаковым переменным).

В окрестности точки M_2 аналогично строится второе внутреннее разложение,

$$\overset{in,2}{z} := \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{2l} v_{2,2l}(\xi_2,\tau_2), \quad \overset{in,2}{p} := \sum_{l=1}^{\infty} \mu^{2l} w_{2,2l}(\xi_2,\tau_2), \quad x_2 - x := = \mu^4 \xi_2, \quad y_2 - y := = \mu^2 \tau_2,$$

согласованное с (3.1) в окрестности точки M_2. В силу согласованности рассматриваемых рядов стандартным образом (см., например, доказательство теоремы 1.4 из [2, гл. IV, § 1]) показывается, что в области Ω $|\mathcal{L}_\varepsilon Z_N - \beta P_N - f(x,y)| < K_N \varepsilon^{N_1}$, $|\mathcal{L}^*_\varepsilon P_N - Z_N + z_d| < K_N \varepsilon^{N_1}$, $Z_N| < K \varepsilon^{N_1}$, $|P_N| < K\varepsilon^{N_1}$ на границе Γ и $N_1 \to +\infty$ при $N \to +\infty$. Здесь

$$Z_N := \mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{z} + \mathcal{A}_{N,\xi,\tau} \overset{in}{z} + \mathcal{A}_{N,\xi_2,\tau_2} \overset{in,2}{z} - \mathcal{A}_{N,\xi,\tau}(\mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{z}) - \mathcal{A}_{N,\xi_2,\tau_2}(\mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{z}),$$

$$P_N := \mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{p} + \mathcal{A}_{N,\xi,\tau} \overset{in}{p} + \mathcal{A}_{N,\xi_2,\tau_2} \overset{in,2}{p} - \mathcal{A}_{N,\xi,\tau}(\mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{p}) - \mathcal{A}_{N,\xi_2,\tau_2}(\mathcal{A}_{N,x,y,\eta_1,\eta_2} \overset{out}{p}).$$

Поэтому в силу теоремы 3 получаем, что $\|z_\varepsilon - Z_N\|_C = O(\varepsilon^{N_1-3})$, $\|p_\varepsilon - P_N\|_C = O(\varepsilon^{N_1-3})$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда аналогично доказательству теоремы 1.6 из [2, гл. IV, § 1] получаем справедливость основного результата:

Теорема 7. *Пусть выполнены условия* (2.12)–(2.15).

Тогда ряды $\overset{out}{z}$ *и* $\overset{out}{p}$ *являются равномерным асимптотическим разложением функций* z_ε *и* p_ε *в области* $\varepsilon^{\widetilde{\alpha}} \leqslant x \leqslant x_2 - \varepsilon^{\widetilde{\alpha}}$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$, $0 < \widetilde{\alpha} < 4/3$, *соответственно, а ряды* $\overset{in}{z}$, $\overset{in}{p}$ ($\overset{in,2}{z}$, $\overset{in,2}{p}$) — *равномерным асимптотическим разложением функций* z_ε *и* p_ε *в области* $0 \leqslant x\varepsilon^{\widetilde{\alpha}}$, $(x_2 - \varepsilon^{\widetilde{\alpha}} \leqslant x \leqslant x_2)$, $\widetilde{\alpha} > 1$, $\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)$ *соответственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимтотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 р.
3. **Данилин А.Р.** Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 10. С. 3–12.
4. **Данилин А.Р.** Асимптотика решений системы сингулярных эллиптических уравнений в прямоугольнике // Мат. сб., 2003. Т. 194, № 1. С. 31–60.
5. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Математика, естествознание, технические науки. 1992. № 2. С. 70–74.
6. **Капустян В.Е.** Оптимальные бисингулярные эллиптические задачи с ограниченным управлением // Докл. АН Украины. 1993. № 6. С. 81–85.
7. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 87-–100.
8. **Lax P. D., Milgram A. N.** Parabolic equations. Contributions to theory of partial differential equations // Ann. Math. Studies. 1954. Vol. 33. P. 167–190.
9. **Гилбарг Д., Трудингер Н.** Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М: Наука, 1989. 464 с.

10. **Данилин А.Р., Зорин А.Р.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 4. С. 449-452.
11. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М: Наука, 1964. 565 с.
12. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. 3-е изд. перераб. и доп. М: Наука, 1988. 336 с.

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
профессор
Института математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета
e-mail: dar@imm.uran.ru

Поступила 30.06.2016

REFERENCES

1. Lions J.-L. *Contôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* Paris, Dunod et Gauthier-Villars, 1968 (in French).
2. Il'in A.M. *Soglasovanie asimtoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach* [Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems]. Providence: Americ. Math. Soc., 1992, Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 102, 281 p.
3. Danilin A.R. Approximation of a singularly perturbed elliptic problem of optimal control. *Sbornik: Mathematics*, 2000, vol. 191, no. 10, pp. 1421–1431.doi: 10.1070/SM2000v191n10ABEH000512 .
4. Danilin A.R. Asymptotic behaviour of solutions of a singular elliptic system in a rectangle. *Sbornik: Mathematics*, 2003, vol. 194, no. 1, pp. 31–61. doi: 10.1070/SM2003v194n01ABEH000705 .
5. Kapustyan V.E. Asymptotics of bounded controls in optimal elliptic problems. *Dokl. Akad. Nauk Ukr., Ser. Mat. Estestvoznanie. Tekhnich. Nauki*, 1992, no. 2, pp. 70–74 (in Russian).
6. Kapustyan V.E. Optimal bisingular elliptic problems with bounded control. *Dokl. Akad. Nauk Ukr., Ser. Mat. Estestvoznanie. Tekhnich. Nauki*, 1993, no. 6, pp. 81–85 (in Russian).
7. Danilin A.R. Optimal boundary control in a small concave domain. *Ufimskii Mat. Zhurn*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).
8. Lax P.D., Milgram A.N. Parabolic equations. Contributions to theory of partial differential equations. *Ann. Math. Studies*, 1954, vol. 33, pp. 167–190.
9. Gilbarg D., Trudinger N. *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1983, 518 p. doi: 10.1007/978-3-642-61798-0 .
10. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotic expansion of solutions to optimal boundary control problems. *Dokl. Math.*, 2011, vol. 84, no. 2, pp. 665-668. doi:10.1134/S106456241106024X .
11. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type.* Providence: Americ. Math. Soc., 1968, Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 23, 648 p. Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa.* Moscow: Nauka, 1967, 736 p.
12. Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike* [Some applications of functional analysis in mathematical physics], 3rd ed., Providence: Americ. Math. Soc., Ser. Trans. Math. Monogr., vol. 10, 1991, 286 p.

A. R. Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: dar@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА РАЗРЕШИМОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПРОСТЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ И НЕВЫПУКЛЫМ ТЕРМИНАЛЬНЫМ МНОЖЕСТВОМ[1]

Л. В. Камнева, В. С. Пацко

Рассматриваются антагонистические дифференциальные игры на плоскости с простыми движениями, фиксированным моментом окончания и многоугольным терминальным множеством. Геометрическое ограничение на управление каждого из игроков является выпуклым многоугольником или отрезком. Для выпуклого терминального множества известна явная формула, описывающая множество разрешимости задачи (множество уровня функции цены, максимальный u-стабильный мост, множество выживаемости). Соответствующий этой формуле алгоритм опирается на операции алгебраической суммы и геометрической разности (разности Минковского). В статье предлагается алгоритм точного построения множества разрешимости для случая многоугольного невыпуклого терминального множества. При этом не требуется дополнительного разбиения рассматриваемого промежутка времени и восстановления промежуточных множеств разрешимости в дополнительные моменты. Алгоритм заключается в формировании и последующей конечной рекурсивной обработке списка полупространств в трехмерном пространстве времени и фазовых координат. Список строится на основе многоугольного терминального множества с использованием нормалей многоугольных ограничений на управления игроков.

Ключевые слова: дифференциальные игры с простыми движениями на плоскости, множество разрешимости, попятная процедура.

L. V. Kamneva, V. S. Patsko. Construction of the solvability set in differential games with simple motions and nonconvex terminal set.

We consider planar zero-sum differential games with simple motions, fixed terminal time, and polygonal terminal set. The geometric constraint on the control of each player is a convex polygonal set or a straight line segment. In the case of a convex terminal set, an explicit formula is known for the solvability set (the level set of the value function, maximal u-stable bridge, viability set). The algorithm corresponding to this formula is based on the set operations of algebraic sum and geometric difference (the Minkowski difference). We propose an algorithm for the exact construction of the solvability set in the case of a nonconvex polygonal terminal set. The algorithm does not involve the additional partition of the time interval and the recovery of intermediate solvability sets at additional instants. A list of half-spaces in the three-dimensional space of time and state coordinates is formed and processed by a finite recursion. The list is based on the polygonal terminal set with the use of normals of the polygonal constraints on the controls of the players.

Keywords: differential games with simple motions in the plane, solvability set, backward procedure.

MSC: 49N70, 49M25, 93B03, 49L25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-143-157

Введение

Р. Айзекс в книге [1] объектами с простыми движениями назвал объекты, поведение которых описывается соотношением

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q.$$

Здесь x — фазовый вектор, u — управление первого игрока, v — второго, P и Q — множества, ограничивающие выбор управлений. Таким образом, в правой части нет фазовой переменной, вектор скорости $\dot{x}$ изменяется мгновенно в зависимости от текущего выбора управлений u, v.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-07909) и Программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления".

При рассмотрении содержательных задач конфликтного управления указанное описание динамики применяют тогда, когда нужно ответить на какие-либо главные вопросы конфликтного взаимодействия, не вдаваясь в детали, связанные с реальным инерционным поведением объектов. Такое описание используют и при численном решении дифференциальных игр общего вида. Например, пусть $x(t_*)$ — разностное фазовое положение двух движущихся объектов. Учитывая положение каждого их них, можно в качестве множеств P и Q взять "вектограммы" [1] их скоростей в момент t_* с должным знаком и на основе этого исследовать возможности локального изменения разностного вектора.

Еще более целенаправленным является использование систем с простыми движениями при численном решении (см., например, [2]) линейных дифференциальных игр вида

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)u + C(t)v, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}$$

с фиксированным моментом окончания T и заданной функцией платы φ, подсчитываемой в момент окончания. Пусть функция φ зависит от некоторых выделенных m координат вектора z. Тогда, рассматривая матрицу $Z_m(T,t)$, составленную из m соответствующих строк фундаментальной матрицы Коши линейной системы, при помощи преобразования $x(t) = Z_m(T,t)z(t)$ переходим к системе

$$\dot{x} = Z_m(T,t)B(t)u + Z_m(T,t)C(t)v, \quad u \in \mathcal{P}, \quad v \in \mathcal{Q}$$

без фазовой переменной в правой части. Сохраняя прежний момент окончания T и функцию платы φ, получаем дифференциальную игру, эквивалентную (с точки зрения цены игры) исходной линейной дифференциальной игре [3, с. 354; 4, с. 89–91]. Пусть M_c — множество уровня Лебега функции платы φ в координатах x. Пятимся по времени от множества M_c, "замораживая" на каждом шаге $[t_i, t_{i+1}]$ попятной процедуры коэффициенты динамики. Получаем рекуррентную процедуру приближенного построения множеств уровня $W_c(t_i)$ $(W_c(T) = M_c)$ функции цены. При этом на каждом шаге попятной процедуры имеем дело с системой с простыми движениями, в которой вместо P и Q используем множества

$$P_i = Z_m(T,t_i)B(t_i)\mathcal{P}, \quad Q_i = Z_m(T,t_i)C(t_i)\mathcal{Q}.$$

Естественно, мы заинтересованы в "хорошем" алгоритме перехода от множества $W_c(t_{i+1})$ к множеству $W_c(t_i)$. Сегодняшнее состояние теории дифференциальных игр говорит о том, что для получения хорошего результата при рассмотрении на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ динамики

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P_i, \quad v \in Q_i$$

следует разбить этот промежуток на достаточно большое количество частей с шагом h моментами

$$t_i^N = t_{i+1}, \quad t_i^{N-1} = t_i^N - h, \ldots, t_i^0 = t_i$$

и для каждого из дополнительных промежутков $[t_i^j, t_i^{j+1}]$ приближенно построить множество $W_c(t_i^j)$ на основе множества $W_c(t_i^{j+1})$.

Основная цель данной статьи — показать, что при размерности фазового вектора x, равной 2, этого делать не надо. Мы описываем алгоритм, который дает *точное* значение множества разрешимости $W_c(t_i)$ на основе множества $W_c(t_{i+1})$, взятого в момент t_{i+1}, при закрепленной на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$ динамике с простыми движениями без какого-либо дополнительного разбиения промежутка $[t_i, t_{i+1}]$.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 дается постановка задачи о точном вычислении множества разрешимости для конфликтно-управляемой системы с простыми движениями в случае $x \in \mathbb{R}^2$ в проблеме наведения на заданное многоугольное множество M в фиксированный момент окончания ϑ. Случай выпуклого многоугольника M разбирается в разд. 2. Результат для выпуклого множества M является известным [5]. В разд. 3 анализируется понятие полупроницаемой трубки в пространстве $\{t, x\}$. Свойством полупроницаемости должна обладать правильно построенная трубка, сечением которой в момент $t = 0$ является множество разрешимости. В разд. 4 вводятся понятия выпуклой и вогнутой последовательности полупространств, а также рассматривается числовая характеристика для упорядоченной тройки полупространств. Раздел 5 описывает построения полупроницаемых поверхностей локально в окрестности точки выпуклости или вогнутости терминального множества. В разд. 6 приводится способ вычисления множества разрешимости при произвольном многоугольнике M, использующий некоторые специальные моменты промежуточного разбиения и рекуррентные построения промежуточных множеств. Затем мы отказываемся от построения промежуточных множеств и излагаем алгоритм точного построения искомого множества разрешимости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему с простыми движениями [1] на плоскости:

$$\dot{x} = u + v, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \vartheta > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^2$ — фазовый вектор, u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков, каждое из множеств P и Q — выпуклый замкнутый многоугольник или отрезок.

Пусть задан простой многоугольник $M \subset \mathbb{R}^2$, т.е. его граница — замкнутая ломаная без самопересечений. Дифференциальная игра образована задачей M-сближения для первого игрока и задачей M'-сближения для второго игрока, $M' = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus M}$.

Постановка задачи M-сближения для первого игрока на отрезке $[0, \vartheta]$ изложена в [6, § 13.1, с. 150–152] и состоит в следующем. Из начальной позиции $(0, x_0)$ первый игрок стремится гарантировать выполнение условия $x(\vartheta) \in M$. Предполагается, что игрок знает текущую позицию $(t, x(t))$ и формирует управление $u(t, x(t)) \in P$ по принципу обратной связи. Для решения задачи M-сближения используется понятие u-стабильного моста.

Многозначное отображение $[0, \vartheta] \ni t \mapsto W(t) \subset \mathbb{R}^2$ определяет *u-стабильный мост* (график отображения) $W = \{(t, x) \colon t \in [0, \vartheta],\ x \in W(t)\}$ в задаче M-сближения на отрезке $[0, \vartheta]$, если $W(\vartheta) \subset M$, множество W замкнуто в $[0, \vartheta] \times \mathbb{R}^2$ и при любом $v \in Q$ слабо инвариантно относительно дифференциального включения

$$\dot{x} \in P + v. \tag{1.2}$$

Условие слабой инвариантности означает, что для любой точки $(t_0, x_0) \in W$ существует движение $x(\cdot) \colon [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^2$, которое удовлетворяет дифференциальному включению (1.2), начальному условию $x(t_0) = x_0$ и условию выживаемости: $x(t) \in W(t)$ для всех $t \in [t_0, \vartheta]$. В теории дифференциальных игр это свойство (в эквивалентной формулировке) называется условием u-стабильности.

Аналогично формулируется задача M'-сближения для второго игрока и вводится понятие v-стабильного моста в задаче M'-сближения.

Первоначальные (эквивалентные) понятия стабильных мостов были введены в [7, с. 52–54; 4, с. 53, 58]. Символом W_0 обозначим максимальный (по включению) u-стабильный мост, заданный на отрезке $[0, \vartheta]$, в задаче M-сближения в момент ϑ.

Множество $W_0(0)$ будем называть *множеством разрешимости* задачи M-сближения в момент ϑ на интервале $[0, \vartheta]$.

Ставится задача разработки алгоритма, сопоставляющего множеству $M = W_0(\vartheta)$ множество разрешимости $W_0(0)$ и не требующего какого-либо дополнительного разбиения промежутка $[0, \vartheta]$.

З а м е ч а н и е 1. Известно [7, § 16], что множество W является максимальным u-стабильным мостом в задаче M-сближения тогда и только тогда, когда W есть u-стабильный мост в задаче M-сближения и множество $W' = \{(t,x)\colon t \in [0,\vartheta],\ x \in \overline{\mathbb{R}^2 \setminus W(t)}\}$ есть v-стабильный мост в задаче M'-сближения. Стало быть, построив максимальный u-стабильный мост W_0, получаем как решение задачи M-сближения, так и решение задачи M'-сближения.

З а м е ч а н и е 2. Максимальный u-стабильный мост является замкнутым множеством [7, с. 67, лемма 16.1; 8, с. 92].

Непосредственно из замкнутости и свойства u-стабильности множества W_0 получаем справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $W_0 \subset [0,\vartheta]\times\mathbb{R}^2$ — максимальный u-стабильный мост в задаче M-сближения и $t_* \in [0,\vartheta)$. Тогда*

$$W_0(t_*) = \bigl\{x_* \in \mathbb{R}^2\colon \exists (t_n,x_n) \to (t_*,x_*),\, n\to\infty,\ t_n > t_*,\ x_n \in W_0(t_n)\bigr\}.$$

2. Случай выпуклого терминального множества

A) Пусть терминальное множество M является выпуклым многоугольником. В выпуклом случае известна [5] формула

$$W_0(t) = \Bigl(M + \bigl(-(\vartheta - t)P\bigr)\Bigr) \stackrel{*}{-} (\vartheta - t)Q \ =: T_{\vartheta-t}(M), \tag{2.1}$$

описывающая сечения $W_0(t)$ максимального u-стабильного моста W_0. Здесь используются операции алгебраической суммы и геометрической разности (разности Минковского) [9; 10]:

$$A + B = \{a+b\colon a \in A,\ b \in B\}, \quad A \stackrel{*}{-} B = \{d\colon d + B \subset A\} = \bigcap_{b\in B}(A - b).$$

Правую часть равенства (2.1) будем рассматривать как определение оператора T_τ, действующего на множество M при $\tau = \vartheta - t$.

Пусть Π_η — полуплоскость в $\mathbb{R}^2$ с единичным вектором внешней нормали $\eta \in \mathbb{R}^2$. Тогда непосредственно из определения оператора T_τ имеем

$$T_\tau(\Pi_\eta) = \Pi_\eta - \tau\bigl(u_0(\eta) + v_0(\eta)\bigr), \quad \tau > 0, \tag{2.2}$$

где $u_0(\eta) \in \operatorname{Arg}\min\limits_{u\in P}\langle u,\eta\rangle,\quad v_0(\eta) \in \operatorname{Arg}\max\limits_{v\in Q}\langle v,\eta\rangle$.

Будем использовать обозначение ∂A для границы множества A.

Нетрудно проверить, что для произвольной полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ множество

$$\{(t,x)\colon t \in [0,\vartheta],\ x \in \partial T_{\vartheta-t}(\Pi)\}$$

является плоским в пространстве $\mathbb{R}^3 = \{t,x\}$. Следовательно, любой полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ соответствует единственное *полупространство* $\mathcal{T}_\vartheta(\Pi)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, t-сечение которого для любого $t \in [0,\vartheta]$ совпадает с множеством $T_{\vartheta-t}(\Pi)$.

Введем обозначение $\Pi_\eta[A]$ для *опорной* к множеству A полуплоскости с вектором внешней нормали $\eta \in \mathbb{R}^2$:

$$\Pi_\eta[A] = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \langle x,\eta\rangle \le \rho(\eta;A) < +\infty\}.$$

Здесь $\rho(\eta;A) = \sup\{\langle a,\eta\rangle\colon a \in A\}$ — значение опорной функции множества A на векторе η.

Выпуклый многоугольник M представим в виде

$$M = \bigcap\Bigl\{\Pi_\eta[M]\colon \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P)\Bigr\}, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{N}(M)$ и $\mathcal{N}(-P)$ — множества единичных внешних нормалей к ребрам многоугольников M и $-P$ соответственно. Если P — отрезок, то $\mathcal{N}(-P) = \mathcal{N}(P) = \{\nu, -\nu\}$, где вектор ν ортогонален P.

Заметим, что полуплоскости $\Pi_\eta[M]$, соответствующие нормалям $\eta \in \mathcal{N}(-P)$, являются *несущественными* для пересечения (2.3), т.е. могут быть удалены из правой части (2.3) без изменения результата пересечения. Однако такие полупространства участвуют, вообще говоря, в построении максимального u-стабильного моста W_0. Поэтому мы включаем их в описание многоугольника M.

Для выпуклого многоугольника M и $t \in [0, \vartheta]$ справедливо равенство (см., например, [11])

$$W_0(t) = T_{\vartheta - t}(M) = \bigcap \Big\{ T_{\vartheta - t}(\Pi_\eta[M]) \colon \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P) \Big\}. \tag{2.4}$$

Из равенства (2.4) и определения оператора $\mathcal{T}_\vartheta(\cdot)$ получаем следующую лемму.

Лемма 2. *Для выпуклого множества M выполнено равенство*

$$W_0 = \Theta \cap \Big(\bigcap \big\{ \mathcal{T}_\vartheta(\Pi_\eta[M]) \colon \eta \in \mathcal{N}(M) \cup \mathcal{N}(-P) \big\} \Big), \tag{2.5}$$

где $\Theta := \{(t, x) \colon t \in [0, \vartheta]\}$.

Таким образом, мост W_0 представим в пространстве $\mathbb{R}^3 = \{t, x\}$ как пересечение полупространств, ограниченных плоскостями.

Б) Пусть выпуклым является множество $M' = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus M}$. В этом случае, изменяя роли игроков, приходим к уже рассмотренному выпуклому случаю.

Аналогично (2.3) имеем $M' = \bigcap \big\{ \Pi_\eta[M'] \colon \eta \in \mathcal{N}(M') \cup \mathcal{N}(-Q) \big\}$. Для любой полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ определяем *полупространство* $\mathcal{T}^*_\vartheta(\Pi)$ в пространстве $\mathbb{R}^3$, t-сечение которого для любого $t \in [0, \vartheta]$ совпадает с множеством $T^*_{\vartheta - t}(\Pi)$. Здесь оператор $A \to T^*_\tau(A)$ определяется равенством

$$T^*_\tau(A) = \Big(A + \big(-\tau Q \big) \Big) \overset{*}{-} \tau P, \quad \tau > 0.$$

Следовательно, справедлива следующая лемма, аналогичная лемме 2.

Лемма 3. *Для выпуклого множества $M' = \overline{\mathbb{R}^2 \setminus M}$ выполнено равенство*

$$\Theta \cap (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus W_0}) = \Theta \cap \Big(\bigcap \big\{ \mathcal{T}^*_\vartheta(\Pi_\eta[M']) \colon \eta \in \mathcal{N}(M') \cup \mathcal{N}(-Q) \big\} \Big). \tag{2.6}$$

Опираясь на (2.2) и на аналогичное представление для оператора T^*_τ, получаем равенство

$$\overline{\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{T}_\vartheta(\Pi_\eta)} = \mathcal{T}^*_\vartheta(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Pi_\eta}),$$

которое позволяет использовать в дальнейших построениях только операторы $T_\tau(\cdot)$ и $\mathcal{T}_\vartheta(\cdot)$.

3. Полупроницаемые трубки и поверхности

Простым многогранником в $\mathbb{R}^3$ назовем односвязное множество, ограниченное конечным числом плоских многоугольников (граней), соединенных таким образом, что каждая сторона любого многоугольника является стороной ровно одного другого многоугольника.

Множество $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ называется *многогранной трубкой на отрезке* $[t_1, t_2]$ $(t_1 < t_2)$, если найдется такой простой многогранник $D \subset [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^2$, что справедливо представление

$$\Gamma = \big\{ (t, x) \in \partial D \colon t \in [t_1, t_2],\ x \in \partial D(t) \big\},$$

где $\partial D(t)$ — граница множества $D(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon (t,x) \in D\} \neq \varnothing$, $t \in [t_1, t_2]$. Грани (ребра, вершины) многогранника D, принадлежащие Γ, будем называть *гранями* (*ребрами*, *вершинами*) многогранной трубки Γ.

Таким образом, сечения $\Gamma(t)$ многогранной трубки Γ при $t \in [t_1, t_2]$ являются замкнутыми ломаными без самопересечений.

З а м е ч а н и е 3. Из леммы 2 следует, что в случае выпуклого многоугольника M боковая поверхность

$$\Gamma_0 = \{(t,x) \colon t \in [0,\vartheta],\ x \in \partial W_0(t)\}$$

максимального u-стабильного моста W_0 является многогранной трубкой на отрезке $[t_1, \vartheta]$, где $t_1 > \min\{t \in [0,\vartheta] \colon W_0(t) \neq \varnothing\}$.

В теории дифференциальных игр *полупроницаемой* [1] называют поверхность, обладающую следующим свойством: первый игрок способен предотвратить пересечение этой поверхности траекторией системы в одном направлении, а второй игрок — в противоположном.

Дадим формальное определение свойства полупроницаемости для произвольной многогранной трубки.

Пусть $O(x,\varepsilon)$ — открытый круг в $\mathbb{R}^2$ радиусом $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^2$;

$$C_\varepsilon^+(z_0) = \bigl\{(t,x) \colon t \in [t_0, t_0 + \varepsilon],\ x \in O(x_0,\varepsilon)\bigr\}$$

— цилиндрическая положительная ε-полуокрестность точки $z_0 = (x_0, t_0)$.

Для $\varepsilon > 0$ определим такое значение $\Delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}^2$ любая траектория системы (1.1) с начальной точкой x не покидает множество $O(x,\varepsilon)$ на отрезке времени $[0, \Delta(\varepsilon)]$.

О п р е д е л е н и е. Трубку Γ назовем *полупроницаемой* на отрезке $[t_1, t_2]$, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $z_0 = (t_0, x_0) \in \Gamma$, $\varepsilon_* = \min\{\Delta(\varepsilon),\ t_2 - t_0\}$ и представления

$$C_\varepsilon^+(z_0) = G^+ \cup S \cup G^-, \quad S \subset \Gamma, \quad G^+ \cap G^- = \varnothing, \quad G^+ \cap \Gamma = \varnothing, \quad G^- \cap \Gamma = \varnothing,$$

выполнены свойства:

1) для любого $v \in Q$ существует такое измеримое программное управление $u(t) \in P$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u(t) + v$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_*]$ выполнено включение $(t, x(t)) \in G^+ \cup S$;

2) для любого $u \in P$ существует такое измеримое программное управление $v(t) \in Q$, что для решения $x(t)$ уравнения $\dot{x}(t) = u + v(t)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon_*]$ выполнено включение $(t, x(t)) \in S \cup G^-$.

Учитывая определение, будем говорить о *стороне* $(+)$, примыкающей к G^+ полупроницаемой трубки и *стороне* $(-)$, примыкающей к G^-. Если сторона $(+)$ внутренняя относительно трубки, а сторона $(-)$ внешняя, то полупроницаемая трубка имеет *тип* $\pm$.

З а м е ч а н и е 4. Если боковая поверхность Γ_0 множества W_0 является многогранной трубкой, то она обладает свойством полупроницаемости.

Из определения полупроницаемости и замечаний $1, 2, 4$ получаем следующие свойства.

а) Если Γ — полупроницаемая трубка типа $\pm$ на отрезке $[0,\vartheta]$ и $\Gamma(\vartheta) = \partial M$, то Γ — боковая поверхность максимального u-стабильного моста W_0 на отрезке $[0,\vartheta]$ в задаче M-сближения.

б) Если Γ_1 — полупроницаемая трубка типа $\pm$ на отрезке $[t_1, t_2]$, Γ_2 — полупроницаемая трубка типа $\pm$ на отрезке $[t_2, t_3]$ и $\Gamma_1(t_1) = \Gamma_2(t_1)$, то $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ — полупроницаемая трубка типа $\pm$ на отрезке $[t_1, t_3]$.

Эти свойства позволяют свести построение максимального u-стабильного моста от множества M на отрезке $[0,\vartheta]$ к последовательному построению полупроницаемых трубок типа $\pm$ на конечном числе смежных отрезков.

Понятие полупроницаемости без изменений распространяется на многогранные неограниченные поверхности в $\mathbb{R}^3$. Заметим, что для любой полуплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^2$ граница полупространства $\mathcal{T}_\vartheta(\Pi)$ является полупроницаемой поверхностью.

4. Упорядоченные тройки полупространств в $\mathbb{R}^3$

Пару различных полуплоскостей Π_1 и Π_2 будем называть *выпуклой* (*вогнутой*), если $\Pi_1 \cap \Pi_2$ — угол на плоскости, граница которого в положительном (отрицательном) направлении обходится сначала по прямой $\partial\Pi_1$ до точки пересечения с $\partial\Pi_2$, а затем по прямой $\partial\Pi_2$; *сонаправленной* — если $\Pi_1 \subset \Pi_2$ или $\Pi_2 \subset \Pi_1$. Положительным (отрицательным) направлением обхода границы множества считаем направление, при котором множество находится слева (справа).

Для упорядоченной пары полупространств в $\mathbb{R}^3 = \{(t, x)\}$, не перпендикулярных оси времени t, также определены свойства выпуклости, вогнутости и сонаправленности, поскольку при $t = \mathrm{const}$ получаем пару различных полуплоскостей в $\mathbb{R}^2$, которая сохраняет одно из свойств выпуклости, вогнутости или сонаправленности для всех $t \in \mathbb{R}$.

Упорядоченный набор $L_1, L_2, \ldots, L_m$ полупространств будем называть *выпуклым* (*вогнутым*), если любая пара (L_i, L_{i+1}), $j = \overline{1, m-1}$, является выпуклой (вогнутой).

Полуплоскость $L_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$, будем называть *несущественной* для пересечения

$$L_1(t) \cap L_2(t) \cap \ldots \cap L_m(t),$$

если ее можно удалить без изменения результата пересечения, иначе полуплоскость $L_i(t)$ — *существенная*.

Отдельно рассмотрим упорядоченные наборы из трех полупространств — тройки полупространств в $\mathbb{R}^3 = \{t, x\}$.

Обозначим через Λ множество таких троек $\lambda = (L_a, L, L_b)$ полупространств, что границы этих полупространств (плоскости в $\mathbb{R}^3$) не перпендикулярны оси времени t и

$$\partial L_a \cap \partial L = l_a, \quad \partial L \cap \partial L_b = l_b,$$

где l_a, l_b — прямые в $\mathbb{R}^3$, $l_a \neq l_b$. Пусть $L(t)$ — сечение полупространства L плоскостью $t = \mathrm{const}$.

Дадим определение *веса* $\mu_t(\lambda)$ *тройки* $\lambda = (L_a, L, L_b) \in \Lambda$ относительно момента $t \in \mathbb{R}$.

В случае, если прямые l_a и l_b параллельны, положим $\mu_t(\lambda) = +\infty$.

Поскольку $l_a \neq l_b$, то рассмотрим оставшийся случай пересечения прямых в одной точке. Обозначим $l_a \cap l_b = \{(t^*_\lambda, x^*_\lambda)\}$.

Определим вспомогательные двугранные углы C_a и C_b в $\mathbb{R}^3$. Если пара L_a, L выпукла, то $C_a = L_a \cap L$, иначе $C_a = (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_a}) \cap (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L})$. Если пара L, L_b выпукла, то $C_b = L_b \cap L$, иначе $C_b = (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_b}) \cap (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L})$. Пусть

$$\gamma_\lambda(t) = C_a(t) \cap C_b(t) \cap \partial L(t).$$

Заметим, что $\gamma_\lambda(t^*_\lambda) = \{x^*_\lambda\}$ и либо $\gamma_\lambda(t)$ — отрезок при $t < t^*_\lambda$ и пустое множество при $t > t^*_\lambda$, либо $\gamma_\lambda(t)$ — отрезок при $t > t^*_\lambda$ и пустое множество при $t < t^*_\lambda$. В первом случае положим $\mu_t(\lambda) = +\infty$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Во втором случае условимся, что $\mu_t(\lambda) = t - t^*_\lambda$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Через Λ^0_t обозначим такие тройки $\lambda = (L_a, L, L_b) \in \Lambda$, что границы полуплоскостей $L_a(t)$, $L(t)$, $L_b(t)$ проходят через одну точку.

Лемма 4. *Пусть $t_1 \in \mathbb{R}$ и $\lambda = (L_a, L, L_b) \in \Lambda^0_{t_1}$. Тогда $\mu_{t_1}(\lambda) \in \{0, +\infty\}$. В случае выпуклой тройки λ равенство $\mu_t(\lambda) = +\infty$ равносильно существенности полуплоскости $L(t)$ в пересечении $L_a(t) \cap L(t) \cap L_b(t)$ для всех $t < t_1$.*

Доказательство. Если $\lambda \in \Lambda^0_{t_1}$, то $t_1 = t^*_\lambda$. Из определения веса тройки получаем, что $\mu_{t_1}(\lambda) \in \{0, +\infty\}$.

Для выпуклой тройки λ при определении веса имеем

$$C_a \cap C_b = L_a \cap L \cap L_b, \quad \gamma_\lambda(t) = L_a(t) \cap L_b(t) \cap \partial L(t).$$

Равенство $\mu_t(\lambda) = +\infty$ равносильно тому, что $\gamma_\lambda(t)$ — отрезок при $t < t^*_\lambda = t_1$, т. е. полуплоскость $L(t)$ существенна в пересечении $L_a(t) \cap L(t) \cap L_b(t)$ для всех $t < t_1$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $t_1 < t_2$, $\lambda_1 = (L_a, L_1, L_b) \in \Lambda^0_{t_1}$ — *выпуклый набор,* L_a, L_b — *выпуклая пара,* $\lambda_2 = (L_a, L_2, L_b) \in \Lambda^0_{t_2}$, *полупространства* L_1 *и* L_2 *сонаправлены. Тогда* $\mu_{t_1}(\lambda_1) = \mu_{t_2}(\lambda_2)$.

Доказательство. Поскольку $\lambda_1 \in \Lambda^0_{t_1}$ и $\lambda_2 \in \Lambda^0_{t_2}$, то $t_1 = t^*_{\lambda_1}$, $t_2 = t^*_{\lambda_2}$. Из выпуклости троек λ_1, λ_2 имеем

$$\gamma_{\lambda_1}(t) = L_a(t) \cap L_b(t) \cap \partial L_1(t), \quad \gamma_{\lambda_2}(t) = L_a(t) \cap L_b(t) \cap \partial L_2(t).$$

Предположим, что $\gamma_{\lambda_1}(t)$ — отрезок при $t > t^*_{\lambda_1}$. Тогда $\mu_{t_1}(\lambda_1) = t_1 - t^*_{\lambda_1} = 0$. Поскольку полупространства L_1 и L_2 сонаправлены и L_a, L_b — выпуклая пара, то $\gamma_{\lambda_2}(t)$ — отрезок при $t > t^*_{\lambda_2}$. Таким образом, $\mu_{t_2}(\lambda_2) = t_2 - t^*_{\lambda_2} = 0$. Случай пустого множества $\gamma_{\lambda_1}(t)$ при $t > t^*_{\lambda_1}$ рассматривается аналогично. Лемма доказана.

5. Формирование наборов дополнительных полупространств

Заметим, что в окрестности вершины выпуклости (вогнутости) множества M максимальный u-стабильный мост будет локально описываться формулой (2.5) (формулой (2.6)), примененной к вспомогательному выпуклому множеству (множеству с выпуклым дополнением), которое в окрестности рассматриваемой вершины совпадает с множеством M. Исходя из этого, для каждой выпуклой (вогнутой) пары последовательных полупространств L_a, L_b, соответствующих углу выпуклости (вогнутости) множества M, определим дополнительный выпуклый (вогнутый) набор упорядоченных полупространств $I_\vartheta = I_\vartheta(L_a, L_b)$, соответствующих некоторым нормалям из $\mathcal{N}(-P)$ (из $\mathcal{N}(-Q)$).

Дадим определение набора $I_\vartheta = I_\vartheta(L_a, L_b)$ для произвольной выпуклой пары полупространств L_a, L_b, не связанных с множеством M. Пусть η_a, η_b — единичные внешние нормали полуплоскостей $L_a(\vartheta)$, $L_b(\vartheta)$ соответственно, $A = L_a(\vartheta) \cap L_b(\vartheta)$. Рассмотрим набор

$$\mathcal{A} = \bigl\{\Pi_\eta[A] \colon \eta \in \mathcal{N}(-P) \setminus \{\eta_a, \eta_b\}, \quad \rho(\eta; A) < +\infty\bigr\} \tag{5.1}$$

полуплоскостей, опорных к углу A. Если $\mathcal{A} = \varnothing$, то положим $I_\vartheta(L_a, L_b) = \varnothing$. Иначе введем непустой набор полупространств

$$I_* = \{\mathcal{T}_\vartheta(\Pi) \colon \Pi \in \mathcal{A}\} \tag{5.2}$$

и рассмотрим пересечение полуплоскостей

$$L_a(t) \cap L_b(t) \cap \{L(t) \colon L \in I_*\}, \quad t < \vartheta. \tag{5.3}$$

Определим набор $I_\vartheta(L_a, L_b)$ как набор тех полупространств из I_*, сечения которых существенны для пересечения (5.3). Если в наборе $I_\vartheta(L_a, L_b)$ более одного полупространства, то упорядочим его так, чтобы он был выпуклым.

Опишем процедуру формирования набора $I_\vartheta(L_a, L_b)$ с помощью индукции по количеству элементов множества I_*.

а) Рассмотрим случай, когда множество I_* одноэлементно, т. е. $I_* = \{L_1\}$. Пусть $\lambda_1 = (L_a, L_1, L_b)$. По лемме 4 имеем $\mu_\vartheta(\lambda_1) \in \{0, +\infty\}$.

Если $\mu_\vartheta(\lambda_1) = +\infty$, то по лемме 4 полуплоскость $L_1(t)$ является существенной в (5.3). Поэтому полагаем $I_\vartheta(L_a, L_b) = I_*$. Если $\mu_\vartheta(\lambda_1) = 0$, то полупространство L_1 является несущественным в (5.3) и $I_\vartheta(L_a, L_b) = \varnothing$.

б) Для наглядности рассмотрим еще случай двуэлементного множества $I_* = \{L_1, L_2\}$. Тогда набор $I_{ab} = \{L_a, L_1, L_2, L_b\}$ также является выпуклым.

Положим $\lambda_1 = (L_a, L_1, L_2)$, $\lambda_2 = (L_1, L_2, L_b)$. Если $\mu_\vartheta(\lambda_1) = +\infty$ и $\mu_\vartheta(\lambda_2) = +\infty$, то полуплоскости $L_1(t)$ и $L_2(t)$ являются существенными в (5.3). Поэтому примем $I_\vartheta(L_a, L_b) = I_*$.

Если $\mu_\vartheta(\lambda_1) = 0$, то полуплоскость $L_1(t)$ является несущественной для пересечения

$$L_a(t) \cap L_1(t) \cap L_2(t), \quad t < \vartheta,$$

а значит и для пересечения (5.3). Тогда осталось рассмотреть полуплоскость $L_2(t)$ на существенность в (5.3).

Пусть $\lambda_3 = (L_a, L_2, L_b)$. Аналогично случаю а), полагаем $I_\vartheta(L_a, L_b) = \{L_2\}$ при $\mu_\vartheta(\lambda_3) = +\infty$ и $I_\vartheta(L_a, L_b) = \varnothing$ при $\mu_\vartheta(\lambda_3) = 0$.

в) Предположим, что есть правило обработки набора I_*^k из k полупространств. Опишем правило обработки $(k+1)$-элементного выпуклого набора

$$I_* = \{L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}\}.$$

Пусть

$$I_{ab} = \{L_a, L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}, L_b\}.$$

Набор I_{ab} также является выпуклым.

Если для любой тройки λ последовательных полупространств из I_{ab} имеем $\mu_\vartheta(\lambda) = +\infty$, то сечения всех полупространств из I_* являются существенными в (5.3). Поэтому полагаем $I_\vartheta(L_a, L_b) = I_*$.

Если нашлась тройка λ_0 последовательных полупространств из набора I_{ab}, для которой $\mu_\vartheta(\lambda_0) = 0$, то формируется набор

$$I_*^k = \{L_1, L_2, \ldots, L_{i-1}, L_{i+1}, \ldots, L_{k+1}\}$$

из k элементов, где L_i — среднее полупространство в тройке λ_0. Набор I_*^k может быть обработан по предположению индукции.

Лемма 6. *Пусть пара L_a, L_b полупространств выпукла. Тогда граница ∂K пересечения*

$$K(L_a, L_b) = L_a \cap L_b \cap \{L \colon L \in I_\vartheta(L_a, L_b)\} \tag{5.4}$$

является полупроницаемой поверхностью на отрезке $[0, \vartheta]$ и множество $K(L_a, L_b)$ находится со стороны $(+)$ поверхности ∂K.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим квадрат с вершинами в точках $(\pm R, \pm R)$, $R > 0$:

$$\Omega_R = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \colon |x_1| \le R,\ |x_2| \le R\}.$$

Найдется такое $R > 0$, что пересечение $M^R = L_a(\vartheta) \cap L_b(\vartheta) \cap \Omega_R$ — выпуклый многоугольник. Используя лемму 2, построим максимальный u-стабильный мост W^R для терминального множества M^R на отрезке $[0, \vartheta]$, который является пересечением конечного числа полупространств. При этом все полуплоскости в пересечении

$$K(t) = L_a(t) \cap L_b(t) \cap \{L(t) \colon L \in I_\vartheta(L_a, L_b)\}, \quad t < \vartheta, \tag{5.5}$$

являются существенными. Величину R можно выбрать настолько большой, что полуплоскости в (5.5) остаются существенными для сечений $W^R(t)$ моста W^R для всех $t \in [0, \vartheta]$. Тогда, учитывая замечание 4, получаем полупроницаемость поверхности ∂K. Лемма доказана.

Для вогнутой пары L_a, L_b набор (5.1) формируется для угла $A = L'_a(\vartheta) \cap L'_b(\vartheta)$, $L'_a = \overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_a}$, $L'_b = \overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_b}$, аналогично выпуклому случаю с заменой множества $-P$ на множество $-Q$. Набор I_* задается формулой (5.2). Упорядоченный вогнутый набор дополнительных полупространств $I_\vartheta(L_a, L_b)$ определяется как все полупространства из I_*, сечения которых существенны для пересечения

$$L'_a(t) \cap L'_b(t) \cap \{\overline{\mathbb{R}^2 \setminus L(t)} \colon L \in I_*\}, \quad t < \vartheta.$$

Опираясь на лемму 3, получаем следующее утверждение, аналогичное лемме 6.

Лемма 7. *Пусть пара L_a, L_b полупространств вогнута. Тогда граница ∂K_* пересечения*

$$K_*(L_a, L_b) = (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_a}) \cap (\overline{\mathbb{R}^3 \setminus L_b}) \cap \{\, \overline{\mathbb{R}^3 \setminus L}\colon L \in I_\vartheta(L_a, L_b)\,\} \tag{5.6}$$

является полупроницаемой поверхностью на отрезке $[0, \vartheta]$ и множество $K_*(L_a, L_b)$ находится со стороны $(-)$ поверхности ∂K_*.

6. Алгоритм построения полупроницаемой трубки от невыпуклого терминального множества

6.1. Формирование наборов полупространств $\widetilde{\mathcal{L}}(M, \vartheta)$ и $\mathcal{L}(M, \vartheta)$

Пусть терминальное множество M является невыпуклым n-угольником, ребра которого перенумерованы от 1 до n в порядке положительного обхода границы ∂M множества M, т. е. множество остается слева при обходе границы.

Сформируем упорядоченный список полупространств в $\mathbb{R}^3$, аналогичных пересекающимся полупространствам в формулах (2.5) и (2.6), комбинируя эти формулы в зависимости от участка выпуклости или вогнутости границы множества M.

За основу возьмем список полупространств $\widetilde{\mathcal{L}}(M, \vartheta)$, соответствующих набору нормалей $\mathcal{N}(M)$, который определяется следующим образом.

Множеству M поставим в соответствие упорядоченный набор полуплоскостей $\widetilde{\mathcal{M}}_1 = \{\widetilde{\Pi}_i\}_{i=1}^n$. Полуплоскость $\widetilde{\Pi}_i$ определим как полуплоскость, содержащую ребро многоугольника ∂M с номером i, вектор внешней нормали к которой является внешней нормалью к множеству M в точках i-го ребра.

Будем рассматривать набор $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ полуплоскостей как циклический, т. е. для первой полуплоскости предыдущей является полуплоскость с номером n, а последующей для полуплоскости с номером n является первая полуплоскость.

Заметим, что любая пара последовательных полуплоскостей в наборе $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ является либо выпуклой, либо вогнутой.

Полуплоскость в наборе $\widetilde{\mathcal{M}}_1$ будем называть *полуплоскостью зацепления* (соответствующее ребро многоугольника ∂M — *ребром зацепления*), если она образует с одной из соседних полуплоскостей выпуклую пару, а с другой соседней полуплоскостью — вогнутую пару.

Положим $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = \{\mathcal{T}_\vartheta(\Pi)\colon \Pi \in \widetilde{\mathcal{M}}_1\}$. Набор полупространств $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ однозначно строится по множеству M и моменту ϑ. Обозначим результат такого построения через $\widetilde{\mathcal{L}}(M, \vartheta)$. Таким образом, $\widetilde{\mathcal{L}}_1 = \widetilde{\mathcal{L}}(M, \vartheta)$.

Полупространство в наборе $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ будем называть *полупространством зацепления*, если оно образует с одним из соседних полупространств выпуклую пару, а с другим соседним полупространством — вогнутую пару.

Сформируем из набора $\widetilde{\mathcal{L}}_1$ расширенный набор $\mathcal{L}_1$ полупространств, вставляя между каждой выпуклой (вогнутой) парой последовательных полупространств $L_a, L_b \in \widetilde{\mathcal{L}}_1$ выпуклый (вогнутый) набор $I_\vartheta(L_a, L_b)$ дополнительных полупространств.

Таким образом, расширенный набор $\mathcal{L}_1$ полупространств в $\mathbb{R}^3$ однозначно определяется множеством M и значением ϑ. Обозначим результат такого построения через $\mathcal{L}(M, \vartheta)$, т. е. $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(M, \vartheta)$.

6.2. Построения на первом смежном отрезке

Любое $L \in \mathcal{L}_1$ имеет в списке $\mathcal{L}_1$ предыдущее полупространство L_* и последующее полупространство L^*. Пусть $\lambda = (L_*, L, L^*)$. Поскольку $\lambda \in \Lambda$, то для $t \in [0, \vartheta]$ определен вес $\mu_t(\lambda)$, который обозначим через $\mu(L; \mathcal{L}_1, t)$.

По построению набора $\mathcal{L}_1$ имеем $\mu(L; \mathcal{L}_1, \vartheta) > 0$ для любого $L \in \mathcal{L}_1$.

Для построения многогранной трубки на основе семейства полупространств $\mathcal{L}_1$ определим отрезок на оси времени, смежный с моментом ϑ слева. Положим

$$\tau_1 := \min\{\,\mu(L;\mathcal{L}_1,\vartheta)\colon L\in\mathcal{L}_1\}\in(0,+\infty],\quad \vartheta_1 := \begin{cases}\vartheta-\tau_1, & \tau_1\in(0,\vartheta),\\ 0, & \tau_1\in[\vartheta,+\infty].\end{cases}$$

Заметим, что для любого $L\in\mathcal{L}_1$ плоскость ∂L пересекается с границами соседних полупространств в семействе $\mathcal{L}_1$ по прямым, которые не имеют общих точек при $t\in(\vartheta_1,\vartheta)$ и могут иметь общие точки при $t=\vartheta_1$ и $t=\vartheta$. Это позволяет определить многогранную поверхность E_1 на промежутке $(\vartheta_1,\vartheta]$ как результат последовательного пересечения границ полупространств из семейства $\mathcal{L}_1$. Для $t=\vartheta_1$ многогранную поверхность E_1 доопределим по непрерывности. Гранями многогранной поверхности E_1 на отрезке $[\vartheta_1,\vartheta]$ являются треугольники и трапеции.

Обозначим через $E_1(t)$ сечение поверхности E_1 плоскостью $t=\mathrm{const}$, $t\in[\vartheta_1,\vartheta]$, а через M_1 — ограниченное множество, определяемое равенством $E_1(\vartheta_1)=\partial M_1$.

Теорема 1. *Пусть для $t\in(\vartheta_1,\vartheta]$ множество $E_1(t)$ является замкнутой ломаной без самопересечений. Тогда*

$$\partial W_0(t)=E_1(t),\quad t\in[\vartheta_1,\vartheta].$$

Доказательство. Пусть $\delta\in(0,\tau_1)$. При отсутствии самопересечений на интервале $(\vartheta_1,\vartheta]$ поверхность E_1 является многогранной трубкой на отрезке $[\vartheta_1+\delta,\vartheta]$. Докажем полупроницаемость E_1 на этом отрезке.

Пусть набор $\widetilde{\mathcal{L}}_1$, введенный в подразд. 6.1, имеет вид

$$\widetilde{\mathcal{L}}_1=\{\widetilde{L}_1,\widetilde{L}_2,\,\ldots\,\widetilde{L}_n\}.$$

Поверхность E_1 образована конечным числом кусков многогранных поверхностей ∂K_i, $i\in\overline{1,n}$, построенных на основе выпуклых или вогнутых пар $\widetilde{L}_i$, $\widetilde{L}_{i+1}$ последовательных полупространств из $\widetilde{\mathcal{L}}_1$, $\widetilde{L}_{n+1}=\widetilde{L}_1$. Поверхность ∂K_i определяется как граница множества $K(\widetilde{L}_i,\widetilde{L}_{i+1})$, задаваемого формулой (5.4) (множества $K_*(\widetilde{L}_i,\widetilde{L}_{i+1})$, задаваемого формулой (5.6)), если пара L_a, L_b выпуклая (вогнутая), $i\in\overline{1,n}$. В силу лемм 6 и 7 многогранные поверхности ∂K_i, $i\in\overline{1,n}$, являются полупроницаемыми.

Множество $\partial K_i\cap\partial K_{i+1}$, $i\in\overline{1,n}$, содержит одну грань поверхности E_1, смежную с ребром терминального множества M, $\partial K_{n+1}=\partial K_1$. По определению момента ϑ_1 сечения граней поверхности E_1 не вырождаются в точку для $t\in[\vartheta_1+\delta,\vartheta]$. Следовательно, для выбранного δ найдется такое $\varepsilon>0$, что для любой точки $z_0\in E_1(t)$, $t\in[\vartheta_1+\delta,\vartheta]$, имеем $C^+_\varepsilon(z_0)\cap E_1\subset\partial K_j$ для некоторого $j\in\overline{1,n}$. Тогда в силу полупроницаемости ∂K_j получаем выполнение свойств 1), 2) из определения полупроницаемости для $C^+_\varepsilon(z_0)$.

Таким образом, учитывая замечание 4, имеем $\partial W_0(t)=E_1(t)$ для $t\in(\vartheta_1,\vartheta]$. Опираясь на лемму 1, заключаем, что $\partial W_0(\vartheta_1)=E_1(\vartheta_1)$. Теорема доказана.

6.3. Последовательное построение на других смежных отрезках

Определение первого отрезка $[\vartheta_1,\vartheta]$, построение на нем поверхности E_1 и определение множества M_1 описано в предыдущем подразделе. Далее будем предполагать, что для $t\in(\vartheta_1,\vartheta]$ множество $E_1(t)$ является замкнутой ломаной без самопересечений.

Если $\vartheta_1=0$, то по теореме 1 имеем $W_0(0)=M_1$. Далее рассмотрим случай $\vartheta_1>0$.

Предположим, что множество M_1 имеет пустую внутренность. Опираясь на полупроницаемость многогранных поверхностей, основанных на продолжении соответствующих смежных граней поверхности E_1 на отрезок $[0,\vartheta_1]$, можно доказать, что $W_0(t)=\varnothing$, $t\in[0,\vartheta_1)$. Доказательство опускаем.

Пусть внутренность множества M_1 непуста и его гранца $E_1(\vartheta_1)$ — замкнутая ломаная, имеющая самопересечения. Тогда либо множество M_1 не односвязно, либо множество его внутренних точек не связно, либо множество M_1 имеет "усики" в виде отрезков. В этом случае продолжение построений на интервале $[0, \vartheta_1)$ в статье не рассматривается.

Предположим теперь, что $E_1(\vartheta_1)$ — замкнутая ломаная без самопересечений. Тогда делаем второй шаг построений для промежутка времени $[0, \vartheta_1]$ и терминального множества M_1. На основе множества M_1 определяем семейство $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(M_1, \vartheta_1)$, находим значения

$$\tau_2 = \min\{\, \mu(L; \mathcal{L}_2, \vartheta_1) \colon L \in \mathcal{L}_2\} > 0, \quad \vartheta_2 = \begin{cases} \vartheta_1 - \tau_2, & \tau_2 \in (0, \vartheta_1), \\ 0, & \tau_2 \in [\vartheta_1, +\infty] \end{cases}$$

и формируем поверхность E_2 из полупространств $\mathcal{L}_2$ на отрезке $[\vartheta_2, \vartheta_1]$ аналогично поверхности E_1. Обозначим через M_2 множество, определяемое равенством $E_2(\vartheta_2) = \partial M_2$.

Покажем, что набор $\mathcal{L}_2$ может быть построен на основе набора $\mathcal{L}_1$ без восстановления множества M_1. Непосредственно из определения поверхности E_1 заключаем, что набор $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \widetilde{\mathcal{L}}(M_1, \vartheta)$ получается из набора $\mathcal{L}_1$ удалением "лишних" полупространств, не участвующих в образовании ребер множества M_1. Сначала из набора $\mathcal{L}_1$ должны быть удалены полупространства, ставшие несущественными относительно соседей в момент $t = \vartheta_1$, т. е. имеющие вес τ_1. В результате получаем набор

$$\mathcal{L}_1^0 = \mathcal{L}_1 \setminus \{L \in \mathcal{L}_1 \colon \mu(L; \mathcal{L}_1, \vartheta) = \tau_1\}.$$

При этом в наборе $\mathcal{L}_1^0$ могут возникнуть группы одинаковых соседних полупространств. Оставив в каждой из таких групп только одно полупространство, обозначим новый набор через $\mathcal{L}_1^*$. Тогда последовательное пересечение границ полуплоскостей $\{L(\vartheta_1) \colon L \in \mathcal{L}_1^*\}$ образует ломаную $E_1(\vartheta_1)$, т. е. границу множества M_1. Следовательно, $\widetilde{\mathcal{L}}_2 = \mathcal{L}_1^*$.

Для получения набора $\mathcal{L}_2$ осталось добавить между каждой парой L_a, L_b последовательных полупространств из $\mathcal{L}_1^*$ набор дополнительных полупространств $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$.

Сформулируем условия на пару L_a, L_b, при которых $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \varnothing$. Определим упорядоченный набор

$$J_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \{L_a, L_1, L_2, \dots, L_{m-1}, L_b\} \subset \mathcal{L}_1 \tag{6.1}$$

следующим образом. Пусть x_* — вершина угла $L_a(\vartheta_1) \cap L_b(\vartheta_1)$ для случая выпуклой пары L_a, L_b или вершина угла $\overline{\mathbb{R}^2 \setminus (L_a(\vartheta_1) \cup L_b(\vartheta_1))}$ для случая вогнутой пары L_a, L_b. Точка x_* совпадает с одной из вершин многоугольника M_1. Имеем $z_* = (\vartheta_1, x_*) \in E_1$. Точка z_* является общим концом m ребер поверхности E_1, другие концы которых лежат в плоскости $t = \vartheta$, $m \geq 1$. При $m = 1$ положим $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \{L_a, L_b\}$. При $m > 1$ каждое полупространство L_j ($j \in \overline{1, m-1}$) соответствует грани поверхности E_1, содержащей два ребра с общим концом в точке x_*.

Теорема 2. *Пусть набор $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ является выпуклым или вогнутым. Тогда*

$$I_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай выпуклого набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ вида (6.1). Выпуклость набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ возможна только для выпуклой пары L_a, L_b. Пусть $z_* = (\vartheta_1, x_*)$, где x_* — вершина угла $L_a(\vartheta_1) \cap L_b(\vartheta_1)$.

От противного предположим, что найдется полупространство $L_* \in I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$. Для выпуклой пары L_a, L_b набор $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ также является выпуклым по определению. Следовательно, тройка $\lambda_* = (L_a, L_*, L_b)$ будет выпуклой.

1) Покажем, что

$$\mu_{\vartheta_1}(\lambda_*) = +\infty. \tag{6.2}$$

Обозначим через $\lambda_1 = (L_*^1, L_*, L_*^2)$ тройку последовательных полупространств в наборе $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$. Заметим, что L_*^1 может совпадать с L_a, а L_*^2 может совпадать с L_b.

По построению дополнительного набора $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ полуплоскости $L_a(t)$, $L^1_*(t)$, $L_*(t)$, $L^2_*(t)$, $L_b(t)$ являются существенными для пересечения

$$L_a(t) \cap L^1_*(t) \cap L_*(t) \cap L^2_*(t) \cap L_b(t), \quad t < \vartheta_1.$$

Следовательно, полуплоскость $L_*(t)$ является существенной для пересечения

$$L_a(t) \cap L_*(t) \cap L_b(t), \quad t < \vartheta_1.$$

Отсюда получаем (6.2).

2) Выпуклость набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ влечет вложение

$$\bigcap \{L(\vartheta)\colon L \in J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)\} \subset \big(L_a(\vartheta) \cap L_b(\vartheta)\big). \tag{6.3}$$

Из (6.2) получаем, что $L_a(\vartheta) \cap L_b(\vartheta) \subset L_*(\vartheta)$. Поскольку точка z_* принадлежит плоскости ∂L_* и границам всех полупространств из $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$, то полуплоскость $L_*(\vartheta)$ не сонаправлена и не совпадает ни с одной из полуплоскостей $L(\vartheta)$, $L \in J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$. Следовательно, найдется такая пара последовательных полупространств $L^*_1, L^*_2 \in J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$, что тройка $\lambda_2 = (L^*_1, L_*, L^*_2)$ является выпуклой.

3) Рассмотрим ребро e_* поверхности E_1, смежное с гранями, соответствующими полупространствам L^*_1 и L^*_2. Пусть z^ϑ — конец отрезка e_*, лежащий в плоскости $t = \vartheta$. Из (6.3) следует, что $e_* \subset L_a \cap L_b$.

Обозначим через $\bar{L}$ полупространство, сонаправленное с L_* и проходящее через точку z^ϑ. Поскольку $e_* \cap \partial L_* = \{z_*\}$, $e_* \cap \partial \bar{L} = \{z^\vartheta\}$ и $\bar{L} \subset L_*$, то $\mu_\vartheta(\lambda_2) = +\infty$.

Учитывая лемму 5, для тройки $\lambda_3 = (L^*_1, \bar{L}, L^*_2)$ имеем $\mu_\vartheta(\lambda_3) = +\infty$. В этом случае согласно процедуре построения расширенного набора $\mathcal{L}(M, \vartheta)$ имеем $\bar{L} \in I_\vartheta(L^*_1, L^*_2)$ и полупространства L^*_1, L^*_2 не могут быть соседними в наборе $\mathcal{L}(M, \vartheta)$, что противоречит выбору полупространств L^*_1 и L^*_2.

Полученное противоречие доказывает, что $I_{\vartheta_1}(L_a, L_b) = \varnothing$ в случае выпуклого набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$. Случай вогнутого набора $J_{\vartheta_1}(L_a, L_b)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Таким образом, построение полупроницаемой трубки $E_1 \cup E_2$ на отрезке времени $[\vartheta_2, \vartheta]$ сводится к обработке первоначального набора $\mathcal{L}_1$, состоящей из следующих шагов: а) удаление "лишних" полупространств относительно момента времени ϑ_1; б) добавление дополнительных полупространств относительно момента ϑ_1 между теми соседними полупространствами, между которыми было удалено хотя бы одно полупространство зацепления; в) удаление "лишних" полупространств относительно момента ϑ_2. Заметим, что при удалении полупространства зацепления эта роль может перейти к одному из соседних оставшихся полупространств.

Опишем построения для произвольного шага $k > 1$. Предполагая, что $\vartheta_{k-1} > 0$ и $E_{k-1}(\vartheta_{k-1})$ — замкнутая ломаная без самопересечений, обозначим символом M_{k-1} множество, ограниченное ломаной $E_{k-1}(\vartheta_{k-1})$. Делаем следующий шаг построений для промежутка времени $[0, \vartheta_{k-1}]$ и терминального множества M_{k-1}. На основе множества M_{k-1} формируем семейство $\mathcal{L}_k = \mathcal{L}(M_{k-1}, \vartheta_{k-1})$, находим значения

$$\tau_k = \min\{\, \mu(L; \mathcal{L}_k, \vartheta_{k-1})\colon L \in \mathcal{L}_k\} > 0, \quad \vartheta_k = \begin{cases} \vartheta_{k-1} - \tau_k, & \tau_k \in (0, \vartheta_{k-1}), \\ 0, & \tau_k \in [\vartheta_{k-1}, +\infty] \end{cases}$$

и строим поверхность E_k из полупространств $\mathcal{L}_k$ на отрезке $[\vartheta_k, \vartheta_{k-1}]$. Обозначаем через M_k множество, ограниченное ломаной $E_k(\vartheta_k)$.

Набор $\mathcal{L}_k$ может быть построен на основе набора $\mathcal{L}_{k-1}$ без восстановления множества M_{k-1}. Следовательно, построение полупроницаемой трубки $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_k$ типа $\pm$ на отрезке времени $[\vartheta_k, \vartheta]$ сводится к обработке первоначального набора $\mathcal{L}_1$, состоящей из повторения двух шагов для каждого момента ϑ_s, $s = 1, \ldots, k-1$:

а) удаление “лишних” полупространств относительно момента ϑ_s;

б) добавление дополнительных полупространств относительно момента ϑ_s между теми соседними полупространствами, между которыми было удалено хотя бы одно полупространство зацепления.

Таким образом, на каждом шаге $k \geq 1$ возможен один из следующих вариантов.

1. $\vartheta_k = 0$ и множество $W_0(0) = M_k$ непусто.
2. $\vartheta_k > 0$ и множество M_k имеет пустую внутренность, что соответствует вырождению максимального u-стабильного моста в момент ϑ_k, т. е. $W_0(0) = \varnothing$.
3. Возникает ситуация самопересечения замкнутой ломаной $E_k(\vartheta_k)$ и дальнейшие построения в статье не рассматриваются.
4. Можно сделать следующий шаг и построить полупроницаемую трубку типа $\pm$ на отрезке $[\vartheta_{k+1}, \vartheta]$, $\vartheta_{k+1} < \vartheta_k$.

Алгоритм конечен, поскольку не существует точки $\vartheta_* \in [0, \vartheta)$ предельной для монотонно убывающей последовательности моментов времени $\{\vartheta_k\}$. Доказательство этого утверждения в статье не приводится.

Предложенным алгоритмом были просчитаны множества разрешимости для нескольких вариантов невыпуклого многоугольника M, отрезков P, Q и значений ϑ. Алгоритм может быть реализован на вычислительной машине в общем случае произвольного многоугольника M, многоугольников или отрезков P, Q и значения ϑ. Заметим, что проверка отсутствия самопересечений границы множества достижимости является самостоятельной алгоритмической задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. **Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S.** Zero-sum Pursuit-Evasion differential games with many objects: Survey of publications // Dyn. Games Appl. 2016. P. 1–25. doi: 10.1007/s13235-016-0209-z .
3. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
4. **Krasovskii N.N., Subbotin A.I.** Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988. 518 p.
5. **Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.** О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика. 1970. № 2. С. 54–63.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 336 с.
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
8. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
9. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры, II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
10. **Хадвигер Г.** Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966. 416 с.
11. **Kamneva L.V., Patsko V.S.** Maximal stable bridge in game with simple motions in the plane // Advances in Dynamic and Evolutionary Games: Theory, Applications, and Numerical Methods / eds. Frank Thuijsman, Florian Wagener. 2016. P. 139–163. (Ann. Internat. Soc. Dynam. Games; vol. 14). doi: 10.1007/978-3-319-28014-1 .

Поступила 19.12.2016

Камнева Людмила Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: kamneva@imm.uran.ru

Пацко Валерий Семенович
канд. физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: patsko@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Isaacs R. *Differential games.* New York: John Wiley and Sons, 1965, 408 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow, Mir Publ., 1967, 480 p.
2. Kumkov S.S., Le Menec S., Patsko V.S. Zero-sum pursuit-evasion differential games with many objects: Survey of publications. *Dyn. Games Appl.*, 2016, pp. 1–25. doi: 10.1007/s13235-016-0209-z .
3. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 420 p.
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Game-theoretical control problems. New York: Springer-Verlag, 1988, 518 p.
5. Pshenichnyy B.N., Sagaydak M.I. Differential games with fixed time. *J. Cybernet.*, vol. 1, no. 1, pp. 117–135. doi: 10.1080/01969727108545833 .
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order partial differential equations: The dynamical optimization perspective.* Boston, Birkhäuser, 1995, Ser. System & Control: Foundations & Applications, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk, Institut Komp'yuternykh Issledovanii Publ., 2003, 336 p.
7. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
8. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona — Yakobi* [Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p.
9. Pontryagin L.S. Linear differential games, II. *Soviet Math. Dokl.*, 1967, vol. 8, pp. 910–912.
10. Hadwiger H. Vorlesungen uber Inhalt, Oberflache und Isoperimetrie. Berlin: Springer-Verlag, 1957. 312 p. Translated under the title *Lektsii ob ob"eme, ploshchadi poverkhnosti i izoperimetrii*, Moscow, Nauka Publ., 1966, 416 p.
11. Kamneva L.V., Patsko V.S. Maximal stable bridge in game with simple motions in the plane. *Advances in Dynamic and Evolutionary Games: Theory, Applications, and Numerical Methods*, eds. Frank Thuijsman, Florian Wagener, 2016, Ser. Ann. Internat. Soc. Dynam. Games, vol. 14, pp. 139–163. doi: 10.1007/978-3-319-28014-1 .

Kamneva L. V. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: kamneva@imm.uran.ru

Patsko V. S. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

О РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА — ЯКОБИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА[1]

Е. А. Колпакова

Статья посвящена исследованию системы уравнений первого порядка типа Гамильтона — Якоби. Рассматривается сильно связанная иерархическая система: первое уравнение не зависит от второго, а гамильтониан второго уравнения зависит от градиента решения первого уравнения. Данная система допускает последовательное решение. Решение первого уравнения понимается в смысле теории минимаксных (вязкостных) решений и получается с использованием формулы Лакса — Хопфа. Подстановка решения первого уравнения во второе уравнение Гамильтона — Якоби приводит к уравнению Гамильтона — Якоби с разрывным гамильтонианом. Его решение основано на концепции М-решений, введенной А. И. Субботиным и выбирается в классе многозначных отображений. Таким образом, решение исходной системы является прямым произведением однозначного и многозначного отображений, удовлетворяющих первому и второму уравнениям в минимаксном смысле и в смысле М-решений. Для случая, когда решение первого уравнения недифференцируемо лишь вдоль одной линии Ранкино — Гюгонио доказаны теоремы существования и единственности. Для решения системы получена репрезентативная формула в терминах характеристик Коши. Исследованы свойства решения и их зависимость от параметров задачи.

Ключевые слова: система уравнений Гамильтона — Якоби, минимаксное решение, М–решение, метод характеристик Коши.

E. A. Kolpakova. On the solution of a system of Hamilton–Jacobi equations of special form.

The paper is concerned with the investigation of a system of first-order Hamilton–Jacobi equations. We consider a strongly coupled hierarchical system: the first equation is independent of the second, and the Hamiltonian of the second equation depends on the gradient of the solution of the first equation. The system can be solved sequentially. The solution of the first equation is understood in the sense of the theory of minimax (viscosity) solutions and can be obtained with the help of the Lax–Hopf formula. The substitution of the solution of the first equation in the second Hamilton–Jacobi equation results in a Hamilton–Jacobi equation with discontinuous Hamiltonian. This equation is solved with the use of the idea of M-solutions proposed by A.I. Subbotin, and the solution is chosen from the class of set-valued mappings. Thus, the solution of the original system of Hamilton–Jacobi equations is the direct product of a single-valued and set-valued mappings, which satisfy the first and the second equations in the minimax and M-solution sense, respectively. In the case when the solution of the first equation is nondifferentiable only along one Rankine–Hugoniot line, existence and uniqueness theorems are proved. A representative formula for the solution of the system is obtained in terms of Cauchy characteristics. The properties of the solution and their dependence on the parameters of the problem are investigated.

Keywords: system of Hamilton–Jacobi equations, minimax solution, M-solution, Cauchy method of characteristics.

MSC: 35D35, 49J15, 49J53

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-158-170

Введение

Сильно связанные системы уравнений Гамильтона — Якоби описывают функцию цены в неантагонистических дифференциальных играх [1]. В настоящее время эта область изучена недостаточно полно: нет общепринятого определения обобщенного решения сильно связанной системы уравнений Гамильтона — Якоби. Вопрос о связи систем уравнений Гамильтона — Якоби и нэшевских равновесий исследован в работах [2; 3]. В работе Д. Острова [4] решение

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №14-01-00168).

системы уравнений Гамильтона — Якоби рассматривалось как предел вязких решений. Он показал неединственность предложенного решения. Таким образом, вопросы существования и единственности обобщенного решения остаются открытыми.

В данной статье рассматривается вопрос о построении обобщенного решения сильно связанной системы уравнений Гамильтона — Якоби специального вида. Первое уравнение системы не зависит от второго, а второе уравнение зависит от производной решения первого уравнения. Системы такого вида описывают поведение игроков в иерархических дифференциальных играх [5]: первое уравнение описывает поведения лидера, а второе уравнение — поведение ведомого игрока. Если продифференцировать рассматриваемую систему уравнений Гамильтона — Якоби по фазовой переменной, то полученная система квазилинейных уравнений может быть применена к описанию газовой динамики без давления, а также крупномасштабной структуры вселенной [6; 7].

В рассматриваемой системе уравнений Гамильтона — Якоби классического решения, как правило, не существует глобально. Возникает необходимость рассматривать обобщенные решения. Теория обобщенных решений уравнения Гамильтона — Якоби развита А. И. Субботиным в [8]. В этой работе введено понятие минимаксного решения, которое опирается на свойство выживаемости обобщенных характеристик в графике обобщенного решения. Теоремы существования и единственности минимаксного решения доказаны в работе [8]. Естественным обобщением минимаксного решения является понятие М-решения (многозначного решения) [9]. В данной статье предложено определение обобщенного решения для системы уравнений Гамильтона — Якоби, которое опирается на понятия минимаксного решения и М-решения.

Приведен алгоритм построения обобщенного решения, в основе которого лежит метод характеристик Коши. Как известно, метод характеристик Коши применяется для построения классического решения уравнения Гамильтона — Якоби. Однако в нелинейных задачах решение уравнения Гамильтона — Якоби, как правило, теряет гладкость и является только непрерывной функцией. В работах Н. Н. Субботиной [10] метод характеристик получил новое развитие. Опираясь на двойственность задачи оптимального управления и принципа максимума Понтрягина, Н. Н. Субботина получила репрезентативную формулу для минимаксного решения [11].

Цель предлагаемой статьи — обосновать, что метод характеристик Коши может быть использован для построения М-решения. В работе [12] доказано, что в графике минимаксного решения уравнения Гамильтона — Якоби выживают и классические характеристики уравнения Гамильтона — Якоби. В настоящей статье доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения системы уравнений Гамильтона — Якоби. В конце статьи приведен пример, иллюстрирующий предложенный алгоритм построения обобщенного решения системы уравнений Гамильтона — Якоби.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему из двух уравнений Гамильтона — Якоби. Эта система описана в работе Ф. Хуанг [6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(u_x) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v_x g(u_x) = 0, \quad u(T,x) = u_T(x), \quad v(T,x) = v_T(x). \tag{1.1}$$

Здесь $t \in [0,T]$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}$, функции u, v определены на Π_T со значениями в $\mathbb{R}$, где $\Pi_T = [0,T] \times \mathbb{R}$, функции $F, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Предположим, что

$A1$ функция $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема, $F''(u_x) > 0$. Функция F обладает подлинейным ростом или условием $\lim_{|p|\to\infty} F(p)/|p| = +\infty$;

$A2$ функция $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дважды дифференцируема, обладает подлинейным ростом, $g'(u_x) > 0$;

$A3$ функция $u_T(\cdot)$ глобально липшицева, функция $v_T(\cdot)$ непрерывно дифференцируема.

Напомним понятие субдифференциала функции.

Определение 1. Множество $D^-u(t,x) \in \mathbb{R}^2$ $\big(D^+u(t,x) \in \mathbb{R}^2\big)$ называется субдифференциалом (супердифференциалом) функции $u(\cdot,\cdot)\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$ в точке $(t,x) \in (0,T)\times\mathbb{R}$, если для любых $\delta t \in \mathbb{R}$, $\delta x \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$D^-u(t,x) = \big\{(\alpha,p) \in \mathbb{R}^2\colon u(t+\delta t, x+\delta x) - u(t,x) \geq \alpha\delta t + p\delta x + o(|\delta t| + |\delta x|)\big\},$$

$$D^+u(t,x) = \big\{(\alpha,p) \in \mathbb{R}^2\colon u(t+\delta t, x+\delta x) - u(t,x) \leq \alpha\delta t + p\delta x + o(|\delta t| + |\delta x|)\big\}.$$

Построим решение первого уравнения системы (1.1), применяя теорию минимаксного/вязкостного решения. Напомним определение обобщенного решения задачи Коши для уравнения Гамильтона — Якоби [13].

Определение 2. Минимаксным/вязкостным решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + F(u_x) = 0, \quad u(T,x) = u_T(x)$$

называется непрерывная функция $u : \Pi_T \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условиям

$$\alpha + F(p) \leq 0, \quad (\alpha,p) \in D^+u(t,x), \quad \alpha + F(p) \geq 0, \quad (\alpha,p) \in D^-u(t,x); \; u(T,x) = u_T(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здесь D^-u, D^+u — суб- и супердифференциал функции u соответственно.

В работах [8; 14] доказано, что при выполнении условий $A1$, $A3$ минимаксное/вязкостное решение существует и единственно.

В работе [11] доказаны следующие свойства минимаксного решения.

1. Минимаксное решение u — локально липшицевая функция.

2. $D^-u(t,x) \neq \varnothing$ для любой точки $(t,x) \in \Pi_T$.

3. Функция u непрерывно дифференцируема всюду в полосе Π_T кроме множества точек $(t,x) = (t,\alpha_i(t))$, $t \in [t_0,t_1]$, $t_0,t_1 \in [0,T]$. На указанном множестве точек функция u недифференцируема. Функции $\alpha_i : \Pi_T \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируемы [15; 16], причем функций α_i не более чем счетное число. Функции α_i удовлетворяют условию Ранкина — Гюгонио:

$$\dot{\alpha}_i(t) = \frac{[F(u_x)](t)}{[u_x](t)}. \tag{1.2}$$

Здесь символ $[\cdot]$ обозначает скачок функции через кривую α, т. е.

$$[u_x](t) = \lim_{x\to\alpha(t)+0} u_x(t,x) \; - \lim_{x\to\alpha(t)-0} u_x(t,x),$$

$$[F(u_x)](t) = \lim_{x\to\alpha(t)+0} F(u_x(t,x)) \; - \lim_{x\to\alpha(t)-0} F(u_x(t,x)).$$

Далее в статье будем предполагать, что u_x имеет одну линию разрыва $\alpha(\cdot)$. Этот случай достаточно часто реализуется, например, при выпуклой u_T.

Обозначим символом F^* функцию сопряженную к F. Согласно формуле Лакса — Хопфа [13] решение первого уравнения имеет вид

$$u(t,x) = \max_{y\in\mathbb{R}} \Big\{(t-T)F^*\Big(\frac{x-y}{t-T}\Big) + u_T(y)\Big\}, \quad 0 \leq t < T, \tag{1.3}$$

тогда

$$u_x(t,x) = G\Big(\frac{x-y}{t-T}\Big).$$

Здесь $G = (F^*)'^{-1}$. Функция $(F^*)'^{-1}$ существует, так как $F'' > 0$ в силу условия $A1$. Заметим, что функция u_x может быть разрывной по переменной x в силу свойств минимаксного решения.

Рассмотрим задачу Коши для второго уравнения системы (1.1). Обозначим гамильтониан $H(t, x, s) = sg(u_x(t, x))$. Функция H может быть разрывной по переменной x. А. И. Субботин предложил понятие М-*решения* для уравнения Гамильтона — Якоби с разрывным по x гамильтонианом.

Рассмотрим области

$$D_1 = \{(t, x) \in \Pi_T : t \in [t_0, t_1],\ x \geq \alpha(t)\} \cup [t_1, T] \times \mathbb{R},$$

$$D_2 = \{(t, x) \in \Pi_T : t \in [t_0, t_1],\ x \leq \alpha(t)\} \cup [t_1, T] \times \mathbb{R}.$$

Обозначим через u_i сужение функции u_x на область D_i, $i = 1, 2$. Согласно свойству 2 минимаксного решения функция u субдифференцируема, тогда $u_2(t, \alpha(t)) \leq u_1(t, \alpha(t))$, $t \in [t_0, t_1]$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$E(t, x) = \begin{cases} \{(g(u_x(t, x)), 0)\}, & (t, x) \neq (t, \alpha(t)), \\ [g(u_2), g(u_1)] \times \{0\}, & (t, x) = (t, \alpha(t)). \end{cases} \tag{1.4}$$

Рассмотрим дифференциальное включение

$$(\dot{x}, \dot{z}) \in E(t, x). \tag{1.5}$$

Покажем, что E является допустимым для H многозначным отображением в смысле определения подразд. 2.5 работы [8]. Действительно, для любых $x \in \mathbb{R}$ множество $E(t, x)$ выпукло и компактно в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Отображение $x \to E(t, x)$ полунепрерывно сверху, так как $u_i(t, x) \in D^- u(t, x)$, $i = 1, 2$, отображение $(t, x) \to D^- u(t, x)$ полунепрерывно сверху по включению (см. [8]) и g монотонна. Функция H не зависит от u, следовательно, условие монотонности по u можно не проверять. Для произвольных $x \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ при любом выборе $p^0 \in \mathbb{R}$ имеем

$$H(x, s) = \min\{\varphi s - \psi : (\varphi, \psi) \in E(t, x)\} \geq \min\{\varphi s - \psi : (\varphi, \psi) \in E(t, x)\}.$$

Поскольку $E(t, x)$ не зависит от p, то неравенство выполняется. Аналогично для любых $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$ найдется $p^0 \in \mathbb{R}$ такой, что

$$H(x, s) = \max\{\varphi s - \psi : (\varphi, \psi) \in E(t, x)\} \leq \max\{\varphi s - \psi : (\varphi, \psi) \in E(t, x)\}.$$

Напомним определение многозначного решения для второго уравнения системы (1.1) [9].

Определение 3. Пусть $w \subset [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ — замкнутое множество. Будем говорить, что w слабо инвариантно относительно дифференциального включения (1.5), если для произвольной точки $(t_0, x_0, z_0) \in w$ существуют $\tau > 0$ и траектория (x, z) дифференциального включения (1.5) такая, что $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$, $(t, x(t), z(t)) \in w$ для всех $t \in [0, \tau]$.

В определении 3 в качестве (1.5) можно использовать любое допустимое дифференциальное включение, которое удовлетворяет условиям, описанным в [8]. Для удобства изложения будем использовать дифференциальное включение (1.5) с правой частью вида (1.4).

Определение 4. Замкнутое максимальное по включению многозначное отображение $v : \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется М-решением уравнения Гамильтона — Якоби, если $\operatorname{gr} v$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (1.5), $v(T, x) = v_T(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и для любого многозначного отображения $y : \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$, у которого $y(T, x) = v_T(x)$, $\operatorname{gr} y$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (1.5), выполнено $\operatorname{gr} y \subseteq \operatorname{gr} v$.

Дадим определение обобщенного решения системы Гамильтона — Якоби (1.1).

О п р е д е л е н и е 5. Многозначное отображение (u, v), где $u\colon \Pi_T \to \mathbb{R}$, $v\colon \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ называется обобщенным решением системы уравнений Гамильтона — Якоби (1.1), если

функция u — минимаксное решение первого уравнения системы (1.1),

функция v — М-решение второго уравнения системы (1.1).

В зависимости от значений $\dot{\alpha}$, которые определяются формулой (1.2), рассмотрим следующие случаи.

1. $\dot{\alpha}(t) \in [g(u_2(t, \alpha(t))), g(u_1(t, \alpha(t)))], \quad t \in [t_0, t_1]$.

2. $\dot{\alpha}(t) < g(u_2(t, \alpha(t)))$, или $\dot{\alpha}(t) > g(u_1(t, \alpha(t))), \quad t \in [t_0, t_1]$.

Для каждого из указанных случаев будет построено решение системы (1.1).

2. Многозначное решение системы уравнений Гамильтона — Якоби

Предполагаем, что

$$\dot{\alpha}(t) \in [g(u_2(t, \alpha(t))), g(u_1(t, \alpha(t)))], \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{2.1}$$

Будем строить решение второго уравнения системы (1.1) с помощью метода характеристик Коши.

В точках непрерывности функции $u_x(\cdot)$ характеристическая система имеет вид

$$\dot{\widetilde{x}} = g(u_x(t, x)), \quad \dot{\widetilde{z}} = 0 \tag{2.2}$$

с краевым условием

$$\widetilde{x}(T, \xi) = \xi, \quad \widetilde{z}(T, \xi) = v_T(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Покажем, что в окрестности точек непрерывности u_x эта функция является липшицевой. Пусть $x_1, x_2 \in D_i$, и u_x непрерывна в точках (t, x_j), $j = 1, 2$. Тогда

$$|u_x(t, x_1) - u_x(t, x_2)| = \Big|G\Big(\frac{x_1 - y(t, x_1)}{t - T}\Big) - G\Big(\frac{x_2 - y(t, x_2)}{t - T}\Big)\Big| = \Big|G'\Big(\frac{\vartheta}{t - T}\Big)(x_1 - x_2)\Big|.$$

Напомним, что $u_x(T, x) = u'_T(x)$. Функция G непрерывно дифференцируема, так как F дважды дифференцируема и отображение $x \to y(t, x)$ не убывает [13]. Величина $G'\Big(\dfrac{\vartheta}{t - T}\Big)$ ограничена при $\vartheta \in (x_1, x_2)$, $t \in [t_0, \tau]$, $\tau < T$, поскольку G' непрерывна.

Решение характеристической системы (2.2), (2.3) существует и единственно. Отметим, что характеристики $\widetilde{x}(\cdot, \xi)$ системы (2.2), (2.3) приходят в каждую точку (t, x) полосы Π_T, так как первое уравнение характеристической системы $\dot{x} = g(u_x(t, x))$ решается независимо от других уравнений, и задача Коши для него корректна для любой точки из области непрерывности u_x. Пусть точка $(t_0, x_0) \in D_1$. Тогда все решения задач Коши

$$\dot{x} = g(u_1(t, x)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D_1$$

лежат не ниже кривой α, поскольку $\dot{\alpha}(t) \leq g(u_1(t, \alpha(t)))$, $t \in [t_0, t_1]$.

Аналогично для произвольной точки $(t_0, x_0) \in D_2$ решения задач Коши

$$\dot{x} = g(u_2(t, x)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (t_0, x_0) \in D_2$$

лежат не выше α. Таким образом, характеристика $\tilde{x}(\cdot)$, стартующая из начальной точки (t_0, x_0) в области D_i, остается в этой области на отрезке $[t_0, T]$.

Решение $(x_i(\cdot, \alpha(t^0)), z_i(\cdot, \alpha(t^0)))$, $t^0 \in [t_0, t_1]$, задач Коши

$$\dot{x} = g(u_i(t, x)), \quad x(t^0) = \alpha(t^0)$$

существует, единственно при фиксированном t^0. Решения $(x_i(\cdot,\alpha(t^0)), z_i(\cdot,\alpha(t^0)))$, $t^0 \in [t_0,t_1]$, лежат в области D_i, $i=1,2$ в силу условия (2.1). Заметим, что решения $(x_i(\cdot,\alpha(t^0)), z_i(\cdot,\alpha(t^0)))$ совпадают с характеристиками системы (2.2), (2.3). Отсюда следует, что для точек $(t,\alpha(t)) \in D_1 \cap D_2$, $t \in [t_0,t_1]$, существуют две характеристики $\tilde{x}(\cdot,\xi_i)$, $i=1,2$, такие, что $\alpha(t) = \tilde{x}(t,\xi_i) \in D_i$, $t \in [t_0,t_1]$, $i=1,2$. Если существует i такое, что $\dot{\alpha} = g(u_i(t,\alpha(t)))$, то одна из указанных характеристик совпадает с α.

Рассмотрим многозначное отображение v вида

$$v(t,x) = \begin{cases} \{\tilde{z}(t,\xi)\}, & x = \tilde{x}(t,\xi) \neq \alpha(t), \\ \operatorname{co}\{\tilde{z}_1(t,\xi_1), \tilde{z}_2(t,\xi_2)\}, & x = \alpha(t), \end{cases}$$

где $(\tilde{x}_i, \tilde{z}_i)$, $i=1,2$, — решения характеристической системы (2.2), (2.3) в области D_i, $i=1,2$.

Уточним вид v, подставив решение характеристической системы:

$$v(t,x) = \begin{cases} v_T\Big(x - \int\limits_T^t g(u_x(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big), \quad x \neq \alpha(t), \\ \operatorname{co}\Big\{v_T\Big(\alpha(t) - \int\limits_T^t g(u_2(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big), v_T\Big(\alpha(t) - \int\limits_T^t g(u_1(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)\Big\}, \quad x = \alpha(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Утверждение 1. *Если выполнены условия A_1–A_3, то график многозначного отображения $v\colon \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ вида* (2.4) *слабо инвариантен относительно дифференциального включения* (1.5).

Доказательство. 1. Пусть $(t_0,x_0) \in D_i$, $z_0 = v_T(x_0 - \widetilde{x}_i(t_0))$, тогда выберем селектор $\{(g(u_i(t,x)),0)\} \subseteq E(t,x)$, где E вида (1.4). Решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) удовлетворяют уравнениям $\dot{x} = g(u_i(t,x))$, $\dot{z} = 0$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$. Видно, что решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ совпадают с характеристиками $(\tilde{x}(\cdot,\xi), \tilde{z}(\cdot,\xi))$. Из вида v следует, что $(t,\tilde{x}(t,\xi),\tilde{z}(t,\xi)) \in \operatorname{gr} v$, а значит, решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения выживают в графике v. Следовательно, для любой (t_0,x_0,z_0) такой, что $x_0 > \alpha(t_0)$ $(x_0 < \alpha(t_0))$, $z_0 = v_T(x_0 - \widetilde{x}(t_0))$, получаем выживаемость траекторий дифференциального включения (1.5) в графике v.

2. Пусть $(t_0,x_0) = (t_0,\alpha(t_0))$ и $v_T(\alpha(t_0) - \widetilde{x}_1(t_0)) \le z_0 \le v_T(\alpha(t_0) - \widetilde{x}_2(t_0))$. Можно выбрать селектор многозначного отображения вида (1.4)

$$\{(\dot{\alpha}(t),0)\} \subset E(t,x), \quad t \in [t_0,t_1]. \tag{2.5}$$

Очевидно, что траектории $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) при выборе селектора (2.5) с начальным условием $x(t_0) = \alpha(t_0)$, $z(t_0) = z_0$ имеют вид $x(t) = \alpha(t)$, $z(t) \equiv z_0$, $t \in [t_0,t_1]$.

Существует момент $\tau \in (t_0,t_1]$ такой, что $\forall\ t \in (t_0,\tau]$ $(t,x(t),z(t)) \in \operatorname{gr} v(t,\alpha(t))$ и $z(\tau) \equiv z_0 = v_T\Big(\alpha(\tau) - \int_T^\tau g(u_i(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)$. Это следует из вида v (2.4). Рассмотренный момент τ существует, так как решение v однозначно при $(t,x) \in (t_1,T] \times \mathbb{R}$ согласно (2.4). Поэтому всегда найдется момент τ — момент выхода траекторий $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) из области многозначности $\operatorname{gr} v$.

Если $\tau < t_1$, то существуют решения характеристической системы (2.2), (2.3) $\tilde{z}_i(\cdot,\xi)$, $i = 1,2$, для которых выполнено $z_0 = v_T\Big(\alpha(\tau) - \int_T^\tau g(u_i(t,\tilde{x}(t,\xi)))dt\Big) = \tilde{z}_i(\tau,\xi)$. Если $\tau = t_1$, то $z_0 = v_T\Big(\alpha(t_1) - \int_T^{t_1} g(u_x(t,\tilde{x}(t,\xi)))dt\Big) = \tilde{z}(t_1,\xi)$.

Как отмечалось ранее, в каждую точку $(t,x)\in D_i$ приходит хотя бы одна характеристика $(\tilde{x},\tilde{z})$. Поэтому для $t>\tau$ выберем селектор $\{(g(u_i(t,x)),0)\}\subseteq E(t,x)$. Решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5), $t\in[\tau,T]$ выживают в графике v, как это было показано в п. 1.

Если $(t_0,x_0)=(t_1,\alpha(t_1))$, $z_0=v_T\Big(\alpha(t_1)-\displaystyle\int_T^{t_1} g(u_x(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)$, то для $t>t_1$ выберем селектор $\{(g(u_i(t,x)),0)\}\subseteq E(t,x)$. Решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) выживают в графике v как это было показано в п. 1. $\square$

Утверждение 2. *Многозначное отображение* $v\colon \Pi_T\rightrightarrows\mathbb{R}$, *определенное* (2.4), *является максимальным по включению, то есть для любого многозначного отображения* $\tilde{v}\colon\Pi_T\rightrightarrows\mathbb{R}$, *у которого* $\tilde{v}(T,x)=v_T(x)$, *gr* $\tilde{v}$ *слабо инвариантен относительно дифференциального включения* (1.5), *выполнено gr* $\tilde{v}\subseteq$ *gr* v.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что многозначное отображение $\tilde{v}$ удовлетворяет условию $v(T,x)=\tilde{v}(T,x)=v_T(x)$, слабо инвариантно относительно (1.5) и существует точка (t_0,x_0) такая, что $(t_0,x_0,z_0)\in$ gr $\tilde{v}$ и $(t_0,x_0,z_0)\notin$ gr v.

Согласно утверждению 1 отображение v слабо инвариантно относительно (1.5). Покажем, что отображение $\tilde{v}$ не может быть слабо инвариантно относительно (1.5).

Если $(t_0,x_0)\neq(t_0,\alpha(t_0))$, тогда траектории дифференциального включения (1.5), выживающие в графике $\tilde{v}$, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}=g(u_i),\quad \dot{z}=0$$

с начальным условием $x(t_0)=x_0$, $z(t_0)=z_0$. Траектория $x(\cdot)$ не может несколько раз пересекать кривую α, так как выполнено условие (2.1). Решения $x(\cdot)$ продолжимы до $t=T$, тогда $z(t)\equiv z_0=z(T)\neq v_T(x(T))$. Противоречие с тем, что $\tilde{v}(T,x)=v_T(x)$.

Если $(t_0,x_0)=(t_0,\alpha(t_0))$, то траектории дифференциального включения (1.5), выживающие в графике $\tilde{v}$, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{x}=\dot{\alpha},\quad \dot{z}=0.$$

Существует момент $\tau\in(t_0,t_1]$ такой, что $\forall\ t\in(t_0,\tau]$ траектории $(x(\cdot),z(\cdot))$ рассматриваемого дифференциального включения лежат в графике $v(t,\alpha(t))$ и $z(\tau)\equiv z_0=v_T\Big(\alpha(\tau)-\displaystyle\int_T^{\tau} g(u_i(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)$, так как v имеет вид (2.4). Если $\tau<t_1$, то существуют решения характеристической системы (2.2), (2.3) $\tilde{z}_i(\cdot,\xi)$, $i=1,2$, для которых выполнено $z_0=v_T\Big(\alpha(\tau)-\displaystyle\int_T^{\tau} g(u_i(\tau,\tilde{x}(\tau,\xi)))d\tau\Big)=\tilde{z}_i(\tau,\xi)$. Если $\tau=t_1$, то $z_0=v_T\Big(\alpha(t_1)-\displaystyle\int_T^{t_1} g(u_x(t,\tilde{x}(t,\xi)))dt\Big)=\tilde{z}(t_1,\xi)$. Рассмотренный момент τ существует, так как решение v однозначно при $(t,x)\in(t_1,T]\times\mathbb{R}$ согласно (2.4). Поэтому всегда найдется момент τ — момент выхода траекторий $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) из области многозначности gr v.

Решения $(x(\cdot),z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5), где $(\dot{x},\dot{z})=(g(u_i(t,x)),0)$, $t\in(\tau,T]$, выживают в графике v, как это было показано в утверждении 1. Тогда $z(t)=z(T)\neq v_T(x(T))$. Противоречие с тем, что $\tilde{v}(T,x)=v_T(x)$. Следовательно отображение v, заданное (2.4), является максимальным по включению слабо инвариантным множеством относительно дифференциального включения (1.5). $\square$

Из утверждений 1, 2 следует, что многозначное отображение v, заданное (2.4), является М-решением второго уравнения задачи (1.1).

Из утверждения 2 следует единственность М-решения v второго уравнения системы (1.1).

З а м е ч а н и е. М-решение v второго уравнения системы (1.1) многозначно вдоль $x=\alpha(t)$, $t\in[t_0,t_1]$. В точках $(t,x)\neq(t,\alpha(t))$, $t\in[t_0,t_1]$, М-решение v однозначно и дифференцируемо, так как v_T непрерывно дифференцируема, u_x липшицева в областях D_i, $i=1,2$, решение $\tilde{x}(\cdot,\xi)$ характеристической системы (2.2), (2.3) дифференцируемо по начальному условию.

3. Непрерывное решение системы уравнений Гамильтона — Якоби

Рассмотрим функцию $\alpha\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ такую, что существует $\dot{\alpha}$, определенная (1.2), и выполнено одно из условий:

$$\dot{\alpha}(t) < g(u_2(t, \alpha(t))) \text{ или } \dot{\alpha}(t) > g(u_1(t, \alpha(t))), \quad t \in [t_0, t_1]. \tag{3.1}$$

Тогда может возникнуть ситуация, когда характеристики $\widetilde{x}_i$ заполняют не всю полосу Π_T. Область, не заполненную характеристиками, назовем M. Далее рассмотрим случай, когда область M пересекается только с областью D_2. Тогда область M имеет вид

$$M = \{(t, x) \in D_2 \colon t \in [t_0, t_1],\ \tilde{x}(t, \alpha(t_1)) \le x \le \alpha(t)\}.$$

Рассмотрим момент t^*, удовлетворяющий уравнению

$$\alpha(t^*) = \int\limits_t^{t^*} g(u_2(\tau, x(\tau))d\tau + x, \quad (t, x) \in M. \tag{3.2}$$

Момент t^* определяется единственным образом. Как было показано ранее, в каждую точку $(t, \alpha(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, приходит единственная характеристика из каждой области D_i, $i = 1, 2$, поэтому характеристики $\widetilde{x}_i$, $i = 1, 2$, пересекают $\alpha(\cdot)$ один раз.

Покажем, что формула (3.2) определяет функцию $t^*\colon [t_0, t_1] \times M \to [t_0, t_1]$. Продифференцируем (3.2) по t^*. Видно, что $\dot{\alpha}(t^*) - g(u_2(t^*, x)) \ne 0$ и непрерывна, в частности

$$\lim_{(t,x)\to(t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1))} t^*(t, x) = t_1.$$

Отсюда следует, что функция t^* является непрерывной и дифференцируемой на $(t_0, t_1) \times \mathbb{R}$. Существуют и непрерывны частные производные $\partial t^*/\partial t$, $\partial t^*/\partial x$.

Определим функцию $v : \Pi_T \to \mathbb{R}$

$$v(t, x) = \begin{cases} v_T\Big(x - \int\limits_T^t g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big), & (t, x) \in D_1, \\ v_T\Big(x - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau - \int\limits_{t^*}^t g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big), & (t, x) \in M, \\ v_T\Big(x - \int\limits_T^t g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big), & (t, x) \in D_2 \setminus M. \end{cases} \tag{3.3}$$

Заметим, что внутри областей M, D_i, $i = 1, 2$, функция v является непрерывной по всем аргументам, так как $\int_T^t g(u_i(\tau, x(\tau)))d\tau$, $i = 1, 2$, является непрерывной функцией и v_T непрерывно дифференцируема. Проверим непрерывность v на границах областей. Рассмотрим соответствующие пределы:

$$\lim_{x\to\alpha(t)+0} v(t, x) = \lim_{x\to\alpha(t)+0} v_T\Big(x - \int\limits_T^t g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big) = v_T\Big(\alpha(t) - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big),$$

$$\lim_{x\to\alpha(t)-0} v(t, x) = \lim_{x\to\alpha(t)-0} v_T\Big(x - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau - \int\limits_{t^*}^t g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big)$$

$$= v_T\Big(\alpha(t) - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big).$$

Видно, что пределы функции v совпадают, значит v непрерывна в точках $(t, \alpha(t))$, $t \in [t_0, t_1]$. Напомним, что другой границей области M является характеристика $\tilde{x}(\cdot, \alpha(t_1))$. Проверим непрерывность v в точках $(t, x) = (t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1)))$, $t \in [t_0, t_1]$. Имеем

$$\lim_{x \to \tilde{x}(t, \alpha(t_1))+0} v(t, x) = \lim_{x \to \tilde{x}(t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1))+0} v_T\Big(x - \int\limits_T^{t^*} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau - \int\limits_{t^*}^{t} g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big)$$

$$= v_T\Big(\tilde{x}(t, \alpha(t_1)) - \int\limits_T^{t} g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big),$$

$$\lim_{x \to \tilde{x}(t, \alpha(t_1))-0} v(t, x) = \lim_{x \to \tilde{x}(t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1))-0} v_T\Big(x - \int\limits_T^{t} g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big)$$

$$= v_T\Big(\tilde{x}(t, \alpha(t_1)) - \int\limits_T^{t} g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big).$$

Пределы функции v совпадают, значит v непрерывна в точках $(t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1)))$, $t \in [t_0, t_1]$.

Утверждение 3. *Функция v, заданная* (3.3)*, является М-решением задачи Коши для второго уравнения системы* (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим определение 4. Выберем $(t_0, x_0) \in D_i$, $z_0 = v_T\Big(x_0 - \int_T^{t_0} g(u_i(\tau, x(\tau)))d\tau\Big)$, $(x_0, z_0) \in \mathrm{gr}\ v$. Рассмотрим селектор $\{(g(u_i(t, x)), 0)\} \subseteq E(t, x)$. Значение v вдоль решений $\dot{x} = g(u_i)$ постоянно и равно z_0 согласно построению. Выберем начальную точку $(t_0, x_0) \in M$ и $z_0 = v_T\Big(x_0 - \int_T^{t_0} g(u_2(\tau, x(\tau)))d\tau\Big)$, т. е. $(x_0, z_0) \in \mathrm{gr}\ v$. Рассмотрим правую часть дифференциального включения вида

$$E(t, x) = \begin{cases} \{(g(u_2(t, \tilde{x}(t, \xi))), 0)\}, & t \in [t_0, t^*], \\ \{(g(u_1(t, \tilde{x}(t, \xi))), 0)\}, & t \in (t^*, T]. \end{cases}$$

Здесь t^* определяется формулой (3.2). Траектории (x, z) введенного дифференциального включения $(\dot{x}, \dot{z}) \in E(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$ выживают в графике v до момента $t = T$.

Выберем $(t_0, x_0) = (t_0, \alpha(t_0))$, тогда рассмотрим селектор $\{(g(u_1(t, x)), 0)\} \subseteq E(t, x)$. Траектории $(x(\cdot), z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) выживают в графике v. Таким образом, график v слабо инвариантен относительно (1.5).

Покажем, что v является максимальным по включению отображением. Предположим, что существует многозначное отображение $\tilde{v} : \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ такое, что $v(T, x) = \tilde{v}(T, x) = v_T(x)$, gr $\tilde{v}$ слабо инвариантен относительно дифференциального включения (1.5) и существует (t_0, x_0, z_0): $(t_0, x_0, z_0) \notin$ gr $v(t_0, x_0)$, $(t_0, x_0, z_0) \in$ gr $\tilde{v}(t_0, x_0)$. В зависимости от того, в какой области лежит (t_0, x_0), выберем селектор $\{(g(u_i), 0)\} \subseteq E(t, x)$. Решения $(x(\cdot), z(\cdot))$ дифференциального включения (1.5) продолжимы до $t = T$ и $z(t) = z(T) \equiv z_0$. Кроме того, решения $(t, x(t), z(t)) \in$ gr $\tilde{v}$, $t \in [t_0, T]$. Противоречие с тем, что $\tilde{v}(T, x) = v_T(x)$. $\square$

Из утверждения (3) следует, что М-решение второго уравнения системы (1.1) однозначно.

Утверждение 4. *Решение второго уравнения системы* (1.1) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует М-решение второго уравнения системы (1.1) $\tilde{v}\colon \Pi_T \rightrightarrows \mathbb{R}$ такое, что $v(T,x) = \tilde{v}(T,x) = v_T(x)$, и существует

$$(t_0, x_0, z_0)\colon (t_0, x_0, z_0) \notin \ \mathrm{gr}\ v(t_0, x_0), \quad (t_0, x_0, z_0) \in \ \mathrm{gr}\ \tilde{v}(t_0, x_0).$$

Следуя рассуждениям, приведенным в доказательстве утверждения 3 о максимальности по включению М-решения, приходим к противоречию о том, что $\tilde{v}$ является М-решением второго уравнения системы (1.1). Следовательно, М-решение второго уравнения системы (1.1) единственно. □

Из утверждений 3, 4 следует, что М-решение второго уравнения системы (1.1) существует и единственно.

Исследуем поведение функции v, определенной (3.3), на границах области M. Напомним, что граница M состоит из точек $\{(t,x)\colon t \in [t_0, t_1],\ x = \tilde{x}(t, \alpha(t_1))\}$.

Утверждение 5. *Функция v, определенная* (3.3), *дифференцируема в точках* $\{(t,x)]\colon t \in [t_0, t_1],\ x = \tilde{x}(t, \alpha(t_1))\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим точку $(t^0, x^0) = (t^0, \tilde{x}(t^0, \alpha(t_1)))$. Обозначим

$$C = v_T'\Big(\tilde{x}(t^0, \alpha(t_1)) - \int\limits_T^{t^0} g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big).$$

Тогда

$$\lim_{(t,x)\to(t^0,x^0)} \frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = C\Big(-g(u_2(t^0, x^0)) - \int\limits_T^{t^0} \frac{\partial g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau}{\partial t}\Big),$$

$$\lim_{(t,x)\to(t^0,x^0)} \frac{\partial v(t,x)}{\partial x} = C\Big(1 - \int\limits_T^{t^0} \frac{\partial g(u_2(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))}{\partial x} d\tau\Big).$$

Функции $\partial v/\partial t$, $\partial v/\partial x$ непрерывны на множестве $(t,x) = (t, \tilde{x}(t, \alpha(t_1)))$, поэтому функция v дифференцируема на этом множестве. □

Утверждение 6. *В точках* $(t,x) = (t, \alpha(t))$, $t \in [t_0, t_1)$, *у функции v, определенной* (3.3), *существует D^+v или D^-v.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользовавшись определением 1, нетрудно проверить, что множество

$$\{(ka_\lambda, b_\lambda) | \lambda \in [0,1]\}, \qquad \text{где } k = v_T'\Big(\alpha(t) - \int\limits_T^{t} g(u_1(\tau, \tilde{x}(\tau, \xi)))d\tau\Big),$$

$$a = \lambda\Big(g(u_2(t, \alpha(t))) - g(u_1(t, \alpha(t)))\Big)\frac{\partial t^*}{\partial t} - \lambda g(u_2(t, \alpha(t))) - \lambda \int\limits_T^{t^*} \frac{\partial g(u_1(\tau, \tilde{x}))}{\partial t} d\tau$$

$$- (1-\lambda) g(u_1(t, \alpha(t))) - (1-\lambda) \int\limits_T^{t^*} \frac{\partial g(u_1(\tau, \tilde{x}))}{\partial t} d\tau,$$

$$b = \lambda\Big(g(u_2(t, \alpha(t))) - g(u_1(t, \alpha(t)))\Big)\frac{\partial t^*}{\partial x} - \lambda \int\limits_T^{t^*} \frac{\partial g(u_1(\tau, \tilde{x})))}{\partial x} d\tau + 1 - (1-\lambda) \int\limits_T^{t^*} \frac{\partial g(u_1(\tau, \tilde{x}))}{\partial x} d\tau,$$

является $D^{-}v(t,\alpha(t))$, $t\in[t_0,t_1)$, при $k\geq 0$ и $D^{+}v(t,\alpha(t))$, $t\in[t_0,t_1)$ при $k\leq 0$.

П р и м е р. Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2=0,\quad u(T,x)=|x|,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}\Big(\beta+\frac{\partial u}{\partial x}\Big)=0,\quad v(T,x)=x,$$

$x\in\mathbb{R}$, $T=2$, $t\in[0,T]$. Применяя формулу (1.3), получим решение первого уравнения

$$u(t,x)=|x|-t+T.$$

Видно, что функция u негладкая вдоль кривой $\alpha(t)=0$, $t\in[0,2]$. Тогда $u_1(t,\alpha(t))=1$, $u_2(t,\alpha(t))=-1$.

Пусть $|\beta|\leq 1$, тогда $g(u_1(t,\alpha(t)))=\beta+1\geq 0$, $g(u_2(t,\alpha(t)))=\beta-1\leq 0$. Следовательно, выполняется случай, когда $\dot\alpha$ удовлетворяет условию (2.1). Применяя формулу (2.4), получим решением второго уравнения

$$v(t,x)=\begin{cases} x-(\beta+1)(t-T), & x>0,\\ x-(\beta-1)(t-T), & x<0,\\ [(\beta-1)(t-T),(\beta+1)(t-T)], & x=0.\end{cases}$$

Видно, что решение v вдоль $x=\alpha(t)$ является многозначным.

Пусть $|\beta|>1$. В этом случае $\dot\alpha$ удовлетворяет условию (3.1). Непрерывное решение второго уравнения описывается формулой (3.3) и имеет вид

$$v(t,x)=\begin{cases} x-(\beta+1)(t-T), & x\geq 0,\\ x-(\beta-1)(t-T), & x<(\beta-1)(t-T),\\ \dfrac{\beta+1}{\beta-1}x-(\beta+1)(t-T), & (\beta-1)(t-T)<x<0.\end{cases}$$

Заметим, что решение v дифференцируемо в точках $x=(\beta-1)(t-T)$, а в точках $(t,\alpha(t))$ существует $D^{-}v(t,\alpha(t))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Friedman A.** Differential games. Courier corporation, 2013. 368 p.
2. **Bressan A., Shen W.** Small BV solutions of hyperbolic noncooperative differential games // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 1. P. 194–215. doi: 10.1137/S0363012903425581 .
3. **Averboukh Yu.** Universal Nash equilibrium strategies for differential games // J. Dyn. Control Syst. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 329–350. doi: 10.1007/s10883-014-9224-9 .
4. **Ostrov D.N.** Nonuniqueness in systems of Hamilton–Jacobi equations // Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis. Berlin: Springer, 2004. Vol. 301. P. 49–59 (Lect. Notes Control Inf. Sci.; vol. 301). doi: 10.1007/978-3-540-39983-4_3 .
5. **Zheng Y.P., Basar T., Cruz J.B.** Stackelberg strategies and incentives in multiperson deterministic decision problems // IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 1984. Vol. 14. P. 10–24. doi: 10.1109/TSMC.1984.6313265 .
6. **Huang F.** Existence and uniqueness of discontinuous solutions for a class of nonstrictly hyperbolic systems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1997. No. 6. P. 1193–1205. doi: 10.1017/S0308210500027013 .
7. **Шелкович В.М.** Условия Ренкина — Гюгонио и балансовые законы для δ-ударных волн // Фундаментальная и прикл. математика. 2006. Т. 12, вып. 6. С. 213–229.
8. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнения в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

9. **Лахтин А.С., Субботин А.И.** Многозначные решения уравнений с частными производными первого порядка // Мат. сб. 1998. Т. 189. С. 33–59.
10. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2013. 244 с.
11. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // J. Math. Sci. 2006. Vol. 135, no. 3. P. 2955–3091. (Modern Math. Appl.; vol. 20). doi: 10.1007/s10958-006-0146-2 .
12. **Колпакова Е.А.** Обобщенный метод характеристик в теории уравнений Гамильтона — Якоби и законов сохранения// Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, №5. С. 95–102.
13. **Evans L.C.** Partial differential equations. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 662 p. (Grad. Stud. Math.; vol. 19.) ISBN 0-8218-0772-2 .
14. **Crandall M.G, Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. P. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
15. **Олейник О.А.** Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями // Тр. Моск. мат. общества. 1956. Т. 5. С. 433–454.
16. **Dafermos C.M.** Hyperbolic conservation laws in continuum physics. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. 636 p. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). doi: 10.1007/978-3-642-04048-1 .

Колпакова Екатерина Алексеевна
канд. физ.-мат. наук,
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: kolpakova@imm.uran.ru

Поступила 30.10.2016

REFERENCES

1. Friedman A. *Differential games.* Courier corporation, 2013. 368 p.
2. Bressan A., Shen W. Small BV solutions of hyperbolic noncooperative differential games. *SIAM J. Control Optim.*, 2004, vol. 43, no. 1, pp. 194–215. doi: 10.1137/S0363012903425581 .
3. Averboukh Yu. Universal Nash equilibrium strategies for differential games. *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 329–350. doi: 10.1007/s10883-014-9224-9 .
4. Ostrov D.N. Nonuniqueness in systems of Hamilton–Jacobi equations. *Optimal Control, Stabilization and Nonsmooth Analysis*, Berlin: Springer, 2004, Lect. Notes Control Inf. Sci., vol. 301, pp. 49–59. doi: 10.1007/978-3-540-39983-4_3 .
5. Zheng Y.P., Basar T., Cruz J.B. Stackelberg strategies and incentives in multiperson deterministic decision problems. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, 1984, vol. 14, pp. 10–24. doi: 10.1109/TSMC.1984.6313265 .
6. Huang F. Existence and uniqueness of discontinuous solutions for a class of nonstrictly hyperbolic systems. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.*, 1997, no. 6, pp. 1193–1205. doi: 10.1017/S0308210500027013 .
7. Shelkovich V.M. The Rankine–Hugoniot conditions and balance laws for δ-shocks. *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), 2008, vol. 151, no. 1, pp. 2781–2792. doi:10.1007/s10948-008-0173-y .
8. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order partial differential equations: The dynamical optimization perspective.* Boston, Birkhäuser, 1995, Ser. System & Control: Foundations & Applications, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk, Institut Komp'yuternykh Issledovanii Publ., 2003, 336 p.
9. Lakhtin A.S., Subbotin A.I. Multivalued solutions of first-order partial differential equations. *Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no. 6, pp. 849–873. doi: 10.1070/SM1998v189n06ABEH000323 .
10. Subbotina N.N., Kolpakova E.A., Tokmantsev T.B., Shagalova L.G. *Metod kharakteristik dlya uravneniy Gamil'tona–Yakobi– Bellmana* [The method of characteristics for the Hamilton — Jacobi — Bellman equation]. Yekaterinburg, 2013, 244 p.
11. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 135, no. 3, Ser. Modern Math. Appl., vol. 20, pp. 2955–3091. doi: 10.1007/s10958-006-0146-2 .

12. Kolpakova E.A. A generalized method of characteristics in the theory of Hamilton–Jacobi equations and conservation laws. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 95–102.
13. Evans L.C. *Partial differential equations.* Providence: Amer. Math. Soc., 1998, Ser. Grad. Stud. Math., vol. 19., 662 p. ISBN 0-8218-0772-2 .
14. Crandall M.G, Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 277, pp. 1–42. doi: 10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8 .
15. Oleinik O.A. The problem of Cauchy for non-linear differential equations of the first order with discontinuous initial conditions. *Tr. Mosk. Mat. Obshchestva*, Moscow: GITTL Publ., 1956, vol. 5, pp. 433–454.
16. Dafermos C.M. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2010, Ser. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 636 p. doi: 10.1007/978-3-642-04048-1 .

E. A. Kolpakova Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: kolpakova@imm.uran.ru .

Том 23 № 1 2017

УДК 004.932

МОРФОЛОГИЧЕСКИЙ ПРОЕКТОР В МЕТРИКЕ L_0 И ЗАДАЧА ЛОКАЛИЗАЦИИ СТРУКТУРНЫХ РАЗЛИЧИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В. Б. Костоусов, Д. С. Перевалов

В работе рассматривается задача локализации структурных различий двух изображений, которые представлены борелевскими функциями на ограниченном подмножестве плоскости. Для случая конечнозначных изображений предложен новый алгоритм вычисления области различий, основанный на морфологической проекции в метрике L_0, и показано, что он дает точное решение для достаточно широкого класса структурных различий. Оказалось, что алгоритм, основанный на морфологической проекции в L_2, не дает точного решения в классе ограниченных структурных изменений. Для случая дискретных изображений, когда одно из них зашумлено дискретным независимым нормальным белым шумом, построен алгоритм вычисления области различий и показано, что симметрическая мера разности результата работы алгоритма и истинного множества различий стремится по вероятности к нулю при неограниченном росте отношения величины минимального скачка яркости к среднеквадратическому отклонению шума. Получена новая оценка положения точек глобального максимума гауссовой смеси специального вида.

Ключевые слова: морфологический анализ изображений, морфологический проектор, гауссова смесь, метрика L_0, структурные различия.

V. B. Kostousov, D. S. Perevalov. Morphological projector in the L_0 metric and the problem of localization of structural differences between images.

We consider the problem of localization of structural differences between two images given by Borel functions on a bounded planar set. For the case of finite-valued images, we propose a new algorithm for the calculation of the difference domain based on the morphological projection in the L_0 metric. It is shown that the algorithm gives an exact solution for a wide class of structural differences. It turned out that the algorithm based on the morphological projection in L_2 does not give an exact solution in the class of bounded structural changes. For the case of discrete images, when one of them is perturbed by a discrete independent normal white noise, we construct an algorithm for the calculation of the difference domain and show that the symmetric measure of the difference between the algorithm's output and the true difference set vanishes in probability under the unbounded growth of the ratio of the minimum jump to the standard deviation of the noise. We obtain a new estimate for the location of global maximum points for a Gaussian mixture of a special form.

Keywords: morphological analysis of images, morphological projector, Gaussian mixture, metric L_0, structural changes.

MSC: 62M40, 65D18, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-171-187

Введение

В настоящее время весьма актуальными становятся задачи, связанные с извлечением целевой информации из изображений. Это вызвано, в частности, массовым внедрением видеокамер и других источников изображений в самые различные области человеческой деятельности, такие как безопасность, охрана природы, сельское хозяйство, управление технологическими процессами, системы жизнеобеспечения, индустрия развлечений, современное искусство и т.д. Огромный поток видеоинформации становится невозможным переработать и эффективно использовать без автоматического отбора и обработки с целью извлечения необходимой информации для решения конкретной прикладной проблемы. Одной из задач обработки изображений является задача локализации на изображениях изменений, произошедших вследствие появления или исчезновения объектов в наблюдаемой сцене. При этом важно, чтобы алгоритм, решающий эту задачу, различал существенные изменения (называемые в данной работе *структурными*), произошедшие по указанной причине, от несущественных, которые произошли, например, вследствие изменения условий освещенности сцены.

Данная статья посвящена исследованию одного класса алгоритмов локализации структурных различий изображений. Рассматриваемый метод относится к области обработки изображений, известной как морфологический анализ [1–3]. Работа продолжает исследования [4–6]. Представленная в статье конструкция морфологической проекции в метрике L_0 укладывается в контекст обобщенной проективной морфологии, предложенной в [3].

Пусть имеются два изображения f и g, представленные борелевскими конечнозначными функциями, определенными на ограниченном борелевском подмножестве ненулевой меры $X \subset \mathbb{R}^2$. Будем считать, что оба изображения являются результатом съемки одной и той же сцены в разное время; при этом, быть может, некоторые объекты сцены исчезли или появились и, как следствие, возникли различия на изображениях в некоторой области $U \subseteq X$. Задача состоит в том, чтобы найти множество U, несмотря на то что изображения могут отличаться условиями съемки, в частности иметь разную среднюю яркость и контрастность.

В данной работе будет рассматриваться развитие алгоритма [2, с. 237], построенного в рамках морфологического анализа. В этом алгоритме для изображения f рассматривается множество изображений V_f, называемых *формой* f, которые могут быть получены из f всевозможными попиксельными изменениями яркостей. Вводится оператор $P_f g$, называемый *морфологическим проектором*, который сопоставляет изображению g его метрическую проекцию на V_f. Для порогового значения $T > 0$ в качестве оценки искомой области U полагается множество

$$\tilde{U} = \{x \in X \colon |g(x) - P_f g(x)| \geq T\}.$$

Оказывается, что при достаточно широких предположениях проектирование в метрике L_0 (см. [7]) позволяет точнее оценить U по сравнению со стандартным проектированием в L_2.

В разд. 1 вводятся определения и обозначения. В разд. 2 строится формальная постановка задачи вычисления структурных различий двух изображений как задача однозначного вычисления носителя функции структурных возмущений. В разд. 3 выясняются необходимые и достаточные условия на семейство допустимых носителей функций структурных возмущений для того, чтобы решение задачи существовало. В разд. 4 для одного, достаточно широкого, семейства допустимых носителей структурных возмущений предлагается метод построения решения задачи на основе проектора в метрике L_0. Кроме того, показывается, что для этого семейства проектор в пространстве L_2 в общем случае не дает точного решения. В разд. 5 рассматривается и исследуется алгоритм оценки носителя функции структурных возмущений для случая дискретных изображений, одно из которых зашумлено дискретным независимым нормальным белым шумом, а также получены новые результаты об оценке положения точек максимума гауссовой смеси специального вида. В разд. 6 приводятся результаты вычислительного эксперимента.

1. Определения и обозначения

$X \subseteq \mathbb{R}^2$ — *поле зрения*, ограниченное борелевское множество ненулевой меры [2].

$\mathfrak{B}(X)$ — семейство всех борелевских подмножеств X.

$\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ — некоторое семейство борелевских подмножеств X.

$\mu(U)$ — мера Лебега множества $U \in \mathfrak{B}(X)$.

χ_U — характеристическая функция множества $U \in \mathfrak{B}(X)$.

$U \bigsqcup W$ — дизъюнктная сумма множеств U и W.

$U \triangle W$ — симметрическая разность множеств, $U \triangle W = (U \setminus W) \cup (W \setminus U)$.

$\mathcal{I}(X)$ — *пространство изображений*, линейное пространство кусочно-постоянных борелевских функций на X, принимающих конечное число значений (за исключением, быть может, множеств меры нуль). Элементы этого пространства будем называть *изображениями*.

supp $h = \{x \in X : h(x) \neq 0\}$ — носитель функции $h : X \to \mathbb{R}$.
$h_{|W}$ — сужение функции h на множество W.
$\mathcal{F}$ — множество всех борелевских ограниченных функций на $\mathbb{R}$.
$F \circ f$ — изображение, определенное для $f \in \mathcal{I},\ F \in \mathcal{F}$ по правилу [2]:

$$(F \circ f)(x) = F(f(x)), \quad x \in X.$$

card M — мощность конечного множества M.
$\lfloor r \rfloor$ — целая часть числа $r \in \mathbb{R}$.

Все равенства множеств и функций, если не оговорено противное, предполагаются с точностью “почти всюду”: $U = W$ значит $\mu(U \triangle W) = 0$, $U \neq W$ значит $\mu(U \triangle W) > 0$, $U \subseteq W$ значит $\mu(U \setminus W) = 0$, $U \in \mathfrak{U}$ значит $\exists U' \in \mathfrak{U}\ \ \mu(U \triangle U') = 0$.

2. Задача вычисления области структурного различия изображений

Рассмотрим изображение $f \in \mathcal{I}(X)$. Будем считать, что оно получено при съемке некоторой физической сцены неподвижно закрепленной камерой. Пусть сцена была снята повторно, и в результате получено изображение $g \in \mathcal{I}(X)$. При этом в момент съемки g на сцене появились или исчезли объекты в некоторой области $U \in \mathfrak{B}(X)$ и съемка проводилась в других условиях освещения. Здесь мы предполагаем, что при съемке обоих изображений отсутствуют шумы (случай наличия шумов на g будет рассмотрен в разд. 5). Построим математическую модель связи g и f.

Факт появления или исчезновения объектов на изображении f в области U можно описать функцией $\bar{\delta} \in \mathfrak{B}(X)$, для которой supp $\bar{\delta} = U$, так что при съемке сцены с неизменными условиями освещения получилось бы изображение

$$f_1 = f + \bar{\delta}.$$

Изменение условий освещения можно представить в виде функции $F \in \mathcal{F}$, действующей на одинаковые значения яркостей изображения одинаково [2]; тогда $g = F \circ f_1$, откуда

$$g = F \circ (f + \bar{\delta}). \tag{2.1}$$

Множество U является областью, в которой изображение f изменилось существенно, так что данное изменение не компенсируется изменением яркостей точек по правилу F. Будем называть U *областью структурных различий* g *относительно* f.

С точки зрения анализа изображений представляет интерес следующая задача.

З а д а ч а. Вычислить U из уравнения (2.1) по известным $f,\ g \in \mathcal{I}(X)$ и неизвестным F, $\bar{\delta}$ с условием $U = \text{supp}\ \bar{\delta}$.

Обозначим $\delta = F \circ (f + \bar{\delta}) - F \circ f$. Прямой подстановкой доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1. *Если F является биекцией, то задача вычисления U из уравнения* (2.1) *эквивалентна вычислению U из уравнения*

$$g = F \circ f + \delta \tag{2.2}$$

с условием $U =$ supp δ. Кроме того, область структурных различий g относительно f совпадает с областью структурных различий f относительно g.

Из утверждения 1 следует, что в случае биективных F задача поиска области структурных различий симметрична относительно f и g и она эквивалентна задаче вычисления $U =$ supp δ, удовлетворяющей выражению (2.2).

Естественным условием в данной постановке задачи вычисления U по известным f и g является требование существования и единственности U (с точностью до множества меры 0). Это требование можно реализовать, задавая какие-либо ограничения на f, g, F и δ. В данной работе мы рассмотрим следующий вариант ограничений:

1) $f \in \mathcal{I}(X)$ — произвольное изображение;

2) $g \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}}$, где

$$\mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}} = \bigl\{F \circ f + \delta \colon F \in \mathcal{F}_b,\ \delta \in \mathcal{I}(X),\ \operatorname{supp} \delta \in \mathfrak{U}\bigr\}. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathcal{F}_b \subset \mathcal{F}$ — класс биективных функций на $\mathbb{R}$, $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ — некоторое заданное семейство борелевских подмножеств X, описывающее априорную информацию о возможных областях, на котором может произойти структурное изменение. Самый существенный момент — требование $\operatorname{supp}\delta \in \mathfrak{U}$. Оно означает, что мы ограничиваем семейство возможных областей структурных изменений изображений некоторым классом $\mathfrak{U}$ множеств из $\mathfrak{B}(X)$.

Можно заметить, что в отличие от исходной постановки задачи поиска структурных различий здесь f и g рассматриваются несимметрично: f может быть произвольной, а на g накладываются ограничения, в общем случае зависящие от f. В контексте задач анализа изображений данную ситуацию можно трактовать так: f считается эталоном, а g — его возмущенным вариантом.

В отличие от подхода [2] мы рассматриваем в качестве отображений F не произвольные, а только биективные функции, для того чтобы задача поиска структурных различий была симметрична относительно обоих изображений. В то же время полученные результаты относительно единственности разложения применимы и для небиективных F.

В этой постановке для произвольных $f \in \mathcal{I}(X)$, $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ и $g \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}}$ задача поиска $U = \operatorname{supp}\delta$ всегда разрешима, но, быть может, не единственным образом. Для обозначения случаев, когда задача разрешима единственным образом, введем следующее определение.

Определение 1. Изображение $f \in \mathcal{I}(X)$ и семейство множеств $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ *структурно согласованы*, если любое изображение $g \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}}$ раскладывается в сумму (2.2) единственным образом относительно $\operatorname{supp}\delta$, т. е.

$$g = F_1 \circ f + \delta_1 = F_2 \circ f + \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{supp}\delta_1 = \operatorname{supp}\delta_2.$$

В силу требования единственности разложения в определении 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2. *Структурная согласованность f и $\mathfrak{U}$ эквивалентна существованию оператора $\mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}} \colon \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}} \to \mathfrak{U}$ такого, что $\forall g = F \circ f + \delta \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}},\ \mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}}(g) = \operatorname{supp}\delta$.*

Согласно построению оператор $\mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}}$, который в дальнейшем называется *оператором структурных различий*, по заданному g вычисляет область структурных различий.

Так как единственность разложения на семействе влечет единственность разложения и на его подмножестве, справедливо следующее.

Утверждение 3. *Если f и $\mathfrak{U}$ структурно согласованы, то $\mathfrak{U}' \subseteq \mathfrak{U}$ также структурно согласовано с f.*

Ниже исследуются условия, при которых f и $\mathfrak{U}$ структурно согласованы.

3. Условия структурной согласованности

Для сокращения последующих выкладок введем обозначение для разложения f в линейную сумму характеристических функций [2]. Для $f \in \mathcal{I}(X)$ в силу его конечнозначности существуют $n^f > 0$ и последовательность чисел $r_1^f < \ldots < r_{n^f}^f \in \mathbb{R}$ таких, что

$$f = \sum_{i=1}^{n^f} r_i^f \, \chi_{S_i^f}, \quad \mu(S_i^f) > 0, \quad X = \bigsqcup_{i=1}^{n^f} S_i^f, \tag{3.1}$$

где $S_i^f = \{x \in X\colon f(x) = r_i^f\}$ — множество уровня r_i^f изображения f. Семейство $\{S_i^f\}_{i=1}^{n^f}$ образует разбиение X.

Из (2.2) и (3.1) следует

Лемма 1. *Для $f \in \mathcal{I}(X)$, $g = F \circ f + \delta \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}}$ справедливо*

$$\operatorname{supp} \delta = \operatorname{supp} \Big(g - \sum_{i=1}^{n^f} F(r_i^f)\, \chi_{S_i^f}\Big).$$

Теорема 1. *Пусть заданы $f \in \mathcal{I}(X)$ и $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ и существует отображение*

$$P : \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}} \to \mathbb{R}^{n^f}$$

такое, что для всех $g = F \circ f + \delta \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}}$ выполняется $P_i(g) = F(r_i^f)$, $\;i = \overline{1, n^f}$.

Тогда f и $\mathfrak{U}$ структурно согласованы и

$$\mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}}(g) = \operatorname{supp} \Big(g - \sum_{i=1}^{n^f} P_i(g)\, \chi_{S_i^f}\Big).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из леммы 1. □

Данная теорема утверждает, что для структурной согласованности f и $\mathfrak{U}$ достаточно, чтобы для всех $g = F \circ f + \delta$ было возможно однозначно вычислить $F(r_i^f)$, $i = \overline{1, n^f}$, и указывает способ конструктивного построения $\mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}}$.

Далее мы будем преимущественно исследовать такие f и $\mathfrak{U}$, для которых применим этот способ доказательства структурной согласованности. В то же время следующий пример показывает, что условия теоремы 1 не являются необходимыми.

П р и м е р 1. Рассмотрим $X = [0,1]^2$ и его разбиение на три непересекающихся борелевских множества одинаковой меры A, B, C.

Положим $f = 0 \cdot \chi_{A \cup B} + 1 \cdot \chi_C$. Тогда $n^f = 2$, $r_1^f = 0$, $r_2^f = 1$, $S_1^f = A \cup B$, $S_2^f = C$.

Для $\mathfrak{U} = \{\varnothing,\ A \cup C\}$ f и $\mathfrak{U}$ структурно согласованы:

$$\mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}}(g) = \begin{cases} \varnothing & : g_{|S_1^f} \equiv \text{const}, \\ A \cup C & : \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Зададим $g = 1 \cdot \chi_A + 0 \cdot \chi_B + 2 \cdot \chi_C$, $F_1(r) = r$, $\;F_2(r) = 3r$. Хотя $F_1(1) \neq F_2(1)$, в то же время, $g = F_1 \circ f + 1 \cdot \chi_A + 1 \cdot \chi_C = F_2 \circ f + 1 \cdot \chi_A - 1 \cdot \chi_C$.

Теорема 2. *Для того чтобы $f \in \mathcal{I}(X)$ и $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}(X)$ были структурно согласованы, достаточно выполнения условия*

$$\forall\, U_1, U_2 \in \mathfrak{U},\ \forall\, i = \overline{1, n^f} \quad S_i^f \not\subseteq U_1 \cup U_2. \tag{3.2}$$

Иначе говоря, никакое объединение двух произвольных элементов из $\mathfrak{U}$ не покрывает целиком ни одно из множеств уровня f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_b$, $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$, $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{I}(X)$ такие, что

$$F_1 \circ f + \delta_1 = F_2 \circ f + \delta_2, \quad \operatorname{supp} \delta_1 = U_1, \quad \operatorname{supp} \delta_2 = U_2.$$

По условию для $i = \overline{1, n^f}$ множество $W_i = S_i^f \setminus (U_1 \cup U_2)$ имеет ненулевую меру. В силу того что $(F_1 \circ f)_{|W_i} = (F_2 \circ f)_{|W_i}$, получаем $F_1(r_i^f) = F_2(r_i^f)$. Отсюда существует $P : \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}} \to \mathbb{R}^{n^f}$ такое, что для всех $g = F \circ f + \delta \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}}$ и всех $i = \overline{1, n^f}$ выполняется $P_i(g) = F(r_i^f)$. По теореме 1 f и $\mathfrak{U}$ структурно согласованы. □

Теорема 3. *Если $f \in \mathcal{I}(X)$ и $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}(X)$ структурно согласованы, то выполняется условие*

$$\forall U_1, U_2 \in \mathfrak{U} \;\; U_1 \cap U_2 = \varnothing, \quad \forall K \in \mathbb{N}, \quad \forall \{i_k\}_{k=1}^K \subseteq \{1, \ldots, n^f\} \quad \bigcup_{k=1}^K S_{i_k}^f \neq U_1 \cup U_2. \tag{3.3}$$

Иначе говоря, никакое объединение из двух непересекающихся элементов из $\mathfrak{U}$ не совпадает с объединением множеств уровня f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим противное, пусть существуют $\{i_k\}_{k=1}^K$ и непересекающиеся множества $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ такие, что $\bigcup_{k=1}^K L_{i_k} = U_1 \cup U_2$.

Положим $F_1(r) = r,\ r \in \mathbb{R}$,

$$F_2(r_i^f) = \begin{cases} r_i^f + 1/2 & : i = i_k,\ k = \overline{1, K}, \\ r_i^f & : \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Продолжим F_2 на $\mathbb{R}$ произвольным образом с сохранением условия биективности. Зададим $\delta_1 = 1/2\,\chi_{U_1}$, $\delta_2 = -1/2\,\chi_{U_2}$, тогда $F_1 \circ f + \delta_1 = F_2 \circ f + \delta_2$. В силу того что $\operatorname{supp} \delta_1 = U_1 \neq \operatorname{supp} \delta_2 = U_2$, мы получили противоречие со структурной согласованностью f и $\mathfrak{U}$. □

Следующий пример показывает, что условие теоремы 3 не является достаточным для структурной согласованности.

П р и м е р 2. Рассмотрим $X = [0,1]^2$ и его разбиение на три непересекающихся борелевских множества одинаковой меры A, B, C. Положим $f = 0 \cdot \chi_{A \cup B} + 1 \cdot \chi_C$. Тогда $n^f = 2$, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $L_1 = A \cup B$, $L_2 = C$.

При $\mathfrak{U} = \{\varnothing,\ U_1,\ U_2\}$, где $U_1 = A \cup C$, $U_2 = B \cup C$, условие теоремы 3 выполнено для f и $\mathfrak{U}$. Зададим $F_1(r) = 1 - r$, $F_2(r) = 2r$, $\delta_1 = -1 \cdot \chi_A + 1 \cdot \chi_C$, $\delta_2 = 1 \cdot \chi_B - 1 \cdot \chi_C$. Тогда $F_1 \circ f + \delta_1 = F_2 \circ f + \delta_2$. Так как $\operatorname{supp} \delta_1 = U_1 \neq \operatorname{supp} \delta_2 = U_2$, то f и $\mathfrak{U}$ не являются структурно согласованными.

В следующем подразделе показано, что для случая, когда $\mathfrak{U}$ обладает свойством наследственности относительно подмножеств [8], условия теорем 2 и 3 являются необходимыми и достаточными для структурной согласованности.

3.1. Характеризация структурной согласованности для семейств со свойством наследственности

Для $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ обозначим через $[\mathfrak{U}]_\subseteq$ семейство, полученное пополнением $\mathfrak{U}$ операцией взятия подмножеств: $[\mathfrak{U}]_\subseteq = \{U' \in \mathfrak{B}(X) \colon \exists U \in \mathfrak{U},\ U' \subseteq U\}$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем называть $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ *наследственным семейством* (*замкнутым относительно операции взятия подмножеств*), если $\mathfrak{U} = [\mathfrak{U}]_\subseteq$.

П р и м е р 3. $\mathfrak{U} = \mathfrak{B}(X)$ является наследственным, но не является структурно согласованным ни с каким $f \in \mathcal{I}(X)$ в силу теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть $f \in \mathcal{I}(X)$, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{B}(X)$ и $\mathfrak{U} = [\mathfrak{U}]_\subseteq$. Тогда f и $\mathfrak{U}$ структурно согласованы тогда и только тогда, когда для всех $i = \overline{1, n^f}$*

$$U \in \mathfrak{U}, \quad U \subseteq S_i^f \;\Rightarrow\; S_i^f \setminus U \notin \mathfrak{U}. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства *достаточности* рассмотрим $U_1, U_2 \in \mathfrak{U}$ и произвольный $i = \overline{1, n^f}$. Тогда $U_1' = U_1 \cap S_i^f \in \mathfrak{U}$, поэтому, $S_i^f \setminus U_1' \notin \mathfrak{U}$. В то же время $U_2' = (U_2 \setminus U_1) \cap S_i^f \in \mathfrak{U}$, следовательно, $U_2' \neq S_i^f \setminus U_1'$. Это значит, что объединение U_1 и U_2 не покрывает S_i^f, а потому выполняется утверждение теоремы 2.

Для доказательства *необходимости* рассмотрим произвольные $i = \overline{1, n^f}$ и $U \in \mathfrak{U}$, $U \subseteq S_i^f$. Для $W = S_i^f \setminus U$ выполняется $U \cup W = S_i^f$, откуда по теореме 3 $W \notin \mathfrak{U}$. □

Следствие 1. *Пусть* $f \in \mathcal{I}(X)$, $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ *и* $\mathfrak{U} = [\mathfrak{U}]_{\subseteq}$. *Условие структурной согласованности* f *и* $\mathfrak{U}$ *эквивалентно выполнению одного из условий,* (3.2) *или* (3.3).

Пример 4. Рассмотрим $f \in \mathcal{I}(X)$ и некоторое множество $U^* \in \mathfrak{B}(X)$ такое, что для всех $i = \overline{1, n^f}$ выполняется $\mu(U^* \cap S_i^f) < \mu(S_i^f)$. Тогда по следствию 1 $\mathfrak{U} = [\{U^*\}]_{\subseteq}$ является наследственным семейством, структурно согласованным с f.

В следующем подразделе показывается, что для заданного f среди наследственных семейств $\mathfrak{U}$, обладающих свойством так называемой однородности, существует единственное максимальное семейство, структурно согласованное с f.

3.2. Существование и единственность наследственного семейства, однородного и структурно согласованного с заданным изображением

Для $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$, $f \in \mathcal{I}(X)$ обозначим через $[\mathfrak{U}]_f$ семейство, полученное из $\mathfrak{U}$ по следующему правилу:

$$[\mathfrak{U}]_f = \Big\{W \in \mathfrak{B}(X) \colon \exists\, U \in \mathfrak{U},\ \forall\, i = \overline{1, n^f}\ \big(\mu(U \cap S_i^f) = \mu(W \cap S_i^f)\big)\Big\}.$$

То есть $[\mathfrak{U}]_f$ состоит из множеств, значения мер которых внутри S_i^f совпадают со значениями соответствующих мер элементов из $\mathfrak{U}$.

Определение 3. Будем говорить, что *семейство* $\mathfrak{U}$ *однородно относительно* f, если $[\mathfrak{U}]_f = \mathfrak{U}$.

Прямой проверкой доказывается следующее утверждение.

Утверждение 4. *Для* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ *и* $f \in \mathcal{I}(X)$ *операция пополнения по подмножествам* $[\ .\ ]_{\subseteq}$ *и операция пополнения по однородности* $[\ .\ ]_f$ *коммутируют*: $[\ [\mathfrak{U}]_{\subseteq}\ ]_f = [\ [\mathfrak{U}]_f\ ]_{\subseteq}$.

Следствие 2. *Для* $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ *и* $f \in \mathcal{I}(X)$, *семейство* $[\,[\mathfrak{U}]_{\subseteq}\,]_f$ *является наследственным и однородным относительно* f.

Для $f \in \mathcal{I}(X)$ обозначим

$$\mathfrak{U}_f = \Big\{U \in \mathfrak{B}(X) \colon \forall\, i = \overline{1, n^f}\ \big(\mu(U \cap S_i^f) < \frac{1}{2}\mu(S_i^f)\big)\Big\}. \tag{3.5}$$

Теорема 5. *Для* $f \in \mathcal{I}(X)$ *семейство* $\mathfrak{U}_f$ *является единственным семейством, максимальным по включению среди всех наследственных семейств, однородных относительно* f *и структурно согласованных с* f.

Доказательство. Наследственность и однородность $\mathfrak{U}_f$ следуют из (3.5). Для $U \in \mathfrak{U}_f$, $i = \overline{1, n^f}$ из (3.5) имеем $\mu(S_i^f \setminus U) > 1/2\, \mu(S_i^f)$, поэтому $S_i^f \setminus U \notin \mathfrak{U}$, следовательно, по теореме 4 f структурно согласовано с $\mathfrak{U}_f$.

Для доказательства максимальности и единственности $\mathfrak{U}_f$ достаточно проверить, что ни один элемент $W \in \mathfrak{B}(X) \setminus \mathfrak{U}_f$ не может содержаться ни в каком однородном замкнутом семействе, структурно согласованом с f. В силу утверждения 3 и следствия 2 достаточно доказать, что для $W \in \mathfrak{B}(X) \setminus \mathfrak{U}_f$, $\mathfrak{U}' = [[W]_{\subseteq}]_f$ не является структурно согласованным с f.

По построению W существует $i = \overline{1, n^f}$ такой, что $\mu(W \cap S_i^f) \geq 1/2\, \mu(S_i^f)$. Обозначим $W' = W \cap S_i^f$. В силу замкнутости $\mathfrak{U}'$ справедливо $W' \in \mathfrak{U}'$.

Так как $\mu(S_i^f \setminus W') < 1/2\, \mu(S_i^f) \leq \mu(W')$, то можно построить множество $W'' \subseteq S_i^f$ такое, что $S_i^f \setminus W' \subseteq W''$ и $\mu(W'') = \mu(W')$. В силу однородности $\mathfrak{U}'$ справедливо $W'' \in \mathfrak{U}'$.

Имеем $W', W'' \in \mathfrak{U}'$, $S_i^f \subseteq W' \cup W''$. Таким образом, условие (3.2) не выполняется и по следствию 1 $\mathfrak{U}'$ не является структурно согласованным с f. $\square$

4. Вычисление оператора структурных различий на $\mathfrak{U}_f$

В данном разделе обсуждается алгоритм вычисления оператора $\mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}_f}$. Для его вычисления требуется понятие так называемой метрики L_0 [7]. Для $h_1, h_2 \in \mathcal{I}(X)$ расстояние между ними в L_0 определяется как $\|h_1 - h_2\|_{L_0} = \lim_{p\to 0} \|h_1 - h_2\|^p_{L_p}$. В силу ограниченности $h_1 - h_2$, данный предел существует, и может быть вычислен по формуле

$$\|h_1 - h_2\|_{L_0} = \mu(\mathrm{supp}\ (h_1 - h_2)).$$

В дискретном случае эта метрика известна как 0-норма [7] и расстояние Хэмминга [9].

Определение 4. Для $f \in \mathcal{I}(X)$ *формой* f [2] называется множество

$$\mathbf{V}_f = \{F \circ f \colon F \in \mathcal{F}\}. \tag{4.1}$$

Важно отметить, что в определении формы участвуют не только биективные, но и не биективные борелевские функции на $\mathbb{R}$. В частности, $\mathbf{V}_f$ изоморфно $\mathbb{R}^{n^f}$.

Определение 5. Для $p \in \{0\} \cup [1, +\infty) \cup \{+\infty\}$, $f, g \in \mathcal{I}(X)$ будем говорить, что *существует проекция g на форму f в метрике L_p*, если $\min\{\|g - \tilde{g}\|_{L_p} \colon \tilde{g} \in \mathbf{V}_f\}$ достигается на единственном изображении $\tilde{g}$. В этом случае будем обозначать

$$\mathrm{Proj}_f^{L_p}(g) = \mathrm{argmin}\big\{\|g - \tilde{g}\|_{L_p} \colon \tilde{g} \in \mathbf{V}_f\big\}.$$

Известно [2], что для $p = 2$ проекция на форму f существует для всех $g \in \mathcal{I}(X)$.

Теорема 6. *Для $f \in \mathcal{I}(X)$ и $g \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}_f}$ (см. (2.3)) существует проекция g на форму f в метрике L_0 и выполняется равенство*

$$\mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}_f}(g) = \mathrm{supp}\ \big(g - \mathrm{Proj}_f^{L_0}(g)\big). \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть $g = F \circ f + \delta$, $U = \mathrm{supp}\ \delta$. Так как $U \in \mathfrak{U}_f$, то для произвольного $i = \overline{1, n^f}$ выполняется $\mu(U \cap S_i^f) < 1/2\, \mu(S_i^f)$, откуда

$$F(r_i^f) = \underset{\tilde{r}\in\mathbb{R}}{\mathrm{argmax}} \Big(\mu(g^{-1}(\tilde{r}) \cap S_i^f)\Big) = \underset{\tilde{r}\in\mathbb{R}}{\mathrm{argmin}} \Big(\|g_{|S_i^f} - \tilde{r}\,\chi_{S_i^f}\|_{L_0}\Big).$$

Следовательно, проекция g на форму f в метрике L_0 существует, и

$$\mathrm{Proj}_f^{L_0}(g) = \sum_{i=1}^{n^f} F(r_i^f)\,\chi_{S_i^f}.$$

Применение леммы 1 завершает доказательство. □

Теорема 6 показывает, что для семейства $\mathfrak{U}_f$ проекция на форму f в метрике L_0 позволяет вычислить область структурных различий изображений f и $g \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}_f}$ с помощью алгоритма (4.2).

Исследование алгоритма, использующего проекцию в L_2. В работах [2, п. 9.2.1.; 5] для поиска различий между изображениями $f, g \in \mathcal{I}(X)$ используется пороговая обработка разности g и проекцией g на форму f в L_2. А именно для порога $T > 0$ определяется оператор $\mathbf{U}^{L_2}_{f,T} \colon \mathcal{I}(X) \to \mathfrak{B}(X)$:

$$\mathbf{U}^{L_2}_{f,T}(g) = \Big\{x \in X \colon |g(x) - \mathrm{Proj}_f^{L_2}(g)| \geq T\Big\}. \tag{4.3}$$

Известно, что данный оператор однозначно определен [1] и может служить оценкой множества структурных различий U [5]. Следующее утверждение показывает, в каких случаях это выполняется на $\mathfrak{U}_f$.

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathcal{I}(X)$, $g \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}_f}$. Тогда существует $T > 0$ такой, что $\mathbf{U}^{L_2}_{f,T}(g) = \mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}_f}(g)$ тогда и только тогда, когда $\|(g - \mathrm{Proj}^{L_2}_f(g))_{|X\setminus U}\|_C < \min_{x\in U} |(g - \mathrm{Proj}^{L_2}_f(g))(x)|$, где $\|.\|_C$ — норма в метрике L_∞.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что $\mathbf{U}_{f,\mathfrak{U}_f}(g) = \mathbf{U}^{L_2}_{f,T}(g)$ тогда и только тогда, когда найдется $T > 0$ такой, что

$$\forall x' \in X \setminus U,\ x \in U \quad \left|(g - \mathrm{Proj}^{L_2}_f(g))(x')\right| \le T < \left|(g - \mathrm{Proj}^{L_2}_f(g))(x)\right|. \qquad \square$$

Утверждение 5. *Пусть $f \in \mathcal{I}(X)$, $U \in \mathfrak{U}_f$, $\mu(U) > 0$. Тогда существует $\delta \in \mathcal{I}(X)$ такое, что* $\mathrm{supp}\ \delta = U$, *$\|\delta\|_C = 1$, и для любого $T > 0$ для $g = f + \delta$ справедливо $\mathbf{U}^{L_2}_{f,T}(g) \ne U$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдется $i = \overline{1, n^f}$ такое, что $\mu(U \cap S^f_i) > 0$. Разобьем $U \cap S^f_i$ на два непересекающихся множества U_1, U_2 так, что $\mu(U_1) = \mu(U_2) = \alpha\, \mu(S^f_i)$. Поскольку $U \in \mathfrak{U}_f$, то $\alpha < 1/4$. Положим

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{1-\alpha} & : x \in U_1, \\ 1 & : x \in U \setminus U_1, \\ 0 & : x \in X \setminus U. \end{cases}$$

Тогда $\mathrm{supp}\ \delta = U$, $\|\delta\|_C = 1$, $\mathrm{Proj}^{L_2}_f(g)_{|S^f_i} \equiv r^f_i + \dfrac{\alpha}{1-\alpha}\alpha + 1 \cdot \alpha \equiv r^f_i + \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$.

Следовательно, $\big(g - \mathrm{Proj}^{L_2}_f(g)\big)_{|S^f_i \setminus U} \equiv \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, $\big(g - \mathrm{Proj}^{L_2}_f(g)\big)_{|U_1} \equiv 0$. Применение леммы 2 доказывает утверждение. $\square$

Согласно этому утверждению для произвольного изображения $f \in \mathcal{I}(X)$ и множества ненулевой меры $U \in \mathfrak{U}_f$ существуют такие возмущения δ, для которых оператор $\mathbf{U}^{L_2}_{f,T}$ ни при каком параметре $T > 0$ не позволяет вычислить область структурных различий.

5. Анализ изображений, искаженных случайным шумом

Ранее мы рассматривали случай, когда возмущенное изображение g формировалось путем изменения его значений по детерминированному правилу. В данном разделе мы рассмотрим ситуацию, когда изображение g дополнительно содержит случайный аддитивный некоррелированный нормальный шум.

Для исследования этого вопроса потребуется знание свойств точек глобального максимума гауссовой смеси [10, Ch. 2.2, p. 30] специального вида. В [10–14] исследуются свойства, при которых гауссовы смеси унимодальны, то есть имеют единственный локальный максимум. В то же время, вопрос положения глобальных максимумов не рассмотрен. Этому вопросу посвящен следующий подраздел.

5.1. Свойства глобальных максимумов гауссовой смеси

Обозначим

$$\omega(r, m) = e^{-(r-m)^2/2}. \tag{5.1}$$

Стандартными методами математического анализа доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Рассмотрим $A \in \mathbb{R}$, $A > 2$,*

$$\rho_0(r) = \omega(r, 0) + \omega(r, A). \tag{5.2}$$

Функция $\rho_0(r)$ имеет два глобальных максимума, достигаемых в точках

$$r_1 = \gamma(A), \quad r_2 = A - \gamma(A),$$

где $\gamma(r)$ *— непрерывная монотонно убывающая функция, определенная на* $r \in (2, +\infty)$*, со свойствами* $0 < \gamma(r) < r/2,\ \gamma(2+0) = 1,\ \gamma(+\infty) = 0$.

Кроме того, $\gamma = \gamma(r)$ *для каждого* r *может быть найдено из трансцендентного уравнения*

$$\ln\left(\frac{r}{\gamma} - 1\right)^2 = r(r - 2\gamma), \quad r > 2, \quad 0 < \gamma < r/2. \tag{5.3}$$

Теорема 7. *Пусть* $\Delta,\ \sigma > 0,\ \Delta/\sigma > 2,\ K \in \mathbb{N}$ *и заданы вещественные последовательности* $(\Delta_k)_{k=1}^K$, $(\alpha_k)_{k=0}^K$,

$$|\Delta_k| \geq \Delta, \quad k = \overline{1, K},$$

$$\sum_{k=0}^K \alpha_k = 1, \quad \alpha_0 > 1/2, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k = \overline{1, K}.$$

Тогда точки глобальных максимумов гауссовой смеси

$$\rho(r) = \alpha_0 \, \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} + \sum_{k=1}^K \alpha_k \, \tfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(r-\Delta_k)^2}{2\sigma^2}}$$

лежат на некотором отрезке $[-R, R]$*, где* $|R| < \gamma(\Delta/\sigma)\,\sigma$ *и* $\gamma(r)$ *— функция, введенная в лемме* 3.

Доказательство. Для сокращения выкладок перейдем от r к r/σ и от α_k к α_k/α_0 и оставим прежние обозначения. Примем $A = \Delta/\sigma$, $A_k = \Delta_k/\sigma$. Для доказательства теоремы достаточно убедиться, что глобальные максимумы функции

$$\tilde{\rho}(r) = \omega(r, 0) + \sum_{k=1}^K \alpha_k \, \omega(r, A_k)$$

лежат на некотором отрезке $[-R, R]$, где $0 < R < \gamma(\Delta)\,\sigma$. Для упрощения обозначений в доказательстве будем считать $\rho = \tilde{\rho}$.

Сначала рассмотрим случай, когда все A_k положительны либо отрицательны. Не ограничивая общности, рассмотрим случай $A_k > 0$, что по условию означает $A_k \geq A$.

На промежутке $r \in (-\infty, 0)$ выполняется $\rho'(r) > 0$, поэтому ρ не имеет экстремумов.

На промежутке $r \in [0, A/2]$, так как $\sum_{k=1}^K \alpha_k < 1$, справедливо $\rho' < \rho_0'$, где ρ_0 задано выражением (5.2). Из леммы 3 $\rho_0'(\gamma(A)) = 0$, следовательно, $\rho'(\gamma(A)) < 0$. Так как $\rho'(0) > 0$, то ρ обладает локальным максимумом в $(0, \gamma(A))$. Рассмотрим точку максимального значения в этом интервале и обозначим ее через r_0. На отрезке $[\gamma(A), A/2]$ $\rho' < \rho_0' \leq 0$, а потому максимум ρ на $[0, A/2]$ достигается в r_0.

На промежутке $r \in (A/2, A]$ справедливо $\rho(r) < \rho(A/2 - (r - A/2))$, откуда максимум ρ на $[0, A]$ достигается на $[0, A/2]$, т. е. в r_0.

Нам осталось рассмотреть промежуток $r \in (A, +\infty)$ и показать, что значения ρ на нем строго меньше $\rho(r_0)$. От противного допустим, что найдется такое $\tilde{A} > A$, что $\rho(\tilde{A}) \geq \rho(r_0)$. В силу убывания γ $\gamma(\tilde{A}) < \gamma(A)$, а потому

$$\rho(\gamma(\tilde{A})) \leq \rho(r_0) \leq \rho(\tilde{A}). \tag{5.4}$$

Обозначим $\tilde{\rho}_0(r) = \omega(r, 0) + \omega(r, \tilde{A})$. В силу того что $\omega(r, m)$ возрастает при $r < m$ и убывает при $r > m$, верно $\tilde{\rho}_0(\tilde{A}) - \tilde{\rho}_0(\gamma(\tilde{A})) \geq \rho(\tilde{A}) - \rho(\gamma(\tilde{A}))$.

Из (5.4) вытекает, что $\rho(\tilde{A}) - \rho(\gamma(\tilde{A})) \geq 0$, но по лемме 3 $\tilde{\rho}_0(\tilde{A}) < \tilde{\rho}_0(\gamma(\tilde{A}))$. Мы получили противоречие, следовательно, r_0 — глобальный максимум ρ на $\mathbb{R}$, $r_0 \in (0, \gamma(A))$.

Нам осталось рассмотреть случай, когда некоторые A_k положительны и некоторые отрицательны. В этом случае согласно доказанной части теоремы максимумы частичных сумм для отрицательных и положительных A_k достигаются в $r_1 \in (-\gamma(A), 0)$ и $r_2 \in (0, \gamma(A))$ соответственно. Тогда глобальные максимумы ρ лежат в $[r_1, r_2]$. Если взять $R = \max(-r_1, r_2)$, то утверждение теоремы выполняется. □

5.2. Вычисление области структурных различий

Здесь вместо (2.2) рассматривается следующая модель структурных различий изображений:

$$\xi = F \circ f + \delta_\Delta + \nu \ \in \mathcal{I}(X), \tag{5.5}$$

где ν — дискретный независимый нормальный белый шум, а δ_Δ отличается от δ условием отделимости от нуля на некоторое значение $\Delta > 0$:

$$\forall x \in \operatorname{supp} \delta_\Delta \quad |\delta_\Delta(x)| \geq \Delta. \tag{5.6}$$

В силу того, что идеальный белый шум нереализуем в виде конечной функции [15], будем рассматривать его дискретные аппроксимации на уменьшающихся разбиениях X. Для этого, вместо класса конечнозначных изображений $\mathcal{I}(X)$ в в данном подразделе будем рассматривать более узкие классы изображений.

А именно будем считать, что $X = \bigsqcup_{k=1}^{K} X_k$, где X_k — элементы регулярной сетки, разбивающей поле зрения X на K непересекающихся ячеек площадью $q > 0$ (аналог пикселей в обработке изображений). Обозначим этот набор ячеек через Ω_1, card $\Omega_1 = K$. Также нам потребуются разбиения Ω_1. Для натурального $d \geq 2$ обозначим через $\Omega_d = (X_j^d)_{j=1}^{Kd}$ дизъюнктный набор Kd множеств, полученных разбиением каждого X_k на d частей одинаковой меры q/d и занумерованных по порядку так, что $X_k = \bigsqcup_{j=a_k^d}^{b_k^d} X_j^d$, где $a_k^d = (k-1)d + 1$, $b_k^d = kd$. Справедливо включение $X_j^d \subseteq X_{k_j^d}$, где $k_j^d = \lfloor (j-1)/d + 1 \rfloor$.

Обозначим через $\mathcal{I}_{\Omega_d}(X) \subset \mathcal{I}(X)$ множество изображений, которые имеют постоянное значение в пределах ячеек разбиения Ω_d:

$$I_{\Omega_d}(X) = \Big\{ \sum_{j=1}^{Kd} c_j \, \chi_{X_j^d} \colon c_j \in \mathbb{R} \Big\}.$$

По построению $\mathcal{I}_{\Omega_1}(X) \subseteq \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$. Для удобства определим через $c_j^d(h)$ значение функции $h \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$ на X_j^d, т. е. $h = \sum_{j=1}^{Kd} c_j^d(h) \, \chi_{X_j^d}$. Для сокращения записи будем обозначать $c_k(h) = c_k^1(h)$.

Будем считать, что $f, \delta_\Delta \in \mathcal{I}_{\Omega_1}(X)$, а $\nu \in \Omega_d(X)$ для некоторого $d \geq 1$, т. е. множества уровней исходного изображения и функции структурного различия заданы на ячейках Ω_1, а множества уровней функции шума — на разбиении этих ячеек. Как будет показано в теореме 8, выбрав достаточно большой параметр разбиения d, можно добиться устойчивого вычисления статистических свойств ξ на элементах X_k, что позволит перейти от дискретных статистических оценок к анализу свойств функций распределений соответствующих случайных величин.

Опишем более подробно *модель шума* ν. А именно обозначим через $v^d \in \mathbb{R}^{Kd}$ случайный нормальный вектор пространства $\mathbb{R}^{Kd}$ с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей $\sigma^2 \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ — единичная матрица размером $Kd \times Kd$, $\sigma^2 > 0$ — дисперсия шума), $v^d \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$. По полю зрения X этот дискретный шум распределен следующим образом:

$$c_j^d(\nu) = v_j^d, \quad \nu(x) = \sum_{j=1}^{Kd} v_j^d \, \chi_{X_j^d}(x).$$

Рассмотрим схему квантования значений изображений. Для $\tau > 0$ и $h \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$ будем обозначать квантованное изображение $h^\tau \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$, построенное по правилу

$$c_j^d(h^\tau) = \tau \, \lfloor c_j^d(h)/\tau \rfloor.$$

Это изображение принимает значения из дискретного множества $\{\tau j \colon j \in \mathbb{Z}\}$ и аппроксимирует h с точностью τ: $c_j^d(h) \in [c_j^d(h^\tau), c_j^d(h^\tau) + \tau)$.

В теореме 6 было показано, что для $h \in \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}_f}$ множество $\operatorname{Argmin}\{||h-\tilde{h}||_{L_0} \colon \tilde{h} \in \mathbf{V}_f\}$ состоит в точности из одного изображения и с учетом этого факта был однозначно определен оператор $\mathrm{Proj}_f^{L_0}$ на $\mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}_f}$. Доопределим $\mathrm{Proj}_f^{L_0}$ на $\mathcal{I}(X) \setminus \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}_f}$. Для произвольного $h \in \mathcal{I}(X) \setminus \mathbf{V}_{f,\mathfrak{U}_f}$ вследствие конечнозначности h и f множество $\mathbf{A} = \operatorname{Argmin}\{||h-\tilde{h}||_{L_0} \colon \tilde{h} \in \mathbf{V}_f\} \subset \mathcal{I}_\Omega(X)$ является конечным. Зададим $\mathrm{Proj}_f^{L_0}(h) = \tilde{h} \in \mathbf{A}$ по правилу $c_k(\tilde{h}) = \min\{c_k(h') \colon h' \in \mathbf{A}\}$.

Алгоритм оценки $U = \operatorname{supp} \delta_\Delta$ для ξ, заданного выражением (5.5), определим следующим образом:

$$\mathbf{U}^{L_0}_{f,\Delta,\tau}(\xi) = \Big\{x \in X \colon |\xi^\tau(x) - \mathrm{Proj}_f^{L_0}(\xi^\tau(x))| \geq \frac{\Delta}{2}\Big\}. \tag{5.7}$$

Обозначим через $\mathcal{I}^\Delta_{\Omega_d}(X)$ множество изображений из $\mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$, для которых выполняется условие (5.6).

Теорема 8. *Пусть $\Delta, \sigma > 0$, $\Delta/\sigma > 2$, $q > 0$, $f \in \mathcal{I}_{\Omega_d}(X)$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ с вероятностью не менее $1-\varepsilon$ найдутся такие $d_0 \in \mathbb{N}$, $\tau_0 > 0$, что для любых $d > d_0$, $\tau \in (0,\tau_0)$ и любых $F \in \mathcal{F}_b$, $U \in \mathfrak{U}_f$, $\delta_\Delta \in \mathcal{I}^\Delta_{\Omega_d}(X)$, $\operatorname{supp} \delta_\Delta = U$, справедлива оценка*

$$\mu(\mathbf{U}^{L_0}_{f,\Delta,\tau}(\xi) \triangle U) \leq 3\,\mu(X)\,\Phi\Big(\gamma\Big(\frac{\Delta}{\sigma}\Big) - \frac{\Delta}{2\sigma}\Big) + \varepsilon, \tag{5.8}$$

где $\Phi(r)$ — функция стандартного нормального распределения, функция $\gamma(r)$ определяется уравнением (5.3), непрерывна и монотонно убывает к нулю при $r \to +\infty$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,1)$.

Рассмотрим $d \in \mathbb{N}$. Обозначим $f_k = c_k(f)$, $\Delta_k = c_k(\delta_\Delta)$, $k = \overline{1,K}$. Для k таких, что $X_k \subseteq U$, выполняется

$$|\Delta_k| \geq \Delta, \tag{5.9}$$

в противном случае $\Delta_k = 0$. Имеем

$$\xi = \sum_{j=1}^{Kd} (F(f_{k_j^d}) + \Delta_{k_j^d} + v_j)\,\chi_{X_j^d}, \tag{5.10}$$

$$\xi^\tau = \sum_{j=1}^{Kd} \tau \Big\lfloor \frac{F(f_{k_j^d}) + \Delta_{k_j^d} + v_j}{\tau} \Big\rfloor \chi_{X_j^d}.$$

Для $i = \overline{1, n^f}$ обозначим $K_i = \operatorname{card}\{k \colon X_k \subseteq S_i^f\}$,

$$\Psi^{\xi,i}(r) = \frac{1}{K_i d} \operatorname{card}\big\{j \colon X_j^d \subseteq S_i^f,\ F(r_i^f) + \Delta_{k_j} + v_j < r\big\},$$

$$\Psi^{\xi^\tau,i}(r) = \frac{1}{K_i d} \operatorname{card}\Big\{j \colon X_j^d \subseteq S_i^f,\ \tau \Big\lfloor \frac{F(r_i^f) + \Delta_{k_j} + v_j}{\tau} \Big\rfloor < r\Big\},$$

Для $z \in \mathbb{Z}$ справедливо $\Psi^{\xi,i}(z\tau) = \Psi^{\xi^\tau,i}(z\tau)$.

Для $h^* = \mathrm{Proj}_f^{L_0}(\xi^\tau(x))$ введем $r_k^* = c_k(h^*)$, тогда

$$r_i^* \in \operatorname*{Argmax}_{r \in \mathbb{R}} \Big\{\operatorname{card}\Big\{j \colon X_j^d \subseteq S_i^f,\ \tau \Big\lfloor \frac{F(r_i^f) + \Delta_{k_j} + v_j}{\tau} \Big\rfloor = r\Big\}\Big\}$$

$$= \operatorname*{Argmax}_{r = z\tau, z \in \mathbb{Z}} \{\Psi^{\xi^\tau,i}(r+\tau) - \Psi^{\xi^\tau,i}(r)\} = \operatorname*{Argmax}_{z \in \mathbb{Z}} \{\Psi^{\xi,i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi,i}(z\tau)\}.$$

То есть

$$r_i^* \in \operatorname*{Argmax}_{z \in \mathbb{Z}} \{\Psi^{\xi,i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi,i}(z\tau)\}. \tag{5.11}$$

Займемся оценкой r_i^*. Примем $\Psi_k^{\xi}(r) = \dfrac{1}{d}\operatorname{card}\{j = \overline{a_k^d, b_k^d}\colon F(f_k) + \Delta_k + v_j < r\}$. (Аналогично обозначим через $\Psi_k^{\xi^\tau}(r)$ соответствующее выражение для ξ^τ.) Функция Ψ_k является эмпирической функцией распределения для d реализаций случайной величины Υ_k, имеющей нормальную плотность распределения со средним $F(f_k)+\Delta_k$ и дисперсией σ^2. Обозначим эту плотность распределения через $\rho_{\Upsilon_k}(r)$.

По теореме Гливенко — Кантелли [16; 17] при $d \to \infty$ эмпирическая функция распределения $\Psi_k^{\xi}(r)$ сходится равномерно (почти наверное, а значит и по вероятности) к функции распределения Φ_{Υ_k} случайной величины Υ_k. Следовательно, для произвольного $\varepsilon' > 0$ существует d_0 такое, что для $d > d_0$ с вероятностью не менее ε для всех $k = \overline{1, K}$ справедливо

$$\forall r \in \mathbb{R} \quad \left|\Psi_k^{\xi}(r) - \Phi_{\Upsilon_k}(r)\right| \le \varepsilon'/2, \tag{5.12}$$

откуда

$$\left|\Psi_k^{\xi}((z+1)\tau) - \Psi_k^{\xi}(z\tau) - \int\limits_{z\tau}^{(z+1)\tau} \rho_{\Upsilon_k}(r)dr\right| \le \varepsilon'. \tag{5.13}$$

Обозначим через $k_m^i, m = \overline{1, K_i}$, набор k таких, что $X_k \subseteq S_i^f$. В этих обозначениях

$$\Psi^{\xi,i}(r) = \frac{1}{K_i}\sum_{m=1}^{K_i} \Psi_{k_m^i}^{\xi}(r).$$

Пусть

$$\rho_i(r) = \frac{1}{K_i}\sum_{m=1}^{K_i} \rho_{\Upsilon_{k_m^i}}(r). \tag{5.14}$$

Тогда из (5.13)

$$\left|\Psi^{\xi,i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi,i}(z\tau) - \int\limits_{z\tau}^{(z+1)\tau} \rho_i(r)dr\right| \le \varepsilon'.$$

Так как $\rho_i(r)$ непрерывна, для каждого $z \in \mathbb{Z}$ найдутся такие $\hat{r}_z, \hat{\varphi}_z \in \mathbb{R}$, что справедливо

$$\Psi^{\xi,i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi,i}(z\tau) = \tau\,\rho_i(\hat{r}_z) + \hat{\varphi}_z, \quad \hat{r}_z \in [z\tau, (z+1)\tau], \quad |\hat{\varphi}_z| \le \varepsilon'. \tag{5.15}$$

По условию $U \in \mathfrak{U}_f$, следовательно, $\mu(U) < \mu(X \setminus U)$, а поэтому $\operatorname{card}\{m = \overline{1, K_i}\colon \Delta_{k_m^i} = 0\} > K_i/2$. По теореме 7, примененной для $\tilde{\rho}_i(\cdot) = \rho_i(\cdot - F(r_i^f))$, глобальные максимумы $\rho_i(r)$ лежат в $[F(r_i^f) - \eta_i, F(r_i^f) + \eta_i]$, где $\eta_i < \gamma(\Delta/\sigma)\,\sigma$. Полагаем $\eta = \max_i \eta_i$, $\eta_0 = \gamma(\Delta/\sigma)\,\sigma$.

Рассмотрим $\acute{r}_i \in \operatorname{Argmax}_{r\in\mathbb{R}}\rho_i$. Введем $B_i = \sup_{r\in\mathbb{R}\setminus(-\eta_0,\eta_0)} \rho_i(r)$. Так как $B_i < \rho_i(\acute{r}_i)$, можно выбрать $\varepsilon' > 0$ настолько малым, чтобы для всех i выполнялось

$$\rho_i(\acute{r}_i) - B_i > 4\varepsilon'. \tag{5.16}$$

Будем считать $\tau > 0$ настолько малым, что

$$\tau < (\eta_0 - \eta)/2. \tag{5.17}$$

$$\forall r \quad r \in (-\infty, F(r_i^f) - \eta_0 + 2\tau] \cup [F(r_i^f) + \eta_0 - 2\tau, +\infty), \quad \rho_i(r) \le B_i + \varepsilon', \tag{5.18}$$

$$\forall r \in [\acute{r}_i - \tau, \acute{r}_i + \tau] \quad \rho_i(r) \ge \rho_i(\acute{r}_i) - \varepsilon', \tag{5.19}$$

Для всех $z \in \mathbb{Z}$ таких, что $|z\tau - F(r_i^f)| \ge \eta_0 - \tau$, имеем $[z\tau, (z+1)\tau] \subset (-\infty, F(r_i^f) - \eta_0 + 2\tau] \cup [F(r_i^f) + \eta_0 - 2\tau, +\infty)$, из (5.15) и (5.18) получаем

$$z \in \mathbb{Z}, \quad |z\tau - F(r_i^f)| \ge \eta_0 - \tau \Rightarrow \frac{\Psi^{\xi,i}((z+1)\tau) - \Psi^{\xi,i}(z\tau)}{\tau} \le B_i + 2\varepsilon'.$$

Существует $\acute{z}_i \in \mathbb{Z}$ такой, что $[\acute{z}_i\tau, (\acute{z}_i+1)\tau] \subset [\acute{r}_i - \tau, \acute{r}_i + \tau]$. Из (5.15) и (5.19) выводим

$$\frac{\Psi^{\xi,i}((\acute{z}_i+1)\tau) - \Psi^{\xi,i}(\acute{z}_i\tau)}{\tau} \geq \rho_i(\acute{r}_i) - 2\varepsilon'.$$

Из последних двух соотношений с учетом (5.11) и (5.16) получаем $|r_i^* - F(r_i^f)| \leq \eta_0 - \tau$, т. е.

$$|r_i^* - F(r_i^f)| \leq \gamma(\Delta/\sigma)\,\sigma - \tau. \tag{5.20}$$

Следовательно, $|h^*(x) - (F\circ f)(x)| \leq \gamma(\Delta/\sigma)\,\sigma - \tau$.

Теперь мы готовы построить оценку $\mu(\mathbf{U}^{L_0}_{f,\Delta,\tau}(\xi) \vartriangle U)$ и завершить доказательство теоремы. Определим $\tilde{U} = \mathbf{U}^{L_0}_{f,\Delta,\tau}(\xi) = \{x \in X\colon |\xi^\tau(x) - h^*| \geq \Delta/2\}$. В этих обозначениях $\mu(\tilde{U} \vartriangle U) = \mu(\tilde{U}\setminus U) + \mu(U \setminus \tilde{U})$. Для $j = \overline{1,Kd}$ введем индекс i_j^d такой, что $X_j^d \subseteq S^f_{i_j^d}$, и для $k = \overline{1,K}$ введем индекс i_k такой, что $X_k \subseteq S^f_{i_k}$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu(\tilde{U}\setminus U) &= \frac{q}{d}\,\mathrm{card}\Big\{j\colon \Delta_{i_j^d} = 0,\ \Big|\tau\Big\lfloor\frac{F(r^f_{i_j^d}) + \Delta_{i_j^d} + \upsilon_j}{\tau}\Big\rfloor - r^*_{i_j^d}\Big| \geq \Delta/2\Big\}\\ &\leq q\sum_{k:\Delta_k=0}\Big(\Psi_k^{\xi^\tau}(r^*_{i_k} - \Delta/2 + \tau) + 1 - \Psi_k^{\xi^\tau}(r^*_{i_k} + \Delta/2)\Big)\\ &\leq q\sum_{k:\Delta_k=0}\Big(\Psi_k^{\xi}(r^*_{i_k} - \Delta/2 + \tau) + 1 - \Psi_\xi^{k}(r^*_{i_k} + \Delta/2 - \tau)\Big).\end{aligned}$$

С учетом (5.12) $\mu(\tilde{U}\setminus U) \leq q\sum_{k:\Delta_k=0}\big(\Phi_{\Upsilon_k}(r^*_{i_k} - \Delta/2 + \tau) + 1 - \Phi_{\Upsilon_k}(r^*_{i_k} + \Delta/2 - \tau)\big) + qK\varepsilon'$.

Считаем ε' настолько малым, что $qK\varepsilon' \leq \varepsilon/2$. Из (5.20) $|r^* - F(r^f_{0\,i_k}) \pm \tau| \leq \gamma(\Delta/\sigma)\,\sigma$. Для $k = \overline{1,K}$ таких, что $\Delta_k = 0$, верно $\Phi_{\Upsilon_k}(r) = \Phi((r - F(r^f_{0\,i_k}))/\sigma)$. Кроме того, $1 - \Phi(r) = \Phi(-r)$, откуда

$$\mu(\tilde{U}\setminus U) \leq 2\,qK\Phi\Big(\frac{\gamma(\Delta/\sigma)\,\sigma - \Delta/2}{\sigma}\Big) + \varepsilon/2 = 2\,\mu(X)\ \Phi\Big(\gamma(\Delta/\sigma) - \frac{\Delta}{2\sigma}\Big) + \varepsilon/2. \tag{5.21}$$

Аналогично

$$\mu(U\setminus\tilde{U}) \leq q\sum_{k:\Delta_k\neq 0}\Big(\Phi_{\Upsilon_k}(r^*_{i_k} + \Delta/2 + \tau) - \Phi_{\Upsilon_k}(r^*_{i_k} - \Delta/2 - \tau)\Big) + \varepsilon/2$$

$$\leq q\sum_{k:\Delta_k\neq 0}\Phi_{\Upsilon_k}(r^*_{i_k} + \Delta/2 + \tau) + \varepsilon/2 = q\sum_{k:\Delta_k\neq 0}\Phi\Big(\frac{r^*_{i_k} - F(r^f_{0\,i_k}) + \Delta/2 + \tau - \Delta_k}{\sigma}\Big) + \varepsilon/2.$$

Согласно (5.20) и (5.9) получаем

$$\mu(U\setminus\tilde{U}) \leq q\sum_{k:\Delta_k\neq 0}\Phi\Big(\frac{\gamma(\Delta/\sigma)\,\sigma + \Delta/2 - \Delta_k}{\sigma}\Big) + \varepsilon/2 \leq qK\,\Phi\Big(\gamma(\Delta/\sigma) - \frac{\Delta}{2\sigma}\Big) + \varepsilon/2.$$

То есть

$$\mu(U\setminus\tilde{U}) \leq \mu(X)\ \Phi\Big(\gamma(\Delta/\sigma) - \frac{\Delta}{2\sigma}\Big) + \varepsilon/2. \tag{5.22}$$

Так как $\mu(\tilde{U}\vartriangle U) = \mu(\tilde{U}\setminus U) + \mu(U\setminus\tilde{U})$, то в силу (5.21) и (5.22) теорема доказана. □

Из теоремы следует, что для фиксированного f с вероятностью, сколь угодно близкой к 1, при неограниченном увеличении отношения Δ/σ множество, вычисляемое оператором $\mathbf{U}^{L_0}_{f,\Delta,\tau}(\xi)$, стремится по мере к множеству U равномерно по F, U, δ_Δ, ν.

Заметим, что оценки (5.21) и (5.22) сохранят свою справедливость, если вместо $\mu(X)$ в них использовать $\mu(\tilde{U})$ и $\mu(U)$ соответственно. В этом случае они позволяют получить оценки сверху для ошибок I и II рода [18, p. 464–465] в задаче нахождения U.

6. Вычислительный эксперимент

В этом разделе приводятся результаты численного эксперимента по применению алгоритма (4.2) для вычисления структурных различий между двумя растровыми цифровыми изображениями и сравнению его с алгоритмом (4.3).

В качестве f рассмотрим изображение Lena [19] размером 512×512 пикселей с 256 градациями яркости от 0 до 255. В качестве g рассмотрим изображение f, к которому применена операция инвертирования яркостей $F(r) = 255 - r$ и которое затем искаженно в квадратной области U размером 256×256 пикселей путем установки значения $Q = 127$ (см. рис. 1).

На рис. 2 показаны изображение множества U и результаты его оценки алгоритмами: предложенным (4.2) и стандартным (4.3). При этом в качестве порога второго алгоритма было взято значение $T = 20$, минимизирующего сумму квадратов ошибок первого и второго рода [18] в задаче идентификации пикселей из U.

Частоты ложной тревоги и пропуска пикселей U для предложенного алгоритма составили $E_I \approx 0.0120$, $E_{II} \approx 0.0477$. Для стандартного алгоритма упомянутые частоты составили: $E_I \approx 0.1664$, $E_{II} \approx 0.3071$.

Рис. 1. Изображения f и g для вычислительного эксперимента.

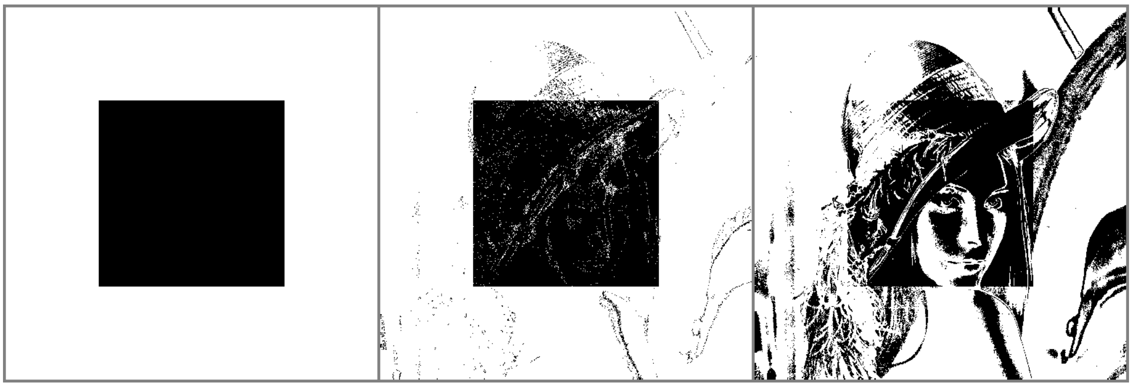


Рис. 2. Изображения множеств U и $\tilde{U}$ для предложенного алгоритма (4.2) и множества $\tilde{U}$ для стандартного алгоритма (4.3) с $T = 20$. Черный цвет означает принадлежность пикселя соответствующему множеству.

Авторы благодарят чл.-корр. А.Г. Ченцова и д-ра физ.-мат. наук А.Л. Агеева за ценные советы при подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Пытьев Ю.П.** Морфологические понятия в задачах анализа изображений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, №. 6. С. 1283–1286.
2. **Пытьев Ю.П., Чуличков А.И.** Методы морфологического анализа изображений. М.: Физматлит, 2010. 336 с. ISBN: 978-5-9221-1225-3.
3. **Визильтер Ю.В.** Обобщенная проективная морфология // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32, № 4. С. 384–399. ISSN 0134-2452 .
4. **Перевалов Д.С.** Предельная теорема для смещенной метрики Хэмминга в задаче классификации с известным уровнем структурного шума // Современные проблемы математики и ее приложения: тр. 45-й Междунар. мол. шк.-конф. / ИММ УрО РАН; УрФУ. Екатеринбург, 2014. С. 208–211.
5. **Корнилов Ф.А.** Разработка методов распознавания структурных различий изображений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Челябинск, 2015, 16 с.
6. **Корнилов Ф.А., Перевалов Д.С.** Об одной проблеме оптимизации, возникающей при использовании метрики Хэмминга в задаче структурного сравнения изображений // Математическое программирование и приложения: 15-я Всерос. конф. / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. С. 156–157.
7. Use of the zero norm with linear models and kernel methods / J. Weston, A. Elisseff, B. Schoelkopf, M. Tipping // J. Mach. Learn. Res. 2003. Vol. 3. Spec. Issue Var. Feature Sel. P. 1439–1461.
8. **Groötschel M., Lovász L.** Combinatorial optimization // Handbook of Combinatorics / eds. R.O. Graham, M. Grötschel, L. Lovász. Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1995. Vol. 2. P. 1341–1598.
9. **Hamming R.W.** Error detecting and error correcting codes // Bell System Tech. J. 1950. Vol. 29, no. 2. P. 147–160. doi: 10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x .
10. **Everitt B., Hand D.J.** Finite mixture distributions. London; New York: Chapman and Hall, 1981. 143 p. (Ser. Book Monographs on Applied Probability and Statistics.) doi: 10.1007/978-94-009-5897-5 .
11. **Robertson C.A., Fryer J.G.** Some descriptive properties of normal mixture // Scandinavian Actuarial J. 1969. Vol. 1969, iss. 3-4. P. 137–146. doi: 10.1080/03461238.1969.10404590 .
12. **Behboodian J.** On the modes of a mixture of two normal distributions // Technometrics. 1970. Vol. 12, no. 1. P. 131–139. doi: 10.2307/1267357 .
13. **Апраушева Н. Н., Сорокин С. В.** Об унимодальности простейшей гауссовой смеси // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 5. С. 838–846.
14. **Schilling M.F., Watkins A.E., Watkins W.** Is human height bimodal? // Amer. Statist. 2002. Vol. 56, no. 3. P. 223–229.
15. **Якубов В.П.** Статистическая радиофизика: уч. пособие. Томск: Изд. НТЛ, 2006. 132 с.
16. **Glivenko V.** Sulla determinazione empirica della legge di probabilita // Giorn. Ist. Ital. Attuari. 1933. Vol. 4. P. 92–99.
17. **Cantelli F.P.** Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita // Giorn. Ist. Ital. Attuari. 1933. Vol. 4. P. 221–424.
18. **Roxy P., Devore J.L.** Statistics: The Exploration and analysis of data. New York etc.: Cengage Learning, 2011. 816 p. ISBN-10: 0495390879 .
19. Изображение Lena. The USC-SIPI Image Database. URL: http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc &image=12 .

Поступила 22.11.2016

Костоусов Виктор Борисович
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: vkost@imm.uran.ru

Перевалов Денис Сергеевич
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: perevalovds@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pyt'ev Ju.P. Morphological concepts in problems of image analysis. *Sov. Phys. Dokl.*, 1975, vol. 20, no. 10, pp. 664–666.
2. Pyt'ev Yu. P., Chulichkov A.I. *Metody morfologicheskogo analiza izobrazhenii* [Methods of morphological image analysis]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 336 p. ISBN: 978-5-9221-1225-3 .
3. Vizil'ter Yu.V. Generalized projective morphology. *Komp'yuternaya optika*, 2008, vol. 32, no. 4, pp. 384–399 (in Russian). ISSN 0134-2452 .
4. Perevalov D.S. *Predel'naya teorema dlya smeshchennoi metriki Khemminga v zadache klassifikatsii s izvestnym urovnem strukturnogo shuma* [A limit theorem for the shifted Hamming's metrics in the problem of classification with known level of the structural noise]. *Proceedings of the 45th International Youth School-Conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications"*, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics; Ural Federal University, Ekaterinburg, 2014, pp. 208–211.
5. Kornilov F.A. Development of the methods of the structural image differences recognition. *Ph.D. Thesis Abstract*, Chelyabinsk, 2015, 16 p. (in Russian)
6. Kornilov F.A., Perevalov D.S. *Ob odnoi probleme optimizatsii, voznikayushchei pri ispol'zovanii metriki Khemminga v zadache strukturnogo sravneniya izobrazhenii* [On one optimization problem that arises when using Hamming's metrics in the problem of structural image comparison]. *Mathematical programming and applications: 15th the Russian national Conference*, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ekaterinburg, 2015, pp. 156–157.
7. Weston J., Elisseff A., Schoelkopf B., Tipping M. Use of the zero norm with linear models and kernel methods. *J. Mach. Learn. Res.*, 2003, vol. 3, Spec. Issue Var. Feature Sel., pp. 1439–1461.
8. Groötschel M., Lovász L. Combinatorial optimization. *Handbook of Combinatorics*, eds. R.O. Graham, M. Grötschel, L. Lovász, Amsterdam: Elsevier Science B.V., 1995, vol. 2. pp. 1341–1598.
9. Hamming R.W. Error detecting and error correcting codes. *Bell System Tech. J.*, 1950, vol. 29, no. 2, pp. 147–160. doi: 10.1002/j.1538-7305.1950.tb00463.x .
10. Everitt B., Hand D.J. *Finite mixture distributions.* London, New York: Chapman and Hall, 1981, Ser. Book Monographs on Applied Probability and Statistics, 143 p. doi: 10.1007/978-94-009-5897-5 .
11. Robertson C.A., Fryer J.G. Some descriptive properties of normal mixture. *Scandinavian Actuarial J.*, 1969, vol. 1969, iss. 3-4, pp. 7–146. doi: 10.1080/03461238.1969.10404590 .
12. Behboodian J. On the modes of a mixture of two normal distributions. *Technometrics*, 1970, vol. 12, no. 1, pp. 131–139. doi: 10.2307/1267357 .
13. Aprausheva N.N., Sorokin S.V. On the unimodality of simple Gaussian mixtures. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 5, pp. 785–793.
14. Schilling M.F., Watkins A.E., Watkins W. Is human height bimodal? *Amer. Statist.*, 2002, vol. 56, no. 3, pp. 223–229.
15. Yakubov V.P. *Statisticheskaya radiofizika: Uchebnoe posobie* [Statistical radiophysics: Tutorial] Tomsk: Publ. Nauch. Tekh. Lit., 2006, 132 p.
16. Glivenko V. Sulla determinazione empirica della legge di probabilita. *Giorn. Ist. Ital. Attuari.*, 1933, vol. 4, pp. 92–99.
17. Cantelli F.P. Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita. *Giorn. Ist. Ital. Attuari.*, 1933, vol. 4, pp. 221–424.
18. Roxy P., Devore J.L. *Statistics: The Exploration and analysis of data.* New York etc.: Cengage Learning, 2011, 816 p. ISBN-10: 0495390879 .
19. Image Lena. *The USC-SIPI Image Database.*
Available at: http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc &image=12 .

Kostousov V.B. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia
e-mail: vkost@imm.uran.ru

Perevalov D.S. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia
e-mail: perevalovds@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977, 630*624

БИЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ РУБКОЙ ЛЕСА[1]

А. А. Красовский, А. С. Платов

В предложенной математической модели управляющий лесом в каждый момент времени принимает решение о рубке деревьев определенного типа (породы) и возраста (возрастной группы) с целью максимизации прибыли. При планировании лесозаготовки управляющий ориентируется на ценовые прогнозы и учитывает экономические затраты. В работе для решения дискретно-временной задачи оптимального управления, возникающей в модели, применяется принцип максимума Л. С. Понтрягина. Решение получено в конструктивном виде без больших вычислительных затрат, связанных с высокой размерностью задачи. В статье представлены аналитические результаты, поясняющие оптимальное решение. Для достаточно общей постановки задачи получено условие оптимальности, отвечающее управлению релейного типа. Условие включает в себя дискретную динамику сопряженной переменной, трактуемой как теневая цена древесины. Полученное правило интерпретируется как динамическая оценка рациональности рубки древостоя определенного типа и возраста. Структурная гибкость предложенной математической модели способствует практическому применению в менеджменте леса. При доказательстве теоретических результатов в статье предложен метод, который не встречался авторам в литературе.

Ключевые слова: принцип максимум Понтрягина, дискретная модель управления лесом.

A. A. Krasovskii, A. S. Platov. Bilinear optimal control problem of a discrete logging.

In the proposed mathematical model a forest manager at each specified moment of time makes decisions on harvesting the trees of a certain type (species) and age (age group) in order to maximize their profit. When planning logging, the manager focuses on price projections and takes into account economic costs. The Pontryagin maximum principle is applied for solving the discrete-time optimal control problem arising in the model. A solution is derived in a constructive manner without computational costs associated with the problem's high-dimensionality. Analytical results, explaining the optimal solution, are provided. For a typically defined problem the optimality condition is derived, which determines the bang-bang solution. The condition includes the discrete dynamics of the adjoint variable, interpreted as the wood shadow price. The rule that is obtained is treated as the dynamic rationale for logging a certain type and age of forest. Structural flexibility of the proposed mathematical model facilitates its application in forest management. In proving theoretical results in the paper, the authors propose a method that they have not come across in the literature.

Keywords: Pontryagin's maximum principle, discrete forest management model.

MSC: 93C55, 49J30, 91B76
DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-188-194

Введение

Историю математических моделей регулирования пользования древесиной принято вести с публикации М. Фаустмана [1]. Предлагаемая в данной статье задача так или иначе связана с моделями биоэкономики [2], называемыми: оптимальная ротация леса, менеджмент леса или модель Фаустмана. В статье формулируется задача оптимального управления дискретной системой, образованной некоторой возрастной последовательностью древостоев. С позиций лесоведения такая постановка задачи может быть классифицирована как динамическая породно-возрастная модель [3]. Выполненное моделирование ориентировано на экономический

[1]Работа первого автора выполнена при поддержке научной программы "Future Forests" Шведского фонда стратегического исследования окружающей среды, а также программы "Tropical Futures Initiative (TFI)" Международного института прикладного системного анализа (IIASA). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-08075а).

аспект лесопользования, что обусловлено потенциальной привязкой к моделям секторов экономики, представляющих потребителей лесной продукции. Для решения задачи максимизации дисконтированной прибыли на конечном интервале времени применяется принцип максимума Понтрягина [4] для дискретных систем [5].

Заметим, что для решения оптимизационных задач, возникающих в подобных моделях, исследователи, как правило, применяют методы линейного программирования (см., например, [6]) или динамического программирования (см., например, [7]). Известно, что при этом на практике используются решатели (солверы), поставляемые программным обеспечением (софтом). Их использование приводит к большим вычислительным затратам, вызванным высокими размерностями задач, и не дает возможности отследить ход решения. Отчасти это обусловлено громоздкостью прикладных моделей. Однако их основные конструкции могут быть сформулированы в лаконичной математической форме. В настоящее время ведется работа с теоретическими моделями, в том числе с использованием принципа максимума [8].

В данной работе предложена модель, которая удовлетворяет базовым лесоводственным требованиям и в то же время сформулирована с соблюдением основных требований математической строгости. Решение задачи оптимального управления, формализованной в процессе моделирования, является конструктивным. Это позволяет избежать больших вычислительных затрат, упомянутых выше. При доказательстве теоретического результата в статье предложен метод, который не встречался авторам в литературе.

Авторы благодарны Александру Михайловичу Тарасьеву и Анатолию Зиновьевичу Швиденко за внимание к работе и ценные замечания.

1. Постановка задачи

Расположим каждый тип индивидуальных древостоев в ячейку с номером i, $i = 1, \dots, N$. На практике ячейка соответствует некоторому обособленному участку леса с древостоем одной породы. Деревья в каждой ячейке разбиты по возрасту $a \in [0, A]$. Обозначим символом $x_i(a, t)$ площадь деревьев в ячейке i, возрастной группе a, в момент времени $t \in [0, T]$. В модели рассматривается дискретное время. Шаг по времени Δt и шаг по возрастным группам Δa задаются соотношениями

$$a_{j+1} = a_j + \Delta a, \quad a_1 = \Delta a, \quad a_M = A, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t, \quad t_1 = \Delta t, \quad t_K = T, \quad \Delta t = \Delta a,$$

$$j = 1, \dots, M-1, \quad k = 1, \dots, K-1,$$

где M — количество возрастных групп, K — количество временных отрезков. Для каждого типа деревьев имеется фактор, переводящий их в биомассу (древесину) в зависимости от возраста. Обозначим его символом $\beta_i(a_j) \geq 0$. Символом $u_i(a_j, t_k) \in [0, 1]$ обозначим управляющее воздействие, т. е. долю леса типа i, возраста a_j, которая вырубается в момент времени t_k.

Удобно представить переменные в векторной форме:

$$\mathbf{x}_i(t_k) := \big(x_i(a_1, t_k), \dots, x_i(a_M, t_k)\big)^T, \quad \mathbf{u}_i(t_k) := \big(u_i(a_1, t_k), \dots, u_i(a_M, t_k)\big)^T.$$

В дальнейшем для сокращения записи будем писать

$$\mathbf{x}_i(k) := \mathbf{x}_i(t_k) \in \mathbb{R}^M, \quad \mathbf{u}_i(k) := \mathbf{u}_i(t_k) \in \mathbb{R}^M.$$

Обозначим $\mathbf{x}(k) := \big(\mathbf{x}_1(k)), \dots, \mathbf{x}_N(k)\big)$, $\boldsymbol{\beta}_i := \big(\beta_i(a_1), \dots, \beta_i(a_M)\big)^T \in \mathbb{R}^M$, $\mathbf{u}(k) := \big(\mathbf{u}_1(k)), \dots, \mathbf{u}_N(k)\big) \in \mathrm{Mat}_{M\times N}$, $\mathbf{u}$ — совокупность всех $\mathbf{u}(k)$ при $k = 1, \dots, M$.

Динамика процесса в векторной форме задается выражением

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \big(\mathbf{L} + \mathbf{M}\,\mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k))\big)\,\mathbf{x}_i(k), \tag{1.1}$$

где матрицы $\mathbf{L}, \mathbf{M} \in \mathrm{Mat}_{M\times M}$ определены следующим образом:

$$\mathbf{L} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{Dg}$ преобразует вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ в следующую матрицу:

$$\mathbf{Dg}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_n \end{bmatrix}.$$

Интерпретация динамики такова: площадь леса, оставшегося после вырубки в возрастной группе a_j в k-й период времени, в следующий $(k+1)$-й временной период переходит в возрастную группу a_{j+1}; в последней возрастной группе площадь аккумулируется; все вырубленные площади засаживаются — лесовосстановительные мероприятия обязательны.

Древесина, заготовленная в k-й момент времени, вычисляется по формуле

$$H(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) := \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\beta}_i^T \, \mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \, \mathbf{x}_i(k).$$

Рассмотрим множество

$$\mathbf{U} := \big\{\{u_i^j\} \in \mathrm{Mat}_{M\times N} \big| 0 \le u_i^j \le 1\big\}.$$

Управление $\mathbf{u}$ называется *допустимым*, если $\mathbf{u}(k) \in \mathbf{U}$ для любого $k = 1, \dots, K$.

Функция затрат состоит из следующих слагаемых: рубка $C^L = C^L(a)$, доставка $C^E = C^E(a)$, посадка $C^P = C^P(a)$. Все затраты можно выразить в у.е. за гектар. Суммарная стоимость управляющих воздействий $\mathbf{u}(k)$ задана выражением

$$C(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) := \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \big[C_i^L(a_j) + C_i^E(a_j) + C_i^P(a_j)\big] x_i(a_j, t_k) u_i(a_j, t_k).$$

Таким образом, функцию затрат можно записать в виде

$$C(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) = \sum_{i=1}^{M} \mathbf{C}_i^T \, \mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \, \mathbf{x}_i(k).$$

При известной динамике цен $p(k)$ на древесину прибыль вычисляется по формуле

$$\Pi(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) := p(k) H(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)) - C(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)),$$

а чистый дисконтированный доход определяется как

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{K} \rho_k \Pi(\mathbf{u}(k), \mathbf{x}(k)),$$

где ρ_k — фактор дисконтирования.

Для описанного процесса ставится следующая задача оптимального управления.

Пусть заданы динамика древостоя $\mathbf{x}_i(k)$ (1.1) и начальное распределение

$$\mathbf{x}_i(1) = \mathbf{x}_i^1, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1.2}$$

Требуется среди допустимых управлений $\mathbf{u}$ найти оптимальное управление $\hat{\mathbf{u}}$, максимизирующее чистый дисконтированный доход:

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} J(\mathbf{u}, \mathbf{x}), \tag{1.3}$$

где $\mathcal{U}$ — множество всех допустимых управлений.

З а м е ч а н и е 1. В силу содержательного смысла задачи все компоненты векторов $\mathbf{x}_i^1$ неотрицательны.

2. Новый подход к решению задачи (1.1)–(1.3)

Отметим справедливость следующего утверждения, доказательство которого непосредственно следует из вида матриц $\mathbf{L}, \mathbf{M}$.

Утверждение 1. *Если все компоненты векторов* $\mathbf{x}_i^1$ *неотрицательны, то для любого допустимого управления* $\mathbf{u}$ *все компоненты решений задачи* (1.1), (1.2) *также неотрицательны.*

З а м е ч а н и е 2. В дальнейшем операции взятия max и sign, применяемые к вектор-строке, предполагаются выполняемыми по компонентам.

Согласно принципу максимума Понтрягина [5] компоненты $\hat{\mathbf{u}}_i$ оптимального управления $\hat{\mathbf{u}}$ в каждый k-й момент времени максимизируют каждую компоненту вектора-строки:

$$\hat{\mathbf{u}}_i(k) = \arg \max_{\mathbf{u}(k) \in \mathbf{U}} \Big\{ \big(\rho_k (p(k)\, \boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\, \mathbf{M} \big)\, \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{x}}_i(k))\, \mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k)) \Big\}. \tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)$ — решение сопряженного уравнения

$$\boldsymbol{\lambda}_i(k) = \rho_k \big(p(k)\, \boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T \big)\, \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k)) + \boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\, \big(\mathbf{L}^T + \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k))\, \mathbf{M}^T \big), \tag{2.2}$$

вычисляемое в обратном времени, начиная с *условия трансверсальности*:

$$\boldsymbol{\lambda}_i(K+1) = 0, \tag{2.3}$$

при этом динамика $\hat{\mathbf{x}}_i(k)$ определяется уравнением (1.1): $\hat{\mathbf{x}}_i(k+1) = \big(\mathbf{L} + \mathbf{M}\, \mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{u}}_i(k)) \big)\, \hat{\mathbf{x}}_i(k)$ и начальным распределением $\hat{\mathbf{x}}_i(1) := \mathbf{x}_i^1$.

Важно отметить, что условие (2.1) не позволяет явно определить компоненту вектора $\hat{\mathbf{u}}_i(k)$ в случае, когда перед ней стоит множитель, равный нулю. При решении прикладных задач появление нулевых значений в векторах

$$\big(\rho_k (p(k)\, \boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\, \mathbf{M} \big) \tag{2.4}$$

оказывается крайне редким для релейных управлений. В свою очередь, зачастую нулевые компоненты возникают в векторе $\hat{\mathbf{x}}_i(k)$. Действительно, компонента $\hat{u}_i(a_j, k)$ управления $\hat{\mathbf{u}}_i(k)$, определенная условием (2.1), принимает значение либо 0, либо 1. Пусть $\hat{u}_i(a_j, k) = 1$, $1 < j < M - 1$, тогда, согласно уравнению динамики (1.1) в следующий момент времени $k+1$ получим $\hat{x}_i(a_{j+1}, k+1) = 0$.

Ниже сформулируем условие, соответствующее *типичной ситуации*, т. е. когда компоненты вектора (2.4) не обращаются в нуль.

Как отмечено выше, даже в такой ситуации условие (2.1) не всегда однозначно определяет компоненты оптимального управления. Тем не менее оптимальное управление можно получить упрощением (2.1), отбрасывая множитель $\mathbf{Dg}(\hat{\mathbf{x}}_i(k))$.

Приступим к обоснованию такого упрощения.

Вместо условия (2.1) рассмотрим новое условие

$$\tilde{\mathbf{u}}_i(k) = \arg\max_{\mathbf{u}(k)\in\mathbf{U}} \Big\{ \big(\rho_k(p(k)\,\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) + \boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\,\mathbf{M}\big)\mathbf{Dg}(\mathbf{u}_i(k))\Big\}. \tag{2.5}$$

Опишем условие типичности.

У с л о в и е **T**. Существует $\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{u}}\}$ — решение задачи (2.2), (2.3), (2.5) такое, что векторы $\rho_k\big(p(k)\,\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T\big) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(k+1)\,\mathbf{M}$ не имеют нулевых компонент при всех i, k.

Утверждение 2. *Если выполнено условие* **T**, *то задача* (2.2), (2.3), (2.5) *разрешима единственным образом, и все компоненты* $\tilde{\mathbf{u}}$ *принимают значение из* $\{0,1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий (2.3) и **T** вектор $\rho_K(p(K)\,\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T)$ не имеет нулевых компонент, поэтому $\tilde{\mathbf{u}}_i(K)$ определяются однозначно, и их компоненты принимают значение из $\{0,1\}$. По этому $\tilde{\mathbf{u}}_i(K)$ однозначно в силу (2.2) находится $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(K)$. Затем процесс построения $\tilde{\mathbf{u}}_i(k)$ и $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_i(k)$ продолжается до $k = 1$. □

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть выполнено условие* **T** *и* $\{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}, \tilde{\mathbf{u}}\}$ *— решение задачи* (2.2), (2.3), (2.5), *а* $\tilde{\mathbf{x}}$ *— решение задачи* (1.1), (1.2), *соответствующее* $\tilde{\mathbf{u}}$. *Тогда* $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}\}$ *есть решение задачи* (1.1)–(1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без потери общности положим $N = 1$, при этом индекс i можно опустить во всех обозначениях, где он встречается.

Рассмотрим *новые вспомогательные задачи оптимального управления*, зависящие от малого параметра $\varepsilon > 0$, оставив без изменения динамику системы, множество допустимых управлений и взяв в качестве критерия оптимальности следующий критерий:

$$J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{x}) := J(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \varepsilon \bar{J}(\mathbf{u}),$$

где

$$\bar{J}(\mathbf{u}) := \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{\sigma}(k)\mathbf{u}(\mathbf{k}), \quad \boldsymbol{\sigma}(k) = \operatorname{sign}\big[\rho_k(p(k)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T) + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(k+1)\,\mathbf{M}\big], \tag{2.6}$$

т. е.

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} J_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{x}). \tag{2.7}$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ пара $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}\}$ является также решением вспомогательной задачи оптимального управления (1.1), (1.2), (2.7).

Будем решать *вспомогательную задачу* (2.7), применяя принцип максимума Понтрягина [5]. Пусть $\{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{x}}\}$ — решение этой задачи; оно удовлетворяет принципу максимума

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \arg\max_{\mathbf{u}(k)\in\mathbf{U}} \Big[\big(\rho_k(p(k)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k+1)\,\mathbf{M}\big)\,\mathbf{Dg}(\bar{\mathbf{x}}(k)) + \varepsilon\boldsymbol{\sigma}(k)\Big]\,\mathbf{Dg}(\mathbf{u}(k)). \tag{2.8}$$

Здесь $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ — решение сопряженного уравнения (2.2):

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}(k) = \rho_k\big(p(k)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T\big)\,\mathbf{Dg}(\bar{\mathbf{u}}(k)) + \bar{\boldsymbol{\lambda}}(k+1)\,\big(\mathbf{L}^T + \mathbf{Dg}(\bar{\mathbf{u}}(k))\,\mathbf{M}^T\big),$$

вычисляемое в обратном времени, начиная с условия трансверсальности:

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}(K+1) = 0.$$

Используя эти условия, будем по шагам вычислять сопряженную переменную $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ и соответствующее оптимальное управление $\bar{\mathbf{u}}$. В момент времени K из (2.3), (2.6) получаем

$$\boldsymbol{\sigma}(K) = \operatorname{sign}\left[\rho_K(p(K)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T)\right].$$

Подставим $\boldsymbol{\sigma}(K)$ и $\bar{\boldsymbol{\lambda}}(K+1) = 0$ в условие (2.8):

$$\bar{\mathbf{u}}(K) = \arg\max_{\mathbf{u}(K)\in\mathbf{U}} \Big[\rho_K(p(K)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T)\,\mathbf{Dg}(\bar{\mathbf{x}}(K)) + \varepsilon\operatorname{sign}\left[\rho_K(p(K)\,\boldsymbol{\beta}^T - \mathbf{C}^T)\right]\Big]\,\mathbf{Dg}(\mathbf{u}(K)). \quad (2.9)$$

Условие (2.9) для определения управления $\bar{\mathbf{u}}(K)$ совпадает с условием (2.5) для определения $\tilde{\mathbf{u}}(K)$. Действительно, так как $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}(K+1) = \bar{\boldsymbol{\lambda}}(K+1) = 0$, а в силу утверждения 1 все компоненты вектора $\bar{\mathbf{x}}(K)$ неотрицательны, то все компоненты вектора, стоящего перед $\mathbf{Dg}(\mathbf{u}(K))$ в формуле (2.9), имеют такой же знак, что и соответствующие компоненты вектора в (2.5) (вне зависимости от конкретных значений вектора $\bar{\mathbf{x}}(K)$). Поэтому $\bar{\mathbf{u}}(K) = \tilde{\mathbf{u}}(K)$.

Далее по индукции получаем, что имеет место полное совпадение управлений и сопряженных переменных: $\bar{\mathbf{u}}(k) = \tilde{\mathbf{u}}(k)$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}(k) = \tilde{\boldsymbol{\lambda}}(k)$, $k = 1,\ldots,K$. Таким образом, мы показали, что $\bar{\mathbf{u}}(k) = \tilde{\mathbf{u}}(k)$, $\bar{\mathbf{x}}(k) = \tilde{\mathbf{x}}(k)$, т. е. решение $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\boldsymbol{\lambda}}\}$ есть единственное решение системы принципа максимума для вспомогательной задачи. Поэтому оно является решением вспомогательной задачи при любом $\varepsilon > 0$.

Пусть $\{\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}\}$ — произвольный допустимый процесс исходной задачи (1.1), (1.2). Тогда в силу предыдущей части доказательства для любого $\varepsilon > 0$ получим

$$J(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) + \varepsilon\bar{J}(\tilde{\mathbf{u}}) = J_\varepsilon(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) \geq J_\varepsilon(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) = J(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}}) + \varepsilon\bar{J}(\hat{\mathbf{u}}).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $\varepsilon \to +0$, имеем $J(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}) \geq J(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{x}})$. Тем самым $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{x}}\}$ — решение задачи (1.1)–(1.3). □

З а м е ч а н и е 3. Теорема обосновывает использование условий (2.2), (2.3), (2.5) для решения рассматриваемой задачи оптимального управления. Отметим, что полученное правило допускает следующую экономическую интерпретацию. Первое слагаемое

$$\rho_k(p(k)\,\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T)$$

отвечает прибыли, соответствующей рубке в k-й момент времени, а второе слагаемое

$$\boldsymbol{\lambda}_i(k+1)\,\mathbf{M}$$

содержит теневую цену λ, которая оценивает решения, принятые в другие моменты времени; в прошлом и будущем. Управление выбирается путем сопоставления обозначенных экономических альтернатив. Отметим, что управление релейного типа отвечает сплошной рубке в лесоводственной практике. Однако оно может быть сведено к выборочной рубке, благодаря гибкой формализации модели, допускающей разбивку лесного участка на виртуальные ячейки. Реализация полученных условий в виде алгоритма позволяет создавать программные комплексы для моделирования менеджмента лесными ресурсами и апробации результатов на реальных данных.

З а м е ч а н и е 4. Множество задач, для которых выполнено условие $\mathbf{T}$, непусто. Например, если при всех k, i $\rho_k(p(k)\boldsymbol{\beta}_i^T - \mathbf{C}_i^T) = (2, 2, \ldots, 2)$, то для такой задачи условие $\mathbf{T}$ выполнено и все $u_i^j(k) = 1$.

В заключение несколько слов о практическом применении. Моделирование было выполнено на данных для региона Баден, Нижняя Австрия. Рассматривалась динамика древостоя бука. Функции затрат были заданы на уровне европейских значений. Динамика цены на древесину отвечала трендам реальных данных. Алгоритмы были реализованы в среде программирования Python, используя библиотеки Matplotlib и Toolkits. В процессе компьютерных вычислений выполнялись условия типичности, оговоренные в статье. Результаты вычислительных экспериментов подтвердили работоспособность и эффективность предложенных алгоритмов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Faustmann M.** Berechnung des Werthes, welchen Waldboden, sowie noch nicht haubare Holzbestände für die Waldwirthschaft besitzen // Allgemeine Forst- und Jagd-Zeitung. 1849. S. 441–455.
2. **Clark C.** Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1990. 400 p. ISBN-10: 0471508837.
3. Лесные ресурсы: динамика, прогнозирование и оптимальное управление / Г.Н. Коровин, Н.В. Зукерт, М.Д. Корзухин, В.В. Нефедьев; науч. ред. М.Д. Корзухин; авт. вступит. ст. В.В. Нефедьев / Центр по проблемам экологии и продуктивности лесов Российской академии наук. М., 2013. 176 с.
4. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. 2-е изд. М.: Наука, 1969. 393 с.
5. **Болтянский В.Г.** Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 446 с.
6. **Reed W.J., Errico D.** Optimal harvest scheduling at the forest level in the presence of the risk of fire // Can. J. For. Res. 1986. Vol. 16, no. 2. P. 266–278. doi:10.1139/x86-047.
7. **Sohngen B., Mendelsohn R., Sedjo R.** Forest management, conservation, and global timber markets // Am. J. Agric. Econ. 1999. Vol. 81, no. 1. P. 1–13. doi:10.2307/1244446.
8. **Tahvonen O.** Economics of rotation and thinning revisited: the optimality of clearcuts versus continuous cover forestry // For. Policy Econ. 2016. Vol. 62. P. 88–94. doi:10.1016/j.forpol.2015.08.013.

Поступила 22.08.2016

Красовский Андрей Андреевич
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Международный институт прикладного системного анализа (IIASA), Лаксенбург, Австрия
e-mail: krasov@iiasa.ac.at

Платов Антон Сергеевич
старший преподаватель
Владимирский государственный университет
им. Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
e-mail: platovmm@mail.ru

REFERENCES

1. Faustmann M. Calculation of the value which forest land and immature stands possess for forestry. *J. For. Econ.*, 1995, vol. 1, pp. 7–44.
2. Clark C. *Mathematical bioeconomics: the optimal management of renewable resources.* 2nd ed, New York: John Wiley & Sons Inc., 1990, 400 p. ISBN-10: 0471508837.
3. Korovin G.N., Zukert N.V., Korzukhin M.D., Nefed'ev V.V. *Lesnye resursy: dinamika, prognozirovanie i optimal'noe upravlenie* [Forest resources: dynamics, forecasting and optimal control]. Moscow, Tsentr po problemam ekologii i produktivnosti lesov Rossiiskoi akademii nauk, 2013, 176 p.
4. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, New York; London: Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
5. Boltyanskii V.G. *Optimal control of discrete systems.* A Halsted Press Book, New York, Toronto: John Wiley & Sons, 1978, 392 p. ISBN-10: 0470265302.
6. Reed W.J., Errico D. Optimal harvest scheduling at the forest level in the presence of the risk of fire. *Can. J. For. Res.*, 1986, vol. 16, no. 2, pp. 266–278. doi:10.1139/x86-047.
7. Sohngen B., Mendelsohn R., Sedjo R. Forest management, conservation, and global timber markets. *Am. J. Agric. Econ.*, 1999, vol. 81, no. 1, pp. 1–13. doi:10.2307/1244446.
8. Tahvonen O. Economics of rotation and thinning revisited: the optimality of clearcuts versus continuous cover forestry. *For. Policy Econ.*, 2016, vol. 62, pp. 88–94. doi:10.1016/j.forpol.2015.08.013.

A. A. Krasovskii, Cand. Sci. (Phys.-Math.), International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria, e-mail: krasov@iiasa.ac.at

A. S. Platov, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, 600000 Russia, e-mail: platovmm@mail.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ЧАСТИ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

В. И. Максимов

Рассматривается задача управления системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Ее суть состоит в построении процедуры формирования управления в виде обратной связи, обеспечивающего отслеживание скоростью изменения части фазовых координат заданной системы скорости изменения части фазовых координат другой системы, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Предполагается, что измеряется часть фазовых координат каждой из заданных систем. Измерения происходят с ошибкой в дискретные моменты времени. В работе предлагается устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм решения указанной задачи. Алгоритм основан на известном в теории гарантированного управления методе экстремального сдвига. В связи с неполнотой информации о фазовых координатах “классический” экстремальный сдвиг применить не удается. Поэтому в работе предложена его модификация. Эта модификация использует элементы теории динамического обращения. Последняя основана на конструкциях теории некорректных задач. В заключительной части статьи указывается класс нелинейных по фазовым координатам систем, для которого применим описанный в работе алгоритм.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы.

V. I. Maksimov. On a control problem for a linear system with measurements of a part of phase coordinates.

We consider a control problem for a system of linear ordinary differential equations. It is required to design a feedback control procedure under which the velocity of a part of the phase coordinates of the system would track the velocity of a part of the phase coordinates of another system, which is subject to an unknown perturbation. It is assumed that a part of phase coordinates of each of the systems is measured with error at discrete times. We propose a solution algorithm that is stable to informational disturbances and computation errors. The algorithm is based on the extremal shift method known in the theory of guaranteed control. Since it is impossible to apply the “classical” extremal shift due to the incompleteness of the information on the phase coordinates, we propose a modification of this method that employs elements of the dynamic inversion theory. The latter is based on constructions from the theory of ill-posed problems. In the concluding section of the paper, we specify a class of systems nonlinear in the phase coordinates for which the algorithm is applicable.

Keywords: control, incomplete information, linear systems.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-195-205

Введение

В статье рассматривается задача отслеживания скорости изменения части фазовых координат линейных дифференциальных уравнений, подверженной влиянию неизвестного возмущения. Методы решения задач слежения излагаются, в частности, в рамках теории позиционного управления [1–7]. Исследуемая в настоящей работе постановка имеет одну особенность. Предполагается, что в дискретные моменты времени измеряются (с ошибкой) не все, а лишь часть текущих фазовых состояний заданной системы. Это предположение ведет к невозможности точного отслеживания соответствующей скорости изменения. Учитывая данную особенность обсуждаемой задачи, мы конструируем устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм ее приближенного решения, который основан на известном в теории позиционных дифференциальных игр методе экстремального сдвига. Прототипы рассматриваемой нами задачи для динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, исследовались в [8; 9]. При этом во всех указанных выше работах требовалось отследить соответствующие фазовые траектории. В данной работе, в отличие от [8; 9], мы обсуждаем задачу отслеживания не самой траектории, а скорости изменения части фазовых координат. Другие задачи отслеживания скорости изменения систем дифференциальных уравнений обсуждались в работах [10; 11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему с возмущением, описываемую следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + By(t) + Cu(t) + f_1(t), \\ \dot{y}(t) &= A_1x(t) + B_1y(t) + f_2(t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

с начальным состоянием $x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Здесь $t \in T = [0, \vartheta] \quad (0 < \vartheta < \infty)$ — переменная времени, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^r$ и $u(t) \in \mathbb{R}^q$ — соответственно фазовое состояние системы и значение динамического возмущения в момент t; A, B, A_1, B_1 и C — постоянные матрицы соответствующих размерностей. Функции $f_1(\cdot)$ и $f_2(\cdot)$ заданы априори и обладают следующими свойствами: функция $f_1(\cdot)$ принадлежит пространству $L_2(T; \mathbb{R}^n)$, а функция $f_2(\cdot)$ дифференцируема, и ее производная является элементом пространства $L_\infty(T; \mathbb{R}^r)$.

Содержательно рассматриваемая задача может быть сформулирована следующим образом. Наряду с системой (1.1) имеется еще одна система того же вида

$$\begin{aligned} \dot{w}_1^h(t) &= Aw_1^h(t) + Bw_2^h(t) + Cv^h(t) + f_1(t), \\ \dot{w}_2^h(t) &= A_1w_1^h(t) + B_1w_2^h(t) + f_2(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

с начальным состоянием

$$w_1^h(0) = w_{10}^h, \quad w_2^h(t) = w_{20}^h.$$

Структура систем (1.1) и (1.2), т. е. их правые части, а также начальные состояния известны. На систему (1.1) действует возмущение $u = u(t) \in P$. Здесь $P \subset \mathbb{R}^q$ — ограниченное, замкнутое множество — "ресурсы" возмущения. Как возмущение $u(\cdot)$ (измеримая по Лебегу функция со значениями в P), так и порождаемое им решение $\{x(\cdot), y(\cdot)\} = \{x(\cdot; 0, x_0, y_0, u(\cdot)), y(\cdot; 0, x_0, y_0, u(\cdot))\}$ системы (1.1) неизвестны. На промежутке времени T выбрана равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$ с шагом δ. В моменты времени τ_i измеряются (с ошибкой) векторы $y(\tau_i)$. Результаты измерений — векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^r$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - y(\tau_i)|_r \le h, \tag{1.3}$$

где $h \in (0, 1)$ — величина погрешности измерения. В дальнейшем символ $|\cdot|_r$ означает евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^r$, а символ $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ — фазовую траекторию системы (1.1), порожденную неизвестным возмущением $u(\cdot)$. Обсуждаемая задача состоит в конструировании такого закона формирования управления системой (1.2) по принципу обратной связи

$$v^h(t) = v^h(\tau_i, \xi_i^h, w_2^h(\tau_i)) \in P, \quad t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m-1],$$

что скорость изменения координаты $w_2^h(\cdot)$ системы (1.2), т. е. $\dot{w}_2^h(\cdot)$, приближает (в равномерной метрике) скорость изменения координаты $y(\cdot)$ системы (1.1), т. е. $\dot{y}(\cdot)$, каково бы ни было неизвестное возмущение $u = u(\cdot)$. Ниже полагаем $w_{20}^h = \xi_0^h$, $w_{10}^h = \tilde{x}_0$, где

$$|\tilde{x}_0 - x_0|_n \le h.$$

Таким образом, мы считаем, что начальное состояние системы (1.1) известно приближенно. Именно вместо векторов x_0, y_0 мы знаем векторы $\tilde{x}_0$ и ξ_0^h.

Выбор закона управления, т. е. способа изменения параметра $v^h(t)$, находится в руках некоторого — будем пользоваться терминологией теории позиционных дифференциальных игр [1; 2] — “игрока”. “Игрок” должен выбирать этот закон таким образом, чтобы обеспечить указанное выше свойство движения при любой возможной реализации возмущения $u = u(t)$. Подчеркнем, что природа возмущения u нам безразлична. Это может быть программное управление или формируемое кем-то по принципу обратной связи, из каких-либо соображений, позиционное управление. Необходимо лишь выполнение двух условий: во-первых, реализация $ut)$ должна быть измеримой (по Лебегу) функцией на промежутке T, а во-вторых, она должна удовлетворять включению: $u(t) \in P$ при п. в. $t \in T$.

В настоящей работе излагается алгоритм решения описанной выше задачи, который основан на известном в теории позиционного управления принципе экстремального сдвига [1]. В связи с неполнотой информации, а именно с возможностью измерения в моменты τ_i не всего фазового состояния системы $\{x(\tau_i), y(\tau_i)\}$, а лишь его части — $y(\tau_i)$, непосредственное применение принципа экстремального сдвига в том виде, как он приведен в монографии [1], не представляется возможным.

Заметим, что основы теории позиционного управления были заложены в [1–4]. Однако в этих работах обсуждались проблемы гарантированного управления в случаях измерения с ошибкой всего фазового состояния (т. е. при “полной” информации о фазовых траекториях). В данной работе исследуется задача об отслеживании скорости изменения фазовой траектории системы при измерении лишь части фазового состояния (измерении части координат). Следует отметить, что в случае, когда измеряются (в моменты τ_i) все фазовые координаты, задача отслеживания решений тех или иных уравнений с позиций подхода цитированных выше работ была исследована в [12–15] как для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для распределенных уравнений первого или второго порядков. В настоящей работе, в отличие от указанных выше работ, мы рассматриваем задачу отслеживания не решения, а скорости его изменения.

2. Вспомогательные результаты

Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи приведем одну леммму, которая нам понадобится в дальнейшем. Фиксируем семейство разбиений промежутка T – $\{\Delta_h\}_{h\in(0,1)}$, где

$$\Delta_h = \{\tau_i\}_{i=0}^m, \quad m = m_h, \quad \tau_i = \tau_{i,h} \quad \tau_{i+1} = \tau_i + \delta, \quad \delta = \delta(h).$$

Введем вспомогательную управляемую систему, описываемую векторным линейным дифференциальным уравнением ($w_0^h \in \mathbb{R}^r$, $v_*^h \in \mathbb{R}^r$) вида

$$\dot w_0^h(t) = v_*^h(t) \tag{2.1}$$

с управлением $v_*^h(t)$. Ее начальное состояние

$$w_0^h(0) = \xi_0^h.$$

Пусть взята некоторая функция $\alpha = \alpha(h) : (0,1) \to (0,1)$. Положим

$$v_*^h(t) = -\frac{1}{\alpha}(w^h(\tau_i) - \xi_i^h) \quad \text{при} \quad t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m-1]. \tag{2.2}$$

В уравнении (2.1) управление $v_*^h(t)$ зададим по правилу (2.2). Следовательно, управление $v_*^h(\cdot)$ в системе (2.1) будет находиться по принципу обратной связи

$$v_*^h(t) = v_*^h(\tau_i; w_0^h(\tau_i), \xi_i^h) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

В таком случае система (2.1) примет вид

$$\dot w_0^h(t) = -\frac{1}{\alpha}(w_0^h(\tau_i) - \xi_i^h) \quad \text{при п.в. } t \in \delta_i, \quad i \in [0 : m-1].$$

Фиксируем число $\gamma \in (0,1)$. В дальнейшем нам понадобится

Условие 1. Выполнены следующие соотношения

$$\delta = \delta(h) \to 0, \quad \alpha = \alpha(h) \to 0, \quad \frac{h+\delta(h)}{\alpha(h)} \to 0, \quad \delta^{-\gamma}(h)\alpha(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Пусть

$$\tilde{v}^h(t) = \begin{cases} A_1\tilde{x}_0 + B_1\xi_0^h + f_2(0), & \text{если} \quad t \in [0,\delta^\gamma), \\ v_*^h(t), \quad \text{если} \quad t \in [\delta^\gamma, \vartheta]. \end{cases} \tag{2.3}$$

Справедлива

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* 1. *Тогда при всех* $t \in T$ *верно неравенство*

$$|\tilde{v}^h(t) - \dot{y}(t)|_r \le \varphi(\alpha,\delta) = d(\alpha + (h+\delta)\alpha^{-1} + \alpha\delta^{-\gamma} + \delta^\gamma).$$

При этом имеет место сходимость

$$\varphi(\alpha(h),\delta(h)) \to 0 \quad \textit{при } h \to 0.$$

Здесь и всюду ниже $d, d_0, d_1, \ldots$, а также $c_*, c, c_1, c_2 \ldots$ означают постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде.

Доказательство. Анализ доказательства теоремы 5 из работы [16] позволяет сделать вывод, что при выполнении неравенств (1.3) при всех $t \in T$ справедливо неравенство

$$\Big|\frac{1}{\alpha}(w_0^h(\tau_i) - y(\tau_i)) - \dot{y}(t)\Big|_r \le d_0\Big(\frac{h+\delta}{\alpha} + \alpha\Big) + d_1 e^{-t\alpha^{-1}}|\dot{y}(0)|_r. \tag{2.4}$$

При выводе этого неравенства учитывается тот факт, что $\dot{f}_2(\cdot) \in L_\infty(T;\mathbb{R}^r)$. Заметим, что

$$\dot{y}(0) = A_1x_0 + B_1y_0 + f_2(0).$$

Следовательно,

$$\big|\dot{y}(0) - (A_1\tilde{x}_0 + B_1\xi_0^h + f_2(0))\big|_r \le d_2h. \tag{2.5}$$

Кроме того,

$$e^{-\delta^\gamma/\alpha} \le \alpha\delta^{-\gamma}. \tag{2.6}$$

Учитывая (2.3), (2.5), получаем

$$|\tilde{v}^h(t) - \dot{y}(t)|_r \le d_3(\delta^\gamma + h) \quad \text{при } t \in [0,\delta^\gamma], \tag{2.7}$$

ибо $\dot{y}(\cdot)$ — липшицевая функция. Поэтому при $t \in [0,\delta^\gamma]$ справедливо неравенство

$$|\dot{y}(t) - \dot{y}(0)|_r \le d_4t \le d_4\delta^\gamma.$$

В свою очередь, при $t \in [\delta^\gamma, \vartheta]$

$$e^{-t/\alpha} \le e^{-\delta^\gamma/\alpha}. \tag{2.8}$$

Из (2.4), (2.8) выводим

$$|\tilde{v}^h(t) - \dot{y}(t)|_r \le d_1\Big(\frac{h+\delta}{\alpha} + \alpha\Big) + d_2e^{-t\alpha^{-1}}|\dot{y}(0)|_r \quad \text{при } t \in [\delta^\gamma, \vartheta].$$

Утверждение леммы вытекает из (2.6), (2.7) и последнего неравенства. Лемма доказана.

Замечание 1. Как следует из результатов работы [16], в случае, когда $\dot{y}(0) = 0$, т. е. $A_1x_0 + B_1y_0 + f_2(0) = 0$, можно полагать

$$\tilde{v}^h(t) = v_*^h(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in T.$$

При этом при всех $t \in T$ имеет место неравенство

$$|\tilde{v}^h(t) - \dot{y}(t)|_r \le d\big(\alpha + (h+\delta)\alpha^{-1}\big).$$

3. Алгоритм решения

Перейдем к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи. При этом мы организуем процесс синхронного управления системами (1.2) и (2.1).

До начала работы алгоритма фиксируем величину h, числа $\gamma \in (0,1)$ и $\alpha = \alpha(h)$ и разбиение $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}$. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{i,h}$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент τ_i, вычисляются функция $\tilde{v}^h(t), t \in \delta_i$ и вектор v_i^h по формуле

$$v_i^h = \arg\max\{(\tilde{S}_h(\tau_i), A_1 C v) \colon v \in P\}, \tag{3.1}$$

где символ $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве,

$$\tilde{S}_h(\tau_i) = \tilde{v}^h(\tau_i) - \dot{w}_2^h(\tau_i) - A_1 e^{A\tau_i}(x_0 - \tilde{x}_0) - B_1 \xi_i^h + B_1 w_2^h(\tau_i).$$

Затем на вход системы (1.2) в течение промежутка δ_i подается постоянное управление $v^h(t) = v_i^h$, а на вход системы (2.1)–управление $v_*^h(t)$. В результате под действием этого управления система (1.2) переходит из состояния $\{w_1^h(\tau_i), w_2^h(\tau_i)\}$ в состояние $\{w_1^h(\tau_{i+1}), w_2^h(\tau_{i+1})\}$, а система (2.1)– из состояния $w_0^h(\tau_i)$ в состояние $w_0^h(\tau_{i+1})$. На следующем, $(i+1)$-м, шаге аналогичные действия повторяются. Работа алгоритма заканчивается в момент ϑ.

В дальнейшем нам потребуется

Условие 2. Существует матрица A_* размерности $r \times r$ такая, что $A_1 A = A_* A_1$.

Это условие выполняется, например, когда $A_1 = A_0^*$ и $A_1 A = A_0^+$, где A_0 — некоторая матрица, A_0^+ — псевдообратная для A_0 матрица, A_0^* — транспонированная матрица.

Теорема 1. *Пусть $\gamma = 1/6$, $\alpha(h) = \delta^{1/3}(h)$ и выполнены условия 1 и 2. Тогда при всех $t \in T$ верно неравенство*

$$|\dot{y}(t) - \dot{w}_2^h(t)|_r \le \nu(h),$$

где $\nu(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\varepsilon(t) = \left|\dot{y}(t) - \dot{w}_2^h(t) - A_1 e^{At}(x_0 - \tilde{x}_0) - B_1(y(t) - w_2^h(t))\right|_r^2.$$

Воспользовавшись формулой Коши $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}(By(s) + Cu(s) + f_1(s))\,ds$, из (1.1) получим

$$\dot{y}(t) = A_1 e^{At} x_0 + A_1 \int_0^t e^{A(t-s)}\big(By(s) + Cu(s) + f_1(s)\big)\,ds + B_1 y(t) + f_2(t). \tag{3.2}$$

Аналогично, учитывая (1.2), имеем

$$\dot{w}_2^h(t) = A_1 e^{At}\tilde{x}_0 + A_1 \int_0^t e^{A(t-s)}(Bw_2^h(s) + Cv^h(s) + f_1(s))\,ds + B_1 w_2^h(t) + f_2(t). \tag{3.3}$$

Оценим изменение величины $\varepsilon(t)$. Заметим, что $\varepsilon(t) = \left|A_1 S_h(t)\right|_r^2$, где

$$S_h(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\big(B(y(\tau) - w_2^h(\tau)) + C(u(\tau) - v^h(\tau))\big)\,d\tau. \tag{3.4}$$

В силу (3.2), (3.3) справедливо равенство

$$A_1S_h(t)=\dot y(t)-\dot w_2^h(t)-A_1e^{At}(x_0-\tilde x_0)-B_1(y(t)-w_2^h(t)),\quad t\in T.$$

Следовательно,

$$\varepsilon(\tau_{i+1})=|A_1e^{A\delta}S_h(\tau_i)|_r^2+\mu_i+\nu_i,\tag{3.5}$$

где

$$\mu_i=2\biggl(A_1e^{A\delta}S_h(\tau_i),\ A_1\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}e^{A(\tau_{i+1}-\tau)}\bigl(B(y(\tau)-w_2^h(\tau))+C(u(\tau)-v^h(\tau))\bigr)\,d\tau\biggr),$$

$$\nu_i=\biggl|A_1\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}e^{A(\tau_{i+1}-\tau)}\bigl(B(y(\tau)-w_2^h(\tau))+C(u(\tau)-v^h(\tau))\bigr)\,d\tau\biggr|_r^2.$$

Для любого $\delta_*\in(0,1)$ можно указать такое $c_*=c_*(\delta_*)$, что при всех $\delta\in(0,\delta_*)$ имеет место неравенство

$$\|e^{A\delta}-(E+A\delta)\|\le c_*\delta^2.$$

Здесь символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму матрицы, а символ E — единичную матрицу соответствующей размерности. Поэтому $|A_1e^{A\delta}x-A_1Ex|_r\le|A_1A\delta x|_r+c_0\delta^2|x|_n$. В силу условия 2

$$|A_1A\delta x|_r=|A_*A_1\delta x|_r\le c_1\delta|A_1x|_r.$$

Значит,

$$\begin{aligned}|A_1e^{A\delta}S_h(\tau_i)-A_1S_h(\tau_i)|_r&\le\delta|A_*A_1S_h(\tau_i)|_r+c_0\delta^2|S_h(\tau_i)|_n\\&\le\delta c_2\varepsilon^{1/2}(\tau_i)+c_0\delta^2|S_h(\tau_i)|_n\quad\forall x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Поэтому по δ_* можно указать числа $c_3,c_4\in(0,\infty)$ такие, что при всех $\delta\in(0,\delta_*)$ и всех $i\in[1:m]$ верно неравенство

$$|A_1e^{A\delta}S_h(\tau_i)|_r^2\le(1+c_3\delta)\varepsilon(\tau_i)+c_4\delta^2|S_h(\tau_i)|_n^2.\tag{3.7}$$

Заметим, что справедливы соотношения

$$|y(t)|_r\le c_5\biggl(1+\int\limits_0^t|u(\tau)|_q\,d\tau\biggr),\quad |w_2^h(t)|_r\le c_6\biggl(1+\int\limits_0^t|v^h(\tau)|_q\,d\tau\biggr).$$

В таком случае при всех $i\in[0:m]$ (см. (3.4))

$$|S_h(\tau_i)|_n\le c_7\biggl[1+\int\limits_0^{\tau_i}\bigl(|v^h(\tau)|_q+|u(\tau)|_q\bigr)\,d\tau\biggr].\tag{3.8}$$

Кроме того, учитывая неравенство $|\tilde x_0-x_0|_n\le h$, имеем

$$\nu_i\le c_8\delta\biggl[h^2\delta+\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}(|v_i^h|_q^2+|u(\tau)|_q^2)\,d\tau+\delta\int\limits_0^{\tau_{i+1}}(|\dot y(\tau)-\dot w_2^h(\tau)|_r^2)\,d\tau\biggr].\tag{3.9}$$

В свою очередь в силу (3.6) верны неравенства

$$\mu_i\le\varrho_i+2\biggl(A_1S_h(\tau_i),A_1\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}e^{A(\tau_{i+1}-\tau)}B(y(\tau)-w_2^h(\tau))\,d\tau\biggr)$$

$$+ \left(\delta c_2 \varepsilon^{1/2}(\tau_i) + c_0\delta^2|S_h(\tau_i)|_n\right)\left|A_1\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} e^{A(\tau_{i+1}-\tau)}\big(B(y(\tau)-w_2^h(\tau)) + C(u(\tau)-v_i^h)\big)\,d\tau\right|_r,$$

где $\varrho_i = 2\Big(A_1S_h(\tau_i), \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} A_1C(u(\tau)-v_i^h)d\tau\Big)$. Следовательно,

$$\mu_i \le \nu_{1i} + \varrho_i + \nu_{2i} + \nu_{3i}. \tag{3.10}$$

Здесь

$$\nu_{1i} = c_9\delta(\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \delta|S_h(\tau_i)|_n)\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y(\tau)-w_2^h(\tau)|_r\,d\tau,$$

$$\nu_{2i} = c_{10}\delta(\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \delta|S_h(\tau_i)|_n)\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u(\tau)|_q + |v_i^h|_q)\,d\tau, \quad \nu_{3i} = c_{11}\varepsilon^{1/2}(\tau_i)\delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} (|u(\tau)|_q + |v_i^h|_q)\,d\tau.$$

Далее, имеем

$$\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |y(\tau)-w_2^h(\tau)|_r d\tau \le c_{11}\delta\Big(h + \int\limits_0^{\tau_{i+1}} |\dot y(\tau) - \dot w_2^h(\tau)|_r d\tau\Big).$$

Учитывая (3.8), а также последнее неравенство, выводим

$$\nu_{1i} \le c_{12}\delta^2\Big[\varepsilon^{1/2}(\tau_i) + \delta\Big(1 + \int\limits_0^{\tau_i}\big(|u(\tau)|_q + |v^h(\tau)|_q\big)\,d\tau\Big)\Big]\Big(h + \int\limits_0^{\tau_{i+1}} |\dot y(\tau)-\dot w_2^h(\tau)|_r d\tau\Big)$$

$$\le c_{13}\delta\varepsilon(\tau_i) + c_{14}\delta^2\int\limits_0^{\tau_{i+1}}\big(|\dot y(\tau)-\dot w_2^h(\tau)|_r^2\big)\,d\tau + c_{15}\delta^3\Big(1 + \int\limits_0^{\tau_i}\big(|u(\tau)|_q^2 + |v^h(\tau)|_q^2\big)\,d\tau + h^2\delta^2\Big), \tag{3.11}$$

$$\nu_{2i} \le c_{16}\delta\varepsilon(\tau_i) + c_{17}\delta^2\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u(\tau)|_q^2 + |v_i^h|_q^2\big)\,d\tau + c_{18}\delta^3\Big(1 + \int\limits_0^{\tau_i}\big(|u(\tau)|_q^2 + |v^h(\tau)|_q^2\big)\,d\tau\Big),$$

$$\nu_{3i} \le c_{19}\delta\varepsilon(\tau_i) + c_{20}\delta^2\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\big(|u(\tau)|_q^2 + |v_i^h|_q^2\big)\,d\tau. \tag{3.12}$$

Обозначим

$$\chi_i^h(u, v^h) \equiv 2\Big(A_1S_h(\tau_i) - \tilde S_h(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} A_1C(u(\tau)-v_i^h)\,d\tau\Big).$$

Легко видеть, что ввиду (3.1) справедлива оценка

$$\varrho_i \le 2\Big(\tilde S_h(\tau_i), \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} A_1C(u(\tau)-v_i^h)\,d\tau\Big) + \chi_i^h(u,v^h) \le \chi_i^h(u,v^h). \tag{3.13}$$

Кроме того, в силу леммы 1 имеет место соотношение

$$|\tilde v^h(\tau_i) - \dot y(\tau_i)|_r \le \varphi(\alpha,\delta). \tag{3.14}$$

В таком случае

$$|A_1S_h(\tau_i) - \tilde S_h(\tau_i)|_r \le \varphi(\alpha,\delta).$$

Поэтому, каково бы ни было число $\beta \in (0,1)$, верно неравенство

$$|\chi_i^h(u,v^h)| \le c_{21}\varphi(\alpha,\delta)\left(\delta|v_i^h|_q + \int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u(\tau)|_q\,d\tau\right)$$

$$\le c_{22}\biggl(\delta^\beta\varphi^2(\alpha,\delta) + \delta^{2-\beta}|v_i^h|_q^2 + \delta^{1-\beta}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |u(\tau)|_q^2\,d\tau\biggr). \qquad (3.15)$$

В таком случае из (3.9)–(3.15) получаем

$$\mu_i + \nu_i \le c_{23}\delta\varepsilon(\tau_i) + \pi_i^h, \qquad (3.16)$$

где

$$\pi_i^h = c_{24}\biggl[\delta^3\biggl(1 + \int\limits_0^{\tau_i}\bigl(|u(\tau)|_q^2 + |v^h(\tau)|_q^2\bigr)\,d\tau\biggr)$$

$$+\ \delta^{1-\beta}\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}\bigl(|u(\tau)|_q^2 + |v_i^h|_q^2\bigr)\,d\tau + \delta\int\limits_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot y(\tau) - \dot w_2^h(\tau)|_r^2\,d\tau + \varphi^2(\alpha,\delta)\delta^\beta + h^2\delta\biggr].$$

Из (3.5), (3.7), (3.8) и (3.16) выводим

$$\varepsilon(\tau_{i+1}) \le (1 + c_{25}\delta)\varepsilon(\tau_i) + c_{26}\pi_i^h. \qquad (3.17)$$

В свою очередь, из (3.17) стандартным образом получаем $\varepsilon(\tau_i) \le c_{27}\bigl(\delta^{1-\beta} + h^2 + \varphi^2(\alpha,\delta)\delta^{\beta-1}\bigr)$. Учитывая правило определения $\varepsilon(\cdot)$, а также неравенство $|x_0 - w_{10}^h|_n \le h$, заключаем, что в силу последнего неравенства при всех $t \in T$ верна оценка

$$|\dot y(t) - \dot w_2^h(t)|_r^2 \le c_{28}\bigl(\delta^{1-\beta} + \varphi^2(\alpha,\delta)\delta^{\beta-1} + h^2\bigr) + c_{29}\int\limits_0^t |\dot y(\tau) - \dot w_2^h(\tau)|_r^2\,d\tau.$$

Воспользовавшись леммой Гронуолла, отсюда выводим

$$|\dot y(t) - \dot w_2^h(t)|_r^2 \le c_{30}(\delta^{1-\beta} + \varphi^2(\alpha,\delta)\delta^{\beta-1} + h^2).$$

Заметим, что

$$\delta^{\beta-1}\varphi^2(\delta,\alpha) \le c_{31}\delta^{\beta-1}\Bigl(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\delta^\gamma} + \delta^\gamma\Bigr)^2 \le c_{32}\Bigl(\frac{\delta^{1+\beta}}{\alpha^2} + \frac{\delta^{\beta-1}\alpha^2}{\delta^{2\gamma}} + \delta^{\beta+2\gamma-1}\Bigr). \qquad (3.18)$$

Пусть $\alpha = \delta^\mu$, где $\mu \in (0,1)$ — некоторое число. Тогда правая часть неравенства (3.18) будет стремиться к нулю при $h \to 0$, если выполнены неравенства

$$1 + \beta - 2\mu > 0, \quad \beta + 2\mu - 1 - 2\gamma > 0, \quad \beta + 2\gamma - 1 > 0, \quad \mu - \gamma > 0. \qquad (3.19)$$

Положим $\mu = 1/3$. Тогда неравенства (3.19) примут вид

$$\frac{1}{3} + \beta > 0, \quad \beta - \frac{1}{3} - 2\gamma > 0, \quad \beta + 2\gamma > 1, \quad \gamma < \frac{1}{3}. \qquad (3.20)$$

Как нетрудно видеть, неравенства (3.20) выполняются, если $\beta - 2\gamma > 1/3$, $\beta + 2\gamma > 1$. В свою очередь, последние неравенства верны, когда, например, $\beta = 3/4$, $\gamma = 1/6$. Теорема доказана.

Пусть наряду с условиями 1 и 2 выполнено

Условие 3. $\mathrm{rank}(A_1C) = q$.

В этом случае размерность компоненты y фазового вектора системы (1.1) не меньше размерности возмущения u, т.е. $r \ge q$. Тогда можно указать число $m_* > 0$ такое, что для любого возмущения $u(t) \in P$ при п.в. $t \in T$ при всех $t \in T$ верны неравенства

$$\Big|A_1C\int\limits_0^t u(\tau)\,d\tau\Big|_r \ge m_*\varphi_u(t), \tag{3.21}$$

где $\varphi_u(t) = \Big|\int_0^t u(\tau)\,d\tau\Big|_q$. Проинтегрировав по частям, будем иметь

$$\gamma_{u,v^h}(t) \equiv A_1\int\limits_0^t e^{A(t-s)}C(u(s)-v^h(s))\,ds = A_1e^{A(t-s)}C\int\limits_0^s (u(\tau)-v^h(\tau))\,d\tau\Big|_{s=0}^{s=t}$$

$$+\int\limits_0^t\Big(A_1Ae^{A(t-s)}\int\limits_0^s (u(\tau)-v^h(\tau))\,d\tau\Big)ds. \tag{3.22}$$

Следовательно, учитывая (3.21), (3.22), выводим оценку

$$m_*\varphi_{u-v^h}(t) \le \Big|A_1C\int\limits_0^t (u(\tau)-v^h(\tau))\,d\tau\Big|_r \le |\gamma_{u,v^h}(t)|_r + \int\limits_0^t \psi(t,s)\varphi_{u-v^h}(s)\,ds, \tag{3.23}$$

где

$$\psi(t,s) = \|A_1Ae^{A(t-s)}\|, \quad \varphi_{u-v^h}(t) = \Big|\int\limits_0^t (u(\tau)-v^h(\tau))\,d\tau\Big|_q.$$

В силу теоремы 1 имеет место неравенство

$$\sup_{t\in T}|\gamma_{u,v^h}(t)|_r \le c_*\nu(h). \tag{3.24}$$

Из (3.23), (3.24) воспользовавшись неравенством Гроноулла, получаем

$$\sup_{t\in T}\Big|\int\limits_0^t (u(\tau)-v^h(\tau))\,d\tau\Big|_q \le \mu(h)\to 0 \quad \text{при} \quad h\to 0. \tag{3.25}$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1–3. *Тогда имеет место сходимость* (3.25).

Из теоремы 2 вытекает

Следствие. Пусть выполнены условия леммы 2. Тогда $v^h(\cdot) \to u(\cdot)$ слабо в $L_2(T;\mathbb{R}^q)$ при $h \to 0$.

Замечание 2. Анализ приведенного выше доказательства теоремы 1 позволяет сделать вывод, что утверждение теоремы остается справедливым для нелинейных систем вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(y(t)) + Cu(t) + f_1(t),$$
$$\dot{y} = A_1x(t) + B_1(y(t)) + f_2(t),$$

если $B(\cdot)$ и $B_1(\cdot)$ — липшицевые функции. В этом случае система (1.2) имеет вид

$$\dot{w}_1^h(t) = Aw_1^h(t) + B(w_2^h(t)) + Cu^h(t) + f_1(t),$$
$$\dot{w}_2^h(t) = A_1w_1^h(t) + B_1(w_2^h(t)) + f_2(t),$$

а векторы $\tilde{S}_h(\tau_i)$ вычисляются по формуле

$$\tilde{S}_h(\tau_i) = \tilde{v}^h(\tau_i) - \dot{w}_2^h(\tau_i) - A_1e^{A\tau_i}(x_0-\tilde{x}_0) - B_1(\xi_i^h) + B_1(w_2^h(\tau_i)).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. **Осипов Ю.С.** Избранные труды. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 656 с.
4. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981, 288 с.
5. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
6. **Барабанова Н.Н., Субботин А.И.** О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, № 6. С. 345–356.
7. **Пацко В.С.** Поверхности переключения в линейных дифференциальных игра: препринт / Ин-т математики и механики УрО РАН. 2004. 80 с.
8. **Максимов В.И.** Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 6. С. 951–960.
9. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 993–1002.
10. **Максимов В.И.** О компенсации возмущений в нелинейных управляемых системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 2. С. 62–68.
11. **Fagnani F., Maksimov V., Pandolfi L.** A recursive deconvolution approach to disturbance reduction // IEEE Trans. Aut. Contr. 2004. Vol. 49, no. 6. P. 907–921. doi: 10.1109/TAC.2004.829596 .
12. **Максимов В.И.** Об отслеживании решения параболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 40–48.
13. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме отслеживания решения параболического уравнения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 366–375.
14. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме управления линейной системой при измерении части координат фазового вектора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 218–230.
15. **Максимов В.И.** Об отслеживании предписанного решения нелинейного распределенного уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 1. С. 128–131.
16. **Максимов В.И.** О вычислении производной функции, заданной неточно, с помощью законов обратной связи // Тр. МИАН им. В.А. Стеклова. 2015. Т. 291. С. 231–243.

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 28.10.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamic system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
3. *Izbrannye trudy Yu.S. Osipova* [Selected Works by Yu.S. Osipov]. Moscow: MSU Publ. 2009, 656 p.
4. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of a guarantee in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981. 288 p.
5. Ushakov V.N. On the problem of stable bridges construction in the differential game of pursuit-evasion. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekhn. Kibernet.*, 1980, no. 4, pp. 29–36 (in Russian).
6. Barabanova N.N. Subbotin A.I. On classes of strategies in differential games of evasion of contact. *J. Appl. Math. Mech.*, 1972, vol. 35, no. 3, pp. 349–356.

7. Patsko V.S. *Poverhnosti perekljuchenija v linejnyh differencial'nyh igra* [Switching surfaces in linear differential games]. Preprint, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, 2004. 80 p.
8. Maksimov V.I. The tracking of the trajectory of a dynamical system. *J. Appl. Math. Mech.*, 2011, vol. 75, no. 6, pp. 667–674. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.01.007 .
9. Kryazhimskiy A.V., Maksimov V.I. Resource-saving tracking problem with infinite time horizon. *Diff. Equat.*, 2011, vol. 47, no. 7. pp. 1004–1013. doi: 10.1134/S001226611107010X .
10. Maksimov V.I. Compensation of disturbances in non-linear control systems. *J. of Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 2, pp. 220–226.
11. Fagnani F., Maksimov V., Pandolfi L. A recursive deconvolution approach to disturbance reduction. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, 2004, vol. 49, no. 6, pp. 907–921. doi: 10.1109/TAC.2004.829596 .
12. Maksimov V.I. On tracking solutions of parabolic equations. *Russ. Math.*, 2012, vol. 56, no. 1, pp. 35–42. doi: 10.3103/S1066369X12010057 .
13. Maksimov V.I. Algorithm for shadowing the solution of a parabolic equation on an infinite time interval. *Diff. Equat.*, 2014, vol. 50, no. 3, pp. 362–371. doi:10.1134/S0012266114030100 .
14. Maksimov V.I. On a control algorithm for a linear system with measurements of a part of coordinates of the phase vector. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 197–210. doi: 10.1134/S0081543816020164 .
15. Maksimov V.I. Tracking a given solution of a nonlinear distributed second-order equation. *Diff. Equat.*, 2016, vol. 52, no. 1, pp. 128–132. doi:10.1134/S0012266116010110 .
16. Maksimov V.I. Calculation of the derivative of an inaccurately defined function by means of feedback laws. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 219–231. doi: 10.1134/S0081543815080179 .

Maksimov V.I. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ОДНА НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ[1]

М. С. Никольский

Рассматривается нелинейная динамическая система, в описание которой входит неизвестный векторный параметр. Предполагается, что наблюдатель на отрезке $[0,T]$ может вычислять фазовый вектор системы с некоторой ошибкой, ограниченной по модулю малой величиной $h>0$. Эту информацию о динамике системы желательно использовать для нахождения неизвестного вектора. В статье получены конструктивные достаточные условия, при которых искомый вектор можно восстановить тем точнее, чем меньше величина $h>0$. При этом удается ограничиться дискретными измерениями выхода системы.

Ключевые слова : идентификация, динамические системы, обратные задачи.

M. S. Nikol'skii. A nonlinear identification problem.

We consider a nonlinear dynamic system with an unknown vector parameter in its description. An observer can calculate the phase vector of this system on the interval $[0,T]$ with an error whose modulus does not exceed a small value $h>0$. This information on the dynamics of the system should be used to find the unknown vector. We obtain constructive sufficient conditions under which it is possible to restore the unknown vector with decreasing error as the value of h tends to zero. It turns out that it is sufficient to use discrete measurements of the output of the system.

Keywords: identification, dynamic systems, inverse problems.

MSC: 34K29, 49N45, 93B30

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-206-211

1. Введение

Задачам идентификации посвящена большая литература. Некоторое представление о задачах идентификации неизвестных параметров для динамических объектов можно получить из [1–3].

В настоящей работе мы рассмотрим одну нелинейную динамическую задачу идентификации векторного параметра. При постановке задачи была использована известная модель теории обратных задач динамики управляемых объектов (см., например, [4]). Вслед за [4] предполагается, что наблюдение за траекторией управляемого объекта ведется на фиксированном отрезке времени $[0,T]$ с малой в евклидовой норме ошибкой. При решении нашей задачи мы не используем методы монографии [4] Это связано с тем, что в монографии [4] идентифицируется неизвестное измеримое управление, а у нас неизвестным является вектор, который можно рассматривать как постоянное управление. Это обстоятельство упрощает решение задачи и позволяет использовать другие подходы. Отметим, что, как и в [4], при построении приближения искомого вектора удается ограничиться конечным числом измерений зашумленного выхода системы на отрезке наблюдения [0,T]. Получена оценка сверху скорости сходимости в евклидовой норме построенного приближения к искомому вектору.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00005).

2. Постановка задачи и метод ее решения

Рассмотрим нелинейный управляемый объект вида (см., например, [5; 6]):

$$\dot{x} = f(x,t) + B(t)u. \tag{1}$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, векторная функция $f(x,t)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ непрерывна по (x,t) при $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \Delta = [0,T]$ $(T > 0)$, и удовлетворяет условию Липшица вида

$$|f(x',t') - f(x'',t'')| \leqslant L|x' - x''|, \tag{2}$$

где x', x'' — произвольные векторы из $\mathbb{R}^n$, $t \in \Delta$, L — неотрицательная константа; матричная функция $B(t)$ размерности $n \times r$ $(r \geqslant 1)$ непрерывно дифференцируема при $t \in (-\varepsilon, T+\varepsilon)$, ε — некоторая положительная константа. В (1) вектор $u \in \mathbb{R}^r$, причем на него наложено геометрическое ограничение $u \in P$, где P — неодноточечный выпуклый компакт из $\mathbb{R}^r$. Здесь и далее символом $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 1)$ обозначается k-мерное действительное евклидово арифметическое пространство со стандартным скалярным произведением векторов $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и со стандартной длиной вектора $|\cdot|$. Элементами $\mathbb{R}^k$ являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемые в виде столбцов. Для $n \times r$-матрицы M символом $\|M\|$ условимся обозначать операторную норму M.

Пусть фиксированы начальное условие

$$x(0) = x_0 \tag{3}$$

и некоторый вектор $p_0 \in P$. Рассмотрим движение вектора $x(t)$, описываемое уравнением

$$\dot{x} = f(x,t) + B(t)p_0 \tag{4}$$

и начальным условием (3). Наблюдателю считаются известными функции $f(x,t)$, $B(t)$, выпуклый компакт P, вид уравнения (1) и некоторый непустой компакт $K \subset \mathbb{R}^n$. Ему также известно, что $x_0 \in K$, $p_0 \in P$. Предполагается еще, что при $t \in \Delta$ наблюдателю доступна неточная информация о решении $x(t)$ уравнения (1) с начальным условием (3) вида

$$y(t) = x(t) + \xi(t), \tag{5}$$

где $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ — помеха, про которую известно только, что $|\xi(t)| \leqslant h$; здесь константа $h > 0$, причем она известна наблюдателю.

Целью наблюдателя является приближенное вычисление неизвестного вектора $p_0 \in P$ на основе доступной ему информации. При этом желательно вместо непрерывного наблюдения $y(t)$ при $t \in \Delta$ ограничиться дискретными наблюдениями $y(t_i)$, где $t_i = i\delta$, $\delta = T/N$, $i = 0, \ldots, N-1$, причем $N \geqslant 2$.

В дальнейшем считается выполненным следующее

Условие А. Столбцы $b_1(t), \ldots, b_r(t)$ матрицы $B(t)$, $t \in \Delta$, рассматриваемые как элементы гильбертова пространства векторных функций, суммируемых по Лебегу вместе с квадратом модуля $L_2[\Delta, n]$, линейно независимы.

Займемся построением вектора $p_{h,\delta} \in P$, аппроксимирующего искомый вектор $p_0 \in P$, здесь $\delta = T/N$, $N \geqslant 2$. Умножим обе части равенства (4) на транспонированную матрицу $B^*(t)$ и проинтегрируем обе части полученного равенства от нуля до T. Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$Cp_0 = B^*(T)x(T) - B^*(0)x_0 - \int\limits_0^T \big(\dot{B}^*(s)x(s) + B^*(s)f(x(s),s)\big)\,ds, \tag{6}$$

где

$$C=\int\limits_0^T B^*(s)B(s)\,ds, \tag{7}$$

$\dot B^*(s)$ обозначает производную $\dfrac{d}{ds}\,(B^*(s))$. Матрица C является матрицей Грама для векторных функций $b_1(s),\dots,b_r(s)$, рассматриваемых как элементы гильбертова пространства суммируемых по Лебегу вместе с квадратом модуля функций $L_2[\Delta,n]$. В силу условия A для детерминанта симметричной матрицы C мы получаем неравенство $\det C>0$.

Определим на Δ кусочно-постоянную функцию (см. (5))

$$z_{h,\delta}(t)=y(t_i)\quad \text{при}\quad t\in[t_i,t_{i+1}),$$

где $i=0,\dots,N-1$, и положим еще $z_{h,\delta}(T)=y(T)$. Обозначим правую часть формулы (6) через $\mathcal{F}(x(\cdot))$. Заменяя в этом выражении функцию $x(t)$, $t\in\Delta$, на функцию $z_{h,\delta}(t)$, $t\in\Delta$, получим оператор

$$\mathcal{F}_1(z_{h,\delta}(\cdot))=B^*(T)y(T)-B^*(0)y(0)-\int\limits_0^T\bigl(\dot B^*(s)z_{h,\delta}(s)+B^*(s)f(z_{h,\delta}(s),s)\bigr)ds. \tag{8}$$

Отметим, что в формуле (6) через $x(t)$ обозначено решение уравнения (4) с начальным условием (3). В более развернутой форме

$$x(t)=x(t,x_0,p_0). \tag{9}$$

Займемся оценкой величины

$$\gamma(\delta,h)=\max|\mathcal{F}(x(\cdot,x_0,p_0))-\mathcal{F}_1(z_{h,\delta}(\cdot))|, \tag{10}$$

где максимум вычисляется по всевозможным $x_0\in K$, $p_0\in P$ и всевозможным функциям $\xi(t)$, $t\in\Delta$, причем $|\xi(t)|\leqslant h$.

Обозначим через $x(t,x_0,u)$ решение уравнения (1) с начальным условием $x(0)=x_0\in K$ и постоянным вектором $u\in P$. Для нас будет полезно оценить сверху величину $\Bigl|\dfrac{d}{dt}\,x(t,x_0,u)\Bigr|$ равномерно по $t\in\Delta$, $x_0\in K$, $u\in P$. Из (2) получаем для функции $f(x,t)$ оценку вида

$$|f(x,t)|\leqslant L|x|+|f(0,t)|. \tag{11}$$

Обозначим (см. (1))

$$F(x,t,u)=f(x,t)+B(t)u. \tag{12}$$

Положим для краткости

$$\zeta(t)=x(t,x_0,u). \tag{13}$$

Для функции $\zeta(t)$ при $t\in\Delta$ имеем равенство (см. (1), (12), (13))

$$\zeta(t)=x_0+\int\limits_0^t F(\zeta(s),s,u)\,ds. \tag{14}$$

Обозначим

$$c_1=\max_{t\in\Delta}|f(0,t)|, \tag{15}$$

$$c_2=\max_{t\in\Delta,u\in P}|B(t)u|. \tag{16}$$

Тогда из (11)–(16) при $t \in \Delta$, $x_0 \in K$, $u \in P$ получаем

$$|\zeta(t)| \leqslant c_3 + \int_0^t (L|\zeta(s)| + c_1 + c_2)\, ds,$$

где $c_3 = \max\limits_{x \in K} |x|$. Отсюда с помощью известного неравенства Гроноулла (см., например, [4]) получаем при $t \in \Delta$, $x_0 \in K$, $u \in P$ равномерную оценку вида

$$|x(t, x_0, u)| \leqslant \alpha, \tag{17}$$

где α — неотрицательная эффективно вычислимая константа. Обозначим далее (см. (12), (17))

$$\max_{\substack{x \in \sigma \\ t \in \Delta, u \in P}} |F(x, t, u)| = \beta,$$

где $\sigma = \{x\colon |x| \leqslant \alpha\}$. Из сказанного вытекает (см. (1), (12)) оценка

$$\left|\frac{d}{dt}\, x(t, x_0, u)\right| \leqslant \beta,$$

где $t \in \Delta$, $x_0 \in K$, $u \in P$. Отсюда мы получаем при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, N-1$, формулу

$$x(t, x_0, u) = x(t_i, x_0, u) + R_i(t, x_0, u), \tag{18}$$

где

$$|R_i(t, x_0, u)| \leqslant \beta\,(t - t_i). \tag{19}$$

Так как

$$z_{h,\delta}(t) = x(t_i, x_0, p_0) + \xi(t_i)$$

при $t \in [t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, N-1$, то на этом полусегменте мы имеем неравенство (см. (18), (19))

$$|x(t, x_0, p_0) - z_{h,\delta}(t)| \leqslant \beta\,(t - t_i) + h. \tag{20}$$

С помощью неравенства (20) нетрудно получить оценку

$$\int_0^T |x(s, x_0, p_0) - z_{h,\delta}(s)|\, ds \leqslant N\beta \frac{\delta^2}{2} + Th = T\Big(\frac{\beta}{2}\,\delta + h\Big), \tag{21}$$

где $\delta = T/N$. Учитывая равномерную ограниченность $\|\dot{B}(s)\|$, $\|B^*(s)\|$ на отрезке Δ, а также липшицевость функции $f(x, t)$ (см. (2)), аналогично неравенству (21) получаем неравенства

$$\int_0^T \|\dot{B}(s)\| \cdot |x(s, x_0, p_0) - z_{h,\delta}(s)|\, ds \leqslant c_4(\delta + h),$$

$$\int_0^T \|B^*(s)\| \cdot |f(x(s, x_0, p_0), s) - f(z_{h,\delta}(s), s)|\, ds \leqslant c_5(\delta + h),$$

где c_4, c_5 — эффективно вычислимые константы. На основании сказанного получаем следующую оценку величины $\gamma(\delta, h)$ (см. (10)):

$$\gamma(\delta, h) \leqslant c_6(\delta + h), \tag{22}$$

где c_6 — эффективно вычислимая константа. Отметим, что (см. (6), (7)) $p_0 = C^{-1}\mathcal{F}(x(\cdot, x_0, p_0))$. Обозначим (см.(7),(8))

$$q_{\delta,h} = C^{-1}\mathcal{F}_1(z_{h,\delta}(\cdot)).$$

С помощью формул (10), (22) мы приходим к неравенству

$$|p_0 - q_{\delta,h}| \leqslant c_6\|C^{-1}\|(\delta + h). \tag{23}$$

Отметим, что вектор $q_{\delta,h}$ не обязательно принадлежит P. Обозначим через $p_{\delta,h}$ наиближайшую точку к $q_{\delta,h}$ в P. Так как P — выпуклый компакт, то вектор $p_{\delta,h}$ определен однозначным образом. С помощью неравенства $|p_0 - p_{\delta,h}| \leqslant |p_0 - q_{\delta,h}| + |q_{\delta,h} - p_{\delta,h}|$ и неравенства (23) получаем оценку скорости сходимости вектора $p_{\delta,h}$ к искомому вектору p_0 вида

$$|p_0 - p_{\delta,h}| \leqslant 2c_6\|C^{-1}\|(\delta + h). \tag{24}$$

Специально остановимся на случае, когда матрица $B(t)$ на Δ не зависит от t. Обозначим ее B_0. Условие А в этом случае означает, что столбцы матрицы B_0 линейно независимы, т. е. $r \leqslant n$, $\operatorname{rank} B_0 = r$, $C = TB_0^*B_0$ (см. (7)) и вместо (6) мы получаем более простую формулу

$$Cp_0 = B_0^*\left(x(T) - x_0 - \int_0^T f(x(s), s)\, ds\right).$$

Отметим также, что в рассматриваемой ситуации при $\operatorname{rank} B_0 = r$ непосредственно из формулы (4) можно обосновать для p_0 следующую формулу:

$$p_0 = T^{-1}B_0^+\left(x(T) - x_0 - \int_0^T f(x(s), s)\, ds\right),$$

где B_0^+ означает псевдообратную для B_0 матрицу (см. определение и свойства, например, в [7]).

Из сказанного выше вытекает

Утверждение. Предложенный в статье дискретный способ использования текущей неточной информации о траектории системы (1) позволяет вычислить искомый вектор p_0 с точностью вида (24). Здесь δ — величина шага квантования измерений функции $y(t)$, h — оценка точности измерений $x(t)$ (см. (5)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Габасов Р., Кириллова Ф.** Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 508 с.
2. **Гроп Д.** Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
3. **Куржанский А.Б.** Задача идентификации — теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3–26.
4. **Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М.** Основы метода динамической регуляризации. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 238 с.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин [и др.] М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
6. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 р.
7. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 р.

Никольский Михаил Сергеевич

Поступила 7.10.2016

д-р физ.-мат. наук
ведущий научн. сотрудник МИАН РАН
e-mail: mni@mi.ras.ru

REFERENCES

1. Gabasov R. Kirillova F. *The qualitative theory of optimal processes.* New York: Dekker, 1976, 640 p. Original Russian text published in *Kachestvennaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow, Nauka Publ., 1971, 508 p.
2. Graupe D. *Identification of systems.* Huntington, New York, Robert E. Krieger Publ., 1976, 287 p. Translated under the title *Metody identifikatsii sistem*, Moscow, Mir Publ., 1979, 302 p.
3. Kurzhanskii A.B. The identification problem − the theory of guaranteed estimates. *Automation and Remote Control*, 1991, vol. 52, no. 4, pp. 447–465.
4. Osipov Yu.S., Vasiljev F.P., Potapov M.M. *Osnovy metoda dinamicheskoi regulyarizatsii* [Basics of dynamic regularization method]. Moscow, MGU Publ., 1999, 238 p.
5. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, New York; London: Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text published in *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
6. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* New York, London, Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1967, 589 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p.
7. Gantmakher F.R. *The theory of matrices*, 2 volumes, 2nd ed., transl. by K.A. Hirsch, New York: Chelsea Publishing Co., 1989; 1990, 276 p; 374 p.

M. S. Nikol'skii. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russian, e-mail: mni@mi.ras.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА УБЕГАЮЩЕГО В ЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ[1]

Н. Н. Петров, Н. А. Соловьева

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается линейная задача преследования группой преследователей одного убегающего с равными возможностями всех участников, описываемая системой вида

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i, v \in V,$$

где множество допустимых управлений V — строго выпуклый компакт с гладкой границей. Предполагается, что фундаментальная матрица $\Phi(t)$ однородной системы $\dot{w} = A(t)w$, $\Phi(t_0) = E$ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена. Целью группы преследователей является поимка убегающего не менее чем r различными преследователями, причем терминальные множества — выпуклые компакты. Преследователи используют квазистратегии. В терминах начальных позиций получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Приведены примеры.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, рекуррентная функция.

N. N. Petrov, N. A. Solov'eva. A multiple capture of an evader in linear recursive differential games.

In a finite-dimensional Euclidean space, we consider a linear nonstationary problem in which one evader is pursued by a group of players and all the participants have equal capabilities. The problem is described by the system

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0, \quad u_i, v \in V,$$

where the set of admissible controls V is a strictly convex compact set with smooth boundary. It is assumed that the fundamental matrix $\Phi(t)$ of the homogeneous system $\dot{w} = A(t)w$, $\Phi(t_0) = E$ is a Zubov recursive function and its derivative is uniformly bounded. The aim of the pursuing group is to capture the evader by at least r different pursuers. We assume that the terminal sets are convex and compact. The pursuers use quasistrategies. We obtain sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem in terms of the initial positions. Examples are given.

Keywords: differential game, group pursuit, recursive function.

MSC: 49N75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-212-218

Введение

Рассматривается линейная нестационарная задача преследования группой преследователей одного убегающего [1–3] при условии, что все участники обладают равными возможностями, фундаментальная матрица однородной системы является рекуррентной по Зубову функцией. Задача простого группового преследования с равными возможностями всех участников рассматривалась Б. Н. Пшеничным [4], были получены необходимые и достаточные условия поимки. Многократная поимка в задаче простого группового преследования исследовалась в работе Н. Л. Григоренко [5]. Условия многократной одновременной поимки для задачи простого преследования получены А. И. Благодатских [6]. Задача о многократной поимке в примере Л. С. Понтрягина представлена в работах [7–10]. Однократная поимка убегающего в линейной рекуррентной задаче группового преследования рассмотрена в работе [11].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00346) и Минобрнауки России в рамках базовой части госзадания в сфере науки.

В данной работе получены достаточные условия многократной поимки в линейной рекуррентной задаче группового преследования. При этом предполагается, что каждый из преследователей может осуществить поимку не более одного раза и после осуществления поимки он исключается из процесса игры. Такая ситуация может возникнуть, когда требуется “уничтожить” убегающего, а “соприкосновение” одного преследователя с убегающим не гарантирует такого исхода. Работа примыкает к исследованиям [12; 13].

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k (k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и убегающий E.

Движение каждого преследователя P_i описывается системой

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \quad u_i \in V, \quad x_i(t_0) = x_i^0, \tag{1.1}$$

а закон движения убегающего E имеет вид

$$\dot{y} = A(t)y + v, \quad v \in V, \quad y(t_0) = y^0, \tag{1.2}$$

где $x_i, y, u_i, v \in \mathbb{R}^k$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ матричная функция порядка k. Здесь и далее $i \in I = \{1, \ldots, n\}$.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$\dot{z}_i = A(t)z_i + u_i - v, \quad z_i(t_0) = z_i^0 = x_i^0 - y^0. \tag{1.3}$$

Считаем, что $z_i^0 \notin M_i$, где M_i — заданные выпуклые компакты.

Введем следующие обозначения. $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{\omega} = A(t)\omega, \quad \Phi(t_0) = E.$$

$\mathrm{Int}X$, $\mathrm{co}X$ — соответственно внутренность и выпуклая оболочка множества X. Пусть K — некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел.

$$\Omega_r(K) = \{(i_1, \ldots, i_r) \mid i_1, \ldots, i_r \in K \text{ и попарно различны}\},$$

$$\lambda_i(v, h) = \begin{cases} \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda(h - M_i) \cap (V - v) \neq \varnothing\}, & \text{если } h \notin M_i, \\ 0, & \text{если } h \in M_i, \end{cases}$$

$$F_i(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_i\big(v(s), \Phi(s)z_i^0\big)ds, \quad D_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z - a\| \leqslant \varepsilon\}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что задана квазистратегия U_i преследователя P_i, если определено отображение $U_i(t, z^0, v_t(\cdot))$, ставящее в соответствие начальным состояниям $(z_1^0, \ldots, z_n^0)$, моменту t и произвольной предыстории управления $v_t(\cdot)$ убегающего E измеримую функцию $u_i(t)$ со значениями в V.

О п р е д е л е н и е 2. В игре происходит r-кратная поимка, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют момент $T(\varepsilon) > t_0$, квазистратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой функции $v(t), t \in [t_0, \infty)$ существуют набор $\Lambda \in \Omega_r(I)$, моменты времени $\tau_s \in [t_0, T(\varepsilon)]$ для которых $z_s(\tau_s) \in M_i^\varepsilon = M_i + \mathrm{Int}D_\varepsilon(0)$ для всех $s \in \Lambda$. Считаем, что $n \geqslant r$.

О п р е д е л е н и е 3 [14]. Функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $a, t \in \mathbb{R}^1$ можно указать $\tau(t) \in [a, a + T(\varepsilon)]$, для которых справедливо неравенство $\|f(t + \tau(t)) - f(t)\| < \varepsilon$.

Функция $f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется рекуррентной по Зубову на $[t_0, \infty)$, если существует рекуррентная функция $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^k$ такая, что $f(t) = F(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

2. Многократная поимка одного убегающего

Предположение 1. *Фундаментальная матрица Φ является рекуррентной по Зубову функцией, а ее производная равномерно ограничена на* $[t_0, \infty)$.

Предположение 2.

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_{n-r+1}(I)} \operatorname{Intco}\{z_\alpha^0 - M_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

Лемма 1. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что для любых* $h_i \in D_{2\varepsilon_0}(z_i^0)$ *справедливо включение*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_{n-r+1}(I)} \operatorname{Intco}\{h_\alpha - M_\alpha,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

Справедливость леммы следует из свойств открытых множеств. В дальнейшем считаем, что ε_0 выбрано так, что справедлива лемма 1.

Лемма 2. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда существует момент* $T > t_0$ *такой, что для любой допустимой функции* $v(\cdot)$ *найдется множество* $\Lambda \in \Omega_r(I)$, *что* $F_\alpha(T) \geqslant 1$ *для всех* $\alpha \in \Lambda$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $\mu(A)$ — мера Лебега множества A,

$$\Delta = \{t \geqslant t_0 \mid \Phi(t) z_i^0 \in D_{2\varepsilon_0}(z_i^0) \text{ для всех } i \in I\},$$
$$d = \max_i \|z_i^0\|, \quad M = \sup_{t \geqslant t_0} \|\dot{\Phi}(t)\|.$$

Так как Φ является рекуррентной функцией, то существует $\tau > 0$, что для каждого $s = 1, 2, \ldots$ найдется момент $t_s \in [t_0 + (s-1)\tau, t_0 + s\tau]$, для которого $\|\Phi(t_s) - \Phi(t_0)\| < \varepsilon_0/d$. Отсюда $\|\Phi(t_s) z_i^0 - \Phi(t_0) z_i^0\| < \varepsilon_0$. Следовательно, $\Phi(t_s) z_i^0 \in D_{\varepsilon_0}(z_i^0)$ для всех $i \in I, s = 1, 2, \ldots$ Пусть далее $\Delta_s = \{t \mid t \in [t_s, t_{s+1}),\ \Phi(t) z_i^0 \in D_{2\varepsilon_0}(z_i^0) \text{ для всех } i \in I\}$. Из теоремы о среднем следует, что для любых $\tau_1, \tau_2, i \in I$ справедливо неравенство

$$\|\Phi(\tau_1) z_i^0 - \Phi(\tau_2) z_i^0\| \leqslant Md|\tau_1 - \tau_2|.$$

Поэтому если $\|\Phi(\tau_1) z_i^0 - \Phi(\tau_2) z_i^0\| \geqslant \varepsilon_0$, то $|\tau_1 - \tau_2| \geqslant \tau_0 = \varepsilon_0/(Md)$. Значит, $[t_s, t_s + \tau_0] \subset \Delta_s$ для всех $s = 1, 2, \ldots$ Следовательно, $\mu(\Delta) = +\infty$. Докажем, что для любого

$$h = (h_1, \ldots, h_n) \in D = D_{2\varepsilon_0}(z_1^0) \times \cdots \times D_{2\varepsilon_0}(z_n^0)$$

справедливо неравенство

$$\rho(h) = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_r(I)} \min_{s \in \Lambda} \lambda_s(v, h_s) > 0.$$

Предположим, что существует h, для которого $\rho(h) = 0$. Значит, существует $v_0 \in V$ такое, что в любом наборе $\Lambda \in \Omega_r(I)$ найдется s, для которого $\lambda_s(v_0, h_s) = 0$. Строим множество $\Lambda_0 = (s_1, s_2, \ldots, s_{n-r+1})$ следующим образом. Возьмем $s_1 \in \Lambda_1 = \{1, \ldots, r\}$ такой, что $\lambda_{s_1}(v_0, h_{s_1}) = 0$. Выбираем $s_2 \in \Lambda_2 = \Lambda_1 \setminus \{s_1\} \cup \{r+1\}$, для которого $\lambda_{s_2}(v_0, h_{s_2}) = 0$, и рассматриваем множество $\Lambda_3 = \Lambda_2 \setminus \{s_2\} \cup \{r+2\}$. Выбираем $s_3 \in \Lambda_3$ так, что $\lambda_{s_3}(v_0, h_{s_3}) = 0$. На последнем шаге выбираем s_{n-r+1} так, что $\lambda_{n-r+1}(v_0, h_{s_{n-r+1}}) = 0$. В итоге получаем, что $\min\limits_{v \in V} \max\limits_{s \in \Lambda_0} \lambda_s(v, h_s) = 0$. Так как V — строго выпуклый компакт с гладкой границей, то из последнего соотношения следует [1, с. 208], что $0 \notin \operatorname{Intco}\{h_s - M_s,\ s \in \Lambda_0\}$; это противоречит предположению 2.

Из [1, лемма 1.3.13] следует, что функция ρ непрерывна на D. Следовательно,

$$\delta = \min_{h\in D}\min_{v\in V}\max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{s\in\Lambda}\lambda_s(v,h_s) > 0.$$

Далее имеем

$$\max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{s\in\Lambda}F_s(t) = \max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{s\in\Lambda}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_s(v(t),\Phi(t)z_s^0)dt \geqslant \max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{s\in\Lambda}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Delta}\lambda_s(v(t),\Phi(t)z_s^0)dt$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^r}\sum_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\Bigl(\min_{s\in\Lambda}\int\limits_{[t_0,t]\cap\Delta}\lambda_s(v(t),\Phi(t)z_s^0)dt\Bigr)\geqslant \frac{\delta}{C_n^r}\mu([t_0,t]\cap\Delta).$$

Так как $\mu(\Delta) = +\infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\mu([t_0,t]\cap\Delta) = +\infty$. Тогда для момента T, определяемого из условия $\dfrac{\delta}{C_n^r}\mu([t_0,T]\cap\Delta) \geqslant 1$, и некоторого $\Lambda\in\Omega_r(I)$ выполнено $F_s(T) \geqslant 1$ для всех $s\in\Lambda$. Лемма доказана.

Пусть

$$T_0 = \min\{t > t_0\colon \inf_{v(\cdot)}\max_{\Lambda\in\Omega_r(I)}\min_{\alpha\in\Lambda}F_\alpha(t) \geqslant 1\}.$$

В силу леммы 2 $T_0 < \infty$.

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения* 1, 2. *Тогда в игре происходит* r*-кратная поимка убегающего.*

Доказательство. Решение задачи Коши (1.3) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \Phi(t)\Bigl(z_i^0 + \int\limits_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)(u_s(s) - v(s))ds\Bigr).$$

Пусть $v(t), t\in[t_0,T_0]$ — произвольное допустимое управление убегающего E. Из определения момента T_0 следует, что существуют момент $\tau\in[t_0,T_0]$, являющийся корнем функции

$$G(t) = 1 - \max_{\Lambda\in\Omega_q(I)}\min_{\alpha\in\Lambda}\int\limits_{t_0}^{t}\lambda_\alpha(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds,$$

и множество $\Lambda_0\in\Omega_q(I)$ такое, что

$$1 - \int\limits_{t_0}^{t}\lambda_\alpha(v(s),\Phi(s)z_\alpha^0)ds \leqslant 0 \text{ для всех } \alpha\in\Lambda_0.$$

Пусть $t_\alpha\in[t_0,\infty)$ — минимальный корень функции $1 - F_\alpha(t)$, $\alpha\in\Lambda_0$. Отметим, что $t_\alpha\in[t_0,\tau]$ для всех $\alpha\in\Lambda_0$. Пусть $C = \max\limits_{i,m_i\in M_i}\|m_i\|$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. В силу предположения 1 существует $T(\varepsilon) > T_0$, для которого выполнено $\|\Phi(T(\varepsilon)) - E\| < \dfrac{\varepsilon}{C+1}$. Предпишем преследователю P_i, $i\in\Lambda_0$, строить свое управление u_i следующим образом. Если в момент $t\geqslant t_0$ число $F_i(t) < 1$, то $u_i(t)\in V$, $m_i(t)\in M_i$ выбираются как лексикографический минимум среди решений уравнения

$$u_i(t) = v(t) - \lambda_i(v(t),\Phi(t)z_i^0)\Phi(t)(z_i^0 - m_i(t)).$$

Если τ_i — первый момент времени, для которого $F_i(\tau_i) = 1$, то считаем, что $\lambda_i(v(t), \Phi(t)z_i^0) = 0$ для всех $t \geqslant \tau_i$. Значит, $u_i(t) = v(t)$ для всех $t \geqslant \tau_i$.

Тогда из (1.3) получаем

$$z_i(T(\varepsilon)) = \Phi(T(\varepsilon))\Big(z_i^0 - \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)(z_i^0 - m_i(s))ds\Big)$$

$$= \Phi(T(\varepsilon))z_i^0\Big(1 - \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)ds\Big) + \Phi(T(\varepsilon)) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds.$$

В силу определения T_0 для некоторого $i \in I$ будет выполняться $F_i(T_0) = 1$. Следовательно, $F_i(T(\varepsilon)) = 1$. Поэтому

$$z_i(T(\varepsilon)) = \Phi(T(\varepsilon)) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds = \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds$$

$$+ \ (\Phi(T(\varepsilon)) - E) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds.$$

Отметим, что $\displaystyle\int_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds \in M_i$, а

$$\Big\|(\Phi(T(\varepsilon)) - E) \int\limits_{t_0}^{T(\varepsilon)} \lambda_i(v(s), \Phi(s)z_i^0)m_i(s)ds\Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{C+1}C < \varepsilon.$$

Поэтому $z_i(T(\varepsilon)) \in M_i + \mathrm{Int}D_\varepsilon(0) = M_i^\varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $A(t) = 0$ для всех $t \geqslant t_0$ и выполнено предположение 2. Тогда в игре происходит r-кратная поимка убегающего.*

В данном случае предположение 1 выполнено, так как $\Phi(t) = E$.

Следствие 2. *Пусть $A(t) = A$ для всех $t \geqslant t_0$, все собственные числа матрицы A чисто мнимые и попарно различны и выполнено предположение 2. Тогда в игре происходит r-кратная поимка убегающего.*

Из условия следствия вытекает, что фундаментальная матрица $\Phi(t)$ является почти периодической, а значит, рекуррентной.

Следствие 3. *Пусть выполнено предположение 1 и существует момент $\tau \geqslant t_0$ такой, что*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_{n-r+1}(I)} \mathrm{Intco}\{\Phi(\tau)z_\alpha^0, \ \alpha \in \Lambda\}.$$

Тогда в игре происходит r-кратная поимка убегающего.

Доказательство. Полагая $u_i(t) = v(t)$ для всех $t \in [t_0, \tau]$, имеем $z_i(\tau) = \Phi(\tau)z_i^0$. Принимая далее момент τ за начальный, получим справедливость утверждения.

Определение 4. В игре происходит точная r-кратная поимка, если существуют момент $T > t_0$, квазистратегии $U_1, \ldots, U_n$ преследователей $P_1, \ldots, P_n$ такие, что для любой функции $v(t), t \in [t_0, \infty)$ существуют набор $\Lambda \in \Omega_r(I)$, моменты времени $\tau_s \in [t_0, T]$, для которых $z_s(\tau_s) = 0$ для всех $s \in \Lambda$.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1 *и*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_{n-r+1}(I)} \operatorname{Intco}\{z_\alpha^0,\ \alpha \in \Lambda\}.$$

Тогда в игре происходит точная r-кратная поимка убегающего.

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

П р и м е р 1. Пусть в системе (1.3) $k = 2$, $t_0 = 0$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Функция $\Phi(t)$ является рекуррентной. Предположение 1 выполнено. Поэтому, если выполнено предположение 2, то в игре происходит r-кратная поимка.

П р и м е р 2. Пусть в системе (1.3) $t_0 = 0$, матрица $A(t) = a(t)E$, где

$$a(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, 2\pi], \\ \sin t, & \text{если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Тогда матрица $\Phi(t)$ имеет вид

$$\Phi(t) = \begin{cases} E, & \text{если } t \in [0, 2\pi], \\ e^{1-\cos t}E, & \text{если } t > 2\pi. \end{cases}$$

Функция $\Phi(t)$ является рекуррентной, но не почти периодической [14]. Предположение 1 выполнено. Пусть справедливо предположение 2. Тогда в игре происходит r-кратная поимка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Чикрий А.А.** Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наук. Думка, 1992. 384 с.
2. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1990. 197 с.
3. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
4. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
5. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47
6. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 54–59.
7. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
8. **Благодатских А.И.** Многократная поимка в примере Понтрягина // Вест. Удмурт. ун-та. 2009. № 2. С. 3–12. (Математика. Механика. Компьютерные науки).
9. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 178–186.
10. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135.
11. **Соловьева Н.А.** Одна задача группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3, № 1. С. 81–90.

12. **Банников А.С., Петров Н.Н.** К нестационарной задаче группового преследования// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 40–51.
13. **Виноградова М.Н., Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Поимка двух скоординированных убегающих в линейных рекуррентных дифференциальных играх// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 41–48.
14. **Зубов В.И.** К теории рекуррентных функций // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 532–560.

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор
Институт математики, информационных технологий и физики
Удмуртского государственного университета
e-mail: kma3@list.ru

Поступила 25.10.2016

Соловьева Надежда Александровна
старший преподаватель
Удмуртский государственный университет
e-mail: solov_na@mail.ru

REFERENCES

1. Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyaemye protsessy* [Conflict controlled processes]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1992, 384 p.
2. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods for control of several dynamic processes]. Moscow: Mosk. Gos. Univ. Publ., 1990, 197 p.
3. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob"ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk: Udmurt. State Univ. Publ., 2009, 266 p.
4. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. *Kibernetika*, 1976, no. 3, pp. 145–146 (in Russian).
5. Grigorenko N.L. Simple pursuit/evasion game with a group of pursuers and one evader. *Vestnik Mosk. Gos. Univ. Ser. Vychislit. matematika i kibernetika*, 1983, no. 1, pp. 41–47 (in Russian).
6. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, Vol. 73, no. 1, pp. 36–40. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010.
7. Petrov N.N. Multiple capture in the Pontryagin example with phase constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00095-6.
8. Blagodatskikh A.I. Multiple capture in a Pontriagin's problem. *Vestnik Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2009, no. 2. pp. 3–12 (in Russian).
9. Petrov N. N., Solov'eva N.A Multiple capture in Pontryagin's recurrent example with phase constraints. *Proc. Steklov Inst. Math*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. S174–S182. doi: 10.1134/S0081543816050163.
10. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example. *Automation and remote control*, 2016, vol. 77, no. 5, pp. 854–860. doi: 10.1134/S0005117916050088.
11. Solov'eva N.A. One objective of group pursuit linear recurrent differential games. *Mat. Teor. Igr Pril.*, 2011, vol. 3, no. 1, pp. 81–90 (in Russian).
12. Bannikov A.S. Petrov N.N. On a nonstationary problem of group pursuit. *Proc. Steklov Inst. Math*, 2010, vol. 271, suppl. 1, pp. S41–S52. doi: 10.1134/S0081543810070047.
13. Vinogradova M.N., Petrov N.N., Solov'eva N.A. Capture of two cooperative evaders in linear recurrent differential games. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 41–48.
14. Zubov V.I. On the theory of recurrent functions. *Sib. Mat. Zh.*, 1962, vol. 3, no. 4, pp. 532–560. (in Russian)

N. N. Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics, Information Technology and Physics Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: kma3@list.ru .

N. A. Solov'eva, Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: solov_na@mail.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ СИЛЬНО-ДИНАМИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ ПОДЪЯДЕР В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ С ПРЕДПИСАННОЙ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬЮ

Л. А. Петросян, Я. Б. Панкратова

В работе предложен новый сильно-динамически устойчивый принцип оптимальности кооперативной дифференциальной игры. Это делается путем построения некоторого подмножества ядра кооперативной игры. Предлагается считать это подмножество новым принципом оптимальности в рассматриваемом классе игр. Построение производится на основе введения функции $\hat{V}$, доминирующей значения классической характеристической функции по коалициям. Пусть $V(S,\bar{x}(\tau),T-\tau)$ значение классической характеристической функции, вычисленной в подыгре с начальными условиями $\bar{x}(\tau)$, $T-\tau$ на кооперативной траектории. Определим функцию $\hat{V}$ по формуле

$$\hat{V}(S;x_0,T-t_0)=\max_{t_0\le\tau\le T}\frac{V(S;x^*(\tau),T-\tau)}{V(N;x^*(\tau),T-\tau)}V(N;x_0,T-t_0).$$

На основе функции $\hat{V}(S;x_0,T-t_0)$ строится аналог классического ядра. В работе показано, что построенное таким образом ядро является подмножеством классического ядра. Последнее обстоятельство позволяет рассматривать его как новый принцип оптимальности. Доказывается, что этот вновь построенный принцип оптимальности является сильно-динамически устойчивым.

Ключевые слова: кооперативная дифференциальная игра, сильно-динамическая устойчивость, ядро, подъядро, дележ.

L. A. Petrosyan, Ya. B. Pankratova. Construction of strongly time-consistent subcores in differential games with prescribed duration.

A new strongly time-consistent (dynamically stable) optimality principle is proposed in a cooperative differential game. This is done by constructing a special subset of the core of the game. It is proposed to consider this subset as a new optimality principle. The construction is based on the introduction of a function $\hat{V}$ that dominates the values of the classical characteristic function in coalitions. Suppose that $V(S,\bar{x}(\tau),T-\tau)$ is the value of the classical characteristic function computed in the subgame with initial conditions $\bar{x}(\tau)$, $T-\tau$ on the cooperative trajectory. Define

$$\hat{V}(S;x_0,T-t_0)=\max_{t_0\le\tau\le T}\frac{V(S;x^*(\tau),T-\tau)}{V(N;x^*(\tau),T-\tau)}V(N;x_0,T-t_0).$$

Using this function, we construct an analog of the classical core. It is proved that the constructed core is a subset of the classical core; thus, we can consider it as a new optimality principle. It is proved also that the newly constructed optimality principle is strongly time-consistent.

Keywords: cooperative differential game, strong time consistency, core, subcore, imputation.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-219-227

Введение

В работе исследуются неантагонистические дифференциальные игры на конечном временном интервале. Корректная постановка дифференциальных игр подробно исследована в работе [2] и на этой основе в [1] предложена теория некооперативных [8] неантагонистических игр (см. также [6; 7]). Данная статья примыкает к работам [3; 11], где исследуется кооперативный вариант дифференциальной игры. Как отмечалось ранее (см. [3; 11]), попытка переноса принципов оптимальности из статической кооперативной теории игр n-лиц на дифференциальные игры приводит к динамически неустойчивым (несостоятельным во времени) принципам оптимальности, что делает бессодержательным их практическое использование. Нами предлагались различные подходы к нахождению динамически устойчивых и сильно-динамически устойчивых принципов оптимальности, основанные на построении дополнительных процедур распределения дележа на отрезке времени $[t_0, T]$ (ПРД) и на использовании принципов оптимальности из классической статической теории кооперативных игр [9; 10].

В работах [4; 5] показано, что можно ввести новый вид характеристической функции таким образом, что построенные на его основе классические принципы оптимальности оказываются сильно-динамически устойчивыми в кооперативной дифференциальной игре, а дополнительные процедуры распределения дележа во времени приобретают естественное содержание. Однако нам не удалось проследить связь между принципами оптимальности, построенными на основе использования классических характеристических функций и построений на основе нового вида характеристической функции, предложенной в [4; 5].

В данной работе мы покажем, что при выполнении определенных условий классическое ядро имеет непустое пересечение с ядром, построенным на основе новой характеристической функции, и это пересечение можно рассматривать как новый принцип оптимальности, который по своему построению будет сильно-динамически устойчивым (или состоятельным во времени).

1. Построение ядра с использованием новой характеристической функции

Пусть задана дифференциальная игра n-лиц $\Gamma(x_0, T - t_0)$ из начального состояния x_0 на отрезке времени $[t_0, T]$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u_1, \ldots, u_n), \quad x(t_0) = x_0, \\ &u_i \in U_i \subset \mathrm{Comp}\,\mathbb{R}^m, \quad x \in \mathbb{R}^l, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Выигрыши игроков определяются по формулам

$$K_i(x, T - t_0; u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x(t))dt, \quad i = 1, \ldots, n, \quad h_i > 0,$$

$x(t)$ — решение системы (1.1) при использовании управлений $u_1, \ldots, u_n$. Предполагается, что на систему (1.1) наложены все условия гарантирующие существование, единственность и продолжимость решения $x(t)$ на отрезке времени $[t_0, T]$ при всех допустимых измеримых программных управлениях $u_1(t), \ldots, u_n(t)$, $t \in [t_0, T]$. Предположим, что существует такой набор управлений

$$u^*(t) = \{u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)\}, \quad t \in [t_0, T],$$

что имеет место

$$\begin{aligned} K(x_0, T - t_0; u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)) &= \max_{u_1, \ldots, u_n} \sum_{i=1}^{n} K_i(x_0, T - t_0; u_1(t), \ldots, u_n(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{t_0}^{T} h_i(x^*(t))dt = V(N; x_0, T - t_0). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Решение $x^*(t)$ системы (1.1), соответствующее $u^*(t)$, называется *кооперативной траекторией.*

В кооперативной теории игр n-лиц [9] считается, что игроки вначале договариваются об использовании управлений $u^*(t) = \{u_1^*(t), \ldots, u_n^*(t)\}$, а следовательно, в кооперативной постановке дифференциальная игра $\Gamma(x_0, T - t_0)$ всегда развивается вдоль кооперативной траектории $x^*(t)$.

Пусть $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ — множество всех игроков, $S \subset N$. Обозначим через $V(S; x_0, T - t_0)$ характеристическую функцию [9] игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ и заметим при этом, что $V(N; x_0, T - t_0)$ вычисляется по формуле (1.2). Здесь мы для определенности предполагаем, что характеристическая функция $V(S; x_0, T - t_0)$ строится классическим образом как значение антагонистической дифференциальной игры на основе игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ между коалицией S (первый максимизирующий игрок) и коалицией $N \setminus S$ (второй минимизирующий игрок), при этом в каждой ситуации выигрыш коалиции S полагается равным сумме выигрышей игроков из этой коалиции.

Рассмотрим семейство подыгр игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$ вдоль кооперативной траектории $\Gamma(x^*(t), T - t)$, т. е. семейство кооперативных дифференциальных игр из начального состояния $x^*(t)$, определенных на отрезке $[t, T]$, $t \in [t_0, T]$, и с функциями выигрыша

$$K_i(x^*(t), T - t; u_1, \ldots, u_n) = \int\limits_t^T h_i(x(\tau))d\tau, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $x(\tau)$ — решение системы (1.1) из начального состояние $x^*(t)$ при управлениях $u_1, \ldots, u_n$.

Пусть $V(S; x^*(t), T - t)$, $S \subset N$, $t \in [t_0, T]$, — характеристическая функция подыгры $\Gamma(x^*(t), T - t)$. Для $V(N; x^*(t), T - t)$ $(S = N)$ выполняется условие Беллмана вдоль $x^*(t)$, т. е.

$$V(N; x_0, T - t_0) = \int\limits_{t_0}^t \sum_{i=1}^n h_i(x^*(\tau))d\tau + V(N; x^*(t), T - t).$$

Отсюда получаем, что

$$V'(N; x^*(t), T - t) = -\Big[\sum_{i=1}^n h_i(x^*(t))\Big].$$

Напомним формулы для выражения новой характеристической функции, введенные нами в [4; 5], т. е. определим новую функцию множества $\bar{V}(S; x_0, T - t_0)$, $S \subset N$, по формуле

$$\bar{V}(S; x_0, T - t_0) = -\int\limits_{t_0}^T V(S; x^*(\tau), T - \tau)\frac{V'(N; x^*(\tau), T - \tau)}{V(N; x^*(\tau), T - \tau)}d\tau. \tag{1.3}$$

Аналогично определим для $t \in [t_0, T]$:

$$\bar{V}(S; x^*(t), T - t) = -\int\limits_t^T V(S; x^*(\tau), T - \tau)\frac{V'(N; x^*(\tau), T - \tau)}{V(N; x^*(\tau), T - \tau)}d\tau. \tag{1.4}$$

Легко видеть, что функция множества $\bar{V}(S; x_0, T - t_0)$ обладает всеми свойствами характеристической функции игры $\Gamma(x_0, T - t_0)$. Действительно,

$$\bar{V}(N; x_0, T - t_0) = V(N; x_0, T - t_0) = \sum_{i=1}^n \int\limits_{t_0}^T h_i(x^*(\tau))d\tau,$$

$$\bar{V}(S_1 \cup S_2; x_0, T - t_0) \geq \bar{V}(S_1; x_0, T - t_0) + \bar{V}(S_2; x_0, T - t_0)$$

для $S_1,\ S_2 \subset N$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ (здесь используется супераддитивность функции $V(S; x_0, T - t_0)$). Аналогичное утверждение справедливо и для функции $\bar{V}(S; x^*(t), T - t)$, которая вводится как характеристическая функция игры $\Gamma(x^*(t), T - t)$. Пусть $L(x_0, T - t_0)$ — множество дележей в $\Gamma(x_0, T - t_0)$, определяемых характеристической функцией $V(S; x_0, T - t_0)$, $S \subset N$, т. е.

$$L(x_0, T - t_0) = \Big\{\xi = \{\xi_i\}\colon\ \sum_{i=1}^n \xi_i = V(N; x_0, T - t_0),\ \xi_i \geq V(\{i\}; x_0, T - t_0)\Big\}. \tag{1.5}$$

Аналогично определим множество дележей $L(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$ в подыгре $\Gamma(x^*(t), T-t)$:

$$L(x^*(t), T-t) = \Big\{\xi(t) = [\xi_i(t)]\colon \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) = V(N; x^*(t), T-t), \xi_i(t) \geq V(\{i\}; x^*(t), T-t), i \in N\Big\}. \tag{1.6}$$

Пусть $\xi(t) \in L(x^*(t), T-t)$ — интегрируемый селектор, $t \in [t_0, T]$, введем

$$\bar{\xi} = -\int_{t_0}^{T} \xi(t) \frac{V'(N; x^*(t), T-t)}{V(N; x^*(t), T-t)} dt, \tag{1.7}$$

$$\bar{\xi}(t) = -\int_{t}^{T} \xi(\tau) \frac{V'(N; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} d\tau, \tag{1.8}$$

где $t \in [t, T_0]$.

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i = V(N; x_0, T-t_0), \quad \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i(t) = V(N; x^*(t), T-t),$$

$$\bar{\xi}_i \geq -\int_{t_0}^{T} V(\{i\}; x^*(t), T-t) \frac{V'(N; x^*(t), T-t)}{V(N; x^*(t), T-t)} dt = \bar{V}(\{i\}; x_0^*, T-t_0)$$

и аналогично

$$\bar{\xi}(t) \geq= \bar{V}(\{i\}; x^*(t), T-t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \in [t_0, T],$$

т. е. векторы $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_i\}$ и $\bar{\xi}(t) = \{\bar{\xi}_i(t)\}$ являются дележами в играх $\Gamma(x_0, T-t_0)$, $\Gamma(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, соответственно, если в качестве характеристических функций будут взяты функции $\bar{V}(S; x_0, T-t_0)$ и $\bar{V}(S; x^*(t), T-t)$. Обозначим множество дележей, определяемых характеристическими функциями $\bar{V}(S; x_0, T-t_0)$ и $\bar{V}(S; x^*(t), T-t)$, соответственно через $\bar{L}(x_0, T-t_0)$ и $\bar{L}(x^*(t), T-t)$ (см. (1.5), (1.6)). Мы имеем, что $\bar{\xi} \in \bar{L}(x_0, T-t_0)$, $\bar{\xi}(t) \in \bar{L}(x^*(t), T-t)$. Однако справедливо и обратное утверждение. Любой дележ $\bar{\xi} \in \bar{L}(x_0, T-t_0)$ ($\bar{\xi}(t) \in \bar{L}(x^*(t), T-t)$) представим в виде (1.7) ((1.8)) для некоторого селектора $\xi(t) \in L(x^*(t), T-t)$.

Обозначим через $C(x_0, T-t_0) \subset L(x_0, T-t_0)$, $C(x^*(t), T-t) \subset L(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, ядра игры $\Gamma(x_0, T-t_0)$ и соответственно подыгры $\Gamma(x^*(t), T-t)$ (в дальнейшем предполагается, что множества $C(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, не пусты). Пусть в формулах (1.7), (1.8) $\xi(t)$ является таким интегрируемым селектором, что $\xi(t) \in C(x^*(t), T-t_0)$, $t \in [t_0, T]$. Пусть далее $\bar{C}(x_0, T-t_0)$ и $\bar{C}(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, — ядра игр $\Gamma(x_0, T-t_0)$ и $\Gamma(x^*(t), T-t)$ соответственно, построенные по характеристической функции $\bar{V}(S; x, T-t_0)$, определяемой формулами (1.3), (1.4). То есть $\bar{C}(x_0, T-t_0)$ и $\bar{C}(x^*(t), T-t)$ — это множество дележей вида

$$\sum_{i \in S} \bar{\xi}_i \geq \bar{V}(S; x_0, T-t_0), \quad \sum_{i \in N} \bar{\xi}_i = \bar{V}(N; x_0, T-t_0) = V(N; x_0, T-t_0)$$

и

$$\sum_{i \in S} \bar{\xi}_i(t) \geq \bar{V}(S; x^*(t), T-t), \quad \sum_{i \in N} \bar{\xi}_i = \bar{V}(N; x^*(t), T-t) = V(N; x^*(t), T-t).$$

Лемма 1. *Для каждого дележа $\bar{\xi}_i \in \bar{C}(x_0, T-t_0)$ существует интегрируемый селектор*

$\xi(t) \in C(x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, *такой что*

$$\bar{\xi}_i = -\int\limits_{t_0}^{T} \frac{\xi_i(\tau)V'(N; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} d\tau,$$
$$\bar{\xi}_i(t) = -\int\limits_{t}^{T} \frac{\xi_i(\tau)V'(N; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} d\tau, \tag{1.9}$$

где $i = 1, \dots, n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из того что $\bar{\xi}(t)$ — дележ, имеем

$$\bar{\xi}_i(t) \geq -\int\limits_{t}^{T} \frac{V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau,$$

или

$$\bar{\xi}_i(t) = -\int\limits_{t}^{T} \frac{(\alpha_i(\tau) + V(\{i\}); x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau, \quad \alpha_i(\tau) \geq 0. \tag{1.10}$$

Суммируя (1.10) по i, получаем

$$\bar{V}(N; x^*(t), T-t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}(t) = -\int\limits_{t}^{T} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau.$$

Отсюда имеем

$$-\int\limits_{t}^{T} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau = -\int\limits_{t}^{T} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau.$$

Дифференцируя, выводим

$$V'(N; x^*(\tau), T-\tau) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V'(N; x^*(\tau), T-\tau).$$

Следовательно,

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau))}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau)) = V(N; x^*(\tau), T-\tau),$$

т. е. $\alpha_i(\tau) + V(\{i\}; x^*(\tau), T-\tau) = \xi_i(\tau)$ — дележ в игре с характеристической функцией $V(S; x^*(t), T-t)$ и, используя (1.10), мы получаем (1.9); таким образом, лемма доказана.

Ядро $\bar{C}(x_0, T-t_0)$ является сильно-динамически устойчивым, поскольку всегда имеет место (см. [4; 5])

$$\bar{C}(x_0, T-t_0) \supset -\int_{t_0}^{t} \xi(t) \frac{V'(N; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} d\tau \oplus \bar{C}(x^*(t), T-t), \quad t \in [t_0, T].$$

Здесь под $a \oplus A$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, понимается множество всех векторов вида $a+b$, где $b \in A$. Величина

$$-\xi_i(t) \frac{V'(N; x^*(t), T-t)}{V(N; x^*(t), T-t)} \geq 0$$

интерпретируется как скорость выплаты игроку i компоненты его дележа $\bar{\xi}_i$ на отрезке времени $[t_0, T]$.

2. Построение сильно-динамически устойчивого подъядра кооперативной игры

Постараемся выделить некоторое подмножество дележей в множестве $\bar{C}(x_0, T-t_0)$, которое будет принадлежать ядру $C(x_0, T-t_0)$, определённому на основе классической характеристической функции $V(S; x_0, T-t_0)$.

Рассмотрим величину

$$\max_{t_0 \leq \tau \leq T} \frac{V(S; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} = \lambda(S, t_0), \tag{2.11}$$

тогда очевидно имеем (см. (1.5))

$$\bar{V}(S; x_0, T-t_0) \leq -\lambda(S, t_0) \int_{t_0}^{T} V'(N; x^*(\tau), T-\tau) d\tau = \lambda(S, t_0) V(N; x_0, T-t_0). \tag{2.12}$$

Введем новые обозначения: $\hat{V}(S; x_0, T-t_0) = \lambda(S, t_0) V(N; x_0, T-t_0)$.

Аналогично при $t \in [t_0, T]$:

$$\hat{V}(S; x^*(t), T-t) = \lambda(S, t) V(N; x^*(t), T-t), \tag{2.13}$$

где

$$\lambda(S, t) = \max_{t \leq \tau \leq T} \frac{V(S; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)}. \tag{2.14}$$

Из формул (2.11)–(2.14) следует

$$\hat{V}(S; x_0, T-t_0) \geq \bar{V}(S; x_0, T-t_0), \quad \hat{V}(S; x^*(t), T-t) \geq \bar{V}(S; x^*(t), T-t).$$

Заметим, что имеет место

$$\bar{V}(N; x_0, T-t_0) = \hat{V}(N; x_0, T-t_0), \quad \bar{V}(N; x^*(t), T-t) = \hat{V}(N; x^*(t), T-t).$$

Кроме того, для всех S_1, S_2, $S_1 \subset S_2$ $\hat{V}(S_1; x^*(t), T-t) \leq \hat{V}(S_2; x^*(t), T-t)$, $\quad t \in [t_0, T]$.

К сожалению свойство супераддитивности по S для функции $\hat{V}(S; x^*(t), T-t)$, $t \in [t_0, T]$, в общем случае не выполняется. Можем написать

$$\hat{V}(S; x^*(t), T-t) = \lambda(S, t) V(N; x^*(t), T-t) = \max_{t \leq \tau \leq T} \frac{V(S; x^*(\tau), T-\tau)}{V(N; x^*(\tau), T-\tau)} V(N; x^*(t), T-t)$$

$$\geq V(N; x^*(t), T-t) \frac{V(S; x^*(t), T-t)}{V(N; x^*(t), T-t)} \geq V(S; x^*(t), T-t). \tag{2.15}$$

Сформулируем неравенство (2.15) в виде леммы. Верно следующее утверждение.

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$V(S; x^*(t), T-t) \le \hat{V}(S; x^*(t), T-t).$$

Обозначим через $\hat{C}(x^*(t), T-t)$ множество решений системы неравенств

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in S} \xi_i \ge \hat{V}(S; x^*(t), T-t), \\ &\sum_{i \in N} \xi_i = \hat{V}(N; x^*(t), T-t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Предположим, что множество $\hat{C}(x^*(t), T-t)$ не пусто при $t \in [t_0, T]$. Легко видеть, что оно является аналогом ядра $C(x_0, T-t_0)$, если в качестве характеристической функции взять функцию $\hat{V}(S; x^*(t), T-t)$. Тем самым приходим к следующему утверждению.

Теорема. *Имеет место включение*

$$\hat{C}(x^*(\tau), T-\tau) \subset C(x^*(\tau), T-\tau) \cap \bar{C}(x^*(\tau), T-\tau). \tag{2.17}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, $\bar{C}(x^*(\tau), T-\tau)$ *есть множество дележей вида*

$$\sum_{i \in S} \xi_i \ge \bar{V}(S; x^*(\tau), T-\tau), \quad \sum_{i \in N} \xi_i = \bar{V}(N; x^*(\tau), T-\tau).$$

Формула (2.17) следует из леммы 1 и (2.16), т. е. из неравенств

$$\bar{V}(S; x^*(\tau), T-\tau) \le \hat{V}(S; x^*(\tau), T-\tau), \ \ V(S; x^*(\tau), T-\tau) \le \hat{V}(S; x^*(\tau), T-\tau), \ \ S \subset N, \ \tau \in [t_0, T],$$

и леммы 2. □

Поскольку $\hat{C}(x^*(\tau), T-\tau) \subset \bar{C}(x^*(\tau), T-\tau)$, то $\hat{C}(x^*(\tau), T-\tau)$ — сильно-динамически устойчивый принцип оптимальности, так как $\bar{C}(x^*(\tau), T-\tau)$ таким является (см. [4; 5]).

Из теоремы следует, что дележи из $\hat{C}(x^*(t), T-t)$ при всех $t \in [t_0, T]$ принадлежат классическому ядру игры $\Gamma(x^*(t), T-t)$. Таким образом, нами построено сильно-динамически устойчивое подъядро ядра $C(x^*(t), T-t)$ для подыгры $\Gamma(x^*(t), T-t)$. В этом смысле теорема устанавливает новый принцип оптимальности.

Заключение

Свойство сильно-динамической устойчивости (сильной временной состоятельности) совпадает со свойством динамической устойчивости (временной состоятельности) для однозначных принципов оптимальности, таких как вектор Шепли [5] или “пропорциональное решение”. Однако для многозначных принципов оптимальности оно имеет существенный и нетривиальный смысл, который заключается в том, что любое оптимальное поведение в подзадачах с начальными состояниями на кооперативной траектории, вычисленное в некоторый промежуточный момент времени $t \in [t_0, t]$, вместе с оптимальным поведением на интервале времени $[t_0, t]$ является оптимальным в задаче из начального состояния t_0. Это свойство почти никогда не выполнено для таких множественных принципов оптимальности, как ядро, NM-решение. Нами предложен новый принцип оптимальности, представляющий собой некоторое подмножество ядра, которое обладает свойством сильно-динамической устойчивости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука: Урал. отд-ние, 1993. 184 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Физматлит, 1974. 456 с.
3. **Петросян Л.А., Данилов Н.Н.** Устойчивость решений неантагонистических дифференциальных игр с трансферабельными выигрышами // Вестн. Ленинград. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1979. №1. С. 52–59.
4. **Петросян Л.А.** Сильно динамически устойчивые дифференциальные принципы оптимальности // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1993. №4. С 40–46.
5. **Петросян Л.А.** Характеристические функции в кооперативных дифференциальных играх // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1: Математика, механика, астрономия. 1995. №1. С 48–52.
6. **Basar T., Olsder G.J.** Dynamic noncooperative game theory. London: Acad. Press, 1982. 429 p.
7. Differential games in economics and management science / E.J. Dockner, S. Jorgensen., N.V. Long, G. Sorger. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. 382 p.
8. **Nash J.** Non-cooperative games // Ann. Mathematics. 1951. Vol. 54, no. 2. P. 286–295.
9. **Neumann J., Morgenstern O.** Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton Univ. Press, 1947. 641 p.
10. **Shapley L.S.** A Value for n-person games // Contributions to the theory of games / eds. H.W. Kuhn and A.W. Tucker. Princeton: Princeton Univ. Press, 1953. P. 307–315.
11. **Yeung D.W.K., Petrosyan L.A.** Subgame consistent economic optimization. New York: Birkhauser, 2012. 395 p. (Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications). doi: 10.1007/978-0-8176-8262-0 .

Петросян Леон Аганесович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Поступила 30.10.2016

Панкратова Ярославна Борисовна
канд. физ.-мат. наук, ассистент
Санкт-Петербургский государственный университет
e-mail: y.pankratova@spbu.ru

REFERENCES

1. Kleimenov A.F. *Neantagonisticheskie pozitsionnye differentsial'nye igry* [Nonantagonistic positional differential games]. Ekaterinburg: Nauka Publ., Ural'skoe Otdelenie, 1993. 185 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Petrosjan L.A., Danilov N.N. Stability of the solutions in nonantagonistic differential games with transferable payoffs. *Vestnik Leningrad. Univ. Mat. Mekh. Astronom.*, 1979, no. 1, pp. 52–59 (in Russian).
4. Petrosjan L.A. Strongly time-consistent differential optimality principles. *Vestnik St. Petersburg. Univ. Math. Mekh. Astronom*, 1993, no. 4, pp. 40–46 (in Russian).
5. Petrosjan L.A. Characteristic functions of cooperative differential games. *Vestnik St. Petersburg. Univ. Math. Mekh. Astronom.*, 1995, no. 1, pp. 48–52 (in Russian).
6. Basar T., Olsder G.J. *Dynamic noncooperative game theory.* London: Acad. Press, 1982, 429 p.
7. Dockner E. J., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. *Differential games in economics and management science.* Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000, 382 p.
8. Nash J. Non-cooperative games. *Ann. Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295.
9. Neumann J., Morgenstern O. *Theory of games and economic behavior.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1947, 641 p.

10. Shapley L.S. A Value for n-person games. *Contributions to the Theory of Games*, eds. H.W. Kuhn and A.W. Tucker, Princeton: Princeton Univ. Press, 1953, pp. 307–315.
11. Yeung D.W.K., Petrosyan L.A. *Subgame consistent economic optimization*, New York: Birkhauser, 2012, Ser. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications, 395 p.
doi: 10.1007/978-0-8176-8262-0 .

L.A. Petrosyan, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Saint Petersburg University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: l.petrosyan@spbu.ru

Ya. B. Pankratova, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Saint Petersburg University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: y.pankratova@spbu.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ТРАНСФИНИТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В МЕТОДЕ ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ[1]

Д. А. Серков

Рассматривается задача удержания движений абстрактной динамической системы в заданном множестве ограничений. Конструкции метода программных итераций распространяются на задачи с динамикой не обладающей, вообще говоря, какими-либо топологическими свойствами. Указанная общность требований к системе преодолевается введением трансфинитных итераций оператора программного поглощения. В обосновании используется техника неподвижных точек отображений в индуктивных частично упорядоченных множествах. Итогом применения процедуры является построение множества успешной разрешимости задачи удержания в классе квазистратегий, "промежуток" управления не предполагается конечным.

Ключевые слова: метод программных итераций, трансфинитные итерации, квазистратегии, неподвижные точки, индуктивные множества.

D. A. Serkov. Transfinite sequences in the method of programmed iterations.

We consider the problem of retaining the motions of an abstract dynamic system in a given constraint set. Constructions from the method of programmed iterations are extended to problems whose dynamics, in general, does not possess any topological properties. The weaker requirements are compensated by introducing transfinite iterations of the programmed absorption operator. The technique of fixed points of mappings in inductive partially ordered sets is used in the proofs. The proposed procedure produces the set where the problem under consideration is successfully solved in the class of quasistrategies. The control interval is not assumed to be finite.

Keywords: method of programmed iterations, transfinite iterations, quasistrategies, fixed points, inductive posets.

MSC: 37N35, 65J15, 47J25, 52A01, 91A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-228-240

Введение

В дифференциальных играх метод программных итераций (МПИ) применяется в трех вариантах: это построение множества позиционного поглощения, цены игры или многозначных квазистратегий управления. В даной статье обсуждается абстрактный аналог первого варианта, связанного с решением дифференциальной игры сближения-уклонения [1; 2].

Важным частным случаем такой игры является игра удержания в множестве позиций, сечения которого реализуют фазовые ограничения (см. исследования по МПИ: [3–6]). В настоящей работе мы ориентируемся на процедуру [4] построения множества позиционного поглощения в дифференциальной игре удержания. В связи с последней отметим работы [7–9], где, в частности, рассматривалась игра удержания на бесконечном промежутке времени (см. [8; 9]).

Существуют классы задач, и в том числе задач удержания, не удовлетворяющие обычным топологическим требованиям на динамику системы и фазовые ограничения и тем не менее обладающие требуемыми решениями (см. разд. 3). Это обстоятельство стало поводом для развития соответствующих теоретических конструкций. В настоящей работе подход [9–11]

[1]Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления".

распространяется на задачи с динамикой не удовлетворяющей, вообще говоря, какими-либо "хорошими" топологическими свойствами. Указанная общность требований к системе компенсируется использованием в МПИ трансфинитных итераций оператора программного поглощения. Итогом применения процедуры на основе МПИ является построение множества успешной разрешимости задачи удержания в классе квазистратегий и общий вид разрешающих квазистратегий. При этом "промежуток" управления не предполагается конечным.

1. Обозначения и определения

Обозначения и определения общего характера. Используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество). Принимаем аксиому выбора. *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества.

Через $\mathcal{P}(T)$ (через $\mathcal{P}'(T)$) условимся обозначать семейство всех (всех непустых) подмножеств (п/м) произвольного множества T; семейство $\mathcal{P}(T)$ именуем также булеаном множества T. Если A и B — непустые множества, то B^A есть множество всех отображений из множества A в множество B. Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f\,|\,C) \in B^C$ есть сужение f на множество C: $(f\,|\,C)(x) \triangleq f(x)$ $\forall x \in C$. В случае, когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$, полагаем $(F\,|\,C) \triangleq \{(f\,|\,C)\colon f \in F\}$. Если z — упорядоченная пара (УП), т.е. $z = (a, b)$ для некоторых объектов a и b, то через $\mathbf{pr}_1(z)$ и $\mathbf{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathbf{pr}_1(z), \mathbf{pr}_2(z))$.

Пусть $X \neq \varnothing$ и $\preccurlyeq \in \mathcal{P}(X \times X)$ отношение (нестрогого) частичного порядка на X. Назовем пару $(X, \preccurlyeq)$ *частично упорядоченным множеством* (ЧУМ). Всякое линейно упорядоченное подмножество ЧУМ назовем *цепью.* Для $Y \in \mathcal{P}(X)$ обозначим через $\top_Y$ $(\bot_Y)$ *наибольший* (*наименьший*) элемент множества Y в случае, когда он существует: $\top_Y \in Y$ $(\bot_Y \in Y)$ и для любого $y \in Y$ выполняется неравенство $y \preccurlyeq \top_Y$ $(\bot_Y \preccurlyeq y)$.

Назовем ЧУМ $(X, \preccurlyeq)$ *индуктивным*, если всякая его цепь C (в том числе и пустая) имеет нижнюю грань $\inf C \in X$. Отметим, что в индуктивном ЧУМ всегда существует наибольший элемент — нижняя грань пустой цепи.

Для отображения $f \in X^X$ обозначим через $\mathbf{Fix}(f)$ множество всех его неподвижных точек: $\mathbf{Fix}(f) \triangleq \{x \in X \mid f(x) = x\}$. Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — ЧУМ и $f \in X^X$. Назовем отображение f *сужающим на* $(X, \preccurlyeq)$, если

$$f(x) \preccurlyeq x \quad \forall x \in X. \tag{1.1}$$

З а м е ч а н и е. В теории неподвижных точек и в методе программных итераций обычно опираются на еще одно свойство отображений — изотонность. И хотя этим свойством обладают многие важные отображения, в частности оператор программного поглощения, в рассмотренных далее вопросах удается обойтись без его использования.

Будем обозначать через $\mathbf{ORD}$ класс порядковых чисел (ординалов). Запись $\alpha \in \mathbf{ORD}$ будем рассматривать как сокращение высказывания "α есть порядковое число" ("α есть ординал"). Отношение порядка (строгого порядка) на классе $\mathbf{ORD}$ будем обозначать символом $\preccurlyeq$ $(\prec)$. Для всякого $\alpha \in \mathbf{ORD}$ обозначим через $\mathbf{W}(\alpha) \triangleq \{\iota \in \mathbf{ORD} \mid \iota \prec \alpha\}$ $(\mathbf{W}_{+}(\alpha) \triangleq \mathbf{W}(\alpha) \cup \{\alpha\})$ множество всех ординалов, меньших (не больших) α. Отметим сразу равенство $\top_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)} = \alpha$ справедливое для любого $\alpha \in \mathbf{ORD}$. Обозначим как $\alpha+1 \in \mathbf{ORD}$ *последователя* ординала α — наименьший из ординалов, превосходящих α. Назовем $\alpha \in \mathbf{ORD}$ *регулярным*, если в $\mathbf{W}(\alpha)$ существует наибольший ординал; этот ординал, когда он существует, назовем *предшественником* ординала α; в остальных случаях ординал α отличный от 0 будем называть *предельным.* Заметим, что согласно определению для всякого $\eta \in \mathbf{ORD}$ предшественник последователя η всегда существует и совпадает с η; при этом последователь предшественника η существует (и тогда совпадает с η) лишь в случае, когда η — регулярный ординал.

Пусть $X \neq \varnothing$ и $\alpha \in \mathbf{ORD}$. Назовем *α-последовательностью в X* (*α_{+}-последовательностью в X*) и обозначим $(x_\iota)_{\mathbf{W}(\alpha)}$ $((x_\iota)_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)})$ всякое отображение $\mathbf{W}(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$

($\mathbf{W}_{+}(\alpha) \ni \iota \mapsto x_\iota \in X$) из множества $X^{\mathbf{W}(\alpha)}$ ($X^{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}$). В случаях, когда это не создает двусмысленность, будем также называть *α-последовательностью* множество $\{x_\iota : \iota \in \mathbf{W}(\alpha)\}$ членов этой последовательности. В частности, будем говорить, что α-последовательность $(x_\iota)_{\mathbf{W}(\alpha)}$ есть (образует) цепь, в случаях, когда множество $\{x_\iota : \iota \in \mathbf{W}(\alpha)\}$ является цепью (линейно упорядочено).

Для всякого множества X обозначим через $|X|$ класс эквивалентности множеств, равномощных множеству X (кардинал X). Отношение порядка (строгого порядка) на классе кардиналов будем обозначать символом $<=$ ($<$). Далее для всякого множества H обозначим $|H|^{+} \in \mathbf{ORD}$ наименьший среди ординалов η, обладающих тем свойством, что $|H| < |\eta|$. Итак, для всякого множества H выполняется неравенство

$$|H| < |H|^{+}. \tag{1.2}$$

2. Итерации сужающих отображений в индуктивном ЧУМ

Определение трансфинитных итераций в индуктивном ЧУМ. Пусть $X \neq \varnothing$ и $(X, \preccurlyeq)$ — индуктивное ЧУМ, а $f \in X^X$ — сужающее (см. (1.1)) отображение. Тогда для каждого $\alpha \in \mathbf{ORD}$ можно определить степень $f^\alpha \in X^X$ (α-итерацию) отображения f следующим образом. При α, равном 0 и 1, положим

$$f^0(x) \triangleq x, \quad f^1(x) \triangleq f(f^0(x)) = f(x) \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

Имеем $f^0, f^1 \in X^X$, и для всякого $x \in X$ в силу (1.1) $f^1(x) \preccurlyeq f^0(x)$, т.е. элементы 1_{+}-последовательности $(f^\iota(x))_{\mathbf{W}_{+}(1)}$ образуют цепь $\{f^0(x), f^1(x)\}$ в $(X, \preccurlyeq)$. Кроме того, в цепи $(f^\iota(x))_{\mathbf{W}_{+}(1)}$ существует наименьший элемент $f^1(x)$ — образ наибольшего элемента $\top_{\mathbf{W}_{+}(1)} = 1$ множества $\mathbf{W}_{+}(1)$.

Пусть вообще $\alpha \in \mathbf{ORD}$ таково, что для каждого $\beta \in \mathbf{W}(\alpha)$:

(i) определена β-итерация $f^\beta \in X^X$ отображения f;

(ii) $(f^\eta(x))_{\mathbf{W}_{+}(\beta)}$ есть цепь в $(X, \preccurlyeq)$ при любом $x \in X$;

(iii) $\perp_{(f^\eta(x))_{\mathbf{W}_{+}(\beta)}} = f^\beta(x)$.

В случае, когда α имеет предшественника (пусть это γ), положим

$$f^\alpha \triangleq f \circ f^\gamma. \tag{2.2}$$

Так как $f \in X^X$ и по предположению (i) $f^\gamma \in X^X$, то $f^\alpha \in X^X$. Для всякого $\xi \in \mathbf{W}(\alpha)$ имеем $\xi \in \mathbf{W}_{+}(\gamma)$ и, следовательно, в силу (1.1) и предположения (iii), поскольку $\gamma \in \mathbf{W}(\alpha)$, выполняется

$$f^\alpha(x) = f(f^\gamma(x)) \preccurlyeq f^\gamma(x) \preccurlyeq f^\xi(x) \quad \forall x \in X. \tag{2.3}$$

Таким образом, $f^\alpha(x)$ — миноранта (нижняя граница) α-последовательности $(f^\eta(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$. Понятно, что в этом случае выполняется равенство $f^\alpha(x) = \perp_{(f^\eta(x))_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}}$. Остается проверить, что α_{+}-последовательность $(f^\zeta(x))_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}$ образует цепь. Пусть $\xi, \xi' \in \mathbf{W}_{+}(\alpha)$. Если $\alpha \in \{\xi, \xi'\}$, то элементы $f^\xi(x)$, $f^{\xi'}(x)$ сравнимы в силу (2.3). В противном случае

$$\{\xi, \xi'\} \subset \mathbf{W}_{+}(\alpha) \setminus \{\alpha\} = \mathbf{W}(\alpha) = \mathbf{W}_{+}(\gamma)$$

и элементы $f^\xi(x)$, $f^{\xi'}(x)$ сравнимы в силу предположения (ii).

В случае, когда α — предельное порядковое число, положим

$$f^\alpha(x) \triangleq \inf\{f^\beta(x) : \beta \in \mathbf{W}(\alpha)\} \quad \forall x \in X. \tag{2.4}$$

Проверим корректность определения (2.4). При $\beta \in \mathbf{W}(\alpha)$ по предположению (i) выполнено $f^\beta(x) \in X$ и, стало быть, $\{f^\beta(x) : \beta \in \mathbf{W}(\alpha)\} = (f^\beta(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ есть α-последовательность в X.

Покажем, что α-последовательность $(f^{\beta}(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ образует цепь в $(X,\preccurlyeq)$. Пусть $\xi,\xi'\in\mathbf{W}(\alpha)$ и пусть (так как ординалы линейно упорядочены), для определенности, $\xi\preccurlyeq\xi'$. Следовательно, $\xi,\xi'\in\mathbf{W}_{+}(\xi')$. Тогда $f^{\xi}(x)$ и $f^{\xi'}(x)$ сравнимы, так как в силу предположения (ii) ξ'_{+}-последовательность $(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}_{+}(\xi')}$ образует цепь. Так как ординалы ξ,ξ' были выбраны произвольно, установлено, что α-последовательность $(f^{\beta}(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ образует цепь в $(X,\preccurlyeq)$. И, в силу индуктивности $(X,\preccurlyeq)$, определение (2.4) корректно.

Из определения (2.4) и предположения (i) следуют включение $f^{\alpha}\in X^{X}$ и равенство

$$\perp_{(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}}=f^{\alpha}(x). \tag{2.5}$$

Проверим, что α_{+}-последовательность $(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}_{+}(\alpha)}$ — цепь. Пусть $\xi,\xi'\in\mathbf{W}_{+}(\alpha)$. Если $\alpha\in\{\xi,\xi'\}$, то элементы $f^{\xi}(x)$, $f^{\xi'}(x)$ сравнимы в силу (2.5). В противном случае

$$\{\xi,\xi'\}\subset\mathbf{W}_{+}(\alpha)\setminus\{\alpha\}=\mathbf{W}(\alpha)$$

и элементы $f^{\xi}(x)$, $f^{\xi'}(x)$ сравнимы, так как уже установлено, что $(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ образует цепь.

Итак, в силу принципа трансфинитной индукции (см. [12, гл. VII, § 4]), α-итерация $f^{\alpha}\in X^{X}$ отображения f (сужающего на индуктивном ЧУМ $(X,\preccurlyeq)$) однозначно определена для любого $\alpha\in\mathbf{ORD}$; при этом из построения следует, что для любого $\alpha\in\mathbf{ORD}$ α-последовательность $(f^{\eta}(x))_{\mathbf{W}(\alpha)}$ образует цепь в $(X,\preccurlyeq)$ и, значит, для любого множества ординалов M в силу индуктивности $(X,\preccurlyeq)$ существует $\inf\{f^{\eta}(x)\mid\eta\in\mathbf{W}(\alpha)\cap M\}$.

З а м е ч а н и е. Как видно из построения в индуктивном ЧУМ, в отличие от случая полной решетки (рассматриваемого далее) корректность определения трансфинитных итераций требует обоснования.

Конкретизируем построение α-итерации для случая $(X,\preccurlyeq)\triangleq(\mathcal{P}(H),\subset)$, где H — непустое множество. Построение не представляет трудности, так как ЧУМ $(\mathcal{P}(H),\subset)$ образует полную решетку. Пусть $f\in\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ и $\alpha\in\mathbf{ORD}$. При $\alpha=0$ положим

$$f^{0}(B)\triangleq B\quad\forall B\in\mathcal{P}(H). \tag{2.6}$$

Таким образом, $f^{0}\in\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Пусть β-итерация $f^{\beta}\in\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ определена при всех $\beta\in\mathbf{W}(\alpha)$. Если α имеет предшественника (пусть это порядковое число γ), то положим

$$f^{\alpha}\triangleq f\circ f^{\gamma}. \tag{2.7}$$

Поскольку $f\in\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ и по предположению индукции выполнено включение $f^{\gamma}\in\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$, в этом случае α-итерация f^{α} определена корректно и $f^{\alpha}\in\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$. Если α — предельное порядковое число, то положим

$$f^{\alpha}(B)\triangleq\bigcap_{\beta\prec\alpha}f^{\beta}(B)\quad\forall B\in\mathcal{P}(H). \tag{2.8}$$

Поскольку при $\beta\in\mathbf{W}(\alpha)$ по предположению индукции для всех $B\in\mathcal{P}(H)$ выполнено включение $f^{\beta}(B)\in\mathcal{P}(H)$, в этом случае степень f^{α} также определена корректно и $f^{\alpha}\in\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$.

Итак, в силу принципа трансфинитной индукции α-итерация $f^{\alpha}\in\mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ отображения f определена однозначно для любого $\alpha\in\mathbf{ORD}$.

Неподвижные точки автоморфизмов в индуктивном ЧУМ. В этом пункте приведены два утверждения о множестве неподвижных точек сужающего отображения: вначале рассмотрен общий случай индуктивного ЧУМ, а затем дана модернизация утверждения для случая полной решетки, порожденной булеаном непустого множества.

Следующая лемма показывает, что свойство (1.1) наследуется при переходе к α-итерациям.

Лемма. *Пусть $(X,\preccurlyeq)$ — непустое индуктивное ЧУМ, $f\in X^{X}$ и*

$$f\ \text{— сужающее отображение на}\ (X,\preccurlyeq). \tag{2.9}$$

*Тогда для любых $x \in X$ и $\alpha \in$ **ORD***

$$f^{\alpha}(x) \preccurlyeq f^{\beta}(x) \quad \forall \beta \in \mathbf{W}(\alpha). \tag{2.10}$$

В частности, при $\beta = 0$ получим импликацию (f— сужающее на $(X, \preccurlyeq)$) $\Rightarrow$ (f^{α}— сужающее на $(X, \preccurlyeq)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о этого утверждения проводится по индукции, следуя определению итераций отображения (см. (2.1), (2.2), (2.4)). □.

Предложение 1. *Пусть $(X, \preccurlyeq)$ — непустое индуктивное ЧУМ, $f \in X^X$ — сужающее отображение на $(X, \preccurlyeq)$ и $\alpha \in$ **ORD** выбрано из условия $|X|^+ \preccurlyeq \alpha$.*

Тогда $\mathbf{Fix}(f) = \{f^{\alpha}(x) : x \in X\}$.

З а м е ч а н и е. Утверждение говорит о том, что неподвижные точки сужающего отображения $f \in X^X$ имеют вид $f^{\alpha}(x)$ при любых α (начиная с $|X|^+$) и $x \in X$; утверждение близко к результатам [13; 14, Theorem 3.2(4); 15, Lemma 1] лежащим в направлении, заданном работами Канторовича, Клини и Куратовского о представлении неподвижных точек пределами итерационных последовательностей.

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 1 несущественно отличается от доказательства следующего ниже предложения 2. Предложение 2 уточняет предыдущий результат для случая $(X, \preccurlyeq) = (\mathcal{P}(H), \subset)$, который интересен с точки зрения приложений. В предложении 2 улучшена "скорость сходимости" итераций к неподвижным точкам: она определяется мощностью множества H, а не множества $X \triangleq \mathcal{P}(H)$.

Предложение 2. *Пусть $H \neq \varnothing$, $f \in \mathcal{P}(H)^{\mathcal{P}(H)}$ — сужающее отображение на $(\mathcal{P}(H), \subset)$ и $\alpha \in$ **ORD** выбрано из условия $|H|^+ \preccurlyeq \alpha$. Тогда*

$$\mathbf{Fix}(f) = \{f^{\alpha}(M) : M \in \mathcal{P}(H)\}. \tag{2.11}$$

Заметим, что при указанных условиях существование неподвижной точки очевидно, более того, $\perp_{\mathbf{Fix}(f)} = \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\beta \in$ **ORD** такое, что $|H|^+ \preccurlyeq \beta$. Проверим вложение

$$\mathbf{Fix}(f) \subset \{f^{\beta}(M) \colon M \in \mathcal{P}(H)\}. \tag{2.12}$$

Пусть $N \in \mathbf{Fix}(f)$. Тогда $N \in \mathcal{P}(H)$ и $f(N) = N$. В силу определения β-итерации (см. (2.6)–(2.8)) по индукции имеем $f^{\beta}(N) = N$. Следовательно, $N \in \{f^{\beta}(M) \colon M \in \mathcal{P}(H)\}$. Так как множество N было выбрано произвольно, вложение (2.12) доказано.

Для доказательства обратного вложения фиксируем $L \in \mathcal{P}(H)$ и покажем, что $f^{\beta}(L) \in \mathbf{Fix}(f)$, т. е.

$$f(f^{\beta}(L)) = f^{\beta}(L). \tag{2.13}$$

Предположим противное:

$$f(f^{\beta}(L)) \neq f^{\beta}(L). \tag{2.14}$$

Тогда выполняются неравенства

$$f(f^{\iota}(L)) \neq f^{\iota}(L) \quad \forall \iota \in \mathbf{W}(\beta). \tag{2.15}$$

В самом деле, в ином случае мы бы имели для некоторого $\nu \in \mathbf{W}(\beta)$

$$f(f^{\nu}(L)) = f^{\nu}(L), \tag{2.16}$$

а тогда будут выполнятся равенства

$$f^{\xi}(L) = f^{\nu}(L) \quad \forall \xi \in \mathbf{ORD}, \quad \nu \preccurlyeq \xi. \tag{2.17}$$

Если допустить противное, то найдется $\zeta \in \mathbf{ORD}$ такое, что

$$(\nu \prec \zeta)\&(f^{\nu}(L) \neq f^{\zeta}(L)). \tag{2.18}$$

Обозначим через $\bar{\zeta}$ минимальный ординал, обладающий этими свойствами. По выбору $\bar{\zeta}$ имеем следующие соотношения:

$$\nu \prec \bar{\zeta}, \tag{2.19}$$

$$f^{\bar{\zeta}}(L) \neq f^{\nu}(L), \tag{2.20}$$

$$f^{\xi}(L) = f^{\nu}(L) \quad \forall \xi(\xi \in \mathbf{W}(\bar{\zeta}))\&(\nu \preccurlyeq \xi). \tag{2.21}$$

Покажем, что требования (2.19)–(2.21) противоречивы. Действительно, если $\bar{\zeta}$ имеет предшественника (пусть, например, $\bar{\zeta} = \bar{\xi} + 1$), то с учетом (2.19) $\nu \preccurlyeq \bar{\xi}$, и тогда в силу (2.21) и (2.7) получим

$$f^{\bar{\zeta}}(L) \triangleq f(f^{\bar{\xi}}(L)) = f(f^{\nu}(L)) = f^{\nu}(L),$$

что противоречит (2.20).

В случае, когда $\bar{\zeta}$ — предельный ординал, согласно (2.8) и (2.21) имеем

$$\begin{aligned} f^{\bar{\zeta}}(L) &\triangleq \bigcap_{\xi \prec \bar{\zeta}} f^{\xi}(L) = \Big(\bigcap_{\xi \prec \nu} f^{\xi}(L)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{\nu \preccurlyeq \xi \prec \bar{\zeta}} f^{\xi}(L)\Big) \\ &= \Big(\bigcap_{\xi \prec \nu} f^{\xi}(L)\Big) \bigcap \Big(\bigcap_{\nu \preccurlyeq \xi \prec \bar{\zeta}} f^{\nu}(L)\Big) = \Big(\bigcap_{\xi \prec \nu} f^{\xi}(L)\Big) \bigcap f^{\nu}(L). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Из (2.10) следует $f^{\nu}(L) \subset \bigcap_{\xi \prec \nu} f^{\xi}(L)$. Отсюда с учетом (2.22) получим $f^{\bar{\zeta}}(L) = f^{\nu}(L)$, что вновь противоречит (2.20). Таким образом, предположение (2.18) не верно и выполняются равенства (2.17). В силу выбора ν имеем $\nu \prec \beta$ и, тем более, $\nu \prec \beta + 1$. Тогда, используя дважды соотношения (2.17), получим

$$f^{\beta}(L) = f^{\nu}(L) = f^{\beta+1}(L) = f(f^{\beta}(L)).$$

Эти равенства противоречат (2.14). Стало быть, предположение (2.16) не верно. Итак, при допущении (2.14) выполняются неравенства (2.15).

Построим β-последовательность $(L_\iota)_{\mathbf{W}(\beta)}$ в $\mathcal{P}(H)$, полагая

$$L_\iota \triangleq f^{\iota}(L) \setminus f(f^{\iota}(L)), \quad \iota \in \mathbf{W}(\beta). \tag{2.23}$$

Из (2.9), (2.15) и (2.23) следует, что

$$L_\eta \neq \varnothing \quad \forall \eta \in \mathbf{W}(\beta). \tag{2.24}$$

Далее, для любых $\xi, \zeta \in \mathbf{ORD}$, таких, что $\xi \prec \zeta \preccurlyeq \beta$, имеем $\xi + 1 \preccurlyeq \zeta$. Тогда с учетом (2.9), (2.10) и (2.23) получаем, что $f^{\zeta}(L) \subset f(f^{\xi}(L))$, $L_\xi \cap f(f^{\xi}(L)) = \varnothing$. Из этих вложений имеем $L_\xi \cap f^{\zeta}(L) = \varnothing$. Как следствие, с учетом $L_\zeta \subset f^{\zeta}(L)$ получаем равенства

$$L_\zeta \cap L_\xi = \varnothing \quad \forall \zeta, \xi \in \mathbf{W}(\beta), \quad \zeta \neq \xi. \tag{2.25}$$

Ввиду (2.24) воспользуемся аксиомой выбора и образуем β-последовательность $(l_\iota)_{\mathbf{W}(\beta)}$ в H, полагая

$$l_\iota \in L_\iota, \quad \iota \in \mathbf{W}(\beta). \tag{2.26}$$

В силу (2.25), (2.26) имеем соотношения

$$l_\iota \in H, \quad l_\iota \neq l_\eta, \quad \iota, \eta \in \mathbf{W}(\beta), \quad \iota \neq \eta. \tag{2.27}$$

Из (2.27) следует, что β-последовательность $(l_\iota)_{\mathbf{W}(\beta)}$ есть инъективное отображение из $H^{\mathbf{W}(\beta)}$. Тогда $|\beta| <= |H|$. Отсюда получаем в силу выбора β (см. (1.2)) цепочку противоречивых соотношений:

$$|H| < |H|^+ <= |\beta| <= |H|.$$

Значит, предположение (2.14) было ложным и выполняются равенства (2.13). Итак, доказано вложение обратное (2.12). Следовательно, в (2.12) имеет место равенство и, в силу произвольного выбора β, имеем равенство (2.11). $\square$

3. Постановка абстрактной задачи удержания

Динамическая система. Фиксируем непустое п/м I вещественной прямой $\mathbb{R}$ в качестве аналога временного интервала и непустое множество X, соответствующее фазовому пространству. Полагаем $D \triangleq I \times X$, получая пространство позиций. Если $t \in I$, то введем $I_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \leqslant t\}$ и $\mathbf{I}_t \triangleq \{\xi \in I \mid \xi \geqslant t\}$. Если $t \in I$ и $\theta \in \mathbf{I}_t$, то полагаем, что $\mathbb{I}_t^{(\theta)} \triangleq I_\theta \cap \mathbf{I}_t$. Отображения из I в X рассматриваем в качестве аналога траекторий. Точнее, мы выделяем множество $\mathbf{C} \in \mathcal{P}'(X^I)$, элементы которого будут рассматриваться как траектории “системы”. Далее фиксируем непустые множества Y и $\Omega \in \mathcal{P}'(Y^I)$. Элементы $\omega \in \Omega$ полагаем реализациями неопределенных факторов. Наконец, фиксируем (в качестве аналога “системы”) отображение

$$\mathcal{S} : D \times \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}). \tag{3.1}$$

Если $z \in D$ (т. е. $z = (t,x)$, где $t \in I$ и $x \in X$) и $\omega \in \Omega$, то (по смыслу) $\mathcal{S}(z,\omega) \in \mathcal{P}'(\mathbf{C})$ есть множество всех траекторий “системы” (3.1), отвечающих начальной позиции z и согласованных с действием ω, где ω — конкретная реализация неопределенных факторов.

Процедуры управления: квазистратегии. Введем в рассмотрение множество $\mathbf{M} \triangleq \mathcal{P}(\mathbf{C})^\Omega$ всех мультифункций (м/ф) на Ω со значениями в $\mathbf{C}$: $\alpha(\omega) \subset \mathbf{C}$ при $\omega \in \Omega$, $\alpha \in \mathbf{M}$.

Назовем м/ф $\alpha \in \mathbf{M}$ t-неупреждающей, если $\forall \omega \in \Omega\ \forall \omega' \in \Omega$ и $t \in I$ для всех $\xi \in \mathbf{I}_t$:

$$((\omega \,|\, I_\xi) = (\omega' \,|\, I_\xi)) \Rightarrow \Big(\big(\alpha(\omega) \,|\, I_\xi\big) = \big(\alpha(\omega') \,|\, I_\xi\big)\Big). \tag{3.2}$$

Мы полагаем, что управляющая сторона может использовать для целей формирования траекторий непустозначные м/ф из $\mathbf{M}$ со свойством (3.2). В связи с этим полагаем при $(t,x) \in D$, что

$$\begin{gathered}\mathbb{M}_{(t,x)} \triangleq \Big\{\alpha \in \mathbf{M} \mid \forall \omega \in \Omega\ \big(\alpha(\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big) \in \mathcal{P}'\Big(\big(\mathcal{S}((t,x),\omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big)\Big), \\ \forall \omega, \omega' \in \Omega\ \forall \xi \in \mathbf{I}_t\ ((\omega \,|\, I_\xi) = (\omega' \,|\, I_\xi)) \Rightarrow \Big(\big(\alpha(\omega) \,|\, I_\xi\big) = \big(\alpha(\omega') \,|\, I_\xi\big)\Big)\Big\}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Следовательно, при $z \in D$ определено множество мультифункций $\mathbb{M}_z$. Элементы (3.3) рассматриваем в качестве допустимых процедур управления — (многозначных) квазистратегий, отвечающих позиции (t,x).

Задача удержания. Имея целью управления удержание движений в некотором заданном наперед множестве N, мы будем считать ее достижимой для заданной позиции $(t,x) \in D$, если существует квазистратегия $\alpha_0 \in \mathbb{M}_{(t,x)}$, для которой $(\tau, s(\tau)) \in N$ для всех $\tau \in \mathbf{I}_t$, $s \in \alpha_0(\omega)$ и $\omega \in \Omega$.

Оператор программного поглощения. При $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$ и $\omega \in \Omega$ обозначим

$$\Pi(\omega \mid z, H) \triangleq \{s \in \mathcal{S}(z,\omega) \mid (\xi, s(\xi)) \in H\ \forall \xi \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\}. \tag{3.4}$$

В терминах (3.4) введем оператор программного поглощения (ОПП) $\mathbf{A} : \mathcal{P}(D) \mapsto \mathcal{P}(D)$, а именно, полагаем, что $\mathbf{A}(H) \triangleq \{z \in H \mid \Pi(\omega \mid z, H) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega\}$ для любого $H \in \mathcal{P}(D)$. Из определения $\mathbf{A}$ сразу следует, что это сужающее отображение:

$$\mathbf{A}(H) \subset H. \tag{3.5}$$

Пример. Пусть динамика системы описывается следующим образом: положим $I \triangleq \mathbb{R}$, $X \triangleq \mathbb{R}$, $D \triangleq I \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Множество $\Omega \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^I)$ допустимых реализаций помехи определим как $L_1(I, [-1,1])$ — множество интегрируемых с модулем функций из $[-1,1]^{\mathbb{R}}$.

Для начального состояния $(t,x) \in D$ и реализации помехи $\omega \in \Omega$ динамику $\mathcal{S}((t,x),\omega)$ зададим множеством функций из $\mathbf{C} \triangleq C(\mathbb{R})$ вида

$$\mathcal{S}((t,x),\omega) \triangleq \{h \in \mathbf{C} \mid h(\tau) = x + \int\limits_t^\tau (\omega(s) + u(s))ds, \quad \tau \in I, \quad u \in L_1(I,[-1,1])\}.$$

Множество фазовых ограничений $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(D)$ положим равным

$$\mathcal{N} \triangleq \{(t,x) \in D \mid |x| < t^2,\ t \in I \setminus \{0\}\}.$$

Тогда

$$\mathbf{A}(\mathcal{N}) = \{(t,x) \in D \mid ((x=0)\&(t \leqslant 0)) \vee ((|x| < t^2)\&(t > 0))\}$$

и $\mathbf{A}(\mathbf{A}(\mathcal{N})) = \mathbf{A}(\mathcal{N})$. То есть $\mathbf{A}(\mathcal{N})$ является (наибольшей) неподвижной точкой оператора $\mathbf{A}$. Из этого следует, что будут справедливы утверждения предложения 11 и теоремы 2 из работы [11], основу которых составляет представление наибольшей неподвижной точки ОПП. Вместе с тем существенная часть топологических условий из этих утверждений (замкнутость множества $\mathcal{N}$, компактность пучков движений — [11, условие 3]) в примере не выполняются.

Пример указывает на то, что область применения МПИ в задаче удержания, вероятно, не связана топологическими свойствами фазовых ограничений и динамики системы.

4. Трансфинитные программные итерации в задаче удержания

В этом разделе мы применим технику трансфинитных итераций в задаче удержания. Целью данного рассмотрения является демонстрация общности МПИ и его независимости в исследуемой абстрактной задаче удержания от топологических свойств динамической системы и фазовых ограничений. Постановка задачи следует работе [11].

Итерации ОПП. Для произвольного $\alpha \in \mathbf{ORD}$, следуя определениям (2.6)–(2.8), введем α-итерацию $\mathbf{A}^\alpha \in \mathcal{P}(D)^{\mathcal{P}(D)}$ оператора $\mathbf{A}$: при $\alpha = 0$ положим

$$\mathbf{A}^0(H) \triangleq H \quad \forall H \in \mathcal{P}(D); \tag{4.1}$$

если α имеет предшественника (пусть это порядковое число γ), примем

$$\mathbf{A}^\alpha \triangleq \mathbf{A} \circ \mathbf{A}^\gamma; \tag{4.2}$$

если α — предельное порядковое число, пусть

$$\mathbf{A}^\alpha(H) \triangleq \bigcap_{\beta \prec \alpha} \mathbf{A}^\beta(H) \quad \forall H \in \mathcal{P}(D). \tag{4.3}$$

Предложение 3. *Если $\alpha \in \mathbf{ORD}$, то для любого $H \in \mathcal{P}(D)$*

$$\mathbf{A}^\alpha(H) \subset \mathbf{A}^\beta(H) \quad \forall \beta \in \mathbf{W}(\alpha). \tag{4.4}$$

В частности (при $\beta = 0$), $\mathbf{A}^\alpha$ — сужающее отображение.

Доказательство следует из свойства (3.5) и леммы. □

Квазистратегии, разрешающие задачу удержания. В дальнейшем потребуется аналог полугруппового свойства траекторий динамической системы (3.1).

Предположение 1 (полугрупповое свойство). $\forall z \in D,\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall h \in \mathcal{S}(z,\omega),\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$,

$$(h \,|\, \mathbf{I}_t) \in \big(\mathcal{S}((t, h(t)), \omega) \,|\, \mathbf{I}_t\big).$$

Рассмотрим вопрос о решении задачи удержания в классе многозначных квазистратегий, имея в виду конструкции [9]. Всюду в дальнейшем при $z = (t, x) \in D$ полагаем

$$\mathcal{S}(z, \cdot) \triangleq (\mathcal{S}(z, \omega))_{\omega \in \Omega} : \Omega \mapsto \mathcal{P}'(\mathbf{C}).$$

Далее будем придерживаться соглашения: если $t \in I$, $h \in \mathbf{C}$ и $h' \in \mathbf{C}$, то отображение $(h \square h')_t : I \mapsto X$ (склейка h и h') определяется соотношениями

$$\big((h \square h')_t(\xi) \triangleq h(\xi)\ \forall \xi \in I_t\big) \& \big((h \square h')_t(\zeta) \triangleq h'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}\big).$$

Предположение 2 (допустимость склейки движений). $\forall z \in D,\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)},\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall \omega' \in \Omega:$

$$\big((\omega \,|\, I_t) = (\omega' \,|\, I_t)\big) \Rightarrow \big((h \square h')_t \in \mathcal{S}(z, \omega')\ \forall h \in \mathcal{S}(z, \omega)\ \forall h' \in \mathcal{S}((t, h(t)), \omega')\big).$$

Напомним, что согласно (3.4) для любых $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$ и $\omega \in \Omega$ имеют место вложения $\Pi(\omega \mid z, H) \subset \mathcal{S}(z, \omega)$. Кроме того, из (3.4) следует, что при $H \in \mathcal{P}(D)$, $z \in D$, $\omega \in \Omega$ и $s \in \Pi(\omega \mid z, H)$ выполняются включения $(t, s(t)) \in H\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$. Отметим также, что в следующем предложении отсутствует вводимое ниже требование 3 "склеиваемости" помех. Это расширяет возможность применения данной конструкции квазистратегии на практически важные случаи, например на случай непрерывных помех.

Предложение 4. *Пусть $\sigma \in \mathbf{ORD}$ таково, что $|D|^+ \preccurlyeq \sigma$ и выполнено предположение* 2. *Тогда*

$$\Pi(\cdot \mid z, \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})) \in \mathbb{M}_z \quad \forall z \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}). \tag{4.5}$$

Доказательство предложения 4 следует доказательству предложения 11 из [11] с заменой $\overset{\infty}{\mathbf{A}}$ на $\mathbf{A}^\sigma$, так как в силу (3.5) из предложения 2 вытекает, что $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})) = \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$.$\square$

Это утверждение модернизирует утверждение [11, предложение 11] в направлении отказа от топологических требований на множество $\mathcal{N}$ и на динамику управляемой системы: оставшееся в теореме предположение 2 носит абстрактно-динамический характер. Платой за общность требований является "скорость сходимости" итераций оператора $\mathbf{A}$ к соответствующей неподвижной точке: в упомянутом утверждении из [11] гарантирована сходимость к множеству $\overset{\infty}{\mathbf{A}}(\mathcal{N})$ при счетном количестве итераций. Понятно, что в рассматриваемом случае даже при счетном множестве D требуется, вообще говоря, несчетное бесконечное множество итераций для достижения неподвижной точки $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$.

Из вложения $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$ (см. (4.4)) с учетом (4.5) получаем, что при выполнении предположения 2 и неравенства $|D|^+ \preccurlyeq \sigma$ справедливо вложение

$$\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) \subset \big\{z \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_z : (t, s(t)) \in \mathcal{N}\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \alpha(\omega)\big\}. \tag{4.6}$$

Из предложения 4 и определения (3.4) следует, что

$$(t, s(t)) \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) \quad \forall z \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \Pi(\omega \mid z, \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}))\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}. \tag{4.7}$$

Таким образом, из (4.4) и (4.7) вытекает, что $(t, s(t)) \in \mathcal{N}$ для всех $z \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$, $\omega \in \Omega$, $s \in \Pi(\omega \mid z, \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}))$ и $t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}$. Мы получили для $z \in \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ явный вид квазистратегии, разрешающей задачу удержания в $\mathcal{N}$.

Далее будем придерживаться соглашения: если $t \in I$, $\omega \in \Omega$ и $\omega' \in \Omega$, то отображение $(\omega \square \omega')^t : I \mapsto Y$ (склейка ω и ω') определяется соотношениями

$$\big((\omega \square \omega')^t(\xi) \triangleq \omega(\xi)\ \forall \xi \in I_t\big) \& \big((\omega \square \omega')^t(\zeta) \triangleq \omega'(\zeta)\ \forall \zeta \in \mathbf{I}_t \setminus \{t\}\big). \tag{4.8}$$

Предположение 3 (допустимость склейки помех). $(\omega\square\omega')^t \in \Omega \quad \forall t \in I\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall \omega' \in \Omega.$

Предложение 5. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 3. *Тогда для всех* $(t,x) \in D$, $t' \in \mathbf{I}_t$, $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$, $h \in \mathcal{S}((t,x),(\omega\square\omega')^{t'})$ *выполнено* $(h\,|\,\mathbf{I}_{t'}) \in \big(\mathcal{S}((t',h(t')),\omega')\,|\,\mathbf{I}_{t'}\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. предложения следует из определений.

Приведенная ниже теорема, по существу, говорит о том, что множество $\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N})$ есть наибольшее из подмножеств $\mathcal{N}$, содержащихся в правой части (4.6), т. е. из множеств начальных позиций, допускающих разрешение задачи удержания в $\mathcal{N}$ в классе квазистратегий. Это утверждение также следует в направлении, заданном утверждением [11, теорема 2]. При этом топологические свойства множества $\mathcal{N}$ и динамики управляемой системы не используются: оставшиеся в теореме предположения 1–3 носят функциональный характер.

Вместе с тем теорема явно указывает на то, что в случае конечного D точное решение задачи будет получено за конечное число шагов.

Доказательство теоремы в основных моментах повторяет доказательство утверждения [11, теорема 2] и отличается лишь спецификой применения трансфинитной индукции.

Теорема. *Пусть верны предположения* 1–3 *и* $\sigma \in \mathbf{ORD}$ *выбрано из условия* $|D|^+ \preccurlyeq \sigma$. *Тогда выполняется равенство*

$$\mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}) = \big\{z \in \mathcal{N} \mid \exists \alpha \in \mathbb{M}_z : (t,s(t)) \in \mathcal{N}\ \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z)}\ \forall \omega \in \Omega\ \forall s \in \alpha(\omega)\big\}. \tag{4.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Λ множество в правой части (4.9). С учетом вложения (4.6) для доказательства теоремы достаточно установить вложение

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^\sigma(\mathcal{N}). \tag{4.10}$$

Так как $\Lambda \subset \mathcal{N}$, имеем (см. (4.1))

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^0(\mathcal{N}). \tag{4.11}$$

Пусть вообще $\zeta \in \mathbf{ORD}$ таково, что для всех $\xi \in \mathbf{W}(\zeta)$

$$\Lambda \subset \mathbf{A}^\xi(\mathcal{N}). \tag{4.12}$$

Покажем, что тогда $\Lambda \subset \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N})$.

Если ζ — предельный ординал, то с учетом (4.3) и (4.12) получаем:

$$\Lambda \subset \bigcap_{\xi \prec \zeta} \mathbf{A}^\xi(\mathcal{N}) = \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N}). \tag{4.13}$$

Пусть теперь ζ имеет предшественника $\eta \in \mathbf{W}(\zeta)$: $\zeta = \eta + 1$. Проверим, что и тогда выполнено вложение

$$\Lambda \subset \mathbf{A}(\mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) \triangleq \mathbf{A}^{\eta+1}(\mathcal{N}) = \mathbf{A}^\zeta(\mathcal{N}). \tag{4.14}$$

Предположим противное: нашлась позиция z_* такая, что

$$z_* \in \Lambda \setminus \mathbf{A}^{\eta+1}(\mathcal{N}). \tag{4.15}$$

Тогда (см. (4.2)) из (4.12) и (4.15) следует, что $z_* \in \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}) \setminus \mathbf{A}(\mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}))$. Напомним, что $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) = \{z \in \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}) \mid \Pi(\omega \mid z, \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) \neq \varnothing\ \forall \omega \in \Omega\}$. Следовательно, найдется $\omega_* \in \Omega$ такая, что

$$\Pi(\omega_* \mid z_*, \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N})) = \varnothing. \tag{4.16}$$

Из (3.4) и (4.16) получим, что

$$\forall s \in \mathcal{S}(z_*, \omega_*)\ \exists t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)} \colon (t, s(t)) \notin \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}). \tag{4.17}$$

Вместе с тем (см. (4.15)) $z_* \in \Lambda$ и, значит, найдется квазистратегия

$$\alpha_* \in \mathbb{M}_{z_*}, \tag{4.18}$$

для которой, по определению Λ,

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)},\ \forall \omega \in \Omega,\ \forall s \in \alpha_*(\omega). \tag{4.19}$$

В частности,

$$(t, s(t)) \in \mathcal{N} \quad \forall t \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)},\ \forall s \in \alpha_*(\omega_*). \tag{4.20}$$

Выберем произвольно

$$s_* \in \alpha_*(\omega_*). \tag{4.21}$$

Тогда (см. (3.3)) $s_* \in \mathcal{S}(z_*, \omega_*)$. Согласно (4.17) имеем для некоторого момента $t_* \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$

$$(t_*, s_*(t_*)) \notin \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}),$$

а потому выполнено

$$z^* \triangleq (t_*, s_*(t_*)) \notin \mathbf{A}^\eta(\mathcal{N}). \tag{4.22}$$

Из (4.12) и (4.22) вытекает, что $z^* \notin \Lambda$. При этом (см. (4.20)) $z^* \in \mathcal{N}$. Тогда по определению Λ имеем, что

$$\forall \alpha \in \mathbb{M}_{z^*}\ \exists \omega \in \Omega,\ \exists s \in \alpha(\omega),\ \exists t \in \mathbf{I}_{t_*} : (t, s(t)) \notin \mathcal{N}. \tag{4.23}$$

С учетом предположения 3 определим $\beta : \Omega \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{C})$ по правилу

$$\beta(\omega) \triangleq \{h \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega)^{t_*}) \mid (h \,|\, I_{t_*}) = (s_* \,|\, I_{t_*})\} \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.24}$$

Покажем включение $\beta \in \mathbb{M}_{z^*}$. Для этого сначала проверим, что

$$\beta(\omega) \neq \varnothing \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.25}$$

Из (3.3), (4.18) и (4.21) следует, что для произвольного $\omega' \in \Omega$ найдется $h' \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega')^{t_*})$ такое, что $(h' \,|\, I_{t_*}) = (s_* \,|\, I_{t_*})$. Это означает (см. (4.24)), что $h' \in \beta(\omega')$. Так как выбор ω' был произвольным, выполнено неравенство (4.25).

Для любых $\tilde\omega \in \Omega$ и $\tilde h \in \beta(\tilde\omega)$ из определений α_*, β имеем (см. (3.3)), что $(\tilde h \,|\, \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}) = (h \,|\, \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)})$ для некоторого $h \in \mathcal{S}(z_*, (\omega_* \Box \tilde\omega)^{t_*})$. Тогда в силу предложения 5, с учетом $\mathcal{S}((t_*, h(t_*)), \tilde\omega) = \mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \tilde\omega)$, получим, что $(h \,|\, \mathbf{I}_{t_*}) \in \big(\mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \tilde\omega) \,|\, \mathbf{I}_{t_*}\big)$. Таким образом, $(h \,|\, \mathbf{I}_{t_*}) \in \big(\mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \omega) \,|\, \mathbf{I}_{t_*}\big)$ $\forall \omega \in \Omega$ $\forall h \in \beta(\omega)$. Отсюда (см. (4.25)) следует

$$\big(\beta(\omega) \,|\, \mathbf{I}_{t_*}\big) \in \mathcal{P}'\Big(\big(\mathcal{S}((t_*, s_*(t_*)), \omega) \,|\, \mathbf{I}_{t_*}\big)\Big) \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.26}$$

Зафиксируем произвольное $\theta \in \mathbf{I}_{t_*}$ и $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega$ такие, что $(\omega \,|\, I_\theta) = (\omega' \,|\, I_\theta)$. Обозначим $\Gamma \triangleq \big(\beta(\omega) \,|\, I_\theta\big)$, $\Gamma' \triangleq \big(\beta(\omega') \,|\, I_\theta\big)$ и выберем $\gamma \in \Gamma$. Пусть $f \in \beta(\omega)$ таково, что $\gamma = (f \,|\, I_\theta)$. Тогда в силу (4.24) $f \in \alpha((\omega_* \Box \omega)^{t_*})$ и

$$(f \,|\, I_{t_*}) = (s_* \,|\, I_{t_*}). \tag{4.27}$$

С учетом (4.8) и предположения 3 получаем, что определены склеенные отображения $(\omega_* \Box \omega)^{t_*} \in \Omega$ и $(\omega_* \Box \omega')^{t_*} \in \Omega$, причем справедливы равенства

$$((\omega_* \Box \omega)^{t_*} \,|\, I_\theta) = ((\omega_* \Box \omega')^{t_*} \,|\, I_\theta). \tag{4.28}$$

Из (4.28) в силу (4.18) получим $\big(\alpha_*((\omega_* \Box \omega)^{t_*}) \,|\, I_\theta\big) = \big(\alpha_*((\omega_* \Box \omega')^{t_*}) \,|\, I_\theta\big)$. Следовательно, найдется $h \in \alpha_*((\omega_* \Box \omega')^{t_*})$ такой, что

$$(f \,|\, I_\theta) = (h \,|\, I_\theta). \tag{4.29}$$

В частности (см. (4.27)), поскольку $\theta \geqslant t_*$ имеем равенство $(h \,|\, I_{t_*}) = (s_* \,|\, I_{t_*})$. Следовательно (см. (4.24)), $h \in \beta(\omega')$ и при этом (см. (4.27), (4.29)) $\gamma = (h \,|\, I_\theta)$. Отсюда заключаем, что $\gamma \in \Gamma'$ и в силу произвольности выбора γ имеем вложение $\Gamma \subset \Gamma'$. Из соображений симметрии выполнено обратное вложение и, как следствие, равенство $\Gamma = \Gamma'$. Так как выбор ω, ω' и θ был произвольным справедлива импликация: $\forall \omega_1 \in \Omega\ \forall \omega_2 \in \Omega\ \forall t \in \mathbf{I}_{t_*}$

$$((\omega_1 \,|\, I_t) = (\omega_2 \,|\, I_t)) \Rightarrow \Big(\big(\beta(\omega_1) \,|\, I_t\big) = \big(\beta(\omega_2) \,|\, I_t\big)\Big). \qquad (4.30)$$

Из (4.26) и (4.30) получаем, что $\beta \in \mathbb{M}_{z^*}$. Значит (см. (4.23)), для некоторых $\bar{\omega} \in \Omega$, $\bar{s} \in \beta(\bar{\omega})$ и $\bar{t} \in \mathbf{I}_{t_*}$

$$(\bar{t}, \bar{s}(\bar{t})) \notin \mathcal{N}. \qquad (4.31)$$

Но, по построению и предположению 3, $\bar{t} \in \mathbf{I}_{\mathbf{pr}_1(z_*)}$, $(\omega_* \square \bar{\omega})^{t_*} \in \Omega$ и $\bar{s} \in \alpha_*((\omega_* \square \bar{\omega})^{t_*})$. Иначе говоря, соотношение (4.31) противоречит (4.19). Следовательно, предположение (4.15) было ложным и выполняется (4.14). Таким образом, из соотношений (4.11), (4.14) и (4.13) в силу принципа трансфинитной индукции вытекает, что для произвольного $\delta \in \mathbf{ORD}$ выполняется вложение $\Lambda \subset \mathbf{A}^\delta(\mathcal{N})$. При $\delta = \sigma$ этого вложение обращается в искомое вложение (4.10). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. С 456.
3. **Ченцов А.Г.** О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
4. **Ченцов А.Г.** К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
5. **Ухоботов В.И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
6. **Чистяков С.В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
7. **Ухоботов В.И.** К построению стабильного моста в игре удержания // Прикл. математика и механика. 1981. Т. 45, № 2. С. 236–240.
8. **Дятлов В.П., Ченцов А.Г.** Монотонные итерации множеств и их приложения к игровым задачам управления // Кибернетика. 1987. № 2. С. 92–99.
9. **Ченцов А.Г.** Метод программных итераций для решения абстрактной задачи удержания // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 157–169.
10. **Ченцов А.Г.** О задаче управления с ограниченным числом переключений // Депонент ВИНИТИ. № 4942-В 87. Свердловск, 1987. С. 1–45.
11. **Серков Д.А., Ченцов А.Г.** Метод программных итераций и операторная выпуклость в абстрактной задаче удержания // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, № 3. С. 348–366.
12. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
13. **Bourbaki N.** Sur le théorème de Zorn // Archiv der Mathematik. 1949. Т. 2, № 6. С. 434–437.
14. **Cousot P., Cousot R.** Constructive versions of Tarski's fixed point theorems // Pacific J. Math. 1979. Т. 82, № 1. С. 43–57.
15. **Echenique F.** A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem // Int. J. Game Theory. 2005. Т. 33. С. 215–218.

Серков Дмитрий Александрович
д-р физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: serkov@imm.uran.ru

Поступила 31.10.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. An alternative for the game problem of convergence. *J. Appl. Math. Mech.*, 1970, vol. 34, no. 6, pp. 948–965. doi: 10.1016/0021-8928(70)90158-9 .
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game–theoretical control problems*. New York: Springer, 1988, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Chentsov A.G. On the structure of an approach problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1975, vol. 224, no. 6, pp. 1272–1275 (in Russian).
4. Chentsov A.G. On a game problem of guidance. *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
5. Ukhobotov V.I. Construction of a stable bridge for a class of linear games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 350–354.
6. Chistyakov S.V. On solving pursuit game problems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 5, pp. 845–852.
7. Ukhobotov V. I., On the construction of a stable bridge in the holding game. *J. Appl. Math. Mech.*, 1981, vol. 45, no. 2, pp. 169–172.
8. Dyatlov V.P., Chentsov A.G. Monotone iterations of sets and their applications to game control problems, *Kibernetika*, 1987, vol. 23, no. 2, pp. 92–99. doi: 10.1007/BF01071786 .
9. Chentsov A.G. An abstract confinement problem: a programmed iterations method of solution, *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, no. 2, pp. 299–310. doi: 10.1023/B:AURC.0000014727.63912.45 .
10. Chentsov A.G. On the problem of control with a limited number of switching. *Deponent VINITI*, no. 4942-B87, Sverdlovsk, 1987, pp. 1–45 (in Russian).
11. Serkov, D.A., Chentsov A.G. [Programmed iteration method and operator convexity in an abstract retention problem] *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2015, vol. 25, no.3, pp. 348–366 (in Russian). doi: 10.20537/vm150305 .
12. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory*. Amsterdam: North-Holland, 1967, 417 p. Translated under the title *Teoriya mnozhestv*. Moscow, Mir Publ, 1970, 416 p.
13. Bourbaki N. Sur le théorème de Zorn. *Archiv der Mathematik*, 1949, vol. 2, no. 6, pp. 434–437.
14. Cousot P., Cousot R. Constructive versions of Tarski's fixed point theorems. *Pacific J. Math.*, 1979, vol. 82, no. 1, pp. 43–57.
15. Echenique F. A short and constructive proof of Tarski's fixed-point theorem. *Int. J. Game Theory*, 2005, vol. 33, pp. 215–218. doi:10.1007/s001820400192 .

D. A. Serkov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Institute of Mathematics and Computer Science, Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: serkov@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

СЛАБАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО МНОЖЕСТВА С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

А. А. Успенский

Рассматривается проблема построения множеств, разрешающих дифференциальную игру или задачу оптимального управления, исходя из знания динамики системы, ресурсов управления и краевых условий. Построение таких множеств, причем наибольших из возможных (максимального стабильного моста — в дифференциальной игре, множества управляемости — в задаче управления), является нетривиальной задачей. Это обусловлено сложной геометрией множеств, которым свойственны невыпуклость и негладкость границ. На практике при решении инженерных задач, имеющих определенные допуски и отклонения, зачастую считается приемлемым построение разрешающего множества, не обладающего свойством максимальности. При этом конструируемое множество может быть наделено характеристиками, в дальнейшем облегчающими формирование управляющих воздействий. Например, множество может иметь выпуклые сечения, гладкую границу. В рамках означенной направленности работ в статье изучено свойство стабильности (слабой инвариантности) для одного класса множеств, рассматриваемых в пространстве позиций дифференциальной игры. На основе введенного В.Н. Ушаковым понятия дефекта стабильности множества получен критерий слабой инвариантности относительно конфликтно управляемой динамической системы для цилиндрических множеств. В частном случае линейной управляемой системы выявлены легко проверяемые достаточные условия слабой инвариантности для цилиндрических множеств, имеющих эллипсоидальные сечения. Обоснование условий опирается на конструкции и факты субдифференциального исчисления. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: стабильное множество, слабая инвариантность, дифференциальная игра, гамильтониан, дефект стабильности, цилиндрическое множество, эллипсоид, субдифференциал.

A. A. Uspenskii. Weak invariance of a cylindrical set with smooth boundary with respect to a control system.

We consider the problem of constructing resolving sets for a differential game or an optimal control problem based on information on the dynamics of the system, control resources, and boundary conditions. The construction of largest possible sets with such properties (the maximal stable bridge in a differential game or the controllability set in a control problem) is a nontrivial problem due to their complicated geometry; in particular, the boundaries may be nonconvex and nonsmooth. In practical engineering tasks, which permit some tolerance and deviations, it is often admissible to construct a resolving set that is not maximal. The constructed set may possess certain characteristics that would make the formation of control actions easier. For example, the set may have convex sections or a smooth boundary. In this context, we study the property of stability (weak invariance) for one class of sets in the space of positions of a differential game. Using the notion of stability defect of a set introduced by V.N. Ushakov, we derive a criterion of weak invariance with respect to a conflict-controlled dynamic system for cylindrical sets. In a particular case of a linear control system, we obtain easily verified sufficient conditions of weak invariance for cylindrical sets with ellipsoidal sections. The proof of the conditions is based on constructions and facts of subdifferential calculation. An illustrating example is given.

Keywords: stable set, weak invariance, differential game, Hamiltonian, stability defect, cylindrical set, ellipsoid, subdifferential.

MSC: 37C75

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-241-250

Введение

Стабильность множества относится к числу ключевых понятий теории позиционных дифференциальных игр [1, гл. 3]. В ранних работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [2;3] свойство стабильности формулировалось в терминах динамической системы и управлений игроков, а затем — в терминах соответствующих дифференциальных включений [4], тесно связанных с динамикой игры. Эволюция понятия привела к унификационной форме представления

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 15-16-1-13.

свойства стабильности [5], которая вовлекает понятие гамильтониана динамической системы. Унификационная форма записи свойства стабильности множества не включает явно управляющие воздействия, что делает возможным применение этого свойства при решении задач смежных разделов математики, например при построении минимаксных (обобщенных) решений краевых задач для уравнений в частных производных первого порядка и уравнений типа Гамильтона — Якоби — Беллмана [6; 7]. В середине 1980-х г. было получено инфинитезимальное представление свойства стабильности, выраженное в терминах конусов Булигана или правых производных множеств [8] и открывающее новые возможности для разработки процедур решения задач управления.

Согласно терминологии, получившей распространение в англоязычной литературе [9; 10], а затем и в отечественных исследованиях (например, [11]), свойство стабильности выражает свойство слабой инвариантности множества в пространстве позиций относительно дифференциального включения или некоторого семейства дифференциальных включений. Заметим, что слабая инвариантность необходима, в частности, при исследовании задач выживаемости решений управляемых систем при наличии фазовых ограничений [12; 13].

Следует подчеркнуть, что в общем случае крайне затруднительно, а порой невозможно, опираясь на то или иное представление свойства стабильности, найти в аналитической или же аппроксимационной форме множество, являющееся разрешающим элементом для задачи управления. Это замечание относится, например, к максимальному стабильному мосту — основному элементу разрешающей конструкции дифференциальной игры сближения-уклонения. Оно же справедливо для случая, когда речь идет о построении для управляемой динамической системы ядра выживаемости во множестве фазовых ограничений. Поскольку конструирование означенных множеств, являющихся максимальными по вложению с нужными свойствами, трудно реализуемо, естественным образом возникает задача выявления множеств, обладающих свойством стабильности, пусть даже при этом не являющихся максимальными из возможных. В рамках этого направления исследований в настоящей работе получены достаточные условия слабой инвариантности цилиндрических множеств с эллипсоидальными сечениями. Привлечение эллипсоидов при построении с той или иной степенью грубости решений задач управления не ново и активно используется представителями различных научных школ по теории математического управления (см., например, монографии [14–16]).

1. Постановка игровой задачи о сближении. Дефект стабильности множества

Рассматривается конфликтно-управляемая система, поведение которой на отрезке времени $[t_0, \vartheta],\ t_0 < \vartheta < \infty$, описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in U, \quad v \in V. \tag{1.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — управление первого игрока, v — управление второго игрока, U и V — компакты в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно.

Предполагается, что выполнены стандартные для теории позиционных дифференциальных игр условия [1]. Игра происходит в ограниченной и замкнутой области D пространства переменных $t, x (t, x) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$, выполняется условие седловой точки в маленькой игре. Функция $f(t, x, u, v)$ непрерывна по совокупности переменных $(t, x, u, v) \in D \times U \times V$ и удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \ \ (t, x^{(i)}, u, v) \in D \times U \times V, \ \ i = 1, 2, \ \ L \in (0, \infty).$$

Здесь символ $\|f\|$ означает норму вектора в евклидовом пространстве. Также предполагается, что движения $x[t]$ системы (1.1) продолжимы на $[t_0, \vartheta]$.

Дифференциальная игра сближения-уклонения складывается из задачи о сближении и задачи об уклонении. В задаче о сближении, стоящей перед первым игроком, требуется обеспечить попадание движения $x[t]$ системы (1.1) в момент ϑ на замкнутое терминальное множество M в пространстве $\mathbb{R}^m$. Решение задачи требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока. Задача об уклонении, стоящая перед вторым игроком, заключается в том, чтобы гарантировать уклонение движения системы (1.1) от M на промежутке $[t_0,\vartheta]$. Решение задачи требуется определить в классе контр-позиционных процедур управления второго игрока (подробнее см. [1, гл. 14]).

Теорема об альтернативе [1, гл. 3] гласит, что существует максимальный стабильный мост — замкнутое множество $W^0 \subset D$ такое, что для всех исходных позиций $(t,x) \in W^0$ разрешима задача о сближении, а для всех исходных позиций $(t,x) \in D \setminus W^0$ разрешима задача об уклонении. Построение моста осуществляется посредством оператора стабильного поглощения, реализующего свойство стабильности W^0, например в унификационной форме [17]. При этом выделение W^0 в аналитическом или аппроксимационном виде представляет серьезную математическую проблему, поскольку W^0 является очень часто невыпуклым множеством с негладкой границей. Подобная ситуация мотивирует исследователей на поиск классов множеств, которые сохраняют свойство стабильности, но при этом обладают более простыми и реализуемыми на практике конструктивными свойствами, такими, например, как гладкость границы и выпуклость временных слоев. Ясно, что в общем случае эти множества не совпадают с максимальным стабильным мостом W^0 и, стало быть, решают игровую задачу о сближении на более узком множестве, нежели W^0.

Удобный аппарат для исследования множеств на предмет наличия у них свойства слабой инвариантности основан на понятии дефекта стабильности множества, введенном В. Н. Ушаковым [18]. Ниже кратко приведем основные формальные соотношения, сопутствующие этому понятию, по возможности сохраняя принятые обозначения и терминологию. Подробное изложение конструкции дефекта стабильности множества содержатся, например, в [18; 19].

Пусть множество $W^* \subset [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^m$, причем сечение $W^*(\vartheta) = \{x \in \mathbb{R}^m \colon (\vartheta,x) \in W^*\} \subset M$. На многозначное отображение $t \to W^*(t)\colon [t_0,\vartheta] \to \mathbb{R}^m$ накладываются условия непрерывности и условие типа Липшица. Каждой граничной точке $(t,x) \in \partial W^*$, $t \in [t_0,\vartheta)$, ставится в соответствие число

$$\varepsilon(t,x) = \sup_{l \in S} \rho\big(\overrightarrow{D} W^*(t,x), F_l(t,x)\big). \tag{1.2}$$

Здесь $\rho(W_1,W_2) = \inf\big\{\|w_1 - w_2\| : (w_1,w_2) \in W_1 \times W_2\big\}$ — расстояние между множествами $W_1 \subset \mathbb{R}^m$ и $W_2 \subset \mathbb{R}^m$,

$$\overrightarrow{D} W^*(t,x) = \Big\{ d \in \mathbb{R}^m \colon d = \lim_{k\to\infty} (t_k - t)^{-1}(w_k - x),\ \big\{(t_k,w_k)\big\} \text{ — последовательность в } W^*,$$

$$\text{где } t_k \downarrow t \text{ при } k \to \infty, \lim_{k\to\infty} w_k = x \Big\}$$

— производное множество. Сегмент $F_l(t,x) = \Pi_l(t,x) \cap F(t,x)$ определяет правую часть дифференциального включения, отвечающего рассматриваемой игре; здесь

$$\Pi_l(t,x) = \{l \in \mathbb{R}^m \colon \langle l,f\rangle \leqslant H(t,x,l)\}$$

— полупространство в $\mathbb{R}^m$, $H(t,x,l) = \max\limits_{u\in P}\min\limits_{v\in Q}\langle l, f(t,x,u,v)\rangle$ — гамильтониан динамической системы (1.1), $(t,x,l) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов евклидова пространства. Множество $F(t,x)$ — компакт в $\mathbb{R}^m$, содержащий выпуклую оболочку вектограммы возможных скоростей динамической системы (1.1) в точке $(t,x) \in W^*$.

Величина $\varepsilon(t,x) \geqslant 0$ называется *дефектом стабильности множества* W^* *в точке* $(t,x) \in \partial W^*$, $t \in [t_0,\vartheta)$. Дефект стабильности (1.2) является числовой характеристикой, выражающей в зависимости от своего значения наличие или отсутствие в локальном смысле слабой инвариантности множества W^* относительно семейства дифференциальных включений $\dot{x} \in F_l(t,x)$, отвечающих выбранным векторам $l \in S$, где $S = \{s \in \mathbb{R}^m \colon \|s\| = 1\}$ — сфера единичного радиуса. А именно содержательно случай $\varepsilon(t,x) = 0$ свидетельствует о наличии свойства стабильности у множества в точке $(t,x) \in \partial W^*$, что означает существование стратегии первого игрока, которая гарантирует на достаточно малых временных интервалах сохранение на множестве W^* траектории управляемой системы, исходящей из точки $(t,x) \in \partial W^*$. Напротив, случай строгого неравенства $\varepsilon(t,x) > 0$ говорит о наличии стратегии второго игрока, которая вне зависимости от реализации допустимых значений управлений первого игрока выводит траекторию управляемой системы вовне множества W^*. Таким образом, множество $W^* \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^m$ слабо инвариантно относительно семейства (по $l \in S$) дифференциальных включений $\dot{x} \in F_l(t,x)$, $(t,x) \in [t_0, \vartheta) \times \mathbb{R}^m$, тогда и только тогда, когда для всех точек $(t,x) \in \partial W^*$ дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$. Здесь по умолчанию при заданных допущениях считается, что $\varepsilon(\vartheta, x) = 0$, когда $x \in W^*(\vartheta)$, поскольку $x \in W^*(\vartheta) \subset M$.

2. О слабой инвариантности цилиндрических множеств с гладкой границей в терминах дефекта стабильности

Остановимся подробнее на случае, когда множество определяется непрерывно дифференцируемой функцией:
$$W^* = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^m \colon \varphi(t,x) \leqslant 0\big\}.$$
Здесь функция $\varphi(t,x)$ определена и непрерывна вместе с частными производными $\dfrac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_m}$ в $\mathbb{R}^{m+1}$. Обозначим градиент этой функции по фазовым переменным $\nabla \varphi(t,x) = \Big(\dfrac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_m}\Big)$. Предполагаем, что градиент не вырожден на границе множества, т. е. $\nabla \varphi(t,x) \neq 0$, $(t,x) \in \partial W^*$.

В рассматриваемом случае производное множество
$$\overrightarrow{D} W^*(t,x) = \Big\{d \in \mathbb{R}^m \colon \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + \langle \nabla \varphi(t,x), d \rangle \leqslant 0\Big\},$$
причем (см. [18, с. 182]) в точке $(t,x) \in \partial W^*$ дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$ тогда и только тогда, когда
$$\|\nabla \varphi(t,x)\|^{-1} \Big(\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} + H^{(0)}\big(t, x, \nabla \varphi(t,x)\big)\Big) \leqslant 0. \tag{2.1}$$
Здесь $H^{(0)}(t,x,l) = \min\limits_{u \in P} \max\limits_{v \in Q} \langle l, f(t,x,u,v) \rangle$.

Располагая критерием локальной стабильности множества с гладкой границей (2.1), нетрудно его переформулировать для частных ситуаций. Пусть теперь множество рассмотрения является цилиндрическим по временной переменной:
$$W^* = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^m \colon h(x) \leqslant 0\big\}. \tag{2.2}$$
Здесь полагаем, что функция $h(x)$ определена и непрерывна вместе с частными производными $\dfrac{\partial h(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial h(x)}{\partial x_m}$ в $\mathbb{R}^m$, причем градиент $\nabla h(x) \neq 0$, $(t,x) \in \partial W^*$. Очевидно, что $\dfrac{\partial h(x)}{\partial t} \equiv 0$. В этом случае (см. (2.1)) в точке $(t,x) \in \partial W^*$ дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$ тогда и только тогда, когда
$$H^{(0)}\big(t, x, \nabla h(x)\big) \leqslant 0. \tag{2.3}$$

Минимаксное неравенство (2.3) является ключевым соотношением при исследовании свойства стабильности цилиндрических множеств в дифференциальных играх и задачах управления. Его структура проявляется явно в зависимости от вида правой части дифференциального уравнения (1.1). Так, например, если динамика игры определяется $f(t,x,u,v) = f_0(t,x) +$

$B(t,x)u+C(t,x)v$, где вектор-функция $f_0(t,x)$ и матрицы $B(t,x)$ и $C(t,x)$ непрерывны, удовлетворяют локальному условию Липшица, при этом выполняется условие подлинейного роста, то в граничной точке $(t,x) \in \partial W^*$ цилиндрического множества (2.2) дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\langle \nabla h(x), f_0(t,x)\rangle + \min_{u\in P}\langle \nabla h(x), B(t,x)\rangle + \max_{v\in Q}\langle \nabla h(x), C(t,x)\rangle \leqslant 0. \tag{2.4}$$

На практике проверка неравенства (2.4) сопряжена с большим объемом алгоритмически нетривиальных вычислительных процедур. Для динамических систем (1.1) частного вида можно указать относительно легко проверяемые достаточные условия, при которых неравенство (2.4) выполняется. Пример такой динамической системы приведен в следующем разделе.

3. Случай линейной управляемой динамики с постоянной знакоопределенной матрицей невозмущенной системы

Рассмотрим линейную управляемую системы частного вида с динамикой

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad \|u\| \leqslant 1. \tag{3.1}$$

Здесь x — m-мерный фазовый вектор системы, u — m-мерный вектор управления, время $t \in [t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}$. Постоянная матрица A размерности $m \times m$ является знакоопределенной, B — постоянная матрица размерности $m \times m$. При отсутствии второго игрока в задаче о сближении требуется обеспечить попадание движения $x[t]$ управляемой системы (3.1) в момент ϑ на замкнутое терминальное множество M в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Выделим класс цилиндрических множеств с эллипсоидальными сечениями $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m\colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$ вида

$$W^* = \big\{(t,x) \in \mathbb{R}^m\colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\big\}. \tag{3.2}$$

Здесь матрица эллипсоида $P^{-1} \in \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — совокупность положительно определенных матриц размерности $m \times m$, символ “T” обозначает транспонирование. В дальнейшем полагаем, что $\mathcal{P}$ включает в себя только те матрицы, которые гарантируют выполнение краевых условий. Здесь предполагается, что в момент $t = \vartheta$ краевые условия выполняются в смысле вложения $W^*(\vartheta) = \Omega \subset M$.

В рассматриваемом случае функция $h(x) = x^T P^{-1} x - 1$, ее градиент $\nabla h(x) = 2x^T P^{-1}$. Вектор $\nabla h(x) = 2x^T P^{-1}$ определяет внешнюю нормаль к эллипсоиду Ω в точке $x \in \partial\Omega$. Критерий локальной стабильности цилиндрического множества (3.2) трансформируется (см. (2.4)) естественным образом: в точке $(t,x) \in \partial W^* = \big\{(t,x) \in [t_0,\vartheta] \subset \mathbb{R}\colon x^T P^{-1} x = 1\big\}$ дефект стабильности $\varepsilon(t,x) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\min_{u\colon \|u\|\leqslant 1} \langle \nabla h(x), Ax + Bu\rangle \leqslant 0. \tag{3.3}$$

Далее выявим достаточные условия, накладываемые на параметры задачи управления и матрицу P^{-1} эллипсоида, при которых цилиндрическое множество (3.2) будет слабо инвариантным множеством. Поскольку неравенство (3.3) явно не зависит от времени $t \in [t_0, \vartheta]$, то поиск достаточных условий выливается в отыскание условий, при которых неравенство (3.3) выполняется для всех граничных точек эллипсоида:

$$\min_{u\colon \|u\|\leqslant 1} \langle \nabla h(x), Ax + Bu\rangle \leqslant 0 \ \ \forall x \in \partial\Omega. \tag{3.4}$$

Заметим, что условие (3.4) тем более выполняется, если выполняется условие

$$\max_{x\in\Omega} \min_{u\colon \|u\|\leqslant 1} \langle \nabla h(x), Ax + Bu\rangle \leqslant 0. \tag{3.5}$$

Поскольку

$$\min_{u\colon \|u\|\leqslant 1}\langle \nabla h(x), Ax+Bu\rangle = \langle 2x^T P^{-1}, Ax\rangle + \min_{u\colon \|u\|\leqslant 1}\langle 2x^T P^{-1}, Bu\rangle$$

$$= 2\left(\langle x^T P^{-1}, Ax\rangle + \min_{u\colon \|u\|\leqslant 1}\langle x^T P^{-1}, Bu\rangle\right) = 2\left(\langle x^T P^{-1}, Ax\rangle - \|x^T P^{-1}B\|\right),$$

то условие (3.5) эквивалентно неравенству $\max\limits_{x\in\Omega}\{\langle x^T P^{-1}A, x\rangle - \|x^T P^{-1}B\|\} \leqslant 0$ или, что то же самое,

$$\min_{x\in\Omega}\{\|x^T P^{-1}B\| - \langle x^T P^{-1}A, x\rangle\} \geqslant 0. \tag{3.6}$$

Поставим в соответствие неравенству (3.6) следующую оптимизационную задачу:

$$\left\|x^T P^{-1}B\right\| - \left\langle x^T P^{-1}A, x\right\rangle \downarrow \min_{x\in\Omega}. \tag{3.7}$$

Примем обозначения

$$\alpha(x) = \left\|x^T P^{-1}B\right\|, \quad \beta(x) = -\left\langle x^T P^{-1}A, x\right\rangle, \quad \gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x).$$

Выделим достаточные условия неотрицательности значения функционала в задаче (3.7). Эти условия в силу (3.3)–(3.7) будут достаточными условиями слабой инвариантности множества (3.2) в задаче (3.1).

Заметим, что норма $\alpha(x) = \left\|x^T P^{-1}B\right\|$ является выпуклой, стало быть, субдифференцируемой функцией. Кроме того, P^{-1} — положительно определенная матрица, а матрица A выбирается по условию знакоопределеннной. Поэтому в зависимости от характера знакоопределенности матрицы A функция $\beta(x) = -\left\langle x^T P^{-1}A, x\right\rangle$ является или положительно, или отрицательно определенной квадратичной формой. Соответственно, в этом случае оптимизационная задача (3.7) является либо задачей выпуклой оптимизации, либо задачей минимизации разности выпуклых функций, т. е. задачей d.c. оптимизации [20, гл. 2]. С другой, эквивалентной, точки зрения задача d.c. оптимизации — эта задача на условную оптимизацию суммы выпуклой и вогнутой функций, т. е. задача квазидифференциального (по Демьянову) исчисления [21, гл. 2].

Утверждение. *Если матрица A отрицательно определена, то цилиндрическое множество W^*, задаваемое соотношением* (3.2)*, является слабо инвариантным в задаче управления с динамикой* (3.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию A — устойчивая (гурвицева) матрица, все ее собственные значения строго отрицательные. Тогда матрица $-P^{-1}A$ квадратичной формы $\beta(x) = -\left\langle x^T P^{-1}A, x\right\rangle$ положительно определена. В этом случае целевая функция $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ является выпуклой (как сумма двух выпуклых функций) и ее субдифференциал [21]

$$\underline{\partial}\gamma(x) = \begin{cases} x^T P^{-1}B/\left\|x^T P^{-1}B\right\| - 2x^T P^{-1}A, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ \mathbf{B}(0,1), & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{B}(z,r) = \{x\in\mathbb{R}^m\colon \|x-z\| = r\}$ — шар с центром в точке $z\in\mathbb{R}^m$ радиуса r.

Имеем $0\in\underline{\partial}f(0)$, откуда следует (см. [21]), что точка $x=0$ является точкой минимума функции $\gamma(x) = \alpha(x)+\beta(x)$ на всем пространстве $\mathbb{R}^m$. Поскольку $x = 0\in\Omega$, то в этой точке достигается решение задачи (3.7), причем $\gamma(0) = 0$. Следовательно, выполняется условие (3.5), а за ним и условие (3.4). Стало быть, W^* — слабо инвариантное множество относительно управляемой системы (3.1).

Утверждение доказано.

Заметим, что это утверждение согласуется с фактами теории устойчивости движений. В рассматриваемом случае все движения невозмущенной системы $\dot{x} = Ax$ в силу ее ассимптотической устойчивости с течением времени стремятся в начало отсчета, т. е. траектории движений, расматриваемые в пространстве позиций, устремлены внутрь множества W^* в направлении нуля фазового пространства. При этом все движения невозмущенной системы являются и движениями управляемой системы (3.1), поскольку по условию ресурс управления включает нулевое управляющее воздействие. Стало быть, по крайней мере одна стратегия управления, та, которая обусловлена выбором управления, тождественного равного нулю, “загоняет” движения системы (3.1) внутрь W^*.

Теорема. *Если матрица A положительно определена, эллипсоид*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : x^T P^{-1} x \leqslant 1\},$$

матрица $P^{-1} \in \mathcal{P}$, где

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} r_1^{-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & r_n^{-2} \end{pmatrix},$$

причем радиусы $r_1, \dots, r_n$ удовлетворяют неравенству

$$\max\{r_1, \dots, r_n\} \leqslant \lambda_{\min}, \tag{3.8}$$

здесь

$$\lambda_{\min} = \min\{\lambda_0, \lambda_{00}\}, \quad \lambda_0 = \min_{l \in S} \frac{\left\| l^T P^{-1} B \right\|}{\langle l^T P^{-1} A, l \rangle}, \quad \lambda_{00} = \min_{l \in S} \frac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}},$$

то цилиндрическое множество W^*, задаваемое соотношением (3.2)*, является слабо инвариантным в задаче управления с динамикой* (3.1).

Доказательство. Выберем и зафиксируем эллипсоид $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$, удовлетворяющий условиям теоремы. Приняв во внимание его звездность (относительно нуля), исследуем в задаче (3.7) целевую функцию $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ на лучах, исходящих из начала координат. Выберем произвольно вектор $l \in S$ и рассмотрим сужение γ_L функции $\gamma(x) = \alpha(x) + \beta(x)$ на луч $L = L(\lambda) = \{\lambda l \in \mathbb{R}^m : \lambda \geqslant 0, l \in S\}$. Поскольку

$$\gamma_l(\lambda) = \left\| (\lambda l)^T P^{-1} B \right\| - \left\langle (\lambda l)^T P^{-1} A, (\lambda l) \right\rangle = \lambda \left\| l^T P^{-1} B \right\| - \lambda^2 \left\langle l^T P^{-1} A, l \right\rangle,$$

то γ_L — вогнутая функция, ибо она представима в виде разности линейной и выпуклой функций. Более того, она является квадратичной с отрицательным коэффициентом при старшем члене, имеет два действительных корня, $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = \dfrac{\left\| l^T P^{-1} B \right\|}{\left\langle l^T P^{-1} A, l \right\rangle}$. Если $\lambda_1 = 0$, то $x_1 = \lambda_1 l = 0$ и $\gamma_L(x_1) = \gamma_L(\lambda_1 l) = 0$. Стало быть, функция γ_L строго положительна справа от $\lambda_1 = 0$ и остается неотрицательной на отрезке $[\lambda_1, \lambda_2] = \left[0, \left\| l^T P^{-1} B \right\| \left(\left\langle l^T P^{-1} A, l \right\rangle \right)^{-1} \right]$. Принадлежность точки $x_2 = \lambda_2 l$ эллипсоиду определяется его параметрами.

Далее учтем ограничения оптимизационной задачи (3.7). Поскольку ее допустимым множеством является эллипсоид $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m : x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$, то вдоль луча $L(\lambda)$ выполняется неравенство $0 \leqslant (\lambda l)^T P^{-1} (\lambda l) \leqslant 1$. Отсюда получаем ограничения на изменение параметра λ:

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}} \triangleq \lambda_3.$$

В таком случае $\gamma_L = \gamma_l(\lambda)$ остается неотрицательной функцией на отрезке $[0, \min\{\lambda_2, \lambda_3\}]$.

Определим величины

$$\lambda_0 = \inf_{l \in S} \frac{\left\| l^T P^{-1} B \right\|}{\langle l^T P^{-1} A, l \rangle}, \quad \lambda_{00} = \inf_{l \in S} \frac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}}.$$

В рассматриваемом случае матрицы P^{-1} и $P^{-1} A$ положительно определены, стало быть, $\left\langle l^T P^{-1} A, l \right\rangle > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}} > 0$ для всех $l \in S$. Дроби $\lambda_0(l) = \dfrac{\left\| l^T P^{-1} B \right\|}{\left\langle l^T P^{-1} A, l \right\rangle}$ и $\lambda_{00}(l) = \dfrac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}}$

непрерывны, положительны и в силу компактности сферы S нижние грани их значений на сфере достигаются. Тогда константа $\lambda_{\min} = \min\{\lambda_0, \lambda_{00}\}$ определяет максимальный допустимый радиус полуоси эллипсоида, при котором задача (3.7) имеет неотрицательное решение. Вместе с этим выполняется условие (3.5), а за ним и условие (3.4). Стало быть, W^* — слабо инвариантное множество относительно управляемой системы (3.1).

Теорема доказана.

Покажем, что множество эллипсоидов $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^m \colon x^T P^{-1} x \leqslant 1\}$, для которых выполняется условие (3.8), не является пустым.

Примем $A = B \equiv E$, где E — единичная матрица размерности $m \times m$. Полагая, что матрица P^{-1} положительно определена, найдем

$$\lambda_0 = \min_{l \in S} \frac{\left\|l^T P^{-1} B\right\|}{\langle l^T P^{-1} A, l\rangle} = \min_{l \in S} \frac{\left\|l^T P^{-1}\right\|}{\langle l^T P^{-1}, l\rangle}$$

$$= \min_{l \in S} \frac{\left\|l^T P^{-1}\right\|}{\|l^T P^{-1}\| \, \|l\| \cos \widehat{l^T P^{-1}, l}} = \min_{l \in S} \frac{1}{\cos \widehat{l^T P^{-1}, l}} = \max_{l \in S} \cos \widehat{l^T P^{-1}, l} = 1.$$

Здесь $\cos \widehat{l^T P^{-1}, l}$ — косинус угла между векторами $l^T P^{-1}, l$. Поскольку матрица P^{-1} положительно определена, то существуют собственный вектор l^* и собственное значение $\mu^* > 0$ линейного оператора, задаваемого матрицей P^{-1}, такие, что $P^{-1} l^* = \mu^* l^*$. Откуда $\cos \widehat{l^{*T} P^{-1}, l^*} = \cos \widehat{l^{*T}, l^*} = 1$.

Аналогично рассуждая, получаем $\lambda_{00} = \min\limits_{l \in S} \dfrac{1}{\sqrt{l^T P^{-1} l}} = 1$.

В итоге имеем $\lambda_{\min} = \min\{\lambda_0, \lambda_{00}\} = \min\{1, 1\} = 1$. Полученное строгое неравенство означает, что множество эллипсоидов, о которых идет речь в теореме, не пусто. В качестве конкретного примера здесь можно предъявить эллипсоид Ω, матрица которого $P^{-1} = E$. Эллипсоид Ω порождает цилиндрическое множество (3.2), которое слабо инвариантно относительно линейной управляемой системы (3.1), определяемой матрицами $A = B \equiv E$.

В заключение отметим, что в работе получен локальный критерий слабой инвариантности относительно конфликтно управляемой динамической системы цилиндрического множества с гладкой границей. Критерий имеет форму неравенства (2.3), связывающего гамильтониан нелинейной системы, и предоставляет широкие возможности для формирования достаточных условий стабильности различных подклассов цилиндрических множеств. В качестве примера приведены такие условия относительно линейной управляемой системы для цилиндрических множеств с эллипсоидальными сечениями. Естественным развитием предложенного подхода к изучению множеств будет выявление достаточных условий слабой инвариантности относительно линейной (а затем и нелинейной) конфликтно управляемой системы для цилиндрических множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** О структуре дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190, № 3. С. 523–526.
4. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Аппроксимация в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, вып. 2. С. 197–204.
5. **Красовский Н.Н.** К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003. 336 с.

7. **Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Аппроксимационные операторы и конечно-разностные схемы для построения обобщенных решений уравнений Гамильтона — Якоби // Изв. РАН Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 173–185.
8. **Guseinov H.G., Subbotin A.I., Ushakov V.N.** Derivatives for multivalued mappings with applications to game–theoretical problems of control // Problem Control Inform. Theory. 1985. Vol 14, no. 6. P. 405–419.
9. **Roxin E.** A uniqueness theorem for differential inclusions // Diff. Equ. 1965. Vol. 1, no. 2. P. 115–150.
10. **Aubin J.-P., Cellina A.** Differential inclusions. Set valued maps and viability theory. Berlin, 1984. 342 p.
11. **Нгуен Чан.** Инвариантные и устойчивые семейства множеств относительно дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 8. С. 1357–1366.
12. **Куржанский А.Б., Филиппова Т.Ф.** Дифференциальные включения с фазовыми ограничениями. Метод возмущений // Тр. МИАН: Оптимальное управление и дифференц. уравнения. 1995. Т. 211. С. 304–315.
13. **Frankowska H., Plaskacz S., Rzezuchowski T**. Théorèmes de viabilité mesurables et l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman // C. r. Acad. sei. Paris. Ser. 1. 1992. Vol. 315. P. 131–134.
14. **Kurzhanski A., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Basel: Birkhäuser, 1997. 321 p.
15. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.
16. **Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С.** Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.
17. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
18. **Ушаков В.Н., Латушкин Я.А.** Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления// Тр. Ин-та математики и механики. 2006. Т. 12, №2. С. 178–194.
19. **Ушаков В.Н., Успенский А.А.** К свойству стабильности в дифференциальных играх // Докл. АН. 2012. Vol. 443, № 5. С. 549–554.
20. **Стрекаловский А.С.** Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.
21. **Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.** Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

Успенский Александр Александрович
канд. физ.-мат. наук
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Поступила 14.11.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987. 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. Game problems of dynamics. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Tekhn. Kibernet.*, 1969, no. 5, pp. 3–12 (in Russian).
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. On structure of differential games *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1970, vol. 190, no. 3, pp. 523–526 (in Russian).
4. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. Approximation in a differential game. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1973, vol. 37, iss. 2, pp. 197–204 (in Russian).
5. Krasovskii N.N. On a problem of unification of differential games. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* 1976, vol. 226, no. 6, pp. 1260–1263 (in Russian).
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order partial differential equations: The dynamical optimization perspective.* Boston, Birkhäuser, 1995, Ser. System & Control: Foundations & Applications, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka. Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii*, Moscow, Izhevsk, Institut Komp'yuternykh Issledovanii Publ., 2003, 336 p.
7. Taras'ev A.M., Uspenskii A.A., and Ushakov V.N. Approximation schemas and finite-difference operators for constructing generalized solutions of Hamilton–Jacobi equations. *J. Comput. Systems Sci. Internat.* 1995, vol. 33, no. 6, pp. 127–139.

8. Guseinov H.G., Subbotin A.I., and Ushakov V.N. Derivatives for multivalued mappings with applications to game–theoretical problems of control. *Problems Control Inform. Theory*, 1985, vol. 14, no. 3, pp. 155–167.
9. Roxin E. A uniqueness theorem for differential inclusions. *J. Differential Equations*, 1965, vol. 1, no. 2, pp. 115–150.
10. Aubin J.-P., Cellina A. *Differential inclusions. Set valued maps and viability theory.* Berlin, 1984, 342 p.
11. T. Nguyẽn. Invariant and stable families of sets with respect to differential inclusions. *Differ. Uravn.*, 1983, vol. 19, no. 8, pp. 1357–1366 (in Russian).
12. Kurzhanskii A.B., Filippova T.F. Differential inclusions with phase constraints. The theory of perturbations. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1995, vol. 211, pp. 275–284.
13. Frankowska H., Plaskacz S., Rzezuchowski T. Théorèmes de viabilité mesurables et l'équation d'Hamilton–Jacobi–Bellman. *C. r. Acad. sei. Paris., Ser. 1*, 1992, vol. 315, pp. 131–134.
14. Kurzhanski A., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control.* Basel: Birkhäuser, 1997, Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, 321 p.
15. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* [Estimation of phase state of dynamic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 320 p.
16. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Shcherbakov P.S. *Upravlenie lineinymi sistemami pri vneshnikh vozmushcheniyakh: Tekhnika lineinykh matrichnykh neravenstv*[Control of linear systems subjected to exogenous disturbances: the linear matrix inequality technique]. Moscow: LENAND Publ., 2014, 560 p.
17. Ushakov V.N. On the problem of stable bridges construction in the differential game of pursuit-evasion. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1980, no. 4, pp. 29–36 (in Russian).
18. Ushakov V.N., Latushkin Ya.A. The stability defect of sets in game control problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 255, suppl. 2, pp. S198–S215. doi: 10.1134/S0081543806060162 .
19. Ushakov V.N., Uspenskii A.A. On the stability property in positional differential games. *Dokl. Math.*, 2012, vol. 85, no. 2. pp. 268–273. doi: 10.1134/S1064562412020329 .
20. Strekalovskii A.S. Элементы невыпуклой оптимизации. *Elementy nevypukloi optimizatsii* [Elements of non-convex optimization]. Novosibirsk: Nauka Publ., 2003, 356 p.
21. Dem'yanov V.F., Vasil'ev L.V. *Nedifferentsiruemaya optimizatsiya* [Nondifferentiable optimization]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 384 p.

A. A. Uspenskii. Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: uspen@imm.uran.ru

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 519.857

ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ С ПЛАТОЙ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МОДУЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

В. И. Ухоботов

Рассматривается линейная задача управления в $\mathbb{R}^m$ при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. Управляемый процесс происходит на заданном промежутке времени $[t_0, p]$. Возможные значения помехи принадлежат компакту. Управление ищется в виде произведения скалярной функции $\phi(t) \in [\delta, \alpha]$ на векторную функцию $\xi(t, x) \in M$, $x \in \mathbb{R}^m$. Отрезок $[\delta, \alpha]$ и выпуклый симметричный компакт M заданы. Такое определение управления возникает в задачах управления механическими системами переменного состава. Возможен случай, когда закон изменения реактивной массы задается функцией времени t, а управлять можно направлением относительной скорости ее отделения. Терминальная часть платы зависит от модуля линейной функции от вектора $x(p)$. Задана функция $g(t, \phi) \geq 0$ при $t \in [t_0, p]$, $\phi \in [\delta, \alpha]$. Интегральная составляющая платы является интегралом на отрезке $[t_0, p]$ от функции $g(t, \phi(t))$. Задача управления рассматривается в рамках теории оптимизации гарантированного результата. Доказана теорема существования оптимального управления с достаточно широкими ограничениями на рассматриваемый класс задач. Найдены достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным. Рассмотрен пример, который иллюстрирует найденные достаточные условия.

Ключевые слова: управление, помеха, плата, дифференциальная игра.

V. I. Ukhobotov. A linear control problem under interference with a payoff depending on the modulus of a linear function.

We consider a linear control problem in $\mathbb{R}^m$ under the action of an uncontrolled interference. The control process occurs on a given time interval $[t_0, p]$. The possible values of the interference belong to a compact set. The control is sought as the product of a scalar function $\phi(t) \in [\delta, \alpha]$ and a vector function $\xi(t, x) \in M$, $x \in \mathbb{R}^m$. The interval $[\delta, \alpha]$ and the convex symmetric compact set M are given. This definition of the control arises in control problems for mechanical systems of variable composition. For example, the law of variation of a reaction mass is defined as a function of time t, and the control affects the direction of relative velocity in which the mass is separated. The terminal part of the payoff depends on the modulus of a linear function of the vector $x(p)$. The integral part of the payoff is the integral over the interval $[t_0, p]$ of a given function $g(t, \phi(t))$, where $g(t, \phi) \geq 0$ for $t \in [t_0, p]$ and $\phi \in [\delta, \alpha]$. The control problem is considered within the theory of guaranteed result optimization. An optimal control existence theorem is proved under rather wide constraints on the class of problems. Sufficient conditions are found under which an admissible control is optimal. An example that illustrates the sufficient conditions is considered.

Keywords: control, interference, payoff, differential game.

MSC: 91A23, 91A24, 91A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-251-261

Введение

Линейную задачу управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи и с фиксированным моментом окончания с помощью линейной замены переменных [1] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит только сумма управления и помехи, значения которых принадлежат заданным множествам, зависящим от времени. В случае, если в линейной задаче управления с помехой платой является значение в заданный момент времени модуля линейной функции, то линейная замена переменных приводит к однотипной задаче, когда множества значений управления и помехи являются отрезками, зависящими от времени. В более общем случае такие задачи характеризуются тем, что вектограммами управления и помехи являются шары, радиусы которых зависят от времени. Аналогичную динамику имеют после замены и известные дифференциальные игры “изотропные ракеты” [2], контрольный пример Л.С. Понтрягина [3]. Для таких дифференциальных игр в случае, когда терминальное множество является шаром заданного радиуса, в [3] построен альтернированный интеграл. В [4] построены оптимальные позиционные стратегии игроков, в работе [5] построен альтернированный интеграл для однотипных игр с произвольным выпуклым замкнутым терминальным множеством и построены оптимальные позиционные управления игроков, в [6] первый игрок, выводя фазовую точку на круг заданного радиуса, минимизирует интегральную плату, которая задается выпуклой функцией от нормы его управления.

В настоящей статье рассматривается однотипная задача управления с помехой, в которой управление строится из условия минимизации платы, являющейся суммой как терминальной, так и интегральной составляющих. Доказана теорема существования оптимального управления с достаточно широкими ограничениями на рассматриваемый класс задач. Найдены достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным. Рассмотрен пример, иллюстрирующий найденные достаточные условия.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемый процесс

$$\dot{x} = A(t)x + \phi B(t)\xi + \eta, \quad x(t_0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t \leq p. \tag{1.1}$$

Здесь p — заданный момент окончания процесса управления, а t_0 — начальный момент времени; $\phi \in [\delta, \alpha]$ и $\xi \in M$ — управления, причем числа $0 \leq \delta < \alpha$, а множество M является связным симметричным относительно начала координат компактом в $\mathbb{R}^s$; помеха η принадлежит связному компакту $Q \subset \mathbb{R}^m$; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные при $t_0 \leq t \leq p$ матрицы соответствующих размерностей.

Допустимым управлением являются измеримая функция $\phi\colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$ и произвольная функция $\xi\colon [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to M$. Помеха реализуется в виде произвольной функции $\eta\colon [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to Q$.

З а м е ч а н и е. Такое определение допустимого управления продиктовано следующим соображением. В задачах управления механическими системами переменного состава, движение которых описывается уравнением Мещерского [7, с. 25], возможен случай, когда закон изменения реактивной массы нужно задавать программным образом, а управлять можно только направлением относительной скорости ее отделения [6]. В этом случае приходим к сформулированному выше допустимому управлению.

Следуя [1], движения системы (1.1), порожденные допустимыми управлениями и помехой, определим с помощью ломаных.

Возьмем разбиение ω отрезка $[t_0, p]$ с диаметром $d(\omega)$:

$$\omega\colon t_0 < t_1 < \ldots < t_q < t_{q+1} = p, \quad d(\omega) = \max_{1 \leq i \leq q}(t_{i+1} - t_i).$$

Положим $x_\omega(t_0) = x_0$ и при $t_i \leq t \leq t_{i+1}$, $i = \overline{0, q}$,

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + \phi(t)B(t)\xi(t_i, x_\omega(t_i)) + \eta(t_i, x_\omega(t_i)). \tag{1.2}$$

Можно показать, что семейство ломаных (1.2), определенных на отрезке $[t_0, p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. По теореме Арцела [8, с. 104] из любой последовательности ломаных (1.2) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$. Под движением, реализовавшимся при допустимых $\phi(t)$, $\xi(t, x)$ и $\eta(t, x)$ из начального состояния $x(t_0) = x_0$, будем понимать любой равномерный предел последовательности ломаных (1.2), у которых диаметр разбиения $d(\omega)$ стремится к нулю.

Показателем качества управления является величина

$$G(|\langle \psi_0, x(p) \rangle - C|) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr. \tag{1.3}$$

Здесь $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$ — заданный вектор; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$; C — заданное число; $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ и $g\colon [t_0,p]\times[\delta,\alpha] \to \mathbb{R}$ — заданные функции.

Предположение 1. *Функция $g(t,\phi)$ измерима по $t \in [t_0,p]$ при каждом $\phi \in [\delta,\alpha]$ и непрерывна по ϕ при каждом $t \in [t_0,p]$; $0 \le g(t,\phi) \le D(t)$ при каждых $t \in [t_0,p]$ и $\phi \in [\delta,\alpha]$, где функция $D(t)$ суммируема на отрезке $[t_0,p]$.*

Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата [1] показателя качества (1.3).

2. Переход к одномерной однотипной задаче

Следуя [1, с. 160], перейдем к новой управляемой системе, в уравнениях движения которой отсутствует фазовый вектор. Рассмотрим при $t_0 \le t \le p$ решение $\psi(t)$ задачи Коши

$$\dot\psi = -A^*(t)\psi, \quad \psi(p) = \psi_0. \tag{2.1}$$

Здесь $A^*(t)$ — транспонированная матрица. Положим

$$b_-(t) = \min_{\eta\in Q}\langle\psi(t),\eta\rangle, \quad b_+(t) = \max_{\eta\in Q}\langle\psi(t),\eta\rangle. \tag{2.2}$$

Тогда из связности компакта Q вытекает [9, теорема 4], что

$$\langle\psi(t),\eta\rangle = \frac{1}{2}(b_+(t)+b_-(t)) + b(t)v, \quad |v| \le 1, \quad b(t) = \frac{1}{2}(b_+(t)-b_-(t)) \ge 0. \tag{2.3}$$

Обозначим

$$a(t) = \max_{\xi\in M}\langle\psi(t),B(t)\xi\rangle. \tag{2.4}$$

Из связности и из симметрии компакта M следует, что $a(t) \ge 0$ и

$$\langle\psi(t),B(t)\xi\rangle = -a(t)u, \quad |u| \le 1. \tag{2.5}$$

Отметим, что функции (2.2) и (2.4) являются непрерывными [10, лемма II. 3.5.]. Следовательно, непрерывной является и функция $b(t)$ (2.3).

Перейдем к новой переменной

$$z = \langle\psi(t),x\rangle + \frac{1}{2}\int_t^p (b_+(r)+b_-(r))dr - C. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.1) и (2.6) выводим, что $z(p) = \langle\psi_0,x(p)\rangle - C$, а ломаная $z_\omega(t)$, отвечающая ломаной (1.2), определяется равенствами

$$\dot z_\omega(t) = -\phi(t)a(t)u_i + b(t)v_i, \quad |u_i| \le 1, \quad |v_i| \le 1.$$

Таким образом, получили одномерную однотипную задачу управления

$$\dot z = -\phi a(t)u + b(t)v, \quad z(t_0) = z_0; \quad \phi \in [\delta,\alpha], \quad |u| \le 1, \quad |v| \le 1, \tag{2.7}$$

с критерием качества

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^p g(r,\phi(r))dr \to \min_u \max_v. \tag{2.8}$$

В этой задаче допустимым управлением являются измеримая функция $\phi\colon [t_0,p] \to [\delta,\alpha]$ и произвольная функция $u(t,z)$ с $|u(t,z)| \le 1$. Допустимой помехой является произвольная функция $v(t,z)$ с $|v(t,z)| \le 1$. Движение $z(t)$ определяется как равномерный предел последовательности ломаных

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int\limits_{t_i}^{t} \phi(r)a(r)dr\ u(t_i, z_\omega(t_i)) + \int\limits_{t_i}^{t} b(r)dr\ v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad t_i \le t \le t_{i+1},$$

с диаметром разбиения $d(\omega) \to 0$.

О п р е д е л е н и е. Решением задачи (2.7), (2.8) называется допустимое управление $\phi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и число V_0 такие, что

1) для любой допустимой помехи $v(t,z)$ и любого движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, порожденного $\phi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi_0(r))dr \le V_0;$$

2) для любого допустимого управления $\phi(t)$, $u(t,z)$ и любого числа $V < V_0$ найдется допустимая помеха $v(t,z)$ такая, что для любого движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, порожденного $\phi(t)$, $u(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr > V.$$

3. Условия оптимальности в однотипной задаче

Рассмотрим задачу (2.7), (2.8) в общем случае, когда z, u, v принадлежат пространству $\mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем измеримую функцию $\phi\colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$, число $\varepsilon \ge 0$ и рассмотрим дифференциальную игру

$$\dot z = -\phi(t)a(t)u + b(t)v, \quad |u| \le 1, \quad |v| \le 1 \tag{3.1}$$

с условием окончания

$$|z(p)| \le \varepsilon. \tag{3.2}$$

Для полноты изложения считаем, что функции $a(t) \ge 0$ и $b(t) \ge 0$ суммируемы на отрезке $[t_0, p]$.

Для такой однотипной игры Л. С. Понтрягин [3] построил альтернированный интеграл. Из его вида следует, что начальное положение $z(t_0)$ принадлежит значению альтернированного интеграла в момент времени t_0 тогда и только тогда, когда

$$f_1(\phi(\cdot)) = |z(t_0)| + \int\limits_{t_0}^{p} (b(r) - \phi(r)a(r))dr \le \varepsilon, \tag{3.3}$$

$$f_2(\phi(\cdot)) = \max_{t_0 \le t \le p} \int\limits_{t}^{p} (b(r) - \phi(r)a(r))dr \le \varepsilon. \tag{3.4}$$

Обозначим

$$f(\phi(\cdot)) = \max(f_1(\phi(\cdot)); f_2(\phi(\cdot))), \tag{3.5}$$

$$w(z) = \frac{z}{|z|} \text{ при } |z| > 0 \text{ и } w(0) \text{ — любое с ограничением } |w(0)| = 1. \tag{3.6}$$

Теорема 1 [4, теоремы 8.1 и 8.2]. *Для начального состояния* $t_0 < p$, $z(t_0) \in \mathbb{R}^n$ *в игре* (3.1) *управление* $u = w(z)$ *обеспечивает выполнение неравенства* $|z(p)| \le f(\phi(\cdot))$ *для любой функции* $|v(t,z)| \le 1$ *и любого реализовавшегося движения* $z(t)$. *Управление* $v(t,z) = w(z)$ *обеспечивает выполнение неравенства* $|z(p)| \ge f(\phi(\cdot))$ *для любой функции* $|u(t,z)| \le 1$ *и любого реализовавшегося движения* $z(t)$.

Из этой теоремы, используя формулу (3.5), получим, что если выполнены неравенства (3.3) и (3.4), то управление $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства (3.2) для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и любого реализовавшегося движения $z(t)$. Если же одно из неравенств (3.3) и (3.4) не выполнено, то управление $v = w(z)$ обеспечивает выполнение противоположного неравенства $|z(p)| > \varepsilon$ для любой функции $|u(t,z)| \le 1$ и любого реализовавшегося движения $z(t)$.

Далее будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 2. *Функция* $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *является непрерывной, строго возрастает и* $G(\varepsilon) \to +\infty$ *при* $\varepsilon \to +\infty$.

Рассмотрим задачу

$$f_0(\varepsilon, \phi(\cdot)) = G(\varepsilon) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr \to \min, \tag{3.7}$$

$$f_1(\phi(\cdot)) \le \varepsilon, \quad f_2(\phi(\cdot)) \le \varepsilon, \quad \varepsilon \ge 0, \quad \phi\colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]. \tag{3.8}$$

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon_0 \ge 0$ *и* $\phi_0(t)$ *— решение задачи* (3.7), (3.8). *Тогда решением задачи* (2.7), (2.8) *являются функции* $\phi_0(t)$, $u = w(z)$ *и число* $V_0 = f_0(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot))$.

Доказательство. При ε_0 и $\phi_0(t)$ выполнены неравенства (3.3) и (3.4). Поэтому управление $\phi_0(t)$ и $u = w(z)$ обеспечивает выполнение неравенства $|z(p)| \le \varepsilon_0$ для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$. Из условия возрастания функции G получим, что

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi_0(r))dr \le f_0(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot)) = V_0.$$

Допустим, что существуют число $V < V_0$ и допустимое управление $\phi(t)$ и $u(t,z)$, обеспечивающее выполнение неравенства

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr \le V$$

для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и любого реализовавшегося движения. Тогда это допустимое управление обеспечивает неравенство

$$|z(p)| \le G^{-1}\Bigl(V - \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr\Bigr) = \varepsilon \tag{3.9}$$

для любой функции $|v(t,z)| \le 1$ и любого реализовавшегося движения. Значит эти $\varepsilon \ge 0$ и $\phi(t)$ удовлетворяют неравенствам (3.3) и (3.4) и, следовательно, ограничениям в задаче (3.7), (3.8). Поэтому

$$V_0 \le G(\varepsilon) + \int_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr.$$

Отсюда и из правой части (3.9) получим противоречие $V_0 \le V$.

З а м е ч а н и е. Поскольку функция (3.6) удовлетворяет условию $|w(z)| = 1$, то теорема 2 остается справедливой и для случая, когда ограничения на управление u в задаче (2.7), (2.8) имеют вид равенства $|u| = 1$.

Теорема 3. *Пусть дополнительно к предположениям 1 и 2 функция $g(t,\phi)$ при каждом $t_0 \le t \le p$ является выпуклой по ϕ, а функция $G(\varepsilon)$ ограничена снизу. Тогда решение в задаче* (3.7), (3.8) *существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим вначале, что связи (3.8) являются совместными. Из ограниченности снизу функции G и из условия $g(t,\phi) \ge 0$ следует, что значения функционала $f_0(\varepsilon,\phi(\cdot))$ ограничены снизу. Обозначим через V_0 значение его нижней грани при ограничениях (3.8). Тогда существуют последовательности $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\varepsilon_k \ge 0$ и $\{\phi_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющие ограничениям (3.8), такие что $f_0(\varepsilon_k,\phi_k(\cdot)) \to V_0$. Из формулы (3.7) выводим, что $G(\varepsilon_k) \le f_0(\varepsilon_k,\phi_k(\cdot))$. Отсюда, используя условие $G(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$, получим, что последовательность чисел $\varepsilon_k \ge 0$ ограничена сверху. Считаем, что $\varepsilon_k \to \varepsilon_0$ (иначе перейдем к сходящейся подпоследовательности).

Рассмотрим при $t_0 \le t \le p$ последовательности функций

$$l_k(t) = \int\limits_t^p (b(r) - \phi_k(r)a(r))dr, \quad g_k(t) = \int\limits_t^p g(r,\phi_k(r))dr, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.10}$$

При любых $t_0 \le t < \tau \le p$ и $k \ge 1$ выполнены неравенства

$$|l_k(\tau) - l_k(t)| \le \int\limits_t^\tau (b(r) + a(r)\alpha)dr, \quad |g_k(\tau) - g_k(t)| \le \int\limits_t^\tau D(r)dr, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Из этих неравенств и из теоремы об абсолютной непрерывности интеграла Лебега [8, с. 282] следует, что каждая из последовательностей функций (3.10) на отрезке $[t_0,p]$ удовлетворяет условию равностепенной непрерывности и равномерной ограниченности. Применяя теорему Арцела, можно считать, что $l_k(t) \to l_0(t)$, $g_k(t) \to g_0(t)$ равномерно на отрезке $[t_0,p]$ (иначе перейдем к подпоследовательности). Предельные функции удовлетворяют неравенствам (3.11). Поэтому они являются абсолютно непрерывными на отрезке $[t_0,p]$.

Далее, числа ε_k и функции $\phi_k(t)$ удовлетворяют связям (3.8). Поэтому, используя обозначения (3.3), (3.4) и (3.10), имеем, что

$$|z(t_0)| + l_k(t_0) \le \varepsilon_k, \quad \max_{t_0 \le t \le p} l_k(t) \le \varepsilon_k. \tag{3.12}$$

Переходя к пределу в этих неравенствах, получим, что они выполнены для ε_0 и $l_0(t)$.

Покажем, что производные $\dot{l}_0(t)$ и $\dot{g}_0(t)$ предельных функций почти всюду на отрезке $[t_0,p]$ удовлетворяют включению

$$(\dot{l}_0(t), \dot{g}_0(t)) \in \operatorname{co} Q(t), \tag{3.13}$$

где

$$Q(t) = \left\{(q_1,q_2) \in \mathbb{R}^2 \colon q_1 = \phi a(t) - b(t),\ q_2 = -g(t,\phi),\ \phi \in [\delta,\alpha]\right\}.$$

Из непрерывности по $\phi \in [\delta,\alpha]$ функции $g(t,\phi)$ следует, что множество $Q(t)$ является замкнутым. Далее, множество $Q(t)$ содержится в шаре радиуса $a(t)\alpha + b(t) + D(t)$. Из измеримости по $t \in [t_0,p]$ функции $g(t,\phi)$ и функций $a(t)$ и $b(t)$ следует, что многозначная функция $Q(t)$ измерима по $t \in [t_0,p]$ [11]. Следовательно, для любых $t_0 \le t < \tau \le p$ интеграл $\int_t^\tau Q(r)dr$ является выпуклым компактом [11].

Из формул (3.10) следует, что при $t_0 \le t < \tau \le p$ выполнено включение

$$(l_k(\tau) - l_k(t), g_k(\tau) - g_k(t)) \in \int_t^\tau Q(r)dr.$$

Переходя в этом включении к пределу, получим, что ему удовлетворяют и предельные функции. Запишем данное включение в виде

$$(0,0) \in \int_t^\tau \Big((-\dot{l}_0(r), -\dot{g}_0(r)) + Q(r)\Big)dr.$$

Зафиксируем вектор $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда из предыдущего включения получим, что

$$\int_t^\tau \gamma(r)dr \ge 0 \quad \text{при} \quad t_0 \le t < \tau \le p, \quad \gamma(r) = -\dot{l}_0(r)y_1 - \dot{g}_0(r)y_2 + \beta(y_1, y_2; Q(r)).$$

Здесь

$$\beta(y_1, y_2; Q(r)) = \max_{(q_1,q_2)} (y_1 q_1 + y_2 q_2), \quad (q_1, q_2) \in Q(r)$$

является опорной функцией множества $Q(r)$. Функция $\gamma(r)$ является суммируемой на отрезке $[t_0, p]$. Поэтому для почти всех $t \in [t_0, p]$ выполнено

$$\gamma(t) = \lim_{\tau \to t+0} \frac{1}{\tau - t} \int_t^\tau \gamma(r)dr \ge 0.$$

Итак, для каждого вектора $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ существует множество полной меры $I \subset [t_0, p]$ такое, что

$$\dot{l}_0(t)y_1 + \dot{g}_0(t)y_2 \le \beta(y_1, y_2; Q(t)), \quad t \in I. \tag{3.14}$$

Множество векторов $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ с рациональными координатами образует счетное множество. Занумеруем их $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$. Каждому из них соответствует множество полной меры $I_i \in [t_0, p]$ такое, что выполнено (3.14). Их пересечение I_0 является множеством полной меры. Для каждого $t \in I_0$ и для каждого вектора $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$ справедливо неравенство (3.14). Из непрерывности опорной функции по переменным y_1 и y_2 следует, что неравенство (3.14) будет выполняться при $t \in I_0$ для любого вектора $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Отсюда получим, что включение (3.13) выполняется для всех $t \in I_0$.

Из включения (3.13), применяя теорему Каратеодори [10, теорема I. 1.1] и лемму об измеримом выборе [12], подобно тому как это сделано в [6], получим, что существует измеримая функция $\phi_0 \colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$ такая, что

$$\dot{l}_0(t) = \phi_0(t)a(t) - b(t), \quad \dot{g}_0(t) \le -g(t, \phi_0(t)). \tag{3.15}$$

Отметим, что при доказательстве второго неравенства в (3.15) используется выпуклость по ϕ функции $g(t, \phi)$.

Поскольку $l_k(p) = 0$, то $l_0(p) = 0$. Поэтому

$$l_0(t) = \int_t^p (b(r) - \phi_0(r)a(r))dr.$$

Далее, ε_0 и $l_0(t)$ удовлетворяют неравенствам (3.12). Поэтому ε_0 и $\phi_0(t)$ удовлетворяют связям в задаче (3.7), (3.8).

Из второй формулы (3.10) следует, что $g_k(p) = 0$ и $g_k(t_0) \to V_0 - G(\varepsilon_0)$. Поэтому $g_0(p) = 0$ и $g_0(t_0) = V_0 - G(\varepsilon_0)$. Отсюда, интегрируя второе неравенство в (3.15), получим, что

$$G(\varepsilon_0) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi_0(r))dr \le V_0.$$

Стало быть, ε_0 и $\phi_0(t)$ — решение задачи (3.7), (3.8).

З а м е ч а н и е. Если известно решение $\phi_0(t)$ в задаче (3.7) и (3.8), то, подставляя его в формулу (2.5) при $u = w(z)$, где z и $w(z)$ определяются формулами (2.6) и (3.6), найдем решение $\xi(t, x)$ в исходной задаче (1.1).

Приведем достаточные условия, при выполнении которых число $\varepsilon_0 \ge 0$ и измеримая функция $\phi_0 \colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$ являются решением задачи (3.7), (3.8).

Теорема 4. *Пусть число $\varepsilon_0 \ge 0$ и измеримая функция $\phi_0 \colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$ удовлетворяют неравенствам* (3.8). *Пусть существуют число $\lambda \ge 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0, p]$ функция $\theta(t)$ такие, что $\theta(t_0) = 0$ и*

$$\int\limits_{t_0}^{p} \theta(r)(b(r) - \phi_0(r)a(r))dr = \theta(p)\varepsilon_0, \tag{3.16}$$

$$\lambda\left(\int\limits_{t_0}^{p} (b(r) - \phi_0(r)a(r))dr + |z(t_0)| - \varepsilon_0\right) = 0, \tag{3.17}$$

$$G(\varepsilon_0) - (\lambda + \theta(p))\varepsilon_0 \le G(\varepsilon) - (\lambda + \theta(p))\varepsilon \text{ при любом } \varepsilon \ge 0, \tag{3.18}$$

$$g(r, \phi_0(r)) - (\theta(r) + \lambda)\phi_0(r)a(r) \le g(r, \phi) - (\theta(r) + \lambda)\phi a(r), \quad \phi \in [\delta, \alpha], \quad r \in [t_0, p]. \tag{3.19}$$

Тогда число $\varepsilon_0 \ge 0$ и функция $\phi_0(t)$ являются решением задачи (3.7), (3.8).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольное число $\varepsilon \ge 0$ и измеримую функцию $\phi \colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$ и запишем функцию Лагранжа

$$L(\varepsilon, \phi(\cdot)) = G(\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr + \int\limits_{t_0}^{p} \theta(r)(b(r) - \phi(r)a(r))dr - \theta(p)\varepsilon$$

$$+ \lambda\left(\int\limits_{t_0}^{p} (b(r) - \phi(r)a(r))dr + |z(t_0)| - \varepsilon\right)$$

$$= G(\varepsilon) - (\lambda + \theta(p))\varepsilon + \int\limits_{t_0}^{p} \Big(g(r, \phi(r)) - (\theta(r) + \lambda)\phi(r)a(r) + (\theta(r) + \lambda)b(r)\Big)dr + \lambda|z(t_0)|.$$

Из формул (3.16)–(3.19) видно, что

$$G(\varepsilon_0) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi_0(r))dr = L(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot)) \le L(\varepsilon, \phi(\cdot)) \tag{3.20}$$

для любого числа $\varepsilon \ge 0$ и любой измеримой функции $\phi \colon [t_0, p] \to [\delta, \alpha]$. Пусть ε и $\phi(t)$ удовлетворяют неравенствам (3.8). Тогда, используя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана — Стильтьеса [13, с. 134], получим, что

$$\int\limits_{t_0}^{p} \theta(r)(b(r) - \phi(r)a(r))dr - \theta(p)\varepsilon = \int\limits_{t_0}^{p} \left(\int\limits_{t}^{p} (b(r) - \phi(r)a(r))dr - \varepsilon\right)d\theta(r) \le 0.$$

Значит,

$$L(\varepsilon, \phi(\cdot)) \le G(\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{p} g(r, \phi(r))dr.$$

Отсюда и из (3.20) следует, что ε_0 и $\phi_0(t)$ являются решением задачи (3.7), (3.8).

4. Пример

Точка переменного состава, движение которой описывается уравнением Мещерского [7, с. 25]

$$\ddot{x} = \mu + \xi \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

преследует точку, движущуюся с ограниченной по величине скоростью $|\dot{y}| \le b$, $b > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$, $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$. Здесь вектор $\mu \in \mathbb{R}^n$ определяется постоянной внешней силой; величина $|\xi|$ относительной скорости отделяющихся частиц является постоянной; $m(t) = m_0 + m_1(t)$ — масса точки, причем m_0 — неизменяемая часть массы, $m_1(t)$ — реактивная масса. Считаем, что тяга ограничена числом $\gamma > 0$, т. е. $-|\xi|\dfrac{\dot{m}(t)}{m(t)} \le \gamma$.

Задан момент окончания $p > 0$. Перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = \frac{t}{p}, \quad z = \frac{1}{pb}\Big(y - x - (p-t)\dot{x} - \mu\frac{(p-t)^2}{2}\Big),$$

$$u = -\frac{\xi}{|\xi|}, \quad \phi = -\frac{p}{b}|\xi|\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}, \quad v = \frac{1}{b}\dot{y}, \quad \alpha = \frac{p}{b}\gamma.$$

Тогда

$$|y(p) - x(p)| = pb|z(1)|, \quad \int\limits_0^1 \phi(r)dr = \frac{|\xi|}{b}\ln\frac{m_0 + m_1(0)}{m_0},$$

$$\frac{dz}{d\tau} = -(1-\tau)\phi u + v, \quad |u| = 1, \quad 0 \le \phi \le \alpha, \quad |v| \le 1.$$

Управление ϕ и u строится исходя из минимизации гарантированного результата показателя качества

$$|z(1)| + \beta\int\limits_0^1 \phi(r)dr, \quad \beta \ge 0.$$

Этот показатель качества отражает тот факт, что минимизируются расстояние между точками в момент времени p и расход реактивной массы $m_1(0)$. Число β — весовой коэффициент. Управление v выступает в качестве помехи.

В рассматриваемом случае неравенства (3.3), (3.4) и условия оптимальности (3.16)–(3.19) принимают следующий вид:

$$\int\limits_0^1 (1 - \phi_0(r)(1-r))dr + |z(0)| - \varepsilon_0 \le 0, \tag{4.1}$$

$$\int\limits_\tau^1 (1 - \phi_0(r)(1-r))dr - \varepsilon_0 \le 0 \text{ при всех } 0 \le \tau \le 1, \tag{4.2}$$

$$\lambda\Big(\int\limits_0^1(1-\phi_0(r)(1-r))dr+|z(0)|-\varepsilon_0\Big)=0, \tag{4.3}$$

$$\int\limits_0^1\theta(r)(1-\phi_0(r)(1-r))dr=\theta(1)\varepsilon_0, \tag{4.4}$$

$$(1-\lambda-\theta(1))\varepsilon_0\le(1-\lambda-\theta(1))\varepsilon \ \text{ при любых } \ \varepsilon\ge 0, \tag{4.5}$$

$$\Big(\beta-(\lambda+\theta(r))(1-r)\Big)\phi_0(r)=\min_{0\le\phi\le\alpha}\Big(\Big(\beta-(\lambda+\theta(r))(1-r)\Big)\phi\Big). \tag{4.6}$$

Из неравенства (4.5) следует, что $\lambda=1-\theta(1)$. Поскольку $\lambda\ge 0$ и $\theta(1)\ge 0$, то $0\le\theta(1)\le 1$. Подставляя это значение λ в формулу (4.6), получим, что

$$\phi_0(r)=\begin{cases}\alpha, & \text{если } \dfrac{\beta}{1-r}<\theta(r)-\theta(1)+1,\\ \text{любое из } [0,\alpha], & \text{если } \dfrac{\beta}{1-r}=\theta(r)-\theta(1)+1,\\ 0, & \text{если } \dfrac{\beta}{1-r}>\theta(r)-\theta(1)+1.\end{cases} \tag{4.7}$$

Рассмотрим случай, когда $\beta\ge 1$. Возьмем $\theta(r)=0$ при всех $0\le r\le 1$. Тогда из (4.7) имеем, что $\phi_0(r)=0$ при всех $0\le r\le 1$. Из формулы (4.3) при $\lambda=1$ получим, что $\varepsilon_0=1/2+|z(0)|$. Условия (4.1), (4.2) и (4.4) выполнены. Этот случай означает, что минимизация расхода топлива более предпочтительна минимизации расстояния $|z(1)|$.

Рассмотрим еще случай, когда $0<\beta<1$, $0<\alpha<1$. Возьмем $\theta(r)=0$ при всех $0\le r\le 1$. Тогда из формулы (4.7) получим, что

$$\phi_0(r)=\alpha \ \text{ при } \ 0\le r<1-\beta \text{ и } \phi_0(r)=0 \ \text{ при } \ 1-\beta<r\le 1.$$

Для этой функции подынтегральное выражение в (4.3) больше нуля при любом $0\le r\le 1$. Поэтому из (4.3) при $\lambda=1$ найдем число $\varepsilon_0>0$. При этом числе ε_0 для $\tau=0$ неравенство (4.2) выполнено. Из положительности подынтегрального выражения следует, что оно выполнено при всех $0\le\tau\le 1$.

Таким образом, найденная оптимальная тяга $\phi_0(r)$ не зависит от начального состояния $|z(0)|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
3. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
4. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.
5. **Ухоботов В.И.** Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 196–204.
6. **Ухоботов В.И., Гущин Д.В.** Однотипные дифференциальные игры с выпуклой интегральной платой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 251–258.
7. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
8. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
9. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1981. Т. 1. 687 с.
10. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

11. **Hermes H.** The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t, x)$ // Advances Math. 1970. Vol. 4, no. 9. P. 149–169. doi: 10.1016/0001-8708(70)90020-4.
12. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. МГУ. 1959. Вып. 2. С. 25–32. (Математика, механика.)
13. **Рисс Ф., Секельфальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет
e-mail: ukh@csu.ru

Поступила 27.10.2016

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Isaacs R. *Differential games.* New York: John Wiley and Sons, 1965, 408 p. Translated under the title *Differentsial'nye igry*, Moscow, Mir Publ., 1974, 456 p.
3. Pontrjagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815.
4. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineynykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami: uchebnoe posobie* [Method of one-dimensional design in linear differential games with integral constraints: study guide]. Chelyabinsk: Chelyabinskiy Gos. Univer. Publ., 2005, 124 p.
5. Ukhobotov V.I. One type differential games with convex goal. *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 196–204 (in Russian).
6. Ukhobotov V.I., Gushchin D.V. Single–type differential games with convex integral. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S178–S185. doi: 10.1134/S0081543811090136.
7. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 475 p.
8. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis.* Mineola, New York: Dover Publ, 1999, vol. 1, 2, 288 p. Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza, Vypusk* 1*,* 2, Moscow: MGU Publ., 1954, 154 p.; 1960, 118 p.
9. Kudrjavcev, L.D. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course of mathematical analysis]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1981, vol. 1, 687 p.
10. Pshenichny B.N. *Convex analysis and extremal problems.* Moscow : Nauka Publ., 1980, 320 p.
11. Hermes H. The generalized differential equation $\dot{x} \in R(t, x)$. *Advances Math.*, 1970, vol. 4, no. 2, pp. 149–169. doi: 10.1016/0001-8708(70)90020-4.
12. Filippov A.F. On certain questions in the theory of optimal control. *SIAM J. Control Ser. A*, 1962, vol. 1, no. 1, pp. 76–84. doi: 10.1137/0301006.
13. Riesz F., Sz.-Nagy B. *Leçons d'analyse fonctionnelle.* Budapest: Akademiai Kiado, 1972. Translated under the title *Lektsii po funktsional'nomu analizu*, Moscow: Mir Publ., 1979, 287 p.

V. I. Ukhobotov, Dr. Phys.-Math. Sci., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ukh@csu.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ВНЕШНИЕ ОЦЕНКИ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ И КОМБИНИРОВАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ[1]

Т. Ф. Филиппова

Рассматривается задача оценивания трубок траекторий нелинейной управляемой динамической системы с неопределенностью по начальным данным. Предполагается, что динамическая система имеет специальную структуру, в которой нелинейные члены определяются квадратичными формами по фазовым координатам, а значения неопределенных начальных состояний и допустимых управлений стеснены эллипсоидальными ограничениями. Матрица линейных слагаемых в фазовых скоростях системы также точно не известна, но принадлежит известному компакту в соответствующем пространстве, т. е. динамика системы осложнена наличием билинейных составляющих в правых частях дифференциальных уравнений системы. В работе рассмотрен сложный случай, обобщающий ранее полученные автором результаты, когда предполагается одновременное наличие в динамике системы билинейных функций и квадратичных форм (без предположения об их положительной определенности), а также учитываются неопределенность по начальным данным и влияние управляющих воздействий, которые также могут трактоваться здесь как неопределенные аддитивные возмущения. Присутствие всех указанных факторов существенно усложняет исследование проблемы и требует адекватного анализа, что и составляет основную цель данного исследования. В работе приводятся алгоритмы оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой системы указанного типа, результаты иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: управляемая система, множество достижимости, оценивание состояний, неопределенность.

T. F. Filippova. External estimates for reachable sets of a control system with uncertainty and combined nonlinearity.

The problem of estimating the trajectory tubes of a nonlinear control dynamic system with uncertainty in the initial data is studied. It is assumed that the dynamic system has a special structure in which the nonlinear terms are defined by quadratic forms in the state coordinates and the values of uncertain initial states and admissible controls are subject to ellipsoidal constraints. The matrix of the linear terms in the velocities of the system is not known exactly; it belongs to a given compact set in the corresponding space. Thus, the dynamics of the system is complicated by the presence of bilinear components in the right-hand sides of the differential equations of the system. We consider a complex case and generalize the author's earlier results. More exactly, we assume the simultaneous presence in the dynamics of the system of bilinear functions and quadratic forms (without the assumption of their positive definiteness), and we also take into account the uncertainty in the initial data and the impact of the control actions, which may also be treated here as undefined additive disturbances. The presence of all these factors greatly complicates the study of the problem and requires an adequate analysis, which constitutes the main purpose of this study. The paper presents algorithms for estimating the reachable sets of a nonlinear control system of this type. The results are illustrated by examples.

Keywords: control system, reachable set, state estimation, uncertainty.

MSC: 34A60, 49J53, 93B03, 93C41, 93C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-262-274

Введение

В работе рассматриваются задачи оценивания множеств достижимости управляемой динамической системы, т. е. множеств состояний фазового пространства, куда фазовая точка может быть переведена из начального состояния (или множества начальных состояний) за заданное время при помощи допустимых управлений. Задачи, связанные с точным построением или приближенным оцениванием множеств достижимости управляемых систем, относятся к

[1]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект РНФ № 16-11-10146).

фундаментальным проблемам теории управления и теории дифференциальных игр [1–3], их решение может быть использовано также в исследовании сложных реальных систем различной природы (механических, экономических, экологических и др.). Отметим, что геометрия множеств достижимости нелинейных динамических систем может быть очень сложной [4–6]. В этих случаях представляет интерес построение аппроксимаций множеств достижимости и интегральных воронок динамических систем [7;8], а также приближение множеств достижимости областями определенной канонической формы [9; 10]. В качестве таких областей наиболее естественными являются эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и некоторые другие канонические множества.

В последние годы разработана полная теория построения эллипсоидальных оценок (внешних и внутренних) множеств достижимости линейных управляемых систем с неопределенностью, основанная на технике эллипсоидального исчисления [9–11]. В рамках этого подхода основная задача состоит в нахождении эллипсоида (или семейства эллипсоидов) в фазовом пространстве, оценивающего сверху или снизу по отношению к операции включения множеств искомую область достижимости. Отметим, однако, что в силу специфики аппарата исследования и общих предположений о структуре динамики системы этот подход не может быть в полной мере использован в нелинейном случае для описания и оценивания траекторных трубок неопределенных систем общего вида. Для некоторых классов нелинейных динамических систем с неопределенностью в динамике и начальных данных в работах [12–14] были намечены подходы к решению задач оценивания их состояний.

На основе указанных подходов в данной статье рассматривается задача внешнего оценивания множеств достижимости управляемой системы с комбинированной нелинейностью квадратичного и билинейного типов. В отличие от постановок работ [13; 14] мы исследуем здесь задачу оценивания состояний систем указанного класса без предположения о положительной определенности соответствующей квадратичной формы в нелинейных составляющих фазовых скоростей системы.Указанный сложный случай обобщает ранее полученные результаты [14; 15]; здесь мы предполагаем одновременное наличие в динамике системы билинейных функций и квадратичных форм (без добавочного требования их положительной определенности) и учитываем неопределенность по начальным данным и влияние управляющих воздействий, которые также могут трактоваться как неопределенные аддитивные возмущения. Присутствие всех указанных факторов существенно усложняет исследование проблемы, требует адекватного анализа и построения новых численных алгоритмов оценивания множеств достижимости таких систем, что и составляет цель данного исследования.

1. Постановка задачи и предварительные сведения

Пусть $\mathbb{R}^n$ обозначает n-мерное евклидово пространство, $\mathrm{comp}\mathbb{R}^n$ — множество всех компактных подмножеств из $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{conv}\mathbb{R}^n$ — множество всех компактных выпуклых подмножеств из $\mathbb{R}^n$. Символ (x,y) обозначает скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, символ $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ — евклидова норма вектора x, $\;'$ — знак транспонирования, шар $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x-a\| \le r\}$, символ $E(y,Y) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (Y^{-1}(x-y),(x-y)) \le 1\}$ обозначает эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром y и симметрической положительно определенной $n\times n$-матрицей Y, $\mathrm{Tr}(Y)$ — след (сумма диагональных элементов) $n\times n$-матрицы Y, I — единичная $n\times n$-матрица.

Рассмотрим управляемую систему следующего вида:

$$\dot{x} = A(t)x + f(x)d + u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \le t \le T, \tag{1.1}$$

с неизвестным, но ограниченным начальным состоянием

$$x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0 = E(a_0, Q_0), \tag{1.2}$$

и измеримым управлением $u(t)$, стесненным ограничением

$$u(t) \in E(\hat{a}, \hat{Q}), \quad t_0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

где $a, \hat{a}, d \in \mathbb{R}^n$; матрицы B и $\hat{Q}$ — симметрические и положительно определенные.

Будем предполагать, что нелинейная функция $f(x)$ в (1.1) является квадратичной формой:

$$f(x) = x'Bx, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4}$$

где B — симметрическая $n \times n$-матрица.

Предположим, что матрица $A(t)$ (размерности $n \times n$) имеет вид $A(t) = A^0 + A^1(t)$. Здесь $n{\times}n$-матрица A^0 задана, а измеримая $n{\times}n$-матрица $A^1(t)$ с элементами $\{a^{(1)}_{ij}(t)\}$ $(i, j = 1, \ldots, n$, $t \in [t_0, T])$ точно не известна, но дано ограничение на неизвестные элементы $\{a^{(1)}_{ij}(t)\}$,

$$A^1(t) \in \mathcal{A} = \big\{A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{R}^{n\times n} \colon |a_{ij}| \le c_{ij},\ i, j = 1, \ldots n\big\}, \tag{1.5}$$

где числа $c_{ij} \ge 0$ $(i, j = 1, \ldots n)$ заданы.

Обозначим символом $\mathcal{U}$ класс всех допустимых измеримых управлений $u(\cdot)$ и символом $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), A^1(\cdot))$ — решение системы (1.1)–(1.5) на промежутке $[t_0, T]$ при $x_0 \in X_0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $A^1(\cdot) \in \mathcal{A}$. Трубку траекторий системы (1.1)–(1.5) при ограничении $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обозначим $(t_0 \le t \le T)$

$$X(\cdot) = \bigcup \big\{x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), A^1(\cdot)) \mid x_0 \in X_0, u(\cdot) \in \mathcal{U}, A^1(\cdot) \in \mathcal{A}\big\}.$$

Отметим, что трубка всех возможных траекторий системы (1.1)–(1.5) из начального состояния $\{t_0, X_0\}$ совпадает с траекторной трубкой дифференциального включения [7]

$$\dot{x}(t) \in Ax(t) + f(x(t))d + U, \quad x(t_0) = x_0 \in X_0, \quad t_0 \le t \le T,$$

соответствующего системе (1.1)–(1.5).

Примем следующее предположение.

Предположение 1. *Все решения* $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ *системы* (1.1)–(1.5) *определены на всем промежутке* $[t_0, T]$ *для любых допустимых* x_0 *и всех возможных* $u(\cdot)$ *и не выходят за пределы некоторой компактной области фазового пространства, т. е. существует* $k > 0$ *такое, что*

$$||x(\cdot)|| = ||x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))|| \le k \quad \forall x_0 \in X_0, \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}.$$

Условия, при которых данное требование выполняется, детально обсуждаются в работе [15].

Цель работы состоит в построении итерационных алгоритмов внешнего оценивания траекторных трубок $X(\cdot)$ и соответствующих множеств достижимости $X(T)$ для рассматриваемой нелинейной управляемой системы (1.1)–(1.5) указанного выше класса.

2. Вспомогательные результаты

2.1. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости управляемой системы с неопределенностью по начальным данным при известной матрице $A(t)$

Предположим в этом подразделе, что матрица $A(t) \equiv A$ в системе (1.1)–(1.5) известна и матрица B, определяющая нелинейную функцию f в (1.4), положительно определена.

Обозначим

$$(k_0^+)^2 = \max_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n \colon ||l|| = 1\}} l'B^{1/2}Q_0B^{1/2}l, \tag{2.1}$$

$$(k_0^-)^2 = \min_{l \in \{l \in \mathbb{R}^n \colon ||l|| = 1\}} l'B^{1/2}Q_0B^{1/2}l. \tag{2.2}$$

Отметим, что в силу [13] числа k_0^- и k_0^+ в (2.1), (2.2) таковы, что справедливы включения

$$E(a_0,(k_0^-)^2B^{-1}) \subseteq E(a_0,Q_0) \subseteq E(a_0,(k_0^+)^2B^{-1}), \tag{2.3}$$

при этом число k_0^- является наибольшим, а k_0^+ — наименьшим из возможных чисел, для которых верны приведенные выше включения (2.3).

Тогда в соответствии с [13] справедлива следующая внешняя оценка множества достижимости $X(t) = X(t;t_0,X_0)$ системы (1.1)–(1.5) с квадратичной нелинейностью:

$$X(t;t_0,X_0) \subseteq E(a^+(t),Q^+(t)), \quad t_0 \le t \le T, \tag{2.4}$$

где $Q^+(t) = r^+(t)B^{-1}$ и функции $a^+(t)$, $r^+(t)$ являются решениями нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{da^+(t)}{dt} = Aa^+(t) + a^{+\prime}(t)Ba^+(t)d + r^+(t)d + \hat{a},\\ \frac{dr^+(t)}{dt} = \max_{\|l\|=1}\{l'(2r^+(t)\tilde{B}_+(t) + q_+^{-1}(t)B^{1/2}\hat{Q}B^{1/2})l\} + q_+(t)r^+(t),\\ q_+(t) = \{(nr^+(t))^{-1}\operatorname{Tr}(B\hat{Q})\}^{1/2}, \quad \tilde{B}_+(t) = B^{1/2}(A + 2da^{+\prime}(t)B)B^{-1/2},\end{gathered} \tag{2.5}$$

с начальными условиями

$$a^+(t_0) = a_0, \quad r^+(t_0) = (k_0^+)^2. \tag{2.6}$$

В рассматриваемом случае удается получить и внутреннюю по включению множеств эллипсоидальную оценку (см. [13]) множества достижимости $X(t)$ $(t_0 \le t \le T)$ системы (1.1)–(1.5):

$$E(a^-(t),Q^-(t)) \subseteq X(t;t_0,X_0), \tag{2.7}$$

где $Q^-(t) = r^-(t)B^{-1}$, функции $a^-(t)$, $r^-(t)$ являются решениями нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\frac{da^-(t)}{dt} = Aa^-(t) + a^{-\prime}(t)Ba^-(t)d + r^-(t)d + \hat{a},\\ \frac{dr^-(t)}{dt} = \min_{\|l\|=1}\{l'(r^-(t)(\tilde{B}_-(t) + \tilde{B}'_-(t)) + 2(r^-(t))^{1/2}(B^{1/2}\hat{Q}B^{1/2})^{1/2})l\},\\ \tilde{B}_-(t) = B^{1/2}(A + 2da^{-\prime}(t)B)B^{-1/2},\end{gathered} \tag{2.8}$$

с начальными условиями

$$a^-(t_0) = a_0, \quad r^-(t_0) = (k_0^-)^2. \tag{2.9}$$

З а м е ч а н и е 1. Формулы, определяющие оценки (2.4)–(2.9), удобны для расчетов в конкретных примерах (соответствующие результаты численного моделирования можно найти в [13; 16–18]). Однако данный подход не удается распространить на более сложные ситуации, когда в динамической системе присутствует неопределенность в коэффициентах матрицы A, или если матрица B квадратичной формы (1.4) не является положительно определенной, или если присутствуют оба указанных усложняющих фактора.

2.2. Эллипсоидальные оценки множеств достижимости систем с билинейной структурой

Рассмотрим в данном подразделе следующую вспомогательную динамическую систему:

$$\dot{x} = A(t)\,x, \quad t_0 \le t \le T, \quad x_0 \in X_0 = E(a_0,Q_0), \quad x, a_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{2.10}$$

Будем предполагать, как и ранее, что матричная функция $A(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$A(t) = A^0 + A^1(t), \tag{2.11}$$

где матрица A^0 задана, а матричная функция $A^1(t)$ не известна, но ограничена: $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ ($t \in [t_0, T]$),

$$A(t) \in \mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1, \quad \mathcal{A}^1 = \big\{A{=}\{a_{ij}\}{\in}\mathbb{R}^{n\times n}\colon |a_{ij}|{\le}c_{ij}, \quad i,j{=}1,\dots n\big\}, \tag{2.12}$$

числа $c_{ij} \ge 0$ ($i,j = 1,\dots n$) в (2.11), (2.12) предполагаются заданными.

Тогда внешнюю эллипсоидальную оценку множества достижимости $\mathcal{X}(T)$ системы (2.10)–(2.12) можно найти, применив следующий результат.

Теорема 1 [19]. *Пусть функции $a^+(t)$ и $Q^+(t)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\dot a^+ = A^0 a^+, \quad a^+(t_0) = a_0, \tag{2.13}$$

$$\dot Q^+ = A^0 Q^+ + Q^+ A^{0\prime} + qQ^+ + q^{-1}G, \quad Q^+(t_0) = Q_0, \quad t_0 \le t \le T, \tag{2.14}$$

$$q = \big(n^{-1}\,\mathrm{tr}\,((Q^+)^{-1}G)\big)^{1/2},$$

$$G = \mathrm{diag}\,\Big\{(n-v)\Big(\sum_{i=1}^n c_{ji}|a_i^+| + \big(\max_{\sigma=\{\sigma_{ij}\}} \sum_{p,q=1}^n Q^+_{pq} c_{jp} c_{jq} \sigma_{jp}\sigma_{jq}\big)^{1/2}\Big)^2\Big\}, \tag{2.15}$$

максимум в (2.15) *вычисляется по всем $\sigma_{ij} = \pm 1$, $i,j = 1,\dots,n$, таким, что $c_{ij} \ne 0$, и v равно числу индексов i, для которых $c_{ij} = 0$ для всех $j = 1,\dots,n$. Тогда верна оценка*

$$\mathcal{X}(t) \subseteq E(a^+(t), Q^+(t)), \quad t_0 \le t \le T.$$

Следствие. *Имеет место следующее включение:*

$$\mathcal{X}(t_0+\sigma) \subseteq (I + \sigma\mathcal{A})\,\mathcal{X}_0 + o_1(\sigma)B(0,1) \subseteq E(a^+(t_0+\sigma), Q^+(t_0+\sigma)) + o_2(\sigma)B(0,1),$$

где $\sigma^{-1}o_i(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to +0$ $(i = 1,2)$ и $(I+\sigma\mathcal{A})\,\mathcal{X}_0 = \bigcup_{x\in\mathcal{X}_0}\bigcup_{A\in\mathcal{A}}\{x + \sigma Ax\}$.

З а м е ч а н и е 2. Отдельные подходы к решению задачи оценивания многозначных состояний систем с квадратичными нелинейностями общего вида (без ограничительного предположения о положительной определенности соответствующих квадратичных форм) были намечены в [20], однако в данном исследовании рассматривался более простой случай, когда управляющих функций в динамической системе (1.1)–(1.5) нет (решалась задача оценивания неопределенной динамики); последнее предположение упрощало анализ. Близкие вопросы оценивания состояний неопределенных систем, в том числе с использованием теоремы 1, изучались также в [21; 22], однако в указанных работах предполагалась положительная определенность квадратичной формы (1.4), присутствующей в правых частях динамической системы (1.1)–(1.5). В данной статье рассмотрен более общий случай, когда все отмеченные выше факторы, осложняющие анализ динамических свойств системы, присутствуют.

2.3. Пример

Примеры и результаты численного моделирования, иллюстрирующие указанные оценки, приведены в работах [13; 14; 22]. Заметим, что отказ от требования положительной определенности матрицы B в форме (1.4) существенно усложняет анализ, а также значительно ухудшает геометрические свойства множеств достижимости $\mathcal{X}(t)$ для таких систем.

П р и м е р 1. Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot x_1 &= x_2 + u_1, \\ \dot x_2 &= c(t)x_1 + x_1^2 - x_2^2 + u_2, \end{cases} \qquad x_0 \in X_0, \quad t_0 \le t \le T. \tag{2.16}$$

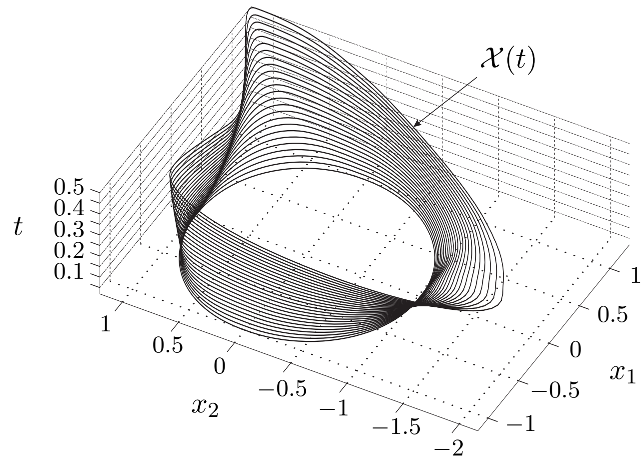


Рис. 1. Траекторная трубка $\mathcal{X}(t)$ системы (2.16).

Здесь $t_0 = 0$, $T = 0.5$, $X_0 = B(0, 1)$, $U = B(0, 0.15)$, точно не известная измеримая функция $c(t)$ удовлетворяет априорному ограничению $|c(t)| \le 1$ $(t_0 \le t \le T)$. Множества достижимости системы $\mathcal{X}(t)$ показаны на рис. 1 при различных значениях времени t. Заметим, что множества $\mathcal{X}(t)$ даже на малых промежутках времени быстро теряют свойство выпуклости и приобретают достаточно сложную геометрическую форму.

3. Общий случай: алгоритм внешнего оценивания множества достижимости

3.1. Система с комбинированной нелинейностью и неопределенностью

В данном подразделе рассмотрим общий случай

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + x'Bxd + u(t), \quad t_0 \le t \le T, \\ x_0 \in X_0 = E(a_0, Q_0), \quad u(t) \in U = E(\hat{a}, \hat{Q}). \end{gathered} \tag{3.1}$$

Здесь матрицы B, $\hat{Q}$ and Q_0 предполагаются симметричными, причем матрицы $\hat{Q}$ and Q_0 положительно определены. Положительная определенность матрицы B в данном случае, в отличие от работы [22], не предполагается.

Будем считать, как и в предыдущем разделе, что матричная функция $A(t)$ удовлетворяет соотношениям

$$A(t) = A^0 + A^1(t), \tag{3.2}$$

где матрица A^0 задана, а матричная функция $A^1(t)$ неизвестна, но ограничена: $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ $(t \in [t_0, T])$,

$$A(t) \in \mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1, \quad \mathcal{A}^1 = \big\{A{=}\{a_{ij}\}{\in}\mathbb{R}^{n\times n}\colon |a_{ij}|{\le}c_{ij},\ i,j{=}1,\dots n\big\}, \tag{3.3}$$

числа $c_{ij} \ge 0$ $(i, j = 1, \dots n)$ предполагаются в (3.2), (3.3) заданными.

Используя классические процедуры матричной диагонализации, найдем невырожденное преобразование координат $z = Zx$ $(x, z \in \mathbb{R}^n)$ фазового пространства $\mathbb{R}^n$, при котором исходная система примет вид

$$\begin{gathered} \dot{z} = A^*(t)\, z + z'B^*z\, d^* + w(t), \quad t_0 \le t \le T, \\ z_0 \in Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*), \quad w(t) \in W = E(\hat{a}^*, \hat{Q}^*), \end{gathered} \tag{3.4}$$

где $B^* = \mathrm{diag}\{b_1^*, \ldots b_n^*\}$ и b_i^* $(i = 1, \ldots, n)$ — собственные значения матрицы B^*. Можно считать без потери общности, что $b_i^* = \alpha_i^2$ $(i = 1, \ldots, s)$ and $b_i^* = -\beta_i^2$ $(i = i+1, \ldots, n)$.

Обозначим

$$f^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2 z_i^2, \quad f^{(2)}(z) = \sum_{i=s+1}^{n} \beta_i^2 z_i^2, \tag{3.5}$$

$$d^{(1)} = d^*, \quad d^{(2)} = -d^* \tag{3.6}$$

и перепишем систему (3.4) в следующем виде:

$$\begin{gathered} \dot{z} = A^*(t)z + f^{(1)}(z)d^{(1)} + f^{(2)}(z)d^{(2)} + w(t), \quad t_0 \le t \le T, \\ z_0 \in Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*), \quad w(t) \in W = E(\hat{a}^*, \hat{Q}^*), \\ A^*(t) = A^{0*} + A^*(t), \quad A^{0*} = ZA^0Z^{-1}, \quad A^*(t) = ZA(t)Z^{-1}. \end{gathered} \tag{3.7}$$

Таким образом, справедлив следующий вспомогательный результат.

Лемма 1. *Система* (3.1) *может быть преобразована к каноническому виду* (3.7)*, где квадратичные формы* $f^{(1)}(z)$ *and* $f^{(2)}(z)$ *определены соотношениями* (3.5)*, а векторы* $d^{(1)}$*,* $d^{(2)}$ *— равенствами* (3.6).

З а м е ч а н и е 3. Функции $f^{(1)}(z)$ and $f^{(2)}(z)$ в системе (3.7), вообще говоря, могут оказаться лишь положительно полуопределенными формами, что соответствует случаю строгих неравенств $1 < s < n$ для индекса s в соотношениях (3.5). Для того, чтобы обойти неудобную для дальнейшего анализа ситуацию полуопределенности форм, модифицируем систему (3.7), введя малый параметр $\lambda > 0$ следующим образом:

$$f_\lambda^{(1)}(z) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^2 z_i^2 + \lambda^2 \sum_{i=s+1}^{n} z_i^2, \quad f_\lambda^{(2)}(z) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{s} z_i^2 + \sum_{i=s+1}^{n} \beta_i^2 z_i^2. \tag{3.8}$$

Мы можем считать также, что все числа α_i^2 $(i = 1, \ldots, s)$ и β_i^2 $(i = s+1, \ldots, n)$ положительны, в противном случае аналогичным образом вместо нулевых слагаемых добавим малые положительные члены требуемого вида. В итоге указанных малых модификаций (3.8), сделанных в соответствии с замечанием 3, вместо (3.7) будем иметь систему

$$\begin{gathered} \dot{z} = A^*(t)z + f_\lambda^{(1)}(z)\, d^{(1)} + f_\lambda^{(2)}(z)\, d^{(2)} + w(t), \\ z_0 \in Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*), \quad w(t) \in W = E(\hat{a}^*, \hat{Q}^*), \quad t_0 \le t \le T, \end{gathered} \tag{3.9}$$

где $f_\lambda^{(i)}(z)$ $(i = 1, 2)$ — положительно определенные квадратичные формы.

Лемма 2. *Внешние* (*по отношению к операции включения множеств*) *оценки множеств достижимости системы* (3.9) *и системы* (3.4) (*и, следовательно,* (3.1)) *можно сделать сколь угодно близкими в метрике Хаусдорфа за счет выбора достаточно малого параметра* $\lambda > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы непосредственно вытекает из результата работы [23]. □

Будем считать далее, что указанные выше модификации исходной системы сделаны, и, чтобы не усложнять обозначения, в дальнейшем параметр $\lambda > 0$ и символ $*$ опускаем. Таким образом, полагаем, что после необходимых преобразований система (3.1) имеет вид

$$\dot{z} = A(t)z + f^{(1)}(z)\, d^{(1)} + f^{(2)}(z)\, d^{(2)} + w(t), \quad z_0 \in Z_0 = E(a_0, Q_0), \tag{3.10}$$

$$w(t) \in W = E(\hat{a}, \hat{Q}), \quad t_0 \le t \le T. \tag{3.11}$$

Здесь функции $f^{(1)}(z)$ и $f^{(2)}(z)$ — положительно определенные квадратичные формы,

$$f^{(i)}(z) = z'B^{(i)}z, \ B^{(i)} = \mathrm{diag}\{b_1^{(i)2}, \dots b_n^{(i)2}\}, \quad b_1^{(i)} \neq 0 \quad (i = 1, 2),$$

n-векторы $d^{(1)}$ и $d^{(2)}$ заданы, а матрица $A(t)$ известна неточно и удовлетворяет ограничению

$$A(t) = A^0 + A^1(t), \tag{3.12}$$

где матрица A^0 задана, а матричная функция $A^1(t)$ неизвестна, но ограничена: $A^1(t) \in \mathcal{A}^1$ $(t \in [t_0, T])$,

$$A(t) \in \mathcal{A} = A^0 + \mathcal{A}^1, \quad \mathcal{A}^1 = \big\{A{=}\{a_{ij}\}{\in}\mathbb{R}^{n\times n}\colon |a_{ij}|{\le}c_{ij}, \ i,j{=}1,\dots n\big\}, \tag{3.13}$$

числа $c_{ij} \geq 0$ $(i, j = 1, \dots n)$ предполагаются заданными (здесь следует отметить, что при линейном преобразовании пространства, описанном выше, необходимо пересчитать также и коэффициенты c_{ij} (3.12), (3.13) ограничения на элементы неизвестной матрицы, оценив их сверху; для того чтобы не усложнять далее обозначения, будем считать, что это уже сделано).

Пусть для чисел $\alpha, \beta > 0$ и вектора $d \in \mathbb{R}^n$ символ $W(d, \alpha, \beta)$ означает минимальный по объему эллипсоид в $\mathbb{R}^n$, содержащий алгебраическую сумму эллипсоида $E(\hat{a}, \hat{Q})$ из (1.3) (и, соответственно, (3.11)) и отрезка (вырожденного эллипсоида) $[\alpha, \beta]\, d$.

З а м е ч а н и е 4. Для вычисления центра и матрицы оценивающего эллипсоида $W(d, \alpha, \beta)$ можно использовать, например, метод, описанный в [19, с. 100–104].

Обозначим также, аналогично формуле (2.1),

$$(k_0^{i+})^2 = \max_{l\in\{l\in\mathbb{R}^n\colon ||l||=1\}} l'B^{(i)1/2}Q_0B^{(i)1/2}l, \quad i = 1, 2.$$

Лемма 3. *Существуют $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in \mathbb{R}^1$ такие, что справедливы включения*

$$\begin{aligned} &E(\hat{a}, \hat{Q}) + \bigcup f^{(2)}(x)\, d^{(2)} \mid x \in E(a_0, (k_0^{2+})^2(B^{(2)})^{-1}) \subseteq W(d^{(2)}, \alpha_1, \beta_1),\\ &E(\hat{a}, \hat{Q}) + \bigcup f^{(1)}(x)\, d^{(1)} \mid x \in E(a_0, (k_0^{1+})^2(B^{(1)})^{-1}) \subseteq W(d^{(1)}, \alpha_2, \beta_2). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим вначале множество

$$Z_1 = \bigcup\{f^{(2)}(x)\, d^{(2)} \mid x \in E(a_0, (k_0^{2+})^2(B^{(2)})^{-1})\}.$$

Примем $z = x - a_0$, тогда, с учетом равенства $f^{(2)}(x) = x'B^{(2)}x$, получим

$$Z_1 = a_0'B^{(2)}a_0\, d^{(2)} + \bigcup\{z'B^{(2)}z + 2a_0'B^{(2)}z \mid z \in E(0, (k_0^{2+})^2(B^{(2)})^{-1})\}\, d^{(2)}$$

и далее, полагая $w = (B^{(2)})^{1/2}z$ (обозначение корректно, так как матрица $B^{(2)}$ положительно определена), имеем

$$Z_1 = a_0'B^{(2)}a_0\, d^{(2)} + \bigcup\{w'w + 2a_0'(B^{(2)})^{1/2}w \mid w \in B(0, k_0^{2+})\}\, d^{(2)}. \tag{3.15}$$

Обозначим

$$\beta_1 = a_0'B^{(2)}a_0 + k_0^{2+}(k_0^{2+} + 2\|a_0'(B^{(2)})^{1/2}\|), \ \alpha_1 = -2a_0'B^{(2)}a_0,$$

тогда из (3.15) нетрудно получить оценку $Z_1 \subseteq [\alpha_1, \beta_1]d^{(2)}$, следовательно, верно первое включение в (3.14) с указанными параметрами α_1, β_1. Вторая оценка в (3.14) устанавливается аналогично, с той же схемой выбора α_2, β_2. □

Пусть $W(d^{(2)}, \alpha_1, \beta_1) = E(\hat{a}_{w1}, \hat{Q}_{w1})$ и $W(d^{(1)}, \alpha_2, \beta_2) = E(\hat{a}_{w2}, \hat{Q}_{w2})$ (см. также замечание 4).

Справедлив следующий результат, дающий возможность найти пошаговую (во времени) внешнюю оценку множеств достижимости системы (3.10) (а следовательно, в силу замечания 3, и системы (3.9)). Результат формулируется как оценка динамики системы при малых сдвигах во времени, что позволяет использовать указанные ниже новые соотношения в вычислительных схемах для анализа более общего, чем в иных работах, класса динамических систем с неопределенностью и нелинейностью.

Теорема 2. *Справедливо включение*

$$\mathcal{X}(t_0+\sigma) \subseteq E(a^{*1}(t_0+\sigma), Q^{*1}(t_0+\sigma)) \bigcap E(a^{*2}(t_0+\sigma), Q^{*2}(t_0+\sigma)) + o(\sigma)B(0,1), \tag{3.16}$$

где $\sigma^{-1}o(\sigma) \to 0$ *при* $\sigma \to +0$ *и*

$$a^{*i}(t_0+\sigma) = \tilde{a}^{*i}(t_0+\sigma) + \sigma(\hat{a}_{wi} + a_0' B^{(i)} a_0\, d^i + (k_0^{i+})^2 d^{(i)}), \tag{3.17}$$

$$Q^{*i}(t_0+\sigma) = (p^{-1}+1)\tilde{Q}^i(t_0+\sigma) + (p+1)\sigma^2 \hat{Q}_{wi}, \quad i = 1,2, \tag{3.18}$$

здесь функции $\tilde{a}^{*i}(t)$, $\tilde{Q}^i(t)$ *вычисляются по формулам* (2.13)–(2.15) *при последовательной замене в этих уравнениях* (*при* $i = 1,2$) *матрицы* A^0 *на матрицу* $\tilde{A}^{0*i} = A^0 + d^{(i)} a_0' B^{(i)}$ *соответственно.*

Доказательство теоремы вытекает из последовательного применения лемм 1–3 к анализу исходной системы общего вида (3.10), а также следует из результата теоремы 1. □

Приведем алгоритм построения внешней эллипсоидальной оценки множества достижимости (и соответствующей траекторной трубки) рассматриваемой системы.

Алгоритм внешнего оценивания.

1. Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на сегменты $[t_i, t_{i+1}]$ таким образом, чтобы $t_i = t_0 + ih$ ($i = 1, \ldots, m$), $h = (T - t_0)/m$, $t_m = T$.
2. При данном начальном множестве $Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*)$ положим $\sigma = h$ и найдем два оценивающих эллипсоида $E(a^{(1)}(\sigma), Q^{(1)}(\sigma))$ и $E(a^{(2)}(\sigma), Q^{(2)}(\sigma))$ в соответствии с соотношениями (3.16)–(3.18) теоремы 2 так, чтобы выполнялось включение
$$Z_0 = E(a_0^*, Q_0^*) \subseteq E(a^{(1)}(\sigma), Q^{(1)}(\sigma)) \bigcap E(a^{(2)}(\sigma), Q^{(2)}(\sigma)) + o(\sigma)B(0,1).$$
3. Найдем наименьший (по какому-либо критерию, например минимального объема [9; 10]) эллипсоид $E(a^*, Q^*)$, содержащий пересечение
$$E(a^*, Q^*) \supseteq E(a^{(1)}(\sigma), Q^{(1)}(\sigma)) \bigcap E(a^{(2)}(\sigma), Q^{(2)}(\sigma)).$$
4. Построим эллипсоид $E(a_1, Q_1)$, оценивающий сверху по включению сумму двух эллипсоидов [9], $E(a^*, Q^*)$ и $\sigma E(\hat{a}^*, \hat{Q}^*)$:
$$E(a^*, Q^*) + \sigma E(\hat{a}^*, \hat{Q}^*) \subseteq E(a_1, Q_1).$$
5. Рассмотрим систему на следующем временном промежутке $[t_1, t_2]$ с эллипсоидом $E(a_1, Q_1)$, взятым в качестве начального в момент t_1.
6. Следующий шаг повторяют предыдущий, итерационный процесс продолжается до конца временного промежутка; при $m \to \infty$ получаются более точные результаты.

3.2. Иллюстрирующий пример

Рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 - 0.1x_1^2 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= c(t)x_1 + 0.8x_1^2 + x_2^2 + u_2, \end{cases} \qquad x_0 \in X_0, \quad t_0 \le t \le T.$$

Здесь $t_0 = 0$, $T = 0.4$, $X_0 = B(0,1)$, $U = B(0, 0.15)$, измеримая функция $c(t)$, известная неточно, удовлетворяет априорному ограничению $|c(t)| \le 1$ ($t_0 \le t \le T$). Множества достижимости системы $\mathcal{X}(t)$ и их внешние эллипсоидальные оценки $E(a^*(t), Q^*(t))$, найденные в соответствии с описанной выше процедурой оценивания, показаны на рис. 2 при различных значениях времени $t \in [0, 0.4]$.

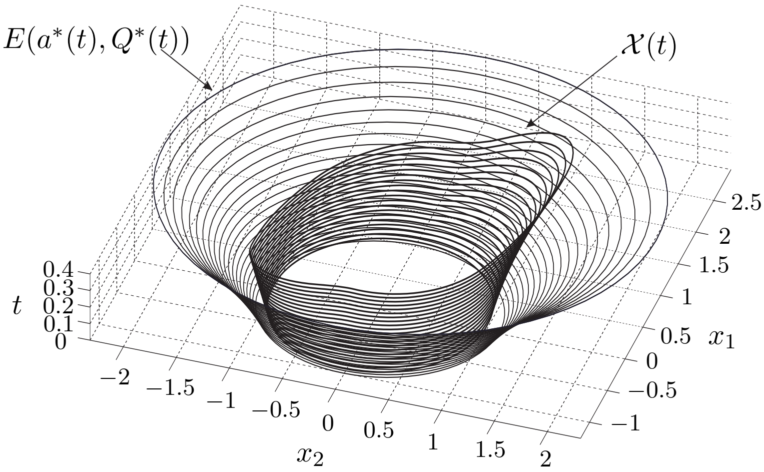


Рис. 2. Множества достижимости $\mathcal{X}(t)$ и их внешние эллипсоидальные оценки $E(a^*(t), Q^*(t))$.

4. Заключение

В данной работе исследованы проблемы оценивания состояний неопределенной динамической управляемой системы с неточно известным начальным состоянием и неточно известной матрицей, входящей в дифференциальные уравнения динамики системы. Предполагается, что указанные неизвестные параметры являются элементами заданных (известных) множеств.

Изучен случай, когда динамика управляемой системы нелинейна и определяется присутствием квадратичных функций (без предположения о положительной определенности соответствующих квадратичных форм) в фазовых скоростях системы, а также осложнена наличием билинейности из-за неопределенности в матричных коэффициентах в динамических уравнениях.

В работе предложены новые модели и алгоритмы оценивания множеств достижимости нелинейной управляемой системы с указанной комбинированной нелинейностью билинейного и квадратичного типа, обобщающие ранее полученные в работах [18; 21; 22]. Результаты основаны на алгоритмах и методах теории эллипсоидального оценивания и теории дифференциальных уравнений и включений. Другие постановки и подходы к решению задач оценивания состояний управляемых динамических систем с неопределенностью обсуждались в работах [16; 21; 24–26]. Отметим, что вопрос о дифференциальных уравнениях, описывающих динамику эллипсоидальных оценок множеств достижимости динамических систем рассматриваемого здесь общего класса, остается на данный момент времени открытым, отдельные подходы к решению этой сложной проблемы при некоторых упрощающих предположениях были намечены в [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 458 с.
3. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
4. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
5. **Субботина Н.Н.** Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 11. С. 1890–1896.
6. **Subbotina N.N., Kolpakova E.A.** Connections between optimal control problems and generalized solutions of PDEs of the first order // IFAC Proc. Volumes (IFAC-PapersOnline). 2014. Vol. 19, iss. 3. P. 11381–11384. doi: 10.3182/20140824-6-ZA-1003.01149.

7. **Kurzhanski A.B., Filippova T.F.** On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control //Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia / ed. A.B. Kurzhanski. Boston: Birkhauser, 1993. P. 122–188. (Progress in Systems and Control Theory; vol. 17). doi: 10.1007/978-1-4612-0349-0_4.
8. **Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Ушаков А.В.** Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок дифференциальных включений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика, Механика, Компьют. науки. 2011. № 4. С. 23–39.
9. **Kurzhanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
10. **Черноусько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 320 с.
11. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes, theory and computation. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
12. **Filippova T.F.** Trajectory tubes for impulsive control problems // 6th European Control Conference (ECC 2001). 2001. Article number 7076349. P. 2766–2769.
13. **Filippova T.** Differential equations of ellipsoidal state estimates in nonlinear control problems under uncertainty // AIMS J. Discrete Contin. Dyn. Syst.: 8th AIMS Conf. on Dyn. Syst., Diff. Eq. and Appl. 2011. Suppl. Vol. I. P. 410–419.
14. **Filippova T.F.** Set-valued dynamics in problems of mathematical theory of control processes // International Journal of Modern Physics B. 2012. Vol. 26, no. 25. P. 1–8.
15. **Filippova T.F., Berezina E.V.** On state estimation approaches for uncertain dynamical systems with quadratic nonlinearity: Theory and computer simulations // Proc. of the International Conf. on Large-Scale Scientific Computing. Berlin: Springer, 2008. P. 326–333. doi: 10.1007/978-3-540-78827-0_36.
16. **Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г.** Алгоритмы оценивания множеств достижимости импульсных управляемых систем с эллипсоидальными фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2011. № 9. С. 127–141.
17. **Филиппова Т.Ф., Матвийчук О.Г.** Задачи импульсного управления в условиях неопределенности // Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014) / Институт проблем управления РАН. Москва, 2014. С. 1024–1032.
18. **Filippova T.F., Matviychuk O.G.** Algorithms of estimating reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty // Proc. of the 7th Chaotic Modeling and Simulation Internat. Conf.: Internat. Society for the Advancement of Science and Technology / ed. Ch. H. Skiadas. 2014. P. 115–124.
19. **Черноусько Ф.Л.** Эллипсоидальная аппроксимация множеств достижимости линейной системы с неопределенной матрицей // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 940–950.
20. **Filippova T.F.** Differential equations of ellipsoidal state estimates for bilinear-quadratic control systems under uncertainty // 9th Chaotic Modeling and Simulation Intern. Conf. (CHAOS 2016): Book Abstr. London, 2016. P. 32.
21. **Filippova T.F., Matviychuk O.G., Kostousova E.K.** Estimation techniques for uncertain dynamical systems with bilinear and quadratic nonlinearities // Dynamical Systems: Control and Stability. Proc. of the 13th Internat. Conf. on Dynamical Systems: Theory and Applications (DSTA-2015) / eds. J.M.J. Awrejcewicz, M. Kaźmierczak and P. Olejnik. 2015. P. 185–196.
22. **Filippova T.F., Matviychuk O.G.** Estimates of reachable sets of control systems with bilinear–quadratic nonlinearities // Ural Math. J. 2015. Vol. 1, no 1. P. 45–54.
23. **Filippova T.F.** Asymptotic behavior of the ellipsoidal estimates of reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty // Proc. of the 8th European Nonlinear Dynamics Conf. (ENOC 2014) / eds. H. Ecker, A. Steindl, S. Jakubek 2014. CD-ROM vol. (ISBN: 978-3-200-03433-4). Paper-ID 149. P. 1–2.
24. **Гусев М.И.** Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
25. **Kostousova E.K.** On tight polyhedral estimates for reachable sets of linear differential systems // AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1493. P. 579–586.
26. **Kostousova E.K.** State estimation for control systems with a multiplicative uncertainty through polyhedral techniques // IFIP Advances in Information and Communication Technology (IFIP AICT). 2013. Vol. 391. P. 165–176. doi: 10.1007/978-3-642-36062-6_17.

Поступила 08.11.2016

Филиппова Татьяна Федоровна
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: ftf@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 476 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems*. New York: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
4. Ushakov V.N. On the problem of stable bridges construction in the differential game of pursuit-evasion. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.*, 1980, no. 4, pp. 29–36 (in Russian).
5. Subbotina N.N. Universal optimal strategies in positional differential games. *Differentsial'nye uravneniya*, 1983, vol. 19, no. 11, pp. 1890–1896 (in Russian).
6. Subbotina N.N., Kolpakova E.A. Connections between optimal control problems and generalized solutions of PDEs of the first order. *IFAC Proc. Volumes* (IFAC-PapersOnline). 2014, vol. 19, iss. 3, pp. 11381–11384. http://dx.doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01149.
7. Kurzhanski A.B., Filippova T.F. On the theory of trajectory tubes — a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control. *Advances in Nonlinear Dynamics and Control: a Report from Russia*, ed. A.B. Kurzhanski, Boston: Birkhauser, 1993, Ser. Progress in Systems and Control Theory, vol. 17, pp. 122–188. doi: 10.1007/978-1-4612-0349-0_4.
8. Ushakov V.N., Matviichuk A.R., Ushakov A.V. Approximations of attainability sets and of integral funnels of differential inclusions. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, no. 4, pp. 23–39 (in Russian).
9. Kurzhanski A.B., Valyi I. *Ellipsoidal calculus for estimation and control*. Boston: Birkhäuser, 1997, 321 p.
10. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem* [Estimation of phase state of dynamic systems]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 320 p.
11. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes, theory and computation*. Basel: Birkhäuser, 2014, Ser. Systems & Control: Foundations & Applications, vol. 85, 445 p. doi: 10.1007/978-3-319-10277-1.
12. Filippova T.F. Trajectory tubes for impulsive control problems. 6*th European Control Conference* (ECC 2001), 2001, Article number 7076349, pp. 2766–2769.
13. Filippova T.F. Differential equations of ellipsoidal state estimates in nonlinear control problems under uncertainty. *AIMS J. Discrete Contin. Dyn. Syst.: 8th AIMS Conf. on Dyn. Syst., Diff. Equat. and Appl.*, 2011, Suppl. Vol. I, pp. 410–419.
14. Filippova T.F. Set-valued dynamics in problems of mathematical theory of control processes. *International Journal of Modern Physics B*, 2012, vol. 26, no. 25, pp. 1–8.
15. Filippova T.F., Berezina E.V. On state estimation approaches for uncertain dynamical systems with quadratic nonlinearity: Theory and computer simulations. *Proc. Internat. Conf. on Large-Scale Scientific Computing*, Berlin: Springer, 2008, pp. 326–333. doi: 10.1007/978-3-540-78827-0_36.
16. Filippova T.F., Matviichuk O.G. Algorithms to estimate the reachability sets of the pulse controlled systems with ellipsoidal phase constraints. *Automation and Remote Control*, 2011, Vol. 72, no. 9, pp. 1911–1924. doi: 10. 1134/S000511791109013X.
17. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Problems for impulse control under uncertainty. *Trudy* XII *Vserossiiskogo soveshchaniya po problemam upravleniya* (VSPU-2014) [Proc. of the XII Russian National Conf. on Control Problems (VSPU-2014)], Moscow, 2014, pp. 1024–1032.
18. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Algorithms of estimating reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty. *Proc. of the 7th Chaotic Modeling and Simulation Internat. Conf.* Published by ISAST: Internat. Society for the Advancement of Science and Technology, ed. Ch.H. Skiadas, 2014, pp. 115–124.
19. Chernous'ko F.L. Ellipsoidal approximation of attainability sets of a linear system with indeterminate matrix. *J. Appl. Math. Mech.*, 1996, vol. 60, iss. 6, pp. 921–931. doi: 10.1016/S0021-8928(96)00114-1.
20. Filippova T.F. Differential equations of ellipsoidal state estimates for bilinear-quadratic control systems under uncertainty. 9*th Chaotic Modeling and Simulation Internat. Conf.* (CHAOS 2016): Book Abstr. London, 2016. P. 32.
21. Filippova T.F., Matviychuk O.G., Kostousova E.K. Estimation techniques for uncertain dynamical systems with bilinear and quadratic nonlinearities. *Dynamical Systems: Control and Stability. Proc. of the* 13*th Internat. Conf. on Dynamical Systems: Theory and Applications* (DSTA-2015), eds. J.M.J. Awrejcewicz, M. Kaŕzmierczak and P. Olejnik, 2015, pp. 185–196.

22. Filippova T.F., Matviychuk O.G. Estimates of reachable sets of control systems with bilinear–quadratic nonlinearities. *Ural Math. J.* 2015, vol. 1, no. 1, pp. 45–54.
23. Filippova T.F. Asymptotic behavior of the ellipsoidal estimates of reachable sets of nonlinear control systems with uncertainty. *Proc. 8th European Nonlinear Dynamics Conf.* (ENOC 2014), eds. H. Ecker, A. Steindl, S. Jakubek, 2014, CD-ROM vol., ISBN: 978-3-200-03433-4, Paper-ID 149, pp. 1–2.
24. Gusev M.I. External estimates of the reachability sets of nonlinear controlled systems. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, no. 3, pp. 450–461. doi: 10.1134/S0005117912030046 .
25. Kostousova E.K. On tight polyhedral estimates for reachable sets of linear differential systems, *AIP Conf. Proc.*, 2012, vol. 1493, pp. 579–586.
26. Kostousova E.K. State estimation for control systems with a multiplicative uncertainty through polyhedral techniques. *IFIP Advances in Information and Communication Technology* (IFIP AICT), 2013, vol. 391, pp. 165–176. doi: 10.1007/978-3-642-36062-6_17.

T. F. Filippova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: ftf@imm.uran.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 519.6

ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНАЯ ЗАДАЧА МАРШРУТИЗАЦИИ С УСЛОВИЯМИ ПРЕДШЕСТВОВАНИЯ[1]

А. Г. Ченцов, А. А. Ченцов

Рассматривается задача последовательного обхода замкнутых множеств в компактном метрическом пространстве, осложненная ограничениями в виде условий предшествования и возможной зависимостью функций стоимости от списка заданий. Исследуется вариант аппроксимативной реализации экстремума посредством применения моделей, использующих задачи последовательного обхода мегаполисов (непустых конечных множеств). Данный вариант естественным образом вкладывается в более общую конструкцию, связанную с последовательным посещением конечной системы непустых замкнутых множеств (НЗМ) в метризуемом компакте. Само же пространство НЗМ оснащается метрикой Хаусдорфа, в терминах которой оценивается (при соответствующем условии непрерывности сечений функций стоимости) близость экстремумов упомянутой задачи последовательного обхода для двух любых систем НЗМ (подразумевается, что количество НЗМ в каждой системе одно и то же). При этом ограничения в виде условий предшествования сохраняются.

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования.

A. G. Chentsov, A. A. Chentsov. A discrete–continuous routing problem with precedence conditions.

We consider the problem of visiting closed sets in a compact metric space complicated by constraints in the form of precedence conditions and a possible dependence of the cost function on a list of tasks. We study a variant of the approximate realization of the extremum by applying models that involve problems of sequential visits to megalopolises (nonempty finite sets). This variant is naturally embedded into a more general construction that implements sequential visits to nonempty closed sets (NCSs) from a finite system in a metrizable compactum. The space of NCSs is equipped with the Hausdorff metric, which is used to estimate (under the corresponding condition that the sections of the cost functions are continuous) the proximity of the extrema in the problem of sequential visits for any two systems of NCSs (it is assumed that the numbers or NCSs in the systems are the same). The constraints in the form of precedence conditions are preserved.

Keywords: route, path, precedence conditions.

MSC: 49L20, 90C39

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-275-292

Введение

В исследованиях свердловской школы Н. Н. Красовского по теории управления большое внимание уделялось решению конкретных задач и разработке соответствующих численных методов. Данное направление занимает важное место в работах Н. Н. Субботиной, связанных с построением обобщенных решений уравнения Гамильтона — Якоби, и в работах В. Н. Ушакова, касающихся построения множеств достижимости и стабильных мостов, используемых при решении дифференциальных игр. Упомянутые стабильные мосты играют важную роль в связи с фундаментальной теоремой об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина.

В предлагаемой статье методы вычислений рассматриваются для других задач, которые, однако, объективно также связаны с процессами управления и возникают во многих приложениях, включающих элементы маршрутизации перемещений при выполнении совокупности заданий. В исследованиях такого рода применяется динамическое программирование (ДП), которое активно используется и в традиционных задачах управления.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 15-01-07909, 16-01-00505, 16-01-00649) и комплексной программы УрО РАН (проект 15-16-1-8).

В известной [1–3] инженерной задаче управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ предполагается обычно, что возле контуров вырезаемых деталей намечены некоторые упорядоченные пары (УП) точек, одна из которых принимается как возможная точка врезки (ВТВ), а вторая — как соответствующая ей точка выключения инструмента. Получающиеся (конечные) множества, связанные с контурами, рассматриваются как своеобразные мегаполисы, которые должны последовательно посещаться инструментом с целью осуществления резки упомянутых контуров (см. [1–3] и др.). Сам процесс резки осложнен ограничениями различных типов, среди которых выделим сейчас так называемые условия предшествования (условия типа "одно после другого"). Так, в частности, у каждой детали внутренние контуры должны вырезаться раньше внешнего.

Точки врезки и (соответствующие им) точки выключения инструмента обычно (при резке по замкнутому контуру) близки и на этапе качественного исследования могут отождествляться. Дополнительные затраты, связанные с врезкой (пробивкой материала), могут быть включены в стоимости внешних перемещений. Возникают, однако, вопросы: где именно следует располагать ВТВ и сколько их должно быть? В частности, возникает и понятная идеализация: с каждым контуром можно связывать континуум ВТВ, располагаемых уже на "непрерывной" эквидистанте. Во всяком случае, данную возможность следует рассматривать как своеобразный ориентир, приближение к которому осложнено, однако, трудностями вычислительной реализации.

Из приводимых ниже построений вытекает (при естественных для приложений условиях на функции стоимости) возможность приближения по результату вышеупомянутой "непрерывной" (а точнее, дискретно-непрерывной) задачи соответствующими задачами с дискретизацией множества ВТВ.

Отметим, что подобные проблемы имеют место и в других прикладных задачах. В частности, это касается важной инженерной задачи о демонтаже энергоблока АЭС, выведенного из эксплуатации (см., например, [4]). Полезно отметить, что в данной задаче стоимости перемещений (дозы радиации) зависят от списка заданий, не выполненных на момент перемещения: "светят" те и только те фрагменты оборудования, которые не были демонтированы. Как результат, суммарная доза радиации, полученная работником, существенно зависит от маршрута и конкретной траектории движения.

Имея в виду возможность различных применений, в статье рассматривается достаточно общая постановка дискретно-непрерывной задачи маршрутизации с ограничениями, для которой изучаются возможности, связанные с аппроксимацией в классе моделей, использующих задачи дискретной оптимизации (ДО), подобные [5–7]. Применяемая логика исследования допускает аналогию с [8], где рассматривался частный случай постановки настоящей работы.

Следует заметить, что сами потенциально реализуемые задачи ДО имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (ЗК) [9–13], но обладают целым рядом особенностей качественного характера. Нас интересуют сейчас задачи с "большими" мегаполисами. Решение таких задач сопряжено с серьезными трудностями в части вычислений; речь идет о затруднениях, обусловленных ограничениями. В [5–7] разработаны методы решения задач ДО упомянутого типа, восходящие к [14] и базирующиеся на идеях широко понимаемого ДП. В этой связи отметим работы [15; 16], посвященные применению ДП для решения ЗК. В процедурах [5–7; 14] используется схема ДП, учитывающая эффект ограничений различных типов (см., кроме того, [17; 18] в случае аддитивного агрегирования затрат, а также [19; 20] в случае маршрутной задачи "на узкие места").

В настоящей статье упомянутый вариант ДП предлагается использовать при решении задач ДО, аппроксимирующих в нужном смысле исходную дискретно-непрерывную маршрутную задачу. При этом реализуется приближение по результату (экстремумы задач ДО, применяемых для целей аппроксимации, близки к экстремуму исходной дискретно-непрерывной задачи), а оптимальные решения упомянутых задач ДО, являющихся маршрутными задачами о посещении "больших" мегаполисов, соблюдают все ограничения этой исходной задачи.

Таким образом, схема решения на основе варианта ДП, используемого в [5–7; 14] и ряде других работ, определяет потенциально реализуемую возможность приближенного построения оптимального решения исходной задачи (условия, налагаемые на параметры последней, не являются обременительными и учитывают особенности многих прикладных задач упомянутого типа).

1. Общие сведения

Ниже используется стандартная теоретико-множественная символика: кванторы, пропозициональные связки. В дальнейшем $\varnothing$ обозначает пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению, def заменяет фразу "по определению". *Семейством* называем множество, все элементы которого — множества. Если a и b — объекты, то через $\{a; b\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее в виде своих элементов a, b и не содержащее никаких других элементов. Тогда для каждого объекта s в виде $\{s\} \triangleq \{s; s\}$ имеем синглетон, содержащий $s\colon s \in \{s\}$. Всякое множество — объект. Поэтому для любых двух объектов x и y определена [21, с. 87] УП $(x, y) \triangleq \{\{x\}; \{x; y\}\}$ упомянутых объектов (в [21, с. 87] для аналогичной цели использовалось обозначение $\langle x, y\rangle$); x есть первый, y — второй элементы УП (x, y)). Во многих случаях УП удобно рассматривать как целое и обозначать одной буквой. Тогда если z есть УП, то через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z, однозначно определяемые условием $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$.

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H)\setminus\{\varnothing\}$ (семейство всех непустых п/м H); $\mathrm{Fin}(H)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(H)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м H.

Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую; $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\mathbb{N}_o \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$. Если $p \in \mathbb{N}_o$ и $q \in \mathbb{N}_o$, то

$$\overline{p, q} \triangleq \{t \in \mathbb{N}_o \mid (p \leqslant t) \,\&\, (t \leqslant q)\}$$

(при $q < p$ имеем $\overline{p, q} = \varnothing$; $\overline{1, k} = \{t \in \mathbb{N} \mid t \leqslant k\}$ при $k \in \mathbb{N}$). Непустому конечному множеству K сопоставляем его мощность $|K| \in \mathbb{N}$, а также непустое множество $(\mathrm{bi})[K]$ всех биекций [22, с. 87] интервала $\overline{1, |K|}$ на K. Как обычно, $|\varnothing| \triangleq 0$. Перестановка непустого множества Λ есть биекция Λ на себя (см. [22, с. 87]).

Если A и B — непустые множества, то через B^A обозначаем (непустое) множество всех отображений из A в B (см. [21, с. 77]). При $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a. Условимся, что элементы $\mathbb{N}$ (натуральные числа) не являются множествами. С учетом этого для любых множества T и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $T^{\overline{1,n}}$ используем, как обычно, обозначение T^n. При этом, конечно,

$$T^n = \underbrace{T \times \cdots \times T}_{n},$$

а элементами T^n являются кортежи "длины" n (строго говоря, это отображения из $\overline{1, n}$ в T).

Если S — непустое множество, то полагаем, что $\mathcal{R}_+[S]$ есть def множество всех функций из S в $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant \xi\}$; $\mathcal{R}_+[S]$ — множество всех неотрицательных вещественнозначных (в/з) функций на S.

Наряду с УП используем триплеты, также определяемые посредством УП: если a, b и c — объекты, то [23, с. 17] $(a, b, c) \triangleq ((a, b), c)$ есть УП с первым элементом (a, b) и вторым элементом c. Для любых трех непустых множеств A, B и C, как обычно [23, с. 17], $A \times B \times C \triangleq (A \times B) \times C$. Если, кроме того, D — непустое множество, $\varphi \in D^{A \times B \times C}$, $x \in A \times B$ и $y \in C$, то для $\varphi(x, y) \in D$ используем также обозначение $\varphi(x_1, x_2, y)$, где $x_1 \triangleq \mathrm{pr}_1(x)$ и $x_2 \triangleq \mathrm{pr}_2(x)$.

Далее используются простейшие свойства метризуемых топологических пространств (ТП) и непрерывных в/з функций на упомянутых пространствах (см. [24, гл. 4]).

2. Обсуждение задачи

Рассмотрим сначала некоторые специальные понятия и обозначения, фиксируя в дальнейшем компактное метрическое пространство (X, ρ), $X \neq \varnothing$. Итак, $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ есть метрика (на X), порождающая топологию τ на множестве X. Следовательно, (X, τ) — непустой метризуемый компакт. Через $\mathcal{F}$ обозначаем семейство всех непустых замкнутых (в (X, τ)) п/м X; множества из $\mathcal{F}$ компактны в (X, τ), $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}'(X)$.

Фиксируем далее $x^o \in X$ в качестве базы рассматриваемых процессов, а также $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 2$. Кортежи $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, являющиеся каждый отображением

$$(F_i)_{i \in \overline{1,N}}\colon \overline{1,N} \longrightarrow \mathcal{F},$$

играют роль совокупностей целевых множеств (ЦМ) в определяемых далее "аддитивных" задачах маршрутизации: полагая (здесь и далее) $\mathbb{P} \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$, рассматриваем процессы

$$(x_o \stackrel{\triangle}{=} x^o) \to (x_1 \in F_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (x_N \in F_{\alpha(N)}), \tag{2.1}$$

где $\alpha \in \mathbb{P}$ подлежит выбору исследователем наряду с $(x_1, \ldots, x_N)$. Перестановку α в (2.1) именуем *маршрутом*, а кортеж точек, выбираемых из ЦМ, — *трассой* или *траекторией процесса*. Через $\mathfrak{X}$ обозначаем множество всех кортежей

$$(x_i)_{i \in \overline{0,N}}\colon \overline{0,N} \longrightarrow X.$$

Среди кортежей из $\mathfrak{X}$ выделяем трассы, согласованные с тем или иным маршрутом: при $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ полагаем, что

$$\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \{(x_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X} \mid (x_o = x^o) \,\&\, (x_t \in F_{\alpha(t)} \ \forall\, t \in \overline{1,N})\}, \tag{2.2}$$

получая непустое множество. Сам же выбор $\alpha \in \mathbb{P}$ может быть стеснен ограничениями.

Условия предшествования. Фиксируем $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$. Итак, $\mathbf{K}$ есть п/м $\overline{1,N} \times \overline{1,N}$. При $z \in \mathbf{K}$ имеем $\mathrm{pr}_1(z) \in \overline{1,N}$ и $\mathrm{pr}_2(z) \in \overline{1,N}$. Постулируем в дальнейшем, что

$$\forall\, \mathbf{K}_o \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \ \ \exists\, z_o \in \mathbf{K}_o\colon \mathrm{pr}_1(z_o) \neq \mathrm{pr}_2(z) \ \ \forall\, z \in \mathbf{K}_o \tag{2.3}$$

(в [14, ч. 2] указаны легко проверяемые конкретные условия, которые гарантируют справедливость (2.3) и типичны для задач, рассматриваемых в [1–3]). Тогда (см. (2.3), [14, ч. 2])

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\stackrel{\triangle}{=} \big\{\alpha \in \mathbb{P} \mid \forall\, z \in \mathbf{K} \ \ \forall\, t_1 \in \overline{1,N} \ \ \forall\, t_2 \in \overline{1,N} \ \ (z = (\alpha(t_1), \alpha(t_2))) \Rightarrow (t_1 < t_2)\big\}\\ &= \big\{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \ \forall\, z \in \mathbf{K}\big\}\end{aligned}$$

есть непустое (и конечное) множество всех $\mathbf{K}$-допустимых (допустимых по предшествованию) маршрутов. Соответственно при $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$

$$\mathbf{D}[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{(\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbf{A} \times \mathfrak{X} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}]\big\} \neq \varnothing$$

есть множество всех допустимых решений (ДР) в смысле реализации (2.1).

Функции стоимости. Пусть $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$; элементы $\mathfrak{N}$ (а это — непустые множества индексов) называем *списками*. Фиксируем

$$(\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[X \times X \times \mathfrak{N}]) \,\&\, (f \in \mathcal{R}_+[X]). \tag{2.4}$$

Функцию $\mathbf{c}$ применяем для оценивания перемещений (см. (2.1)), а f — для оценивания терминального состояния. Используем ниже аддитивное агрегирование стоимостей. Для этого при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ полагаем, что

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{t=1}^{N} \mathbf{c}(\mathbf{x}(t-1), \mathbf{x}(t), \{\alpha(j)\colon j \in \overline{t,N}\}) + f(\mathbf{x}(N)). \tag{2.5}$$

В частности, (2.5) определено при $\alpha \in \mathbf{A}$ и $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]$, где $(F_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$. Предметом дальнейшего исследования являются задачи

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}], \tag{2.6}$$

где $(F_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$. Так, задачи (2.6) определены, конечно, при $F_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, F_N \in \mathrm{Fin}(X)$. Задачи этого типа относятся, строго говоря, к сфере ДО. Каждой задаче (2.6) сопоставляется значение (экстремум)

$$V[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \inf_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] = \inf_{(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbf{D}[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}_+. \tag{2.7}$$

В следующем разделе будут введены условия на функции (2.4), достаточные для существования в задачах (2.6) оптимальных ДР.

3. Некоторые свойства топологического характера и их следствия

Компакту (X, τ) сопоставляем “квадрат” в виде ТП

$$(X \times X, \tau \otimes \tau), \tag{3.1}$$

определяемый стандартным произведением двух экземпляров (X, τ) (см. [24, гл. 2]). Разумеется, (3.1) — непустой метризуемый компакт. Метрика $\tilde{\rho}$ на множестве $X \times X$, порождающая топологию $\tau \otimes \tau$, может быть, в частности, определена в виде отображения

$$((x_1, x_2), (x^{(1)}, x^{(2)})) \longmapsto \sup(\{\rho(x_1, x^{(1)}); \rho(x_2, x^{(2)})\})\colon (X \times X) \times (X \times X) \longrightarrow \mathbb{R}_+. \tag{3.2}$$

Данная метрика $\tilde{\rho}$ (3.2) превращает $X \times X$ в метрическое пространство. Кроме того, непустое множество X^N оснащаем топологией $\otimes^N(\tau)$ N-й степени (X, τ), т.е. топологией произведения N экземпляров (X, τ). По теореме Тихонова [24, 3.2.4]

$$\bigl(X^N, \otimes^N(\tau)\bigr) \tag{3.3}$$

есть (метризуемый) компакт. Топология $\otimes^N(\tau)$ порождается метрикой $\rho^\natural$ вида

$$((u'_t)_{t\in\overline{1,N}}, (u''_t)_{t\in\overline{1,N}}) \longmapsto \max_{1\leqslant t\leqslant N} \rho(u'_t, u''_t)\colon X^N \times X^N \longrightarrow \mathbb{R}_+.$$

Отметим, что при $(F_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ в виде

$$\prod_{i=1}^{N} F_{\alpha(i)} = \{(x_i)_{i\in\overline{1,N}} \in X^N \mid x_j \in F_{\alpha(j)} \ \forall\, j \in \overline{1,N}\} \in \mathcal{P}'(X^N) \tag{3.4}$$

имеем замкнутое (а стало быть, и компактное в ТП (3.3)) п/м X^N. Условимся о следующем соглашении: если $x \in X$ и $\mathbf{x} \in X^N$, то склеенное “движение” $x \,\square\, \mathbf{x} \in \mathfrak{X}$ def таково, что

$$((x \,\square\, \mathbf{x})(0) \stackrel{\triangle}{=} x) \,\&\, ((x \,\square\, \mathbf{x})(t) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{x}(t) \ \forall\, t \in \overline{1,N});$$

в качестве x может использоваться x^o. Легко видеть, что при $(F_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$ и $\alpha \in \mathbb{P}$ справедливо равенство

$$\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \Big\{x^o \,\square\, \mathbf{x}\colon \mathbf{x} \in \prod_{t=1}^{N} F_{\alpha(t)}\Big\}. \tag{3.5}$$

Свойство (3.5) существенно в связи с компактностью множеств вида (3.4). Полагаем далее, что $\mathfrak{C}^*_\alpha[\mathbf{x}] \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{C}_\alpha[x^o \,\square\, \mathbf{x}]\ \forall\, \alpha \in \mathbb{P}\ \forall\, \mathbf{x} \in X^N$. Тогда (см. (3.5)), как легко видеть,

$$V[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \ \inf_{\mathbf{x}\in \prod\limits_{t=1}^{N} F_{\alpha(i)}} \mathfrak{C}^*_\alpha[\mathbf{x}].$$

Всюду в дальнейшем полагаем выполненным следующее условие.

Условие непрерывности функций стоимости. Функция f непрерывна как отображение из (X,τ) в $\mathbb{R}_+$. Кроме того, при всяком выборе $K \in \mathfrak{N}$ функция

$$\mathbf{c}(\cdot, K) \stackrel{\triangle}{=} (\mathbf{c}(z,K))_{z\in X\times X} \in \mathcal{R}_+[X\times X]$$

непрерывна как отображение из $(X\times X, \tau\otimes\tau)$ в $\mathbb{R}_+$ (см. (3.1)).

З а м е ч а н и е 3.1. Разумеется, с учетом метризуемости топологий τ и $\tau\otimes\tau$ вышеупомянутое предположение эквивалентно требованию секвенциальной непрерывности функций f и $\mathbf{c}(\cdot,K)$, $K\in\mathfrak{N}$, которое, в свою очередь, может быть дано в терминах метрик ρ и $\tilde\rho$ соответственно. Далее, в силу компактности метризуемых ТП (X,τ) и (3.1) имеем (при упомянутом условии непрерывности) факт равномерной непрерывности функций f и $\mathbf{c}(\cdot,K)$, $K\in\mathfrak{N}$.

Предложение 3.1. *Если $\alpha\in\mathbb{P}$, то $\mathfrak{C}^*_\alpha[\cdot] \stackrel{\triangle}{=} (\mathfrak{C}^*_\alpha[\mathbf{x}])_{\mathbf{x}\in X^N}$ есть непрерывный функционал на компакте* (3.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из определений (см., в частности, (2.5)). С учетом компактности множеств (3.4) и (3.5) получаем, что $\forall\,(F_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N\ \forall\,\alpha\in\mathbf{A}\ \exists\,\mathbf{x}_o \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]$:

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}_o] \leqslant \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \quad \forall\,\mathbf{x}\in\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]. \tag{3.6}$$

Поэтому (см. (2.7), (3.6)) имеем полезное следствие:

$$V[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \min_{\alpha\in\mathbf{A}} \min_{\mathbf{x}\in\mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] = \min_{(\alpha,\mathbf{x})\in\mathbf{D}[(F_i)_{i\in\overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}_+ \quad \forall\,(F_i)_{i\in\overline{1,N}}\in\mathcal{F}^N. \tag{3.7}$$

4. Непрерывная зависимость значения задачи при изменении целевых множеств

В настоящем разделе исследуются вопросы, связанные с зависимостью значения дискретно-непрерывной задачи маршрутизации от ЦМ. Рассматриваем при этом (3.7) как зависимость от N переменных, принимающих значения в семействе $\mathcal{F}$. В этой связи заметим, что при $F\in\mathcal{F}$ и $x\in X$

$$\rho(x;F) \stackrel{\triangle}{=} \min_{y\in F} \rho(x,y) \in \mathbb{R}_+ \tag{4.1}$$

есть обычное расстояние от точки x до множества F. При фиксации F зависимость $\rho(x;F)$ от $x\in X$ обладает свойством непрерывности как в/з функция на компакте (X,τ), достигающая максимума на любом множестве из $\mathcal{F}$. Это позволяет ввести метрику Хаусдорфа [24, с. 441] $\mathbb{H}\in\mathcal{R}_+[\mathcal{F}\times\mathcal{F}]$: при $F_1\in\mathcal{F}$ и $F_2\in\mathcal{F}$

$$\mathbb{H}(F_1,F_2) \stackrel{\triangle}{=} \sup\big(\big\{\max_{x\in F_1}\rho(x;F_2); \max_{x\in F_2}\rho(x;F_1)\big\}\big) \in \mathbb{R}_+.$$

Итак, $(\mathcal{F}, \mathbb{H})$ — (непустое) метрическое пространство. Возвращаясь к (2.4), отметим, что с учетом равномерной непрерывности функций f и $\mathbf{c}(\cdot, K)$, $K \in \mathfrak{N}$, могут быть введены их модули непрерывности.

С учетом этого при $K \in \mathfrak{N}$ полагаем, что $\omega_K \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+]$ определяется условием

$$\omega_K(\delta) \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{|\mathbf{c}(z', K) - \mathbf{c}(z'', K)| \colon (z', z'') \in (X \times X) \times (X \times X),\ \tilde{\rho}(z', z'') \leqslant \delta\}) \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{4.2}$$

Аналогичным образом функции f сопоставляется $\Omega \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+]$ посредством правила

$$\Omega(\delta) \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{|f(x') - f(x'')| \colon (x', x'') \in X \times X,\ \rho(x', x'') \leqslant \delta\}) \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{4.3}$$

Из (4.2), (4.3) при $K \in \mathfrak{N}$ имеем, конечно, что $\omega_K(0) = 0$ и $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, \delta \in]0, \infty[\colon \omega_K(\zeta) < \varepsilon$ $\forall\, \zeta \in [0, \delta]$. Кроме того, $\Omega(0) = 0$ и $\forall\, \varepsilon \in]0, \infty[\ \exists\, \delta \in]0, \infty[\colon \Omega(\zeta) < \varepsilon\ \ \forall\, \zeta \in [0, \delta]$. Функции ω_K, $K \in \mathfrak{N}$, и Ω изотонны (см. (4.2), (4.3)). Поскольку $\mathfrak{N}$ — непустое конечное семейство, определена функция

$$\omega \stackrel{\triangle}{=} \big(\max_{K \in \mathfrak{N}} \omega_K(\delta)\big)_{\delta \in \mathbb{R}_+} \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+] \tag{4.4}$$

("совокупный" модуль непрерывности) с аналогичными свойствами ($\omega(0) = 0$, функция ω изотонна и непрерывна в нуле). Отметим, что при $F_1 \in \mathcal{F}$ и $F_2 \in \mathcal{F}$ определены значения $\omega(\mathbb{H}(F_1, F_2)) \in \mathbb{R}_+$ и $\Omega(\mathbb{H}(F_1, F_2)) \in \mathbb{R}_+$.

Предложение 4.1. *Если* $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, $(\widetilde{F}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, $\alpha \in \mathbb{P}$ *и* $\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}]$, *то* $\exists\, \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}_\alpha[(\widetilde{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]$:

$$|\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] - \mathfrak{C}_\alpha[\tilde{\mathbf{x}}]| \leqslant \omega(\mathbb{H}(F_{\alpha(1)}, \widetilde{F}_{\alpha(1)}))$$
$$+ \sum_{t=2}^{N} \omega\big(\sup\big(\{\mathbb{H}(F_{\alpha(t-1)}, \widetilde{F}_{\alpha(t-1)}); \mathbb{H}(F_{\alpha(t)}, \widetilde{F}_{\alpha(t)})\}\big)\big) + \Omega(\mathbb{H}(F_{\alpha(N)}, \widetilde{F}_{\alpha(N)})).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о сводится к непосредственной комбинации (2.5), (4.1)–(4.4). □

Следствие 4.1. *Если* $(F_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, $(\widetilde{F}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N$, $\delta \in]0, \infty[$ *и при этом* $\mathbb{H}(F_j, \widetilde{F}_j) \leqslant \delta$ $\forall\, j \in \overline{1, N}$, *то справедливо неравенство*

$$|V[(F_i)_{i \in \overline{1,N}}] - V[(\widetilde{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]| \leqslant N\omega(\delta) + \Omega(\delta).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о очевидно. Итак, установлено свойство "непрерывности по результату" семейства задач (2.6) при изменении кортежа ЦМ.

5. Вопросы аппроксимативной реализации, 1

В настоящем разделе следствие 4.1 применяется для построения аппроксимативных моделей, оперирующих с задачами ДО. В интересах упрощения обозначений фиксируем далее

$$(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \mathcal{F}^N, \tag{5.1}$$

получая в качестве основной следующую дискретно-непрерывную версию задачи (2.6):

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]. \tag{5.2}$$

Из (3.7), (5.1) получаем, что определено значение задачи (5.2):

$$\mathbb{V} \stackrel{\triangle}{=} V[\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] = \min_{\alpha \in \mathbf{A}} \min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] = \min_{(\alpha, \mathbf{x}) \in \mathbf{D}[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \in \mathbb{R}_+. \tag{5.3}$$

При этом (см. (5.1)) $\mathbb{F}_1 \in \mathcal{F}, \ldots, \mathbb{F}_N \in \mathcal{F}$. Задача (5.2) не является, вообще говоря, задачей ДО, и определение экстремума (5.3), а также ДР, точно или приближенно реализующих (5.3), представляет серьезную проблему. Мы учитываем, что $\mathrm{Fin}(X) \subset \mathcal{F}$. Тогда, в частности, $\mathrm{Fin}(\mathbf{F}) \subset \mathcal{F}$ при $\mathbf{F} \in \mathcal{F}$ и

$$(\varepsilon - \mathrm{Fin})[\mathbf{F}] \overset{\triangle}{=} \{K \in \mathrm{Fin}(\mathbf{F}) \mid \rho(x;K) \leqslant \varepsilon \ \ \forall x \in \mathbf{F}\} \in \mathcal{P}'\big(\mathrm{Fin}(\mathbf{F})\big) \quad \forall \varepsilon \in [0,\infty[\tag{5.4}$$

(простое следствие компактности $\mathbf{F}$), причем, как легко видеть,

$$\mathbb{H}(\mathbf{F},\mathbb{K}) \leqslant \varepsilon \quad \forall \mathbb{K} \in (\varepsilon - \mathrm{Fin})[\mathbf{F}]. \tag{5.5}$$

С учетом (5.4) получаем, в частности, что

$$\prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$$
$$= \{(K_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathrm{Fin}(X)^N \mid K_t \in (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_t] \ \ \forall t \in \overline{1,N}\} \in \mathcal{P}'(\mathrm{Fin}(X)^N) \quad \forall \delta \in]0,\infty[. \tag{5.6}$$

Предложение 5.1. *Если* $\delta \in]0,\infty[$ *и* $(M_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$, *то*

$$V[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant V[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] + N\omega(\delta) + \Omega(\delta). \tag{5.7}$$

Доказательство. В силу (5.4)–(5.6) и следствия 4.1 имеем неравенство

$$|V[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] - V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]| \leqslant N\omega(\delta) + \Omega(\delta). \tag{5.8}$$

При этом (см. (5.4), (5.6)) $M_t \subset \mathbb{F}_t \ \ \forall t \in \overline{1,N}$. Значит, согласно (2.2)

$$\mathcal{X}_\alpha[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] \subset \mathcal{X}_\alpha[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] \quad \forall \alpha \in \mathbf{A}. \tag{5.9}$$

С учетом (3.7) и (5.9) получаем, что $V[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$, откуда (см. (5.8)) вытекает (5.7). □

Из предложения 5.1 следует, что $\forall \varepsilon \in]0,\infty[\ \ \exists \delta \in]0,\infty[\ \ \forall (M_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$

$$V[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] \leqslant V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] < V[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] + \varepsilon. \tag{5.10}$$

Согласно (5.6), (5.10) исходная дискретно-непрерывная задача (5.2) допускает аппроксимативную реализацию в классе задач ДО, а точнее, в классе моделей, использующих "большие" мегаполисы. Всюду в дальнейшем полагаем, что

$$\Big(x^o \notin \bigcup_{i=1}^{N} \mathbb{F}_i\Big) \,\&\, (\mathbb{F}_p \cap \mathbb{F}_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,N} \ \ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}). \tag{5.11}$$

6. Вопросы аппроксимативной реализации, 2

С учетом предложения 5.1 обсудим совсем кратко частный случай задачи, рассматриваемой в [5–7] (имеется в виду развитие схемы [14, § 4.9]). Итак, фиксируем $M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_N \in \mathrm{Fin}(X)$, получая кортеж $(M_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathrm{Fin}(X)^N$. Для наших целей естественно полагать, что $(M_i)_{i\in\overline{1,N}}$ есть элемент множества (5.6) при некотором $\delta > 0$. Учитывая (5.4), (5.6) и (5.11), будем ограничиваться тем естественным случаем, когда

$$\Big(x^o \notin \bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \,\&\, (M_p \cap M_q = \varnothing \ \ \forall p \in \overline{1,N} \ \ \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\}),$$

что соответствует [5–7;14] (см. также [17;18]). Множества $M_1, \ldots, M_N$ называем *мегаполисами.* Рассматриваем задачу

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{x}] \longrightarrow \min, \quad \alpha \in \mathbf{A}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}_\alpha[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}], \tag{6.1}$$

для которой значение (экстремум) совпадает с $V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] \in \mathbb{R}_+$. Поскольку $\mathbf{D}[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$ непусто и конечно, в задаче (6.1) существует оптимальное решение в виде УП маршрут-трасса. Для построения данного решения воспользуемся вариантом ДП [18, разд. 9], ограничиваясь изложением соответствующего алгоритма на функциональном уровне. Прежде всего напомним определение [14, § 4.9] семейства

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall\, z \in \mathbf{K}\ \ (\mathrm{pr}_1(z) \in K) \implies (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\} \tag{6.2}$$

существенных списков (заданий). Пусть, кроме того, $\mathcal{G}_s \triangleq \{K \in \mathcal{G} \mid s = |K|\}\ \ \forall\, s \in \overline{1,N}$. При этом (см. [5; 14, § 4.9]) $\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\}$ и $\mathcal{G}_1 = \{\{t\}\colon t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}$, где (здесь и ниже) $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\mathrm{pr}_1(z)\colon z \in \mathbf{K}\}$. Наконец (см. [5]),

$$\mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{t\}\colon K \in \mathcal{G}_s,\ t \in \mathbf{I}(K)\} \quad \forall\, s \in \overline{2,N}. \tag{6.3}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — отображение, действующее в $\mathfrak{N}$ по правилу

$$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{\mathrm{pr}_2(z)\colon z \in \Xi[K]\}, \tag{6.4}$$

где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(z) \in K)\,\&\,(\mathrm{pr}_2(z) \in K)\},\ \ K \in \mathfrak{N}$.

Посредством (6.3) определена рекуррентная процедура построения всего семейства (6.2): $\mathcal{G}_N$ известно, цепочка $\mathcal{G}_N \to \mathcal{G}_{N-1} \to \ldots \to \mathcal{G}_1$ реализуется на основе (6.3).

Следующий этап реализации ДП — создание слоев D_o, $D_1, \ldots, D_N$ пространства позиций— ориентирован на то, чтобы избежать насчитывания всего массива значений функции Беллмана и также ограничиться системой слоев данной функции, что существенно с точки зрения расходования памяти вычислителя. В виде

$$\mathbf{X} \triangleq \{x^o\} \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{N} M_i\Big) \in \mathrm{Fin}(X)$$

определяем фазовое пространство дискретной модели. Полагаем $D_o \triangleq \{(x, \varnothing)\colon x \in \mathfrak{M}\}$, где $\mathfrak{M}$ есть объединение всех множеств $M_i,\ i \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1$, и $D_N \triangleq \{(x^o, \overline{1,N})\}$. При $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ определяем последовательно

$$J_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}, \quad \mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j\in J_s(K)} M_j, \quad \mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x,K)\colon x \in \mathcal{M}_s[K]\},$$

получая всякий раз непустые конечные множества. Тогда

$$D_s \triangleq \bigcup_{K\in\mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{X} \times \mathcal{G}_s) \quad \forall\, s \in \overline{1,N-1}.$$

Итак, в виде $D_1, \ldots, D_N$ имеем набор непустых п/м конечного множества $\mathbf{X} \times \mathcal{G}$. Важно следующее свойство (см. [5–7; 17; 18]) построенных слоев:

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1} \quad \forall\, s \in \overline{1,N} \quad \forall\, K \in \mathcal{G}_s \quad \forall\, k \in \mathbf{I}(K) \quad \forall\, y \in M_k. \tag{6.5}$$

Отображение $\mathbf{I}$ (6.4) играет важную роль в конструкции, связанной с реализацией слоев пространства позиций. Данные слои порождают, в свою очередь, слои функции Беллмана, которые введем сразу посредством следующей рекуррентной процедуры:

1) Полагаем, что $v_o \in \mathcal{R}_+[D_o]$ определяется условием $v_o(x, \varnothing) \overset{\triangle}{=} f(x) \ \forall x \in \mathfrak{M}$.

2) Если $s \in \overline{1, N}$ и функция $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ уже построена, то в силу (6.5) определено при $(x, K) \in D_s$ выражение

$$\min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} [\mathbf{c}(x, y, K) + v_{s-1}(y, K \setminus \{j\})] \in \mathbb{R}_+.$$

С учетом этого полагаем, что функция $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ такова, что

$$v_s(x, K) \overset{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{y \in M_j} [\mathbf{c}(x, y, K) + v_{s-1}(y, K \setminus \{j\})] \quad \forall (x, K) \in D_s. \tag{6.6}$$

Итак, (6.6) определяет трансформацию функции v_{s-1} в v_s.

3) Процедура завершается построением функции $v_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$, определяемой единственным значением $v_N(x^o, \overline{1, N}) \in \mathbb{R}_+$. Более того,

$$V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}] = v_N(x^o, \overline{1, N}). \tag{6.7}$$

З а м е ч а н и е 6.1. В настоящем кратком изложении мы опустили ряд важных положений [5–7; 18], из которых следует (см., например, [18, разд. 6, 9]), в частности, что каждая из функций $v_o, v_1 \ldots, v_N$ является сужением "единой" функции Беллмана для задачи (6.1), откуда и вытекает равенство (6.7).

Таким образом, (6.6) определяет рекуррентную процедуру

$$v_o \to v_1 \to \ldots \to v_N, \tag{6.8}$$

доставляющую, в частности, значение (экстремум) задачи (6.1) посредством (6.7). Если ограничиться определением величины (6.7), то представляется естественным с точки зрения экономии ресурсов памяти вычислителя следующий алгоритм.

Алгоритм нахождения экстремума задачи (6.1). Из (6.6) следует, что

$$V[M_i)_{i \in \overline{1,N}}] = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{y \in M_j} [\mathbf{c}(x^o, y, \overline{1, N}) + v_{N-1}(y, \overline{1, N} \setminus \{j\})]. \tag{6.9}$$

Из (6.9) видно, что для нахождения (6.7) достаточно располагать функцией v_{N-1}; аналогичное суждение справедливо по отношению к любой функции $v_s, \ s \in \overline{1, N}$, цепочки (6.8). Тогда можно наметить следующие этапы работы алгоритма:

1′) Располагаем функцией v_o, определяемой в 1).

2′) Пусть $s \in \overline{1, N}$ и нам известна функция v_{s-1}. Используя (6.6), находим функцию v_s, после чего заменяем массив значений v_{s-1} (он уничтожается) массивом значений v_s.

3′) Значение $V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}]$ выводим посредством (6.7), (6.9). □

На всех этапах реализации данного алгоритма в памяти вычислителя находится массив значений только одной функции, участвующей в (6.8).

Построение оптимального решения задачи (6.1). Для данного построения необходимо сохранять в памяти все функции $v_1, \ldots, v_N$, которые сейчас мы предполагаем полученными на основе преобразований, подобных (6.6).

Пусть $\mathbf{x}_o \overset{\triangle}{=} x^o$. Далее, используя (6.9), выбираем $\eta_1 \in \mathbf{I}(\overline{1, N})$ и $\mathbf{x}_1 \in M_{\eta_1}$ так, что при этом

$$V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}] = \mathbf{c}(x^o, \mathbf{x}_1, \overline{1, N}) + v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \tag{6.10}$$

(решаем локальную задачу оптимизации, связанную с (6.9)). В силу (6.5) имеем: $(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) \in D_{N-1}$. При этом согласно (6.6)

$$v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\} = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})} \min_{y \in M_j} [\mathbf{c}(\mathbf{x}_1, y, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(y, \overline{1, N} \setminus \{\eta_1; j\})]. \tag{6.11}$$

С учетом (6.11) выбираем $\eta_2 \in \mathbf{I}(\overline{1,N} \setminus \{\eta_1\})$ и $\mathbf{x}_2 \in M_{\eta_2}$ так, что

$$v_{N-1}(\mathbf{x}_1, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) = \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}); \tag{6.12}$$

при этом определяем в силу (6.5), что $(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}) \in D_{N-2}$. Отметим, кстати, что из (6.10) и (6.12) вытекает равенство

$$V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}] = \mathbf{c}(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_1, \overline{1,N}) + \mathbf{c}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1\}) + v_{N-2}(\mathbf{x}_2, \overline{1,N} \setminus \{\eta_1; \eta_2\}). \tag{6.13}$$

З а м е ч а н и е 6.2. Если $N = 2$, то из (6.13) по определению v_o выводим сразу, что $(\eta_j)_{j\in\overline{1,2}}$ и $(\mathbf{x}_j)_{j\in\overline{0,2}}$ позволяют получить оптимальное решение задачи (6.1) (см. в этой связи (2.5) и установленное в [14, теорема 2.2.1, (2.2.32)] представление $\mathbf{A}$).

При $N > 2$ построение на основе соотношений, подобных (6.10), (6.12), следует продолжать вплоть до исчерпывания индексного множества $\overline{1,N}$. Точнее, после исполнения N однотипных шагов, подобных (6.10), (6.12), будут построены маршрут $\eta \overset{\triangle}{=} (\eta_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \mathbf{A}$ и трасса $\mathbf{x} \overset{\triangle}{=} (\mathbf{x}_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{X}_\eta[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$, для которых $\mathfrak{C}_\eta[\mathbf{x}] = V[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$; УП $(\eta, \mathbf{x}) \in \mathbf{D}[(M_i)_{i\in\overline{1,N}}]$ является, следовательно, оптимальным решением задачи (6.1).

З а м е ч а н и е 6.3. Если $(M_i)_{i\in\overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$, где $\delta \in]0, \infty[$, то справедливо (5.7), $(\eta, \mathbf{x}) \in \mathbf{D}[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}]$ и при этом $\mathfrak{C}_\eta[\mathbf{x}] \leqslant V[(\mathbb{F}_i)_{i\in\overline{1,N}}] + N\omega(\delta) + \Omega(\delta)$.

7. Конкретизация общих положений для задачи управления режущим инструментом

В настоящем разделе кратко обсудим одно из возможных применений аппроксимативных конструкций двух предыдущих разделов: рассматриваем вопрос о реализации раскройного плана (см. [1–3]), полагая, что X есть достаточно большой прямоугольник на плоскости, т. е. лист, на котором намечены детали, подлежащие резке. В качестве ρ используем обычную евклидову метрику данного плоского множества, получая вариант компакта (X, ρ) разд. 2. Рассматриваем процедуру резки по замкнутому контуру. В этом случае с каждым контуром связывается эквидистанта, по которой и осуществляется резка (создание некоторого “отступа” от контура необходимо по технологическим условиям). В принципе любая точка эквидистанты может выбираться в качестве ВТВ (некоторые сопутствующие обстоятельства, связанные с врезкой, сейчас опускаем, отсылая к [1–3; 25; 26]), если игнорировать ограничения на жесткость листа и деталей, тепловые допуски. Некоторые из этих (динамических) ограничений можно учесть посредством введения соответствующей зависимости стоимостей перемещений от списка заданий (см. (2.4)), т. е., по сути, за счет введения штрафов. Мы не будем, однако, сейчас (в данном разделе) на этом останавливаться, привлекая упрощенную модель резки. Итак, логично допускать выбор любой точки эквидистанты в качестве ВТВ. В этом случае возникает многомерная задача нелинейного программирования [27, гл. 5], осложненная ограничениями в виде условий предшествования (в частности, внутренние контуры каждой детали должны вырезаться раньше внешнего). Решение этой задачи сопряжено с большими трудностями, даже если функции (2.4) определяются евклидовыми расстояниями и зависимость от списка заданий в функции $\mathbf{c}$ отсутствует.

Подход, изложенный в разд. 5, 6 и связанный с применением моделей на основе задач ДО, можно рассматривать как способ решения исходной дискретно-непрерывной маршрутной задачи с любой наперед заданной точностью. В рамках данного подхода предлагается дискретизировать эквидистанты контуров, создавая тем самым мегаполисы и сохраняя условия предшествования исходной задачи (последние касаются таких макрообъектов, как эквидистанты и мегаполисы). При этом (5.7) определяет потребную мощность мегаполисов в модельной задаче.

В этой связи полезно отметить следующий простейший случай: функция $\mathbf{c}$ в (2.4) не зависит от списка заданий и определяется евклидовой метрикой ρ, а функция f в (2.4) есть евклидово расстояние до заданной точки $x^{oo} \in X$. Здесь полагаем, что

$$\mathbf{c}(x', x'', K) \stackrel{\triangle}{=} \rho(x', x'') \quad \forall\, x' \in X \quad \forall\, x'' \in X \quad \forall\, K \in \mathfrak{N}. \tag{7.1}$$

Пусть также $f(x) \stackrel{\triangle}{=} \rho(x, x^{oo})$ $\forall\, x \in X$. Тогда $\mathbf{c}(z, K) = \rho(z) = \rho(\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$ при $z \in X \times X$ и $K \in \mathfrak{N}$. Примем теперь, что $\omega^o \in \mathcal{R}_+[\mathbb{R}_+]$ определяется условиями

$$\omega^o(\delta) \stackrel{\triangle}{=} \sup(\{|\rho(z') - \rho(z'')|\colon (z', z'') \in (X \times X) \times (X \times X),\ \tilde{\rho}(z', z'') \leqslant \delta\}) \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{7.2}$$

Тогда в силу (4.2), (7.1) имеем $\omega_K = \omega^o$ $\forall\, K \in \mathfrak{N}$. С учетом (4.4) выводим теперь, что $\omega = \omega^o$. Отметим, что, как легко видеть,

$$|\rho(x', y) - \rho(x'', y)| \leqslant \rho(x', x'') \quad \forall\, x' \in X \quad \forall\, x'' \in X \quad \forall\, y \in X, \tag{7.3}$$

$$|\rho(x, y') - \rho(x, y'')| \leqslant \rho(y', y'') \quad \forall\, x \in X \quad \forall\, y' \in X \quad \forall\, y'' \in X. \tag{7.4}$$

Если $z' \in X \times X$, $z'' \in X \times X$, $x' \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(z')$, $y' \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(z')$, $x'' \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_1(z'')$ и $y'' \stackrel{\triangle}{=} \mathrm{pr}_2(z'')$, то при $K \in \mathfrak{N}$

$$|\mathbf{c}(z', K) - \mathbf{c}(z'', K)| = |\rho(x', y') - \rho(x'', y'')|$$
$$\leq |\rho(x', y') - \rho(x'', y')| + |\rho(x'', y') - \rho(x'', y'')| \leq \rho(x', x'') + \rho(y', y'')$$

(мы учли (7.3), (7.4)), а потому согласно (3.2)

$$|\mathbf{c}(z', K) - \mathbf{c}(z'', K)| \leqslant 2\tilde{\rho}(z', z''), \tag{7.5}$$

где $\mathbf{c}(z', K) = \rho(z')$ и $\mathbf{c}(z'', K) = \rho(z'')$. Подобно (7.5) имеем неравенство $|\rho(z') - \rho(z'')| \leqslant 2\tilde{\rho}(z', z'')$. Как следствие получаем с учетом (7.2), что

$$\omega^o(\delta) \leqslant 2\delta \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{7.6}$$

Далее, при $x' \in X$ и $x'' \in X$ имеем (см. (7.3)), что

$$|f(x') - f(x'')| = |\rho(x', x^{oo}) - \rho(x'', x^{oo})| \leqslant \rho(x', x''). \tag{7.7}$$

Поэтому согласно (4.3) в нашем случае

$$\Omega(\delta) \leqslant \delta \quad \forall\, \delta \in \mathbb{R}_+. \tag{7.8}$$

Отметим, что согласно (7.1) (см. также определение f в терминах ρ) имеем в силу (7.5) и (7.7), что наши конкретные функции $\mathbf{c}(\cdot, K)$, $K \in \mathfrak{N}$, и f непрерывны.

Предложение 7.1. *Если $\delta \in]0, \infty[$ и $(M_i)_{i \in \overline{1,N}} \in \prod_{i=1}^{N} (\delta - \mathrm{Fin})[\mathbb{F}_i]$, то*

$$V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] \leqslant V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}] \leq V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}] + 2N\delta + \delta.$$

Доказательство следует из предложения 5.1 с учетом (7.6), (7.8) и равенства $\omega = \omega^o$. Таким образом, по заданному ε, $\varepsilon > 0$, можно подобрать параметр δ, $\delta > 0$, так, что при любом выборе кортежа мегаполисов $(M_i)_{i \in \overline{1,N}}$ из множества (5.6) в виде $V[(M_i)_{i \in \overline{1,N}}]$ будет получено ε-приближение экстремума $V[(\mathbb{F}_i)_{i \in \overline{1,N}}]$ (напомним, что условие (5.11) предполагается выполненным). □

В силу предложения 7.1 ключевым становится вопрос решения задачи о посещении “больших” мегаполисов, т. е. мегаполисов $M_1, \ldots, M_N$, для которых при “малых” δ, $\delta > 0$, оказывается возможным реализовать включения

$$M_1 \in (\delta{-}\mathrm{Fin})[\mathbb{F}_1], \ldots, M_N \in (\delta{-}\mathrm{Fin})[\mathbb{F}_N]. \tag{7.9}$$

Вопрос о размещении мегаполиса M_j в $\mathbb{F}_j$ при $j \in \overline{1,N}$ затруднений не представляет (обычно речь идет о равномерных сетках). Более принципиальным является (см. (7.9)) вопрос об обеспечении достаточно больших значений $|M_1|, \ldots, |M_N|$. В этой связи заметим, что при условии $|M_j| \equiv \mu$, где $\mu \in \mathbb{N}$, общее количество возможных решений (пар маршрут-трасса) есть $\mu^N \cdot N!$.

Приведенные в настоящей работе алгоритмические конструкции были реализованы в виде программы для ПЭВМ (использован язык программирования C++), работающей под управлением 64-разрядной операционной системы семейства Windows, начиная с Windows 7. Вычислительная часть программы реализована в отдельном от интерфейса пользователя потоке. Для случаев решения задачи на плоскости имеется возможность графического представления траектории движения, отдельные участки графика могут быть увеличены, а все изображение может быть сохранено в файл графического формата bmp. Исходные данные и результаты работы программы хранятся в текстовом файле специальной структуры. Вычислительный эксперимент проводился на компьютере с центральным процессором Intel Core i7 объемом ОЗУ 64 гБ с установленной операционной системой Windows 7 Максимальная Sp1.

Рассматривались конкретные варианты решения задачи управления инструментом, различающиеся размерностью мегаполисов. Предполагалось, что $x^o = (0,0)$, $N = 33$, $|\mathbf{K}| = 63$. Опуская по соображениям объема описание мегаполисов, приведем результаты экспериментов, характеризующие качество решения, обозначая через μ мощность каждого из множеств $M_1, \ldots, M_{33}$ (предполагается их равномощность). Следуя построениям разд. 5 и 6, полагаем, что данные мегаполисы получены дискретизацией континуальных множеств $\mathbb{F}_1, \ldots, \mathbb{F}_N$ (границы прямоугольников, окружности), описание которых опустим по соображениям объема (см. рис. 1, 2). Условия предшествования типичны для задач такого типа: внутренние контуры деталей должны вырезаться раньше внешних; при размещении одних деталей в других раньше должна осуществляться резка внутренних деталей.

Ниже рассматриваются конкретные примеры применения вышеупомянутых аппроксимативных конструкций для исследования маршрутных задач с “непрерывными”, а точнее, континуальными множествами на плоскости. Исследуются модельные задачи, ориентированные на проблему, связанную с листовой резкой на машинах с ЧПУ.

Итак, мы рассматриваем достаточно простые детали, у которых, однако, имеется несколько контуров, подлежащих резке; представлены также вложенные системы деталей. Эти обстоятельства приводят к вышеупомянутым условиям предшествования. По самому смыслу задачи процедуры резки контуров могут и должны осуществляться по “непрерывным” эквидистантам, т. е. с некоторым запасом, обеспечивающим сохранность вырезаемых деталей. В этой связи уместно (см. введение) полагать, что данные эквидистанты образуют в своей совокупности кортеж (5.1). На рис. 1, 2 упомянутые “непрерывные” эквидистанты специально не выделяются, но легко угадываются по их дискретизациям, образующим соответствующие мегаполисы; мощности последних предполагаются совпадающими и достаточно большими. Так, на рисунках приведены варианты мегаполисов, возникающих из соображений дискретизации “непрерывных” эквидистант; каждый мегаполис состоит из 120 “городов”. По этой причине, кстати, мегаполисы, отвечающие “малым” эквидистантам (в смысле длины), воспринимаются зрительно как “непрерывные” (сплошные) замкнутые кривые. В случае протяженных эквидистант (на рисунках — прямоугольники) дискретизация уже заметна. Таким образом, на рис. 1, 2 можно увидеть и фрагменты, в большей степени отражающие конечную цель (посещение “непрерывных” эквидистант), и фрагменты, на которых проявляется аппроксимативная схема решения (приближение к цели посредством дискретизаций упомянутых эквидистант). Предложение 7.1 определяет “вилку” для значений аппроксимирующих задач ДО. Что же касается ДР для “непрерывной” задачи, доставляющих оптимум последней с высокой, но все же конечной степенью точности, то в их качестве можно использовать оптимальные ДР аппроксимирующих задач ДО. В предложении 7.1 (для более общего случая — в замечании 6.3) указаны соответствующие оценки близости по результату.

1) Вариант “незамкнутой” (и неосновной) задачи: функция f полагается тождественно равной нулю (функция $\mathbf{c}$ определялась при этом посредством (7.1)). При $\mu = 60$ и $\delta = 6,67$ получено $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 411,57$ и время счета — 5 ч 10 мин 58 с; при $\mu = 80$ и $\delta = 3,89$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 411,02$ и время счета — 5 ч 33 мин 59 с; при $\mu = 100$ и $\delta = 3,04$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 410,97$ и время счета — 6 ч 0 мин 39 с; при $\mu = 120$ и $\delta = 2,59$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 410,91$ и время счета — 6 ч 33 мин 5 с. В данном случае верхняя оценка в цепочке неравенств предложения 7.1 естественным образом улучшается за счет отбрасывания последнего слагаемого δ в связи с “занулением” терминальной функции f. График маршрута и трассы для $\mu = 120$ приведен на рис. 1.

2) Вариант “замкнутой” задачи (основной) при $x^{oo} = x^o = (0,0)$: функции $\mathbf{c}$ и f определены выше. При $\mu = 60$ и $\delta = 6,67$ получено значение $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 445,44$ и время счета — 5 ч 14 мин 24 с; при $\mu = 80$ и $\delta = 3,89$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 445,23$ и время счета — 5 ч 35 мин 15 с; при $\mu = 100$ и $\delta = 3,04$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 445,22$ и время счета — 6 ч 1 мин 51 с; при $\mu = 120$ и $\delta = 2,59$ $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}] = 445,04$ и время счета — 6 ч 34 мин 44 с. Для данного варианта оценочное свойство определяется предложением 7.1. График маршрута и трассы для $\mu = 120$ приведен на рис. 2.

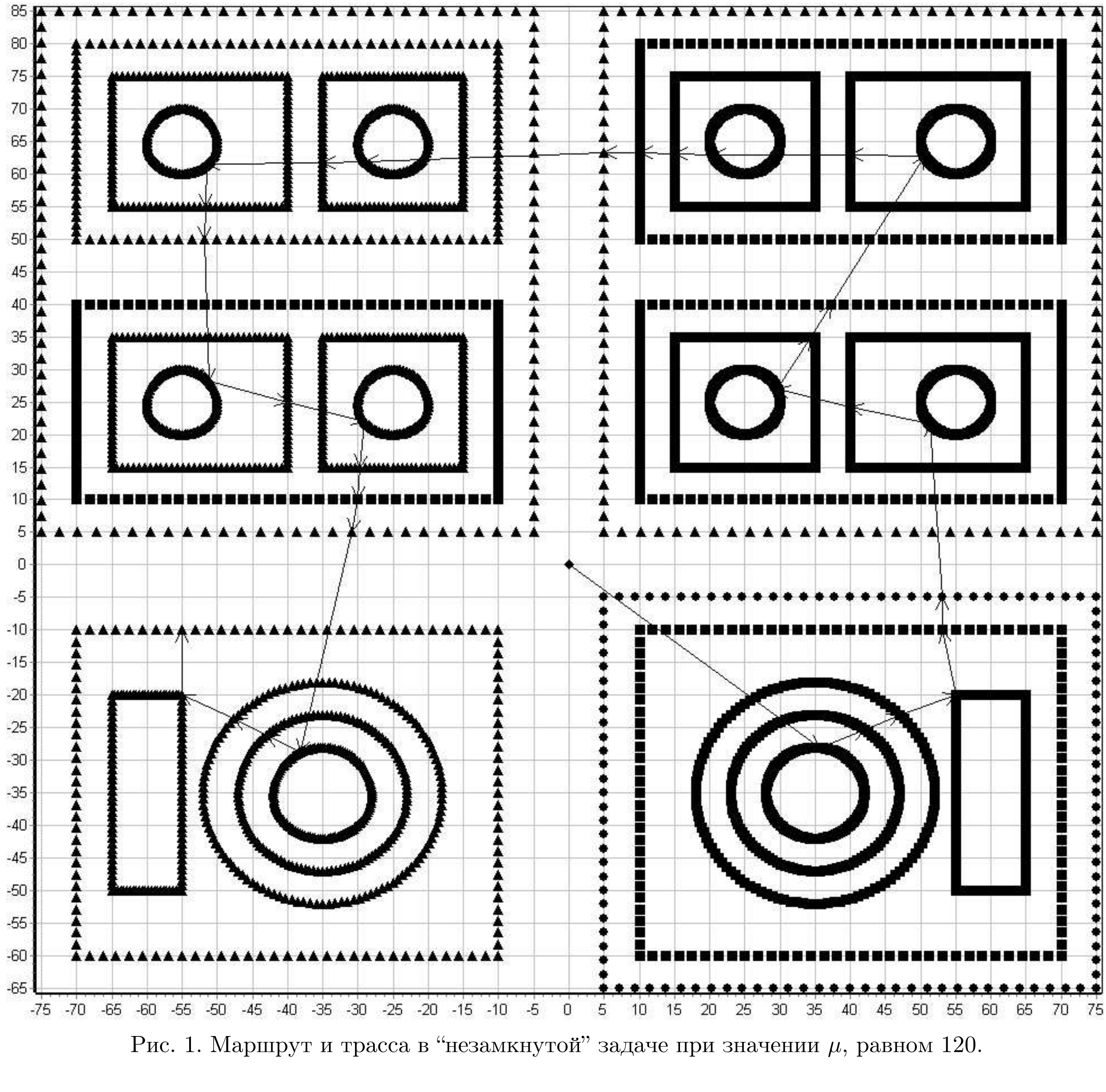


Рис. 1. Маршрут и трасса в “незамкнутой” задаче при значении μ, равном 120.

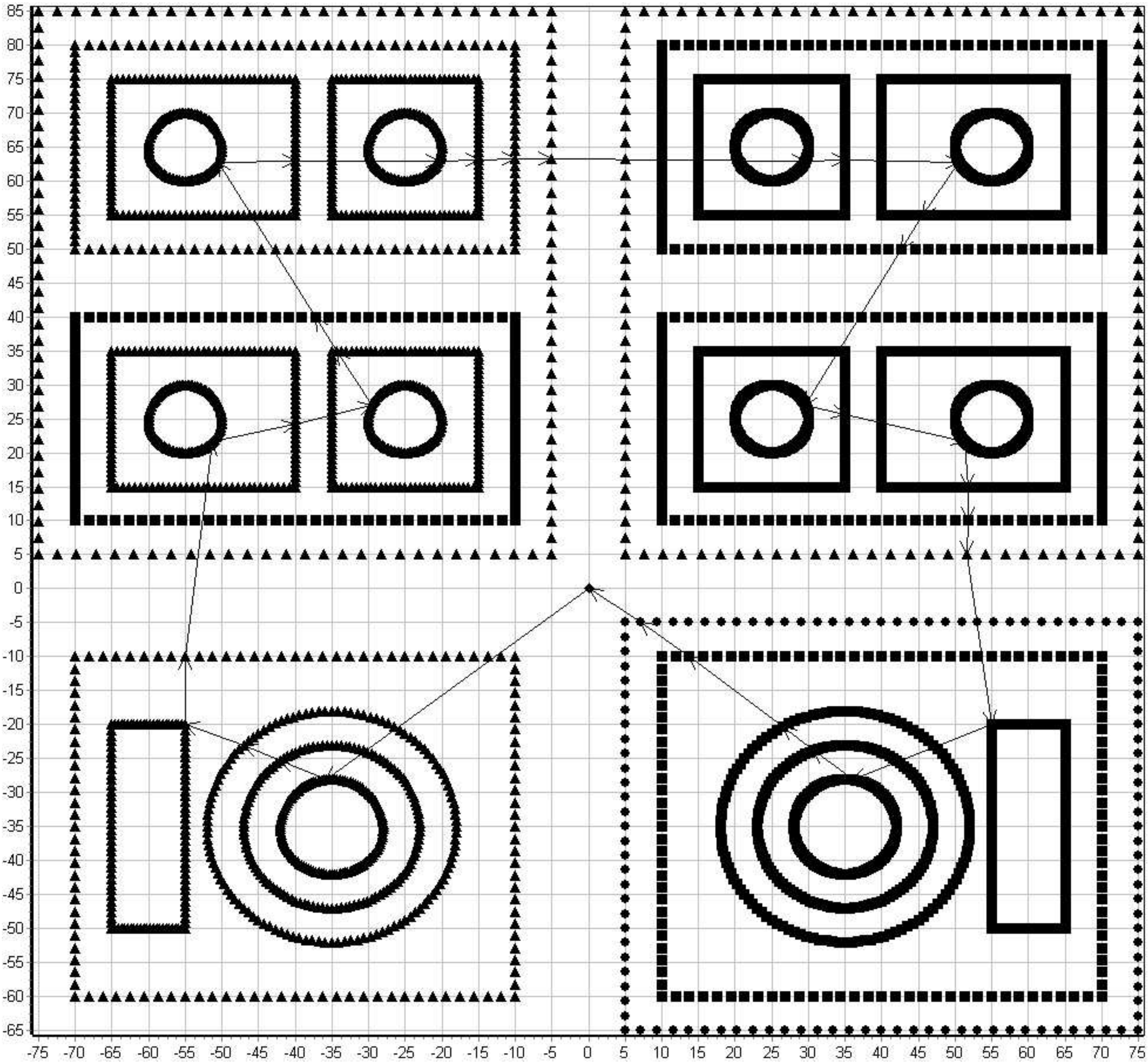


Рис. 2. Маршрут и трасса в “замкнутой” задаче при значении μ, равном 120.

Отметим, что как в случае 1), так и в случае 2) при увеличении мощности мегаполисов (параметр μ) неуклонно улучшался достигаемый результат (значение $V[(M_i)_{i\in\overline{1,33}}]$) за счет лучшего приближения к гипотетическим континуальным множествам (множества $\mathbb{F}_1,\ldots,\mathbb{F}_{33}$, которые мы в связи с экспериментом не обсуждали, могут быть легко восстановлены; это границы прямоугольников и окружности) при соответствующем увеличении времени счета. Такое поведение результатов является вполне логичным с точки зрения проблем вычислительной реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петунин А.А.** О некоторых стратегиях формирования маршрута инструмента при разработке управляющих программ для машин термической резки материала // Вестн. УГАТУ. 2009. Т. 13, № 2 (35). С. 280–286. (Управление, вычислительная техника и информатика.)
2. **Фроловский В.Д.** Автоматизация проектирования управляющих программ тепловой резки металла на оборудовании с ЧПУ // Информ. технологии в проектир. и произв. 2005. № 4. С. 63–66.
3. **Верхотуров М.А., Тарасенко П.Ю.** Математическое обеспечение задачи оптимизации пути режущего инструмента при плоском фигурном раскрое на основе цепной резки // Вестн. УГАТУ. 2008. Т. 10, № 2 (27). С 123–130. (Управление, вычислительная техника и информатика.)

4. Методы маршрутизации и их приложения в задачах повышения безопасности и эффективности эксплуатации атомных станций / В.В. Коробкин, А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, А.Г. Ченцов. М.: Новые технологии, 2012, 234 с.
5. **Ченцов А.Г.** Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // Автоматика и телемеханика. 2014. № 4. С. 170–190.
6. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Динамическое программирование в задаче маршрутизации с ограничениями и стоимостями, зависящими от списка заданий // Докл. РАН. 2013. Т. 453, № 1. С. 20–23.
7. **Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Элементы динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации // Проблемы управления. 2013. № 5. С. 12–21.
8. **Chentsov A.A., Chentsov A.G.** Dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem: the influence of inexact calculations // Math. Comput. Modelling. 2001. Vol. 33. P. 801–819.
9. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Вопросы теории // Автоматика и телемеханика. 1989. № 9. С. 3–34.
10. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Точные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 10. С. 3–29.
11. **Меламед И.И., Сергеев С.И., Сигал И.Х.** Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы // Автоматика и телемеханика. 1989. № 11. С. 3–26.
12. **Gutin G., Punnen A. P.** The traveling salesman problem and its variations. Berlin: Springer-Verlag, 2002. 850 p.
13. **Cook William J.** In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation. Princeton: Princeton University Press, 2012. 228 p.
14. **Ченцов А.Г.** Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2008. 238 с.
15. **Хелд М., Карп Р.М.** Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202–218.
16. **Беллман Р.** Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сб. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219–228.
17. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Задача маршрутизации с ограничениями, зависящими от списка заданий // Докл. РАН. 2015. Т. 465, № 2. С. 154–158.
18. **Кошелева М.С., Ченцов А.А., Ченцов А.Г.** О задаче маршрутизации с ограничениями, включающими зависимость от списка заданий // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 178–195.
19. **Chentsov A.G., Salii J.V.** A model of “nonadditive” routing problem where the costs depend on the set of pending tasks // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. 2015. Т. 8, № 1. С. 24–45. (Мат. моделирование и программирование.)
20. **Ченцов А.Г., Ченцов А.А.** Маршрутизация перемещений при динамических ограничениях: задача “на узкие места” // Вестн. Удмурт. ун-та. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 121–140. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
21. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
22. **Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р.** Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1999. 960 с.
23. **Дьедонне Ж.** Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
24. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
25. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** К вопросу о маршрутизации движения инструмента в машинах листовой резки с числовым программным управлением // НТВ СПбГПУ. 2013. № 2 (169). С. 103–111.
26. **Петунин А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А.** Об одной задаче маршрутизации перемещений инструмента при листовой резке деталей // Моделирование и анализ информационных систем. 2015. Т. 22, № 2. С. 278–294.
27. **Мину М.** Математическое программирование. М.: Наука, 1990. 488 с.

Поступила 21.06.2016

Ченцов Александр Георгиевич
член-корр. РАН, профессор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ченцов Алексей Александрович
канд. физ.-мат. наук
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: chentsov@binsys.ru

REFERENCES

1. Petunin A.A. On some strategies of forming tool routes at developing the control programs for the thermal machine cutting. *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta.*, 2009, vol. 13, no. 2 (35), Ser. Upravlenie, Vychisl. Mat., Inform., pp. 280–286 (in Russian).
2. Frolovskii V.D. Computer-aided design of the control programs for thermal metal cutting on NPC machines. *Informatsionnye Tekhnologii v Proektirovanii i Proizvodstve*, 2005, 4, pp. 63–66 (in Russian).
3. Verkhoturov M.A., Tarasenko P.Yu. Mathematical provision of problem of tool path optimization at flat shape nesting based on "chained" cutting. *Vestnik Ufimskogo Gosudarstvennogo Aviatsionnogo Tekhnicheskogo Universiteta*, 2008, vol. 10, no. 2 (27), Ser. Upravlenie, Vychisl. Mat., Inform., pp. 123–130 (in Russian).
4. Korobkin V.V., Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Chentsov A.G. *Metody marshrutizatsii i ikh prilozheniya v zadachakh povysheniya bezopasnosti i effektivnosti ekspluatatsii atomnykh stantsii* [Routing Methods and Their Applications to the Enhancement of Safety and Efficiency of Nuclear Plant Operation]. Moscow: Novye Tekhnologii Publ., 2012, 234 p.
5. Chentsov A.G. Problem of successive megalopolis traversal with the precedence conditions. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 4, pp. 728–744. doi:10.1134/S0005117914040122 .
6. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Dynamic programming in the routing problem with constraints and costs depending on a list of tasks. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 3, pp. 637–640. doi:10.1134/S1064562413060021 .
7. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Elements of dynamic programming in extremal route problems. *Automation and Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 3, pp. 537–550. doi:10.1134/S0005117914030102 .
8. Chentsov A.A., Chentsov A.G Dynamic programming method in the generalized traveling salesman problem: the influence of inexact calculations // Math. Comput. Modelling. 2001. Vol. 33, no. 8-9. P. 801–819.
9. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Issues in theory. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 9, pp. 1147–1173.
10. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman's problem. Exact methods. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 10, pp. 1303–1324.
11. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. The traveling salesman problem. Approximate algorithms. *Automation and Remote Control*, 1989, vol. 50, no. 11, pp. 1459–1479.
12. Gutin G., Punnen A.P. *The traveling salesman problem and its variations.* Berlin: Springer-Verlag, 2002, 850 p.
13. Cook William J. In pursuit of the traveling salesman: mathematics at the limits of computation. Princeton: Princeton University Press, 2012, 228 p.
14. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* [Extremal Problems of Routing and Distribution of Tasks: Questions of the Theory]. Moscow, Izhevsk: Regulyarnaya i Khaoticheskaya Dinamika Publ, 2008, 238 p.
15. Held M., Karp R.M. A dynamic programming approach to sequencing problems. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, 1962, vol. 10, no. 1, pp. 196–210. doi: 10.1137/0110015 . Translated in *Kiberneticheskii sb.*, Moscow, Mir Publ., 1964, vol. 9, pp. 202–218.
16. Bellman R. Dynamic programming treatment of the traveling salesman problem. *J. Assoc. Comput. Machinery*, 1962, vol. 9, pp. 61–63. doi: 10.1145/321105.321111 . Translated in *Kiberneticheskii sb.*, Moscow, Mir Publ., 1964, vol. 9, pp. 219–228.
17. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Route problem with constraints depending on a list of tasks. *Dokl. Math.*, 2015, vol. 92, iss. 3, pp. 685–688. doi: 10.1134/S1064562415060083 .
18. Kosheleva M.S., Chentsov A.A., Chentsov A.G. On a routing problem with constraints that include dependence on a task list. *Tr. Inst. Mat. Mekh. Uro RAN*, vol. 21, no. 4, 2015, pp. 178–195 (in Russian).

19. Chentsov A.G., Salii J.V. A model of “nonadditive” routing problem where the costs depend on the set of pending tasks. *Vestnik Yuzhno-Ural. Gosudarstvennogo Universiteta.*, 2015, vol. 8, no. 1, Ser. Mat. Modelirovanie i Programmirovanie, pp. 24–45 (in Russian).
20. Chentsov A.G., Chentsov A.A. Routing of displacements with dynamic constraints: “bottleneck problem”. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta*, 2016, vol. 26, no. 1, Ser. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternye nauki, pp. 121–140 (in Russian).
21. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv* [Set theory]. Moscow, Mir Publ., 1970, 416 p.
22. Cormen T., Leiserson C., Rivest R. *Introduction to algorithms.* Cambridge, MIT press, 1990, 1028 p. Translated under the title *Algoritmy: postroenie i analiz*, Moscow, MTsNMO Publ., 1999, 960 p.
23. Dieudonné J. *Foundations of modern analysis.* New York, Academic Press Inc, 1960, 361 p. Translated under the title *Osnovy sovremennogo analiza*, Moscow, Mir Publ., 1964, 430 p.
24. Engelking R. *General topology.* Warszawa, Polish Scientific Publishers, 1977, 626 p. Translated under the title *Obshchaya topologiya*, Moscow, Mir Publ., 1986, 751 p.
25. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. To the question about instrument routing in the automated machines of sheet cutting. *Nauchno-Tekhnicheskie Vedomosti SPbGPU*, 2013, no. 2 (169), Ser. Informatika. Telekommunikatsii. Upravlenie, pp. 103–111 (in Russian).
26. Petunin A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. About a routing problem of the tool motion on sheet cutting. *Modelirovanie i Analiz Informatsionnykh Sistem*, 2015, vol. 22, no. 2, pp. 278–294.
27. Minoux M. *Mathematical Programming. Theory and Algorithms.* Wiley, New York, 1986, 489 p. Translated under the title *Matematicheskoe programmirovanie*, Moscow, Nauka Publ., 1990, 488 p.

A.G. Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

A.A. Chentsov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia,
e-mail: chentsov@binsys.ru .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ РАЗРЕШАЮЩИЕ ФУНКЦИИ В ИГРОВЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

А. А. Чикрий

Рассматриваются игровые задачи о сближении траекторий нестационарной квазилинейной системы с переменным цилиндрическим терминальным множеством. Исследуется ситуация, когда не имеет места классическое условие Понтрягина. С помощью введения верхних и нижних разрешающих функций как селекторов специальных многозначных отображений получены достаточные условия разрешимости задач, которые отличаются от уже известных. Результаты иллюстрируются на модельном примере.

Ключевые слова: конфликтно-управляемый процесс, многозначное отображение, условие Понтрягина, интеграл Ауманна, разрешающая функция.

A. A. Chikrii. Upper and lower resolving functions in dynamic game problems.

The paper deals with game problems on the approach of trajectories of a nonstationary quasilinear system to a variable cylindrical terminal set. The case is studied when Pontryagin's classical condition fails. The notions of upper and lower resolving functions are introduced in the form of selections of special set-valued mappings. These functions are used to derive sufficient solvability conditions, which differ from the known ones. The results are illustrated with a model example.

Keywords: conflict-controlled process, set-valued mapping, Pontryagin's condition, Aumann's integral, resolving function.

MSC: 49N70, 91A25, 49N90, 91A23

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305

Введение

Математическая теория управления и теория динамических игр располагают широким спектром фундаментальных методов исследования управляемых эволюционных процессов различной природы. Ключевая роль в этой системе знаний принадлежит уральской научной школе, основанной Н. Н. Красовским [1–3], создавшим ряд классических методов в данной области. Сегодня его ученики [4–9] возглавляют авторитетные научные коллективы, работают в различных уголках мира и продолжают удерживать ведущие позиции.

Крупный вклад в становление и развитие указанного научного направления внесли, в частности, Н. Н. Субботина [10; 11] и В. Н. Ушаков [12; 13]. Их труды, посвященные изучению вязкостных решений уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана — Айзекса, построению стабильных мостов, и связанные с этими проблемами аналитические результаты вошли в сокровищницу мировой науки.

Данная работа примыкает к упомянутым исследованиям. Она посвящена изучению нестационарных игровых задач динамики на основе первого прямого метода Понтрягина [14; 15] и метода разрешающих функций [16–19]. Рассматривается случай, когда условие Понтрягина не имеет места. В этой ситуации вместо селектора Понтрягина, которого не существует, рассматривается некоторая функция сдвига, а с ее помощью вводятся специальные многозначные отображения. Они порождают верхние и нижние разрешающие функции двух типов, через которые формулируются достаточные условия завершения игры за некоторое гарантированное время. Дается сравнение уже упомянутых методов. Результаты иллюстрируются на модельном примере с простыми движениями игроков.

1. Постановка задачи

Динамика конфликтно-управляемого процесса в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ задается системой квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = A(t)z + \varphi(t, u, v), \quad z(t_0) = z_0, \quad t \geq t_0 \geq 0. \tag{1.1}$$

Здесь $A(t)$ — матричная функция порядка n, элементы которой являются измеримыми функциями; они к тому же суммируемы на любом конечном интервале $[t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$. Управляющие параметры игроков u и v в каждый момент времени выбираются из областей управления $U(t)$ и $V(t)$ соответственно, которые являются измеримыми компактнозначными отображениями с образами в $\mathbb{R}^n$ при $t \in [t_0, +\infty)$. Вектор-функция $\varphi(t, u, v)$ — блок управления — удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по t и непрерывна по совокупности (u, v) на соответствующих областях определения. Кроме того, будем предполагать, что

$$\|\varphi(t, u, v)\| \leq c(t) \ \text{ при } \ u \in U(t), \quad v \in V(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{1.2}$$

где $c(t)$ — некоторая локально суммируемая функция.

Вместе с нестационарной динамической системой (1.1) задано цилиндрическое терминальное множество

$$M^*(t) = M_0 + M(t), \quad t \in [t_0, +\infty), \tag{1.3}$$

где M_0 — линейное подпространство из $\mathbb{R}^n$, а $M(t)$ — измеримое компактнозначное отображение, образы которого принадлежат ортогональному дополнению L к M_0 в $\mathbb{R}^n$.

Определим информированность обоих игроков в процессе игры. Второй игрок в качестве допустимого управления выбирает произвольные измеримые селекторы многозначного отображения $V(t)$. Поскольку это отображение измеримо и замкнутозначно, то в силу теоремы об измеримом выборе [20, p. 308] такие селекторы существуют; их совокупность обозначим через Ω_E. Если первый игрок в момент t, $t \geq t_0$, имеет информацию о начальном состоянии процесса (t_0, z_0) и предыстории управления второго игрока

$$v_t(\cdot) = \{v(s) \colon v(s) \in V(s), \quad s \in [t_0, t]\},$$

т. е. $u(t) = u(t_0, z_0, t, v_t(\cdot))$, то будем говорить, что его управление предписано квазистратегией [2]. При этом допустимое управление $u(t)$ обязано быть измеримым селектором отображения $U(t)$.

В случае, когда первый игрок принимает решение в момент t лишь на основе информации о начальном состоянии (t_0, z_0) и мгновенном значении управления второго игрока, т. е. $u(t) = u(t_0, z_0, t, v(t))$, то говорят о контруправлении по Н. Н. Красовскому [1], которое предписывается стробоскопической стратегией О. Хайека [21]. Конечно же, и в этом случае $u(t)$ должно быть измеримым селектором отображения $U(t)$. Цель первого игрока — вывести траекторию процесса (1.1) на терминальное множество (1.3), второй игрок этому препятствует. При сделанных предположениях необходимо найти достаточные условия завершения игры (1.1)–(1.3) в пользу первого игрока за некоторое гарантированное время, указав управление первого игрока, которое обеспечивает ему этот результат.

2. Условие Понтрягина. Первый прямой метод

Обозначим через π ортопроектор, который действует из $\mathbb{R}^n$ в L, и введем многозначное отображение

$$\varphi(t, U(t), v) = \{\varphi(t, u, v) \colon u \in U(t)\}, \quad v \in V(t), \quad t \geq t_0.$$

В силу предположений о параметрах конфликтно-управляемого процесса (1.1)–(1.3) и теоремы о прямом образе [20, p. 314] это отображение измеримо по t и непрерывно по v в метрике Хаусдорфа.

Положим

$$W(t,\tau,v) = \pi\,\Phi(t,\tau)\varphi(\tau,U(\tau),v), \quad W(t,\tau) = \bigcap_{v\in V(\tau)} W(t,\tau,v), \quad t\geq\tau\geq t_0,$$

где $\Phi(t,\tau)$ — переходная матрица однородной системы (1.1) — матрица Коши или матрицант.

Многозначное отображение $W(t,\tau,v)$ является измеримым по τ и непрерывным по v, а отображение $W(t,\tau)$ измеримо по τ и замкнутозначно [20]. Измеримость по τ $W(t,\tau)$ следует из свойств пересечения счетного числа измеримых отображений, а также теоремы Кастена о существовании у измеримого отображения счетного всюду плотного апроксимирующего семейства измеримых селекторов [22, с. 119–121].

Условие Понтрягина. Многозначное отображение $W(t,\tau)$ имеет непустые образы при $t_0\leq\tau<t<+\infty$.

В силу условия Понтрягина и свойств многозначного отображения $W(t,\tau)$ в нем существует хотя бы один измеримый по τ селектор — селектор Понтрягина, что позволяет ввести интеграл Ауманна [20] от $W(t,\tau)$.

Положим

$$P\left(t_0,z_0\right) = \left\{t\geq t_0\colon \pi\Phi(t,t_0)z_0\in M(t)-\int\limits_{t_0}^{t} W(t,\tau)d\tau\right\} \tag{2.1}$$

и введем функцию

$$p\left(t_0,z_0\right)=\inf\left\{t\colon t\in P\left(t_0,z_0\right)\right\},$$

определяющую наименьшее гарантированное время схемы первого прямого метода Понтрягина [14; 15].

Теорема 1. *Пусть для игровой задачи* (1.1)–(1.3) *выполнено условие Понтрягина,* $P\left(t_0,z_0\right)\neq\varnothing$ *и* $P\in P\left(t_0,z_0\right)$.

Тогда траектория процесса (1.1) *может быть приведена на множество* (1.3) *в момент* P *с помощью некоторого контруправления.*

Доказательство. Из предположений теоремы и включения в соотношении (2.1) имеем

$$\pi\Phi\left(P,t_0\right)z_0\in M(P)-\int\limits_{t_0}^{P} W(P,\tau)d\tau.$$

Это означает, что существуют такая точка $m\in M(P)$ и, по определению интеграла Ауманна, такой измеримый селектор Понтрягина $\gamma(P,\tau)$, $\tau\in[t_0,P]$, что

$$\pi\Phi\left(P,t_0\right)z_0 = m-\int\limits_{t_0}^{P}\gamma(P,\tau)d\tau. \tag{2.2}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau,v)=\left\{u\in U(\tau)\colon \pi\Phi\left(P,t_0\right)\varphi\left(\tau,u,v\right)-\gamma(P,\tau)=0\right\}, \quad v\in V(\tau), \quad \tau\in[t_0,P]. \tag{2.3}$$

При произвольном допустимом управлении $v(\tau)$, $\tau\in[t_0,P]$, в силу теоремы Филиппова — Кастена [15, с. 375] в нем существует измеримый селектор $u_0(\tau)=u_0\left(\tau,v(\tau)\right)$, $\tau\in[t_0,P]$. Его и выберем в качестве управления первого игрока.

Тогда из формулы Коши для представления проекции решения уравнения (1.1)

$$\pi z(P) = \pi\Phi\,(P, t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{P} \pi\Phi\,(P, \tau)\,\varphi\,(\tau, u_0(\tau), v(\tau))\, d\tau$$

с учетом соотношения (2.2) и равенства в (2.3) получим $\pi z(P) = m \in M(P)$, что и завершает доказательство. $\square$

З а м е ч а н и е 1. Отметим отдельно, что селектор Понтрягина $\gamma(P, \tau)$ определяется в схеме доказательства и связан соотношением (2.2).

3. Верхние и нижние разрешающие функции

Далее условие Понтрягина не предполагается выполненным и, следовательно, селектор Понтрягина не существует. Его роль будет выполнять некоторая специальная функция. Обозначим

$$\Delta(t_0) = \{(t, \tau)\colon t_0 \le \tau \le t < +\infty\}\,.$$

Пусть $\gamma(t, \tau)$, $\gamma : \Delta(t_0) \to L$, — почти везде ограниченная измеримая по t функция, суммируемая по τ, $\tau \in [t_0, t]$, для каждого t, $t \ge t_0$. Назовем ее *функцией сдвига* и зафиксируем в дальнейшем. Обозначим

$$\xi(t) = \xi\,(t, t_0, z_0, \gamma(t, \cdot)) = \pi\Phi(t, t_0) z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(t, \tau) d\tau$$

и рассмотрим многозначное отображение

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}\,(t, \tau, v) = \big\{\alpha \ge 0\colon\ [\pi\,\Phi\,(t, \tau)\,\varphi\,(\tau, U(\tau), v) - \gamma\,(t, \tau)] \cap \alpha\,[M(t) - \xi(t)] \ne \varnothing\big\},\\ v \in V(\tau), \quad (t, \tau) \in \Delta(t_0).\end{gathered} \tag{3.1}$$

Поскольку условие Понтрягина не имеет места, то сдвинутое многозначное отображение $W(t, \tau, v) - \gamma(t, \tau)$ в выражении (3.1) при некоторых значениях переменных не содержит нуля. Если бы это было не так, то функция сдвига $\gamma(t, \tau)$ была бы селектором Понтрягина, а само условие Понтрягина было бы выполненным.

Сказанное выше означает, что для некоторых элементов $v \in V(\tau)$, $(t, \tau) \in \Delta(t_0)$, $0 \notin \mathfrak{A}\,(t, \tau, v)$, в то время как в традиционной схеме метода разрешающих функций [16; 17] с условием Понтрягина автоматически $0 \in \mathfrak{A}\,(t, \tau, v)$ для всех (t, τ, v), $v \in V(\tau)$, $(t, \tau) \in \Delta(t_0)$.

Взамен условия Понтрягина потребуем более слабое предположение.

У с л о в и е 1. Многозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t, \tau, v)$ имеет непустые образы при $v \in V(\tau)$, $(t, \tau) \in \Delta(t_0)$.

При этом условии многозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t, \tau, v)$ порождает верхнюю и нижнюю скалярные разрешающие функции первого типа

$$\alpha^*\,(t, \tau, v) = \sup\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\,(t, \tau, v)\}\,, \quad \alpha_*\,(t, \tau, v) = \inf\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}\,(t, \tau, v)\}\,,$$

зависящие от мгновенного значения управления второго игрока v, $v \in V(\tau)$.

Так как образы отображения $\mathfrak{A}\,(t, \tau, v)$ являются числовыми множествами положительной полуоси $\mathbb{R}_+$, то верхняя разрешающая функция $\alpha^*\,(t, \tau, v)$ является опорной функцией этого отображения в направлении $+1$. Учитывая свойства конфликтно-управляемого процесса (1.1)–(1.3), условие 1, теоремы о характеризации и обратном образе [20, р. 310, 315], можно показать [17], что замкнутозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t, \tau, v)$ при фиксировании $t \in \mathbb{R}_+$ является измеримым по τ при произвольном допустимом селекторе $v(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, а верхняя и нижняя разрешающие функции суперпозиционно измеримы по совокупности (τ, v) в силу теоремы об опорной функции [20, p. 317]; следовательно, функция $\alpha^*(t, \tau, v(\tau))$ измерима по τ, $\tau \in [t_0, t]$, и интегрируема по Лебегу при любой измеримой функции $v(\cdot) \in \Omega_E$.

Поставим в соответствие верхней разрешающей функции множество

$$T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \left\{ t \ge t_0 \colon \inf_{v(\cdot)\in\Omega_E} \int_{t_0}^{t} \alpha^*(t, \tau, v(\tau))\, d\tau \ \ge 1 \right\} \tag{3.2}$$

и его наименьший элемент $t(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \inf\{t \colon t \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))\}$, здесь $\gamma(\cdot,\cdot)$ — зафиксированная ранее функция сдвига.

Если для некоторого t, $t > t_0$, $\alpha^*(t,\tau,v) \equiv +\infty$ для $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, то значение интеграла в соотношении (3.2) положим равным $+\infty$; соответствующее неравенство выполнено автоматически и $t \in T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot))$. В случае, когда неравенство в (3.2) не имеет места при всех $t > t_0$, положим $T(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = \varnothing$ соответственно, $t(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)) = +\infty$.

Введем многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau) = \bigcap_{v\in V(\tau)} \mathfrak{A}(t,\tau,v), \quad (t,\tau) \in \Delta(t_0).$$

По аналогии с предыдущей ситуацией для $W(t,\tau)$ оно измеримо по τ, $\tau \in [t_0, t]$.

Обозначив, следуя [23], $\operatorname{dom}\mathfrak{A} = \{(t,\tau) \in \Delta(t_0) \colon \mathfrak{A}(t,\tau) \ne \varnothing\}$, сделаем более жесткое по сравнению с условием 1 предположение.

У с л о в и е 2. $\operatorname{dom}\mathfrak{A} = \Delta(t_0)$.

Многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau)$ порождает верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа

$$\alpha^*(t,\tau) = \sup\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau)\}, \quad \alpha_*(t,\tau) = \inf\{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau)\},$$

но уже не зависящие от мгновенного значения управления второго игрока.

По теореме об опорной функции [20] она измерима по τ, $\tau \in [t_0, t]$.

Установим связь между разрешающими функциями обоих типов.

Лемма. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса* (1.1)–(1.3) *с фиксированной функцией сдвига* $\gamma(t,\tau)$ *отображение* $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ *компактнозначно и выполнено условие* 2.

Тогда имеет место неравенство

$$\inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v) \ge \alpha^*(t,\tau), \quad (t,\tau) \in \Delta(t_0). \tag{3.3}$$

Если к тому же отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$, $v \in V(\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$, *выпуклозначно, то в* (3.3) *имеет место равенство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По построению рассматриваемые функции имеют вид

$$\inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v) = \inf_{v\in V(\tau)} \sup\big\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\big\},$$

$$\alpha^*(t,\tau) = \sup\Big\{\alpha \colon \alpha \in \bigcap_{v\in V(\tau)} \mathfrak{A}(t,\tau,v)\Big\}, \quad t_0 \le \tau \le t < +\infty.$$

Обозначим $\alpha^* = \alpha^*(t,\tau)$. Поскольку отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ компактнозначно, то и $\mathfrak{A}(t,\tau)$ является компактнозначным. К тому же $\alpha^* \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)$ при любом $v \in V(\tau)$. Отсюда следует, что $\alpha^* \le \sup\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\}, v \in V(\tau)$, поэтому,

$$\alpha^* \le \inf_{v\in V(\tau)} \sup\{\alpha \colon \alpha \in \mathfrak{A}(t,\tau,v)\} = \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t,\tau,v).$$

Из предположений о выпуклозначности и компактнозначности отображения $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ вытекает, что $\mathfrak{A}(t,\tau,v)=[\alpha_*(t,\tau,v),\alpha^*(t,\tau,v)]$, $v\in V(\tau),(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, а непустота образов отображения $\mathfrak{A}(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, при этом означает, что $\mathfrak{A}(t,\tau)=[\alpha_*(t,\tau),\alpha^*(t,\tau)]$, причем

$$\alpha_*(t,\tau)=\sup_{v\in V(\tau)}\alpha_*(t,\tau,v)\le\inf_{v\in V(\tau)}\alpha^*(t,\tau,v)=\alpha^*(t,\tau),\quad (t,\tau)\in\Delta(t_0).\qquad\square$$

Введем в рассмотрение числовые функции

$$\alpha^*(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\alpha^*(t,\tau)d\tau,\quad \alpha_*(t)=\int\limits_{t_0}^{t}\alpha_*(t,\tau)d\tau.$$

Верхняя разрешающая функция второго типа порождает множество

$$\Theta\left(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\right)=\{t\ge t_0\colon\alpha^*(t)\ge 1\},$$

его наименьший элемент $\delta\left(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\right)=\inf\{t\colon t\in\Theta\left(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\right)\}$.

З а м е ч а н и е 2. Чтобы сравнивать предложенные схемы отметим, что из условия Понтрягина следует условие 2, а из него вытекает условие 1.

4. Достаточные условия завершения игры

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть для игровой задачи* (1.1)–(1.3) *существует такая функция сдвига* $\gamma(t,\tau)$, $(t,\tau)\in\Delta(t_0)$, *что выполнено условие* 2, *а отображение* $M(t)$ *является выпуклозначным. Кроме того,* $T\left(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\right)\ne\varnothing$ *и*

$$T\in T\left(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)\right).$$

Тогда при $\alpha_*(T)<1$ *траектория процесса* (1.1) *может быть приведена на терминальное множество* (1.3) *в момент* T *с использованием некоторой квазистратегии, а если к тому же* $\alpha^*(T)\ge 1$, *то — в классе контрууправлений при любых допустимых управлениях второго игрока.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор отображения $V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$. Предположим, что $\alpha^*(T,\tau,v)\ne+\infty$ для $v\in V(\tau)$, $\tau\in[t_0,T]$.

Рассмотрим контрольную функцию

$$h(t)=1-\int\limits_{t_0}^{t}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau-\int\limits_{t}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau,\quad t\in[t_0,T].$$

Функция $\alpha^*(T,\tau,v(\tau))$, как отмечалось ранее, измерима по τ, $\tau\in[t_0,T]$; этим же свойством обладает и нижняя разрешающая функция второго типа $\alpha_*(T,\tau)$. Таким образом, функция $h(t)$ является абсолютно непрерывной на интервале $[t_0,T]$. Так как

$$h(t_0)=1-\int\limits_{t_0}^{T}\alpha_*(T,\tau)d\tau=1-\alpha_*(T)>0,$$

а по определению момента T $h(T)=1-\int_{t_0}^{T}\alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau\le 0$, то по известной теореме анализа существует такой момент времени t_*, $t_*\in[t_0,T]$, что $h(t_*)=0$. Отметим при этом, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot)$. Промежутки времени $[t_0, t_*)$ и $[t_*, T]$ будем называть *активным* и *пассивным* соответственно. Опишем способ управления первым игроком на каждом из них. Для этого рассмотрим компактнозначные отображения

$$\begin{aligned} U_1(\tau, v) \ &= \ \big\{u \in U(\tau)\colon \pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v) - \gamma(T,\tau) \in \alpha^*(T,\tau,v)[M(T) - \xi(T)]\big\}, \\ &\qquad\qquad v \in V(\tau), \quad \tau \in [t_0, t_*), \\ U_2(\tau, v) \ &= \ \big\{u \in U(\tau)\colon \pi\Phi(T,\tau)\varphi(\tau,u,v) - \gamma(T,\tau) \in \alpha_*(T,\tau)[M(T) - \xi(T)]\big\}, \\ &\qquad\qquad v \in V(\tau), \quad \tau \in [t_*, T]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Из условия 2 и выражений для многозначных отображений $\mathfrak{A}(T,\tau,v)$ и $\mathfrak{A}(T,\tau)$ следует, что отображения $U_i(\tau, v)$, $i = 1, 2$, имеют непустые образы.

В силу теоремы об обратном образе многозначные отображения $U_1(\tau, v)$, $U_2(\tau, v)$ при допустимых селекторах $v(\tau)$ являются измеримыми [17] для $\tau \in [t_0, T]$, а согласно теореме Филиппова — Кастена в каждом из них существует хотя бы по одному селектору $u_1(\tau, v)$ и $u_2(\tau, v)$, которые являются суперпозиционно измеримыми функциями.

Обозначим $u_1(\tau) = u_1(\tau, v(\tau))$, $u_2(\tau) = u_2(\tau, v(\tau))$, где $v(\tau)$ — произвольный измеримый селектор отображения $V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Положим управление первого игрока на активном промежутке равным $u_1(\tau)$, а на пассивном — $u_2(\tau)$. Таким образом, несмотря на то что на каждом из промежутков первый игрок использует не предысторию управления второго, а лишь его мгновенное управление, для определения момента переключения t_* предыстория все же необходима.

Из формулы Коши для представления решения системы (1.1) получим

$$\pi z(T) = \pi\Phi(T,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t^*} \pi\Phi(T,\tau)\varphi\left(\tau, u_1(\tau), v(\tau)\right) d\tau + \int_{t_*}^{T} \pi\Phi(T,\tau)\varphi\left(\tau, u_2(\tau), v(\tau)\right) d\tau. \tag{4.2}$$

Прибавив и вычтя в правой части (4.2) выражение $\int_{t_0}^{T} \gamma(T,\tau)d\tau$ и учитывая включения в (4.1), получим

$$\pi z(T) \in \pi\Phi(T,t_0)z_0 + \int_{t_0}^{t^*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))[M(T) - \xi(T)]d\tau + \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T,\tau)[M(T) - \xi(T)]d\tau + \int_{t_0}^{T} \gamma(T,\tau)d\tau$$

$$= \xi(T)\left(1 - \int_{t_0}^{t^*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau - \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T,\tau)d\tau\right) + \int_{t_0}^{t^*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))M(T)d\tau + \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T,\tau)M(T)d\tau$$

$$= \left[\int_{t_0}^{t^*} \alpha^*(T,\tau,v(\tau))d\tau + \int_{t_*}^{T} \alpha_*(T,\tau)d\tau\right] M(T) = M(T).$$

При этом учтено равенство $h(t_*) = 0$, а соотношения при интегрировании многозначных отображений с множеством $M(T)$ могут быть подверждены применением аппарата опорных функций [23]. Случай $\alpha^*(T,\tau,v) = +\infty$ для некоторых $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, как следует из выражения (3.1), возможен лишь при условиях $0 \in M(T) - \xi(T)$, $0 \in \pi\Phi(T,\tau)\varphi\left(\tau, U(\tau), v\right) - \gamma(T,\tau)$ для этих переменных, а в этом случае для них, очевидно,

$$\mathfrak{A}(T,\tau,v) = [0, +\infty), \quad \mathfrak{A}(T,\tau) = [0, +\infty).$$

Это дает возможность выбирать в качестве разрешающей функции в тех точках $\tau \in [t_0, T]$, где $\alpha^*(T,\tau,v(\tau)) = +\infty$, произвольную конечную суперпозиционно измеримую функцию, принимающую значения на полубесконечном интервале с одним лишь условием, чтобы итоговая разрешающая функция обеспечивала равенство $h(t_*) = 0$ для некоторого момента переключения t_*, $t_* \in [t_0, T]$. Тем самым построение управления сведено к предыдущему случаю.

Если же $\alpha^*(T, \tau, v) = +\infty$ для всех $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, то этот случай соответствует первому методу Понтрягина [14]. Действительно, включение

$$0 \in \pi\Phi(T, \tau)\varphi\left(\tau, U(\tau), v\right) - \gamma(T, \tau) \ \ \forall\, v \in V(\tau), \ \tau \in [t_0, T],$$

обеспечивает выполнение условия Понтрягина на $[t_0, T]$, а функция сдвига $\gamma(T, \tau)$ является селектором Понтрягина. Из другого включения $0 \in M(T) - \xi(T)$ вытекает соотношение

$$\pi\Phi(T, t_0)z_0 \in M(T) - \int\limits_{t_0}^{T} W(T, \tau)d\tau,$$

из которого в силу теоремы 1 следует возможность закончить игру (1.1)–(1.3) в момент T в классе стробоскопических стратегий.

Отдельно рассмотрим случай $\alpha^*(T) \geq 1$, а $\alpha_*(T) < 1$. Введем контрольную функцию

$$h_1(t) = 1 - \int\limits_{t_0}^{t} \alpha^*(T, \tau)d\tau - \int\limits_{t}^{T} \alpha_*(T, \tau)d\tau.$$

Естественно рассмотреть лишь случай $\alpha^*(T, \tau) \neq +\infty$, $\tau \in [t_0, T]$. Тогда

$$h_1(t_0) = 1 - \alpha_*(T) > 0, \quad h_1(T) = 1 - \alpha^*(T) \leq 0,$$

и в силу непрерывности функции $h_1(t)$ существует такой момент t_*^1, $t_*^1 \in [t_0, T]$, что $h_1(t_*^1) = 0$. Заметим, что момент t_*^1 уже не зависит от $v(\cdot)$. На обоих участках $[t_0, t_*^1)$ и $[t_*^1, T]$ рассмотрим многозначные отображения (4.1), причем в выражении для $U_1^1(\tau, v)$ вместо $\alpha^*(T, \tau, v)$ фигурирует функция $\alpha^*(T, \tau)$. Используя свойство компактнозначности отображений $U_1^1(\tau, v)$, $U_2(\tau, v)$ при допустимых селекторах $v(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, выберем в них измеримые селекторы на основании теоремы Филиппова — Кастена, которые и определяют допустимые управления на обоих участках. Заключительные рассуждения аналогичны выводам в предыдущей ситуации. □

З а м е ч а н и е 3. Из утверждения леммы вытекает включение

$$\Theta\left(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)\right) \subset T\left(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)\right).$$

При этом вторая часть теоремы 2, соответствующая случаю $\alpha_*(T) < 1$, $\alpha^*(T) \geq 1$, по существу, использует лишь разрешающие функции второго типа и характеризует те начальные состояния, из которых игра может быть закончена в классе контруправлений в момент T, причем $T \in \Theta\left(t_0, z_0, \gamma(\cdot, \cdot)\right)$. Приведем еще один тип достаточных условий завершения игры в классе контруправлений, основанный на свойстве выпуклозначности отображения $\mathfrak{A}\left(t, \tau, v\right)$, $v \in V(\tau)$, $(t, \tau) \in \Delta(t_0)$.

Введем в рассмотрение функции

$$\alpha(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \inf_{v \in V(\tau)} \alpha^*\left(t, \tau, v\right) d\tau, \quad \alpha(t, \tau) = 1/\alpha(t) \bullet \inf_{v \in V(\tau)} \alpha^*(t, \tau, v).$$

При этом предполагается выполненным следующее требование.

У с л о в и е 3. Для выбранной функции сдвига $\gamma(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta(t_0)$, функция

$$\inf_{v \in V(\tau)} \alpha^*(t, \tau, v)$$

измерима по τ, $\tau \in [t_0, t]$ и

$$\inf_{v(\cdot)\in\Omega_E} \int_{t_0}^{t} \alpha^*\left(t, \tau, v(\tau)\right) d\tau = \int_{t_0}^{t} \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(t, \tau, v) d\tau, \quad t > t_0.$$

Теорема 3. *Пусть для конфликтно-управляемого процесса* (1.1)–(1.3) *с некоторой функцией сдвига* $\gamma(t,\tau)$, $t,\tau \in \Delta(t_0)$, *выполнены условия* 2 *и* 3, *отображения* $\mathfrak{A}\left(t,\tau,v\right)$ *и* $M(t)$, $v \in V(\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$ *выпуклозначны, для* $T \in T\left(t_0, z_0, \gamma(\cdot,\cdot)\right) \neq \varnothing$ *имеет место неравенство*

$$\alpha(T,\tau) \geq \sup_{v\in V(\tau)} \alpha_*(T,\tau,v), \quad \tau \in [t_0, T]. \tag{4.3}$$

Тогда траектория процесса (1.1) *может быть приведена на терминальное множество в момент* T *с помощью подходящего контруправления.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\alpha^*(T,\tau,v) < +\infty$, $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Поскольку в силу неравенства в (3.2) $\alpha(T) \geq 1$, то

$$\alpha(T,\tau) = 1/\alpha(T) \bullet \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(T,\tau,v) \leq \inf_{v\in V(\tau)} \alpha^*(T,\tau,v), \quad \tau \in [t_0, T].$$

Учитывая неравенство (4.3), можно сделать вывод, что $\alpha(T,\tau) \in \mathfrak{A}\left(T,\tau,v\right)$ для $v \in V(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, а значит, $\alpha(T,\tau) \in \mathfrak{A}\left(T,\tau\right)$, $\tau \in [t_0, T]$.

Рассмотрим многозначное отображение

$$U(\tau, v) = \left\{u \in U(\tau) : \pi\Phi(T,\tau)\varphi\left(\tau,u,v\right) - \gamma(T,\tau) \in \alpha(T,\tau)[M(T) - \xi(T)]\right\}, \\ v \in V(\tau), \quad \tau \in [t_0, T]. \tag{4.4}$$

Отображение $U(\tau,v)$ компактнозначно, и поэтому при $v(\cdot) \in \Omega_E$ согласно теореме Филиппова — Кастена в нем существует измеримый селектор $u(\tau) = u\left(\tau, v(\tau)\right)$, $\tau \in [t_0, T]$. Положим управление первого игрока равным $u(\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$. Из формулы Коши с учетом включения в (4.4) получим

$$\pi z(T) \in \xi(T)\left[1 - \int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)d\tau\right] + \int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)M(T)d\tau.$$

Так как $M(T)$ — выпуклый компакт, а $\alpha(T,\tau)$, $\tau \in [t_0, T]$, — неотрицательная функция, причем $\int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)d\tau = 1$, то $\int_{t_0}^{T} \alpha(T,\tau)M(T)d\tau = M$, а, следовательно, $\pi z(T) \in M(T)$. □

5. Связь первого прямого метода Понтрягина и метода разрешающих функций

Установим некоторые связи между уже упомянутыми методами.

Утверждение 1. *Пусть задан конфликтно-управляемый процесс* (1.1)–(1.3). *Тогда для выполнения условия Понтрягина необходимо и достаточно, чтобы существовала такая функция сдвига* $\gamma(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$, *что*

$$0 \in \mathfrak{A}\left(t,\tau,v\right) \quad \forall\ v \in V(\tau), \quad (t,\tau) \in \Delta(t_0). \tag{5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $W(t,\tau) \neq \varnothing$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$. Тогда в силу замкнутозначности и измеримости по τ отображения $W(t,\tau)$ в нем существует измеримый по τ селектор $\gamma(t,\tau)$. Отсюда следует, что $0 \in W(t,\tau) - \gamma(t,\tau) \;\; \forall\, (t,\tau) \in \Delta(t_0)$ или

$$0 \in W(t,\tau,v) - \gamma(t,\tau) \;\; \forall\, v \in V(\tau),\; (t,\tau) \in \Delta(t_0).$$

Тем самым нулевое значение α в выражении (3.1) обеспечивает непустоту пересечения, а значит, справедливо включение (5.1).

Рассуждая в обратном порядке, придем к нужному выводу. □

Таким образом, в условиях утверждения 1 функция сдвига $\gamma(t,\tau)$ является селектором Понтрягина. При этом $0 \in \mathfrak{A}(t,\tau)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$, а соответствующие нижние разрешающие функции $\alpha_*(t,\tau,v) = \alpha_*(t,\tau) = 0 \;\forall\, v \in V(\tau),\; (t,\tau) \in \Delta(t_0)$.

Утверждение 2. *Пусть для некоторого t, $t > t_0$, $W(t,\tau) \neq \varnothing$, $\tau \in [t_0, t.]$ Тогда включение*

$$\pi\Phi(t,t_0)\, z_0 \in M(t) - \int\limits_{t_0}^{t} W(t,\tau)d\tau \tag{5.2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует такой измеримый по τ селектор Понтрягина, что

$$\xi(t,t_0,z_0,\gamma(t,\cdot)) \in M(t).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено включение (5.2). Тогда по определению интеграла Ауманна существует такой селектор Понтрягина, что

$$\pi\Phi(t,t_0)\, z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \gamma(t,\tau)d\tau = \xi(t,t_0,z_0,\gamma(t,\cdot)) \in M(t). \tag{5.3}$$

Обратно, если для некоторого селектора Понтрягина имеет место включение (5.3), то, перенеся интеграл от селектора в правую часть, тем более получим включение (5.2). □

Таким образом, если для некоторого t, $t \geq t_0$, и некоторого селектора Понтрягина выполнено включение (5.3), то $\mathfrak{A}(t,\tau,v) = [0+\infty) \;\forall\, v \in V(\tau), (t,\tau) \in \Delta(t_0)$. Тем самым $\mathfrak{A}(t,\tau) = [0+\infty)$, $(t,\tau) \in \Delta(t_0)$. Следовательно, в этом случае верхние разрешающие функции — обоих типов

$$\alpha^*(t,\tau,v) = \alpha^*(t,\tau) = +\infty, \quad v \in V(\tau), \quad (t,\tau) \in \Delta(t_0),$$

а соответствующие нижние разрешающие функции — нулевые.

Из приведенных схем сближения вытекают неравенства для соответствующих гарантированных времен

$$\inf_{\gamma(\cdot,\cdot)} t(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)) \leq \inf_{\gamma(\cdot,\cdot)} \delta(t_0,z_0,\gamma(\cdot,\cdot)) \leq p(t_0,z_0).$$

Случаи равенства изучены в работе [17].

В заключение приведем иллюстративный пример стационарной игры с простыми движениями с целью получить в явном виде верхние и нижние разрешающие функции, позволяющие сделать вывод о возможности окончания игры.

6. Пример

Рассмотрим простые движения

$$\dot{z} = u - v, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad z(0) = z_0, \quad v \in S, \quad u \in aS^\circ, \quad a > 1, \quad M^* = M = \varepsilon S, \quad M_\circ = 0.$$

Здесь S — единичный шар с центром в нуле, S° — его граница. Условие Понтрягина не имеет места, поскольку $aS^{\circ} \overset{*}{-} S = \varnothing$, $\quad \overset{*}{-}$ — геометрическая разность Минковского.

Выберем функцию сдвига $\gamma(t,\tau) \equiv 0$. Поскольку $\Phi(t,\tau) = E$ и $\pi = E$, E — единичная матрица, то $\xi(t) = z_0$. Тогда многозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t,\tau,v)$ не зависит от t и τ и имеет вид

$$\mathfrak{A}\,(t,\tau,v) = \{\alpha \geq 0\colon [aS^{\circ} - v] \cap \alpha[\varepsilon S - z_0] \neq \varnothing\}.$$

Оно обладает непустыми образами и условие 1 выполнено.

Верхняя разрешающая функция

$$\alpha^*\,(t,\tau,v) = \alpha^*\,(v,z_0) = \sup\{\alpha \geq 0\colon [aS^{\circ} - v] \cap \alpha[\varepsilon S - z_0] \neq \varnothing\}$$

$$= \sup\{\alpha > 0\colon \alpha z_0 - v \in (a+\alpha\varepsilon)S\} = \sup\{\alpha > 0\colon \|v - \alpha z_0\| = (a+\alpha\varepsilon)\}.$$

Тем самым она является большим положительным корнем квадратного уравнения

$$\left(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2\right)\alpha^2 - 2[(v,z_0) + a\varepsilon]\alpha - \left(a^2 - \|v\|^2\right) = 0$$

и, следовательно,

$$\alpha^*\,(v,z_0) = \frac{(v,z_0) + a\varepsilon + \sqrt{[(v,z_0)+a\varepsilon]^2 + \left(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2\right)\left(a^2 - \|v\|^2\right)}}{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2}.$$

Тогда

$$\min_{v\in S} \alpha^*\,(v,z_0) = \frac{a-1}{\|z_0\| - \varepsilon} \text{ достигается } \quad \text{при} \quad v = -\frac{z_0}{\|z_0\|}.$$

Отсюда следует, что $T = t\,(t_0,z_0,0) = \dfrac{\|z_0\| - \varepsilon}{a-1}$.

Нижняя разрешающая функция определяется из соотношения

$$\alpha_*\,(t,\tau,v) = \alpha_*\,(v,z_0) = \inf\{\alpha \geq 0\colon [aS^{\circ} - v] \cap \alpha[\varepsilon S - z_0] \neq \varnothing\}$$

$$= \sup\{\alpha \geq 0\colon \alpha\,(\varepsilon S - z_0) \subset aS - v\} = \sup\{\alpha \geq 0\colon \|v - \alpha z_0\| = a - \alpha\varepsilon\}.$$

Больший положительный корень соответствующего квадратного уравнения

$$\left(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2\right)\alpha^2 - 2[(v,z_0) - a\varepsilon]\alpha - \left(a^2 - \|v\|^2\right) = 0$$

имеет вид

$$\alpha_*\,(v,z_0) = \frac{(v,z_0) - a\varepsilon + \sqrt{[(v,z_0)-a\varepsilon]^2 + \left(\|z_0\|^2 - \varepsilon^2\right)\left(a^2 - \|v\|^2\right)}}{\|z_0\|^2 - \varepsilon^2}.$$

Далее получим $\sup\limits_{v\in S} \alpha_*\,(v,z_0) = a + 1/\|z_0\| + \varepsilon$ при $v = z_0/\|z_0\|$. Очевидно,

$$\alpha^*(t,\tau) = \inf_{v\in S} \alpha^*\,(t,\tau,v) = a - 1/\|z_0\| - \varepsilon, \quad \alpha_*(t,\tau) = \sup_{v\in S} \alpha_*\,(t,\tau,v) = a + 1/\|z_0\| + \varepsilon,$$

и многозначное отображение $\mathfrak{A}\,(t,\tau) \neq \varnothing$, если $\dfrac{a-1}{\|z_0\| - \varepsilon} \geq \dfrac{a+1}{\|z_0\| + \varepsilon}$, что приводит к неравенству $a\varepsilon \geq \|z_0\|$.

В данном примере $\alpha^*(t) = \dfrac{a-1}{\|z_0\| - \varepsilon} \bullet t$, $\quad \alpha_*(t) = \dfrac{a+1}{\|z_0\| + \varepsilon} \bullet t$. В момент $T \quad \alpha^*(T) = 1$, а $\alpha_*(T) = \dfrac{a+1}{\|z_0\| + \varepsilon} \bullet \dfrac{\|z_0\| - \varepsilon}{a-1}$ и $\alpha_*(T) < 1$ при $a\varepsilon > \|z_0\|$, и в этом случае заключение теоремы 2 остается в силе.

Отметим, что при $\varepsilon = 0$ возможность закончить данную игру в момент T из каких-либо точек z_0 в рассматриваемой схеме не следует, хотя окончание игры не позже чем за время T из любых начальных положений z_0 без каких-либо условий с любым ε следует из того факта, что функция $\alpha^*\,(t,\tau,v)$ не зависит от t [16, p. 99].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.** Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995. 322 p.
4. **Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.** Уравнения типа Гамильтона — Якоби в наследственных системах: минимаксные решения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6, № 1–2. С. 110–130.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. **Куржанский А.Б., Мельников Н.Б.** О задаче синтеза управлений: альтернированный интеграл Понтрягина и уравнение Гамильтона — Якоби // Мат. сб. 2000. Vol. 191, № 6. С. 69–100.
7. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
8. **Субботин А.И.** Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона — Якоби. М.: Наука, 1991. 216 с.
9. **Chentsov A.G.** Asymptotic attainability. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
10. **Субботина Н.Н., Шагалова А.Г.** О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона — Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, no. 2. С. 220–234.
11. **Subbotina N.N.** The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // J. Math. Sci (N.Y.). 2006. Vol. 135, no. 3. P. 2955–3091. doi: 10.1007/s10958-006-0146-2.
12. **Тарасьев А.Н., Ушаков В. Н.** О построении стабильных мостов в минимаксной игре сближения–уклонения. Деп. в ВИНИТИ № 2454–83. Свердловск, 1983. 61 с.
13. **Ушаков В. Н., Малев А.Г.** К вопросу о дефекте стабильности в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 199–222.
14. **Понтрягин Л.С.** Избранные научные труды. М.: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
15. **Никольский М.С.** Стробоскопические стратегии и первый прямой метод Л. С. Понтрягина в квазилинейных нестационарных дифференциальных играх преследования-убегания // Probl. Control Inform. Theory. 1982. Vol. 11, no. 5. P. 373–377.
16. **Chikrii A.A.** Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013. 424 p.
17. **Чикрий А.А.** Об одном аналитическом методе в динамических играх сближения // Тр. МИАН. 2010. Vol. 271. С. 76–92.
18. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1980. 198 с.
19. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
20. **Aubin J.-P., Frankowska H.** Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
21. **Hajek O.** Pursuit games. An introduction to the theory and applications of differential games of pursuit and evasion. New York: Acad. Press, 1975. 266 p. (Math. Science and Engineering; vol. 120).
22. **Половинкин Е.С.** Элементы теории многозначных отображений. М.: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.
23. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

Чикрий Аркадий Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Украины
зав. отделом
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины
e-mail: g.chikrii@gmail.com

Поступила 30.08.2016

REFERENCES

1. Krasovskii, N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenii* [Game problems on the encounter of motions]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 420 p.
2. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-Theoretical Control Problems.* New York: Springer, 1987, 517 p. This book is substantially revised version of the monograph *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
3. Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. Control under lack of information. Boston: Birkhauser, 1995, 322 p.
4. Krasovskii N.N., Lukoyanov N.Yu. Equations of Hamilton–Jacobi type in hereditary systems: minimax solutions. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2000, suppl. 1, pp. S136–S153.
5. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995, 625 p.
6. Kurzhanskii A.B., Melnikov N.B. On the problem of control synthesis: the Pontryagin alternating integral and the Hamilton–Jacobi equation. *Sbornik: Mathematics*, 2000, Vol. 191, no. 6, pp. 849–881. doi: 10.4213/sm484.
7. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Optimization of a guarantee in control problems]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 288 p.
8. Subbotin A.I. *Minimaksnye neravenstva i uravneniya Gamil'tona — Yakobi* [Minimax inequalities and Hamilton–Jacobi equations]. Moscow: Nauka Publ., 1991, 216 p.
9. Chentsov A.G. Asymptotic attainability. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 322 p.
10. Subbotina N.N., Shagalova L.G. On the continuous extension of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation by characteristics that form a central field of extremals. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 293, suppl. 1, pp. 183–198. doi: 10.1134/S0081543816050175.
11. Subbotina N.N. The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization *J. Math. Sci.* (*N.Y.*), 2006., vol. 135, no. 3, pp. 2955–3091. doi: 10.1007/s10958-006-0146-2.
12. Tarasyev A.M., Ushakov V.N. *O postroenii stabil'nykh mostov v minimaksnoi igre sblizheniya–ukloneniya* [Construction of stable bridges in the minimax game of pursuit-evasion]. Available from VINITI, 1983, Sverdlovsk, no. 2454–83, 61 p.
13. Ushakov V.N., Malev A.G. On the question of the stability defect of sets in an approach game problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. S229–S254. doi: 10.1134/S0081543811020179.
14. Pontryagin L.S. *Izbrannye nauchnye trudy. T.* 2 [Selected Scientific Works, vol. 2]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 576 p.
15. Nikol'skij, M.S. Stroboscopic strategies and the first direct Pontryagin method in quasilinear nonstationary differential pursuit-evasion games. *Problems Control Inform. Theory / Problemy Upravlen. Teor. Inform.*, vol. 11, no. 5, 1982, pp. 373–377 (in Russian).
16. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Busines Media, 2013, 424 p.
17. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2010, vol. 271, pp. 69–85. doi: 10.1134/S0081543810040073.
18. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods of control of several dynamic processes]. Moscow: Mosk. Gos. Univ. Publ., 1990, 198 p.
19. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk: Udmurt. State Univ. Publ., 2009, 266 p.
20. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990, 461 p.
21. Hajek O. Pursuit games. New York: Acad. Press, 1975, Ser. Math. in Science and Engineering, vol. 120, 266 p.
22. Polovinkin E.S. *Elementy teorii mnogoznachnykh otobrazhenii* [Elements of the theory of multivalued mappings]. Moscow, MFTI Publ., 1982, 127 p.
23. Pshenichny B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 320 p.

A. A. Chikrii, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of NAS of Ukraine, Prof., Glushkov Institute of Cybernetic of NAS of Ukraine, Kyiv, 03187 Ukraine,
e-mail: g.chikrii@gmail.com .

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

УДК 517.977

STABILIZATION OF DISCRETE TIME SYSTEMS BY REFLECTION COEFFICIENTS

T. Büyükköroğlu, G. Çelebi, V. Dzhafarov

For single-input single-output discrete-time systems, we consider a stabilization problem by a fixed order controller. A number of examples show that such controller may not exist. It is assumed that the controller depends linearly on a stabilizing parameter. In this case, the stabilizing controller defines an affine subset in the parameter space. We use the well-known property of the Schur stability region in the parameter space. According to this property the closed convex hull of this region is a polytope with known vertices. Every stable vector has a preimage in the open cube $(-1,1)^n$, and this preimage is called the reflection coefficient of this stable polynomial. By using reflection coefficients and polytopic properties of the stability region we obtain the stabilizability condition. This condition is expressed in terms of vertices of the stability region which is a multilinear image of the cube of reflection coefficients.

Keywords: discrete system, stability, affine stabilizer, reflection coefficient.

Т. Бююккёроглу, Г. Челеби, В. Джафаров. Стабилизация дискретных систем с использованием рефлективных коэффициентов.

Рассматривается задача стабилизации дискретных систем с одним входом и одним выходом регулятором заданного порядка. Ряд примеров показывает, что такой регулятор может не существовать. Предполагается, что регулятор линейно зависит от стабилизирующих параметров. В этом случае стабилизирующий регулятор определяет аффинное подмножество в пространстве параметров. В этом пространстве замкнутая выпуклая оболочка области устойчивости по Шуру является многогранником с известными вершинами. Каждый стабильный вектор имеет прообраз в открытом кубе $(-1,1)^n$, и этот прообраз называется рефлективным коэффициентом соответствующего стабилизирующего полинома. На основе рефлективных коэффициентов и свойств многогранной области устойчивости получено условие стабилизируемости. Это условие выражено в терминах вершин области устойчивости, которая является мультилинейным образом куба рефлективных коэффициентов.

MSC: 93C55, 93D15

DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-306-311

1. Introduction

Consider n-th degree polynomial $p(s)=a_1+a_2s+\cdots+a_ns^{n-1}+a_{n+1}s^n$ with $a_{n+1}\neq 0$. This polynomial is called Hurwitz stable when all its roots lie in the open left half plane and Schur stable when all its roots lie in the open unit disc. Division by a_{n+1} does not affect the stability property, therefore, we will assume that $a_{n+1}=1$, that is

$$p(s)=a_1+a_2s+\cdots+a_ns^{n-1}+s^n. \tag{1.1}$$

The polynomial (1.1) can be expressed as n-dimensional vector $p=(a_1,a_2,...,a_n)^T\in\mathbb{R}^n$. Define the following subsets of $\mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H}_n=\{p\in\mathbb{R}^n:\ \text{The polynomial (1.1) is Hurwitz stable}\},$$

$$\mathcal{S}_n=\{p\in\mathbb{R}^n:\text{The polynomial (1.1) is Schur stable}\}.$$

The set $\mathcal{H}_n$ $(n\geq 3)$ is open, nonconvex, unbounded, and the set $\mathcal{S}_n$ $(n\geq 3)$ is open, nonconvex and bounded [1–3]. In the case of $n=2$, the set $\mathcal{H}_2$ equals $\{(a_1,a_2)\colon a_1>0,\ a_2>0\}$, and $\mathcal{S}_2$ is the open triangle with vertices $(-1,0)$, $(1,2)$, $(1,-2)$. In [3], it is shown that the closed convex hull of $\mathcal{S}_n$ is a polytope in $\mathbb{R}^n$ with known vertices, i.e.

$$\overline{\text{co}}\, \mathcal{S}_n = \text{co}\{v^1, v^2, \ldots, v^{n+1}\}, \tag{1.2}$$

where v^i corresponds to the unstable polynomial $(s+1)^{i-1}(s-1)^{n-i+1}$ $(1 \le i \le n+1)$. In other words,

$$v^1(s) = (s-1)^n, \quad v^2(s) = (s-1)^{n-1}(s+1), \ldots, v^{n+1}(s) = (s+1)^n.$$

For example, in the case of $n = 3$

$$v^1 = (-1, 3, -3)^T, \quad v^2 = (1, -1, -1)^T, \quad v^3 = (-1, -1, 1)^T, \quad v^4 = (1, 3, 3)^T.$$

Construction of $\mathcal{S}_n$ recursively starts from $\mathcal{S}_1$ and $\mathcal{S}_2$. It is given in [3].

Consider the transfer function

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$$

and the stabilizer $C(s) = \dfrac{a(s,c)}{b(s,c)}$, where $c = (c_1, c_2, \ldots, c_l)^T \in \mathbb{R}^l$ is a stabilizing parameter and $n(s)$, $d(s)$, $a(s,c)$, $b(s,c)$ are polynomials. It is assumed that $l < n$ and $a(s,c)$, $b(s,c)$ depend on vector c in the affine linear way.

The closed loop characteristic polynomial is

$$p(s,c) = n(s)a(s,c) + d(s)b(s,c) = p^0(s) + c_1 p^1(s) + \cdots + c_l p^l(s). \tag{1.3}$$

Additionally, we assume that $\text{degree}(p^0(s)) = n$, $\text{degree}(p^i(s)) < n$ $(i = 1, 2, ..., l)$. From these conditions it follows that $p(s,c)$ is an unitary polynomial. The vector $c \in \mathbb{R}^l$ is called stabilizing if the corresponding $p(s,c)$ is Schur stable. In this paper, we consider the case where the number of stabilizing parameters l equals $n-1$, where n is the degree of the characteristic polynomial.

Many works have been devoted to the problems of stabilization of continuous and discrete time systems (see [4–9] and references therein).

In [4], a large number of Schur stable polynomials are generated using the known methods. These polynomials are projected on the set of characteristic polynomials and, as a result, stabilizing controller parameters are determined. The same idea is developed in [5] where random generations of stable segments of polynomials are used for determination of the stabilizing parameter.

In [6], stabilization algorithms are given for continuous time systems, both deterministic and stochastic. In [7], stabilization algorithms based on linear programming are given for discrete time systems.

In [8], stabilization conditions are obtained by estimating the distance between the affine controller set and the Schur stability region $\mathcal{S}_n$.

Remark 1. *The characteristic polynomial of the type (1.3) with* $l = n-1$ *appears in the stabilization problem for linear time-invariant discrete system*

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t)$$

(A, B *and* C *are real matrices of suitable dimension) with output feedback of the form* $u(t) = Ky(t)$ *and* $\text{rank}(K) = 1$ *(see* [3, Introduction]*).*

2. Main result

In this section, we give the definition of reflection coefficients for Schur stability and necessary and sufficient conditions for stabilization in the case of $l = n-1$.

Reflection coefficients or Schur-Szegö parameters [10; 11] for polynomials have been widely used in the stability problems of discrete systems. For $k_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ and $n \geq 3$ reflection map $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is defined by

$$(f_1, f_2, \dots, f_n)^T(k_1, \dots, k_n) = R_n(k_n) \begin{bmatrix} 0^T \\ R_{n-1}(k_{n-1}) \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0^T \\ R_1(k_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

where $R_j(k_j) = I_{j+1} + k_j E_{j+1}$, I_j is the $j \times j$ identity matrix, $j \times j$ matrix E_j is the following one:

$$E_j = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

The map f is multilinear ([11]), that is affine linear with respect to each component k_i. The explicit formulas for f are given in the special cases of $n = 3$ and $n = 4$:

$$f_1(k_1, k_2, k_3) = -k_3, \quad f_2(k_1, k_2, k_3) = -k_1k_2k_3 + k_1k_3 - k_2, \quad f_3(k_1, k_2, k_3) = k_1k_2 + k_2k_3 - k_1,$$

$$\begin{aligned} f_1(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -k_4, \\ f_2(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -k_1k_2k_4 - k_2k_3k_4 + k_1k_4 - k_3, \\ f_3(k_1, k_2, k_3, k_4) &= k_1k_2k_3k_4 - k_1k_2k_3 - k_1k_3k_4 + k_1k_3 + k_2k_4 - k_2, \\ f_4(k_1, k_2, k_3, k_4) &= k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_4 - k_1. \end{aligned}$$

According to [11], for arbitrary polynomial $f_1 + f_2 s + \dots + f_n s^{n-1} + s^n$ there exist $k_1, k_2, \dots, k_n$ such that $f_1 = f_1(k_1, \dots, k_n), \dots, f_n = f_n(k_1, \dots, k_n)$.

The numbers $k_1, k_2, \dots, k_n$ are called the reflection coefficients of the polynomial $f_1 + f_2 s + \dots + f_n s^{n-1} + s^n$. The following fact is important:

Proposition 1 [11]. *The unitary polynomial $p(s) = f_1 + f_2 s + \dots + f_n s^{n-1} + s^n$ is Schur stable if and only if its reflection coefficients satisfy the conditions $|k_i| < 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.*

According to the fact mentioned above, there exists a multilinear one to one map f from the open cube $(-1, 1)^n$ onto $\mathcal{S}_n$.

Define vectors $V^i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, where V^0 corresponds to $p^0(s)$ and V^i to $p^i(s)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. We add zero components for $p^i(s)$ $(i \geq 1)$ in order to complete n-dimension (see [8]).

For example, assume that $n = 4$, $l = 3$ and $p^0(s) = 1 + 2s - s^2 + s^3 + s^4$, $p^1(s) = 1 - 2s + s^2$, $p^2(s) = 1 + 2s$, $p^3(s) = 2 - s^2 + s^3$. Then $V^0 = (1, 2, -1, 1)^T$, $V^1 = (1, -2, 1, 0)^T$, $V^2 = (1, 2, 0, 0)^T$, $V^3 = (2, 0, -1, 1)^T$. Consider $n \times l$ matrix

$$A = \left[V^1, V^2, \dots, V^l\right].$$

From now, we assume that $V^1, V^2, \dots, V^l$ are linearly independent and $l = n - 1$. In this case, the family (1.3) corresponds TO $(n-1)$-dimensional affine subset $\mathcal{A} = \{Ac + V^0 \colon c \in \mathbb{R}^{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n$, and there exists stabilizing vector c if and only if

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{S}_n \neq \varnothing. \tag{2.4}$$

Since $\operatorname{rank}(A) = n - 1$ and $V^0 \neq 0$, the subset $\mathcal{A}$ is $(n-1)$-dimensional hyperplane which does not pass through the origin. Normal vector of $\mathcal{A}$ satisfies the following homogenous system

$$\langle N, V^1 \rangle = 0, \quad \langle N, V^2 \rangle = 0, \dots, \langle N, V^{n-1} \rangle = 0,$$

where the symbol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stands for the scalar product. The hyperplane has the equation

$$\langle N, x - V^0 \rangle = 0 \text{ or } \langle N, x \rangle = \alpha,$$

where $\alpha = \langle N, V^0 \rangle$.

Theorem 1. *Assume that $l = n-1$, and the vectors $V^1, V^2, \dots, V^{n-1}$ are linearly independent. There exists a stabilizing vector if and only if there exist vertices v^i, v^j of the polytope $\overline{\mathrm{co}}\,\mathcal{S}_n = \mathrm{co}\{v^1, v^2, \dots, v^{n+1}\}$ such that v^i and v^j lie in the opposite sides of the hyperplane $\mathcal{A}$. In other words, there exist v^i, v^j such that $\langle N, v^i\rangle > \alpha$, $\langle N, v^j\rangle < \alpha$.*

Proof.$\Leftarrow$). By the known property of a multilinear function defined on a box ([2, p. 247]), there exist vertices k^i and k^j of the cube $[-1,1]^n$ such that $f(k^i) = v^i$, $f(k^j) = v^j$. Consider a curve $\mathcal{L}$ connecting k^i and k^j which is contained in $(-1,1)^n$ with the exception of the points k^i and k^j. The image $f(\mathcal{L})$ intersects the hyperplane $\mathcal{A}$, since their end points v^i and v^j lie in the opposite sides of $\mathcal{A}$. Indeed, assume that $f(\mathcal{L})$ has equation $x = x(t)$ $(0 \le t \le 1)$. Consider scalar function $b(t) = \langle N, x(t)\rangle$. Then $b(0) = \langle N, x(0)\rangle = \langle N, v^i\rangle > \alpha$, $b(1) = \langle N, x(1)\rangle = \langle N, v^j\rangle < \alpha$ and by continuity there exists $t_* \in (0,1)$ such that $b(t_*) = \alpha$, i.e. $\langle N, x(t_*)\rangle = \alpha$ or $x(t_*) \in \mathcal{A}$.
$\Rightarrow$). Let c be a stabilizing parameter. Then the hyperplane $\langle N, x\rangle = \alpha$ intersects the set $\mathcal{S}_n$: $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}_n \neq \emptyset$. By the contrary, assume that $\langle N, v^i\rangle \ge \alpha$ for all $i = 1, 2, \dots, n+1$. Then the closed convex hull $\overline{\mathrm{co}}\,\mathcal{S}_n = \mathrm{co}\{v^1, v^2, \dots, v^{n+1}\}$ is contained in the half space $\{x : \langle N, x\rangle \ge \alpha\}$. From this and the openness property of $\mathcal{S}_n$, it follows that

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{S}_n = \varnothing$$

which is a contradiction. This contradiction proves the necessity.

Since the hyperplane $\mathcal{A}$ does not pass through the origin then the following corollary is true

Corollary 1. *Let all conditions of Theorem 1 be satisfied. Then there exists a stabilizing vector c if and only if there exists vertex v^i such that v^i and the origin lie in opposite sides of $\mathcal{A}$.*

3. Evaluation of stabilizing parameter

Theorem 1 indicates a way for evaluation of a stabilizing parameter. Assume that all conditions of Theorem 1 are satisfied. As noted above, the hyperplane $\mathcal{A}$ does not contain the origin, therefore, there exists vertex v^i such that v^i and the origin lie in the opposite sides of $\mathcal{A}$ (Corollary 1). Consider line segment $\mathcal{C}$ which connects the vertex k^i and the origin, where k^i is the preimage of v^i, that is $f(k^i) = v^i$. The segment $\mathcal{C}$ is defined by

$$k_j(t) = \begin{cases} t & \text{if } k^i_j = 1 \\ -t & \text{if } k^i_j = -1 \end{cases} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

The image $f(\mathcal{C})$ is contained in $\mathcal{S}_n$, except the point $f(v^i)$. The curve$f(\mathcal{C}) \subset \mathbb{R}^n$ depends on the parameter $t \in [0,1]$ and has the equation $x = \varphi(t)$. After inserting $x = \varphi(t)$ into equation of $\mathcal{A}$, we have the scalar equation with respect to t

$$\langle N, \varphi(t)\rangle = \alpha, \tag{3.5}$$

from which the values $t_* \in (0,1)$ and $x_* = \varphi(t_*)$ can be calculated. Finally, the value of c can be defined from the following system of linear equations

$$Ac + V^0 = x_*. \tag{3.6}$$

Example 1. Consider the transfer function and the stabilizer

$$G(s) = \frac{s-1}{s^3 + 2s^2 + s}, \quad C(s) = \frac{c_1 s^2 + c_2 s + c_3}{s}.$$

The closed loop system has the following characteristic polynomial

$$p(s,c) = s^4 + 2s^3 + s^2 + c_1(s^3 - s^2) + c_2(s^2 - s) + c_3(s - 1).$$

Here $V^0 = (0,0,1,2)^T$, $V^1 = (0,0,-1,1)^T$, $V^2 = (0,-1,1,0)^T$, $V^3 = (-1,1,0,0)^T$. The vectors V^1, V^2, V^3 are linearly independent and $N = (1,1,1,1)^T$ is a normal vector. The hyperplane $\mathcal{A}$ has equation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3 = 0$. The stability set $\mathcal{S}_4$ has five vertices: $v^1 = (1,4,6,4)^T$, $v^2 = (-1,-2,0,2)^T$, $v^3 = (1,0,-2,0)^T$, $v^4 = (-1,2,0,-2)^T$, $v^5 = (1,-4,6,-4)^T$. The vertex v^1 and the origin lie in the opposite sides of $\mathcal{A}$. Vertex v^1 is the image of the vertex $k^1 = (-1,-1,-1,-1)^T$ of the cube $[-1,1]^4$. The line segment $\mathcal{C}$ connecting k^1 and $(0,0,0,0)^T$ has equation $k_j(t) = -t$ $(j = 1,2,3,4)$. The image of $\mathcal{C}$ under f is the following curve in $\mathbb{R}^4$:

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = 2t^3 + t^2 + t, \quad x_3(t) = t^4 + 2t^3 + t^2 + t, \quad x_4(t) = 3t^2 + t \quad (0 \le t \le 1).$$

For the point of intersection of $f(\mathcal{C})$ and $\mathcal{A}$ we have the following equation $(t+1)^4 = 4$ which gives $t_* = \sqrt{2} - 1$, and

$$x_* = x(t_*) = (\sqrt{2}-1, 9\sqrt{2}-12, 8-5\sqrt{2}, 8-5\sqrt{2})^T.$$

Finally, the equation (3.6) gives the stabilizing value $c = (c_1, c_2, c_3)^T = (6-5\sqrt{2}, 13-10\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})^T$.

Example 2. Consider

$$G(s) = \frac{s-3}{s^2-4s-5}, \quad C(s) = \frac{c_1 s^2 + c_2 s + c_3}{s^2}.$$

The hyperplane $\mathcal{A}$ has the equation $x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 27x_4 + 153 = 0$ and $\langle N, v^i \rangle + 153 > 0$ for all vertices v^i $(i = 1, \ldots, 5)$. By Corollary 1, there is no a stabilizing parameter c.

Remark 2. *In some control problems it is required that the stabilizing vector varies in some box, not in the whole space $\mathbb{R}^l$. In this case, the set $\mathcal{A}$ is not a hyperplane. In this case, the above result* (*Theorem* 1) *is not applicable and the problem remains open.*

REFERENCES

1. Bhattacharyya S.P., Chapellat H. and Keel L.H. *Robust control: The parametric approach.* New York: Prentice-Hall PTR, 1995, 664 p.
2. Barmish B.R. *New tools for robustness of linear systems.* New York: Macmillan Publ., 1994, 410 p.
3. Fam A.T. and Meditch J.S. A canonical parameter space for linear systems design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, vol. 23, no. 3, pp. 454–458. doi: 10.1109/TAC.1978.1101744 .
4. Petrikevich Y.I. Randomized methods of stabilization of the discrete linear systems. *Automation and Remote Control*, 2008, vol. 69, no. 11, pp. 1911–1921. doi: 10.1134/S0005117908110076 .
5. Nurges Ü and Avanessov S. Fixed-order stabilising controller design by a mixed randomized/deterministic method. *Int. J. Control*, 2015, vol. 88, no. 2, pp. 335–346. doi: 10.1080/00207179.2014.953208 .
6. Fujisaki Y., Oishi Y. and Tempo R. Mixed deterministic/randomized methods for fixed order controller design, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2008, vol. 53, no. 9, pp. 2033–2047. doi: 10.1109/TAC.2008.929397 .
7. Malik W.A. , Darbha S. and Bhattacharyya S.P., A linear programming approach to the synthesis of fixed-structure controllers, *IEEE Trans. Automat. Control*, 2008, vol. 53, no. 6, pp. 1341–1352. doi: 10.1109/TAC.2008.927790 .
8. Büyükköroğlu T. Fixed order controller for Schur stability, *Math. Comput. Appl.*, 2016, vol. 21, no. 2, Paper No. 25, pp. 1–9. doi: 10.3390/mca21020025 .
9. Akyar H. , Büyükköroğlu T. and Dzhafarov V. On stability of parametrized families of polynomials and matrices, *Abstract and Applied Analysis*, 2010, Article ID 687951, pp. 1–16. doi: 10.1155/2010/687951 .

10. Levinson N., The Wiener RMS error criterion in filter design and prediction. *J. Math. Phys.*, 1946, vol. 25, no. 1–4, pp. 261–278. doi: 10.1002/sapm1946251261 .
11. Nurges Ü. New stability conditions via reflection coefficients of polynomials. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2005, vol. 50, no. 9, pp. 1354–1360. doi: 10.1109/TAC.2005.854614 .

Taner Büyükköroğlu
Associate Professor Doctor
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Anadolu University, 26470 Eskisehir, Turkey
e-mail: tbuyukkoroglu@anadolu.edu.tr

Received September 31, 2016

Gökhan Çelebi
Research Assistant Doctor
Department of Mathematics, Faculty of Arts and Sciences,
Bozok University, 66100 Yozgat, Turkey
e-mail: gokhan.celebi@bozok.edu.tr

Vakif Dzhafarov
Professor Doctor
Department of Mathematics, Faculty of Science,
Anadolu University, 26470 Eskisehir, Turkey
e-mail: vcaferov@anadolu.edu.tr

СОДЕРЖАНИЕ

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале “Труды Института математики и механики УрО РАН” публикуются оригинальные работы теоретического характера по современным разделам математики и механики.

“Труды Института математики и механики УрО РАН” являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы в виде математических утверждений и доказаны (нетривиальность и новизна). В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В “Труды Института математики и механики” не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла “Трудов Института математики и механики”).

Для решения вопроса о целесообразности публикации в “Трудах Института математики и механики” редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей.

С 2000 г. статьи журнала (по решению редколлегии) выходят на английском языке в издательстве Pleiades Publishing, Ltd; МАИК “НАУКА/INTERPERIODICA” под названием “Selected articles from Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN” как приложение к “Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics”.

Автор представляет в редакцию электронный вариант статьи (tex-формат и pdf-формат).

К статье должны быть приложены:

• Сопроводительное письмо в отсканированном виде от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.

• Информация со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата с аспирантов за публикацию рукописей не взимается. В настоящее время также не взимается плата за публикацию рукописей и других авторов.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтом математики и механики Уральского отделения РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Правила оформления рукописей:

• В статье должны быть сформулированы и доказаны НОВЫЕ результаты в виде теорем, утверждений, предложений.

• Текст статьи должен быть набран в LATEX2e в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.

• Представляемая в “Труды Института математики и механики УРО РАН” статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов на русском и английском языках. Аннотация (не менее 10-15 предложений) должна быть информативной (не содержать общих слов), оригинальной (отражать основное содержание статьи и результаты исследований), структурированной. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул. После аннотации должен быть указан код MSC от 1 до 5 значений (Mathematics Subject Classification).

• Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.

• Включение рисунков в статью теоретического характера носит исключительный характер и должно быть обосновано. Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

• Файлы со статьей — tex-источник и pdf-вариант статьи — высылаются на адрес e-mail: trudy@imm.uran.ru .

ЭТИКА НАУЧНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ

Редакционная коллегия научного журнала "Труды Института математики и механики УрО РАН" руководствуется в своей работе международными этическими правилами научных публикаций, включающими правила порядочности, конфиденциальности, надзора за публикациями, учет возможных конфликтов интересов и др. В своей деятельности редакция опирается на рекомендации и стандарты Комитета по этике научных публикаций — Committee on Publication Ethics, а также учитывает ценный опыт авторитетных международных журналов и издательств.

1.1. Этические принципы, которыми должен руководствоваться автор научной публикации.

Стандарты отчетности. Авторы должны предоставлять достоверные результаты проделанной работы, а также объективное обсуждение значимости исследования. Данные, лежащие в основе работы, должны быть представлены безошибочно. Статья должна содержать достаточное количество информации для проверки доказательств другими исследователями. Мошеннические или заведомо ошибочные утверждения приравниваются к неэтичному поведению и являются неприемлемыми.

Доступ к данным и их хранение. Автор должен быть готов предоставить исходные данные для редакционного обзора, а также предоставить открытый доступ к таким данным (согласно ALPSP-STM Statement on Data and Databases), если это осуществимо, и в любом случае быть готовым сохранять эти данные в течение разумного периода времени после публикации.

Оригинальность и плагиат. Авторы должны гарантировать, что результаты исследования, изложенные в рукописи, представляют собой самостоятельную и оригинальную работу. В случае использования фрагментов чужих работ и/или заимствования утверждений других авторов, в статье должны быть оформлены соответствующие библиографические ссылки с обязательным указанием автора и первоисточника и/или письменное разрешение автора. Любого рода плагиат расценивается как неэтичное поведение и является неприемлемым.

Множественные, повторные и конкурирующие публикации. Автор должен указать, что его работа публикуется впервые. Если элементы рукописи ранее были опубликованы в другой статье, Автор обязан сослаться на более раннюю работу и указать, в чем существенное отличие новой работы от предыдущей. Дословное копирование собственных работ и их перефразирование неприемлемы, они могут быть использованы только как основа для новых выводов. Подача статьи в более чем один журнал одновременно расценивается как неэтичное поведение и является неприемлемой.

Подтверждение источников. Автор обязуется признавать вклад других лиц, оказавших влияние на характер представленного исследования. Правильно ссылаться на публикации, которые имеют значение для выполнения представленной работы. Информация, полученная в частном порядке, путем разговора, переписки или обсуждения с третьими лицами, не должна использоваться без получения открытого письменного разрешения от их источника.

Авторство работы. Авторство должно быть ограничено теми лицами, кто внес значительный вклад в концепцию, структуру, исполнение или интерпретацию заявленного исследования. Все те, кто внес значительный вклад, должны быть обозначены как Соавторы. Другим людям, участвовавшим в некоторых аспектах работы, должна быть выражена благодарность. Автор должен также гарантировать, что все соавторы ознакомлены с окончательным вариантом статьи, одобрили его и согласны с ее представлением к публикации.

Раскрытие информации и конфликт интересов. Все авторы должны раскрывать в своих работах информацию о любых финансовых и других значительных конфликтах интересов, которые могут повлиять на результаты исследования или их интерпретацию. Все источники финансовой поддержки проекта должны быть раскрыты.

Существенные ошибки в опубликованных работах. В случае обнаружения Автором существенных ошибок или неточностей в публикации Автор должен написать “Письмо в редакцию” (на адрес trudy@imm.uran.ru) на имя Главного редактора журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН” с указанием неточностей и вариантом их исправления. Письмо будет напечатано в очередном номере журнала. Если Редактор или Издательство получили сведения от третьей стороны о том, что публикация содержит существенные ошибки, Автор обязан изъять работу или исправить ошибки в максимально короткие сроки.

1.2. Этические принципы в деятельности рецензента.

Рецензент осуществляет научную экспертизу авторских материалов, вследствие чего его действия должны носить непредвзятый характер, заключающийся в соблюдении следующих принципов:

Вклад в редакционные решения. Экспертная оценка помогает Редактору в принятии редакционных решений и посредством соответствующего сотрудничества Редактора и Автора может помочь Автору повысить качество работы.

Квалификация рецензента. Любой избранный для оценки работы Рецензент, считающий, что его квалификации недостаточно для рассмотрения исследования, представленного в научной работе, или не имеющий достаточно времени для быстрого выполнения работы, должен уведомить об этом Редактора и отказаться от рецензирования.

Конфиденциальность. Любая рукопись, полученная на рецензирование, должна рассматриваться как конфиденциальный документ. Недопустимо ее демонстрировать и обсуждать с любыми лицами, не имеющими на то полномочий от главного Редактора.

Объективность. Отзывы о научных работах должны быть объективными. Личная критика Автора неуместна. Рецензенты обязаны выражать свои взгляды четко и аргументировано.

Подтверждение источников. Рецензентам следует выявлять значимые опубликованные работы, соответствующие теме и не включенные в библиографию к рукописи. На любое утверждение (наблюдение, вывод или аргумент), опубликованное ранее, в рукописи должна быть соответствующая библиографическая ссылка. Рецензент должен также обращать внимание Редактора на обнаружение существенного сходства или совпадения между рассматриваемой рукописью и любой другой опубликованной работой, находящейся в сфере научной компетенции Рецензента.

Раскрытие информации. Неопубликованные данные, полученные из представленных к рассмотрению рукописей, нельзя использовать в личных исследованиях без письменного согласия Автора. Информация или идеи, полученные в ходе рецензирования и связанные с возможными преимуществами, должны сохраняться конфиденциальными и не использоваться с целью получения личной выгоды.

Конфликт интересов. Рецензент не должен принимать к рассмотрению рукописи при наличии конфликта интересов, вызванных конкуренцией, сотрудничеством или другими отношениями с любыми авторами или организациями, связанными со статьей.

1.3. Принципы профессиональной этики в деятельности редакции, редакционно-издательской группы и редакционной коллегии.

В своей деятельности редакция, сотрудники редакционно-издательской группы и члены редакционной коллегии журнала несут ответственность за обнародование авторских произведений, что влечет необходимость следования следующим основополагающим принципам:

Решение о публикации. Главный редактор журнала несет ответственность за решение о том, какие из статей, присланных в журнал, будут приняты к публикации, а какие отклонены. При принятии решения о публикации он руководствуется достоверностью представленных данных и научной значимостью рассматриваемой работы. Также главный редактор руководствуется политикой журнала и соблюдает юридические ограничения, избегая клеветы, нарушения авторских прав и плагиата.

Равенство авторов. Главный редактор оценивает рукопись исключительно по ее научному содержанию — безотносительно к расовой принадлежности, полу, религиозным убеждениям, национальности, гражданству, происхождению, социальному положению или политическим взглядам Авторов.

Конфиденциальность. Главный редактор, сотрудники редакции, члены редакционного совета и редакционной коллегии журнала не должны раскрывать никакую информацию по представленной в журнал статье никому, кроме автора(ов), назначенных и потенциальных рецензентов, других сотрудников редакции и, при необходимости, издателя.

Раскрытие конфликта интересов. Неопубликованные данные, полученные из представленных к рассмотрению рукописей, не должны использоваться главным редактором, сотрудниками редакции, редакционно-издательской группы или членами редакционной коллегии для личных целей или передаваться третьим лицам (без письменного согласия автора).

Надзор за публикациями. Главный редактор не должен допускать к публикации информацию, если имеется достаточно оснований полагать, что она является плагиатом.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 23 № 1 2017

Учредитель
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77–35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134–4889

Редакторы Н. Н. Моргунова, Н. М. Юркова
TEX-редактор Г. Ф. Корнилова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 27.02.17. Формат $60 \times 84^1/_8$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 36, 8. Уч.-изд. л. 32,0 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
http://journal.imm.uran.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО “ Типография ДЛЯ ВАС”
620026 г. Екатеринбургб ул. Сони Морозовой, 180 офис 100