

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

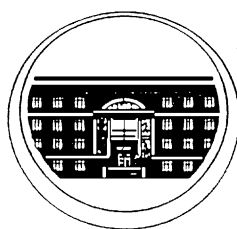
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 22

№ 2

2016



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 22, № 2. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2016. 324 с.

ISSN 0134-4889

DOI журнала: 10.21538/0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев
Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Антонов, д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко,
д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
канд. физ.-мат. наук М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук Х. Г. Гусейнов (Турция), д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов,
д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий,
канд. физ.-мат. наук П. Д. Лебедев, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,
д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных, д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь),
д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай,
канд. физ.-мат. наук Н. В. Маслова (отв. секретарь)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,
акад. РАН А. Б. Куржанский, д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов,
чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров, чл.-корр. РАН С. В. Матвеев,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,
чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков, чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,
чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

Отв. редактор выпуска
д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2016



DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-5-7

ЮРИЙ СЕРГЕЕВИЧ ОСИПОВ*(К восьмидесятилетию юбилею)*

7 июля 2016 г. отмечает 80-летие академик РАН Юрий Сергеевич Осипов — выдающийся ученый с мировым именем, крупный организатор науки. Ю. С. Осипов родился в 1936 г. в г. Тобольске, в семье служащих. Высшее образование получил на физико-математическом факультете Уральского государственного университета, который в 1959 г. успешно окончил. После окончания университета работал инженером на одном из оборонных предприятий г. Свердловска, затем был аспирантом, ассистентом, доцентом в Уральском государственном университете. В 1965 г. защитил кандидатскую диссертацию, в 1971 — докторскую. В 1975 г. ему было присвоено ученое звание профессора. В 1969 г. Ю. С. Осипов был избран старшим научным сотрудником Свердловского отделения Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (СОМИ). После преобразования СОМИ в Институт математики и механики УрО РАН работал старшим научным сотрудником, с 1972 г. — зав. лабораторией, с 1978 — заведующим отделом дифференциальных уравнений.

В 1986–1993 гг. Юрий Сергеевич был директором ИММ УрО РАН. Его научный авторитет и организаторская деятельность способствовали динамичному развитию института как ведущего научного центра в области математики и механики на Урале. В 1984 г. Ю. С. Осипов был избран членом-корреспондентом АН СССР, в 1987 — действительным членом Академии наук СССР. С 1991 по 2014 г. Юрий Сергеевич был Президентом Академии наук России, одновременно (по настоящее время) работая в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова заведующим кафедрой оптимального управления факультета вычислительной математики и кибернетики, а также научным руководителем отдела дифференциальных уравнений Института математики и механики УрО РАН. Юрий Сергеевич — главный редактор Большой российской энциклопедии, “Журнала вычислительной математики и математической физики” и председатель редколлегии ежегодника “Наука и человечество”, член редакционных коллегий ряда журналов математического профиля. Долгое время он был членом Президиума Правительства РФ, Совета Безопасности РФ, председателем Комиссии по Государственным премиям в области науки и техники при Президенте РФ, заместителем председателя Совета при Президенте РФ по науке и высоким технологиям.

Основные научные исследования Ю. С. Осипова посвящены теории управления, дифференциальным уравнениям и их приложениям. Можно отметить несколько направлений работ. В рамках первого направления (1960-е гг.) Ю. С. Осипов создал законченную теорию стабилизации стационарных и периодических динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом. Теория включает необходимые и достаточные условия стабилизации по первому приближению, в том числе в ряде основных критических случаев, и содержит новый принцип редукции систем с запаздыванием. В рамках второго направления (1970-е гг.) Юрий Сергеевич разработал теорию дифференциальных игр для динамических систем с запаздывающим аргументом. В ее основу была положена новая позицион-

ная формализация динамических игровых задач. Ключевой результат теории — утверждение об альтернативе в антагонистической дифференциальной игре для систем с запаздыванием. Согласно этому утверждению в классе позиционных законов управления (законов управления с обратной связью) всегда разрешается одна и только одна из двух взаимно противоположных задач о гарантированном управлении, стоящих перед контролирующими систему игроками-антагонистами. Важным достижением стал открытый Ю. С. Осиповым конструктивный локальный принцип управления системами с запаздыванием, который обобщает принцип экстремального сдвига, предложенный ранее Н. Н. Красовским для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Третье направление, в рамках которого Ю. С. Осипов работал в 1980–1990-е гг., посвящено созданию теории устойчивого динамического обращения управляемых систем. Основу этой новой теории составили методы позиционных дифференциальных игр и принципы регуляризации из теории некорректно поставленных задач. Юрий Сергеевич создал серию конструктивных алгоритмов для устойчивого восстановления в реальном времени ненаблюдаемых входов динамических систем по результатам неточных измерений их текущих состояний. Проведены многосторонние исследования погрешностей приближения, в ряде типичных случаев описаны оптимальные по точности алгоритмы. Результаты этих исследований вошли в монографии: Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V. “Inverse problems of ordinary differential equations: dynamical solutions” (New York: Gordon and Breach, 1995), Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. “Методы динамического восстановления входов управляемых систем” (Екатеринбург, 2011).

Помимо этих направлений Ю. С. Осипов в разные периоды получил серию оригинальных результатов в смежных областях. С начала 1980-х гг. им выполнен ряд работ по оптимизации форм, в одной из которых был дан ответ на вопрос о существовании оптимума, поставленный известным французским математиком Ж.-Л. Лионсом. В период создания теории динамического обращения Юрий Сергеевич активно использовал элементы теории приближения функций и, в частности, построил оптимальный неупреждающий оператор численного дифференцирования. Во второй половине 1990-х гг. в поле его научных интересов были задачи классической теории дифференциальных игр, эволюционные игры, обратные задачи динамики для нелинейных систем с распределенными параметрами, задачи оптимизации форм. Ю. С. Осиповым построена теория управления многомерными системами по принципу обратной связи в условиях неопределенности, охватывающая объекты, описываемые неоднородными граничными задачами для уравнений математической физики, дифференциально-функциональными уравнениями, абстрактными уравнениями с неограниченными операторами, а также объекты, обладающие эффектом последствия в управляющих силах и др. Будучи талантливым ученым-теоретиком, Ю. С. Осипов реализовал свои научные достижения и в прикладной тематике, связанной с созданием образцов новой техники. В 1960-е гг. им выполнен цикл исследований по плавности и устойчивости движения транспортных средств специального назначения, на основании которых при его участии были сконструированы и внедрены в серийное производство регулируемая пневматическая подвеска и опорно-сцепные устройства принципиально нового типа, обеспечившие требуемые характеристики движений. В 1970–1980-е гг., возглавляя отдел в Институте математики и механики УрО РАН, Юрий Сергеевич руководил широким кругом опытно-конструкторских работ, связанных с созданием летательных аппаратов. Проведенные под его руководством и при личном участии фундаментальные и прикладные исследования реализованы в конкретных изделиях.

Академик Ю.С.Осипов — создатель известной научной школы, которая включает коллективы исследователей Математического института РАН им. В. А. Стеклова, Института математики и механики УрО РАН, факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, работающих в области качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости и стабилизации динамических систем, теории оптимального управ-

ления и дифференциальных игр, математического моделирования, теории обратных задач. Среди его учеников — академик РАН, значительное число докторов наук, свыше 30 кандидатов. В 1976 г. за работы в области математической теории управления Ю. С. Осипову присуждена Ленинская премия в составе авторского коллектива. В 1993 г. за работы по прикладной тематике Юрий Сергеевич удостоен Государственной премии России в области науки и техники. Он награжден орденами Трудового Красного Знамени (1981), “За заслуги перед Отечеством” III степени (1996) и II степени (1999) и др. Среди его наград — Золотая медаль им. Л. Эйлера РАН за выдающиеся результаты в области математики и физики (1997), Золотая медаль им. А. Эйнштейна ЮНЕСКО за выдающийся вклад в теорию управления (2002). Ю. С. Осипов избран почетным членом и доктором многих зарубежных академий, научных и образовательных центров. Юрий Сергеевич уделяет большое внимание не только сугубо научным, но и организационным и общественным проблемам. Его вклад в их решение отмечен орденом Благоверного князя Даниила Московского I степени, медалью лауреата премии Кирилла и Мефодия. Академик Ю. С. Осипов — кавалер ордена Белого Креста Международного рыцарского движения.

Коллеги и ученики

УДК 517.988.68

**ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НОВОГО МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ
ЛИНИЙ РАЗРЫВА ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ¹****А. Л. Агеев, Т. В. Антонова**

В работе рассматривается некорректно поставленная задача локализации (определения положения) линий разрыва зашумленной функции двух переменных. Строятся новые регуляризующие методы локализации в дискретной форме. Особенностью новых методов является переменное ядро усреднения, что позволяет существенно упростить реализацию алгоритмов. Для построенных методов получены оценки точности локализации и другой важной характеристики метода — порога делимости.

Ключевые слова: некорректно поставленная задача, локализация особенностей, линия разрыва, регуляризация, дискретизация.

A. L. Ageev, T. V. Antonova. Discretization of a new method for localizing discontinuity lines of a noisy two-variable function.

We consider the ill-posed problem of localizing (finding the position of) lines of discontinuity of a noisy function of two variables. New regularizing methods of localization are constructed in a discrete form. In these methods, the averaging kernel is varying, which simplifies the implementation of the algorithms. We obtain estimates for the localization error of the methods and for their separability threshold, which is another important characteristic.

Keywords: ill-posed problem, localization of singularities, line of discontinuity, regularization, discretization.

MSC: 65J22, 68U10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-8-17

Введение

В некоторых прикладных задачах возникает проблема локализации (определения положения) линий, в окрестности которых измеряемая функция f двух переменных гладкая, а в каждой точке линии терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Такого рода задачи часто возникают при обработке изображений (ссылки на литературу можно найти в [1; 2]). Проблема заключается в том, что для многих типов возмущений обсуждаемая задача является некорректно поставленной [3; 4], т. е. положения линий разрыва известной зашумленной функции могут как угодно сильно отличаться от линий разрыва неизвестной точной функции. Именно этот случай рассматривается в настоящей работе. В качестве методов регуляризации используются методы усреднения функции двух переменных, построенные с помощью одномерных методов усреднения (ядро двумерного усреднения является произведением одномерных ядер усреднения).

Исследование усреднений для функций двух переменных опирается на исследования одномерных усреднений для локализации разрывов первого рода функций одной переменной [5–7]. В упомянутых работах для различной *априорной информации* о точной функции и различных видах возмущений построены регуляризующие методы усреднения, которые позволяют определить количество и аппроксимировать положение точек разрыва функции одной переменной с получением оценок точности локализации. Построению и теоретическому исследованию методов усреднения для локализации линий разрыва зашумленной функции двух переменных

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00629а).

посвящены работы [8–10]. В первых двух работах рассматривается различная априорная информация о точной функции. В работе [8] используется метод усреднения с ядром, которое получено сдвигом вдоль осей координат одной и той же двумерной функции, а усреднение представляет из себя двумерную свертку. Для задачи, рассматриваемой в работе [9] с другой априорной информацией об искомой функции простой метод из статьи [8] неприменим и используется более сложный метод “усреднения с поворотом”: усреднение проводится в системе координат, повернутой на угол ϑ относительно начала координат исходной системы, и зависит от третьей переменной — угла ϑ . В работе [10] рассматриваются вопросы дискретизации метода из работы [8].

Дискретизация и исследование метода “усреднения с поворотом” работы [9] вызывает серьезные трудности (неясно, как проводить дискретизацию по углам поворота; в случае, когда исходная функция уже задана в дискретном виде, реализация усреднения требует использования сложных аппроксимационных схем). В настоящей статье указанные трудности преодолеваются: для априорной информации о точной функции, аналогичной априорной информации в статье [9], строится новый регуляризирующий метод локализации в дискретной форме. Особенностью нового метода является новое переменное ядро усреднения, которое позволяет существенно упростить реализацию расчетного алгоритма и его теоретическое исследование. Для построенного метода получены оценки точности локализации и другой важной характеристики метода — порога делимости.

Также необходимо отметить, что возможна экономичная реализация построенного метода. Поскольку метод “усреднения с поворотом” работы [9] не дискретизован, то строго теоретически сравнить по числу операций новый метод и старый невозможно. Однако интуитивно кажется, что преимущество должно быть за новым методом. Отметим, что возможны и другие реализации идеи переменного ядра при построении методов усреднения, т. е. конструирование других новых методов локализации линий разрыва.

Первый раздел статьи посвящен вспомогательным построениям и оценкам. Во втором разделе предложен новый метод локализации линий разрыва зашумленной функции двух переменных в дискретной форме, и для него получены оценки точности локализации и порога делимости. Отметим, что оценки для нового дискретного метода имеют тот же порядок, что и оценки для непрерывного метода работы [9].

1. Вспомогательные оценки

Все построения в данном разделе являются непрерывными. Дискретизация проводится в следующем разделе. Вначале введем необходимые понятия для функции одной переменной. Пусть функция $g(x)$, имеет конечное число l разрывов первого рода в точках x_k , $k = 1, 2, \dots, l$, $\Delta_k = g(x_k + 0) - g(x_k - 0)$ — величины скачков; функция g и ее производная g' принадлежат множеству $L_2(-\infty, +\infty)$ (в точках x_k функция g' доопределена произвольным образом). Пусть на любом конечном отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва x_k , функция g абсолютно непрерывна. Множество таких функций обозначим через MW_2^1 ; норму в пространстве $L_2(-\infty, +\infty)$ будем обозначать $\|\cdot\|_{L_2}$.

Введем множество ΦF финитных усредняющих функций:

- (a) $\phi \in W_1^1(-\infty, +\infty)$; $|\phi'(t)| \leq C$, C — константа;
- (b) существуют $0 < \tau < 1$, $0 < a \leq 1$ такие, что $a \leq |\phi(t)| \leq 1$ для $t \in [-\tau, \tau]$;
- (c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Отметим, что для функций $\phi \in \Phi F$ нормы функций ϕ и ϕ' определены в $L_2(-\infty, +\infty)$ и ограничены.

Согласно лемме 1 работы [9] для любой функции $\phi \in \Phi F$ для любого $\lambda > 0$ существует

непрерывная функция

$$g_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)(\phi_\lambda(x-t))'_x dt, \quad \phi_\lambda(t) = \phi(t/\lambda),$$

для которой имеет место представление

$$g_\lambda(x) = \sum_{k=1}^l \Delta_k \cdot \phi_\lambda(x - x_k) + \alpha_\lambda(x), \quad \alpha_\lambda(x) = \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} g'(t)\phi_\lambda(x-t)dt, \quad (1.1)$$

где $\sup_x |\alpha_\lambda(x)| \leq \|\phi\|_{L_2} \|g'\|_{L_2} \lambda^{1/2}$.

Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ имеет конечное число линий разрыва $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, l$ (см. рис. 1); вне этих линий функция f гладкая. Точные условия на линии разрыва и поведение функции f вне разрывов будут приведены ниже.

Зафиксируем некоторое значение переменной $y = \bar{y}$ и рассмотрим полосу

$$D = \{(x, y): -\infty < x < +\infty, |y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}\},$$

где величина $\bar{\delta} > 0$ может быть сколь угодно малой. Пусть линии $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, l$, в полосе D можно задать функциями $x = \gamma_k(y)$. Через x_k обозначены точки пересечения кривых Γ_k с линией $y = \bar{y}$: $x_k = \gamma_k(\bar{y}), k = 1, 2, \dots, l$.

Введем множество $D_x MW_2^1$ функций двух переменных (априорная информация на точную функцию), для которых в полосе D выполнены следующие условия:

(*) $f(x, y)$ принадлежит множеству MW_2^1 для почти всех y таких, что $|y - \bar{y}| \leq \bar{\delta}$ и $\|df(x, y)/dx\|_{L_2(D)} \leq r$ (без ограничения общности можно считать, что $r = 1$);

(**) для любой точки $(x, y) \in \Gamma_k, k = 1, 2, \dots, l$, существуют конечные величины $f(x \pm 0, y)$, и они не равны; соответствующий скачок функции обозначим через $\Delta_k(y)$, $k = 1, 2, \dots, l$; $\Delta_k(y)$ — непрерывная функция; существуют положительные константы $\Delta^{\min}, \Delta^{\max}$: $\Delta^{\min} \leq \min_{k, |y-\bar{y}| \leq \bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \leq \max_{k, |y-\bar{y}| \leq \bar{\delta}} |\Delta_k(y)| \leq \Delta^{\max}$;

(***) в полосе D линии $\Gamma_k, k = 1, 2, \dots, l$, — гладкие: существуют производные γ'_k, γ''_k , и $\max_k |\gamma'_k(\bar{y})| \leq M_1, \max_{k, |y-\bar{y}| \leq \bar{\delta}} |\gamma''_k(y)| \leq M_2, M_1, M_2$ — константы.

Отметим, что в работе [9] на множество точных функций накладывались более жесткие условия: требовалось существование для всех направлений τ частной производной $\partial f(x, y)/\partial \tau$ вместо $df(x, y)/dx$.

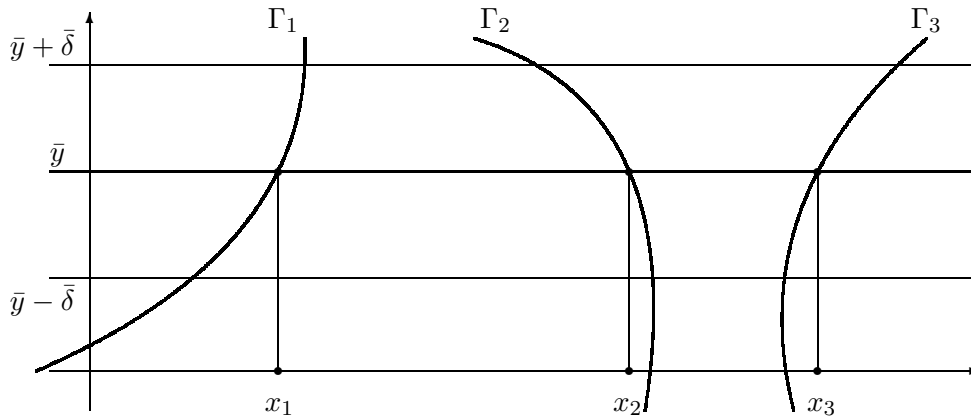


Рис. 1. Локализация линий разрыва функции двух переменных: Γ_k — линии разрыва функции f ; x_k — аппроксимируемые величины.

Постановка задачи. Пусть функция $f \in D_x MW_2^1$. Требуется по зашумленной функции $f^\delta \in L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)$ и уровню погрешности δ таким, что $\|f - f^\delta\|_{L_2(-\infty, +\infty; -\infty, +\infty)} \leq \delta$, определить число l и аппроксимировать точки $\{x_k\}_1^l$ с оценкой точности локализации.

Методы локализации [5–9] основаны на построении и исследовании вспомогательной функции. Поскольку возмущение $f - f^\delta$ двумерно, то нужно проводить усреднение по двум переменным. Для усреднения по одной переменной возьмем усредняющую функцию из множества ΦF . Для усреднения по второй переменной введем второй класс усредняющих функций Ψ , который состоит из финитных функций $\psi(t)$, $t \in (-\infty, +\infty)$, удовлетворяющих условиям

$$(a') \psi \in L_2(-\infty, +\infty);$$

$$(b') \int_{-1}^1 \psi(t) dt = 1;$$

$$(c') \psi(t) = 0 \text{ для } t \notin [-1, 1]; \psi(t) \geq 0 \text{ для } t \in [-1, 1].$$

Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\left(\frac{t}{\lambda_1}\right), \quad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2} \psi\left(\frac{t}{\lambda_2}\right), \quad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Ядро усреднения для функции $f^\delta(x, y)$ будем конструировать с помощью сдвига произведения функций $(\phi_{\lambda_1}(x))' \psi_{\lambda_2}(y)$ так же, как в работах [8–10]. Однако в отличие от этих работ, область интегрирования будет состоять из $2M + 1$ прямоугольника ($M > 0$ — целое число) со сторонами, параллельными осям координат (см. рис. 2) и с центрами на прямой, угол наклона которой к оси y равен величине ϑ .

Введем $\bar{\lambda}_2 = (2M + 1)\lambda_2$. Положим для $x \in (-\infty, +\infty)$, $\bar{y}^i = \bar{y} + 2i\lambda_2$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$,

$$F_{\lambda_1 \lambda_2}^{\delta, i}(x) = \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \int_{x - \lambda_1}^{x + \lambda_1} f^\delta(\xi, y) (\phi_{\lambda_1}(x - \xi))'_x \psi_{\lambda_2}(\bar{y} - y) d\xi dy. \quad (1.2)$$

Тогда, полагая $\tau^i(x, \vartheta) = x + 2i\lambda_2 \operatorname{tg} \vartheta$, $\vartheta \in [-\arctg M_1, \arctg M_1]$, вспомогательную функцию вычисляем по формуле

$$\begin{aligned} F_{\lambda_1 \lambda_2}^{\delta}(x, \vartheta) &= \sum_{i=-M}^M F_{\lambda_1 \lambda_2}^{\delta, i}(\tau^i(x, \vartheta)) \\ &= \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \int_{\tau^i(x, \vartheta) - \lambda_1}^{\tau^i(x, \vartheta) + \lambda_1} f^\delta(\xi, y) (\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi))'_x \psi_{\lambda_2}(\bar{y} - y) d\xi dy. \end{aligned} \quad (1.3)$$

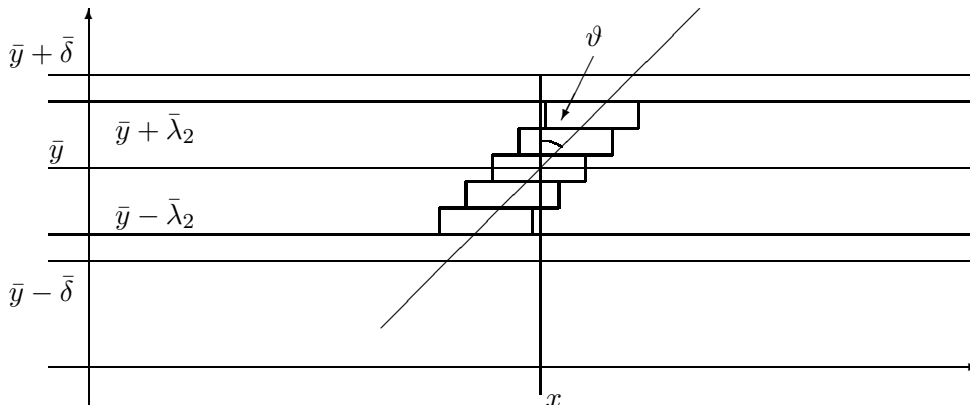


Рис. 2. Область интегрирования, состоящая из пяти прямоугольников при $M=2$.

Пределы изменения угла ϑ выбраны таким образом, что для каждой кривой Γ_k величина $\vartheta_k = \arctg \gamma'_k(\bar{y})$ принадлежит отрезку $[-\arctg M_1, \arctg M_1]$.

Дискретизация функции $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta$ по переменным x, ϑ будет проведена в следующем разделе. Прежде получим нужные неравенства для функции $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta)$ вне окрестностей точек x_k для всех ϑ и в окрестности точек x_k для ϑ , близких к ϑ_k .

Введем величины $\Delta t = M_1/(2M)$, $K = \lambda_1 + 3M_1 \bar{\lambda}_2$, где $\bar{\lambda}_2 = (2M + 1)\lambda_2$. Напомним, что M_1, M_2 — константы из условия (**), величина $\bar{\delta}$ входит в определение полосы D .

Лемма. Пусть $f \in D_x M W_2^1$, зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\bar{\lambda}_2 \leq \min\{\bar{\delta}, 4M_1/M_2\}$ в условиях рассматриваемой задачи справедливы следующие утверждения:

(а) если $|x - x_k| \geq K, k = 1, 2, \dots, l$, то для функции $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta)$, определенной равенством (1.3), для всех $\vartheta \in [-\arctg M_1, \arctg M_1]$ имеет место оценка

$$|F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta)| \leq A_0 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} + \frac{A_1 \delta}{(\lambda_1 \bar{\lambda}_2)^{1/2}},$$

где $A_0 = \|\phi\|_{L_2} \|\psi\|_{L_2}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2} \|\psi\|_{L_2}$;

(б) если $\min_{k \neq j} |x_j - x_k| \geq K$, то для всех $k = 1, 2, \dots, l$ и всех $x: |x - x_k| \leq \tau \lambda_1, \vartheta: |\tg \vartheta - \tg \vartheta_k| \leq \Delta t$ имеет место оценка

$$|F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta)| \geq a \Delta^{\min} - A_0 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{1/2} - \frac{A_1 \delta}{(\lambda_1 \bar{\lambda}_2)^{1/2}} - \frac{A_2^1 \lambda_2}{\lambda_1} - \frac{A_2^2 \bar{\lambda}_2^2}{\lambda_1},$$

где $A_2^1 = 2CM_1 \Delta^{\max}$, $A_2^2 = 2CM_2 \Delta^{\max}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие $\bar{\lambda}_2 \leq \bar{\delta}$ гарантирует, что пределы интегрирования в (1.3) не выйдут из полосы D . Напомним, что $\bar{y}^i = \bar{y} + 2i\lambda_2$, $\tau^i(x, \vartheta) = x + 2i\lambda_2 \tg \vartheta$. Обозначим $\Delta f = f^\delta - f$. Тогда

$$\begin{aligned} F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x, \vartheta) &= \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \int_{\tau^i(x, \vartheta) - \lambda_1}^{\tau^i(x, \vartheta) + \lambda_1} f(\xi, y) (\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi))'_x \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) d\xi dy \\ &+ \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \int_{\tau^i(x, \vartheta) - \lambda_1}^{\tau^i(x, \vartheta) + \lambda_1} \Delta f(\xi, y) (\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi))'_x \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) d\xi dy. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства Коши — Буняковского и перехода от функций $\phi'_{\lambda_1}, \psi_{\lambda_2}$ к функциям ϕ', ψ .

$$\left| \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \int_{\tau^i(x, \vartheta) - \lambda_1}^{\tau^i(x, \vartheta) + \lambda_1} \Delta f(\xi, y) (\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi))'_x \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) d\xi dy \right| \leq \|\phi'_{\lambda_1}\|_{L_2} \|\psi_{\lambda_2}\|_{L_2} \delta \leq \frac{A_1 \delta}{(\lambda_1 \lambda_2)^{1/2}}.$$

Покажем, что при условии $|x - x_k| \geq K$ область интегрирования в (1.3) не пересекается с линией разрыва γ_k , т. е. выполнено неравенство $|x - \gamma_k(y)| \geq \lambda_1 + 2M\lambda_2(M_1 + \Delta t) = \lambda_1 + M_1 \bar{\lambda}_2$.

Объединение всех областей интегрирования для всевозможных углов ϑ не выходит за пределы полосы $D_{\bar{\lambda}_2} = \{(x, y): -\infty < x < \infty, |y - \bar{y}| \leq \bar{\lambda}_2\}$. Пусть точка $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Gamma_k \cap D_{\bar{\lambda}_2}$. Тогда ввиду разложения $\tilde{x} - x_k = \gamma_k(\tilde{y}) - \gamma_k(\bar{y}) = \gamma'_k(\bar{y})(\tilde{y} - \bar{y}) + \gamma''_k(\xi)(\tilde{y} - \bar{y})^2/2$, где $\xi \in (\tilde{y}, \bar{y})$, и условия (***) имеем оценку $|\tilde{x} - x_k| \leq (M_1 + M_2 \bar{\lambda}_2/2)|\tilde{y} - \bar{y}|$. Это значит, что $\Omega_k = \{(x, y): |y - \bar{y}| \leq \bar{\lambda}_2, |x - x_k| \leq (M_1 + M_2 \bar{\lambda}_2/2)|y - \bar{y}|\} \supseteq \Gamma_k \cap D_{\bar{\lambda}_2}$. Обозначим через β угол, тангенс которого

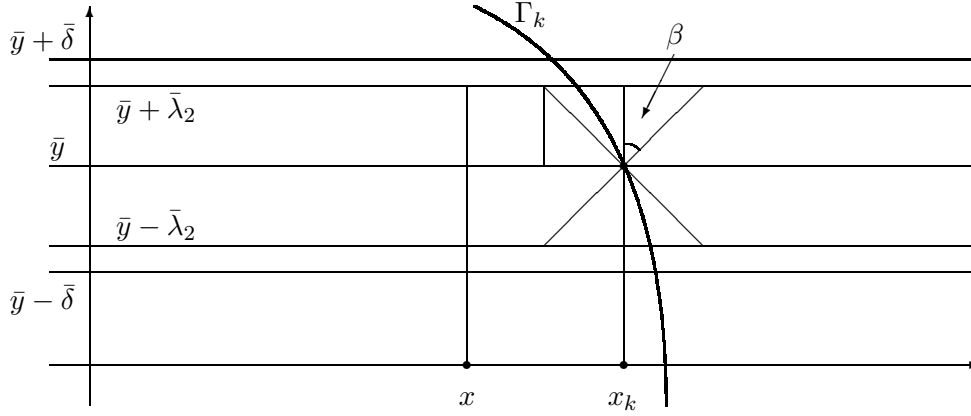


Рис. 3. Условие разделимости: Γ_k — линия разрыва функции f ; $x_k - x$ — минимальное расстояние, при котором область интегрирования не пересекается с линией Γ_k .

равен $M_1 + M_2\bar{\lambda}_2/2$ (см. рис. 3). Нам нужно, чтобы расстояние от x до Ω_k было не меньше $\lambda_1 + M_1\bar{\lambda}_2$. Для этого требуется выполнение неравенства

$$|x - x_k| \geq \lambda_1 + M_1\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_2 \left(M_1 + \frac{M_2\bar{\lambda}_2}{2} \right) = \lambda_1 + \bar{\lambda}_2 \left(2M_1 + \frac{M_2\bar{\lambda}_2}{2} \right).$$

Ввиду того, что $\bar{\lambda}_2 \leq 4M_1/M_2$, достаточно потребовать $|x - x_k| \geq K = \lambda_1 + 3M_1\bar{\lambda}_2$.

Ясно, что для $x = x_m$ при условии $\min_{m \neq k} |x_m - x_k| \geq K$ имеем $|x_m - \gamma_k(y)| \geq \lambda_1 + M_1\bar{\lambda}_2$, $m \neq k$.

Следовательно, в п. (а) формулировки леммы в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов. Поскольку $K > \tau\lambda_1$, то в п. (б) в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k . Получим оценки для первого слагаемого в правой части (1.4) в том и в другом случае.

Рассмотрим случай (а). Перейдем от двойного интеграла в первом слагаемом в правой части (1.4) к повторному и для внутреннего интеграла применим разложение (1.1). Поскольку в пределах интегрирования функция f не имеет разрывов, то получаем оценку

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \left(\int_{\tau^i(x, \vartheta) - \lambda_1}^{\tau^i(x, \vartheta) + \lambda_1} f(\xi, y) (\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi))'_x d\xi \right) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \right| \\ &= \left| \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \left(\int_{\tau^i(x, \vartheta) - \lambda_1}^{\tau^i(x, \vartheta) + \lambda_1} f'_\xi(\xi, y) \phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi) d\xi \right) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \right| \leq \|f'_x\|_{L_2} \|\phi_{\lambda_1}\|_{L_2} \|\psi_{\bar{\lambda}_2}\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Переходя от функций ϕ_{λ_1} , $\psi_{\bar{\lambda}_2}$ к функциям ϕ , ψ и учитывая условие (*), получаем требуемую оценку.

Рассмотрим случай (б). Поскольку в пределах интегрирования функция f имеет разрывы только на линии Γ_k , то, применяя разложение (1.1) для внутреннего интеграла в первом слагаемом (1.4), имеем равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \left(\int_{\tau^i(x, \vartheta) - \lambda_1}^{\tau^i(x, \vartheta) + \lambda_1} f(\xi, y) (\phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi))'_x d\xi \right) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \\ &= \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \Delta_k(y) \phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \gamma_k(y)) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \left(\int_{\tau^i(x, \vartheta) - \lambda_1}^{\tau^i(x, \vartheta) + \lambda_1} f'_\xi(\xi, y) \phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \xi) d\xi \right) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy. \quad (1.5)$$

Второй интеграл был рассмотрен выше при доказательстве случая (а). Используя формулу Лагранжа, первое слагаемое в правой части (1.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \Delta_k(y) \phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \gamma_k(y)) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \\ &= \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \Delta_k(y) \phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \tau^i(x_k, \vartheta)) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \\ &+ \sum_{i=-M}^M \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \Delta_k(y) \phi'_{\lambda_1}(\theta) \cdot (\tau^i(x_k, \vartheta) - \gamma_k(y)) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\tau^i(x_k, \vartheta) = x_k + 2i\lambda_2 \operatorname{tg} \vartheta$, $\theta \in (\tau^i(x, \vartheta) - \tau^i(x_k, \vartheta), \tau^i(x, \vartheta) - \gamma_k(y))$. Поскольку функция $\Delta_k(y)$ непрерывна, то в силу (**) она сохраняет знак для всех y таких, что $|y - \bar{y}| \leq \bar{\lambda}_2$. Тогда в силу условия (с') на функцию ψ и условия (b) на функцию ϕ , поскольку $|x - x_k| \leq \tau \lambda_1$, имеем

$$\left| \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \Delta_k(y) \phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \tau^i(x_k, \vartheta)) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \right| \geq \Delta^{\min} a \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy.$$

Следовательно, в силу условия (b') на функцию ψ , для первого слагаемого в правой части (1.6) имеем оценку

$$\sum_{i=-M}^M \left| \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \Delta_k(y) \phi_{\lambda_1}(\tau^i(x, \vartheta) - \tau^i(x_k, \vartheta)) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \right| \geq \Delta^{\min} a.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (1.6). Поскольку $x_k = \gamma_k(\bar{y})$, $\operatorname{tg} \vartheta_k = \gamma'_k(\bar{y})$, $|\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \vartheta_k| \leq \Delta t$, то $|\tau^i(x_k, \vartheta) - \gamma_k(y)| \leq \gamma'_k(\bar{y})(2i\lambda_2 + (\bar{y} - y)) + 2i\lambda_2 \Delta t + \gamma''_k(\xi)(\bar{y} - y)^2/2$, $\xi \in (y, \bar{y})$. Так как $|\bar{y} - y| \leq (2i+1)\lambda_2$, то $|2i\lambda_2 + (\bar{y} - y)| \leq \lambda_2$ и $|\tau^i(x_k, \vartheta) - \gamma_k(y)| \leq (M_1 + 2i\Delta t)\lambda_2 + M_2|\bar{y} - y|^2/2$. Используя условие (а) на функцию ϕ и учитывая, что $\Delta t = M_1/(2M)$, для второго слагаемого в правой части (1.6) имеем оценку

$$\begin{aligned} & \sum_{i=-M}^M \left| \int_{\bar{y}^i - \lambda_2}^{\bar{y}^i + \lambda_2} \Delta_k(y) \phi'_{\lambda_1}(\theta) \cdot (\tau^i(x_k, \vartheta) - \gamma_k(y)) \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \right| \\ & \leq \Delta^{\max} \frac{C}{\lambda_1} \left(2M_1 \lambda_2 \int_{\bar{y} - \bar{\lambda}_2}^{\bar{y} + \bar{\lambda}_2} \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy + \frac{M_2}{2} \int_{\bar{y} - \bar{\lambda}_2}^{\bar{y} + \bar{\lambda}_2} |\bar{y} - y|^2 \psi_{\bar{\lambda}_2}(\bar{y} - y) dy \right) \leq A_2^1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + A_2^2 \frac{\bar{\lambda}_2^2}{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Используя полученные выше оценки, имеем требуемую оценку сверху из п. (b). \square

2. Метод локализации

Без ограничения общности считаем, что точки x_k , $k = 1, 2, \dots, l$, принадлежат отрезку $[-d, d]$, $d > 0$. Перейдем к дискретизации по переменным x и ϑ вспомогательной функции $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta$, вычисляемой по формуле (1.3). Для этого введем узлы x^j равномерной сетки T на отрезке $[-d-h, d+h]$ с шагом Δx (величины h и Δx будут определены перед формулировкой теоремы). Для простоты рассмотрения выберем узлы ϑ^n так, чтобы $\tau^i(x^j, \vartheta^n)$ была точкой сетки T , т.е. вспомогательная функция $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j, \vartheta^n)$ будет вычисляться для ϑ^n таких, что $2\lambda_2 \operatorname{tg} \vartheta^n = n\Delta x$. Тогда $\tau^i(x^j, \vartheta^n) = x^j + in\Delta x$, $-N \leq n \leq N$, где $N = \lceil 2M_1\lambda_2/\Delta x \rceil$ (здесь $\lceil \cdot \rceil = \lfloor \cdot \rfloor + 1$, $\lfloor \cdot \rfloor$ — целая часть вещественного числа). Величина N выбрана таким образом, чтобы угол ϑ^N был наименьшим, для которого выполнено условие $\max_k |\gamma'_k(\bar{y})| \leq \operatorname{tg} \vartheta^N$, причем $|\operatorname{tg} \vartheta^n - \operatorname{tg} \vartheta^{n-1}| = \Delta x/(2\lambda_2)$.

З а м е ч а н и е. Вычисление величин $F_{\lambda_1 \lambda_2}^{\delta, i}(x^j)$ по формуле (1.2) сводится к вычислению одномерных дискретных сверток, и с помощью быстрого преобразования Фурье эти величины могут быть вычислены экономичным образом. Затем формируются суммы $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j, \vartheta^n)$ по формуле (1.3).

Дискретизация вычисления интегралов в (1.2) в настоящей работе не проводится. Вместо этого вводится условие, что эти интегралы вычислены с достаточной точностью. Заметим, что сетка для вычисления интегралов в (1.2) не обязана совпадать с сеткой T .

Считаем, что величины $F_{\lambda_1 \lambda_2}^{\delta, i}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M$, по формуле (1.2) вычисляются приближенно в точках x^j , и выполнено условие аппроксимации интеграла (1.2)

$$\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^{\delta, i}(x^j) = F_{\lambda_1 \lambda_2}^{\delta, i}(x^j) + \Delta \tilde{F}^i(x^j), \quad \text{где} \quad \max_{x^j} |\Delta \tilde{F}^i(x^j)| \leq \frac{P}{8(2M+1)},$$

где неотрицательный параметр P будет введен ниже. Тогда приближенное значение усреднения $F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta$ в точке (x^j, ϑ^n) вычисляется следующим образом:

$$\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j, \vartheta^n) = \sum_{i=-M}^M \tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^{\delta, i}(x^j + in\Delta x).$$

Причем справедлива оценка точности приближения

$$\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j, \vartheta^n) = F_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j, \vartheta^n) + \Delta \tilde{F}(x^j), \quad \text{где} \quad \max_{x^j} |\Delta \tilde{F}(x^j)| \leq \frac{P}{8}. \quad (2.1)$$

Введем функцию одной переменной

$$\hat{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j) = \max_{-N \leq n \leq N} |\tilde{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j, \vartheta^n)|.$$

Положим параметр $P = a\Delta^{\min}/2$; эта величина имеет смысл порога в методе локализации (напомним, что величины a и Δ^{\min} введены соответственно в условии (b) на функцию ϕ и условии (**)). Приведенный ниже алгоритм локализации по величинам $\hat{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j)$ определяет количество l точек x_k и находит приближения x_k^δ , $k = 1, 2, \dots, l$. Напомним, что $K = \lambda_1 + 3M_1\lambda_2$. Алгоритм в своей работе использует параметры λ_1, λ_2 и Δx , которые позже будут связаны с уровнем погрешности входных данных δ .

А л г о р и т м ПД $_\Delta$. Положим $j := 0$, $m := 0$.

Шаг алгоритма: если $x^j \geq d$, то завершаем процесс;

иначе, если $\hat{F}_{\lambda_1 \lambda_2}^\delta(x^j) \geq P$, то положим $m := m+1$, $a_m := x^j$, $j := j + \lceil 2K/\Delta x \rceil$, $x_m^\delta := a_m + K/2$;

иначе $j := j + 1$;

повторяем шаг алгоритма.

Таким образом, алгоритм PD_Δ по значениям $\widehat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^j)$ вычисляет величину m , относительно которой будет доказано, что $m = l$, и приближения x_k^δ для аппроксимации положений особенностей x_k . Заметим, что точка x_k^δ может не быть точкой сетки T .

Напомним, что $P = a\Delta^{\min}/2$, $K = \lambda_1 + 3M_1\bar{\lambda}_2$, $A_0 = \|\phi\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_1 = \|\phi'\|_{L_2}\|\psi\|_{L_2}$, $A_2^1 = 2CM_1\Delta^{\max}$, $A_2^2 = 2CM_2\Delta^{\max}$. Введем константы

$$\omega = \frac{P}{5A_0}, \quad B = \frac{4A_1}{\omega P}(\omega^2 + 3M_1), \quad \delta_0 = \min\left\{\frac{\bar{\delta}\omega P}{4A_1}, \frac{\omega^3 P^2}{20A_1 A_2^2}, \frac{\omega P M_1}{A_1 M_2}\right\}.$$

Величина M определяется как наименьшее положительное число, удовлетворяющее условию

$$2M + 1 \geq \frac{5A_2^1}{\omega^2 P}.$$

Введем зависимости параметров регуляризации и шага сетки от уровня погрешности δ входных данных. Напомним, что величина τ введена в условии (b) на функцию ϕ . Положим

$$\bar{\lambda}_2(\delta) = \frac{4A_1}{\omega P}\delta, \quad \lambda_2(\delta) = \frac{\bar{\lambda}_2(\delta)}{2M + 1}, \quad \lambda_1(\delta) = \omega^2 \bar{\lambda}_2(\delta),$$

$$\Delta x = \tilde{\tau}\lambda_1, \quad \text{где} \quad \tilde{\tau} = \min\left\{\tau, \frac{M_1}{\omega^2 M(2M + 1)}\right\}, \quad h(\delta) = 2K + \Delta x.$$

Заметим, что $K = B\delta$.

Теорема. Пусть $f \in D_x MW_2^1$, зафиксированы функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда для всех $\delta \leq \delta_0$ в условиях рассматриваемой задачи при связи параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$ и выполнении условия $\min_{1 \leq k, j \leq l, k \neq j} |x_k - x_j| \geq h(\delta)$ для алгоритма PD_Δ получим $m = l$, и будет справедлива оценка $|x_k - x_k^\delta| \leq (B/2)\delta$.

Доказательство. Используя оценки из леммы и условие аппроксимации (2.1) при данном выборе параметров $\lambda_1 = \lambda_1(\delta)$, $\lambda_2 = \lambda_2(\delta)$, для точек сетки x^j из окрестности точки разрыва x_k таких, что $|x^j - x_k| \leq \tilde{\tau}\lambda_1$, $k = 1, 2, \dots, l$, получаем

$$\widehat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^j) \geq a\Delta^{\min} - A_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} - \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - \frac{A_2^1\lambda_2}{\lambda_1} - \frac{A_2^2\bar{\lambda}_2^2}{\lambda_1} - \frac{P}{8} > P. \quad (2.2)$$

Отметим, что условие $\bar{\lambda}_2 \leq \min\{\bar{\delta}, 4M_1/M_2\}$ (см. формулировку леммы) выполнено за счет выбора δ_0 . Поскольку $|\operatorname{tg} \vartheta^n - \operatorname{tg} \vartheta^{n-1}| = \Delta x / (2\lambda_2)$ и $\Delta t = M_1 / (2M)$, то для любого k существует угол ϑ^n : $|\operatorname{tg} \vartheta^n - \operatorname{tg} \vartheta_k| \leq \Delta t$ за счет выбора $\tilde{\tau}$.

Введем множество $Q = \bigcup_{k=1}^l \{x : |x - x_k| \leq K\}$. Для точек сетки $x^j \notin Q$, имеет место оценка

$$\widehat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^j) \leq A_0\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{1/2} + \frac{A_1\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + \frac{P}{8}.$$

При данном выборе параметров для $x^j \notin Q$

$$\widehat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^j) < P. \quad (2.3)$$

Дальнейшее доказательство для простоты изложения проведем при $l = 2$, т.е. алгоритм PD_Δ должен найти приближение x_k^δ для точки x_k , $k = 1, 2$. Для произвольного l доказательство проводится аналогично, при этом метод PD_Δ должен найти l точек. Напомним, что мы рассматриваем задачу на множестве функций f , для которых выполнено условие разделимости: $x_2 - x_1 \geq h(\delta) = 2K + \Delta x$.

Согласно (2.2) во всех точках сетки x^j таких, что $|x^j - x_k| \leq \tilde{\tau}\lambda_1$, имеем $\widehat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^j) > P$. Поскольку шаг сетки $\Delta x = \tilde{\tau}\lambda_1$, то для любого k на отрезке $[x_k - \tilde{\tau}\lambda_1, x_k + \tilde{\tau}\lambda_1]$ найдется точка сетки $x^j < x_k$. Следуя алгоритму ПД $_{\Delta}$, пусть x^j — первая точка сетки, в которой $\widehat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^j) \geq P$. Так как $x_1 < x_2$, то $x^j < x_1$. Заметим, что x^j необязательно принадлежит отрезку $[x_1 - \tilde{\tau}\lambda_1, x_1 + \tilde{\tau}\lambda_1]$, но $|x^j - x_1| \leq K$ согласно оценке (2.3). Следовательно, x_1 принадлежит отрезку $[x^j, x^j + K] =: [a_1, a_1 + K]$.

Далее, следуя алгоритму ПД $_{\Delta}$, положим $j := j + \lceil 2K/\Delta x \rceil$, т. е. $x^j = a_1 + \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x$. Ясно, что $x^j - x_1 > K$. Покажем, что $x^j < x_2$. Используя условие разделимости, имеем $x_2 - x^j \geq x_2 - a_1 - \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x > x_2 - x_1 - \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x \geq x_2 - x_1 - 2K - \Delta x \geq 0$. Следовательно, $x^j < x_2$. Далее согласно (2.2) найдется точка сетки x^j такая, что $\widehat{F}_{\lambda_1\lambda_2}^\delta(x^j) \geq P$. Следуя (2.3), $x_2 - x^j \leq K$, т. е. $x_2 \in [x^j, x^j + K] =: [a_2, a_2 + K]$.

Рассмотрим отрезок $[a_2 + \lceil 2K/\Delta x \rceil \Delta x, d]$. Ясно, что он не содержит точек множества Q . Таким образом, $m = 2$, и процесс завершен.

Поскольку для всех точек $x \in [a_k, a_k + K]$, $k = 1, 2$, имеем оценку $|x - x_k| \leq K$, то для середины отрезков $x_k^\delta := a_k + K/2$ справедлива оценка $|x_k^\delta - x_k| \leq K/2$. Поскольку $K = B\delta$, получаем требуемую оценку точности аппроксимации для точек x_k . \square

Таким образом, оценки точности для дискретного метода, полученные в настоящей работе, при достаточно малом шаге дискретизации имеют тот же порядок по δ , что и оценки для непрерывного метода работы [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
2. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / ред. Я.А. Фурман. М.: Физматлит, 2002. 596 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974. 223 с.
4. Vasin V.V., Ageev A.L. Ill-posed problems with a priori information. Utrecht: VSP, 1995. 255 с.
5. Агеев А.Л., Антонова Т.В. О новом классе некорректно поставленных задач // Изв. Урал. гос. ун-та. 2008. № 58. С. 24–42. (Математика. Механика. Информатика. Вып. 11.)
6. Агеев А.Л., Антонова Т.В. О некорректно поставленных задачах локализации особенностей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 30–45.
7. Ageev A.L., Antonova T.V. New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2013. Vol. 21, no. 2. P. 177–191.
8. Антонова Т.В. Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики. 2012. Т. 15, № 4. С. 345–357.
9. Агеев А.Л., Антонова Т.В. Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1(49). С. 3–13.
10. Агеев А.Л., Антонова Т.В. О дискретизации методов локализации особенностей зашумленной функции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 3–13.

Агеев Александр Леонидович

Поступила 15.01.2016

д-р физ.-мат. наук

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: ageev@imm.uran.ru

Антонова Татьяна Владимировна

д-р физ.-мат. наук

вед. науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: tvantonova@imm.uran.ru

УДК 517.977

**СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ
НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ
МНОЖЕСТВОМ ОГРАНИЧЕНИЙ НА УПРАВЛЕНИЯ¹****С. М. Асеев**

Рассматривается класс задач оптимального управления на бесконечном интервале времени с возможно неограниченным множеством ограничений на управление. При помощи конечно-временных аппроксимаций и аппарата принципа максимума Понтрягина в общем нелинейном случае получены достаточные условия существования оптимального управления, а также условия, гарантирующие равномерную локальную ограниченность оптимальных управлений.

Ключевые слова: оптимальное управление, бесконечный горизонт, неограниченные управления, существование решения, принцип максимума Понтрягина.

S. M. Aseev. Existence of an optimal control in infinite-horizon problems with unbounded set of control constraints.

We consider a class of infinite-horizon optimal control problems with not necessarily bounded set of control constraints. Sufficient conditions for the existence of an optimal control are derived in the general nonlinear case by means of finite-horizon approximations and the tools of the Pontryagin maximum principle. Conditions guaranteeing the uniform local boundedness of optimal controls are also obtained.

Keywords: optimal control, infinite horizon, unbounded controls, existence of a solution, the Pontryagin maximum principle.

MSC: 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-18-27

Введение

Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени (с бесконечным горизонтом) естественно возникают в экономике при рассмотрении динамических моделей оптимального распределения ресурсов (см., например, [11; 18; 19]). В последнее десятилетие в этой области оптимального управления был достигнут значительный прогресс. В частности, при помощи метода конечно-временных аппроксимаций (см. [4; 5; 13]) и метода игольчатых вариаций (см. [14–16]) были получены различные варианты принципа максимума Понтрягина в нормальной форме, содержащие явное описание сопряженной переменной при помощи формулы, аналогичной известной формуле Коши для решений линейных дифференциальных систем (см. [10]). Такое описание сопряженной переменной дает удобное аналитическое средство для исследования многих задач оптимального экономического роста. В ряде ситуаций оно позволяет обосновать применение стандартных условий трансверсальности на бесконечности (см. [5; 14]), а если эти условия нарушаются, представление сопряженной переменной при помощи формулы типа Коши может быть использовано в качестве их альтернативы (см. [2, пример 3] и обсуждение примера Халкина в [15]). Заметим также, что в задачах оптимального экономического роста данная формула позволяет придать сопряженной переменной принципа максимума экономический смысл, причем без каких-либо априорных предположений о гладкости функции оптимального значения (см. [2]).

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10018).

В настоящей работе описание сопряженной переменной посредством формулы Коши используется для доказательства теоремы существования оптимального управления в задаче на бесконечном интервале времени в ситуации, когда множество геометрических ограничений на управления не обязательно ограничено. Такие задачи с неограниченными управлениями возникают во многих экономических приложениях, например, при рассмотрении моделей оптимального экономического роста, включающих невозобновляемые и возобновляемые природные ресурсы, когда темп добычи ресурса может быть произвольно большим, а ограничения, накладываемые на допустимые управления, имеют интегральный вид (см., например, [12;22]). Оптимальные значения управлений в этих моделях представляют особый интерес, поскольку они могут быть использованы для определения квот добычи используемого ресурса. При этом неограниченность множества ограничений на управления существенно затрудняет применение как известных теорем существования оптимального управления (см. [4;5;17]), так и некоторых вариантов принципа максимума Понтрягина [4–6;13], основанных на конечно-временных аппроксимациях.

Ранее вопрос об ограниченности оптимальных управлений и тесно связанный с ним вопрос о регулярности (липшицевости) оптимальных траекторий в задачах на конечных интервалах времени рассматривался в работах [21;23;24]. В случае задач на бесконечном интервале времени вопрос об ограниченности оптимальных управлений изучался в работе [25]. Доказанные в данной работе достаточные условия существования и равномерной локальной ограниченности оптимальных управлений обобщают на общий нелинейный случай и усиливают предыдущий результат в этом направлении, полученный для аффиной по управлению системы и вогнутой функции мгновенной полезности (см. [3]).

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу (P):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (1.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (1.2)$$

$$u(t) \in U. \quad (1.3)$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ и $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — значения фазового вектора и вектора управления в момент времени $t \geq 0$ соответственно, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы, U — произвольное непустое замкнутое (не обязательно ограниченное) множество в \mathbb{R}^m . Предполагается, что $x_0 \in G$, где G — заданное открытое выпуклое множество в \mathbb{R}^n .

Будем считать, что векторная функция $f: [0, \infty) \times G \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ и скалярная функция $f^0: [0, \infty) \times G \times U \mapsto \mathbb{R}^1$ удовлетворяют следующему условию регулярности.

(A1) При п.в. $t \in [0, \infty)$ частные производные $f_x(t, x, u)$ и $f_x^0(t, x, u)$ существуют для любых $(x, u) \in G \times U$. Функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $f_x^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ измеримы по Лебегу по t для любых $(x, u) \in G \times U$, непрерывны по (x, u) при п.в. $t \in [0, \infty)$ и локально ограничены².

В качестве допустимых управлений в задаче (P) будем рассматривать локально ограниченные функции $u(\cdot) \in L_{loc}^{\infty}([0, \infty), \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющие условию (1.3) для любого $t \geq 0$. Здесь, как обычно, локальная ограниченность измеримой функции $u(\cdot)$ означает, что она существенно ограничена на любом конечном интервале $[0, T]$, $T > 0$. Для произвольного допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующая ему допустимая траектория $x(\cdot)$ есть локально абсолютно

²Локальная ограниченность функции $\phi(\cdot, \cdot, \cdot)$ переменных $t \in [0, \infty)$, $x \in G$ и $u \in U$ означает, что для любого $T > 0$, произвольного компакта $D \subset G$ и произвольного ограниченного множества $V \subset U$ существует такая постоянная $M \geq 0$, что $\|\phi(t, x, u)\| \leq M$ при п.в. $t \in [0, T]$ и всех $x \in D$ и $u \in V$.

непрерывное решение (в смысле Каратеодори) задачи Коши (1.2), определенное на некотором конечном или бесконечном интервале $[0, \tau)$, $\tau > 0$, и лежащее в G . В силу (A1) такая траектория существует и единственна (см. [1]). В дальнейшем, не оговаривая этого каждый раз, будем считать, что для любого допустимого управления $u(\cdot)$ соответствующая ему допустимая траектория $x(\cdot)$ определена на всем бесконечном интервале времени $[0, \infty)$. Пару $(x(\cdot), u(\cdot))$, где $u(\cdot)$ — допустимое управление, а $x(\cdot)$ — соответствующая ему допустимая траектория, будем называть *допустимой парой* (в задаче (P)). В силу (A1) для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ функция $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ — локально интегрируема. Таким образом, для произвольной допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ и любого $T > 0$ интеграл

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) := \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

определен.

Оптимальность допустимой пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в задаче (P) будем понимать в сильном смысле (см. [19]). Именно допустимую пару $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем называть *сильно оптимальной* в задаче (P) (или, для краткости, просто *оптимальной*), если соответствующий несобственный интеграл в (1.1) сходится (к конечному числу) и для любой другой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ выполняется неравенство

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \geq \limsup_{T \rightarrow \infty} \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt.$$

Относительно любой допустимой (не обязательно оптимальной) пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ будем предполагать выполненным следующее условие роста (см. [15; 16]).

(A2) *Существуют такие число $\beta > 0$ и неотрицательная интегрируемая функция $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, удовлетворяющего неравенству $\|\zeta - x_0\| < \beta$, задача Коши (1.2) с $u(\cdot) = u_*(\cdot)$ и начальным условием $x(0) = \zeta$ (вместо $x(0) = x_0$) имеет решение $x(\zeta; \cdot)$ на $[0, \infty)$ в G и*

$$\max_{x \in [x(\zeta; t), x_*(t)]} |\langle f_x^0(t, x, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle| \stackrel{n.б.}{\leq} \|\zeta - x_0\| \lambda(t).$$

Здесь $[x(\zeta; t), x_*(t)] = \text{conv}\{x(\zeta; t), x_*(t)\}$ — отрезок с вершинами $x(\zeta; t)$ и $x_*(t)$.

Заметим, что в условии (A2) число $\beta > 0$ и функция $\lambda(\cdot)$ могут зависеть от рассматриваемой допустимой пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$.

Далее, будем считать, что выполняется следующее условие выпуклости.

(A3) *Для любого $M > 0$ существует такой компакт $U_M \subset U$, что $\{u \in U : \|u\| \leq M\} \subset U_M$ и при п.в. $t \geq 0$ для всех $x \in G$ множество*

$$Q_M(t, x) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1} : z^0 \leq f^0(t, x, u), z = f(t, x, u), u \in U_M\}$$

является выпуклым.

Наконец, будем предполагать, что выполняется следующее условие, характеризующее сходимость интегрального функционала (1.1) на множестве допустимых пар $(x(\cdot), u(\cdot))$ в задаче (P).

(A4) *Существует такая положительная функция $\omega(\cdot)$ на $[0, \infty)$, что $\omega(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow \infty$ и для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ имеем*

$$\int_T^{T'} f^0(t, x(t), u(t)) dt \leq \omega(T), \quad 0 \leq T \leq T'.$$

Сформулированные условия (A1)–(A4) хорошо известны в оптимальном управлении. Условие (A1) является стандартным условием регулярности, используемым в доказательствах различных вариантов принципа максимума Понтрягина [1; 8]. Условие (A2) было введено в [15] в связи с доказательством варианта принципа максимума Понтрягина в нормальной форме для задачи (P), содержащего явное описание сопряженной переменной при помощи аналога формулы Коши для решений линейных дифференциальных систем (подробнее см. [15; 16]). Условие (A3) является вариантом условия выпуклости, фигурирующего в различных теоремах существования оптимального управления как на конечном, так и бесконечном интервалах времени (см. [17; 20]). Наконец, условие (A4) используется в качестве равномерной по всем допустимым парам оценки на “хвост” интегрального функционала (1.1) в доказательствах различных вариантов принципа максимума Понтрягина и теорем существования оптимального управления в задаче (P), основанных на использовании конечно-временных аппроксимаций (см. [4; 6; 7]). Нетрудно показать, что в силу (A4) для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ несобственный интеграл в (1.1) либо сходится (к конечному числу), либо расходится к $-\infty$, и, кроме того,

$$\sup_{(x(\cdot), u(\cdot))} J(x(\cdot), u(\cdot)) \leq \omega(0) < \infty.$$

Здесь верхняя грань берется по всем допустимым в задаче (P) парам $(x(\cdot), u(\cdot))$.

В следующем разд. 2 формулируется и доказывается основной результат работы — теорема о существовании и равномерной локальной ограниченности оптимальных управлений в задаче (P).

2. Существование и локальная ограниченность оптимальных управлений

Вдоль произвольной допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{z}(t) = -[f_x(t, x(t), u(t))]^* z(t). \quad (2.1)$$

В силу условия (A1) частная производная $f_x(\cdot, x(\cdot), u(\cdot))$ измерима и локально интегрируема на $[0, \infty)$. Поэтому для любого $\tau \geq 0$ и произвольного $\xi \in \mathbb{R}^n$ существует единственное локально абсолютно непрерывное решение $z(\cdot)$ уравнения (2.1) с начальным условием $z(\tau) = \xi$, определенное на всем интервале $[0, \infty)$. Отсюда вытекает, что на всем бесконечном интервале времени $[0, \infty)$ определена нормированная в момент $t = 0$ фундаментальная матрица $Z(\cdot)$ системы (2.1) (т. е. матричное решение $Z(\cdot)$ системы (2.1), удовлетворяющее начальному условию $Z(0) = I$, где I — единичная диагональная матрица).

Для произвольной допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ из условия (A2) вытекает оценка (см. [15, Lemma 3.1])

$$\|Z^{-1}(t)f_x^0(t, x(t), u(t))\| \leq \sqrt{n}\lambda(t), \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

Поскольку функция $\lambda(\cdot)$ интегрируема на $[0, \infty)$, то в силу (2.2) для любого $T > 0$ равенство

$$\psi_T(t) = Z(t) \int_t^T Z^{-1}(s)f_x^0(s, x(s), u(s)) ds, \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

определяет абсолютно непрерывную функцию $\psi_T : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$. Аналогично получаем, что в силу (2.2) для любого $t \geq 0$ равенство

$$\psi(t) = Z(t) \int_t^\infty Z^{-1}(s)f_x^0(s, x(s), u(s)) ds, \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

определяет локально абсолютно непрерывную функцию $\psi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$.

Определим функцию Гамильтона – Понтрягина в нормальной форме $\mathcal{H} : [0, \infty) \times G \times U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ для задачи (P) стандартным образом:

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi) = f^0(t, x, u) + \langle \psi, f(t, x, u) \rangle, \quad t \in [0, \infty), \quad x \in G, \quad u \in U, \quad \psi \in \mathbb{R}^n.$$

Следующий результат дает достаточные условия существования и локальной равномерной ограниченности оптимальных управлений в задаче (P) в случае, когда множество U не обязательно ограниченное. Его доказательство основано на использовании метода конечно-временных аппроксимаций [4; 5; 13] и аппарата принципа максимума Понтрягина [8; 15; 16].

Теорема. Пусть выполняются условия (A1)–(A4) и существует по крайней мере одна допустимая пара $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$, для которой значение $J(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ конечно. Пусть, кроме того, существуют такие непрерывная неотрицательная функция $M : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$, и положительная функция $\delta : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, $t \geq 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta(t)}{t} = 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющей на некотором множестве $\mathfrak{M} \subset [0, \infty)$, $\text{meas } \mathfrak{M} > 0$, для всех $t \in \mathfrak{M}$ неравенству $\|u(t)\| > M(t)$, для п.в. $t \in \mathfrak{M}$ для всех $T \geq t + \delta(T)$ выполняется неравенство

$$\sup_{u \in U: \|u\| \leq M(t)} \mathcal{H}(t, x(t), u, \psi_T(t)) - \mathcal{H}(t, x(t), u(t), \psi_T(t)) > 0. \quad (2.5)$$

Здесь функция $\psi_T(\cdot)$ определена по паре $(x(\cdot), u(\cdot))$ на интервале $[0, T]$, $T > 0$, равенством (2.3). Тогда в задаче (P) существует оптимальное допустимое управление $u_*(\cdot)$ и для п.в. $t \geq 0$ имеем

$$\|u_*(t)\| \leq M(t). \quad (2.6)$$

Если же неравенство (2.5) выполняется равномерно по $T > 0$: $t \leq T - \delta(T)$, т.е. для п.в. $t \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\inf_{T > 0: t \leq T - \delta(T)} \left\{ \sup_{u \in U: \|u\| \leq M(t)} \mathcal{H}(t, x(t), u, \psi_T(t)) - \mathcal{H}(t, x(t), u(t), \psi_T(t)) \right\} > 0, \quad (2.7)$$

то оценка (2.6) справедлива для всех оптимальных в задаче (P) управлений $u_*(\cdot)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (A4) и конечности значения $J(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ на допустимой паре $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$ следует, что величина $\sup_{(x(\cdot), u(\cdot))} J(x(\cdot), u(\cdot))$ также конечна. Здесь верхняя грань берется по всем допустимым парам $(x(\cdot), u(\cdot))$ в задаче (P).

Пусть теперь $\{(x_k(\cdot), u_k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ – некоторая максимизирующая последовательность допустимых пар:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(x_k(\cdot), u_k(\cdot)) = \sup_{(x(\cdot), u(\cdot))} J(x(\cdot), u(\cdot)). \quad (2.8)$$

Выберем такую возрастающую последовательность $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $T_k > \delta(T_k)$, $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = \infty$, и положим

$$M_k = \max \left\{ \text{ess sup}_{t \in [0, T_k]} \|u_k(t)\|, \max_{t \in [0, T_k]} M(t) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Поскольку для любого $k = 1, 2, \dots$ управление $u_k(\cdot)$ локально существенно ограничено, а функция $M(\cdot)$ непрерывна, то величина M_k конечна. В силу условия (A3) существует такое компактное множество $U_k \subset U$, что $\{u \in U: \|u\| \leq M_k\} \subset U_k$, причем при п.в. $t \in [0, T_k]$ и всех $x \in G$ множество

$$Q_k(t, x) = \{(z^0, z) \in \mathbb{R}^{n+1}: z^0 \leq f^0(t, x, u), z = f(t, x, u), u \in U_k\} \quad (2.9)$$

выпуклое. Нетрудно видеть, что для любого $k = 1, 2, \dots$ в силу непрерывности функции $u \mapsto f(t, x, u)$ и компактности множества U_k при п.в. $t \in [0, T_k]$ и всех $x \in G$ множество $Q_k(t, x)$ замкнутое.

Из условия (A1) вытекает, что многозначное отображение $Q_k : [0, T_k] \times G \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+1}$, $k = 1, 2, \dots$, с выпуклыми замкнутыми значениями, определенное равенством (2.9), является измеримым по переменной t и полунепрерывным сверху по переменной x . Именно для любого $x \in G$ и любого открытого множества V из \mathbb{R}^{n+1} множество

$$\{t \in [0, T_k] : Q_k(t, x) \cap V \neq \emptyset\}$$

измеримо, а при п.в. $t \in [0, T_k]$ и любого открытого множества V из \mathbb{R}^{n+1} множество

$$\{x \in G : Q_k(t, x) \subset V\}$$

открытое.

Для $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим следующую задачу оптимального управления (P_k) :

$$\begin{aligned} J_k(x(\cdot), u(\cdot)) &= \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \max, \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \\ u(t) &\in U_k. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь основное отличие задачи (P_k) от (P) состоит в том, что она рассматривается на фиксированном конечном интервале времени $[0, T_k]$, а допустимые управления в ней равномерно ограничены (см (2.10)). Все остальные данные в задаче (P_k) те же самые, что и в (P) .

В силу теоремы существования оптимального управления в задаче на конечном интервале времени (см. [20, Theorem 9.3.i]) для любого $k = 1, 2, \dots$ в задаче (P_k) существует оптимальная допустимая пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot))$. Будем считать, что эта пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot))$ продолжена на весь интервал $[0, \infty)$ произвольным, допустимым для задачи (P) образом.

Поскольку $u_k(t) \in U_k$ при п.в. $t \in [0, T_k]$, то пара $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$ допустима в задаче (P_k) и

$$J_k(x_k(\cdot), u_k(\cdot)) \leq J_k(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot)), \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.11}$$

Покажем, что для любого $k = 1, 2, \dots$ при п.в. $t \in [0, T_k - \delta(T_k)]$ выполняется неравенство

$$\|\tilde{u}_k(t)\| \leq M(t). \tag{2.12}$$

Действительно, предположим противное. Тогда существует такое натуральное q и оптимальное в соответствующей задаче (P_q) управление $\tilde{u}_q(\cdot)$, что для всех t из некоторого множества $\mathfrak{M}_q \subset [0, T_q - \delta(T_q)]$, $\text{meas } \mathfrak{M}_q > 0$, имеем $\|\tilde{u}_q(t)\| > M(t)$.

Далее, в силу оптимальности пары $(\tilde{x}_q(\cdot), \tilde{u}_q(\cdot))$ в задаче (P_q) для этой пары выполняется условие максимума в нормальной форме:

$$\mathcal{H}(t, \tilde{x}_q(t), \tilde{u}_q(t), \psi_q(t)) \stackrel{\text{н.б.}}{=} \sup_{u \in U_q} \mathcal{H}(t, \tilde{x}_q(t), u, \psi_q(t)), \quad t \in [0, T_q], \tag{2.13}$$

с сопряженной переменной $\psi_q(\cdot)$, определяемой по паре $(\tilde{x}_q(\cdot), \tilde{u}_q(\cdot))$ равенством (см. (2.3))

$$\psi_q(t) = Z(t) \int_t^{T_q} Z^{-1}(s) f_x^0(s, \tilde{x}_q(s), \tilde{u}_q(s)) ds, \quad t \in [0, T_q].$$

Здесь используется тот факт, что фигурирующая в соотношениях принципа максимума Понтрягина для задачи (P_q) оптимального управления на конечном интервале времени $[0, T_q]$ со свободным правым концом сопряженная переменная $\psi_q(\cdot)$ является решением сопряженной

системы принципа максимума Понтрягина, соответствующим паре $(\tilde{x}_q(\cdot), \tilde{u}_q(\cdot))$ и удовлетворяющим условию трансверсальности в правом конце $\psi_q(T_q) = 0$ (см. [8]).

Однако в силу предположений теоремы из справедливости для всех $t \in \mathfrak{M}_q$ неравенства $\|\tilde{u}_q(t)\| > M(t)$ вытекает выполнение для пары $(\tilde{x}_q(\cdot), \tilde{u}_q(\cdot))$ для п.в. $t \in \mathfrak{M}_q$ неравенства (2.5) с функцией $\psi_q(\cdot)$. Отсюда следует, что при п.в. $t \in \mathfrak{M}_q$ множество $\{u \in U: \|u\| \leq M(t)\}$ непусто и

$$\sup_{u \in U, \|u\| \leq M(t)} \mathcal{H}(t, \tilde{x}_q(t), u, \psi_q(t)) > \mathcal{H}(t, \tilde{x}_q(t), \tilde{u}_q(t), \psi_q(t)). \quad (2.14)$$

Далее, при $t \in \mathfrak{M}_q$ согласно предположению имеем $\|\tilde{u}_q(t)\| > M(t)$, а в силу определения множества U_q при п.в. $t \in \mathfrak{M}_q$ справедливо включение $U_q \supset \{u \in U: \|u\| \leq M(t)\}$. Поскольку $\mathfrak{M}_q \subset [0, T_q - \delta(T_q)]$, $\text{meas } \mathfrak{M}_q > 0$, то отсюда вытекает, что выполнение при п.в. $t \in \mathfrak{M}_q$ неравенства (2.14) противоречит условию максимума (2.13). Таким образом, условие (2.12) выполняется для любого $k = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим теперь последовательность допустимых в задаче (P) пар $\{(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ (напомним, что для любого $k = 1, 2, \dots$ оптимальная в задаче (P_k) пара $(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot))$ продолжена на весь интервал $[0, \infty)$ произвольным допустимым для задачи (P) образом).

Из оценки (2.12), непрерывности функции $M(\cdot)$ и условия $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta(T_k)}{T_k} = 0$ вытекает, что на любом конечном интервале времени $[0, T]$, $T > 0$, начиная с некоторого номера N , $T_N - \delta(T_N) \geq T$ для всех $k \geq N$ управления $\tilde{u}_k(\cdot)$ равномерно существенно ограничены величиной $\bar{M}_N = \max_{t \in [0, T_N]} M(t)$:

$$\|\tilde{u}_k(t)\| \stackrel{\text{п.в.}}{\leq} \bar{M}_N, \quad t \in [0, T], \quad k \geq N. \quad (2.15)$$

Для каждого $k = 1, 2, \dots$ определим вспомогательную функцию $\tilde{x}_k^0: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^1$ равенством

$$\tilde{x}_k^0(t) = \int_0^t f^0(s, \tilde{x}_k(s), \tilde{u}_k(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

В силу условия (A1) и равномерной локальной существенной ограниченности управлений $\tilde{u}_k(\cdot)$, $k = 1, 2, \dots$, последовательность $\{(\tilde{x}_k^0(\cdot), \tilde{x}_k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна на любом конечном отрезке $[0, T]$. Поэтому, переходя, если нужно, к подпоследовательности, в силу теоремы Арцела — Асколи (см., например, [10]) можно считать, что последовательность $\{(\tilde{x}_k^0(\cdot), \tilde{x}_k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторой локально липшицевой функции $(x_*^0(\cdot), x_*(\cdot)): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ равномерно на любом отрезке $[0, T]$, $T > 0$, при $k \rightarrow \infty$.

По построению для любого $T > 0$ при всех достаточно больших номерах $k \geq N$, $T_N - \delta(T_N) \geq T$, функция $(\tilde{x}_k^0(\cdot), \tilde{x}_k(\cdot)): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$(\dot{\tilde{x}}_k^0(t), \dot{\tilde{x}}_k(t)) \in Q_{\bar{M}_N}(t, x_k(t)) \quad \text{при п.в. } t \in [0, T].$$

Здесь множество $Q_{\bar{M}_N}(t, x)$ определено для п.в. $t \geq 0$ и всех $x \in G$ условием (A3) (см. (2.15) и (A3)).

Так как многозначное отображение $Q_{\bar{M}_N}(\cdot, \cdot)$ имеет выпуклые замкнутые значения, измеримо по t и полунепрерывно сверху по x и последовательность $\{(\tilde{x}_k^0(\cdot), \tilde{x}_k(\cdot))\}_{k=1}^{\infty}$ равномерно сходится к $(x_*^0(\cdot), x_*(\cdot))$ на любом конечном отрезке $[0, T]$, $T > 0$, то для любого $T > 0$ существует такое $N > 0$, что локально абсолютно непрерывная функция $(x_*^0(\cdot), x_*(\cdot))$ удовлетворяет дифференциальному включению

$$(\dot{x}_*^0(t), \dot{x}_*(t)) \in Q_{\bar{M}_N}(t, x_*(t)) \quad \text{при п.в. } t \in [0, T].$$

По теореме Филиппова о существовании измеримой однозначной ветви у многозначного отображения (см. [9]) существуют такие измеримые функции $u_*(\cdot): [0, T] \rightarrow U_N$ и $v_*(\cdot): [0, T] \rightarrow [0, \infty)$, что

$$\dot{x}_*(t) = f(t, x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при п.в. } t \in [0, T]$$

и

$$\dot{x}_*^0(t) = f^0(t, x_*(t), u_*(t)) - v_*(t) \leq f^0(t, x_*(t), u_*(t)) \quad \text{при п.в.} \quad t \in [0, T]. \quad (2.16)$$

В силу произвольности $T > 0$, не ограничивая общности, можно считать, что управление $u_*(\cdot)$ и функция $v_*(\cdot)$ определены на всем бесконечном интервале $[0, \infty)$. По построению они являются локально ограниченными измеримыми функциями. Таким образом, $u_*(\cdot)$ — допустимое управление в задаче (P) , а $x_*(\cdot)$ — соответствующая ему допустимая траектория.

В силу равномерной сходимости последовательности $\{\tilde{x}_k^0(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ к функции $x_*^0(\cdot)$ на любом конечном отрезке $[0, T]$ при $k \rightarrow \infty$ из (2.16) вытекает неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^T f^0(t, \tilde{x}_k(t), \tilde{u}_k(t)) dt \leq \int_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt.$$

Отсюда в силу (A4) для любого $T \geq 0$ получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(\tilde{x}_k(\cdot), \tilde{u}_k(\cdot)) \leq \int_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t)) dt + \omega(T).$$

Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, в силу (2.8) и (2.11) получаем равенство

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = \sup_{(x(\cdot), u(\cdot))} J(x(\cdot), u(\cdot)).$$

Таким образом, $u_*(\cdot)$ — допустимое оптимальное управление в задаче (P) . По построению, управление $u_*(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (2.6).

Покажем теперь, что если неравенство (2.5) выполняется равномерно по $T > 0$: $T \geq t + \delta(T)$ (см. (2.7)), то оценка (2.6) выполняется для любого оптимального в задаче (P) управления $u_*(\cdot)$.

Действительно, предположим противное, т. е. что для некоторой оптимальной в задаче (P) пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется неравенство (2.7), а условие (2.6) нарушается. Тогда существует такое $\mathfrak{M} \subset [0, \infty)$, $\text{meas } \mathfrak{M} > 0$, что $\|u_*(t)\| > M(t)$ для всех $t \in \mathfrak{M}$. Но тогда в силу (2.7) существует такая функция $\varepsilon : \mathfrak{M} \mapsto \mathbb{R}^1$, $\varepsilon(t) > 0$, $t \in \mathfrak{M}$, что для п.в. $t \in \mathfrak{M}$ и любого достаточно большого T : $t \leq T - \delta(T)$ выполняется неравенство

$$\sup_{u \in U: \|u\| \leq M(t)} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi_T(t)) \geq \mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi_T(t)) + \varepsilon(t) \quad (2.17)$$

с функцией $\psi_T(\cdot)$, определенной по паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ равенством (2.3). Переходя в (2.17) к пределу при $T \rightarrow \infty$ в силу компактности множества $\{u \in U : \|u\| \leq M(t)\}$ и того факта, что $\psi(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \psi_T(t)$, $t \geq 0$, для п.в. $t \in \mathfrak{M}$ получаем

$$\sup_{u \in U: \|u\| \leq M(t)} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)) \geq \mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) + \varepsilon(t) > \mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)). \quad (2.18)$$

Здесь функция $\psi : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$ определяется равенством (2.4). Однако в силу [16, Theorem 3.1] любая оптимальная в (P) пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет условию максимума в нормальной форме

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t))$$

с сопряженной переменной $\psi(\cdot)$, определенной по паре $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ при помощи формулы (2.4), что противоречит (2.18). Теорема доказана. \square

Доказанная теорема позволяет обосновать существование оптимального управления в некоторых не обязательно аффинных по управлению задачах оптимального экономического роста с неограниченными управлениями. В частности, в примере, рассмотренном в [3], данный результат позволяет охватить ситуацию, когда темп возобновления используемого ресурса зависит от темпа его эксплуатации. Теорема может быть применена также и в случае, когда возобновление ресурса описывается логистической функцией (см. [22]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
2. **Асеев С.М.** Сопряженные переменные и межвременные цены в задачах оптимального управления на бесконечном интервале времени // Тр. МИАН. 2015. Т. 290. Р. 239–253.
3. **Асеев С.М.** Об ограниченности оптимальных управлений в задачах на бесконечном интервале времени // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 45–55.
4. **Асеев С.М., Бесов К.О., Кряжковский А.В.** Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, вып. 2. С. 3–64.
5. **Асеев С.М., Кряжковский А.В.** Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 5–271.
6. **Бесов К.О.** О необходимых условиях оптимальности для задач экономического роста с бесконечным горизонтом и локально неограниченной функцией мгновенной полезности // Тр. МИАН. 2014. Т. 284. С. 56–88.
7. **Дмитрук А.В., Кузькина Н.В.** Теорема существования оптимального управления на бесконечном интервале времени // Мат. заметки. 2005. Т. 78, вып. 4. С. 503–518; Письмо в редакцию // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 2. С. 320.
8. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
9. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим. 1959. № 2. С. 25–32.
10. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
11. **Acemoglu D.** Introduction to modern economic growth. New York: Princeton Univ. Press, 2008. 1008 p.
12. **Aseev S., Besov K., Kaniovski S.** The problem of optimal endogenous growth with exhaustible resources revisited // Green growth and sustainable development / eds. J. Crespo Cuaresma, T. Palokangas, A. Tarasyev. Heidelberg: Springer, 2013. Vol. 14. P. 3–30. (Dyn. Model. Econom. Econ. Finance; vol. 14).
13. **Aseev S.M., Kryazhimskiy A.V.** The Pontryagin maximum principle and transversality conditions for a class of optimal control problems with infinite time horizons // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 43, no. 3. P. 1094–1119.
14. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems with dominating discount // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1-2. P. 43–63.
15. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Needle variations in infinite-horizon optimal control // Variational and Optimal Control Problems on Unbounded Domains: Contemp. Math. / eds. G. Wolansky, A. J. Zaslavski. Providence: Amer. Math. Soc., 2014. Vol. 619. P. 1–17.
16. **Aseev S.M., Veliov V.M.** Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 41–57.
17. **Balder E.J.** An existence result for optimal economic growth problems // J. Math. Anal. Appl. 1983. Vol. 95, no. 1. P. 195–213.
18. **Barro R.J., Sala-i-Martin X.** Economic growth. New York: McGraw Hill, 1995. 539 p.
19. **Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A.** Infinite horizon optimal control: Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991. 332 p.
20. **Cesari L.** Optimization – theory and applications. Problems with ordinary differential equations. New York: Springer, 1983. 542 p. (Appl. Math.; vol. 17).
21. **Clarke F.H., Vinter, R.B.** Regularity properties of optimal controls // SIAM J. Control Optim. 1990. Vol. 28, no. 4. P. 980–997.
22. Optimal control for sustainable consumption of natural resources / T. Manzoor, S. Aseev, E. Rovenskaya, A. Muhammad // Proc. 19th IFAC World Congress / eds. E. Boje, X. Xia. 2014. P. 10725–10730.
23. **Sarychev A.V., Torres D.F.M.** Lipschitzian regularity of minimizers for optimal control problems with control-affine dynamics // Appl. Math. Optim. 2000. Vol. 41, no. 2. P. 237–254.

24. **Torres D.F.M.** Regularity of minimizers in optimal control // Equadiff 10 CD ROM: Proc. Czechoslovak International Conference on Differential Equations and their Applications / eds. J. Kuben, J. Vosmanský. Brno: Masaryk University Publishing House, 2002. P. 397–412.
25. **Zaslavski A.J.** Existence and uniform boundedness of optimal solutions of variational problems // Abstr. Appl. Anal. 1998. Vol. 3, no. 3-4. P. 265–292.

Асеев Сергей Миронович

Поступила 04.04.2016

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН

зав. отделом дифференциальных уравнений

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,

International Institute for Advanced Systems Analysis (IIASA), Laxenburg, Austria,

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: aseev@mi.ras.ru

УДК 519.17

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ С МАССИВАМИ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}^1$

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Пусть Γ — антиподальный граф с массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $2r(r + 1) \leq 4096$. Если $2r + 1$ — степень простого числа, то конструкция Мэтона обеспечивает существование реберно симметричного графа с данным массивом пересечений. Отметим, что $2r + 1$ — не степень простого числа только для $r \in \{7, 17, 19, 22, 25, 27, 31, 32, 37, 38, 42, 43\}$. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетических дистанционно регулярных графов с указанными значениями r . Случаи $r \in \{7, 17, 19\}$ рассмотрены ранее. Доказано, что если Γ — вершинно симметричный граф с массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $2r + 1$ — не степень простого числа и $r \leq 43$, то $r = 25, 27, 31$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. On automorphisms of distance-regular graphs with intersection arrays $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$.

Let Γ be an antipodal graph with intersection array $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, where $2r(r + 1) \leq 4096$. If $2r + 1$ is a prime power, then Mathon's scheme provides the existence of an edge-symmetric graph with this intersection array. Note that $2r + 1$ is not a prime power only for $r \in \{7, 17, 19, 22, 25, 27, 31, 32, 37, 38, 42, 43\}$. We study automorphisms of hypothetical distance-regular graphs with the specified values of r . The cases $r \in \{7, 17, 19\}$ were considered earlier. We prove that, if Γ is a vertex-symmetric graph with intersection array $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $2r + 1$ is not a prime power, and $r \leq 43$, then $r = 25, 27, 31$.

Keywords: distance-regular graph, graph automorphism.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-28-37

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Для автоморфизма g графа Γ пусть $\alpha_j(g)$ — число вершин x таких, что $d(x, x^g) = j$. Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются *числами пересечений графа* Γ . Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер). *Графом Клейна* называется единственный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{7, 4, 1; 1, 2, 7\}$.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ, проект 14-11-00061 (теорема 2 и следствие) и в рамках соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006 (теорема 1).

Граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве вершин — совпадают или находятся на расстоянии d — является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются *антиподальными классами*. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ в качестве вершин имеет антиподальные классы, и классы \bar{u}, \bar{w} смежны, если \bar{u} содержит вершину, смежную с вершиной из \bar{w} . Если каждый антиподальный класс содержит ровно r вершин, то r называется *индексом антиподальности* и Γ называется *антиподальным r -накрытием графа $\bar{\Gamma}$* .

Для группы G через $S(G)$ обозначается разрешимый радикал G , а *цоколем* G называется произведение всех минимальных нормальных подгрупп из G .

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов с $a_1 = 2$ и числом вершин, не большим 4096.

Предложение [1, следствие]. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v \leq 4096$ вершинах. Если $a_1 = 2$, то верно одно из утверждений:

(1) Γ — граф с массивом пересечений $\{6, 3, 3; 1, 1, 2\}$, $\{9, 6, 3; 1, 2, 3\}$, $\{12, 9, 9; 1, 1, 4\}$, $\{15, 12, 6; 1, 2, 10\}$, $\{18, 15, 9; 1, 1, 10\}$, $\{19, 16, 8; 1, 2, 8\}$, $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, $\{33, 30, 15; 1, 2, 15\}$, $\{35, 32, 8; 1, 2, 28\}$, $\{42, 39, 1; 1, 1, 42\}$, $\{51, 48, 8; 1, 4, 36\}$, $\{51, 48, 24; 1, 2, 24\}$, $\{55, 52, 34; 1, 2, 22\}$, $\{58, 55, 8; 1, 2, 44\}$, $\{60, 57, 16; 1, 4, 30\}$, $\{60, 57, 32; 1, 4, 18\}$, $\{63, 60, 10; 1, 2, 54\}$, $\{63, 60, 49; 1, 4, 15\}$, $\{68, 65, 32; 1, 4, 40\}$, $\{75, 72, 8; 1, 2, 60\}$, $\{75, 72, 42; 1, 4, 50\}$, $\{75, 72, 31; 1, 8, 45\}$, $\{80, 77, 61; 1, 7, 20\}$, $\{90, 87, 60; 1, 15, 18\}$, $\{99, 96, 12; 1, 4, 88\}$, $\{99, 96, 20; 1, 4, 72\}$, $\{99, 96, 6; 1, 6, 88\}$, $\{120, 117, 5; 1, 5, 108\}$, $\{143, 140, 34; 1, 7, 110\}$, $\{147, 144, 39; 1, 12, 117\}$, $\{224, 221, 32; 1, 16, 208\}$;

(2) Γ — антиподальный граф с $\mu = 2$ и массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r \in \{2, 3, \dots, 44\} - \{10, 16, 28, 34, 38\}$ и $v = 2r(r + 1)$;

(3) Γ — антиподальный граф с $\mu \geq 3$ и массивом пересечений $\{15, 12, 1; 1, 4, 15\}$, $\{18, 15, 1; 1, 5, 18\}$, $\{27, 24, 1; 1, 8, 27\}$, $\{35, 32, 1; 1, 4, 35\}$, $\{45, 42, 1; 1, 6, 45\}$, $\{42, 39, 1; 1, 3, 42\}$, $\{63, 60, 1; 1, 4, 63\}$, $\{75, 72, 1; 1, 12, 75\}$, $\{99, 96, 1; 1, 4, 99\}$, $\{108, 105, 1; 1, 5, 108\}$, $\{143, 140, 1; 1, 20, 143\}$, $\{147, 144, 1; 1, 16, 147\}$, $\{171, 168, 1; 1, 12, 171\}$;

(4) Γ — примитивный граф с массивом пересечений $\{6, 3, 3, 3; 1, 1, 1, 2\}$, $\{12, 9, 6, 3; 1, 2, 3, 4\}$, $\{21, 18, 12, 4; 1, 1, 6, 21\}$, $\{15, 12, 9, 6, 3; 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{6, 3, 3, 3, 3; 1, 1, 1, 1, 2\}$, $\{18, 15, 12, 9, 6, 3; 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Для графов из п. (2), если $2r + 1$ — степень простого числа, то конструкция Мэтона [2, предложение 12.5.3] обеспечивает существование реберно симметричного графа с данным массивом пересечений. Отметим, что $2r + 1$ — не степень простого числа только для $r \in \{7, 17, 19, 22, 25, 27, 31, 32, 37, 38, 42, 43\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетических дистанционно регулярных графов с указанными значениями r . Такой граф имеет спектр $k^1, \sqrt{k}^{r^2-1}, -1^k, -\sqrt{k}^{r^2-1}$. Случаи $r \in \{7, 17, 19\}$ рассмотрены в [3]. Заметим, что число $k + 1$ не является квадратом. Порядок клики в Γ не больше 4, так как $a_1 = 2$. Основные результаты статьи приведены в теоремах 1, 2 и следствии.

Теорема 1. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r < 44$, $2r + 1$ — не степень простого числа, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) если $(r - 1)\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$, то $(r, p) \in \{(22, 5), (25, 17), (27, 5), (27, 11), (31, 7), (32, 5), (32, 13), (38, 7), (38, 11), (42, 5), (42, 17), (43, 29)\}$;

(2) если Ω — пустой граф, то либо p не делит r , $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 2r + 2 + (4r + 2)l$ и p делит $2l$, либо p делит r , $\alpha_3(g) = wr$, $\alpha_1(g) = 1 - w + (2r + 1)l$ и p делит $(l - 1, w - 2)$;

(3) если Ω является n -кликкой, то либо $n = 2$, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 2r + (4r + 2)l$, либо $n = 4$, p делит $r - 1$, $\alpha_1(g) = 2r - 2 + (4r + 2)l$ и p делит $6l$;

(4) если Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам и $p > 2$, то p делит $2r + 2 - t$ и $r - s$, в случае $t > 2$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений

$\{t-1, t-4, 1; 1, 2, t-1\}$, $t-4 = 2s-2$ и $|\Gamma - \Omega| \leq ts(2r-t)$.

Теорема 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \leq 43$, $2r+1$ — не степень простого числа, и $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Если F — антиподальный класс графа Γ и \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$, то верно одно из следующих утверждений:

(1) $r = 25$, $S(G)$ является 2-группой, $\bar{T} \cong L_2(25)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка, делящего 12;

(2) $r = 27$, $S(G)$ является 2-группой, группа \bar{T} изоморфна $U_3(3)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью циклической группы порядка, делящего 8;

(3) $r = 31$, либо $|G| = 2^b \cdot 31$, либо $S(G)$ является 2-группой, группа \bar{T} изоморфна $L_2(31)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка $r = 15$;

(4) $r = 43$, $S(G)$ является 2-группой, группа \bar{T} изоморфна $L_2(43)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21.

Следствие. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r+1, 2r-2, 1; 1, 2, 2r+1\}$, $r \leq 43$, $2r+1$ — не степень простого числа. Если $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ , $V = S(G)$, F — антиподальный класс графа Γ , то верно одно из утверждений:

(1) $r = 31$ и $|G| = 2^b \cdot 31$;

(2) $V = 1$ и либо $r = 25$, $G \cong L_2(25)$, $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка 6, либо $r = 27$, $F^*(G) \cong U_3(3)$, $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью группы порядка $4d$, где $d = |G : G'|$;

(3) G действует неприводимо на V , и либо

(i) $r = 25$, V является 12-мерным $F_2L_2(25)$ -модулем с $C_V(f) = 1$ или 26-мерным $F_2L_2(25)$ -модулем с $|C_V(f)| = 4$ для элемента f порядка 13, либо

(ii) $r = 27$, V является 6-мерным $F_2U_3(3)$ -модулем с $C_V(f) = 1$ или 14-мерным $F_2U_3(3)$ -модулем с $|C_V(f)| = 4$ для элемента f порядка 7.

Лемма 1 [4, лемма 2]. Пусть O_K — кольцо целых алгебраических чисел поля K . Если d — целое число, не делящееся на квадрат простого числа, $K = \mathbf{Q}(d^{1/2})$ — соответствующее квадратичное поле, то целочисленный базис кольца O_K равен $(1, (1 + d^{1/2})/2)$, если $d \equiv 1 \pmod{4}$ и равен $(1, d^{1/2})$, если $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$.

Доказательство теоремы 1 опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Каме-рона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений (X, \mathcal{R}) с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X , и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l .

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой и второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство \mathbf{C}^v является ортогональной прямой суммой собственных G -инвариантных подпространств W_0, \dots, W_d матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому

подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. [5, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g).$$

Лемма 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $r^2 - 1$ (отвечающее собственному значению $\theta_1 = \sqrt{2r + 1}$), χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности $2r + 1$, то

$$\begin{aligned} \chi_1(g) &= ((r - 1)\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + ((r - 1)\alpha_1(g) - \alpha_2(g))/\sqrt{2r + 1})/(2r), \\ \chi_2(g) &= (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/r - 1. \end{aligned}$$

Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_2(g) - (2r + 1)$ делится на p .

Доказательство. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ r^2 - 1 & (r^2 - 1)/\sqrt{2r + 1} & -(r + 1)/\sqrt{2r + 1} & -(r + 1) \\ 2r + 1 & -1 & -1 & 2r + 1 \\ r^2 - 1 & -(r^2 - 1)/\sqrt{2r + 1} & (r + 1)/\sqrt{2r + 1} & -(r + 1) \end{pmatrix},$$

$\chi_1(g) = ((r - 1)\alpha_0(g) + (r - 1)\alpha_1(g)/\sqrt{2r + 1} - \alpha_2(g)/\sqrt{2r + 1} - \alpha_3(g))/(2r)$ и $\chi_2(g) = ((2r + 1)\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + (2r + 1)\alpha_3(g))/(r(2r + 2))$.

Учитывая равенство $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 2r(r + 1) - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/r - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [6]. Лемма доказана.

До конца работы предполагается, что Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r < 44$, $2r + 1$ — не степень простого числа, K — наибольшая подгруппа из G , фиксирующая каждый антиподальный класс, g — элемент простого порядка p из G , $p > 2$ и $\Omega = \text{Fix}(g)$ пересекает t антиподальных классов по s вершинам.

Лемма 3. Выполняются следующие утверждения:

(1) если $(r - 1)\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$, то $(r, p) \in \{(22, 5), (25, 17), (27, 5), (27, 11), (31, 7), (32, 5), (32, 13), (38, 7), (38, 11), (42, 5), (42, 17), (43, 29)\}$;

(2) если Ω — пустой граф, то либо p не делит r , $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_1(g) = 2r + 2 + (4r + 2)l$, p делит $2l$ и $\chi_1(g) = 0$ или $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ и $r \in \{22, 25, 27, 31, 37, 43\}$, либо p делит r , $\alpha_3(g) = wr$, $\alpha_1(g) = 1 - w + (2r + 1)l$ и p делит $(l - 1, w - 2)$;

(3) если Ω является n -кликкой, то либо $n = 2$, $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 2r + (4r + 2)l$, либо $n = 4$, p делит $r - 1$, $\alpha_1(g) = 2r - 2 + (4r + 2)l$ и p делит $6l$;

(4) если Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам и $p > 2$, то p делит $2r + 2 - t$ и $r - s$, в случае $t > 2$ граф Ω является дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{t - 1, t - 4, 1; 1, 2, t - 1\}$, $t - 4 = 2s - 2$ и $|\Gamma - \Omega| \geq ts(2r - t)$, в частности, $s < r$ и $p < r$.

Доказательство. Если g — элемент группы, то значение характера для g является суммой n корней из единицы степени $|g|$, где n — размерность представления ψ . Далее, корни из единицы степени 2, 3 имеют рациональные вещественные части. Если $|g| = 2, 3$, то значение характера — вещественное число, поэтому оно является целым.

Пусть $(r - 1)\alpha_1(g) \neq \alpha_2(g)$ и $k = k_0^2 d$, d — целое число, не делящееся на квадрат простого числа.

Если $r = 22$, то $\chi_1(g) = (21\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + (21\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{5}/15)/44$, $d = 5$, по лемме 1 число $21\alpha_1(g) - \alpha_2(g)$ делится на 330 и $p = 5$.

Если $r = 25$, то $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) - \alpha_3(g) + (24\alpha_1(g) - \alpha_2(g))\sqrt{51}/51)/50$, $d = 51$, по лемме 1 число $24\alpha_1(g) - \alpha_2(g)$ делится на 2550 и $p = 17$.

Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

Пусть Ω — пустой граф. Тогда p делит $2r(r+1)$.

Если p не делит r , то $\alpha_3(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 2r(r+1) - \alpha_1(g)$ и $\chi_1(g) = ((\alpha_1(g) - 2r - 2)\sqrt{2r+1}/(4r+2))$. Поэтому $\alpha_1(g) = 2r+2 + (4r+2)l$, p делит $2l$, и либо $\chi_1(g) = 0$, либо ввиду леммы 1 имеем $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ и $r \in \{22, 25, 27, 31, 37, 43\}$. Если p делит r , то $\alpha_3(g) = wr$, p делит $2r+2-w$, $\alpha_2(g) = 2r(r+1) - wr - \alpha_1(g)$, $\chi_1(g) = w/2 + (\alpha_1(g) - 2r - 2 + w)\sqrt{2r+1}/(4r+2)$, $\alpha_1(g) = 1 - w + (2r+1)l$ и p делит $(l-1, w-2)$.

Пусть Ω является n -кликкой. Если $n = 1$, то p делит $r-1$ и $2r+1$, поэтому $p = 3$, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = r(2r-1)$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - (2r-1))\sqrt{2r+1}/(4r+2)$ и $\alpha_1(g) = (4r+2)l + (2r-1)$. Противоречие с тем, что p не делит $2r-1$. Если $n = 2$, то p делит $r-1$ и $2r$, поэтому $p = 2$, $\alpha_2(g) = 2r^2 - \alpha_1(g)$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 2r)\sqrt{2r+1}/(4r+2)$ и $\alpha_1(g) = 2r + (4r+2)l$. Если $n = 4$, то p делит $r-1$, $\alpha_2(g) = 2r(r-1) - \alpha_1(g)$, $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 2(r-1))\sqrt{2r+1}/(4r+2)$, $\alpha_1(g) = 2r - 2 + (4r+2)l$ и p делит $6l$.

Пусть Ω пересекает t антиподальных классов по s вершинам и $p > 2$. Тогда p делит $2r+2-t$ и $r-s$. Если $t > 2$, то Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{t-1, t-4, 1; 1, 2, t-1\}$, $t-4 = 2s-2$ и $|\Gamma - \Omega| \geq ts(2r-t)$, в частности, $s < r$ и $p < r$. Лемма доказана.

Теорема 1 следует из лемм 2 и 3.

Кроме того, из леммы 3 следует, что $(r-1)\alpha_1(g) = \alpha_2(g)$ для неединичного элемента $g \in K$, и по лемме 2 число $\chi_1(g) - (r^2-1) = r+2-r^2$ делится на p , поэтому K является 2-группой. Если r делится на 4, то по лемме 2 K не содержит элементов порядка 4 и является элементарной абелевой 2-группой.

Леммы 4–14 доказываются простым применением теоремы 1 в случае непустого графа Ω .

Лемма 4. Если $r = 22$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 7$, $t = 4$, $s = 1$ и Ω — клика;
- (2) $p = 5$, $t = 1$ и $s = 2, 7, 12, 17, 22$ или $t = 6$, $s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (3) $p = 3$, $t = 1$ и $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22$ или $t = 4$, $s = 1$ и Ω — клика.

Лемма 5. Если $r = 25$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 23$, $t = 6$, $s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (2) $p = 11$, $t = 8$, $s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (3) $p = 3$, $t = 1$ и $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25$ или $t = 4$, $s = 1$ и Ω — клика.

Лемма 6. Если $r = 27$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 11$, $t = 1$ и $s = 5, 16, 27$;
- (2) $p = 5$, $t = 1$ и $s = 2, 7, 12, 17, 22, 27$ или $t = 6$, $s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (3) $p = 3$, $t = 8$, $s = 3$ и Ω — граф Клейна.

Лемма 7. Если $r = 28$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 19$, $t = 1$ и $s = 9, 28$;
- (2) $p = 5$, $t = 8$, $s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (3) $p = 3$, $t = 1$ и $s = 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28$ или $t = 4$, $s = 1$ и Ω — клика.

Лемма 8. Если $r = 31$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 29$, $t = 6$, $s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (2) $p = 7$, $t = 1$ и $s = 3, 10, 17, 24, 31$ или $t = 8$, $s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (3) $p = 5$, $t = 4$, $s = 1$ и Ω — клика;
- (4) $p = 3$, $t = 1$ и $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31$ или $t = 4$, $s = 1$ и Ω — клика.

Лемма 9. Если $r = 32$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 29, t = 8, s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (2) $p = 13, t = 1$ и $s = 6, 19, 32$;
- (3) $p = 11, t = 6, s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (4) $p = 5, t = 1$ и $s = 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32$ или $t = 6, s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (5) $p = 3, t = 6, s = 2$ и Ω — граф икосаэдра.

Лемма 10. Если $r = 34$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 31, t = 8, s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (2) $p = 23, t = 1$ и $s = 11, 34$;
- (3) $p = 11, t = 4, s = 1$ и Ω — клика;
- (5) $p = 3, t = 1$ и $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34$ или $t = 4, s = 1$ и Ω — клика.

Лемма 11. Если $r = 37$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 17, t = 8, s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (2) $p = 11, t = 10, s = 4$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;
- (3) $p = 7, t = 6, s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (4) $p = 5, t = 1$ и $s = 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37$ или $t = 6, s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (5) $p = 3, t = 1$ и $s = 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37$ или $t = 4, s = 1$ и Ω — клика, или $t = 10, s = 4$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$.

Лемма 12. Если $r = 38$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 37, t = 4, s = 1$ и Ω — клика;
- (2) $p = 17, t = 10, s = 4$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;
- (3) $p = 11, t = 1$ и $s = 6, 27, 38$;
- (4) $p = 7, t = 1$ и $s = 3, 10, 17, 24, 31, 38$ или $t = 8, s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (5) $p = 5, t = 8, s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (6) $p = 3, t = 6, s = 2$ и Ω — граф икосаэдра.

Лемма 13. Если $r = 42$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 41, t = 4, s = 1$ и Ω — клика;
- (2) $p = 19, t = 10, s = 4$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;
- (3) $p = 17, t = 1$ и $s = 8, 25, 42$;
- (4) $p = 13, t = 8, s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (5) $p = 5, t = 1$ и $s = 2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42$ или $t = 6, s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (6) $p = 3, t = 8, s = 3$ и Ω — граф Клейна.

Лемма 14. Если $r = 43$, то верно одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 41, t = 6, s = 2$ и Ω — граф икосаэдра;
- (2) $p = 29, t = 1$ и $s = 14, 43$;
- (3) $p = 13, t = 10, s = 4$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$;
- (4) $p = 7, t = 4, s = 1$ и Ω — клика;
- (5) $p = 5, t = 8, s = 3$ и Ω — граф Клейна;
- (6) $p = 3, t = 1$ и $s = 4, 7, \dots, 43$ или $t = 4, s = 1$ и Ω — клика или $t = 10, s = 4$ и Ω — граф с массивом пересечений $\{9, 6, 1; 1, 2, 9\}$.

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$, $r < 44$, $2r + 1$ — не степень простого числа и $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ . Зафиксируем вершину a графа Γ и антиподальный класс F , содержащий a .

Лемма 15. Пусть \bar{T} — цоколь группы $\bar{G} = G/S(G)$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (1) $r = 25$, $S(G)$ является 2-группой, группа \bar{T} изоморфна $L_2(25)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка, делящего 12;
- (2) $r = 27$, $S(G)$ является 2-группой, группа \bar{T} изоморфна $U_3(3)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью циклической группы порядка, делящего 8;
- (3) $r = 31$, либо $|G| = 2^b \cdot 31$, либо $S(G)$ является 2-группой, группа \bar{T} изоморфна $L_2(31)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка $r = 15$;
- (4) $r = 43$, $S(G)$ является 2-группой, группа \bar{T} изоморфна $L_2(43)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21.

Доказательство. В случае $r = 22$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 23\}$. Если f — элемент порядка 23 из G , g — элемент простого порядка $p < 23$ из $C_G(f)$, то $\alpha_1(f) = 46$, ввиду леммы 4 $p = 2$ и либо подграф Ω пуст, либо $|\Omega| = 46y$, $t = 23$ и $s = 4y$. Но в последнем случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 22\alpha_1(g) = 23 \cdot 22$ и $\alpha_1(g) = 23$, противоречие. Заметим, что $|G|$ не делится на 11^2 , поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(23)$, M_{23} , M_{24} , Co_3 или Co_2 . Так как \bar{T} содержит подгруппу индекса, делящего $22 \cdot 46$, то либо $\bar{T} \cong L_2(23)$, \bar{T}_a — подгруппа из диэдральной группы порядка 24, либо $\bar{T} \cong M_{23}$, \bar{T}_a — подгруппа, изоморфная $L_3(4).Z_2$ или $E_{16}.A_7$. В любом случае имеем противоречие с тем, что G содержит подгруппу индекса 46.

В случае $r = 25$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11, 13, 23\}$. Если f — элемент порядка 13 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 13$ из $C_G(f)$, то $\alpha_1(f) = 52$, ввиду леммы 5 $p = 2$, и либо подграф Ω пуст, либо $|\Omega| = 26s$. В последнем случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 25\alpha_1(g) = 26 \cdot 25$ и $\alpha_1(g) = 26$. Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $26 \cdot 26s \leq 26 \cdot 50$, то $s = 1$ и Ω — клика, противоречие.

Заметим, что $|G|$ не делится на 5^3 , поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(25)$, $U_3(4)$ или ${}^2F_4(2)'$. Так как \bar{T} содержит подгруппу индекса, делящего $25 \cdot 52$, то либо $\bar{T} \cong L_2(25)$, \bar{T}_a — подгруппа из диэдральной группы порядка 24, либо $\bar{T} \cong U_3(4)$, \bar{T}_a — подгруппа порядка $16 \cdot 3$ или $64 \cdot 3$. Наконец, G содержит подгруппу индекса 52, поэтому $\bar{T} \cong L_2(25)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью циклической группы порядка, делящего 12.

В случае $r = 27$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Если f — элемент порядка 7 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 7$ из $C_G(f)$, то $\alpha_1(f) = 56$, ввиду леммы 6 $p = 2$, и либо подграф Ω пуст, либо $t = 14h$. В последнем случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 27\alpha_1(g) = 27(56 - 14h)$ и $\alpha_1(g) = 56 - 14h$. Заметим, что $|G|$ не делится на 3^5 , поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $U_3(3)$, J_2 , $Sp_6(2)$, A_9 , A_{10} или A_{11} . Так как \bar{T} содержит подгруппу индекса, делящего $56 \cdot 27$, то $\bar{T} \cong U_3(3)$, \bar{T}_a — подгруппа порядка, делящего 32. Наконец, G содержит подгруппу индекса 56, поэтому $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью циклической группы порядка, делящего 8.

В случае $r = 28$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 19, 29\}$. Если f — элемент порядка 29 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 29$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_1(f) = 58$, ввиду леммы 7 имеем $p = 2$. Заметим, что $|G|$ не делится на 7^2 , поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(29)$, \bar{T}_a — подгруппа из диэдральной группы порядка 30. Противоречие с тем, что G не содержит подгрупп индекса 58.

В случае $r = 31$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 29, 31\}$. Если f — элемент порядка 31 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 31$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 31w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 63l$ и 31 делит $(l - 1, w - 2)$. Отсюда $l = 1, w = 2$, ввиду леммы 8 либо $p = 3, 7, t = 1, s = 31$, либо $p = 2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f , противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$, поэтому либо $|G| = 2^b \cdot 31$, либо $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(31)$. В последнем случае $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка 15 и \bar{T}_a — подгруппа порядка 15.

В случае $r = 32$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 11, 13, 29\}$. Если f — элемент порядка 11 из G , $\text{Fix}(f)$ — пустой граф и g — элемент простого порядка $p \neq 11$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_1(f) = 22$

и ввиду леммы 9 $p = 2$. Далее, либо Ω — пустой граф, либо $|\Omega| = 22s$. В последнем случае $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 32\alpha_1(g) = 44 \cdot 32$ и $\alpha_1(g) = 44$. Так как число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $44 \cdot 22s \leq 44 \cdot 64$, то $s = 2$ (число $32 - s$ четно). Противоречие с тем, что для антиподов $a, a^* \in \Omega$ и $b \in \Omega(a)$ подграф $\Omega(b)$ содержит не более 2 вершин из $\Omega(a)$ и из $\Omega(a^*)$.

Заметим, что $S(G)$ является 2-группой, $|G|$ не делится на 9 и по [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(11)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — диэдральная группа порядка 10. В этом случае $S(G)$ фиксирует каждый антиподальный класс. Отсюда $|S(G)|$ делится на 8 и делит 32. Противоречие с тем, что f централизует $S(G)$.

В случае $r = 34$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 23, 31\}$. Если f — элемент порядка 17 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 17$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 34w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 69l$ и 17 делит $(l - 1, w - 2)$. Отсюда $l = 1, w = 2$, ввиду леммы 10 либо $p = 3, 23, t = 1, s = 34$, либо $p = 2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f , противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 31$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $\Omega_8^-(2)$. Противоречие с тем, что в \bar{T} нет подгрупп индекса, делящего 70.

В случае $r = 37$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 37\}$. Если f — элемент порядка 37 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 37$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 37w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 75l$ и 37 делит $(l - 1, w - 2)$. Отсюда $l = 1, w = 2$, ввиду леммы 11 либо $p = 3, 5, t = 1, s = 37$, либо $p = 2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f , противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] порядок группы, делящийся на $19 \cdot 37$, делится на 13 или на 11^2 , противоречие.

В случае $r = 38$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 37\}$. Если f — элемент порядка 19 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 19$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 38w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 77l$ и 19 делит $(l - 1, w - 2)$. Отсюда $l = 1, w = 2$, ввиду леммы 12 либо $p = 7, 11, t = 1, s = 38$, либо $p = 2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f , противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5 \cdot 7^d \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и ввиду [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $U_4(8), {}^2G_2(27), U_3(27)$. Противоречие с тем, что в \bar{T} нет подгрупп индекса, делящего 78.

В случае $r = 42$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 41, 43\}$. Если f — элемент порядка 43 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 43$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_1(f) = 86$, ввиду леммы 13 имеем $p = 2$. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5^d \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 41 \cdot 43$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и по [7, табл. 1] порядок группы, делящийся на 43, делится на 11 или на 7^2 , противоречие.

В случае $r = 43$ имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 29, 41, 43\}$. Если f — элемент порядка 43 из G , g — элемент простого порядка $p \neq 43$ из $C_G(f)$, то по теореме $\alpha_3(f) = 43w$, $\alpha_1(f) = 1 - w + 87l$ и 43 делит $(l - 1, w - 2)$. Отсюда $l = 1, w = 2$, ввиду леммы 14 либо $p = 3, 29, t = 1, s = 43$, либо $p = 2$. В первом случае g действует на двух антиподальных классах, фиксируемых f , противоречие. Заметим, что $|G|$ делит $2^b \cdot 3^c \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 \cdot 41 \cdot 43$, поэтому $S(G)$ является 2-группой, и по [7, табл. 1] группа \bar{T} изоморфна $L_2(43), U_7(2)$. Наконец, G содержит подгруппу индекса 88, поэтому $\bar{T} \cong L_2(43)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21. Лемма доказана.

Из лемм 4–15 следует теорема 2. Докажем следствие.

Лемма 16. Пусть $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| = 2r + 2$. Тогда верно одно из утверждений:

(1) $r = 25$, $G \cong L_2(25)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка 6;

(2) $r = 27$, $T \cong U_3(3)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью группы порядка $4d$, где $d = |G : T|$.

Доказательство. Пусть $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| = 2r + 2$. Если $S(G) \neq 1$, то каждая инволюция g из $S(G)$ фиксирует любой антиподальный класс и $\alpha_3(g) = v$. Противоречие с тем, что число r нечетно. Значит, $S(G) = 1$.

Если $r = 25$, то $T \cong L_2(25)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка $6d$, где $d = |G : T|$.

Если $r = 27$, то $T \cong U_3(3)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью группы порядка $4d$, где $d = |G : T|$.

Если $r = 31$, то $G \cong PGL_2(31)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка 15.

Если $r = 43$, то $G \cong PGL_2(43)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21.

Компьютерные вычисления показывают, что в двух последних случаях, а также в случае $r = 25$, $G \neq T$ дистанционно регулярный граф не существует.

Лемма 17. Пусть $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| < 2r + 2$, $V = S(G)$. Тогда либо $r = 31$, $|G| = 2^b \cdot 31$, либо $|V : V_{\{F\}}| = 2$, G действует неприводимо на V , и верно одно из утверждений:

(1) V является 12-мерным $F_2L_2(25)$ -модулем с $C_V(f) = 1$ или 26-мерным $F_2L_2(25)$ -модулем с $|C_V(f)| = 4$ для элемента f порядка 13;

(2) V является 6-мерным $F_2U_3(3)$ -модулем с $C_V(f) = 1$ или 14-мерным $F_2U_3(3)$ -модулем с $|C_V(f)| = 4$ для элемента f порядка 7.

Доказательство. Пусть $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| < 2r + 2$. Если $G = S(G)$, то ввиду леммы 15 имеем $r = 31$, $|G| = 2^b \cdot 31$. Если же $G \neq S(G)$, то $|\bar{G} : \bar{G}_{\{F\}}| = r + 1$, $|S(G) : S(G)_{\{F\}}| = 2$ и \bar{T} действует неприводимо на $S(G)$. Из лемм 15, 16 следует, что либо

(1) $r = 25$, группа \bar{T} изоморфна $L_2(25)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 25 с помощью группы порядка 12, либо

(2) $r = 27$, группа \bar{T} изоморфна $U_3(3)$ и $\bar{T}_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 27 с помощью циклической группы порядка 8, либо

(3) $r = 31$, $\bar{G} \cong L_2(31)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 31 с помощью циклической группы порядка 15, либо

(4) $r = 43$, $\bar{G} \cong L_2(43)$ и $G_{\{F\}}$ — расширение группы порядка 43 с помощью циклической группы порядка 21.

Если G содержит нормальную подгруппу $\langle g \rangle$ порядка 2, то $\alpha_1(g) = 2r + 2$ и G действует на $\{u \in \Gamma \mid d(u, u^g) = 1\}$, противоречие.

В случае $r = 25$ выберем элемент f порядка 13 из G и элемент g простого порядка $p \neq 13$ из $C_G(f)$. Из доказательства леммы 15 следует, что $\alpha_1(f) = 52$, $p = 2$ и Ω — пустой граф. Отсюда $|C_G(f)|$ не делится на 8. Ввиду [8] V является 12-мерным $F_2L_2(25)$ -модулем с $C_V(f) = 1$ или 26-мерным $F_2L_2(25)$ -модулем с $C_V(f) = 4$.

В случае $r = 27$ выберем элемент f порядка 7 из G и элемент g простого порядка $p \neq 7$ из $C_G(f)$. Из доказательства леммы 15 следует, что $\alpha_1(f) = 56$, $p = 2$ и Ω — пустой граф. Отсюда $|C_G(f)|$ не делится на 16. Ввиду [8] V является 6-мерным $F_2U_3(3)$ -модулем с $C_V(f) = 1$ или 14-мерным $F_2U_3(3)$ -модулем с $|C_V(f)| = 4$.

В случае $r = 31$ выберем элемент f порядка 31 из G и элемент g простого порядка $p \neq 31$ из $C_G(f)$. Из доказательства леммы 15 следует, что $\alpha_1(f) = 62$, $p = 2$ и Ω — пустой граф. Отсюда $|C_G(f)|$ не делится на 4. Ввиду [8] V является 15-мерным $F_2L_2(31)$ -модулем с $C_V(f) = 1$. Противоречие с тем, что $|V : V_{\{F\}}| = 2$.

В случае $r = 43$ выберем элемент f порядка 43 из G и элемент g простого порядка $p \neq 43$ из $C_G(f)$. Из доказательства леммы 15 следует, что $\alpha_1(f) = 86$, $p = 2$ и Ω — пустой граф. Отсюда $|C_G(f)|$ не делится на 4. С помощью компьютерных вычислений доказано, что V является 21-мерным $F_2L_2(43)$ -модулем с $C_V(f) = 1$. Противоречие с тем, что $|V : V_{\{F\}}| = 2$. Лемма доказана.

Из лемм 16, 17 вытекает следствие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Makhnev A.A., Nirova M.S.** On distance-regular graphs with $\lambda = 2$ // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2014. Vol. 7, iss. 2. P. 204–210.
2. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
3. **Белоусов И.Н., Махнев А.А.** Группы автоморфизмов антиподальных дистанционно регулярных графов с числом вершин, не большим 1000 // Междунар. конф. “Мальцевские чтения”: тез. докл. Новосибирск, 2015. С. 87.
4. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О группе автоморфизмов дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$ // Алгебра и логика. 2013. Т. 51, № 4. С. 476–495.
5. **Cameron P.** Permutation Groups. London: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p.
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. РАН 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirian Electr. Math. Reports. 2009. Vol. 6. P. 1–12.
8. An atlas of Brauer characters / C. Jansen et. al. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.

Белоусов Иван Николаевич

Поступила 25.01.2016

канд. физ.-мат. наук

старший. науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: i_belousov@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич

чл.-корр. РАН

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина

e-mail: makhnev@imm.uran.ru

УДК 517.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЦИКЛИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЗОБНОВЛЯЕМОГО РЕСУРСА¹

А. О. Беляков, А. А. Давыдов

Здесь рассматривается периодический импульсный сбор возобновляемого ресурса, который распределен в области арифметического пространства и имеет логистический закон роста. Мы доказываем, что для заданного усилия сбора существует его подходящее стационарное распределение в области ресурса, которое доставляет на бесконечном горизонте максимальную эффективность сбора — максимум отношения дохода от сбора к суммарному приложенному усилию.

Ключевые слова: возобновляемый ресурс, логистический закон, усилие сбора, циклический процесс, оптимальная эксплуатация.

A. O. Belyakov, A. A. Davydov. Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource.

We consider a periodic impulse harvesting of a renewable resource distributed in a domain of the arithmetic space and obeying the logistic growth law. We prove that for a given harvesting effort there exists an appropriate stationary distribution of the effort in the resource domain providing the maximum efficiency of the harvesting at infinite horizon, where the efficiency is the ratio of the harvesting profit to the total effort applied.

Keywords: renewable resource, logistic law, harvesting effort, cyclic process, optimal exploitation.

MSC: 34A37, 49K15, 91B32, 92D25, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-38-46

Введение

Моделирование эксплуатации возобновляемых ресурсов и ее оптимизация по различным критериям качества не обделены вниманием исследователей ввиду широкого спектра возможных приложений получаемых результатов. Здесь мы рассматриваем циклическое использование такого ресурса с заданным периодом, определяемым спецификой извлечения ресурса, скажем, сезонностью сбора [7] или другими причинами, например, наличием циклических режимов использования ресурса среди оптимальных [1; 3; 4; 8].

Точнее, мы предполагаем, что ресурс распределен в ограниченной области D арифметического пространства с достаточно хорошей границей, например, с гладкой или гёльдеровой гиперповерхностью (без нарушения общности рассуждений можно считать, что наша область является шаром либо кубом), имеет начальную непрерывную (или измеримую) положительную, отделенную от нуля плотность распределения $p_0, p_0 = p_0(x)$, в этой области и возобновляется между последовательными сборами по логистическому закону

$$p_t(t, x) = (a(x) - b(x)p(t, x))p(t, x), \quad (0.1)$$

в котором $p(t, x)$ — это плотность популяции в точке $x \in D$ в момент времени t , а функции a и b характеризуют показатели роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно. Эти показатели зависят от точки области, но не зависят от времени и являются непрерывными (или измеримыми). К тому же, показатель конкуренции b будем считать положительным, отделенным от нуля некоторой величиной $b_0 > 0$.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-08075а) и проекта 1.638.2016/ФПМ Программы Минобрнауки России.

Сбор ресурса осуществляется путем распределения в области D имеющегося положительного *усилия сбора* E — вещественной величины — или его части в виде измеримой неотрицательной интегрируемой функции h (= *плотности усилия*). Мы предполагаем, что плотность усилия не меняется от сбора к сбору (что в практическом плане выражается в постоянной организации сбора). В силу предположения имеем

$$\int_D h(x)dx \leq E. \tag{0.2}$$

Такую плотность усилия будем называть *допустимой*.

Выгода от сбора определяется в натуральной форме в виде величины извлеченного ресурса

$$\int_D p(t, x)(1 - e^{-\gamma(x)h(x)})dx,$$

где t — момент сбора. Здесь коэффициент

$$1 - e^{-\gamma(x)h(x)}$$

с неотрицательной измеримой функцией γ взят по аналогии с теорией поиска [6; 9] и может характеризовать сложность обнаружения (извлечения) ресурса в точке x при приложении в ней значения $h(x)$ плотности усилия (см. также [2]). Сразу после сбора плотность ресурса в точке x падает на величину

$$p(t, x)(1 - e^{-\gamma(x)h(x)}) \tag{0.3}$$

и начинает восстанавливаться до следующего сбора по закону (0.1).

Эффективность сбора определяется пределом при $k \rightarrow \infty$ отношения собранного ресурса за k сборов к произведению числа сборов k на имеющееся усилие сбора E . Как мы увидим ниже, такой предел существует. Отметим, что в определении эффективности не учитывается величина периода сбора, на которую следовало бы делить результат при возможности вариации периода (сбор одного или нескольких урожаев за один и тот же промежуток времени). В силу предположения о постоянстве периода это не повлияет на выбор оптимальной плотности усилия сбора. К тому же, после замены времени $t = T\tau$ в (0.1), где τ — новое время, фиксированный период T становится равным единице.

В настоящей работе показано, что при сделанных предположениях для заданных положительных периода и усилия сбора существует допустимая плотность усилия, доставляющая его максимальную эффективность, и предложен алгоритм ее построения.

Всюду ниже показатель роста мы считаем неотрицательным. Это ограничение роста чисто техническое, поскольку всюду, где этот показатель отрицателен, популяция вымирает даже при отсутствии эксплуатации. В силу этого размещение какого-либо усилия в таких областях не будет повышать эффективность сбора (извлечения) ресурса. При нулевом значении показателя роста в этих областях будет наблюдаться тот же эффект в силу положительности показателя конкуренции. Следовательно, переопределение показателя роста как максимума из его значения и нуля не влияет на решение задачи поиска максимума эффективности сбора.

1. Существование эффективности сбора и задача ее оптимизации

Здесь мы показываем, что при заданных периоде и усилия сбора для любой допустимой плотности усилия эффективность сбора корректно определена. Сначала мы кратко повторяем аналогичные вычисления из [2], чтобы сделать изложение результатов этой работы более независимым.

Зафиксируем допустимую плотность сбора h , положительный период сбора T и рассмотрим последовательные сборы ресурса. Не нарушая общности, можно считать, что начальный

момент t_0 анализа процесса сборов нулевой, а соответственно время первого сбора равно T . Если это не так, то добиться этого легко — достаточно за начальное распределение ресурса взять результат его восстановления по закону (0.1) от момента $t = t_0$ до $t = 0$ при исходной плотности p_0 .

Таким образом, k -й сбор ресурса будет иметь место в момент времени $t = kT$. В силу (0.3) плотности ресурса до и после этого сбора в точке $x \in D$, скажем, $P_k(x)$ и $p_k(x)$ соответственно связаны соотношением

$$p_k(x) = P_k(x)e^{-\gamma(x)h(x)}.$$

В силу закона восстановления (0.1) величина $p_k(x)$ за время T до следующего сбора изменится до величины

$$P_{k+1}(x) = \frac{a(x)P_k(x)}{a(x)e^{\gamma(x)h(x)-a(x)T} + P_k(x)b(x)(1 - e^{-a(x)T})} \quad \text{при } a(x) > 0$$

и величины

$$P_{k+1}(x) = \frac{P_k(x)}{e^{\gamma(x)h(x)} + P_k(x)b(x)T} \quad \text{при } a(x) = 0,$$

что нетрудно посчитать.

Во втором случае, при $a(x) = 0$, последовательность значений $P_k(x)$ монотонно убывает и стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ в силу неотрицательности γ и h , а также положительности T , и $p_0(x)$ и $b(x)$.

Последовательность $P_k(x)$ имеет нулевой предел при $k \rightarrow \infty$ и в первом случае, если $\gamma(x)h(x) - a(x)T \geq 0$, а если же $\gamma(x)h(x) - a(x)T < 0$, то предел последовательности $P_k(x)$ при $k \rightarrow \infty$ и $p_0(x) > 0$ ненулевой и равен

$$\frac{a(x) e^{a(x)T} - e^{\gamma(x)h(x)}}{b(x) e^{a(x)T} - 1},$$

что нетрудно проверить.

Суммируя, получаем, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *При заданных положительных периоде цикла сбора, усилнии сбора E и начальном распределении ресурса p_0 для любой допустимой плотности усилия h корректно определена ее эффективность сбора $J(h, E)$, которая может быть вычислена по формуле*

$$J(h, E) = \frac{1}{E} \int_D P_\infty(x)(1 - e^{-\gamma(x)h(x)}) dx, \quad (1.4)$$

где

$$P_\infty(x) := \max \left\{ 0, \frac{a(x) e^{a(x)T} - e^{\gamma(x)h(x)}}{b(x) e^{a(x)T} - 1} \right\}. \quad (1.5)$$

Таким образом, задача повышения эффективности сбора возобновляемого ресурса сводится к задаче максимизации функционала (1.4) по всем допустимым плотностям усилия h , то есть неотрицательным распределениям усилия сбора, удовлетворяющим ограничению (0.2). Решение этой задачи мы будем называть *оптимальной* плотностью усилия сбора.

2. Существование оптимальной плотности усилия

Здесь дополнительно мы предполагаем, что показатель γ отделен от нуля в области D некоторой положительной величиной Γ_0 и доказываем существование оптимальной допустимой плотности сбора.

Обозначим через A множество допустимых плотностей усилия h , удовлетворяющих неравенству

$$0 \leq \gamma(x)h(x) \leq \frac{a(x)T}{2}, \quad (2.6)$$

а через A_γ — множество соответствующих функций γh .

Справедливо следующее утверждение (верное и без предположения $\gamma \geq \Gamma_0 > 0$).

Предложение 1. *Если при заданных положительных периоде цикла сбора, усилии сбора и начальном распределении ресурса существует оптимальная плотность усилия, то такая обязательно есть и среди плотностей из множества A , т. е. удовлетворяющих условию (2.6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, пусть в условиях этого предложения существует оптимальная плотность усилия h_0 . Рассмотрим функцию двух переменных

$$f(x, z) = \max \{0, (e^{a(x)T} - e^z)(1 - e^{-z})\}$$

от $x \in D$ и $z \geq 0$. При любом $x \in D$ эта функция непрерывна на $z \geq 0$, равна нулю при $z = 0$ и $z \geq a(x)T$ и строго вогнута на интервале $(0, a(x)T)$, возможно, пустом.

По оптимальной плотности усилия построим функцию z_0 , $z_0(x) := \gamma(x)h_0(x)$ и рассмотрим ее модификацию z , которая в каждой точке x из области D , где имеет место неравенство

$$z_0(x) > \frac{a(x)T}{2},$$

принимает значение $z(x) = a(x)T/2$, в котором значение функции f максимально возможное (при данном x). Соответствующую плотность усилия h оставим равной h_0 вне области изменения z_0 , а в этой области определим по формуле

$$h(x) = \frac{z(x)}{\gamma(x)}.$$

Плотность усилия h всюду в области D удовлетворяет неравенствам (2.6) и $0 \leq h(x) \leq h_0(x)$, что нетрудно видеть, а также является измеримой как минимум из двух измеримых функций. Следовательно, h является допустимой плотностью усилия и лежит в A .

Но значение эффективности сбора для новой плотности усилия не меньше, чем для исходной плотности h_0 , поскольку по построению плотности h она доставляет не меньшее значение интеграла в функционале (1.4), чем h_0 . Следовательно, построенная плотность усилия h также оптимальна.

Таким образом, предложение 1 справедливо.

Теорема 2. *При $\gamma \geq \Gamma_0 > 0$ для заданных положительных периоде цикла сбора, усилии сбора и начальном распределении ресурса существует оптимальная плотность усилия.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полезны

Лемма 1. *Множества функций A и A_γ выпуклые.*

Лемма 2. *Множество A_γ замкнуто в $L_2(D)$.*

Первая лемма очевидна, а вторая доказана в конце раздела.

Воспользуемся утверждениями лемм для доказательства теоремы 2. Заметим, что функционал (1.4) (как функционал от z !) ограничен и непрерывен на множестве A_γ , поэтому существует точная верхняя грань его значений на этом множестве. А в силу лемм 1 и 2 для любой максимизирующей этот функционал последовательности $\{z_k = \gamma h_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ существуют

предельная функция z_∞ и соответственно в силу положительности γ предельная допустимая плотность усилия

$$h_\infty = \frac{z_\infty}{\gamma},$$

достигающие максимальное значение этого функционала.

Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 2. Для доказательства леммы 2 отметим, что в силу ограниченности функций из A_γ из любой последовательности $\{z_k = \gamma h_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ таких функций можно выбрать слабо сходящуюся в $L_2(D)$, предел которой z_∞ обязан удовлетворять неравенству

$$0 \leq z_\infty(x) \leq \frac{a(x)T}{2}$$

почти всюду в D . Следовательно, после изменения предела z_∞ на множестве меры нуль (“срезка” по левой и правой частям этого неравенства) он будет удовлетворять этому неравенству всюду.

Далее, плотность усилия h_∞

$$h_\infty(x) := \frac{z_\infty(x)}{\gamma(x)}$$

неотрицательна и ограничена в силу неотрицательности и ограниченности функции z_∞ , а также положительности и отделенности от нуля функции γ . Следовательно, эта плотность интегрируема в D . Для ее интеграла по D имеем

$$\int_D h_\infty(x) dx = \int_D \frac{z_\infty(x)}{\gamma(x)} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D \frac{z_k(x)}{\gamma(x)} dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_D h_k(x) dx \leq E,$$

где E — заданное усилие сбора.

Следовательно, плотность h_∞ допустима, а z_∞ лежит в A_γ . Таким образом, множество A_γ замкнуто в $L_2(D)$.

Лемма 2 доказана.

3. О построении оптимальной плотности усилия

Здесь предложен путь построения оптимальной плотности усилия, использующий первую вариацию функционала эффективности.

Точнее, мы рассматриваем этот функционал на некоторой оптимальной плотности усилия h_0 , удовлетворяющей ограничению

$$0 \leq \gamma h_0 \leq aT/2. \quad (3.1)$$

Предложение 2. Если ограничение усилия неактивно, т. е. $\int_D h_0(x) dx < E$, то

$$h_0(x) = \frac{a(x)T}{2\gamma(x)} \quad (3.2)$$

почти всюду, где $a\gamma > 0$.

Доказательство. Возьмем вариацию оптимальной плотности усилия

$$h_\epsilon = h_0 + \epsilon w,$$

оставляющую ее в классе допустимых, с некоторой функцией w и малым ϵ . В силу неактивности ограничения на усилие соответствующая вариация функционала эффективности (1.4)

вычисляется лишь по изменению подынтегрального выражения в этом функционале и имеет вид

$$\frac{\epsilon}{E} \int_{a\gamma > 0} \left[\frac{a(x)\gamma(x)e^{\gamma(x)h_0(x)}}{b(x)(e^{a(x)T} - 1)} (e^{a(x)T - 2\gamma(x)h_0(x)} - 1) \right] w(x) dx + o(\epsilon), \quad (3.3)$$

где последнее слагаемое — остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано. Взяв $w = h_0$ на шарах малых радиусов в D как с положительным, так и с отрицательным ϵ и с нулем вне этих шаров, получаем, что в области положительности h_0 с необходимостью должно быть равным нулю почти всюду выражение в квадратных скобках в последнем интегранте. Следовательно, необходимо $\gamma(x)h_0(x) = a(x)T/2$ почти всюду, где $a\gamma > 0$.

Предложение 2 доказано.

Предложение 3. Если ограничение на усилие активно, т. е. $\int_D h_0(x) dx = E > 0$, то почти всюду, где $a\gamma > 0$, оптимальная плотность усилия в области своей положительности вычисляется по формуле

$$h_0(x) = \frac{1}{\gamma(x)} \left[\frac{a(x)T}{2} - \ln \left(\frac{C}{2F(x)} + \sqrt{\frac{C^2}{4F^2(x)} + 1} \right) \right], \quad (3.4)$$

с некоторой неотрицательной константой C и

$$F(x) = \frac{a(x)\gamma(x)e^{a(x)T/2}}{b(x)(e^{a(x)T} - 1)}. \quad (3.5)$$

Доказательство. По сути, рассуждения аналогичны приведенным выше. Однако здесь мы будем брать вариацию плотности усилия, сохраняющую приложенное усилие. В этом случае вариация функционала эффективности будет вычисляться по той же формуле (3.3), однако функцию w уже нельзя брать произвольной в силу сохранения величины усилия E , для чего необходимо, чтобы $\int_D w(x) dx = 0$.

Полезно

Лемма 3. Для оптимальной плотности усилия h_0 , удовлетворяющей ограничению (3.1), выражение в квадратных скобках из интегранта в приращении (3.3) почти всюду в области $\{a\gamma > 0 \cap h_0 > 0\}$ равно некоторой неотрицательной константе C .

Эту лемму докажем ниже, а сейчас воспользуемся ей для доказательства предложения 3.

В силу леммы почти всюду в области $\{a\gamma > 0 \cap h_0 > 0\}$ для выражения в квадратных скобках из (3.3) имеем

$$\frac{a(x)\gamma(x)e^{\gamma(x)h_0(x)}}{b(x)(e^{a(x)T} - 1)} (e^{a(x)T - 2\gamma(x)h_0(x)} - 1) = C$$

с некоторой неотрицательной константой C . Отсюда получаем уравнение на $z = e^{a(x)T/2 - \gamma(x)h_0(x)}$

$$z^2 - \frac{C}{F(x)}z - 1 = 0$$

с F из (3.5) и само значение z :

$$z = \frac{C}{2F(x)} + \sqrt{\frac{C^2}{4F^2(x)} + 1},$$

учитывая его положительность. Следовательно, при $a\gamma > 0$ почти всюду в области положительности оптимальной плотности усилия h_0 справедливо выражение (3.4), что и требовалось показать.

Предложение 3 доказано по модулю леммы 3.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3. Допустим, что это не так, тогда существуют две различные точки в области $\{a\gamma > 0 \cap h_0 > 0\}$, для которых усредненное значение выражения в квадратных скобках в интегранте (3.3) по достаточно малым не пересекающимся окрестностям этих точек одинакового объема V (например, дискам одинакового достаточно малого радиуса) имеют различные (неотрицательные!) значения c_1 и c_2 , $0 \leq c_1 < c_2$. Выберем w , равное нулю вне этих окрестностей и некоторой достаточно малой величине $H < 0$ в первой из них и величине $-H > 0$ во второй (здесь малость H обуславливается возмущением плотности усилия в классе допустимых), что сохранит величину используемого усилия E . Это даст приращение функционала эффективности

$$\frac{\epsilon}{E} H(c_1 - c_2)V + o(\epsilon),$$

которое положительно при малых $\epsilon > 0$, что нетрудно видеть. Это противоречит оптимальности h_0 . Следовательно, предположение ошибочно. Отсюда в силу произвольности окрестностей усреднения получаем справедливость утверждения леммы 3.

4. Пример

Учитывая полученные нами формулы (1.4), (1.5), (3.4), (3.5), при построении примера возьмем в изучаемой модели $a \equiv 1$, а функции b и γ — непрерывными положительными в замыкании области D (например, если D — окружность, как в работах [1; 2] или [5], а x — обычный угол на ней, то подойдут $b(x) = \gamma(x) = 2 + \sin x$).

Для так выбранных функций для плотности h_0 , доставляемой необходимым условием оптимальности (3.4), имеем

$$h_0(x) = \frac{1}{\gamma(x)} (T - \ln W),$$

где

$$W = \frac{C(e^T - 1)}{2} + \sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}.$$

Подставляя эту плотность в значение предельного распределения P_∞ из (1.5), после несложных преобразований находим

$$P_\infty(x) = \max \left\{ 0, \frac{e^T}{b(x)(e^T - 1)} \left(1 - \frac{1}{W} \right) \right\}.$$

Нетрудно видеть, что при положительном периоде T и неотрицательной константе C это распределение положительно, оно всюду равно второму выражению в фигурных скобках. Следовательно, для интегранта в выражении (1.4) получаем следующее выражение:

$$\frac{e^T}{b(x)(e^T - 1)} \left(1 - \frac{1}{W} \right) (1 - e^{-TW}) = \frac{1}{b(x)(e^T - 1)} \left(e^T + 1 - 2\sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T} \right).$$

Учитывая теперь, что $b \equiv \gamma$, для эффективности плотности усилия h_0 получаем значение

$$\frac{\int_{h_0 > 0} \frac{1}{b(x)(e^T - 1)} \left(e^T + 1 - 2\sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T} \right) dx}{\int_{h_0 > 0} \frac{1}{\gamma(x)} (T - \ln W) dx} = \frac{e^T + 1 - 2\sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}}{(e^T - 1)(T - \ln W)}.$$

Правая часть последнего выражения зависит дифференцируемо от периода $T > 0$ и константы $C \geq 0$, но не зависит от области интегрирования $\{h_0 > 0\}$. Следовательно, его максимум, если он существует, достигается или в конечном значении C , например, $C = 0$, или в некоторой точке, где производная этого выражения по C равна нулю. Простые вычисления дают следующее выражение этой производной:

$$\frac{-C(e^T - 1)(T - \ln W) + e^T + 1 - 2\sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}}{2(T - \ln W)^2\sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}}.$$

Знаменатель в этом выражении положителен при положительных периоде T и разности $T - \ln W$ (т.е. при положительной плотности усилия h_0). При этом числитель равен $(e^{T/2} - 1)^2$ при $C = 0$ и также положителен, а производная числителя по C имеет значение

$$-(e^T - 1)(T - \ln W) - \frac{C(e^T - 1)^2}{2\sqrt{\frac{C^2(e^T - 1)^2}{4} + e^T}},$$

которое, напротив, отрицательно при $C \geq 0$ и положительных плотности усилия и периоде сбора.

Следовательно, вычисленная выше первая производная убывает с ростом C , а эффективность плотности усилия растет, пока эта производная остается положительной. При этом рост эффективности прекратится при первом обращении в ноль разности $T - \ln W$, когда плотность усилия станет нулевой, и никакого сбора фактически не будет, что нетрудно видеть. Легко посчитать, что произойдет это при $C = 1$.

Таким образом, наибольшая эффективность сбора достигается в пределе, когда стремящееся к нулю усилие сбора распределяется “правильно” во всей области сбора в соответствии с формулой (3.4). Отметим, что в сделанных предположениях плотность распределения усилия выше там, где ниже конкуренция и возможность обнаружения (извлечения) ресурса.

З а м е ч а н и е 1. Следует отметить, что в реальной ситуации, как правило, усилие сбора (наличие машин, обслуживающего их персонала и т.п.) невозможно устремить к нулю. В этом случае в разобранный пример максимальной эффективности будет достигаться при минимально возможном положительном усилии сбора. Этот факт справедлив и при более общих предположениях, как показывают наши вычисления в других примерах.

З а м е ч а н и е 2. Таким образом, алгоритм отыскания оптимального усилия сбора состоит в поиске наибольшего C , начиная с $C = 0$, где выполнено ограничение (0.2). При этом оптимальное значение может не существовать, когда распределенное усилие сбора ограничено снизу лишь нулем, как в нашем примере.

5. Заключение

Итак, в настоящей работе для рассматриваемого периодического сбора возобновляемого ресурса со стационарным распределением усилия сбора получено существование допустимой плотности, доставляющей максимум среднего временного дохода от сбора на единицу усилия. Мы также предъявили формулы (3.2) и (3.4) для вычисления такой плотности. Вне области действия этих формул, т.е. вне области $a\gamma > 0$, или предельная плотность собираемого ресурса нулевая, или ресурс неизвлекаем ($\gamma = 0$), поэтому приложение каких-либо усилий сбора вне этой области дает нулевой вклад и, следовательно, неэффективно. В силу этого вне этой области оптимальную плотность распределения усилия можно положить нулевой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Арнольд В.И.** Оптимизация в среднем и фазовые переходы в управляемых динамических системах // Функци. анализ и его приложения. 2002. Т. 36, вып. 2. С. 1–11.
2. **Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M.** Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 475–494.
3. **Давыдов А.А.** Особенности типичного дохода в модели Арнольда циклических процессов // Тр. МИАН. 2005. Т. 250. С. 79–94.
4. **Давыдов А.А., Мена Матош Е.** Типичные фазовые переходы и особенности выгоды в модели Арнольда // Мат. сб. 2007. Т. 198, вып. 1. С. 21–42.
5. **Давыдов А.А., Шуткина Т.С.** Оптимизация циклического процесса с дисконтированием по средней временной выгоде // Успехи мат. наук. 2009. Т. 64, вып. 1 (385). С. 143–144.
6. **Коорман В.О.** The theory of search. III. The optimum distribution of search effort // Operations Res. 1957. Vol. 5, no. 5. P. 613–626.
7. **Flaaten O.** The optimal harvesting of a natural resource with seasonal growth // The Canad. J. of Economics. 1983. Vol. 16, no. 3. P. 447–462.
8. Cyclical versus non-cyclical harvesting policies in renewable resource management / K. Erdlenbruch, A. Jean-Marie, M. Moreaux, M. Tidball // Presented at Monte Verita Conference on Sustainable Resource Use and Economic Dynamics (SURED 2008). Askona, 2008. P. 1–34. URL: <http://prodinra.inra.fr/record/28290>.
9. **Жиков В.В.** Математические проблемы теории поиска // Тр. Владимир. политех. ин-та. 1968. С. 263–270.

Беляков Антон Олегович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”
e-mail: a_belyakov@inbox.ru

Поступила 08.03.2016

Давыдов Алексей Александрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
ведущий науч. сотрудник
Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”
e-mail: davydov@vlsu.ru

УДК 519.62

ТРАЕКТОРИЯ В \mathbb{R}^3 , СКРЫТАЯ ОТ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ¹

В. И. Бердышев

В задаче сопровождения движущегося в \mathbb{R}^3 объекта наблюдателями охарактеризована наиболее скрытая траектория объекта при условии, что в каждый момент времени объект находится в поле зрения не более чем двух наблюдателей.

Ключевые слова: навигация, задача сопровождения, движущийся объект, наблюдатель.

V. I. Berdyshev. A trajectory in \mathbb{R}^3 concealed from observers.

In the problem of tracking by observers of an object moving in \mathbb{R}^3 , the most concealed trajectory is characterized under the condition that the object is at any time visible to at most two observers.

Keywords: navigation, tracking problem, moving object, observer.

MSC: 00A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-47-54

1. Определения и постановка задачи

В пространстве $X = \mathbb{R}^3$ задано ограниченное, может быть, несвязное множество G , являющееся замыканием открытого множества $\overset{\circ}{G}$, такое что $X \setminus G$ связно. Граница bdG множества G является кусочно гладкой поверхностью, в частности многогранной. Множество G препятствует видимости и движению. Точки $x, y \in X$ видимы одна для другой, если

$$[x, y] \cap \overset{\circ}{G} = \emptyset.$$

В пространстве X движутся объект t , $t \notin \overset{\circ}{G}$, и наблюдатели f , $f \notin \overset{\circ}{G}$, враждебные по отношению к t . Объект начинает движение из ε -окрестности $V_* = V_\varepsilon(t_*) = \{x: \|x - t_*\| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, заданной точки t_* и заканчивает движение в ε -окрестности V^* другой точки t^* ,

$$V_* \cap V^* = \emptyset, \quad (V_* \cup V^*) \cap G = \emptyset.$$

Движение объекта t осуществляется внутри заданного односвязного “коридора” Y , $Y \cap G = \emptyset$, соединяющего V_* и V^* и являющегося окрестностью заранее рассчитанной гладкой траектории

$$\mathcal{T}_0 = \{t(\tau): 0 \leq \tau \leq 1, t(0) = t_*, t(1) = t^*\}, \quad \mathcal{T}_0 \cap G = \emptyset.$$

Предполагается, что внутри коридора Y наблюдателей нет.

Пусть

$v(t) = \{x \in X: [x, t] \cap \overset{\circ}{G} = \emptyset\}$ — множество видимых (освещенных) из t точек пространства;

$sh(t) = X \setminus (v(t) \cup G)$ — тень множества G (при освещении из точки t);

$\overline{sh}(t)$ — ее замыкание;

$\tilde{T}(x) = \{t \in v(x), \overline{sh}(t) \ni x\}$ — это множество не является замкнутым. Ясно, что $\tilde{T}(x) = \{t: x \in v(t) \cap \overline{sh}(t)\}$.

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Точку $x \in bdG$ назовем теневой точкой для t , если

$$x \in v(t) \cap \overline{sh}(t), \quad (t, x) \cap \overline{sh}(t) = \emptyset.$$

Обозначим

$sh^*(t)$ — совокупность теневых точек для точки t ;
 \mathbb{T} — класс непрерывных траекторий \mathcal{T} ,

$$\mathcal{T} = \{t(\tau): 0 \leq \tau \leq 1, t(0) \in V_*, t(1) \in V^*\} \subset Y.$$

Объект имеет возможность поразить наблюдателя посредством миниобъекта, способного двигаться в $X \setminus \overset{\circ}{G}$ прямолинейно с большой скоростью. Поэтому свобода передвижения наблюдателя ограничена. Он вынужден находиться вблизи множества $sh(t)$, чтобы в случае опасности со стороны объекта он мог укрыться в тени. Объект стремится двигаться на возможно большем расстоянии от f и, следовательно, от $sh(t)$. Задача объекта состоит в поиске траектории $\hat{\mathcal{T}}$ из класса \mathbb{T} , для которой

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min_{t \in \mathcal{T}} \rho(t, sh(t)) = \min_{t \in \hat{\mathcal{T}}} \rho(t, sh(t)). \quad (1.1)$$

Задача (1.1) рассматривалась в [1–3] для пространства \mathbb{R}^2 и в [4] для \mathbb{R}^3 в случае, когда множество G является многогранником. В данной работе предполагается, что объект t в каждый момент времени находится в поле зрения не более чем двух наблюдателей.

2. Теневые точки

Отметим, что

$$\rho(t, sh(t)) = \rho(t, \overline{sh}(t)) = \rho(t, sh^*(t))$$

и длина кратчайшей непересекающейся с $\overset{\circ}{G}$ кривой, соединяющей t и $\overline{sh}(t)$, совпадает с $\rho(t, sh(t))$ (см. [2]). Функция $\rho(t, sh(t))$ и отображение, сопоставляющее точке t множество ближайших из $\overline{sh}(t)$ точек, вообще говоря, не являются непрерывными (см. пример [3]).

Обозначим через $L(t) = \{l\}$ множество всех лучей l с вершиной t . Имеет место

Предложение 1. *Для любой точки $t \in X \setminus G$ множество $sh^*(t)$ теневых точек непусто.*

Доказательство. Если существует луч $l \in L(t)$, не пересекающийся с $\overset{\circ}{G}$, то теневая точка для t найдется на границе максимального кругового конуса с вершиной t и осью l , не пересекающегося с $\overset{\circ}{G}$. Пусть $l \in L(t)$, $l \cap \overset{\circ}{G} \neq \emptyset$, $x \in l \cap \overset{\circ}{G}$ и $O(x)$ — окрестность точки x , содержащаяся в $\overset{\circ}{G}$. Поскольку множество G ограничено и множество $X \setminus G$ связно, то найдется точка $y \in l$ такая, что $y \notin G$, $x \in [t, y]$ и непрерывная кривая $\gamma = \{\gamma(\tau), 0 \leq \tau \leq 1, \gamma(0) = t, \gamma(1) = y\}$, соединяющая точки t , y и не пересекающаяся с G . Рассмотрим множество отрезков $[t, \gamma(\tau)]$. Тогда $[t, \gamma(\tau)] \cap G = \emptyset$ при малых τ , а при τ , близких к единице, имеем $[t, \gamma(\tau)] \cap O(x) \neq \emptyset$, и, значит, $[t, \gamma(\tau)] \cap G \neq \emptyset$. Пусть τ_0 — наименьшее из чисел τ , при которых $[t, \gamma(\tau)] \cap G \neq \emptyset$. Поскольку $\gamma(\tau_0) \notin G$, $t \notin G$, то множество $[t, \gamma(\tau_0)] \cap G$ лежит на интервале $(t, \gamma(\tau_0))$. Легко видеть, что ближайшая к t точка из $\overline{sh}(t) \cap [t, \gamma(\tau_0)]$ является теневой для точки t . \square

3. Позиции на bdG , удобные для наблюдения

Местоположение наблюдателя $f \in bdG$ должно обеспечивать обзор окружающей местности и видимость точки t . К примеру, должны существовать плоскость P и окрестность $V(f)$

точки f , $f \in P$, такие, что множество $G \cap V(f)$ и t лежат по разные стороны от P . Естественно предположить, что наблюдатель займет позицию вблизи участка локальной выпуклости границы bdG . В связи с этим будем рассматривать в качестве возможных мест базирования наблюдателей вершины, гребни и выпуклые гладкие фрагменты границы множества G .

Вершины. Точка $a \in bdG$ называется вершиной, если существуют тройка линейно независимых линейных функционалов φ_i ($i = 1, 2, 3$) и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\varphi_i(x) \leq \varphi_i(a) \quad \forall x \in G \cap V_\varepsilon(a), \quad i = 1, 2, 3.$$

Далее

$\mathbb{A} = \{a\}$ — совокупность всех вершин множества G ;

$$K_a = \{l \in L(a) : \rho(x, G) = o(\|x - a\|), x \in l\} \quad (3.1)$$

— касательный конус к множеству G в точке $a \in A$;

$K'_a = -K_a + 2a$ — вертикальный по отношению к K_a конус.

Лемма. Если множество $K_a \setminus a$ связно, то

$$\tilde{T}(a) = X \setminus (\overset{\circ}{K}_a \cup \overset{\circ}{K}'_a \cup (\text{sh}(a)) \cup G), \quad (3.2)$$

если $K \setminus a$ не является связным, то

$$\tilde{T}(a) = X \setminus (\overset{\circ}{K}_a \cup (\text{sh}(a)) \cup G).$$

Доказательство. Конус K_a является телесным. Если

$$x \in \overset{\circ}{K}_a, \quad x_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x + (1 - \lambda)a, \quad \lambda > 0,$$

то $x_\lambda \in \overset{\circ}{K}_a$ и в силу определения конуса K_a при достаточно малом λ выполняется включение $x_\lambda \in G$. Поэтому

$$x \notin v(a) \quad \text{и} \quad x \notin \tilde{T}(a).$$

Если $K_a \setminus a$ — связное множество, $x \in K'_a$, то $a \notin \text{sh}(x)$ и значит $x \notin \tilde{T}(a)$. Если $x \in bdK_a$, то $a \in \overline{\text{sh}}(x)$ и $x \in \tilde{T}(a)$. Пусть $z \notin (\overset{\circ}{K}_a) \cup (\overset{\circ}{K}'_a) \cup (\text{sh}(a)) \cup G$, в частности $z \in v(a)$, и пусть $x \in \overset{\circ}{K}_a$. Найдем точку $\bar{x}_\lambda \in bdG$, ближайшую к x_λ на луче $\{z + \alpha(x_\lambda - z) : \alpha \geq 0\}$, такую что $x_\lambda \in [\bar{x}_\lambda, z]$. Тогда $\bar{x}_\lambda \in \text{sh}(z)$ и $\bar{x}_\lambda \rightarrow a$ ($\lambda \rightarrow 0$). Поскольку $a \in v(z)$, то $a \in \overline{\text{sh}}(z)$ и, значит, $z \in \tilde{T}(a)$. Итак, установлены соотношения:

$$(x \in bdK_a) \Rightarrow (x \in \tilde{T}(a));$$

$$(x \in \overset{\circ}{K}_a) \Rightarrow (x \notin \tilde{T}(a));$$

$$(x \in K'_a) \Rightarrow (x \notin \tilde{T}(a)), \quad \text{если множество } K_a \setminus a \text{ связно};$$

$$(z \notin (\overset{\circ}{K}_a \cup \overset{\circ}{K}'_a \cup (\text{sh}(a)) \cup G)) \Rightarrow (z \in \tilde{T}(a)).$$

Из этих соотношений следует первое утверждение леммы.

Если множество $K_a \setminus a$ не является связным, то оно содержит, по крайней мере, две связных непересекающихся компоненты K_1, K_2 . Пусть K'_1, K'_2 — вертикальные к ним конусы, и $z \in K'_2$. Для точки $x \in \overset{\circ}{K}_1$ найдем при достаточно малом $\lambda > 0$ точки $x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)a \in \overset{\circ}{G}$, $\bar{x}_\lambda \in bdK_1$ такие, что $x_\lambda \in [z, \bar{x}_\lambda]$. Поскольку $\bar{x}_\lambda \rightarrow a$ при $\lambda \rightarrow 0$, то $a \in \overline{\text{sh}}(z)$ и вместе с тем $a \in v(z)$. Поэтому $z \in \tilde{T}(a)$. Лемма установлена. \square

Гребни. Здесь гребнем будем называть гладкую плоскую выпуклую (без концевых точек) кривую $B \subset bdG$, в каждой точке $b \in B$ которой существуют опорный двугранный угол K_b , раствор которого меньше, чем π , и окрестность $O_\varepsilon(b)$ такая, что множество $G \cap O(b)$ лежит внутри этого угла. Далее считаем, что через K_b обозначен опорный угол минимального раствора, а отображение $b \mapsto K_b \cap O_\varepsilon(b)$ непрерывно по Хаусдорфу.

Легко видеть, что

$$\tilde{T}(b) = X \setminus (\overset{\circ}{K}_b \cup \overset{\circ}{K}'_b \cup \text{sh}(b)) \cup G. \quad (3.3)$$

Положим

$$\tilde{T}(B) = \bigcup_{b \in B} \tilde{T}(b).$$

Множество всех гребней $B \subset bdG$ обозначим через \mathbb{B} .

Выпуклые (гладкие) фрагменты границы множества G . Выпуклым фрагментом будем называть максимальное по включению, связанное, открытое относительно bdG множество $C \subset bdG$, для каждой точки $c \in C$ которого имеются единственная плоскость $P = P_c$ ($c \in P$) и окрестность $V(c)$ такие, что множество $G \cap V(c)$ лежит по одну сторону относительно P . Здесь K_c — полупространство с границей P_c (см. (3.1)), содержащее множество $G \cap V(c)$. Если множество $G \cap P_c$ одноточечно, $G \cap P_c = c$, то $\tilde{T}(c) = P \setminus c$. Пусть $G \cap P_c$ не является одноточечным. Если точка $c' \in C \cap P_c$ является граничной относительно P точкой множества $G \cap P_c$, то $\tilde{T}(c') \neq \emptyset$ и $\tilde{T}(c') \subset P_c$, если же c' является внутренней, то $\tilde{T}(c') = \emptyset$.

Совокупность всех выпуклых фрагментов C из bdG будем обозначать через \mathbb{C} . Для выпуклого фрагмента $C \in \mathbb{C}$ положим

$$\tilde{T}(C) = \bigcup_{c \in C} \tilde{T}(c). \quad (3.4)$$

Далее будем обозначать

$$\mathbb{S} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \cup \mathbb{C}, \quad \mathbb{S} = \{S\},$$

и элементы S этого множества будем называть фрагментами поверхности bdG . Предполагается, что число фрагментов конечно. Для $S \in \mathbb{S}$ множество $\tilde{T}(S)$ в окрестности $V(S)$ имеет простую структуру: оно образовано пучком плоскостей H , который далее обозначается через $\mathcal{H}(S) = \{H\}$. Для $S = a \in \mathbb{A}$ это пучок плоскостей $H = H_a$ (см. (3.1), (3.2)), содержащих точку a (см. лемму), в случае $S = B \in \mathbb{B}$ — это совокупность пучков плоскостей H_b , содержащих точки $b \in B$ (см. (3.3)), а в случае $S = C \in \mathbb{C}$ — совокупность плоскостей H_c , опорных к C в точках $c \in C$ (см. (3.4)).

Наблюдателю целесообразно занимать позицию в окрестности одного из указанных фрагментов. Величину обзора для наблюдателя, находящегося в точке $s \in S$ ($s = a, b, c$), можно характеризовать коэффициентом обзора

$$k(s) = \frac{\mu V_1(s)}{2\mu(K_s \cap V_1(s))}, \quad (3.5)$$

где μ — объем множества. Очевидно, что для $c \in C$, $b \in B$, $a \in \mathbb{A}$ выполняется неравенство

$$1 = k(c) < k(b) < k(a).$$

4. Тактика движения объекта

Поскольку наблюдатель f враждебен по отношению к объекту t , то объект стремится преодолеть множество $\tilde{T}(f) \cap Y$ на возможно большем расстоянии от f .

Если $t \in \tilde{T}(S)$, то f , находясь на S , наблюдает за t . Если же $t \notin \tilde{T}(S)$, т. е. S не содержит теневых для t точек, то f себя не обнаруживает, поскольку не может скрыться в тени, и, значит, не осуществляет наблюдение за t . Формализуем это обстоятельство, определив “расстояние” от t до S следующим образом:

$$\rho(t, S) = \begin{cases} \min\{\|t - s\| : s \in S, t \in \tilde{T}(s)\}, & \text{если } t \in \tilde{T}(S), \\ +\infty, & \text{если } t \notin \tilde{T}(S). \end{cases} \quad (4.1)$$

Далее символ ρ будем использовать в указанном в (4.1) значении. В частности, при $s = a \in \mathbb{A}$ имеем равенство $\rho(t, a) = \|t - a\|$ при $t \in \tilde{T}(a)$. Естественно предположить, что вероятность присутствия наблюдателя в окрестности точки s , $s \in S \in \mathbb{S}$, определяется величиной коэффициента (3.5) обзора $k(s)$. Поэтому возможен другой вариант “расстояния”:

$$\rho_k(t, S) = \begin{cases} \min\left\{\frac{\|t - s\|}{k(s)} : s \in S, t \in \tilde{T}(s)\right\}, & \text{если } t \in \tilde{T}(S), \\ +\infty, & \text{если } t \notin \tilde{T}(S). \end{cases}$$

В дальнейшем понадобится множество

$$\mathcal{B}(S, S') = \{x \in \tilde{T}(S) \cap \tilde{T}(S') : \rho(x, S) = \rho(x, S')\}. \quad (4.2)$$

При движении внутри коридора Y по траектории \mathcal{T} объект в каждый момент времени может находиться в одном или нескольких множествах $\tilde{T}(S)$, т. е. быть в поле зрения нескольких наблюдателей. Мы далее считаем, что любая точка $t \in V$ принадлежит не более чем двум множествам $\tilde{T}(S)$.

Предполагая, что наблюдатели могут базироваться только в окрестности фрагментов $s \in \mathbb{S}$, задачу (1.1) запишем в виде

$$M = \max_{\mathcal{T} \in \mathbb{T}} \min_{t \in \mathcal{T}, S \in \mathbb{S}} \rho(t, S) = \min_{t \in \tilde{\mathcal{T}}, S \in \mathbb{S}} \rho(t, S). \quad (4.3)$$

Плоскость H , $H \cap \overset{\circ}{Y} \neq \emptyset$, назовем секущей (разделяющей точки t_* , t^*), если любая траектория из \mathbb{T} пересекается с H .

Для фрагмента $S \in \mathbb{S}$ через $\mathcal{H}_Y(S)$ обозначим множество секущих плоскостей из $\mathcal{H}(S)$, и пусть

$$\mathbb{Z} = \{S \in \mathbb{S} : \mathcal{H}_Y(S) \neq \emptyset\}.$$

С целью поиска характеристических свойств наилучшей в задаче (4.3) траектории $\hat{\mathcal{T}}$ предварительно рассмотрим частные случаи. Сперва для $S \in \mathbb{S}$, $\mathcal{H}_Y(S) \neq \emptyset$, сформулируем задачу

$$M(S) = \min_{H \in \mathcal{H}_Y(S)} \max\{\rho(y, S) : y \in H \cap Y\}. \quad (4.4)$$

Пусть $\mathcal{H}^*(S)$ — множество плоскостей из $\mathcal{H}_Y(S)$, доставляющих минимум в (4.4), и $\mathcal{P}_{S,H}$ — множество точек $p \in H \cap bdY$ ($H \in \mathcal{H}^*(S)$), доставляющих в (4.4) максимум.

I. Рассмотрим случай, когда множество \mathbb{S} таково, что

$$\tilde{T}(S) \cap \overset{\circ}{\tilde{T}}(S') \cap Y = \emptyset \quad \forall S, S' \in \mathbb{Z}, \quad S \neq S'.$$

В этом случае имеет место

Предложение 2. *Выполняется равенство*

$$M = \min\{M(S) : S \in \mathbb{Z}\}.$$

Траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ является наилучшей тогда и только тогда, когда для любого фрагмента S^* , реализующего указанный минимум, выполняются условия

$$\widehat{\mathcal{T}} \cap \mathcal{P}_{S^*,H} \neq \emptyset \quad \forall H \in \mathcal{H}^*(S^*) \quad (4.5)$$

и

$$\rho(t, S) \geq M \quad \forall t \in \widehat{\mathcal{T}}, \forall S \in \mathbb{S}.$$

Доказательство очевидно, так как если $\widehat{\mathcal{T}} \cap \mathcal{P}_{S^*,H} = \emptyset$ для некоторой плоскости $H \in \mathcal{H}^*(S^*)$, то траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ пересечет H в точке, расположенной к S^* ближе, чем $\mathcal{P}_{S^*,H}$. \square

Множество $\widetilde{T}(S)$ ($S \in \mathbb{S}$) назовем секущим, по аналогии с секущей плоскостью, если любая траектория $\mathcal{T} \in \mathbb{T}$ пересекается с $\widetilde{T}(S)$. Для такого фрагмента S на границе множества $\widetilde{T}(S) \cap Y$ выделим левую $\mathcal{L}(S)$ и правую $\mathcal{R}(S)$ части: при движении по \mathcal{T} от V_* к V^* точка t сперва встречается с $\mathcal{L}(S)$ и выходит из множества $\widetilde{T}(S) \cap Y$ в точке, принадлежащей множеству $\mathcal{R}(S)$.

II. Пусть пара S_1, S_2 фрагментов из \mathbb{Z} такова, что

$$\overset{\circ}{\widetilde{T}}(S_1) \cap \overset{\circ}{\widetilde{T}}(S_2) \neq \emptyset.$$

Обозначим через $\Delta_{\mathcal{R}} = \Delta_{\mathcal{R}}(S_1, S_2)$ “двугранный угол” (см. рис. 1) с гребнем $\mathcal{L}(S_1) \cap \mathcal{L}(S_2)$, ограниченный частью границы $\mathcal{L}(S_1)$ и частью границы $\mathcal{L}(S_2)$ и содержащий множество $\widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2)$, и аналогично через $\Delta_{\mathcal{L}}$ — “двугранный угол” с гребнем $\mathcal{R}(S_1) \cap \mathcal{R}(S_2)$, образованный частями границ $\mathcal{R}(S_1), \mathcal{R}(S_2)$ и содержащий множество $\widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2)$. Множества $\Delta_{\mathcal{L}}, \Delta_{\mathcal{R}}$ являются секущими.

Возможны два случая:

S_1 и S_2 принадлежат одному из углов $\Delta_{\mathcal{L}}, \Delta_{\mathcal{R}}$;

S_1 и S_2 принадлежат разным углам $\Delta_{\mathcal{L}}, \Delta_{\mathcal{R}}$.

В первом случае пару (S_1, S_2) назовем четной, во втором — нечетной.

Пусть пара S_1, S_2 нечетная. Обозначим (см. (4.4))

$$M(S_1, S_2) = \min\{M(S_1), M(S_2)\}. \quad (4.6)$$

Если $M(S_1, S_2) = M$ (см. (4.3)), то для фрагмента $S \in \{S_1, S_2\}$, доставляющего минимум в (4.6), должно выполняться соотношение (4.5). Обозначим

$$\mathcal{P}_{S_1, S_2, H} = \begin{cases} \mathcal{P}_{S, H}, & \text{если минимум (4.6) достигается на одном из фрагментов} \\ & S \in \{S_1, S_2\}, H \in \mathcal{H}^*(S); \\ \mathcal{P}_{S_1, H_1} \cup \mathcal{P}_{S_2, H_2}, & \text{если } M(S_1) = M(S_2) = M(S_1, S_2), H_i \in \mathcal{H}^*(S_i), i = 1, 2, \\ & H = (H_1, H_2). \end{cases} \quad (4.7)$$

Предположим, что пара S_1, S_2 четная и для определенности будем считать, что $S_1, S_2 \subset \Delta_{\mathcal{L}}$. Обозначим

$$Q = \widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2) \cap \mathcal{B}(S_1, S_2). \quad (4.8)$$

Предположим сначала, что $Q = \emptyset$, и пусть

$$\rho(y, S_1) < \rho(y, S_2) \quad \forall y \in \widetilde{T}(S_1) \cap \widetilde{T}(S_2). \quad (4.9)$$

Части траектории $\widehat{\mathcal{T}}$, содержащиеся в $\widetilde{T}(S_1)$ и в $\widetilde{T}(S_2)$ должны располагаться возможно дальше от S_1 и S_2 (см. рис. 2) соответственно.

Для поиска точек пересечения наилучшей траектории с множествами $\widetilde{T}(S_2)$ и $\widetilde{T}(S_1)$ рассмотрим задачи $M(S_1)$ (см. (4.4)) и

$$m(S_1, S_2) = \min_{H \in \mathcal{H}_Y(S_2)} \max \{ \rho(y, S_2) : y \in H \cap Y \cap \mathcal{L}(S_1) \}. \quad (4.10)$$

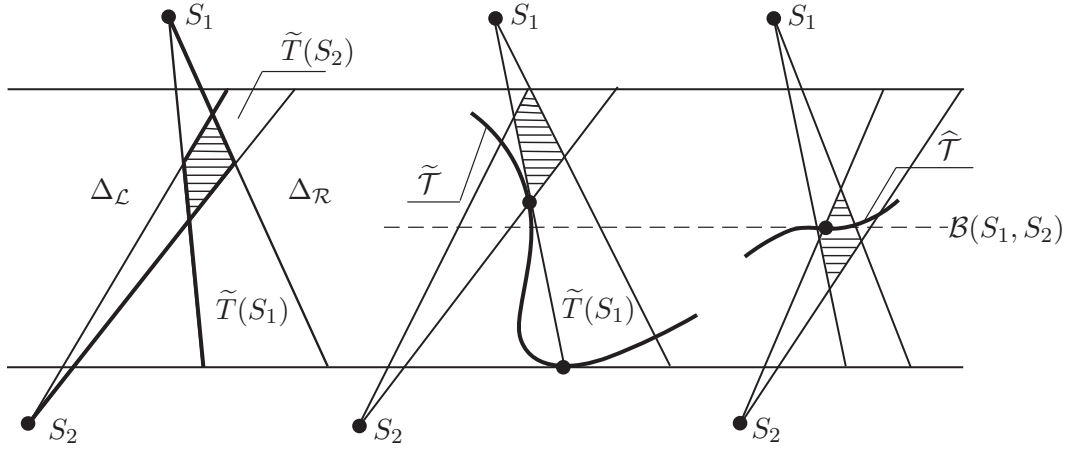


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Пусть $\mathcal{H}^*(S_2)$ — множество плоскостей из $\mathcal{H}_Y(S_2)$, доставляющих минимум в (4.10), $\mathcal{P}_{S_2, H, \mathcal{L}}$ — множество точек из $H \cap Y \cap \mathcal{L}(S_1)$ ($H \in \mathcal{H}^*(S_2)$), доставляющих максимум в (4.10). Положим

$$M(S_1, S_2) = \min\{m(S_1, S_2), M(S_1)\} \quad (4.11)$$

и построим множество $\mathcal{P}_{S_1, S_2, H}$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_{S_1, S_2, H} = \begin{cases} \mathcal{P}_{S_2, H, \mathcal{L}}, & \text{если минимум (4.11) достигается на } m(S_1, S_2), H \in \mathcal{H}^*(S_2); \\ \mathcal{P}_{S_1, H}, & \text{если минимум в (4.11) достигается на } M(S_1), H \in \mathcal{H}^*(S_1); \\ \mathcal{P}_{S_2, H_2, \mathcal{L}} \cup \mathcal{P}_{S_1, H_1}, & \text{если } m(S_1, S_2) = M(S_1) = M(S_1, S_2), H_1 \in \mathcal{H}^*(S_1), \\ & H_2 \in \mathcal{H}^*(S_2), H = (H_1, H_2). \end{cases} \quad (4.12)$$

Если $M = M(S_1, S_2)$, то наилучшая траектория \hat{T} должна пересечься с множествами $\mathcal{P}_{S_1, S_2, H}$ (см. рис. 2). В случае, когда минимум (4.11) достигается на $m(S_1, S_2)$, в окрестности точек $\mathcal{P}_{S_2, H_2, \mathcal{L}}$ траектория не должна пересекаться с внутренностью множества $\tilde{T}(S_1)$.

Если в (4.9) неравенство поменять на обратное, то в соотношениях (4.10)–(4.12) следует поменять S_1, S_2 местами.

В случае, когда $S_1, S_2 \subset \Delta_{\mathcal{R}}$, в формуле (4.10) следует заменить $\mathcal{L}(S_1)$ на $\mathcal{R}(S_1)$.

Теперь предположим, что $Q \neq \emptyset$ (см. (4.8) и рис. 3). Траектория \hat{T} должна соединить внутренности множеств $\overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{L}} \setminus (\tilde{T}(S_1) \cup \tilde{T}(S_2))$, $\overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{R}} \setminus (\tilde{T}(S_1) \cup \tilde{T}(S_2))$, пересекаясь с $\tilde{T}(S_1) \cap \tilde{T}(S_2)$. В самом деле, если $\hat{T} \cap (\tilde{T}(S_1) \cap \tilde{T}(S_2)) = \emptyset$ и, к примеру, $\hat{T} \cap \overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{L}} \cap \tilde{T}(S_1) \neq \emptyset$, но $\hat{T} \cap \overset{\circ}{\Delta}_{\mathcal{L}} \cap \tilde{T}(S_1) \cap \tilde{T}(S_2) = \emptyset$, тогда в окрестности пересечения $\hat{T} \cap \tilde{T}(S_1)$ траекторию можно подправить, сдвинув ее в сторону множества $\tilde{T}(S_1) \cap \tilde{T}(S_2)$, увеличив тем самым ее расстояние от S_1 . Аналогично устанавливается, что $\hat{T} \cap Q \neq \emptyset$. Таким образом, для поиска точек, претендующих на принадлежность оптимальной траектории, следует решить задачу

$$M(S_1, S_2) = \min_{H \in \mathcal{H}_Y(S_i)} \max \{\rho(y, S_i) : y \in Q \cap H\}, \quad i = 1, 2. \quad (4.13)$$

Ясно, что величина $M(S_1, S_2)$ одинакова для $i = 1, 2$. Если $M(S_1, S_2) = M$, $\mathcal{H}^*(S_i)$ — совокупность плоскостей, доставляющих минимум в (4.13), а $\mathcal{P}_{S_1, S_2, H}$ — множество точек, доставляющих максимум в (4.13), то траектория \hat{T} должна содержать точку из $\mathcal{P}_{S_i, H}$ для каждой плоскости $H \in \mathcal{H}^*(S_i)$ и удовлетворять неравенству $\rho(y, S_i) \geq M(S_1, S_2)$ при $y \in \hat{T}$.

Пусть совокупность фрагментов $S \in \mathbb{Z}$ составлена из пар $(S_1, S_2), \overset{\circ}{T}(S_1) \cap \overset{\circ}{T}(S_2) \neq \emptyset$ и одиночных фрагментов S так, что множества $(\overset{\circ}{T}(S_1) \cup \overset{\circ}{T}(S_2)), \overset{\circ}{T}(S)$ попарно не пересекаются

для любых пар фрагментов и одиночных фрагментов. Из предложения 2 и рассуждений п. II следует, что справедлива

Теорема. *Выполняется (см. (4.6), (4.11), (4.13), (4.4)) равенство*

$$M = \min\{M(S_1, S_2), M(S) : (S_1, S_2), S \in \mathbb{Z}^*\}. \quad (4.14)$$

Траектория $\widehat{\mathcal{T}}$ является наилучшей тогда и только тогда, когда она пересекается с каждым из множеств (см. (4.7), (4.12))

$$\mathcal{P}_{S_1, S_2, H}(H_i \in \mathcal{H}^*(S_i), i = 1, 2), \quad \mathcal{P}_{S, H}(H \in \mathcal{H}^*(S))$$

для всех пар (S_1, S_2) и фрагментов, доставляющих минимум в (4.14), и выполняется условие

$$\rho(t, S) \geq M \quad \forall t \in \widehat{\mathcal{T}}, \quad \forall S \in \mathbb{Z}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бердышев В.И.** Характеристики скрытости движущегося объекта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 110–119.
2. **Бердышев В.И.** К задаче сопровождения движущегося объекта наблюдателями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 46–55.
3. **Бердышев В.И.** Движущийся объект и наблюдатели в \mathbb{R}^2 с кусочно-гладким затеняющим множеством // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 95–101.
4. **Бердышев В.И.** Движущийся объект и наблюдатель // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 4. С. 411–413.

Бердышев Виталий Иванович
академик РАН

Поступила 01.03.2016

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: bvi@imm.uran.ru

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В УПРАВЛЕНИИ¹

М. С. Близорукова

Для динамической системы с запаздыванием в управлении рассмотрена задача о гарантированном наведении системы на выпуклое целевое множество в фиксированный момент времени. Приведен критерий разрешимости задачи. Рассмотрен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы с запаздыванием.

M. S. Blizorukova. On a control problem for a linear system with delay in the control.

The problem of guaranteed guidance to a convex target system at a fixed time is considered for a linear system with delay in the control. A solvability criterion is given and an illustrating example is presented.

Keywords: control, incomplete information, linear systems with delay.

MSC: 49J35, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-55-62

1. Введение. Постановка задачи

Использование метода неупреждающих конструкций (квазистратегий) применительно к классу задач управления с неполной информацией привело к появлению нового метода, предложенного А. В. Кряжимским и Ю. С. Осиповым, именно метода программных пакетов [1; 2]. Конструктивизм данного метода состоит в том, что программные пакеты трактуются как идеализированные процедуры управления. Исходной задаче о гарантирующем управлении в классе обратных связей сопоставляется аналогичная задача в классе программных пакетов. Устанавливается эквивалентность этих задач, что позволяет свести решение исходной задачи к решению задачи значительно более простой. Для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае конечного начального множества был получен критерий разрешимости задачи пакетного наведения [3]. Предложенный метод в дальнейшем был применен к решению задачи игрового наведения с неполной информацией для линейных систем [4; 5]. В данной работе указанный метод развивается для динамической системы с запаздыванием в управлении.

Рассмотрим линейную управляемую динамическую систему следующего вида:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)u(t - \nu) + C(t), \quad (1.1)$$

$$u_{t_0}(s) = u_0(s) \in C([- \nu, 0]; \mathbb{R}^m), \quad x(t_0) = x_0,$$

где t — время из некоторого фиксированного отрезка $T = [t_0, \vartheta]$ ($t_0 < \vartheta < +\infty$); $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы в момент t ; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление в момент t , $\nu > 0$ — постоянное запаздывание, символ $u_t(s)$ означает функции $u_t(s) = u(t + s)$ при $s \in [-\nu, 0]$; $A(t)$, $B_1(t)$, $B_2(t)$ — непрерывные матричные функции размерностей $n \times n$, $n \times m$, $n \times m$ соответственно, определенные на T , $C(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор-функция.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-01-00539).

Пусть $P \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт, описывающий мгновенный ресурс управления. Под программным управлением (программой) будем понимать всякую измеримую по Лебегу на T функцию. Множество всех программ обозначим \mathcal{U} . Для всякой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и всякой программы $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ решение (по Каратеодори) дифференциального уравнения (1.1), определенное на отрезке T и удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, $u(s) = u_0(s)$, назовем движением системы из начального состояния x_0 под действием программы $u(\cdot)$ и будем обозначать его как $x(\cdot|x_0, u_0(s), u(\cdot))$. Пусть задано конечное множество $X_0 \subset \mathbb{R}^n$. Управляющей стороне априори известно, что начальное состояние системы содержится в этом множестве, но само это начальное состояние не известно. Множество X_0 назовем множеством допустимых начальных состояний. Начальную функцию $u_0(s)$ считаем известной. Пусть также заданы выпуклое замкнутое целевое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и матрица-функция наблюдения: кусочно-непрерывная слева функция $Q(\cdot)$ на T , принимающая значения в пространстве $q \times n$ -матриц.

Перед управляющей стороной стоит задача гарантированного позиционного наведения, состоящая в формировании такого правила формирования управления, которое гарантирует попадание состояния $x(t)$ системы в конечный момент ϑ в заранее заданную сколь угодно малую окрестность целевого множества M . В процессе движения управляющая сторона формирует искомое управление позиционно (по принципу обратной связи), получая в каждый текущий момент времени t сигнал $y(t) = Q(t)x(t)$ о состоянии системы в этот момент.

2. Метод построения наводящего пакета программ

Прежде чем перейти к описанию метода решения рассматриваемой задачи, приведем некоторые результаты из работ [2; 3], сформулировав их в удобной для нас форме. Наряду с системой (1.1) рассмотрим однородную систему

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad t \in T, \quad x(t_0) = x_0 \in X_0.$$

Для каждого $x_0 \in X_0$ введем функцию $g_{x_0}(t) = Q(t)F(t, t_0)x_0$, называемую *однородным сигналом*, соответствующим допустимому начальному состоянию x_0 . Здесь $F(t, t_0)$ — фундаментальная матрица. Множество всех допустимых начальных состояний $x_0 \in X_0$, соответствующих данному однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in T$, обозначим $X_0(\tau|g(\cdot)) = \{x_0 \in X_0 : g(\cdot)|_{[t_0, \tau]} = g_{x_0}(\cdot)|_{[t_0, \tau]}, \tau \in [t_0, \vartheta]\}$, где $g(\cdot)|_{[t_0, \tau]}$ — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[t_0, \tau]$. Семейство программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ называем пакетом программ, удовлетворяющим *условию неупреждаемости*: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0, \vartheta]$ и допустимых начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при почти всех $t \in [t_0, \tau]$ выполняется равенство $u_{x'_0}(t) = u_{x''_0}(t)$. Пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является *наводящим*, если для всякого допустимого начального состояния движение из x_0 , соответствующее программе $u_{x_0}(\cdot)$, в момент ϑ принимает значение в целевом множестве M . Если наводящий пакет программ существует, то говорим, что разрешима задача пакетного наведения.

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Для произвольного однородного сигнала $g(\cdot)$ введем множество $G_0(g(\cdot))$ исходно совместимых с ним однородных сигналов $\bar{g}(\cdot)$ и момент времени $\tau_1(g(\cdot)) = \max\{\tau \in [t_0, \vartheta] : \max_{\bar{g}(\cdot) \in G_0(g(\cdot))} \max_{t \in (t_0, \tau]} |\bar{g}(t) - g(t)| = 0\}$, называемый первым моментом расслоения однородного сигнала $g(\cdot)$. (Если $\tau_1(g(\cdot)) < \vartheta$, то вводится множество всех однородных сигналов из $G_0(g(\cdot))$, совпадающих с $g(\cdot)$ в правосторонней окрестности момента $\tau_1(g(\cdot))$, второй момент расслоения $\tau_2(g(\cdot))$ и т.д.) Затем для каждого однородного сигнала введем множество всех моментов расслоения однородного сигнала $T(g(\cdot)) = \{\tau_j(g(\cdot)) : j = 1, \dots, k_{g(\cdot)}\}$ (см. [3]) и множество всех моментов расслоения всех однородных сигналов $T = \cup_{g(\cdot) \in G} T(g(\cdot))$. Ввиду конечности множества G для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k_{g(\cdot)} \geq 1$ такой, что $\tau_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot)) = \vartheta$. Тогда $T = \{\tau_0, \dots, \tau_K\}$, где $\tau_j < \tau_{j+1}$ ($j = 0, \dots, K-1$). Для каждого $k = 1, \dots, K$ множество $\mathcal{X}_0(\tau_k) = \{X_0(\tau_k|g(\cdot)) : g(\cdot) \in G\}$ называется кластерной позицией в момент τ_k , а каждый его элемент — кластером начальных состояний в этот момент.

Пусть \mathcal{P} — множество всех семейств $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ векторов из P . Любую измеримую (по Лебегу) функцию $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} : T \mapsto \mathcal{P}$ называем *расширенной программой*. Семейство программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ естественно (как это сделано в [3]) отождествлять с расширенной программой $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$. Для каждого $k = 0, \dots, K$ вводим множество \mathcal{P}_k всех семейств $(u_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $X_{0,k} \subset \mathcal{X}_0(\tau_k)$ и произвольных начальных состояний $x'_0, x''_0 \in X_{0,k}$ справедливо равенство $u_{x'_0} = u_{x''_0}$. Множество $\mathcal{X}_0(\tau_k)$ — кластерная позиция в момент τ_k . Расширенную программу $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ называем *допустимой*, если для каждого $k = 0, \dots, K$ выполняется включение $(u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [t_0, \tau_1]$ в случае $k = 1$.

Введем *расширенное пространство* \mathcal{R}_i ($i = 1, 2, \dots$) — конечномерное гильбертово пространство всех семейств $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ векторов из \mathbb{R}^m со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{R}_i}$ вида

$$\langle l', l'' \rangle_{\mathcal{R}_i} = \sum_{x_0 \in X_0} (l'_{x_0}, l''_{x_0})_{\mathbb{R}^m}, \quad l' = (l'_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_i, \quad l'' = (l''_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_k.$$

Здесь и далее $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^m} (|\cdot|_{\mathbb{R}^m})$ — скалярное произведение (норма) в конечномерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^m .

Для каждого непустого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}^k$ стандартным образом введем в рассмотрение его нижнюю $\varrho^-(\cdot|\mathcal{E}) : \mathcal{R}_i \rightarrow \mathbb{R}^1$ и верхнюю $\varrho^+(\cdot|\mathcal{E}) : \mathcal{R}_i \rightarrow \mathbb{R}^1$ опорные функции:

$$\varrho^-(l_{x_0}|_{x_0}|\mathcal{E}) = \inf_{(e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{E}} \langle (l_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}_i},$$

$$\varrho^+(l_{x_0}|_{x_0}|\mathcal{E}) = \sup_{(e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{E}} \langle (l_{x_0})_{x_0 \in X_0}, (e_{x_0})_{x_0 \in X_0} \rangle_{\mathcal{R}_i}, \quad (l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}^i.$$

Трактуем расширенные программы как отображения из T в пространство \mathcal{R}_m .

Рассмотрим *расширенную систему*, которая состоит из экземпляров системы (1.1), параметризованных начальными состояниями $x_0 \in X_0$; экземпляр системы, отвечающий параметру x_0 , исходит из начального состояния x_0 под действием программного управления $u_{x_0}(\cdot)$. Запишем расширенную систему в виде

$$\dot{x}_{x_0}(t) = A(t)x_{x_0}(t) + B_1(t)u_{x_0}(t) + B_2(t)u(t - \nu) + C(t), \quad (2.2)$$

$$x_{x_0}(t_0) = x_0, \quad x_0 \in X_0, \quad u_{t_0}(s) = u_0(s), \quad s \in [t_0 - \nu, t_0].$$

За фазовое пространство расширенной системы принимаем \mathcal{R}_n . Управление расширенной системой выбираем из класса всех допустимых расширенных программ. Для каждой допустимой расширенной программы $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ под соответствующим ей *движением* расширенной системы понимаем функцию $t \mapsto (x(\cdot; t_0, x_0, u_0(s), u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0} : T \mapsto \mathcal{R}_n$. *Расширенным целевым множеством* назовем множество M всех семейств $(x_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $x_{x_0} \in M$ для всех $x_0 \in X_0$. Считаем, что допустимая расширенная программа $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ является *наводящей для расширенной системы*, если для движения $(x(\cdot; t_0, x_0, u_0(s), u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0}$ расширенной системы, соответствующего $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$, выполняется условие $(x(\cdot; t_0, x_0, u_0(s), u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0} \in M$. Будем говорить, что разрешима *расширенная задача программного наведения*, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы.

Следующая теорема приведена в работах [2; 3] для конечномерной управляемой системы вида $\dot{x} = Ax + Bu$. Аналогичным образом она может быть доказана и в рассматриваемом случае.

Теорема 1. 1) *Расширенная программа $t \mapsto (u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ является пакетом программ тогда и только тогда, когда она допустима.* 2) *Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы.* 3) *Задача пакетного наведения разрешима тогда и только тогда,*

когда разрешима расширенная задача программного наведения. 4) Задача гарантированного позиционного наведения разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача пакетного наведения.

Пусть $\mathcal{A} = \{(x(\vartheta|x_0, u_0(s), u_{x_0}(\cdot)))_{x_0 \in X_0} : (u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}\}$ — область достижимости расширенной системы в момент T , где \mathcal{U} — множество всех допустимых расширенных программ. Имеет место

Теорема 2. *Задача пакетного наведения для системы (1.1) разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}} \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) \leq 0, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) = & \left[\sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, t_0)x_0 \rangle + \int_{t_0 - \tau}^{t_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, s + \nu)B_2(s + \nu)u_0(s) \rangle ds \right] \\ & + \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^- \left(\sum_{x_0 \in X_{0k}} D_2(t)l_{x_0} \mid P \right) dt \\ & + \int_{t_0}^{\vartheta} \left\langle \sum_{x_0 \in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta, t)C(t) \right\rangle dt - \sum_{x_0 \in X_0} \varrho^+(l_{x_0} \mid \mathcal{M}); \quad (2.4) \\ D_1(s) = & \begin{cases} 0, & s \in (\vartheta - \nu, \vartheta], \\ F(\vartheta, s + \nu)B_2(s), & s \in [t_0, \vartheta - \nu], \end{cases} \end{aligned}$$

$D_2(t) = (F(\vartheta, t)B_1(t) + D_1(t))^T$, $\varrho^-(\cdot \mid P)$ — нижняя опорная функция множества P и $\varrho^+(\cdot \mid \mathcal{M})$ — верхняя опорная функция множества \mathcal{M} .

Здесь $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ — параметризованное допустимыми начальными состояниями семейство векторов, \mathcal{S} — множество, обладающее свойством: для произвольного семейства $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0}$ такого, что $\sum_{x_0 \in X_0} |l_{x_0}|^2 = 1$, существует $\lambda > 0$ такое, что $(\lambda l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Задача разрешима тогда и только тогда, когда непусто пересечение области достижимости \mathcal{A} и расширенного целевого множества \mathcal{M} . Поскольку множество \mathcal{M} выпукло и замкнуто в расширенном фазовом пространстве \mathcal{R}_n и область достижимости \mathcal{A} есть выпуклый компакт в \mathcal{R}_n , то пересечение $\mathcal{A} \cap \mathcal{M}$ непусто тогда и только тогда, когда для каждого $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ справедливо неравенство

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{X}} [\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \mid \mathcal{A}) - \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \mid \mathcal{M})] \leq 0.$$

В силу положительной однородности нижней опорной функции $\rho^-(\cdot \mid \mathcal{A})$ множества \mathcal{A} и верхней опорной функции $\rho^+(\cdot \mid \mathcal{M})$ множества \mathcal{M} записанное выше неравенство равносильно неравенству

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{S}} [\rho^-((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \mid \mathcal{A}) - \rho^+((l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \mid \mathcal{M})] \leq 0. \quad (2.5)$$

Для системы (1.1) справедлива формула представления решения

$$x(t) = F(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t F(t, \tau) [B_1(\tau)u(\tau) + B_2(\tau)u(\tau - s) + C(\tau)] d\tau.$$

Вычислим функции $\rho^-(\cdot|\mathcal{A})$ и $\rho^+(\cdot|\mathcal{M})$. Возьмем произвольный элемент $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$. Из определения области достижимости \mathcal{A} имеем

$$\begin{aligned} \rho^-(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A} &= \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}} \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, x(\vartheta; t_0, x_0, u_0(s), u_{x_0}(\cdot)) \rangle \\ &= \sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, t_0)x_0 \rangle + a + \left\langle \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{x_0 \in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta, t)C(t)dt \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$a = \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}} \sum_{x_0 \in X_0} \left\langle \int_{t_0}^{\vartheta} l_{x_0}, F(\vartheta, t) [B_1(t)u(t) + B_2(t)u(t - \nu)] dt \right\rangle.$$

Представим последний интеграл как сумму. Сделав замену переменной $t - \nu = s$ во втором интеграле и учитывая, что функция $u_0(s)$ известна при $s \in [-\nu, t_0]$, приведем его к следующему виду:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\vartheta} l_{x_0}, F(\vartheta, t)B_2(t)u(t - \nu) dt &= \int_{t_0 - \nu}^{t_0} l_{x_0}, F(\vartheta, s + \nu)B_2(s + \nu)u_0(s) ds \\ &+ \int_{t_0}^{\vartheta - \nu} l_{x_0}, F(\vartheta, s + \nu)B_2(s + \nu)u(s) ds. \end{aligned}$$

Тогда

$$a = \int_{t_0 - \nu}^{t_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, s + \nu)B_2(s + \nu)u_0(s) \rangle ds + \inf_{(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{U}} \sum_{x_0 \in X_0} \left\langle \int_{t_0}^{\vartheta} D_2(t)l_{x_0}u(t) \right\rangle dt.$$

Принимая во внимание, что значения допустимых расширенных программ на $(\tau_{k-1}, \tau_k]$ при $k > 1$ и на $[\tau_0, \tau_1]$ при $k = 1$ ограничены допустимым расширенным ресурсом \mathcal{P}_k ($k = 1, \dots, K$), и используя лемму [3, лемма 4], подставляем полученное выражение в (2.6):

$$\begin{aligned} \rho^-(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A} &= \left[\sum_{x_0 \in X_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, t_0)x_0 \rangle + \int_{t_0 - \nu}^{t_0} \langle l_{x_0}, F(\vartheta, t + \nu)B_2(t + \nu)u_0(t) \rangle dt \right] \\ &+ \sum_{k=1}^K \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \sum_{X_{0k} \in \mathcal{X}_0(\tau_k)} \rho^-\left(\sum_{x_0 \in X_{0k}} D_2(t)l_{x_0} | P \right) dt + \left\langle \int_{t_0}^{\vartheta} \sum_{x_0 \in X_0} l_{x_0}, F(\vartheta, t)C(t)dt \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее, воспользуемся определением расширенного целевого множества \mathcal{M} (см. выше). Тогда

$$\rho^+(l_{x_0})_{x_0 \in X_{0k}} | \mathcal{M} = \sup_{(z_{x_0})_{x_0 \in X_{0k}} \in \mathcal{M}} \sum_{x_0 \in X_{0k}} \langle l_{x_0}, z_{x_0} \rangle = \sum_{x_0 \in X_{0k}} \rho^+(l_{x_0} | \mathcal{M}).$$

Сопоставляя (2.7) и (2.6), видим, что

$$\rho^-(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{A} - \rho^+(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} | \mathcal{M} = \gamma((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}).$$

Поскольку данное равенство справедливо при произвольном $(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in \mathcal{R}_n$, записанный выше критерий (2.5) разрешимости расширенной задачи программного наведения имеет вид (2.3). Теорема доказана.

Приведем метод построения наводящего пакета программ. Аналогично [6] доказываются следующие утверждения.

Лемма. Пусть выполнено условие

$$\sup_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in S} \gamma_a((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) \leq 0 \quad (2.8)$$

и нулевой пакет программ не является наводящим для расширенной системы. Тогда существует $a^* \in (0, 1]$ такое, что

$$\max_{(l_{x_0})_{x_0 \in X_0} \in S} \gamma_{a^*}((l_{x_0})_{x_0 \in X_0}) = 0. \quad (2.9)$$

Теорема 3. Пусть множество P строго выпуклое и содержит в себе нулевой элемент, а также выполнено условие (2.8) и вектор $(l_{x_0}^*)_{x_0 \in X_0} \in S$ доставляет максимум в выражении (2.9), причем вектор $D_2(t) \sum_{x_0 \in X_{0k}} l_{x_0}^* \neq 0$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Пусть, кроме того, пакет программ $(u_{x_0}(t))_{x_0 \in X_0}$ такой, что $u_{x_0}(t) \in a^*P$, $(x_0 \in X_0, t \in [t_0, \vartheta])$, где a^* — корень уравнения (2.9), и для всех $k = 1, 2, \dots$ и для всех кластеров $X_{0k} \in \mathcal{X}(\tau_k)$ выполняется равенство

$$\left\langle D_2(t) \sum_{x_0 \in X_{0k}} l_{x_0}^*, u_{X_{0k}}(t) \right\rangle = \varrho^- \left(D_2(t) \sum_{x_0 \in X_{0k}} l_{x_0}^* | a^*P \right).$$

Тогда пакет программ $(u_{x_0}(\cdot))_{x_0 \in X_0}$ является наводящим.

3. Пример

Рассмотрим динамическую систему следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u(t - \nu). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $x_1(t)$, $x_2(t)$ — координаты фазового вектора $x(t)$. Значения воздействий $u(t)$ ограничены отрезком $[-1; 1]$. Система (1.1) принимает вид (3.1) при следующих значениях: $n = 2$, $m = 1$, $P = [-1, 1]$. Система рассматривается на отрезке времени $T = [0, 3]$, $\nu = 1$, $u(s) \equiv 1$, $s \in [-1, 0]$. Матрица-функция наблюдения имеет вид

$$Q(t) = \begin{cases} \Theta, & t \in [0, 1], \\ I, & t \in (1, 3], \end{cases}$$

где Θ — нулевая, а I — единичная (2×2) -матрицы. Множество начальных состояний состоит из двух точек: $X_0 = \{x'_0, x''_0\}$. Первый момент расслоения — $\tau_1 = 1$. Кластерная позиция $\mathcal{X}_0(\tau_1)$ в момент τ_1 содержит единственное множество X_0 , а кластерная позиция $\mathcal{X}_0(t_2)$ в момент $\tau_2 = 2$ содержит два одноэлементных множества $\{x'_0\}$, $\{x''_0\}$.

Цель управляющей стороны состоит в том, чтобы, используя наблюдаемые значения сигнала, сформировать программу управления материальной точкой, которая обеспечивала бы в конечный момент времени попадание ее координаты в отрезок $[-m, m]$, где $m \geq 0$. Таким образом, целевое множество M имеет вид

$$M = \{(x_1 \ x_2)^T \in \mathbb{R}^2, |x_1| \leq m\}.$$

Конкретизируем критерий разрешимости задачи о гарантированном позиционном наведении. В данной задаче фундаментальная матрица $F(t, s)$ будет иметь вид

$$F(t, s) = \begin{pmatrix} 1 & t - s \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

матрицы A , B_1 , B_2 , C представим в виде

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$D_2(s) = (F(\vartheta, t)B_1(t) + D_1(t))^T = \begin{cases} 0, & s \in (2, 3], \\ (2 - s, 1), & s \in [0, 2]. \end{cases}$$

Однородные сигналы, соответствующие допустимым начальным состояниям x'_0 и x''_0 , имеют вид

$$g_{x'_0} = Q(t)F(t, 0)x'_0 = \begin{cases} (0, 0)^T, & t \in [0, 1], \\ \begin{pmatrix} x'_{01} + tx'_{02} \\ x'_{02} \end{pmatrix}, & t \in (1, 3]; \end{cases} \quad (3.2)$$

$$g_{x''_0} = Q(t)F(t, 0)x''_0 = \begin{cases} (0, 0)^T, & t \in [0, 1], \\ \begin{pmatrix} x''_{01} + tx''_{02} \\ x''_{02} \end{pmatrix}, & t \in (1, 3]. \end{cases}$$

Пусть S есть множество всех двуэлементных семейств $((l_{x'_{01}}, l_{x'_{02}})^T, (l_{x''_{01}}, l_{x''_{02}})^T) \in \mathbb{R}^2$ таких, что выполняется одно из соотношений

$$|l_{x'_{01}}| = 1, \quad |l_{x''_{01}}| \leq 1 \text{ или } |l_{x'_{02}}| \leq 1, \quad |l_{x''_{02}}| = 1.$$

Пусть \mathcal{L} — такое множество в S , что $l_{x'_{02}} = l_{x''_{02}} = 0$. (Далее, для простоты: $l' = l_{x'_{01}}$, $l'' = l_{x''_{01}}$.) Учитывая, что множество M — цилиндрическое с ограниченным основанием, принимая во внимание, что при произвольном $l \in \mathbb{R}$

$$\varrho^+((l, 0)^T | M) = m|l|, \quad \varrho^-((l, 0)^T | M) = -a|l|, \quad \text{где } a \in (0, 1],$$

и используя представление (2.4), выпишем функцию $\gamma(\cdot)$ при произвольных действительных l' и l'' : $\gamma_a((l', 0)^T, (l'', 0)^T) = l'z' + l''z'' - 1.5a|l' + l''| - (m + 0.5a)|l'| - (m + 0.5a)|l''|$, где $z' = x'_{01} + 3x'_{02} - 2.5$, $z'' = x''_{01} + 3x''_{02} - 1$.

Положим для определенности $x'_{01} = 1.5$, $x'_{02} = 1$, $x''_{01} = 1$, $x''_{02} = 0$, $m = 1$. Тогда

$$z' = 2, \quad z'' = 1.$$

Решая задачу максимизации, при $a = 1$ получим $\max \gamma_1(l', l'') = -1 < 0$, следовательно, критерий разрешимости выполняется. Покажем, что нулевой пакет не является наводящим: $x_1(3|x'_0, 0) = (1, 25, 0)^T \notin M$. Найдем коэффициент сжатия мгновенного ресурса управления P , при котором $\gamma_{a^*} = 0$. Получим, $a^* = 0.5$. Максимизирующие векторы (см. (2.3)) вычисляются как

$$l_{x'_0}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l_{x''_0}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем наводящий пакет. Для построения наводящего пакета с помощью теоремы 3 вычислим сначала

$$\sum_{x_0 \in X_{0k}} l_{x_0}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Затем находим элементы пакета программ:

$$u_{x'_0 x''_0}^*(t) = a^* \text{sign} D_2(t) (l_{x'_0}^* + l_{x''_0}^*) = -0.5, \quad t \in [0, 1],$$

$$u_{x'_0}^*(t) = a^* \text{sign} D_2(t) l_{x'_0}^* = -0.5, \quad t \in (1, 2],$$

но для $u_{x_0''}(t)$ условия теоремы 3 не выполняются из-за того, что $l_{x_0''}^* = 0$. В этом случае примем $u_{x_0''}(t) = 0.5$. В результате получим следующий пакет программ:

$$u_{x_0'}(t) = -0.5, \quad t \in [0, 2], \quad u_{x_0''} = \begin{cases} -0.5, & t \in [0, 1], \\ 0.5, & t \in (1, 2]. \end{cases} \quad (3.3)$$

Воспользовавшись формулой Коши, вычислим $x_1(3|x', u_{x_0'}(\cdot)) = 1$, $x_1(3|x'', u_{x_0''}(\cdot)) = 0.5$. Обе координаты попадают в отрезок $[-m, m]$; таким образом, пакет программ $(u_{x_0'}(\cdot), u_{x_0''}(\cdot))$ является наводящим.

Теперь перейдем к построению позиционных стратегий. Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Приведем позиционный способ управления системой, стартующей в момент $t = 0$ из неизвестного начального состояния $\bar{x}_0 = (\bar{x}_{01}, \bar{x}_{02})^T \in X_0 = \{x_0', x_0''\}$. До начала движения, руководствуясь наводящим пакетом и учитывая отсутствие наблюдений на отрезке $[0, 1]$, принимаем решение применять к системе управление $u_1(t) = -0.5$ при $t \in [0, 1 + \varepsilon)$. Затем начиная с $t = 1$ уже доступны наблюдения состояния системы. Рассматривая $y(t_1) = Q(t_1)x(t_1)$, где $t_1 \in (1, 1 + \varepsilon)$, и используя формулу Коши, нетрудно найти вектор $w(t_1) = y(t_1) - Q(t_1) \int_0^{t_1} F(t_1, s)B_2(s)u_1(s) ds$. Очевидно (см. (3.2)), что $w(t_1) = Q(t_1)F(t_1, 0)\bar{x}_0 = g_{\bar{x}_0}(t_1)$. Так как $x_0' \neq x_0''$, то $g_{x_0'}(t_1) \neq g_{x_0''}(t_1)$ и, следовательно, либо $w(t_1) = g_{x_0'}(t_1)$, либо $w(t_1) = g_{x_0''}(t_1)$. Соответственно применяем к системе в каждый момент $t \in [1 + \varepsilon, 2]$ управляющее воздействие $u_{x_0'}(t) = -0.5$ в первом случае, когда $w(t_1) = g_{x_0'}(t_1)$, либо $u_{x_0''}(t) = 0.5$ — во втором при $w(t_1) = g_{x_0''}(t_1)$.

В результате такого способа управления получаем следующее управление:

$$u(t) = \begin{cases} -0.5, & t \in [0, 1 + \varepsilon), \\ u_x(t), & t \in [1 + \varepsilon, 2]. \end{cases}$$

В случае, когда $\bar{x}_0 = x_0'$, получаем $u_x(t) = u_{x_0'}(t)$ для всех $t \in [0, 2]$, а в случае $\bar{x}_0 = x_0''$ — $u_x(t) = u_{x_0''}(t)$ для всех $t \in [0, 2] \setminus [1, 1 + \varepsilon)$. Так как пакет программ (3.3) является наводящим и $x_1(3|x_0')$, $x_1(3|x_0'') \in [-1, 1]$, то, значит, $x_1(3) \in [-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$ и описанный позиционный способ управления с неполной информацией гарантирует наведение рассматриваемой системы в момент $\vartheta = 3$ на ε -окрестность целевого множества M .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
3. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
4. **Максимов В.И.** Дифференциальная игра наведения при неполной информации о фазовых координатах и неизвестном начальном состоянии // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 12. С. 1676–1685.
5. **Григоренко Н.Л., Кондратьева Ю.А., Лукьянова Л.Н.** Задача нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации для линейной системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 41–49.
6. **Стрелковский Н.В.** Построение стратегии гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации // Вестн. МГУ. Вычислит. математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 65–72.

Близорукова Марина Сергеевна
канд. физ.-мат. наук, доцент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: msb@imm.uran.ru

Поступила 11.03.2016

УДК 517.977

**К ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОГО ОТСЛЕЖИВАНИЯ РЕШЕНИЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

М. С. Близорукова, В. И. Максимов

В статье рассматривается задача отслеживания решения эталонного параболического уравнения решением другого уравнения. Конструируется устойчивый алгоритм решения задачи, основанный на методе экстремального сдвига. Алгоритм ориентирован на достаточно большой промежуток времени, в течение которого функционируют оба уравнения.

Ключевые слова: параболическое уравнение, задача слежения.

M. S. Blizorukova, V. I. Maksimov. On the stable tracking problem for a solution of a differential equation in a Hilbert space.

We consider the problem of tracking a solution of a reference parabolic equation by a solution of another equation. A stable algorithm based on the extremal shift method is proposed for this problem. The algorithm is designed to work on a sufficiently large time interval where both equations operate.

Keywords: parabolic equation, tracking problem.

MSC: 93C20, 35K90

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-63-70

1. Введение. Постановка задачи

Рассматривается параболическое уравнение в гильбертовом пространстве $(X, |\cdot|_X)$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \quad x(0) = x_0, \quad (1.1)$$

где A — инфинитезимальный генератор сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $\mathcal{X}(t): X \rightarrow X$ ($t \in T$), $f(\cdot) \in L_2(T; X)$ — заданное возмущение, B — линейный непрерывный оператор ($B \in \mathcal{L}(U; X)$), U — гильбертово пространство с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_U$.

Слабым решением уравнения (1), отвечающим управлению $u(\cdot) \in L_\infty(T; U)$ и начальному состоянию $x(0) = x_0$, называется непрерывная функция $x(t): T \rightarrow X$, определяемая равенством

$$x(t) = \mathcal{X}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{X}(t-\tau)\{Bu(\tau) + f(\tau)\} d\tau. \quad (1.2)$$

Как известно, для любых $x_0 \in X$, $u(\cdot) \in L_2(T; U)$ существует единственное слабое решение $x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot)) \in C(T; X)$ уравнения (1.1).

Рассматриваемая в работе задача может быть сформулирована следующим образом. Уравнение (1.1) подвержено влиянию некоторого управления $u(t) \in P$. Здесь $P \subset U$ — ограниченное замкнутое множество — некоторый “ресурс” управления. В дискретные достаточно частые моменты времени $\tau_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots$) измеряется с ошибкой состояние $x(\tau_i)$ уравнения (1.1). Результаты этих измерений — элементы $\xi_i^h \in X$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_i^h - x(\tau_i)|_X \leq \nu_i^h, \quad (1.3)$$

где $\nu_i^h \in (0, 1)$ — величина ошибки измерения в момент τ_i , число $h \in (0, 1)$ характеризует точность измерения. Более подробно свойства величин ν_i^h будут указаны ниже. Наряду с уравнением (1.1) имеется еще одно уравнение того же вида

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bv(t) + f(t), \quad t \in T, \quad y(0) = y_0. \quad (1.4)$$

Это уравнение назовем эталонным. Решение эталонного уравнения $y(t)$ порождено некоторым управлением $v(\cdot) \in P(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; U) : v(t) \in P \text{ при п.в. } t \in T\}$. Управление $v(\cdot)$, а также отвечающее ему решение $y(\cdot) = y(\cdot; 0, y_0, v(\cdot))$ уравнения (1.4) заранее не известны. В дискретные моменты времени $\tau_i \in T$ ($i = 1, 2, \dots$) наряду с $x(\tau_i)$ измеряются состояния $y(\tau_i) = y(\tau_i; 0, y_0, v(\cdot))$ уравнения (1.4). Состояния $y(\tau_i)$ измеряются с ошибкой. Результаты измерений — элементы $\psi_i^h \in X$, $i = 1, 2, \dots$, — удовлетворяют неравенствам

$$|y(\tau_i) - \psi_i^h|_X \leq \nu_i^h. \quad (1.5)$$

Будем предполагать, что начальные состояния

$$|y_0 - x_0|_X \leq h. \quad (1.6)$$

Требуется указать устойчивый к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритм, который в режиме реального времени по результатам измерений ξ_i^h и ψ_i^h формирует управление $u = u^h(\cdot)$, позволяющее отслеживать решение $y(\cdot)$ уравнения (1.4) решением $x(\cdot)$ уравнения (1.1) так, что равномерное отклонение $y(\cdot)$ от $x(\cdot)$ на промежутке T сколь угодно мало при достаточной малости измерительной погрешности h . В дальнейшем решение уравнения (1.1), порожденное управлением $u = u^h(\cdot)$, обозначим символом $x^h(\cdot) = x(\cdot; 0, x_0, u^h(\cdot))$.

В случае, когда промежуток T функционирования системы ограничен, рассматриваемая задача может быть решена на основе конструкций работ [1–6]. Следует отметить, что предложенные в указанных выше работах алгоритмы ориентированы именно на конечный промежуток времени. С возрастанием длины этого отрезка происходит накопление вычислительных и измерительных ошибок. Алгоритмы, свободные от этого недостатка для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, были предложены в работах [7; 8], для параболического уравнения — в работе [9]. При этом в [9] использовалось функционально-аналитическое представление решения. В настоящей работе мы используем полугрупповое представление решений.

Пусть для каждого $h \in (0, 1)$ зафиксировано семейство Δ_h разбиений полуоси $[0, +\infty)$ контрольными моментами времени $\tau_{h,i}$:

$$\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}, \quad \tau_{h,0} = 0, \quad \tau_{h,i+1} = \tau_{h,i} + \delta_i(h), \quad \delta_i(h) \in (0, 1), \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i(h) = +\infty \quad \forall h \in (0, 1).$$

Символом $\Xi(x(\cdot), h)$ обозначим множество кусочно-постоянных функций $\xi^h(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto X$, $\xi^h(t) = \xi_i^h$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \geq 0$, $\xi_0^h = x_0$, удовлетворяющих неравенствам (1.3). В свою очередь символом $\Xi(y(\cdot), h)$ обозначим множество кусочно-постоянных функций $\psi^h(\cdot) : [0, +\infty) \mapsto X$, $\psi^h(t) = \psi_i^h$ при $t \in [\tau_{h,i}, \tau_{h,i+1})$, $i \geq 0$, $\psi_0^h = y_0$, удовлетворяющих неравенствам (1.5).

Пусть выполнено следующее

У с л о в и е 1. В пространстве X введена эквивалентная норме $|\cdot|_X$ норма $|\cdot|_2$, в которой полугруппа $\mathcal{X}(t)$ ω -диссипативна

$$|\mathcal{X}(t)x|_2 \leq \exp(\omega t)|x|_2 \quad \text{для любых } x \in X, \quad (1.8)$$

где ω — некоторая положительная постоянная величина. Норма $|\cdot|_2$ порождена некоторым скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_2$.

В дальнейшем, как это часто принято, мы отождествляем пространство X с сопряженным к нему пространством X^* .

Введем критерий отклонения $x^h(\cdot)$ от $y(\cdot)$ на ограниченном отрезке времени $[0, \vartheta]$:

$$W(x^h(\cdot), y(\cdot)|\vartheta) = \max_{0 \leq \tau_i \leq \vartheta} \exp(-2\omega\tau_i) \left| y(\tau_i; 0, y_0, v(\cdot)) - x^h(\tau_i; 0, x_0, u^h(\cdot)) \right|_X^2, \quad \tau_i = \tau_{h,i}.$$

2. Алгоритм решения

Введем условия.

У с л о в и е 2. Семейство разбиений Δ_h (1.7) и величины ошибок измерений ν_i^h таковы, что имеют место соотношения

$$\nu_0^h \leq c_* h \quad (c_* = \text{const} > 0), \quad \nu_i^h \in (0, 1) \text{ при всех } i = 0, 1, \dots \text{ и всех } h \in (0, 1),$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i(h) \nu_i^h \leq \varphi_1(h) \rightarrow 0 + \quad \text{при } h \rightarrow 0 +.$$

У с л о в и е 3. Выполняется неравенство $\sum_{i=0}^{+\infty} \delta_i^2(h) \leq \varphi_2(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Условие 2 по существу означает, что на помехи, реализуемые в канале наблюдения, накладываются ограничения “малости” их средних значений за весь промежуток времени функционирования системы.

До начала работы алгоритма фиксируются величина $h \in (0, 1)$ и разбиение Δ_h (см. (1.7)). Работа алгоритма разбивается на однотипные шаги. В течение i -го шага, осуществляемого на промежутке времени $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, выполняются следующие операции. Сначала, в момент $t = \tau_i$ измеряются фазовые состояния $x^h(\tau_i)$ и $y(\tau_i)$, т.е. находятся элементы $\xi_i^h \in X$ и $\psi_i^h \in X$ со свойствами (1.3) и (1.5). Затем вычисляется измеримая (по Лебегу) функция $u^h(\cdot)$

$$\exp(-2\omega\tau_{i+1})(B^* \mathcal{X}^*(\tau_{i+1} - \tau) \tilde{s}_i, u^h(\tau))_2 \tag{2.1}$$

$$\leq \inf \{ \exp(-2\omega\tau_{i+1})(B^* \mathcal{X}^*(\tau_{i+1} - \tau) \tilde{s}_i, u)_2 : u \in P \} + d\nu_i^h \quad \text{при п.в. } \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}),$$

где $d = \text{const} > 0$, B^* — сопряженный оператор,

$$\tilde{s}_i = \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i) s_i, \quad s_i = \xi_i^h - \psi_i^h.$$

После этого управление $u^h(t)$ подается на вход уравнения (1.1) при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. Под действием этого управления фазовая траектория (1.1) переходит из состояния $x^h(\tau_i)$ в состояние $x^h(\tau_{i+1}) = x(\tau_{i+1}; \tau_i, x^h(\tau_i), u^h(\cdot))$.

Справедлива

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–3. Тогда при всех $\vartheta \geq 0$

$$W(v(\cdot), u^h(\cdot)|\vartheta) \leq \nu(h), \tag{2.2}$$

где $\nu(h) = b_1(h^2 + \varphi_1(h) + \varphi_2(h))$, b_1 — постоянная, которая может быть выписана в явном виде.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\xi^h(\cdot) \in \Xi(x(\cdot), h)$, $\psi^h(\cdot) \in \Xi(y(\cdot), h)$. Оценим изменение функционала

$$\varepsilon_h(t) = \exp(-2\omega t) |x^h(t) - y(t)|_2^2. \tag{2.3}$$

При $t \in \delta_i$ имеют место соотношения (см. (1.2))

$$x^h(t) = \mathcal{X}(t - \tau_i)x^h(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \mathcal{X}(t - \tau)\{Bu^h(\tau) + f(\tau)\} d\tau,$$

$$y(t) = \mathcal{X}(t - \tau_i)y(\tau_i) + \int_{\tau_i}^t \mathcal{X}(t - \tau)\{Bv(\tau) + f(\tau)\} d\tau.$$

Поэтому в силу (1.8) при всех $i = 0, 1, \dots$ верна оценка

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \exp(-2\omega\tau_{i+1})|\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i)(x^h(\tau_i) - y(\tau_i))|_2^2 + \lambda_i + \mu_i, \quad (2.4)$$

где

$$\lambda_i = 2 \left(S_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)B\{u^h(\tau) - v(\tau)\} d\tau \right)_2, \quad (2.5)$$

$$\mu_i = c_1\delta_i(h) \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |B\{v(\tau) - u^h(\tau)\}|_2^2 d\tau, \quad \delta_i(h) = \tau_{i+1} - \tau_i, \quad \tau_i = \tau_{h,i},$$

$$S_i = \exp(-2\omega\tau_{i+1})\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau_i)(x^h(\tau_i) - y(\tau_i)).$$

Здесь и всюду ниже символы c_i означают постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде. Нетрудно видеть, что

$$\mu_i \leq c_2\delta_i^2(h), \quad (2.6)$$

$$\lambda_i \leq 2 \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \left(\tilde{s}_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)B\{u^h(\tau) - v(\tau)\} d\tau \right)_2 + c_3\nu_i^h\delta_i(h). \quad (2.7)$$

Объединяя (2.3)–(2.7) и учитывая правило определения управления $u^h(\cdot)$ (см. (2.1)), будем иметь

$$\varepsilon_h(\tau_{i+1}) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + c_2\delta_i^2(h) + c_3\nu_i^h\delta_i(h) \leq \varepsilon_h(\tau_i) + c_4\delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h)), \quad i = 0, 1, \dots$$

Таким образом, при всех $i = 1, 2, \dots$ верны неравенства

$$\varepsilon_h(\tau_i) \leq \varepsilon_h(0) + c_4 \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h)), \quad (2.8)$$

где в силу (1.6) $\varepsilon_h(0) \leq c_5h^2$. Из (2.8), учитывая условия 2, 3, получаем при всех $i = 0, 1, \dots$

$$\varepsilon_h(\tau_i) \leq b_1(h^2 + \varphi_1(h) + \varphi_2(h)).$$

Отсюда следуют неравенства (2.2). Теорема доказана.

Пусть множество P имеет вид

$$P = \sum_{j=1}^m \omega_j u_j, \quad \omega_j \in U, \quad u_j \in \mathbb{R},$$

где $u = \{u_1, \dots, u_m\} \in P_1 \subset \mathbb{R}^m$, P_1 — ограниченное и замкнутое множество, управление $v(t)$ в правой части уравнения (1.4) имеет следующую структуру: $v(t) = \sum_{j=1}^m \omega_j v_j(t)$. В этом случае естественно выбирать управления $u^h(\cdot)$ той же структуры. Именно, по правилу

$$u^h(t) = \sum_{j=1}^m u_{ji}^h \omega_j \quad \text{при п. в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}).$$

Здесь

$$u_i^h = \{u_{1i}^h, \dots, u_{mi}^h\}, \quad \sum_{j=1}^m u_{ji}^h (\mathcal{X}^*(\delta_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], B\omega_j)_2$$

$$\leq \inf \left\{ \sum_{j=1}^m v_j (\mathcal{X}^*(\delta_i)[\xi_i^h - \psi_i^h], B\omega_j)_2 : v = \{v_1, \dots, v_m\} \in P_1 \right\} + d\nu_i^h, \quad \delta_i = \delta_i(h).$$

Пусть решение уравнения (1.4) остается в ограниченной области, т.е. выполнено следующее

У с л о в и е 4. $\sup \{|y(t; 0, y_0, v(\cdot))|_X : t \in T\} < \infty.$

Имеет место

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и условие 4. Пусть также

$$\varphi_3(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(h) \mu(\delta_i(h)) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0,$$

где

$$\mu(\delta) = \sup_{t \in [0, \delta]} \left| \mathcal{X}(t) \sum_{j=1}^m B\omega_j - \sum_{j=1}^m B\omega_j \right|_X.$$

Тогда справедливо утверждение теоремы 1. При этом

$$\nu(h) = b_2(h^2 + \varphi_1(h) + \varphi_2(h) + \varphi_3(h)),$$

где b_2 — постоянная, которая может быть выписана в явном виде.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая условие 4, заключаем, что верно неравенство

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)[\xi_i^h - \psi_i^h], \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B u^h(\tau) \right)_2 d\tau$$

$$- \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)[\xi_i^h - \psi_i^h], \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) B v(s) \right)_2 d\tau \leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)[\xi_i^h - \psi_i^h], B u^h(\tau) \right)_2 d\tau$$

$$- \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau)[\xi_i^h - \psi_i^h], B v(\tau) \right)_2 d\tau + K^{(0)} \mu(\delta_i) \delta_i,$$

где $\delta_i = \delta_i(h)$. Здесь и ниже $K^{(i)} = \text{const} > 0$. Следовательно, вместо неравенства (2.7) будем иметь

$$\lambda_i \leq 2 \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \left(\tilde{s}_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B \{u^h(\tau) - v(\tau)\} d\tau \right)_2 + K^{(1)} (\nu_i^h + \mu(\delta_i)) \delta_i.$$

Поэтому вместо (2.8) получаем

$$\varepsilon_h(\tau_i) \leq \varepsilon_h(0) + K^{(2)} \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(h) (\nu_i^h + \delta_i(h) + \mu(\delta_i(h))), \quad i = 0, 1, \dots$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

При некоторых дополнительных требованиях к полугруппе $\mathcal{X}(t)$ процедура вычисления $u^h(\tau)$, $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, может быть упрощена. Перейдем к описанию этих требований. Введем

У с л о в и е 5. Полугруппа $\mathcal{X}(t)$ обладает свойством: каково бы ни было ограниченное множество $X_* \subset X$, найдутся такие числа $\delta_* \in (0, 1)$ и $k_0 = k_0(X_*) \in (0, +\infty)$, при которых равномерно по всем $x \in X_*$, $\delta \in (0, \delta_*)$, $\delta_1 \in [0, \delta]$, $v(\delta_1) \in P$ п. в. на $[0, \delta]$ выполняются неравенства

$$|(\mathcal{X}(\delta)x, \mathcal{X}(\delta_1)Bv(\delta_1))_2 - (x, Bv(\delta_1))_2| \leq k_0\gamma(\delta),$$

где $\gamma(\cdot) : [0, \delta_*] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная в нуле неотрицательная функция, $\gamma(0) = 0$.

Справедлива следующая

Теорема 3. Пусть выполнены условия 4, 5, а также условия теоремы 1. Пусть функция $u^h(\cdot)$ находится по правилу

$$u^h(t) = u_i^h \quad \text{при п. в. } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad (2.9)$$

где

$$\exp(-2\omega\tau_{i+1})(\xi_i, Bu_i^h)_2 \leq \inf \{ \exp(-2\omega\tau_{i+1})(s_i, Bu)_2 : u \in P \} + d\nu_i^h.$$

Тогда имеет место утверждение теоремы 2, если

$$\varphi_3(h) = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(h)\gamma(\delta_i(h)) \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow +0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу условия 5 верно неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) [\xi_i^h - \psi_i^h], \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) Bu^h(\tau) \right)_2 d\tau \\ & - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) [\xi_i^h - \psi_i^h], \mathcal{X}(\tau_{i+1} - \tau) Bv(s) \right)_2 d\tau \\ & \leq \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\xi_i^h - \psi_i^h, Bu^h(\tau) \right)_2 d\tau - \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left(\xi_i^h - \psi_i^h, Bv(\tau) \right)_2 d\tau + K_0\gamma(\delta_i)\delta_i, \end{aligned}$$

где $\delta_i = \delta_i(h)$. Здесь и ниже $K_i = \text{const} > 0$. Следовательно, вместо (2.7) будем иметь

$$\lambda_i \leq 2 \exp(-2\omega\tau_{i+1}) \left(\tilde{s}_i, \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} B\{u^h(\tau) - v(\tau)\} d\tau \right)_2 + K_1(\nu_i^h + \gamma(\delta_i))\delta_i.$$

Поэтому, учитывая (2.9), получаем

$$\varepsilon_h(\tau_i) \leq \varepsilon_h(0) + K_2 \sum_{i=0}^{\infty} \delta_i(h)(\nu_i^h + \delta_i(h) + \gamma(\delta_i(h))), \quad i = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

3. Пример

Рассмотрим дифференциально-функциональное уравнение

$$\dot{y}(t) = \sum_{i=0}^l A_i y(t - \nu_i) + \int_{-\nu_l}^0 A_*(s) y(t + s) ds + B_0 u(t), \quad t \in T, \quad (3.10)$$

с начальным условием $y(t_0) = \varphi^0$, $y(t_0 + s) = \varphi^1(s)$ при п. в. $s \in [-\nu_l, 0]$.

Здесь $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $\varphi^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi^1(\cdot) \in L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$, $0 = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \nu_l$, $y_t: s \rightarrow y(t+s)$, $-\nu_l \leq s \leq 0$, A_i и B_0 — постоянные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, элементы матричной функции $s \rightarrow A_*(s)$, $s \in [-\nu_l, 0]$, принадлежат пространству $L_\infty([-\nu_l, 0]; \mathbb{R})$, $U = \mathbb{R}^m$.

Обозначим через $X = \mathbb{R}^n \times L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$ гильбертово пространство пар $x = (x^0, x^1(s))$ со скалярным произведением

$$(x, y)_X = (x^0, y^0)_{\mathbb{R}^n} + \int_{-\nu_l}^0 (x^1(s), y^1(s))_{\mathbb{R}^n} ds$$

и нормой $|\cdot|_X$, индуцированной этим скалярным произведением.

Уравнение (3.10) (см. [10; 11]) порождает C_0 -полугруппу линейных ограниченных операторов $\mathcal{X}(t)$, $t \geq 0$, определяемых следующим образом. Пусть $s_0(\cdot)$ — единственное решение на T матричного уравнения

$$\frac{ds_0(t)}{dt} = A_0 s_0(t) + \sum_{i=1}^l A_i s_0(t + \nu_i) + \int_{-\nu_l}^0 A_*(s) s_0(t+s) ds \quad \text{при п. в. } t \in T,$$

с начальным условием $s_0(t) = E$ (единичная $n \times n$ -матрица) при $t \leq 0$; $B_*: L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n) \rightarrow L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$ — оператор вида

$$(B_*\varphi)(\tau) = \sum_{i=1}^l A_i \chi_{[-\nu_i, 0]}(\tau) \varphi(-\nu_i - \tau) + \int_{-\nu_l}^0 A_*(\xi) \varphi(\xi - \tau) d\xi \quad \text{при п. в. } \tau \in [-\nu_l, 0],$$

$\chi_{[a,b]}(\cdot)$ — характеристическая функция интервала $[a, b]$; оператор $F: X \rightarrow X$ определен для всех $(F\varphi)^0 = \varphi^0$, $(F\varphi)^1 = B_*\varphi^1$ ($\varphi = (\varphi^0, \varphi^1(s)) \in X$). Тогда [11, с. 903]

$$\mathcal{X}(t)\varphi = G_t F\varphi + S(t)\varphi, \tag{3.11}$$

где $G_t: X \rightarrow X$, $S(t): X \rightarrow X$,

$$(S(t)\varphi)^0 = 0, \quad (S(t)\varphi)^1(\tau) = \varphi(t + \tau) \chi_{[-\nu_l, -t]}(\tau),$$

$$(G_t\varphi)^0 = (G_t\varphi)^1(0), \quad (G_t\varphi)^1(\tau) = s_0(t + \tau) \varphi^0 + \int_{-\nu_l}^0 s_0(t + \tau + \xi) \varphi^1(\xi) d\xi, \quad \tau \in [-\nu_l, 0].$$

При этом оператор A задается соотношениями [11, предложение 2.1] $D(A) = \{\varphi = (\varphi^0, \varphi^1(s)) \in X : \varphi^1(\cdot) \in W^{1,2}([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n), \varphi^1(0) = \varphi^0\}$, $A(\varphi) = (L(\varphi^1), \dot{\varphi}^1)$, $\varphi = (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)) \in D(A)$. Здесь $W^{1,2}([a, b]; \mathbb{R}^n)$ означает пространство n -мерных абсолютно непрерывных функций, производные которых являются элементами пространства $L_2([a, b]; \mathbb{R}^n)$. Пусть оператор $B \in \mathcal{L}(U; X)$ имеет вид

$$Bu = (B_0 u, \mathcal{O}) \in X \quad (u \in U, \mathcal{O} \in L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)).$$

Пусть $y(\cdot; 0, (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)), u(\cdot))$ — единственное решение уравнения (3.10) в смысле Каратеодори, $x(\cdot; 0, x_0, u(\cdot))$ — слабое решение абстрактного дифференциального уравнения (1.1), где $x_0 = (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)) \in X$. Тогда для любых $x_0 = (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)) \in X$, $u(\cdot) \in L_\infty(T; U)$ и $t \in T$ справедливо равенство $x(t; 0, x_0, u(\cdot)) = (y(t; 0, (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)), u(\cdot)), y_t(\cdot; 0, (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)), u(\cdot)))$. В пространстве X норму $|\cdot|_2$ зададим следующим образом:

$$|(\varphi^0, \varphi^1(\cdot))|_2 = \left(|\varphi^0|_{\mathbb{R}^n}^2 + \int_{-\nu_l}^0 |\varphi^1(\tau)|_{\mathbb{R}^n}^2 g(\tau) d\tau \right)^{1/2}, \quad (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)) \in X,$$

где $g(\tau) = j$ при $j \in (-\nu_{l-j+1}, -\nu_{l-j})$, $j \in [1 : l]$. Скалярное произведение, отвечающее этой норме, имеет вид

$$((\varphi^0, \varphi^1(\cdot)), (\bar{\varphi}^0, \bar{\varphi}^1(\cdot)))_2 = (\varphi^0, \bar{\varphi}^0)_{\mathbb{R}^n} + \int_{-\nu_l}^0 g(\tau) (\varphi^1(\tau), \bar{\varphi}^1(\tau))_{\mathbb{R}^n} d\tau.$$

В таком случае [11, лемма 2.3] полугруппа $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, (3.11) ω -диссипативна. При этом

$$\omega = \frac{l+1}{2} + |A_0|_* + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l |A_i|_*^2 + \frac{1}{2} \int_{-\nu_l}^0 |A_*(\tau)|_*^2 d\tau.$$

Здесь символ $|\cdot|_*$ означает евклидову норму матрицы. Нетрудно проверить, что полугруппа $\mathcal{X}(t)$, $t \in T$, вида (3.11) удовлетворяет условию 5 при $\gamma(\delta) = \delta^{1/2}$. Кроме того, в равенстве (2.9) $(s_i, Bu)_2 = (y(\tau_i) - \xi(\tau_i))' B_0 u$, где $s_i = (y(\tau_i) - \xi(\tau_i), \mathcal{O}) \in X$, $\mathcal{O} \in L_2([-\nu_l, 0]; \mathbb{R}^n)$. Здесь $\xi(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ — результат измерения состояния $y(\tau_i; (\varphi^0, \varphi^1(\cdot)), u(\cdot))$, $|y(\tau_i) - \xi(\tau_i)|_{\mathbb{R}^n} \leq \nu_i^h$, штрих означает транспонирование.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М., 1974. 456 с.
2. Осипов Ю.С. Избранные труды. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. 654 с.
3. Максимов В.И. Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург, 2000. 305 с.
4. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург, 2011. 291 с.
5. Максимов В.И. Об отслеживании решения параболического уравнения // Из. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 40–48.
6. Maksimov V.I. Regularized extremal shift in problems of stable control // System Modeling and Optimization. Berlin: Springer, 2013. P. 112–121. (IFIP Advances in Information and Communication Technology; vol. 391.)
7. Maksimov V.I. Об отслеживании траектории динамической системы // Прикл. математика и механика. 2011. Т. 75, № 6. С. 951–960.
8. Кряжимский А.В., Максимов В.И. Задача ресурсосберегающего слежения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 7. С. 993–1002.
9. Максимов В.И. Об одном алгоритме отслеживания решения параболического уравнения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 366–375.
10. Banks H.T., Kappel F. Spline approximation for functional-differential equations // J. Differ. Equat. 1979. Vol. 34, no. 3. P. 406–522.
11. Bernier C., Manitius A. On semigroups in $R^n \times L^p$ corresponding to differential equations with delays // Canad. J. Math. 1978. Vol. 14, no. 5. P. 897–914.

Максимов Вячеслав Иванович

Поступила 10.12.2015

д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, ВШЭМ
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Близорукова Марина Сергеевна

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина, ВШЭМ
e-mail: msb@imm.uran.ru.

УДК 517.977

ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ПОИСКА ТОЧКИ РАВНОВЕСИЯ В МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ С ДИНАМИКОЙ¹

Ф. П. Васильев, А. С. Антипин, Л. А. Артемьева

Рассматривается задача оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с граничным условием, заданным неявно и связанным с многокритериальной задачей. Такие задачи возникают, например, при изучении управляемых объектов, когда под влиянием внешних возмущений они теряют устойчивость и требуется вернуть их в состояние равновесия с помощью подходящего выбора управления. В статье приводится описание одной из возможных математических моделей такого рода, предлагается экстраградиентный метод восстановления равновесия, исследуется его сходимость.

Ключевые слова: задача оптимального управления, задача Коши, многокритериальная задача, седловая точка, сходимость.

F. P. Vasil'ev, A. S. Antipin, L. A. Artem'eva. Extragradient method for finding a saddle point in a multicriteria problem with dynamics.

We consider an optimal control problem for a linear system of ordinary differential equations with an implicitly given boundary condition connected with a multicriteria problem. Such problems arise, for example, in the study of controlled objects that lose their stability under the influence of external perturbations, where it is required to return the object to stability by means of an appropriate choice of the control. We describe a possible mathematical model of this kind, propose an extragradient method for recovering the stability, and investigate its convergence.

Keywords: optimal control problem, Cauchy problem, multicriteria problem, saddle point, convergence.

MSC: 37N40, 49J15, 49M30, 93C15, 90C29

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-71-78

1. Постановка задачи

Пусть E^n — евклидово пространство размерности n ; $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i$ — скалярное произведение векторов $a = (a^1, \dots, a^n)$, $b = (b^1, \dots, b^n)$; $\|a\| = (\sum_{i=1}^n (a^i)^2)^{1/2}$ — норма вектора a ; $E_+^n = \{a \in E^n: a^i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ — неотрицательный ортант в E^n ; $L_2^r[t_0, t_1]$ — Лебегово пространство вектор-функций $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, с координатами $u^i(t)$, интегрируемыми по Лебегу вместе со своим квадратом; $\langle u, v \rangle = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n u^i(t) v^i(t) dt$ — скалярное произведение; $\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n (u^i(t))^2 dt \right)^{1/2}$ — норма в $L_2^r[t_0, t_1]$.

Пусть управляемый процесс описывается следующей задачей Коши:

$$\dot{x}(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t) + g(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad x(t_0) = x_0; \quad (1.1)$$

где $D(t)$, $B(t)$, $g(t)$ — матрицы размера $n \times n$, $n \times r$, $n \times 1$ соответственно с кусочно-непрерывными элементами, t_0 , t_1 — заданные моменты времени, $x_0 \in E^n$ — заданная точка, $u = u(t) \in L_2^r[t_0, t_1]$ — управление, $x = x(t; u) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — траектория системы (1.1),

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-06045-а) и Министерства образования и науки РФ по программе повышения конкурентоспособности НИТУ «МИСиС» среди ведущих мировых научно-образовательных центров (соглашение №02.А03.21.0004).

соответствующая управлению $u(t)$. Как известно (см., например, [1, кн. 1, гл. 6, § 1, теорема 2]), для каждого управления $u = u(t) \in L_2^r[t_0, t_1]$ задача (1.1) имеет единственное решение $x = x(t; u)$, являющееся абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[t_0, t_1]$, почти всюду удовлетворяющее уравнению (1.1).

Будем говорить, что управление $u = u(t)$ переводит точку x_0 в точку x_1 в момент времени t_1 , если $x(t_1; u) = x_1$. Пусть U — выпуклое замкнутое множество из $L_2^r[t_0, t_1]$. Обозначим $X = \{x \in E^n : x = x(t_1; u), u \in U\}$ — множество достижимости системы (1.1) в момент t_1 для управлений $u = u(t)$ из множества U . Заметим, что множество X является выпуклым и замкнутым.

Далее будем рассматривать следующую задачу терминального оптимального управления — найти управление $u \in U$ и вектор $\lambda \in E_+^m$ из условий

$$\langle \lambda, f(x(t_1; u)) \rangle \rightarrow \inf, \quad (1.2)$$

$$\langle \mu - \lambda, f(x(t_1; u)) - \lambda \rangle \leq 0 \quad \forall \mu \in E_+^m; \quad (1.3)$$

где $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$, $x \in E^n$ — заданная вектор-функция с выпуклыми, дифференцируемыми координатами $f^i(x)$, $i = 1, \dots, m$.

Следуя работе [2], кратко поясним прикладной смысл задачи (1.1)–(1.3). Пусть группа из m участников образует сообщество (экономический союз) для реализации общей цели (проекта). Цели и интересы каждого из участников описываются стоимостными целевыми функциями $f^i(x)$, $i = 1, \dots, m$, которые определены на множестве X . Проблема, стоящая перед участниками, заключается в том, как выбрать распределение поставок ресурсов так, чтобы, с одной стороны, проект был реализован с наименьшими суммарными расходами, а, с другой стороны, каждый из участников минимизировал свой вклад в реализацию общего проекта. Предполагается, что участники проекта договорились в качестве своего вклада в проект выбирать точки Парето множества $\{f(x), x \in X\}$. Как известно [3], если функции $f^i(x)$, $i = 1, \dots, m$, выпуклы на X , то точки Парето являются точками минимума функции $\langle \lambda, f(x) \rangle$ на множестве X при условии $\lambda \in E_+^m$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Так мы и приходим к задаче (1.2).

Заметим, что задача (1.2), как правило, порождает обширное множество точек Парето. Для разных Парето оптимальных точек, которые задают конфигурацию параметров будущего проекта, его стоимость, вообще говоря, разная. Естественно выбрать параметры, при которых проект имеет минимальную стоимость. Такой выбор можно реализовать, рассматривая игру двух лиц с равновесием по Нэшу [4]. Здесь одно лицо — это группа участников проекта, второе лицо — игрок, распоряжающийся параметрами (ценами) $\lambda \in E_+^m$ и учитывающий групповые интересы, что отражено в (1.3).

В сформулированной задаче (1.1)–(1.3) наличие управляемой динамической системы (1.1) позволяет удерживать модель вблизи состояния равновесия, стабилизируя ситуацию. Реальный прообраз данной задачи можно найти во многих сферах человеческой деятельности.

Задачу (1.1)–(1.3) удобно представить в седловой форме. Введем функцию, аналогичную функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}(u, \lambda) = \langle \lambda, f(x(t_1; u)) - \lambda/2 \rangle, \quad u \in U, \quad \lambda \in E_+^m. \quad (1.4)$$

Седловой точкой этой функции будем называть точку $(u_*, \lambda_*) \in U \times E_+^m$, удовлетворяющую неравенствам

$$\mathcal{L}(u_*, \lambda) \leq \mathcal{L}(u_*, \lambda_*) \leq \mathcal{L}(u, \lambda_*) \quad \forall u \in U, \quad \lambda \in E_+^m. \quad (1.5)$$

Убедимся, что точка $(u_*, \lambda_*) \in U \times E_+^m$ будет решением задачи (1.1)–(1.3) тогда и только тогда, когда она является седловой точкой функции (1.4). В самом деле, правое неравенство (1.5) с учетом определения функции (1.4) означает, что

$$\langle \lambda_*, f(x(t_1; u_*)) \rangle \leq \langle \lambda_*, f(x(t_1; u)) \rangle \quad \forall u \in U;$$

это равносильно (1.2) при $\lambda = \lambda_*$. Из левого неравенства (1.5) следует, что вогнутая функция $\mathcal{L}(u_*, \lambda)$ достигает максимума при $\lambda = \lambda_*$; это равносильно неравенству [1, кн. 1, гл. 4, § 2, теорема 3]

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u_*, \lambda_*)}{\partial \lambda}, \mu - \lambda_* \right\rangle = \langle f(x(t_1; u_*)) - \lambda_*, \mu - \lambda_* \rangle \leq 0 \quad \forall \mu \in E_+^m,$$

совпадающему с (1.3) при $u = u_*$, $\lambda = \lambda_*$. Таким образом, чтобы получить решение задачи (1.1)–(1.3) достаточно найти седловую точку функции (1.4).

Заметим, что при сделанных выше предположениях функция $\mathcal{L}(u, \lambda)$ выпукла и слабо-полунепрерывна снизу по переменной u на выпуклом замкнутом множестве U при каждом фиксированном $\lambda \in E_+^m$, сильно вогнута и непрерывна по λ на E_+^m при каждом $u \in U$.

2. Описание метода

Опишем экстраградиентный метод поиска седловой точки функции (1.4). Эта функция имеет производные по каждой из переменных u , λ , которые представимы в виде [1, кн. 2, гл. 8, § 3, пример 7]

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u, \lambda)}{\partial u} = B^\top(t)\psi(t, u, \lambda), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad (2.1)$$

где $\psi(t) = \psi(t, u, \lambda)$ — решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -D^\top(t)\psi(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \quad \psi(t_1) = \lambda^\top f'(x) \Big|_{x=x(t_1; u)}, \quad (2.2)$$

а $f'(x)$ — матрица Якоби вектор-функции $f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x))$, \top — знак транспонирования, и

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u, \lambda)}{\partial \lambda} = f(x) \Big|_{x=x(t_1; u)} - \lambda. \quad (2.3)$$

Пусть $(u_0, \lambda_0) \in U \times E_+^m$ — какое-либо начальное приближение. Пусть при некотором $k \geq 0$ известно k -е приближение $(u_k, \lambda_k) \in U \times E_+^m$. Тогда следующее приближение $(u_{k+1}, \lambda_{k+1}) \in U \times E_+^m$ определяем так: сначала находим вспомогательное прогнозное приближение $(\bar{u}_k, \bar{\lambda}_k)$:

$$\bar{u}_k = \pi_U \left(u_k - \beta_k \frac{\partial \mathcal{L}(u_k, \lambda_k)}{\partial u} \right), \quad \bar{\lambda}_k = \pi_+ \left(\lambda_k + \beta_k \frac{\partial \mathcal{L}(u_k, \lambda_k)}{\partial \lambda} \right), \quad (2.4)$$

затем определяем основное приближение:

$$u_{k+1} = \pi_U \left(u_k - \beta_k \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{u}_k, \bar{\lambda}_k)}{\partial u} \right), \quad \lambda_{k+1} = \pi_+ \left(\lambda_k + \beta_k \frac{\partial \mathcal{L}(\bar{u}_k, \bar{\lambda}_k)}{\partial \lambda} \right); \quad (2.5)$$

где $\pi_U u$, $\pi_+ \lambda$ — проекции точек $u \in L_2^r[t_0, T]$, $\lambda \in E^m$, на множества U , E_+^m соответственно [1, кн. 1, гл. 4, § 4, с. 213], $\beta_k > 0$ — длина шага метода. Отметим, что другой, более сложный, вариант экстраградиентного метода для задачи (1.1)–(1.3), основанный на функции вида (1.4), учитывающей систему (1.1) явно, рассмотрен в [2].

Запишем метод (2.4), (2.5) в краткой форме. Обозначим

$$z = (u, \lambda), \quad \bar{z} = (\bar{u}, \bar{\lambda}), \quad Z = U \times E_+^m, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(z)}{\partial z} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}(z)}{\partial u}, \frac{\partial \mathcal{L}(z)}{\partial \lambda} \right), \quad Az = \left(\frac{\partial \mathcal{L}(z)}{\partial u}, -\frac{\partial \mathcal{L}(z)}{\partial \lambda} \right). \quad (2.6)$$

Учитывая, что проекция точки z на множество Z имеет вид $\pi_Z z = (\pi_U u, \pi_+ \lambda)$, метод (2.4), (2.5) можем кратко записать следующим образом:

$$\bar{z}_k = \pi_Z(z_k - \beta_k Az_k), \quad z_{k+1} = \pi_Z(z_k - \beta_k A\bar{z}_k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

3. Сходимость метода

Исследуем сходимость метода (2.7), предполагая, что функция Лагранжа (1.4) имеет хотя бы одну седловую точку $z_* = (u_*, \lambda_*)$. Пользуясь характеристическим свойством проекции (см. [1, кн. 1, гл. 4, § 4, теорема 1])

$$\langle \pi_Z z - z, y - \pi_Z z \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Z,$$

запишем метод (2.7) в форме вариационных неравенств:

$$\langle \bar{z}_k - z_k + \beta_k A z_k, z - \bar{z}_k \rangle \geq 0 \quad \forall z \in Z, \quad (3.1)$$

$$\langle z_{k+1} - z_k + \beta_k A \bar{z}_k, z - z_{k+1} \rangle \geq 0 \quad \forall z \in Z, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.2)$$

Возьмем произвольную седловую точку $z_* = (u_*, \lambda_*)$ функции (1.4). Положим в (3.1) $z = z_{k+1}$, в (3.2) $z = z_*$ и сложим получившиеся неравенства:

$$\begin{aligned} & \langle \bar{z}_k - z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \langle z_{k+1} - z_k, z_* - z_{k+1} \rangle \\ & + \beta_k (\langle A z_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \langle A \bar{z}_k, z_* - z_{k+1} \rangle) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Первые два слагаемых из левой части неравенства (3.3) преобразуем, пользуясь тождеством

$$2\langle a - c, c - b \rangle = \|a - b\|^2 - \|a - c\|^2 - \|c - b\|^2 \quad \forall a, b, c \in L_2^r[t_0, t_1] \times E^m.$$

После несложных преобразований из (3.3) получим

$$\begin{aligned} & \|z_{k+1} - z_*\|^2 + \|z_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 + \|z_k - \bar{z}_k\|^2 \leq \|z_k - z_*\|^2 \\ & + 2\beta_k (\langle A z_k - A \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle + \langle A \bar{z}_k - A z_*, z_* - \bar{z}_k \rangle + \langle A z_*, z_* - \bar{z}_k \rangle) \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как оператор A , определенный согласно (2.6), является монотонным на Z , и z_* — седловая точка функции (1.4) [1, кн. 1, гл. 4, § 2, теоремы 3, 4], то справедливы неравенства

$$\langle A \bar{z}_k - A z_*, z_* - \bar{z}_k \rangle \leq 0, \quad \langle A z_*, z_* - \bar{z}_k \rangle \leq 0.$$

Отсюда и из (3.4) имеем

$$\|z_{k+1} - z_*\|^2 + \|z_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 + \|z_k - \bar{z}_k\|^2 \leq \|z_k - z_*\|^2 + 2\beta_k \langle A z_k - A \bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

Для оценки последнего слагаемого из правой части неравенства (3.5) достаточно было бы потребовать выполнения условия Липшица для оператора A на множестве $Z = U \times E_+^m$. Как видно из (2.6), это возможно, если условию Липшица удовлетворяют производные $\partial \mathcal{L}(z)/\partial u$, $\partial \mathcal{L}(z)/\partial \lambda$. Посмотрим, насколько такое требование естественно в рассматриваемой задаче (1.1)–(1.3). Для траектории $x(t; u)$ задачи Коши (1.1) справедливы оценки [1, кн. 1, гл. 6, § 3, теорема 1]

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [t_0, t_1]} \|x(t; u_1) - x(t; u_2)\| \leq C \|u_1 - u_2\| \quad \forall u_1, u_2 \in L_2^r[t_0, t_1], \quad C = \text{const} > 0, \\ & \max_{t \in [t_0, t_1]} \|x(t; u)\| \leq C(1 + \|u\|) \quad \forall u \in L_2^r[t_0, t_1]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Далее будем предполагать, что вектор-функция $f(x)$ и матрица Якоби $f'(x)$ удовлетворяют условию Липшица на ограниченном множестве из E^n . Тогда из (2.3), (3.6) следует, что

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{L}(u_1, \lambda_1)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \mathcal{L}(u_2, \lambda_2)}{\partial \lambda} \right\| \leq L_0 \|u_1 - u_2\| \quad \forall (u_1, \lambda_1), (u_2, \lambda_2) \in Z, \quad L = \text{const} > 0. \quad (3.7)$$

Константы Липшица и другие константы, конкретные значения которых в наших теоретических рассуждениях не важны, ниже мы будем обозначать одними и теми же буквами C , L .

Выясним, когда производная $\partial\mathcal{L}(u, \lambda)/\partial u$ будет удовлетворять условию Липшица. С этой целью воспользуемся формулами (2.1), (2.2). Для решения $\psi(t) = \psi(t, u, \lambda)$ задачи (2.2) справедлива оценка [1, кн. 1, гл. 6, § 3, теорема 1]

$$\begin{aligned} \max_{t \in [t_0, t_1]} \|\psi(t, u_1, \lambda_1) - \psi(t, u_2, \lambda_2)\| &\leq C \|\lambda_1\| \|f'(x(t_1; u_1)) - f'(x(t_1; u_2))\| \\ &+ \|\lambda_1 - \lambda_2\| \|f'(x(t_1; u_2))\| \quad \forall (u_1, \lambda_1), (u_2, \lambda_2) \in Z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Пусть $\sup_{u \in U} \|f'(x(t_1; u))\| < \infty$. Тогда из (3.8) и (2.1) следует

$$\left\| \frac{\partial\mathcal{L}(u_1, \lambda_1)}{\partial\lambda} - \frac{\partial\mathcal{L}(u_2, \lambda_2)}{\partial\lambda} \right\| \leq L (\|\lambda_1\| \|f'(x(t_1; u_1)) - f'(x(t_1; u_2))\| + \|\lambda_1 - \lambda_2\|). \quad (3.9)$$

Так как λ_1 принадлежит неограниченному множеству E_+^m , то условие Липшица для $\partial\mathcal{L}(u, \lambda)/\partial u$ на Z можно получить, если первое слагаемое в правой части неравенства (3.9) равно нулю. Это возможно, если $f^i(x) = \langle a^i, x \rangle - b^i$, $i = 1, \dots, m$, — аффинные функции. В общем случае из-за неограниченности множества E_+^m выполнения условия Липшица на Z для оператора $\partial\mathcal{L}(u, \lambda)/\partial u$ ожидать не приходится.

Однако внимательный анализ экстраградиентного метода (2.7) [5] показывает, что при естественных ограничениях на задачу (1.1)–(1.3) последовательности $\{\bar{z}_k\}$, $\{z_k\}$, порождаемые этим методом, принадлежат некоторому ограниченному подмножеству S множества Z и можно говорить об условии Липшица для оператора A на S .

Покажем, что в качестве такого подмножества S в задаче (1.1)–(1.3) можно, например, взять

$$S = \{z = (u, \lambda) \in Z: \|z - z_*\| \leq 4(\|z_0\| + \|z_*\|) + \|Az_0\| \stackrel{def}{=} R\}, \quad (3.10)$$

где $z_0 = (u_0, \lambda_0) \in Z$ — начальное приближение метода (2.7), z_* — произвольная седловая точка функции (1.4). При сделанных выше предположениях множество S (3.10) выпукло, замкнуто, ограничено в $L_2^r[t_0, t_1] \times E_+^m$. Отсюда и из (2.1), (3.6)–(3.8) следует, что оператор A на множестве S удовлетворяет условию Липшица

$$\|Ay_1 - Ay_2\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \forall y_1, y_2 \in S. \quad (3.11)$$

Выберем в методе (2.7) длину шага β_k из условий

$$0 < \beta_{\min} \leq \beta_k \leq \min \left\{ 1; \frac{1}{2L} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.12)$$

где постоянная L взята из (3.11). Покажем, что тогда последовательности $\bar{z}_k = (\bar{u}_k, \bar{\lambda}_k)$, $z_k = (u_k, \lambda_k)$, $k = 0, 1, \dots$, полученные методом (2.7), (3.12), таковы, что

$$z_k \in S, \quad \bar{z}_k \in S, \quad \|z_k - z_*\| \leq \|z_0 - z_*\|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.13)$$

при любом выборе точки z_* . Воспользуемся методом математической индукции. Очевидно, $z_0 \in S$. Кроме того, $\|z_* - z_0\| \leq \|z_*\| + \|z_0\| \leq R$, так что $z_* \in S$. Далее, учитывая, что оператор проектирования нестягивающий [1, кн. 1, гл. 4, § 4, теорема 2], из первого равенства (2.7) и условия (3.12) при $k = 0$ имеем

$$\|\bar{z}_0 - z_*\| = \|\pi_Z(z_0 - \beta_0 Az_0) - \pi_Z z_0\| \leq \beta_0 \|Az_0\| \leq R_0,$$

т. е. $\bar{z}_0 \in S$. Заметим, что неравенство в (3.13) при $k = 0$ превращается в равенство. Таким образом, при $k = 0$ соотношения (3.13) выполняются. Предположим, что соотношения (3.13)

выполнены при некотором $k \geq 0$. Тогда можем воспользоваться условием Липшица (3.11) при $y_1 = z_k \in S$, $y_2 = \bar{z}_k \in S$:

$$\|Az_k - A\bar{z}_k\| \leq L\|z_k - \bar{z}_k\|.$$

Поэтому для последнего слагаемого из правой части оценки (3.5) имеем

$$2\beta_k \langle Az_k - A\bar{z}_k, z_{k+1} - \bar{z}_k \rangle \leq 2\beta_k L \|z_k - \bar{z}_k\| \|z_{k+1} - \bar{z}_k\| \leq \beta_k L (\|z_k - \bar{z}_k\|^2 + \|z_{k+1} - \bar{z}_k\|^2),$$

и, продолжая оценку (3.5), получаем

$$\|z_{k+1} - z_*\|^2 + (1 - \beta_k L) (\|z_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 + \|z_k - \bar{z}_k\|^2) \leq \|z_k - z_*\|^2.$$

В силу (3.12) $(1 - \beta_k L) \geq 1/2$. Отсюда и из (3.13) следует

$$\|z_{k+1} - z_*\|^2 \leq \|z_{k+1} - z_*\|^2 + \frac{1}{2} (\|z_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 + \|z_k - \bar{z}_k\|^2) \leq \|z_k - z_*\|^2 \leq \|z_0 - z_*\|^2, \quad (3.14)$$

иначе говоря,

$$\|z_{k+1} - z_*\|^2 \leq \|z_0 - z_*\|^2.$$

Тогда

$$\|z_{k+1} - z_0\| \leq \|z_{k+1} - z_*\| + \|z_* - z_0\| \leq 2\|z_* - z_0\| \leq 2(\|z_*\| + \|z_0\|) \leq R, \quad (3.15)$$

т. е. $z_{k+1} \in S$. Покажем, что $\bar{z}_{k+1} \in S$. Из первого равенства (2.7) для номера $k+1$ имеем

$$\|\bar{z}_{k+1} - z_0\| = \|\pi_Z(z_{k+1} - \beta_{k+1}Az_{k+1}) - \pi_Z z_0\| \leq \|z_{k+1} - z_0\| + \beta_{k+1} (\|Az_{k+1} - Az_0\| + \|Az_0\|). \quad (3.16)$$

Так как $z_{k+1} \in S$, $z_0 \in S$, то можем воспользоваться условием Липшица (3.11) при $y_1 = z_{k+1}$, $y_2 = z_0$:

$$\|Az_{k+1} - Az_0\| \leq L\|z_{k+1} - z_0\|.$$

Отсюда и из (3.16) с учетом (3.12), (3.15) получаем

$$\begin{aligned} \|\bar{z}_{k+1} - z_0\| &\leq (1 + \beta_{k+1}L)\|z_{k+1} - z_0\| + \beta_{k+1}\|Az_0\| \\ &\leq 2\|z_{k+1} - z_0\| + \|Az_0\| \leq 4(\|z_*\| + \|z_0\|) + \|Az_0\| = R, \end{aligned}$$

т. е. $\bar{z}_{k+1} \in S$. Индуктивные рассуждения закончены, соотношения (3.13) доказаны.

Продолжим доказательство сходимости метода (2.7), (3.12) к решению задачи (1.1)–(1.3). Суммируя (3.14) по k , от $k=0$ до некоторого номера N , получим

$$\|z_{N+1} - z_*\|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N (\|z_{k+1} - \bar{z}_k\|^2 + \|z_k - \bar{z}_k\|^2) \leq \|z_0 - z_*\|^2, \quad N = 0, 1, \dots \quad (3.17)$$

Это означает, что ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \|z_{k+1} - \bar{z}_k\|^2$, $\sum_{k=0}^{\infty} \|z_k - \bar{z}_k\|^2$ сходятся. Поэтому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{k+1} - \bar{z}_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - \bar{z}_k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{k+1} - z_k\| = 0. \quad (3.18)$$

Из ограниченности $\{z_k\}$, вытекающей из (3.13), (3.17), и из (3.18) следует существование подпоследовательностей $\{z_{k_l}\}$, $\{\bar{z}_{k_l}\}$, $\{z_{k_l+1}\}$, $\{\bar{z}_{k_l+1}\}$, сходящихся к некоторой точке $z' = (u', \lambda') \in S$ слабо в $L_2^2[t_0, T] \times E^m$. Это означает, что u_{k_l} , \bar{u}_{k_l} , \bar{u}_{k_l+1} сходятся к точке $u' \in U$ слабо в $L_2^2[t_0, t_1]$, $\{\lambda_{k_l}\}$, $\{\bar{\lambda}_{k_l}\}$, $\{\lambda_{k_l+1}\}$ сходятся к $\lambda' \in E_+^m$ в норме E^m . Несложно доказать (см. [1, кн. 2, гл. 10, § 1, с. 910]), что тогда траектории $x(t; u_{k_l})$, $\psi(t, u_{k_l}, \lambda_{k_l})$ задач (1.1), (2.2) сходятся равномерно к траекториям, соответствующим $(u', \lambda') = z'$. В частности, из формул (2.1), (2.3) тогда следует, что при $k = k_l \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(u_{k_l}, \lambda_{k_l})}{\partial u} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}(u', \lambda')}{\partial u}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(u_{k_l}, \lambda_{k_l})}{\partial \lambda} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}(u', \lambda')}{\partial \lambda},$$

или, иначе говоря,

$$Az_{k_l} \rightarrow Az'$$

равномерно на отрезке $[t_0, t_1]$. Кроме того,

$$|\langle \bar{z}_{k_l} - z_{k_l}, z - z_{k_l} \rangle| \leq \| \bar{z}_{k_l} - z_{k_l} \| \| z - z_{k_l} \| \rightarrow 0, \quad k = k_l \rightarrow \infty,$$

в силу (3.18) и ограниченности по норме слабо сходящейся в $L_2^r[t_0, t_1] \times E^m$ последовательности. Поэтому, совершив в (3.1) предельный переход при $k = k_l \rightarrow \infty$, получим

$$\liminf_{k_l \rightarrow \infty} \beta_{k_l} \langle Az', z - z' \rangle \geq 0, \quad \liminf_{k_l \rightarrow \infty} \beta_{k_l} \geq \beta_{\min} > 0,$$

что соответствует двум неравенствам

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u', \lambda')}{\partial u}, u - u' \right\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U, \quad \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}(u', \lambda')}{\partial \lambda}, \lambda - \lambda' \right\rangle \leq 0 \quad \forall \lambda \in E_+^m,$$

первое из которых равносильно правому неравенству седла $L(u', \lambda') \leq L(u, \lambda') \quad \forall u \in U$, второе — левому неравенству седла $L(u', \lambda) \leq L(u', \lambda') \quad \forall \lambda \in E_+^m$ [1, кн. 1, гл. 4, § 2, теорема 3]. Таким образом, (u', λ') — решение задачи (1.1)–(1.3). Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть U — выпуклое замкнутое множество из $L_2^r[t_0, t_1]$, функции $f^i(x)$, $i = 0, 1, \dots, t$, выпуклы и непрерывно дифференцируемы на E^n , их градиенты удовлетворяют условию Липшица на ограниченном множестве из E^n , функция Лагранжа (1.4) имеет хотя бы одну седловую точку, $z_0 = (u_0, \lambda_0) \in Z = L_2^r[t_0, t_1] \times E_+^m$ — произвольная начальная точка метода (2.7); длина шага β_k в (2.7) выбирается из условия (3.12), где L — константа Липшица из (3.11) для оператора A , соответствующая множеству (3.10). Тогда последовательность $z_k = (u_k, \lambda_k)$, $k = 0, 1, \dots$, порожденная методом (2.7), ограничена в норме пространства $L_2^r[t_0, t_1] \times E^m$ и любая ее слабая предельная точка (u', λ') является решением задачи (1.1)–(1.3).

4. Заключение

Необходимо заметить, что правило (3.12) выбора шага β_k в методе (2.7) не является конструктивным, так как точка z_* , присутствующая в определении (3.10) множества S , нам неизвестна и, следовательно, константа L в (3.11) теоретически существует, но мы ее явно не знаем. Однако, если известна дополнительная информация о задаче (1.1)–(1.3), правило выбора длины шага β_k можно сделать более конструктивным. Например, если функция $f(x)$ афинна, то, как следует из неравенства (3.9), в качестве множества (3.10) можно взять исходное, известное нам множество $S = Z$ и вычислить явно константу L в (3.11), (3.12). В общем случае, когда функция $f(x)$ нелинейна, допустим, что нам удалось получить оценку

$$\|z_*\| \leq M \tag{4.1}$$

для какой-либо седловой точки функции (1.4). Тогда вместо (3.10) можно взять, например, множество

$$S_1 = \{z \in Z : \|z - z_0\| \leq 4(\|z_0\| + M) + \sup_{\|z\| \leq M} \|Az\| \stackrel{def}{=} R_1\}. \tag{4.2}$$

Это множество получено из множества (3.10) заменой величины $\|z_*\|$ ее оценкой M из (4.1), и константа R_1 здесь конструктивно вычислима. Если теперь в (3.11), (3.12) вместо L взять константу Липшица, соответствующую множеству (4.2), то, рассуждая по индукции, также несложно доказать соотношения (3.13) для множества (4.2) и вытекающую отсюда сходимость метода (2.7).

Если оценки (4.1) у нас нет, то остается выбирать длину шага β_k в методе (2.7) эмпирически (например, дроблением некоторого фиксированного $\beta > 0$), руководствуясь соображениями сходимости, монотонности и т. п. Ценность доказанной выше теоремы — в том, что при решении задачи (1.1)–(1.3) методом (2.7) такой эмпирический подход также применим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Васильев Ф.П.** Методы оптимизации: в 2 кн. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
2. **Антипин А.С., Хорошилова Е.В.** Многокритериальная краевая задача в динамике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 20–29.
3. **Подиновский В.В., Ногин В.Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Физматлит, 2007. 256 с.
4. **Антипин А.С.** О двух постановках равновесных задач // Оптимизация и приложения. М.: Изд-во ВЦ РАН, 2011. Вып. 2. С. 13–41.
5. **Артемьева Л.А.** Экстраградиентный метод поиска точки равновесия в седловых играх двух лиц // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 12. С. 2143–2157.

Васильев Федор Павлович

Поступила 24.02.2016

д-р физ.-мат. наук, профессор

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ВМиК

e-mail: vasiliev.fp@gmail.com

Антипин Анатолий Сергеевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

главный науч. сотрудник

ВЦ РАН

e-mail: asantip@yandex.ru

Артемьева Людмила Анатольевна

канд. физ.-мат. наук

ассистент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, ВМиК

e-mail: artemieva.luda@gmail.com

УДК 517.983.54

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЕКОНВОЛЮЦИИ В ОБЩЕЙ ПОСТАНОВКЕ¹**В. В. Васин, Г. Г. Скорик**

Задача деконволюции, которая возникает при описании процессов в скважине в ходе проведения тестов, формулируется в виде уравнения Вольтерра первого рода с разрывными входными данными (ядро — скорость потока, правая часть — изменение давления), которые характеризуются наличием больших ошибок измерения. Кроме того, решение этого уравнения имеет разномасштабный характер поведения на области определения. В этих условиях традиционные алгоритмы решения уравнения Вольтерра, как правило, не приводят к удовлетворительным результатам. Чтобы решить задачу, мы привлекаем вариационные методы регуляризации и строим функциональный базис (систему экспонент), позволяющий учесть в алгоритме все априорные ограничения, известные для искомого решения. Благодаря этому удалось сформировать семейство приближенных решений, удовлетворяющее условиям гладкости и точности, требуемым для интерпретации скважинных тестов. Формулируются теоремы сходимости приближенных решений и описываются детали численной реализации построенных регуляризирующих алгоритмов.

Ключевые слова: задача деконволюции, скважинный тест, тихоновская регуляризация, метод квазирешений, система экспонент, априорные ограничения.

V. V. Vasin, G. G. Skorik. Solution of the deconvolution problem in the general statement.

The deconvolution problem, which arises in the description of well testing processes, is formulated in the form of a Volterra equation of the first kind with discontinuous input data (the kernel is the flow rate and the right-hand side is the pressure change) characterized by large measurement errors. In addition, the solution of this equation has multiscale behavior in its domain. In this situation, the traditional solution algorithms for Volterra equations, as a rule, do not provide satisfactory results. To solve the problem, we use the variational regularization methods and construct a function basis (a system of exponents), which allow us to take into account in the algorithms all a priori constraints known for the desired solution. As a result, we form a family of approximate solutions that satisfies the conditions of smoothness and exactness required for the interpretation of well tests. For the constructed regularizing algorithms, we formulate convergence theorems and describe the details of numerical implementation.

Keywords: deconvolution problem, well test, Tikhonov regularization, method of quasisolutions, system of exponents, a priori constraints.

MSC: 45D05, 65J20, 65R20

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-79-90

1. Введение

С математической точки зрения задача деконволюции — решение уравнения Вольтерра первого рода [1]

$$Ag \equiv \int_0^t q(t-\tau)g(\tau) d\tau = \Delta p(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

которое возникает при описании процессов, происходящих в скважине при проведении тестов. Уравнение вытекает из принципа Дюамеля, который гласит, что измеряемое изменение давления $\Delta p(t) = p_0 - p(t)$ есть свертка измеряемой скорости потока $q(t)$ жидкости с импульсной функцией $g(t)$ отклика резервуара. Здесь p_0 — начальное давление резервуара (в невозмущенном состоянии), $p(t)$ — давление, измеряемое, например, на поверхности ствола скважины. Искомая функция $g(t)$ подлежит определению из уравнения (1.1) по измеренным

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-00629).

с ошибками функциям $p(t)$ и $q(t)$. Известно, что полученные в результате решения уравнения (1.1) функции $v(t) = tg(t)$, $w(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$ в логарифмической шкале широко используются инженерами-исследователями при идентификации системы скважина — резервуар на основе интерпретации скважинных тестов [2–5].

Уравнение (1.1) применительно к скважинным тестам имеет существенную специфику, которая заключается в следующем:

1. Реальные экспериментальные данные $q(t)$, $p(t)$, p_0 содержат большие погрешности (от 5% до 15%).
2. Исходные данные $q(t)$, $p(t)$ и особенно решение $g(t)$ могут иметь значительные вариации на малых временных участках (разномасштабность).
3. Функции $q(t)$, $p(t)$ ограничены, но, как правило, разрывны.

В этих условиях традиционные алгоритмы не позволяют построить устойчивое приближенное решение некорректно поставленного уравнения (1.1), пригодного для адекватной интерпретации скважинных тестов, о чем свидетельствуют многочисленные публикации, посвященные этой проблеме (см. подробные обзоры в [5; 6]).

Одна из возможностей повышения устойчивости метода и улучшения качества решения заключается в использовании в алгоритме дополнительной априорной информации о решении. Эта информация, обычно записываемая в виде некоторых ограничений (равенств, неравенств, включений), позволяет локализовать приближенное решение и повысить ее аппроксимативные свойства. При определенных допущениях на систему скважина — резервуар искомая функция отклика резервуара $g(t)$ удовлетворяет следующей бесконечной системе неравенств [3–5]:

$$(-1)^k d^k g(t)/dt^k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \geq 0. \quad (1.2)$$

Необходимо отметить, что во всех работах (см., например, [2–7] и ссылки в них), посвященных задаче деконволюции (1.1), привлекались в различных сочетаниях не более трех первых неравенств из (1.2):

$$g(t) \geq 0, \quad dg(t)/dt \leq 0, \quad d^2g(t)/dt^2 \geq 0, \quad (1.3)$$

выражающих важные свойства решения: неотрицательность, монотонность и выпуклость. Так, например, разностные аппроксимации неравенств (1.3) использовались в [4] при построении алгоритма, основанного на сведении исходной постановки к задаче линейного программирования. Наиболее часто в алгоритмах учитывалось свойство неотрицательности решения. В этой связи следует отметить интересную работу [7], в которой тихоновская регуляризация использовалась не к уравнению (1.1), а к нелинейному уравнению

$$\bar{A}(z) = \int_{\infty}^{\ln t} q(t - e^{\sigma}) e^{z(\sigma)} d\sigma = \Delta p(t),$$

полученному из (1.1) с помощью замены $\sigma = \ln \tau$, $z(\sigma) = \ln(\tau g(\tau))$. Этот подход позволяет не только автоматически учитывать свойство неотрицательности решения, но и несколько нивелировать его разномасштабность. Так же в работе [6] неравенства (1.3) учитывались при построении алгоритмов на основе вариационных методов, но здесь учет ограничений осуществлялся с помощью разложения решения по системе кусочно-линейных функций, удовлетворяющих конечно-разностным аналогам неравенств (1.3). Эти методы в численных расчетах дают вполне удовлетворительные результаты, но вследствие кусочно-линейности базисных функций приближенные решения не обладают достаточной гладкостью, что несколько снижает эффективность алгоритмов.

Этот недостаток преодолен в работе [8], где для тех же методов регуляризации искомое решение строилось в виде разложения по системе степенных функций $\{e^{-\lambda_i t}, \lambda_i \geq 0, \lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j\}$. Это позволило построить бесконечно дифференцируемые приближенные решения,

удовлетворяющие всем ограничениям (1.2). При этом основные результаты (теоремы сходимости регуляризованных решений) были получены в предположении, что искомое решение уравнения (1.1) представимо в форме конечной суммы

$$\hat{g}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{c}_i e^{-\lambda_i t}, \quad (1.4)$$

где каждая функция $h_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, очевидно, удовлетворяет ограничениям (1.2). Было показано, что в этом случае для построения приближенного решения уравнения (1.1) достаточно ограничиться в разложении (1.4) по системе h_i с неотрицательными коэффициентами \hat{c}_i , что автоматически влечет выполнение всей совокупности неравенств (1.2) для приближенного решения.

В данной работе не предполагается, что искомое решение стеснено условием (1.4), т.е. допускается представление решения в виде бесконечной суммы. Статья организована следующим образом. В разд. 2 приводятся некоторые факты, касающиеся экспоненциальной системы, и доказывается важная лемма 2.2 об аппроксимации по этой системе функции, удовлетворяющей априорным ограничениям (1.2). Исследованию сходимости вариационных методов регуляризации с ограничениями в виде бесконечной системы линейных неравенств (1.2) посвящен разд. 3. В разд. 4 дается обоснование сходимости конечномерных аппроксимаций. В разд. 5 излагаются численные алгоритмы минимизации при построении регуляризованного семейства приближенных решений.

2. Свойства системы экспонент

В теории приближения функций хорошо известна теорема Мюнтца [9] об аппроксимации функции полиномами.

Теорема 2.1 [9]. Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_i \rightarrow \infty$, $0 < a < b$. Для того чтобы для любой функции $f \in C[a, b]$ и любого $\varepsilon > 0$ нашлась линейная комбинация $P_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^{\lambda_i}$ такая, что $\|f - P_n\|_{C[a, b]} < \varepsilon$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i = \infty. \quad (2.1)$$

В случае отрезка $[0, b]$ условия (2.1) необходимо и достаточно для замкнутости системы $1 \cup \{x^{\lambda_i t}\}$, $-1/p < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ на $[0, b]$ в метрике пространства $L_p[0, b]$, $p \geq 1$.

Непосредственным следствием теоремы 2.1 является следующая лемма.

Лемма 2.1. Пусть для функций $\{h_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$, $h_0(t) = 1$, $h_i(t) = e^{-\lambda_i t}$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_i \rightarrow \infty$, выполнено условие (2.1). Тогда система функций $\{h_i(t)\}_{i=0}^{\infty}$ замкнута в пространстве $C[0, T]$.

Пусть $-1/p < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ и выполнено условие (2.1). Тогда система функций $1 \cup \{e^{-\lambda_i t}\}$, $i = 1, 2, \dots$, $t \in [0, T]$, замкнута в пространстве $L_p[0, T]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя замену $x = e^{-t}$, приходим к системе $\{e^{-\lambda_i t}\}$ и утверждению, сформулированному в лемме. \square

Из леммы 2.1 непосредственно следует, что решение уравнения (1.1) может быть приближено с любой точностью отрезками ряда по системе экспонент $\{e^{-\lambda_i t}\}_{i=0}^{\infty}$ в пространствах $L_p[0, T]$, $C[0, T]$.

Предположим, что решение уравнения (1.1) представимо в виде ряда по системе $\{e^{-\lambda_i t}\}_{i=0}^{\infty}$

$$\hat{g}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{c}_i e^{-\lambda_i t}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.2)$$

Если ряд (2.2) допускает почленное дифференцирование, т. е.

$$\hat{g}^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} \hat{c}_i \lambda_i^k e^{-\lambda_i t},$$

то при $\hat{c}_i \geq 0$ функция $\hat{g}(t)$ удовлетворяет всем априорным ограничениям (1.2). Как показывается в следующей лемме, из абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{c}_i < \infty$$

и выполнимости априорных ограничений (1.2) вытекает, что все коэффициенты \hat{c}_i неотрицательны, и это позволяет аппроксимировать решение конечными суммами ряда (2.2) с $\hat{c}_i \geq 0$.

Лемма 2.2. Пусть функция $g(t)$ имеет представление

$$g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}, \quad (2.3)$$

где $\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} c_i$ абсолютно сходящийся и $g(t)$ удовлетворяет бесконечной системе априорных неравенств (1.2).

Тогда все коэффициенты $c_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots$.

Доказательство. Предположим противное, что существует коэффициент $c_k < 0$. Если λ_k — предельная точка, тогда из абсолютной сходимости ряда следует существование такого $\varepsilon > 0$, что

$$\sum_{i: 0 < |\lambda_i - \lambda_k| < \varepsilon} |c_i| < \frac{|c_k|}{2}. \quad (2.4)$$

В случае, когда λ_k не является предельной точкой последовательности $\{\lambda_i\}_0^{\infty}$, существует $\varepsilon > 0$, для которого $i \neq k$, $|\lambda_i - \lambda_k| > \varepsilon$ для всех $i \neq k$ и условие (2.4) также выполнено.

Пусть $\lambda_k = 0$, тогда для $\bar{t} = \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{4 \sum_{i=0}^{\infty} |c_i|}{|c_k|}$ имеем

$$\begin{aligned} g(\bar{t}) &= c_k + \sum_{i: 0 < \lambda_i < \varepsilon} c_i e^{-\lambda_i \bar{t}} + \sum_{i: \lambda_i \geq \varepsilon} c_i e^{-\lambda_i \bar{t}} \leq c_k + \sum_{i: 0 < \lambda_i < \varepsilon} |c_i| + \sum_{i: \lambda_i \geq \varepsilon} |c_i| e^{-\lambda_i \bar{t}} \\ &\leq c_k + \frac{|c_k|}{2} + \sum_{i: \lambda_i \geq \varepsilon} |c_i| e^{-\varepsilon \bar{t}} \leq \frac{c_k}{2} + e^{-\varepsilon \bar{t}} \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| \\ &= \frac{c_k}{2} + \frac{|c_k|}{4 \sum_{i=0}^{\infty} |c_i|} \sum_{i=0}^{\infty} |c_i| = \frac{c_k}{2} + \frac{|c_k|}{4} = \frac{c_k}{4} < 0, \end{aligned}$$

что противоречит условию (1.2).

Пусть теперь $\lambda_k > 0$, тогда для $t_m = \frac{m}{\lambda_k}$ и последовательности $\left\{ (-1)^m g^{(m)}(t_m) \frac{e^m}{\lambda_k^m} \right\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, где $g^{(m)}(t) = \frac{d^m}{dt^m} g(t)$, имеем следующие соотношения:

$$(-1)^m g^{(m)}(t_m) \frac{e^m}{\lambda_k^m} = (-1)^m \frac{e^m}{\lambda_k^m} \sum_{i=0}^n c_i (-\lambda_i)^m e^{-\lambda_i t_m} = \sum_{i=0}^n c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_k} \right)^m e^{\left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_k}\right)m} = \sum_{i=0}^n c_i (z_i e^{1-z_i})^m.$$

Здесь $z_i = \lambda_i / \lambda_k$. Функция $\phi(z) = z e^{1-z}$ имеет максимум при $z = 1$. Следовательно, существует $0 < b < 1$ такое, что для всех номеров i , для которых $|\lambda_i - \lambda_k| \geq \varepsilon$ или $|1 - z_i| \geq \varepsilon / \lambda_k$, выполнено неравенство $0 < z_i e^{1-z_i} < b < 1$. Если $i = k$, тогда $z_k = 1$ и $z_k e^{1-z_k} = 1$. Поэтому

$$(-1)^m g^{(m)}(t_m) \frac{e^m}{\lambda_k^m} \leq c_k + \sum_{i: 0 < |\lambda_i - \lambda_k| < \varepsilon} |c_i| + \sum_{i: |\lambda_i - \lambda_k| \geq \varepsilon} |c_i| b^m \leq \frac{c_k}{2} + \sum_{i: |\lambda_i - \lambda_k| \geq \varepsilon} |c_i| b^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{c_k}{2} < 0.$$

Следовательно, существует такое число \bar{m} , что $(-1)^m g^{(m)}(t_m) < 0$ для $m \geq \bar{m}$, а это противоречит (1.2). \square

Таким образом, согласно лемме 2.2 приближенное решение для уравнения (1.1) можно строить в виде конечных сумм ряда (2.3) с неотрицательными коэффициентами, что автоматически гарантирует выполнение априорных ограничений (1.2) и упрощает численную реализацию алгоритмов.

З а м е ч а н и е 2.1. В отличие от теоремы Мюнтца в лемме 2.2 не предполагается выполнение условий

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots, \quad \lambda_i \rightarrow \infty, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty.$$

З а м е ч а н и е 2.2. Если $t \in [\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$ и $\sum_{i=0}^{\infty} |c_i| < \infty$, то возможно почленное дифференцирование ряда $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e^{-\lambda_i t}$, т. е. $g^{(k)}(t) = (-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_i^k e^{-\lambda_i t}$. Это вытекает из того, что

$$(-1)^k \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_i^k e^{-\lambda_i t} \leq e^{k(\ln(k/\varepsilon)-1)} \sum_{i=0}^{\infty} |c_i|, \quad (2.5)$$

т. е. ряд из производных равномерно сходится.

3. Методы, учитывающие априорные ограничения

3.1. Метод квазирешений

Предположим, что оператор A , определяемый интегральным соотношением (1.1), действует из пространства $L_p[0, T]$ в пространство $L_2[0, T]$. Оператор $A: L_p \rightarrow L_2$ — компактный на данной паре пространств, следовательно, обратный оператор A^{-1} разрывен, что означает некорректность задачи (1.1). Реальные данные о скорости потока и изменении давления содержат ошибки измерения, поэтому предполагается, что вместо точных $q(t)$, $\Delta p(t)$ заданы некоторые их приближения $q_\nu(t)$, $\Delta p_\delta(t)$, удовлетворяющие условиям аппроксимации

$$\|q - q_\nu\| \leq \nu, \quad \|\Delta p - \Delta p_\delta\| \leq \delta. \quad (3.1)$$

Обозначим через A_ν оператор, определяемый соотношением (1.1), в котором функция $q(t)$ заменена на $q_\nu(t)$.

Рассмотрим метод квазирешений [10; 11] в следующей форме:

$$\min \left\{ \|A_\nu g - \Delta p_\delta\|_{L_2}^2 : 0 \leq (-1)^m g^{(m)}(t) \leq d_m < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots \right\} = \Phi^*, \quad (3.2)$$

причем для точного решения $\hat{g}(t)$ уравнения (1.1) выполнено соотношение $0 \leq (-1)^m \hat{g}^{(m)}(t) \leq d_m$, т. е. $\hat{g}(t)$ принадлежит допустимому множеству.

Теорема 3.1. Пусть $A, A_\varepsilon: L_p[0, T] \rightarrow L_2[0, T]$ — взаимнооднозначные операторы и выполнены условия аппроксимации (3.1). Тогда существует единственное решение $g_{\nu, \delta}(t)$ задачи (3.2) и имеет место сходимость

$$\lim_{\nu, \delta \rightarrow 0} \|g_{\nu, \delta} - \hat{g}\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\hat{g}(t)$ — точное решение уравнения (1.1), $W_p^{(m)}[0, T]$ — пространство Соболева при $p \geq 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $\Phi(g)$ целевой функционал в задаче минимизации (3.2). Пусть g_n — минимизирующая последовательность, т. е. $\Phi(g_n) \rightarrow \Phi^*$ при $n \rightarrow 0$. Поскольку

$$\sup_{n, t} g_n(t) = \sup_{n, t} |g_n(t)| \leq d_0 \quad (3.3)$$

и, кроме того,

$$V_0^T[g_n] = \int_0^T |g_n^{(1)}(t)| dt \leq Td_1,$$

то по теореме Хелли существует поточечно сходящаяся подпоследовательность, которую можно считать совпадающей с g_n :

$$g_n(t) \rightarrow \bar{g}_0(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.4)$$

На основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла (3.4) вместе с (3.3) влекут сходимость в $L_p[0, T]$, $p \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |g_n(t) - \bar{g}_0(t)|^p dt = 0. \quad (3.5)$$

В силу тех же причин из соотношений

$$\sup_{n,t} |g_n^{(1)}| \leq d_1, \quad V_0^T[g_n^{(1)}] = \int_0^T |g_n^{(2)}(t)| dt \leq Td_2$$

вытекает существование подпоследовательности $g_{n_1}^{(1)}$, сходящейся в $L_p[0, T]$:

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \int_0^T |g_{n_1}^{(1)}(t) - \bar{g}_1(t)|^p dt = 0, \quad (3.6)$$

где $\{n_1\} \subseteq \{n\}$. Из полноты пространства $W_p^{(1)}[0, T]$ и соотношений (3.5) и (3.6) следует равенство $\bar{g}_1(t) = \bar{g}_0^{(1)}$, и имеет место сходимость в $W_p^{(1)}$

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} \int_0^T \left[|g_{n_1}(t) - g_0(t)|^p + |g_{n_1}^{(1)}(t) - g_0^{(1)}(t)|^p \right] dt = 0.$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что для произвольного натурального $m > 1$ также существует подпоследовательность $g_{n_m}(t)$, $n_m \subseteq n_{m-1}$, такая, что

$$\lim \|g_{n_m} - \bar{g}_0\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad n_m \subseteq n_{m-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Ввиду теорем вложения соотношение (3.7) влечет равномерную сходимость производных любого порядка

$$\lim_{n_m \rightarrow \infty} \max |g_{n_m}^{(m)} - \bar{g}_0^{(m)}(t)| = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует выполнимость соотношений

$$\begin{aligned} (-1)^m \bar{g}_0^{(m)}(t) &= \lim_{n_m \rightarrow \infty} (-1)^m g_{n_m}^{(m)}(t) \geq 0, \\ (-1)^m \bar{g}_0^{(m)}(t) &= \lim_{n_m \rightarrow \infty} (-1)^m g_{n_m}^{(m)}(t) \leq d_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

т. е. $\bar{g}_0(t)$ удовлетворяет ограничениям задачи минимизации (3.2).

Из (3.5) и очевидных соотношений

$$\Phi^* \leq \Phi(\bar{g}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_{\nu, \delta} g_n - \Delta p_\delta\| = \Phi^*$$

вытекает, что \bar{g}_0 реализует минимум целевого функционала в (3.2). В силу строгой выпуклости функционала $\Phi(g)$ такая функция единственная.

Переобозначим $\bar{g}_0(t)$ через $g_{\nu,\delta}(t)$. Очевидно, что для $g_{\nu,\delta}(t)$ справедливы рассуждения, проведенные для минимизирующей последовательности. Поэтому вместо \bar{g}_0 для некоторой функции $\bar{g}(t)$ и для любого $m \geq 0$ найдутся подпоследовательности g_{ν_m,δ_m} , для которых выполнены соотношения, аналогичные (3.7). Тогда, в частности, для некоторых $\nu_{n_0} \rightarrow 0, \delta_{n_0} \rightarrow 0$ при $n_0 \rightarrow \infty$ имеет место сходимость в $L_p = W_p^{(0)}$

$$g_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}}(t) \rightarrow \bar{g}(t). \quad (3.8)$$

Ввиду того, что точное решение $\hat{g}(t)$ удовлетворяет ограничениям задачи (3.2) и оператор $A: L_p \rightarrow L_2$ непрерывен, имеем соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq \|A\bar{g} - \Delta p\| &= \lim_{n_0 \rightarrow \infty} \|Ag_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}} - \Delta p\| \leq \limsup_{n_0 \rightarrow \infty} \|Ag_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}} - A\nu_{n_0}g_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}}\| \\ &+ \limsup_{n_0 \rightarrow \infty} \|A\nu_{n_0}g_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}} - \Delta p\delta_{n_0}\| + \limsup_{i \rightarrow \infty} \|\Delta p\delta_{n_0} - \Delta p\| \\ &\leq \limsup_{n_0 \rightarrow \infty} \left[\nu_{n_0} T (\|g_{\nu_{n_0},\delta_{n_0}}\| + \|\hat{g}\|) + 2\delta_{n_0} \right] = 0, \end{aligned}$$

т. е. $\bar{g}(t) = \hat{g}(t)$ — единственное решение задачи (1.1). Поскольку все предельные функции последовательности $g_{\nu,\delta}(t)$ относительно сходимости в L_p совпадают с $\hat{g}(t)$, то соотношение (3.8) будет выполнено и для всей последовательности $g_{\nu,\delta}(t)$ при $\nu, \delta \rightarrow 0$. В силу тех же причин также будут выполнены соотношения (3.7). \square

3.2. Метод Тихонова

Рассмотрим метод регуляризации Тихонова [12; 13] в следующей форме:

$$\min\{\|A_\nu g - \Delta p_\delta\|_{L_2}^2 + \alpha \Omega[g] : 0 < \kappa \leq g(t) \leq d_0, 0 \leq (-1)^m g^{(m)}(t) \leq d_m, m = 1, 2, \dots\} = \Psi^*, \quad (3.9)$$

где точное решение $\hat{g}(t)$ удовлетворяет ограничениям в задаче (3.9) и стабилизирующий функционал $\Omega[g]$ имеет вид

$$\Omega[g] = \int_0^T \left[\tau g^{(2)}(t)/g(t) + g^{(1)}/g(t) - (\tau g^{(1)}/g(\tau))^2 \right]^2 \frac{d\tau}{\tau}. \quad (3.10)$$

Аргументацию по поводу того, почему именно в виде (3.10) целесообразно использовать функционал $\Omega[g]$, можно найти в работе [8]. Введение дополнительного ограничения $0 < \kappa \leq g(t)$ по сравнению с методом квазирешений связано с тем, что подынтегральное выражение в $\Omega[g]$ содержит слагаемые, имеющие в знаменателе функцию $g(t)$. Поэтому ограниченность снизу для функции $g(t)$ необходима, чтобы гарантировать непрерывность функционала $\Omega[g]$ относительно равномерной сходимости функций и их производных.

Теорема 3.2. Пусть выполнены предположения теоремы (3.1) и параметры ν, δ, α связаны соотношениями

$$\alpha(\nu, \delta) \rightarrow 0, \quad \nu, \delta \rightarrow 0.$$

Тогда задача (3.9) имеет решение $g_\alpha(t)$, возможно, неединственное, при этом имеет место соотношение

$$\lim_{\nu, \delta \rightarrow 0} \|g_\alpha(\nu, \delta) - \hat{g}\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.11)$$

где $\hat{g}(t)$ — решение уравнения (1.1).

Доказательство. Как и в случае метода квазирешений для минимизирующей последовательности $g_n(t)$ существуют подпоследовательности, сходящиеся по норме $W_p^{(m)}$ к некоторой функции \bar{g}_0 из допустимого множества задачи (3.9), т. е. выполнены соотношения (3.7), что влечет равномерную сходимость производных любого порядка и тот факт, что функция \bar{g}_0 удовлетворяет всем ограничениям задачи (3.9). Обозначим через $\Psi(g)$ целевой функционал, а через $g_{\alpha(\nu,\delta)}$ — решение этой задачи. Учитывая непрерывность целевого функционала относительно нормы $C^2[0, T]$ и переходя к пределу при $n_3 \rightarrow \infty$, имеем

$$\Psi^* \leq \Psi(\bar{g}_0) = \lim_{n_3 \rightarrow \infty} \Psi(g_{n_3}) = \Psi^*,$$

т. е. $\bar{g}_0(t) = g_{\alpha(\nu,\delta)}(t)$ — некоторое решение задачи (3.9).

Поскольку $g_{\alpha(\nu,\delta)}(t)$ удовлетворяет ограничениям в (3.9), то, как и в случае минимизирующей последовательности, можно выделить подпоследовательности

$$g_{\alpha(\nu_{n_m}, \delta_{n_m})}^{(m)}(t) \rightarrow \bar{g}^{(m)}(t), \quad n_m \subseteq n_{m-1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

сходящиеся в L_p , где \bar{g} — некоторая функция из допустимого множества. Тогда из соотношений

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|A\bar{g} - \Delta p\| = \lim_{n_3 \rightarrow \infty} \|Ag_{\alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})} - \Delta p\| \\ &\leq \limsup_{n_3 \rightarrow \infty} \|Ag_{\alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})} - A\nu_{n_3}g_{\alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})}\| + \limsup_{n_3 \rightarrow \infty} \{\|A\nu_{n_3}g_{\alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})} - \Delta p\delta_{n_3}\| \\ &\quad + \alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})\Omega(g_{\alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})})\} + \delta_{n_3} \leq \limsup_{n_3 \rightarrow \infty} \|Ag_{\alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})} - A\nu_{n_3}g_{\alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})}\| \\ &\quad + \limsup_{n_3 \rightarrow \infty} \{\|A\nu_{n_3}\hat{g} - \Delta p\delta_{n_3}\| + \alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})\Omega(\hat{g})\} + \delta_{n_3} \\ &\leq \limsup_{n_3 \rightarrow \infty} [\nu_{n_3}T(\|g_{n_3}\| + \|\hat{g}\|) + 2\delta_{n_3} + \alpha(\nu_{n_3}, \delta_{n_3})\Omega[\bar{g}]] = 0 \end{aligned}$$

следует, что $\bar{g}(t)$ — решение уравнения (1.1). По условию оператор A обратим, поэтому $\bar{g}(t) = \hat{g}(t)$ — единственное решение. Это означает, что в действительности вместо (3.12) при любых $\nu, \delta \rightarrow 0$ имеет место сходимость производных, следовательно, выполнены соотношения (3.11). \square

4. Конечномерная аппроксимация методов

4.1. Рассмотрим конечномерный вариант метода квазирешений в форме

$$\min \left\{ \|A_\nu^\varepsilon g - \Delta p_\delta\|^2 : g(t) = \sum_{i=0}^n c_i^n e^{-\lambda_i t}, \quad c_i^n \geq 0, \quad \sum_{i=0}^n c_i^n \leq d_0 \right\} = \Phi_n^*, \quad (4.1)$$

т. е. приближенное решение в методе квазирешений строится в виде конечного отрезка ряда по системе $\{e^{-\lambda_i t}\}$. Кроме того, в отличие от предыдущих разделов рассматривается интегральное уравнение

$$A_\nu^\varepsilon g \equiv \int_\varepsilon^T q_\nu(t - \tau)g(\tau) d\tau = \Delta p_\delta(t), \quad (4.2)$$

где ε — сколь угодно малый параметр. Переход от отрезка интегрирования $[0, T]$ к отрезку $[\varepsilon, T]$ связан с тем, что в разложении $g(t) = \sum_{i=0}^\infty c_i e^{-\lambda_i t}$ на отрезке $[0, T]$ при численном дифференцировании получаем ряд

$$g^{(m)}(t) = (-1)^m \sum_{i=0}^\infty c_i \lambda_i^m e^{-\lambda_i t}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

в котором из-за наличия точки $t = 0$ возникает необходимость предполагать весьма ограничительное условие на убывание коэффициентов ввиду $\lambda_i^m \rightarrow \infty$ при $\lambda_i \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$. Важно отметить, что любая гладкая экстраполяция решения g_ε уравнения (4.2) на $[0, T]$ аппроксимирует решение исходного уравнения (1.1) с точностью порядка ε , что позволяет избежать потери точности. Более того, в численных процедурах, которые строятся на основе рассматриваемых методов, используется полный промежуток $[0, T]$. Таким образом, переход от (1.1) к уравнению (4.2) осуществляется ради разумного упрощения исходной постановки при теоретическом исследовании конечномерной аппроксимации предлагаемых методов решения и не касается численных алгоритмов.

Теорема 4.1. Пусть выполнены предположения теоремы (3.1) и решение $g_{\nu, \delta}(t)$ задачи

$$\min \{ \|A_{\nu}^{\varepsilon} g - \Delta p_{\delta}\|_{L_2}^2 : 0 \leq (-1)^m g^{(m)}(t) \leq d_m < \infty, m = 0, 1, 2, \dots \} = \Phi^*$$

представимо в виде

$$g_{\nu, \delta}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{\nu, \delta} e^{-\lambda_i t}, \quad c_i^{\nu, \delta} \geq 0. \quad (4.3)$$

Тогда существует единственное решение $\hat{g}^n(t)$ задачи (4.1) и имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}^n - g_{\nu, \delta}\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

Доказательство. Пусть $g_k^n(t)$ — минимизирующая последовательность в (4.1), т. е. $\Phi(g_k^n) \rightarrow \Phi_n^*$ при $k \rightarrow \infty$, для которой имеем (см. соотношение (2.5))

$$\begin{aligned} g_k^n(t) &= \sum_{i=0}^n c_{i,k}^n e^{-\lambda_i t} \leq \sum_{i=0}^n c_{i,k}^n \leq d_0, \quad c_{i,k}^n \geq 0, \\ (-1)^m g_k^{(m)}(t) &= \sum_{i=0}^n c_{i,k}^n \lambda_i^m e^{-\lambda_i t} \leq e^{-m(\ln \frac{m}{\varepsilon} - 1)} d_0 = d_m. \end{aligned}$$

Таким образом, как и в задаче (3.2), для минимизирующей последовательности g_k^n выполнены неравенства $0 \leq (-1)^m g_k^{(m)}(t) \leq d_m, m = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому существует подпоследовательность $g_{k_1}^n, k_1 \subseteq k$, такая, что при $k_1 \rightarrow \infty$ имеем сходимость в пространстве W_p^1

$$g_{k_1}^n(t) = \sum_{i=0}^n c_{i,k_1}^n e^{-\lambda_i t} \rightarrow \hat{g}^n(t) = \sum_{i=0}^n \hat{c}_i^n e^{-\lambda_i t}.$$

Так как $0 \leq c_i^n \leq d_0$, то можно считать, что $c_{i,k_1}^n \rightarrow \bar{c}_i^n, 0 \leq i \leq n$, при $k_1 \rightarrow \infty$. Это влечет равенства $\bar{c}_i = \hat{c}_i$ и сходимость в L_p

$$g_{k_1}^{(m)}(t) = (-1)^m \sum_{i=1}^n c_{i,k_1}^n \lambda_i^m e^{-\lambda_i t} \rightarrow (-1)^m \sum_{i=1}^n \hat{c}_i^n \lambda_i^m e^{-\lambda_i t} = (\hat{g}^n(t))^{(m)},$$

при этом справедливы оценки

$$\sum_{i=0}^n \hat{c}_i^n = \lim_{k_1 \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_{i,k_1}^n \leq d_0, \quad \hat{c}_i^n \geq 0, \quad (4.5)$$

$$(-1)^m (\hat{g}^n(t))^{(m)} = (-1)^m \sum_{i=0}^n \hat{c}_i^n \lambda_i^m e^{-\lambda_i t} = \lim_{k_1 \rightarrow \infty} (-1)^m \sum_{i=0}^n c_{i,k_1}^n \lambda_i^m e^{-\lambda_i t} \leq d_m. \quad (4.6)$$

Из соотношения (4.5), непрерывности целевого функционала и определения минимизирующей последовательности следует, что функция \hat{g}^n реализует минимум в задаче (4.1). Ввиду сильной выпуклости целевого функционала такая функция единственная.

Поскольку выполнены соотношения (4.5), (4.6), то, как и в теореме (3.1), найдутся подпоследовательности номеров n_m , для которых при $n_m \rightarrow \infty$ имеет место сходимость в $W_p^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\hat{g}^{n_m}(t) \rightarrow \bar{g}(t), \quad n_m \subseteq n_{m-1}. \quad (4.7)$$

Более того, предельная функция $\bar{g}(t)$ удовлетворяет ограничениям в задаче (3.2) для d_m , определенным в (4.5), (4.6). Имеем цепочку неравенств

$$\Phi^* = \Phi(g_{\nu,\delta}) \leq \Phi(\bar{g}) = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \Phi(\hat{g}^{n_1}) \leq \limsup_{n_1 \rightarrow \infty} \Phi(P_{n_1} g_{\nu,\delta}) = \Phi^*,$$

где $P_{n_1} g_{\nu,\delta} = \sum_{i=0}^{n_1} c_i^{\nu,\delta} e^{-\lambda_i t}$, и $g_{\nu,\delta}$ задана формулой (4.3). Это означает, что $\bar{g}(t)$ — решение задачи (3.2), а в силу единственности решения $\bar{g}(t) = g_{\nu,\delta}(t)$. Поскольку предельная функция в (4.7) единственная, то справедливы соотношения (4.4). \square

4.2. В методе Тихонова поставим в соответствие задаче

$$\min \{ \|A_{\nu}^{\varepsilon} g - \Delta p_{\delta}\|_{L_2}^2 + \alpha \Omega[g] : 0 < \kappa \leq g(t) \leq d_0, 0 \leq (-1)^m g^{(m)}(t) \leq d_m, m = 1, 2, \dots \}, \quad (4.8)$$

последовательность конечномерных задач

$$\min \left\{ \|A_{\nu}^{\varepsilon} g - \Delta p_{\delta}\|_{L_2}^2 + \alpha \Omega[g] : 0 < \kappa \leq g(t) = \sum_{i=0}^n c_i^n e^{-\lambda_i t}, c_i^n \geq 0, \sum_{i=0}^n c_i^n \leq d_0 \right\}. \quad (4.9)$$

Теорема 4.2. Пусть выполнены предположения теоремы (3.1), решение $g_{\alpha}(t)$ задачи (4.8) единственно и представимо в виде

$$g_{\alpha}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{\alpha} e^{-\lambda_i t}.$$

Тогда существует решение $\hat{g}^n(t)$ задачи (4.9) и имеет место сходимость

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{g}^n - g_{\alpha}\|_{W_p^{(m)}} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. С учетом аргументации при доказательстве теоремы (3.2) схема рассуждений с несущественными изменениями вполне аналогична реализованной в теореме (4.1). \square

5. Численные алгоритмы минимизации

А л г о р и т м 1. При численной реализации метода квазирешений оператор A задачи (1.1) (аналогично оператор A^{ε} задачи (4.2)) аппроксимируется матрицей, определяемой формулой

$$(A_{mn}c)_i = \int_0^{t_i} q_{\nu}^k(t_i - \tau) g^n(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^n c_j \int_0^{t_i} q_{\nu}^k(t_i - \tau) e^{-\lambda_j \tau} d\tau,$$

где $i = 1, 2, \dots, m$, $c = (c_0, c_1, \dots, c_n)$, $n = 100$, $q_{\nu}^k(t)$ — кусочно-линейная функция, которая строится на сетке $\{\tau_i\}_{i=1}^k$ со значениями $\{q_{\nu}(\tau_i)\}_{i=1}^k$. Параметры λ_i выбираются из условия $e^{-\lambda_i \bar{\tau}_i} = \gamma$, $i = 1, 2, \dots, k$, $\lambda_0 = 0$, $\gamma = 0.01$, где $\bar{\tau}_i$ — равномерная сетка в логарифмической шкале:

$$\ln \bar{\tau}_i = \ln \bar{\tau}_1 + \frac{i-1}{n-1} (\ln \bar{\tau}_n - \ln \bar{\tau}_1), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Теперь задача минимизации (4.1) сводится к задаче

$$\min \left\{ \|A_{mn}c - \Delta p^m\|_{R^m}^2 : c_i \geq 0, \sum_{i=0}^n c_i \leq d_0 \right\}. \quad (5.1)$$

Обозначим целевую функцию в (5.1) через $\Phi(c)$. Допустимая область в (5.1) представляет собой симплекс с $n + 1$ вершиной. Для нахождения вектора $c = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T$ привлекается метод условного градиента [14, гл. 5, §4]. На каждой итерации алгоритма выполняются следующие шаги:

1. В текущей точке c^k вычисляется градиент $\Delta\Phi(c^k)$.
2. Выбирается вершина симплекса v^k , для которой минимально скалярное произведение $\min_v \langle v - c^k, \Delta\Phi(c^k) \rangle$.
3. Выполняется шаг одномерной минимизации $t^k = \arg \min_{t \in [0,1]} \Phi((1-t)c^k + tv^k)$.
4. Для $c^{k+1} = (1-t^k)c^k + t^k v^k$ выполняется следующий шаг алгоритма.

Остановка итерационного алгоритма выполняется по принципу обобщенной невязки [15].

А л г о р и т м 2. Дискретная аппроксимация метода Тихонова (4.9) проводится аналогично методу квазирешений. В качестве численного алгоритма минимизации нелинейной функции $n + 1$ переменных используется метод активных ограничений [16, гл. 16, разд. 5] с итерационными шагами на основе регуляризованного метода Ньютона. Кратко опишем основные его этапы.

Перед первым шагом алгоритма множество активных ограничений задается пустым $S = \emptyset$. Также выбирается дополнительный параметр регуляризации $\beta > 0$ и параметр $\epsilon > 0$ для условия останова.

Рассмотрим k -й шаг итерации алгоритма.

1. Для текущей точки c^k вычисляются градиент f^k и гессиан H^k минимизируемой функции Ψ в задаче (4.9). Имеем следующее приближение для функции Ψ :

$$\Psi(c^k + \Delta c) \approx \Psi(c^k) + \Delta c^T f + \Delta c^T H^k \Delta c.$$

2. Для $i \in S$, т.е. для коэффициентов $c_i = 0$ с активными ограничениями, устанавливаем $\bar{f}_i^k = 0$, $\bar{H}_{ij}^k = 0$, $\bar{H}_{ji}^k = 0$. Для $i, j \notin S$ $\bar{f}_i^k = f_i^k$, $\bar{H}_{ij}^k = H_{ij}^k$.

3. Проверяем, является ли оператор $\bar{H}^k + \beta I$ положительно определенным. Если нет, то удваиваем β до тех пор, пока $\bar{H}^k + \beta I$ не станет положительно определенным.

4. Находим Δc^k из условия минимума квадратичного функционала $\Delta c^T \bar{f}^k + \Delta c^T (\bar{H}^k + \beta I) \Delta c$:

$$\Delta c^k = -(\bar{H}^k + \beta I)^{-1} \bar{f}^k.$$

5. Выполняем шаг одномерной минимизации с ограничениями

$$t^k = \arg \min_t \{ \Psi(c^k + t\Delta c^k) : c_i^k + t\Delta c_i^k \geq 0 \},$$

$$c^{k+1} = c^k + t^k \Delta c^k.$$

6. Если $t > 0$ и $\|f^k\| \leq \epsilon$, то удаляем одно из активных ограничений $S = S \setminus \{\bar{i}\}$, где $\bar{i} = \arg \min_{i \in S} \{f_i^k : f_i^k < 0\}$. Если для всех $i \in S$, $f_i^k \geq 0$, то алгоритм завершается и искомая

функция строится по найденным коэффициентам: $g(t) = \sum_{i=0}^n c_i^{k+1} e^{-\lambda_i t}$.

7. Если $t = 0$, тогда существует такой коэффициент c_i , что $c_i^k = 0$, $\Delta c_i^k < 0$. К множеству активных ограничений добавляем еще одно $S = S \cup \{\bar{i}\}$, где $\bar{i} = \arg \min_i \Delta c_i^k$.

8. Повторяем шаг итерации для c^{k+1} и, возможно, нового набора активных ограничений.

Если функция $q(t)$ известна с большой погрешностью $\|q - q_\nu\| \leq \nu$, тогда приходится выполнять коррекцию по $q(t)$ для вычисления $g(t)$ с приемлемой точностью. Как показали численные эксперименты, достаточно 10–20 шагов коррекции $q(t)$. Описание алгоритма коррекции, а также результаты численных экспериментов можно найти в [6; 8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Everdinger A.F. von, Hurst W.** The application of the Laplace transformation to flow problem in reservoir // Trans. AIME. 1949. Vol. 186. P. 305–324.
2. **Bourdet D., Ayoub J.A., Pirard Y.M.** Use of pressure derivative in well-test interpretation // SPE Formation Evaluation. 1989. SPE Paper 12777. P. 293–302.
3. **Pimonov E.A., Onur M., Kuchuk F.J.** A new robust algorithm for solution of pressure/rate deconvolution problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2009. Vol. 17, iss. 6. P. 611–627.
4. Determination of aquifer influence functions from field data / K.H. Coats, L.A. Rapport, J.R. McCord, W.P. Drews // Trans. AIME. 1964. Vol. 231. P. 1417–1424.
5. **Kuchuk F.J., Onur M., Hollander F.** Pressure transient formation and well testing: Convolution, deconvolution and nonlinear estimation. Amsterdam: Elsevier, 2010. 387 p.
6. New regular algorithms for solution of the convolution problem in well test interpretation / V. Vasin, G. Skorik, E. Pimonov, F. Kuchuk // Appl. Math. 2010. Vol. 1, no. 5. P. 387–399.
7. **Schroeter T. von, Hollander F., Gringarten A.** Deconvolution of well-test data analysis as a nonlinear total least squares problem // SPE J. 2004. Vol. 9, no. 4. P. 375–390.
8. **Vasin V.V., Skorik G.G.** Pressure/rate deconvolution problem and reconstruction of solution satisfying to all a priori constraints // Proc. 8th Intern. Conf. on Inverse Problems in Engineering / eds. I. Szczygiel, A.J. Novak, M. Rojchyk; Inst. Thermal Technology Silesian University of Technology. Gliwice; Krakow, 2014. P. 343–352.
9. **Müntz H.** Über den Approximationssatz von Weierstrass // H. A. Schwarz's Festschrift. Berlin, 1914. P. 303–312.
10. **Иванов В.К.** О некорректно поставленных задачах // Мат. сб. 1963. Т. 61, № 2. С. 211–223.
11. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Theory of linear Ill-posed problems and its applications. Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: USP, 2002. 281 p.
12. **Тихонов А.Н.** О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
13. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. 2-е изд. М.: Наука, 1979. 285 с.
14. **Васильев Ф.П.** Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980. 520 с.
15. **Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.** Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука; Физматлит, 1995. 307 с.
16. **Nocedal J. and Wright S.J.** Numerical optimization. 2nd ed. Berlin; New York: Springer-Verlag, 2006. 664 p.

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Поступила 15.01.2016

Скорик Георгий Григорьевич
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: skorik@imm.uran.ru

УДК 514.17; 532.5

**ОДИН КЛАСС РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В ТОРЕ
С СОЛЕНОИДАЛЬНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ. III¹****В. П. Верецагин¹, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных**

В работе продолжается исследование задачи об условиях существования соленоидальных решений уравнения Эйлера в торе D относительно пары (\mathbf{V}, p) векторного и скалярного полей, у которых линии векторного поля \mathbf{V} имели бы простейшую структуру, совпадая с параллелями или меридианами тороидальных поверхностей, концентрически вложенных в тор D . Здесь в отличие от предыдущих двух работ мы правую часть уравнения Эйлера — векторное поле \mathbf{f} в D не задаем специальным образом, а считаем произвольно заданным.

Ключевые слова: скалярное и векторное поля, уравнение Эйлера, дивергенция, ротор.

V. P. Vereshchagin, Yu. N. Subbotin, N. I. Chernykh. A solution class of the Euler equation in a torus with solenoidal velocity field. III.

We continue the study of the problem on the existence conditions for solenoidal solutions of the Euler equation in a torus D with respect to a pair (\mathbf{V}, p) of vector and scalar fields such that the lines of the vector field \mathbf{V} have a simple structure, coinciding with parallels and meridians of toroidal surfaces that are concentrically embedded in D . Here, in contrast to the previous two papers, the right-hand side of the Euler equation, i.e., the vector field \mathbf{f} in D , is not given in a special form but is considered to be arbitrary.

Keywords: scalar and vector fields, Euler equation, divergence, curl.

MSC: 35Q30, 35Q31, 76D07, 76N10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-91-100

Введение

Работы [2–5] были посвящены развитию восходящего к И. С. Громеке [1] метода геометрического преобразования векторных полей в пространстве \mathbb{R}^3 или в его части и его приложениям к некоторым уравнениям матфизики. Метод позволяет из простых полей, например, тождественно постоянных, строить поля сложной, наперед заданной структуры. С его помощью были построены и исследованы полные классы специальных решений уравнений Эйлера, Стокса и Навье — Стокса во всем \mathbb{R}^3 , в цилиндре и цилиндрическом слое, обладающих определенными геометрическими свойствами, когда ротор поля скоростей всюду параллелен или ортогонален вектору скорости. В работе [3] удалось для областей довольно общего вида найти нетривиальную постановку начальных и краевых задач для уравнения Навье — Стокса, решения которых гарантированно были бы из соответствующего класса векторных полей. В случае цилиндрического слоя такая краевая задача решена полностью с использованием гармонических всплесков. В настоящей работе завершаются исследования, начатые в работах [6; 7] о соленоидальных векторных полях в торе, подчиненных уравнению Эйлера, и при простейших дополнительных геометрических условиях на них. В дальнейшем планируется применить к ним метод геометрических преобразований для построения решений уравнений Навье — Стокса в торе или в тороидальном слое.

По настоянию первого из соавторов отметим сразу, что рассматриваемые здесь, как и в [6; 7], задачи являются чисто математическими задачами поиска некоторых специальных

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

решений известных уравнений механики, поскольку нам неясно, можно ли физически реализовать даже краевые условия из [3]. Но для образности нам удобно применять термины механики: сплошная среда, ее плотность ρ , давление — скалярное поле $p = p(\mathbf{X}, t)$, скорость — векторное поле $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$, внешние силы — векторное поле $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$, t — время. Здесь и далее \mathbf{X} — одновременно и точка в \mathbb{R}^3 и ее радиус-вектор относительно начала декартовой системы координат.

1. Случай меридиальных линий поля скоростей

Кратко напомним криволинейную систему координат из работы [6], удобную для представления точек и полей, скалярных и векторных, в любом торе D_{r_c} с заданным радиусом r_c его осевой окружности L_c . Сначала выбираем декартову систему координат $(Ox_1x_2x_3)$ в \mathbb{R}^3 с началом O в центре симметрии тора и осью Ox_3 , совпадающей с его осью симметрии. Соответствующие осям Ox_1, Ox_2, Ox_3 базисные орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют фиксированную ортогональную правую тройку. Криволинейные координаты (r, ϑ, φ) каждой точки $M = \mathbf{X} \in D_{r_c}$ и ее радиус-вектора $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{OM}$ с декартовыми координатами (x_1, x_2, x_3) определяем следующим образом: считаем, что полуплоскость Π_φ , проходящая через ось Ox_3 и точку \mathbf{X} , образует угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ с осью Ox_1 , $\mathbf{X}_c(\varphi)$ — точка пересечения Π_φ с осевой окружностью L_c тора D_{r_c} , а радиус-вектор $\mathbf{X} - \mathbf{X}_c(\varphi)$ точки \mathbf{X} относительно $\mathbf{X}_c(\varphi)$ имеет длину $r \in [0, r_c)$ и образует угол $\vartheta \in [0, 2\pi)$ с ортом \mathbf{e}_3 . Угол отсчитываем против часовой стрелки, если смотреть со стороны вектора $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(\mathbf{X})$, перпендикулярного Π_φ и направленного в сторону возрастания угла φ . Точки $\mathbf{X}(x_1, x_2, x_3)$ будем обозначать в криволинейных координатах так же через $\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)$, отличая их от декартовых только символьным изображением (непонятных точек вида $\mathbf{X}(1, 2, 3)$ в работе не будет). Орты криволинейной системы координат определяются так: $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) = \mathbf{e}_r(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)) = (\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) - \mathbf{X}_c(\varphi))/r$, введенный выше орт \mathbf{e}_φ по аналогии с \mathbf{e}_r будем обозначать также через $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, и, наконец, $\mathbf{e}_\vartheta = \mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{X}) = \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$ — орт, который вместе с \mathbf{e}_r и \mathbf{e}_φ образует правую ортогональную тройку $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$. Отметим, что нижние индексы у этих базисных векторов не означают величины соответствующих расстояний и углов и связаны только с их геометрической интерпретацией, а значения углов ϑ и φ отражены в их аргументах. Таким образом, запись $\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)$ означает точку (и радиус-вектор) $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c(\varphi) + r\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)$, где $\mathbf{X}_c(\varphi) = (\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi)r_c$, а запись $\mathbf{a}(r, \vartheta, \varphi)$ означает, что вектор \mathbf{a} является элементом векторного поля $\mathbf{a}(\mathbf{X})$ ($\mathbf{X} \in D_{r_c}$) и имеет вид $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi)) = a_r\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) + a_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) + a_\varphi\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, где $a_r = a_r(r, \vartheta, \varphi) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_r)$, $a_\vartheta = a_\vartheta(r, \vartheta, \varphi) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\vartheta)$, $a_\varphi = a_\varphi(r, \vartheta, \varphi) = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_\varphi)$ (аргументы ϑ, φ векторов $\mathbf{e}_r(\mathbf{X})$, $\mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{X})$ и $\mathbf{e}_\varphi(\mathbf{X})$ мы часто, как здесь, будем опускать).

Так как в точках осевой окружности L_c , т. е. при $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c(\varphi)$, угол $\vartheta(\mathbf{X})$ не определен, а значит, не определены и орты $\mathbf{e}_r(\mathbf{X})$, $\mathbf{e}_\vartheta(\mathbf{X})$, то, говоря о непрерывности (гладкости) в торе D векторных и скалярных полей, имеем в виду, что непрерывные (непрерывно дифференцируемые) поля в $D \setminus L_c$ при $\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) \rightarrow \mathbf{X}_c(\varphi)$ имеют конечные, не зависящие от (r, ϑ) пределы (и пределы своих первых частных производных), непрерывные по $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Более детальное описание этих криволинейных координат дано в [6]. В частности, там показано, что дифференциальный оператор Гамильтона $\nabla = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \partial / \partial x_i$ в этих координатах имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi(\varphi) \mathfrak{a}^{-1}(r, \vartheta) \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где, как и всюду далее, $\mathfrak{a} = r_c + r \sin \vartheta > 0$ ($0 < r < r_0$).

В этом разделе будет обсуждаться вопрос о совместности следующей смешанной системы функционально-дифференциальных уравнений относительно векторного $\mathbf{V} = \mathbf{V}(r, \vartheta, \varphi, t)$ и скалярного $\sigma = \sigma(r, \vartheta, \varphi, t)$ полей, гладких по всем переменным, и непрерывного по t , гладкого по пространственным переменным скалярного поля $p = p(r, \vartheta, \varphi, t)$:

$$\left\{ \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \sigma(r, \vartheta, \varphi, t) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi); (\nabla, \mathbf{V}) = 0; \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) \right\} \quad (1.1)$$

при $\mathbf{X} = \mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) \in D_{r_c, r_0}$ и $t \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, где D_{r_c, r_0} есть тор D_{r_c} с радиусом $r_0 < r_c$ его меридиальных сечений, т. е.

$$D_{r_c, r_0} = \{\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) = \mathbf{X}_c(\varphi) + r\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) : 0 \leq r < r_0, 0 \leq \vartheta, \varphi < 2\pi\}.$$

Первое уравнение этой системы требует, чтобы в любое время t в любой точке $\mathbf{X} = \mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) \in D_{r_c, r_0}$ вектор скорости $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ был касательным к окружности $C_{r, \varphi} = \{\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi) : \vartheta \in [0, 2\pi)\}$; это равносильно тому, что каждая такая окружность $C_{r, \varphi}$ ($r \in (0, r_0)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$) должна быть линией векторного поля \mathbf{V} в D_{r_c, r_0} . Второе уравнение системы (1.1) означает, что векторное поле V соленоидальное, т. е. $\operatorname{div} V(r, \vartheta, \varphi, t) \equiv 0$ в D_{r_c, r_0} . А третье уравнение системы (1.1) есть уравнение Эйлера, которое в механике трактуется как уравнение для плотности p и скорости \mathbf{V} движения идеальной (несжимаемой и невязкой) сплошной среды в Эйлеровой системе отсчета внутри тора D_{r_c, r_0} .

В работе [6] показано, что система (1.1) в торе $D = D_{r_c, r_0}$ совместна, только если функция σ зависит от своих аргументов специальным образом, как

$$\sigma(r, \vartheta, \varphi, t) = \frac{1}{\mathfrak{x}(r, \vartheta)} \Sigma(r, \varphi, t) \quad (1.2)$$

с гладкой в D по всем переменным r, φ, t функцией $\Sigma(r, \varphi, t) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$, а вектор-функция $\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t)$ определена формулой

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t) = & -\nabla\Phi - \frac{1}{r\mathfrak{x}^2(r, \vartheta)} \Sigma^2(r, \varphi, t) \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \\ & + \left(\frac{1}{\mathfrak{x}(r, \vartheta)} \frac{\partial \Sigma(r, \varphi, t)}{\partial t} - \frac{\cos \vartheta}{\mathfrak{x}^3(r, \vartheta)} \Sigma^2(r, \varphi, t) \right) \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

через $\Sigma(r, \varphi, t)$ и какую-либо гладкую в D функцию $\Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$, у которой предел $\lim_{r \rightarrow 0} \times (1/r)(\partial/\partial\vartheta)\Phi$ конечен и не зависит от ϑ . При этом будет $p(\mathbf{X}, t) = -\rho\Phi(\mathbf{X}, t)$.

Из-за большого произвола в выборе функций Σ и Φ кажется, что таких функций \mathbf{f} много, однако дальнейший анализ показывает, что правило (1.3) накладывает довольно жесткие ограничения на \mathbf{f} .

Итак, далее считаем, что в системе уравнений (1.1) \mathbf{f} — произвольно заданное в $D^4 = D_{r_c, r_0} \times \mathbb{R}_+$ непрерывное векторное поле, и постараемся найти явные ограничения на \mathbf{f} , гарантирующие существование решения системы. В силу изложенного результата работы [6] для этого достаточно считать (1.3) функционально-дифференциальным уравнением (нелинейным) относительно Σ и Φ при заданном \mathbf{f} и, определив условия его совместности, найти решение (Σ, Φ) .

Перепишем (1.3) в скалярной форме, разрешив относительно производных от $\nabla\Phi$. Получим систему

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\frac{1}{r\mathfrak{x}^2} \Sigma^2 - f_r; \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -\frac{r \cos \vartheta}{\mathfrak{x}^3} \Sigma^2 + \frac{r}{\mathfrak{x}} \frac{\partial \Sigma}{\partial t} - r f_\vartheta; \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\mathfrak{x} f_\varphi \right\}, \quad (1.4)$$

где $f_r, f_\vartheta, f_\varphi$ — ортогональные проекции в \mathbb{R}^3 вектора $\mathbf{f}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi), t)$ на орты $\mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)$, $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$ и $\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$. Это изначально непрерывные в D^4 функции.

Отметим, что совместность системы (1.4), высказанные выше ограничения на функции Σ и Φ сразу накладывают некоторые ограничения на компоненты \mathbf{f} . Так, они вместе с непрерывностью функций \mathbf{f} , Σ и $\partial \Sigma / \partial t$ в D_{r_c, r_0} и вторым уравнением системы (1.4) позволяют легко получить равенство $\lim_{r \rightarrow 0} (1/r)(\partial/\partial\vartheta)\Phi(r, \vartheta, \varphi, t) = f_\vartheta(0, \vartheta, \varphi, t) = f_\vartheta(0, 0, \varphi, t)$, вычислить

предел $\lim_{r \rightarrow 0} 1/2\pi \int_0^{2\pi} (1/r)(\partial\Phi/\partial\vartheta) d\vartheta$ непосредственно через правую часть того же уравнения

и получить равенство $0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} f_\vartheta(0, \vartheta, \varphi, t) d\vartheta = f_\vartheta(0, 0, t)$. Отсюда и из третьего уравнения системы (1.4) следует, что для совместности системы (1.1) необходимо, чтобы на осевой окружности L_c тора были справедливы тождества

$$f_\vartheta(0, \vartheta, \varphi, t) \left(:= \lim_{r \rightarrow 0} f_\vartheta(r, \vartheta, \varphi, t) \right) \equiv 0, \quad \int_0^{2\pi} f_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t) d\varphi \equiv 0. \quad (1.5)$$

Несколько упростим систему (1.4), заменив в первых двух ее уравнениях функцию $\Phi(r, \vartheta, \varphi, t)$ четырех переменных на функцию $\tilde{\Phi}(r, \vartheta, t) = \Phi(r, \vartheta, 0, t)$ трех переменных. В силу третьего уравнения системы (1.4) имеем

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi, t) = \tilde{\Phi}(r, \vartheta, t) - \varkappa(r, \vartheta) \int_0^\varphi f_\varphi(r, \vartheta, \tilde{\varphi}, t) d\tilde{\varphi} = \tilde{\Phi} - \varkappa F_\varphi, \quad (1.6)$$

где для краткости через $F_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t)$ обозначена 2π -периодическая первообразная по переменной φ функции f_φ , подчиненная условию (см. (1.5)) $F_\varphi(r, \vartheta, 0, t) \equiv F_\varphi(r, \vartheta, 2\pi, t) \equiv 0$ в $D^4 = D_{r_c, r_0} \times \mathbb{R}_+$. Учитывая еще, что Σ не зависит от ϑ , что $(r \cos \vartheta)/\varkappa^3 = -1/2 \cdot \partial/\partial \vartheta \cdot (1/\varkappa^2)$, и интегрируя второе уравнение по ϑ на периоде, получаем еще соотношение

$$f_\vartheta^0(r, \varphi, t) =: \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\vartheta(r, \vartheta, \varphi, t) d\vartheta = \frac{\partial \Sigma(r, \varphi, t)}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varkappa^{-1}(r, \vartheta)) d\vartheta = \frac{\partial \Sigma}{\partial t} (\varkappa^{-1})^0,$$

откуда имеем

$$\frac{\partial \Sigma(r, \varphi, t)}{\partial t} = \frac{1}{(\varkappa^{-1})^0} f_\vartheta^0. \quad (1.7)$$

Здесь, как и далее в этом разд. 1, символом типа \mathcal{W}^0 обозначено среднее значение на периоде 2π -периодической по переменной ϑ функции \mathcal{W} . Подстановка (1.6) и (1.7) в первое и второе уравнения системы (1.4) заменяет ее на более простую систему

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial r} = \frac{\partial(\varkappa F_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r\varkappa^2} \Sigma^2 - f_r; \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \vartheta} = \frac{\partial(\varkappa F_\varphi)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2} \frac{\partial(\varkappa^{-2})}{\partial \vartheta} \Sigma^2 + \frac{r f_\vartheta^0}{\varkappa(\varkappa^{-1})^0} - r f_\vartheta \right\}, \quad (1.8)$$

в результате чего вопрос о совместности системы (1.1) сводится к совместности этой линейной по Σ^2 и $\tilde{\Phi}$ системы двух уравнений при любом значении параметра $\varphi \in [0, 2\pi)$ и к требованию, чтобы функция $\tilde{\Phi}$ из (1.6) и (1.8) удовлетворяла и третьему уравнению в (1.4). При этом функции f_φ и f_ϑ должны подчиняться условию (1.5), а Σ — еще и условию (1.7).

Для упрощения формулировок и без того громоздких формул будем далее предполагать, что функции в правых частях уравнений (1.8) непрерывно дифференцируемые (т. е. гладкие) по всем переменным в D^4 . Тогда условие разрешимости системы (1.8) в классе гладких функций $\tilde{\Phi}(r, \vartheta, t)$ сводится, как хорошо известно (см., например, [8, с. 99]), к требованию независимости от порядка дифференцирования смешанных вторых частных производных по r и ϑ будущего решения $\tilde{\Phi}(r, \vartheta, t)$. Это ограничение, как легко проверить, вырождается в условие

$$\frac{r \cos \vartheta}{\varkappa^3(r, \vartheta)} \frac{\partial \Sigma^2(r, \varphi, t)}{\partial r} + \frac{3r_c \cos \vartheta}{\varkappa^4} \Sigma^2(r, \varphi, t) = \frac{\partial f_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(f_\vartheta - \frac{f_\vartheta^0}{\varkappa(\varkappa^{-1})^0} \right) \right). \quad (1.9)$$

Таким образом, совместность системы уравнений (1.8) (при априорных условиях гладкости \mathbf{f} и условиях (1.5)) сведено к вопросу о существовании гладкого, не зависящего от ϑ решения $\Sigma(r, \varphi, t)$ уравнения (1.9), удовлетворяющего (1.7) и ограничению $\Sigma(r, \varphi, t) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$.

Обозначим правую часть (1.9) через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f})$. В этих обозначениях общее решение этого дифференциального уравнения при всех допустимых значениях параметров ϑ, φ, t имеет, как легко проверить, вид

$$\Sigma_{\text{общ}}^2(r, \varphi, t) = \frac{(r_c + r \sin \vartheta)^3}{r^3 \cos \vartheta} \left(c(\vartheta, \varphi, t) + \int_0^r \tilde{r}^2 \mathcal{F}(\tilde{r}, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f}) d\tilde{r} \right).$$

Отсюда видно, что удовлетворить условию $\Sigma^2(r, \varphi, t) = o(r^2)$ ($r \rightarrow 0$) можно только за счет условия $c(\vartheta, \varphi, t) \equiv 0$ и ограничения

$$\mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f}) = o(r^2) \quad (r \rightarrow 0) \quad (1.10)$$

на компоненты f_ϑ и f_r вектор-функции \mathbf{f} , вытекающего из следующих соотношений эквивалентности при $r \rightarrow 0$:

$$\Sigma^2(r, \varphi, t) \sim \frac{r_c^3}{r^3} \int_0^r \frac{\tilde{r}^3 \mathcal{F}(\tilde{r}, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f})}{r_c^3} d\tilde{r} \sim \frac{r^3 \mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f})}{3r^2} = \frac{1}{3} r \mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t).$$

Кроме ограничений (1.10) из обоснованной выше формулы

$$\Sigma^2(r, \varphi, t) = \frac{(r_c + r \sin \vartheta)^3}{r^3 \cos \vartheta} \int_0^r \tilde{r}^2 \mathcal{F}(\tilde{r}, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f}) d\tilde{r} \quad (1.11)$$

вытекают требование независимости правой части (1.11) от ϑ и наряду с этим еще одно ограничение на \mathbf{f} ,

$$\int_0^r \tilde{r}^2 \mathcal{F}(\tilde{r}, 0, \varphi, t; \mathbf{f}) d\tilde{r} \geq 0 \quad (1.12)$$

и формула

$$\Sigma(r, \varphi, t) = \left(\frac{r_c^3}{r^3} \int_0^r \tilde{r}^2 \mathcal{F}(\tilde{r}, 0, \varphi, t; \mathbf{f}) d\tilde{r} \right)^{1/2}. \quad (1.13)$$

Вместе с условием независимости правой части (1.11) от ϑ условие (1.12) гарантирует и неотрицательность всей правой части (1.11). Выписанные ограничения на поле $\mathbf{f}(\mathbf{X})$ и систему (1.8) позволяют разрешить ее в явном виде. Подставив в нее Σ^2 (1.11), видим, что система станет удовлетворять условию совместности (1.9). Так что, применяя обычную процедуру и учитывая независимость $\tilde{\Phi}$ от φ и (1.11) от ϑ , можем представить $\tilde{\Phi}$, например, в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= C(\varphi, t) + \mathfrak{a}(r, \vartheta) F_\varphi(r, \vartheta, \varphi, t) - \int_0^r \frac{\mathfrak{a}(\tilde{r}, \vartheta)}{\tilde{r}^4 \cos \vartheta} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{\tilde{r}}^2 \mathcal{F}(\tilde{\tilde{r}}, \vartheta, \varphi, t) d\tilde{\tilde{r}} d\tilde{r} - \int_0^r f_r(\tilde{r}, \vartheta, \varphi, t) d\tilde{r} \\ &= C(t) + \mathfrak{a}(r, \vartheta) F_\varphi(r, \vartheta, 0, t) - \int_0^r \frac{r_c^3}{\tilde{r}^4 \mathfrak{a}^2(\tilde{r}, \vartheta)} \int_0^{\tilde{r}} \tilde{\tilde{r}}^2 \mathcal{F}(\tilde{\tilde{r}}, 0, 0, t) d\tilde{\tilde{r}} d\tilde{r} - \int_0^r f_r(\tilde{r}, \vartheta, 0, t) d\tilde{r}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

откуда легко проконтролировать, что функция $\Phi = \tilde{\Phi} - \mathfrak{a} F_\varphi$ (1.6) удовлетворяет системе (1.4). А второе равенство в (1.14) представляет собой последнее ограничение на \mathbf{f} для совместности системы (1.1), так что совокупность всех ограничений на \mathbf{f} определяет не только необходимые, но и достаточные условия совместности системы (1.1).

Итак, доказана

Теорема. Функционально-дифференциальная система (1.1) относительно неизвестных функций $\mathbf{V} = \sigma(r, \vartheta, \varphi, t)\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi)$ и $p = p(r, \vartheta, \varphi, t)$ в торе D_{r_c, r_0} и $t \in [0, \infty)$ при заданном гладком по пространственным переменным и непрерывном по t векторном поле $\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t)$ совместна тогда и только тогда, когда поле $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ удовлетворяет при каждом $t \in \mathbb{R}_+$ следующим условиям:

- а) компоненты $f_\vartheta = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\vartheta)$ и $f_\varphi = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\varphi)$ поля \mathbf{f} должны подчиняться условиям (1.5);
- б) функция $\mathcal{F}(r, \vartheta, \varphi, t) = (f_r)'_\vartheta - (r(f_\vartheta - f_\vartheta^0/(\mathfrak{a}(\mathfrak{a}^{-1})^0)))'_r$ должна удовлетворять условиям (1.10) и (1.12);
- в) вектор-функция \mathbf{f} должна быть такой, чтобы функция в правой части (1.11) не зависела от ϑ ;
- г) функция (1.13) должна обладать гладкой в $D^4 = D_{r_c, r_0} \times \mathbb{R}_+$ ветвью, удовлетворяющей соотношению (1.7);
- д) для функции $\mathbf{f}(r, \vartheta, \varphi, t)$ должно выполняться второе равенство в (1.14).

В итоге в силу теоремы, сформулированной в конце работы [1], в случае любого гладкого в D^4 поля $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$, используя формулы (1.13), (1.14) и (1.6), можно выписать решения системы (1.1) в виде

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi, t); \mathbf{f}) = \frac{\Sigma(r, \varphi, t; \mathbf{f})}{\mathfrak{a}(r, \vartheta)} \mathbf{e}_\vartheta(\vartheta, \varphi),$$

$$p(\mathbf{X}(r, \vartheta, \varphi, t); \mathbf{f}) = -\rho\Phi(r, \vartheta, \varphi, t; \mathbf{f}) + \mathcal{P}(t),$$

где $\mathcal{P}(t)$ — произвольная непрерывная на $[0, \infty)$ функция.

Отметим, что в отличие от [1] здесь в представление функции $p(\mathbf{X}, t)$ через $\Phi(\mathbf{X}, \mathbf{f})$ вошла и функция $\Sigma(r, \varphi, t; \mathbf{f})$, которая теперь, в силу однозначности правой части (1.7), вполне определилась вектор-функцией \mathbf{f} , удовлетворяющей указанным в теореме ограничениям.

2. Случай, когда линии поля скоростей — параллели концентрических торов

Продолжим изучение задачи, рассмотренной в [7], когда линии векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ есть окружности с центрами на оси Ox_3 симметрии тора, лежащие в его сечениях плоскостями, перпендикулярными Ox_3 . Кратко опишем другую, используемую в [7], криволинейную систему координат относительно той же, что в разд. 1, декартовой системы $Ox_1x_2x_3$ и правой тройки ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Повернув в экваториальной плоскости тора векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ на угол φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$) в положительном направлении, получим при каждом φ правую тройку ортов $\mathbf{e}_R(\varphi), \mathbf{e}_\varphi(\varphi), \mathbf{e}_3$. Будем писать $\mathbf{X} = \mathbf{X}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{X}(R, \varphi, x_3)$, где (x_1, x_2, x_3) — декартовы координаты, а (R, φ, x_3) — криволинейные параметры точки и радиус-вектора \mathbf{X} , определяемые по правилу $\mathbf{X} = \mathbf{X}_c(\varphi) + R\mathbf{e}_R(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3$ ($R > -r_c$), где r_c — радиус осевой окружности L_c тора D , $\mathbf{X}_c(\varphi) = O_c(\varphi) = r_c\mathbf{e}_R(\varphi) \in L_c$. Следовательно, $\mathbf{X}(R, \varphi, x_3) = (r_c + R)\mathbf{e}_R(\varphi) + x_3\mathbf{e}_3, O_c(\varphi)(r_c, \varphi, 0)$. Введя в координатной поверхности $\varphi \equiv \text{const}$ (в полуплоскости Π_φ) локальную декартову систему координат $O_c(\varphi), R, x_3$ с базисом $\{\mathbf{e}_R(\varphi), \mathbf{e}_3\}$, получаем, что $\mathbf{X}(R, \varphi, x_3) \in \Pi_\varphi$ и в этой системе имеет координаты (R, x_3) . В этих координатах тор $D = D_{r_c, r_0}$ можно определить как $D = \{\mathbf{X}(R, \varphi, x_3) : R^2 + x_3^2 < r_0^2, \varphi \in [0, 2\pi)\}$, и задача состоит в том, чтобы определить, при каких условиях на заданную в $D^4 = D_{r_c, r_0} \times (0, \infty)$ вектор-функцию $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ совместна система двух дифференциальных и одного геометрического уравнения

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{\rho}\nabla p(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{X}, t); \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \sigma(\mathbf{X}, t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi), (\nabla, \mathbf{V}) = 0 \right\}, \quad (2.1)$$

и в случае совместности найти решение — пару $(\mathbf{V}(\mathbf{X}, t), p(\mathbf{X}, t))$.

В [7] показано, что система (2.1) совместна тогда и только тогда, когда $\sigma = \sigma(R, x_3, t)$ — гладкое по t , непрерывное по R и x_3 , не зависящее от φ скалярное поле, а поле $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$ задано

в виде $\mathbf{f} = (\partial\sigma/\partial t)\mathbf{e}_\varphi - (\sigma^2/(r_c + R))\mathbf{e}_R + \nabla\Phi$, где $\Phi(R, \varphi, x_3, t)$ — непрерывное по t , гладкое по R, φ, x_3 в D^4 скалярное поле. При этом пара $(\mathbf{V} = \sigma(R, x_3, t)\mathbf{e}_\varphi(\varphi), p = \rho\Phi)$ будет решением системы (2.1). Здесь и в разд. 1 (σ, Φ) — символы разных пар функций.

Таким образом, в случае, когда поле \mathbf{f} в D^4 как-то задано, вопрос о разрешимости системы (2.1) сводится к существованию соответствующих скалярных полей $\sigma(R, x_3, t)$ и $\Phi(R, \varphi, x_3, t)$, т. е. к разрешимости относительно Φ и σ системы уравнений

$$\left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{\sigma^2}{r_c + R} + f_R; \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} = f_3; \quad \frac{1}{r_c + R} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t} + f_\varphi \right\}, \quad (2.2)$$

где $f_R = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_R(\varphi))$, $f_\varphi = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_\varphi(\varphi))$ и $f_3 = (\mathbf{f}, \mathbf{e}_3)$. Это нелинейная система трех дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных функций, все функции $\Phi, f_R, f_3, f_\varphi$ зависят от R, φ, x_3, t и 2π -периодические по φ .

В этом разд. 2 для любой функции $g(R, \varphi, x_3, t)$ будем обозначать через $g^0 = g^0(R, x_3, t)$ ее среднее значение по φ , $g^0 = 1/2\pi \int_0^{2\pi} g(R, \varphi, x_3, t) d\varphi$, а разность $g - g^0$ — через $g^\perp = g^\perp(R, \varphi, x_3, t)$. Переходя в системе уравнений (2.2) к средним значениям по φ на $[0, 2\pi]$ всех входящих в нее функций, получим новую систему уравнений

$$\left\{ \frac{\partial\Phi^0}{\partial R} = \frac{\sigma^2}{r_c + R} + f_R^0; \quad \frac{\partial\Phi^0}{\partial x_3} = f_3^0; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t} = f_\varphi^0 \right\}, \quad (2.3)$$

откуда и из (2.2) получаем еще одну систему

$$\left\{ \frac{\partial\Phi^\perp}{\partial R} = f_R^\perp; \quad \frac{\partial\Phi^\perp}{\partial x_3} = f_3^\perp; \quad \frac{\partial\Phi^\perp}{\partial\varphi} = (r_c + R)f_\varphi^\perp \right\}. \quad (2.4)$$

Вместе системы уравнений (2.3), (2.4) эквивалентны системе (2.2), но каждая из них проще исходной. Особенно система (2.4) — она линейная. Ее и разрешим вначале.

Для упрощения формулировок будем далее предполагать, что все компоненты вектор-функции $\mathbf{f}^\perp(R, \varphi, x_3, t)$ — гладкие функции. Тогда критерий совместности этих трех уравнений состоит в справедливости следующих соотношений (см. [8, с. 99]):

$$\left\{ \frac{\partial f_R^\perp}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3^\perp}{\partial R}; \quad \frac{\partial f_R^\perp}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial R}((r_c + R)f_\varphi^\perp); \quad \frac{\partial f_3^\perp}{\partial\varphi} = (r_c + R) \frac{\partial f_\varphi^\perp}{\partial x_3} \right\} \quad (x \in D, t \in R_+). \quad (2.5)$$

При выполнении этих условий решение $\Phi^\perp(R, \varphi, x_3; t)$ системы (2.4) можно представить, например, в виде

$$\Phi^\perp(R, \varphi, x_3; t) = C(t) + \int_0^R f_R^\perp(\tilde{R}, 0, 0; t) d\tilde{R} + \int_0^{x_3} f_3^\perp(R, 0, \tilde{x}_3; t) d\tilde{x}_3 + (r_c + R) \int_0^\varphi f_\varphi^\perp(R, \tilde{\varphi}, x_3; t) d\tilde{\varphi}. \quad (2.6)$$

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 1. Система уравнений (2.4) при априорном условии гладкости по R, φ, x_3 вектор-функции $\mathbf{f}^\perp(R, \varphi, x_3; t)$ совместна тогда и только тогда, когда компоненты функции \mathbf{f}^\perp удовлетворяют в области $D^4 = D \times \mathbb{R}_+$ соотношениям (2.5). При этом общее решение этой системы можно представить формулой (2.6), где $C(t)$ — произвольная непрерывная функция.

Обозначим через F_φ^0 функцию $1/2\pi \int_0^{2\pi} \int_0^t f_\varphi(R, \tilde{\varphi}, x_3, \tau) d\tau d\tilde{\varphi} = \int_0^t f_\varphi^0(R, x_3, \tau) d\tau$, а через G — функцию $G(R, x_3, t) = (\partial f_3^0(R, x_3, t)/\partial R - \partial f_R^0(R, x_3, t)/\partial x_3)(r_c + R)$.

Условие, накладываемое на \mathbf{f}^0 совместностью уравнений (2.3) заключается в том, что должно существовать гладкая функция $\sigma(R, x_3)$ такая, что в $D_0^3 = \{R, x_3, t : R^2 + x_3^2 < r_0^2, t \geq 0\}$

$$\left\{ \sigma(R, x_3, t) = \sigma(R, x_3) + F_\varphi^0; \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma(R, x_3) + F_\varphi^0)^2 = G(R, x_3, t) \right\}. \quad (2.7)$$

Фактически это условие гарантирует представление функции Φ^0 , например, в виде

$$\Phi^0(R, x_3, t) = \Phi^0(0, 0, t) + \int_0^R \frac{1}{r_c + \tilde{R}} \left(\sigma(\tilde{R}, 0) + F_\varphi^0 \Big|_{x_3=0} \right)^2 d\tilde{R} + \int_0^R f_R^0 \Big|_{x_3=0} d\tilde{R} + \int_0^{x_3} f_3^0 d\tilde{x}_3. \quad (2.8)$$

Условие (2.7) — жесткое ограничение на \mathbf{f}^0 , поскольку должно выполняться при всех $t \in \mathbb{R}_+$, а $\sigma(R, x_3)$ не зависит от t . Пусть для $\sigma(R, x_3, t)$ выполняется (2.7). Тогда $\sigma(R, x_3)$ должна удовлетворять продифференцированному по t равенству, которое преобразуется к виду

$$2 \frac{\partial(\sigma(R, x_3) f_\varphi^0(R, x_3, t))}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ G(R, x_3, t) - \frac{\partial}{\partial x_3} (F_\varphi^0(R, x_3, t))^2 \right\}, \quad (2.9)$$

или, как легко видеть, к следующему условию на функцию $\sigma(R, x_3) f_\varphi^0(R, x_3, t)$:

$$\int_0^{x_3} 2 \frac{\partial(\sigma(R, \tilde{x}_3) f_\varphi^0(R, \tilde{x}_3, t))}{\partial \tilde{x}_3} d\tilde{x}_3 = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^{x_3} G(R, \tilde{x}_3, t) d\tilde{x}_3 - \int_0^{x_3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} (F_\varphi^0(R, \tilde{x}_3, t))^2 d\tilde{x}_3 \right\}. \quad (2.10)$$

Из условий (2.7), (2.9), (2.10), в частности, вытекает при $f_\varphi^0 \equiv 0$ формула

$$\sigma^2(R, x_3, t) \equiv \sigma^2(R, x_3) = \sigma^2(R) + \int_0^{x_3} G(R, \tilde{x}_3, t) d\tilde{x}_3 \quad (2.11)$$

и следующее

Утверждение 2. Система уравнений (2.1) описывает движение сплошной среды со стационарной скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{V}(R, \varphi, x_3)$ в торе D_{r_c, r_0} только тогда, когда компоненты поля сил \mathbf{f} удовлетворяют утверждению 1 и таковы, что $f_\varphi^0 \equiv 0$ в D_0^3 , а функция $G(R, x_3, t) = (r_c + R)((f_3^0)'_R - (f_R^0)'_{x_3})$ не зависит от t (совпадая с $G(R, x_3, 0)$) и при $|x_3| < \sqrt{r_0^2 - R^2}$ отделена от $(-\infty)$. При этом $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \sigma(R, x_3) \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$, где $\sigma(R)$ в (2.11) — непрерывная на интервале $(-r_0, r_0)$ функция со значениями $\sigma^2(R) \geq \sup\{-G(R, x_3, 0) : |x_3| < \sqrt{r_0^2 - R^2}\}$.

Например, если $G(R, x_3) \geq 0$ при $R^2 + x_3^2 < r_0^2$, то в качестве $\sigma(R)$ можно взять любую непрерывную при $|R| < r_0$ функцию.

Вернемся к общему случаю совместности системы (2.3) при априорных условиях достаточной гладкости в D^4 вектор-функции $\mathbf{f}^0(R, x_3, t)$. Пусть (2.9) выполнено. Тогда разность между правой частью второго уравнения в (2.7) и $\partial\sigma^2(R, x_3)/\partial x_3$ не зависит от t и, следовательно, совпадает со своим значением при $t = 0$, т. е. (см. также (2.7) при $t = 0$) с

$$(r_c + R) \left(\frac{\partial f_3^0(R, x_3, 0)}{\partial R} - \frac{\partial f_R^0(R, x_3, 0)}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial \sigma^2(R, x_3)}{\partial x_3}. \quad (2.12)$$

Таким образом, условия (2.9) и (2.12) вместе с первым уравнением из (2.7) необходимы и достаточны для совместности системы (2.3). В силу (2.12) имеем

$$\sigma^2(R, x_3) = \sigma^2(R, 0) + \int_0^{x_3} G(R, \tilde{x}_3, 0) d\tilde{x}_3, \quad (2.13)$$

где $\sigma^2(R, 0)$ — пока неопределенная функция. Это равенство формально совпадает с (2.11), но получено без ограничения $f_\varphi^0 = 0$.

Введем обозначение $G(R, x_3, t) - (\partial/\partial x_3)(F_\varphi^0(R, x_3, t))^2 =: g(R, x_3, t)$, представив (2.9) в виде $2((f_\varphi^0)'_{x_3}\sigma(R, x_3) + f_\varphi^0\partial\sigma(R, x_3)/\partial x_3) = g'_t$. Умножив это равенство на $\sigma(R, x_3)$, получаем при $\sigma(R, x_3) \neq 0$ эквивалентное (2.9) условие $2(f_\varphi^0)'_{x_3}\sigma^2(R, x_3) + f_\varphi^0(R, x_3, t)(\partial/\partial x_3)\sigma^2(R, x_3) = g'_t(R, x_3, t)\sigma(R, x_3)$, которое вместе с (2.12) равносильно квадратному уравнению

$$2(f_\varphi^0)'_{x_3}\sigma^2(R, x_3) - g'_t(R, x_3, t)\sigma(R, x_3) + f_\varphi^0(R, x_3, t)G(R, x_3, 0) = 0. \quad (2.14)$$

Отметим, что здесь случай $f_\varphi^0 \equiv 0$ в D_{r_c, r_0} соответствует утверждению 2.

В случае, когда

$$(g'_t(R, x_3, t))^2 + (\partial f_\varphi^0(R, x_3, t)/\partial x_3)^2 \neq 0, \quad (2.15)$$

это уравнение для совместности системы уравнений (2.13) обязано иметь решение $\sigma(R, x_3)$, не зависящее от t , для чего дискриминант уравнения должен быть неотрицательным (при $\partial f_\varphi^0(R, x_3, t)/\partial x_3 = 0$ достаточно, чтобы $g'_t(R, x_3, t) \neq 0$), после чего нужно потребовать (это будет условие на f_φ^0 , а через $g(R, x_3, t)$ и на f_R^0 и f_3^0) независимости явно выраженного решения $\sigma(R, x_3)$ от t . Чтобы это решение не зависело от t , оно должно совпадать с решением этого уравнения в частном случае $t = 0$:

$$2((f_\varphi^0)'_{x_3})\Big|_{t=0}\sigma^2(R, x_3) - g'_t(R, x_3, 0)\sigma(R, x_3) + f_\varphi^0(R, x_3, 0)g(R, x_3, 0) = 0, \quad (2.16)$$

где $g'_t(R, x_3, 0) = (r_c + R)\frac{\partial}{\partial t}((f_3^0)'_R(R, x_3, t) - (f_R^0)'_{x_3}(R, x_3, t))\Big|_{t=0}$. Более того, учитывая формулу (2.13), для определения $\sigma(R, x_3)$ достаточно выписать решение уравнения (2.16) при $x_3 = 0$ с вполне определенной функцией $\sigma(R, 0) = \sigma(R, 0; \mathbf{f})$:

$$\sigma(R, 0; \mathbf{f}) = \frac{g'_t(R, 0, 0) \pm \sqrt{(g'_t(R, 0, 0))^2 - 4((f_\varphi^0)'_{x_3})'(R, 0, 0)g(R, 0, 0)}}{2(f_\varphi^0)'(R, 0, 0)}. \quad (2.17)$$

Подставив (2.17) в (2.13), найдем представление $\sigma^2(R, x_3) = \sigma^2(R, x_3; \mathbf{f})$ через $\sigma(R, 0; \mathbf{f})$. Зная $\sigma(R, x_3)$, по первой формуле (2.7) вполне определяем $\sigma(R, x_3, t) = \sigma(R, x_3, t; \mathbf{f})$:

$$\sigma(R, x_3, t) = \sigma(R, x_3, t; \mathbf{f}) = \sigma(R, 0; \mathbf{f}) + \int_0^t f_\varphi^0(R, x_3, \tau) d\tau. \quad (2.18)$$

А затем по частному значению $\sigma(R, 0, t; \mathbf{f})$ этой функции можно найти еще представление $\sigma^2(R, x_3, t)$ по формуле

$$\sigma^2(R, x_3, t; \mathbf{f}) = \left(\sigma(R, 0; \mathbf{f}) + \int_0^t f_\varphi^0(R, 0, \tau) d\tau \right)^2 + \int_0^{x_3} G(R, \tilde{x}_3, t; \mathbf{f}) d\tilde{x}_3, \quad (2.19)$$

удовлетворяющее второму уравнению из (2.7).

Все это накладывает следующие ограничения на \mathbf{f}^0 (не на пару (σ, f_φ^0) , как было выше, а на саму функцию \mathbf{f}^0), которые для простоты далее формулируются не в виде аналога теоремы из разд. 1, а как следующий алгоритм проверки совместности системы уравнений (2.1):

а) при $(f_\varphi^0)'_{x_3}(R, x_3, t) \neq 0$ должно быть $(g'_t(R, x_3, t))^2 - 8f_\varphi^0(R, x_3, t)G(R, x_3, 0) \geq 0$;

б) правые части в получаемых представлениях (2.13) и (2.19) функций $\sigma^2(R, x_3; \mathbf{f})$ и $\sigma^2(R, x_3, t; \mathbf{f})$ должны быть неотрицательными;

в) функции $\sigma^2(R, x_3, t; \mathbf{f})$, получаемые из (2.18) и (2.19), должны совпадать, что определяет функциональное уравнение для компонент функции $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t)$;

г) в случае $(f_\varphi^0)'_{x_3}(R, x_3, 0) = 0$ и $g'_t(R, x_3, 0) \neq 0$ из (2.16) сразу находим $\sigma(R, x_3) = f_\varphi^0 g / g'_t \Big|_{t=0}$. Аналогично при $g'_t(R, x_3, t) = 0$ и $(f_\varphi^0)'_{x_3} \Big|_{t=0} \neq 0$ сразу имеем $\sigma^2(R, x_3, t; \mathbf{f}) = (1/2)g(R, x_3, 0) (= (1/2)G(R, x_3, 0))$. В обоих случаях должны выполняться требования п.п. б) и в).

Выписанные условия на \mathbf{f}^0 необходимы и достаточны для совместности системы (2.3), если они выполняются для всех допустимых значений переменных R, x_3, t . В общем случае эти условия вместе с ограничениями в утверждении 1 на функцию \mathbf{f}^\perp определяют широкий класс достаточных условий на \mathbf{f} для совместности системы (2.1), а при их выполнении формулы $\mathbf{V} = \sigma(R, x_3, t; \mathbf{f})\mathbf{e}_\varphi(\varphi)$ и $p(R, x_3, t) = \rho(\Phi^\perp(R, \varphi_3, x_3, t) + \Phi^0(R, x_3, t))$ через (2.6) и (2.8) определяют ее решения.

В случае, когда все коэффициенты уравнения (2.16) обращаются в нуль, условия (2.7) совместности системы (2.3) значительно упрощаются, и их анализ мы здесь не приводим. Отметим еще, что если выписанные ограничения на \mathbf{f}^0 разбивают область D^4 на части, то придется еще наложить условия на \mathbf{f} для обеспечения гладкой склейки решений $\sigma(R, x_3, t)$ на границе между этими частями. Это лучше делать в каждом конкретном случае, так как в общем случае все становится слишком многообразно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Громека И.С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости: дис. ... д-ра физ.-мат. наук // Громека И. С. Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1952. 296 с.
2. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Класс всех гладких единичных аксиально симметричных векторных полей, продольно вихревых в R^3 // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 11–23.
3. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Постановка и решение краевой задачи в классе плосковинтовых векторных полей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 123–138.
4. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. К механике винтовых потоков в идеальной несжимаемой вязкой сплошной среде // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 120–134.
5. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Некоторые решения уравнений движения для несжимаемой вязкой сплошной среды // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 48–63.
6. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 60–70.
7. Верещагин В.П., Субботин Ю.Н., Черных Н.И. Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 102–108.
8. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968. 592 с.

Верещагин Владимир Пантелеевич

Поступила 04.02.2016

Субботин Юрий Николаевич

д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН, профессор

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет Б. Н. Ельцина

e-mail: yunsub@imm.uran.ru

Черных Николай Иванович

д-р физ.-мат. наук, профессор

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: Chernykh@imm.uran.ru

УДК 517.977

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЦЕНЫ И СЕДЛОВОЙ ТОЧКИ В ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА¹**М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин**

Для конфликтно-управляемой динамической системы, описываемой функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла, рассматривается дифференциальная игра с показателем качества, который оценивает историю движения, реализующуюся к терминальному моменту времени, а также включает интегральную оценку реализаций управлений игроков. Игра формализуется в классе чистых позиционных стратегий. Основной результат — доказательство существования цены и седловой точки в этой игре.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, теория управления, дифференциальные игры.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. Existence of the value and saddle point in positional differential games for neutral-type systems.

For a conflict-controlled dynamical system described by functional differential equations of neutral type in Hale's form, we consider a differential game with a quality index that estimates the motion history realized up to the terminal time and includes an integral estimation of realizations of the players' controls. The game is formalized in the class of pure positional strategies. The main result is a proof of the existence of the value and saddle point in this game.

Keywords: neutral type systems, control theory, differential games.

MSC: 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112

Введение

Статья посвящена развитию теории дифференциальных игр [1–6] для функционально-дифференциальных систем нейтрального типа. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра на конечном промежутке времени, в которой движение динамической системы описывается функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла [7]. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Показатель качества процесса управления состоит из двух слагаемых. Первое оценивает историю движения системы, сложившуюся к терминальному моменту времени, второе содержит интегральную оценку реализаций управлений игроков. Игра формализуется в классе чистых позиционных стратегий в рамках подхода [2–6]. Основным результатом работы является теорема о том, что данная дифференциальная игра имеет цену и седловую точку. Схема доказательства восходит к работам [5; 6], при этом ключевым моментом в доказательстве является введение двух вспомогательных моделей в конструкциях экстремального сдвига [8–10].

1. Динамическая система

Рассмотрим динамическую систему, движение которой описывается уравнением

$$\frac{d}{dt} \left(x[t] - g(t, x_t[\cdot]) \right) = f(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V}. \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15–11–10018).

Здесь t — переменная времени; $x[t]$ — вектор состояния в момент времени t ; t_0 и ϑ — фиксированные начальный и терминальный моменты; $x_t[\cdot]$ — история движения (элемент запаздывания) на отрезке времени $[t-h, t]$, то есть $x_t[\xi] = x[t+\xi]$, $\xi \in [-h, 0]$, где $h > 0$ — константа запаздывания; $u[t]$ и $v[t]$ — текущие управляющие воздействия; $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^p$ и $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^q$ — компакты.

Обозначим через $\|\cdot\|$ евклидову норму векторов, через $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных функций, действующих из $[-h, 0]$ в \mathbb{R}^n ; это пространство оснащено равномерной нормой $\|\cdot\|_C$.

Полагаем, что для отображения $g: [t_0, \vartheta] \times C \mapsto \mathbb{R}^n$ выполнены следующие условия:

(g.1) Существует такое число $\alpha_g \in (0, 1)$, что имеет место оценка

$$\|g(t, w[\cdot]) - g(t, r[\cdot])\| \leq \alpha_g \|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C, \quad (t, w[\cdot]), (t, r[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times C.$$

(g.2) Найдется такое число $\beta_g > 0$, что справедливо неравенство

$$\|g(t, w[\cdot]) - g(\xi, w[\cdot])\| \leq \beta_g (1 + \|w[\cdot]\|_C) |t - \xi|, \quad (t, w[\cdot]), (\xi, w[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times C.$$

З а м е ч а н и е. Например, для отображений

$$g(t, w[\cdot]) = A[t]w[-\hat{h}] + B[t], \quad g(t, w[\cdot]) = g_1(t, w[-\hat{h}]), \quad g(t, w[\cdot]) = \int_{-h}^0 g_2(t, \xi, w[\xi]) d\xi, \quad \hat{h} \in [0, h],$$

условия (g.1), (g.2) выполняются за счет подходящих свойств функций A , B , g_1 и g_2 .

Полагаем также, что отображение $f: [t_0, \vartheta] \times C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям:

(f.1) Отображение f непрерывно.

(f.2) Для любого компакта $D \subset C$ существует такое число $\alpha_f = \alpha_f(D) > 0$, что

$$\|f(t, w[\cdot], u, v) - f(t, r[\cdot], u, v)\| \leq \alpha_f \|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C, \quad (t, w[\cdot]), (t, r[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times D, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

(f.3) Существует такая константа $\beta_f > 0$, что имеет место оценка

$$\|f(t, w[\cdot], u, v)\| \leq \beta_f (1 + \|w[\cdot]\|_C), \quad (t, w[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times C, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

Пусть зафиксировано число $R_0 > 0$. Положим

$$X_0 = \left\{ w[\cdot] \in C: \|w[\cdot]\|_C \leq R_0, \|w[t] - w[\xi]\| \leq R_0 |t - \xi|, t, \xi \in [-h, 0] \right\}.$$

Для числа $\beta > 0$ рассмотрим множество $X(\beta)$, состоящее из абсолютно непрерывных функций $x: [t_0 - h, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$, которые обозначаются через $x[t_0 - h[\cdot]\vartheta]$ и удовлетворяют соотношениям

$$x_{t_0}[\cdot] \in X_0, \quad \left\| \frac{d}{dt} (x[t] - g(t, x_t[\cdot])) \right\| \leq \beta (1 + \|x_t[\cdot]\|_C) \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, \vartheta]. \quad (1.2)$$

Определим множество допустимых позиций системы (1.1)

$$G = \left\{ (t, w[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times C: w[\cdot] = x_t[\cdot], x[t_0 - h[\cdot]\vartheta] \in X(\beta_f) \right\}. \quad (1.3)$$

Пусть $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$. Допустимыми реализациями управляющих воздействий $u[t]$ и $v[t]$ на промежутке $[t_*, \vartheta]$ считаем измеримые функции $u: [t_*, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$ и $v: [t_*, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$, обозначаемые далее $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta]$ соответственно. Действуя, например, по схеме из [11] (см. также [7]), можно показать, что при условиях (g.1), (g.2) и (f.1)–(f.3) пара допустимых реализаций $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta]$ единственным образом порождает из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) — абсолютно непрерывную функцию $x: [t_* - h, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^n$, которая удовлетворяет условию $x_{t_*}[\cdot] = x_*[\cdot]$ и вместе с $u[t]$ и $v[t]$ почти всюду на $[t_*, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1).

Непосредственно проверяется, что множество G из (1.3) обладает следующими свойствами.

Утверждение 1. Множество G компактно в $[t_0, \vartheta] \times C$. Существует такое $R > 0$, что

$$\|w[\cdot]\|_C \leq R, \quad \|w[\tau] - w[\xi]\| \leq R|\tau - \xi|, \quad \tau, \xi \in [-h, 0], \quad (t, w[\cdot]) \in G.$$

Для движения $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), порожденного из позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta]$, имеем $(t, x_t[\cdot]) \in G$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

2. Показатель качества

Качество процесса управления оценивается показателем

$$\gamma = \sigma(x_\vartheta[\cdot]) + \int_{t_*}^{\vartheta} \chi(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]) d\xi, \quad (2.1)$$

где отображения $\sigma: C \mapsto \mathbb{R}$ и $\chi: [t_0, \vartheta] \times C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ удовлетворяют следующим условиям:

(σ) Для любого компакта $D \subset C$ существует такое число $\alpha_\sigma = \alpha_\sigma(D) > 0$, что

$$|\sigma(w[\cdot]) - \sigma(r[\cdot])| \leq \alpha_\sigma \|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C, \quad w[\cdot], r[\cdot] \in D.$$

(χ .1) Отображение χ непрерывно.

(χ .2) Для любого компакта $D \subset C$ существует такое число $\alpha_\chi = \alpha_\chi(D) > 0$, что

$$|\chi(t, w[\cdot], u, v) - \chi(t, r[\cdot], u, v)| \leq \alpha_\chi \|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C, \quad (t, w[\cdot]), (t, r[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times D, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

3. Дифференциальная игра

Для системы (1.1) и показателя качества (2.1) рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру. Первый игрок распоряжается выбором управляющего воздействия $u[t]$, второй — $v[t]$. Первый игрок нацелен минимизировать показатель (2.1), второй — максимизировать.

Предполагаем, что для отображений f и χ выполняется условие седловой точки в маленькой игре [6, с. 79] или, в другой терминологии, условие Айзекса [1]

(f, χ) Для любых $(t, w[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times C$, $s \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} (\langle f(t, w[\cdot], u, v), s \rangle + \chi(t, w[\cdot], u, v)\eta) = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} (\langle f(t, w[\cdot], u, v), s \rangle + \chi(t, w[\cdot], u, v)\eta).$$

Дальнейшая формализация рассматриваемой дифференциальной игры в классе позиционных стратегий управления игроков следует подходу [2–6]. При этом в силу условия (f, χ) можно ограничиться классом чистых позиционных стратегий [6, § 8].

Под стратегией управления первого игрока понимаем всякое отображение

$$U = U(t, w[\cdot], \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad (t, w[\cdot]) \in G, \quad \varepsilon > 0,$$

где ε имеет смысл параметра точности [6, с. 68].

Пусть зафиксированы позиция $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$, число $\varepsilon > 0$ и разбиение отрезка $[t_*, \vartheta]$

$$\Delta_\delta = \{\tau_j : 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leq \delta, j = \overline{1, J-1}, \tau_1 = t_*, \tau_J = \vartheta\}. \quad (3.1)$$

Тройка $\{U, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления первого игрока, который в цепи обратной связи последовательно по шагам разбиения Δ_δ формирует кусочно-постоянную (а стало быть, допустимую) реализацию $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ по правилу

$$u[t] = U(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1}. \quad (3.2)$$

Из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ такой закон в паре с допустимой реализацией $v[t_*[\cdot]\vartheta]$ однозначно порождает движение системы (1.1). Реализовавшееся при этом значение показателя качества (2.1) обозначим через $\gamma(t_*, x_*[\cdot]; U, \varepsilon, \Delta_\delta; v[t_*[\cdot]\vartheta])$.

Исходя из самых неблагоприятных с точки зрения первого игрока обстоятельств, определим величину гарантированного результата стратегии U

$$\rho_u(t_*, x_*[\cdot], U) = \overline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v[t_*[\cdot]\vartheta]} \gamma(t_*, x_*[\cdot]; U, \varepsilon, \Delta_\delta; v[t_*[\cdot]\vartheta]), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G. \quad (3.3)$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом первого игрока будет величина

$$\rho_u^\circ(t_*, x_*[\cdot]) = \inf_U \rho_u(t_*, x_*[\cdot], U), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G. \quad (3.4)$$

Стратегию U° назовем оптимальной, если справедливо равенство

$$\rho_u(t_*, x_*[\cdot], U^\circ) = \rho_u^\circ(t_*, x_*[\cdot]), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G.$$

Аналогично, с понятными изменениями, для второго игрока рассматриваем стратегию управления $V = V(t, w[\cdot], \varepsilon) \in \mathbb{V}$, $(t, w[\cdot]) \in G$, $\varepsilon > 0$, закон управления $\{V, \varepsilon, \Delta_\delta\}$, формирующий кусочно-постоянную реализацию $v[t_*[\cdot]\vartheta]$ по правилу

$$v[t] = V(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j = \overline{1, J-1},$$

величину гарантированного результата стратегии V

$$\rho_v(t_*, x_*[\cdot], V) = \underline{\lim}_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{\delta \downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u[t_*[\cdot]\vartheta]} \gamma(t_*, x_*[\cdot]; u[t_*[\cdot]\vartheta]; V, \varepsilon, \Delta_\delta), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G, \quad (3.5)$$

и величину оптимального гарантированного результата второго игрока

$$\rho_v^\circ(t_*, x_*[\cdot]) = \sup_V \rho_v(t_*, x_*[\cdot], V), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G. \quad (3.6)$$

Стратегия управления второго игрока V° будет называться оптимальной, если

$$\rho_v(t_*, x_*[\cdot], V^\circ) = \rho_v^\circ(t_*, x_*[\cdot]), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G.$$

Непосредственно из соотношений (3.4) и (3.6) вытекает неравенство

$$\rho_u^\circ(t_*, x_*[\cdot]) \leq \rho_v^\circ(t_*, x_*[\cdot]), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G. \quad (3.7)$$

В случае, когда справедливо равенство

$$\rho_u^\circ(t_*, x_*[\cdot]) = \rho_v^\circ(t_*, x_*[\cdot]), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G, \quad (3.8)$$

говорят, что дифференциальная игра (1.1), (2.1) имеет цену, а пару оптимальных стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ называют седловой точкой игры. Основным результатом статьи составляет

Теорема. *Дифференциальная игра (1.1), (2.1) имеет цену и седловую точку $\{U^\circ, V^\circ\}$.*

4. Квазистратегии

По утверждению 1 множество G компактно. Значит найдется такое число $\overline{\beta} \geq \beta_f$, что

$$\|f(t, w[\cdot], u, v)\| \leq \overline{\beta}, \quad |\chi(t, w[\cdot], u, v)| \leq \overline{\beta}, \quad (t, w[\cdot]) \in G, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \quad (4.1)$$

Положим

$$\overline{G} = \left\{ (t, w[\cdot]) \in [t_0, \vartheta] \times C : w[\cdot] = x_t[\cdot], \quad x[t_0 - h[\cdot]\vartheta] \in X(\overline{\beta}) \right\}, \quad (4.2)$$

где множество $X(\bar{\beta})$ определяется в согласии с соотношениями (1.2).

Рассмотрим вспомогательную динамическую систему (модель-копию системы (1.1))

$$\frac{d}{dt} \left(y[t] - g(t, y_t[\cdot]) \right) = f(t, y_t[\cdot], p[t], q[t]), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad y[t] \in \mathbb{R}^n, \quad p[t] \in \mathbb{U}, \quad q[t] \in \mathbb{V}. \quad (4.3)$$

Пусть зафиксированы позиция $(\tau_*, y_*[\cdot]) \in \bar{G}$ и момент времени $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$. В согласии с принятыми выше обозначениями допустимые реализации управляющих воздействий $p[t]$ и $q[t]$ будем обозначать через $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$. Соответственно порождаемое ими из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ движение системы (4.3) обозначаем $y[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$, предполагая при этом $y_{\tau_*}[\cdot] = y_*[\cdot]$.

По аналогии с утверждением 1 имеет место

Утверждение 2. Множество \bar{G} компактно в $[t_0, \vartheta] \times C$. Существует такое $\bar{R} > 0$, что

$$\|w[\cdot]\|_C \leq \bar{R}, \quad \|w[\tau] - w[\xi]\| \leq \bar{R}|\tau - \xi|, \quad \tau, \xi \in [-h, 0], \quad (t, w[\cdot]) \in \bar{G}.$$

Для любых $(\tau_*, y_*[\cdot]) \in \bar{G}$ и $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ для движения $y[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3), порожденного из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, имеем $(t, y_t[\cdot]) \in \bar{G}$, $t \in [\tau_*, \tau^*]$.

Пусть $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$. Следуя, например, [5, с. 24], квазистратегией Q_{τ_*} формирования управляющего воздействия $p[t]$ на промежутке $[\tau_*, \vartheta]$ будем называть всякое отображение, которое каждой реализации $q[\tau_*[\cdot]\vartheta]$ ставит в соответствие реализацию $p[\tau_*[\cdot]\vartheta] = Q_{\tau_*}(q[\tau_*[\cdot]\vartheta])$ и при этом удовлетворяет следующему свойству неупреждаемости: для любого момента $\hat{\tau} \in [\tau_*, \vartheta]$ и любых реализаций $q^{(1)}[\tau_*[\cdot]\vartheta]$ и $q^{(2)}[\tau_*[\cdot]\vartheta]$ равенство $q^{(1)}[t] = q^{(2)}[t]$ почти всюду на $[\tau_*, \hat{\tau}]$ влечет $p^{(1)}[t] = p^{(2)}[t]$ при почти всех $t \in [\tau_*, \hat{\tau}]$, где $p^{(i)}[\tau_*[\cdot]\vartheta] = Q_{\tau_*}(q^{(i)}[\tau_*[\cdot]\vartheta])$, $i = 1, 2$.

Пусть $(\tau_*, y_*[\cdot]) \in \bar{G}$ и $\hat{y}_* \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$\hat{y}[t] = \hat{y}_* + \int_{\tau_*}^t \chi(\xi, y_\xi[\cdot], p[\xi], q[\xi]) d\xi, \quad \gamma_y = \sigma(y_\vartheta[\cdot]) + \hat{y}[\vartheta]. \quad (4.4)$$

Из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ квазистратегия Q_{τ_*} в паре с допустимой реализацией $q[\tau_*[\cdot]\vartheta]$ однозначно порождает движение $y[\tau_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (4.3). Реализовавшееся при этом значение показателя (4.4) обозначим $\gamma_y(\tau_*, y_*[\cdot], \hat{y}_*; Q_{\tau_*}; q[\tau_*[\cdot]\vartheta])$.

Положим

$$\rho(\tau_*, y_*[\cdot], \hat{y}_*) = \inf_{Q_{\tau_*}} \sup_{q[\tau_*[\cdot]\vartheta]} \gamma_y(\tau_*, y_*[\cdot], \hat{y}_*; Q_{\tau_*}; q[\tau_*[\cdot]\vartheta]), \quad (\tau_*, y_*[\cdot]) \in \bar{G}, \quad \hat{y}_* \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Величина ρ обладает следующими свойствами:

($\rho.1$) Справедливо равенство

$$\rho(\vartheta, w[\cdot], 0) = \sigma(w[\cdot]), \quad (\vartheta, w[\cdot]) \in \bar{G}.$$

($\rho.2$) Справедливо равенство

$$\rho(t, w[\cdot], \eta) = \rho(t, w[\cdot], 0) + \eta, \quad (t, w[\cdot]) \in \bar{G}, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

($\rho.3$) Существует такое число $\alpha_\rho \geq 1$, что имеет место оценка

$$|\rho(t, w[\cdot], \eta) - \rho(t, r[\cdot], \mu)| \leq \alpha_\rho \left(\|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C + |\eta - \mu| \right), \quad (t, w[\cdot]), (t, r[\cdot]) \in \bar{G}, \quad \eta, \mu \in \mathbb{R}.$$

($\rho.4^u$) Пусть $(\tau_*, y_*[\cdot]) \in \bar{G}$, $\hat{y}_* \in \mathbb{R}$, $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для любой реализации $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ существует такая реализация $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, что для движения $y[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3), порожденного из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ этими реализациями, справедливо неравенство

$$\rho(\tau^*, y_{\tau^*}[\cdot], \hat{y}[\tau^*]) \leq \rho(\tau_*, y_*[\cdot], \hat{y}_*) + \sqrt{\varepsilon}(\tau^* - \tau_*). \quad (4.6)$$

($\rho.4^v$) Пусть $(\tau_*, y_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\hat{y}_* \in \mathbb{R}$, $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ и $\varepsilon > 0$. Тогда для любой реализации $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ существует такая реализация $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, что для движения $y[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3), порожденного из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ этими реализациями, справедливо неравенство

$$\rho(\tau^*, y_{\tau^*}[\cdot], \hat{y}[\tau^*]) \geq \rho(\tau_*, y_*[\cdot], \hat{y}_*) - \sqrt{\varepsilon}(\tau^* - \tau_*).$$

Свойства ($\rho.1$) и ($\rho.2$) следуют непосредственно из определения величины ρ . В силу условий ($g.1$), ($f.2$), (σ), ($\chi.2$) и утверждения 2 найдется такое число $\alpha_\gamma > 0$, что, каковы бы ни были момент времени $\tau_* \in [t_0, \vartheta]$, реализация $q[\tau_*[\cdot]\vartheta]$ и квазистратегия Q_{τ_*} , имеет место оценка

$$\begin{aligned} & |\gamma_y(\tau_*, y_*^{(1)}[\cdot], \hat{y}_*^{(1)}; Q_{\tau_*}; q[\tau_*[\cdot]\vartheta]) - \gamma_y(\tau_*, y_*^{(2)}[\cdot], \hat{y}_*^{(2)}; Q_{\tau_*}; q[\tau_*[\cdot]\vartheta])| \\ & \leq \alpha_\gamma \|y_*^{(1)}[\cdot] - y_*^{(2)}[\cdot]\|_C + |\hat{y}_*^{(1)} - \hat{y}_*^{(2)}|, \quad (\tau_*, y_*^{(1)}[\cdot]), (\tau_*, y_*^{(2)}[\cdot]) \in \overline{G}, \quad \hat{y}_*^{(1)}, \hat{y}_*^{(2)} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает свойство ($\rho.3$). Свойства ($\rho.4^u$) и ($\rho.4^v$) в теории дифференциальных игр называются u -стабильностью и v -стабильностью. Они доказываются аналогично леммам 28.1 и 28.2 из монографии [6].

5. Вспомогательная z -модель

Пусть движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) порождено из позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$ реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta]$. Рассмотрим вспомогательную динамическую систему (z -модель)

$$\frac{d}{dt}(z[t] - g(t, z_t[\cdot])) = f(t, x_t[\cdot], p[t], q[t]), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad z[t] \in \mathbb{R}^n, \quad p[t] \in \mathbb{U}, \quad q[t] \in \mathbb{V}. \quad (5.1)$$

Отметим, что в отличие от модели-копии (4.3) в правую часть системы (5.1) вместо текущей истории $z_t[\cdot]$ движения этой системы подставляется история $x_t[\cdot]$ зафиксированного движения $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$. Чтобы это подчеркнуть, будем говорить, что движение $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (5.1) порождается из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\tau_* \geq t_*$, реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ управляющих воздействий и движением $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1).

По определению (4.2) множества \overline{G} справедливо следующее

Утверждение 3. Пусть движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) порождено из позиции $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta]$. Пусть $(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\tau_* \geq t_*$, и $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$. Тогда для движения $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (5.1), порожденного из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot])$ допустимыми реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и движением $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$, имеет место включение $(t, z_t[\cdot]) \in \overline{G}$, $t \in [\tau_*, \tau^*]$.

Пусть $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$, $(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \overline{G}$ и $\hat{z}_* \in \mathbb{R}$. Обозначим

$$\hat{x}[t] = \int_{t_*}^t \chi(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]) d\xi, \quad \hat{z}[t] = \hat{z}_* + \int_{\tau_*}^t \chi(\xi, x_\xi[\cdot], p[\xi], q[\xi]) d\xi. \quad (5.2)$$

Определим функционал

$$\mathcal{V}(t, w[\cdot], r[\cdot], \eta) = \|s(t, w[\cdot], r[\cdot])\|^2 + \eta^2, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad w[\cdot], r[\cdot] \in C, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (5.3)$$

где

$$s(t, w[\cdot], r[\cdot]) = w[0] - g(t, w[\cdot]) - r[0] + g(t, r[\cdot]). \quad (5.4)$$

Положим

$$\epsilon(t) = \varepsilon + (t - t_0)\varepsilon. \quad (5.5)$$

Лемма 1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что будет справедливо следующее утверждение. Пусть $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$, $(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\tau_* \geq t_*$, $\hat{z}_* \in \mathbb{R}$ и момент времени $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$ удовлетворяет неравенству

$$\tau^* - \tau_* \leq \delta_1. \quad (5.6)$$

Пусть движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) порождено из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta]$, а движение $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (5.1) порождено из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot])$ допустимыми реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и движением $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$. Пусть при этом реализации $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ удовлетворяют равенствам

$$u[t] = u^\circ, \quad q[t] = q^\circ, \quad t \in [\tau_*, \tau^*], \quad (5.7)$$

$$u^\circ \in \operatorname{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \left(\langle f(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u, v), s(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot]) \rangle + \chi(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u, v) (\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*) \right),$$

$$q^\circ \in \operatorname{argmax}_{q \in \mathbb{V}} \min_{p \in \mathbb{U}} \left(\langle f(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], p, q), s(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot]) \rangle + \chi(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], p, q) (\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*) \right),$$

и справедливо неравенство

$$\mathcal{V}(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot], \hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*) \leq \varepsilon(\tau_*). \quad (5.8)$$

Тогда

$$\mathcal{V}(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t]) \leq \varepsilon(t), \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \quad (5.9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия (g.1) и утверждений 1–3 при $t \in [\tau_*, \tau^*]$ имеем

$$\|s(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot])\| \leq \|x[t]\| + \|z[t]\| + \alpha_g \left(\|x_t[\cdot]\|_C + \|z_t[\cdot]\|_C \right) \leq R_1 = (1 + \alpha_g)(R + \overline{R}). \quad (5.10)$$

Для значений $\hat{x}[t]$ и $\hat{z}[t]$ в согласии со второй оценкой в (4.1) справедливо неравенство

$$|\hat{x}[t] - \hat{z}[t]| \leq 2\overline{\beta}(t - \tau_*) + |\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*|, \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \quad (5.11)$$

Принимая во внимание определение (5.3) функционала \mathcal{V} и неравенство (5.8), выводим

$$|\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*| \leq \sqrt{\mathcal{V}(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot], \hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*)} \leq \sqrt{\varepsilon(\tau_*)}. \quad (5.12)$$

Пусть $R_2(\varepsilon) = 2\overline{\beta}(\vartheta - t_0) + \sqrt{\varepsilon(\vartheta)}$. Тогда, объединяя оценки (5.11) и (5.12), получаем

$$|\hat{x}[t] - \hat{z}[t]| \leq R_2(\varepsilon), \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \quad (5.13)$$

По условиям (f.1) и (χ .1) отображения f и χ непрерывны. По утверждению 1 множество G компактно. Поэтому существует такое число $\nu(\varepsilon) > 0$, что для всех $(t, w[\cdot]), (\xi, r[\cdot]) \in G$: $|t - \xi| \leq \nu(\varepsilon)$, $\|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C \leq \nu(\varepsilon)$, при всех $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ имеет место неравенство

$$\|f(t, w[\cdot], u, v) - f(\xi, r[\cdot], u, v)\| + |\chi(t, w[\cdot], u, v) - \chi(\xi, r[\cdot], u, v)| \leq \varepsilon / (8(R_1 + R_2(\varepsilon))). \quad (5.14)$$

Положим

$$\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) = \min \{ \varepsilon / (32\overline{\beta}^2), \nu(\varepsilon), \nu(\varepsilon) / R \}. \quad (5.15)$$

Оценим производную $\mathcal{V}(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t])$ при $t \in [\tau_*, \tau^*]$. Из (1.1), (5.1) и (5.7) имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt}(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t]) &= 2 \langle f(t, x_t[\cdot], u^\circ, v[t]) - f(t, x_t[\cdot], p[t], q^\circ), s(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot]) \rangle \\ &+ 2 \left(\chi(t, x_t[\cdot], u^\circ, v[t]) - \chi(t, x_t[\cdot], p[t], q^\circ) \right) (\hat{x}[t] - \hat{z}[t]). \end{aligned}$$

По утверждению 1 в силу соотношений (5.6) и (5.15) выводим

$$\|x_t[\cdot] - x_{\tau_*}[\cdot]\| \leq R|t - \tau_*| \leq \delta_1 \leq \nu(\varepsilon), \quad t \in [\tau_*, \tau^*],$$

а стало быть, оценки (5.14) выполняются при $\xi = \tau_*$, $w[\cdot] = x_t[\cdot]$ и $r[\cdot] = x_{\tau_*}[\cdot]$. Таким образом, пользуясь неравенствами (5.10) и (5.13), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt}(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t]) &\leq 2\langle f(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u^\circ, v[t]) - f(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], p[t], q^\circ), s(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot]) \rangle \\ &+ 2\left(\chi(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u^\circ, v[t]) - \chi(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], p[t], q^\circ)\right)(\hat{x}[t] - \hat{z}[t]) + \varepsilon/2. \end{aligned}$$

Из равенств (1.1) и (5.1), (5.2), с учетом утверждения 1 и оценки (4.1) имеем

$$\|s(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot]) - s(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot])\| \leq 2\bar{\beta}|t - \tau_*|, \quad |(\hat{x}[t] - \hat{z}[t]) - (\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*)| \leq 2\bar{\beta}|t - \tau_*|.$$

Тогда из соотношений (4.1), (5.6) и (5.15), учитывая затем условия (f, χ) и (5.7), заключаем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt}(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t]) &\leq 2\langle f(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u^\circ, v[t]) - f(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], p[t], q^\circ), s(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot]) \rangle \\ &+ 2\left(\chi(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u^\circ, v[t]) - \chi(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], p[t], q^\circ)\right)(\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*) + \varepsilon \\ &\leq 2 \max_{v \in \mathbb{V}} \left(\langle f(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u^\circ, v), s(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot]) \rangle + \chi(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u^\circ, v)(\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*) \right) \\ &- 2 \min_{u \in \mathbb{U}} \left(\langle f(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u, v^\circ), s(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot]) \rangle + \chi(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], u, q^\circ)(\hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*) \right) + \varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенства (5.8) получаем оценку (5.9). Лемма доказана.

Пусть $(t, w[\cdot]) \in G$ и $\varepsilon > 0$. Через $W(t, w[\cdot], \varepsilon)$ обозначим множество пар $(r[\cdot], \eta) \in C \times \mathbb{R}$, для которых выполнены условия:

(w.1) Справедливо включение $(t, r[\cdot]) \in \bar{G}$.

(w.2) Для функционала \mathcal{V} , определенного в (5.3), справедливо неравенство

$$\mathcal{V}(t, w[\cdot], r[\cdot], \eta) \leq \varepsilon(t).$$

(w.3) Имеет место оценка

$$\|w[\cdot] - r[\cdot]\|_C^2 \leq \lambda \varepsilon(t), \quad \lambda = 1/(1 - \alpha_g)^2.$$

Здесь $\varepsilon(t)$ определено согласно (5.5).

Лемма 2. Пусть задано число $\varepsilon > 0$, и число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ выбрано в согласии с леммой 1. Пусть в условиях леммы 1 дополнительно выполняется включение

$$(z_*[\cdot], \hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*) \in W(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], \varepsilon). \quad (5.16)$$

Тогда

$$(z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t]) \in W(t, x_t[\cdot], \varepsilon), \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \quad (5.17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение (5.16) означает

$$(\tau_*, z_*[\cdot]) \in \bar{G}, \quad \mathcal{V}(\tau_*, x_{\tau_*}[\cdot], z_*[\cdot], \hat{x}[\tau_*] - \hat{z}_*) \leq \varepsilon(\tau_*), \quad \|x_{\tau_*}[\cdot] - z_*[\cdot]\|_C^2 \leq \lambda \varepsilon(\tau_*). \quad (5.18)$$

Пусть $t \in [\tau_*, \tau^*]$. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$(t, z_t[\cdot]) \in \bar{G}, \quad \mathcal{V}(t, x_t[\cdot], z_t[\cdot], \hat{x}[t] - \hat{z}[t]) \leq \varepsilon(t), \quad \|x_t[\cdot] - z_t[\cdot]\|_C^2 \leq \lambda \varepsilon(t). \quad (5.19)$$

Включение в (5.19) вытекает из включения в (5.18) в силу утверждения 3. Первое из неравенств в (5.19) следует из аналогичного неравенства в (5.18) в силу леммы 1.

Докажем второе из неравенств в (5.19). По определению (5.3) функционала \mathcal{V} , принимая во внимание условие (g.1), имеем

$$\|x[\xi] - z[\xi]\| \leq \sqrt{\mathcal{V}(\xi, x_\xi[\cdot], z_\xi[\cdot], \hat{x}[\xi] - \hat{z}[\xi])} + \alpha_g \|x_\xi[\cdot] - z_\xi[\cdot]\|_C, \quad \xi \in [\tau_*, t]. \quad (5.20)$$

Далее, по определению числа λ в условии (w.3), принимая во внимание второе из неравенств в (5.18) вместе с первым из неравенств (5.19), получаем

$$\max \left\{ \max_{\xi \in [\tau_*, t]} \|x[\xi] - z[\xi]\|, \sqrt{\lambda \epsilon(\tau_*)} \right\} \leq \sqrt{\epsilon(t)} + \alpha_g \max \left\{ \max_{\xi \in [\tau_*, t]} \|x[\xi] - z[\xi]\|, \sqrt{\lambda \epsilon(\tau_*)} \right\},$$

откуда заключаем $\|x[t] - z[t]\| \leq \frac{1}{1 - \alpha_g} \sqrt{\epsilon(t)} = \sqrt{\lambda \epsilon(t)}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует такое число $\kappa > 0$, что справедливо следующее утверждение.*

Пусть $(t_, x_*[\cdot]) \in G$, $(\tau_*, y_*[\cdot]) \in \overline{G}$, $\tau_* \geq t_*$, $\hat{y}_* \in \mathbb{R}$ и $\tau^* \in (\tau_*, \vartheta]$. Пусть движение $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1) порождено из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ допустимыми реализациями $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ и $v[t_*[\cdot]\vartheta]$, а движение $y[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3) порождено из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ допустимыми реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$. Тогда для движения $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (5.1), порожденного из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot] = y_*[\cdot])$ теми же реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и движением $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$, справедливо неравенство*

$$\|z[t] - y[t]\| + |\hat{z}[t] - \hat{y}[t]| \leq \kappa (\tau^* - \tau_*) \max_{\xi \in [\tau_*, \tau^*]} \|x_\xi[\cdot] - z_\xi[\cdot]\|_C, \quad t \in [\tau_*, \tau^*], \quad (5.21)$$

где значение $\hat{y}[t]$ определено согласно (4.4), а значение $\hat{z}[t]$ — согласно (5.2) при $\hat{z}_* = \hat{y}_*$.

Доказательство. В силу равенств (4.3), (5.1) и условия (g.1) имеем

$$\begin{aligned} \|z[t] - y[t]\| &= \|z[t] - g(t, z_t[\cdot]) - y[t] + g(t, y_t[\cdot])\| + \|g(t, z_t[\cdot]) - g(t, y_t[\cdot])\| \\ &\leq \int_{\tau_*}^t \|f(\xi, x_\xi[\cdot], p[\xi], q[\xi]) - f(\xi, y_\xi[\cdot], p[\xi], q[\xi])\| d\xi + \alpha_g \max_{\xi \in [\tau_*, t]} \|z[\xi] - y[\xi]\|, \quad t \in [\tau_*, \tau^*]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

С учетом утверждений 1, 2 и условия (f.2), полагая

$$D_1 = \{w[\cdot] \in C \mid (t, w[\cdot]) \in G \cup \overline{G}, t \in [t_0, \vartheta]\}, \quad \alpha_f = \alpha_f(D_1), \quad \alpha_1 = \alpha_f / (1 - \alpha_g),$$

из оценки (5.22) выводим

$$\begin{aligned} \max_{\xi \in [\tau_*, t]} \|z[\xi] - y[\xi]\| &\leq \alpha_1 \int_{\tau_*}^t \|x_\xi[\cdot] - y_\xi[\cdot]\|_C d\xi \leq \alpha_1 \int_{\tau_*}^t \|x_\xi[\cdot] - z_\xi[\cdot]\|_C d\xi + \alpha_1 \int_{\tau_*}^t \|z_\xi[\cdot] - y_\xi[\cdot]\|_C d\xi \\ &\leq \alpha_1 (\tau^* - \tau_*) \max_{\xi \in [\tau_*, \tau^*]} \|x_\xi[\cdot] - z_\xi[\cdot]\|_C + \alpha_1 \int_{\tau_*}^t \max_{\mu \in [\tau_*, \xi]} \|z[\mu] - y[\mu]\| d\xi, \quad t \in [\tau_*, \tau^*], \end{aligned}$$

откуда по лемме Гронуолла — Беллмана [12, с. 43] получаем

$$\max_{\xi \in [\tau_*, t]} \|z[\xi] - y[\xi]\| \leq \alpha_2 (\tau^* - \tau_*) \max_{\xi \in [\tau_*, \tau^*]} \|x_\xi[\cdot] - z_\xi[\cdot]\|_C, \quad t \in [\tau_*, \tau^*], \quad \alpha_2 = \alpha_1 e^{\alpha_1(\vartheta - t_0)}. \quad (5.23)$$

Далее, используя условие (χ.2) при $\alpha_\chi = \alpha_\chi(D_1)$ и неравенство (5.23), для $t \in [\tau_*, \tau^*]$ выводим

$$\begin{aligned} |\hat{z}[t] - \hat{y}[t]| &\leq \int_{\tau_*}^t |\chi(\xi, x_\xi[\cdot], p[\xi], q[\xi]) - \chi(\xi, y_\xi[\cdot], p[\xi], q[\xi])| d\xi \leq \alpha_\chi (\tau^* - \tau_*) \max_{\xi \in [\tau_*, \tau^*]} \|x_\xi[\cdot] - z_\xi[\cdot]\|_C \\ &+ \alpha_\chi (\tau^* - \tau_*) \max_{\xi \in [\tau_*, t]} \|z[\xi] - y[\xi]\| \leq \alpha_\chi (1 + (\vartheta - t_0) \alpha_2) (\tau^* - \tau_*) \max_{\xi \in [\tau_*, \tau^*]} \|x_\xi[\cdot] - z_\xi[\cdot]\|_C. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Положим $\kappa = \alpha_2 + \alpha_\chi (1 + (\vartheta - t_0) \alpha_2)$. Тогда из (5.23) и (5.24) получаем (5.21). Лемма доказана.

6. Цена игры и оптимальные стратегии

Следуя идеологии метода экстремального сдвига на сопутствующие точки (см., например, [6, с. 210], а также [10]), определим следующую стратегию управления первого игрока:

$$U^* = U^*(t, w[\cdot], \varepsilon) \in \operatorname{argmin}_{u \in U} \max_{v \in V} \left(\langle f(t, w[\cdot], u, v), s(t, w[\cdot], r^u[\cdot]) \rangle + \chi(t, w[\cdot], u, v) \eta^u \right), \quad (6.1)$$

$$(t, w[\cdot]) \in G, \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь величина s взята из (5.4), а сопутствующая точка $(r^u[\cdot], \eta^u)$ выбирается по величине (4.5) согласно правилу

$$(r^u[\cdot], \eta^u) = (r^u(t, w[\cdot], \varepsilon)[\cdot], \eta^u(t, w[\cdot], \varepsilon)) \in \operatorname{argmin}_{(r[\cdot], \eta) \in W(t, w[\cdot], \varepsilon)} \rho(t, r[\cdot], -\eta), \quad (6.2)$$

где множество $W(t, w[\cdot], \varepsilon)$ определяется условиями (w.1)–(w.3).

Лемма 4. *Имеет место неравенство*

$$\rho_u(U^*; t_*, x_*[\cdot]) \leq \rho(t_*, x_*[\cdot], 0), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G.$$

Доказательство. По определению (3.3) величины $\rho_u(U^*; t_*, x_*[\cdot])$ для доказательства леммы достаточно показать, что для любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\zeta) > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) = \delta_*(\zeta, \varepsilon) > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$, что, каковы бы ни были позиция $(t_*, x_*[\cdot]) \in G$, числа $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ и $0 < \delta < \delta_*(\varepsilon)$, разбиение Δ_δ из (3.1) и допустимая реализация $v[t_*[\cdot]\vartheta]$, для движения $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$ системы (1.1), порожденного из позиции $(t_*, x_*[\cdot])$ законом управления $\{U^*, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ по правилу (3.2) и реализацией $v[t_*[\cdot]\vartheta]$, справедливо неравенство

$$\gamma(t_*, x_*[\cdot]; U^*, \varepsilon, \Delta_\delta; v[t_*[\cdot]\vartheta]) = \sigma(x_\vartheta[\cdot]) + \int_{t_*}^{\vartheta} \chi(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]) d\tau \leq \rho(t_*, x_*[\cdot], 0) + \zeta. \quad (6.3)$$

Взяв константы α_ρ , λ и κ из условий (ρ.3), (w.3) и леммы 3 соответственно, обозначим

$$\kappa_1 = 1 + \alpha_\rho \kappa \sqrt{\lambda(1 + \vartheta - t_0)}, \quad \kappa_2 = \kappa_1(\vartheta - t_0) + \alpha_\rho(\sqrt{\lambda} + 1)\sqrt{1 + \vartheta - t_0}. \quad (6.4)$$

Пусть

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon_* = (\zeta/\kappa_2)^2, \quad 0 < \delta \leq \delta_*(\varepsilon) = \delta_1(\varepsilon), \quad (6.5)$$

где $\delta_1(\varepsilon)$ выбрано в согласии с леммами 1, 2. Докажем неравенство

$$\rho(\tau_j, r_j^u[\cdot], \hat{x}[\tau_j] - \eta_j^u) \leq \rho(t_*, x_*[\cdot], 0) + \kappa_1 \sqrt{\varepsilon}(\tau_j - t_0), \quad j = \overline{1, J}, \quad (6.6)$$

где в согласии с (6.2) полагаем $r_j^u[\cdot] = r^u(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon)[\cdot]$, $\eta_j^u = \eta^u(\tau_j, x_{\tau_j}[\cdot], \varepsilon)$, а значение $\hat{x}[\tau_j]$ определяется по формуле (5.2).

При $j = 1$ в силу (3.1), (5.2) и (6.2), учитывая, что $(x_*[\cdot], 0) \in W(t_*, x_*[\cdot], \varepsilon)$, имеем

$$\rho(\tau_1, r_1^u[\cdot], \hat{x}[\tau_1] - \eta_1^u) = \rho(t_*, r^u(t_*, x_*[\cdot], \varepsilon)[\cdot], -\eta^u(t_*, x_*[\cdot], \varepsilon)) \leq \rho(t_*, x_*[\cdot], 0).$$

Пусть неравенство (6.6) справедливо при $j = k$. Докажем его при $j = k + 1$. Положим

$$\tau_* = \tau_k, \quad \tau^* = \tau_{k+1}, \quad y_*[\cdot] = z_*[\cdot] = r_k^u[\cdot], \quad \hat{y}_* = \hat{z}_* = \hat{x}[\tau_k] - \eta_k^u. \quad (6.7)$$

Пусть движение $y[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (4.3) порождено из позиции $(\tau_*, y_*[\cdot])$ реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, где $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ строится согласно правилу (5.7), а $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ выбирается из условия (ρ.4^u). Пусть движение $z[\tau_* - h[\cdot]\tau^*]$ системы (5.1) порождено из позиции $(\tau_*, z_*[\cdot])$ теми

же реализациями $p[\tau_*[\cdot]\tau^*]$, $q[\tau_*[\cdot]\tau^*]$ и движением $x[t_* - h[\cdot]\vartheta]$. По определению (6.1) стратегии U^* и в силу соотношения (3.2) реализация $u[t_*[\cdot]\vartheta]$ удовлетворяет условию (5.7). В согласии с (6.2) выполняется условие (5.16). Таким образом, по лемме 2 справедливо включение (5.17). Пользуясь этим включением, с учетом условий (ρ.2) и (6.2) выводим

$$\rho(\tau^*, r_{k+1}^u[\cdot], \hat{x}[\tau^*] - \eta_{k+1}^u) \leq \rho(\tau^*, z_{\tau^*}[\cdot], \hat{z}[\tau^*]). \quad (6.8)$$

Кроме того, согласно условию (w.3) имеем $\|x_t[\cdot] - z_t[\cdot]\|_C \leq \sqrt{\lambda\epsilon(\tau^*)} \leq \sqrt{\lambda\epsilon(\vartheta)}$, $t \in [\tau_*, \tau^*]$, откуда, опираясь на условие (ρ.3) и лемму 3, получаем

$$\rho(\tau^*, z_{\tau^*}[\cdot], \hat{z}[\tau^*]) \leq \rho(\tau^*, y_{\tau^*}[\cdot], \hat{y}[\tau^*]) + \alpha_\rho \kappa (\tau^* - \tau_*) \sqrt{\lambda\epsilon(\vartheta)}. \quad (6.9)$$

Объединяя неравенства (4.6), (6.8) и (6.9), и учитывая определение (5.5) функции $\epsilon(t)$ и выбор (6.4) числа κ_1 , приходим к оценке

$$\rho(\tau^*, r_{k+1}^u[\cdot], \hat{x}[\tau^*] - \eta_{k+1}^u) \leq \rho(\tau_*, y_*[\cdot], \hat{y}_*) + \kappa_1 \sqrt{\epsilon}(\tau^* - \tau_*).$$

Отсюда, учитывая неравенство (6.6) при $j = k$ и обозначения (6.7), заключаем, что неравенство (6.6) справедливо и при $j = k + 1$. Итак, неравенство (6.6) доказано для всех $j = \overline{1, J}$.

Из неравенства (6.6) при $j = J$, пользуясь условиями (ρ.3), (w.2), (w.3) и определением (6.4) числа κ_2 , выводим

$$\rho(\vartheta, x_\vartheta[\cdot], \hat{x}[\vartheta]) \leq \rho(\vartheta, r_J^u[\cdot], \hat{x}[\vartheta] - \eta_J^u) + \alpha_\rho \left(\|x_\vartheta[\cdot] - r_J^u[\cdot]\|_C + |\eta_J^u| \right) \leq \rho(t_*, x_*[\cdot], 0) + \kappa_2 \sqrt{\epsilon},$$

и далее с учетом обозначения (5.2) и условий (ρ.1), (ρ.2) получаем

$$\sigma(x_\vartheta[\cdot]) + \int_{t_*}^{\vartheta} \chi(\xi, x_\xi[\cdot], u[\xi], v[\xi]) d\xi = \sigma(x_\vartheta[\cdot]) + \hat{x}[\vartheta] = \rho(\vartheta, x_\vartheta[\cdot], \hat{x}[\vartheta]) \leq \rho(t_*, x_*[\cdot], 0) + \kappa_2 \sqrt{\epsilon}.$$

Отсюда, принимая во внимание выбор (6.5) числа ϵ , приходим к оценке (6.3). Лемма доказана.

Рассмотрим экстремальную стратегию управления второго игрока

$$V^* = V^*(t, w[\cdot], \epsilon) \in \operatorname{argmax}_{v \in V} \min_{u \in U} \left(\langle f(t, w[\cdot], u, v), s(t, r^v[\cdot], w[\cdot]) \rangle + \chi(t, w[\cdot], u, v) \eta^v \right), \quad (6.10)$$

$$(r^v[\cdot], \eta^v) = (r^v(t, w[\cdot], \epsilon)[\cdot], \eta^v(t, w[\cdot], \epsilon)) \in \operatorname{argmax}_{(r[\cdot], \eta) \in W(t, w[\cdot], \epsilon)} \rho(t, r[\cdot], \eta), \quad (t, w[\cdot]) \in G, \quad \epsilon > 0.$$

Лемма 5. *Имеет место неравенство*

$$\rho_v(V^*; t_*, x_*[\cdot]) \geq \rho(t_*, x_*[\cdot], 0), \quad (t_*, x_*[\cdot]) \in G.$$

Доказательство этой леммы по сути повторяет доказательство леммы 4. При этом требуется должным образом модифицировать леммы 1, 2 и вместо условия (ρ.4^u) воспользоваться условием (ρ.4^v).

Доказательство теоремы. Из определений (3.4) и (3.6) оптимальных гарантированных результатов, в силу неравенства (3.7) и лемм 4, 5 выводим цепочку неравенств

$$\rho_u^\circ(t_*, x_*[\cdot]) \leq \rho_u(U^*; t_*, x_*[\cdot]) \leq \rho(t_*, x_*[\cdot], 0) \leq \rho_v(V^*; t_*, x_*[\cdot]) \leq \rho_v^\circ(t_*, x_*[\cdot]) \leq \rho_u^\circ(t_*, x_*[\cdot]),$$

которая доказывает справедливость равенства (3.8) и оптимальность стратегий U^* и V^* .

Теорема доказана.

Отметим, что в работе не только установлено, что дифференциальная игра (1.1), (2.1) имеет цену и седловую точку в классе позиционных стратегий, но и указана подходящая модификация (6.1), (6.10) метода экстремального сдвига [6] для конфликтно-управляемых систем нейтрального типа (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр систем с последствием // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 2. С. 300–311.
4. **Осипов Ю.С.** Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 2. С. 195–201.
5. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
6. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
7. **Hale J.K., Cruz M.A.** Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems // Ann. Mat. Pura Appl. 1970. Vol. 85, no. 1. P. 63–81.
8. **Кряжимский А.В.** К теории позиционных дифференциальных игр сближения — уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, вып. 4. С. 779–782.
9. **Кряжимский А.В.** Об устойчивом позиционном управлении в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, вып. 6. С. 963–968.
10. **Максимов В.И.** Дифференциальная игра наведения для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Задачи динамического управления: сб. ст. / УНЦ АН СССР. Свердловск, 1981. С. 33–45.
11. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
12. **Беллман Р., Кук К.Л.** Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

Гомоюнов Михаил Игоревич
научный сотрудник

Поступила 25.12.2015

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук,
директор

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович
ведущий математик

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

УДК 517.977

**ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМ ПРОЦЕССОМ
ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХ¹****Н. Л. Григоренко, А. Е. Румянцев**

Для нелинейной модели движения твердого тела с дефицитом управляющих параметров и содержащей параметр помехи, предложено позиционное управление, переводящее систему из заданного начального состояния в заданное конечное. Приведены результаты численных расчетов динамики компонент фазового вектора и управлений.

Ключевые слова: терминальное управление, позиционное управление, динамические игры.

N. L. Grigorenko, A. E. Rumyantsev. Terminal control of a nonlinear process under disturbances.

We consider a nonlinear model of motion of a solid body with deficiency of control parameters. The model contains a disturbance parameter. We propose an open-loop control that takes the system from a given initial state to a given terminal state. Results of numerical calculations are presented for the dynamics of the components of the phase vector and of the controls.

Keywords: terminal control, open-loop control, dynamic game.

MSC: 34H05, 49N70, 49N90, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-113-121

Введение

Для задачи терминального управления нелинейной управляемой системой с нелинейной функцией наблюдения при принадлежности начальной точки процесса и вектора параметров системы известным множествам и отсутствии информации о том, какая точка из множества начальных состояний является истинной и какой параметр системы из множества параметров является истинным, в классе гарантирующих пакетов программ Ю.С. Осипова и А.В. Кряжковского [1;2], в работе [3] разработаны достаточные условия существования решения. Одним из требований таких условий является наличие свойства управляемости нелинейной системы при начальном и конечном условиях на фазовый вектор системы, принадлежащих заданному множеству. Настоящая работа посвящена обоснованию наличия такого свойства для нелинейной математической модели движения твердого тела в вертикальной плоскости при наличии ветровых возмущений. Методы решения задач терминального управления для такой модели, предложенные в работе [4], содержат конструкции управления, гарантирующего асимптотическую устойчивость траекторий системы относительно заданных конечных условий процесса.

Настоящая статья опирается на результаты [5] по решению задач позиционного управления, результаты работ по методам решения обратных задач динамики управляемых систем и содержит достаточные условия существования позиционного управления, решающего игровую задачу терминального управления за конечное время.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00539).

1. Задача терминального управления нелинейным процессом при наличии помех

В евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 происходит движение фазового вектора (x, z, θ) , удовлетворяющее уравнениям [6; 7]

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) &= -(u_1(t) - v(t)) \sin \theta(t), \\ \ddot{z}(t) &= (u_1(t) - v(t)) \cos \theta(t) - 1, \\ \ddot{\theta}(t) &= u_2(t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $t \in [0, T]$, $v(t) \in [-\sigma, \sigma]$ — параметр помехи, измеримая по Лебегу функция, $u_1(t), u_2(t)$ — управляющие параметры, измеримые по Лебегу функции, принадлежащие множеству $U_1(l, \rho, \rho_1) = \{(u_1, u_2): -\rho_1 \leq u_1 \leq \rho + \rho_1, |u_2| \leq l\}$, где l, ρ, ρ_1 — положительные константы. Параметр помехи заранее неизвестен. В момент времени t известны функции $v(s), x(s), z(s), \theta(s)$, $s \in [0, t]$. Заданы начальное положение системы (1.1)

$$x(0) = x_0, \quad z(0) = z_0, \quad \theta(0) = \theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, \quad (1.2)$$

и конечное положение

$$x(T) = x_T, \quad z(T) = z_T, \quad \theta(T) = \theta_T \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \dot{x}(T) = \dot{x}_T, \quad \dot{z}(T) = \dot{z}_T, \quad \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T. \quad (1.3)$$

Задача терминального управления на отрезке $[0, T]$ при наличии помехи [2; 8; 9, ч. III, с. 251] состоит в нахождении условий на параметры процесса (1.1) и краевые условия (1.2), (1.3), при которых существует момент времени T и управление $u = (u_1, u_2)$ в классе позиционных управлений [5, гл. 7, разд. 39; 10, гл. 1, разд. 5], переводящее систему (1.1) из положения (1.2) в малую окрестность конечного положения (1.3) за время T при любой допустимой реализации помехи.

2. Вспомогательная управляемая система. Построение управления

Будем считать выполненным для параметров ρ_1, σ следующее предположение:

Предположение 1. $\rho_1 > \sigma$.

Введем вспомогательную управляемую систему с фазовым вектором $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$, движение которого удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \ddot{w}_1(t) &= -q_1(t) \sin w_3(t), \\ \ddot{w}_2(t) &= q_1(t) \cos w_3(t) - 1, \\ \ddot{w}_3(t) &= q_2(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где $q_1(t), q_2(t)$ — параметры управления, принадлежащие множеству $U(l, \rho, \rho_1, \sigma) = U_1 \overset{*}{-} Q = \{(q_1, q_2): -\rho_1 + \sigma \leq q_1 \leq \rho + \rho_1 - \sigma, |q_2| \leq l\}$, $Q = \{(v, 0): |v| \leq \sigma\}$, $U_1 \overset{*}{-} Q$ — геометрическая разность множеств U_1 и Q [9, с. 331]. Краевые условия для системы (2.1) имеют вид

$$w_1(0) = x_0, \quad w_2(0) = z_0, \quad w_3(0) = \theta_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \dot{w}_1(0) = \dot{x}_0, \quad \dot{w}_2(0) = \dot{z}_0, \quad \dot{w}_3(0) = \dot{\theta}_0, \quad (2.2)$$

$$w_1(T) = x_T, \quad w_2(T) = z_T, \quad w_3(T) = \theta_T \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad \dot{w}_1(T) = \dot{x}_T, \quad \dot{w}_2(T) = \dot{z}_T, \quad \dot{w}_3(T) = \dot{\theta}_T. \quad (2.3)$$

Рассмотрим для управляемой системы (2.1) задачу нахождения условий на параметры процесса (2.1) и краевые условия (2.2), (2.3), при которых существует момент времени T и

управление $q = (q_1, q_2)$ в классе программных управлений [5, гл. 6, разд. 30; 10, гл. 1, разд. 2], переводящее систему (2.1) из положения (2.2) в конечное положение (2.3) за время T .

Приведем решение такой задачи для управляемой системы (2.1) при краевых условиях (2.2), (2.3).

Рассмотрим скалярные функции $\xi(t), \eta(t), t \in [0, T]$, в форме полиномов пятой степени по t , удовлетворяющих краевым условиям (1.2), (1.3) для компонент x, y системы (1.1) следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{pmatrix} = c_0 + tc_1 + t^2c_2(T) + t^3c_3(T) + t^2(T-t)^2c_4(T) + t^3(T-t)^2c_5(T), \quad (2.4)$$

где $c_0, \dots, c_5 \in \mathbb{R}^2$. Соответствующая производная имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}(t) \\ \dot{\eta}(t) \end{pmatrix} = c_1 + 2tc_2(T) + 3t^2c_3(T) + 2t(T-t)(T-2t)c_4(T) + t^2(T-t)(3T-5t)c_5(T).$$

Из краевых условий (1.2) и (1.3) получаем соотношения для параметров $c_0, c_1, c_2(T), c_3(T)$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix}, \\ \begin{cases} T^2c_2(T) + T^3c_3(T) &= \begin{pmatrix} x(T) - x(0) - Tx'(0) \\ y(T) - y(0) - Ty'(0) \end{pmatrix} = A, \\ 2Tc_2(T) + 3T^2c_3(T) &= \begin{pmatrix} x'(T) - x'(0) \\ y'(T) - y'(0) \end{pmatrix} = B, \end{cases} \\ c_2(T) &= \frac{3A - TB}{T^2}, \quad c_3(T) = \frac{TB - 2A}{T^3}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Вторая производная (2.4) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi}(t) \\ \ddot{\eta}(t) \end{pmatrix} = 2c_2(T) + 6tc_3(T) + 2(6t^2 - 6tT + T^2)c_4(T) + [6t(T-t)^2 - 12t^2(T-t) + 2t^3]c_5(T).$$

Далее мы пользуемся обозначениями

$$\ddot{\xi}(t) = r_1(t, T), \quad \ddot{\eta}(t) = r_2(t, T). \quad (2.6)$$

Найдем управления $q_1(t), q_2(t)$, при которых для компонент w_1, w_2 системы (1.1) выполнено соотношение (см. [11, гл. 4, разд. 4.2; 12, гл. 4, разд. 4.1])

$$\ddot{w}_1(t) = r_1(t, T), \quad \ddot{w}_2(t) = r_2(t, T). \quad (2.7)$$

Из (2.6) имеем

$$\begin{pmatrix} r_1(t, T) \\ r_2(t, T) \end{pmatrix} = 2c_2(T) + 6tc_3(T) + 2(6t^2 - 6tT + T^2)c_4(T) + (6T^2t - 24Tt^2 + 20t^3)c_5(T). \quad (2.8)$$

Утверждение 1. Пусть векторы $c_2(T), c_3(T)$ определены согласно (2.5) и зависимость векторов c_4, c_5 от T имеет вид

$$c_4(T) = \frac{k_1}{T^3}, \quad c_5(T) = \frac{k_1}{T^4},$$

где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\max_{t \in [0, T]} |r_1(t, T)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\max_{t \in [0, T]} |r_2(t, T)| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство следует из утверждений (2.5), (2.8). \square

Выражения для первых и вторых производных по t функций $r_1(t, T)$, $r_2(t, T)$, необходимые далее для нахождения векторов c_4, c_5 и управления u_2 имеют вид

$$\begin{pmatrix} \dot{r}_1(t, T) \\ \dot{r}_2(t, T) \end{pmatrix} = 6c_3(T) + 12(2t - T)c_4(T) + (6T^2 - 48Tt + 60t^2)c_5(T), \quad (2.9)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{r}_1(t, T) \\ \ddot{r}_2(t, T) \end{pmatrix} = 24c_4(T) + (-48T + 120t)c_5(T). \quad (2.10)$$

При заданных $r_1(t, T), r_2(t, T)$ в силу (2.1), (2.7) определены функция

$$q_1(t, T) = \sqrt{r_1^2(t, T, c_4, c_5) + (r_2(t, T, c_4, c_5) + 1)^2} \quad (2.11)$$

и функция $w_3(t)$, являющаяся аргументом вектор-функции $(-r_1(t), r_1(t) + 1)$ (см. [13, гл. III, разд. 55]), удовлетворяющая соотношениям

$$\sin w_3(t) = \frac{-r_1(t, T)}{\sqrt{r_1^2(t, T) + (r_2(t, T) + 1)^2}}, \quad \cos w_3(t) = \frac{r_2(t, T) + 1}{\sqrt{r_1^2(t, T) + (r_2(t, T) + 1)^2}}, \quad t \in [0, T].$$

В силу утверждения 1 при выборе параметров $c_4(T), c_5(T)$ в форме, описанной в утверждении 1, при достаточно большом T выполнено условие $q_1(t, T) \neq 0$, $t \in [0, T]$, аргумент $w_3(t)$ существует и определен с точностью до слагаемого, кратного 2π . Доказывается (см. [13, гл. III, разд. 55]), что при наложенных условиях аргумент $w_3(t)$ вектор-функции $(-r_1(t), r_1(t) + 1)$ является дважды дифференцируемой функцией и ее производные вычисляются как

$$\begin{aligned} \dot{w}_3(t) &= \frac{r_1 \dot{r}_2 - \dot{r}_1(r_2 + 1)}{r_1^2 + (r_2 + 1)^2}, \\ q_2(t) = \ddot{w}_3(t) &= \frac{r_1 \ddot{r}_2 - \ddot{r}_1(r_2 + 1)}{r_1^2 + (r_2 + 1)^2} + 2 \frac{[r_1 \dot{r}_1 + \dot{r}_2(r_2 + 1)][\dot{r}_1(r_2 + 1) - r_1 \dot{r}_2]}{(r_1^2 + (r_2 + 1)^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Так как при $c_4(T), c_5(T)$, имеющих вид $c_4(T) = k_1/T^3$, $c_5(T) = k_1/T^4$, и достаточно большом T $r_2(t, T) + 1 > 0$, то компоненты векторов c_4, c_5 выберем из условий $w_3(0, r_1(0, T), r_2(0, T)) = \theta_0$, $w_3(T, r_1(T, T), r_2(T, T)) = \theta_T$, $\dot{w}_3(0, r_1(0, T), r_2(0, T)) = \dot{\theta}_0$, $\dot{w}_3(T, r_1(T, T), r_2(T, T)) = \dot{\theta}_T$, которые имеют вид

$$\operatorname{tg}(\theta_0)(r_2(0, T) + 1) + r_1(0, T) = 0, \quad (2.13)$$

$$\operatorname{tg}(\theta_T)(r_2(T, T) + 1) + r_1(T, T) = 0, \quad (2.14)$$

$$\dot{\theta}_0 [(r_1^2(0, T) + (r_2(0, T) + 1)^2)] = r_1(0, T) \dot{r}_2(0, T) - \dot{r}_1(0, T)(r_2(0, T) + 1), \quad (2.15)$$

$$\dot{\theta}_T [(r_1^2(T, T) + (r_2(T, T) + 1)^2)] = r_1(T, T) \dot{r}_2(T, T) - \dot{r}_1(T, T)(r_2(T, T) + 1). \quad (2.16)$$

Обозначим

$$A_1 = \operatorname{tg}(\theta_0), \quad A_2 = \operatorname{tg}(\theta_T), \quad A_3 = \dot{\theta}_0, \quad A_4 = \dot{\theta}_T,$$

$$h(A_1, A_2, A_3, A_4, T) = T^2 A_3 A_4 (A_1^2 A_2^2 + A_1^2 + A_2^2 + 1) - 9(A_1 - A_2)^2. \quad (2.17)$$

Рассмотрим случай краевых условий (2.2), (2.3), удовлетворяющих соотношениям

$$\cos \theta(0) \neq 0, \quad \cos \theta(T) \neq 0, \quad \dot{\theta}(0) \neq 0, \quad \dot{\theta}(T) \neq 0. \quad (2.18)$$

З а м е ч а н и е. При выполнении условий (2.18) выбором нефиксированного параметра T можно добиться выполнения соотношения $h(A_1, A_2, A_3, A_4, T) \neq 0$.

Обозначим компоненты векторов $c_i(T)$ через $c_{i1}(T), c_{i2}(T)$, $i = 2, 3, 4, 5$. Учитывая (2.8), решение системы уравнений (2.13)–(2.16) относительно переменных $c_4(T) = (c_{41}(T), c_{42}(T))$, $c_5(T) = (c_{51}(T), c_{52}(T))$ имеет вид

$$c_{41}(T) = - \left(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^2 c_{21} + 6A_1^2 A_2^2 A_4 T^2 c_{32} - 6A_1^2 A_2^2 A_4 T c_{22} + A_1^2 A_3 A_4 T^2 c_{21} + 6A_1 A_2^2 A_4 T^2 c_{31} \right. \\ \left. + A_2^2 A_3 A_4 T^2 c_{21} - 3A_1^2 A_2^2 A_4 T + 6A_1^2 A_4 T^2 c_{32} - 6A_1 A_2^2 A_4 T c_{21} - 72A_1^2 A_2 T c_{32} - 6A_1^2 A_4 T c_{22} \right. \\ \left. + 72A_1 A_2^2 T c_{32} + 6A_1 A_4 T^2 c_{31} + A_3 A_4 T^2 c_{21} - 18A_1^2 A_2 c_{22} - 3A_1^2 A_4 T - 72A_1^2 T c_{31} + 18A_1 A_2^2 c_{22} \right. \\ \left. + 72A_1 A_2 T c_{31} - 6A_1 A_4 T c_{21} - 9A_1^2 A_2 - 27A_1^2 c_{21} + 9A_1 A_2^2 + 36A_1 A_2 c_{21} - 9A_2^2 c_{21} \right) \\ / (T^2 h(A_1, A_2, A_3, A_4, T)); \quad (2.19)$$

$$c_{42}(T) = - \left(2A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^2 c_{22} + A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^2 + 2A_1^2 A_3 A_4 T^2 c_{22} - 12A_1 A_2^2 A_4 T^2 c_{32} \right. \\ \left. + 2A_2^2 A_3 A_4 T^2 c_{22} + A_1^2 A_3 A_4 T^2 + 12A_1 A_2^2 A_4 T c_{22} + A_2^2 A_3 A_4 T^2 - 12A_2^2 A_4 T^2 c_{31} \right. \\ \left. + 6A_1 A_2^2 A_4 T - 12A_1 A_4 T^2 c_{32} + 12A_2^2 A_4 T c_{21} + 2A_3 A_4 T^2 c_{22} + 144A_1 A_2 T c_{32} \right. \\ \left. + 12A_1 A_4 T c_{22} - 144A_2^2 T c_{32} + A_3 A_4 T^2 - 12A_4 T^2 c_{31} - 18A_1^2 c_{22} + 72A_1 A_2 c_{22} \right. \\ \left. + 6A_1 A_4 T + 144A_1 T c_{31} - 54A_2^2 c_{22} - 144A_2 T c_{31} + 12A_4 T c_{21} - 9A_1^2 \right. \\ \left. + 36A_1 A_2 + 36A_1 c_{21} - 27A_2^2 - 36A_2 c_{21} \right) / (2T^2 h(A_1, A_2, A_3, A_4, T)); \quad (2.20)$$

$$c_{51}(T) = -3 \left(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^3 c_{31} + 8A_1^2 A_2^2 A_3 T^2 c_{32} - 2A_1^2 A_2^2 A_4 T^2 c_{32} + A_1^2 A_3 A_4 T^3 c_{31} \right. \\ \left. + A_2^2 A_3 A_4 T^3 c_{31} + 2A_1^2 A_2^2 A_3 T c_{22} + 2A_1^2 A_2^2 A_4 T c_{22} + 8A_1^2 A_2 A_3 T^2 c_{31} - 2A_1 A_2^2 A_4 T^2 c_{31} \right. \\ \left. + A_1^2 A_2^2 A_3 T + A_1^2 A_2^2 A_4 T + 2A_1^2 A_2 A_3 T c_{21} - 2A_1^2 A_4 T^2 c_{32} + 2A_1 A_2^2 A_4 T c_{21} \right. \\ \left. + 8A_2^2 A_3 T^2 c_{32} + A_3 A_4 T^3 c_{31} + 18A_1^2 A_2 T c_{32} + 2A_1^2 A_4 T c_{22} - 18A_1 A_2^2 T c_{32} \right. \\ \left. - 2A_1 A_4 T^2 c_{31} + 2A_2^2 A_3 T c_{22} + 8A_2 A_3 T^2 c_{31} + 12A_1^2 A_2 c_{22} + A_1^2 A_4 T \right. \\ \left. + 15A_1^2 T c_{31} - 12A_1 A_2^2 c_{22} - 12A_1 A_2 T c_{31} + 2A_1 A_4 T c_{21} + A_2^2 A_3 T - 3A_2^2 T c_{31} \right. \\ \left. + 2A_2 A_3 T c_{21} + 6A_1^2 A_2 + 6A_1^2 c_{21} - 6A_1 A_2^2 - 6A_2^2 c_{21} \right) / (T^3 h(A_1, A_2, A_3, A_4, T)); \quad (2.21)$$

$$c_{52}(T) = -3 \left(A_1^2 A_2^2 A_3 A_4 T^3 c_{32} + A_1^2 A_3 A_4 T^3 c_{32} + A_2^2 A_3 A_4 T^3 c_{32} - 8A_1^2 A_2 A_3 T^2 c_{32} \right. \\ \left. + 2A_1 A_2^2 A_4 T^2 c_{32} - 2A_1^2 A_2 A_3 T c_{22} - 8A_1^2 A_3 T^2 c_{31} - 2A_1 A_2^2 A_4 T c_{22} + 2A_2^2 A_4 T^2 c_{31} \right. \\ \left. + A_3 A_4 T^3 c_{32} - A_1^2 A_2 A_3 T - 2A_1^2 A_3 T c_{21} - A_1 A_2^2 A_4 T + 2A_1 A_4 T^2 c_{32} \right. \\ \left. - 2A_2^2 A_4 T c_{21} - 8A_2 A_3 T^2 c_{32} - 3A_1^2 T c_{32} - 12A_1 A_2 T c_{32} - 2A_1 A_4 T c_{22} \right. \\ \left. + 15A_2^2 T c_{32} - 2A_2 A_3 T c_{22} - 8A_3 T^2 c_{31} + 2A_4 T^2 c_{31} - 6A_1^2 c_{22} \right. \\ \left. - A_1 A_4 T - 18A_1 T c_{31} + 6A_2^2 c_{22} - A_2 A_3 T + 18A_2 T c_{31} - 2A_3 T c_{21} \right. \\ \left. - 2A_4 T c_{21} - 3A_1^2 - 12A_1 c_{21} + 3A_2^2 + 12A_2 c_{21} \right) / (T^3 h(A_1, A_2, A_3, A_4, T)). \quad (2.22)$$

Утверждение 2. При выполнении условий (2.18) справедливы соотношения

$$T^2 c_{4j}(T) \rightarrow_{T \rightarrow \infty} 0, \quad T^3 c_{5j}(T) \rightarrow_{T \rightarrow \infty} 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.23)$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\min_{t \in [0, T]} q_1(t, T) \geq 1 - \sqrt{2}\varepsilon, \quad \max_{t \in [0, T]} q_1(t, T) \leq 1 + \sqrt{2}\varepsilon, \quad \max_{t \in [0, T]} |q_2(t, T)| \leq \ell\varepsilon, \quad (2.24)$$

ℓ — положительная константа.

Доказательство. Соотношения (2.23) следуют из (2.19)–(2.22) с учетом (2.5), (2.17). Соотношения (2.24) следуют из (2.9)–(2.11), (2.12) и (2.23). \square

Определение 1. Скажем, что краевые условия (2.2), (2.3) удовлетворяют условию “общего положения” на отрезке $[0, T]$, если для них выполнены соотношения (2.18).

Обозначим $L(T) = \max_{t \in [0, T]} q_2(t, T)$, $R(T) = \max_{t \in [0, T]} q_1(t, T)$.

Утверждение 3. Если краевые условия (2.2), (2.3) удовлетворяют условию “общего положения”, то управление (2.11), (2.12) решает задачу перевода системы (2.1) из начального положения (2.2) в конечное положение (2.3) на отрезке $[0, T]$ с параметрами $l \geq L(T)$, $\rho \geq R(T)$.

Доказательство проводится непосредственной подстановкой управлений (2.11), (2.12) в систему (2.1). \square

Предположение 2. Параметры l, ρ, T удовлетворяют условиям $l \geq L(T)$, $\rho \geq R(T)$.

Рассмотрим случаи краевых условий (2.2), (2.3), когда соотношения (2.18) не выполнены:

- 1) $A_3 = 0$, $A_4 \neq 0$; 2) $A_4 = 0$, $A_3 \neq 0$; 3) $A_3 = 0$, $A_4 = 0$; 4) $\cos \theta(0) = 0$; 5) $\cos \theta(T) = 0$.
(2.25)

Определение 2. Управлением типа N ($N = N(t_1, t_2, T)$) назовем управление

$$\begin{cases} (\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)), & t \in [0, t_1], \\ (q_1(t), q_2(t)), & t \in [t_1, T - t_2], \\ (\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)), & t \in [T - t_2, T], \end{cases}$$

где $\bar{q}_1(t) = \rho/2$, $\bar{q}_2(t) = l/2$, $t \in [0, t_1]$, $0 \leq t_1 \ll T$; $\hat{q}_1(t) = \rho/2$, $\hat{q}_2(t) = l/2$, $t \in [T - t_2, T]$, $0 \leq t_2 \ll T$, $(q_1(t), q_2(t))$ выбраны согласно (2.11), (2.12). При этом не исключены случаи $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$.

Утверждение 4. Если для краевых условий (2.2), (2.3) выполнена одна из комбинаций соотношений 1)–5) (2.25), то существуют малые неотрицательные константы t_1, t_2 такие, что управление типа N , применяемое для краевых условий системы (2.1) в моменты 0 и T , краевых условий в момент t_1 : $(w_3(t_1), \dot{w}_3(t_1))$, являющихся решением системы (2.1) при управлениях $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)$ в момент t_1 , и краевых условиях в момент $T - t_2$: $(w_3(T - t_2), \dot{w}_3(T - t_2))$, являющихся решением системы (2.1), вычисленном в обратном времени при управлениях $\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)$ с граничными условиями $w_3(T), \dot{w}_3(T)$, гарантирует приведение траектории системы (2.1) в конечное положение (2.3).

Доказательство. Приведем доказательство, например, для случая выполнения соотношений 3)–5) (2.25).

При управлении $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)$ для фазовой переменной $w_3(t)$ (2.1) и начальных условий $w_3(0), \dot{w}_3(0)$ в момент t_1 выполнены соотношения

$$\dot{w}_3(t_1) = \dot{w}_3(0) + \frac{lt_1}{2}, \quad w_3(t_1) = w_3(0) + \dot{w}_3(0)t_1 + \frac{lt_1^2}{4}.$$

При управлении $\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)$ для краевых условий $w_3(T - t_2), \dot{w}_3(T - t_2), w_3(T), \dot{w}_3(T)$ выполнены соотношения

$$\dot{w}_3(T - t_2) = \dot{w}_3(T) - \frac{lt_2}{2}, \quad w_3(T - t_2) = w_3(T) - \dot{w}_3(T)t_2 - \frac{lt_2^2}{4}.$$

В случае выполнения соотношений 3)–5) (2.25): $\dot{w}_3(0) = 0$, $\dot{w}_3(T) = 0$, $w_3(0) = w_3(T) + \pi n$, $n \in Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. При применении для $t \in [0, t_1]$ управлений $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t)$ получаем

$$\dot{w}_3(t_1) = \frac{lt_1}{2} \neq 0, \quad w_3(t_1) = w_3(0) + \frac{lt_1^2}{4}.$$

При применении для $t \in [T - t_2, T]$ управления $\hat{q}_1(t), \hat{q}_2(t)$ имеем

$$\dot{w}_3(T - t_2) = -\frac{lt_2}{2} \neq 0, \quad w_3(T - t_2) = w_3(T) - \dot{w}_3(T - t_2)t_2 - \frac{lt_2^2}{4}.$$

При $t_2 = 2t_1$, $3t_1^2 < \pi/10$ получаем $w_3(t_1) \neq w_3(T - t_2) + \pi k$, $k \in Z$. Для краевых условий $w_3(t_1)$, $\dot{w}_3(t_1)$, $w_3(T - t_2)$, $\dot{w}_3(T - t_2)$ выполнены условия (2.18), краевую задачу для которых решает управление (2.11), (2.12).

Доказательство утверждения 4 для других комбинаций условий (2.25) проводится подобным образом. Управление типа N при всех комбинациях условий (2.25) имеет не более двух переключений.

Из вышесказанного вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 1. При выполнении предположений 1 и 2 существуют управление $q_1(t), q_2(t)$ типа N и момент $T > 0$ такие, что соответствующая траектория системы (2.1), начинающаяся из положения (2.2), приходит в положение (2.3) в момент T .

3. Построение позиционного управления

Запишем систему (1.1) в форме уравнений, разрешенных относительно производных

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & \dot{x}_2 = -(u_1 - v) \sin(\theta), \\ \dot{z}_1 = z_2, & \dot{z}_2 = (u_1 - v) \cos(\theta) - 1, \\ \dot{\theta}_1 = \theta_2, & \dot{\theta}_2 = u_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Обозначим $y = (x_1, x_2, z_1, z_2, \theta_1, \theta_2)$, $f(t, y, u, v)$ — правая часть системы уравнений (3.1), $u = (u_1, u_2)$, $w = (w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{22}, w_{31}, w_{32}) = (w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2, w_3, \dot{w}_3)$ (2.1).

Для системы (3.1) выполнено условие седловой точки в маленькой игре [5, гл. III, разд. 12]. Рассмотрим разбиение отрезка $[0, T]$ на полуинтервалы $[\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N$, где для всех i выполнено условие $\tau_{i+1} - \tau_i \leq \delta$ при достаточно малом δ .

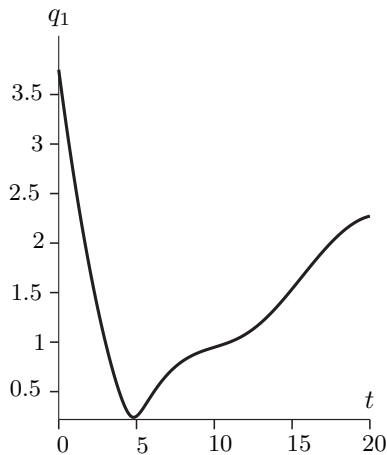


Рис. 1. $q_1(t)$.

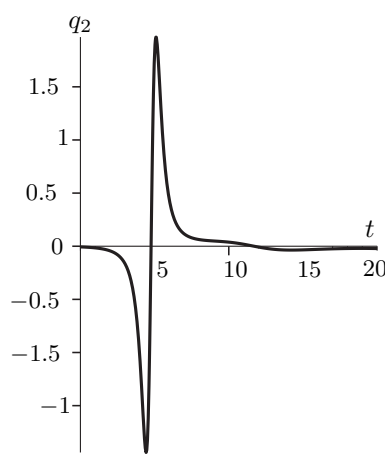


Рис. 2. $q_2(t)$.

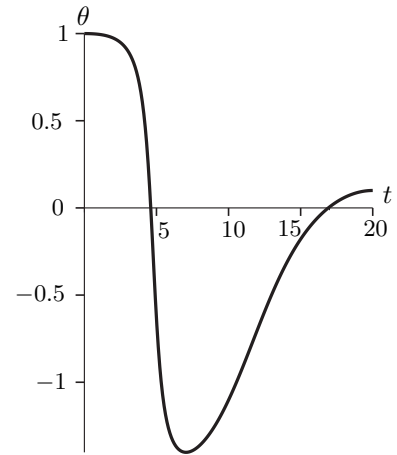
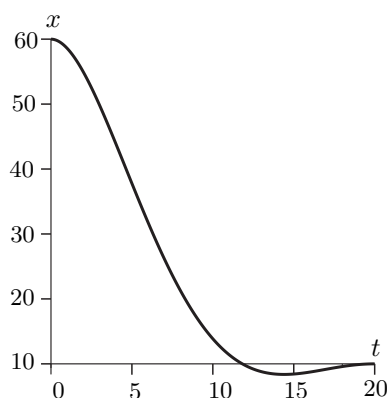
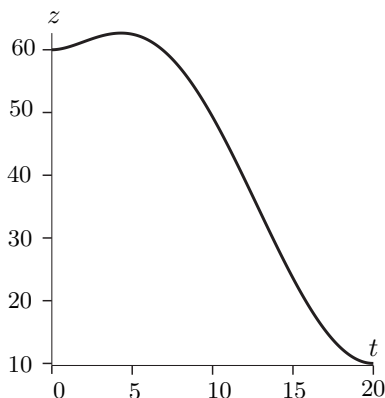
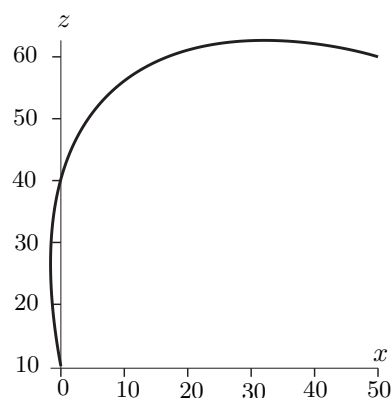


Рис. 3. $\theta_1(t)$.

Рис. 4. $x(t)$.Рис. 5. $z(t)$.Рис. 6. $z(x)$.

Для построения позиционного управления в игровой задаче управления для системы (3.1) воспользуемся процедурой управления с поводьрем [10, гл. I, разд. 5], где в качестве системы, порождающей движения поводьря $w(t)$, будет выступать система (2.1) при управлении $q_1(t), q_2(t)$, выбраном согласно (2.11), (2.12).

Управление $u = (u_1, u_2)$ в системе (3.1) выберем по схеме экстремального прицеливания из условия

$$\max_{v \in V} \langle (y(\tau_i) - w(\tau_i)), f(\tau_i, y(\tau_i), u^{(i)}, v) \rangle = \min_{u \in U} \max_{v \in V} \langle (y(\tau_i) - w(\tau_i)), f(\tau_i, y(\tau_i), u, v) \rangle,$$

а в управление $v(t)$ помехи подставим реализовавшуюся в этот момент помеху. Согласно лемме 2.8.1 [10] при таком управлении системой (3.1) в момент прихода траектории поводьря в конечную позицию фазовый вектор системы (3.1) окажется в малой окрестности целевой точки (1.3).

Таким образом, справедлива

Теорема 2. При выполнении предположений 1 и 2 существуют позиционное управление $u(t) = (u_1(t, y(t), w(t)), u_2(t, y(t), w(t)))$ и момент времени $T > 0$ такие, что применение управления $u(t)$ гарантирует приведение траектории системы (3.1) из положения (1.2) в малую окрестность положения (1.3) в момент T при любой допустимой помехе.

4. Результаты численного расчета управлений и траекторий

Приведем результаты численного расчета управлений и траекторий системы (1.1) для краевых условий

$$\begin{aligned} x(0) = 50, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 0, \quad z(0) = 60, \quad \dot{z}(0) = 0.01, \quad z(T) = 1, \quad \dot{z}(T) = 0.01, \\ \theta(0) = 1, \quad \dot{\theta}(0) = 0, \quad \theta(T) = 0.1, \quad \dot{\theta}(T) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

параметров $\ell = 2.4$, $\rho = 5$, $\rho_1 = 0.11$, $\sigma = 0.1$. Пусть параметр помехи имеет вид $v(t) = F_w \sin(\beta(t) - \theta(t))$. По краевым условиям (4.1) вычисляем $L(T), R(T)$ и находим значение $T = 20$, при котором выполнено предположение 2: $L(20) = 2.1, R(20) = 4.2$. Положим $F_w = 0.1$, $\beta(t) = \pi/3 + \sin(t)$. Графики управлений $q_1(t), q_2(t)$ и траекторий $x(t), z(t), \theta(t), z(x)$ при $T = 20$ приведены на рис. 1–6. Траектория игрового процесса при таком варианте помехи, при шаге 0.01 разбиения интервала $[0, T]$, неотличима на графике от траектории поводьря.

Численные расчеты игрового процесса другого варианта помехи $F_w = 2.5$, $\beta(t) = \pi/3 + 5 \sin(5t)$, не удовлетворяющего предположению 1, показывают, что траектория игры при такой помехе и управлении (2.14), (2.16) не попадает в момент $T = 20$ в малую окрестность целевой точки.

Авторы благодарят М. С. Никольского за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
2. **Кряжимский А. В., Осипов Ю.С.** Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
3. **Григоренко Н.Л., Румянцев А.Е.** Об одном классе задач управления при неполной информации // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 76–85.
4. **Castillo Garcia P., Lozano P., Dzul A.** Modelling and control of mini-flying machines. London: Springer-Verlag, 2005. 259 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
6. **Hauser J., Sastry S., Meyer G.** Nonlinear control design for slightly nonminimum phase systems: Application to V/STOL aircraft // J. IFAC Automatica. 1992. Vol. 28, no. 4. P. 665–679.
7. **Olfati-Saber R.** Global configuration stabilization for the VTOL aircraft with strong input coupling // IEEE Trans. Automat. Control. 2002. Vol. 47, no. 11. С. 1949–1952.
8. **Кряжимский А. В., Стрелковский Н.В.** Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 168–177.
9. **Понтрягин Л.С.** Избранные труды. М.: МАКС Пресс, 2004. 552 с.
10. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 285 с.
11. **Батенко А.П.** Системы терминального управления. М.: Радио и связь, 1984. 160 с.
12. **Бойчук Л.М.** Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. М.: Энергия, 1971. 113 с.
13. **Болтянский В.Г.** Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

Григоренко Николай Леонтьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: grigor@cs.msu.su

Поступила 10.12.2015

Румянцев Алексей Евгеньевич
аспирант
факультет ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: rumiantcev@gmail.com

УДК 517.977.1

**О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛИПШИЦЕВОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЗАДАЧЕ
УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ФАЗОВЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ¹****М. И. Гусев**

Рассматривается нелинейная управляемая система с фазовыми ограничениями, заданными конечной системой нелинейных неравенств. Исследуется задача о построении в малой окрестности границы фазовых ограничений позиционного управления, удерживающего траектории замкнутой системы в данной окрестности. При определенных предположениях доказано существование позиционного управления в виде липшицевой функции от состояния системы.

Ключевые слова: фазовые ограничения, обратная связь, задача выживаемости, инвариантность.

M. I. Gusev. On the existence of a Lipschitz feedback control in a control problem with state constraints.

We consider a nonlinear control system with state constraints given as a solution set for a finite system of nonlinear inequalities. The problem of constructing a feedback control that ensures the viability of trajectories of the closed system in a small neighborhood of the boundary of the state constraints is studied. Under some assumptions, the existence of a feedback control in the form of a Lipschitz function of the state of the system is proved.

Keywords: state constraints, feedback control, viability problem, invariance.

MSC: 93B03, 92B52, 93C10

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-122-128

1. Введение и постановка задачи

Работа посвящена позиционной постановке задачи выживаемости [1; 2] для управляемой системы с фазовыми ограничениями. Исследование вопросов выживаемости множеств относительно управляемых систем и дифференциальных включений играет важную роль во многих задачах теории управления и дифференциальных играх [3–6]. В данной статье рассматривается нелинейная управляемая система с фазовыми ограничениями, заданными конечной системой нелинейных неравенств. Функции, задающие систему ограничений, предполагаются непрерывно дифференцируемыми, а их градиенты — удовлетворяющими условию Липшица. В точках границы фазовых ограничений касательный конус к ограничениям имеет непустое пересечение с множеством скоростей системы. Это условие обеспечивает слабую инвариантность фазовых ограничений относительно уравнений системы: для любого начального вектора, удовлетворяющего фазовым ограничениям, существует траектория системы, остающаяся внутри ограничений (являющаяся выживающей). Исследуется задача о построении позиционного управления в виде липшицевой функции от состояния системы, которое удерживает траектории системы в малой окрестности фазовых ограничений. Такое управление используется в методе снятия фазовых ограничений при построении множеств достижимости нелинейных управляемых систем [7]. В работе [7] было доказано существование липшицевой обратной связи в частном случае линейных по управлению систем с эллипсоидальным ограничением на управление и фазовыми ограничениями, заданными одним гладким неравенством. В данной работе этот результат обобщается на общий случай.

¹Работа выполнена при поддержке комплексной программы УРО РАН (проект 15-16-1-8) и РФФИ (проект 15-01-05950).

Рассматривается управляемая система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq \theta, \quad x(t_0) = x^0, \quad (1.1)$$

$x \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in U$ п.в. $t \in [t_0, \theta]$ — управление. Множество U — компакт в \mathbb{R}^r , управления — измеримые по Лебегу функции $u: [t_0, \theta] \rightarrow U$.

Далее используются следующие обозначения. Для вещественной матрицы A через A^\top мы обозначаем транспонированную матрицу, 0 обозначает нулевой вектор подходящей размерности либо число ноль. Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ $(x, y) = x^\top y$ — скалярное произведение векторов, $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ — евклидова норма, $B_r(\bar{x}): B_r(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n: \|x - \bar{x}\| \leq r\}$ — шар радиуса $r > 0$ с центром в точке \bar{x} . Для $S \subset \mathbb{R}^n$ символами ∂S , $\text{int}S$, $\text{co}S$ обозначаются соответственно граница, внутренность и выпуклая оболочка S , $\nabla g(x)$ — градиент функции $g(x)$ в точке x , $h(A, B)$ — хаусдорфово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$.

Далее предполагается, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям

- 1) функция $f(x, u): \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна по (x, u) и локально липшицева по x равномерно по $u \in U$;
- 2) существует $C > 0$ такое, что $\|f(x, u)\| \leq C(1 + \|x\|)$, $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times U$.

При указанных условиях множество траекторий системы (1.1), отвечающих заданному начальному условию $x(t_0) = x^0$, ограничено. Система (1.1) представима в виде эквивалентного дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x), \quad x(t_0) = x^0,$$

где $F(x) := f(x, U)$ — множество скоростей системы (1.1) для данного $x \in \mathbb{R}^n$. Многозначное отображение $F: \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ компактнозначно и локально липшицево в метрике Хаусдорфа: для любого \bar{x} существуют $\varepsilon > 0, L > 0$ такие, что $h(F(x), F(y)) \leq L\|x - y\|$ для любых $x, y \in B_\varepsilon(\bar{x})$. Решениями дифференциального включения являются абсолютно непрерывные функции $x: [t_0, \theta] \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ для почти всех t .

Пусть заданы фазовые ограничения, имеющие вид $x(t) \in S$, $t \in [t_0, \theta]$, где S — компактное множество в \mathbb{R}^n . Далее мы рассматриваем в качестве S множество, заданное системой неравенств

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n: g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m\},$$

где $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции, градиенты которых локально липшицевы.

Обозначим через $x(t, u(\cdot), x^0)$ решение системы (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Определим функцию $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \max_{1 \leq i \leq m} g_i(x), \quad (1.2)$$

функция $g(x)$ липшицева, и, очевидно, $S = \{x \in \mathbb{R}^n: g(x) \leq 0\}$.

Для $x \in \mathbb{R}^n$ положим $I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\}: g_i(x) = g(x)\}$, $I(x)$ — это множество тех номеров i , на которых достигается максимум в (1.2). Далее будем считать выполненным следующее условие.

Предположение 1. В точках $x \in \partial S$ градиенты $\nabla g_i(x)$, $i \in I(x)$, положительно линейно независимы.²

²Векторы $a^i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, называются положительно линейно независимыми, если для любых $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, из равенства $\sum_{i=1}^m \alpha_i a^i = 0$ следует, что $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, m$.

При выполнении данного условия справедливо равенство $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$. Кроме того, из компактности S следует, что существует $\sigma > 0$, для которого множество уровня $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq \sigma\}$ компактно. В дальнейших построениях мы будем предполагать компактность этих множеств, не оговаривая это особо.

Далее используется следующее условие (см., например, [9–11]):

$$\min_{f \in \text{co}F(x)} \max_{i \in I(x)} (\nabla g_i(x), f) < 0 \quad \forall x \in \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}. \quad (1.3)$$

Это условие эквивалентно тому, что для каждого $x \in \partial S$

$$\text{co}F(x) \cap \text{int}T_S(x) \neq \emptyset,$$

где $T_S(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \lim_{\xi \rightarrow +0} \xi^{-1}d(x + \xi d, S) = 0\}$ — касательный конус к множеству S в точке x , $d(x, S)$ — расстояние от x до множества S . Таким образом, в каждой точке x границы S существует вектор из $\text{co}F(x)$, направленный внутрь S .

Последнее свойство обеспечивает слабую инвариантность множества S относительно решений дифференциального включения $\dot{x}(t) \in \text{co}F(x(t))$, $x(t_0) = x^0$: для любого начального вектора $x^0 \in S$ существует траектория дифференциального включения $x(t) \in S$, $t_0 \leq t$.

Из компактности S и непрерывности функций $g_i(x)$, $\nabla g_i(x)$ следует, что если выполнено условие (1.3), то существуют $\sigma_0 > 0$, $\rho_0 > 0$ такие, что неравенство

$$\min_{f \in \text{co}F(x)} \max_{i \in I(x)} (\nabla g_i(x), f) < -\rho_0 \quad (1.4)$$

справедливо для всех точек множества

$$S_{\sigma_0} = \{x : 0 \leq g(x) \leq \sigma_0\}.$$

Далее мы будем рассматривать следующую задачу.

З а д а ч а. Найти $\sigma > 0$, $\rho > 0$ и липшицеву функцию $\bar{f}(x)$, определенную на множестве S_σ , такие, что выполняются условия

$$\max_{i \in I(x)} (\nabla g_i(x), \bar{f}(x)) < -\rho, \quad \bar{f}(x) \in \text{co}F(x) \quad \forall x \in S_\sigma. \quad (1.5)$$

Применительно к управляемой системе (1.1) с выпуклым годографом $F(x) = f(x, U)$ данная задача эквивалентна нахождению позиционного управления $u(x) \in U$, $x \in S_\sigma$, такого, что правая часть системы (1.1) $\bar{f}(x) = f(x, u(x))$ удовлетворяет условию (1.5), и, таким образом, обеспечивающего выживаемость решений в окрестности S_σ фазовых ограничений.

Такое позиционное управление используется в процедуре снятия фазовых ограничений при построении множества достижимости. В работе [7] было показано его существование для линейных по управлению систем с эллипсоидальными ограничениями на управление при $m = 1$. В данной работе мы докажем теорему существования в общем случае.

2. Основной результат

Итак, пусть выполнено условие (1.3). Для любого $\sigma > 0$ множество S_σ — непустой компакт. Для $k > 0$, $\rho > 0$ определим следующее многозначное отображение

$$F_k^\rho(x) = \{f \in \text{co}F(x) : (\nabla g_i(x), f) < -\rho - k(g_i(x) - g(x)), i = 1, \dots, m\}$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть выполнено условие (1.3) и $0 < \rho \leq \rho_0/4$. Тогда найдутся $k > 0$, $0 < \bar{\sigma} \leq \sigma_0$, такие, что $\forall \sigma \leq \bar{\sigma}$

$$F_k^\rho(x) \neq \emptyset, \quad x \in S_\sigma.$$

Доказательство. Предположим противное. Фиксируем произвольное положительное число $\rho < \rho_0/4$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся $\sigma_k > 0, x^k \in S_{\sigma_k}$ такие, что $F_k^\rho(x^k) = \emptyset$. При этом $\sigma_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Так как последовательность x^k лежит в компактном множестве S_{σ_0} , не ограничивая общности, можно считать, что она имеет предел \bar{x} . Из неравенства $g(x^k) \leq \sigma_k$ следует $g(\bar{x}) = 0$, значит, $\bar{x} \in \partial S$. По условию (1.4) существует $\bar{f} \in \text{co}F(\bar{x})$ такой, что

$$(\nabla g_i(\bar{x}), \bar{f}) < -\rho_0 \quad \forall i \in I(\bar{x}).$$

Учитывая, что градиент $\nabla g_i(x)$ липшицев, для достаточно больших k будем иметь

$$(\nabla g_i(x^k), \bar{f}) < -\rho_0/2 - k(g_i(x^k) - g(x^k)) \quad \forall i \in I(\bar{x}).$$

Пусть $i \notin I(\bar{x})$, тогда

$$\max_{i \notin I(\bar{x})} g_i(\bar{x}) < g(\bar{x}).$$

Обозначив $\beta = g(\bar{x}) - \max_{i \notin I(\bar{x})} g_i(\bar{x}) > 0$, получим $g_i(\bar{x}) \leq g(\bar{x}) - \beta$. Так как $g(x)$ и $g_i(x)$ непрерывны, то при достаточно больших k выполняется неравенство $g_i(x^k) \leq g(x^k) - \beta/2$, следовательно,

$$-k(g_i(x^k) - g(x^k)) \geq k\beta/2.$$

Из непрерывности $\text{co}F(x)$ следует существование последовательности $f^k \in \text{co}F(x^k)$, сходящейся к \bar{f} . Для достаточно больших k будет справедливо неравенство

$$(\nabla g_i(x^k), f^k) < -\rho_0/4 - k(g_i(x^k) - g(x^k)) \quad \forall i \in I(\bar{x}).$$

Скалярное произведение $(\nabla g_i(x^k), f^k)$, очевидно, ограничено сверху некоторой константой C :

$$(\nabla g_i(x^k), f^k) \leq \|\nabla g_i(x^k)\| \|f^k\| \leq C,$$

поэтому для $i \notin I(\bar{x})$ имеем

$$(\nabla g_i(x^k), f^k) \leq C \leq -\rho_0/4 + k\beta/2 \leq -\rho_0/4 - k(g_i(x^k) - g(x^k))$$

при больших k . Таким образом, $f^k \in F_k^{\rho_0/4}(x^k) \subset F_k^\rho(x^k)$ в противоречие с предположением леммы. \square

Положим

$$F^\rho(x) = \{f \in \text{co}F(x) : (\nabla g_i(x), f) < -\rho, i \in I(x)\}.$$

Лемма 2. Для любых $0 < \sigma \leq \bar{\sigma}$, $0 < \rho < \rho_0/4$, $k > 0$ справедливо включение

$$F_k^\rho(x) \subset F^\rho(x), \quad x \in S_\sigma,$$

и, следовательно, $F^\rho(x) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $f \in F_k^\rho(x)$ и $i \in I(x)$. Тогда $g_i(x) - g(x) = 0$, следовательно,

$$(\nabla g_i(x), f) \leq -\rho - k(g_i(x) - g(x)) = -\rho,$$

и, значит, $f \in F^\rho(x)$. \square

Лемма 3. Пусть выполнено условие (1.3). Тогда найдутся $k > 0, 0 < \sigma_1 \leq \sigma_0, \rho_1 > 0$ такие, что $\forall \sigma \leq \sigma_1, \rho < \rho_1$ многозначное отображение $F_k^\rho(x)$ с непустыми выпуклыми компактными значениями удовлетворяет условию Липшица на S_σ .

Доказательство. Пусть $\rho_1 \leq \rho_0/8$ и k, σ_1 выбраны так, чтобы удовлетворить требованиям лемм 1, 2. Тогда $F_k^{2\rho}(x) \neq \emptyset$ на S_σ при $\sigma < \sigma_1$. Представим $F_k^\rho(x)$ в виде

$$F_k^\rho(x) = \{f \in \text{co}F(x) : (\nabla g_i(x), f) \leq \alpha_i(x), i = 1, \dots, m\},$$

где $\alpha_i(x) = -\rho - k(g_i(x) - g(x))$. Так как $F_k^{2\rho}(x) \neq \emptyset$, то $\forall x \in S_\sigma$ существует вектор $f \in \text{co}F(x)$, для которого $(\nabla g_i(x), f) \leq \alpha_i(x) - \rho$, $i = 1, \dots, m$. Функции $\nabla g_i(x), \alpha_i(x)$ удовлетворяют условиям Липшица на S_σ .

Так как множество S_σ компактно, достаточно доказать, что $F_k^\rho(x)$ локально липшицево. Выберем произвольную точку $\bar{x} \in S_\sigma$. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $F_k^\rho(x)$ липшицево на $S_\sigma \cup B_\varepsilon(\bar{x})$.

Доказательство будем вести индукцией по числу ограничений m . Пусть $m = 1$, и, следовательно, $F_k^\rho(x) = \{f \in \text{co}F(x) : (\nabla g_1(x), f) \leq \alpha_1(x)\}$. Рассмотрим два случая. Пусть $\nabla g_1(\bar{x}) = 0$. Тогда, учитывая, что для некоторого $f \in F_k^\rho(\bar{x})$ $(\nabla g_1(\bar{x}), f) \leq \alpha_1(\bar{x}) - \rho$, получаем $\alpha_1(\bar{x}) \geq \rho$. В некоторой δ -окрестности точки \bar{x} будем иметь $\alpha_1(x) \geq \rho/2$. Так как значения $\text{co}F(x)$ равномерно ограничены ($\|f\| \leq C_1 \forall f \in \text{co}F(x)$) и $\nabla g_1(x)$ липшицев с константой l , то, выбирая $\varepsilon < \min\{\delta, \rho/(2C_1l)\}$, получим

$$(\nabla g_1(x), f) \leq C_1 \|\nabla g_1(x)\| \leq C_1 l \|x - \bar{x}\| \leq \rho/2 \leq \alpha_1(x) \quad \forall f \in \text{co}F(x).$$

Следовательно, на шаре $B_\varepsilon(\bar{x})$ отображение $F_k^\rho(x)$ совпадает с $\text{co}F(x)$ и, значит, является липшицевым.

Пусть $\nabla g_1(\bar{x}) \neq 0$, тогда $\nabla g_1(x) \neq 0$ в некоторой δ -окрестности точки \bar{x} . В данной окрестности $F_k^\rho(x)$ представляет из себя пересечение выпуклого компакта $\text{co}F(x)$ с полупространством $\{f \in \mathbb{R}^n : (\nabla g_1(x), f) \leq \alpha_1(x)\}$, причем

$$\{f \in \mathbb{R}^n : (\nabla g_1(x), f) \leq \alpha_1(x) - \rho\} \cap \text{co}F(x) \neq \emptyset.$$

При этих условиях данное пересечение является липшицевым многозначным отображением [8, лемма 7].

Итак, утверждение доказано для $m = 1$. Пусть оно верно для $(m - 1)$ -го ограничения, т. е.

$$G_k^\rho(x) = \{f \in \text{co}F(x) : (\nabla g_i(x), f) \leq \alpha_i(x), i = 1, \dots, m - 1\}$$

является липшицевым в $S_\sigma \cup B_\varepsilon(\bar{x})$. Представим $F_k^\rho(x)$ в виде

$$F_k^\rho(x) = \{f \in G_k^\rho(x) : (\nabla g_m(x), f) \leq \alpha_m(x)\}.$$

Тогда, очевидно, для каждого $x \in S_\sigma \cup B_\varepsilon(\bar{x})$ найдется $f \in G_k^\rho(x)$ такой, что $(\nabla g_m(x), f) \leq \alpha_m(x) - \rho$. Остается применить только что доказанное утверждение для $m = 1$, заменив в нем $\text{co}F(x)$ на $G_k^\rho(x)$ и $g_1(x)$ на $g_m(x)$. \square

Теорема 1. Пусть выполнены предположение 1 и условие (1.5). Тогда существуют $\sigma > 0$, $\rho > 0$ и липшицево сечение $\bar{f}(x) \in \text{co}F(x)$, $x \in S_\sigma$, многозначного отображения $\text{co}F(x)$ такие, что

$$\max_{i \in I(x)} (\nabla g_i(x), \bar{f}(x)) < -\rho \quad \forall x \in S_\sigma.$$

Любая траектория $x(t)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = \bar{f}(x)$ с начальным условием $x(t_0) \in S_\sigma$ остается (является выживающей) в S_σ до момента попадания на ∂S , функция $g(x(t))$ монотонно убывает.

Доказательство. Из лемм 1–3 следует существование положительных чисел k, ρ, σ таких, что многозначное отображение $F_k^\rho(x)$ с выпуклыми компактными значениями обладает следующими свойствами:

$$F_k^\rho(x) \neq \emptyset, \quad F_k^\rho(x) \subset F^\rho(x) \subset \text{co}F(x)$$

для $x \in S_\sigma$ и $F_k^\rho(x)$ липшицево на S_σ . Согласно теореме о параметризации многозначного отображения [12] липшицево многозначное отображение $H(x)$ с непустыми выпуклыми компактными значениями в \mathbb{R}^n может быть представлено в виде $H(x) = \bigcup_{b \in B} h(x, b)$, где $h(x, b)$ — липшицево по x , B — единичный шар в \mathbb{R}^n . Отсюда следует существование липшицево сечения у $H(x)$. Применяя данную теорему к отображению $F_k^\rho(x)$, получим, что найдется липшицево сечение

$$\bar{f}(x) \in F_k^\rho(x) \subset F^\rho(x) \subset \text{co}F(x).$$

Из определения $F^\rho(x)$ следует, что $\bar{f}(x)$ удовлетворяет неравенству (1.5).

Пусть $x(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = \bar{f}(x)$ с начальным условием $x(t_0) \in S_\sigma$. Вычисляя производные функций $g_i(x(t))$ для $i \in I(x(t))$, имеем

$$\frac{d}{dt}g_i(x(t)) = (\nabla g_i(x(t)), \bar{f}(x(t))) < -\rho.$$

Так как $g_i(x(t)) < g(x(t))$ для $i \notin I(x(t))$, то для достаточно малых $\Delta t > 0$ получим

$$g(x(t + \Delta t)) \leq g(x(t)) - \rho\Delta t.$$

Таким образом, $g(x(t))$ убывает вдоль любой траектории, и $g(x(t)) \leq g(x(t_0)) \leq \sigma$. \square

Рассмотрим линейную по управлению систему

$$\dot{x} = f(x, u(t)) = f_1(x) + f_2(x)u(t), \quad u(t) \in U, \quad x(t_0) = x^0,$$

где $f_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ — непрерывно дифференцируемые отображения, $\mathbb{R}^{n \times r}$ — линейное пространство $n \times r$ вещественных матриц, предполагая, что ограничения на управление $u(t)$ заданы выпуклым компактом $U \subset \mathbb{R}^r$. В данном случае имеем $\text{co}F(x) = f_1(x) + f_2(x)U$.

Неравенство (1.4) для данной системы можно переписать в виде

$$\min_{u \in U} \max_{i \in I(x)} [(\nabla g_i(x), f_1(x)) + \nabla g_i^\top(x) f_2(x)u] < -\rho_0. \quad (2.1)$$

при $x \in S_{\sigma_0}$.

Теорема 2. Пусть выполнены предположение 1 и условие (2.1). Тогда существуют $\sigma > 0$, $\rho > 0$ и липшицева обратная связь $\bar{u}(x) \in U$, $x \in S_\sigma$ такие, что

$$\max_{i \in I(x)} [(\nabla g_i(x), f_1(x)) + \nabla g_i^\top(x) f_2(x)\bar{u}(x)] < -\rho_0.$$

Любая траектория $x(t)$ системы $\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)u(x)$ с начальным условием $x(t_0) \in S_\sigma$ остается (является выживающей) в S_σ до момента попадания на ∂S , функция $g(x(t))$ монотонно убывает.

Доказательство. Введем по аналогии с $F_k^\rho(x)$ многозначное отображение

$$U_k^\rho(x) = \{u \in U : (f_2^\top(x)\nabla g_i(x), u) \leq -\rho - (\nabla g_i(x), f_1(x)) - k(g_i(x) - g(x))\}.$$

Дальнейшее доказательство фактически повторяет доказательство теоремы 1, но оно несколько проще, так как роль многозначного отображения $\text{co}F(x)$ здесь играет многозначное отображение, принимающее постоянные значения U . \square

З а м е ч а н и е 1. Построение обратной связи, удерживающей траектории замкнутой системы во “внешней” части окрестности границы S — множестве S_σ , связано с ее применением в конструкции метода штрафных функций из работы [7]. Путем несложной модификации доказательства можно убедиться, что утверждение теоремы 1 с очевидными изменениями остается справедливым и для внутренней части окрестности границы S — множества $\{x \in \mathbb{R}^n : -\sigma \leq g(x) \leq 0\}$.

З а м е ч а н и е 2. Доказательство теоремы 2, данное в [7] для частного случая $m = 1$ и эллипсоидального множества U , в отличие от приведенного носит конструктивный характер — соответствующая обратная связь там строится в явном виде. Для нескольких ограничений возможность явного задания $\bar{u}(x)$ можно ожидать только для отдельных частных случаев. Для линейных по управлению систем с постоянной матрицей f_2 , ограничением U в виде многогранника и фазовыми ограничениями, заданными линейными неравенствами, множество $U_k^\rho(x)$ — многогранник. В этом случае в качестве липшицева сечения $\bar{u}(x) \in U_k^\rho(x)$ можно взять решение задачи линейного $(c, u) \rightarrow \max, u \in U_k^\rho(x)$, или квадратичного $(u, u) \rightarrow \max, u \in U_k^\rho(x)$, программирования. Липшицевость решений данных задач вытекает из результатов работ [13; 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aubin J.-P.** Viability theory. Boston: Birkhäuser, 1991. 543 p.
2. **Kurzanski A.B., Filippova T.F.** On the theory of trajectory tubes—a mathematical formalism for uncertain dynamics, viability and control // Advances in nonlinear dynamics and control: a report from Russia. Boston: Birkhäuser, 1993. P. 122–188. (Progr. Systems Control Theory; vol. 17).
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. **Черноузько Ф.Л.** Оценивание фазового состояния динамических систем. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. **Kurzanski A.B., Valyi I.** Ellipsoidal calculus for estimation and control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).
6. **Osipov Yu. S., Kryazhinskiy A. V.** Inverse problems of ordinary differential equations: dynamic solutions. Basel: Gordon and Breach Science Publ., 1995. 625 p.
7. **Гусев М.И.** О снятии фазовых ограничений при построении множеств достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4, С. 106–115.
8. **Гусев М.И.** Внутренние аппроксимации множеств достижимости управляемых систем с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 73–88.
9. **Forcellini F., Rampazzo F.** On nonconvex differential inclusions whose state is constrained in the closure of an open set. Applications to dynamic programming // Differential and Integral Equations. 1999. Vol. 12, no. 4. P. 471–497.
10. **Frankowska H., Vinter R. B.** Existence of neighboring feasible trajectories: applications to dynamic programming for state-constrained optimal control problems // J. Optim. Theory Appl. 2000. Vol. 104, no. 1. P. 21–40.
11. **Bressan A., Facchi G.** Trajectories of differential inclusions with state constraints // J. Differential Equations. 2011. Vol. 250, № 2. P. 2267–2281.
12. **Ornelas A.** Parametrization of Caratheodory multifunctions // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova . 1990. Vol. 83. P. 33–44.
13. **Robinson S.M.** Stability theory for systems of inequalities. I. Linear systems // SIAM J. Numer. Anal. 1975. Vol 12, no 5. P. 754–769.
14. **Mangasarian O.L., Shiau T.H.** Lipschitz continuity of solutions of linear inequalities, programs and complementarity problems // SIAM J. Control Optim. 1987. Vol. 25, no 3. P. 583–595.

Гусев Михаил Иванович

Поступила 12.03.2016

д-р физ.-мат. наук

ведущий научный сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: gmi@imm.uran.ru

УДК 517.929

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ ДЛЯ АВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ю. Ф. Долгий

Рассматривается задача оптимальной стабилизации для автономных линейных систем дифференциальных уравнений с неограниченным последствием. Обосновано сведение проблемы разрешимости операторного уравнения Риккати к аналогичной проблеме для функционально-дифференциального уравнения Риккати. Описан класс систем дифференциальных уравнений с неограниченными последствиями, для которых функционально-дифференциальные уравнения Риккати допускают аналитические решения.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с последствием, оптимальное стабилизирующее управление, квадратичный критерий качества, уравнение Риккати.

Yu. F. Dolgii. The Riccati equation for autonomous linear systems with unbounded aftereffect.

The problem of optimal stabilization for autonomous linear systems of differential equations with unbounded aftereffect is considered. The reduction of the solvability problem for the Riccati operator equation to the analogous problem for the Riccati functional-differential equation is proved. A class of systems of differential equations with unbounded aftereffect for which the Riccati functional-differential equation can be solved analytically is described.

Keywords: differential equations with aftereffect, optimal stabilizing control, quadratic performance index, Riccati equation.

MSC: 34K06, 34K20, 34K30

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-129-137

Введение

Основы теории оптимальной стабилизации для систем с ограниченным последствием заложены в работах Н. Н. Красовского [1]. Проблема стабилизируемости таких систем исследовалась в работе Ю. С. Осипова [2]. Прогресс в развитии теории оптимальной стабилизации для систем с последствием связан, прежде всего, с развитием аппроксимационных методов [2]. Постановка задачи оптимальной стабилизации в гильбертовом пространстве состояний приводит к операторному уравнению Риккати [3]. Этот подход реализуется в данной работе для систем с неограниченным последствием. Проблема нахождения точных решений операторного уравнения Риккати оказалась достаточно сложной [4]. В работе [5] показано, что проблеме нахождения решения операторного уравнения Риккати для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с ограниченным последствием можно свести к аналогичной проблеме для функционально-дифференциального уравнения Риккати. В данной статье установлено, что аналогичный результат имеет место для неограниченного последствия. Проблема нахождения точных решений функционально-дифференциального уравнения Риккати также оказалась достаточно сложной. В случае ограниченного последствия в [5] предложен обратный метод построения решений функционально-дифференциального уравнения Риккати для специального класса систем. В данной статье для аналогичных систем с неограниченным последствием предложен прямой метод построения решений функционально-дифференциального уравнения Риккати.

1. Оптимальная стабилизация автономных линейных систем с неограниченным последствием

Пусть $\mathbb{C} = \mathbb{C}((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных равномерно ограниченных на отрицательной полуоси функций со значениями в пространстве \mathbb{R}^n и нормой

$$\|x(\cdot)\|_C = \sup_{t \in (-\infty, 0]} |x(t)|;$$

$\mathbb{H} = \mathbb{L}_2((-\infty, 0], \mathbb{R}^n, \mu)$ — пространство функций, интегрируемых с квадратом на отрицательной полуоси, со скалярным произведением

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \int_{-\infty}^0 \mathbf{y}^\top(\vartheta) \mathbf{x}(\vartheta) d\mu(\vartheta)$$

и нормой $\|\mathbf{x}\|_H = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{H}$. Здесь мера определяется функцией $\mu(\vartheta) = \vartheta$, $-\infty < \vartheta < 0$, $\mu(0) = 1$. Рассмотрим произвольное разбиение Δ отрицательной полуоси точками последовательности $\{\vartheta_j\}_{j=1}^{+\infty}$, $-\infty < \vartheta_{j+1} < \vartheta_j < 0$, $j = \overline{1, +\infty}$, $\vartheta_0 = 0$. Матричнозначная функция $\eta : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ имеет ограниченную вариацию на $(-\infty, 0]$, определяемую формулой $Var \eta = \sup_{\Delta} \sum_{j=0}^{+\infty} |\eta(\vartheta_{j+1}) - \eta(\vartheta_j)|$, $\eta(0) = 0_n$. Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с неограниченным последствием

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^0 d[\eta(s)]x(t+s) + Bu, \quad (1.1)$$

где $t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$, $x : (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$; $u \in \mathbb{R}^m$ — управление; B — постоянная матрица.

Требуется найти управление, формируемое по принципу обратной связи, которое обеспечивает устойчивую работу системы (1.1) и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$J = \int_0^{+\infty} \left(x^\top(t) C_x x(t) + u^\top(t) C_u u(t) \right) dt, \quad (1.2)$$

где C_x и C_u — положительно определенные матрицы. Управление, решающее эту задачу, называется оптимальным стабилизирующим управлением.

При $u = 0$ задача Коши для системы (1.1) корректна, т. е. для любой начальной функции $\varphi \in \mathbb{C}$ существует единственное решение $x(t, \varphi)$, $t > 0$, системы (1.1), непрерывно зависящее от $\varphi \in \mathbb{C}$ при каждом t на любом конечном отрезке положительной полуоси [6, с. 120]. Используя определение полугруппы для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с последствием [7, с. 201] и формулу общего решения для этой системы [7, с. 180], запишем представления эволюционных операторов:

$$(\mathbf{T}(t)\varphi)(\vartheta) = \varphi(t + \vartheta), \quad -\infty < \vartheta \leq -t, \quad t \geq 0,$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}(t)\varphi)(\vartheta) &= V(t + \vartheta)\varphi(0) + \int_{-\infty}^{-0} d\alpha \left[\int_0^{t+\vartheta} V(t + \vartheta - z)\eta(\alpha - z) dz \right] \varphi(\alpha) = V(t + \vartheta)\varphi(0) \\ &+ \int_{-\infty}^0 \left(V(t + \vartheta)\eta(\alpha) - \eta(\alpha - t - \vartheta) - \int_{\alpha-t-\vartheta}^{\alpha} \frac{dV(t + \vartheta + \beta - \alpha)}{d\beta} \eta(\beta) d\beta \right) \varphi(\alpha) d\alpha, \end{aligned}$$

$-t < \vartheta \leq 0$, $t > 0$, $\varphi \in \mathbb{C}$, где V — фундаментальная матрица системы (1.1).

В дальнейшем полугруппу $\{\mathbf{T}(t), t \geq 0\}$ будем рассматривать в гильбертовом пространстве состояний \mathbb{H} . Неограниченный замкнутый инфинитезимальный оператор \mathbf{A} этой полугруппы имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}) = \mathbb{W}_2^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)$ и задается формулами

$$(\mathbf{Ax})(\vartheta) = \frac{d\mathbf{x}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (\mathbf{Ax})(0) = \int_{-\infty}^0 d[\eta(s)]\mathbf{x}(s).$$

Допустимые управления $\mathbf{u}[\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$, формируемые по принципу обратной связи, порождаются линейными непрерывными отображениями $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^m$. Требуется в классе допустимых управлений найти оптимальное стабилизирующее управление, которое обеспечивает устойчивость уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \mathbf{Ax}_t + \mathbf{B}u, \quad t > 0,$$

и минимизирует заданный критерий качества переходных процессов

$$\mathbf{J} = \int_0^{+\infty} \left(\langle \mathbf{C}_x \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_t \rangle + u^\top(t) \mathbf{C}_u u(t) \right) dt.$$

Здесь ограниченный оператор $\mathbf{B} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{H}$ и ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{C}_x : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ определяются формулами

$$(\mathbf{B}u)(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (\mathbf{B}u)(0) = \mathbf{B}u,$$

$$(\mathbf{C}_x \mathbf{x})(\vartheta) = 0, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (\mathbf{C}_x \mathbf{x})(0) = \mathbf{C}_x \mathbf{x}(0).$$

Точечный спектр оператора \mathbf{A} определяется корнями характеристического уравнения

$$\det \left(\lambda I_n - \int_{-\infty}^0 \exp(\lambda s) d[\eta(s)] \right) = 0, \quad \lambda \in \mathcal{C},$$

где \mathcal{C} — множество комплексных чисел. Условия, наложенные на функцию η , обеспечивают аналитичность функции, стоящей в левой части характеристического уравнения, в области $\{\lambda \in \mathcal{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$. В теории устойчивости требуется существование продолжения этой функции влево за мнимую ось. В дальнейшем будем полагать, что выполняется условие

$$|\eta(\vartheta) - \eta(-\infty)| \leq K_\eta \exp(\alpha_\eta \vartheta), \quad -\infty < \vartheta < 0, \quad K_\eta, \alpha_\eta > 0.$$

Тогда функция, стоящая в левой части характеристического уравнения, будет аналитической в области $\{\lambda \in \mathcal{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > -\alpha_\eta\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ в области $\{\lambda \in \mathcal{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > -\alpha_\eta + \varepsilon\}$ имеется не более чем конечное число корней характеристического уравнения. Спектр оператора \mathbf{A} в области $\{\lambda \in \mathcal{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > -\alpha_\eta\}$ является точечным и содержит только корни характеристического уравнения. Для экспоненциальной устойчивости системы (1.1) при $u = 0$ достаточно существования такого $\varepsilon > 0$, что в области $\{\lambda \in \mathcal{C} : \operatorname{Re}(\lambda) > -\varepsilon\}$ отсутствуют корни характеристического уравнения [6, с. 128]. Для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с сосредоточенным запаздыванием условия стабилизируемости получены в работе [2]. Ю. С. Осипов проблему стабилизируемости системы с запаздыванием сводит к проблеме стабилизируемости конечномерной системы, отвечающей корням характеристического уравнения с неотрицательными действительными частями. В настоящей работе рассматривается автономная линейная система дифференциальных уравнений с неограниченным последствием, характеристическое уравнение которой имеет не более чем конечное число корней характеристического уравнения с неотрицательными действительными частями. Поэтому при решении

проблемы стабилизируемости можно использовать подход Ю. С. Осипова, связанный с каноническим разложением функционального пространства состояний [2]. В дальнейшем будем полагать, что система (1.1) стабилизируема.

Постановка задачи оптимальной стабилизации в гильбертовом пространстве состояний позволяет при нахождении оптимального стабилизирующего управления использовать методы работ [3; 5].

Теорема 1 [3]. *Пусть система (1.1) является стабилизируемой. Тогда существует оптимальное стабилизирующее управление, определяемое формулой*

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1}B^\top(\mathbf{U}\mathbf{x})(0),$$

где \mathbf{U} — ограниченный самосопряженный положительный оператор, удовлетворяющий операторному уравнению Риккати

$$\mathbf{U}\mathbf{A} + \mathbf{A}^*\mathbf{U} + \mathbf{C}_x - \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U} = 0. \quad (1.3)$$

В приведенной теореме неограниченный сопряженный оператор \mathbf{A}^* задается формулами

$$(\mathbf{A}^*\mathbf{y})(\vartheta) = -\frac{d\hat{\mathbf{y}}(\vartheta)}{d\vartheta}, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (\mathbf{A}^*\mathbf{y})(0) = \hat{\mathbf{y}}(0),$$

где

$$\hat{\mathbf{y}}(\vartheta) = \mathbf{y}(\vartheta) - \eta^\top(\vartheta)\mathbf{y}(0), \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad \hat{\mathbf{y}}(0) = \hat{\mathbf{y}}(-0),$$

и имеет область определения $\mathfrak{D}(\mathbf{A}^*) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{H} : \hat{\mathbf{y}}(\cdot) \in \mathbb{W}_2^1((-\infty, 0], \mathbb{R}^n)\}$, а ограниченный самосопряженный положительный оператор $\mathbf{D} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ задается формулами $(\mathbf{D}\mathbf{x})(\vartheta) = 0$, $\vartheta \in (-\infty, 0)$, $(\mathbf{D}\mathbf{x})(0) = D\mathbf{x}(0)$, где $D = BC_u^{-1}B^\top$.

2. Функционально-дифференциальное уравнение Риккати

В работе [5] показано, что проблему нахождения решения операторного уравнения Риккати для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с ограниченным последствием можно свести к аналогичной проблеме для функционально-дифференциального уравнения Риккати. Аналогичный результат справедлив для автономной линейной системы дифференциальных уравнений с неограниченным последствием.

Теорема 2. *Пусть система (1.1) является стабилизируемой. Тогда решение уравнения Риккати (1.3) определяет ограниченный самосопряженный положительный оператор, допускающий представление*

$$(\mathbf{U}\mathbf{x})(\vartheta) = K(\vartheta, 0)\mathbf{x}(0) + \int_{-\infty}^0 K(\vartheta, s)\mathbf{x}(s)ds, \quad \vartheta \in (-\infty, 0], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad (2.1)$$

удовлетворяющее условиям гладкости:

- 1) $K^\top(0, 0) = K(0, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
 - 2) для почти всех $\vartheta \in (-\infty, 0)$ имеем $K^\top(0, \vartheta) = K(\vartheta, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и отображение $K(\cdot, 0) \in \mathbb{L}_2((-\infty, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$;
 - 3) для почти всех точек $(\vartheta, s) \in (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$ имеем $K^\top(s, \vartheta) = K(\vartheta, s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и отображение $K(\cdot, \cdot) \in \mathbb{L}_2((-\infty, 0) \times (-\infty, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$;
 - 4) для почти всех $s \in (-\infty, 0]$ отображение $\hat{K}(\cdot, s) \in \mathbb{W}_2^1((-\infty, 0), \mathbb{R}^{n \times n})$, где $\hat{K}(\vartheta, s) = K(\vartheta, s) - \eta^\top(\vartheta)K(0, s)$, $\vartheta \in (-\infty, 0)$, $s \in (-\infty, 0]$,
- а также системе дифференциальных и алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, s)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \hat{K}^\top(s, \vartheta)}{\partial s} + K(\vartheta, 0)DK(0, s) = 0, \quad \vartheta, s \in (-\infty, 0), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \hat{K}(\vartheta, 0)}{\partial \vartheta} - \hat{K}^\top(-0, \vartheta) + K(\vartheta, 0)DK(0, 0) = 0, \quad \vartheta \in (-\infty, 0), \quad (2.3)$$

$$\hat{K}(-0, 0) + \hat{K}^\top(-0, 0) - K(0, 0)DK(0, 0) + C_x = 0.$$

Доказательство по схеме [8, теорема 2] с учетом изменившихся представлений операторов \mathbf{A} , \mathbf{A}^* , \mathbf{C}_x , \mathbf{D} и \mathbf{U} для системы дифференциальных уравнений с неограниченным последствием. \square

Теорема 3. Пусть система (1.1) является стабилизируемой. Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1}B^\top \left(K_0\mathbf{x}(0) + \int_{-\infty}^0 \left(X^\top(s) + K_0\eta(s) \right) \mathbf{x}(s) ds \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

в которой X — решение функционально-дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta} = & \int_{-\infty}^{\vartheta} \left(X(\tau)d[\eta(\tau - \vartheta)] + d[\eta^\top(\tau)]X^\top(\tau - \vartheta) \right) - \left(X(\vartheta) + \eta^\top(\vartheta)K_0 \right) DK_0 \\ & - \int_{-\infty}^{\vartheta} \left(X(\tau) + \eta^\top(\tau)K_0 \right) D \left(X^\top(\tau - \vartheta) + K_0\eta(\tau - \vartheta) \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

а K_0 — решение алгебраического уравнения

$$X(0) + X^\top(0) - K_0DK_0 + C_x = 0. \quad (2.5)$$

Доказательство по схеме [5, теорема 2] с учетом изменившейся формы краевой задачи (2.2), (2.3) для системы дифференциальных уравнений с неограниченным последствием. \square

Значение критерия качества переходных процессов (1.2) для оптимального стабилизирующего управления определяется формулой

$$J[x(\cdot), u^0[x(\cdot)]] = \langle \mathbf{U}x(\cdot), x(\cdot) \rangle, \quad x(\cdot) \in \mathbb{H},$$

в которой функции, входящие в представление (2.1) оператора \mathbf{U} , определяются следующим образом через решение системы уравнений (2.4), (2.5):

$$K(0, 0) = K_0, \quad K(\vartheta, 0) = X(\vartheta) + \eta^\top(\vartheta)K_0, \quad \vartheta \in (-\infty, 0),$$

$$K(\vartheta, s) = - \int_{-\infty}^s F(\vartheta - s + \tau, \tau) d\tau + X(\vartheta)\eta(s) + \eta^\top(\vartheta)X^\top(s) + \eta^\top(\vartheta)K_0\eta(s), \quad -\infty < s \leq \vartheta < 0,$$

где

$$F(\vartheta, s) = \eta^\top(\vartheta) \frac{dX^\top(s)}{ds} + \frac{dX(\vartheta)}{d\vartheta} \eta(s) + \left(X(\vartheta) + \eta^\top(\vartheta)K_0 \right) D \left(X^\top(s) + K_0\eta(s) \right), \quad \vartheta, s \in (-\infty, 0).$$

Переход от определяющей системы уравнений (2.2), (2.3) к функционально-дифференциальному уравнению Риккати (2.4) позволяет упростить процедуру построения оптимального стабилизирующего управления. Применение аналитических методов при нахождении решения

функционально-дифференциального уравнения Риккати наталкивается на серьезные технические трудности. В работе [5] предложен обратный метод построения решений функционально-дифференциального уравнения Риккати для специального класса автономных линейных систем дифференциальных уравнений с ограниченным последствием. Покажем, что для этого класса систем в случае неограниченного последствия можно решить прямую задачу интегрирования нелинейного функционально-дифференциального уравнения Риккати. Переходим к изложению этого результата.

Объект управления описывается автономной линейной системой дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 x(t) + \int_{-\infty}^0 A(s)x(t+s)ds + Bu, \quad t > 0, \quad (2.6)$$

где A_0 — постоянная матрица; A — матричная функция с интегрируемыми с квадратом элементами на $(-\infty, 0)$. Система (2.6) совпадает с (1.1), если $\eta(\vartheta) = -A_0 - \int_{\vartheta}^0 A(s)ds$, $\vartheta \in (-\infty, 0)$, $\eta(0) = 0$.

Теорема 4. Пусть система (2.6) является стабилизируемой. Тогда оптимальное стабилизирующее управление определяется формулой

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1} B^\top \left(K_0 \mathbf{x}(0) + \int_{-\infty}^0 \Psi^\top(s) \mathbf{x}(s) ds \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H},$$

в которой Ψ — решение функционально-дифференциального уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi(\vartheta)}{d\vartheta} &= \Psi(\vartheta) (A_0 - DK_0) + A^\top(\vartheta) K_0 + \int_{-\infty}^{\vartheta} \left(A^\top(z) \Psi^\top(z - \vartheta) + \Psi(z) A(z - \vartheta) \right) dz \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\vartheta} \Psi(z) D \Psi^\top(z - \vartheta) dz, \quad \vartheta \in (-\infty, 0], \end{aligned} \quad (2.7)$$

а K_0 — решение алгебраического уравнения

$$A_0^\top K_0 + K_0 A_0 - K_0 D K_0 + \Psi^\top(0) + \Psi(0) + C_x = 0. \quad (2.8)$$

Доказательство по схеме [5, теорема 3] с учетом изменившейся формы функционально-дифференциального уравнения Риккати (2.4) для системы дифференциальных уравнений с неограниченным последствием. \square

Связь решений уравнений (2.4) и (2.7) определяется формулой

$$X(\vartheta) = \Psi(\vartheta) + \left(A_0^\top + \int_{\vartheta}^0 A^\top(s) ds \right) K_0, \quad \vartheta \in (-\infty, 0].$$

Теорема 5. Пусть матричная функция A_a определяется формулой

$$A_a(\vartheta) = \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{M_k} \vartheta^j e^{\alpha_k \vartheta} A_{kj}, \quad \vartheta \in (-\infty, 0),$$

где $\operatorname{Re}(\alpha_k) > 0$, A_{kj} — матрицы размерности $n \times n$, $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{1, M}$. Если α_k — вещественное число, то матрицы A_{kj} имеют вещественные элементы, а каждому невещественному числу α_k соответствует сопряженное число $\alpha_{k'} = \overline{\alpha_k}$ и $A_{k'j} = \overline{A_{kj}}$. Предполагаем, что система (2.6) при $A = A_a$ является стабилизируемой. Тогда оптимальное стабилизирующее управление этой системы определяется формулой

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -C_u^{-1}B^\top \left(K_0\mathbf{x}(0) + \int_{-\infty}^0 \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{M_k} \vartheta^j e^{\alpha_k \vartheta} \Psi_{kj}^\top \mathbf{x}(\vartheta) d\vartheta \right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}, \quad (2.9)$$

в которой матрицы K_0 , Ψ_{kj} $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{1, M}$, удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$A_0^\top K_0 + K_0 A_0 - K_0 D K_0 + \sum_{k=1}^M \left(\Psi_{k0} + \Psi_{k0}^\top \right) + C_x = 0, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_k \Psi_{kj} + (j+1) \delta_{kj} \Psi_{k,j+1} + \Psi_{kj} (D K_0 - A_0) - A_{kj}^\top K_0 \\ & - \sum_{j_1=j}^{M_k} \sum_{k_1=1}^M \sum_{j_2=0}^{M_{k_1}} \frac{(-1)^{j_1+j_2-j} j_1! (j_1+j_2-j)!}{j! (j_1-j)! (\alpha_k + \alpha_{k_1})^{j_1+j_2-j+1}} \left(\Psi_{k_1 j_1} A_{k_1 j_2} + A_{k_1 j_1}^\top \Psi_{k_1 j_2}^\top - \Psi_{k_1 j_2} D \Psi_{k_1 j_2}^\top \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\delta_{kj} = 1$ при $j \neq M_k$, $\delta_{k M_k} = 0$, $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{1, M}$.

Доказательство. Решение уравнения (2.7) находим в форме

$$\Psi_a(\vartheta) = \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{M_k} \vartheta^j e^{\alpha_k \vartheta} \Psi_{kj}, \quad \vartheta \in (-\infty, 0].$$

Подставляя его в уравнения (2.7), (2.8), получим систему (2.10), (2.11). \square

Стабилизированная система имеет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = \tilde{A}_0 x(t) + \int_{-\infty}^0 \tilde{A}_a(s) x(t+s) ds, \quad t > 0, \quad (2.12)$$

где $\tilde{A}_0 = A_0 - D K_0$, $\tilde{A}_a(\vartheta) = \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{M_k} \vartheta^j e^{\alpha_k \vartheta} \tilde{A}_{kj}$, $\vartheta \in (-\infty, 0)$, $\tilde{A}_{kj} = A_{kj} - D \Psi_{kj}^\top$, $j = \overline{0, M_k}$, $k = \overline{1, M}$.

Пример. Пусть для системы (2.6) и критерия качества (1.2) выполняются условия: $n = m = 1$, $A_0 = -1$, $B = 1$, $C_x = C_u = 1$. Функция A определяется формулой $A(\vartheta) = (7/4) \exp(\vartheta)$, $\vartheta \in (-\infty, 0)$.

Стабилизируемый объект описывается неустойчивым при $u = 0$ скалярным уравнением. Для его стабилизации используем предложенную выше методику. Система уравнений (2.10), (2.11) имеет вид

$$K_0^2 + 2K_0 - 2\Psi_{10} - 1 = 0, \quad 2\Psi_{10}^2 + \Psi_{10} + 4\Psi_{10}K_0 - 7K_0 = 0.$$

Значения $K_0 = 1$ и $\Psi_{10} = 1$ определяют ее решение. Используя формулу (2.9), находим оптимальное стабилизирующее управление

$$\mathbf{u}^0[\mathbf{x}] = -\mathbf{x}(0) - \int_{-\infty}^0 \exp(\vartheta) \mathbf{x}(\vartheta) d\vartheta, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{H}.$$

Стабилизированное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = -2x(t) + \frac{3}{4} \int_{-\infty}^0 \exp(\vartheta)x(t + \vartheta)d\vartheta$$

экспоненциально устойчиво.

В задаче стабилизации класс систем с матричными функциями A_a является аппроксимационным.

Теорема 6. Пусть выполняются условия теоремы 5, фундаментальная матрица V_a системы (2.12) имеет оценку $|V_a(t)| \leq K_a \exp(-\alpha_a t)$, $t > 0$, $K_a, \alpha_a > 0$, и выполняется условие

$$K_a \int_{-\infty}^0 \exp(-\alpha_a \tau) |A(\tau) - A_a(\tau)| d\tau < \alpha_a. \quad (2.13)$$

Тогда управление (2.9) является стабилизирующим для системы (2.6) с матричной функцией A .

Доказательство. Решение системы (2.6) с начальной функцией $\varphi \in \mathbb{H}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} x(t) = & x_a(t, \varphi) + \int_{-\infty}^0 \int_{\vartheta-t}^{\vartheta} V_a(t+s-\vartheta) (A(s) - A_a(s)) ds \varphi(\vartheta) d\vartheta \\ & + \int_0^t \int_{s-t}^0 V_a(t+\tau-s) (A(\tau) - A_a(\tau)) d\tau x(s) ds, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь $x_a(t, \varphi)$, $t > 0$, — решение системы (2.12). Для него имеет место оценка

$$|x_a(t, \varphi)| \leq K_{aa} \exp(-\alpha_a t) \|\varphi\|_H, \quad t > 0,$$

где

$$K_{aa} = K_a \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_a} \int_{-\infty}^0 \exp(-\alpha_a s) |\tilde{A}_a(s)| ds \right).$$

Введем функцию $\tilde{x}(t) = x(t) \exp(\alpha_a t)$, $t > 0$. Из интегрального уравнения (2.14) следует неравенство

$$|\tilde{x}(t)| \leq \tilde{K}_{aa} \|\varphi\|_H + \tilde{K}_a \int_0^t |\tilde{x}(s)| ds, \quad t > 0, \quad (2.15)$$

где

$$\tilde{K}_{aa} = K_{aa} + K_a \frac{1}{\sqrt{2}\alpha_a} \int_{-\infty}^0 \exp(-\alpha_a s) |A(s) - A_a(s)| ds, \quad \tilde{K}_a = K_a \int_{-\infty}^0 \exp(-\alpha_a s) |A(s) - A_a(s)| ds.$$

Из неравенства (2.15) вытекает справедливость теоремы. \square

Конструктивная реализация условия (2.13) теоремы 6 связана с аппроксимацией элементов матричной функции A , принадлежащих пространству суммируемых с квадратом функций с экспоненциальным весом на отрицательной полуоси, квазиполиномами. Здесь можно использовать базис пространства суммируемых с квадратом функций на полуоси, порождаемый полиномами Лаггера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
2. **Осипов Ю.С.** О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, № 5. С. 605–618.
3. **Gibson J.S.** Linear-quadratic optimal control of hereditary differential systems: infinite dimensional Riccati equations and numerical approximations // SIAM J. Control Optimiz. 1983. Vol. 21, no. 5. P. 95–135.
4. **Желонкина Н.И., Ложников А.Б., Сесекин А.Н.** Об оптимальной стабилизации импульсным управлением линейных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 2013. № 11. С. 39–48.
5. **Долгий Ю.Ф.** Точные решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 124–135.
6. **Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
7. **Хейл Дж.** Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
8. **Долгий Ю.Ф.** Аналитические решения задачи оптимальной стабилизации для систем дифференциальных уравнений с последействием // Тр. XII Всерос. совещания по проблемам управления / ИПУ РАН. М., 2014. С. 1349–1362.

Долгий Юрий Филиппович

Поступила 25.01.2016

д-р физ.-мат. наук, профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

вед. науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: Yurii.Dolgi@imm.uran.ru

УДК 517.977.56

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЗИЦИОННОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ¹

А. А. Дряженков, М. М. Потапов

Для одномерного волнового уравнения рассматривается задача одностороннего граничного Нейман-управления. Информация о начальном состоянии процесса отсутствует. Вместо этого на управляемой границе в режиме реального времени регистрируются значения Дирихле-наблюдений. Ставится задача полного успокоения процесса с помощью граничных управлений позиционного типа. Предложен экономичный алгоритм численного решения этой задачи, оптимальный по времени гарантированного успокоения. Приводятся результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: волновое уравнение, задача позиционного управления, численное решение.

A. A. Dryazhenkov, M. M. Potapov. Numerical solution of the positional boundary control problem for the wave equation with unknown initial data.

The problem of one-sided boundary Neumann control is considered for the one-dimensional wave equation. Information about the initial state of the process is absent. Instead, the values of Dirichlet observations are received in real time at the controlled boundary. The aim is to bring the process to a complete rest by means of positional boundary controls. To solve this problem, we propose an efficient numerical algorithm with an optimal guaranteed damping time. Some results of numerical experiments are presented.

Keywords: wave equation, positional control problem, numerical solution.

MSC: 49N30, 35Q93, 35L20, 49M25, 35D35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-138-146

1. Введение

Рассматривается следующая задача одностороннего граничного Нейман-управления для одномерного уравнения колебаний с однородным условием Неймана на неуправляемом краю:

$$y_{tt} = y_{xx} - q(x)y, \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times (0, l), \quad (1.1)$$

$$-y_x|_{x=0} = u(t), \quad y_x|_{x=l} = 0, \quad 0 < t < T, \quad (1.2)$$

$$y|_{t=0} = v^0(x), \quad y_t|_{t=0} = v^1(x), \quad 0 < x < l. \quad (1.3)$$

Коэффициент $q(x)$ предполагается непрерывным. Целью приложения управления $u = u(t)$ является приведение системы (1.1)–(1.3) в состояние покоя в момент времени $t = T$:

$$y|_{t=T} = 0, \quad y_t|_{t=T} = 0, \quad 0 < x < l. \quad (1.4)$$

Задачам вида (1.1)–(1.4) и численным методам их решения посвящена книга [1]. Уравнения с переменными коэффициентами при старших производных могут быть сведены к уравнению вида (1.1) путем стандартных замен функции y и пространственной переменной x , которые использовались, в частности, в [2] для уточнения неравенств наблюдаемости. В [1; 2] функции $v(x) = (v^0(x), v^1(x))$ считались известными, что существенно использовалось при построении приближений к искомым граничным управлениям $u(t)$, решающим задачу (1.1)–(1.4) за

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-01-00539).

время $T > 2l$. В данной работе начальное состояние $v(x) = (v^0(x), v^1(x))$ процесса (1.1)–(1.3) предполагается *неизвестным*, и дополнительная информация о решении $y(t, x)$, по которой управляющей стороне нужно конструировать соответствующее управляющее воздействие $u(t)$, поступает в режиме реального времени в виде граничного Дирихле-наблюдения:

$$g(t) = y(t, 0), \quad 0 < t < T. \quad (1.5)$$

Управления должны строиться также в режиме реального времени, синхронно с поступающими наблюдениями (1.5), и их значения $u(\tau)$ в момент τ могут зависеть только от предыстории наблюдений $g_\tau(t) = g(t)$, $0 < t < \tau$. В терминах [3, с. 425] такая постановка относится к задачам позиционного управления с запоминанием информации.

В данной работе рассматриваются *сильные* обобщенные решения $y(t, x)$ [4] задачи (1.1)–(1.3), которым соответствуют следующие функциональные классы начальных состояний, управлений и наблюдений:

$$v \in H^1(0, l) \times L^2(0, l), \quad u \in L^2(0, T), \quad g \in H^1(0, T). \quad (1.6)$$

Здесь $L^2(0, l)$ и $L^2(0, T)$ — пространства Лебега, а $H^1(0, l) = W_2^1(0, l)$ и $H^1(0, T) = W_2^1(0, T)$ — пространства Соболева. Хорошо известно, что сильное обобщенное решение $y(t, x)$ непрерывно на замкнутом прямоугольнике $[0, T] \times [0, l]$ и обладает следующими дополнительными свойствами:

$$\begin{aligned} y &\in C([0, T]; H^1(0, l)), & y &\in C([0, l]; H^1(0, T)), \\ y_t &\in C([0, T]; L^2(0, l)), & y_x &\in C([0, l]; L^2(0, T)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Следуя [3, с. 425–427; 5; 6], перейдем к формальной постановке задачи позиционного управления (1.1)–(1.5).

О п р е д е л е н и е 1. Наблюдением с помехой уровня $\sigma \geq 0$ называется функция $g^\sigma = g^\sigma(t) \in H^1(0, T)$, удовлетворяющая условию

$$\|g^\sigma - g\|_{H^1(0, T)} \leq \sigma. \quad (1.8)$$

Предысторией наблюдения с помехой уровня σ к моменту τ называется функция $g_\tau^\sigma = g_\tau^\sigma(t) \in H^1(0, \tau)$ такая, что $g_\tau^\sigma(t) = g^\sigma(t)$, $t \in (0, \tau)$.

Зафиксируем натуральное число N и разобьем интервал $(0, T)$ на N равных частей $\Theta_i = (t_i, t_{i+1})$, $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, с шагом $h = T/N$. Рассмотрим управление $\tilde{u}(t)$, принимающее на каждом из частичных интервалов постоянные значения $\tilde{u}(t) \equiv \tilde{u}_i$, $t \in \Theta_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Обозначим через $\tilde{y}(t, x)$ решение задачи (1.1)–(1.3), соответствующее кусочно-постоянному управлению $u(t) = \tilde{u}(t)$, а через \tilde{g}_τ^σ — предысторию наблюдения к моменту τ для этой задачи в присутствии помехи уровня σ .

О п р е д е л е н и е 2. Позиционной стратегией называется произвольное однопараметрическое семейство $S_N = (N, \{\tilde{U}_i\}_{i=1}^{N-1})$, $N = 1, 2, \dots$, функционалов $\tilde{U}_i : H^1(0, t_i) \rightarrow \mathbb{R}$. Движением системы (1.1)–(1.3) под действием позиционной стратегии S_N с помехой уровня σ называется решение $\tilde{y}(t, x)$, соответствующее управлению $\tilde{u}(t)$, принимающему постоянные значения на частичных интервалах разбиения: $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_i = \tilde{U}_i(\tilde{g}_\tau^\sigma) \big|_{\tau=t_i}$ при $t \in \Theta_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$. Значение $\tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 \in \mathbb{R}$ управления на начальном участке $t \in \Theta_0 = (0, h)$, на котором предыстория наблюдений еще отсутствует, выбирается произвольным образом.

Несложно показать, что для любой стратегии S_N движение $\tilde{y}(t, x)$ существует и может быть построено последовательным продолжением решения задачи (1.1)–(1.3) в расширяющиеся прямоугольники $(0, t_{i+1}) \times (0, l)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$. Следующее определение представляет собой модификацию аналогичных определений из [5; 6], усиленную дополнительным требованием сходимости по управлению.

О п р е д е л е н и е 3. Последовательность позиционных стратегий S_{N_k} , $k = 1, 2, \dots$, решает задачу гарантирующего управления (1.1)–(1.5), если для любого начального состояния $v(x)$ из пространства (1.6) последовательность определяемых этими стратегиями кусочно-постоянных управлений $\tilde{u}^{N_k}(t)$ сходится к некоторому управлению $u_*(t) = u_*(t; v)$, решающему задачу успокоения (1.1)–(1.4) для данного $v(x)$:

$$\|\tilde{u}^{N_k} - u_*\|_{L^2(0,T)} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad \sigma \rightarrow 0. \quad (1.9)$$

В данной работе предложен трехэтапный численный метод построения стратегий S_{N_k} , решающих за время $T > 4l$ задачу (1.1)–(1.5) в смысле определения 3. В разд. 2 приводится описание первого этапа, в разд. 3 – второго и третьего. В разд. 4 доказывается, что за время $T < 4l$ задача неразрешима даже в простейшем случае, когда $q(x) \equiv 0$, что свидетельствует об оптимальности предлагаемого алгоритма по времени гарантированного успокоения. В разд. 5 приводятся результаты численных экспериментов.

2. Описание первого этапа

На первом этапе работы алгоритма строится управление $u(t)$ на промежутке $t \in (0, 2l)$, на котором полученной информации о предыстории наблюдения $g_t(\cdot)$ еще недостаточно для восстановления начального состояния $v(x)$, что препятствует немедленному началу процесса активного и гарантированного успокоения (см. подробности в разд. 4). Компромиссным вариантом на первом этапе представляется выбор управления из соображений минимизации энергии или, по крайней мере, ее невозрастания.

Домножив уравнение (1.1) на y_t и проинтегрировав по прямоугольнику $(0, t) \times (0, l)$, с учетом условий (1.2) и (1.5), получим следующее соотношение, представляющее собой закон изменения энергии $E(t)$ [1, с. 125]:

$$E(t) - E(0) = \int_0^t u(\tau)g'(\tau) d\tau, \quad E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (y_t^2(t, x) + y_x^2(t, x) + q(x)y^2(t, x)) dx. \quad (2.1)$$

Продифференцировав первое из соотношений (2.1) по t , получим выражение для производной энергии: $E'(t) = u(t)g'(t)$. Направим действия управляющей стороны на минимизацию производной энергии в каждый момент $t \in (0, 2l)$:

$$u(t)g'(t) \rightarrow \min_{u(t) \in \mathbb{R}}, \quad 0 < t < 2l. \quad (2.2)$$

Установим зависимость между $u(t)$ и $g'(t)$, полезную для решения задачи (2.2). Для этого проинтегрируем уравнение (1.1) по части характеристики $\tau + s = t$, расположенной внутри прямоугольника $(\tau, s) \in (t/2, t) \times (0, l)$:

$$g'(t) = u(t) + A(t), \quad A(t) = - \int_0^{t/2} q(x)y(t-x, x) dx + y_t\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right) + y_x\left(\frac{t}{2}, \frac{t}{2}\right), \quad 0 < t < 2l. \quad (2.3)$$

Значение выражения $A(t)$ в (2.3) зависит лишь от предыстории $u(\tau)$, $\tau < t$, поэтому после подстановки (2.3) в (2.2) придем к задаче минимизации функционала $E'(t) = u(t)(u(t) + A(t))$, решением которой является $u(t) = -A(t)/2$. Подставив $A(t) = -2u(t)$ в (2.3), получим выражение для управления непосредственно через наблюдение:

$$u(t) = -g'(t), \quad 0 < t < 2l. \quad (2.4)$$

Для доказательства существования сильного обобщенного решения $y(t, x)$ смешанной задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющего дополнительным условиям (1.5) и (2.4), достаточно доказать

существование решения задачи (1.1)–(1.3), в которой левое граничное условие замещено однородным условием вида

$$y_x(t, 0) - y_t(t, 0) = 0, \quad 0 < t < 2l. \quad (2.5)$$

Приведем одну из возможных схем рассуждений. Продолжим данные задачи (1.1)–(1.3) на промежуток $x \in (-2l, 0)$ следующим образом: $q(x) \equiv 0$, $v^0(x) \equiv v^0(0)$, $v^1(x) \equiv 0$ и на левом конце $x = -2l$ поставим условие первого рода: $y(t, -2l) = v^0(0)$, $t \in (0, 2l)$. Существование и единственность сильного обобщенного решения $Y(t, x)$ такой задачи в прямоугольнике $(t, x) \in (0, 2l) \times (-2l, l)$ доказаны в [7], а дополнительные свойства регулярности следов типа (1.7) устанавливаются аналогично [1, с. 104–114]. Интегрирование дифференциального уравнения (1.1) по части характеристики $\tau = x + t$, $-t < x < 0$, приводит к желаемому равенству (2.5) в точке $x = 0$: $Y_t(t, 0) = Y_x(t, 0)$, $0 < t < 2l$. Единственность решения $y(t, x)$ следует из единственности продолженного решения $Y(t, x)$.

Построим семейство стратегий S_N , $N = 1, 2, \dots$, определяющих кусочно-постоянные управления $\tilde{u}(t) = \tilde{u}^N(t)$, сильно сходящиеся при $N \rightarrow \infty$ к $u_*(t) = -g'_*(t)$ в пространстве $L^2(0, 2l)$. Для фиксированного номера N выберем функционалы \tilde{U}_i со значениями \tilde{u}_i из соображений аппроксимации условия (2.4):

$$\tilde{u}_0 = 0, \quad \tilde{u}_i = -\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{2h} + \frac{1}{2}\tilde{u}_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (2.6)$$

Заявленная выше сходимостъ следует из соотношения (2.3), оценок слабых обобщенных решений задачи (1.1)–(1.3), компактности вложения $L^2(0, 2l) \subset (H^1(0, 2l))^*$, имеющей место при общепринятом отождествлении $(L^2)^* \simeq L^2$, и теоремы Банаха — Штейнгауза [8, с. 198].

З а м е ч а н и е 1. Возможны и другие, отличные от (2.6), конструкции приближенных управлений, обладающие требуемым свойством сходимости, однако к их выбору следует подходить осторожно. Например, простая и, казалось бы, естественная конструкция позиционных управлений вида $\tilde{u}_i = -(g(t_i) - g(t_{i-1}))/h$ не будет сходиться к интересующему нас пределу $u_*(t) = -g'_*(t)$.

З а м е ч а н и е 2. Подстановка (2.4) в (2.1) для предельного управления $u_*(t)$ приводит к равенству $E(t) = E(0) - \int_0^t u_*^2(\tau) d\tau$, из которого следует строгое убывание энергии системы (1.1)–(1.3) для нетривиальных управлений $u_*(t)$.

3. Описание второго и третьего этапов

Выбор стратегии управления при $t > 2l$ основывается на том, что нулевые терминальные условия (1.4) вместе с правым однородным граничным условием (1.2) определяют единственное тривиальное решение дифференциального уравнения (1.1) в треугольнике $|t - T| < x < l$, а именно справедлива следующая

Лемма. Для любого начального состояния $v(x)$ и управления $u(t)$ соответствующее им решение $y(t, x)$ системы (1.1)–(1.3) удовлетворяет условию успокоения (1.4) тогда и только тогда, когда продолжение этого решения в трапецию $0 < x < l$, $0 < t < T + x$ удовлетворяет на правом конце $x = l$ однородным условиям и Неймана (1.2) и Дирихле:

$$y|_{x=l} = 0, \quad T - l < t < T + l. \quad (3.1)$$

Целью второго этапа $2l < t < 2l + \varepsilon$ является приведение системы в момент $3l + \varepsilon$ в состояние с нулевым правым граничным значением, а целью третьего этапа $2l + \varepsilon < t < 4l + \varepsilon$ — сохранение нулевого значения в соответствии с (3.1) до момента $5l + \varepsilon$. В результате исходная задача успокоения (1.1)–(1.4) будет решена за время $T = 4l + \varepsilon$. Параметр $\varepsilon > 0$ считается заданным. Как и для первого этапа, сначала укажем схему построения управления для предельного непрерывного случая, а затем опишем ее аппроксимацию. Теоретически второй этап

необходим только в том в случае, когда $y(3l, l) \neq 0$, однако с учетом возможности регулировать его протяженность ε , удобства работы с единообразными конструкциями управлений и присутствия погрешностей вычислений и измерений будем считать, что второй этап активируется всегда. В соответствии с леммой целью управления на втором этапе является достижение равенства $y(3l + \varepsilon, l) = 0$ при соблюдении условия $y(t, l) \in H^1(0, 3l + \varepsilon)$. Конструкции предельных управлений $u_*(t)$ связаны со следующей задачей для волнового уравнения с данными Коши на прямой $x = l$:

$$\psi_{tt} = \psi_{xx} - q(x)\psi, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < x < l, \quad (3.2)$$

$$\psi|_{x=l} = \Phi(t), \quad \psi_x|_{x=l} = 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Значения функции $\Phi(t)$ свяжем с граничными значениями $y(t, l)$ решения задачи (1.1)–(1.3) и условием (3.1):

$$\Phi(t) \equiv y(l, l), \quad t \leq l; \quad \Phi(t) = y(t, l), \quad t \in (l, 3l]; \quad (3.4)$$

$$\Phi(t) = \varphi(t), \quad t \in (3l, 3l + \varepsilon]; \quad \Phi(t) \equiv 0, \quad t > 3l + \varepsilon,$$

а интерполянт $\varphi(t)$ выберем из условий $\varphi \in H^1(3l, 3l + \varepsilon)$, $\varphi(3l) = y(3l, l)$, $\varphi(3l + \varepsilon) = 0$.

Присутствующая в (3.4) функция $y(t, l)$, $t \in (l, 3l]$, является результатом последовательного решения двух прямых задач для уравнения (1.1). В первой задаче находятся следы $y(l, \cdot)$, $y_t(l, \cdot)$ по известным значениям (1.2), (1.5) управлений $u_*(t)$ и наблюдений $g_*(t)$ на левой границе $x = 0$ при $0 < t < 2l$, которые определяют решение $y(t, x)$ в характеристическом треугольнике $0 < x < l$, $x < t < 2l - x$. Второй задачей является начально-краевая задача (1.1), (1.2) в трапеции $0 < x < l$, $l < t < 2l + x$, в которой в качестве начальных данных при $t = l$ используются найденные при решении первой задачи следы $y(l, \cdot)$, $y_t(l, \cdot)$. Решив задачу (3.2), (3.3), положим

$$u_*(t) = -\psi_x(t, 0), \quad 2l < t < 4l + \varepsilon. \quad (3.5)$$

Нетрудно показать, что в прямоугольнике $0 < x < l$, $2l < t < T = 4l + \varepsilon$ решение $y(t, x)$ начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) при $u(t) = u_*(t)$ и решение $\psi(t, x)$ задачи Коши (3.2), (3.3) совпадают, т.е. значения управления по правилу (3.5) на заключительном этапе определены корректно.

Для построения семейства стратегий S_N на промежутке $t \in (2l, T = 4l + \varepsilon)$ используется дискретизация. Для приближенного решения задачи (3.2), (3.3) можно взять аппроксимационную схему из [9]. Для простоты предположим, что равномерное разбиение пространственного промежутка $[0, l]$ возможно с тем же самым шагом $h = T/N$, т.е. $T/N = l/M$ при некотором натуральном M . Обозначим через $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, M$, узлы этого разбиения, а через Q_i^j – ячейки, привязанные к узлам t_j, x_i , $j = 0, \pm 1, \dots$, $i = 0, 1, \dots, M$:

$$Q_i^j = \{t_j - h/2 < t < t_j + h/2, \quad x_i - h/2 < x < x_i + h/2\} \cap Q.$$

Определим ступенчатые функции $e_i^j(t, x)$ вида

$$e_i^j(t, x) = 1, \quad (t, x) \in Q_i^j; \quad e_i^j(t, x) = 0, \quad (t, x) \notin Q_i^j.$$

Приближенное решение задачи (3.2), (3.3) будем искать в виде линейной комбинации

$$\tilde{\psi}(t, x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^M \psi_i^j e_i^j(t, x),$$

коэффициенты которой определяются из условий

$$\psi_i^j = \frac{1}{2} (\Phi(t_j + (l - x_i)) + \Phi(t_j - (l - x_i))) + \frac{1}{2} \int_{x_i}^l d\eta \int_{t_j - (\eta - x_i)}^{t_j + (\eta - x_i)} q(\xi) \tilde{\psi}(\eta, \xi) d\xi. \quad (3.6)$$

Соотношения (3.6) выбраны с учетом формулы Даламбера, выражающей значения решения $\psi(t, x)$ задачи (3.2), (3.3) в узлах $(t = t_j, x = x_i)$ через данные (3.3) при $x = l$. Производную $\psi_x(t, x)$ аппроксимируем аналогичным образом, ориентируясь на продифференцированную по x формулу Даламбера:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(t, x) &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^M \Psi_i^j e_i^j(t, x), \quad \Psi_i^j = \frac{1}{2} (-\Phi'(t_j + (l - x_i)) + \Phi'(t_j - (l - x_i))) \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_i}^l q(t_j - (\eta - x_i)) \tilde{\psi}(\eta, t_j - (\eta - x_i)) d\eta - \frac{1}{2} \int_{x_i}^l q(t_j + (\eta - x_i)) \tilde{\psi}(\eta, t_j + (\eta - x_i)) d\eta. \end{aligned}$$

Значения приближенного управления на втором и третьем этапах будем задавать по правилу $\tilde{u}(t) = -\tilde{\Psi}(t - h/2, 0)$, $2l < t < 4l + \varepsilon$, которому в стратегии S_N соответствует выбор функционалов \tilde{U}_i , ставящих в соответствие предыстории наблюдений g_τ значения $-\Psi_0^i$. Предполагается, что при вычислении нужных нам граничных значений $y(t, l)$, $t \in (l, 3l]$, являющихся результатом первого этапа управления, обе вспомогательные задачи аппроксимируются аналогичным образом.

Сходимость приближенных управлений \tilde{u} к u_* и их устойчивость по отношению к возмущениям наблюдений g следуют из сходимостей решений соответствующих прямых задач в классе сильных обобщенных решений (1.7), которые устанавливаются по аналогии с [9].

З а м е ч а н и е 3. Практически реализовать описанную стратегию S_N можно так, что объем вычислений для каждого очередного значения функционала \tilde{U}_i не превысит $O(N)$ и при этом потребуется объем машинной памяти, ограниченный величиной того же порядка $O(N)$.

Подытожим результаты разд. 2 и 3 следующей теоремой, схема доказательства которой была приведена выше.

Теорема 1. Пусть $T = 4l + \varepsilon$, l/T является рациональным числом и выбраны две последовательности натуральных чисел N_k и M_k такие, что $M_k/N_k = l/T$ и $M_k, N_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда построенная последовательность стратегий S_{N_k} решает задачу гарантирующего управления (1.1)–(1.5) в смысле определения 3.

З а м е ч а н и е 4. Если в условии теоремы 1 отказаться от требования рациональности отношения l/T , то придется рассматривать аппроксимационные схемы для задачи (3.2), (3.3) и двух предшествующих ей вспомогательных задач с различными шагами по t и по x . К сожалению, для таких схем мы не можем предложить алгоритм со столь же экономичными (или хотя бы сопоставимыми) вычислительными характеристиками, которые указаны в замечании 3, и поэтому предпочитаем считать требование рациональности выполненным, тем более что это легко обеспечивается соответствующим выбором длины T временного промежутка.

З а м е ч а н и е 5. Построенные выше стратегии S_N при $\tau > 2l$ используют не всю предысторию наблюдения к моменту τ , а только ее начальную часть: $g_\tau(t)$, $t < 2l$. Можно предложить модификации алгоритма, обладающие характеристиками из замечания 3, в которых используемая часть наблюдений будет или меняться с течением времени, или усредняться с остальными частями. В рамках рассматриваемой постановки задачи эти модификации ничем не отличаются от предлагаемого алгоритма, однако они могут быть интересны с точки зрения других постановок, например для уменьшающегося с течением времени уровня зашумления наблюдений.

4. Неразрешимость задачи при $T < 4l$

Отметим, что в рассматриваемых классах сильных обобщенных решений задача управления (1.1)–(1.4) при $T > T_* = 2l$ разрешима для любых известных начальных состояний $v(x)$, а

для любого $T \leq T_*$ найдется начальное состояние $v_T(x)$, которое невозможно успокоить в смысле условия (1.4) за время T . Доказательства этих утверждений проводятся аналогично [10; 11]. Значение T_* обычно называют критическим моментом времени для системы (1.1)–(1.3) [1, с. 132]. Понятно, что на классе *неизвестных* начальных состояний $v(x)$ рассматриваемая задача гарантирующего позиционного управления (1.1)–(1.5) также неразрешима при $T \leq T_*$. В следующей теореме будет показано, что разрешимость этой задачи, вообще говоря, отсутствует и при $T \in (T_*, 2T_*)$. Учитывая доказанную в разд. 2 и 3 разрешимость при $T > 2T_* + \varepsilon = 4l + \varepsilon$ для сколь угодно малых $\varepsilon > 0$, значение $T = 2T_*$ можно будет трактовать как аналог критического момента для класса управлений, являющихся неупреждающими относительно наблюдения $g(t)$.

Теорема 2. *В задаче (1.1)–(1.5) не существует последовательности стратегий, гарантирующей успокоение процесса за время $T < 2T_* = 4l$ в смысле определения 3.*

Доказательство. Докажем, что такой стратегии не существует даже в простейшем случае $q(x) \equiv 0$, в котором возможны явные аналитические конструкции позиционных управлений $u(t)$, реагирующих на непрерывно поступающие и абсолютно точные ($\sigma = 0$) наблюдения $g(t)$. По данному $T < 4l$ найдем некоторое $\varepsilon \in (0, l)$ такое, что $T - l < 3l - 2\varepsilon$, и предположим существование последовательности стратегий S_{N_k} , способных для любого начального состояния $v(x)$ сформировать позиционные управления \tilde{u}^{N_k} , асимптотически гарантирующие успокоение системы за время T , т. е. обладающие свойством сходимости (1.9). Применим эти стратегии к процессу с нулевым начальным состоянием $v_0(x) = (v_0^0(x) = 0, v_0^1(x) = 0)$ и обозначим через $u_{*0}(t)$ и $y_0(t, x)$ соответствующие предельное управление и решение задачи (1.1)–(1.3).

Рассмотрим вспомогательную смешанную задачу с начальными данными на слое $t = l - \varepsilon$:

$$\begin{aligned} w_{tt} &= w_{xx}, & (t, x) \in Q, \\ w_x|_{x=0} &= 0, & w_x|_{x=l} = 0, & 0 < t < T, \\ w|_{t=l-\varepsilon} &= 0, & w_t|_{t=l-\varepsilon} &= H(x - (l - \varepsilon)), & 0 < x < l, \end{aligned}$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда. Возьмем пару следов $v_1(x) = (w(0, \cdot), w_t(0, \cdot))$ в качестве начального условия системы (1.1)–(1.3) и обозначим через $u_{*1}(t)$ и $y_1(t, x)$ соответствующие ему предельное управление и решение смешанной задачи (1.1)–(1.3). Заметим, что $w(t, 0) = 0$ при $t \in (0, 2l - 2\varepsilon)$. Отсюда и из левого граничного условия для функции $w(t, x)$ следует, что кусочно-постоянные управления, построенные с помощью стратегии S_{N_k} для начальных состояний $v_0(x)$ и $v_1(x)$, будут совпадать для каждого фиксированного k на интервале $t \in (0, 2l - 2\varepsilon)$, а тогда в силу (1.9) будут совпадать и предельные управления: $u_{*0}(t) = u_{*1}(t)$, $t \in (0, 2l - 2\varepsilon)$.

Далее заметим, что функция $d(t, x) = y_0(t, x) + w(t, x) - y_1(t, x)$ удовлетворяет уравнению (1.1), правому граничному условию (1.2), нулевому начальному условию (1.3), а также левому краевому условию (1.2), являющемуся однородным при $t < 2l - 2\varepsilon$. Отсюда имеем вырождение $d(t, x) \equiv 0$, $t < 2l - 2\varepsilon + x$, и, в частности, $y_0(t, l) + w(t, l) = y_1(t, l)$, $t \in (T - l, 3l - 2\varepsilon)$. В силу леммы и с учетом того, что T — время гарантированного успокоения для любых $v(x)$, будем иметь $y_0(t, l) = y_1(t, l) = 0$, $t > T - l$, т. е. $w(t, l) = 0$, $t \in (T - l, 3l - 2\varepsilon)$. Однако, решая задачу для $w(t, x)$, можно убедиться, что $w(3l - 2\varepsilon, l) = \varepsilon \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

5. Вычислительные эксперименты

В данном разделе приводятся результаты вычислительных экспериментов для задачи (1.1)–(1.5) при $l = 1$ и $q(x) = 0$. В (1.3) были взяты следующие два начальных состояния:

$$v_0(x) = (v_0^0(x) = -1, v_0^1(x) = 1), \quad v_1(x) = (v_1^0(x) = 1, v_1^1(x) = 1), \quad 0 < x < l.$$

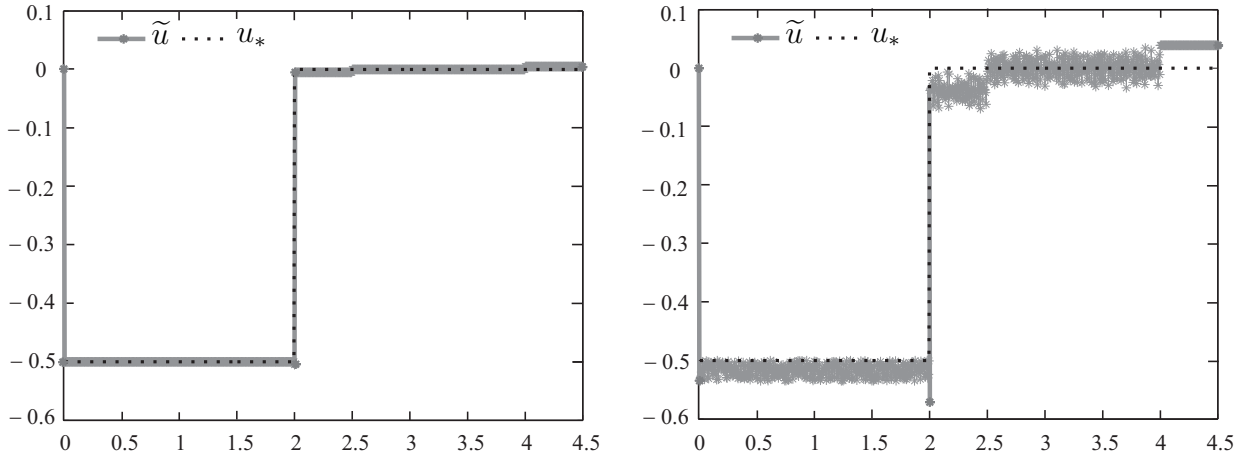


Рис. 1. Графики $\tilde{u}(t)$ и $u_*(t)$ для $v(x) = v_0(x)$ в случаях $\delta = 0$ (слева) и $\delta = 5\%$ (справа).

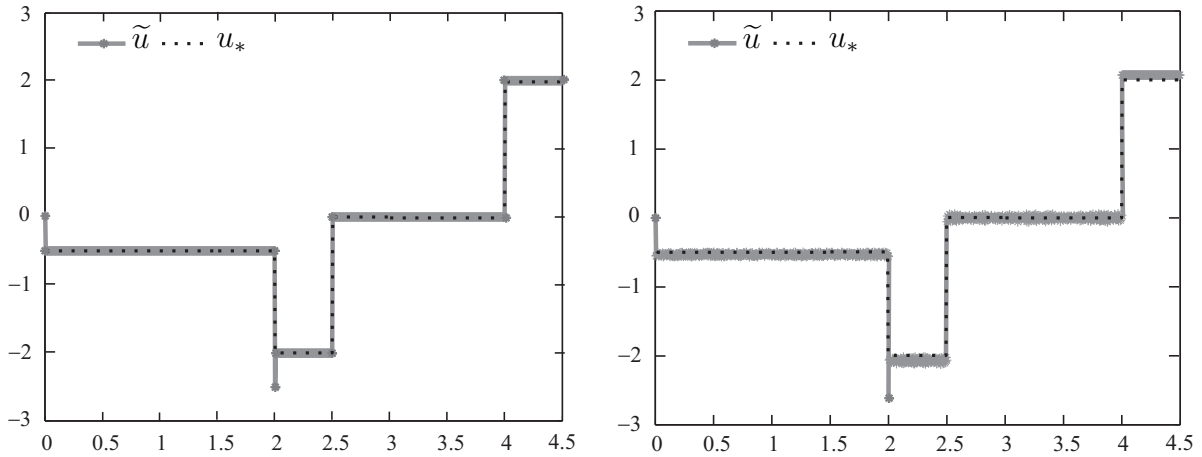


Рис. 2. Графики $\tilde{u}(t)$ и $u_*(t)$ для $v(x) = v_1(x)$ в случаях $\delta = 0$ (слева) и $\delta = 5\%$ (справа).

Качественное различие между ними состоит в том, что из *известного* состояния $v_0(x)$ систему можно перевести в состояние покоя (1.4) за критическое время $T = T_* = 2$, а из *известного* состояния $v_1(x)$ это возможно лишь за время $T > 2$. Этим можно объяснить заметную разницу во времени перевода этих *неизвестных* состояний в состояние покоя с помощью позиционных управлений, формируемых предложенным в работе алгоритмом.

Длительность второго этапа, на котором производится перевод правых граничных значений $y(t, l)$ на нулевой уровень, мы приняли равной $\varepsilon = 1/2$, а в качестве конечного момента времени взяли $T = 4l + \varepsilon = 9/2$. Интерполяционная функция $\varphi(t)$ из (3.4) была выбрана линейной. Отметим, что отношение $l/T = 2/9$ является рациональным числом, а количества N_k и M_k интервалов разбиения на $(0, T)$ и $(0, l)$ выбирались как $N_k = 9k$, $M_k = 2k$.

Предельное позиционное управление для начального состояния $v(x) = v_0(x)$ имеет вид

$$u_*(t) = -1/2, \quad t \in (0, 2); \quad u_*(t) = 0, \quad t \in (2, 9/2),$$

а для начального состояния $v(x) = v_1(x)$ оно записывается как

$$u_*(t) = -1/2, \quad t \in (0, 2); \quad u_*(t) = -2, \quad t \in (2, 5/2);$$

$$u_*(t) = 0, \quad t \in (5/2, 4); \quad u_*(t) = 2, \quad t \in (4, 9/2).$$

Заметим, что в первом случае процесс удастся успокоить досрочно за время $t = 2$, а во втором — лишь за время $T = 9/2$.

Пусть $\sigma = \|g_*^\sigma - g_*\|$ — абсолютный уровень помехи из (1.8) для наблюдения $g_*(t)$, соответствующего предельному управлению $u_*(t)$, а $\delta = \sigma/\|g_*\|$ — ее относительный уровень. На рис. 1 для $v(x) = v_0(x)$ изображены графики приближенного и точного управлений $\tilde{u}(t)$ и $u_*(t)$ для $M = 200$, $N = 900$ в случаях $\delta = 0$ и $\delta = 5\%$. Уровни погрешностей по управлению, на наш взгляд, оказались вполне приемлемыми и в относительных единицах составили $\|\tilde{u} - u_*\|/\|u_*\| = 7,14\%$ для $\delta = 0$ и $10,6\%$ для $\delta = 5\%$. На рис. 2 приведены аналогичные графики для начального состояния $v_1(x)$. Управление при этом было найдено с погрешностью $2,38\%$ для $\delta = 0$ и погрешностью $5,18\%$ для $\delta = 5\%$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения / Ф.П. Васильев, М. А. Куржанский, М. М. Потапов, А. В. Разгулин. М. : МАКС Пресс : Издат. отд. фак. ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2010. 384 с.
2. Потапов М.М., Дряженков А.А. Оптимизация порогового момента в неравенстве наблюдаемости для волнового уравнения с краевым условием упругого закрепления // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 215–229.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М. : Наука, 1974. 456 с.
4. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, вып. 2. С. 97–154.
5. Осипов Ю.С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4. С. 25–76.
6. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
7. Крицков Л.В., Абдукаримов М.Ф. Граничное управление смещением на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом // Докл. АН. 2013. Т. 450, № 6. С. 640–643.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 4-е, перераб. М. : Наука, 1976. 543 с.
9. Иванов Д.А., Потапов М.М. Приближенное решение задачи быстрогодействия для волнового уравнения с граничными управлениями // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 112–127.
10. Дряженков А.А., Потапов М.М. Конструктивные неравенства наблюдаемости для слабых обобщенных решений волнового уравнения с условием упругого закрепления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 6. С. 928–941.
11. Дряженков А.А. Неравенство наблюдаемости для волнового уравнения с условием упругого закрепления в случае критического интервала времени // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15: Вычисл. математика и кибернетика. 2014. № 3. С. 18–22.

Дряженков Андрей Александрович
аспирант
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrja@yandex.ru

Поступила 19.12.2015

Потапов Михаил Михайлович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор
МГУ им. М. В. Ломоносова
e-mail: mpotapov@tochka.ru

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ ОТСУТСТВИЯ ЛОКАЛЬНОЙ СБАЛАНСИРОВАННОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА¹

В. И. Зенков

Конечная простая неабелева группа K называется локально сбалансированной (локально 1-сбалансированной) относительно простого числа p , если $O_{p'}(C_G(x)) = 1$ для любого элемента x порядка p из $G \simeq \text{Aut}(K)$. Описанию не локально сбалансированных конечных простых неабелевых групп посвящена известная теорема 7.7.1 из “Классификации конечных простых групп” трех авторов Д. Горенштейна, Р. Лайонса, Р. Соломона. Однако в формулировке п. (d) этой теоремы имеется пробел, который присутствует и в доказательстве этого пункта. В данной статье доказана следующая

Теорема. Пусть G — конечная почти простая группа, $K = \text{Soc}(G)$ — группа лиева типа над полем характеристики r и x — элемент простого порядка $p \neq r$ из G , индуцирующий на K не внутренне-диагональный автоморфизм. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$;
- (2) x индуцирует на K полевой автоморфизм и $(|C_K(x)|, p) = 1$.

Теорема дает критерий не локально 1-сбалансированности групп лиева типа из п. (d) теоремы 7.7.1 с не внутренне-диагональным автоморфизмом, на основе которого для любой конечной простой неабелевой группы лиева типа строится счетная серия контрпримеров к п. (d) теоремы 7.7.1.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, группа лиева типа, сбалансированная группа.

V. I. Zenkov. A criterion for the failure of local balance of some simple groups of Lie type.

A finite simple nonabelian group K is called locally balanced (locally 1-balanced) with respect to a prime p if $O_{p'}(C_G(x)) = 1$ for any element x of order p from $G \simeq \text{Aut}(K)$. Finite simple nonabelian groups that are not locally balanced were described in the famous Theorem 7.7.1 from *The Classification of the Finite Simple Groups* by Gorenstein, Lyons, and Solomon. However, there is a gap in statement (d) of that theorem, which is also present in the proof. In this connection, we prove the following theorem.

Theorem. Suppose that G is a finite almost simple group, $K = \text{Soc}(G)$ is a group of Lie type over a field of characteristic r , and x is an element of a prime order $p \neq r$ from G that induces on K a non-inner-diagonal automorphism. Then the following conditions are equivalent:

- (1) $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$;
- (2) x induces a field automorphism on K and $(|C_K(x)|, p) = 1$.

The theorem gives a criterion for the local 1-imbalance of groups of Lie type from statement (d) of the mentioned Theorem 7.7.1 with a non-inner-diagonal automorphism. The criterion can be used to construct a countable series of counterexamples to this statement for any simple nonabelian group of Lie type.

Keywords: finite group, simple group, group of Lie type, balanced group.

MSC: 20D06, 20G07

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-147-149

Конечная простая неабелева группа K называется локально сбалансированной относительно простого числа p , если $O_{p'}(C_G(x)) = 1$ для любого элемента x порядка p из $G \simeq \text{Aut}(K)$. В противном случае группа K не локально сбалансирована (не локально 1-сбалансирована).

В частности, если K — группа лиева типа над полем характеристики r и $r \neq p$, то в [1, теорема 7.7.1(d)] для элемента $x \in G$ порядка p такого, что $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$, утверждается, что x индуцирует на $\text{Inn}(K)$ внутренне-диагональный автоморфизм.

¹Работа выполнена при поддержке Комплексной программы фундаментальных исследований УРО РАН (проект 15-16-1-5) и проекта повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение между Министерством образования и науки РФ и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013 № 02.А03.21.0006).

Как показывает следующая теорема, это утверждение неверно и нуждается в корректровке. В данной статье нами доказана

Теорема. Пусть G — конечная почти простая группа, $K = \text{Soc}(G)$ — группа лиева типа над полем характеристики r и x — элемент простого порядка $p \neq r$ из G , индуцирующий на K не внутренне-диагональный автоморфизм. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (1) $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$;
- (2) x индуцирует полевой автоморфизм на K и $(|C_K(x)|, p) = 1$.

Доказательство. (2) \Rightarrow (1). Допустим, что справедливо (2). Тогда согласно [2, утверждение (9-1)] подгруппа $C_K(x)$ имеет тот же лиев тип, что и K , но определена над полем порядка $\sqrt[q]{q}$, где $q = r^n$. В частности, $C_K(x) \neq 1$ и $C_K(x) \triangleleft C_G(x)$. Так как по условию $(|C_K(x)|, p) = 1$, то $C_K(x) \leq O_{p'}(C_G(x))$. Значит, $O_{p'}(C_G(x)) \neq 1$ и импликация (2) \Rightarrow (1) доказана.

Импликация (1) \Rightarrow (2). Допустим, что справедливо (1). По условию теоремы элемент x индуцирует на K не внутренне-диагональный автоморфизм. Тогда согласно [2, утверждение (9-1)] x индуцирует на K графовый, графово-полевой или полевой автоморфизм, причем $|x| = 2, 3$ в случае графового или графово-полевого автоморфизма.

Положим $C = C_G(x)$, $T = O_{p'}(C)$, $K_0 = C_K(x)$ и $K_1 = O^{r'}(K_0)$. По условию теоремы $T \neq 1$.

Рассмотрим $F^*(T) = F(T)E(T)$ — обобщенную подгруппу Фиттинга группы T , где $F(T)$ — подгруппа Фиттинга группы T , а $E(T)$ — слой группы T , т. е. произведение попарно коммутирующих субнормальных квазипростых подгрупп группы T . Так как $T \triangleleft C$, а подгруппы $F(T)$ и $E(T)$ характеристичны в T , то $F(T) \leq F(C)$ и $E(T) \leq E(C)$, причем компоненты из $E(T)$ являются компонентами в C . Поскольку $E(C) = E(C \cap K)$ в силу разрешимости группы $\text{Out}(K)$, то $E(C) = E(K'_1)$.

Допустим, что x индуцирует на K полевой или графово-полевой автоморфизм, причем K_1 — неразрешимая подгруппа. Тогда согласно [1, теорема 7.1.4] имеем $F^*(K_0) = K'_1$ — простая группа и $C_G(K'_1) = \langle x \rangle$. Таким образом, $F(T) \leq F(C) \leq C_G(E(C)) = C_G(K'_1) = \langle x \rangle$. Но $F(T)$ — p' -подгруппа, а $|x| = p$. Значит, $F(T) = 1$. Следовательно, $E(T) = K'_1$ — p' -подгруппа из $K_0 \cap T$. Так как $K_1 = O^{r'}(K_0)$ и $p \neq r$, то $(|K_1|, p) = 1$. Согласно [2, утверждения (9-1)(1d) и (2e)] имеем $C_K(x) \leq G_1$, где $G_1 \simeq R \leq \text{Inndiag}(K_1)$. Поскольку $\pi(K_1) = \pi(\text{Inndiag}(K_1))$, то $\pi(C_K(x)) = \pi(K_1)$. Следовательно, $(|C_K(x)|, p) = 1$ и в случае полевого автоморфизма утверждение (1) \Rightarrow (2) доказано. Если же автоморфизм графово-полевой, то ввиду [2, утверждение (9-1)] имеем $p = 2, 3$, причем случай $p = 2$ невозможен в силу неразрешимости $E(T)$. Если же $p = 3$, то согласно [2, утверждение (7-3)] имеем $K \simeq D_4(q)$, а согласно [2, утверждение (9-1)] имеем $K_0 \simeq {}^3D_4(\sqrt[3]{q})$. Так как $r \neq 1$ и $(q_0^2 - 1) \nmid |K_0|$, где $q_0 = \sqrt[3]{q}$, то $(|K_0|, 3) = 3$. Противоречие с тем, что $K'_1 \leq O_{p'}(C_G(x))$.

Если K_1 — разрешимая подгруппа из C , то согласно [3, теорема 2.13] имеем $K_0 \simeq L_2(2)$, $L_2(3)$, $U_3(2)$ $Sz(2)$. Если при этом x индуцирует графово-полевой автоморфизм на K , то согласно [2, утверждение (9-1)(2)] $K_0 \simeq U_3(2)$ $Sz(2)$ и $p = 2$, что невозможно в силу $p \neq r$. Если же x индуцирует полевой автоморфизм на K , то $K \simeq L_2(2^p)$, $L_2(3^p)$, $U_3(2^p)$ или $Sz(2^p)$.

Если $K \simeq L_2(2^p)$, $L_2(3^p)$ или $U_3(2^p)$, то $C_K(x) = \{2, 3\}$ -группа. Следовательно, условия $T \neq 1$ и $|\text{Out}(K)| \nmid (3p)$ влекут, что $p > 3$ и, следовательно, $(|C_K(x)|, p) = 1$.

Таким образом, в случае полевого или графово-полевого автоморфизма теорема доказана.

Пусть x индуцирует на K графовый автоморфизм. Тогда согласно [2, утверждение (9-1)] $p = 2, 3$, причем в случае $p = 3$ имеем $K \simeq D_4(q)$ или ${}^3D_4(q)$ и группа K имеет два класса $\langle x_1 \rangle$ и $\langle x_2 \rangle$ подгрупп порядка 3, где $C_K(x_1) \simeq G_2(q)$, а $C_K(x_2) \simeq PGL_3^\varepsilon(q)$, $q \equiv \varepsilon \pmod{3}$, $\varepsilon = \pm 1$. Так как $(|C_K(x_i)|, 3) = 3$ для $i = 1, 2$ и $F(C_K(x_i)) = 1$, или 3-группа при $\varepsilon = -1$ и $q = 2$, то условие $T \neq 1$ влечет, что $t \mid |T|$, для некоторого простого числа $t \geq 5$. Согласно [4, табл. 3] элемент y порядка t из T индуцирует на K полевой автоморфизм. Но тогда y действует нетривиально на K_0 . Противоречие с тем, что $y \in F(T)$, так как $|y| \geq 5$ и $[F(T), E(T)] = [F(T), E(C)] = 1$.

Пусть $p = 2$. Тогда $q = r^n \geq 3$ ввиду условия $p \neq r$. В случае $q > 3$ согласно [1, табл. 4.5.1] подгруппа $E(K_0)$ имеет не более двух компонент и $C_G(E(K_0)) = \langle x \rangle$. Так как $F(T) \leq F(C) \leq C_G(E(C)) \leq \langle x \rangle$ и $F(T) - p'$ -группа, то $F(T) = 1$. Но тогда условие $T \neq 1$ влечет, что $E(T) \neq 1$. Противоречие, так как $E(T) -$ неразрешимая подгруппа из $O_{p'}(C_G(x)) = O(C_G(x))$.

Если $q = r = 3$, то согласно [1, табл. 4.5.1] $C_G(K_0) = \langle x \rangle$. Тогда условие $T \neq 1$ влечет, что $F^*(T) = F(T)E(T) \neq 1$. Так как $T - 2'$ -группа, то $E(T) = 1$ и $1 \neq F^*(T) = F(T) \leq F(C)$. Но согласно [1, табл. 4.5.1] $F(C) - 2$ -группа. Противоречие с тем, что $1 \neq F(T) - 2'$ -группа.

Теорема доказана.

Следствие. Пусть $G -$ конечная группа присоединенного лиева типа L . Тогда существует бесконечное множество конечных почти простых групп того же типа L , которые не являются локально 1-сбалансированными, и для каждой такой подгруппы G_1 найдется элемент x простого порядка p такой, что $(|C_{\text{Soc}(G_1)}(x)|, p) = 1$ и каждая такая группа, по теореме, будет не локально 1-сбалансированной.

Доказательство. Пусть $G = L(q) -$ группа присоединенного лиева типа L над полем из q элементов. Рассмотрим группу $G_1 = L(q^p) \rtimes \langle x \rangle$, где $p -$ простое число и элемент x порядка p индуцирует на $L(q^p)$ полевой автоморфизм порядка p . Тогда согласно [2, утверждение (9-1)] имеем $\pi(C_{G_1}(x)) = \pi(G) \cup \{p\}$. Так как множество простых чисел счетно, а $\pi(G)$ конечно, то найдется счетное число простых чисел таких, что для такого простого числа p имеем $(|C_{L(q^p)}(x)|, p) = 1$, где $L(q^p) = \text{Soc}(G_1)$. Тогда для группы G_1 выполняются условия теоремы и п. (2) теоремы, а значит, и п. (1), по которому $L(q^p)$ не является локально 1-сбалансированной.

Следствие доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups, number 3. Providence: Amer. Math. Soc., 1991. 417 p.
2. **Gorenstein D., Lyons R.** The local structure of finite groups of characteristic 2-type // Mem. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 42, no. 276. P. 1–731.
3. **Горенштейн Д.** Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985. 352 с.
4. **Burgoyne N., Griss R., Lyons R.** Maximal subgroups and automorphisms of Chevalley groups // Pacif. J. Math. 1977. Vol. 71. P. 365–403.

Зенков Виктор Иванович

д-р физ.-мат. наук,

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: zenkov@imm.uran.ru

Поступила 12.02.2016

УДК 517.977.5

**ОБ УПРАВЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ
В ЗАДАЧЕ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹****И. Н. Кандоба, И. В. Козьмин**

Исследуется задача оптимального управления для нелинейной динамической системы. Искомое управление должно удовлетворять заданным ограничениям и обеспечивать выполнение ряда требований к текущему фазовому состоянию системы. Для построения в этой задаче допустимых управлений предлагается подход, основанный на методологии решения задач управления с поводьрем. Приводятся результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамическая система, фазовые ограничения, допустимое управление, поводьрь, сопутствующие позиции.

I. N. Kandoba, I. V. Koz'min. On the control of a nonlinear dynamic system in a time-optimal problem with state constraints.

An optimal control problem for a nonlinear dynamic system is studied. The required control must satisfy given constraints and provide the fulfilment of a number of conditions on the current state of the system. For the construction of admissible controls in this problem, we propose an approach based on the ideas of solution of control problems with a guide. The results of numerical simulation are presented.

Keywords: dynamic system, state constraints, admissible control, guide, accompanying positions.

MSC: 49J15, 93C95

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-150-162

1. Введение

Работа инициирована одним из ведущих разработчиков систем управления для ракетно-космической техники (ФГУП Научно-производственное объединение автоматики им. акад. Н. А. Семихатова, г. Екатеринбург) и посвящена построению методов решения задачи оптимального управления для одной нелинейной динамической системы при ограничениях на управление и текущее фазовое состояние системы. Содержательно рассматриваемая динамическая система является математической моделью управляемого движения ракеты-носителя на безатмосферном участке ее траектории. Требуется построить программное управление, которое обеспечивает выведение максимальной массы ракеты-носителя на заданную околоземную эллиптическую орбиту с выполнением всех требований к текущему фазовому состоянию системы. Математическая модель включает уравнения поступательного движения центра масс ракеты-носителя и уравнения его вращательного движения как "твердого тела". В этой модели полагается, что двигательная установка носителя включает четыре подвижных рулевых двигателя. Эти двигатели помещены в одностепенные карданные подвесы, которые обеспечивают для каждого двигателя поворот продольной оси его камеры на некоторый угол. Скорости изменения этих углов используются в качестве управляющих параметров. Основное внимание в работе уделяется методам построения в указанной задаче допустимых управлений. Используются подходы, основанные на методологии решения задач управления с поводьрем [1; 2] и обратных задач динамики [3].

¹Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН "Математические задачи современной теории управления" и комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект 15-16-1-14).

2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, описывающую движение ракеты-носителя (РН) как “твердого тела” от некоторой точки на безатмосферном участке ее траектории до момента выхода РН на заданную околоземную эллиптическую орбиту. Движение РН на промежутке $[t_s, t_f]$ в некоторой инерциальной прямоугольной системе координат описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = W_R(t, x, m, \vartheta, \psi, \varphi, \delta) + g(x), \quad \dot{m} = -\mu(t), \\ \dot{\omega} &= \Lambda(t, \omega) + M(t, x, \delta), \\ \dot{\delta} &= \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= (\omega_2 \sin \varphi + \omega_3 \cos \varphi) \frac{1}{\cos \psi}, \\ \dot{\psi} &= \omega_2 \cos \varphi - \omega_3 \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= \omega_1 + (\omega_2 \sin \varphi + \omega_3 \cos \varphi) \frac{\sin \psi}{\cos \psi}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где t_s — время начала движения РН от рассматриваемой точки на безатмосферном участке траектории (например, от точки отделения последнего сбрасываемого элемента конструкции РН — головного обтекателя), t_f — момент времени выхода РН на заданную орбиту; $x, v \in \mathbb{R}^3$ — положение и скорость центра масс РН; m — масса РН, μ — заданная неотрицательная функция, описывающая расход топлива двигательной установки РН; $\omega \in \mathbb{R}^3$ — угловая скорость; ϑ, ψ, φ — углы тангажа, рыскания и крена соответственно, которые определяют пространственную ориентацию строительной оси РН; W_R и g — реактивное и гравитационное ускорения соответственно; Λ — вектор-функция, определяемая угловой скоростью и моментами инерции РН относительно осей связанной с ней прямоугольной системы координат; M — вектор-функция, определяемая моментами сил от рулевых двигателей. Выражения для Λ и M будут конкретизированы ниже.

Управлениями $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ служат скорости $u_i = \dot{\delta}_i$ изменения углов δ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) поворота продольных осей камер рулевых двигателей

$$|u_i(t)| \leq u_i^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.3)$$

В момент времени t_s для системы (2.1), (2.2) задаются начальные условия

$$x(t_s) = x_s, \quad v(t_s) = v_s, \quad m(t_s) = m_s, \quad \omega(t_s) = \omega_s, \quad \delta(t_s) = \delta_s, \quad \vartheta(t_s) = \vartheta_s, \quad \psi(t_s) = \psi_s, \quad \varphi(t_s) = \varphi_s. \quad (2.4)$$

Ракета-носитель должна быть выведена на заданную оскулирующую эллиптическую орбиту с требуемой точностью, т. е. должны быть выполнены терминальные ограничения

$$|i - \bar{i}| \leq \bar{\Delta}_i, \quad |\Omega - \bar{\Omega}| \leq \bar{\Delta}_\Omega, \quad |h_{\min} - \bar{h}_{\min}| \leq \bar{\Delta}_{h_{\min}}, \quad |h_{\max} - \bar{h}_{\max}| \leq \bar{\Delta}_{h_{\max}}, \quad |\omega_{\text{per}} - \bar{\omega}_{\text{per}}| \leq \bar{\Delta}_\omega, \quad (2.5)$$

где наклонение плоскости орбиты i , долгота восходящего узла Ω , минимальная h_{\min} и максимальная h_{\max} высоты орбиты соответственно, аргумент перигея ω_{per} — параметры, определяющие оскулирующую эллиптическую орбиту (вообще говоря, отличную от круговой). Отметим, что значения перечисленных параметров однозначно определяются [4, гл. 4] компонентами векторов $x(t_f)$, $v(t_f)$. Через \bar{i} , $\bar{\Omega}$, \bar{h}_{\min} , \bar{h}_{\max} , $\bar{\omega}_{\text{per}}$ обозначены значения соответствующих параметров заданной орбиты выведения, а через $\bar{\Delta}_i$, $\bar{\Delta}_\Omega$, $\bar{\Delta}_{h_{\min}}$, $\bar{\Delta}_{h_{\max}}$, $\bar{\Delta}_\omega$ — допустимые отклонения от этих параметров.

К управляемому движению РН предъявляется ряд дополнительных требований. Эти требования обуславливают наличие ограничений на текущее фазовое состояние системы (2.1), (2.2). Укажем наиболее существенные из них:

$$|\vartheta(t)| \leq \vartheta^{\max}, \quad |\psi(t)| \leq \psi^{\max}, \quad |\varphi(t)| \leq \varphi^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]; \quad (2.6)$$

$$|\dot{\vartheta}(t)| \leq \dot{\vartheta}^{\max}, \quad |\dot{\psi}(t)| \leq \dot{\psi}^{\max}, \quad |\dot{\varphi}(t)| \leq \dot{\varphi}^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f]; \quad (2.7)$$

$$|\delta_i(t)| \leq \delta_i^{\max}, \quad t \in [t_s, t_f], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (2.8)$$

Требуется построить программное управление \mathbf{u} , т.е. измеримую вектор-функцию $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_s, t_f]$, которая удовлетворяет условию (2.3) и обеспечивает выведение на заданную орбиту максимальной массы РН (выведение РН с минимальным расходом топлива) с выполнением всех фазовых ограничений. Поскольку масса ракеты-носителя m не зависит от управления и является монотонно убывающей функцией времени, то эта задача сводится к следующей задаче быстрогодействия.

З а д а ч а 1 (Основная задача). Для управляемой системы (2.1), (2.2) с начальными условиями (2.4) в момент времени t_s найти программное управление \mathbf{u} , минимизирующее значение функционала $J_1[\mathbf{u}] = t_f$. При этом должны быть выполнены ограничения (2.3), (2.6)–(2.8), а также условия (2.5) на параметры орбиты.

Управления, удовлетворяющие в задаче 1 всем требованиям, кроме условия оптимальности, будем называть допустимыми в этой задаче.

3. Общий подход к построению допустимых управлений в основной задаче 1. Вспомогательная задача оптимального управления

Для построения в задаче 1 допустимого управления может быть применен следующий подход, основанный на методологии решения задач управления с поводырём [1, гл. 9]. Наряду с системой (2.1), (2.2) рассмотрим упрощенную систему, описывающую управляемое движение центра масс РН:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{v}, & \dot{\bar{v}} &= \bar{W}_R(t, \bar{x}, \bar{m}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi}) + g(\bar{x}), & \dot{\bar{m}} &= -\mu(t), \\ \dot{\bar{\vartheta}} &= \bar{U}_1, & \dot{\bar{\psi}} &= \bar{U}_2, \end{aligned} \quad (3.1)$$

в которой функция \bar{W}_R строится на основе W_R из (2.1) (например, $\bar{W}_R(t, \bar{x}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi}) = W_R(t, \bar{x}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi}, 0, 0)$, т.е. полагается, что $\bar{\varphi} \equiv 0$ и $\delta_i \equiv 0$, $t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]$, где $\bar{t}_s \in [t_s, t_f]$).

Для системы (3.1) в момент времени $\bar{t}_s \in [t_s, t_f]$ значениями соответствующих компонент фазового состояния системы (2.1), (2.2) задаются начальные условия

$$\bar{x}(\bar{t}_s) = x(\bar{t}_s), \quad \bar{v}(\bar{t}_s) = v(\bar{t}_s), \quad \bar{m}(\bar{t}_s) = m(\bar{t}_s), \quad \bar{\vartheta}(\bar{t}_s) = \vartheta(\bar{t}_s), \quad \bar{\psi}(\bar{t}_s) = \psi(\bar{t}_s). \quad (3.2)$$

В качестве управляющих параметров используются скорости \bar{U}_1 и \bar{U}_2 изменения углов тангажа $\bar{\vartheta}$ и рыскания $\bar{\psi}$:

$$|\bar{U}_1(t)| \leq \dot{\vartheta}^{\max}, \quad |\bar{U}_2(t)| \leq \dot{\psi}^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]. \quad (3.3)$$

На текущее фазовое состояние системы (3.1), (3.2) накладываются ограничения

$$|\bar{\vartheta}(t)| \leq \vartheta^{\max}, \quad |\bar{\psi}(t)| \leq \psi^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]. \quad (3.4)$$

Здесь и далее для того, чтобы отличать величины, относящиеся к системе (2.1), (2.2), от величин, имеющих отношение к упрощенной системе (3.1), (3.2), последние снабжаются сверху горизонтальной чертой.

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления.

З а д а ч а 2 (Вспомогательная задача). Для управляемой системы (3.1) с заданными в момент времени \bar{t}_s начальными условиями (3.2) найти программное управление $\bar{\mathbf{U}}$ (измеримую вектор-функцию $\bar{\mathbf{U}}(t)$, $t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]$), минимизирующее значение функционала $J_2[\bar{\mathbf{U}}] = \bar{t}_f$. При этом должны быть выполнены ограничения (3.3), (3.4), а также условия (2.5) на параметры орбиты.

Управления, удовлетворяющие во вспомогательной задаче 2 всем требованиям, кроме условия оптимальности, будем называть допустимыми в этой задаче.

Для вспомогательной задачи 2 известны [5;6] методы построения допустимых управлений. Ключевое место среди них занимает метод [5] построения субоптимального в задаче 2 управления \bar{U}^* , которое обеспечивает выведение центра масс РН на заданную орбиту за время, близкое к минимальному. Следует отметить, что это управление является разрывным. В [6] предложен численный алгоритм построения допустимых управлений в задаче 2, которые при определенных условиях могут оказаться непрерывными. Этот алгоритм оказался более трудоемким по сравнению с [5], но построенные управления в этой задаче обеспечивали выведение центра масс РН на заданную орбиту за практически то же время, что и упомянутое выше субоптимальное управление.

Далее систему (2.1), (2.2), описывающую управляемое движение РН как “твёрдого тела”, будем называть *полной* системой. Упрощенную систему (3.1), (3.2), описывающую управляемое движение центра масс РН, будем называть *поводырем* для полной системы, а *непрерывные* допустимые во вспомогательной задаче 2 управления $\bar{U}^b = (\bar{U}_1^b, \bar{U}_2^b)^\top$ для поводыря — *базовыми* управлениями. Через \mathbf{x} и $\bar{\mathbf{x}}$ будем обозначать “расширенные” векторы состояния $\mathbf{x} = (x^\top, v^\top, m, \omega^\top, \delta^\top, \vartheta, \psi, \varphi)^\top \in \mathbb{R}^{17}$ и $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^\top, \bar{v}^\top, \bar{m}, \bar{\vartheta}, \bar{\psi})^\top \in \mathbb{R}^9$ полной системы и поводыря соответственно.

Основная идея предлагаемого подхода к построению допустимых в основной задаче 1 управлений \mathbf{u} для полной системы (2.1), (2.2) заключается в следующем.

Зафиксируем некоторый момент времени $\bar{t}_s \in [t_s, t_f]$ и построим некоторое базовое управление $\bar{U}^b = \bar{U}^b(t)$, $t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]$, для поводыря (3.1), (3.2) во вспомогательной задаче 2. Здесь \bar{t}_f — момент вывода центра масс РН в системе (3.1), (3.2) на заданную орбиту с помощью этого базового управления. Рассмотрим промежуток времени $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$: $\bar{t}_H = \bar{t}_s$, $\bar{t}_K \leq \bar{t}_f$. Используя базовое управление \bar{U}^b , определим на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ функции

$$\begin{aligned}\omega_1^b(t) &= -\bar{U}_1^b(t) \sin \bar{\psi}^b(t), \\ \omega_2^b(t) &= \bar{U}_1^b(t) \cos \bar{\psi}^b(t) \sin \varphi_0 + \bar{U}_2^b(t) \cos \varphi_0, \\ \omega_3^b(t) &= \bar{U}_1^b(t) \cos \bar{\psi}^b(t) \cos \varphi_0 - \bar{U}_2^b(t) \sin \varphi_0,\end{aligned}\quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad (3.5)$$

где $\varphi_0 = \varphi(\bar{t}_H)$. Эти функции строятся с помощью кинематических уравнений Эйлера (2.2) путем подстановки в них базового управления \bar{U}^b и соответствующих ему компонент фазового состояния $\bar{\mathbf{x}}$ поводыря с заменой в правых частях этих уравнений функции φ ее значением φ_0 в момент времени \bar{t}_H . Такая подстановка и приравнивание к нулю правой части третьего в (2.2) уравнения приводят к трем линейным относительно функций ω_k ($k = 1, 2, 3$) равенствам, из которых указанные функции могут быть выражены в аналитической форме единственным образом. Эта операция и приводит к задаваемым соотношениями (3.5) функциям ω_k^b ($k = 1, 2, 3$).

Будем на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ строить допустимое в основной задаче 1 управление \mathbf{u} для полной системы, при котором на этом промежутке функции ω_k в силу полной системы принимают такие же значения, как и функции ω_k^b ($k = 1, 2, 3$).

4. Управления, сопутствующие базовому на заданном промежутке времени

Рассмотрим некоторое базовое управление $\bar{U}^b = \bar{U}^b(t)$, $t \in [\bar{t}_s, \bar{t}_f]$, для поводыря и промежуток времени $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$: $\bar{t}_H = \bar{t}_s$, $\bar{t}_K \leq \bar{t}_f$.

О п р е д е л е н и е. Управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, для полной системы (2.1), (2.2), при котором выполняются условия

$$\omega_k(t) = \omega_k^b(t), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad k = 1, 2, 3,$$

будем называть управлением, сопутствующим базовому \bar{U}^b на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$.

Заметим, что управления для полной системы, сопутствующие базовому \bar{U}^b на некотором промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, необязательно являются допустимыми в основной задаче 1. Но, как будет показано ниже, сопутствующие базовому управления, во-первых, обладают свойствами, которые обеспечивают выполнение ограничений (2.6) и (2.7) на фазовое состояние полной системы в основной задаче 1. Во-вторых, если базовое управление \bar{U}^b удовлетворяет ряду условий, то для него можно построить целое семейство сопутствующих ему управлений для полной системы, удовлетворяющих и ограничениям (2.8) в основной задаче 1. Из этого семейства управлений будем пытаться выделить те, которые на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ удовлетворяют ограничениям (2.3) (а на завершающем промежутке $[\bar{t}_H, t_f]$ и условиям (2.5) на параметры орбиты) в основной задаче 1.

Справедливо следующее

Утверждение. Пусть управление $u(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, для полной системы (2.1), (2.2) является сопутствующим базовому управлению \bar{U}^b на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Тогда на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ управление u обеспечивает выполнение следующих условий:

$$\vartheta(t) = \bar{\vartheta}^b(t), \quad \psi(t) = \bar{\psi}^b(t), \quad \varphi \equiv \varphi(\bar{t}_H), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K].$$

Доказательство. Пусть управление u является управлением, сопутствующим базовому на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Тогда из определения такого управления следует, что для управления u в полной системе (2.1), (2.2) выполняются равенства

$$\omega_k(t) = \omega_k^b(t), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

С учетом (4.1) замена в кинематических уравнениях Эйлера (2.2) функций ω_k функциями ω_k^b ($k = 1, 2, 3$) приводит к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\vartheta} &= \bar{U}_1^b \cos \bar{\psi}^b \frac{1}{\cos \psi}, \\ \dot{\psi} &= \bar{U}_2^b = \dot{\bar{\psi}}^b, \\ \dot{\varphi} &= -\bar{U}_1^b \sin \bar{\psi}^b + \bar{U}_1^b \cos \bar{\psi}^b \frac{\sin \psi}{\cos \psi}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Принимая во внимание, что $\bar{\psi}^b(\bar{t}_H) = \psi(\bar{t}_H)$, из второго уравнения системы (4.2) следует, что $\psi(t) = \bar{\psi}^b(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Тогда первое и третье уравнения системы (4.2) принимают вид

$$\dot{\vartheta} = \bar{U}_1^b, \quad \dot{\varphi} = 0,$$

откуда с учетом $\bar{\vartheta}^b(\bar{t}_H) = \vartheta(\bar{t}_H)$ получаем

$$\vartheta(t) = \bar{\vartheta}^b(t), \quad \psi(t) = \bar{\psi}^b(t), \quad \varphi \equiv \varphi(\bar{t}_H) = \varphi_0, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K].$$

Утверждение доказано.

Перейдем к рассмотрению достаточных условий существования управлений, сопутствующих базовому \bar{U}^b на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$.

Для построения на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ управлений, сопутствующих базовому \bar{U}^b , воспользуемся спецификой уравнений, описывающих в полной системе (2.1), (2.2) динамику компонент угловой скорости $\omega \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= R_1(t) (-\sin \delta_1 - \sin \delta_2 + \sin \delta_3 + \sin \delta_4), \\ \dot{\omega}_2 &= G_2(t) \omega_1 \omega_3 + R_2(t) (\sin \delta_1 + \sin \delta_3), \\ \dot{\omega}_3 &= G_3(t) \omega_1 \omega_2 + R_3(t) (\sin \delta_2 + \sin \delta_4), \end{aligned} \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad (4.3)$$

где $R_k(t) < 0$ ($k = 1, 2, 3$), $G_k(t)$ ($k = 2, 3$), $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, — заданные функции².

Пусть выполнены следующие условия:

$$R_l, G_k \in C([\bar{t}_H, \bar{t}_K]), \quad l = 1, 2, 3, \quad k = 2, 3, \quad (4.4)$$

$$\bar{\vartheta}^b, \bar{\psi}^b \in C^2([\bar{t}_H, \bar{t}_K]), \quad \bar{U}_1^b, \bar{U}_2^b \in C^1([\bar{t}_H, \bar{t}_K]). \quad (4.5)$$

Как уже отмечалось в разд. 3, существуют методы построения допустимых управлений в задаче 2, которые оказываются “довольно” гладкими [6, с. 213–214]. Для выполнения условия (4.5) можно воспользоваться различными методами сглаживания таких управлений. При этом требуется обеспечить, чтобы результирующие гладкие управления \bar{U}^b были допустимыми в задаче 2.

При условии (4.4) для любых начальных данных $\omega_k(\bar{t}_H)$ ($k = 1, 2, 3$) и непрерывных на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ функций δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) система (4.3) имеет единственное решение ω_k ($k = 1, 2, 3$), определенное на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. При этом для заданных непрерывных на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ функций δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) при интегрировании на этом промежутке полной системы (2.1), (2.2) система (4.3) может интегрироваться независимо от остальных уравнений полной системы.

Формальная замена ω_k в уравнениях системы (4.3) соответствующими функциями ω_k^b ($k = 1, 2, 3$) приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1^b &= R_1(t) (-\sin \delta_1 - \sin \delta_2 + \sin \delta_3 + \sin \delta_4), \\ \dot{\omega}_2^b &= G_2(t) \omega_1^b \omega_3^b + R_2(t) (\sin \delta_1 + \sin \delta_3), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \\ \dot{\omega}_3^b &= G_3(t) \omega_1^b \omega_2^b + R_3(t) (\sin \delta_2 + \sin \delta_4). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Подставляя в (4.6) полученные из (3.5) с учетом (4.5) выражения для $\dot{\omega}_k^b$ ($k = 1, 2, 3$), соотношения (4.6) можно записать в виде

$$s_1 + s_2 - s_3 - s_4 = Q_1, \quad s_1 + s_3 = Q_2, \quad s_2 + s_4 = Q_3, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{R_1} (\dot{\bar{U}}_1^b \sin \bar{\psi}^b + \bar{U}_1^b \dot{\bar{U}}_2^b \cos \bar{\psi}^b), \\ Q_2 &= \frac{1}{R_2} (\dot{\bar{U}}_1^b \cos \bar{\psi}^b \sin \varphi_0 + \dot{\bar{U}}_2^b \cos \varphi_0 - \bar{U}_1^b \bar{U}_2^b (1 + G_2) \sin \bar{\psi}^b \sin \varphi_0 + (\bar{U}_1^b)^2 G_2 \sin \bar{\psi}^b \cos \bar{\psi}^b \cos \varphi_0), \\ Q_3 &= \frac{1}{R_3} (\dot{\bar{U}}_1^b \cos \bar{\psi}^b \cos \varphi_0 - \dot{\bar{U}}_2^b \sin \varphi_0 - \bar{U}_1^b \bar{U}_2^b (1 - G_3) \sin \bar{\psi}^b \cos \varphi_0 + (\bar{U}_1^b)^2 G_3 \sin \bar{\psi}^b \cos \bar{\psi}^b \sin \varphi_0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь $s_k(t) = \sin(\delta_k(t))$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, ($k = 1, 2, 3, 4$).

Очевидно, что равенства (4.7) на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ могут задавать в аналитической форме бесконечно много вектор-функций $\mathbf{s}(t) = \{s_k(t) \mid k = 1, 2, 3, 4\}$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Например, каждая такая конкретная непрерывная вектор-функция \mathbf{s} может быть определена на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ путем задания на этом промежутке одной из непрерывных функций s_k ($k = 1, 2, 3, 4$):

$$s_1 = s_4 + \frac{Q_1 + Q_2 - Q_3}{2}, \quad s_2 = -s_4 + Q_3, \quad s_3 = -s_4 - \frac{Q_1 - Q_2 - Q_3}{2}. \quad (4.9)$$

Обозначим через \mathbf{S}_φ множество задаваемых соотношениями (4.8), (4.9) непрерывных вектор-функций \mathbf{s} , для которых справедливы неравенства

$$|s_k(t)| \leq s_k^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (4.10)$$

²Для ряда моделей РН $G_2(t) = \frac{J_2(t) - J_1(t)}{J_2(t)}$, $G_3(t) = -G_2(t)$; $R_k(t) = -\frac{c_k(t)P(t)}{J_k(t)}$ ($k = 1, 2, 3$), $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Здесь $P(t) > 0$ — заданная функция тяги рулевых двигателей РН; $J_k(t) > 0$ ($k = 1, 2, 3$) — известные моменты инерции РН относительно соответствующих осей связанной с РН прямоугольной системы координат: $J_2 \equiv J_3$; $c_k(t) > 0$ ($k = 1, 2, 3$) — заданные линейные функции.

где $s_k^{\max} = \sin(\delta_k^{\max})$ ($k = 1, 2, 3, 4$)³. Достаточными условиями существования непрерывной вектор-функции \mathbf{s} , определяемой выражениями (4.9) и удовлетворяющей неравенствам (4.10), например, являются

$$\begin{aligned} & \exists r \in (0, \bar{r}) : \\ & |Q_1(t) + Q_2(t)| \leq 2s_1^{\max} - (1+r)s_2^{\max}, \\ & |Q_1(t) - Q_2(t)| \leq 2s_3^{\max} - (1+r)s_2^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \\ & |Q_3(t)| \leq (1-r)s_2^{\max}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $\bar{r} = \min\{1, \frac{s_4^{\max}}{s_2^{\max}}, 2\frac{s_1^{\max}}{s_2^{\max}} - 1, 2\frac{s_3^{\max}}{s_2^{\max}} - 1\}$ ⁴. При этом фигурирующая в (4.9) непрерывная функция $s_4(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, должна удовлетворять неравенству

$$|s_4(t)| \leq rs_2^{\max}, \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K].$$

Предположим, что величина φ_0 и базовое управление \bar{U}^b обеспечивают на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ выполнение неравенств (4.11), т.е. множество \mathbf{S}_φ непусто. Тогда любая вектор-функция $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi$ определяет на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ непрерывные функции $\delta_k(t) = \arcsin(s_k(t))$ ($k = 1, 2, 3, 4$), для которых дифференциальные уравнения (4.6) описывают известную на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ динамику, задаваемую выражениями (3.5) для функций ω_k^b ($k = 1, 2, 3$). С другой стороны, для любых заданных на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ непрерывных функций δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) правые части уравнений (4.3) идентичны правым частям соответствующих уравнений (4.6). Следовательно, для любой вектор-функции $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi$ при условии

$$\omega_k(\bar{t}_H) = \omega_k^b(\bar{t}_H), \quad k = 1, 2, 3, \quad (4.12)$$

справедливо

$$\omega_k(t) = \omega_k^b(t), \quad t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K], \quad k = 1, 2, 3.$$

Если функции Q_k ($k = 1, 2, 3$), задаваемые выражениями (4.8), являются функциями ограниченной вариации на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($Q_k \in V(\bar{t}_H, \bar{t}_K)$ ($k = 1, 2, 3$))⁵, то и компоненты s_k ($k = 1, 2, 3, 4$) любой вектор-функции $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi$ обладают этим же свойством. В этом случае для любой $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_\varphi$ функции $\delta_k(t) = \arcsin(s_k(t))$ ($k = 1, 2, 3, 4$) являются почти всюду дифференцируемыми на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Для полной системы (2.1), (2.2) на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ такие функции δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) определяют управление $\mathbf{u} = \dot{\delta}$, которое является сопутствующим базовому \bar{U}^b на указанном промежутке и удовлетворяет ограничениям (2.8) в основной задаче 1. Таким образом доказана следующая

Теорема. Пусть выполнены условия

1. $R_l, G_k \in C([\bar{t}_H, \bar{t}_K])$ ($l = 1, 2, 3; k = 2, 3$).
2. $\bar{U}_1^b, \bar{U}_2^b \in C^1([\bar{t}_H, \bar{t}_K])$.
3. $\omega_k(\bar{t}_H) = \omega_k^b(\bar{t}_H)$ ($k = 1, 2, 3$).
4. Функции Q_k ($k = 1, 2, 3$), задаваемые выражениями (4.8), являются функциями ограниченной вариации на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ и удовлетворяют условию (4.11).

Тогда на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ существуют управления $\mathbf{u} = \dot{\delta}$ для полной системы (2.1), (2.2), которые являются сопутствующими базовому \bar{U}^b на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ и удовлетворяют ограничениям (2.8) в основной задаче 1.

³Неравенства (4.10) отражают стремление построить управления, сопутствующие базовому \bar{U}^b на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$, которые удовлетворяют ограничениям (2.8) в основной задаче 1.

⁴Если $s_k^{\max} = \bar{s}$, то в (4.11) $\bar{r} = 1$ и правые части всех неравенств равны $(1-r)\bar{s}$.

⁵Функции Q_k ($k = 1, 2, 3$) обладают указанным свойством, если $R_l, G_k \in V(\bar{t}_H, \bar{t}_K)$ ($l = 1, 2, 3; k = 2, 3$) и $\bar{U}_1^b, \bar{U}_2^b \in V(\bar{t}_H, \bar{t}_K)$, либо каждая из функций Q_k на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ представима в виде разности двух монотонно неубывающих функций.

На основе этих утверждений в следующем разделе представлен алгоритм построения допустимых управлений для полной системы (2.1), (2.2), действующих на некотором промежутке времени $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$.

5. Алгоритм построения допустимых управлений в основной задаче 1

Зададим на промежутке времени $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ сетку $t_i \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$):

$$\bar{t}_H = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \bar{t}_K : \quad t_{i+1} = t_i + \Delta t_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Допустимые в задаче 1 управления для полной системы на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ строятся в результате реализации на этой сетке итерационной процедуры. На каждом шаге по $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ этой процедуры выполняются следующие операции.

Производится разностная аппроксимация уравнений (4.3) в i -м узле сетки, которая приводит к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{1,i+1} - \omega_{1,i}}{\Delta t_i} &= R_{1,i+1} (-s_{1,i+1} - s_{2,i+1} + s_{3,i+1} + s_{4,i+1}), \\ \frac{\omega_{2,i+1} - \omega_{2,i}}{\Delta t_i} &= G_{2,i+1} \omega_{3,i+1} \omega_{1,i+1} + R_{2,i+1} (s_{1,i+1} + s_{3,i+1}), \\ \frac{\omega_{3,i+1} - \omega_{3,i}}{\Delta t_i} &= G_{3,i+1} \omega_{2,i+1} \omega_{1,i+1} + R_{3,i+1} (s_{2,i+1} + s_{4,i+1}), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\omega_{k,j} \approx \omega_k(t_j)$ ($j = i, i+1$), $R_{k,i+1} = R_k(t_{i+1})$ ($k = 1, 2, 3$); $G_{k,i+1} = G_k(t_{i+1})$ ($k = 2, 3$); $s_{k,i+1} \approx s_k(t_{i+1}) = \sin(\delta_k(t_{i+1}))$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

Подставляя в (5.1) вместо величин $\omega_{k,i+1}$ значения сопутствующих позиций $\omega_{k,i+1}^b = \omega_k^b(t_{i+1})$ ($k = 1, 2, 3$) [2, гл. 3], получаем недоопределенную систему трех линейных уравнений относительно четырех неизвестных $s_{k,i+1}$ ($k = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{1,i+1}^b - \omega_{1,i}}{\Delta t_i} &= R_{1,i+1} (-s_{1,i+1} - s_{2,i+1} + s_{3,i+1} + s_{4,i+1}), \\ \frac{\omega_{2,i+1}^b - \omega_{2,i}}{\Delta t_i} &= G_{2,i+1} \omega_{3,i+1}^b \omega_{1,i+1}^b + R_{2,i+1} (s_{1,i+1} + s_{3,i+1}), \\ \frac{\omega_{3,i+1}^b - \omega_{3,i}}{\Delta t_i} &= G_{3,i+1} \omega_{2,i+1}^b \omega_{1,i+1}^b + R_{3,i+1} (s_{2,i+1} + s_{4,i+1}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Нетрудно проверить, что система (5.2) совместна и имеет однопараметрическое семейство решений $\mathbf{s}^{(i+1)}(p) = \{s_{k,i+1}(p) \mid k = 1, 2, 3, 4\}$, где параметром p является одна из четырех указанных выше неизвестных. Далее без потери общности можно считать, что $p = s_{4,i+1}$. Обозначим через Π множество значений параметра $p \in [-s_4^{\max}, s_4^{\max}]$, для которых

$$|s_{k,i+1}(p)| \leq s_k^{\max}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.3)$$

где $s_k^{\max} = \sin(\delta_k^{\max})$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

Для любого $p \in \Pi$ соответствующее ему частное решение $\mathbf{s}^{(i+1)}(p)$ системы (5.2) определяет для полной системы постоянное управление $\mathbf{u}^{(i)}(p) = \{u_{k,i}(p) \mid k = 1, 2, 3, 4\}$, действующее на элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$

$$u_{k,i}(p) = \frac{\arcsin(s_{k,i+1}(p)) - \delta_{k,i}}{\Delta t_i}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.4)$$

где $\delta_{k,i} = \arcsin(s_{k,i}) \approx \delta_k(t_i)$.

Обозначим через Π_D множество значений $p \in \Pi$, для каждого из которых задаваемое формулами (5.4) управление для полной системы на элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ является

допустимым в основной задаче 1. Множество $\Pi_{\text{д}}$ может быть построено в результате полного перебора конечного набора значений $p_j \in \Pi$ ($j = 1, 2, \dots, K$), задающих разбиение этого множества достаточно малого диаметра. Непустоту множества $\Pi_{\text{д}}$ можно обеспечить за счет уменьшения величины шага Δt_i в случае, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $|s_{k,i}| \leq s_k^{\max} - \varepsilon$ ($k = 1, 2, 3, 4$).

В случае, если множество $\Pi_{\text{д}}$ оказывается пустым, то выполняется выход из итерационной процедуры и формулируется вывод о невозможности построения допустимых в основной задаче 1 управлений при заданных значениях параметров данной процедуры.

Если множество $\Pi_{\text{д}}$ непусто и не является одноэлементным, то из конечного набора действующих на элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ допустимых в основной задаче 1 управлений, построенных по формулам (5.4) для всех $p \in \Pi_{\text{д}}$, может быть выделено наилучшее⁶ управление $\mathbf{u}^{(i)*} = \mathbf{u}^{(i)}(p^*)$, где

$$p^* = \arg \min_{p \in \Pi_{\text{д}}} F(p), \quad F(p) = \|\bar{x}(t_{i+1}) - x(t_{i+1} | \mathbf{u}^{(i)}(p))\|^2. \quad (5.5)$$

Здесь $x(t_{i+1} | \mathbf{u}^{(i)}(p))$ — положение центра масс РН в момент времени t_{i+1} , которое достигается в полной системе с помощью управления $\mathbf{u}^{(i)}(p)$.

С помощью управления $\mathbf{u}^{(i)*}$ полная система (2.1), (2.2) переводится из фазового состояния $\mathbf{x}(t_i)$ в фазовое состояние $\mathbf{x}(t_{i+1} | \mathbf{u}^{(i)*})$.

В результате этой итерационной процедуры на промежутке $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{к}}]$ строится допустимое в основной задаче 1 управление для полной системы, которое задается кусочно-постоянной вектор-функцией $\mathbf{u}^*(t) = \{\mathbf{u}^{(i)*} | t \in [t_i, t_{i+1}), i = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Последовательное применение описанной выше процедуры на наборе промежутков времени $[\bar{t}_{\text{н}}^{(j)}, \bar{t}_{\text{к}}^{(j)}]$, $j = 1, 2, \dots, N$ ($\bar{t}_{\text{н}}^{(j+1)} = \bar{t}_{\text{к}}^{(j)}$, $\bar{t}_{\text{к}}^{(j+1)} \leq \bar{t}_{\text{ф}}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N-1$), либо приводит к некоторому допустимому в основной задаче 1 управлению \mathbf{u}^* для полной системы (2.1), (2.2), либо вынуждает сформулировать вывод о невозможности построения допустимых в этой задаче управлений при заданных значениях параметров (N , $\Delta \bar{t}^{(j)} = \bar{t}_{\text{к}}^{(j)} - \bar{t}_{\text{н}}^{(j)}$, $\Delta t_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$) данной процедуры.

Сделаем следующие замечания.

1. Решение на каждом элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ экстремальной задачи (5.5) для определения на соответствующем промежутке наилучшего управления $\mathbf{u}^{(i)*}$ отражает стремление удерживать пространственную траекторию полной системы (2.1), (2.2) как можно ближе к пространственной траектории поводыря (3.1), (3.2). Это позволяет с большей вероятностью избежать ухода полной системы (2.1), (2.2) в те фазовые состояния, для которых построение базового управления для поводыря либо невозможно, либо сопряжено со значительным увеличением времени выведения центра масс РН на заданную орбиту во вспомогательной задаче 2.

2. Выполнение условий (4.12) (условия 3 в теореме) может быть обеспечено в результате решения на промежутке $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}}]$ специальной частной задачи оптимального управления. Эта задача заключается в нахождении для полной системы (2.1), (2.2) управления, обеспечивающего за минимальное время $\delta \bar{t}_{\text{н}}$ достижения компонентами ω_k ее фазового состояния в момент времени $\bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}}$ значений соответствующих функций $\omega_k^{\text{б}}$ ($k = 1, 2, 3$) (для $\varphi_0 = \varphi(\bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}})$ в (3.5)). Для решения такой задачи используется аппарат нелинейного программирования [7]. После чего левый конец $\bar{t}_{\text{н}}$ промежутка $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{к}}]$ сдвигается в $\bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}}$ ($\bar{t}_{\text{н}} = \bar{t}_{\text{н}} + \delta \bar{t}_{\text{н}}$).

3. Условия теоремы накладывают достаточно жесткие ограничения на базовое управление $\bar{U}^{\text{б}}$, которое используется для построения допустимых в основной задаче 1 управлений на промежутке $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{к}}]$. Однако представляется возможным попытаться использовать в этом алгоритме и управление, которое на $[\bar{t}_{\text{н}}, \bar{t}_{\text{к}}]$ имеет *конечное* число точек разрыва. В этом случае возникает необходимость в гладкой аппроксимации такого управления в окрестностях этих

⁶В соответствии с методологией экстремального сдвига (см. [1, гл. 9]).

точек. При этом используемые для гладкой аппроксимации методы должны обеспечивать допустимость в задаче 2 результирующего сглаженного управления \bar{U}^b и выполнение условия 4 теоремы. В разд. 6 приводятся результаты численного моделирования с применением такого подхода.

4. В описанной выше численной процедуре для разностной аппроксимации уравнений (4.3) применяется достаточно простая неявная схема (5.1). Ее использование позволяет свести задачу построения допустимых в основной задаче 1 управлений на элементарном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ к анализу однопараметрического семейства решений системы линейных алгебраических уравнений (5.2), что значительно упрощает численную реализацию предлагаемого алгоритма. Такой подход носит модельный характер, при решении же реальных задач следует использовать неявные разностные схемы большего порядка аппроксимации, которые приводят к необходимости численного анализа существенно более сложных, в общем случае нелинейных, систем.

6. Результаты численного моделирования

Ниже приводятся результаты вычислительного эксперимента, в рамках которого с использованием реальных данных численно апробировался предложенный алгоритм построения допустимых управлений в основной задаче 1. Такие управления для полной системы (2.1), (2.2) строились с использованием базового управления \bar{U}^b для поводьра на промежутке $[t_0, \bar{t}_f]$, где $t_0=239.47$ с — момент начала работы последней ступени РН. На этом промежутке описанная выше численная процедура последовательно применялась на двух “коротких” промежутках $[\bar{t}_H^{(1)}, \bar{t}_K^{(1)}]$ и $[\bar{t}_H^{(2)}, \bar{t}_K^{(2)}]$: $\bar{t}_H^{(1)} = t_0$, $\bar{t}_H^{(2)} = \bar{t}_K^{(1)}$, $\bar{t}_K^{(2)} = \bar{t}_f$.

В качестве базового управления \bar{U}^b использовался результат сглаживания упомянутого в разд. 4 субоптимального управления \bar{U}^* во вспомогательной задаче 2, которое строилось с помощью предложенного в [5] метода. На рис. 6.1 приведены графики компонент \bar{U}_1^* и \bar{U}_2^* управления \bar{U}^* для поводьра на первом “коротком” промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K] = [\bar{t}_H^{(1)}, \bar{t}_K^{(1)}]$, у которого $\bar{t}_K=420$ с, $\Delta \bar{t}^{(1)} = \bar{t}_K - \bar{t}_H=180.53$ с. Как видно на рис. 6.1, каждая из компонент управления \bar{U}^* на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ имеет по одной точке разрыва, что приводит к нарушению требований гладкости этого управления в сформулированной выше теореме. Поэтому предварительно в малой окрестности (радиус окрестности — параметр процедуры) каждой из точек разрыва производилась гладкая аппроксимация соответствующей компоненты управления \bar{U}^* .

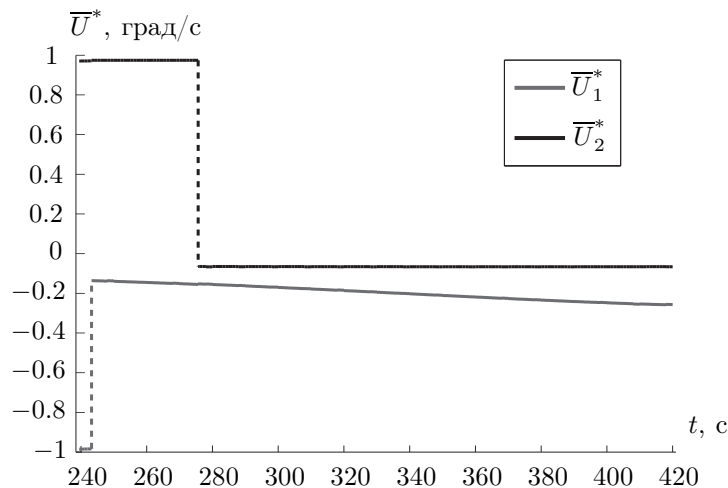


Рис. 6.1. Вспомогательная задача 2. Субоптимальное управление \bar{U}^* на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Графики функций $\bar{U}_1^*(t)$ и $\bar{U}_2^*(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Шаг $\Delta t_i = 1$ с ($i = 0, 1, \dots, n - 1$).

Параметры целевой орбиты. Ошибки выведения

Значение параметра	Допустимая ошибка	Реализовавшаяся ошибка
$i = 97.372^\circ$	$\bar{\Delta}_i = 0.06'$	$\Delta_i = 0.0185'$
$\Omega = 55.4993^\circ$	$\bar{\Delta}_\Omega = 0.06'$	$\Delta_\Omega = 0.0437'$
$h_{\min} = 260000$ м	$\bar{\Delta}_{h_{\min}} = 60$ м	$\Delta_{h_{\min}} = -34.21$ м
$h_{\max} = 528400$ м	$\bar{\Delta}_{h_{\max}} = 60$ м	$\Delta_{h_{\max}} = -8.38$ м
$\omega_{\text{per}} = 68.942^\circ$	$\bar{\Delta}_\omega = 30'$	$\Delta_\omega = -13.99'$

Для этих целей применялось несколько известных методов. В частности, использовалась эрмитова интерполяция с помощью многочленов третьей степени.

В таблице приведены значения параметров заданной (целевой) околоземной эллиптической орбиты, допустимые отклонения значений орбиты выведения от значений соответствующих параметров целевой орбиты, а также реализовавшиеся в результате численного моделирования ошибки выведения в основной задаче 1 при использовании построенного для полной системы (2.1), (2.2), допустимого в этой задаче и сопутствующего базовому управлению. При этом время выведения центра масс РН во вспомогательной задаче 2 с помощью субоптимального управления \bar{U}^* , полученное независимо от основной задачи 1, составило $\bar{t}_f = 511.787$ с. Время t_f выведения РН как “твёрдого тела” в основной задаче 1 с помощью управления, включающего два сопутствующих базовому управлению на упомянутых выше “коротких” промежутках времени, получилось равным 511.815 с, т.е. практически идентичным указанному выше для упрощенной системы (3.1), (3.2) во вспомогательной задаче 2: $t_f - \bar{t}_f = 0.0282$ с.

Кратко прокомментируем полученные результаты вычислительного эксперимента.

На рис. 6.2 и 6.3 представлены некоторые результаты построения допустимого управления \mathbf{u} для полной системы (2.1), (2.2) в основной задаче 1. Это управление является сопутствующим базовому на первом “коротком” промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K] = [\bar{t}_H^{(1)}, \bar{t}_K^{(1)}]$.

На рис. 6.2 приведены графики второй компоненты $u_2(t)$ управления \mathbf{u} и соответствующей ей функции $\delta_2(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($\Delta t_i = 1$ с, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $\Delta t_i = 0.1$ с в окрестностях точек разрыва функций \bar{U}_1^* и \bar{U}_2^*). Остальные компоненты этого управления имеют подобную структуру.

На рис. 6.3 попарно приведены графики функций $\omega_k(t)$ и $\omega_k^b(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($k = 1, 2, 3$). Здесь с помощью широких сплошных линий отображаются графики функций ω_k^b , а с помощью тонких пунктирных линий — графики функций ω_k ($k = 1, 2, 3$). Как видно на рис. 6.3, компонентам ω_k фазового состояния полной системы (2.1), (2.2) с помощью управления \mathbf{u}

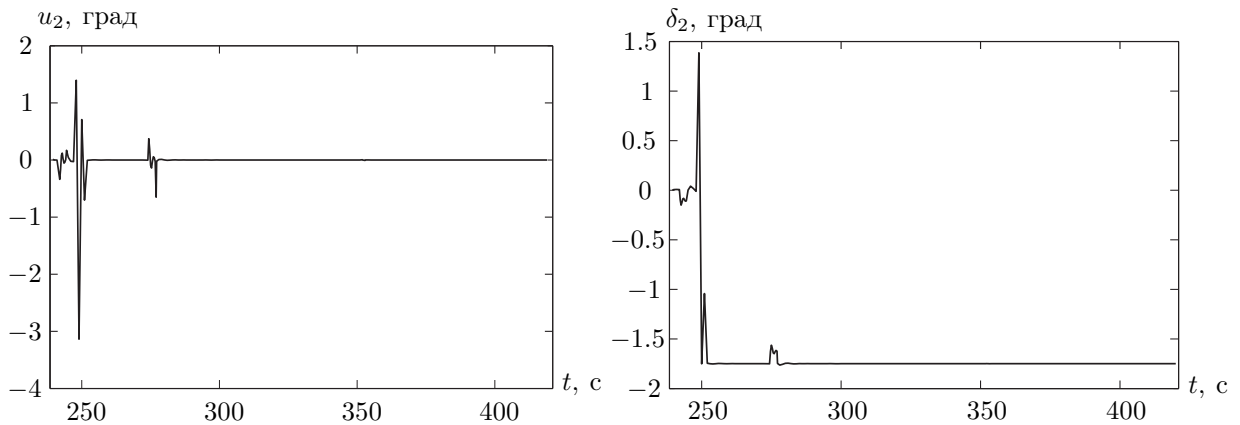


Рис. 6.2. Основная задача 1. Графики компоненты $u_2(t)$ управления \mathbf{u} и соответствующей ей функции $\delta_2(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$.

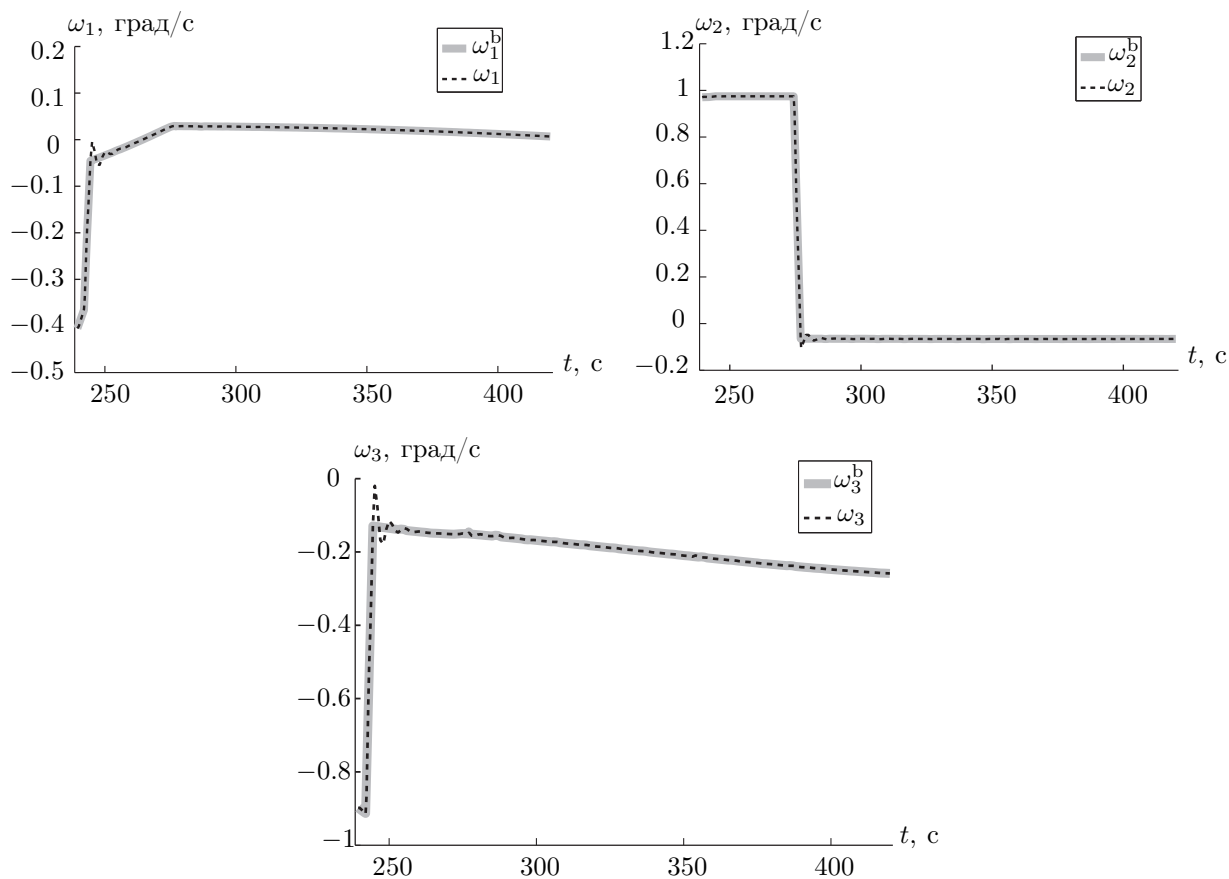


Рис. 6.3. Основная задача 1. Построение управления \mathbf{u} на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$. Графики функций $\omega_k^b(t)$ и $\omega_k(t)$, $t \in [\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ ($k = 1, 2, 3$). Шаг $\Delta t_i = 1$ с ($i = 0, 1, \dots, n - 1$).

удается на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ достаточно точно отслеживать значения соответствующих им функций ω_k^b ($k = 1, 2, 3$). Наблюдаются лишь незначительные колебания значений функций ω_k вокруг значений соответствующих им функций ω_k^b ($k = 1, 2, 3$) в малых окрестностях точек разрыва компонент \bar{U}_1^* и \bar{U}_2^* управления \bar{U}^* . Здесь значения функций ω_k^b ($k = 1, 2, 3$) на $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ вычислялись с помощью формул (3.5) при $\varphi_0 = \varphi(\bar{t}_H) = 0$.

В заключение отметим следующее.

1. При построении на этом “коротком” промежутке времени управления \mathbf{u} на каждом шаге описанной выше итерационной процедуры множество Π_d оказывалось непустым.
2. Результирующее управление \mathbf{u} обеспечивало на промежутке $[\bar{t}_H, \bar{t}_K]$ практическую идентичность значений функций угла тангажа ϑ и $\bar{\vartheta}^b$, а также функций угла рыскания ψ и $\bar{\psi}^b$. При этом наблюдалось незначительное отклонение значений функции угла крена φ от $\varphi(\bar{t}_H) = 0$.
3. Значение величины $\Delta x(\bar{t}_K) = \|\bar{x}(\bar{t}_K) - x(\bar{t}_K)\|$ составило всего порядка ста метров для достаточно больших абсолютных значений скоростей v и \bar{v} к моменту \bar{t}_K в полной (2.1), (2.2) и упрощенной (3.1), (3.2) системах соответственно.
4. Уменьшение величины шага Δt_i не оказало существенного влияния на приведенные выше результаты численного моделирования.

7. Заключение

Рассматриваемая в работе задача оптимального выведения РН на заданную орбиту является примером не решенной в общем случае математической проблемы управления нелинейной динамической системой с фазовыми ограничениями.

В работе рассмотрен конечный безатмосферный участок траектории управляемого движения РН. Предложен подход к построению управлений для нелинейной динамической системы, описывающей на этом участке движение РН как “твердого тела”, по известным допустимым управлениям в задаче оптимального выведения на заданную орбиту центра масс РН. При выполнении условий теоремы полученные управления являются допустимыми в задаче 1. Результаты численного моделирования показывают, что удается построить допустимое управление в основной задаче 1, которое обеспечивает выведение РН как “твердого тела” на заданную орбиту за время, практически равное времени выведения центра масс РН с помощью субоптимального управления \bar{U}^* во вспомогательной задаче 2.

Следует отметить, что пока нерешенной остается проблема выбора наилучшего метода гладкой аппроксимации разрывных допустимых в задаче 2 управлений для получения базовых управлений, удовлетворяющих условиям теоремы. Для решения этой задачи требуется апробировать большое число известных методов аппроксимации, при необходимости их модифицировать, а также получить для них соответствующие оценки. Эта задача может быть одним из направлений будущих исследований.

Авторы выражают благодарность ведущему научному сотруднику ФГУП НПОА им. акад. Н. А. Семихатова, кандидату техн. наук В. И. Починскому за постановку задачи, конструктивные замечания и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
4. **Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.** Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990. 448 с.
5. **Мазгалин Д.В.** Построение способа управления ракетой-носителем при использовании в качестве управления программных угловых скоростей разворотов // Информационно-управляющие системы. 2010. № 3 (46). С. 21–29.
6. **Костоусова Е.К., Починский В.И.** О задачах выведения ракеты-носителя на заданные эллиптические орбиты // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т.17, № 3. С. 201–216.
7. **Enright P.J., Conway B.A.** Discrete approximations to optimal trajectories using direct transcription and nonlinear programming // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1992. Vol. 15, no. 4. P. 994–1002.

Кандоба Игорь Николаевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: kandoba@imm.uran.ru

Козьмин Иван Викторович

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

инженер

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: ikozmin@imm.uran.ru

Поступила 29.02.2016

УДК 517.97

О РАВНЫХ ОТНОШЕНИЯХ В ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО ВЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

А. К. Керимбеков, Э. Ф. Абдылдаева

В статье исследуется нелинейная задача оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда управление осуществляется граничными источниками. В исследовании использовано понятие обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса. На основе принципа максимума для систем с распределенными параметрами получены условия оптимальности в виде систем равенств и неравенств. Обнаружено, что условия оптимальности в виде равенств обладают свойством равных отношений. Это обстоятельство позволило упростить процедуру построения как оптимального векторного управления, так и полного решения задачи нелинейной оптимизации. При этом удалось упростить условия оптимальности в виде неравенств и находить компоненты оптимального векторного управления посредством решения лишь одного скалярного нелинейного интегрального уравнения. Разработан алгоритм построения решений системы нелинейных интегральных уравнений и нелинейной задачи оптимизации.

Ключевые слова: обобщенное решение, оптимальное управление, функционал, принцип максимума, система нелинейных интегральных уравнений, свойство равных отношений.

A. K. Kerimbekov, E. F. Abdylidaeva. On the property of equal ratios in the problem of boundary vector control of elastic vibrations described by Fredholm integro-differential equations.

We study the nonlinear problem of optimal control of elastic vibrations described by Fredholm integro-differential equations in the case where the control is performed by boundary sources. In the study we use the notion of generalized solution of the boundary value problem for a control process. Optimality conditions in the form of systems of equalities and inequalities are obtained from the maximum principle for systems with distributed parameters. It is found that the optimality conditions in the form of equalities have the property of equal ratios. This circumstance allowed us to simplify the construction procedures both for the optimal vector control and for the complete solution of the nonlinear optimization problem. We also simplified the optimality conditions in the form of inequalities and found the components of the optimal vector control by solving only one scalar nonlinear integral equation. An algorithm is developed for the construction of solutions of the system of nonlinear integral equations and of the nonlinear optimization problem.

Keywords: generalized solution, optimal control, functional, maximum principle, system of nonlinear integral equations, property of equal ratios.

MSC: 49K20

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-163-176

Введение

В приложениях часто встречаются прикладные задачи, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных [1–3]. Имеется множество исследований, посвященных задачам управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями, например [4–8].

Однако задачи управления процессами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейно зависит от функции управления, изучены мало, и публикаций по этой проблеме немного [9; 10].

В данной статье исследуется задача оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функция граничного воздействия нелинейно зависит от нескольких параметров управления.

В исследовании использовано понятие обобщенного решения краевой задачи управляемого процесса.

Согласно принципу максимума для систем с распределенными параметрами [3;11] установлено, что оптимальное управление удовлетворяет одновременно соотношениям типа равенств и неравенств. Соотношения типа равенств приводят к системе нелинейных интегральных уравнений, которые обладают свойством равных отношений, а вторые — к дифференциальным неравенствам относительно функции граничного источника. Обнаружено, что свойство равных отношений существенно упрощает процедуру построения как оптимального векторного управления, так и полного решения задачи нелинейной оптимизации. В частности, компоненты оптимального векторного управления определяются посредством решения лишь одного скалярного нелинейного интегрального уравнения. Свойство равных отношений является одной из особенностей рассматриваемой задачи. Сравнение с результатами работ [12;13] показывает, что это свойство, которое появляется при векторном управлении, не зависит от природы управляемого процесса, т. е. оно является естественным для задач оптимизации с векторными управлениями.

В статье найдены достаточные условия существования единственного решения задачи оптимизации и разработан алгоритм построения полного решения задачи оптимизации в виде оптимального управления, оптимального процесса и минимального значения функционала.

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимизации, где требуется минимизировать интегральный функционал

$$I[\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] = \int_Q \left((V(T, x) - \xi_1(x))^2 + (V_t(T, x) - \xi_2(x))^2 \right) dx + 2\beta \int_0^T M[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] dt, \quad \beta > 0, \quad (1.1)$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt} - AV = \lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + g(t, x), \quad x \in Q, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.2)$$

$$V(0, x) = \psi_1(x), \quad V_t(0, x) = \psi_2(x), \quad x \in Q, \quad (1.3)$$

$$\Gamma V(t, x) \equiv \sum_{i,j}^n a_{ij}(x) V_{x_j} \cos(\nu, x_i) + a(x) V = b(t, x) p[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)], \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T. \quad (1.4)$$

Здесь A — эллиптический оператор, действующий по формуле

$$AV(t, x) = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) V_{x_j}(t, x))_{x_i} - c(x) V(t, x),$$

$a(x) \geq 0$, $c(x) \geq 0$ — известные измеримые функции; Q — область n -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой границей γ ; ν — вектор нормали, исходящий из точки $x \in \gamma$; $K(t, \tau)$ — заданная функция, определенная в области $D = \{0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T\}$ и удовлетворяющая условию

$$\int_0^T \int_0^T K^2(t, \tau) d\tau dt = K_0 < \infty, \quad K(t, \tau) \in H(D).$$

При этом

$$\begin{cases} \psi_1(x) \in H_1(Q), & \psi_2(x) \in H(Q), & \xi_1(x) \in H(Q), & \xi_2(x) \in H(Q), \\ g(t, x) \in H(Q_T), & b(t, x) \in H(\gamma_T), & p[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] \in H(0, T), \\ Q_T = Q \times (0, T), & \gamma_T = \gamma \times (0, T) \end{cases} \quad (1.5)$$

— заданные функции, причем функция $p[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)]$ нелинейно зависит от функциональных аргументов $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)$, $\vartheta_i(t) \in H(0, T)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, m$), которые являются управлениями, и удовлетворяет условиям

$$p_{\vartheta_i}[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] \neq 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m; \quad (1.6)$$

$M[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)]$ — заданная функция, строго выпуклая по функциональным аргументам; T — фиксированный момент времени, $H(Y)$ — гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на множестве Y ; $H_1(Q)$ — соболево пространство первого порядка.

Известно [14, гл. 2, §3], что при условиях (1.5), налагаемых на исходные функции, краевая задача (1.2)–(1.4) не может иметь классического решения. Поэтому будем пользоваться понятием обобщенного решения краевой задачи (1.2)–(1.4).

О п р е д е л е н и е. Под обобщенным решением краевой задачи (1.2)–(1.4) понимается функция $V(t, x) \in H(Q_T)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_Q [V_t \Phi - V \Phi_t]_{t_1}^{t_2} dx &\equiv \int_{t_1}^{t_2} \int_Q \left(-V \Phi_{tt} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) V_{x_j} \Phi_{x_i} - c(x) V \Phi \right) dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\gamma} (b(t, x) p[t, \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)] - a(x) V) \Phi(t, x) dx dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_Q \left(\lambda \int_0^T K(t, \tau) V(\tau, x) d\tau + g(t, x) \right) \Phi(t, x) dx dt \end{aligned}$$

при любых t_1, t_2 ($0 < t_1 \leq t \leq t_2 \leq T$) и $\Phi(t, x) \in C^{2,1}(Q_T)$, а также начальным условиям в слабом смысле, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_Q V(t, x) \phi_0(x) dx = \int_Q \psi_1(x) \phi_0(x) dx, \quad \lim_{t \rightarrow +0} \int_Q V_t(t, x) \phi_1(x) dx = \int_Q \psi_2(x) \phi_1(x) dx$$

для любых функций $\phi_0(x) \in H(Q)$, $\phi_1(x) \in H(Q)$. Здесь $C^{2,1}(Q_T)$ — пространство функций, определенных на множестве Q_T и имеющих производные второго порядка по переменной t и первого порядка по переменным x_i .

Решение краевой задачи (1.2)–(1.4) ищем в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \quad V_n(t) = \langle V(t, x), z_n(x) \rangle = \int_Q V(t, x) z_n(x) dx, \quad (1.7)$$

где $V_n(t)$ — коэффициенты Фурье; $z_n(x)$ является обобщенной собственной функцией краевой задачи [15]

$$D_n(\Phi, z_n) \equiv \int_Q \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \Phi_{x_i} z_{nx_j} + c(x) z_n(x) \Phi(t, x) \right) dx + \int_{\gamma} a(x) z_n(x) \Phi(t, x) dx$$

$$= \lambda_n^2 \int_Q z_n(x) \Phi(t, x) dx;$$

$$\Gamma z_n(x) = 0, \quad x \in \gamma, \quad 0 < t < T, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $H(Q)$, а соответствующие собственные значения λ_n удовлетворяют условиям $\lambda_n \leq \lambda_{n+1} \forall n = 1, 2, 3, \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$.

Используя метод Лиувилля, легко показать, что коэффициенты Фурье $V_n(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} V_n(t) = & \lambda \int_0^T \left(\frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) K(\tau, s) d\tau \right) V_n(s) ds + \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t \\ & + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) (q_n(\tau) + b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)]) d\tau, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (1.8)$$

т. е. при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$ являются решением линейного неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Уравнение (1.8) перепишем в виде

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T K_n(t, s) V_n(s) ds + a_n(t), \quad (1.9)$$

где

$$K_n(t, s) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) K(\tau, s) d\tau,$$

$$a_n(t) = \psi_{1n} \cos \lambda_n t + \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \sin \lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin \lambda_n(t - \tau) (q_n(\tau) + b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)]) d\tau.$$

Решение уравнения (1.9) находим по формуле [16, гл. 2, § 2.1; 17, гл. 3, § 13]

$$V_n(t) = \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t), \quad (1.10)$$

где

$$R_n(t, s, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{n,i}(t, s), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.11)$$

— резольвента ядра $K_n(t, s)$, а повторные ядра $K_{n,i}(t, s)$ определяются по формулам

$$K_{n,i+1}(t, s) = \int_0^T K_n(t, \eta) K_{n,i}(\eta, s) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$. Исследуем сходимость ряда Неймана (1.11). С учетом оценок

$$\begin{aligned} |K_{n,i}(t, s)|^2 & \leq \left(\frac{T}{\lambda_n^2} \right)^i (K_0 T)^{i-1} \int_0^T K^2(y, s) dy \quad \forall t \in (0, T), \\ \int_0^T K_{n,i}^2(t, s) ds & \leq \left(\frac{T}{\lambda_n^2} \right)^i (K_0 T)^{i-1} \int_0^T \int_0^T K^2(y, s) dy ds \leq \left(\frac{TK_0}{\lambda_n^2} \right)^i (T)^{i-1} \end{aligned}$$

легко показать, что ряд Неймана (1.11) для значений параметра λ , удовлетворяющих условию

$$|\lambda| < \frac{\lambda_n}{T\sqrt{K_0}} \rightarrow \infty,$$

абсолютно сходится при каждом $n = 1, 2, 3, \dots$. При этом радиус сходимости ряда увеличивается с ростом n , и резольвента $R_n(t, s, \lambda)$ как сумма абсолютно сходящегося ряда является непрерывной функцией. Легко проверить, что имеют место следующие оценки:

$$|R_n(t, s, \lambda)| \leq \frac{\sqrt{T} \sqrt{\int_0^T K^2(y, s) dy}}{\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2}},$$

$$\int_0^T R_n^2(t, s, \lambda) ds = \frac{T}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \int_0^T \int_0^T K^2(y, s) dy ds = \frac{K_0 T}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2}.$$

Отметим, что при выполнении условия

$$|\lambda| < \frac{\lambda_1}{T\sqrt{K_0}} \tag{1.12}$$

ряд Неймана абсолютно сходится к непрерывной функции при любом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$.

Таким образом, решение краевой задачи (1.2)–(1.4) с учетом (1.7), (1.10), (1.11), (1.12) находим по формуле

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n(t) \right) z_n(x). \tag{1.13}$$

С учетом $a_n(t)$ (см. (1.9)) решение (1.13) перепишем в виде

$$V(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\psi_n(t, \lambda) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \varepsilon_n(t, \eta, \lambda) b_n(\eta) p[\eta, \vartheta(\eta)] d\eta \right) z_n(x), \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_n(t, \lambda) &= \psi_{1n} \left(\cos \lambda_n t + \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right) \\ &+ \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n t + \lambda \int_0^T R_n(t, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \varepsilon_n(t, \eta, \lambda) g_n(\eta) d\eta, \end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\varepsilon_n(t, \eta, \lambda) = \begin{cases} \sin \lambda_n(t - \eta) + \lambda \int_{\eta}^T R_n(t, s, \lambda) \sin \lambda_n(s - \eta) ds, & 0 \leq \eta \leq t, \\ \lambda \int_{\eta}^T R_n(t, s, \lambda) \sin \lambda_n(s - \eta) ds, & t \leq \eta \leq T. \end{cases} \tag{1.16}$$

Предложение 1. *Обобщенное решение краевой задачи (1.2)–(1.4), определенное формулой (1.14), является элементом гильбертова пространства $H(Q_T)$.*

Доказательство. Имея в виду соотношения (1.14)–(1.16), непосредственным вычислением получаем неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_Q V^2(t, x) dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} V_n^2(t) dt \\
& \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left[2\psi_{1n}^2 \left(\cos^2 \lambda_n t + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t, s, \lambda) ds \int_0^T \cos^2 \lambda_n s ds \right) \right. \\
& \quad \left. + 2 \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} \left(\sin^2 \lambda_n t + \lambda^2 \int_0^T R_n^2(t, s, \lambda) ds \int_0^T \sin^2 \lambda_n s ds \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \varepsilon_n^2(t, \eta, \lambda) d\eta \int_0^T g_n^2(\eta) d\eta + \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^T \varepsilon_n^2(t, \eta, \lambda) b_n^2(\eta) d\eta \int_0^T p_n^2[\eta, \vartheta_1(\eta), \dots, \vartheta_m(\eta)] d\eta \right] dt \\
& \leq 8 \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left[\psi_{1n}^2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right) + \frac{\psi_{2n}^2}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{T}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right) \int_0^T g_n^2(\eta) d\eta \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\lambda_n^2} \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right) \int_0^T b_n^2(\eta) d\eta \|p[\eta, \vartheta_1(\eta), \dots, \vartheta_m(\eta)]\|_{H(0, T)}^2 \right] \\
& \leq 8T \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right) \left(\|\psi_1(x)\|_{H(Q)}^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} (\|\psi_2(x)\|_{H(Q)}^2 + T \|g(t, x)\|_{H(Q_T)}^2) \right. \\
& \quad \left. + \|b(t, x)\|_{H(\gamma_T)}^2 \|p[\eta, \vartheta_1(\eta), \dots, \vartheta_m(\eta)]\|_{H(0, T)}^2 \right) < \infty,
\end{aligned}$$

из которого следует утверждение предложения. \square

Отметим, что в силу условия (1.5) каждому векторному управлению $\bar{\vartheta}(t) = (\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t))$ соответствует единственное решение $V(t, x)$ краевой задачи (1.2)–(1.4).

Формально дифференцируя ряд (1.13) по переменной t , имеем равенство

$$V_t(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n'(t) z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_{nt}'(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n'(t) \right) z_n(x),$$

где символ “ $'$ ” — знак обыкновенной производной.

Непосредственным вычислением можно показать, что

$$\int_0^T \int_Q V_t^2(t, x) dx dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda \int_0^T R_{nt}'(t, s, \lambda) a_n(s) ds + a_n'(t) \right)^2 dt < \infty,$$

т. е. $V_t(t, x) \in H(Q_T)$.

2. Условия оптимальности и система нелинейных интегральных уравнений

Поскольку каждое векторное управление $\bar{\vartheta}(t) = (\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t))$ единственным образом определяет решение краевой задачи (1.2)–(1.4), то управлению $\bar{\vartheta}(t) + \Delta\bar{\vartheta}(t)$ соответствует решение краевой задачи (1.2)–(1.4) вида $V(t, x) + \Delta V(t, x)$, где $\Delta V(t, x)$ — приращение, соответствующее приращению $\Delta\bar{\vartheta}(t)$. Согласно методике вывода принципа максимума [3; 9–13] приращение функционала (1.1) можно представить в виде

$$\Delta I(\bar{\vartheta}) = I(\bar{\vartheta} + \Delta\bar{\vartheta}) - I(\bar{\vartheta}) = - \int_0^T \Delta \Pi[t, x, \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t)] dt + \int_Q \Delta V^2(T, x) + \Delta V_t^2(T, x) dx.$$

Здесь

$$\Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t)] = \int_{\gamma} b(t, x) \omega(t, x) dx p[t, \bar{\vartheta}(t)] - 2\beta M[t, \bar{\vartheta}(t)],$$

$$\begin{aligned} \Delta \Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t)] &= \Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t) + \Delta\bar{\vartheta}(t)] - \Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t)] \\ &= \text{grad}^* \Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t)] \Delta\bar{\vartheta}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta \bar{\vartheta}^*(t) W[\Pi(t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t))] \Delta\bar{\vartheta}(t) + o(\|\Delta\bar{\vartheta}(t)\|_{H^m(0, T)}^2), \end{aligned}$$

$W[\Pi(t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t))]$ — матрица Гесса функции $\Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t)]$, вычисленная по переменным $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$ при фиксированных значениях остальных аргументов, $H^m(0, T) = H \times \dots \times H$ — декартово произведение m пространств $H(0, T)$, а функция $\omega(t, x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = \lambda \int_0^T K(\tau, t) \omega(\tau, x) d\tau, \quad x \in Q, \quad 0 \leq t < T,$$

$$\omega(T, x) + 2(V_t(T, x) - \xi_2(x)) = 0, \quad \omega_t(T, x) - 2(V(T, x) - \xi_1(x)) = 0, \quad x \in Q,$$

$$\Gamma\omega(t, x) = \sum_{i, j=1}^n (a_{ij}(x) \omega_{x_j}(t, x))_{x_i} - c(x) \omega(t, x) = 0, \quad x \in y, \quad 0 < t < T. \quad (2.1)$$

Исследуем на максимум функцию $\Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}]$ по переменным $\vartheta_1, \dots, \vartheta_m$. Из условия $\text{grad} \Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}(t)] = \theta$, θ — нулевой вектор, находим, что оптимальное векторное управление $\bar{\vartheta}^0(t)$ должно удовлетворять следующей системе равенств:

$$2\beta M_{\vartheta_i}[t, \bar{\vartheta}(t)] = p_{\vartheta_i}[t, \bar{\vartheta}(t)] \int_{\gamma} b(t, x) \omega(t, x) dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (*)$$

Согласно известному критерию Сильвестра функция $\Pi[t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta}]$ в точке с координатами $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$, удовлетворяющими равенству (*) в каждый фиксированный момент времени $t \in [0, T]$, достигает максимума при выполнении неравенств

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad -1^{(k)} \Delta_k > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (**)$$

где Δ_k — определитель матрицы Гесса вида

$$W[\Pi(t, x, V(t, x), \omega(t, x), \bar{\vartheta})] = \left(2\beta M_{\vartheta_i \vartheta_j}[t, \bar{\vartheta}(t)] - p_{\vartheta_i \vartheta_j}[t, \bar{\vartheta}(t)] \int_{\gamma} b(t, x) \omega(t, x) dx \right)_{i, j},$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Равенство (*) является необходимым условием первого порядка, а система неравенств (**) является необходимым и достаточным условием экстремума (максимума) функции $\Pi[\cdot, \vartheta_1, \dots, \vartheta_m]$ в точке $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_m)$. Соотношения (*) и (**) в совокупности называются *условиями оптимальности*.

С учетом (1.6) условие оптимальности (*) перепишем в виде

$$2\beta M_{\vartheta_i}[t, \bar{\vartheta}(t)] p_{\vartheta_i}^{-1}[t, \bar{\vartheta}(t)] = \int_{\gamma} b(t, x) \omega(t, x) dx, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.2)$$

Условие оптимальности (**) содержит решение $\omega(t, x)$ сопряженной краевой задачи, что затрудняет проверку выполнения этого условия. В этой связи согласно (2.2) функцию $\omega(t, x)$ исключим из системы неравенств (**). Проведя несложные вычисления, систему неравенств (**) перепишем в виде

$$\prod_{i=1}^k p_{\vartheta_i}[t, \bar{\vartheta}(t)] \begin{vmatrix} \left(\frac{M_{\vartheta_1}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_1}[t, \bar{\vartheta}(t)]} \right)_{\vartheta_1} & \dots & \left(\frac{M_{\vartheta_1}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_1}[t, \bar{\vartheta}(t)]} \right)_{\vartheta_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{M_{\vartheta_k}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_k}[t, \bar{\vartheta}(t)]} \right)_{\vartheta_1} & \dots & \left(\frac{M_{\vartheta_k}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_k}[t, \bar{\vartheta}(t)]} \right)_{\vartheta_k} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (2.3)$$

Нетрудно видеть, что система равенств (2.2) обладает свойством равных отношений:

$$2\beta \frac{M_{\vartheta_1}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_1}[t, \bar{\vartheta}(t)]} = \dots = 2\beta \frac{M_{\vartheta_m}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_m}[t, \bar{\vartheta}(t)]} = \int_{\gamma} b(t, x) \omega(t, x) dx.$$

Это обстоятельство существенно упрощает процедуру построения оптимального векторного управления, ибо в этом случае для определения компонентов оптимального векторного управления достаточно решить лишь одно скалярное нелинейное интегральное уравнение. Поэтому упрощается и процедура построения полного решения задачи нелинейной оптимизации.

Сравнивая это с результатами работ [12; 13], убеждаемся в том, что свойство равных отношений в случае векторного управления является естественным и не зависит от природы управляемого процесса. Заметим, что неравенства (2.3) ограничивают класс функций $p[t, \bar{\vartheta}(t)]$ и $M[t, \bar{\vartheta}(t)]$, т. е. задача нелинейной оптимизации может иметь решение только для таких пар $(p[t, \bar{\vartheta}(t)], M[t, \bar{\vartheta}(t)])$, для которых выполняется система неравенств (2.3).

Решение сопряженной краевой задачи (2.1) ищем в виде ряда

$$\omega(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(t) z_n(x). \quad (2.4)$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты Фурье $\omega_n(t, x)$ при каждом фиксированном $n = 1, 2, 3, \dots$ удовлетворяют линейному неоднородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода вида

$$\omega_n(t) = \lambda \int_0^T B_n(s, t) \omega_n(s) ds + q_n(t), \quad (2.5)$$

где

$$B_n(s, t) = \frac{1}{\lambda_n} \int_t^T \sin \lambda_n(\tau - t) K(s, \tau) d\tau,$$

$$q_n(t) = -2 \left((V'_n(T) - \xi_{2n}) \cos \lambda_n(T - t) + \frac{1}{\lambda_n} (V_n(T) - \xi_{1n}) \sin \lambda_n(T - t) \right).$$

Решение уравнения (2.5) находим по формуле [16, гл. 2, § 2.1; 17, гл. 3, § 13].

$$\omega_n(t) = \lambda \int_0^T P_n(s, t, \lambda) q_n(s) ds + q_n(t),$$

где резольвента $P_n(s, t, \lambda)$ ядра $B_n(s, t)$ имеет вид

$$P_n(s, t, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} B_{n,i}(s, t), \quad B_{n,i+1}(s, t) = \int_0^T B_n(\eta, t) B_{n,i}(s, \eta) d\eta, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

и при выполнении условия (1.12) является непрерывной функцией, а также удовлетворяет оценкам

$$|P_n(s, t, \lambda)| \leq \frac{\sqrt{T \int_0^T K^2(s, \eta) d\eta}}{\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2}}, \quad \int_0^T P_n^2(s, t, \lambda) ds \leq \frac{TK_0}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2}.$$

Далее, учитывая (1.16), решение сопряженной краевой задачи представим в виде

$$\omega(t, x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\varepsilon_n^*(T-t) h_n + \int_0^T \varepsilon_n^*(T-t) G_n(T-\tau, \lambda) b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau \right] z_n(x),$$

где символ “*” — знак транспонирования,

$$\begin{aligned} h_n &= (h_{1n}, h_{2n}), \quad h_{1n} = \xi_{2n} - \psi_{1n} \left(-\lambda_n \sin \lambda_n T + \lambda \int_0^T R'_{nt}(T, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right) \\ &\quad - \psi_{2n} \left(\cos \lambda_n T + \frac{\lambda}{\lambda_n} \int_0^T R'_{nt}(T, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right) \\ &\quad - \int_0^T \left(\cos \lambda_n (T-\tau) + \frac{\lambda}{\lambda_n} \int_{\tau}^T R'_{nt}(T, s, \lambda) \sin \lambda_n (s-\tau) ds \right) g_n(\tau) d\tau, \\ h_{2n} &= \xi_{1n} - \psi_{2n} \left(\cos \lambda_n T + \lambda \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \cos \lambda_n s ds \right) \\ &\quad - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n T + \lambda_n \int_0^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n s ds \right) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \left(\sin \lambda_n (T-\tau) + \frac{\lambda}{\lambda_n} \int_{\tau}^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n (s-\tau) ds \right) g_n(\tau) d\tau; \\ G(T-\tau, \lambda) &= (G_{n1}(T-\tau, \lambda), G_{n2}(T-\tau, \lambda)), \\ G_{n1}(T-\tau, \lambda) &= \cos \lambda_n (T-\tau) + \frac{\lambda}{\lambda_n} \int_{\tau}^T R'_{nt}(T, s, \lambda) \sin \lambda_n (s-\tau) ds, \end{aligned}$$

$$G_{n2}(T - \tau, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n(T - \tau) + \lambda \int_{\tau}^T R_n(T, s, \lambda) \sin \lambda_n(s - \tau) ds \right);$$

$$\varepsilon_n(T - t, \lambda) = (\varepsilon_{n1}(T - t, \lambda), \varepsilon_{n2}(T - t, \lambda)),$$

$$\varepsilon_{n1}(T - t, \lambda) = \cos \lambda_n(T - t) + \lambda \int_0^T P_n(s, t, \lambda) \cos \lambda_n(T - s) ds,$$

$$\varepsilon_{n2}(T - t, \lambda) = \frac{1}{\lambda_n} \left(\sin \lambda_n(T - t) + \lambda \int_0^T P_n(s, t, \lambda) \sin \lambda_n(s - \tau) ds \right);$$

$R'_{nt}(t, s, \lambda)$ — производная по переменной t резольвенты $R_n(t, s, \lambda)$.

Лемма 1. Функция $h(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^*(T - t) h_n z_n(x)$ является элементом гильбертова пространства $H(Q_T)$.

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_Q \tilde{h}^2(t, x) dx dt &= \int_0^T \int_Q \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^*(T - t, \lambda) h_n z_n(x) \right)^2 dx dt \\ &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \varepsilon_n(T - t, \lambda), h_n \rangle_{\mathbb{R}^2} \right|^2 dt \leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\varepsilon_n(T - t, \lambda)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \cdot \|h_n\|_{\mathbb{R}^2}^2 dt \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(1 + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right) \\ &\quad \times 3 \left[\xi_{1n}^2 + \xi_{2n}^2 + 2 \left(\frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right) \left((1 + \lambda_n^2) \psi_{1n}^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \psi_{2n}^2 \right) \right] dt \\ &\leq 3T \varepsilon_0^2 \left[\|\xi_1(x)\|_{H(Q)}^2 + \|\xi_2(x)\|_{H(Q)}^2 + \varepsilon_0^2 \left(\|\psi_1(x)\|_{H_1(Q)}^2 + \left(1 + \frac{1}{\lambda_1^2} \right) \|\psi_2(x)\|_{H(Q)}^2 \right) \right] < \infty, \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_0^2 = 2 \left(1 + \frac{1}{\lambda_n^2} \right) \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T^2}{(\lambda_n - |\lambda| \sqrt{K_0 T^2})^2} \right),$$

символ $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ — скалярное произведение в пространстве \mathbb{R}^2 , из которого следует утверждение леммы. \square

Лемма 2. Функция

$$\varepsilon(t, x, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n^*(T - t, \lambda) \int_0^T G_n(T - \tau, \lambda) b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau z_n(x)$$

является элементом гильбертова пространства $H(Q_T)$.

Доказательство. Непосредственными вычислениями получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^T \varepsilon^2(t, x, \lambda) dx dt &= \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \varepsilon_n(T-t, \lambda), \int_0^T G_n(T-\tau, \lambda) b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau \right\rangle_{\mathbb{R}^2} \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\varepsilon_n(T-t, \lambda)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \left(\int_0^T \|G_n(T-\tau, \lambda)\|_{\mathbb{R}^2} b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau \right)^2 dt \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \|\varepsilon_n(T-t, \lambda)\|_{\mathbb{R}^2}^2 \int_0^T \|G_n(T-\tau, \lambda)\|_{\mathbb{R}^2}^2 b_n^2(\tau) d\tau \int_0^T p^2[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau dt \\ &\leq \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_0^2 \int_0^T \varepsilon_0^2 b_n^2(\tau) d\tau \int_0^T p^2[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau dt \\ &= T \varepsilon_0^4 \|b(t, x)\|_{H(\gamma_T)}^2 \|p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)]\|_{H(0, T)}^2 < \infty, \end{aligned}$$

из которого следует утверждение леммы. \square

Предложение 2. Решение сопряженной краевой задачи $\omega(t, x)$ является элементом пространства $H(Q_T)$.

Доказательство. Утверждение предложения согласно леммам 1 и 2 следует из представления $\omega(t, x) = -2(-h(t, x) + \varepsilon(t, x, \lambda))$. \square

3. Система нелинейных интегральных уравнений оптимального управления

Пусть для функций $p[t, \bar{\vartheta}(t)]$ и $M[t, \bar{\vartheta}(t)]$ выполняется система неравенств (2.3). Тогда оптимальное векторное управление находим согласно условию оптимальности (2.2).

Решение сопряженной краевой задачи (2.1), определяемое равенствами (2.4) и (2.5), подставим в (2.2) и получим систему равенств вида

$$\begin{aligned} \beta \frac{M_{\vartheta_1}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_1}[t, \bar{\vartheta}(t)]} &= \dots = \beta \frac{M_{\vartheta_m}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_m}[t, \bar{\vartheta}(t)]} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varepsilon_n^*(T-t, \lambda) \left(-h_n + \int_0^T G_n(T-\tau, \lambda) b_n(\tau) p[\tau, \vartheta_1(\tau), \dots, \vartheta_m(\tau)] d\tau \right). \end{aligned}$$

Нелинейные интегральные уравнения (3) решаются согласно методике, разработанной в [9;10]. Согласно свойствам равных отношений положим

$$\beta \frac{M_{\vartheta_i}[t, \bar{\vartheta}(t)]}{p_{\vartheta_i}[t, \bar{\vartheta}(t)]} = u(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (3.1)$$

Согласно (2.3) ранг системы (3.1) равен m ($k = m$). Поэтому отсюда согласно известной теореме о системе неявно заданных функций [18, гл. 8, § 8] переменные $\vartheta_1(t), \dots, \vartheta_m(t)$ определяются однозначно, т. е. существуют функции $\varphi_i[\cdot]$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, такие, что

$$\vartheta_i(t) = \varphi_i[t, u(t), \beta], \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (3.2)$$

В силу (3.1) и (3.2) вместо системы уравнений (3) рассмотрим нелинейное интегральное уравнение вида

$$u(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varepsilon_n^*(T-t, \lambda) \times \left(-h_n + \int_0^T G_n(T-\tau, \lambda) b_n(\tau) p[\tau, \varphi_1(\tau, u(\tau), \beta), \dots, \varphi_m(\tau, u(\tau), \beta)] d\tau \right),$$

которое перепишем в операторной форме

$$u = l - S(u), \quad (3.3)$$

где

$$l = l(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varepsilon_n^*(T-t, \lambda) h_n, \\ S(u) = - \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \varepsilon_n^*(T-t, \lambda) \int_0^T G_n(T-\tau, \lambda) b_n(\tau) p[\tau, \varphi_1(\tau, u(\tau), \beta), \dots, \varphi_m(\tau, u(\tau), \beta)] d\tau.$$

Далее непосредственными вычислениями доказываются следующие леммы.

Лемма 3. *Функция $l(t)$ является элементом гильбертова пространства $H(0, T)$.*

Лемма 4. *Оператор $S(u)$ отображает пространство $H(0, T)$ в себя.*

Лемма 5. *Пусть функции $p[t, \bar{\vartheta}(t)]$ и $\varphi[t, u(t), \beta]$ удовлетворяют следующим условиям Липшица:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|p[t, \bar{\vartheta}(t)] - p[t, \tilde{\vartheta}(t)]\|_{H(0, T)} \leq p_0 \|\bar{\vartheta}(t) - \tilde{\vartheta}(t)\|_{H(0, T)}, \\ p_0 = (p_{01}^2 + \dots + p_{0m}^2)^{1/2}, \quad p_{0i} > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m; \\ \|\varphi[t, u(t), \beta] - \varphi[t, \bar{u}(t), \beta]\|_{H(0, T)} \leq \varphi_0(\beta) \|u(t) - \bar{u}(t)\|_{H(0, T)}, \\ \varphi_0(\beta) = (\varphi_{01}^2(\beta) + \dots + \varphi_{0m}^2(\beta))^{1/2}, \quad \varphi_{0i}(\beta) > 0. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Тогда при выполнении условия

$$\delta = \varepsilon_0^2 \|b(t, x)\|_{H(\gamma T)}^2 \sqrt{m} p_0 \varphi_0(\beta) < 1, \quad \beta > 0, \quad (3.5)$$

оператор $S(u)$ является сжимающим.

Утверждение леммы следует из неравенства

$$\|S[u(t)] - S[\tilde{u}(t)]\|_{H(0, T)} \leq \varepsilon_0^2 \|b(t, x)\|_{H(\gamma T)}^2 \sqrt{m} p_0 \varphi_0(\beta) \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{H(0, T)},$$

которое с учетом условий (3.4) доказывается непосредственным вычислением. \square

Теорема. *Пусть выполнены условия (1.4)–(1.6), (1.12), (2.3), (3.4), (3.5). Тогда операторное уравнение (3.3) в пространстве $H(0, T)$ имеет единственное решение.*

Доказательство. Согласно леммам 3 и 4 операторное уравнение (3.3) можно рассматривать в пространстве $H(0, T)$. Поскольку гильбертово пространство $H(0, T)$ является полным метрическим пространством, то согласно теореме о принципе сжимающих отображений [18, гл. 1, §7] операторное уравнение (3.3) имеет единственное решение. \square

Решение операторного уравнения (3.3) может быть найдено методом последовательных приближений, т. е. n -е приближение решения находится по формуле

$$u_n(t) = S[u_{n-1}(t)], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

где $u_0(t)$ — произвольный элемент пространства $H(0, T)$. Точное решение $u^0(t)$ может быть найдено как предел приближенных решений, т. е.

$$u^0(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t),$$

причем имеет место оценка

$$\|u^0(t) - u_n(t)\|_{H(0, T)} \leq \frac{\delta^n}{1 - \delta} \|S[u_0(t)] - u_0(t)\|_{H(0, T)},$$

где $u_0(t)$ — произвольный элемент пространства $H(0, T)$.

Подставляя точное решение в (3.2), находим искомые оптимальные управления

$$\vartheta_i^0(t) = \varphi_i[t, u^0(t), \beta], \quad i = 1, 2, 3, \dots, m,$$

т. е. оптимальное векторное управление

$$\bar{\vartheta}^0(t) = (\vartheta_1^0(t), \dots, \vartheta_m^0(t)).$$

Решение $V^0(t, x)$ краевой задачи (1.2)–(1.4), соответствующее оптимальному векторному управлению $\bar{\vartheta}^0(t)$, находим по формуле

$$V^0(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n(t, \lambda) + \frac{1}{\lambda_n} \int_0^T \varepsilon_n(t, \eta, \lambda) b_n(\tau) p[\tau, \vartheta^0(\eta)] d\eta \right) z_n(x).$$

Минимальное значение функционала (1.1) вычислим по формуле

$$I[\bar{\vartheta}^0(t)] = \int_Q \left((V^0(T, x) - \xi_1(x))^2 + (V_t^0(T, x) - \xi_2(x))^2 \right) dx + 2\beta \int_0^T M[t, \bar{\vartheta}^0(t)] dt, \quad \beta > 0.$$

Найденная тройка $\{\bar{\vartheta}^0(t), V^0(t, x), I[\bar{\vartheta}^0(t)]\}$ определяет полное решение нелинейной задачи оптимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вольтерра В.** Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений: пер. с англ. / ред. П. И. Кузнецов. М.: Наука, 1982. 304 с.
2. **Владимиров В.С.** Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН. 1961. Т. 61. С. 3–158.
3. **Егоров А.И.** Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 500 с.
4. **Лионс Ж.Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
5. **Sachs E.W., Strauss A.K.** Efficient solution of partial integro-differential equation in finance // Appl. Numer. Math. 2008. Vol. 58, no. 11. P. 1687–1703.
6. **Kowalewski A.** Optimal control of an infinite order hyperbolic system with multiple time-varying lags // Automatyka. 2011. Т. 15. P. 53–65.
7. **Thorwe J., Bhalekar S.** Solving partial integro-differential equations using Laplace transform method // American J. Comput. Appl. Math. 2012. Vol. 2 (3). P. 101–104.
8. **Khurshudyan As. Zh.** On optimal boundary and distributed control of partial integro-differential equations // Arch. Contol. Sci. 2014. Vol. 24 (60), no. 1. P. 5–25.
9. **Kerimbekov A.K.** On solvability of the nonlinear optimal control problem for processes described by the semi-linear parabolic equations // Proc. World Congress on Engineering. London, 2011. Vol. 1. P. 270–275.

10. **Керимбеков А.К.** On the solvability of a nonlinear optimal control problem for the thermal processes described by Fredholm integro-differential equations // Current Trends in Analysis and Its Applications: Proc. of the 9th ISAAC Congress (Krakow 2013) / eds. V. V. Mityushev, M. V. Ruzhansky. London: Springer, 2015. P. 803–822. (A Series of Trends in Mathematics.)
11. **Комков В.** Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 158 с.
12. **Керимбеков А.К., Баетов А.К.** О разрешимости одной задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов // Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий — аль Хорезми 2012: материалы Междунар. науч. конф. Ташкент, 2012. С. 301–303.
13. **Керимбеков А.К., Кабаева З.С.** Решение задачи оптимизации теплового процесса при нелинейно входящем векторном управлении // Тр. VI Междунар. науч. конф. / Актюбинский региональный ун-т им. К. Жубанова. Актюбе, 2012. Ч. I. С. 100–104.
14. **Тихонов А.Н., Самарский А.А.** Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 735 с.
15. **Плотников В.И.** Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций. // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1968. Т. 32, № 4. С. 743–755.
16. **Трикоми Ф.** Интегральные уравнения: пер. с англ. / ред. И. Н. Векуа. М.: ИЛ, 1960. 301 с.
17. **Краснов М.В.** Интегральные уравнения. М.: Наука, 1975. 303 с.
18. **Люстерник Л.А., Соболев В.И.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

Керимбеков Акылбек Керимбекович

Поступила 20.01.2016

д-р физ.-мат. наук, профессор

Кыргызско-Российский Славянский университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: akl7@rambler.ru

Абдылдаева Эльмира Файзулдаевна

канд. физ.-мат. наук, доцент

Институт теоретической и прикладной математики НАН КР

Кыргызско-Турецкий Университет “Манас”

e-mail: efa_69@mail.ru

УДК 512.542+519.175

**СТАБИЛИЗАТОРЫ ВЕРШИН ГРАФОВ
С ПРИМИТИВНЫМИ ГРУППАМИ АВТОМОРФИЗМОВ
И УСИЛЕННАЯ ВЕРСИЯ ГИПОТЕЗЫ СИМСА. II¹**

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов

Вторая из цикла статей, результаты которого влекут справедливость усиленной версии гипотезы Симса о конечных примитивных группах подстановок. Данная статья посвящена рассмотрению случая примитивных групп с простым цоколем исключительного лиева типа и непараболическим стабилизатором точки.

Ключевые слова: конечная примитивная группа подстановок, почти простая группа, группа исключительного лиева типа, стабилизатор точки, гипотеза Симса.

A. S. Kondrat'ev, V. I. Trofimov. Stabilizers of vertices of graphs with primitive automorphism groups and a strong version of the Sims conjecture. II

This is the second in a series of papers whose results imply the validity of a strengthened version of the Sims conjecture on finite primitive permutation groups. In this paper, the case of primitive groups with simple socle of exceptional Lie type and non-parabolic point stabilizer is considered.

Keywords: finite primitive permutation group, almost simple group, group of exceptional Lie type, stabilizer of a point, Sims conjecture.

MSC: 20B15, 20D06, 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-177-187

Введение

Пусть G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G . Следуя [4], для каждого $i \in \mathbb{N}$ индуктивно определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ из $M_1 \cap M_2$, называемые нами i -ми взаимными ядрами подгруппы M_1 относительно M_2 и подгруппы M_2 относительно M_1 соответственно. Положим

$$(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}.$$

Для $i \in \mathbb{N}$, предполагая, что $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$ уже определены, положим

$$(M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1}, \quad (M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}.$$

Нас интересует случай, когда $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$ (соответствующую мотивировку, связанную с усиленной версией гипотезы Симса, см. в [3; 4]). Множество всех таких троек (G, M_1, M_2) обозначается через Π . Мы рассматриваем тройки из Π с точностью до следующей эквивалентности: тройки (G, M_1, M_2) и (G', M'_1, M'_2) из Π эквивалентны, если существует изоморфизм G на G' , отображающий M_1 на M'_1 и M_2 на M'_2 . Отметим, что согласно [4, предложение 1.1(a)] вторые взаимные ядра $(M_1, M_2)^2$ и $(M_2, M_1)^2$ являются p -группами для некоторого простого числа p .

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00061).

Цель нашего цикла статей — описать множество Π . В первой статье [4] цикла рассмотрены случаи, когда группа G не является почти простой группой и когда группа G имеет простой знакопеременный поколь. Данная, вторая, статья цикла посвящена рассмотрению случая, когда G — группа с простым поколь $\text{Soc}(G)$ исключительного лиева типа и $M_1 \cap \text{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\text{Soc}(G)$. Доказана следующая

Теорема. Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\text{Soc}(G)$ — простая группа исключительного лиева типа и $M_1 \cap \text{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\text{Soc}(G)$. Тогда $(M_1, M_2)^3 = (M_2, M_1)^3 = 1$ и справедливо одно из следующих утверждений:

(а) $G \cong E_6^\varepsilon(r)$ или $G \cong E_6^\varepsilon(r) : 2$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, r — простое число, $r \geq 5$, $9|(r-1)$, $(M_1, M_2)^2 = Z(O_3(M_1))$ и $(M_2, M_1)^2 = Z(O_3(M_2))$ — элементарные абелевы группы порядка 3^3 , $(M_1, M_2)^1 = O_3(M_1)$ и $(M_2, M_1)^1 = O_3(M_2)$ — специальные группы порядка 3^6 , группа $M_1/O_3(M_1)$ изоморфна $SL_3(3)$ при $G \cong E_6^\varepsilon(r)$ и изоморфна $GL_3(3)$ при $G \cong E_6^\varepsilon(r) : 2$, группа $M_1/O_3(M_1)$ действует точно на $O_3(M_1)/Z(O_3(M_1))$ и индуцирует группу $SL_3(3)$ на $Z(O_3(M_1))$, $|Z(O_3(M_1)) \cap Z(O_3(M_2))| = 3^2$ и $M_1 \cap M_2 = N_{M_1 \cap \text{Soc}(G)}(Z(O_3(M_1)) \cap Z(O_3(M_2)))$;

(б) $G \cong \text{Aut}({}^3D_4(2))$, $(M_1, M_2)^2 = Z(M_1)$ и $(M_2, M_1)^2 = Z(M_2)$ — группы порядка 3, не содержащиеся в $\text{Soc}(G)$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_3 \times ((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : SL_2(3))$, $(M_1, M_2)^1 = O_3(M_1)$, $(M_2, M_1)^1 = O_3(M_2)$ и $M_1 \cap M_2$ — силовская 3-подгруппа из M_1 .

В каждом случае из пп. (а) и (б) тройки (G, M_1, M_2) из Π существуют и образуют один класс эквивалентности.

Используемые в дальнейшем терминология и обозначения в основном стандартны (см., например, [7; 9; 13]). Через $E_6^\varepsilon(q)$ для $\varepsilon \in \{+, -\}$ обозначается $E_6(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2E_6(q)$ при $\varepsilon = -$.

Укажем на опечатку в [3, следствие], повторенную в [4, следствие]: в условии пропущено включение $(M_1)_G \leq M_2$.

1. Предварительные результаты

Предложение 1.1. Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $L = \text{Soc}(G)$ — простая неабелева группа и $M_0 = M_1 \cap L$. Тогда

- (а) $G = LM_1$;
- (б) $F^*(M_0) = O_p(M_0)$.

Доказательство. Утверждение (а) следует из того, что $(M_1)_G = 1$.

Докажем утверждение (б). По [18, лемма 2.1] имеем $M_0 \neq 1$. Предположим, что $O_p(M_0) = 1$. Тогда $O_p(M_1) \cap M_0 = 1$ и, следовательно, $[O_p(M_1), M_0] = 1$. Отсюда по [4, предложениит 1.1(а)] $M_0 \leq C_{M_1}(O_p(M_1)) \leq O_p(M_1)$, что противоречит предположению. Итак, $O_p(M_0) \neq 1$. Так как подгруппа M_0 нормальна в M_1 , $[O_p(M_1), M_0] \leq O_p(M_1) \cap M_0 = O_p(M_0)$, т.е. M_0 централизует $O_p(M_1)/O_p(M_0)$. Но тогда согласно [13, теорема 5.3.2] $C_{M_0}(O_p(M_0))$ является нормальной p -подгруппой в M_0 и, значит, лежит в $O_p(M_0)$.

Предложение доказано.

Предложение 1.2 (теорема Жигмонди [19]). Пусть q, n — натуральные числа, большие 1. Тогда существует простое число r , делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при $1 \leq i < n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$.

Предложение 1.3 [12]. Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b . Тогда пара (p^a, q^b) равна $(3^2, 2^3)$, $(p, 2^b)$ или $(2^a, q)$.

Предложение 1.4 [10, лемма 3.2]. Пусть P — силовская 2-подгруппа в конечной группе G . Если элемент $x \in Z(P)$ сопряжен в G с $y \in P \setminus Z(P)$, то найдутся элементы $x_1 \in Z(P) \cap x^G$, $y_1 \in P \setminus Z(P)$ и $z \in N_G(C_P(y_1))$ такие, что $y_1^z = x_1$.

2. Доказательство теоремы

Пусть $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, $\text{Soc}(G)$ — простая группа исключительного лиева типа над полем \mathbb{F}_q , где q — степень простого числа r , $M_1 \cap \text{Soc}(G)$ — непараболическая подгруппа в $\text{Soc}(G)$ и $M_2 = M_1^g = gM_1g^{-1}$ для некоторого $g \in G$. Положим для краткости $L = \text{Soc}(G)$, $M = M_1$, $M_0 = M \cap L$, $K_1 = (M_1, M_2)^2$ и $K_2 = (M_2, M_1)^2$. Ввиду [4, предложение 1.1(а,б)] и предложения 1.1 подгруппа M есть p -локальная максимальная подгруппа в G с $F^*(M) = O_p(M)$ для некоторого простого числа p (отличного от r), $F^*(M_0) = O_p(M_0)$, $G = ML$, $K_1K_2 \leq O_p((M_1, M_2)^1) \cap O_p((M_2, M_1)^1) \leq O_p(M)$ и $K_1 \neq K_2$. Поскольку $G = ML$, можно считать, что $g \in L$. Пусть E — минимальная неединичная нормальная подгруппа в M . Тогда $M = N_G(E)$ и E — элементарная абелева p -группа.

Лемма 2.1. *Выполняется одно из следующих утверждений:*

(i) *подгруппы K_1 и K_2 имеют нетривиальные пересечения с L , в частности можно считать, что $E \leq K_1 \cap L$;*

(ii) *$G \cong \text{Aut}({}^3D_4(2))$ и $M \cong \mathbb{Z}_3 \times ((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : SL_2(3))$.*

Доказательство. Предположим, что п. (i) неверен, и пусть $K_1 \cap L = 1$ (случай $K_2 \cap L = 1$ рассматривается аналогично). Поскольку K_1 — неединичная нормальная p -подгруппа в M , можно считать, что $E \leq K_1$. Следовательно, $M_0 = C_L(E)$. Ввиду минимальности E , [14, 2.5.12] и п. (а) предложения 1.1 подгруппа E порождается некоторым элементом e . Элемент e индуцирует на L внешний автоморфизм порядка p . Согласно [14, 2.5.12, 4.5.1, 4.9.1] этот автоморфизм внутренне-диагональный, полевой, графовый или графово-полевой, причем либо $F^*(M_0) \neq O_p(M_0)$, что противоречит п. (b) предложения 1.1, либо $G \cong \text{Aut}(Sz(32))$ и $M \cong 5 \times Sz(2)$, что ввиду [7] противоречит максимальной подгруппы M в G , либо выполняется п. (ii). Лемма доказана.

Согласно [14] существуют простая присоединенная линейная алгебраическая группа X над алгебраически замкнутым полем характеристики r и такой сюръективный эндоморфизм σ линейной алгебраической группы X , что $L = O^{r'}(X_\sigma)$, где $X_\sigma = \{x \in X \mid \sigma(x) = x\} \cong \text{Inndiag}(L)$. Мы будем отождествлять группу X_σ с подгруппой $\text{Inndiag}(L)$ из $\text{Aut}(L)$. Тогда группа $\text{Aut}(L)$ порождается подгруппой X_σ , а также полевыми и графовыми автоморфизмами группы L , причем все автоморфизмы группы L продолжаются до автоморфизмов абстрактной группы X , коммутирующих с σ (см. [14]). Если T — σ -допустимый максимальный тор группы X , то $T \cap X_\sigma$ (соответственно $T \cap L$) называется максимальным тором группы X_σ (соответственно L).

С л у ч а й 1. M не нормализует нетривиальной подгруппы никакого максимального тора группы X_σ .

Ввиду [11, теорема 1] и леммы 2.1 выполняется один из следующих подслучаев:

(1а) $p = 3$, $G = L \cong E_6^\varepsilon(r)$ или $G \cong E_6^\varepsilon(r) : 2$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $r \geq 5$, $3 \mid (r - \varepsilon)$, $|E| = 3^3$, $C_L(E)$ — специальная группа порядка 3^6 с центром E и $N_L(E)/C_L(E) \cong SL_3(3)$;

(1б) $p = 2$, $G = L \cong E_8(r)$, $r \geq 3$, $|E| = 2^5$, $C_G(E)$ — специальная группа порядка 2^{15} с центром E и $N_G(E)/C_G(E) \cong SL_5(2)$.

Согласно [11, теорема 1] в каждом из этих подслучаев существует точно один X_σ -класс указанных подгрупп E , который в подслучае (1а) является объединением трех L -классов. Кроме того, согласно [11] имеем $E = Z(O_p(M)) \leq K_1 \leq L$ и $M/O_p(M)$ действует неприводимо на E и на $O_p(M)/E$.

Лемма 2.2. *$E = K_1 < O_p((M_1, M_2)^1) = O_p(M_1)$ и $E^g = K_2 < O_p((M_2, M_1)^1) = O_p(M_2)$, в частности, подгруппа E^g нормальна в $O_p(M)$.*

Доказательство. Если $K_1 < K_2$, то $K_2 = O_p(M_2) = O_p(M_1)$, что невозможно. Поэтому $K_1 < K_1K_2$. Поскольку $K_1K_2 \leq O_p((M_1, M_2)^1) \cap O_p((M_2, M_1)^1) \leq O_p(M)$ и $M/O_p(M)$ действует неприводимо на E и на $O_p(M)/E$, отсюда следуют утверждения леммы. Лемма доказана.

Пусть выполняется подслучай (1а). Зафиксируем неединичный элемент e из E . Положим $C = C_L(e)$ и $N = N_L(\langle e \rangle)$. Применяя результаты из [14, гл. 4] и рассуждения из доказательства леммы 2.11 из [11], получаем следующие необходимые нам факты о строении группы N . Имеем $F^*(C) = L_1 \circ L_2 \circ L_3$, где $L_i \cong SL_3^\varepsilon(r)$, $Z(F^*(C)) = \langle e \rangle$, $|N : C| = 2$, N действует транзитивно на множестве $\{L_1, L_2, L_3\}$ с ядром C_0 таким, что $F^*(C) < C_0 < C$, $C/F^*(C)$ — элементарная абелева группа порядка 9, $N/C_0 \cong S_3$ и $C_0/L_i L_j \cong PGL_3^\varepsilon(r)$ при $i \neq j$. Для $i \in \{1, 2, 3\}$ пусть далее a_i и b_i — элементы порядка 3 из $L_i \setminus \langle e \rangle$ такие, что $[a_i, b_i] = e$. Тогда можно считать, что $E = \langle e, f, h \rangle$, где $f = a_1 a_2 a_3$ и $h = b_1 b_2 b_3$. Положим $S = \langle a_i, b_i \mid 1 \leq i \leq 3 \rangle$. Тогда S — экстраспециальная группа порядка 3^7 , нормализующая E , $C_S(E) = E \langle a_1 a_2^{-1}, b_1 b_2^{-1} \rangle$, $C_L(E) = C_S(E) \langle t \rangle$, где $t \in C_L(E) \setminus C_0$, и экспонента группы $C_L(E)$ равна 3. Кроме того, элементы порядка 3 из $L_i L_j \setminus \langle e \rangle$ при $i \neq j$ не сопряжены в $\text{Aut}(L)$ с элементами из E .

Поскольку $E \neq E^g$, EE^g — элементарная абелева 3-группа и 3-ранг группы $O_3(M)$ равен 4, то $|E \cap E^g| = 3^2$.

Имеем $E \cap E^g \subseteq E$ и $g^{-1}(E \cap E^g)g \subseteq E$. Так как подгруппа M действует транзитивно на множестве подгрупп порядка 9 из E , можно считать, что элемент g нормализует подгруппу $E \cap E^g$ и $E \cap E^g = \langle e, f \rangle$. Далее, так как $N_M(E \cap E^g)/C_M(E \cap E^g) \cong GL_2(3)$, имеем $N_L(E \cap E^g) = C_L(E \cap E^g)N_M(E \cap E^g)$, поэтому можно считать, что элемент g централизует подгруппу $E \cap E^g$. Наконец, поскольку $C = C_0 \langle t \rangle$, можно считать, что $g \in C_0$.

Положим $\bar{N} = N/\langle e \rangle$. Тогда $F^*(\bar{C}) = \bar{L}_1 \times \bar{L}_2 \times \bar{L}_3$. Поскольку EE^g — элементарная абелева 3-подгруппа из $O_3(M) \cap F^*(C)$, $\bar{E} \bar{E}^g$ — элементарная абелева 3-подгруппа из $F^*(\bar{C})$. Проекция этой подгруппы на \bar{L}_i есть элементарная абелева 3-подгруппа, содержащая $\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i \rangle$ и, значит, совпадающая с $\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i \rangle$, поскольку 3-ранг группы $\bar{L}_i \cong L_3^\varepsilon(r)$ равен 2 (см. [14, теорема 4.10.2]). Поэтому для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ элемент \bar{g} нормализует подгруппу $\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i \rangle$ и централизует элемент \bar{a}_i . В частности, элемент \bar{g} нормализует подгруппу \bar{S} .

Предположим, что 9 не делит $r - \varepsilon 1$. Тогда согласно [8, табл. 8.3, 8.5] нормализатор $N_{\bar{L}_i}(\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i \rangle)$ изоморфен группе Фробениуса вида $3^2 : Q_8$ и, следовательно, $\bar{g} \notin F^*(\bar{C})$ и g является 3-элементом. Но $|L|_3 = |M|_3$, поэтому можно считать, что $g \in M$; противоречие.

Итак, 9 делит $r - \varepsilon 1$. Согласно [8, табл. 8.3, 8.5] нормализатор $N_{\bar{L}_i}(\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i \rangle)$ изоморфен группе вида $3^2 : SL_2(3)$, коммутант которой есть группа Фробениуса вида $3^2 : Q_8$, и $\bar{g} \in F^*(\bar{C})$. Поэтому $\bar{g} = \bar{g}_1 \bar{g}_2 \bar{g}_3$, где \bar{g}_i является 3-элементом из $N_{\bar{L}_i}(\langle \bar{a}_i, \bar{b}_i \rangle)$. Подгруппа $\langle t \rangle$ порядка 3 централизует E и действует транзитивно на множестве компонент группы $F^*(C)$. Поэтому можно считать, что $\bar{a}_1^{\bar{t}} = \bar{a}_2$, $\bar{a}_2^{\bar{t}} = \bar{a}_3$, $\bar{a}_3^{\bar{t}} = \bar{a}_1$, $\bar{b}_1^{\bar{t}} = \bar{b}_2$, $\bar{b}_2^{\bar{t}} = \bar{b}_3$, $\bar{b}_3^{\bar{t}} = \bar{b}_1$ и, следовательно, $\langle \bar{t} \rangle$ действует транзитивно на множестве $\{N_{\bar{L}_1}(\langle \bar{a}_1, \bar{b}_1 \rangle), N_{\bar{L}_2}(\langle \bar{a}_2, \bar{b}_2 \rangle), N_{\bar{L}_3}(\langle \bar{a}_3, \bar{b}_3 \rangle)\}$. Рассмотрим группу $\bar{R} = \langle N_{\bar{L}_1}(\langle \bar{a}_1, \bar{b}_1 \rangle), \bar{t} \rangle$, изоморфную сплетению $(3^2 : SL_2(3)) \wr \mathbb{Z}_3$. Тогда

$$\bar{g} \in C_{\bar{R}}(\bar{f}) = \left(\prod_{i=1}^3 (\langle \bar{a}_i \rangle \times \langle \bar{b}_i \rangle) \rtimes \langle \bar{c}_i \rangle \right) \rtimes \langle \bar{t} \rangle,$$

где для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ имеем $|\bar{c}_i| = 3$, $\bar{a}_i^{\bar{c}_i} = \bar{a}_i$ и $\bar{b}_i^{\bar{c}_i} = \bar{a}_i \bar{b}_i$. Можно считать, что $\bar{c}_1^{\bar{t}} = \bar{c}_2$, $\bar{c}_2^{\bar{t}} = \bar{c}_3$, $\bar{c}_3^{\bar{t}} = \bar{c}_1$ и $\bar{g}_i = \bar{c}_i^{k_i}$, где $i \in \{1, 2, 3\}$ и $k_i \in \{0, 1, -1\}$.

Легко проверить, что при действии группы $\langle \bar{t} \rangle$ на множестве подгрупп порядка 3 из $\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3 \rangle$ имеется точно одна одноэлементная орбита $\langle \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \rangle$ и четыре орбиты длины 3 с представителями $\langle \bar{c}_1 \rangle$, $\langle \bar{c}_1 \bar{c}_2 \rangle$, $\langle \bar{c}_1 \bar{c}_2^{-1} \rangle$ и $\langle \bar{c}_1^{-1} \bar{c}_2 \bar{c}_3 \rangle$.

Если $\langle \bar{g} \rangle$ принадлежит одноэлементной орбите, то $E = E^g$; противоречие. Поэтому $\langle \bar{g} \rangle$ принадлежит одной из орбит длины 3. Поскольку ввиду леммы 2.2 элемент t нормализует подгруппу E^g , элемент \bar{t} нормализует подгруппу \bar{E}^g . Поскольку элемент t централизует подгруппу E , справедливо равенство $\bar{E}^g = \bar{E}^{\bar{x}}$ для любого элемента \bar{x} , сопряженного с \bar{g} относительно $\langle \bar{t} \rangle$.

Пусть $\bar{g} = \bar{c}_1^k$, где $k \in \{1, -1\}$. Тогда $\bar{E}^g = \langle \bar{f}, \bar{h} \bar{a}_1^k \rangle = \langle \bar{f}, \bar{h} \bar{a}_2^k \rangle$ и, следовательно, \bar{E}^g содержит элемент $(\bar{a}_1^{-1} \bar{a}_2)^k$, не сопряженный с элементами из \bar{E} ; противоречие. Аналогично приходим к противоречию в случае, когда $\bar{g} \in \langle \bar{c}_1 \bar{c}_2 \rangle$ или $\bar{g} \in \langle \bar{c}_1^{-1} \bar{c}_2 \bar{c}_3 \rangle$.

Итак, можно считать, что $\bar{g} = (\bar{c}_1 \bar{c}_2^{-1})^k$, где $k \in \{1, -1\}$.

Обратно, пусть $\bar{g} = (\bar{c}_1 \bar{c}_2^{-1})^k$, где $k \in \{1, -1\}$. Тогда легко проверяется, что $E^g = \langle e, f, h(a_1 a_2^{-1})^k \rangle$, откуда следует, что t нормализует подгруппу E^g и g нормализует силовскую 3-подгруппу из M , являющуюся полным прообразом в C подгруппы $\langle \bar{S}, \bar{t}, \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3 \rangle$. Поэтому $(G, M_1, M_1^g) \in \Pi$.

Пусть $L\langle u \rangle$ — полупрямое произведение группы L на группу $\langle u \rangle$, где u — инволюция, индуцирующая на L внешний автоморфизм группы L . Ввиду [11, теорема 1] можно считать, что u нормализует M_0 . Если u централизует группу $O_3(M_0)/E$, то согласно [13, теорема 5.1.4] u централизует $O_3(M_0)$, а значит, централизует M_0 , что противоречит [14, теорема 4.5.1, предложение 4.9.1]. Поэтому $C_{M_0\langle u \rangle/E}(O_3(M_0)/E) = O_3(M_0)/E$ и $M_0\langle u \rangle/O_3(M_0) \cong GL_3(3)$, в силу чего можно считать, что u инвертирует группу $O_3(M_0)/E$. Группа $O_3(M_0)$ неабелева, поэтому $C_E(u) \neq 1$. Отсюда, поскольку $C_{M_0}(u)$ действует неприводимо на E , получаем, что u централизует E и, следовательно, $N_{L\langle u \rangle}(E)/C_{L\langle u \rangle}(E) \cong SL_3(3)$. Покажем, что u переставляет подгруппы E^g и $E^{g^{-1}}$ и, следовательно, тройки (G, M, M^g) и $(G, M, M^{g^{-1}})$ эквивалентны, а $M \cap M^g = M_0 \cap M_0^g$. Поскольку u централизует E и инвертирует $O_3(M_0)/E$, имеем $(h(a_1 a_2^{-1}))^u = h(a_2 a_1^{-1} h^\alpha f^\beta e^\gamma)$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, -1\}$. Если $\alpha = -1$, то элемент $(h(a_1 a_2^{-1}))^u$ принадлежит $\langle a_i, a_j, e \rangle$ для некоторых $i, j \in \{1, 2, 3\}$, что невозможно (см. начало рассмотрения подслучая (1a)). Если $\alpha = 1$, то u нормализует подгруппу E^g и $|C_{E^g}(u)| = 9$, что невозможно ввиду $N_{L\langle u \rangle}(E^g)/C_{L\langle u \rangle}(E^g) \cong SL_3(3)$. Поэтому $\alpha = 0$ и утверждение доказано.

Найдем пересечение $M \cap M^g = M_0 \cap M_0^g$. Поскольку $M_0/C_{M_0}(E) \cong SL_3(3)$ и $C_{M_0}(E) = O_3(M)$, в M_0 существует инволюция s , централизующая элемент f и инвертирующая элементы e и h . Поэтому $N = C\langle s \rangle = C_0\langle s, t \rangle$. Можно считать, что инволюция \bar{s} нормализует подгруппу \bar{L}_3 и переставляет подгруппы \bar{L}_1 и \bar{L}_2 . Поскольку инволюция \bar{s} централизует $\bar{f} = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3$, она переставляет элементы \bar{a}_1 и \bar{a}_2 (и централизует элемент \bar{a}_3). Отсюда следует, что s нормализует подгруппы E, E^g и $E^{g^{-1}}$. Далее, группа $EE^g = EE^g E^{g^{-1}}$ порядка 3^4 имеет точно 4 содержащие $\langle e, f \rangle$ подгруппы порядка 3^3 , а именно $E, E^g, E^{g^{-1}}$ и не сопряженную с ними в G подгруппу $\langle e, f, a_1 a_2^{-1} \rangle$ (см. начало рассмотрения случая (1a)). Поскольку $[EE^g, O_3(M)] = \langle e, f \rangle$, имеем $N_{M_0}(EE^g) \leq N_{M_0}(\langle e, f \rangle)$. Но из действия M_0 на $O_3(M)/E$ следует, что $N_{M_0}(EE^g)$ — максимальная подгруппа в M_0 . Поэтому $N_{M_0}(EE^g) = N_{M_0}(\langle e, f \rangle)$. Таким образом, $N_{M_0}(\langle e, f \rangle)$ стабилизирует множество $\{E, E^g, E^{g^{-1}}\}$ и, следовательно, множество $\{E^g, E^{g^{-1}}\}$. Но $N_{M_0}(\langle e, f \rangle)/O_3(M) \cong GL_2(3)$. Поэтому либо $N_{M_0}(\langle e, f \rangle)$ нормализует подгруппу E^g и тогда $M_0 \cap M_0^g = N_{M_0}(\langle e, f \rangle)$, либо любой элемент x из $N_{M_0}(\langle e, f \rangle)$ со свойством $xO_3(M) \in GL_2(3) \setminus SL_2(3)$ переставляет E^g и $E^{g^{-1}}$. Но в последнем случае элемент s переставляет E^g и $E^{g^{-1}}$, что не так.

Таким образом, в подслучае (1a) выполняются п. (а) и для него заключительное утверждение теоремы.

Пусть выполняется подслучай (1b). Согласно [11] мы можем рассматривать $E = \langle e_1, \dots, e_5 \rangle$ как естественный $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуль, а $O_2(M)/E$ как внешний квадрат $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуля $E^* = \langle e_1^*, \dots, e_5^* \rangle$, изоморфного модулю E или дуальному к E модулю. Для произвольного $w \in O_2(M)$ через \bar{w} будем обозначать элемент $wE \in O_2(M)/E$, рассматриваемый как элемент $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуля $E^* \wedge E^*$. (Под E и $O_2(M)/E$ мы будем в зависимости от контекста понимать группы или $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модули.)

Покажем, прежде всего, что $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуль E^* изоморфен дуальному к E модулю. Предположим, что, напротив, $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуль E^* изоморфен E и, следовательно, $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуль $O_2(M)/E$ есть внешний квадрат $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуля E . Тогда для произвольного неединичного элемента группы $O_2(M)/E$ его централизатор в $M/O_2(M)$ не централизует неединичных элементов группы E . Но это противоречит тому, что группа $O_2(M)$ содержит элементы порядка 4.

Обозначим через τ корреляцию множества подпространств $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуля E на множество подпространств $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуля E^* , коммутирующую с действием $M/O_2(M)$. Не теряя общности, будем предполагать, что $\langle e_i^* \rangle = \tau(\langle e_j \mid j \in \{1, \dots, 5\} \setminus \{i\} \rangle)$ для всех $1 \leq i \leq 5$.

Группа $M/O_2(M)$ имеет на множестве ненулевых элементов $O_2(M)/E = E^* \wedge E^*$ две ор-

биты: одну — из 155 элементов с представителем $e_1^* \wedge e_2^*$ и другую — из 868 элементов с представителем $e_1^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_4^*$ (см. [15, лемма 2.5]). Ясно, что элементы второй орбиты — это в точности элементы вида \vec{w} , где w — элемент порядка 4 группы $O_2(M)$ (действительно, централизатор в группе $M/O_2(M)$ элемента $e_1^* \wedge e_2^*$ не оставляет на месте 4-мерных подпространств пространства E^* , а следовательно, и одномерных подпространств пространства E). Отсюда несложно получается

Лемма 2.3. *Если для элементов x и y группы $O_2(M)$ имеем $\vec{x} = u_1 \wedge u_2$ и $\vec{y} = v_1 \wedge v_2$, где $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E^*$, то в случае $\dim(\langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle) < 4$ справедливо $[x, y] = (xy)^2 = 1$, а в случае $\dim(\langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle) = 4$ коммутатор $[x, y]$ (совпадающий с квадратом любого элемента w группы $O_2(M)$, для которого $\vec{w} = u_1 \wedge u_2 + v_1 \wedge v_2$) есть такой ненулевой элемент E , что натянутое на него одномерное подпространство при корреляции τ отображается в $\langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$.*

Доказательство. В первом случае централизатор в группе $M/O_2(M)$ подпространства $\langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$ не оставляет на месте 4-мерных подпространств пространства E^* и, следовательно, ненулевых векторов пространства E , что влечет $[x, y] = 1$, а во втором случае оставляет на месте единственное 4-мерное подпространство пространства E^* , а именно $\langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$. Если во втором случае также $[x, y] = 1$, то получаем, что $[x, y] = 1$ для всех элементов x и y группы $O_2(M)$, у которых \vec{x} и \vec{y} принадлежат $\{u \wedge v \mid u, v \in E^*\}$. Противоречие с тем, что множество элементов w группы $O_2(M)$, для которых $\vec{w} \in \{u \wedge v \mid u, v \in E^*\}$, порождает неабелеву группу $O_2(M)$. Лемма доказана.

Так как E — естественный $\mathbb{F}_2 M/O_2(M)$ -модуль, то, не теряя общности (домножая в случае необходимости элемент g справа на подходящий элемент группы M ; ср. рассуждения в случае (1a)), будем предполагать, что $g \in C_G(E \cap E^g)$. Далее, так как (в силу $E^g \leq O_2(M) = C_G(E)$) EE^g — элементарная абелева 2-группа, то с учетом предшествующего лемме 2.3 наблюдения для любого элемента $x \in EE^g$ элемент \vec{x} имеет вид $u_1 \wedge u_2$, где $u_1, u_2 \in E^*$. Если x — элемент из $E^g \setminus E$, то отсюда и из леммы 2.3 следует, что $|E \cap E^g| \geq |[x, O_2(M)]| \geq 2^3$.

Пусть Z — произвольная подгруппа порядка 2^3 группы $E \cap E^g$. Тогда согласно [11] найдется такая содержащая E подгруппа H группы G , что $Z(H)$ — элементарная абелева группа порядка 2^4 , $Z = E \cap Z(H)$, H/Z есть центральное произведение групп J_1, \dots, J_8 , изоморфных $SL_2(r)$, $N_G(H) = N_G(Z)$ индуцирует на множестве $\{J_1, \dots, J_8\}$ группу подстановок $AGL_3(2)$ в естественном представлении, причем $C_G(E) = O_2(M)$ индуцирует ее регулярную нормальную элементарную абелеву 2-подгруппу, и (согласно [14, теорема 4.10.6]) ядро действия $N_G(H)$ на $\{J_1, \dots, J_8\}$ имеет вид HK , где K — подгруппа Картана группы G , индуцирующая внутренне-диагональные автоморфизмы на каждой из подгрупп J_i , $1 \leq i \leq 8$.

Положим $\overline{N_G(Z)} = N_G(Z)/Z$. Из регулярности группы, индуцированной $C_G(E)$ на $\{J_1, \dots, J_8\}$, следует существование таких элементов $\overline{a_1}, \overline{b_1}$ группы J_1 , что $(\overline{a_1})^2 = (\overline{b_1})^2 = [\overline{a_1}, \overline{b_1}]$ — инволюция из центра группы \overline{H} и $\overline{E} = \langle \overline{a_1} \overline{a_2} \dots \overline{a_8}, \overline{b_1} \overline{b_2} \dots \overline{b_8} \rangle$, где $\overline{a_i}$ и $\overline{b_i}$ — образы соответственно $\overline{a_1}$ и $\overline{b_1}$ под действием элемента из $C_G(E)$, отображающего J_1 в J_i , для всех $2 \leq i \leq 8$.

Так как группа $N_G(H)$ индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ группу $AGL_3(2)$, а ядро действия $N_G(H)$ на $\{J_1, \dots, J_8\}$ не имеет секций, изоморфных $SL_3(2)$, то произвольная подгруппа группы $N_G(H)$, имеющая секцию, изоморфную $SL_3(2)$, индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ группу, содержащую подгруппу, изоморфную $SL_3(2)$. Поскольку группа $N_G(H) = N_G(Z)$ индуцирует на Z группу $SL_3(2)$, отсюда следует, что содержащая $C_G(E)$ группа $C_G(Z)$ индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ ту же, что $C_G(E)$, регулярную элементарную абелеву 2-группу.

Поскольку $g \in C_G(E \cap E^g) \leq C_G(Z)$, отсюда вытекает, что, не теряя общности (домножая в случае необходимости элемент g на подходящий элемент группы $C_G(Z)$), можно предполагать тривиальность действия элемента g на $\{J_1, \dots, J_8\}$. Как следствие, элемент g индуцирует на каждой из групп J_i , $1 \leq i \leq 8$, внутренне-диагональный автоморфизм. Поскольку EE^g — элементарная абелева 2-группа (в силу $E^g \leq O_2(M) = C_G(E)$, см. лемму 2.2), отсюда следует, что для каждого $1 \leq i \leq 8$ автоморфизм группы J_i , индуцируемый g , нормализует подгруппу $\langle \overline{a_i}, \overline{b_i} \rangle$.

Так как $C_G(E) = O_2(M)$, то $C_G(E)$ нормализует E^g (см. лемму 2.2) и, следовательно, централизует некоторый неединичный элемент \bar{x} группы $\overline{E^g}$. Пусть $\bar{x} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_8$, где $\bar{x}_i \in J_i$ и, следовательно, $\bar{x}_i \in \{\bar{1}, \bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{a}_i \bar{b}_i\}$ для каждого $1 \leq i \leq 8$. Не теряя общности, будем считать, что $\bar{x}_1 = \bar{a}_1$. Тогда, учитывая, что $C_G(E)$ централизует элемент \bar{x} группы \overline{H} , получаем (см. выше), что $\bar{x}_i = \bar{a}_i$ для всех $1 \leq i \leq 8$ и, следовательно, $\bar{x} = \bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_8 \in \overline{E}$. Таким образом, $|E \cap E^g| = 2^4$. Если бы $C_G(E)$ централизовала еще и другой (помимо \bar{x}) неединичный элемент группы $\overline{E^g}$, то, рассуждая аналогично, мы бы получили противоречие с $E \neq E^g$. Следовательно, подгруппа C группы $C_G(E)$, состоящая из ее элементов, централизующих $\overline{E^g}$, имеет в $C_G(E)$ индекс 2. При этом C не может индуцировать на $\{J_1, \dots, J_8\}$ транзитивную группу (поскольку в противном случае мы могли бы применить к C рассуждения, примененные ранее к $C_G(E)$, и получить противоречие с $E \neq E^g$). Таким образом, подгруппа C группы $N_G(Z) = N_G(H)$ индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ подгруппу порядка 4 нормальной элементарной абелевой 2-подгруппы группы $AGL_3(2)$, индуцируемой $N_G(Z)$. Заметим, что при этом C — нормальная подгруппа группы $N_G(E) \cap N_G(E^g) \cap N_G(Z) = M \cap M^g \cap N_G(Z)$.

Покажем, что

$$M \cap M^g = N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g). \quad (2.1)$$

Ясно, что $M \cap M^g \leq N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g)$. Предположим, что $M \cap M^g < N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g)$, и пусть $h \in (N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g)) \setminus (M \cap M^g)$. Тогда $EE^g = E \cup E^g \cup (E^g)^h$, что противоречит утверждению (iv) из [11, шаг 7]. Равенство (2.1) доказано.

Пусть, без потери общности, $E \cap E^g = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$, и пусть $EE^g/E = \langle u_1 \wedge u_2 \rangle$, где $u_1, u_2 \in E^*$. Если $e_1^* \notin \langle u_1, u_2 \rangle$, то найдутся такие $v_1, v_2 \in E^*$, что $\dim(\langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle) = 4$ и $e_1^* \notin \langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle$. Но тогда для $y \in O_2(M)$ такого, что $\vec{y} = v_1 \wedge v_2$, согласно лемме 2.3 имеем $[y, E^g] = \tau^{-1}(\langle u_1, u_2, v_1, v_2 \rangle) \not\leq \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle = E \cap E^g$, что противоречит $y \in O_2(M) \leq N_M(E^g)$. Следовательно, не теряя общности, можно предполагать, что $u_1 = e_1^*$, $u_2 = e_2^*$. Теперь

$$N_M(EE^g) = N_M(\tau^{-1}(\langle e_1^*, e_2^* \rangle)) = N_M(\langle e_3, e_4, e_5 \rangle). \quad (2.2)$$

Так как в наших предшествующих рассуждениях подгруппа Z была произвольной подгруппой порядка 2^3 группы $E \cap E^g$, то мы можем выбрать в качестве Z группу $\langle e_3, e_4, e_5 \rangle$. Но тогда с учетом (2.1) и (2.2) имеем

$$\begin{aligned} M \cap M^g \cap N_G(Z) &= N_M(EE^g) \cap N_M(E \cap E^g) \cap N_G(Z) \\ &= N_M(Z) \cap N_M(E \cap E^g) = N_M(\langle e_3, e_4, e_5 \rangle) \cap N_M(\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle). \end{aligned}$$

Таким образом, подгруппа $M \cap M^g \cap N_G(Z)$ группы $N_G(Z) = N_G(H)$ имеет секцию, изоморфную $SL_3(2)$. Как было отмечено ранее, отсюда следует, что $M \cap M^g \cap N_G(Z)$ индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ подгруппу группы $AGL_3(2)$ (индуцируемой $N_G(Z)$), содержащую подгруппу, изоморфную $SL_3(2)$. В то же время, как было показано выше, нормализуемая $M \cap M^g \cap N_G(Z)$ подгруппа C группы $N_G(H)$ индуцирует на $\{J_1, \dots, J_8\}$ подгруппу порядка 4 нормальной элементарной абелевой 2-подгруппы группы $AGL_3(2)$, индуцируемой $N_G(Z)$. Полученное противоречие завершает рассмотрение подслучая (1b).

Таким образом, можно считать, что выполнен

С л у ч а й 2. E содержится в некотором максимальном торе группы X_σ .

Согласно [17] в этом случае существует σ -допустимая замкнутая связная редуктивная подгруппа D группы X , содержащая некоторый σ -допустимый максимальный тор T группы X , для которой $M = N_G(D_\sigma) = N_G(D)$. Будем считать подгруппу D максимальной с этими свойствами. Выполняется один из следующих подслучаев:

- (2a) $T < D$;
- (2b) $T = D$.

Пусть выполняется подслучай (2a). Тогда ввиду [17, теорема, табл. 5.1; 7] и п. (b) предложения 1.1 выполняется один из следующих подслучаев:

- (i) $L \cong G_2(3)$, $M_0 \cong (SL_2(3) \circ SL_2(3)).2$;
- (ii) $L \cong {}^2F_4(2)$, $M_0 \cong 3_+^{1+2} : 8$;
- (iii) $L \cong {}^3D_4(2)$, $M_0 \cong SU_3(2).3.2 \cong 3_+^{1+2}.2S_4$;
- (iv) $L \cong F_4(2)$, $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2)).S_3$;
- (v) $L \cong {}^2E_6(2)$, $M_0 \cong (SU_3(2) \circ SU_3(2) \circ SU_3(2)).S_3$;
- (vi) $L \cong E_8(2)$, $M = M_0 \cong 3^2.(U_3(2))^4.3^2.GL_2(3)$;
- (vii) $L \cong E_7(3)$, $M_0 \cong 2^3.(L_2(3)^7).2^3.L_3(2)$;
- (viii) $G \cong E_8(3)$, $M = M_0 \cong 2^4.(L_2(3)^8).2^4.AGL_3(2)$.

По предложению 1.1 имеем $K_1K_2 \leq O_p((M_1, M_2)^1) \triangleleft M$ и $1 \neq K_i \triangleleft O_p((M_1, M_2)^1)$ для $i = 1, 2$. Ввиду леммы 2.1 для каждого $i \in \{1, 2\}$ подгруппа $K_i \cap L$ является неединичной нормальной в M_i подгруппой из $O_3(M_i)$. Поэтому можно считать, что $G = L$. Положим $Z = Z(O_p(M))$.

Пусть выполняется подслучай (i). Тогда $M = (L_1 \circ L_2) \rtimes \langle t \rangle$, где L_1 и L_2 — нормальные в M подгруппы, изоморфные $SL_2(3) \cong Q_8 : 3$, $|t| = 2$ и $O_2(M) \cong 2_+^{1+4}$. Легко проверить, что неединичная нормальная в M подгруппа из $O_2(M)$ совпадает с Z , $O_2(L_1)$, $O_2(L_2)$ или $O_2(M)$. Поскольку $K_1 \neq K_2$, $O_2((M_1, M_2)^1) \triangleleft M$ и $K_2 \triangleleft M_2$, отсюда следует, что $O_2((M_1, M_2)^1) = O_2(M)$ и $K_2 \cong Q_8$. Но тогда $[K_2, K_2] = Z$, что невозможно.

Пусть выполняется подслучай (ii) или (iii). Тогда $O_p(M_i) \cong 3_+^{1+2}$ и M_i действует неприводимо на $O_3(M_i)/Z(O_3(M_i))$ для $i = 1, 2$. Поскольку $O_3(M_i) \neq K_i \triangleleft M_i$, отсюда следует, что $|K_i| = 3$ и $O_3((M_1, M_2)^1) = O_3(M)$. Но тогда подгруппа K_2 нормальна в $O_3(M)$ и, значит, совпадает с $K_1 = Z$, что невозможно.

Пусть выполняется один из подслучаев (iv)–(vi). Тогда ввиду [14, теорема 4.7.3, табл. 4.7.3А] и [7] имеем $M = N_L(Z)$, где $|t| = 3$, $O_2'(C_L(Z)) = L_1 \circ \dots \circ L_n$, где $C_L(L_1 \dots L_n) = Z$, $L_i \cong SU_3(2) \cong 3_+^{1+2} : Q_8$ для $1 \leq i \leq n$, $C_L(L_1 \dots L_n) = Z$, Z является единственной минимальной нормальной подгруппой в M , число n равно 2, 3 или 4 и число $|Z|$ равно 3, 3 или 9 в подслучаях (iv), (v) или (vi) соответственно. Легко проверить, что нецентральная нормальная в $L_1 \dots L_n$ подгруппа из $O_3(M)$ совпадает с $O_3(H)$, где H — любое произведение подгрупп из множества $\{L_1, \dots, L_n\}$. Поскольку $Z \leq K_1 < K_1K_2 \leq O_3((M_1, M_2)^1) \triangleleft M$ и $Z^g \leq K_2 \triangleleft O_3((M_1, M_2)^1)$, подгруппа K_2 равна $O_3(H)$, где H — некоторое неабелево произведение подгрупп из множества $\{L_1, \dots, L_n\}$. Но тогда $1 \neq [K_2, K_2] \leq Z$, что невозможно.

Пусть выполняется подслучай (vii). Легко проверить, что $|M|_2 = |G|_2$, поэтому ввиду [16] подгруппа M имеет нормальную подгруппу F такую, что F есть центральное произведение (фундаментальных) подгрупп J_1, \dots, J_7 , изоморфных $SL_2(3)$, $Z := Z(F)$ — элементарная абелева группа порядка 2^3 , M индуцирует на множестве $\{J_1, \dots, J_7\}$ группу подстановок $GL_3(2)$ в естественном представлении и согласно [14, теорема 4.10.6]) ядро $C_G(Z(F))$ действия группы M на $\{J_1, \dots, J_7\}$ имеет вид FH , где H — подгруппа Картана группы G , индуцирующая внутренне-диагональные автоморфизмы на каждой из подгрупп J_i для $1 \leq i \leq 7$, и подгруппа $O_2(M) = O_2(F)$ слабо замкнута в (любой) силовской 2-подгруппе из M относительно G . Поскольку центры подгрупп J_1, \dots, J_7 попарно различны (см. [5, с. 401]), подгруппа M действует неприводимо на Z . Ясно также, что M действует неприводимо на $O_2(M)/Z$. Предположим, что $O_2(M) \leq M_1 \cap M_2$. Тогда, поскольку $O_2(M)^g = O_2(M_2)$, подгруппа $O_2(M_1)O_2(M_2)$ содержится в некоторой силовской 2-подгруппе P из M_2 . Поскольку подгруппа $O_2(M_2)$ слабо замкнута в P относительно G , получаем, что $O_2(M_1) = g^{-1}O_2(M_2)g = O_2(M_2)$; противоречие. Таким образом, $O_2(M)$ не содержится в $M_1 \cap M_2$ и, следовательно, $K_1K_2 \leq O_2((M_1, M_2)^1) \leq Z$, откуда $K_1 = K_2 = Z$; противоречие.

Пусть выполняется подслучай (viii). Легко проверить, что $|M|_2 = |G|_2$, поэтому ввиду [16] подгруппа M имеет нормальную подгруппу F такую, что F есть центральное произведение (фундаментальных) подгрупп J_1, \dots, J_8 , изоморфных $SL_2(3)$, $Z := Z(F)$ — элементарная абелева группа порядка 2^4 , M индуцирует на множестве $\{J_1, \dots, J_7\}$ группу подстановок $AGL_3(2)$ в естественном представлении и согласно [14, теорема 4.10.6]) ядро $C_G(Z(F))$ действия группы M на $\{J_1, \dots, J_7\}$ имеет вид FH , где H — подгруппа Картана группы G , индуцирующая

внутренне-диагональные автоморфизмы на каждой из подгрупп J_i для $1 \leq i \leq 8$, и подгруппа $O_2(M) = O_2(F)$ слабо замкнута в (любой) силовой 2-подгруппе из M относительно G . Из доказательства леммы 2.7 из [11] следует, что Z содержит единственную минимальную нормальную в M подгруппу E порядка 8, причем никакая инволюция из E не сопряжена в G ни с какой инволюцией из $Z \setminus E$. Подгруппа M действует неприводимо на E и на $O_2(M)/Z$. Рассуждая, как в подслучае (vi), получаем, что $K_1K_2 \leq O_2((M_1, M_2)^1) \leq Z$. Отсюда, поскольку $K_i \triangleleft M_i$, $K_1 \neq K_2$ и $|K_1| \leq |K_2|$, имеем $K_1 = E$, $|K_2| = 8$ и $K_1K_2 = Z$. Но тогда $K_2 = E^g$ и, следовательно, инволюции из неединичной подгруппы $E \cap E^g$ сопряжены в L с инволюциями из непустого множества $E^g \setminus E$, что невозможно.

Полученное противоречие завершает рассмотрение подслучая (2a).

Пусть выполняется подслучай (2b). Из условия $F^*(M) = O_p(M)$ следует, что $T_\sigma \cap G \leq O_p(M)$. В частности, $T_\sigma \cap L \leq O_p(M_0)$.

Покажем, что p делит порядок группы $M_0/O_p(M_0)$. Предположим противное. Тогда ввиду леммы 2.1 имеем $1 \neq K_i \cap L \leq O_p(M_0)$ для каждого $i \in \{1, 2\}$, поэтому подгруппа $O_p(M_0)$ содержится в пересечении $M_1 \cap M_2 \cap L$ и, следовательно, совпадает с $O_p(M_2 \cap L)$, что невозможно.

Поскольку p делит порядок группы $M_0/O_p(M_0)$, используя предложения 1.2 и 1.3 и [17, теорема, табл. 5.2], легко видеть, что выполняется один из следующих подслучаев:

- (i) $L = X_\sigma \cong {}^3D_4(2)$, $M_0 \cong (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3).SL_2(3)$;
- (ii) $L = X_\sigma \cong {}^2F_4(8)$, $M_0 \cong (\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_9).GL_2(3)$;
- (iii) $L = X_\sigma \cong F_4(8)$, G содержит графовый автоморфизм, $T_\sigma \cong (\mathbb{Z}_9)^4$, $M_0/(T_\sigma) \cong W(F_4) \cong O_4^+(3)$;
- (iv) $L \cong E_6^\varepsilon(q)$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $q \geq 5$ при $\varepsilon = +$, $X_\sigma \leq G$ при $(\varepsilon, q) = (-, 2)$, $T_\sigma \cong (\mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1})^6$, $M_0/(T_\sigma \cap L) \cong W(E_6) \cong \text{Aut}(U_4(2))$;
- (v) $L \cong E_7(q)$, $T_\sigma \cong (\mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1})^7$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $q \geq 5$ при $\varepsilon = +$, $M_0/(T_\sigma \cap L) \cong W(E_7) \cong \mathbb{Z}_2 \times Sp_6(2)$;
- (vi) $L = X_\sigma \cong E_8(q)$, $T_\sigma \cong (\mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1})^8$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, $q \geq 5$ при $\varepsilon = +1$, $M_0/(T_\sigma) \cong W(E_8) \cong 2 \cdot \Omega_8^+(2).2$.

Положим $R = \Omega_1(T_\sigma) \cap L$. Тогда во всех подслучаях (i)–(vi) имеем $R = \Omega_1(O_p(M_0))$.

Пусть сначала $p > 2$. Тогда $T_\sigma \cap L = O_p(M_0)$. Кроме того, группа M_0 действует неприводимо на R . Действительно, это следует из [7] в подслучае (i), из справедливости согласно [7] включений $3^2 : GL_2(3) < L_3(3) < {}^2F_4(2) < {}^2F_4(8)$ в подслучае (ii) и из [17, лемма 4.6(i)] в остальных подслучаях. Ввиду леммы 2.1 либо $K_i \cap L \neq 1$ для каждого $i \in \{1, 2\}$, либо выполняется подслучай (i), причем $G \cong \text{Aut}({}^3D_4(2))$ и $M \cong 3 \times (3^2 : SL_2(3))$. Если выполняется первая возможность, то с учетом включения $K_2 \cap L \leq O_p(M_0)$ имеем $R = \Omega_1(K_1 \cap L) = \Omega_1(K_2 \cap L)$, что противоречит условию теоремы. Поэтому выполняется вторая возможность. Тогда $p = 3$ и $O_3(M_1)$ — элементарная абелева группа порядка 27. Положим $W = O_3(M_1)$. Тогда $W^g = O_3(M_2)$ и $K_1K_2 \leq O_3((M_1, M_2)^1) \cap O_3((M_2, M_1)^1) \leq W \cap W^g$. Ясно, что $M_1 \cap M_2 = N_{M_2}(K_1) = N_{M_1}(K_2)$ и, следовательно, W и W^g — нормальные подгруппы в $M_1 \cap M_2$. Поскольку $W \neq W^g$ и $|M_1|_3 = 3^4$, имеем $|WW^g| = 3^4$, что влечет $|W \cap W^g| = 3^2$ и $W \cap W^g = Z(WW^g) \geq K_1K_2$.

Предположим, что $K_i \cap L \neq 1$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Тогда $K_i \cap L$ является неединичной нормальной в $M_i \cap L$ подгруппой из $O_3(M_i \cap L) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$. Поскольку M_i неприводимо действует на $O_3(M_i \cap L)$, подгруппа $K_i \cap L$ равна $O_3(M_i \cap L)$. Но тогда $C_G(K_i \cap L) = W$, что противоречит включению $K_i \leq Z(WW^g)$.

Итак, $K_i \cap L = 1$ для каждого $i \in \{1, 2\}$ и, следовательно, $|K_1| = |K_2| = 3$ и $Z(WW^g) = K_1 \times K_2$. Поскольку $|G|_3 = 3^5$, подгруппа WW^g является собственной нормальной подгруппой в некоторой силовой 3-подгруппе P из G . Возьмем элемент $x \in (P \cap L) \setminus WW^g$. Ввиду [7] можно считать, что подгруппа $\langle x \rangle$ имеет порядок 9 и действует транзитивно на множестве $\{K_1, K_1^x, K_1^{x^{-1}}\}$, состоящем из подгрупп порядка 3 из $Z(WW^g)$, не лежащих в L . Поэтому можно считать, что $\langle g \rangle = \langle x \rangle$. Поскольку инволюция из M инвертирует $Z(WW^g) \cap L$ и централизует K_1 , она переставляет K_1^g и $K_1^{g^{-1}}$. Отсюда следует, что тройки (G, M, M^g) и $(G, M, M^{g^{-1}})$

эквивалентны и $M_1 \cap M_2 = WW^g$, так что выполняются п. (b) теоремы.

Пусть теперь $p = 2$. Тогда выполняется один из подслучаев (iv)–(vi). Поскольку $q - \varepsilon 1$ есть неединичная степень 2, получаем $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$ и, следовательно, ввиду [16] подгруппа M_0 имеет нечетный индекс в L и $C_M(R) = O_2(M)$. Таблицы 2-модулярных неприводимых характеров Брауэра групп $\text{Aut}(U_4(2))$ и $\Omega_8^+(2)$ (см. [6]) показывают, что в подслучаях (iv) и (vi) группа M_0 действует неприводимо на R , поэтому, как выше при рассмотрении первой возможности случая $p > 2$, приходим к противоречию.

Таким образом, выполняется подслучай (v). Имеем $q - \varepsilon 1 = 2^k$ для $k \geq 2$ и, следовательно, $O_2(M_0) = (T_\sigma \cap L)\langle t \rangle$, где $T_\sigma \cap L \cong (\mathbb{Z}_{2^k})^6 \times \mathbb{Z}_{2^{k-1}}$ (см. [14, теорема 2.5.12]) и t действует на T_σ как элемент w_0 из группы Вейля $W(E_7)$ (см. [1; 2]). Согласно [9, теорема 7.2.2] элемент t инвертирует T_σ .

Пусть E — 2^{k-1} -я степень группы $T_\sigma \cap L$. Тогда E — подгруппа порядка 2^6 из R , нормальная в M . Любой элемент нечетного порядка из $C_M(E)$ централизует $O_2(M)$, поэтому $T_\sigma \cap L \leq C_{M_0}(E) \leq O_2(M_0)$. Таблица 2-модулярных неприводимых характеров Брауэра группы $Sp_6(2)$ (см. [6]) показывает, что нетривиальный 6-мерный $\mathbb{F}_2 Sp_6(2)$ -модуль является естественным $\mathbb{F}_2 Sp_6(2)$ -модулем. Отсюда следует, что $C_{M_0}(E) = O_2(M_0)$ и E — минимальная нормальная подгруппа в M_0 . Ввиду [14, теорема 4.5.1] E является единственной минимальной нормальной подгруппой в M_0 .

Поскольку элемент t инвертирует $T_\sigma \cap L$, имеем $R = Z(O_2(M_0))$. Подгруппа E^g — единственная минимальная нормальная подгруппа в $M_2 \cap L$, поэтому $E^g \leq K_2 \cap L \cap Z(O_2(M_2 \cap L))$.

Предположим, что $(T_\sigma \cap L)E^g = O_2(M_0)$. Тогда можно считать, что $E^g = \langle t \rangle \times (E^g \cap R)$. Имеем $N_{O_2(M_0)}(E^g) = E^g N_{T_\sigma \cap L}(E^g)$ и $N_{T_\sigma \cap L}(E^g) = [t, T_\sigma \cap L] = \{x \in T_\sigma \cap L \mid [t, x] \in E^g \cap R\} = \{x \in T_\sigma \cap L \mid x^2 \in E^g \cap R\}$. В $T_\sigma \cap L$ найдется элемент y порядка 2^k такой, что $\langle y \rangle \cap E^g = 1$. Поэтому $y^{2^{k-2}}$ не нормализует E^g . В то же время, поскольку нормальная в M_0 подгруппа $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$ содержит EE^g и нормализует E^g , коммутатор $[y, t] = y^2$ принадлежит $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$ и, следовательно, нормализует E^g . Отсюда $k = 2$. Группа M_0 действует неприводимо на $T_\sigma \cap L/R$ и элемент y из $O_2(M_0)$ не принадлежит $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$, поэтому $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L \leq RE^g$. Поскольку подгруппа R содержится в $M_1 \cap M_2 \cap L$ и нормальна в M , она содержится в $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$. Таким образом, $O_2((M_1, M_2)^1) \cap L = RE^g$. Ясно, что $|RE^g : EE^g| \leq 2$. Предположим, что $RE^g = EE^g$. Тогда, поскольку $EE^g \leq O_2((M_1, M_2)^1) \cap O_2((M_2, M_1)^1) \cap L$, имеем $RE^g < O_2((M_2, M_1)^1) \cap L$ и, следовательно, $R = Z(O_2((M_2, M_1)^1) \cap L) \triangleleft \langle M_1, M_2 \rangle$, что невозможно.

Таким образом, $|RE^g : EE^g| = 2$ и, следовательно, $R \cap E^g = E \cap E^g$, т. е. $|E \cap E^g| = 2^5$. Положим $W = E \cap E^g$. Тогда $W^{g^{-1}} = E \cap E^{g^{-1}}$. Все гиперплоскости из E сопряжены относительно $M_0/O_2(M_0) \cong Sp_6(2)$. Поэтому можно считать элемент g нормализующим W . Имеем $N_{M_0}(W) = C_{M_0}(e)$ для инволюции $e \in E \setminus W$, ортогональной к W относительно соответствующей симплектической формы на E . Ясно, что $e^g \in E^g \setminus R$. Ввиду [7] имеем $C_{M_0}(e)/O_2(M_0) \cong 2^6 : S_6$, поэтому $N_{M_0}(W)$ содержит некоторую силовскую 2-подгруппу S группы L . Ясно, что $C_{M_0}(W) = C_S(W) = O_2(M_0)$ и группа $N_L(W)/C_L(W)$ изоморфна подгруппе H нечетного индекса из $GL_5(2)$. Поскольку $N_{M_0}(W)C_L(W)/C_L(W) \cong N_{M_0}(W)/C_{M_0}(W) = N_{M_0}(W)/O_2(M_0) \cong 2^6 : S_6$, из списка максимальных подгрупп группы $GL_5(2)$ (см. [7]) видно, что $H \cong 2^6 : S_6$. Поэтому $N_L(W) = N_{M_0}(W)C_L(W)$, так что будем считать элемент g централизующим W . Тогда элементы e и e^g сопряжены в группе $C_L(W)$, причем они содержатся в силовской 2-подгруппе $O_2(M_0)$ этой группы. Согласно предложению 1.4 некоторая инволюция из $W \leq R$ сопряжена с некоторой инволюцией u из $O_2(M_0) \setminus R$ относительно нормализатора в $C_L(W)$ подгруппы $C_{O_2(M_0)}(u)$. Но $C_{O_2(M_0)}(u) = O_2((M_1, M_2)^1) \cap L$ и, следовательно, этот нормализатор содержится в M ; противоречие с тем, что R нормальна в M .

Итак, $E^g \leq T_\sigma \cap L$ и, следовательно, $R = EE^g$. Поскольку $K_1 \leq O_2(M_2)$, то для единственной минимальной нормальной подгруппой E группы M имеем $E^{g^{-1}} \leq K_1^{g^{-1}} \leq O_2(M)$ и, рассуждая как выше, получаем $R = EE^{g^{-1}}$. Но тогда $R = R^{g^{-1}}$, что невозможно, так как $M = N_G(R)$.

Таким образом, в подслучае (2b) выполняются п. (b) и для него заключительное утверждение теоремы.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 334 с.
2. **Картер П.** Классы сопряженных элементов в группе Вейля // Семинар по алгебраическим группам: сб. М.: Мир, 1973. С. 288–306.
3. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 6. С. 741–743.
4. **Кондратьев А.С., Трофимов В.И.** Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 143–152.
5. **Aschbacher M.** On finite groups of Lie type and odd characteristic // J. Algebra. 1980. Vol. 66, no. 2. P. 400–424.
6. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
7. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
8. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407).
9. **Carter R.W.** Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1972. 331 p.
10. **Chabot P.** Groups whose Sylow 2-subgroups have cyclic commutator groups // J. Algebra. 1971. Vol. 19, no. 1. P. 21–30.
11. **Cohen A.M., Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** The local maximal subgroups of exceptional groups of Lie type, finite and algebraic // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 64, no. 1. P. 21–48.
12. **Gerono G.C.** Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469–471.
13. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
14. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr.; vol. 40, no. 3).
15. **Liebeck M.W.** The affine permutation groups of rank three // Proc. London Math. Soc. (3). 1987. Vol. 54, no. 3. P. 477–516.
16. **Liebeck M.W., Saxl J.** The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. (II). 1985. Vol. 31, no. 2. P. 250–264.
17. **Liebeck M.W., Saxl J., Seitz G.M.** Subgroups of maximal rank in finite exceptional groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. (3). 1992. Vol. 65, no. 2. P. 297–325.
18. **Wilson R.A.** Maximal subgroups of automorphism groups of simple groups // J. London Math. Soc. (2). 1985. Vol. 32, no. 3. P. 460–466.
19. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd. 3. S. 265–284.

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

Поступила 20.12.2015

Трофимов Владимир Иванович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина
e-mail: trofimov@imm.uran.ru

УДК 517.977.58

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕЗУЛЬТАТА И РАССЕИВАЮЩИХ ЛИНИЙ В ЗАДАЧАХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ С НЕВЫПУКЛЫМ ЦЕЛЕВЫМ МНОЖЕСТВОМ¹

П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

Для плоской задачи быстродействия с круговой вектограммой скоростей и невыпуклым компактным целевым множеством с гладкой границей предложены алгоритмы построения функции оптимального результата. Алгоритмы обрабатывают случай, при котором решение задачи имеет нетривиальную (сегментированную) структуру сингулярного множества. Выявлены дифференциальные зависимости для гладких сегментов сингулярного множества, что позволяет их рассматривать и строить в виде дуг интегральных кривых. Приведен пример задачи быстродействия, для которого осуществлено численное конструирование функции оптимального результата и ее сингулярного множества. Выполнена визуализация результатов.

Ключевые слова: задача быстродействия, рассеивающая линия, невыпуклое множество, оптимальная траектория, дифференциальное уравнение.

P. D. Lebedev, A. A. Uspenskii. Construction of the optimal result function and dispersing lines in time-optimal problems with a nonconvex target set.

Algorithms for constructing the optimal result function are proposed for a planar time-optimal problem with a circular velocity vectogram and a nonconvex target set with smooth boundary. The algorithms work with the case where the solution of the problem has a complicated (segmented) structure of the singular set. Differentiable dependences are detected for smooth segments of the singular set, which makes it possible to consider and construct these segments as arcs of integral curves. An example of the time-optimal problem is considered, for which the optimal result function and its singular set are calculated numerically. A visualization of the results is implemented.

Keywords: time-optimal problem, dispersing line, nonconvex set, optimal trajectory, differential equation.

MSC: 34H20, 34K10, 35A18, 35A21

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-188-198

Введение

Рассматривается плоская задача быстродействия [1] с простой динамикой. Класс функций, к которому относится функция оптимального результата, известен [2] и имеет геометрическое истолкование. В условиях невыпуклости целевого множества, т. е. в довольно общей ситуации, решение задачи не является всюду дифференцируемой функцией, и ее отыскание сугубо в аналитической форме является трудноразрешимой проблемой (см., например, [3]). Негладкость разрешающих конструкций служит заметным препятствием при построении решения задачи, тем самым мотивируя исследователей на поиск процедур его построения. Цель настоящей работы заключается в разработке комбинированных алгоритмов конструирования функции оптимального результата, под которыми понимаются алгоритмы, сочленяющие аналитические процедуры выявления негладких особенностей функции и численные процедуры ее формирования в областях дифференцируемости. Речь идет о тех особенностях, которые определяют неоднозначность выбора оптимального управления. Задача разработчиков алгоритмов видится в выявлении и построении сингулярных кривых и точек бифуркации, что создает основу для корректного формирования управляющих воздействий.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10018).

Предъявленный в работе пример показывает умение авторов реализовывать алгоритмы при построении по существу негладких функций, возникающих при решении задач быстрого действия на плоскости. При этом сфера применения алгоритмов выходит за рамки теории управления. Алгоритмы могут быть использованы и используются, например, при решении задач геометрической оптики [4], а модификации этих алгоритмов — при численном построении решений задач об оптимальной упаковке [5].

В работе изучается в некоторой степени модельная ситуация, которая обусловлена, главным образом, простотой рассматриваемой динамической системы. При этом модельность ситуации не отменяет те особенности и эффекты, которые возникают при решении задач управления с куда как более сложной динамикой. Здесь авторы при изложении результатов следуют духу общего подхода к решению математических задач, отраженному в известной работе А. В. Кряжимского и Ю. С. Осипова [6], в которой для разъяснения идеи и методов решения проблемы (в их случае — для разъяснения идеи реконструкции управления на базе методов экстремального прицеливания Н. Н. Красовского и метода регуляризации А. Н. Тихонова) рассмотрена простейшая управляемая система, к слову, по динамике близкая к рассматриваемой в настоящей работе. Впоследствии эти идеи и методы решения перенесены на более общие ситуации. Создаваемые авторами этой статьи процедуры также могут быть обобщены. Изложенные здесь алгоритмы следует рассматривать как прототипы алгоритмов, предназначенных для решения задач управления по быстрдействию с динамикой общего вида.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу быстрого действия, заключающуюся в приведении точки на евклидовой плоскости на заданное целевое множество $M \subset \mathbb{R}^2$ за минимально возможное время [1]. Полагаем, что движение точки \mathbf{x} с координатами $\mathbf{x} = (x, y)$ задается уравнением

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

где на управление $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ наложено ограничение $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \leq 1$. Вектограмма движений рассматриваемой динамической системы есть круг единичного радиуса с центром в начале координат.

В случае $\mathbf{x} \notin M$ оптимальным управлением \mathbf{v} является вектор единичной нормы, направленный от \mathbf{x} к ближайшей к ней в евклидовой метрике точке \mathbf{y} границы множества M . Функция оптимального результата $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$ (равная минимальному времени, за которое движущаяся точка может достичь M) совпадает с евклидовым расстоянием $\rho(\mathbf{x}) = \min\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{y} \in M\}$ от точки $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ до множества M (см. [2; 3]).

В дальнейшем будем рассматривать случай компактного односвязного множества M , граница которого Γ есть плоская кривая [7], заданная параметрическим уравнением

$$\Gamma = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} = \mathbf{y}(t), t \in [0, T]\}. \quad (1.2)$$

Здесь $T > 0$, а отображение $\mathbf{y} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ является непрерывным на отрезке $[0, T]$ и дважды дифференцируемым во всех точках интервала $(0, T)$. Значения производных первого и второго порядка на концах интервала считаем равными. Считаем, что (1.2) есть замкнутая регулярная кривая без точек самопересечения, т. е. (1.2) может быть представлена как след точки, движущейся по плоскости с конечной ненулевой скоростью. Данные условия гарантирует, что подмножество $\text{int } M$ внутренних точек множества M — непустое и полностью находится по одну сторону от Γ . Данные требования к целевому множеству отличаются от рассматриваемых ранее авторами случаев, когда в качестве M выступали подграфики функций. Множества, ограниченные замкнутой параметризованной кривой, были рассмотрены авторами ранее в работе [8]. В настоящей работе изучается существенно более общий случай, в рамках которого

возможна сегментация гладких ветвей сингулярного множества решения. Важность рассматриваемого класса задач обусловлена широкой сферой применения. Так, например, при решении задач управления [10] применяются аппроксимации в виде ε -окрестностей компактных множеств, т. е. конструируются фигуры с границей, совпадающей с волновым фронтом (линией уровня функции $u(x, y)$), порожденным исходным множеством (см., например, [11]). Еще одним применением конструкций решения рассматриваемой задачи быстрого действия с целевым множеством сложной геометрии может служить формирование экстремального прицеливания в динамических задачах управления [10]. Для реализации процедуры прицеливания требуется для точек плоскости строить наборы ближайших к ним элементов из целевого множества.

Рассматриваемой задаче быстрого действия можно поставить в соответствие уравнение Айзекса — Беллмана [1]

$$\min_{\mathbf{v}: \|\mathbf{v}\| \leq 1} \langle Du(\mathbf{x}), \mathbf{v} \rangle + 1 = 0, \quad (1.3)$$

где $Du(\mathbf{x})$ есть градиент функции $u(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение векторов. Минимаксное решение [12] задачи Дирихле для уравнения (1.3) с краевым условием

$$u|_{\Gamma} = 0 \quad (1.4)$$

совпадает с функцией оптимального результата $u(x, y)$ на множестве $G = \mathbb{R}^2 \setminus M$ (см. [2]).

К задаче быстрого действия для системы (1.1) также имеет отношение изучаемое в геометрической оптике [4, с. 57] уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \quad (1.5)$$

с тем же краевым условием (1.4). Эйконал $u = u(\mathbf{x})$ в плоском случае есть функция от двух переменных $\mathbf{x} = (x, y)$, равная оптической длине пути от точки до множества M . Введенное С. Н. Кружковым [13] фундаментальное (обобщенное) решение краевой задачи (1.4), (1.5) имеет вид $u(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x}, M)$. Оно соответствует представлениям геометрической оптики о распространении лучей света в однородной среде.

В настоящей работе задача быстрого действия считается решенной, если построена функция оптимального результата и указаны ее сингулярные множества.

2. Сингулярные множества в задаче быстрого действия

В случае выпуклого множества M функция $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ выпукла на всей плоскости \mathbb{R}^2 и дифференцируема на множестве G (см. [14, с. 88]). Если же множество M не выпукло, то у нее возникают существенные особенности, множества на которых она теряет гладкость.

О п р е д е л е н и е 1. Множеством $\Omega_M(\mathbf{x})$ проекций точки \mathbf{x} на множество M назовем объединение всех точек $\mathbf{y} \in M$, ближайших в евклидовой метрике к \mathbf{x} .

О п р е д е л е н и е 2. Биссектрисой $L(M)$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$ назовем [2; 15] множество всех точек, для которых множество $\Omega_M(\mathbf{x})$ состоит из двух или более элементов:

$$L(M) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \exists \mathbf{y}_1 \in \Omega_M(\mathbf{x}), \mathbf{y}_2 \in \Omega_M(\mathbf{x}) (\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2) \}.$$

Биссектриса множества является частным случаем множеств симметрии [16], изучаемых, например, в работах В. И. Арнольда [17]. В качестве другого представителя множеств симметрии (лежащим не вонне множества M , а внутри него) можно указать так называемый “скелет” множества, активно используемый Л. М. Местецким в задачах распознавания образов [18, с. 32]. Авторы изучали ранее свойства биссектрис как сингулярных множеств в задаче быстрого действия для системы (1.1), в частности на предмет наличия у них асимптот [3] и точек прекращения [19].

Согласно классификации Р. Айзекса $L(M)$ — рассеивающая линия в задаче быстрогодействия для динамической системы (1.1): из каждой ее точки исходит более одной оптимальной траектории [1, с. 196]. Этим вызвано нарушение на $L(M)$ гладкости функции оптимального результата, характерное для сингулярных кривых. Сингулярные множества изучались многими авторами. Например в работе [20] конструировались сингулярные поверхности с целью формирования оптимальных скалярных управлений игроков в линейной дифференциальной игре. Для построения $L(M)$ перейдем к рассмотрению проекций ее точек на множество M .

О п р е д е л е н и е 3. Точка $\mathbf{x} \in L(M)$ биссектрисы $L(M)$ называется порожденной парой точек $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} \in \partial M$, если $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\} \subseteq \Omega_M(\mathbf{x})$ и $\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{y}_2$. При этом \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 называются α -симметричными точками [21].

В случае гладкой кривой Γ для построения произвольной точки биссектрисы достаточно найти порождающую ее пару точек, лежащих на Γ . Затем в случае, если нормали к Γ в этих точках не параллельны, их точка пересечения и будет точкой биссектрисы. Если же нормали параллельны, то тогда точка биссектрисы должна лежать на середине отрезка — с концами, совпадающими с порождающими точками.

Структура биссектрисы $L(M)$ существенным образом зависит от геометрии множества M . В общем случае она представляет из себя объединение гладких одномерных многообразий и нульмерных многообразий (в роли которых могут выступать точки стыка гладких ветвей, точки прекращения и реже другие виды особых точек). Поэтому построение $L(M)$ целесообразно начинать с выделения гладких участков и отыскания координат проекций их точек. Подобные процедуры для тех множеств, граница которых совпадает с графиком функции в декартовых координатах, представлены авторами в работах [21;22]. Из результатов теории особенностей гладких отображений [16;21] известно, что точки $\mathbf{x} \in L(M)$, лежащие на участках гладкости биссектрисы, имеют ровно две проекции на множество M . Будем далее обозначать их как $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_1)$ и $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_2)$. В работе [23] показано, что касательная к кривой $L(M)$ в точке $\mathbf{x} \in L(M)$ совпадает со срединным перпендикуляром к отрезку $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$. Поэтому для отыскания ее уравнения достаточно найти значения параметра t , задающего проекции.

При практической реализации построения гладких участков $L(M)$ естественно найти зависимость $t_2 = t_2(t_1)$, связывающую параметры, задающие α -симметричные точки. Однако на практике это трудно реализовать в виде численного алгоритма. Запишем координатные функции (1.2) в виде $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Точка $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ пересечения нормалей N_1 и N_2 , построенных к Γ в точках $\mathbf{y}_1 = (x(t_1), y(t_1))$ и $\mathbf{y}_2 = (x(t_2), y(t_2))$, в этих обозначениях имеет координаты

$$x^* = \frac{(x(t_1)x'(t_1) + y(t_1)y'(t_1))y'(t_2) - (x(t_2)x'(t_2) + y(t_2)y'(t_2))y'(t_1)}{x'(t_1)y'(t_2) - x'(t_2)y'(t_1)}, \quad (2.1)$$

$$y^* = \frac{-(x(t_1)x'(t_1) + y(t_1)y'(t_1))x'(t_2) + (x(t_2)x'(t_2) + y(t_2)y'(t_2))x'(t_1)}{x'(t_1)y'(t_2) - x'(t_2)y'(t_1)}. \quad (2.2)$$

Знаменатель $x'(t_1)y'(t_2) - x'(t_2)y'(t_1)$ здесь отличен от нуля, если нормали N_1 и N_2 не параллельны. При нетривиальной геометрии кривой (1.2) зависимости (2.1), (2.2) могут быть трудно выявляемыми при нахождении. Кроме того, в каждом случае надо проверять, не существует ли точка на границе множества M , лежащая ближе к точке пересечения нормалей, чем $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_1)$ и $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_2)$. С целью развития алгоритмов построения рассеивающих кривых в настоящей работе используются методы, основанные на решении дифференциальных уравнений. Они позволяют поэтапно находить параметры α -симметричных точек, отталкиваясь от ранее найденных значений. В дальнейшем по их координатам строятся точки биссектрисы по формулам (2.1), (2.2).

3. Уравнения для параметра α -симметричных точек

При построении рассеивающих линий в задаче быстрого действия лучше всего получить формулы, которые в наименьшей степени зависят от параметризации (1.2) кривой Γ . Основным свойством плоской кривой, инвариантным относительно ее описания, является ее кривизна. Для замкнутой плоской кривой значение кривизны $k = k(t)$ в точке $\mathbf{y}(t)$ определяется как

$$k(t) = \frac{\mathbf{y}''(t) \wedge \mathbf{y}'(t)}{\|\mathbf{y}'(t)\|^{3/2}}. \quad (3.1)$$

Здесь $(a_1, a_2) \wedge (b_1, b_2) = a_1 b_2 - a_2 b_1$ означает так называемое косое или псевдоскалярное произведение векторов. Полагаем без ограничения общности, что при изменении параметра t от 0 до T вектор $\mathbf{y}(t)$ делает оборот вокруг внутренних точек множества M против часовой стрелки. В этом случае величина $k = k(t)$ будет положительной, если центр кривизны кривой Γ расположен с той стороны нормали к ней, которая направлена внутрь множества M .

Теорема (о структуре гладкого участка биссектрисы). Пусть точка биссектрисы $\mathbf{x} \in L(M)$ имеет ровно две проекции $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t_1)$ и $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t_2)$ на компактное односвязное множество M , при этом $\mathbf{x} \neq (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$. Тогда для параметров t_1, t_2 , задающих координаты α -симметричных точек, справедливо дифференциальное соотношение

$$\frac{dt_2}{dt_1} = -\frac{k_1 r + 1}{k_2 r + 1} \frac{\|\mathbf{y}'(t_1)\|}{\|\mathbf{y}'(t_2)\|}, \quad (3.2)$$

где k_1 и k_2 — значения кривизны кривой Γ в точках \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 , $r = \rho(\mathbf{x}, M)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда значение параметра t совпадает с длиной дуги s кривой Γ , отложенной от точки $\mathbf{y}(0)$ против часовой стрелки. В этом случае имеет место тождество $\|\mathbf{y}'(s)\| \equiv 1$ при $s \in (0, T)$. Соответственно формула (3.2) принимает вид

$$\frac{ds_2}{ds_1} = -\frac{k_1 r + 1}{k_2 r + 1}, \quad (3.3)$$

где s_1 и s_2 — длина дуги кривой Γ , отсчитываемая от точек \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 .

Определимся с выбором системы координат, удобной для доказательства. Поскольку по условию теоремы точка биссектрисы $\mathbf{x} \in L(M)$ не совпадает с серединой отрезка $[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2]$, то нормали N_1 и N_2 к кривой Γ в точках \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 пересекаются, образуя угол, отличный от 0. Следовательно, в малых окрестностях этих точек кривая Γ может быть представлена как график дважды дифференцируемой функции. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой $\mathbf{o} = (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)/2$. При этом выбираем ось ординат так, чтобы она проходила через точки \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 . Направление оси ординат выберем так, чтобы оно было направлено от точки \mathbf{x} к \mathbf{o} . Можно записать координаты точек \mathbf{y}_1 и \mathbf{y}_2 как $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ соответственно. При этом в силу выбора осей $x_1 = -x^*, x_2 = x^*, x^* > 0$. Точка \mathbf{x} имеет координаты $(0, y^*), y^* < 0$.

Обозначим в выбранной системе координат кривую Γ как график функции $y = f(x)$ с областью определения $X = (x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon) \cup (x_2 - \varepsilon, x_2 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малая величина. Поскольку нормали N_1 и N_2 не параллельны оси абсцисс, а кривая Γ имеет второй порядок гладкости, то функция $f(x)$ на множестве X имеет производные первого и второго порядка $f'(x)$ и $f''(x)$. На рис. 1 показаны граница Γ множества M (граница обозначена пунктирной линией) и ее участки, являющиеся дугами графика функции $y = f(x)$ (обозначенные сплошной линией), а также нормали N_1 и N_2 . На рис. 1 обозначены также точки $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{x}$ и \mathbf{o} .

Рассмотрим теперь α -симметричные точки, лежащие на графике $\text{gr } f$ функции $y = f(x)$ с произвольными абсциссами x_1 и x_2 . Определим их ординаты:

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2,$$

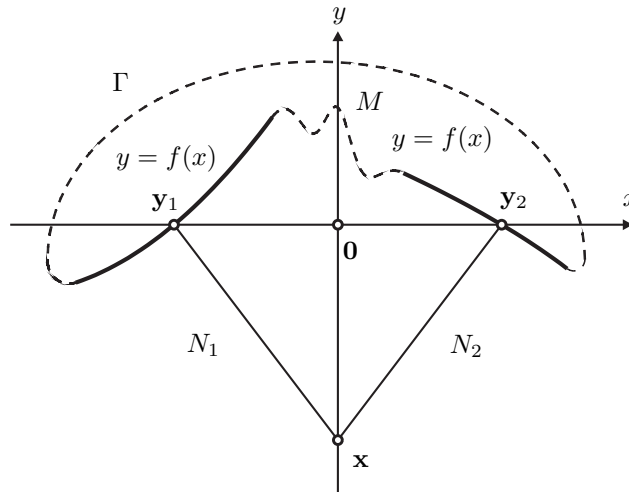


Рис. 1. Расположение точки биссектрисы и ее проекций.

и значения производных функции:

$$y'_i = f'(x_i), \quad y''_i = f''(x_i), \quad i = 1, 2.$$

При этом по построению $y'_1 = -y'_2$, $y'_1 < 0$. Условием того, что точки находятся на равном расстоянии от точки пересечения нормалей в них к $gr f$, является равенство

$$\arctg y'_1 + \arctg y'_2 - 2 \arctg \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0. \quad (3.4)$$

Обозначим правую часть равенства (3.4) как $F(x_1, x_2)$. Если $\frac{\partial F(x_1, x_2)}{\partial x_2} \neq 0$, то по теореме о существовании и дифференцируемости неявно заданной функции

$$\frac{dx_2}{dx_1} = - \frac{\partial F(x_1, x_2) / \partial x_1}{\partial F(x_1, x_2) / \partial x_2}.$$

Тогда

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\frac{y''_1}{1 + (y'_1)^2} - 2 \frac{(x_2 - x_1)y'_1 - (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{2 \frac{(x_2 - x_1)y'_2 - (y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - \frac{y''_2}{1 + (y'_2)^2}}. \quad (3.5)$$

Записывая выражение (3.5) для абсцисс точек y_1 и y_2 , учтем, что для них в силу выбора системы координат $y_1 = y_2 = 0$ и $y'_1 = -y'_2$. То есть

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{x_1 = -x^*} = - \frac{\frac{y''_1}{1 + (y'_1)^2} - 2 \frac{y'_1}{x_2 - x_1}}{\frac{y''_2}{1 + (y'_2)^2} - 2 \frac{y'_2}{x_2 - x_1}} = - \frac{\frac{y''_1}{1 + (y'_1)^2} - \frac{y'_1}{x^*}}{\frac{y''_2}{1 + (y'_1)^2} + \frac{y'_1}{x^*}}. \quad (3.6)$$

Заметим, что по построению расстояние от точки биссектрисы x до ее проекций вычисляется по формуле

$$r = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}} = \sqrt{x^{*2} + \left(\frac{x^*}{y'_1}\right)^2} = x^* \frac{\sqrt{y_1'^2 + 1}}{-y'_1}. \quad (3.7)$$

Кривизна графика функции

$$k_i = \frac{y''_i}{(1 + y_i'^2)^{3/2}}, \quad i = 1, 2. \quad (3.8)$$

Знак кривизны графика функции, определенной по формуле (3.8), совпадает со знаком (3.1) для той же точки. Он положительный, если кривая $gr f$ локально выпукла вниз, а значит, она выпукла в ту сторону, в которую направлена внешняя нормаль к границе множества M . И знак отрицательный, если кривая $gr f$ локально выпукла вверх, т. е. в противоположном случае.

Преобразовав выражение (3.6) и подставив в него значения (3.7) и (3.8), получаем

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{x_1=-x^*} = -\frac{\frac{y_1''}{(1+(y_1')^2)^{3/2}} - \frac{y_1'}{(1+(y_1')^2)^{1/2}x^*}}{\frac{y_2''}{(1+(y_1')^2)^{3/2}} + \frac{y_1'}{(1+(y_1')^2)^{1/2}x^*}} = -\frac{k_1 + 1/r}{k_2 + 1/r} = -\frac{k_1 r + 1}{k_2 r + 1}. \quad (3.9)$$

Производная длины дуги графика функции $y = f(x)$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

Поэтому формула (3.9) позволяет выявить дифференциальную зависимость

$$\frac{ds_2}{ds_1} = -\frac{k_1 r + 1}{k_2 r + 1} \sqrt{\frac{1 + (y_2')^2}{1 + (y_1')^2}}. \quad (3.10)$$

Поскольку в силу выбора системы координат $|y_1'| = |y_2'|$, то значение выражения (3.10) совпадает с (3.3).

В свою очередь при произвольном выборе гладкой параметризации кривой Γ длина дуги кривой s и значение t связаны формулой

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{y}'(t)\|.$$

Поэтому

$$\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{ds_2}{ds_1} \frac{\|\mathbf{y}'_1(t)\|}{\|\mathbf{y}'_2(t)\|}. \quad (3.11)$$

Подставив в формулу (3.11) значение производной (3.3), получаем выражение (3.2). \square

З а м е ч а н и е 1. Знаменатель выражения (3.2) может обращаться в нуль, если произведение кривизны k кривой Γ в точке \mathbf{y}_1 на r равно -1 . Это означает, что \mathbf{x} совпадает с центром кривизны [9, с. 125] кривой Γ в точке \mathbf{y}_1 , и возможно только в том случае, если \mathbf{y}_1 есть точка локального максимума кривизны кривой Γ (подробнее см. [21]). Следовательно, для регулярной замкнутой кривой Γ количество таких точек не более, чем конечно.

З а м е ч а н и е 2. В общем случае биссектриса состоит не только из гладких ветвей, но и из нульмерных многообразий: точек их стыка (точек бифуркации). Множество проекций таких точек состоит не менее, чем из трех элементов [16]. При практической реализации алгоритмов выделение нульмерных многообразий является первоочередной задачей, поскольку, отталкиваясь от них, легче строить гладкие одномерные ветви.

З а м е ч а н и е 3. Формула (3.3) выглядит гораздо проще формулы (3.2), поскольку в ней задействованы исключительно геометрические инварианты: расстояние от точки биссектрисы до множества M и кривизна кривой Γ в ее проекциях. Однако при численной реализации ее трудно применять, поскольку она требует параметризации границы Γ величиной, равной длине ее дуги, отсчитываемой от заданной точки.

Важную роль при построении сингулярного множества M играют некоторые характеристические точки.

О п р е д е л е н и е 4. Будем называть точку $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0)$ псевдовершиной [21] множества M , если существует последовательность $\{(\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n)\}_{n=1}^{\infty}$ пар α -симметричных точек, для которой имеет место предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{y}}_n, \tilde{\mathbf{y}}_n) = (\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_0).$$

Связь между координатами проекций точек биссектрисы в окрестности псевдовершины изучалась в работах [19; 21]. В частности, показано, что для параметров $t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$ в окрестности точки t_0 в случае дважды гладкой кривой Γ выполняется предельное соотношение (см. [8])

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{t_2(t_1) - t_0}{t_1 - t_0} = -1. \quad (3.12)$$

Равенство (3.12) позволяет задать для уравнения (3.2) начальное условие $t_2(t_0) = t_0$, доопределив значение производной при $t_1 = t_0, t_2 = t_0$ как $\frac{dt_2}{dt_1} = -1$.

4. Пример построения функции оптимального результата

Пусть в задаче быстрогодействия для динамической системы (1.1) целевое множество M не выпукло и ограничено кривой Γ , заданной уравнением

$$\begin{cases} x = (\cos^2(2t) + 0.5 \sin^4(2t)) \cos t, \\ y = (\cos^2(2t) + 0.5 \sin^4(2t)) \sin t, \end{cases} \quad (4.1)$$

в котором параметр t принимает значения из отрезка $[0, T] = [0, 2\pi]$. Требуется построить график функции оптимального результата $u(x, y)$ и выделить сингулярное множество $L(M)$.

Заметим, что кривую Γ можно записать в полярных координатах, переобозначив t как угловую координату φ , от которой зависит радиус r^* :

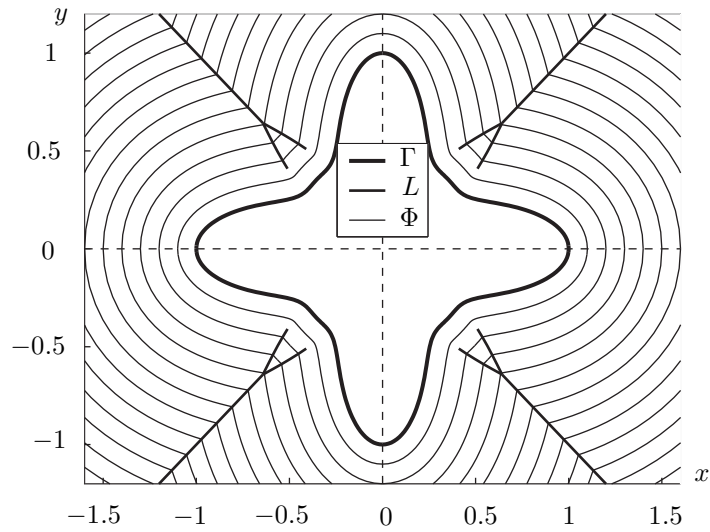
$$r^*(\varphi) = \cos^2(2\varphi) + 0.5 \sin^4(2\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Для радиуса r имеет место оценка

$$r^*(\varphi) = 1 - \sin^2(2\varphi) + 0.5 \sin^4(2\varphi) = 0.5(\sin^4(2\varphi) - 2\sin^2(2\varphi) + 2) = 0.5(\sin^2(2\varphi) - 1)^2 + 0.5 \geq 0.5.$$

При этом функция $r^*(\varphi)$ имеет период, равный $T^* = \pi/2$ (а значит, и число $T = 4T^* = 2\pi$ кратно ее периоду). Следовательно, кривая (4.1) ограничивает замкнутую фигуру, содержащую начало координат, и является гладкой.

Аппроксимация решения задачи быстрогодействия была выполнена с помощью разработанного в пакете MATLAB [24] вычислительного комплекса. Ранее он использовался для построения рассеивающих линий и функции оптимального результата в задачах, в которых целевым множеством являлся подграфик кусочно-гладкой функции, заданной на связном множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ [2; 19; 21]. Комплекс был переработан для случая множества с параметрически заданной границей. Данные фигуры часто встречаются при решении различных динамических задач, в которых обычно целевым множеством и связанными с ними областями достижимости и управляемости являются компакты. Ключевым элементом отыскания значений функции $u(x, y)$ и построения ее линий уровня стало конструирование множества $L(M)$, состоящего из четырех компонент связности. Поскольку множество M симметрично относительно осей координат, то достаточно построить одну из компонент $L(M)$ (например расположенную в первом квадранте), а затем отразить ее симметрично относительно оси абсцисс, оси ординат и начала координат. Теорема о структуре биссектрисы дает возможность конструировать ее гладкие ветви, решая дифференциальное уравнение (3.2) с начальными условиями, определяемыми крайними точками ветвей. В данном примере для отыскания этих точек найдены псевдовершины множества M . В первом квадранте к ним относятся $\mathbf{y}_1 \approx (0.426, 0.283)$

Рис. 2. Кривая Γ , биссектриса $L(M)$ и волновые фронты Φ .

и $\mathbf{y}_2 \approx (0.283, 0.426)$. Центры кривизны кривой Γ в этих псевдовершинах являются точками прекращения $\hat{\mathbf{x}}_1 \approx (0.51, 0.41)$ и $\hat{\mathbf{x}}_2 \approx (0.41, 0.51)$ для двух ветвей сингулярного множества $L(M)$: L_1 и L_2 (симметричных относительно прямой $y = x$). Заметим, что, строго говоря, точки прекращения $\hat{\mathbf{x}}_1$ и $\hat{\mathbf{x}}_2$ входят не во множество $L(M)$, а лишь в его замыкание. Данные ветви склеиваются в точке $\mathbf{x}_0 \approx (0.642, 0.642)$, являющейся точкой бифуркации для $L(M)$. Из нее начинается третья ветвь L_3 , представляющая из себя луч на прямой $y = x$.

Кривая Γ , линии уровня Φ функции оптимального результата $u(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, M)$ (волновые фронты) с шагом $h_\rho = 0.1$ и сингулярное множество L показаны на рис. 2. Волновые фронты терпят изломы в точках пересечения с биссектрисой $L(M)$. В точках гладкости оптимальная траектория движения системы (1.1) есть отрезок, направленный по нормали к Φ в сторону множества M . В точках \mathbf{x} рассеивающей линии оптимальных траекторий минимум две: это отрезки, лежащие на предельных положениях нормалей к Φ по обе стороны от точки \mathbf{x} . В точке бифуркации биссектрисы оптимальных траекторий три. Например, в \mathbf{x}_0 это отрезки, соединяющие \mathbf{x}_0 с ее проекциями: $\mathbf{y}_1^* \approx (0.24, 0.573)$, $\mathbf{y}_2^* \approx (0.573, 0.24)$, $\mathbf{y}_3^* \approx (0.354, 0.354)$. Несмотря на простую динамику системы, геометрия сингулярного множества являются нетривиальной, каждая из ее компонент связности, в свою очередь, имеет негладкие особенности.

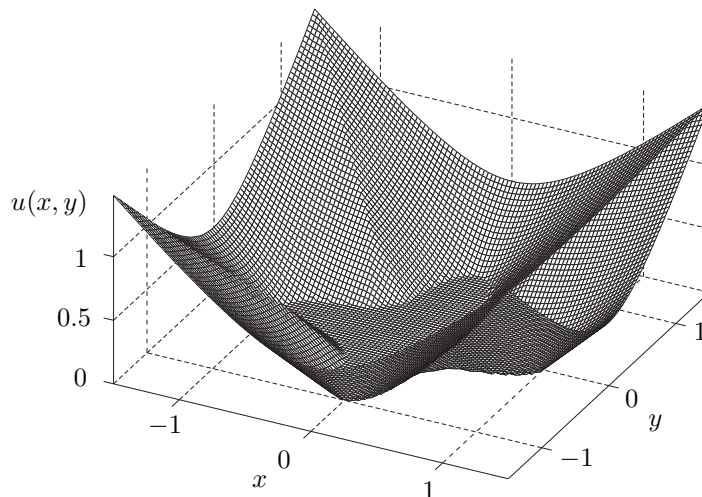
Рис. 3. График аппроксимации функции оптимального результата $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$.

График $\text{gr } u$ функции $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$ в виде аппроксимации на прямоугольной сетке с размером клетки 0.03×0.03 с областью определения $\{(x, y): x \in [-1.5, 1.5], y \in [-1.5, 1.5]\}$ представлен на рис. 3. Область негладкости функции $u(x, y)$ на множестве $G = \mathbb{R}^2 \setminus M$ совпадает с сингулярным множеством $L(M)$. Кроме того, имеется излом графика $\text{gr } u$ на границе Γ множества M . Отметим, что точное решение исследуемой задачи, рассматриваемое на $\mathbb{R}^2 \setminus M$, является супердифференцируемой функцией [25, с. 243].

Построенные в примере линии уровня функции $u(\mathbf{x}) = u(x, y)$ являются подмножествами параллелей [26, с. 49] границы Γ целевого множества M , геометрического места точек, отложенных на нормальных к Γ на равном расстоянии от границы. При этом волновые фронты Φ не включают в себя те подмножества эквидистант, которые образуют каустики [17, с. 66]. Данные конструкции могут использоваться в качестве вспомогательных элементов при решении более сложных задач быстрого действия, в которых вектограмма скоростей также является кругом с центром в начале координат, но его радиус зависит от координаты текущей точки. В этих задачах вместо нормалей к границе множества строятся линии, построенные методами геометрической оптики как путь светового луча в неоднородной среде [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры / пер. с англ. В. И. Аркина, Э. Н. Симаковой; ред. М. И. Зеликин. М.: Мир, 1967. 479 с.
2. **Лебедев П.Д., Успенский А.А., Ушаков В.Н.** Построение минимаксного решения уравнений типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
3. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстрого действия // Прикл. математика и информатика: тр. фак. ВМК Моск. ун-та. 2007. № 27. С. 65–79.
4. **Слюсарев Г.Г.** Геометрическая оптика. М.: Изд-во АН СССР, 1946. 332 с.
5. **Казаков А.Л., Лебедев П.Д.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок для компактных множеств на плоскости // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 307–317.
6. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
7. **Савелов А.А.** Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: Либроком, 2010. 294 с.
8. **Успенский А.А.** Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Тр. Ин-та математики и механики, 2015. Т. 21, № 1. С. 250–263.
9. **Рашевский П.К.** Курс дифференциальной геометрии. М.: Едиториал: УРСС, 2003. 432 с.
10. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи динамики. I // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1969. № 5. С. 3–12.
11. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Малев А.Г.** Оценка дефекта стабильности множества позиционного поглощения, подвергнутого дискриминантным преобразованиям // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 209–224.
12. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютерных технологий. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
13. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала // Мат. сб. 1974. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
14. **Пшеничный К.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
15. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Алгоритмы построения сингулярных множеств для одного класса задач быстрого действия // Вестник Удм. ун-та. Сер. Математика, механика, компьютерные науки. Ижевск, 2010. Вып. 3. С. 30–41.
16. **Sedykh V.D.** On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in \mathbb{R}^k // Adv. Stud. Pure Math.: Singularity Theory and Its Applications. 2006. Vol 43. P. 401–419.
17. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996. 334 с.
18. **Местецкий Л.М.** Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. М.: Физматлит, 2009. 288 с.

19. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Построение функции оптимального результата в задаче быстрого действия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
20. **Пацко В.С.** Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания // Прикл. математика и механика. 2004. Т. 68. № 4. С. 653–666.
21. **Лебедев П.Д., Успенский А.А.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. Математика. 2008. № 3 (550). С. 27–37.
22. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
23. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия сингулярных кривых для одного класса задач быстрого действия // Вестн. С.-Петербург. ун-та. 2013. Сер. 10, вып. 3. С. 157–167.
24. **Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М.** MATLAB 7: программирование, численные методы. СПб.: БХВ–Петербург, 2005. 752 с.
25. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
26. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности. Геометрическое введение в теорию особенностей / пер. с англ. И. Г. Щербак; ред. В. И. Арнольд М.: Мир, 1988. 262 с.

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: pleb@yandex.ru

Поступила 4.03.2016

Успенский Александр Александрович

канд. физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: uspen@imm.uran.ru

УДК 517.977

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГАРАНТИРОВАННОГО НАВЕДЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ¹

В. И. Максимов

Обсуждается задача гарантированного наведения линейной управляемой системы к фиксированному моменту времени в предположении, что на систему действует неизвестное возмущение. Рассматривается случай, когда измеряется часть фазовых координат, а множество неизвестных начальных состояний состоит из конечного числа элементов. Указывается алгоритм решения задачи, который основан на комбинации пакетного подхода, теории динамического обращения и принципа экстремального сдвига.

Ключевые слова: задача наведения, линейная система.

V. I. Maksimov. On a guaranteed guidance problem under incomplete information.

We discuss the problem of guaranteed guidance of a linear control system by a fixed time under the assumption that the system is subject to an unknown disturbance. We consider the case when a part of state coordinates are measured and the set of unknown initial states is finite. We specify a solution algorithm based on the combination of the package approach, the theory of dynamic inversion, and the extremal shift method.

Keywords: guidance problem, linear system.

MSC: 49J35, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-199-210

1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu - Cv + f(t). \quad (1.1)$$

Здесь $t \in T = [t_0, \vartheta]$ — переменная времени, $t_0 < \vartheta < \infty$; $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент t ; $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление в этот момент времени; $v(t) \in \mathbb{R}^q$ — возмущение; $f(\cdot)$ — функция, заданная и непрерывная на T , принимающая значения в пространстве \mathbb{R}^n ; A, B и C — постоянные матрицы размерностей $n \times n$, $n \times m$ и $n \times q$ соответственно. Управляющей стороне известно априори, что истинное начальное состояние системы \hat{x}_0 содержится в заданном конечном множестве $X_0 \subset \mathbb{R}^n$ — множестве *допустимых начальных состояний*. Само истинное начальное состояние системы управляющей стороне неизвестно.

Содержательно рассматриваемая в настоящей работе задача может быть сформулирована следующим образом. На систему (1.1) действуют управление $u = u(t) \in P$, формируемое по ходу развития процесса, и неизвестное возмущение $v = v(t) \in Q$. Здесь $P \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^q$ — ограниченные замкнутые множества — “ресурсы” управления и возмущения соответственно. На промежутке времени T выбрана равномерная сетка $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = t_0$, $\tau_m = \vartheta$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$ с шагом δ . Заданы непустое замкнутое *целевое* множество $M_1 \subset \mathbb{R}^n$, а также непустое множество $N_1 \subset \mathbb{R}^n$ (множество фазовых ограничений). Перед управляющей стороной стоит задача *гарантированного позиционного наведения* к моменту ϑ : привести состояние $x(t)$ системы к моменту $t = \vartheta$ в малую окрестность целевого множества M_1 , оставаясь внутри множества N_1 .

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-01-00539).

В процессе движения управляющая сторона формирует свое управление позиционно, наблюдая (с ошибкой) текущий сигнал $y(t) = Dx(t)$ о состоянии $x(t)$ системы (1.1). В соответствии с формализацией, принятой в теории управления по принципу обратной связи [1–3], позиционная стратегия управления позволяет управляющей стороне корректировать значения управления $u(\cdot)$ в дискретные моменты времени $\tau_0 = t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m = \vartheta$. В каждый момент τ_i ($i = 0, \dots, m-1$) значения управления на полуинтервале $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ определяются исходя из предыстории наблюдения $y(t)$ на отрезке $[\tau_0, \tau_i]$ и предыстории $t \rightarrow u(t)$ управления на полуинтервале $[\tau_0, \tau_i]$ (при $i = 0$ предыстория управления отсутствует).

Таким образом, задача гарантированного позиционного наведения состоит в том, чтобы по произвольному наперед заданному $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления, что для любого допустимого начального состояния $x_0 \in X_0$ и любого возмущения $v(\cdot) \in Q(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^q) : v(t) \in Q \text{ при п.в. } t \in T\}$ движение $x(\cdot)$ системы (1.1), исходящее из этого состояния под действием выбранной позиционной стратегии, к моменту времени $t = \vartheta$ приходит в ε -окрестность целевого множества M_1 , оставаясь до этого момента внутри множества N_1 .

Всюду ниже считаем, что целевое множество имеет вид $M_1 = \mathbb{R}^{n_1} \times M$, $n_1 < n$, где M — некоторое фиксированное множество в пространстве \mathbb{R}^{n-n_1} . Полагаем также, что система (1.1) имеет структуру

$$\dot{z}(t) = A_1 z(t) + A_0 p(t) + C_0 v(t) + f_1(t), \quad (1.2)$$

$$\dot{p}(t) = A_3 p(t) + B_1 u(t) - C_1 v(t) + f_2(t). \quad (1.3)$$

Следовательно, $x = \{z, p\}$, $z \in \mathbb{R}^{n_1}$, $p \in \mathbb{R}^{n-n_1}$,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_0 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -C_0 \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}.$$

Пусть матрица D имеет размерность $N \times n$, а множество начальных состояний $X_0 = \{z_0, P_0\}$, где $P_0 \subset \mathbb{R}^{n-n_1}$ — конечное множество, z_0 — заданный вектор, известный лицу, формирующему управление. В таком случае мы считаем, что известно начальное состояние подсистемы (1.2), но неизвестно начальное состояние подсистемы (1.3). Результаты измерений величин $y(\tau_i)$ в моменты τ_i есть векторы $\xi_i^h \in \mathbb{R}^N$, удовлетворяющие неравенствам

$$|\xi_i^h - y(\tau_i)|_N \leq h. \quad (1.4)$$

Здесь $h \in (0, 1)$ — величина погрешности измерения, символ $|\cdot|_N$ означает евклидову норму в пространстве \mathbb{R}^N .

Ниже полагаем $z = \{z_1, z_2\}$, $z_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $z_2 \in \mathbb{R}^{n_1-n_2}$, $n_2 < n_1$, $N = q + n_1 - n_2$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} A^{(0)} & 0 \\ 0 & A^{(1)} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \end{pmatrix}, \quad C_0 = \begin{pmatrix} C^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где матрицы $A^{(0)}$, $A^{(1)}$, A_2 , $C^{(0)}$, D_1 , E (единичная матрица) и D имеют следующие размерности: $n_2 \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times (n_1 - n_2)$, $(n_1 - n_2) \times (n - n_1)$, $n_2 \times q$, $q \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times (n_1 - n_2)$ и $N \times n$. Таким образом, подсистема (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= A^{(0)} z_1(t) + C^{(0)} v(t) + f_{11}(t), \\ \dot{z}_2(t) &= A^{(1)} z_2(t) + A_2 p(t) + f_{12}(t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $f_1(t) = \{f_{11}(t), f_{12}(t)\}$, $z_0 = \{z_{10}, z_{20}\}$, $z_1(t_0) = z_{10}$, $z_2(t_0) = z_{20}$. Кроме того, $\xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_{2i}^h\} \in \mathbb{R}^N$, $\xi_{1i}^h \in \mathbb{R}^q$, $\xi_{2i}^h \in \mathbb{R}^{n_1-n_2}$. При этом неравенство (1.4) принимает вид

$$\left(|\xi_{1i}^h - D_1 z_1(\tau_i)|_q^2 + |\xi_{2i}^h - z_2(\tau_i)|_{n_1-n_2}^2 \right)^{1/2} \leq h. \quad (1.6)$$

В дальнейшем считаем, что выполнено следующее условие.

У с л о в и е 1. Существует строго выпуклое множество $W \subset \mathbb{R}^{n-n_1}$ такое, что $B_1P = W + C_1Q$.

Задачи подобного типа исследовались многими авторами с помощью различных подходов [1–5]. В настоящей работе указывается алгоритм решения описанной задачи, который основан на методе динамического обращения [5–7], пакетном подходе [8–11] и известном в теории позиционного управления методе стабильных дорожек [2]. В связи с неполнотой информации (а именно с невозможностью измерения в моменты τ_i всего фазового состояния системы $x(\tau_i)$), мы будем строить оценку $p(\cdot)$ на основе результатов измерения величин $y(\tau_i) = Dx(\tau_i)$. Эта оценка будет использоваться при формировании управления u по закону обратной связи.

Заметим, что основы теории позиционного управления в формализации, восходящей к Н. Н. Красовскому, были заложены в [1–4]. Однако в этих работах обсуждались проблемы гарантированного управления в случаях измерения с ошибкой всего фазового состояния (т. е. при “полной” информации о фазовых состояниях). В данной работе исследуется задача о приведении фазовой траектории системы на заданное множество, называемая в теории позиционных дифференциальных игр задачей наведения, при измерении “части” координат фазового состояния. Другие алгоритмы решения задач игрового управления при неполной информации о фазовом состоянии системы без привлечения пакетного подхода в формализации екатеринбургской школы приведены в работах [12–14].

2. Вспомогательные результаты

Прежде чем перейти к описанию алгоритма решения рассматриваемой задачи, сначала приведем некоторые результаты из работ [10; 11], сформулировав их в удобной для нас форме. Рассмотрим управляемую систему вида

$$\dot{p}(t) = A_3p(t) + w(t) + f_2(t), \quad t \in T. \quad (2.1)$$

Под *программным управлением (программой)* (для системы (2.1)) понимается всякая измеримая по Лебегу функция $w(\cdot) : T \rightarrow W$. Введем фундаментальную матрицу $F(\cdot, \cdot)$ однородной системы $\dot{p}(t) = A_3p(t)$. Для каждого $p_0 \in P_0$ обозначим

$$g_{p_0}(t) = A_2F(t, t_0)p_0, \quad t \in T;$$

функция $g_{p_0}(\cdot)$ называется *однородным сигналом*, соответствующим допустимому начальному состоянию p_0 . Однородный сигнал, соответствующий какому-либо допустимому начальному состоянию, называется просто *однородным сигналом*. Множество всех допустимых начальных состояний p_0 , соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in [t_0, \vartheta]$, обозначаем символом $P_0(\tau|g(\cdot))$. Таким образом,

$$P_0(\tau|g(\cdot)) = \{p_0 \in P_0 : g(\cdot)|_{[t_0, \tau]} = g_{p_0}(\cdot)|_{[t_0, \tau]}\}.$$

Здесь и далее $g(\cdot)|_{[t_0, \tau]}$, где $\tau \in [t_0, \vartheta]$, — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[\tau_0, \tau]$. Семейство $(w_{p_0}(\cdot))_{p_0 \in P_0}$ программ называем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет следующему *условию неупреждаемости*: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (t_0, \vartheta]$ и допустимых начальных состояний $p'_0, p''_0 \in P_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [\tau_0, \tau]$ выполняется равенство $w_{p'_0}(t) = w_{p''_0}(t)$. Пакет $(w_{p_0}(\cdot))_{p_0 \in P_0}$ программ называем *наводящим* (для системы (2.1)), если существует число $t_* \leq \vartheta$ такое, что для любого $p_0 \in P_0$ имеет место включение $p(\vartheta; t_*, p_0, w_{p_0}(\cdot)) \in M$. Если существует наводящий пакет программ, говорят, что *разрешима задача пакетного наведения*.

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ вводим множество $T(g(\cdot)) = \{t_j(g(\cdot)) : j = 1, \dots, k_{g(\cdot)}\}$ всех моментов его расслоения и полагаем

$T_* = \cup_{g(\cdot) \in G} T(g(\cdot))$. Ввиду конечности множества G для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k_{g(\cdot)} \geq 1$ такой, что $t_{k_{g(\cdot)}}(g(\cdot)) = \vartheta$. Тогда

$$T_* = \{t_0, \dots, t_K\},$$

где $t_j < t_{j+1}$ ($j = 0, \dots, K-1$), $t_K = t_*$. Для каждого $k = 1, \dots, K$ вводим множество

$$\mathcal{P}_0(t_k) = \{P_0(t_k|g(\cdot)): g(\cdot) \in G\}.$$

Элементы $P_{0,k}$ множества $\mathcal{P}_0(t_k)$ называются *кластерами начальных состояний* в момент t_k . Для каждого $k = 0, \dots, K$ кластеры начальных состояний в момент t_k образуют разбиение множества P_0 всех допустимых начальных состояний, т. е. $P_0 = \cup_{P_{0,k} \in \mathcal{P}_0(t_k)} P_{0,k}$, $P'_{0,k} \cap P''_{0,k} = \emptyset$ ($P'_{0,k}, P''_{0,k} \in \mathcal{P}_0(t_k)$, $P'_{0,k} \neq P''_{0,k}$).

Определим *расширенное пространство* \mathcal{R}_{n-n_1} как конечномерное гильбертово пространство всех семейств $l = (l_{p_0})_{p_0 \in P_0}$ векторов l_{p_0} из \mathbb{R}^{n-n_1} со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{R}_{n-n_1}}$ вида $\langle l', l'' \rangle_{\mathcal{R}_{n-n_1}} = \sum_{p_0 \in P_0} \langle l'_{p_0}, l''_{p_0} \rangle$, $l' = (l'_{p_0})_{p_0 \in P_0} \in \mathcal{R}_{n-n_1}$, $l'' = (l''_{p_0})_{p_0 \in P_0} \in \mathcal{R}_{n-n_1}$. Здесь и далее $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующем конечномерном евклидовом пространстве.

В дальнейшем нам понадобится условие

$$\sup_{(l_{p_0})_{p_0 \in P_0} \in \mathcal{L}} \gamma_1((l_{p_0})_{p_0 \in P_0}) \leq 0. \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \gamma_1((l_{p_0})_{p_0 \in P_0}) &= \left(l_{p_0}, F(t_*, t_0)p_0 + \int_{t_0}^{t_*} F(t_*, \tau) f_2(\tau) d\tau \right)_{\mathbb{R}^{n-n_1}} \\ &+ \sum_{k=1}^K \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sum_{P_{0,k} \in \mathcal{P}(t_k)} \varrho^- \left(D(\tau) \sum_{p_0 \in P_{0,k}} l_{p_0} | W \right) d\tau - \sum_{p_0 \in P_0} \varrho^+ (l_{p_0} | M), \quad D(\tau) = B_2' F'(t_*, \tau), \end{aligned}$$

$\varrho^-(l|W) = \inf\{(l, x): x \in W\}$, $\varrho^+(l|M) = \sup\{(l, x): x \in M\}$ — нижняя и верхняя опорные функции, штрих означает транспонирование, \mathcal{L} — некоторое множество в расширенном фазовом пространстве \mathcal{R}_{n-n_1} , свойства которого приведены в [10]. Как установлено в [11], если выполнено условие (2.2) и нулевой пакет программ $t \rightarrow (w_{p_0}^0(t))_{p_0 \in P_0}$, $w_{p_0}^0(t) = 0$ при п.в. $t \in T$ для всех $p_0 \in P_0$, не является наводящим для системы (2.1), то существует число $a \in (0, 1]$ такое, что

$$\max_{(l_{p_0})_{p_0 \in P_0} \in \mathcal{L}} \gamma_a((l_{p_0})_{p_0 \in P_0}) = 0. \quad (2.3)$$

Всем начальным состояниям системы (2.1) из одного кластера $P_{0,k+1}$ на $[t_k, t_{k+1})$ отвечает одно и то же управление из сужения пакета программ множества управлений $(w_{p_0}(\cdot))_{p_0 \in P_0}$ на полуинтервал $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, которое будем обозначать $w_{P_{0,k}}(\cdot)$.

Теорема 1 [11, теорема 2]. Пусть множество W содержит в себе нулевой элемент. Пусть также выполнено условие (2.2), $(l_{p_0}^*)_{p_0 \in P_0} \in \mathcal{L}$ является вектором, на котором достигается максимум в выражении (2.3), причем вектор $D(\tau) \sum_{p_0 \in P_{0,k}} l_{p_0}^*$ отличен от нуля при всех $\tau \in [t_0, t_*]$. Пусть нулевой пакет программ не является наводящим для системы (2.1), а пакет программ $t \rightarrow (w_{p_0}(t))_{p_0 \in P_0}$ таков, что $w_{p_0}(t) \in aW$ (для всех $p_0 \in P_0$) и для произвольного $k = 1, \dots, K$ и произвольного кластера $P_{0,k} \in \mathcal{P}(t_k)$ выполняется равенство

$$\left(D(\tau) \sum_{p_0 \in P_{0,k}} l_{p_0}^*, w_{P_{0,k}}(\tau) \right) = \varrho^- \left(D(\tau) \sum_{p_0 \in P_{0,k}} l_{p_0}^* | aW \right), \quad \tau \in [t_{k-1}, t_k). \quad (2.4)$$

Тогда пакет программ $t \rightarrow (w_{p_0}(t))_{p_0 \in P_0}$ является наводящим для системы (2.1).

3. Алгоритм решения

Пусть взято семейство разбиений отрезка $[t_0, t_*]$: $\Delta_h = \{\tau_{i,h}\}_{i=0}^{m_h}$, $\tau_{i+1,h} = \tau_{i,h} + \delta(h)$, $\tau_{0,h} = t_0$, $\tau_{m_h,h} = \vartheta$, $h \in (0, 1)$, а также функция $\alpha = \alpha(h): (0, 1) \rightarrow (0, 1)$. Фиксируем числа $\gamma \in (0, \min\{t_{j+1} - t_j: j = 0, \dots, K-1\})$, $h^* \in (0, 1)$ и $\beta = \beta(\gamma) \in (0, 1)$ такие, что $\delta^\beta(h) \leq \gamma$ при всех $h \in (0, h^*)$. Символом $\tau_{i(j),h}$ обозначим максимальный момент разбиения Δ_h , не превосходящий t_j . При этом считаем $\tau_{i(0),h} = \min\{\tau_{i,h}: t_0 + \delta^\beta(h) \leq \tau_{i,h}\}$. Пусть

$$\tau_{i(j,\gamma),h} = \min\{\tau_{i,h}: t_j + \gamma \leq \tau_{i,h}\}, \quad (3.1)$$

$\hat{x}_0 = \{z_0, \hat{p}_0\}$ ($\hat{p}_0 \in P_0$) — истинное (неизвестное) начальное состояние системы (1.1). Для краткости ниже обозначим $\tau_{i,j,\gamma} = \tau_{i(j,\gamma),h}$, $m = m_h$, $\tau_i = \tau_{i,h}$. Наряду с системой (1.1) введем четыре вспомогательные системы. Первая описывается векторным уравнением

$$\dot{w}^h(t) = A^{(1)}\xi_{2i}^h + \tilde{v}^h(t) + f_{12}(\tau_i) \quad \text{при } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}), \quad i \in [0 : m-1], \quad (3.2)$$

с начальным состоянием $w^h(t_0) = z_{20}$. Вторая система имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{w}_0^h(t) &= D_1 C^{(0)} v^h(t), \quad t \in [\tau_1, t_*], \\ \dot{w}_1^h(t) &= A^{(0)} w_1^h(t) + C^{(0)} v^h(t), \\ \dot{w}_2^h(t) &= w_1^h(t), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$w_j^h(t) = 0$ при $t \in [t_0, \tau_1]$, $j = 0, 1, 2$. Третья система описывается векторным уравнением

$$\dot{g}_1(t) = A_3 g_1(t) + B_1 u^h(t) - C_1 v^h(t) + f_2(t), \quad t \in [t_0, t_*], \quad (3.4)$$

а четвертая — уравнением

$$\dot{g}_2(t) = A_3 g_2(t) + B_1 \tilde{u}^h(t) - C_1 v^h(t) + f_2(t), \quad t \in [t_0, t_*], \quad (3.5)$$

с начальными состояниями $g_1(t_0) = g_2(t_0) = 0$.

До начала работы алгоритма фиксируем $h \in (0, h^*)$. Вместе с h фиксируем разбиение Δ_h и число $\alpha = \alpha(h)$. Работу алгоритма разобьем на $m-1$ однотипных шагов. На промежутке $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0, \dots, K-1$, выполняются следующие действия. При $t \in \delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [t_j, t_{j+1})$ полагается

$$\tilde{v}_i^h = -\frac{1}{\alpha} [w^h(\tau_i) - \xi_{2i}^h], \quad (3.6)$$

$$u_i^h \in \{u_i \in P: (\eta_i^h - \psi_i^h, B_1 u_i) \leq \min\{(\eta_i^h - \psi_i^h, B_1 u): u \in P\} + h\}, \quad (3.7)$$

$$v_i^h = 0 \quad \text{при } i = 0,$$

$$v_i^h = \begin{cases} (D_1 C^{(0)})^{-1} \left| \delta^{-1} (\xi_{1i}^h - \xi_{1i-1}^h) - D_1 A^{(0)} g_0(\tau_i) - D_1 \delta^{-1} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f_{11}(t) dt \right. \\ \left. - D_1 A^{(0)} w_1^h(\tau_i) \right|_q \frac{s_i}{|s_i|_q}, & \text{если } |s_i|_q \neq 0, \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (3.8)$$

при $i \in [1 : m-1]$. Здесь $v_i^h \in \mathbb{R}^q$, $g_0(\cdot) = g_0(\cdot; t_0, z_{10})$ — решение системы линейных уравнений

$$\dot{g}_0(t) = A^{(0)} g_0(t) + f_{11}(t), \quad t \in [t_0, t_*], \quad g_0(t_0) = z_{10},$$

$\delta = \delta(h)$, $\tau_i = \tau_{i,h}$, вектор $s_i \in \mathbb{R}^q$ определяется соотношением

$$s_i = \xi_{1i-1}^h - \xi_{10}^h - \int_{t_0}^{\tau_{i-1}} D_1 [f_{11}(\tau) + A^{(0)} g_1(\tau)] d\tau - w_0^h(\tau_i) - D_1 A^{(0)} w_2^h(\tau_i),$$

$\psi_i^h \in \mathbb{R}^{n-n_1}$ и $\eta_i^h \in \mathbb{R}^{n-n_1}$ — результаты неточных измерений состояний $g_2(\tau_i)$ и $g_1(\tau_i)$:

$$|\psi_i^h - g_2(\tau_i)|_{n-n_1} \leq h, \quad |\eta_i^h - g_1(\tau_i)|_{n-n_1} \leq h. \quad (3.9)$$

При этих же t на вход системы (1.1) подается управление

$$u = u^h(t) = u_i^h \quad (3.10)$$

вида (3.7), на вход системы (3.2) — управление вида (3.6), т. е.

$$\tilde{v}^h(t) = \tilde{v}_i^h, \quad (3.11)$$

на вход систем (3.3) и (3.4) — управления $v^h(t)$ вида (3.8), т. е.

$$v^h(t) = v_i^h. \quad (3.12)$$

Причем на вход системы (3.4) подается также управление $u^h(t)$. В момент $\tau_{i,j,\gamma}$ находится вектор

$$\phi(\tau_{i,j,\gamma} + \delta) = \tilde{v}^h(\tau_{i,j,\gamma} + \delta) - A_2 \int_{t_0}^{\tau_{i,j,\gamma} + \delta} F(\tau_{i,j,\gamma} + \delta, \tau) [B_1 u^h(\tau) - C_1 v^h(\tau) + f_2(\tau)] d\tau \in \mathbb{R}^{n_1-n_2}.$$

Среди значений однородных сигналов $g_{p_0}(\tau_{i,j,\gamma})$ ($p_0 \in P_0$) определяется вектор

$$g_{p_0,i,j} = \arg \min \{ |g_{p_0}(\tau_{i,j,\gamma}) - \varphi(\tau_{i,j,\gamma} + \delta)|_{n_1-n_2} : p_0 \in P_0 \}. \quad (3.13)$$

По вектору $g_{p_0,i,j}$ находится некоторый кластер $P_{0,j+1}$, значение однородного сигнала, отвечающее которому, в момент $t = \tau_{i,j,\gamma}$ совпадает с $g_{p_0,i,j}$. Далее, по кластеру $P_{0,j+1}$ в момент $t = \tau_{i,j,\gamma}$ вычисляется функция $w_{P_{0,j+1}}(t)$, $t \in [\tau_{i,j,\gamma}, t_{j+1})$ — соответствующее управление из наводящего (для системы (2.1)) пакета программ, которое находится по правилу (2.4). После этого на вход системы (3.5) подаются управления $v^h(t)$ и $\tilde{u}^h(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^h(t) &= \tilde{u}_i^h(t), & \text{если } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [\tau_{i,j,\gamma}, t_{j+1}), \\ \tilde{u}^h(t) &= \tilde{u}_j^h, & \text{если } t \in [\tau_{i(j)}, \tau_{i,j,\gamma}), \end{aligned}$$

где $\tilde{u}_j^h \in W$ — произвольный вектор, а функция $\tilde{u}_i^h(t)$ такова, что

$$B_1 \tilde{u}_i^h(t) = C_1 v_i^h + w_{P_{0,j+1}}(t), \quad \text{если } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [\tau_{i,j,\gamma}, t_{j+1}).$$

Работа алгоритма заканчивается в момент $t = t_*$.

Символом $\tilde{X}(\cdot; t_0, x_0)$ обозначим пучок всех решений системы (1.2), (2.1), т. е. совокупность решений $x(\cdot) = \{z(\cdot), p(\cdot)\}$ этой системы, порожденных $v(\cdot) \in Q(\cdot)$ и $w(\cdot) \in \{w(\cdot) \in L_2(T; \mathbb{R}^{n-n_1}) : w(t) \in W \text{ при п.в. } t \in [t_0, t_*]\}$. $\tilde{X}(t_1; t_0, x_0) \subset \mathbb{R}^n$ — сечение этого множества гиперплоскостью $t = t_1$.

Пусть $x(\cdot; t_0, \hat{x}_0, u^h(\cdot), v(\cdot))$ — решение системы (1.1), порожденное неизвестным возмущением $v(\cdot) \in Q(\cdot)$ и управлением $u = u^h(\cdot)$, M_1^ε — замкнутая ε -окрестность множества M_1 . Здесь, как и выше, \hat{x}_0 — истинное (неизвестное) начальное состояние этой системы. Для простоты ниже полагаем $t_0 = 0$.

У с л о в и е 2. При всех $t \in [t_0, t_*]$, $x_0 \in X_0$ справедливы включения $\tilde{X}(t; t_0, x_0) \subset N_1$.

У с л о в и е 3. При $h \rightarrow 0$ имеют место сходимости $\alpha(h) \rightarrow 0$, $(\delta(h) + h)\alpha^{-1}(h) \rightarrow 0$, $\alpha(h)\delta^{-\beta}(h) \rightarrow 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–3, а также условия теоремы 2. Тогда можно указать число $\gamma > 0$ со свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $h_* = h_*(\varepsilon, \gamma) \in (0, 1)$ такое, что при всех $h \in (0, h_*)$ имеет место включение

$$x(t_*; t_0, \hat{x}_0, u^h(\cdot), v(\cdot)) \in M_1^\varepsilon, \quad (3.14)$$

каково бы ни было $v(\cdot) \in Q(\cdot)$.

Доказательство. Доказательство теоремы проведем в три этапа.

Этап 1. Сначала покажем следующее: найдется такое число $h_1 \in (0, h^*)$, что равномерно по всем $h \in (0, h_1)$, $\xi_2^h(\cdot) \in \Xi(z_2(\cdot), h)$, $i \in [0 : m - 1]$ верны неравенства

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |w^h(s)|_{n_1-n_2} ds \leq \tilde{C}_0 \delta + \tilde{C}_1 \delta \alpha^{-1} \nu(h), \quad (3.15)$$

где $w^h(\cdot)$ — решение системы (3.2), порожденное управлением $\tilde{v}^h(\cdot)$ вида (3.11), (3.6), $\delta = \delta(h)$, $\nu(h) = |w^h(0) - z_{20}|_{n_1-n_2}$, $\Xi(z_2(\cdot), h)$ — множество измерений решения $z_2(\cdot)$ системы (1.5), т. е. множество всех кусочно-постоянных функций $\xi_2^h(\cdot) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\xi_2^h(t) = \xi_{2i}^h$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, удовлетворяющих неравенствам $|\xi_{2i}^h - z_2(\tau_i)|_{n_1-n_2} \leq h$. Здесь и всюду ниже символы \tilde{C}_i , а также K_j означают постоянные, которые могут быть выписаны в явном виде. Легко видеть, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[w^h(t) - z_2(t)] &= A^{(1)} \xi_{2i}^h - \frac{1}{\alpha} [w^h(\tau_i) - \xi_{2i}^h] - A^{(1)} z_2(t) - A_2 p(t) \\ &= -\frac{1}{\alpha} [w^h(t) - z_2(t)] + \Psi_h^{(1)}(s) \quad \text{при п. в. } t \in \delta_i, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi_h^{(1)}(s) &= \Psi_h(s) + \frac{1}{\alpha} [w^h(s) - w^h(\tau_i)], \\ \Psi_h(s) &= -\frac{1}{\alpha} [z_2(s) - \xi_{2i}^h] + A^{(1)} \xi_{2i}^h - A^{(1)} z_2(s) - A_2 p(s), \quad s \in \delta_i. \end{aligned}$$

Ввиду (1.6), а также условия 3 семейство функций $\Psi_h(\cdot)$ равномерно по всем $h \in (0, 1)$ ограничено:

$$|\Psi_h(s)|_{n_1-n_2} \leq K_0 \quad \text{при п. в. } t \in [t_0, t_*]. \quad (3.16)$$

Далее имеем

$$w^h(t) - z_2(t) = \int_0^t e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)} \Psi_h^{(1)}(s) ds, \quad t \in [t_0, t_*], \quad (3.17)$$

где E — единичная матрица размерности $n_1 \times n_1$. Обозначим

$$\mu(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} |w^h(\tau) - z_2(\tau)|_{n_1-n_2}, \quad f_h(t) = A^{(1)} \xi_{2i}^h \quad \text{при п. в. } t \in \delta_i.$$

Тогда имеем

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |w^h(s)|_{n_1-n_2} ds \leq K_1 \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} (\mu(\tau_i) + h), \quad \mu(\tau_i) \leq \mu(\tau_{i+1}), \quad (3.18)$$

где $\sup_{t \in T} |f_h(t)|_{n_1-n_2} \leq K_1$. Заметим, что

$$|\Psi_h^{(1)}(t)|_{n_1-n_2} \leq |\Psi_h(t)|_{n_1-n_2} + \frac{1}{\alpha} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |w^h(s)|_{n_1-n_2} ds \quad \text{при } t \in \delta_i. \quad (3.19)$$

Учитывая (3.17)–(3.19), получаем

$$\begin{aligned} \mu(t) \leq & \nu(h) + K_2 \left(\frac{\delta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} \mu(\tau_i) + \frac{\delta h}{\alpha^2} \right) \int_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)}|_{n_1-n_2} ds \\ & + \int_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)}|_{n_1-n_2} |\Psi_h(s)|_{n_1-n_2} ds, \quad t \in \delta_i, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где $K_2 = \max\{1, K_1\}$. Воспользовавшись (3.16), выводим

$$\int_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)}|_{n_1-n_2} |\Psi_h(s)|_{n_1-n_2} ds \leq K_0 \int_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)}|_{n_1-n_2} ds. \quad (3.21)$$

Далее имеем

$$\int_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)}|_{n_1-n_2} ds \leq K_3 \alpha. \quad (3.22)$$

Таким образом, из (3.21), (3.22) получаем

$$\int_0^t |e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)}|_{n_1-n_2} |\Psi_h(s)|_{n_1-n_2} ds \leq K_3 K_0 \alpha. \quad (3.23)$$

В свою очередь из (3.20), считая $t = \tau_i$ и учитывая (3.23), выводим

$$\left(1 - \frac{K_2 K_3 \delta}{\alpha} \right) \mu(\tau_i) \leq \nu(h) + K_4 \left(\alpha + \delta + \frac{\delta h}{\alpha} \right).$$

Поэтому при достаточно малых h , например, таких, что $1 - \frac{K_2 K_3 \delta}{\alpha} \in \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$, имеем

$$\mu(\tau_i) \leq 2K_4 \left(\alpha + \delta + \frac{\delta h}{\alpha} \right) + 2\nu(h) \leq 4K_4(\alpha + \delta) + 2\nu(h).$$

Из (3.18) следует оценка

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_{n_1-n_2} ds \leq K_1 \left[\delta + \frac{\delta}{\alpha} (\mu(\tau_i) + h) \right].$$

В силу условия 3 существует такое число $h_0 \in (0, 1)$, что при $h \in (0, h_0)$ верно неравенство $h \leq K_5 \alpha(h)$. Воспользовавшись последними тремя неравенствами, имеем

$$\delta + \frac{\delta}{\alpha} (\mu(\tau_i) + h) \leq K_6 \delta + 2 \frac{\delta}{\alpha} \nu(h).$$

Поэтому

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |\dot{w}^h(s)|_{n_1-n_2} ds \leq K_1 K_6 \delta + 2K_1 \delta \alpha^{-1} \nu(h).$$

Неравенство (3.15) установлено.

Э т а п 2. Покажем, что при $h \in (0, h_1)$ справедливо неравенство

$$|\tilde{v}^h(t) - A_2 p(t)|_{n_1-n_2} \leq \varrho_*(h) \quad (3.24)$$

$$= \tilde{c}_1 \alpha(h) + \tilde{c}_2 (h + \delta(h)) \alpha^{-1}(h) + \tilde{c}_3 \delta(h) \alpha^{-2}(h) \nu(h) + \tilde{c}_4 (h) \alpha(h) \delta^{-\beta}(h), \quad \text{если } t \in [\delta^\beta(h), t_*].$$

Здесь $\tilde{c}_j > 0$, $j = 1, \dots, 4$, — некоторые постоянные. Нетрудно видеть, что имеет место равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} [w^h(t) - z_2(t)] &= \int_0^t \left(\frac{d}{ds} e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)} \right) \Psi_h^{(1)}(s) ds \\ &= - \int_0^t \left(\frac{d}{ds} e^{\frac{1}{\alpha} E(t-s)} \right) A_2 p(s) ds + \sum_{j=1}^3 \int_0^t \left(\frac{d}{ds} e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)} \right) \gamma_\delta^{(j)}(s) ds, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_\delta^{(1)}(s) &= \frac{1}{\alpha} [w^h(s) - w^h(\tau_i)], \quad \gamma_\delta^{(2)}(s) = -\frac{1}{\alpha} [z_2(s) - \xi_{2i}^h], \\ \gamma_\delta^{(3)}(s) &= A^{(1)}(\xi_{2i}^h - z_2(s)) \quad \text{при п.в. } s \in \delta_i. \end{aligned}$$

Учитывая (3.15), заключаем

$$|\gamma_\delta^{(1)}(s)|_{n_1-n_2} \leq \tilde{C}_2 \frac{\delta}{\alpha} + \tilde{C}_3 \frac{\delta}{\alpha^2} \mu(h), \quad s \in [t_0, t_*]. \quad (3.26)$$

В свою очередь, воспользовавшись (1.6), будем иметь

$$|\gamma_\delta^{(2)}(s)|_{n_1-n_2} \leq \tilde{C}_4 \frac{\delta + h}{\alpha}, \quad s \in [t_0, t_*]. \quad (3.27)$$

Кроме того

$$|\gamma_\delta^{(3)}(s)|_{n_1-n_2} \leq \tilde{C}_5 (\delta + h), \quad s \in [t_0, t_*]. \quad (3.28)$$

В таком случае из (3.26)–(3.28) выводим

$$\left| \sum_{j=1}^3 \int_0^t \left(\frac{d}{ds} e^{-\frac{1}{\alpha} E(t-s)} \right) \gamma_\delta^{(j)}(s) ds \right|_{n_1-n_2} \leq \tilde{C}_6 \left(\frac{\delta}{\alpha^2} (h) \nu(h) + \frac{\delta + h}{\alpha} \right). \quad (3.29)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в правой части равенства (3.25), получим

$$- \int_0^t \left(\frac{d}{ds} e^{\frac{1}{\alpha} E(t-s)} \right) A_2 p(s) ds = e^{-\frac{1}{\alpha} Et} A_2 p(0) - A_2 p(t) + \int_0^t e^{\frac{1}{\alpha} E(t-s)} A_2 \dot{p}(s) ds,$$

где норма последнего слагаемого ограничена величиной $\tilde{C}_7 \alpha(h)$. Кроме того в силу (1.6) имеем при $t \in \delta_i$

$$\left| \frac{1}{\alpha} \{ [w^h(t) - z_2(t)] - [w^h(\tau_i) - \xi_{2i}^h] \} \right|_{n_1-n_2} \leq \tilde{C}_8 \left(\frac{h + \delta}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha^2} \nu(h) \right). \quad (3.30)$$

Из (3.25), (3.29), (3.30) и условия 3 в силу ограниченности функции $t \rightarrow A_2 \dot{p}(t)$ следует при $t \in \delta_i$ неравенство

$$\left| -\frac{1}{\alpha} [w^h(\tau_i) - z_2(\tau_i)] - A_2 p(t) \right|_{n_1-n_2} \leq \tilde{C}_9 \frac{h + \delta}{\alpha} + \tilde{C}_{10} \alpha + \tilde{C}_{11} \frac{\delta}{\alpha^2} \nu(h) + \left| e^{-\frac{1}{\alpha} Et} A_2 p(0) \right|_{n_1-n_2}. \quad (3.31)$$

Заметим, что

$$|e^{-\alpha^{-1} E \delta^\beta} A_2 p(0)|_{n_1-n_2} \leq \tilde{C}_{12} e^{-\alpha \delta^{-\beta}} \leq \tilde{C}_{12} \alpha \delta^{-\beta}.$$

Поэтому

$$|e^{-\alpha^{-1} Et} A_2 p(0)|_{n_1-n_2} \leq \tilde{C}_{12} \alpha \delta^{-\beta} \quad \text{при } t \in [\delta^\beta, t_*]. \quad (3.32)$$

Справедливость неравенства (3.24) следует из (3.31) и (3.32).

Э т а п 3. Как следует из результатов [15], можно указать такое $h_2 \in (0, h_1)$, что справедлива оценка

$$\sup_{t \in T} \left| \int_0^t (v^h(\tau + \delta) - v(\tau)) d\tau \right|_q \leq \tilde{C}_{13}(\delta(h) + h\delta^{-1}(h)), \quad t \in [0, t_* - \delta],$$

каково бы ни было возмущение $v(\cdot) \in Q(\cdot)$. Пусть

$$\Phi(\tau_{i,j,\gamma}) = A_2 p(\tau_{i,j,\gamma}) - A_2 \int_0^{\tau_{i,j,\gamma}} F(\tau_{i,j,\gamma}, \tau) [B_1 u^h(\tau) - C_1 v(\tau) + f_2(\tau)] d\tau.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|\varphi(\tau_{i,j,\gamma} + \delta) - \Phi(\tau_{i,j,\gamma})|_{n_1 - n_2} \leq |\tilde{v}^h(\tau_{i,j,\gamma} + \delta) - A_2 p(\tau_{i,j,\gamma} + \delta)|_{n_1 - n_2} + d^h(\tau_{i,j,\gamma}), \quad (3.33)$$

где

$$d^h(\tau_{i,j,\gamma}) = \left| A_2 \int_0^{\tau_{i,j,\gamma} + \delta} F(\tau_{i,j,\gamma} + \delta, \tau) [B_1 u^h(\tau) - C_1 v^h(\tau) + f_2(\tau)] d\tau - A_2 \int_0^{\tau_{i,j,\gamma}} F(\tau_{i,j,\gamma}, \tau) [B_1 u^h(\tau) - C_1 v(\tau) + f_2(\tau)] d\tau \right|_{n_1 - n_2} + |A_2 [p(\tau_{i,j,\gamma} + \delta) - p(\tau_{i,j,\gamma})]|_{n_1 - n_2}.$$

Нетрудно видеть, что

$$d^h(\tau_{i,j,\gamma}) \leq \tilde{C}_{14} \left\{ \delta + \left| \int_0^{\tau_{i,j,\gamma}} [v^h(\tau + \delta) - v(\tau)] d\tau \right|_q \right\} \leq \mu_*(h), \quad (3.34)$$

где

$$\mu_*(h) = \tilde{C}_{15} [\delta(h) + h\delta^{-1}(h)].$$

Кроме того,

$$\delta^\beta(h) \leq \tau_{i,j,\gamma}. \quad (3.35)$$

Учитывая (3.24), (3.34) и (3.35), из (3.33) получаем

$$|\phi(\tau_{i,j,\gamma} + \delta) - \Phi(\tau_{i,j,\gamma})|_{n_1 - n_2} \leq \varrho_*(h) + \mu_*(h). \quad (3.36)$$

Легко видеть, что

$$A_2 F(\tau_{i,j,\gamma}, 0) \hat{p}_0 = \Phi(\tau_{i,j,\gamma}) = g_{\hat{p}_0}(\tau_{i,j,\gamma}). \quad (3.37)$$

Аналогично [11, лемма 5] с помощью теоремы 2, учитывая неравенство

$$\tau_{i,j,\gamma} - \tau_{i(j),h} \leq \gamma + 2\delta,$$

проверяем, что при указанном выше выборе управления $\tilde{u}^h(t)$ верно включение

$$F(t_*, 0) \hat{p}_0 + g_2(t_*) \in M^{K_0(\gamma + 2\delta)}, \quad (3.38)$$

где постоянная K_0 может быть выписана в явном виде. Эта постоянная зависит лишь от множеств P_0, P, Q , но не зависит от $h, \delta, \gamma, v^h(\cdot), \tilde{v}^h(\cdot), u^h(\cdot)$ и $\tilde{u}^h(\cdot)$. Так как множество P_0 конечно, а однородные сигналы являются непрерывными по t функциями, то по $\gamma > 0$ можно указать число $\nu_\gamma > 0$ такое, что

$$|g_{p_{0j}}(t_j + \gamma) - g_{p_{0j}}(t_j + \gamma)|_{n_1 - n_2} \geq \nu_\gamma \quad \forall j = 0, 1, \dots, K, \quad t_j + \gamma \leq t_*,$$

если $p'_{0j} \in P_0$ и $p''_{0j} \in P_0$ таковы, что t_j — момент расслоения сигналов $g_{p'_{0j}}(\cdot)$ и $g_{p''_{0j}}(\cdot)$, т. е. $g_{p'_{0j}}(t) = g_{p''_{0j}}(t)$ при $t \in [0, t_j]$, $g_{p'_{0j}}(t) \neq g_{p''_{0j}}(t)$ при $t \in (t_j, t_j + \gamma]$. В свою очередь ввиду непрерывности однородного сигнала, а также неравенства

$$|\tau_{i,j,\gamma} - t_j + \gamma| \leq \delta$$

(см., (3.1)), можно указать число $h_3 \in (0, h_2)$ такое, что при всех $h \in (0, h_3)$ выполнены неравенства

$$|g_{p'_{0j}}(\tau_{i,j,\gamma}) - g_{p''_{0j}}(\tau_{i,j,\gamma})|_{n_1-n_2} \geq 0.75\nu\gamma. \quad (3.39)$$

Пусть $K_0(\gamma + 2\delta) < \varepsilon/3$. Пусть также число $h_4 \in (0, h_3)$ таково, что при всех $h \in (0, h_4)$ верно неравенство

$$\varrho_*(h) + \mu_*(h) \leq 0.25\nu\gamma. \quad (3.40)$$

Из условия 3 вытекает существование такого числа. Ввиду (3.40), (3.36) и (3.37) имеет место оценка

$$|\varphi(\tau_{i,j,\gamma} + \delta) - q_{\hat{p}_0}(\tau_{i,j,\gamma})|_{n_1-n_2} \leq 0.25\nu\gamma. \quad (3.41)$$

Далее, в силу (3.13), (3.39), (3.41) в таком случае справедливо равенство

$$g_{p_0,i,j} = g_{\hat{p}_0}(\tau_{i,j,\gamma}).$$

Поскольку $t_j < \tau_{i,j,\gamma}$, а до момента t_{j+1} однородный сигнал $g_{\hat{p}_0}(\cdot)$ более не имеет моментов расслоения, то справедливо включение $\hat{p}_0 \in P_{0,j+1} = P_{0,j+1}(t_{j+1}|g_{\hat{p}_0}(\cdot)) = \{p_0 \in P_0 : g_{p_0}(\cdot)|_{[t_0, t_{j+1}]} = g_{\hat{p}_0}(\cdot)|_{[t_0, t_{j+1}]}\}$. Таким образом, в момент $t = \tau_{i,j,\gamma}$ по величине $g_{p_0,i,j}$ мы определяем кластер $P_{0,j+1}$, которому принадлежит неизвестное начальное состояние системы (1.1), т. е. \hat{p}_0 . Пусть

$$\varepsilon(t) = |g_1(t) - g_2(t)|_{n-n_1}^2.$$

Стандартным образом (см., например, [2]) учитывая (3.9) устанавливаем неравенство

$$\varepsilon(t_{i+1,h}) \leq (1 + \tilde{C}_{16}\delta)\varepsilon(t_{i,h}) + \tilde{C}_{17}\delta(\delta + h).$$

Воспользовавшись леммой из работы [16], отсюда получаем

$$\varepsilon(t_{i+1,h}) \leq [\varepsilon(0) + \tilde{C}_{17}t_{i+1,h}(\delta + h)] \exp\{\tilde{C}_{16}t_{i+1,h}\} \leq \mu_1(h) \equiv \tilde{C}_{18}(h + \delta).$$

Пусть $h_5 \in (0, h_4)$ таково, что при всех $h \in (0, h_5)$

$$\mu_1^{1/2}(h) \leq \varepsilon/3. \quad (3.42)$$

Тогда при всех $h \in (0, h_5)$ в силу (3.38), (3.42) и неравенства $K_0(\gamma + 2\delta) < \varepsilon/3$ следует неравенство

$$F(t_*, 0)\hat{p}_0 + g_1(t_*) \in M^{2/3\varepsilon}. \quad (3.43)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & |F(t_*, 0)\hat{p}_0 + g_1(t_*) - p(t_*; 0, \hat{p}_0, u^h(\cdot), v(\cdot))|_{n-n_1} \\ & \leq \tilde{C}_{19} \left\{ \delta + \left| \int_{t_0}^{t_8} [v^h(\tau) - v(\tau)] d\tau \right|_q \right\} \leq \mu_2(h) = \tilde{C}_{20}(\delta + h\delta^{-1}). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Пусть $h_6 \in (0, h_5)$ таково, что при всех $h \in (0, h_6)$

$$\mu_2(h) \leq \varepsilon/3.$$

Тогда в силу (3.43), (3.44) при всех $h \in (0, h_4)$ имеет место включение (3.14). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
4. **Ушаков В.Н.** К задаче построения стабильных мостов в дифференцированной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
5. **Osipov Yu.S., Kryazhinskiy A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Basel: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
6. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
7. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011. 292 с.
8. **Осипов Ю.С.** Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 4. С. 25–76.
9. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О разрешимости задач гарантирующего управления для частично наблюдаемых линейных динамических систем // Тр. МИАН. 2012. Т. 277. С. 152–167.
10. **Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В.** Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
11. **Стрелковский Н.В.** Построение стратегии гарантированного позиционного наведения для линейной управляемой системы при неполной информации // Вест. МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 65–72.
12. **Кряжимский А.В., Максимов В.И.** О сочетании процессов реконструкции и гарантированного управления // Автоматика и телемеханика. 2013. № 8. С. 26–34.
13. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одной задаче управления при неполной информации // Автоматика и телемеханика. 2006. № 3. С. 131–142.
14. **Каппель Ф., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Динамическая реконструкция состояний и гарантирующее управление системой реакции-диффузии // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 5. С. 597–603.
15. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции входных воздействий в линейных системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. С. 16–25.
16. **Максимов В.И.** Об отслеживании траектории динамической системы // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. № 6. С. 951–960.

Максимов Вячеслав Иванович

д-р физ.-мат. наук

профессор

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила 10.02.2016

УДК 517.977

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО КОНТРОЛЬНОГО ПРИМЕРА
Л. С. ПОНТЯГИНА ИЗ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР¹****М. С. Никольский**

В статье изучается обобщение известного в теории дифференциальных игр контрольного примера Л. С. Понтягина. Исследование ведется с позиций первого прямого метода Л. С. Понтягина, который был развит им для конструктивного решения задачи качества в линейных дифференциальных играх преследования-убегания.

Ключевые слова: дифференциальные игры, контрольный пример Л. С. Понтягина, первый прямой метод Л. С. Понтягина.

M. S. Nikol'skii. A study of the generalized Pontryagin test example from the theory of differential games.

A generalization of L.S. Pontryagin's test example from the theory of differential games is considered. The study is based on Pontryagin's first direct method, which was developed for the constructive solution of the performance problem in linear pursuit–evasion differential games.

Keywords: differential games, Pontryagin's test example, Pontryagin's first direct method.

MSC: 49N70, 49N75, 91A23

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-211-217

Введение

Как известно (см., например, [1–7]), в поздние годы своей жизни Л. С. Понтягин занимался теорией дифференциальных игр преследования-убегания. В работе [1] он рассмотрел, в частности, контрольный пример, на котором опробовал свою весьма сложную нелинейную теорию решения задач качества (этот термин введен Р. Айзексом в [8]). Понтягинскому контрольному примеру весьма повезло в литературе по теории дифференциальных игр: его часто используют для иллюстрации новых методов решения задачи качества (см., например, [9]). В работах [3–5] Л. С. Понтягин разработал два конструктивных прямых метода решения задачи качества в линейных дифференциальных играх преследования-убегания. Для этих методов характерно широкое использование теории многозначных отображений и выпуклого анализа. С помощью прямых методов исследование контрольного примера проводится весьма просто и конструктивно (см., например, [5; 7]).

Отметим, что эти результаты получены Л. С. Понтягиным в его специальной формализации дифференциальной игры. С точки зрения общей теории позиционных дифференциальных игр Н. Н. Красовского и его школы (см., например, [10]), прямые методы Л. С. Понтягина позволяют конструктивно построить так называемое u -стабильное множество, с помощью которого можно эффективно решать задачу качества, используя соответствующую позиционную стратегию Н. Н. Красовского. Л. С. Понтягин неоднократно отмечал это важное обстоятельство, как существенно расширяющее возможности его методов.

Настоящая статья посвящена изучению некоторого обобщения исходного контрольного примера Л. С. Понтягина с помощью его первого прямого метода. Обобщение состоит в том, что числовые коэффициенты заменяются на матричные.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-50-00005).

1. Об исходном контрольном примере Л. С. Понтрягина

Здесь мы коротко рассмотрим исходный контрольный пример Л. С. Понтрягина из [1].

Пусть динамика догоняющего объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= -\alpha\bar{x}_2 - u,\end{aligned}\tag{1}$$

где \bar{x}_1, \bar{x}_2, u — k -мерные ($k \geq 1$) векторы из стандартного действительного евклидова арифметического пространства \mathbb{R}^k , элементами которого являются упорядоченные наборы из k чисел, записываемые в виде столбцов; $\alpha > 0$ — числовой коэффициент. Пусть динамика убегающего объекта описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\bar{y}}_1 &= \bar{y}_2, \\ \dot{\bar{y}}_2 &= -\beta\bar{y}_2 + v,\end{aligned}\tag{2}$$

где \bar{y}_1, \bar{y}_2, v — k -мерные ($k \geq 1$) векторы из \mathbb{R}^k , $\beta > 0$ — числовой коэффициент. В \mathbb{R}^{4k} выделено терминальное множество M из векторов $z = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix}$ таких, что

$$\bar{x}_1 = \bar{y}_1.\tag{3}$$

Систему линейных уравнений (3) можно переписать в виде

$$Nz = 0,\tag{4}$$

где блочная матрица N размерности $k \times 4k$ имеет вид

$$N = (E_k, O_k, -E_k, O_k).\tag{5}$$

Здесь E_k — единичная матрица порядка k , O_k — нулевая матрица порядка k .

Целью догоняющего объекта (1) является по возможности быстрое выведение вектора

$$z(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{y}_1(t) \\ \bar{y}_2(t) \end{pmatrix}\tag{6}$$

на M из начального состояния

$$z_0 = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(0) \\ \bar{x}_2(0) \\ \bar{y}_1(0) \\ \bar{y}_2(0) \end{pmatrix}\tag{7}$$

с помощью подходящего выбора измеримого управления $u(t) \in P$, $t \geq 0$, на основании доступной информации о ходе игры.

Убегающий объект (2) применяет произвольное измеримое управление $v(t) \in Q$, $t \geq 0$, и он, вообще говоря, противодействует цели догоняющего объекта.

Для краткого изложения конструкций первого прямого метода Л.С. Понтрягина применительно к исследуемой дифференциальной игре рассмотрим следующие блочные матрицы (ср. с (1), (2)):

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O_{2k} \\ O_{2k} & A_2 \end{pmatrix},\tag{8}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} O_k & E_k \\ O_k & -\alpha E_k \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} O_k & E_k \\ O_k & -\beta E_k \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$B = \begin{pmatrix} O_k \\ E_k \\ O_k \\ O_k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} O_k \\ O_k \\ O_k \\ E_k \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем считаем, что

$$u \in P \subset \mathbb{R}^k, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^k, \quad (11)$$

где

$$P = \rho S_1(0), \quad Q = \sigma S_1(0), \quad (12)$$

причем константы $\rho > 0$, $\sigma > 0$, $S_1(0)$ — шар из \mathbb{R}^k с центром в 0 и радиуса 1.

В соответствии с первым прямым методом Л.С. Понтрягина при $r \geq 0$ надо вычислить множество

$$\hat{w}(r) = Ne^{rA}BP \ast Ne^{rA}CQ, \quad (13)$$

где e^{rA} — экспоненциал матрицы rA (см. [11]), символ “ \ast ” означает геометрическую разность множеств. Напомним известное

О п р е д е л е н и е 1. Пусть X, Y — непустые множества из \mathbb{R}^k . Тогда геометрическая разность $X \ast Y$ определяется формулой

$$X \ast Y = \bigcap_{y \in Y} (X - y).$$

Можно показать, что в рассматриваемой дифференциальной игре при $r \geq 0$ имеет место формула (см. (13))

$$\hat{w}(r) = \rho \frac{1 - e^{-\alpha r}}{\alpha} S_1(0) \ast \sigma \frac{1 - e^{-\beta r}}{\beta} S_1(0). \quad (14)$$

Чтобы при данном $r \geq 0$ множество $\hat{w}(r)$ было непустым, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho \frac{1 - e^{-\alpha r}}{\alpha} \geq \sigma \frac{1 - e^{-\beta r}}{\beta}. \quad (15)$$

Мнозначное отображение $\hat{w}(r)$ (см. (13), (14)) используется в первом прямом методе следующим образом. Пусть $\hat{w}(r) \neq \emptyset$ при $r \in [0, \theta]$, где $\theta > 0$ — некоторое число. Пусть при некотором $\tau \in [0, \theta]$ для начальной точки z_0 (см. (7)) рассматриваемой дифференциальной игры, не принадлежащей терминальному множеству M (см. (3)–(5)), выполняется включение

$$Ne^{\tau A} z_0 \in \int_0^{\tau} \hat{w}(r) dr, \quad (16)$$

где интеграл от $\hat{w}(r)$ на $[0, \tau]$ понимается в смысле теории многозначных отображений (см., например, [11]).

Нам будет полезно следующее

О п р е д е л е н и е 2. Векторная функция $U(t, v): [0, +\infty) \times Q \rightarrow P$ называется суперпозиционно измеримой, если функция $U(t, v(t))$ при $t \geq 0$ является измеримой по Лебегу для произвольной измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geq 0$.

В теории дифференциальных игр важным является выбор множеств стратегий игроков. В [7] мы фиксировали в качестве стратегий догоняющего суперпозиционно измеримые функции $U(t, v)$ и в качестве стратегий убегающего — программные измеримые функции $v(t) \in Q$, $t \geq 0$. В этих классах стратегий при выше сделанных предположениях для начальной точки z_0 (см. (16)) с помощью первого прямого метода Л. С. Понтрягина обосновывается утверждение: существует такая суперпозиционно измеримая стратегия $U(t, v)$, что при любой измеримой функции $v(t) \in Q$, $t \geq 0$, соответствующее решение (6) системы (1), (2) с начальным условием (7) попадает на терминальное множество M (см. (3)–(5)) не позже момента τ , т. е. окончание преследования произойдет не позже момента τ .

Большой интерес для приложений представляет нахождение условий на положительные константы $\alpha, \beta, \rho, \sigma$, при которых при всех $r \geq 0$ выполняется неравенство (15). Л. С. Понтрягин в [1] нашел такие условия в виде одновременного выполнения двух неравенств

$$\rho \geq \sigma, \quad \frac{\rho}{\alpha} \geq \frac{\sigma}{\beta}. \quad (17)$$

При выполнении этих неравенств множество $\hat{w}(r)$ (см. (13)) непусто при всех $r \geq 0$ и вычисляется по формуле

$$\hat{w}(r) = \left(\rho \frac{1 - e^{-\alpha r}}{\alpha} - \sigma \frac{1 - e^{-\beta r}}{\beta} \right) S_1(0),$$

при этом соотношение (16) переписывается в виде включения

$$\bar{x}_1(0) + \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} \bar{x}_2(0) - \bar{y}_1(0) - \frac{1 - e^{-\beta \tau}}{\beta} \bar{y}_2(0) \in \int_0^\tau \left(\rho \frac{1 - e^{-\alpha r}}{\alpha} - \sigma \frac{1 - e^{-\beta r}}{\beta} \right) dr S_1(0). \quad (18)$$

Отсюда нетрудно видеть (ср. с (17)), что при $\rho \geq \sigma$, $\frac{\rho}{\alpha} > \frac{\sigma}{\beta}$ включение (18) выполняется для каждого начального состояния $z_0 \notin M$ при достаточно большом $\tau > 0$, т. е. в исследуемой дифференциальной игре преследование может быть гарантированно завершено за конечное время τ .

2. Изучение обобщенного контрольного примера Л. С. Понтрягина

Здесь мы рассмотрим следующее обобщение задачи преследования-убегания (1)–(5). Пусть динамика догоняющего объекта описывается системой дифференциальных уравнений (ср. с (1))

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \mathfrak{A} \bar{x}_2 - u, \end{aligned} \quad (19)$$

где \bar{x}_1, \bar{x}_2 — k -мерные ($k \geq 1$) векторы из \mathbb{R}^k , \mathfrak{A} — квадратная матрица порядка k .

Пусть динамика убегающего объекта описывается системой дифференциальных уравнений (ср. с (2))

$$\begin{aligned} \dot{\bar{y}}_1 &= \bar{y}_2, \\ \dot{\bar{y}}_2 &= \mathfrak{B} \bar{y}_2 + v, \end{aligned} \quad (20)$$

где \bar{y}_1, \bar{y}_2, v — k -мерные векторы из \mathbb{R}^k ($k \geq 1$), \mathfrak{B} — квадратная матрица порядка k . Пусть терминальное множество M из \mathbb{R}^{4k} описывается соотношениями (3)–(5). В (19), (20) на управляющие векторы догоняющего и убегающего u, v из \mathbb{R}^k накладываются геометрические ограничения (11), (12). Для этой новой дифференциальной игры мы проведем вычисления в соответствии с конструкциями первого прямого метода Л. С. Понтрягина по образцу разд. 1, в котором было $\mathfrak{A} = -\alpha E_k$, $\mathfrak{B} = -\beta E_k$.

В настоящем разделе блочную матрицу A (см. (8)) мы определим несколько иначе (ср. с (9), (10)):

$$A_1 = \begin{pmatrix} O_k & E_k \\ O_k & \mathfrak{A} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} O_k & E_k \\ O_k & \mathfrak{B} \end{pmatrix}.$$

Для множества $\hat{w}(r)$ (см. (13)) при $r \geq 0$ можно обосновать формулу

$$\hat{w}(r) = D(r)P^* F(r)Q, \tag{21}$$

где

$$D(r) = \int_0^r e^{s\mathfrak{A}} ds, \quad F(r) = \int_0^r e^{s\mathfrak{B}} ds, \tag{22}$$

здесь $e^{s\mathfrak{A}}$, $e^{s\mathfrak{B}}$ — экспоненциалы матриц $s\mathfrak{A}$, $s\mathfrak{B}$ соответственно. Отметим, что $D(0) = O_k$, $F(0) = O_k$. Поэтому множество $\hat{w}(0) \neq \emptyset$ при произвольных $\rho > 0$, $\sigma > 0$.

Для дальнейшего важную роль играет следующая

Лемма. Матрицы $D(r)$, $F(r)$ (см. (22)) являются невырожденными при $r > 0$.

Доказательство. Проведем доказательство для матрицы $D(r)$. Для матрицы $F(r)$ оно проводится аналогично. Хорошо известно (см., например, [12; 13]), что существует такая невырожденная квадратная матрица L порядка k (вообще говоря, с комплексными коэффициентами), что

$$\mathfrak{A} = L^{-1}\Lambda L, \tag{23}$$

где квадратная матрица Λ порядка k является жордановой формой для матрицы \mathfrak{A} и, следовательно, имеет блочно-диагональный вид. Соответствующие квадратные блоки называются клетками Жордана. Клетки Жордана для матрицы Λ обозначим G_1, \dots, G_m . Отметим, что $1 \leq m \leq k$ и что для их порядков r_j ($j = 1, \dots, m$) справедливы соотношения

$$1 \leq r_j \leq k, \quad r_1 + \dots + r_m = k.$$

Напомним некоторые известные факты о строении клетки Жордана J_λ порядка $l \geq 1$, соответствующей собственному значению λ . Если $l = 1$, то J_λ — это число λ . Если $l \geq 2$, то элементы главной диагонали J_λ совпадают с λ , элементы $d_{i,i+1} = 1$, где $i = 1, \dots, l - 1$, и все остальные элементы J_λ являются нулевыми.

Итак, на главной диагонали клеток Жордана G_j , $i = 1, \dots, m$, стоят собственные значения λ_j матрицы \mathfrak{A} . Учитывая сказанное, можно обосновать следующую формулу (см. (23)) при $t \geq 0$:

$$e^{t\mathfrak{A}} = L^{-1}e^{t\Lambda}L, \tag{24}$$

причем матрица $e^{t\Lambda}$ имеет блочно-диагональный вид

$$e^{t\Lambda} = \text{diag}\{e^{tG_1}, \dots, e^{tG_m}\}. \tag{25}$$

Отметим, что матрицы e^{tG_j} , $j = 1, \dots, m$, могут быть вычислены в явном виде (см. [13, формула (1), с. 243]). Для нас важно, что матрица e^{tG_j} , $j = 1, \dots, m$, имеет верхнетреугольный вид и что на ее главной диагонали стоит величина $e^{t\lambda_j}$. Из соотношений (24), (25) получаем при $r \geq 0$

$$\int_0^r e^{s\mathfrak{A}} ds = L^{-1} \int_0^r e^{s\Lambda} ds L = L^{-1} \text{diag}\left\{ \int_0^r e^{sG_1} ds, \dots, \int_0^r e^{sG_m} ds \right\} L.$$

Из сказанного вытекает, что матрица $\int_0^r e^{sG_j} ds$, $j = 1, \dots, m$, является верхнетреугольной, причем на ее главной диагонали стоит величина $\int_0^r e^{s\lambda_j} ds$, а для детерминанта матрицы $D(r) = \int_0^r e^{s\mathfrak{A}} ds$ при $r \geq 0$ справедлива формула

$$\det D(r) = \prod_{j=1}^m f_j(r), \quad (26)$$

где

$$f_j(r) = \left(\int_0^r e^{s\lambda_j} ds \right)^{r_j}. \quad (27)$$

Отметим, что при $r \geq 0$ справедливы формулы

$$\int_0^r e^{s\lambda} ds = \begin{cases} \frac{e^{r\lambda} - 1}{\lambda}, & \text{если } \lambda \neq 0, \\ r, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Из соотношений (26)–(28) вытекает невырожденность матрицы $D(r)$ (см. (22)) при $r > 0$.

Лемма доказана.

Используя лемму и формулу (21), нетрудно показать, что при $r > 0$

$$\hat{w}(r) = D(r)(P * D^{-1}(r)F(r)Q). \quad (29)$$

Таким образом, чтобы обеспечить непустоту $\hat{w}(r)$ при данном $r > 0$, достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$P * H(r)Q \neq \emptyset,$$

где

$$H(r) = D^{-1}(r)F(r) \quad (30)$$

при $r > 0$.

Изучим поведение матричной функции $H(r)$ при $r \rightarrow 0+$. Отметим, что

$$e^{s\mathfrak{A}} = E_k + O_1(s), \quad e^{s\mathfrak{B}} = E_k + O_2(s), \quad (31)$$

где для матричных функций $O_1(s)$, $O_2(s)$ при $s \in [0, 1]$ имеют место неравенства

$$\|O_1(s)\| \leq c_1 s, \quad \|O_2(s)\| \leq c_2 s;$$

здесь $\|\cdot\|$ означает операторную норму матрицы, $c_i > 0$ — положительные константы. Из (31) при $r \in [0, 1]$ вытекают соотношения (см. (22))

$$\begin{aligned} D(r) &= r(E_k + O_3(r)), \\ F(r) &= r(E_k + O_4(r)), \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\|O_3(r)\| \leq c_3 r, \quad \|O_4(r)\| \leq c_4 r,$$

c_3, c_4 — положительные константы. Из формул (30), (32) при $r \in (0, 1]$ следует соотношение

$$H(r) = (E_k + O_3(r))^{-1}(E_k + O_4(r)).$$

Отсюда с помощью известного результата об обратимости матрицы, близкой к единичной матрице (см., например, в [14, гл. IV, § 5, теорема 5]), при $r \in (0, 1]$ получаем формулу

$$H(r) = E_k + O_5(r),$$

где для матрицы $O_5(r)$ выполнено неравенство

$$\|O_5(r)\| \leq c_5 r,$$

c_5 — положительная константа. Из сказанного вытекает, что матричную функцию $H(r)$ (см. (30)) естественно доопределить при $r = 0$ в виде $H(0) = E_k$. После такого доопределения матричная функция $H(r)$ становится непрерывной при $r \geq 0$. Отсюда получаем, что при произвольном фиксированном $\theta > 0$ корректно определена величина

$$\gamma(\theta) = \max_{r \in [0, \theta]} \|H(r)\|.$$

Из сказанного следует

Теорема. При произвольном фиксированном $\theta > 0$ и выполнении неравенства

$$\rho \geq \gamma(\theta)\sigma$$

множество $\hat{w}(r)$ (см. (29)) непусто при $r \in [0, \theta]$, т. е. первый прямой метод Л. С. Понтрягина можно применять на $[0, \theta]$ в рассматриваемой дифференциальной игре преследования-убегания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, вып. 4. С. 219–274.
2. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Линейные дифференциальные игры // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 1. С. 27–29.
3. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. 1 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174, № 6. С. 1278–1280.
4. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх. 2 // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
5. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, вып. 3. С. 307–330.
6. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Тр. МИАН. 1971. Т. 112. С. 30–63.
7. Никольский М.С. Первый прямой метод Л. С. Понтрягина в дифференциальных играх: учеб. пособ. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 65 с.
8. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
9. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. 1968. № 1. С. 65–78.
10. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. Благодатских В.И. Введение в оптимальное управление. Линейная теория. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
12. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
13. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Ижевск: Изд-во Удм. ГУ, 2000. 368 с.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук
вед. науч. сотрудник МИАН РАН
e-mail: mni@mi.ras.ru

Поступила 08.12.2015

УДК 519.63

НЕЯВНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹**В. Г. Пименов, А. С. Хенди**

В этой статье рассматривается техника построения разностных схем для уравнений в частных производных дробного порядка по времени и пространству с эффектом запаздывания по времени. Мы используем сдвинутые формулы Грюнвальда — Летникова для аппроксимации дробных производных по пространству и L1-algorithm для аппроксимации дробных производных по времени. Также используется кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением предыстории модели по времени. Алгоритм является аналогом чисто неявного численного метода и сводится на каждом временном шаге к решению линейных алгебраических систем. Получен порядок сходимости. Проведены численные эксперименты, которые подтверждают полученные теоретические результаты.

Ключевые слова: дробные дифференциальные уравнения, функциональное запаздывание, метод сеток, интерполяция, экстраполяция, порядок сходимости.

V. G. Pimenov, A. S. Hendy. An implicit numerical method for the solution of the fractional advection–diffusion equation with delay.

A technique for constructing difference schemes for time- and space-fractional partial differential equations with time delay is considered. Shifted Grünwald–Letnikov formulas and the L1-algorithm are used for the approximation of space-fractional and time-fractional derivatives, respectively. We also use piecewise constant interpolation and extrapolation by extending the model prehistory in time. The algorithm is an analog of the pure implicit numerical method and reduces to the solution of linear algebraic systems at each time step. The order of convergence is obtained. Numerical experiments are carried out to support the obtained theoretical results.

Keywords: fractional differential equation, functional delay, grid schemes, interpolation, extrapolation, convergence order.

MSC: 65N06, 65N12, 65Q20**DOI:** 10.21538/0134-4889-2016-22-2-218-226**Введение**

Дробные дифференциальные уравнения (см., например, [1; 2]) вызывают большой интерес у исследователей в последние десятилетия ввиду их большей точности при моделировании задач во многих направлениях науки. Уравнения в частных производных дробных порядков делятся на два класса: с дробной производной по пространству и дробной производной по времени; имеется много работ, в которых конструируются численные методы для таких уравнений [3; 4]. В данной статье мы опираемся на результаты работы [4], в которой был построен неявный численный метод для решения уравнения адвекции-диффузии с дробной производной по времени и двухсторонней производной по пространству, однако в нашей работе в уравнение внесен нелинейный эффект запаздывания.

Уравнения переноса (адвекции) и диффузии с запаздыванием общего вида, постоянным или переменным, сосредоточенным или распределенным, также широко распространены в моделировании динамических процессов. В этих уравнениях сочетаются эффекты распределенности параметров по пространству и наследственности по времени [5]. Численные методы для

¹Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.) и гранта Российского научного фонда (проект 14-35-00005).

таких уравнений изучались во многих работах (см. обзор в [6]); мы следуем подходу этой работы.

Рассмотрим класс дробных уравнений адвекции-диффузии с функциональным запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = -V \frac{\partial u}{\partial x} + D \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + D \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2} \right) \frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (0.1)$$

где $x \in [a, b]$, $t \in [t_0, T]$ — независимые переменные, $u(x, t)$ — искомая функция, $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$ — предыстория искомой функции, $\tau > 0$ — величина запаздывания.

Пусть заданы начальные условия: $u(x, t) = \varphi(x, t)$, $x \in [a, b]$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, а также граничные условия: $u(a, t) = \varphi_1(t)$, $u(b, t) = \varphi_2(t)$, $t \in [t_0, T]$.

Будем предполагать, что $\beta \geq 0$, $-1 \leq q \leq 1$, $V > 0$, $D > 0$, $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \gamma < 1$.

Дробная производная по времени определяется в смысле Капуто [1, разд. 2.4.1]:

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(m - \gamma)} \int_{t_0}^t \frac{\partial^m u(x, \xi) d\xi}{(t - \xi)^{\gamma - m + 1}}, & m - 1 < \gamma < m, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \frac{\partial^m u(x, t)}{\partial t^m}, & \gamma = m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Левосторонняя и правосторонняя дробные производные определяются в смысле Римана — Лиувилля [1, разд. 2.6]:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_a^x \frac{u(\eta, t) d\eta}{(x - \eta)^{\alpha - n + 1}}, \quad n = [\alpha] + 1,$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial (-x)^\alpha} = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_x^b \frac{u(\eta, t) d\eta}{(x - \eta)^{\alpha - n + 1}}, \quad n = [\alpha] + 1.$$

Обозначим через $Q = Q[-\tau, 0)$ множество функций $u(s)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, с нормой $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{s \in [-\tau, 0)} |u(s)|$. Предположим, что функционал $f(x, t, u, v(\cdot))$ определен на

$[a, b] \times [t_0, T] \times \mathbb{R} \times Q$.

Будем предполагать, что функционал f , функции $\varphi(x, t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ и коэффициенты β , q , V , D таковы, что задача (0.1) имеет единственное решение $u(x, t)$. Дополнительно предположим, что функционал $f(x, t, u, v(\cdot))$ липшицев по двум последним аргументам, т. е. существуют константы L и K такие, что для всех $x \in [a, b]$, $t \in [t_0, T]$, $u^1 \in \mathbb{R}$, $u^2 \in \mathbb{R}$, $v^1(\cdot) \in Q$ и $v^2(\cdot) \in Q$ выполняется следующее неравенство:

$$|f(x, t, u^1, v^1(\cdot)) - f(x, t, u^2, v^2(\cdot))| \leq L|u^1 - u^2| + K \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q. \quad (0.2)$$

1. Вывод разностной схемы

Проведем дискретизацию задачи. Пусть шаги по пространству и времени определяются соотношениями $h = (b - a)/N$, $\Delta = (T - t_0)/M$, где N , M — целые положительные числа (без ограничения общности предположим, что $\tau/\Delta = m$ целое). Введем точки разбиения $x_i = a + ih$, $i = 0, \dots, N$, и $t_j = t_0 + j\Delta$, $j = 0, \dots, M$. Будем обозначать через u_j^i приближения функции $u(x_i, t_j)$ в узлах.

Для каждого фиксированного $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию к моменту времени t_j , $j = 0, \dots, M$: $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$. Отображение $I : \{u_k^i\}_j \rightarrow v^i(t)$,

$t \in [t_j - \tau, t_j + \Delta]$, назовем оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. Так как мы будем конструировать неявный метод первого порядка по времени, используем кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v^i(t) = \begin{cases} u_{l-1}^i, & t_{l-1} \leq t < t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ u_{j-1}^i, & t_j \leq t \leq t_j + \Delta, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением обладает следующим свойством.

Лемма 1 [7, лемма 3.1]. *Если решение $u(x_i, t)$ задачи (0.1) — непрерывно дифференцируемая по t функция, то существует такая константа C_1 , что выполняется неравенство*

$$\max_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v^i(t) - u(x_i, t)| \leq \max_{j-m \leq k \leq j} |u_k^i - u(x_i, t_k)| + C_1 \Delta.$$

Это свойство называется первым порядком погрешности оператора интерполяции-экстраполяции [7, определение 3.7].

Дискретизируем пространственные дробные производные Римана — Лиувилля с помощью сдвинутых формул Грюнвальда — Летникова [3]:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) + O(h^p), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) + O(h^p). \quad (1.2)$$

Коэффициенты ω_j^α определяются неоднозначно, в зависимости от их выбора порядок p может быть различным; положим

$$\omega_j^\alpha = (-1)^j \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

тогда аппроксимации будут иметь порядок $p = 1$.

Дискретизируем дробную производную Капуто по времени, используя $L1$ -алгоритм [4]:

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma} u(x, t_{k+1}) = \frac{1}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x, t_{k+1-j}) - u(x, t_{k-j})] + O(\Delta^{2-\gamma}), \quad (1.3)$$

где $b_j^\gamma = (j+1)^{1-\gamma} - j^{1-\gamma}$, $j = 0, 1, \dots, M$.

Также мы будем использовать формулы численного дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h} + O(h), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_{k+1}) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta} + O(\Delta). \quad (1.5)$$

В результате получаем следующую неявную разностную схему:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{k+1}^i - u_k^i}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u_{k+1-j}^i - u_{k-j}^i] = -V \frac{u_{k+1}^i - u_{k+1}^{i-1}}{h} \\ & + \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j} + \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j} + f_{k+1}^i, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$f_{k+1}^i = f(x_i, t_{k+1}, v^i(t_k + \Delta), v_{t_k+\Delta}^i(\cdot)).$$

Схема дополняется начальными условиями $u_0^i = \varphi(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$, и граничными условиями $u_k^0 = \varphi_1(t_k)$, $u_k^M = \varphi_2(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, M$.

Схема может быть переписана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mu u_{k+1}^i - r_2 u_{k+1}^{i-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j} \\ = u_{k+1}^i + \beta r_1 [b_k^\gamma u_0^i + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u_{k-j}^i] + \Delta f_{j+1}^i, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $r_1 = \Delta^{1-\gamma}/\Gamma(2-\gamma)$, $r_2 = V\Delta/h$, $r_3 = D\Delta/h^\alpha$, $\mu = 1 + \beta r_1 + r_2 + \alpha r_3$.

Лемма 2 [4, замечание 2]. *Коэффициенты матрицы системы (1.7) имеют строгое диагональное преобладание с положительными диагональными элементами, следовательно, система разрешима и имеет единственное решение.*

Таким образом, применение дискретной схемы сводится на каждом временном слое с номером k к решению линейной системы относительно неизвестных u_{k+1}^i , и эта система разрешима согласно результату леммы 2.

2. Сведение к общей разностной схеме систем с наследственностью

Чтобы исследовать метод (1.7) на сходимость и порядок сходимости, сведем его к общей разностной схеме систем с наследственностью. Эта схема была изложена для численных методов решения обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений в работе [8], для уравнений в частных производных с эффектом наследственности в работе [9]. Если уравнение содержит дробную производную только по пространству, то метод также вкладывается в общую схему, см. работу [10], где был исследован численный метод решения для уравнения с односторонней дробной производной по пространству и с эффектом наследственности по времени. Однако, если уравнение содержит дробную производную по времени, непосредственное использование результатов этой схемы затруднительно, так как возникает проблема с определением устойчивости метода в общей схеме.

Определим для каждого временного слоя с номером $j = 0, 1, \dots, M$ послойный вектор $u_j = (u_j^0, u_j^1, \dots, u_j^N)$.

Кроме того, определим накопившуюся предысторию послойных векторов к моменту t_j , $j = 0, 1, \dots, M$, вектором $y_j = \{u_k\}_j = \{u_k, 0 \leq k \leq j\}$.

Так как в силу леммы 2 система (1.7) разрешима, то она может быть записана в виде

$$y_{j+1} = S_j y_j + \Delta \Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)),$$

т. е. так, как в общей разностной схеме для систем с наследственностью.

Размерность вектора $y_j = (M+1) \times (j+1)$, соответственно размерность вектора $y_{j+1} = (M+1) \times (j+2)$, следовательно, матрица S_j не квадратная. Хотя можно ввести определение устойчивости метода и в этом случае, например, как в [7, определение 3.33], однако эффективные спектральные критерии отсутствуют. Поэтому будем исследовать сходимость метода (1.7) непосредственно, не используя результаты общей теоремы о порядке сходимости [6, теорема 1], однако повторяя фактически методику вложения в эту схему, согласно идеям книги [6].

3. Погрешность аппроксимации

Исследуем погрешность аппроксимации (невязку) метода (1.6).

Невязкой (без интерполяции) метода (1.6) назовем по определению сеточную функцию

$$\begin{aligned} \psi_k^i &= \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x_i, t_{k+1-j}) - u(x_i, t_{k-j})] \\ &+ V \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h} - \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) \\ &- \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) - \hat{f}_{k+1}^i, \quad \hat{f}_{k+1}^i = f(x_i, t_{k+1}, u(x_i, t_{k+1}), u_{t_{k+1}}(x_i, \cdot)). \end{aligned}$$

Лемма 3. Пусть точное решение $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t и по x , а также дробные производные $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ и $\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial(-x)^\alpha}$ непрерывно дифференцируемы по t и по x . Тогда невязка без интерполяции имеет порядок $\Delta + h$.

Доказательство. Разложим входящие в определение невязки без интерполяции величины в окрестности точки (x_i, t_{k+1}) и воспользуемся разложениями (1.1)–(1.5). \square

Для каждого фиксированного $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию точного решения к моменту времени t_j , $j = 0, \dots, M$: $\{u(x_i, t_k)\}_j = \{u(x_i, t_k), j - m \leq k \leq j\}$. Будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию с экстраполяцией продолжением точного решения

$$w^i(t) = \begin{cases} u(x_i, t_{l-1}), & t_{l-1} \leq t \leq t_l, \quad 1 \leq l \leq j, \\ u(x_i, t_{j-1}), & t_j \leq t \leq t_j + \Delta, \\ \varphi(x_i, t), & t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{cases}$$

Невязкой (с интерполяцией) метода (1.6) назовем по определению сеточную функцию

$$\begin{aligned} \nu_k^i &= \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta} + \frac{\beta}{\Delta^\gamma \Gamma(2-\gamma)} \sum_{j=0}^k b_j^\gamma [u(x_i, t_{k+1-j}) - u(x_i, t_{k-j})] \\ &+ V \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_{i-1}, t_{k+1})}{h} - \left(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) \\ &- \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}\right) \frac{D}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) - \tilde{f}_{k+1}^i, \quad \tilde{f}_{k+1}^i = f(x_i, t_{k+1}, w^i(t_k + \Delta), w_{t_k + \Delta}^i(\cdot)). \end{aligned}$$

Лемма 4. В условиях предыдущей леммы невязка с интерполяцией имеет порядок $\Delta + h$.

Доказательство. Из определений невязки с интерполяцией и невязки без интерполяции имеем

$$\nu_k^i = \psi_k^i + f(x_i, t_{k+1}, u(x_i, t_{k+1}), u_{t_{k+1}}(x_i, \cdot)) - f(x_i, t_{k+1}, w^i(t_k + \Delta), w_{t_k + \Delta}^i(\cdot)).$$

Из того, что кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением имеет первый порядок (лемма 1), получаем

$$|w^i(t) - u(x_i, t)| \leq C_1 \Delta, \quad t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta.$$

Из этих соотношений с учетом условия (0.2) вытекает утверждение леммы. \square

4. Сходимость метода

Обозначим через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$ погрешность метода в узлах. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует постоянная C , не зависящая от h и Δ , такая, что $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, 1, \dots, N$ и $j = 0, 1, \dots, M$.

Определим для каждого временного слоя с номером $j = 0, 1, \dots, M$ послынную погрешность — вектор $\varepsilon_j = (\varepsilon_j^1, \varepsilon_j^2, \dots, \varepsilon_j^{N-1})$ с нормой $\|\varepsilon_j\| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\varepsilon_j^i|$.

Кроме того, определим накопившуюся предысторию послынной погрешности к моменту t_j , $j = 0, 1, \dots, M$: $\{\varepsilon_k\}_j = \{\varepsilon_k, 0 \leq k \leq j\}$ с нормой $\|\{\varepsilon_k\}_j\| = \max_{0 \leq k \leq j} \|\varepsilon_k\|$.

Лемма 5. Пусть $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\varepsilon_{k+1}^i|$, тогда

$$(1 + \beta r_1) \|\varepsilon_{k+1}\| \leq \left| \varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1 \left[b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \varepsilon_{k-j}^{i_0} \right] + \Delta \check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta \nu_k^{i_0} \right|.$$

Доказательство. Перепишем определение невязки с интерполяцией в виде

$$\begin{aligned} & \mu u(x_i, t_{k+1}) - r_2 u(x_{i-1}, t_{k+1}) - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i+1-j}, t_{k+1}) - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha u(x_{i-1+j}, t_{k+1}) \\ & = u(x_i, t_{k+1}) + \beta r_1 \left[b_k^\gamma u(x_i, t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) u(x_i, t_{k-j}) \right] + \Delta \check{f}_{j+1}^i + \Delta \nu_k^i. \end{aligned}$$

Отсюда и из определения метода (1.7) получаем уравнение для погрешности

$$\begin{aligned} & \mu \varepsilon_{k+1}^i - r_2 \varepsilon_{k+1}^{i-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i-1+j} \\ & = \varepsilon_{k+1}^i + \beta r_1 \left[b_k^\gamma \varepsilon_0^i + \sum_{j=0}^{k-1} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \varepsilon_{k-j}^i \right] + \Delta \check{f}_{j+1}^i + \Delta \nu_k^i - \Delta f_{j+1}^i. \end{aligned}$$

Так как $1 + \beta r_1 = \mu - r_2 - \alpha r_3$, то, используя свойства коэффициентов $\omega_1^\alpha = -\alpha$, $\omega_j^\alpha > 0$, $j = 2, 3, \dots$, $\sum_{j=0}^{i_0+1} \omega_j^\alpha < 0$, $\sum_{j=0}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha < 0$ [4, лемма 1], получаем

$$\begin{aligned} & (1 + \beta r_1) \|\varepsilon_{k+1}\| \leq \left(\mu - r_2 - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha \right) |\varepsilon_{k+1}^{i_0}| \\ & \leq \mu |\varepsilon_{k+1}^{i_0}| - r_2 |\varepsilon_{k+1}^{i_0-1}| - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha |\varepsilon_{k+1}^{i_0+1-j}| - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha |\varepsilon_{k+1}^{i_0-1+j}| \\ & \leq \left| \mu \varepsilon_{k+1}^{i_0} - r_2 \varepsilon_{k+1}^{i_0-1} - \frac{1+q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{i_0+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i_0+1-j} - \frac{1-q}{2} r_3 \sum_{j=0, j \neq 1}^{N-i_0+1} \omega_j^\alpha \varepsilon_{k+1}^{i_0-1+j} \right| \\ & = \left| \varepsilon_k^{i_0} + \beta r_1 \left[b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \varepsilon_{k-j}^{i_0} \right] + \Delta \check{f}_{k+1}^{i_0} - \Delta f_{k+1}^{i_0} + \Delta \nu_k^{i_0} \right|. \end{aligned}$$

□

В следующем утверждении проводится оценка накопившейся предыстории послынной погрешности к моменту t_{k+1} через накопившуюся предысторию послынной погрешности к моменту t_k .

Лемма 6. *Предположим, что условия леммы 3 выполнены, тогда справедлива оценка*

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \leq (1 + (L + K)\Delta)\|\{\varepsilon_j\}_k\| + C_2\Delta(h + \Delta),$$

где C_2 — некоторая константа.

Доказательство. Пусть $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq N-1} |\varepsilon_{k+1}^i|$, тогда из леммы 5 получаем

$$\begin{aligned} (1 + \beta r_1)\|\varepsilon_{k+1}\| &\leq |\varepsilon_k^{i_0}| + \beta r_1 \left[b_k^\gamma \varepsilon_0^{i_0} + \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma) \varepsilon_{k-j}^{i_0} \right] + \Delta |\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + \Delta |\nu_k^{i_0}| \\ &\leq [1 + \beta r_1 (b_k^+ \sum_{j=0}^{k-i} (b_j^\gamma - b_{j+1}^\gamma))] \|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta |\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + \Delta |\nu_k^{i_0}| \\ &\leq (1 + \beta r_1) \|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta |\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + \Delta |\nu_k^{i_0}|. \end{aligned}$$

Разделим обе части этого неравенства на $(1 + \beta r_1)$, получим

$$\|\varepsilon_{k+1}\| \leq \|\{\varepsilon_j\}_k\| + \frac{\Delta}{1 + \beta r_1} (|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + |\nu_k^{i_0}|) \leq \|\{\varepsilon_j\}_k\| + \Delta (|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| + |\nu_k^{i_0}|). \quad (4.1)$$

Из липшицевости функции f по двум последним аргументам (из неравенства (0.2)) и свойств кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением следует неравенство

$$|\check{f}_{k+1}^{i_0} - f_{k+1}^{i_0}| \leq (L + K) \|\{\varepsilon_j\}_k\|. \quad (4.2)$$

Из (4.1), (4.2) и леммы 4 следует утверждение доказываемой леммы. \square

Теорема. *Пусть точное решение $u(x, t)$ уравнения (0.1) является достаточно гладким (выполнено предположение леммы 3), тогда метод (1.7) сходится с порядком $h + \Delta$.*

Доказательство. Из леммы 6 имеем

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \leq A \|\{\varepsilon_j\}_k\| + B,$$

где $A = 1 + (L + K)\Delta$, $B = C_2\Delta(h + \Delta)$. Последовательно получаем $\|\{\varepsilon_j\}_0\| = 0$, $\|\{\varepsilon_j\}_1\| \leq B$, $\|\{\varepsilon_j\}_2\| \leq AB + B, \dots, \|\{\varepsilon_j\}_n\| \leq (A^{n-1} + \dots + A + 1)B$. Используя формулу геометрической прогрессии, получаем для всех временных слоев с номером $n \leq M$

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leq \frac{A^n - 1}{A - 1} B \leq \frac{A^M - 1}{A - 1} B.$$

Подставим в эту оценку выражения для A и B , воспользуемся также связью $\Delta M = T - t_0$:

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leq \frac{(1 + (L + K)\Delta)^{(T-t_0)/\Delta} - 1}{(L + K)\Delta} C_2\Delta(h + \Delta).$$

Отсюда получаем оценку

$$\|\{\varepsilon_j\}_n\| \leq \frac{C_2}{L + K} e^{(L+K)(T-t_0)} (h + \Delta),$$

равномерную по всем $n = 1, 2, \dots, M$. Эта оценка означает сходимость метода с порядком $h + \Delta$. \square

5. Результаты численного эксперимента

Рассмотрим уравнение с переменным запаздыванием

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^\gamma u(x, t)}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial (-x)^\alpha} + f, \tag{5.1}$$

$$f = \frac{1}{\ln((t^2/4)(x - 1/2)^3(3/2 - x)^3)} \left(2 \left(t + \frac{t^{2-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{3}{2} - x \right)^3 - \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^{3-\alpha} + \left(\frac{3}{2} - x \right)^{3-\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{3\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)} \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^{4-\alpha} + \left(\frac{3}{2} - x \right)^{4-\alpha} \right) - \frac{1}{2} \frac{3\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^{5-\alpha} + \left(\frac{3}{2} - x \right)^{5-\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(7)}{\Gamma(7-\alpha)} \left(\left(x - \frac{1}{2} \right)^{6-\alpha} + \left(\frac{3}{2} - x \right)^{6-\alpha} \right) \right) \ln \left(u \left(x, t - \frac{t}{2} \right) \right),$$

заданное при $1/2 \leq x \leq 3/2, 1 \leq t \leq 5$, с начальными и граничными условиями вида

$$u(x, r) = r^2 \left(x - \frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{3}{2} - x \right)^3, \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2},$$

$$u \left(\frac{1}{2}, t \right) = 0, \quad u \left(\frac{3}{2}, t \right) = 0, \quad 1 \leq t \leq 5.$$

Точным решением уравнения (5.1) является функция $u(x, t) = t^2(x - 1/2)^3(3/2 - x)^3$. Обозначим максимальную погрешность в узлах через

$$E(\Delta, h) = \max_{0 \leq j \leq M, 0 \leq i \leq N} |u(x_i, t_j) - u_j^i|.$$

Т а б л и ц а 1

Зависимость погрешности от пространственного шага и порядок погрешности

h	$\gamma = 0.15, \alpha = 1.1$		$\gamma = 0.85, \alpha = 1.9$	
	$E(\Delta, h)$	$order_s$	$E(\Delta, h)$	$order_s$
1/20	0.00568		0.00437	
1/40	0.00293	0.9567	0.00222	0.9765
1/80	0.00149	0.9687	0.00112	0.9884
1/160	0.00075	0.9854	0.00056	0.9996
1/320	0.00037	0.9975	0.00028	1.0004

Т а б л и ц а 2

Зависимость погрешности от временного шага и порядок погрешности

Δ	$\gamma = 0.15, \alpha = 1.1$		$\gamma = 0.85, \alpha = 1.9$	
	$E(\Delta, h)$	$order_t$	$E(\Delta, h)$	$order_t$
1/16	0.00074		0.000032	
1/32	0.00038	0.9432	1.625×10^{-5}	0.97743
1/64	0.00019	0.9632	8.19×10^{-6}	0.9886
1/128	0.00009	0.9778	4.098×10^{-6}	0.9988
1/256	0.00004	0.9965	2.05×10^{-6}	0.9999

Проведен численный эксперимент, в котором тестировался метод (1.7) при изменении пространственного шага h с величины $1/20$ до величины $1/320$ при фиксированном временном шаге $\Delta = 1/256$. Порядок сходимости относительно пространственного шага характеризуется в эксперименте величиной $order_s = \log_2 \left(\frac{E(\Delta, 2h)}{E(\Delta, h)} \right)$, изменения которой отражены в табл. 1. В эксперименте также брались разные порядки α и γ дробных производных.

Для исследования зависимости максимальной погрешности от времени временной шаг Δ менялся от $1/16$ до $1/256$ при фиксированном пространственном шаге $h = 1/4000$. Порядок сходимости относительно временного шага характеризуется в эксперименте величиной $order_t = \log_2 \left(\frac{E(2\Delta, h)}{E(\Delta, h)} \right)$, изменения проиллюстрированы в табл. 2. Из этих таблиц можно заметить, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с теоретическими результатами. Можно также отметить, что зависимость величины погрешности от параметра γ гораздо сильнее при изменении временного шага, чем при изменении пространственного шага.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Podlubny I.** Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999. 368 p.
2. **Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.** Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 524 p.
3. **Meerschaert M.M., Tadjeran C.** Finite difference approximations for two sided space fractional partial differential equations // Appl. Numer. Math. 2006. Vol. 56, no. 1. P. 80–90.
4. **Liu F., Zhuang P., Burrage K.** Numerical methods and analysis for a class of fractional advection–dispersion models // Comput. Math. Appl. 2012. Vol. 64, no. 10. P. 2990–3007.
5. **Wu J.** Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 438 p.
6. **Пименов В.Г.** Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: Изд. Уральского ун-та, 2014. 134 с.
7. **Ким А.В., Пименов В.Г.** i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: РХД, 2004. 256 с.
8. **Пименов В.Г.** Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, №. 1. С. 105–114.
9. **Пименов В.Г., Ложников А.Б.** Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, №. 1. С. 178–189.
10. **Pimenov V.G., Hendy A.S.** Numerical methods for the equation with fractional derivative on state and with functional delay on time // Вестн. Тамбов. ун-та. Сер.: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1358–1361.

Пименов Владимир Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: v.g.pimenov@urfu.ru

Хенди Ахмед Саид
аспирант

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: ahmed.hendy@fsc.bu.edu.eg

Поступила 13.03.2016

УДК 517.962.24

**ОБ ОТТАЛКИВАЮЩИХ ЦИКЛАХ И ХАОТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ
РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ¹**

Л. И. Родина

Рассматриваются разностные уравнения, правая часть каждого из которых в данный момент времени зависит не только от значения в предыдущий момент, но и от случайного параметра, принимающего значения в заданном множестве Ω . Для данной вероятностной модели исследованы различные динамические режимы развития, которые имеют определенные отличия от режимов детерминированных моделей и более полно отображают процессы, происходящие в реальных физических системах. Получены условия существования притягивающего и отталкивающего циклов длины $k \geq 1$, выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица, а также условия, при которых решения хаотические с вероятностью единица. Показано, что хаотические решения существуют в том случае, когда уравнение со случайными параметрами либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица.

Ключевые слова: разностные уравнения со случайными параметрами, притягивающий и отталкивающий циклы, хаотическая траектория.

L. I. Rodina. On repelling cycles and chaotic solutions of difference equations with random parameters.

We consider difference equations with right-hand sides depending at each moment not only on the value at the preceding moment but also on a parameter that takes random values in a given set Ω . For this probabilistic model, we study various dynamic scenarios, which are in a certain way different from scenarios of deterministic models and give a more comprehensive presentation of the processes in real physical systems. We derive conditions for the existence of attracting and repelling cycles of length $k \geq 1$ that hold for all values of the random parameter and conditions that hold with probability one. We also derive conditions under which the solutions are chaotic with probability one. It is shown that the chaotic solutions exist in the case where either the equation with random parameters has no cycles or all the cycles are repelling with probability one.

Keywords: difference equations with random parameters, attracting and repelling cycles, chaotic trajectory.

MSC: 37N10, 34F05, 60H25, 93E03

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-227-235

Введение

Известно, что многие системы различной природы обладают дискретным по времени режимом работы. Примерами таких систем являются: экономические модели, в которых используются периодически определяемые индексы и показатели; модели популяционной динамики, характеризующие изменения в популяциях от поколения к поколению; дискретные технические системы управления цифровыми сигналами (системы телеметрии, передающие периодические данные с различных метеостанций, космических зондов или нефтяных скважин). При математическом моделировании дискретных динамических систем возникают автономные разностные (или рекуррентные) уравнения. Например, развитие многих биологических популяций с перекрывающимися поколениями (к которым можно отнести популяции некоторых видов насекомых, рыб, однолетних растений) определяется уравнением

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (0.1)$$

где x_{n+1} — размер популяции в момент времени $n + 1$, который выражается через размер популяции x_n в предыдущий момент времени. Свойства решений таких уравнений описаны, в частности, в работах [1–3]. К наиболее известным результатам можно отнести теорему

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках базовой части.

А. Н. Шарковского [2, гл. 3; 4] о сосуществовании циклов различной длины и утверждение американских математиков Т. Ли и Дж. Йорка [5] о связи между наличием цикла периода три и существованием несчетного множества хаотических решений.

Рассмотрим обобщение модели (0.1) в предположении, что в каждый момент времени n функция f зависит также от случайного параметра ω_n , принимающего значения в множестве Ω . Получим вероятностную модель, заданную разностным уравнением

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times I, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (0.2)$$

где Ω — заданное множество с сигма-алгеброй подмножеств $\tilde{\mathfrak{A}}$, на которой определена вероятностная мера $\tilde{\mu}$, $I = [a, b]$. Предполагаем, что для каждого $\omega \in \Omega$ функция $x \mapsto f(\omega, x)$ непрерывно дифференцируема.

Введем в рассмотрение вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, где Σ означает множество последовательностей $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n, \dots) \in \Omega^\infty$, система множеств \mathfrak{A} является наименьшей сигма-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами

$$D_n \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega_0 \in \Omega_0, \dots, \omega_n \in \Omega_n\}, \quad \text{где } \Omega_j \in \tilde{\mathfrak{A}}, \quad j = 0, \dots, n,$$

и определим меру $\tilde{\mu}(D_n) = \tilde{\mu}(\Omega_0) \cdot \tilde{\mu}(\Omega_1) \cdot \dots \cdot \tilde{\mu}(\Omega_n)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (например, [6, гл. 2, § 3]) на измеримом пространстве (Σ, \mathfrak{A}) существует единственная вероятностная мера μ , которая является продолжением меры $\tilde{\mu}$ на сигма-алгебру \mathfrak{A} . Отметим, что подобные вероятностные модели, построенные для управляемых систем со случайными параметрами, исследованы в [7; 8].

В настоящей работе получены условия существования притягивающего и отталкивающего циклов длины $k \geq 1$, выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица, а также условия, при которых решения хаотические с вероятностью единица. Показано, что хаотические решения существуют в том случае, когда уравнение (0.2) либо не имеет ни одного цикла, либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица.

1. О притягивающих и отталкивающих циклах разностных уравнений со случайными параметрами

Сначала приведем определение и основные свойства *притягивающего и отталкивающего циклов* для детерминированного уравнения (0.1) (см. [2, с. 7–9]).

Точка $\beta_0 \in I$ называется *периодической точкой периода* $k \in \mathbb{N}$ для уравнения (0.1), если $f^k(\beta_0) = \beta_0$ и $f^m(\beta_0) \neq \beta_0$ при $m = 1, \dots, k-1$. Если $k \geq 2$, то каждая из точек $\beta_m = f^m(\beta_0)$, $m = 1, \dots, k-1$ также является периодической точкой периода k , т. е. точки $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ образуют периодическую траекторию или *цикл* $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ периода k (здесь $f^1 = f$, $f^k = f(f^{k-1})$, $k = 2, 3, \dots$).

Положением равновесия (неподвижной точкой) уравнения (0.1) называется точка $x_* \in I$ такая, что $f(x_*) = x_*$. Положение равновесия x_* является точкой периода $k = 1$.

Цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ уравнения (0.1) называется *притягивающим*, если существует окрестность U этого цикла такая, что $f(U) \subset U$ и $\bigcap_{n \geq 0} f^n(U) = B$. В этом случае для каждой точки $x_0 \in U$ траектория $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^\infty$ распадается на k последовательностей, сходящихся к точкам $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ соответственно.

Цикл B называется *отталкивающим*, если существует его окрестность U , которую каждая точка из множества $U \setminus B$ покидает за конечное время, т. е. для каждого $x \in U \setminus B$ найдется номер $N = N(x)$, при котором $f^N(x) \notin U$.

Если отображение f дифференцируемо, существуют простые достаточные условия для различения притягивающих и отталкивающих циклов: нужно вычислить величину

$$\lambda(B) = f'(\beta_0) \cdot \dots \cdot f'(\beta_{k-1}),$$

называемую *мультипликатором* цикла B , и если окажется, что $|\lambda(B)| < 1$, то цикл B притягивающий, а если $|\lambda(B)| > 1$, то цикл B отгалкивающий. В случае $|\lambda(B)| = 1$ цикл может быть как притягивающим, так и отгалкивающим, может иметь место и более сложное поведение траекторий в его окрестности.

В данном разделе получены достаточные условия существования *притягивающего и отгалкивающего циклов* для уравнения со случайными параметрами (0.2), выполненные для всех значений случайного параметра и выполненные с вероятностью единица. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\sigma^n \doteq (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}), \quad f^n(\sigma^n, x) \doteq f(\omega_{n-1}, \dots, f(\omega_1, f(\omega_0, x))).$$

Будем также пользоваться обозначениями $f^n(\sigma, x) = f^n(\sigma^n, x)$ и $x_n(\sigma, x) = f^n(\sigma, x)$, подразумевая, что значения функции $f^n(\sigma, x)$ зависят только от первых n членов последовательности $\sigma = (\omega_0, \omega_1, \dots)$.

О п р е д е л е н и е 1. Точки $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ образуют *цикл B периода $k \geq 1$* для уравнения (0.2), если для всех $\sigma^k \in \Omega^k$ выполнены равенства

$$f^k(\sigma, \beta_0) = \beta_0, \quad f^m(\sigma, \beta_0) = \beta_m \quad \text{для всех } m = 1, \dots, k-1 \quad (1.3)$$

и цикл B не содержит цикла меньшего периода. *Положением равновесия* (неподвижной точкой) уравнения (0.2) назовем точку $x_* \in I$ такую, что $f(\omega, x_*) = x_*$ для всех $\omega \in \Omega$.

О п р е д е л е н и е 2. Цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ назовем *притягивающим циклом* для уравнения (0.2), если существует окрестность U этого цикла такая, что $\bigcap_{n \geq 1} f^n(\sigma, U) = B$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Цикл B назовем *притягивающим с вероятностью единица*, если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется окрестность $U = U(\sigma)$ цикла B такая, что $\bigcap_{n \geq 1} f^n(\sigma, U) = B$.

О п р е д е л е н и е 3. Цикл B назовем *отгалкивающим циклом* уравнения (0.2), если существует его окрестность U , которую каждая точка $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ покидает за конечное время, т.е. для каждого $(\sigma, x) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$. Цикл B назовем *отгалкивающим с вероятностью единица*, если существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и окрестность U данного цикла такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждой точки $(\sigma, x) \in \Sigma_0 \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x)$, для которого $f^N(\sigma, x) \notin U$.

Предложение 1. Если уравнение (0.2) имеет цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ и

$$\prod_{i=0}^{k-1} \overline{\lim}_{x \rightarrow \beta_i} \sup_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| < 1,$$

то B является притягивающим циклом данного уравнения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем производную функции $f^k(\sigma, x)$ в точке $\beta_j, j = 0, \dots, k-1$, учитывая равенство (1.3):

$$(f^k(\sigma, \beta_j))'_x = f'_x(\omega_0, \beta_j) f'_x(\omega_1, \beta_{j+1}) \cdot \dots \cdot f'_x(\omega_{k-1}, \beta_{j+k-1}),$$

где $\beta_m = \beta_{m-k}$, если $m \geq k$. Тогда для любого $j = 0, \dots, k-1$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \beta_j} \sup_{\sigma_k \in \Omega^k} |(f^k(\sigma, x))'_x| = \prod_{i=0}^{k-1} \overline{\lim}_{x \rightarrow \beta_i} \sup_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| < 1.$$

Следовательно, существует окрестность U цикла B и постоянная $C < 1$ такие, что

$$\sup_{\sigma_k \in \Omega^k} |(f^k(\sigma, x))'_x| \leq C < 1 \quad \text{для всех } x \in U.$$

Можно предполагать, что U является объединением некоторых окрестностей U_0, \dots, U_{k-1} точек $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ соответственно, т. е. $U = \bigcup_{i=0}^{k-1} U_i$.

Обозначим через $J(x_0, \beta_j)$ интервал с концами x_0 и β_j . По формуле конечных приращений для любого $x_0 \in U_j$ существует точка $\hat{x}_0 \in J(x_0, \beta_j) \subset U_j$ такая, что

$$\begin{aligned} |x_k(\sigma, x_0) - \beta_j| &= |f^k(\sigma, x_0) - f^k(\sigma, \beta_j)| = |(f^k(\sigma, \hat{x}_0))'_x| \cdot |x_0 - \beta_j| \\ &\leq \sup_{\sigma^k \in \Omega^k} |(f^k(\sigma, \hat{x}_0))'_x| \cdot |x_0 - \beta_j| \leq C|x_0 - \beta_j|. \end{aligned}$$

Поскольку $C < 1$, то $x_k = x_k(\sigma, x_0) \in U_j$. Далее, найдется точка $\hat{x}_1 \in J(x_k, \beta_j) \subset U_j$, для которой

$$|x_{2k}(\sigma, x_0) - \beta_j| = |f^k(\sigma, x_k) - f^k(\sigma, \beta_j)| = |(f^k(\sigma, \hat{x}_1))'_x| \cdot |x_k - \beta_j|,$$

следовательно, $|x_{2k}(\sigma, x_0) - \beta_j| \leq C|x_k - \beta_j| \leq C^2|x_0 - \beta_j|$. Аналогично для всех $\sigma \in \Sigma$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$|x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| \leq C^n|x_0 - \beta_j|, \text{ где } C < 1,$$

из которого получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| = 0$ для любого $x_0 \in U_j$, всех $\sigma \in \Sigma$ и каждого $j = 0, \dots, k-1$, т. е. цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ является притягивающим. \square

Предложение 2. Если уравнение (0.2) имеет цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ и

$$\prod_{i=0}^{k-1} \liminf_{x \rightarrow \beta_i} \inf_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| > 1, \quad (1.4)$$

то цикл B является отталкивающим циклом уравнения (0.2).

Доказательство. Из условия (1.4) следует, что для любого $j = 0, \dots, k-1$ имеет место неравенство

$$\liminf_{x \rightarrow \beta_j} \inf_{\sigma^k \in \Omega^k} |(f^k(\sigma, x))'_x| = \prod_{i=0}^{k-1} \liminf_{x \rightarrow \beta_i} \inf_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| > 1.$$

Следовательно, существуют окрестность U цикла B и постоянная $D > 1$ такие, что

$$\inf_{\sigma^k \in \Omega^k} |(f^k(\sigma, x))'_x| \geq D > 1 \text{ для всех } x \in U.$$

Пусть $U = \bigcup_{i=0}^{k-1} U_i$, где U_i — окрестность точки β_i , $i = 0, \dots, k-1$ и $x_0 \in U_j$. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 1, получаем, что для всех $\sigma \in \Sigma$ и тех $n \in \mathbb{N}$, для которых $x_{nk}(\sigma, x_0) \in U_j$, выполнено неравенство

$$|x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| \geq D^n|x_0 - \beta_j|, \text{ где } D > 1.$$

Поэтому для каждой точки $(\sigma, x_0) \in \Sigma \times (U \setminus B)$ найдется номер $N = N(\sigma, x_0)$, для которого $x_{Nk}(\sigma, x_0) = f^{Nk}(\sigma, x_0) \notin U$, т. е. цикл B является отталкивающим. \square

Далее буквой M будем обозначать математическое ожидание случайной величины.

Теорема 1. Если уравнение (0.2) имеет цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ и существует окрестность U этого цикла такая, что

$$M\left(\ln \sup_{x \in U} |(f^k(\sigma, x))'_x|\right) < 0, \quad (1.5)$$

то цикл B является притягивающим с вероятностью единица.

Доказательство. Обозначим $\sigma_1^k = (\omega_0, \dots, \omega_{k-1})$, $\sigma_2^k = (\omega_k, \dots, \omega_{2k-1}), \dots$, тогда любое $\sigma \in \Sigma$ можно представить в виде $\sigma = (\sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k, \dots)$. Пусть $U = \bigcup_{i=0}^{k-1} O_\Delta(\beta_i)$, где $O_\Delta(\beta_i) = (\Delta - \beta_i, \Delta + \beta_i)$, $\Delta > 0$. Для фиксированного $j \in \{0, \dots, k-1\}$ рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{C_n(\sigma)\}_{n=1}^\infty$, где

$$C_n(\sigma) = C_n(\sigma_n^k) = \sup_{x \in O_\Delta(\beta_j)} |(f^k(\sigma_n^k, x))'_x|$$

и последовательность $\{S_n(\sigma)\}_{n=0}^\infty$:

$$S_0(\sigma) = 0, \quad S_n(\sigma) = \ln C_1(\sigma_1^k) + \dots + \ln C_n(\sigma_n^k), \quad n = 1, 2, \dots,$$

которая является случайным блужданием на прямой. Из неравенства (1.5) следует, что с вероятностью единица $S_n(\sigma)$ уходит в минус бесконечность и достигает конечного максимума $S \geq 0$. Это означает, что существуют множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ и постоянная $S \geq 0$ такие, что $\mu(\Sigma_0) = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\sigma) = -\infty$ и $S_n(\sigma) \leq S$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$ (см. [9, с. 447–449]). Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} C_1(\sigma_1^k) \cdot \dots \cdot C_n(\sigma_n^k) = 0$ и неравенство

$$C_1(\sigma_1^k) \cdot \dots \cdot C_n(\sigma_n^k) \leq e^S \tag{1.6}$$

выполнено для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma = (\sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k, \dots) \in \Sigma_0$.

Возьмем $x_0 \in O_\delta(\beta_j)$, где $\delta = \Delta e^{-S} \leq \Delta$. Так же, как при доказательстве предложения 1, получаем

$$|x_k(\sigma, x_0) - \beta_j| \leq \sup_{x \in J(x_0, \beta_j)} |(f^k(\sigma_1^k, x))'_x| \cdot |x_0 - \beta_j| \leq C_1(\sigma_1^k) \cdot |x_0 - \beta_j|,$$

где $J(x_0, \beta_j)$ — интервал с концами x_0 и β_j . Из (1.6) следует, что $x_k = x_k(\sigma, x_0) \in O_\Delta(\beta_j)$; найдем такую точку $\hat{x}_1 \in J(x_k, \beta_j) \subset O_\Delta(\beta_j)$, что $|x_{2k}(\sigma, x_0) - \beta_j| = |(f^k(\sigma_2^k, \hat{x}_1))'_x| \cdot |x_k - \beta_j|$, тогда

$$|x_{2k}(\sigma, x_0) - \beta_j| \leq C_2(\sigma_2^k) \cdot |x_k - \beta_j| \leq C_1(\sigma_1^k) C_2(\sigma_2^k) \cdot |x_0 - \beta_j|.$$

Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$ выполнено неравенство

$$|x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| \leq C_1(\sigma_1^k) \cdot \dots \cdot C_n(\sigma_n^k) \cdot |x_0 - \beta_j|. \tag{1.7}$$

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} C_1(\sigma_1^k) \cdot \dots \cdot C_n(\sigma_n^k) = 0$ с вероятностью единица, из (1.7) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| = 0$$

для любого $x_0 \in O_\delta(\beta_j)$ также с вероятностью единица. Таким образом, цикл B является притягивающим с вероятностью единица. \square

Теорема 2. Если уравнение (0.2) имеет цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ и существует окрестность U этого цикла такая, что

$$M\left(\ln \inf_{x \in U} |(f^k(\sigma, x))'_x|\right) > 0, \tag{1.8}$$

то цикл B является отталкивающим с вероятностью единица.

Доказательство. Пусть $U = \bigcup_{i=0}^{k-1} O_\delta(\beta_i)$, где $O_\delta(\beta_i) = (\delta - \beta_i, \delta + \beta_i)$, $\delta > 0$. Для фиксированного $j \in \{0, \dots, k-1\}$ рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{c_n(\sigma)\}_{n=1}^\infty$:

$$c_n(\sigma) = c_n(\sigma_n^k) = \inf_{x \in O_\delta(\beta_j)} |(f^k(\sigma_n^k, x))'_x|$$

и последовательность $\{s_n(\sigma)\}_{n=1}^\infty$: $s_n(\sigma) = \ln c_1(\sigma_1^k) + \dots + \ln c_n(\sigma_n^k)$. Из (1.8) следует, что с вероятностью единица $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\sigma) = +\infty$, т.е. существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(\sigma) = +\infty$ для каждого $\sigma \in \Sigma_0$. Пусть $x_0 \in O_\delta(\beta_j) \setminus \beta_j$, $D = \delta/|x_0 - \beta_j|$. Тогда для любого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется такой номер $N = N(\sigma, x_0)$, что имеет место неравенство $s_N(\sigma) > \ln D$, а значит, и равносильное ему неравенство

$$e^{s_N(\sigma)} = c_1(\sigma_1^k) \cdot \dots \cdot c_N(\sigma_N^k) > D.$$

По формуле конечных приращений для любого $x_0 \in O_\delta(\beta_j) \setminus \beta_j$ найдется $\hat{x}_0 \in J(x_0, \beta_j)$, для которого

$$|x_k(\sigma, x_0) - \beta_j| = |f^k(\sigma_1^k, x_0) - f^k(\sigma_1^k, \beta_j)| = |(f^k(\sigma_1^k, \hat{x}_0))'_x| \cdot |x_0 - \beta_j|.$$

Следовательно,

$$|x_k(\sigma, x_0) - \beta_j| \geq \inf_{x \in J(x_0, \beta_j)} |(f^k(\sigma_1^k, x))'_x| \cdot |x_0 - \beta_j| \geq c_1(\sigma_1^k) \cdot |x_0 - \beta_j|.$$

Аналогично получаем, что

$$|x_{Nk}(\sigma, x_0) - \beta_j| = |x_{Nk}(\sigma, x_0) - x_{Nk}(\sigma, \beta_j)| > D|x_0 - \beta_j| = \delta,$$

т.е. $x_{Nk}(\sigma, x_0) \notin O_\delta(\beta_j)$ для всех $(\sigma, x_0) \in \Sigma_0 \times (O_\delta(\beta_j) \setminus \beta_j)$ и любого $j = 0, \dots, k-1$. \square

2. Об отталкивающих циклах и хаотическом поведении решений уравнения со случайными коэффициентами

Для детерминированного уравнения (0.1) кроме циклических решений и решений, приближающихся или отталкивающихся от циклических, существует еще один тип поведения решения. Это так называемые хаотические решения, которые не являются периодическими и даже не стремятся ни к какому положению равновесия или циклу. Решение $x_n(x_0)$ уравнения (0.1) называется хаотическим [10, с. 35], если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(x_0)$ не существует. Имеет место следующая зависимость между наличием цикла периода три и существованием хаотических решений уравнения (0.1).

Теорема (Т. Ли, Дж. Йорк [5]). *Предположим, что существует точка $x_0 \in I$, для которой $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f^2(x_0)$ и $x_3 = f^3(x_0)$ удовлетворяют неравенству $x_3 \leq x_0 < x_1 < x_2$ (или $x_3 \geq x_0 > x_1 > x_2$). Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ существует периодическая точка в I , имеющая период k .
2. Существует несчетное множество $G \subset I$ (содержащее непериодические точки), которое удовлетворяет условиям

- 1) для любых $p, q \in G$, $p \neq q$ имеют место соотношения

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n(p) - x_n(q)| > 0, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n(p) - x_n(q)| = 0,$$

- 2) для каждой точки $p \in G$ и периодической точки $q \in I$ выполнено неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n(p) - x_n(q)| > 0.$$

Вернемся к рассмотрению вероятностной модели (0.2). Так же, как и в детерминированном случае, решение $x_n(\sigma, x_0)$ уравнения (0.2) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем хаотическим, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ не существует.

О п р е д е л е н и е 4. Точку $x_0 \in I$ назовем *апериодической с вероятностью единица* точкой уравнения (0.2), если существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для любого $\sigma \in \Sigma_0$ решения $x_n(\sigma, x_0)$ хаотические. Таким образом, множество хаотических решений $x_n(\sigma, x_0)$, порожденных апериодической с вероятностью единица точкой x_0 , имеет меру единица.

Аналогично определению работы [5] точку y назовем *со временем периодической* точкой уравнения (0.2), если существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что для любых $\sigma^m \in \Omega^m$ точка $x = f^m(\sigma^m, y)$ является точкой некоторого периода $k \geq 1$.

Например, для логистического уравнения

$$x_{n+1} = \omega_n x_n (1 - x_n / K), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [0, K], \quad n = 0, 1, \dots,$$

точка $x = 0$ является точкой положения равновесия (точкой периода $k = 1$), а точка $x = K$ — со временем периодическая.

У с л о в и е 1. Пусть $\Omega = \{v_1, \dots, v_r\}$, где $r \geq 2$, $\mu(v_i) = \mu_i > 0$ для всех $i = 1, \dots, r$, $\sum_{i=1}^r \mu_i = 1$ и каждая из функций $f^k(\sigma^k, x)$, $k \in \mathbb{N}$, $\sigma^k \in \Omega^k$ имеет конечное число неподвижных точек на отрезке $I = [a, b]$.

Теорема 3. *Предположим, что выполнено условие 1 и либо уравнение (0.2) не имеет ни одного цикла (периода $k \geq 1$), либо все циклы отталкивающие с вероятностью единица. Пусть Y — множество периодических и со временем периодических точек данного уравнения. Тогда любая точка $x_0 \in I \setminus Y$ апериодическая с вероятностью единица.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для фиксированного $k \in \mathbb{N}$ обозначим через X_k множество, состоящее из неподвижных точек каждой из функций $f^k(\sigma^k, x)$, где $\sigma^k \in \Omega^k$. В силу условия 1 это множество содержит конечное число точек.

Предположим, что уравнение (0.2) не имеет ни одного цикла. Пусть Σ^* — такое подмножество Σ , что для любого $\sigma \in \Sigma^*$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(\sigma, x_0)$ существует и равен некоторому $x_*(\sigma) \in I$. Покажем, что $\mu(\Sigma^*) = 0$. Зафиксируем $x_* \in X_k$ и покажем, что мера тех σ , для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = x_*$, равна нулю. Поскольку x_* не является периодической точкой уравнения (0.2), то найдется такое множество $V \subset \Omega^k$, что $\mu(V) > 0$ и $f^k(\sigma^k, x_*) \neq x_*$ для всех $\sigma^k \in V$. Следовательно, найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\sigma^k \in V$ и всех $x \in O_\varepsilon(x_*)$ либо выполнено неравенство $f^k(\sigma^k, x) > x + 2\varepsilon$, либо $f^k(\sigma^k, x) < x - 2\varepsilon$.

Покажем, что если $x_0 \in O_\varepsilon(x_*)$, то с вероятностью единица найдется бесконечно много таких номеров $m \in \mathbb{N}$, что $x_{mk}(\sigma, x_0) \notin O_\varepsilon(x_*)$. Отметим, что если $x_0 \in O_\varepsilon(x_*)$ и $\sigma^k \in V$, то либо $x_k = f^k(\sigma^k, x_0) > x_0 + 2\varepsilon > x_* + \varepsilon$, либо $x_k = f^k(\sigma^k, x_0) < x_0 - 2\varepsilon < x_* - \varepsilon$. Следовательно, $x_k \notin O_\varepsilon(x_*)$, если $\sigma^k \in V$. Назовем “успехом” появление события $V \subset \Omega^k$ в последовательности $\sigma = (\sigma_1^k, \dots, \sigma_n^k, \dots)$. Поскольку $\mu(V) > 0$, то в последовательности σ с вероятностью единица появится хотя бы один “успех” (следовательно, появится бесконечно много таких “успехов”) [11, с. 338]. Поэтому, если $x_{nk} \in O_\varepsilon(x_*)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то с вероятностью единица найдется бесконечно много таких $m > n$, что $x_{mk}(\sigma, x_0) \notin O_\varepsilon(x_*)$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = x_*$ с вероятностью нуль.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = x_*$ и $x_* \notin X_k$. Тогда $f^k(\sigma^k, x_*) \neq x_*$ для всех $\sigma^k \in \Omega^k$ и найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\sigma^k \in \Omega^k$ и всех $x \in O_\varepsilon(x_*)$ либо выполнено неравенство

$$f^k(\sigma^k, x) > x + 2\varepsilon,$$

либо $f^k(\sigma^k, x) < x - 2\varepsilon$. Аналогично доказанному выше, если $x \in O_\varepsilon(x_*)$, то $f^k(\sigma^k, x) \notin O_\varepsilon(x_*)$ для всех $\sigma^k \in \Omega^k$. Поэтому если $x_* \notin X_k$, то не существует таких $\sigma \in \Sigma$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(\sigma, x_0) = x_*$. Таким образом, поскольку множество X_k конечное, то $\mu(\Sigma^*) = 0$.

Пусть уравнение (0.2) имеет цикл $B = \{\beta_0, \dots, \beta_{k-1}\}$ длины $k \geq 1$, отталкивающий с вероятностью единица, тогда $B \subseteq Y$. В силу определения 3 существует множество $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ такое, что $\mu(\Sigma_0) = 1$ и для каждого $\sigma \in \Sigma_0$ найдется окрестность U данного цикла, которую каждая точка из множества $U \setminus B$ покидает за конечное время. Это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{nk}(\sigma, x_0) \neq \beta_j$$

для любого $j = 0, \dots, k-1$, всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $\sigma \in \Sigma_0$. Из определения со временем периодических точек следует, что такие точки также не могут быть пределом последовательности $\{x_{nk}(\sigma, x_0)\}_{n=0}^\infty$ при любом $k \in \mathbb{N}$. \square

Следующее утверждение является следствием теорем 2 и 3.

Следствие. Пусть множество Y содержит все периодические и со временем периодические точки уравнения (0.2). Если выполнено условие 1 и уравнение (0.2) либо не имеет ни одного цикла, либо для каждого цикла B периода $k \geq 1$ существует окрестность U такая, что

$$M\left(\ln \inf_{x \in U} |(f^k(\sigma, x))'_x|\right) > 0,$$

то любая точка $x_0 \in I \setminus Y$ аperiodическая с вероятностью единица.

Пример. Рассмотрим модель популяции, подверженной промыслу, когда моменты промысловых заготовок и размеры этих заготовок являются случайными величинами. Предполагаем, что при отсутствии эксплуатации развитие популяции описывается уравнением $\dot{x} = x(1-x)$ и в случайные моменты времени τ_n некоторая доля биомассы ψ_n изымается из популяции. Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\dot{x} = x(1-x), \quad t \neq \tau_n, \quad \Delta x|_{t=\tau_n} = -\psi_n x, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.9)$$

Предполагаем, что длины интервалов $\theta_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ между моментами заготовок и доли заготовок ψ_n , $n = 0, 1, \dots$ являются независимыми случайными величинами, все $\theta_0, \theta_1, \dots$ принимают значения в множестве $[\alpha_1, \alpha_2] \subset (0, \infty)$ и имеют одинаковое распределение G , ψ_0, ψ_1, \dots принадлежат отрезку $[\gamma_1, \gamma_2] \subset (0, 1)$ и имеют одинаковое распределение H . Далее, пусть $\Omega = [\alpha_1, \alpha_2] \times [\gamma_1, \gamma_2]$, $\omega_n = (\theta_n, \psi_n) \in \Omega$, вероятностное пространство $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$ определим так же, как во введении.

Пусть начальный объем биомассы популяции равен x_0 , длина промежутка до следующего изъятия равна θ_0 , тогда (решая уравнение $\dot{x} = x(1-x)$) находим, что перед этим изъятием объем биомассы составит $h(x_0, \theta_0) = \frac{x_0 e^{\theta_0}}{x_0(e^{\theta_0} - 1) + 1}$. В результате извлечения биомассы из популяции в момент τ_1 доли ψ_0 от общего объема $h(x_0, \theta_0)$ оставшаяся часть биомассы после изъятия равна $x_1 = f(\theta_0, \psi_0, x_0) = \frac{x_0 e^{\theta_0} (1 - \psi_0)}{x_0(e^{\theta_0} - 1) + 1}$. Аналогично если через x_n обозначим объем биомассы после изъятия в момент τ_n , то x_n удовлетворяют разностному уравнению со случайными параметрами

$$x_{n+1} = f(\omega_n, x_n), \quad (\omega_n, x_n) \in \Omega \times [0, +\infty), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.10)$$

где $f(\omega, x) = f(\theta, \psi, x) = \frac{x e^\theta (1 - \psi)}{x(e^\theta - 1) + 1}$. Уравнение (2.10) имеет цикл $B = \{x_*\}$ длины 1, содержащий неподвижную точку $x_* = 0$. Обозначим через Θ и Ψ независимые случайные величины с распределениями G и H соответственно.

Предложение 3. Имеют место следующие утверждения:

1. Если $e^{\alpha_2}(1 - \gamma_1) < 1$, то цикл $B = \{x_*\}$ уравнения (2.10) притягивающий.

2. Если $e^{\alpha_2}(1 - \gamma_1) \geq 1$, но $M\Theta + M\ln(1 - \Psi) < 0$, то цикл $B = \{x_*\}$ является притягивающим с вероятностью единица (при этом $\mu(\Sigma_0) = 1$, но $\Sigma_0 \neq \Sigma$).

3. Если выполнены условие 1 и неравенство $M\Theta + M\ln(1 - \Psi) > 0$, то каждая точка $x_0 \in (0, +\infty)$ аperiodическая с вероятностью единица.

Доказательство. Поскольку для всех $x \geq 0$ выполнено равенство

$$\sup_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, x)| = \sup_{\omega \in \Omega} |f'_x(\omega, 0)| = e^{\alpha_2}(1 - \gamma_1),$$

то первое утверждение следует из предложения 1. Второе и третье утверждения являются следствием теорем 1 и 3. \square

Несложно показать, что асимптотическое поведение решений для дифференциального уравнения (2.9) “наследует” поведение решений разностного уравнения (2.10) в следующем смысле: если уравнение (2.10) имеет притягивающий цикл или его решения хаотические с вероятностью единица, то такими же свойствами будет обладать уравнение (2.9). Таким образом, предложение 3 также дает условия существования притягивающего цикла и условия хаотичности для решений уравнения (2.9). Решение $x(t, \sigma, x_0)$ уравнения (2.9) (при фиксированном значении $\sigma \in \Sigma$) назовем хаотическим, если для каждого $k \in \mathbb{N}$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x(\tau_{nk}, \sigma, x_0)$ не существует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Свирижев Ю.М., Логофет Д.О.** Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. Динамика одномерных отображений / А. Н. Шарковский, С. Ф. Коляда, А. Г. Сивак, В. В. Федоренко. Киев: Наукова думка, 1989. 216 с.
3. **Ризниченко Г.Ю.** Лекции по математическим моделям в биологии. Ч. 1. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002. 232 с.
4. **Шарковский А.Н.** Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. 1964. Т. 16, № 1. С. 61–71.
5. **Li Tien-Yien, Yorke James A.** Period three implies chaos // Amer. Math. Monthly. 1975. Vol. 82, no. 10. P. 985–992.
6. **Ширяев А.Н.** Вероятность. М.: Наука, 1989. 580 с.
7. **Мастерков Ю.В., Родина Л.И.** Достаточные условия локальной управляемости систем со случайными параметрами для произвольного числа состояний системы // Изв. вузов. Математика. 2008. № 3. С. 38–49.
8. **Родина Л.И.** О некоторых вероятностных моделях динамики роста популяций // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2013. Вып. 4. С. 109–124.
9. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1984. 738 с.
10. **Братусь А.С., Новожилов А.С., Родина Е.В.** Дискретные динамические системы и математические модели в экологии: учеб. пособие. М.: МИИТ, 2005. 139 с.
11. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984. 529 с.

Родина Людмила Ивановна

Поступила 22.12.2015

д-р физ.-мат. наук, доцент

зав. кафедрой

Удмуртский государственный университет

e-mail: LRodina67@mail.ru

УДК 517.977

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ПРИ ДЕФИЦИТЕ ИНФОРМАЦИИ В ЛИНЕЙНОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ**В. Л. Розенберг**

Задача восстановления неизвестных внешних воздействий в линейном стохастическом дифференциальном уравнении исследуется с позиций подхода теории динамического обращения. Рассматривается постановка, в которой одновременная реконструкция возмущений в детерминированном и стохастическом членах уравнения проводится на основе дискретной информации о некотором количестве реализаций части координат случайного процесса. Задача сводится к обратной задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица исходного процесса. Предлагается конечношаговый программно реализуемый алгоритм решения, основанный на методе вспомогательных управляемых моделей. Получена оценка его точности относительно количества доступных измерению реализаций.

Ключевые слова: динамическая реконструкция, стохастическое дифференциальное уравнение, управляемая модель.

V. L. Rozenberg. Reconstruction of external actions under incomplete information in a linear stochastic equation.

The problem of reconstructing unknown external actions in a linear stochastic differential equation is investigated on the basis of the approach of the theory of dynamic inversion. We consider the statement when the simultaneous reconstruction of disturbances in the deterministic and stochastic terms of the equation is performed with the use of discrete information on a number of realizations of a part of coordinates of the stochastic process. The problem is reduced to an inverse problem for systems of ordinary differential equations describing the mathematical expectation and covariance matrix of the original process. A finite-step software-oriented solution algorithm based on the method of auxiliary controlled models is proposed. We derive an estimate for its convergence rate with respect to the number of measured realizations.

Keywords: dynamical reconstruction, stochastic differential equation, controlled model.

MSC: 49K15, 60H10, 93E12

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-236-244

Введение

Необходимость восстановления неизвестных параметров управляемых систем в режиме реального времени на основе неполной и/или неточной информации о фазовом состоянии возникает во многих научных и прикладных исследованиях. Задачи реконструкции вкладываются в проблематику обратных задач динамики управляемых систем; как правило, они являются некорректными и требуют применения регуляризирующих процедур. В настоящей статье применяется подход, предложенный в работах Ю. С. Осипова и его коллег (см. [1–6] и библиографию в них) и получивший название метода динамического обращения. Он основан на сочетании принципов теории позиционного управления [7] и идей теории некорректных задач [8]. Задача реконструкции сводится к задаче управления по принципу обратной связи вспомогательной динамической системой (моделью). Адаптация модельного управления к результатам текущих наблюдений обеспечивает аппроксимацию (в подходящем смысле) неизвестного входа. Метод динамического обращения был реализован для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), дифференциально-функциональными уравнениями, уравнениями и вариационными неравенствами с распределенными параметрами и др. Были созданы устойчивые алгоритмы, работающие для некоторых классов частично наблюдаемых систем (в случае конечномерной системы роль входного сигнала могли играть измерения

части координат фазового вектора, а в случае бесконечномерной — значения решения на некоторых подмножествах области определения). Такие задачи были сформулированы и решены, например, в [4–6].

Что касается приложения теории динамического обращения к стохастическим объектам, то впервые задача позиционного моделирования неизвестного стохастического управляющего воздействия в системе, описываемой ОДУ, была рассмотрена в [9]. Настоящая работа фактически продолжает исследования (в рамках указанной теории) задач реконструкции неизвестных детерминированных возмущений, действующих в системе линейных стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [10; 11]. В [10] для линейного СДУ рассматривалась задача динамического восстановления возмущения, входящего в интеграл Ито и характеризующего амплитуду случайной помехи, на основе измерений реализаций всего фазового вектора. В [11] исследовалась система второго порядка специального вида, в качестве входной информации использовались измерения одной координаты случайного процесса. Новизна данной статьи состоит в рассмотрении достаточно общей постановки обратной задачи для линейного СДУ, предполагающей реконструкцию возмущений, входящих и в детерминированный, и в стохастический члены уравнения, на основе дискретной по времени информации о некотором количестве реализаций части координат случайного процесса. Обосновывается применимость алгоритма восстановления неизвестных параметров, разработанного ранее для частично наблюдаемой системы ОДУ [4; 5], и предлагается соответствующая модификация.

1. Постановка задачи

Рассматривается линейное СДУ следующего вида:

$$dx(t, \omega) = (A(t)x(t, \omega) + B_1(t)u_1(t) + f(t)) dt + B_2(t)U_2(t) d\xi(t, \omega), \quad x(0, \omega) = x_0. \quad (1.1)$$

Здесь $t \in T = [0, \vartheta]$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$; x_0 — известный детерминированный или случайный (нормально распределенный) вектор начальных условий; $\omega \in \Omega$, (Ω, F, P) — вероятностное пространство [12]; $\xi(t, \omega)$ — стандартный винеровский процесс (т. е. выходящий из нуля процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариации, равной It (I — единичная матрица из $\mathbb{R}^{k \times k}$)); $f(t)$, $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B_1(t) = \{b_{1ij}(t)\}$ и $B_2(t) = \{b_{2ij}(t)\}$ — непрерывные матричные функции размерности $n \times 1$, $n \times n$, $n \times r$ и $n \times k$ соответственно. На систему действуют два внешних возмущения: вектор $u_1(t) = (u_{11}(t), u_{12}(t), \dots, u_{1r}(t)) \in \mathbb{R}^r$ и диагональная матрица $U_2(t) = \{u_{21}(t), u_{22}(t), \dots, u_{2k}(t)\} \in \mathbb{R}^{k \times k}$, принимающие значения из заданных выпуклых компактов S_{u_1} и S_{u_2} и имеющие ограниченную на T вариацию. Воздействие u_1 входит в детерминированную компоненту и влияет на математическое ожидание искомого процесса. Поскольку $U_2 d\xi = (u_{21} d\xi_1, u_{22} d\xi_2, \dots, u_{2k} d\xi_k)$, то можно считать, что вектор $u_2 = (u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2k})$ характеризует амплитуду случайных помех.

Решение уравнения (1.1) определяется как случайный процесс, удовлетворяющий при любом t с вероятностью 1 соответствующему интегральному тождеству, содержащему в правой части стохастический интеграл Ито. Как известно, при сделанных предположениях существует единственное решение, являющееся нормальным марковским процессом с непрерывными реализациями [13, теорема 5.2.1]. Отметим, что уравнения типа (1.1) описывают простейшие линеаризованные модели, например изменения численности многовидовой биологической популяции в стохастической среде или динамики цен на товарных рынках при влиянии случайных факторов.

Обсуждаемая задача состоит в следующем. В дискретные, достаточно частые, моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l$, $i \in [0 : l]$, поступает информация о некотором количестве N реализаций случайного процесса $x(\tau_i)$, причем измерению доступны только q ($q \leq n$) первых координат, т. е. вектор (x_1, x_2, \dots, x_q) . Полагаем, что $l = l(N)$ и существуют оценки m_{qi}^N q -подвектора $m_q(t) = \{m_j(t)\}$, $j \in [1 : q]$, вектора математического ожидания процесса $m(t) = Mx(t)$ и D_{qi}^N ($q \times q$)-подматрицы $D_q(t) = \{d_{jp}(t)\}$, $j, p \in [1 : q]$, ковариационной матрицы

$D(t) = M(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))'$ (штрих означает транспонирование) такие, что выполняется соотношение

$$P\left(\max_{i \in [1:l(N)]} \left\{ \|m_{qi}^N - m_q(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^q}, \|D_{qi}^N - D_q(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^q \times q} \right\} \leq h(N)\right) = 1 - g(N), \quad (1.2)$$

причем $h(N), g(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Стандартные статистические процедуры [14, гл. 22] построения оценок m_{qi}^N и D_{qi}^N допускают модификации, обеспечивающие выполнение (1.2).

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестных возмущений $u_1(t)$ и $u_2(t)$, определяющих случайный процесс $x(t)$, по неполной дискретной информации о его реализациях, причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближений от искомого входов в метрике соответственно пространств $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ и $L_2(T; \mathbb{R}^k)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$.

Специфика линейного уравнения (1.1) допускает сведение (с помощью метода моментов [15]) сформулированной задачи для СДУ к задаче для систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица искомого процесса. Это позволяет организовать процедуру одновременной реконструкции возмущений в детерминированном и стохастическом членах правой части. Для решения задачи используются идеи теории динамического обращения [1;2;4], а именно конструируется конечношаговый программно реализуемый разрешающий алгоритм, основанный на методе вспомогательных управляемых моделей.

Указанную обратную задачу можно трактовать как динамическое восстановление внешнего управляющего воздействия и амплитуды случайных помех в условиях неполной информации, когда измерению доступна только часть координат процесса, а динамика системы допускает одновременные измерения достаточно большого количества траекторий (например, движения однотипных частиц).

2. Сведение задачи для СДУ к задаче для систем ОДУ

Следуя [10;11], сведем задачу восстановления для СДУ к задаче для систем ОДУ.

Введем обозначения: $m_0 = Mx_0$, $D_0 = M(x_0 - m_0)(x_0 - m_0)'$. В силу линейности исходной системы и равенства нулю математического ожидания интеграла Ито величина $m(t)$ зависит только от $u_1(t)$; ее динамика описывается уравнением

$$\dot{m}(t) = A(t)m(t) + B_1(t)u_1(t) + f(t), \quad t \in T, \quad m \in \mathbb{R}^n, \quad m(0) = m_0. \quad (2.1)$$

Напомним, что измерению доступны первые q координат исходного n -мерного вектора x , что обеспечивает получение оценки (1.2) для первых q координат вектора m ; количество неизмеряемых координат равно $n - q$. Используя стандартную схему теории динамического обращения [4;5], запишем уравнение (2.1) в виде системы с разделением измеряемой и неизмеряемой компонент. Введем следующие матрицы:

$$\begin{aligned} C_1^m &= \{c_{1ps}^m\}, \quad p \in [1:q], \quad s \in [1:n], \quad c_{1ps}^m = 1, \text{ если } s = p, \quad c_{1ps}^m = 0 \text{ в противном случае;} \\ D_1^m &= \{d_{1ps}^m\}, \quad p \in [1:(n-q)], \quad s \in [1:n], \quad d_{1ps}^m = 1, \text{ если } s = q + p, \quad d_{1ps}^m = 0 \text{ в противном случае;} \\ C_2^m &= (C_1^m)'; \quad D_2^m = (D_1^m)'. \end{aligned}$$

Тогда q -мерный вектор $C_1^m m$ — измеряемая часть m , а $(n - q)$ -мерный вектор $D_1^m m$ — его неизмеряемая часть. Обозначим $y_m = C_1^m m$, $z_m = D_1^m m$. Умножая уравнение (2.1) поочередно на матрицы C_1^m и D_1^m , учитывая равенство $m = C_2^m y_m + D_2^m z_m$, приходим к системе с разделением измеряемых и неизмеряемых компонент:

$$\dot{y}_m(t) = A_{1y}^m(t)y_m(t) + A_{1z}^m(t)z_m(t) + B_1^m(t)u_1(t) + C_1^m f(t), \quad y_m(0) = y_{m0}, \quad (2.2)$$

$$\dot{z}_m(t) = A_{2y}^m(t)y_m(t) + A_{2z}^m(t)z_m(t) + B_2^m(t)u_1(t) + D_1^m f(t), \quad z_m(0) = z_{m0}, \quad (2.3)$$

где $A_{1y}^m = C_1^m AC_2^m$, $A_{1z}^m = C_1^m AD_2^m$, $B_1^m = C_1^m B_1$, $y_{m0} = C_1^m m_0$, $A_{2y}^m = D_1^m AC_2^m$, $A_{2z}^m = D_1^m AD_2^m$, $B_2^m = D_1^m B_1$, $z_{m0} = D_1^m m_0$.

Ковариационная матрица $D(t)$ зависит только от $U_2(t)$; ее динамика описывается с помощью уравнения метода моментов [15] следующим образом:

$$\dot{D}(t) = A(t)D(t) + D(t)A'(t) + B_2(t)U_2(t)U_2'(t)B_2'(t), \quad t \in T, \quad D(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad D(0) = D_0. \quad (2.4)$$

Матричное уравнение (2.4) переписываем в виде более традиционного для рассматриваемых задач векторного уравнения, размерность которого, с учетом симметричности матрицы $D(t)$, определяется как $n_{yz} = (n^2 + n)/2$. Вводится вектор $d(t) = \{d_s(t)\}$, $s \in [1 : n_{yz}]$, состоящий из последовательно записанных и пронумерованных элементов матрицы $D(t)$, взятых построчно, начиная с элемента, расположенного на главной диагонали; его координаты находятся по элементам матрицы $D(t) = \{d_{ij}(t)\}$, $i, j \in [1 : n]$:

$$d_s(t) = d_{ij}(t), \quad i \leq j, \quad s = (n - i/2)(i - 1) + j. \quad (2.5)$$

Преобразования, подробно описанные в [16], позволяют переписать систему (2.4) в виде

$$\dot{d}(t) = \bar{A}(t)d(t) + \bar{B}(t)v(t), \quad t \in T, \quad d(t) \in \mathbb{R}^{n_{yz}}, \quad d(0) = d_0, \quad (2.6)$$

где матрицы $\bar{A}(t) : T \rightarrow \mathbb{R}^{n_{yz} \times n_{yz}}$ и $\bar{B}(t) : T \rightarrow \mathbb{R}^{n_{yz} \times k}$ могут быть выписаны явно [16], а начальное состояние d_0 получено из D_0 по формуле (2.5). Произведение диагональных матриц $U_2(t)U_2'(t)$ приводит к появлению управляющего вектора $v(t) = (u_{21}^2(t), u_{22}^2(t), \dots, u_{2k}^2(t))$, имеющего ограниченную на T вариацию и для всех $t \in T$ принимающего значения из некоторого выпуклого компакта $S_v \in \mathbb{R}^k$. В общем случае восстанавливается именно вектор-функция $v(t)$. При дополнительных, достаточно естественных, ограничениях на реальный вектор $u_2(t)$ возможна и его реконструкция.

Измерения первых q координат вектора x обеспечивают оценку типа (1.2) для $(q^2 + q)/2$ координат вектора d , номера которых находятся из (2.5). Обозначим $n_y = (q^2 + q)/2$, $n_z = n_{yz} - n_y$. Определим I_y как n_y -мерный упорядоченный по возрастанию массив индексов, соответствующих измеряемым координатам вектора d :

$$I_y = \{s_p\}, \quad s_p \in [1 : n_{yz}], \quad p \in [1 : n_y], \quad s_p = (n - i/2)(i - 1) + j, \quad i, j \in [1 : q], \quad i \leq j,$$

а также I_z как n_z -мерный упорядоченный по возрастанию массив индексов, соответствующих неизмеряемым координатам вектора d .

Введем следующие матрицы:

$$C_1^d = \{c_{1ps}^d\}, \quad p \in [1 : n_y], \quad s \in [1 : n_{yz}], \quad c_{1ps}^d = 1, \text{ если } s = I_y[p], \quad c_{1ps}^d = 0 \text{ в противном случае};$$

$$D_1^d = \{d_{1ps}^d\}, \quad p \in [1 : n_z], \quad s \in [1 : n_{yz}], \quad d_{1ps}^d = 1, \text{ если } s = I_z[p], \quad d_{1ps}^d = 0 \text{ в противном случае};$$

$$C_2^d = (C_1^d)'; \quad D_2^d = (D_1^d)'.$$

Тогда n_y -мерный вектор $C_1^d d$ — измеряемая часть d , а n_z -мерный вектор $D_1^d d$ — его неизмеряемая часть. Обозначим $y_d = C_1^d d$, $z_d = D_1^d d$. Умножая уравнение (2.6) поочередно на матрицы C_1^d и D_1^d , учитывая равенство $d = C_2^d y_d + D_2^d z_d$, приходим к системе с разделением измеряемых и неизмеряемых компонент:

$$\dot{y}_d(t) = A_{1y}^d(t)y_d(t) + A_{1z}^d(t)z_d(t) + B_1^d(t)v(t), \quad y_d(0) = y_{d0}, \quad (2.7)$$

$$\dot{z}_d(t) = A_{2y}^d(t)y_d(t) + A_{2z}^d(t)z_d(t) + B_2^d(t)v(t), \quad z_d(0) = z_{d0}, \quad (2.8)$$

где $A_{1y}^d = C_1^d \bar{A} C_2^d$, $A_{1z}^d = C_1^d \bar{A} D_2^d$, $B_1^d = C_1^d \bar{B}$, $y_{d0} = C_1^d d_0$, $A_{2y}^d = D_1^d \bar{A} C_2^d$, $A_{2z}^d = D_1^d \bar{A} D_2^d$, $B_2^d = D_1^d \bar{B}$, $z_{d0} = D_1^d d_0$.

Теперь для систем (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8) можно переформулировать исходную задачу восстановления. По ходу развития процесса в дискретные моменты времени $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta$, $\delta = \vartheta/l(N)$, $i \in [0 : l(N)]$ поступает информация, позволяющая оценить части фазового состояния указанных систем, соответственно, векторы $y_m(\tau_i)$ и $y_d(\tau_i)$. Полагаем, что выполняется следующее соотношение, соответствующее (1.2):

$$P\left(\max_{i \in [1:l(N)]} \{\|\xi_{mi}^N - y_m(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^q}, \|\xi_{di}^N - y_d(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n_y}}\} \leq h(N)\right) = 1 - g(N), \quad (2.9)$$

где оценочные векторы $\xi_{mi}^N \in \mathbb{R}^q$ и $\xi_{di}^N \in \mathbb{R}^{n_y}$ естественным образом получены из оценок m_{qi}^N и D_{qi}^N , а $h(N) \rightarrow 0$ и $g(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

Требуется указать алгоритм динамического восстановления неизвестных возмущений $u_1(t)$ и $v(t)$ по информации (2.9), причем вероятность сколь угодно малого отклонения приближений от искомым входов в метрике соответственно пространств $L_2(T; \mathbb{R}^r)$ и $L_2(T; \mathbb{R}^k)$ должна быть близка к 1 при достаточно большом N и специальным образом согласованном с N шаге временной дискретизации $\delta = \delta(N) = \vartheta/l(N)$.

В такой формулировке задача соответствует задаче, рассмотренной, например, в [4]. В настоящей работе показано, что конечношаговый разрешающий алгоритм, предложенный в [2] для случая измерения всех координат фазового вектора в ОДУ и распространенный в [4] на случай измерения части координат, применим к решению полученной для систем (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8) задачи, поскольку допускает конструктивное согласование своих параметров с количеством доступных измерению реализаций исходного случайного процесса, при этом легко проверяемые достаточные условия разрешимости задачи фактически формулируются в терминах исходной системы (1.1). Отметим, что задача гарантирующего позиционного управления в условиях дефицита информации для линейного СДУ при наличии управлений в детерминированном и стохастическом членах уравнения рассмотрена в [16].

3. Алгоритм восстановления неизвестных возмущений

Разрешающий алгоритм будем строить в случае выполнения следующего условия.

У с л о в и е. Размерность неизвестной вектор-функции $u_1(\cdot)$ не превосходит размерности компоненты $y_m(\cdot)$ (см. (2.2)) ($r \leq q$), и при всех $t \in T$ матрица $B_1^m(t)$ имеет ранг, равный r , т. е. является матрицей полного ранга. Размерность неизвестной вектор-функции $v(\cdot)$ не превосходит размерности компоненты $y_d(\cdot)$ (см. (2.7)) ($k \leq n_y$), и при всех $t \in T$ матрица $B_1^d(t)$ имеет ранг, равный k , т. е. является матрицей полного ранга.

Такое условие гарантирует единственность функций $u_1(\cdot)$ и $v(\cdot)$, определяющих решения $(y_m(\cdot), z_m(\cdot))$ и $(y_d(\cdot), z_d(\cdot))$ систем (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8) соответственно. Обоснование этого утверждения опирается на свойства псевдообратной матрицы для матрицы полного ранга [4; 17] и, за вычетом малозначительных деталей, следует аналогичным рассуждениям из [4; 5]. Отметим, что количество измеряемых координат q исходной системы (1.1) должно быть не меньше размерности возмущения $u_1(\cdot)$, но может быть меньше размерности возмущения $v(\cdot)$.

Алгоритм, приведенный ниже, является приложением вычислительной процедуры из [4] к системам (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8). В начальный момент $\tau_0 = 0$ фиксируется значение N , определяются величины $l^N = l(N)$, $h^N = h(N)$ и $g^N = g(N)$ (см. (2.9)) и строится равномерное разбиение промежутка T с шагом $\delta^N = \vartheta/l^N$: $\tau_i \in T$, $\tau_i = i\delta^N$, $i \in [0 : l^N]$. Вводится управляемая система-модель, фактически содержащая два независимых блока, относящихся к системам (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8). Фазовый вектор модели обозначим через $w(t)$; он состоит из двух троек: (i) q -мерного вектора $w_{my}(t)$, $(n - q)$ -мерного вектора $w_{mz}(t)$, q -мерного

вектора $w_{mu}(t)$ и (ii) n_y -мерного вектора $w_{dy}(t)$, n_z -мерного вектора $w_{dz}(t)$, n_y -мерного вектора $w_{dv}(t)$. Динамика модели и ее начальное состояние определяются соотношениями

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_{my}(t) &= \bar{u}_i^N, \quad \dot{w}_{dy}(t) = \bar{v}_i^N, \\
 \dot{w}_{mz}(t) &= A_{2y}^m(\tau_i)\xi_{mi}^N + A_{2z}^m(\tau_i)w_{mz}(\tau_i) \\
 &+ B_2^m(\tau_i)B_1^{m+}(\tau_i)(\bar{u}_i^N - A_{1y}^m(\tau_i)\xi_{mi}^N - A_{1z}^m(\tau_i)w_{mz}(\tau_i) - C_1^m f(\tau_i)) + D_1^m f(\tau_i), \\
 \dot{w}_{dz}(t) &= A_{2y}^d(\tau_i)\xi_{di}^N + A_{2z}^d(\tau_i)w_{dz}(\tau_i) + B_2^d(\tau_i)B_1^{d+}(\tau_i)(\bar{v}_i^N - A_{1y}^d(\tau_i)\xi_{di}^N - A_{1z}^d(\tau_i)w_{dz}(\tau_i)), \\
 \dot{w}_{mu}(t) &= A_{1y}^m(\tau_i)\xi_{mi}^N + A_{1z}^m(\tau_i)w_{mz}(\tau_i) + B_1^m(\tau_i)\hat{u}_i^N + C_1^m f(\tau_i), \\
 \dot{w}_{dv}(t) &= A_{1y}^d(\tau_i)\xi_{di}^N + A_{1z}^d(\tau_i)w_{dz}(\tau_i) + B_1^d(\tau_i)\hat{v}_i^N, \\
 t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1], \quad w_{my}(\tau_0) &= y_{m0}, \quad w_{mz}(\tau_0) = z_{m0}, \quad w_{mu}(\tau_0) = y_{m0}, \\
 w_{dy}(\tau_0) &= y_{d0}, \quad w_{dz}(\tau_0) = z_{d0}, \quad w_{dv}(\tau_0) = y_{d0}. \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

Здесь $\bar{u}_i^N, \bar{v}_i^N, \hat{u}_i^N, \hat{v}_i^N$ — управляющие воздействия соответствующих размерностей, вычисляемые позиционно в момент τ_i по правилам, которые конкретизируются ниже.

Динамика (3.1) выбирается из следующих соображений. Движение вспомогательных компонент $w_{my}(t)$ и $w_{dy}(t)$ при подходящем выборе модельных управлений

$$\bar{u}^N(t) = \bar{u}_i^N, \quad \bar{v}^N(t) = \bar{v}_i^N, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1],$$

обеспечивает аппроксимацию координат $y_m(t)$ и $y_d(t)$. Тогда, пользуясь оценкой (2.9) и формальным выражением возмущений $u_1(t)$ и $v(t)$ из уравнений (2.2) и (2.7) с заменой $\dot{y}_m(t)$ и $\dot{y}_d(t)$ на \bar{u}_i^N и \bar{v}_i^N соответственно, ожидаем близость $w_{mz}(t)$ к $z_m(t)$ и $w_{dz}(t)$ к $z_d(t)$, что, в свою очередь, делает возможным отслеживание компонентами $w_{mu}(t)$ и $w_{dv}(t)$ координат $y_m(t)$ и $y_d(t)$ посредством выбора модельных управлений

$$\hat{u}_i^N(t) = \hat{u}_i^N, \quad \hat{v}_i^N(t) = \hat{v}_i^N, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad i \in [0 : l^N - 1],$$

приближающих в нужном смысле функции $u_1(t)$ и $v(t)$. Очевидно, нетрудно записать дискретный аналог модели (3.1).

Работа алгоритма разбивается на l^N однотипных шагов. На i -м шаге, который выполняется на интервале $(\tau_i, \tau_{i+1}]$, исходными данными для вычислений служат оценки ξ_{mi}^N, ξ_{di}^N и сформированное к этому моменту состояние модели $w(\tau_i)$. Предполагая покоординатную ограниченность правых частей уравнений (2.2) и (2.7) константой \bar{K} (ее существование очевидно), находим s -ю координату \bar{u}_{is}^N вектора \bar{u}_i^N и s -ю координату \bar{v}_{is}^N вектора \bar{v}_i^N из соотношений

$$\bar{u}_{is}^N = -\bar{K} \text{sign}(w_{mys}(\tau_i) - \xi_{mis}^N), \quad s \in [1 : q], \quad \bar{v}_{is}^N = -\bar{K} \text{sign}(w_{dys}(\tau_i) - \xi_{dis}^N), \quad s \in [1 : n_y]. \tag{3.2}$$

Вторая пара модельных управлений определяется следующим образом: \hat{u}_i^N и \hat{v}_i^N суть единственные решения соответствующих экстремальных задач

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_i^N &= \arg \min \{ 2 \langle w_{mu}(\tau_i) - \xi_{mi}^N, B_1^m(\tau_i)u \rangle + \alpha^N \|u\|_{\mathbb{R}^r}^2 : u \in S_{u1} \} \\
 \hat{v}_i^N &= \arg \min \{ 2 \langle w_{dv}(\tau_i) - \xi_{di}^N, B_1^d(\tau_i)v \rangle + \alpha^N \|v\|_{\mathbb{R}^k}^2 : v \in S_v \}, \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

где $\alpha^N = \alpha(h^N)$ — параметр регуляризации. В нашем случае управления (3.3) очевидным образом находятся явно. После вычисления управлений по формулам (3.2) и (3.3) пересчитывается согласно дискретному аналогу (3.1) состояние модели $w(\tau_{i+1})$. Процесс заканчивается в конечный момент времени ϑ .

Теорема. Пусть выполняются условия согласования параметров

$$h^N \rightarrow 0, \quad g^N \rightarrow 0, \quad \delta^N \rightarrow 0, \quad \alpha^N \rightarrow 0, \quad \frac{\delta^N + h^N}{\alpha^N} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Тогда для модельных управлений $\hat{u}^N(\cdot)$ и $\hat{v}^N(\cdot)$, формируемых согласно (3.3), имеет место сходимость

$$P\left(\max\{\|\hat{u}^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}, \|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^k)}\} \rightarrow 0\right) \rightarrow 1 \quad \text{при } N \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

При дополнительных предположениях справедлива следующая оценка точности алгоритма относительно количества реализаций процесса, доступных измерению:

$$P\left(\max\{\|\hat{u}^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}, \|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^k)}\} \leq C_1 \left(\frac{1}{N}\right)^{2/13}\right) = 1 - C_2 \left(\frac{1}{N}\right)^{2/13}, \quad (3.6)$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы, не зависящие от N , $u_1(\cdot)$ и $v(\cdot)$.

Доказательство. Сходимость (3.5) непосредственно следует из приложения результатов работы [4] к системам (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8) и из соотношений (2.9) и (3.4). Для вывода (3.6) используем оценки, полученные для неизмеряемых координат исходной системы [4, с. 39]. В рассматриваемом случае они переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} P\left(\forall i \in [0 : l^N] \quad \max\{\|w_{mz}(\tau_i) - z_m(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n-q}}, \|w_{dz}(\tau_i) - z_d(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n_z}}\} \leq \bar{C}_1(h^N + \delta^N)\right) \\ = 1 - g^N. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Здесь и ниже через \bar{C}_i будем обозначать вспомогательные константы, которые не зависят от оцениваемых величин и могут быть выписаны явно.

Соотношения (3.7) дают возможность считать, что с вероятностью $1 - g^N$ неточно измеряются (восстанавливаются) все координаты систем (2.2), (2.3) и (2.7), (2.8). Отсюда, переписывая полученную в [18] в предположении об ограниченности вариации реальных возмущений оценку скорости сходимости алгоритма восстановления для случая измерения всех координат фазового вектора в виде

$$\max\{\|\hat{u}^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}, \|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^k)}\} \leq \bar{C}_2 \left(\frac{(h^N + \delta^N)^2}{(\alpha^N)^2} + \alpha^N\right)^{1/2}$$

и полагая $\delta^N \leq \bar{C}_3 h^N$ и $\alpha^N = \bar{C}_4 (h^N)^{2/3}$ (см. [18, с. 76]), имеем

$$P\left(\max\{\|\hat{u}^N(\cdot) - u_1(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^r)}, \|\hat{v}^N(\cdot) - v(\cdot)\|_{L_2(T; \mathbb{R}^k)}\} \leq \bar{C}_5 (h^N)^{1/3}\right) = 1 - g^N. \quad (3.8)$$

Покажем, что стандартные оценки m_i^N математического ожидания $m(\tau_i)$ и D_i^N ковариационной матрицы $D(\tau_i)$, построенные по N ($N > 1$) реализациям $x^1(\tau_i), x^2(\tau_i), \dots, x^N(\tau_i)$ случайных величин $x(\tau_i)$, $i \in [1 : l^N]$, по следующим правилам [14, гл. 22]:

$$m_i^N = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N x^r(\tau_i), \quad D_i^N = \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (x^r(\tau_i) - m_i^N)(x^r(\tau_i) - m_i^N)', \quad (3.9)$$

обеспечивают выполнение свойства (1.2) (и, следовательно, (2.9)).

Соотношения, которые связывают параметры из (3.4), определяющие алгоритм восстановления, и количество доступных измерению реализаций процесса N , могут быть получены в явном виде для оценок (3.9) посредством незначительной технической переработки результатов [10; 16]; приведем явные формулы:

$$E_m = \{\forall i \in [0 : l_m^N] \quad \|m_i^N - m(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^n} \leq h_m^N\}, \quad P(E_m) = 1 - g_m^N,$$

$$h_m^N = \bar{C}_6 \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta_m^N = \vartheta/l_m^N = \bar{C}_7 \left(\frac{1}{N}\right)^\alpha, \quad g_m^N = \bar{C}_8 \left(\frac{1}{N}\right)^{1-\alpha}; \quad (3.10)$$

$$E_d = \{\forall i \in [0 : l_d^N] \quad \|D_i^N - D(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \leq h_d^N\}, \quad P(E_d) = 1 - g_d^N,$$

$$h_d^N = \bar{C}_9 \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta_d^N = \vartheta/l_d^N = \bar{C}_{10} \left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha(1/2+3\epsilon)}, \quad g_d^N = \bar{C}_{11} \left(\frac{1}{N}\right)^{(1-\alpha)(1/2+3\epsilon)}, \quad (3.11)$$

где $0 < \epsilon < 1/2$, $0 < \alpha < 1$.

С целью рассмотрения в оценках (3.10) и (3.11) одного и того же разбиения отрезка T точками τ_i положим

$$h^N = \bar{C}_{12} \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta^N = \bar{C}_{13} \left(\frac{1}{N}\right)^{\min\{\alpha, \alpha(1/2+3\epsilon)\}}, \quad g^N = \bar{C}_{14} \left(\frac{1}{N}\right)^{\min\{1-\alpha, (1-\alpha)(1/2+3\epsilon)\}}.$$

Отметим, что величины h^N , δ^N и g^N совпадают по порядку малости либо с тройкой h_m^N , δ_m^N и g_m^N , либо с тройкой h_d^N , δ_d^N и g_d^N . Тогда, “загрубляя” более точную по порядку относительно $1/N$ из оценок (3.10), (3.11) и используя то, что статистические выборочные оценки (3.9) независимы [14], можем записать

$$P(E_m E_d) = P\left(\max_{i \in [1:l^N]} \left\{ \|m_i^N - m(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^n}, \|D_i^N - D(\tau_i)\|_{\mathbb{R}^{n \times n}} \right\} \leq h^N\right) = (1 - g^N)^2 \geq 1 - 2g^N.$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $1/2 + 3\epsilon < 1$, $\epsilon < 1/6$. Тогда

$$h^N = \bar{C}_{12} \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta^N = \bar{C}_{13} \left(\frac{1}{N}\right)^{\alpha(1/2+3\epsilon)}, \quad g^N = \bar{C}_{14} \left(\frac{1}{N}\right)^{(1-\alpha)(1/2+3\epsilon)}. \quad (3.12)$$

Для выполнения неравенства $\delta^N \leq \bar{C}_3 h^N$ достаточно положить $1/2 - \epsilon = \alpha(1/2 + 3\epsilon)$, откуда $\epsilon = \frac{1-\alpha}{2(3\alpha+1)}$, $0 < \epsilon < 1/2$ при $0 < \alpha < 1$. Для найденного ϵ в соотношениях (3.12) показате-

тель степени величины $1/N$ у h^N и δ^N равен $\frac{2\alpha}{3\alpha+1}$, а у $g^N - \frac{2(1-\alpha)}{3\alpha+1}$. Для получения оценки (3.6), учитывая формулу (3.8), полагаем $\frac{2\alpha}{3(3\alpha+1)} = \frac{2(1-\alpha)}{3\alpha+1}$, откуда $\alpha = 3/4$, $\epsilon = 1/26$ и, следовательно, показатели степени величины $1/N$ в (3.6) равны $2/13$.

2. Пусть $1/2 + 3\epsilon \geq 1$, $\epsilon \geq 1/6$. Тогда

$$h^N = \bar{C}_{12} \left(\frac{1}{N}\right)^{1/2-\epsilon}, \quad \delta^N = \bar{C}_{13} \left(\frac{1}{N}\right)^\alpha, \quad g^N = \bar{C}_{14} \left(\frac{1}{N}\right)^{1-\alpha}.$$

Очевидно, наибольший показатель степени величины $1/N$ в аппроксимационной части оценки (3.6) равен $1/9$, что хуже, чем полученный в предыдущем случае. Теорема доказана.

Заключение

В настоящей работе исследована достаточно общая постановка обратной задачи для линейного СДУ, предполагающая динамическую реконструкцию двух неизвестных неслучайных возмущений, входящих в детерминированный и стохастический члены уравнения. В качестве входной информации используются точные измерения некоторого количества реализаций части координат случайного процесса в дискретные моменты времени. Задача сведена к обратной задаче для двух систем ОДУ, которым удовлетворяют математическое ожидание и ковариационная матрица исходного процесса. Для ее решения предложена конструктивная модификация известного алгоритма восстановления, разработанного для частично наблюдаемых систем ОДУ. Основным результатом статьи является оценка точности алгоритма относительно количества доступных измерению реализаций. Отметим, что ряд вопросов, связанных с рассматриваемой постановкой, остается открытым. Например, представляются возможными улучшение порядка точности оценки (3.6) при дополнительных предположениях и исследование случая зашумленных измерений траекторий исходного СДУ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. L.: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
2. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
3. **Максимов В.И.** Задачи динамического восстановления входов бесконечномерных систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2000. 305 с.
4. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** Об устойчивом позиционном восстановлении управления по измерениям части координат // Некоторые задачи управления и устойчивости / УрО АН СССР. Свердловск, 1989. С. 33–47.
5. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Некоторые алгоритмы восстановления входов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129–161.
6. **Близорукова М.С., Максимов В.И.** Об одном алгоритме реконструкции траектории и управления в системе с запаздыванием // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 109–122.
7. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1984. 456 с.
8. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1978. 142 с.
9. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В.** Позиционное моделирование стохастического управления в динамических системах // Докл. Междунар. конф. по стохастической оптимизации. Киев, 1984. С. 43–45.
10. **Розенберг В.Л.** Задача динамического восстановления неизвестной функции в линейном стохастическом дифференциальном уравнении // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 76–87.
11. **Розенберг В.Л.** Задача реконструкции возмущения в линейном стохастическом уравнении: случай неполной информации // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 214–221.
12. **Ширяев А.Н.** Вероятность, статистика, случайные процессы. Ч. I, II. М.: Издательство Моск. ун-та, 1974. 628 с.
13. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. 408 с.
14. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. М.: Наука, 1985. 640 с.
15. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. М.: Наука, 1990. 642 с.
16. **Rozenberg V.L.** A control problem under incomplete information for a linear stochastic differential equation // Ural Math. J. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 68–82.
17. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
18. **Вдовин А.Ю.** К задаче восстановления возмущения в динамической системе: дис...канд. физ.-мат. наук. Свердловск, 1989. 117 с.

Розенберг Валерий Львович

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: rozen@imm.uran.ru

Поступила 16.02.2016

УДК 519.65

О РАВНОМЕРНЫХ КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ЛОКАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА¹

Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин

Для линейного дифференциального оператора третьего порядка $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$ ($\alpha > 0$) вычислены точно константы Лебега (нормы линейных операторов из C в C) для двух видов локальных (неинтерполяционных) тригонометрических сплайнов с равномерными узлами.

Ключевые слова: константы Лебега, тригонометрические сплайны, дифференциальные операторы третьего порядка.

E. V. Strelkova, V. T. Shevaldin. On uniform Lebesgue constants of third-order local trigonometric splines.

For the linear differential third-order operator $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$ ($\alpha > 0$), Lebesgue constants (the norms of linear operators from C to C) are calculated exactly for two types of local (noninterpolational) trigonometric splines with uniform knots.

Keywords: Lebesgue constants, trigonometric splines, differential operators of the third order.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-245-254

Введение

Пусть $\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D)$ ($r \in \mathbb{N}$, D — символ дифференцирования) — произвольный линейный дифференциальный оператор r -го порядка с постоянными действительными коэффициентами (старший коэффициент полагаем равным 1). Он может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_r = \mathcal{L}_r(D) = \prod_{s=1}^k (D^2 - 2\gamma_s D + \gamma_s^2 + \alpha_s^2) \prod_{j=1}^{r-2k} (D - \beta_j), \quad (0.1)$$

где α_s, β_j и γ_s — некоторые действительные числа (при $k = 0$ первое произведение в этом равенстве отсутствует), причем можно считать, что $\alpha_s > 0$ ($s = \overline{1, k}$). Пусть $S(\mathcal{L}_r)$ — множество \mathcal{L} -сплайнов $S \in C^{(r-2)}(\mathbb{R})$ порядка $r \geq 2$ (минимального дефекта), соответствующих оператору \mathcal{L}_r , с узлами $\{lh\}_{l \in \mathbb{Z}}$ (h — фиксированное положительное число). То есть любая функция $S \in S(\mathcal{L}_r)$ такова, что для любого числа $l \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$\mathcal{L}_r(D)S(x) = 0, \quad lh < x < (l+1)h.$$

Пусть θ — фиксированное число, $0 \leq \theta < 1$. Сплайн S называется *интерполяционным*, если он удовлетворяет условиям

$$S((\theta + l)h) = y_{l+\theta} \quad (l \in \mathbb{Z}), \quad (0.2)$$

где $\{y_{l+\theta}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ — некоторая последовательность действительных чисел. Вопросам существования и единственности интерполяционных \mathcal{L} -сплайнов (в случае $\mathcal{L}_r(D) = D^r$ они являются полиномиальными) посвящено значительное число работ (см., например, [1; 2] и имеющуюся там библиографию). Для функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ положим $y_{l+\theta} = f((\theta + l)h)$ ($l \in \mathbb{Z}$). Интерполяционный \mathcal{L} -сплайн $S(x) = S(f, x) \in S(\mathcal{L}_r)$, удовлетворяющий условиям (0.2), задает на числовой

¹Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

оси \mathbb{R} линейный метод аппроксимации функции f . Одной из характеристик устойчивости метода S является поведение равномерной нормы оператора S (как оператора, действующего из пространства C непрерывных на всей оси \mathbb{R} функций f в C), а именно величины

$$L_1 = L_1(\mathcal{L}_r, \theta) = \|S\|_C^C = \sup_{\|f\|_C \leq 1} \|S(f, \cdot)\|_C. \quad (0.3)$$

Число L_1 называется константой Лебега метода S . Важной задачей является ее точное вычисление (как функции, зависящей от \mathcal{L}_r, θ и h) в том случае, когда интерполяционный \mathcal{L} -сплайн $S \in S(\mathcal{L}_r)$ существует, или нахождение эффективных оценок сверху, если константу Лебега точно вычислить не удастся. Чем меньше такая константа, тем больше устойчивость сплайна к изменению интерполяционных условий (0.2). Оценкой констант Лебега интерполяционных полиномиальных и экспоненциальных сплайнов (они получаются, если в равенстве (0.1) положить $k = 0$) занимались многие авторы (см., например, библиографию в [3; 4]). В последние годы в теории приближения функций проявился интерес к локальным (неинтерполяционным) \mathcal{L} -сплайнам и их свойствам (в частности, вычислению для них соответствующих констант Лебега). Существование таких сплайнов, точных на всем ядре оператора \mathcal{L} или на его подпространствах, установлено (см. [5]), если все корни характеристического многочлена оператора \mathcal{L} являются действительными и попарно различными (т. е. для определенного вида экспоненциальных сплайнов). В [4] авторами начато изучение констант Лебега таких сплайнов, и эти константы вычислены точно в случае оператора третьего порядка $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ ($\beta > 0$) для двух видов локальных экспоненциальных сплайнов, построенных в [5; 6].

В настоящей работе исследуются вопросы устойчивости локальных (неинтерполяционных) \mathcal{L} -сплайнов, соответствующих оператору

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2) \quad (\alpha > 0). \quad (0.4)$$

Их естественно назвать *тригонометрическими*, поскольку базисом ядра оператора \mathcal{L}_3 являются функции $1, \sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$. Далее в следующем разделе для указанного оператора мы по значениям $\{y_{l+1/2}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ построим локальные тригонометрические сплайны, точные на всем ядре оператора (0.4), и в разд. 2 при $0 < h < \pi/\alpha$ вычислим точно их равномерные константы Лебега (как функции параметров h и α). Затем в разд. 3 точно вычисляются константы Лебега других локальных тригонометрических сплайнов оператора (0.4), построенных ранее в работе [7] К. В. Костоусова и В. Т. Шевалдина. Тригонометрические сплайны [7], как следует из результатов [3, гл. 5], реализуют *простейшую схему* локальной сплайн-аппроксимации и сохраняют не все ядро оператора \mathcal{L}_3 , а только подпространство, натянутое на две функции $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$.

1. Локальные тригонометрические сплайны третьего порядка, сохраняющие ядро оператора \mathcal{L}_3

Линейному дифференциальному оператору вида (0.4) поставим в соответствие обобщенную конечную разность (см., например, [1])

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_3} f(x) = (T - E)(T^2 - 2T \cos \alpha h + E)f(x) = \sum_{s=0}^3 (-1)^{3-s} \mu_s^{(3)}(h) f(x + sh), \quad (1.1)$$

определенную на множестве функций $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Здесь $Tf(x) = f(x+h)$ и E — тождественный оператор. Обобщенная разность (1.1) обращается в нуль на функциях $1, \sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$. При этом

$$\mu_3^{(3)}(h) = \mu_0^{(3)}(h) = 1, \quad \mu_2^{(3)}(h) = \mu_1^{(3)}(h) = 1 + 2 \cos \alpha h.$$

Пусть φ_3 — решение линейного однородного уравнения $\mathcal{L}_3(D)f = 0$, удовлетворяющее следующим условиям: $\varphi_3^{(j)}(0) = \delta_{j,2}$ ($j = 0, 1, 2$), где $\delta_{j,2}$ — символ Кронекера. Нетрудно понять, что

$$\varphi_3(x) = \frac{1 - \cos \alpha x}{\alpha^2}.$$

Тригонометрический базисный сплайн (B -сплайн) $B(x) = B_{\mathcal{L}_3}(x)$, соответствующий оператору \mathcal{L}_3 вида (0.4), определяется формулой

$$B(x) = B_{\mathcal{L}_3}(x) = \Delta_h^{\mathcal{L}_3} \varphi_3((x - 3h)_+),$$

где $t_+ = \max\{0; t\}$. Из (1.1) следует, что B -сплайн может быть записан в следующем виде:

$$B(x) = \frac{1}{\alpha^2} \begin{cases} 1 - \cos \alpha x, & 0 \leq x \leq h, \\ \cos \alpha(x - h) + \cos \alpha(x - 2h) - 2 \cos \alpha h, & h \leq x \leq 2h, \\ 1 - \cos \alpha(x - 3h), & 2h \leq x \leq 3h, \\ 0, & x \notin [0; 3h]. \end{cases}$$

Отметим простейшие свойства построенной функции: $B \in C^1(\mathbb{R})$, $\text{supp } B = [0; 3h]$, $B(3h - x) = B(x)$ ($0 \leq x \leq 3h$), $\mathcal{L}_3(D)B(x) = 0$ при $0 < x < h$, $h < x < 2h$, $2h < x < 3h$. Для функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$y_{j+1/2} = f((j + 1/2)h) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

и рассмотрим систему функционалов

$$I_j = c_1 y_{j+1/2} + c_2 y_{j+3/2} + c_3 y_{j+5/2} \quad (j \in \mathbb{Z}), \quad (1.2)$$

где c_1, c_2 и c_3 — некоторые действительные числа. Локальный тригонометрический сплайн третьего порядка, задающий линейный метод приближения функции f , определим формулой

$$S_{\mathcal{L}_3}(x) = S_{\mathcal{L}_3}(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_j B(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \quad (1.3)$$

При $x \in [lh; (l + 1)h]$ ($l \in \mathbb{Z}$) такой сплайн в силу определения B -сплайна может быть записан в виде

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}_3}(x) &= I_l B(x - lh) + I_{l-1} B(x - (l - 1)h) + I_{l-2} B(x - (l - 2)h) \\ &= (c_1 y_{l+1/2} + c_2 y_{l+3/2} + c_3 y_{l+5/2}) B(x - lh) + (c_1 y_{l-1/2} + c_2 y_{l+1/2} + c_3 y_{l+3/2}) B(x - (l - 1)h) \\ &\quad + (c_1 y_{l-3/2} + c_2 y_{l-1/2} + c_3 y_{l+1/2}) B(x - (l - 2)h) \\ &= \frac{1}{\alpha^2} \left\{ (c_1 y_{l+1/2} + c_2 y_{l+3/2} + c_3 y_{l+5/2}) (1 - \cos \alpha(x - lh)) \right. \\ &\quad + (c_1 y_{l-1/2} + c_2 y_{l+1/2} + c_3 y_{l+3/2}) (\cos \alpha(x - lh) + \cos \alpha(x - lh - h) - 2 \cos \alpha h) \\ &\quad \left. + (c_1 y_{l-3/2} + c_2 y_{l-1/2} + c_3 y_{l+1/2}) (1 - \cos \alpha(x - lh - h)) \right\}. \quad (1.4) \end{aligned}$$

Лемма 1. Пусть $0 < h < \pi/\alpha$ и

$$c_1 = c_3 = -\frac{\alpha^2 \sin^2 \frac{\alpha h}{4}}{8 \sin^4 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}, \quad c_2 = \frac{\alpha^2 \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right)}{8 \sin^4 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

Имеют место следующие неравенства:

$$S_{\mathcal{L}_3}(1, \cdot) = 1, \quad S_{\mathcal{L}_3}(\sin \alpha x, \cdot) = \sin \alpha x, \quad S_{\mathcal{L}_3}(\cos \alpha x, \cdot) = \cos \alpha x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Доказательство. Пусть $x \in [lh; (l+1)h]$ ($l \in \mathbb{Z}$). Обозначим $x - lh = t \in [0; h]$. Тогда из (1.4) следует, что

$$S_{\mathcal{L}_3}(1, \cdot) = \frac{2(1 - \cos \alpha h)}{\alpha^2} (c_1 + c_2 + c_3) = \frac{2(1 - \cos \alpha h) \left(-2 \sin^2 \frac{\alpha h}{4} + 1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2} \right)}{8 \sin^4 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} = 1.$$

При доказательстве двух других равенств леммы 1 можно, не ограничивая общности, считать, что $l = 0$. Из (1.4) имеем

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}_3}(\sin \alpha x, \cdot) &= S_{\mathcal{L}_3}(\sin \alpha t, \cdot) = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ c_1 \left[\left(-\sin \frac{3\alpha h}{2} \right) (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \right. \\ &+ \left. \left(-\sin \frac{\alpha h}{2} \right) (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) + \sin \frac{\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha t) \right] \\ &+ c_2 \left[\left(-\sin \frac{\alpha h}{2} \right) (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \\ &+ \left. \sin \frac{\alpha h}{2} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) + \sin \frac{3\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha t) \right] \\ &+ c_3 \left[\sin \frac{\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \\ &+ \left. \sin \frac{3\alpha h}{2} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) + \sin \frac{5\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha t) \right] \left. \right\} \\ &= A_1 + B_1 \cos \alpha t + C_1 \cos \alpha(t-h), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где A_1, B_1 и C_1 — некоторые константы, зависящие от h и α . Элементарные вычисления показывают, что

$$A_1 = 0, \quad B_1 = -\frac{\cos \alpha h}{\sin \alpha h}, \quad C_1 = \frac{1}{\sin \alpha h}. \quad (1.6)$$

Из (1.5) и (1.6) выводим равенство

$$S_{\mathcal{L}_3}(\sin \alpha t, \cdot) = -\frac{\cos \alpha h}{\sin \alpha h} \cos \alpha t + \frac{\cos \alpha(t-h)}{\sin \alpha h} = \sin \alpha t,$$

и второе равенство леммы 1 также доказано. Далее

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{L}_3}(\cos \alpha x, \cdot) &= S_{\mathcal{L}_3}(\cos \alpha t, \cdot) = \frac{1}{\alpha^2} \left\{ c_1 \left[\cos \frac{3\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \right. \\ &+ \left. \cos \frac{\alpha h}{2} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) + \cos \frac{\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha t) \right] \\ &+ c_2 \left[\cos \frac{\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \\ &+ \left. \cos \frac{\alpha h}{2} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) + \cos \frac{3\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha t) \right] \\ &+ c_3 \left[\cos \frac{\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \\ &+ \left. \cos \frac{3\alpha h}{2} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) + \cos \frac{5\alpha h}{2} (1 - \cos \alpha t) \right] \left. \right\} \\ &= A_2 + B_2 \cos \alpha t + C_2 \cos \alpha(t-h). \end{aligned} \quad (1.7)$$

С помощью элементарных преобразований получаем, что

$$A_2 = 0, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = 0. \quad (1.8)$$

Таким образом, из (1.7) и (1.8) выводим последнее утверждение леммы 1.

З а м е ч а н и е 1. Легко показать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0} c_3 = -\frac{1}{8h^2}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} c_2 = \frac{5}{4h^2}.$$

Именно такие коэффициенты были указаны Н. П. Корнейчуком [8] (см. также [9, гл. 7]) в аналогичной схеме локальной параболической ($\mathcal{L}_3(D) = D^3$) сплайн-аппроксимации, точной на алгебраических многочленах второй степени. Подобные результаты для локальных экспоненциальных сплайнов изложены в [3, гл. 1] и [4].

2. Константы Лебега тригонометрических сплайнов, сохраняющих ядро оператора \mathcal{L}_3

Построенные в лемме 1 локальные тригонометрические сплайны не являются интерполяционными, так как

$$S_{\mathcal{L}_3}\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)h\right) \neq y_{l+1/2} = f\left(\left(l + \frac{1}{2}\right)h\right) \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

но они (как и интерполяционные \mathcal{L} -сплайны) задают линейный оператор, ставящий в соответствие каждой функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ локальный тригонометрический сплайн вида (1.3). Определим норму этого оператора при помощи равенства

$$L_2(\mathcal{L}_3) = \|S_{\mathcal{L}_3}\|_C^C = \sup_{\|f\|_C \leq 1} \|S_{\mathcal{L}_3}(f, \cdot)\|_C.$$

Величину $L_2(\mathcal{L}_3)$ будем называть константой Лебега локального тригонометрического сплайна $S_{\mathcal{L}_3}(f, x)$ и рассмотрим вопрос о ее точном вычислении при фиксированных значениях h и α .

Теорема 1. При $0 < h < \pi/\alpha$ имеет место равенство

$$L_2(\mathcal{L}_3) = \frac{1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in [lh; (l+1)h]$ ($l \in \mathbb{Z}$) и $x - lh = t \in [0; h]$. Из (1.4) с учетом определения коэффициентов c_1, c_2 и c_3 получаем

$$S_{\mathcal{L}_3}(x) = \frac{1}{8 \sin^4 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} [y_{l-3/2}q_1(t) + y_{l-1/2}q_2(t) + y_{l+1/2}q_3(t) + y_{l+3/2}q_4(t) + y_{l+5/2}q_5(t)], \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} q_1(t) &= (1 - \cos \alpha(t-h)) \left(-\sin^2 \frac{\alpha h}{4} \right), \\ q_2(t) &= \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2} \right) (1 - \cos \alpha(t-h)) - \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h), \\ q_3(t) &= \left(-\sin^2 \frac{\alpha h}{4} \right) (1 - \cos \alpha(t-h) + 1 - \cos \alpha t) + \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2} \right) (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h), \\ q_4(t) &= \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2} \right) (1 - \cos \alpha t) - \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h), \\ q_5(t) &= (1 - \cos \alpha t) \left(-\sin^2 \frac{\alpha h}{4} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для любой непрерывной на всей числовой оси \mathbb{R} функции f такой, что $\|f\|_C \leq 1$ из (2.1) выводим оценку

$$|S_{\mathcal{L}_3}(x)| \leq \frac{1}{8 \sin^4 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} [|q_1(t)| + |q_2(t)| + |q_3(t)| + |q_4(t)| + |q_5(t)|]. \quad (2.3)$$

Таким образом, доказательство теоремы 1 сводится к изучению знаков функций $q_s(t)$ ($s = \overline{1, 5}$) на отрезке $[0; h]$. Ясно, что

$$q_1(t) \leq 0, \quad q_5(t) \leq 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Исследуем функцию $q_2(t)$. Из (2.2) следует, что при $0 \leq t \leq h$ эта функция может быть записана в виде

$$q_2(t) = A_3 + B_3 \cos \alpha t + C_3 \sin \alpha t,$$

где A_3, B_3 и C_3 — некоторые константы. Из этого представления заключаем, что $q_2(t)$ при $0 \leq t \leq h < \pi/\alpha$ имеет не более двух нулей (с учетом кратностей). Легко проверяются неравенства

$$q_2(0) > 0, \quad q_2\left(\frac{h}{2}\right) > 0, \quad q_2(h) < 0.$$

Следовательно, уравнение $q_2(t) = 0$ имеет на отрезке $[0; h]$ единственный простой корень t_1 , причем

$$\frac{h}{2} < t_1 < h,$$

и функция q_2 в этой точке меняет знак с “плюса” на “минус”. Из (2.2) нетрудно заметить, что

$$q_4(t) = q_2(h - t).$$

Следовательно, функция q_4 также имеет на отрезке $[0; h]$ единственный простой корень t_2 , причем

$$0 < t_2 < \frac{h}{2}.$$

Кроме того, при переходе через этот корень функция q_4 меняет знак с “минуса” на “плюс”. Из проведенного исследования выводим неравенство

$$0 < t_2 < \frac{h}{2} < t_1 < h.$$

Исследуем функцию $q_3(t)$ на отрезке $[0; h]$. Из (2.2) замечаем, что эта функция четная относительно точки $t = h/2$. Поскольку

$$q_3'(t) = (-2\alpha) \sin \alpha \left(t - \frac{h}{2}\right) \cos \frac{\alpha h}{2} \left(\sin^2 \frac{\alpha h}{4} + 1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) > 0$$

при $0 < t < h/2$, то функция q_3 возрастает при $0 < t < h/2$ и убывает при $h/2 < t < h$. Кроме того,

$$q_3(0) = q_3(h) = (1 - \cos \alpha h) \cos \frac{\alpha h}{2} \left(\cos \frac{\alpha h}{2} - \cos \alpha h\right) > 0$$

при $0 < h < \pi/\alpha$. Следовательно, $q_3(t) > 0$ при $0 \leq t \leq h$. Обозначим через $Q(t)$ выражение в квадратных скобках в равенстве (2.3), т. е.

$$Q(t) = |q_1(t)| + |q_2(t)| + |q_3(t)| + |q_4(t)| + |q_5(t)|. \quad (2.4)$$

С учетом проведенного анализа знаков функций $q_s(t)$ ($s = \overline{1, 5}$) получаем, что

$$Q(t) = \begin{cases} Q_1(t), & 0 \leq t \leq t_2, \\ Q_2(t), & t_2 \leq t \leq t_1, \\ Q_3(t), & t_1 \leq t \leq h, \end{cases} \quad (2.5)$$

где

$$Q_1(t) = -q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) - q_4(t) - q_5(t),$$

$$Q_2(t) = -q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) - q_5(t),$$

$$Q_3(t) = -q_1(t) - q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) - q_5(t).$$

После элементарных вычислений имеем

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \left[\sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha(t-h)) + \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) \right] \\ &+ \left[\left(-\sin^2 \frac{\alpha h}{4}\right) (1 - \cos \alpha(t-h)) + \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha t) \right] + \left[\sin^2 \frac{\alpha h}{4} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (1 - \cos \alpha t) + \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha t) \right], \\ Q_2(t) &= \left[\sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha(t-h)) + \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) \right] \\ &+ \left[\left(-\sin^2 \frac{\alpha h}{4}\right) (1 - \cos \alpha(t-h)) + \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha t) \right] + \left[\left(-\sin^2 \frac{\alpha h}{4}\right) (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (1 - \cos \alpha t) + \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha t) \right], \\ Q_3(t) &= \left[\sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha(t-h)) + \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (1 - \cos \alpha(t-h)) \right] + \left[\left(-\sin^2 \frac{\alpha h}{4}\right) (1 - \cos \alpha(t-h)) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) - \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha t) \right] \\ &\quad + \left[\left(-\sin^2 \frac{\alpha h}{4}\right) (\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) (1 - \cos \alpha t) + \sin^2 \frac{\alpha h}{4} (1 - \cos \alpha t) \right]. \end{aligned}$$

Из выписанных формул имеем

$$Q'_1(t) = -2\alpha \left(1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}\right) \sin \alpha t,$$

$$Q_3(t) = Q_1(h-t),$$

$$Q'_2(t) = 4\alpha \sin^2 \frac{\alpha h}{4} \sin \alpha \left(t - \frac{h}{2}\right) \cos \frac{\alpha h}{2}.$$

Значит, $Q'_1(t) < 0$ при $0 < t < h$, $Q'_2(t) > 0$ при $h/2 < t < h$, и поэтому справедливо следующее равенство:

$$\max_{t \in [0; h]} Q(t) = Q(0) = Q(h) = \frac{1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}. \quad (2.6)$$

Следовательно, из (2.3) с учетом (2.4)–(2.6) выводим оценку

$$|S_{\mathcal{L}_3}(x)| \leq \frac{1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}, \quad x \in [lh; (l+1)h] \quad (l \in \mathbb{Z}). \quad (2.7)$$

Кроме того, из приведенного доказательства следует, что на классе непрерывных на всей числовой оси \mathbb{R} функций f таких, что $\|f\|_C \leq 1$, неравенство (2.7) является точным в том смысле, что знак равенства в нем реализуется при $x = lh$ ($l \in \mathbb{Z}$), если

$$y_{l-3/2} = -1, \quad y_{l-1/2} = 1, \quad y_{l+1/2} = 1, \quad y_{l+3/2} = -1, \quad y_{l+5/2} = -1,$$

или при $x = (l+1)h$ ($l \in \mathbb{Z}$), если

$$y_{l-3/2} = -1, \quad y_{l-1/2} = -1, \quad y_{l+1/2} = 1, \quad y_{l+3/2} = 1, \quad y_{l+5/2} = -1.$$

Напомним, что $y_{j+1/2} = f((j+1/2)h)$ ($j \in \mathbb{Z}$). Следовательно, из (2.7) выводим утверждение теоремы 1

$$\sup_{\|f\|_C \leq 1} \|S_{\mathcal{L}_3}(f, \cdot)\|_C = \frac{1 - \cos \alpha h \cos \frac{\alpha h}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Константа Лебега локальных параболических сплайнов, точных на алгебраических многочленах второй степени (т.е. величина $L_2(\mathcal{L}_3)$ в случае $\mathcal{L}_3(D) = D^3$), была вычислена в [10] и оказалась равной 1.25. Заметим, что из теоремы 1 также следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} L_2(\mathcal{L}_3) = 1.25.$$

Кроме того, при $0 < h < \pi/\alpha$ имеет место неравенство

$$L_2(\mathcal{L}_3) > 1.25.$$

3. Простейшая схема локальной тригонометрической сплайн-аппроксимации

Изложим простейшую схему локальной тригонометрической сплайн-аппроксимации для оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 + \alpha^2)$ ($\alpha > 0$) (см. [3, гл. 5, § 1]). В функционале (1.2) положим

$$c_1 = c_3 = 0, \quad c_2 = \frac{\alpha^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

Тогда

$$I_j = c_2 y_{j+3/2} = \frac{\alpha^2}{4 \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \cos \frac{\alpha h}{2}} y_{j+3/2} \quad (j \in \mathbb{Z}),$$

и при $x \in [lh; (l+1)h]$ ($l \in \mathbb{Z}$) из (1.3) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{\mathcal{L}_3}(x) &= \tilde{S}_{\mathcal{L}_3}(f, x) = I_{l-2}B(x - (l-2)h) + I_{l-1}B(x - (l-1)h) + I_l B(x - lh) \\ &= \frac{c_2}{\alpha^2} \left[y_{l-1/2}(1 - \cos \alpha(t-h)) + y_{l+1/2}(\cos \alpha t + \cos \alpha(t-h) - 2 \cos \alpha h) + y_{l+3/2}(1 - \cos \alpha t) \right], \quad (3.1) \end{aligned}$$

где $t = x - lh \in [0; h]$. Легко проверяются следующие равенства:

$$\tilde{S}_{\mathcal{L}_3}(\sin \alpha x, \cdot) = \sin \alpha x, \quad \tilde{S}_{\mathcal{L}_3}(\cos \alpha x, \cdot) = \cos \alpha x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Таким образом, простейшая схема локальной тригонометрической сплайн-аппроксимации (при определенном выборе нормирующего множителя c_2) сохраняет подпространство ядра оператора \mathcal{L}_3 , натянутое на функции $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$. Сплайн (3.1) был построен К. В. Костоусовым и В. Т. Шевалдиным [7] (в терминах обобщенной конечной разности (1.1)). Величину

$$L_3(\mathcal{L}_3) = \sup_{\|f\|_C \leq 1} \|\tilde{S}_{\mathcal{L}_3}(f, \cdot)\|_C$$

назовем константой Лебега метода (3.1). Имеет место следующий результат.

Теорема 2. При $0 < h < \pi/\alpha$ справедливо равенство

$$L_3(\mathcal{L}_3) = \frac{1}{\cos \frac{\alpha h}{2}}.$$

Доказательство. При $x \in [lh; (l+1)h]$ ($l \in \mathbb{Z}$) с учетом того, что $B(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$), из (3.1) получаем

$$\begin{aligned} |\tilde{S}_{\mathcal{L}_3}(x)| &= |\tilde{S}_{\mathcal{L}_3}(f, x)| \leq \frac{c_2}{\alpha^2} \left[|y_{l-1/2}|(1 - \cos \alpha(x - lh - h)) \right. \\ &\quad \left. + |y_{l+1/2}|(\cos \alpha(x - lh) + \cos \alpha(x - lh - h) - 2 \cos \alpha h) + |y_{l+3/2}|(1 - \cos \alpha(x - lh)) \right] \\ &\leq \frac{c_2}{\alpha^2} (2 - 2 \cos \alpha h) \max_j |y_{j+1/2}|. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Поскольку $y_{j+1/2} = f((j + 1/2)h)$ ($j \in \mathbb{Z}$), то для любой непрерывной функции f , удовлетворяющей условию $\|f\|_C \leq 1$, из (3.2) и определения коэффициента c_2 получаем неравенство

$$|\tilde{S}_{\mathcal{L}_3}(f, x)| \leq \frac{1}{\cos \frac{\alpha h}{2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Последнее неравенство является точным. Знак равенства в нем реализует, например, функция $f(x) = 1$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. При $0 < h < \pi/\alpha$ имеет место неравенство

$$L_3(\mathcal{L}_3) < L_2(\mathcal{L}_3).$$

З а м е ч а н и е 4. Константы Лебега $L_2(\mathcal{L}_3)$ и $L_3(\mathcal{L}_3)$ было бы интересно сравнить с константами Лебега соответствующих интерполяционных тригонометрических сплайнов. Но к настоящему времени величины $L_1(\mathcal{L}_r, \theta)$ (см. (0.3)) вычислены только в том случае, когда все корни характеристического многочлена оператора \mathcal{L}_r вида (0.1) являются действительными числами (см. [11–17] и имеющиеся там ссылки).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шевалдин В.Т. Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.
2. Шевалдин В.Т. Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН. 1983. Т. 164. С. 203–240.

3. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Из-во УрО РАН, 2014. 198 с.
4. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О равномерных константах Лебега локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 261–272.
5. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами, точными на подпространствах ядра дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 4. С. 272–280.
6. **Жданов П.Г., Шевалдин В.Т.** Формосохраняющие локальные \mathcal{L} -сплайны, соответствующие произвольному линейному дифференциальному оператору третьего порядка // Сб. тр. Ин-та математики НАН Украины. 2008. Т. 366, № 2. С. 151–164.
7. **Костоусов К.В., Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными тригонометрическими сплайнами // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 3. С. 354–363.
8. **Корнейчук Н.П.** О приближении локальными сплайнами минимального дефекта // Укр. мат. журн. 1982. Т. 34, № 5. С. 617–621.
9. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
10. **Стрелкова Е.В., Шевалдин В.Т.** О константах Лебега локальных параболических сплайнов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 213–219.
11. **Женсыкбаев А.А.** Точные оценки равномерного приближения непрерывных функций сплайнами r -го порядка // Мат. заметки. 1973. Т. 13, № 2. С. 217–228.
12. **Richards F.** The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 14, no. 2. P. 83–92.
13. **Tzimbalaro J.** Lebesgue constants for cardinal \mathcal{L} -spline interpolation // Can. J. Math. 1977. Vol. 29, no. 2. P. 441–448.
14. **Morsche H.G. ter** On the Lebesgue constants for cardinal \mathcal{L} -spline interpolation // J. Approx. Theory. 1985. Vol. 45, no. 3. С. 232–246.
15. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных \mathcal{L} -сплайнов третьего порядка // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 1. С. 59–68.
16. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных ограниченных \mathcal{L} -сплайнов третьего порядка // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 2. С. 330–341.
17. **Ким В.А.** Точные константы Лебега для интерполяционных \mathcal{L} -сплайнов формально самосопряженного дифференциального оператора // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 169–177.

Стрелкова Елена Валерьевна
канд. физ.-мат. наук
гл. программист

Институт математики и механики Н. Н. Красовского УрО РАН

Шевалдин Валерий Грифонович
д-р физ.-мат. наук
зав. отд.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила 10.02.2016

УДК 517.977

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК В ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ¹**Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников**

В работе рассмотрена задача идентификации параметров динамической системы при известной зашумленной истории замеров фазовой траектории. Предложен новый подход к решению этой задачи, основанный на возможности конструирования вспомогательной задачи оптимального управления, для которой экстремали аппроксимируют историю замеров с заданной точностью. С помощью решений соответствующей характеристической системы получены оценки невязки, т.е. разности координат экстремалей и замеров фазовой траектории. Получена оценка результата идентификации параметров динамической системы. Приведен иллюстративный численный пример.

Ключевые слова: идентификация, функционал невязки, уравнение Гамильтона — Якоби — Беллмана, характеристическая система.

N. N. Subbotina, E. A. Krupennikov. The method of characteristics in an identification problem.

We consider the problem of identifying the parameters of a dynamic system from a noisy history of measuring the phase trajectory. We propose a new approach to the solution based on the construction of an auxiliary optimal control problem such that its extremals approximate the measurement history with a given accuracy. Using the solutions of the corresponding characteristic system, we obtain estimates for the residual, which is the difference between the coordinates of the extremals and the measurements of the phase trajectory. An estimate for the result of identifying the parameters of the dynamic system is obtained. An illustrative numerical example is given.

Keywords: identification, residual functional, Hamilton–Jacobi–Bellman equation, characteristic system.

MSC: 49N90, 49L20, 93B30

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-255-266

1. Введение

Теория идентификации параметров динамических систем к настоящему времени имеет богатую историю и обширную библиографию (см., например, [1, гл. 11, п. 1; 2, гл. 5]). Однако, исследования в этой области сохраняют свою актуальность, и новые методы востребованы как в теории, так и в многочисленных приложениях.

В данной работе предложен новый подход к решению задачи идентификации параметров динамической системы, использующий метод характеристик [3] для подходящего, согласованного с задачей уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана. Ранее подобный подход, опирающийся на метод характеристик, был предложен и обоснован авторами для решения обратной задачи теории управления, а именно, задачи реконструкции динамики и управления при известной истории зашумленных замеров траекторий управляемых систем [4]. Отметим, что в работах Ю. С. Осипова и А. В. Кряжмского [5; 6, гл. 7] был предложен другой подход к решению задачи реконструкции, также опирающийся на использование методов теории оптимального управления. Этот метод реконструирует управления с помощью регуляризированной процедуры “управления с поводырем”, динамично развивающейся *в прямом времени* и имеющей истоки в работах школы Н. Н. Красовского по теории оптимального позиционного

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14–01–00168) и Программы фундаментальных научных исследований Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления” (проект 0387-2015-0059).

управления. [7; 8]. Оба эти подхода могут быть рассмотрены как варианты метода регуляризации А. Н. Тихонова [9]. Особенностью метода, предлагаемого в данной работе, является введение и решение вспомогательной задачи оптимального управления со специально подобранным регуляризованным интегральным функционалом невязки, для которого экстремали аппроксимируют историю замеров с любой заданной точностью. Используемые при этом конструкции опираются на *попятные процедуры* динамического программирования, принцип максимума Л.С. Понтрягина [10, гл. I] и метод характеристик для соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана [11, гл. I, II].

Предлагаемый метод развит для конечномерных детерминированных систем, в которых идентифицируемые параметры входят линейно в описание динамики, а фазовые переменные могут входить нелинейно. Для решения задачи идентификации параметров динамической системы при известной истории замеров траектории системы вводится задача оптимального управления на минимум интегрального регуляризованного функционала для невязки динамики и интерполированной истории замеров. Неизвестные параметры системы трактуются как управляющие параметры. Решается задача реконструкции этих управлений. Для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана, соответствующего рассматриваемой задаче оптимального управления, с помощью метода характеристик вырабатываются траектории системы, аппроксимирующие непрерывные интерполяции замеров. Порождающие их управления являются аппроксимациями искомым параметрам системы.

Разработан численный алгоритм построения этих аппроксимаций. Получены достаточные условия на параметры аппроксимаций (оценку точности измерений, регуляризирующий параметр), при согласованном стремлении которых к нулю предлагаемые аппроксимации управления сходятся в L_2 к идентифицируемым параметрам.

Ниже для иллюстрации работы метода рассмотрено решение задачи идентификации параметра для одного класса механических систем при известной истории дискретных неточных замеров фазовой переменной и известной погрешности этих замеров. Приведены результаты численного решения задачи идентификации для механической колебательной системы.

Заметим, что предложенный подход может быть распространен на модели, линейные по управлениям и существенно нелинейные по фазовым переменным, в частности, для решения задачи идентификации параметров макроэкономической модели Э. Г. Альбрехта, рассмотренной в работе [12].

2. Постановка задачи идентификации

Рассмотрим следующую задачу идентификации для систем вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k_*^2 f(x(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}$ — фазовый вектор, $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а $k_* > 0$ — неизвестный постоянный параметр, причем известны константы $K_* > 0$, $K^* > 0$ такие, что

$$k_*^2 \in [K_*, K^*]. \quad (2.2)$$

Известна история замеров фазовой переменной $x(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$, реализованного (базового) решения $x_*(t)$ уравнения (2.1): $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_N)$, $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, причем известно, что

$$|x(t_i) - x_*(t_i)| \leq \delta, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.3)$$

где $\delta > 0$ — параметр погрешности измерений.

Полагаем, что для каждого δ известна дважды непрерывно дифференцируемая функция $y^\delta(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ — интерполяция истории замеров фазовой переменной $x_*(t)$, причем

$$(t, x_*(t)) \in \Omega_\delta = \{(t, x) \in \Pi_T : |x - y^\delta(t)| \leq 2\delta, \quad t \in [t_0, T]\}. \quad (2.4)$$

Предположение 1. *Полагаем, что существует такая константа \bar{Y} и такое число $\delta_0 > 0$, что для всех $\delta \leq \delta_0$ выполняются следующие условия:*

$$|y^\delta(t)| \leq \bar{Y}, \quad \left| \frac{dy^\delta(t)}{dt} \right| \leq \bar{Y}, \quad \left| \frac{d^2y^\delta(t)}{dt^2} \right| \leq \bar{Y}, \quad t \in [t_0, T], \quad \bar{Y} > 0. \quad (2.5)$$

Предположение 2. *Полагаем, что существует отрезок $\Phi = [\Phi_*, \Phi^*]$ такой, что для любого $\delta \leq \delta_0$, где δ_0 — из предположения 1, справедливо*

$$\Omega_\delta \in [t_0, T] \times \Phi,$$

где Ω_δ — из (2.4), а также справедливо, что существуют такие константы $X^* > 0$, $X_* > 0$, что

$$0 \leq X_* \leq |f(x)| \leq X^* \quad \forall x \in \Phi.$$

Задача идентификации состоит в нахождении по истории $y^\delta(\cdot)$ такой аппроксимации $k(\delta)$ неизвестного параметра k_* , что $\lim_{\delta \rightarrow 0} k(\delta) = k_*$.

3. Вспомогательные конструкции

3.1. Вспомогательная задача оптимального управления

Для решения задачи идентификации (2.1), (2.5) рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления для системы

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -u(t)f(x_1(t)), \quad t \in [t_0, T], \quad (3.1)$$

$$u(t) \in U = \{u \in \mathbb{R} : |u| \leq K\}, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.2)$$

где $K > 0$ — коэффициент, определяющий ограничения на управления, выбор которого будет пояснен ниже (см. замечание 2). Решения системы (3.1), (3.2) и уравнения (2.1) связаны соотношениями $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, роль неизвестного параметра исполняет вспомогательное управление $u(\cdot)$, которое выбирается так, чтобы перевести систему (3.1) из произвольного состояния $(t_0, x_{10}, x_{20}) = (t_0, x_0) \in \Pi_T$ в состояние $(T, x_1(T) = y_1(T), x_2(T) = y_2(T))$ и при этом минимизировать функционал невязки

$$I_{t_0, x_{01}, x_{02}}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T \left[-\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2}{2} - \frac{(x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \frac{\alpha^2}{2} u(t)^2 \right] dt. \quad (3.3)$$

Здесь $y_1(t) = y^\delta(t)$, $y_2(t) = \dot{y}^\delta(t)$ — аппроксимация замеров; $\alpha > 0$ — регуляризирующий параметр, $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) = x(t; t_0, x_{01}, x_{02}, u(\cdot))$ — траектория системы (3.1), (3.2) вышедшая из точки $x_1(t_0) = x_{01}$, $x_2(t_0) = x_{02}$ под воздействием измеримого управления $u(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow U$, где U определено в (3.2). Выбор знаков минус в подынтегральном выражении позволяет в итоге получить решение рассматриваемой задачи идентификации, устойчивое к возмущению входных данных.

3.2. Задача реконструкции

Задача реконструкции состоит в том, чтобы как можно более точно восстановить по истории замеров $y(\cdot) = y^\delta(\cdot)$ базовое движение $x_*(\cdot)$, т. е. нужно построить измеримое управление

$u^{\delta,\alpha}(\cdot): [t_0, T] \rightarrow U$ и порождаемую им траекторию системы (3.1), (3.2) $x^{\delta,\alpha}(\cdot) = (x_1^{\delta,\alpha}(\cdot), x_2^{\delta,\alpha}(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ такие, что

$$\|x_1^{\delta,\alpha}(\cdot) - x_*(t)\|_C = \max_{t \in [t_0, T]} |x_1^{\delta,\alpha}(t) - x_*(t)| \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \quad (3.4)$$

$$\|u^{\delta,\alpha}(\cdot) - u_*(t)\|_{L_2}^2 = \int_{t_0}^T |u^{\delta,\alpha}(t) - u_*(t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Здесь $u_*(t) \equiv k_*^2$.

З а м е ч а н и е 1. Решение задачи реконструкции управления $u_*(t) \equiv k_*^2$ позволяет сконструировать усреднения $k(\delta, \alpha)$ — аппроксимации решения исходной задачи идентификации (2.1), (2.3)

$$k(\delta, \alpha) = \sqrt{\frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^T u^{\delta,\alpha}(t) dt} \rightarrow k_* \text{ при } \alpha \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

3.3. Характеристическая система

Для решения задачи реконструкции используем [4; 12] решения характеристической системы для задачи (3.1)–(3.3).

Гамильтониан $H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2)$ для задачи (3.1)–(3.3) имеет вид

$$H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) = \min_{u \in U} \left[-s_2 f(x_1)u + \frac{\alpha^2}{2} u^2 \right] + s_1 x_2 - \frac{(x_1 - y_1(t))^2 + (x_2 - y_2(t))^2}{2}.$$

Нетрудно видеть, что справедливы соотношения

$$H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) = s_1 x_2 - \frac{(x_1 - y_1(t))^2 + (x_2 - y_2(t))^2}{2} - s_2 f(x_1) u^{\alpha,\delta} + \frac{\alpha^2}{2} (u^{\alpha,\delta})^2.$$

Здесь $u^{\alpha,\delta} = u^{\alpha,\delta}(t, x_1, x_2, s_1, s_2)$:

$$u^{\alpha,\delta} = \begin{cases} -K, & \text{если } r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) \leq -K, \\ r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2), & \text{если } r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) \in [-K, K], \\ K, & \text{если } r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) \geq K, \end{cases}$$

где $r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) = -\frac{1}{\alpha^2} f(x_1) s_2$.

Введение регуляризирующего параметра α при выборе любого вектора $s \in \mathbb{R}^2$ доставляет единственный аргумент $u^{\alpha,\delta}$ операции минимума в выражении для гамильтониана $H^\alpha(t, x, s)$ и тем самым обеспечивает непрерывность этого аргумента $u^{\alpha,\delta}(t, x_1, x_2, s_1, s_2)$ на $\text{cl } \Pi_T \times \mathbb{R}^2$.

Предположение 3. Поскольку рассматриваемая задача оптимального управления носит вспомогательный характер, будем полагать, что ограничения на управления столь велики, что в построенных далее конструкциях $r^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2) \in [-K, K]$, $t \in [t_0, T]$.

Выполнение этого предположения позволяет использовать наиболее простую форму записи характеристической системы.

З а м е ч а н и е 2. Численные эксперименты в рамках рассматриваемого класса динамических систем (2.1) показали, что предположение 3 выполняется для широкого спектра моделей при достаточно малых параметрах α и δ при выборе $K = 2X^*K^*/X_*^2$, где K^* — из (2.2), а X^* , X_* — из предположения 1.

Рассмотрим характеристическую систему для задачи (3.1)–(3.3) в предположении 3:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2)}{\partial s_i}, \quad \frac{ds_i}{dt} = -\frac{\partial H^\alpha(t, x_1, x_2, s_1, s_2)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_0, T], \quad (3.7)$$

с краевыми условиями

$$x_1(T) = y_1(T), \quad x_2(T) = y_2(T), \quad s_1(T) = 0, \quad s_2(T) = \xi_k. \quad (3.8)$$

В качестве точек ξ_k берутся точки из отрезка $S_\delta = [s_{\min}, s_{\max}]$. Границы s_{\min} и s_{\max} выбраны из условия $|\dot{x}_2(T) - \dot{y}_2(T)| \leq \delta$ и будут пояснены ниже в (3.12).

Из предположения 3 вытекает, что характеристическая система (3.7) для задачи (3.1)–(3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \quad \dot{x}_2(t) = -\frac{f(x_1(t))^2}{\alpha^2} s_2(t), \\ \dot{s}_1(t) &= \frac{s_2(t)^2 f(x_1(t))}{\alpha^2} \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial x_1} + (x_1(t) - y_1(t)), \quad \dot{s}_2(t) = -s_1(t) + (x_2(t) - y_2(t)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Предположение 4. Пусть при $0 < \delta \leq \delta_0$, где δ_0 – из предположения 1, и для любого $x_1(t, \xi_k)$ – решения системы (3.9) с краевыми условиями (3.8) справедливо

$$x_1(t, \xi_k) \in \Phi \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Введем невязки: $z_1(t) = x_1(t) - y_1(t)$, $z_2(t) = x_2(t) - y_2(t)$. Вспомнив, что $y_2(t) = \dot{y}_1(t)$, из (3.9) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t), \quad \dot{z}_2(t) = -\frac{f(x_1(t))^2}{\alpha^2} s_2(t) - \dot{y}_2(t), \\ \dot{s}_1(t) &= z_1(t) + \frac{s_2(t)^2 f(x_1(t))}{\alpha^2} \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial x_1}, \quad \dot{s}_2(t) = -s_1(t) + z_2(t). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.8) получаем краевые условия

$$z_1(T) = 0, \quad s_1(T) = 0, \quad z_2(T) = 0, \quad s_2(T) = \xi_k, \quad (3.11)$$

где ξ_k выбираются из условия $|\dot{z}_2(T)| \leq \delta$ на компакте $S_\delta = [s_{\min}, s_{\max}]$,

$$s_{\min} = \frac{\alpha^2}{f(x_1(T))^2} (-\dot{y}_2(T) - \delta), \quad s_{\max} = \frac{\alpha^2}{f(x_1(T))^2} (-\dot{y}_2(T) + \delta). \quad (3.12)$$

Иначе говоря, $\xi_k = \frac{\alpha^2}{f(x_1(T))^2} (-\dot{y}_2(T) + \theta_k \delta)$, $\theta_k \in [-1, 1]$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть выполняются предположения 1–4 и выбрано $(z_1(t, \xi_k), z_2(t, \xi_k), s_1(t, \xi_k), s_2(t, \xi_k))$ – решение системы (3.10) с краевым условием (3.11). Тогда существуют такие ограниченные кусочно-непрерывные функции $\bar{z}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{z}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{s}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{s}_i(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, которые на каждом полуинтервале непрерывности $(\tau_{j+1}, \tau_j]$ либо имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{z}_1(t) &= z_1(\tau_j, \xi_k) + \alpha^6 M, \quad \bar{z}_2(t) = \alpha^2 M, \quad \underline{z}_1(t) = z_1(\tau_j, \xi_k) - \alpha^6 M, \quad \underline{z}_2(t) = -\alpha^2 M, \\ \bar{s}_1(t) &= \alpha^2 M, \quad \bar{s}_2(t) = \alpha^4 M, \quad \underline{s}_1(t) = -\alpha^2 M, \quad \underline{s}_2(t) = -\alpha^4 M, \end{aligned}$$

где константа M определяется из предположений 2 и 3, либо являются решениями систем вида

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1(t) &= \bar{z}_2(t), \quad \dot{\bar{z}}_2(t) = -X^2 \bar{s}_2(t) / \alpha^2 - \dot{y}_2(t), \\ \dot{\underline{s}}_1(t) &= \underline{z}_1(t) + \alpha^2 R, \quad \dot{\underline{s}}_2(t) = -\bar{s}_1(t) + \bar{z}_2(t), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где в качестве постоянной X берется одна из постоянных X_* , X^* (где X_* и X^* — из предположения 2), а в качестве постоянной R берется либо $R = K^2 f^*/X_*$, либо $R = -K^2 f^*/X_*$, где $f^* = \max_{x \in \Phi} |f'_x(x)|$.

При этом имеют место следующие оценки:

$$\underline{z}_i(t) \leq z_i(t, \xi_k) \leq \bar{z}_i(t), \quad \underline{s}_i(t) \leq s_i(t, \xi_k) \leq \bar{s}_i(t), \quad i = 1, 2, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно показать, что временной отрезок $[t_0, T]$ можно представить в виде объединения компактов T_1 и T_2 , где T_1 содержит конечное число нулей функции $s_2(t, \xi_k)$, расстояние между которыми не меньше, чем $2\alpha^4$, а T_2 представим в виде объединения конечного числа отрезков, длина каждого из которых не больше, чем $2\alpha^4$ и каждый из которых содержит хотя бы два нуля функции $s_2(t, \xi_k)$, причем на компакте T_2 верно

$$|s_2(t, \xi_k)| \leq \alpha^4 M_1, \quad (3.15)$$

где константа M_1 определяется из предположений 2 и 3.

Построение кусочно-гладких функций $\bar{z}_i(t)$, $\bar{s}_i(t)$, $i = 1, 2$, и $\underline{z}_i(t)$, $\underline{s}_i(t)$, $i = 1, 2$, которые будем называть соответственно верхними и нижними оценочными функциями, производится последовательно на каждом j -м отрезке $[\tau_{j+1}, \tau_j]$, принадлежащем компакту T_1 либо T_2 , причем $s_2(\tau_j, \xi_k) = s_2(\tau_{j+1}, \xi_k) = 0$. Построение ведется в обратном времени, начиная с первого участка $[\tau_2, \tau_1]$, $\tau_1 = T$.

Если рассматриваемый отрезок $[\tau_{j+1}, \tau_j]$ принадлежит компакту T_2 , то на нем выполняется условие (3.15). При этом, используя схему доказательства, аналогичную схеме доказательства леммы и теоремы из работы [13], можно доказать оценку $|s_1(t, \xi_k)| \leq \alpha^2 M_2$, $t \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$, где константа M_2 определяется из предположений 2 и 3. Заметим, что по теореме Ролля в силу построения рассматриваемых отрезков и свойств компакта T_2 найдется хотя бы одна точка $\tau_0 \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$ такая, что $\dot{s}_2(\tau_0, \xi_k) = 0$. В силу уравнений (3.10) $z_2(\tau_0, \xi_k) = s_1(\tau_0, \xi_k) \leq \alpha^2 M_2$. Отсюда следует, что при $t \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$

$$|z_2(t, \xi_k)| \leq \alpha^2 M_2 + 2\alpha^4 \max_{t \in [\tau_{j+1}, \tau_j]} |\dot{z}_2(t, \xi_k)| \leq \alpha^2 M_2 + 2\alpha^4 (\alpha^2 X^* M_1 + \bar{Y}) = \alpha^2 M_3,$$

где $M_3 = M_2 + 2\alpha^2 (\alpha^2 X^* M_1 + \bar{Y})$. Нетрудно показать, что

$$z_1(\tau_j, \xi_k) - 2\alpha^6 M_3 \leq z_1(t) \leq z_1(\tau_j, \xi_k) + 2\alpha^6 M_3.$$

В качестве константы M выберем константу $M = \max\{M_1, M_2, 2M_3\}$.

В случае, если рассматриваемый отрезок $[\tau_{j+1}, \tau_j]$ принадлежит компакту T_1 , для выбранного решения $z(t, \xi_k)$, $s(t, \xi_k)$ либо $s_2(t, \xi_k) > 0$, либо $s_2(t, \xi_k) < 0$ при $t \in (\tau_{j+1}, \tau_j)$. При этом $s_2(\tau_{j+1}, \xi_k) = s_2(\tau_j, \xi_k) = 0$. В таком случае построим оценочную функцию в виде решения системы (3.13) с краевыми условиями вида

$$\bar{z}_1(T) = 0, \quad \bar{z}_2(T) = 0, \quad \bar{s}_1(T) = 0, \quad \bar{s}_2(T) = \xi_k \quad (3.16)$$

для отрезка $[\tau_2, \tau_1]$, $\tau_1 = T$. На последующих интервалах знакопостоянства функции $s_2(t, \xi_k)$ $t \in [\tau_{j+1}, \tau_j]$, $j \geq 2$, принадлежащих компакту T_1 , в качестве краевых условий берутся условия вида

$$\bar{z}_1(\tau_j) = z_1(\tau_j, \xi_k), \quad \bar{z}_2(\tau_j) = z_2(\tau_j, \xi_k), \quad \bar{s}_1(\tau_j) = 0, \quad \bar{s}_2(\tau_j) = 0, \quad (3.17)$$

где $z_1(t, \xi_k)$, $z_2(t, \xi_k)$ — координаты решения $z(t, \xi_k)$, $s(t, \xi_k)$ системы (3.10) с краевым условием (3.11).

Доказательство справедливости оценок (3.14) для случая $[\tau_{j+1}, \tau_j] \in T_1$ можно провести, используя схему доказательства, аналогичную схеме доказательства леммы из работы [13]. Предположения 2–4 обеспечивают существование и продолжимость решений рассматриваемых систем на каждом отрезке $[\tau_{j+1}, \tau_j]$. Лемма 1 доказана.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. При выполнении предположений 1–4 при $0 < \delta \leq \delta_0$ и $\alpha^2 = \alpha^2(\delta) \geq \delta^{1-\nu}$, $\nu \in (0, 1)$, для оценочных функций $\bar{z}_i(t)$, $\underline{z}_i(t)$, $\bar{s}_i(t)$, $\underline{s}_i(t)$, $i = 1, 2$, из (3.14) справедливы соотношения:

$$|\bar{z}_1(t)| = O(\alpha^2(\delta)), \quad |\underline{z}_2(t)| = O(\alpha^2(\delta)), \quad |\bar{s}_1(t)| = O(\alpha^2(\delta)), \quad |\underline{s}_2(t)| = O(\alpha^2(\delta)), \quad t \in [t_0, T]. \quad (3.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о для верхних и нижних оценочных функций проводится одинаково. В силу построения оценочные функции на каждом участке $[\tau_{j+1}, \tau_j]$ совпадают с решениями системы вида (3.13) с краевыми условиями (3.16) или (3.17). При этом на интервале $[\tau_{j+1}, \tau_j]$ константа X в (3.13) равна либо X^* , либо X_* . Для упрощения дальнейших пояснений используем общий символ X .

Рассмотрим первый участок $[\tau_2, T]$. Предположим, что он принадлежит компакту T_1 . Краевые условия для системы (3.13) на этом участке тогда имеют вид (3.16). Построим решение этой системы в таком случае.

Общее решение системы (3.13) будем искать как сумму общего решения $\bar{w}_O(t) = (\bar{z}_{1O}(t), \bar{z}_{2O}(t), \bar{s}_{1O}(t), \bar{s}_{2O}(t))^T$ однородной системы и частного $\bar{w}_H(t) = (\bar{z}_{1H}(t), \bar{z}_{2H}(t), \bar{s}_{1H}(t), \bar{s}_{2H}(t))^T$ неоднородной.

Сначала найдем общее решение $\bar{w}_O(t)$ однородной системы. Характеристический многочлен для соответствующей однородной системы будет иметь вид

$$\lambda^4 + \lambda^2 \frac{X^2}{\alpha^2} - \frac{X^2}{\alpha^2} = 0.$$

Он имеет два чисто мнимых корня и два действительных:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm r, \quad r = \frac{X}{\sqrt{2}\alpha} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \alpha^2/X^2}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} r = X, \\ \lambda_{3,4} &= \pm ip, \quad p = \frac{X}{\sqrt{2}\alpha} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \alpha^2/X^2}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha p = X. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Зная собственные значения характеристической матрицы (3.19), можно найти собственные векторы и с их помощью записать фундаментальную матрицу $F(t)$. Нетрудно показать, что в качестве такой матрицы можно взять матрицу

$$F(t) = \begin{pmatrix} e^{rt} & e^{-rt} & \cos(pt) - \sin(pt) & -\sin(pt) - \cos(pt) \\ e^{rt} & e^{-rt} & -p \cos(pt) - p \sin(pt) & p \sin(pt) - p \cos(pt) \\ e^{rt} & e^{-rt} & \cos(pt)/p + \sin(pt)/p & -\sin(pt)/p + \cos(pt)/p \\ e^{rt} & e^{-rt} & p^2 \alpha^2 (\cos(pt) - \sin(pt))/X^2 & -p^2 \alpha^2 (\sin(pt) - \cos(pt))/X^2 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Общее решение $\bar{w}_O(t)$ тогда можно записать как $\bar{w}_O(t) = F(t)C$, где C — столбец свободных коэффициентов. Для того чтобы найти частное решение в удобном нам виде (ниже будет пояснено, почему именно такой вид удобен для доказательства), произведем замену переменных

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{1H}(t) &= \bar{z}_1(t) + \alpha^2 R, \quad \tilde{z}_{2H}(t) = \bar{z}_2(t), \\ \tilde{s}_{1H}(t) &= \bar{s}_1(t) - \alpha^2 \ddot{y}_2(t)/X^2, \quad \tilde{s}_{2H}(t) = \bar{s}_2(t) + \alpha^2 \dot{y}_2(t)/X^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставим новые переменные в систему (3.13)

$$\dot{\tilde{z}}_{1H} = \tilde{z}_{2H}, \quad \dot{\tilde{z}}_{2H} = -X^2 \tilde{s}_2/\alpha^2, \quad \dot{\tilde{s}}_{1H} = \tilde{z}_{1H} - \dot{y}_2(t), \quad \dot{\tilde{s}}_{2H} = -\tilde{s}_{1H} + \tilde{z}_{2H}. \quad (3.22)$$

В силу того что в качестве частного решения $\bar{w}_H(t)$ можно рассматривать решение системы (3.13) при любых краевых условиях $\bar{w}_H(T)$, то частное решение системы в новых переменных (3.22) будем искать при нулевых краевых условиях. Тогда по формуле Коши такое решение можно искать в форме

$$\bar{w}_H = F_H(t) \int_{t_0}^T F_H^{-1}(\tau) f(\tau) d\tau, \quad (3.23)$$

где $F_H(t)$ — нормированная фундаментальная матрица этой системы. Заметим, что получить такую матрицу можно, нормировав матрицу $F(t)$, поскольку однородная часть системы (3.22) совпадает с таковой, соответствующей системе (3.13). Явный вид матрицы $F_H(t)$ был найден с помощью вычислительного пакета. В силу громоздкости полученных результатов промежуточные выкладки не приводятся. Выпишем сразу оценки для интеграла из выражения (3.23):

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^T \left(\left| -\frac{\alpha^2 p^2 r \dot{y}_2(\tau) e^{-r\tau}}{2(p^2 + r^2) X^2} \right|, \left| \frac{\alpha^2 p^2 r \dot{y}_2(\tau) e^{r\tau}}{2(p^2 + r^2) X^2} \right|, \right. \\ & \left. \left| -\frac{\alpha^3 r \sqrt{pr} \dot{y}_2(\tau) (\sin(p\tau) + \cos(p\tau))}{X^3} \right|, \left| \frac{\alpha^3 r \sqrt{pr} \dot{y}_2(\tau) (\sin(p\tau) - \cos(p\tau))}{X^3} \right| \right)^T d\tau \\ & \leq \left(\frac{\alpha^2 p^2 r}{k^2 + r^2} K_1, \frac{\alpha^2 p^2 r}{k^2 + r^2} K_2, \alpha^3 r \sqrt{pr} K_3, \alpha^3 r \sqrt{pr} K_4 \right)^T, \\ & K_1 = \bar{Y}(e^{-T} + e^{-t_0})/2X^2, \quad K_2 = \bar{Y}(e^T + e^{t_0})/2X^2, \quad K_3 = 2\bar{Y}/X^3, \quad K_4 = 2\bar{Y}/X^3. \end{aligned}$$

Если подставить эти оценки в выражение (3.23), получим следующие оценки для частного решения:

$$|\tilde{z}_{1H}(t)| \leq \alpha^2 K_{p,r}, \quad |\tilde{z}_{2H}(t)| \leq \alpha^2 K_{p,r}, \quad |\tilde{s}_{1H}(t)| \leq \alpha^2 K_{p,r}, \quad |\tilde{s}_{2H}(t)| \leq \alpha^4 K_{p,r}, \quad t \in [t_2, T],$$

$$K_{p,r} = \frac{p^2 r^2}{2X(p^2 + r^2)} (2r K_2 e^{-rt_0} + 2r K_1 e^{rT} + 2pX(K_3 + K_4)) = O(1/\alpha). \quad (3.24)$$

Итак, общее решение системы (3.13) записывается в виде

$$\bar{w}_O(t) = F(t) C + \bar{w}_H(t). \quad (3.25)$$

Свободные коэффициенты найдем, подставив краевые условия. Для наглядного обоснования выбора краевых условий подставим краевые условия общего вида $\bar{z}_1(T) = z_{10}$, $\bar{z}_2(T) = z_{20}$, $\bar{s}_1(T) = s_{10}$, $\bar{s}_2(T) = s_{20}$:

$$\begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \\ s_{10} \\ s_{20} \end{pmatrix} = F(T) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{z}_{1H}(T) - \alpha^2 R \\ \tilde{z}_{2H}(T) \\ \tilde{s}_{1H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2 \\ \tilde{s}_{2H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2 \end{pmatrix}.$$

Разрешив эту систему относительно коэффициентов $c_{1,2,3,4}$, получим

$$\begin{aligned} c_1 &= e^{-rT} \left(\alpha^2 (p^2 (r(s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) + (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) + rz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T)) \right. \\ & \quad \left. - (s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) X^2 \right) / \left(2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right), \\ c_2 &= e^{rT} \left(\alpha^2 (p^2 (r(s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) + rz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T)) \right. \\ & \quad \left. + (s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) X^2 \right) / \left(2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right), \\ c_3 &= \sin(pT) \left(\alpha^2 (pr^2 (s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - pz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T) - r^2 (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) \right. \\ & \quad \left. - [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2] X^2 \right) / \left(2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right) \\ & \quad + \cos(pT) \left(\alpha^2 (pr^2 (s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - pz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T) + r^2 (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) \right. \\ & \quad \left. + [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2] X^2 \right) / \left(2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right), \\ c_4 &= \cos(pT) \left(\alpha^2 (pr^2 (s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - pz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T) - r^2 (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) \right. \\ & \quad \left. - [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2] X^2 \right) / \left(2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right) \\ & \quad - \sin(pT) \left(\alpha^2 (pr^2 (s_{10} - \tilde{s}_{1H}(T) - \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2) - pz_{20} - \tilde{z}_{2H}(T) + r^2 (z_{10} - \tilde{z}_{1H}(T) + \alpha^2 R)) \right. \\ & \quad \left. + [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2 \dot{y}_2(T)/X^2] X^2 \right) / \left(2\alpha^2 (p^2 + r^2) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Согласно условиям леммы выбираем α и δ согласованно, а именно, так, чтобы $\alpha^2 = \alpha^2(\delta) \geq \delta^{1-\nu}$, $\nu \in (0, 1)$.

Заметим, что в формулах (3.26) в числителях слагаемые младших порядков малости по α выделены в квадратные скобки. Однако если подставить краевые условия (3.16) и оценки (3.24), можно показать, что на самом деле эти слагаемые имеют тот же порядок малости (а именно, $\alpha^3(\delta)$), что и остальные слагаемые в числителях. Замена переменных (3.21) и выбор краевых условий (3.16) позволяют доказать, что выражения в квадратных скобках в (3.26) имеют порядок малости $\alpha^3(\delta)$ с учетом краевых условий (3.16), оценок (3.24) и пределов (3.19), а именно

$$| [s_{20} - \tilde{s}_{2H}(T) + \alpha^2(\delta)\dot{y}_2(T)/X^2] | = \left| -\theta_k \frac{\delta\alpha^2(\delta)}{X^2} - \tilde{s}_{2H}(T) \right| \leq \frac{\alpha^4(\delta)}{X^2} + \alpha^4(\delta)O(1/\alpha(\delta)) = O(\alpha^3(\delta)).$$

Если воспользоваться пределами (3.19), то можно заметить, что знаменатели в выражениях (3.26) при $\alpha \rightarrow 0$ стремятся к постоянным величинам. Из этого в свою очередь можно получить, что

$$c_1 = O(\alpha^2(\delta)), \quad c_2 = O(\alpha^2(\delta)), \quad c_3 = O(\alpha^3(\delta)), \quad c_4 = O(\alpha^3(\delta)). \quad (3.27)$$

Перепишем формулу (3.25), используя замену переменных (3.21):

$$\bar{w}_O(t) = F(t) C + \begin{pmatrix} \tilde{z}_{1H}(t) - \alpha^2(\delta)R \\ \tilde{z}_{2H}(t) \\ \tilde{s}_{1H}(t) + \alpha^2(\delta)\ddot{y}_2(T)/X^2 \\ \tilde{s}_{2H}(t) - \alpha^2(\delta)\dot{y}_2(T)/X^2 \end{pmatrix}.$$

Подставив известный вид матрицы $F(t)$ (3.20), оценки (3.27) и (3.24), можно сделать следующий вывод:

$$\|\bar{z}(t)\|_{C[\tau_2, T]} = O(\alpha^2(\delta)), \quad t \in [\tau_1, T]. \quad (3.28)$$

Аналогичная оценка получается на отрезке $[\tau_2, T]$ и для $\|\underline{z}(t)\|$.

Доказательство для последующего участка времени $[\tau_3, \tau_2]$ для случая $[\tau_3, \tau_2] \in T_1$ можно провести аналогичным образом с той разницей, что отличаются краевые условия (3.16), новые переменные (3.21) и связанные с ними выражения (3.22), (3.24) и (3.26). При этом доказательство выполнения на этом шаге оценок (3.27) будет проводиться с использованием оценок (3.28), полученных на предыдущем этапе.

В случае, если $[\tau_3, \tau_2] \in T_2$, оценка (3.18) будет следовать непосредственно из леммы 1 и оценки $z_1(t_2)$, полученной на первом шаге.

И так далее по индукции доказательство можно продлить на весь участок $[\tau_0, T]$.

Лемма 2 доказана.

4. Решение задачи реконструкции

Зафиксируем $\delta \in (0, \delta_0]$ и $\alpha^2 = \alpha^2(\delta) \geq \delta^{1-\nu}$, $\nu \in (0, 1)$, и рассмотрим множество траекторий $x(t, \xi_k) = (x_1(t, \xi_k), x_2(t, \xi_k))$ — фазовых координат характеристической системы (3.9) с краевыми условиями вида (3.8) и порождающих их управлений $u(t, \xi_k)$, где $\xi_k \in S_\delta$ (3.12).

Рассмотрим задачу на минимум функционала (3.3)

$$I(t_0, x(\cdot, \xi^*), u(\cdot, \xi^*)) = \min_{\xi_k \in S_\delta} I(t_0, x(\cdot, \xi_k), u(\cdot, \xi_k)). \quad (4.1)$$

Из компактности множества $x(\cdot, \xi_k)$, $\xi_k \in S_\delta$, вытекает существование $\xi^* \in S_\delta$ и траектории $x^{\delta, \alpha}(t) = x(t, \xi^*)$ системы (3.9), порождаемой непрерывным допустимым управлением $u^{\delta, \alpha}(\cdot) = u(t, \xi^*)$, которые решают задачу (4.1). Справедлива следующая

Теорема. Если выполняются предположения 1–4 и условие согласования параметров $\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \delta/\alpha^2 = 0$, то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|x_1^{\delta, \alpha}(t) - x_*(t)\|_C = 0,$$

где $x_1^{\delta, \alpha}(t)$ — решение задачи (4.1).

Доказательство. Для любого $\delta \in [0, \delta_0]$, δ_0 — из предположения 1, выберем согласованный с ним параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ такой, что $\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \delta/\alpha^2 = 0$.

В силу лемм 1 и 2 для $x^{\delta, \alpha}(t)$ найдутся такие ограниченные оценочные функции $\bar{z}(t)$ и $\underline{z}(t)$ из (3.14), для которых выполняется условие (3.18), что

$$O(\alpha^2(\delta)) + y_1(t) = \underline{z}(t) + y_1(t) \leq x_1^{\delta, \alpha}(t) \leq \bar{z}(t) + y_1(t) = O(\alpha^2(\delta)) + y_1(t).$$

Из этого следует, что $\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|x_1^{\delta, \alpha}(t) - y_1(t)\|_C = 0$. Из этого соотношения и (2.4) можно сделать вывод:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|x_1^{\delta, \alpha}(t) - x_*(t)\|_C = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема верна для любого выбранного $\xi_k \in S_\delta$. Для решения задачи реконструкции управления при условии согласования параметров $\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \delta/\alpha^2 = 0$ с помощью теоремы можно провести доказательство сходимости управления

$$\lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|u^{\delta, \alpha}(t) - u_*(t)\|_{L_2} = \lim_{\delta \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0} \|u^{\delta, \alpha}(t) - k_*^2\|_{L_2} = 0$$

таким же образом, как это было проделано в работе [4, с. 226–228]. При этом существенную роль играет выбор ξ_k^* , решающего задачу минимизации (4.1).

Значит, траектория $x^{\delta, \alpha}(t)$ и порождающее ее управление $u^{\delta, \alpha}(t)$ являются решениями исходной задачи реконструкции в смысле (3.4), (3.5).

5. Пример

Был проведен ряд численных экспериментов, заключающихся в реализации предложенного метода решения задачи реконструкции на примере идентификации параметра k_*^2 модели колебаний пружины, где $f(x) = x$, а k_*^2 играет роль неизвестного коэффициента жесткости.

В этих экспериментах в качестве базовой траектории $x_*(t)$ рассматривалось решение уравнения (2.1) при $k_*^2 = 9$. А именно, в качестве базовой траектории рассматривалась траектория

$$x_*(t) = \sin(3t), \quad t \in [9.6, 10].$$

С помощью генератора случайных чисел, имитирующего погрешность, была взята дискретная история замеров базовой траектории $x_*(t)$, проинтерполированная гладкой функцией $y_1(t)$. В качестве функции $y_2(t)$ была взята производная $\dot{y}_1(t)$. На промежутке времени $t \in [9.6, 10]$, на котором выполняется предположение 2, были восстановлены решения $x^{\delta, \alpha}(t)$ и порождающие их управления $u^{\delta, \alpha}(t)$ для разных значений параметров δ , α . Полученные результаты наглядно иллюстрируют, что при согласованном стремлении этих параметров к нулю выполняются условия (3.4), (3.5).

Ниже на рис. 1–4 приведены графики восстановленных фазовых переменных $x_1^{\delta, \alpha}(t)$ и управления, порождающего их. Эти графики построены при разных значениях параметров δ , α . Также было численно найдено $k^{\delta, \alpha}$ — “усредненное” значение $u^{\delta, \alpha}(t)$, вычисленное по формуле (3.6).

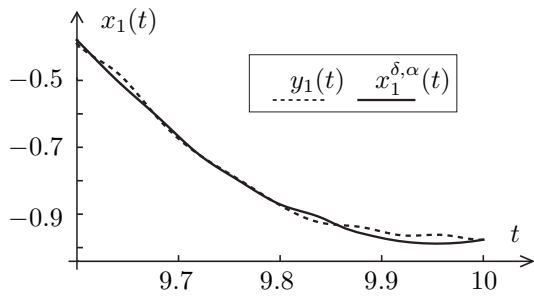


Рис. 1. График $x_1^{\delta,\alpha}(t)$ при $\alpha = 10^{-2}$.

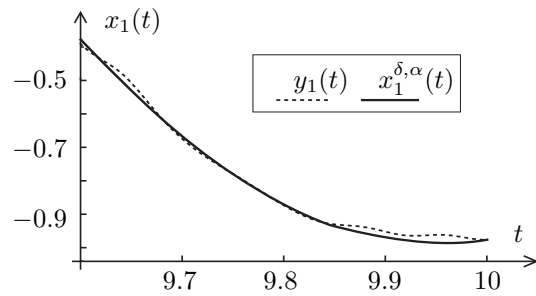


Рис. 2. График $x_1^{\delta,\alpha}(t)$ при $\alpha = 10^{-3}$.

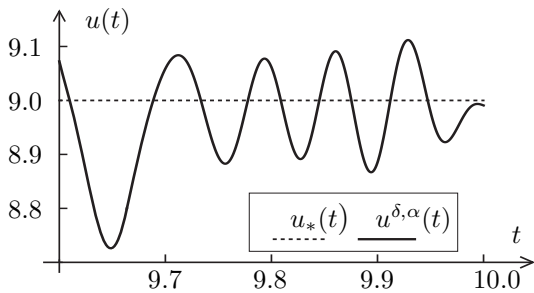


Рис. 3. График $u^{\delta,\alpha}(t)$ при $\alpha = 10^{-2}$, $k^{\delta,\alpha^2} = 8.95$.

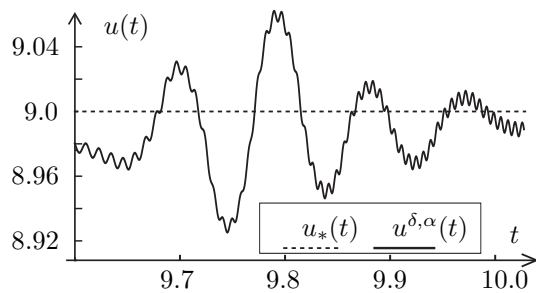


Рис. 4. График $u^{\delta,\alpha}(t)$ при $\alpha = 10^{-3}$, $k^{\delta,\alpha^2} = 8.99$.

Помимо предложенного метода, опирающегося на решение задачи (3.1), о минимизации функционала с отрицательной невязкой (3.3), была предпринята попытка использовать функционал с положительной невязкой вида

$$I_{t_0, x_0}(u(\cdot)) = \int_{t_0}^T \left[\frac{(x_1(t) - y_1(t))^2}{2} + \frac{(x_2(t) - y_2(t))^2}{2} + \frac{\alpha}{2} u(t)^2 \right] dt. \quad (5.1)$$

Такой выбор функционала может казаться более естественным. Тем не менее исследование характеристической системы для задачи управления системой (3.1) на минимум функционала (5.1) дало следующие результаты: соответствующая характеристическая система является неустойчивой [14, гл. I, п. 11] по теореме о первом приближении. Это приводит к тому, что при нахождении решений этой системы невязки начинают расти по экспоненте, что очень сильно затрудняет построение аппроксимаций. Этот результат наблюдается при аналогичных исследованиях, проведенных для управляемых нелинейных систем, рассмотренных в работе [13]. Рисунок 5 иллюстрирует попытку построения такой аппроксимации.

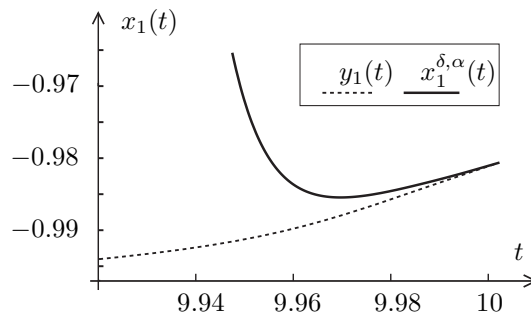


Рис. 5. График $x_1(t)$ при $\alpha = 10^{-3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Поляк Б.Т.** Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
2. Справочник по теории автоматического управления / ред. А.А. Красовский. М.: Наука, 1987. 712 с.
3. Метод характеристик для уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана / Н.Н. Субботина, Е.А. Колпакова, Т.Б. Токманцев, Л.Г. Шагалова. Екатеринбург: РИО УрО РАН, 2013. 244 с.
4. **Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б.** Исследование устойчивости решения обратных задач динамики управляемых систем по отношению к возмущениям входных данных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 218–233.
5. **Кряжимский А.В., Осипов Ю.С.** О моделировании управления в динамической системе // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1983. № 2. С. 51–60.
6. **Osipov Yu.S., Kryazhinskii A.V.** Inverse problems for ordinary differential equations: Dynamical solutions. London: Gordon and Breach, 1995. 625 p.
7. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
8. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры, М.: Наука, 1974. 456 с.
9. **Тихонов А.Н.** Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39, № 4. С. 195–198.
10. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1961. 391 с.
11. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: Перспективы динамической оптимизации / Ин-т компьютер. исследований. М.; Ижевск, 2003. 336 с.
12. **Субботина Н.Н., Токманцев Т.Б., Крупенников Е.Ф.** К решению обратных задач динамики линейно управляемых систем методом отрицательной невязки // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 266–275.
13. **Крупенников Е.А.** К обоснованию метода решения задачи реконструкции динамики макроэкономической модели // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 102–114.
14. **Барбашин Е.А.** Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 225 с.

Субботина Нина Николаевна
чл.-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук,
зав. сектором

Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор Института математики и компьютерных наук
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: subb@uran.ru

Крупенников Евгений Александрович
ведущий математик

Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
аспирант
Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина
e-mail: krupennikov@imm.uran.ru

Поступила 09.03.16

УДК 517.977

**ЗАДАЧА ПАКЕТНОГО НАВЕДЕНИЯ К ЗАДАННОМУ МОМЕНТУ
ВРЕМЕНИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ
С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ¹****П. Г. Сурков**

Для линейной управляемой динамической системы с запаздыванием рассмотрена задача построения гарантированного позиционного наведения к заданному моменту времени при неполной информации о начальном состоянии с использованием метода пакетов программ. Доказывается критерий разрешимости задачи для случая конечного множества начальных состояний. Предложенная методика иллюстрируется на примере конкретной линейной управляемой системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Ключевые слова: управление, неполная информация, линейные системы с запаздыванием.

P. G. Surkov. The problem of closed-loop guidance by a given time for a linear control system with delay.

The problem of guaranteed closed-loop guidance by a given time under incomplete information on the initial state is studied for a dynamical control system with delay by means of the method of open-loop control packages. A solvability criterion is proved for this problem in the case of a finite set of admissible initial states. The proposed technique is illustrated by a specific linear control system of differential equations with delay.

Keywords: control, incomplete information, linear systems with delay.

MSC: 34K06, 34K35

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-267-276

1. Введение. Задача гарантированного позиционного наведения

Теория управления, находящая свое применение в различных сферах науки и практики, продолжает активно развиваться благодаря усилиям широкого круга исследователей. Особый интерес вызывают задачи управления различными системами при неполной информации ввиду своей распространенности. Отличительной чертой подобного рода задач является отсутствие (ненаблюдение) некоторых данных о системе во время реализации управляющего воздействия.

Неполнота информации в задачах управления может находить свое отражение как в неточном задании самой системы, наблюдении только части координат, так и неизвестном начальном состоянии (см., например, [1]). Рассматриваемая в настоящей работе задача относится к последнему типу. Для управляемой динамической системы вида

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t - r) + B(t)u(t) + f(t), \quad t \in [\sigma, T], \quad (1.1)$$

где временной отрезок $[\sigma, T]$ — ненулевой длины, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — состояние системы в момент времени t , $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — управление в этот момент, элементы матриц $A_0(t)$, $A_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, а также $f(t) \in \mathbb{R}^n$ являются непрерывными функциями на $[\sigma, T]$, будет решена задача гарантированного позиционного наведения (задача (Ps)) [2–5] на заданное целевое множество к заданному моменту времени. Алгоритм ее решения основан на методе пакетов программ [6–9].

Для линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в случае конечного начального множества для метода пакетов программ в [8] был получен критерий разрешимости задачи пакетного наведения. Предложенная в ней методика была успешно применена в

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-01-00539).

задачах гарантированного позиционного наведения для частично наблюдаемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями при наличии действия на систему неизвестного возмущения [10], а также стохастическими дифференциальными уравнениями [11]. В работе [12] рассматривалась задача терминального управления линейной автономной управляемой системой с ограниченным управлением и неизвестным начальным состоянием, но принадлежащим заданному множеству. Авторами был предложен алгоритм построения гарантированного управления при неполной информации о начальной функции с привлечением конструкций программных пакетов, если матрица наблюдения зависит только от фазовых координат. В работе [9] для обыкновенных дифференциальных уравнений получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи гарантированного позиционного наведения к заданному моменту времени. В данной работе мы рассматриваем случай, когда в роли динамической системы выступает линейная управляемая система дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Будем предполагать, что начальное состояние системы содержится в некотором заданном конечном множестве *допустимых начальных состояний* $X_0 \subset C$, где $C = C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ — функциональное пространство состояний [13, с. 182]. Под *программным управлением* или *программой* будет понимать всякую измеримую по Лебегу функцию $u(\cdot): [\sigma, T] \rightarrow P$, $P \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый компакт. Множество всех программ обозначается \mathcal{U} . Для любой начальной функции $\varphi(\vartheta)$ из пространства C и всякой программы $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *движением* системы из начального состояния (σ, φ) под действием программы $u(\cdot)$ будем называть решение (по Каратеодори) дифференциального уравнения с запаздыванием (1.1), определенное на отрезке $[\sigma, T]$ и удовлетворяющее условию $x_\sigma = \varphi$, где $x_\sigma(\vartheta) = x(\sigma + \vartheta)$, $\vartheta \in [-r, 0]$, и обозначать его как $x(\cdot | \varphi, u(\cdot))$. Далее, будем предполагать выполнение условий существования решения задачи управляемости для системы (1.1) с ограниченным управлением [14].

От функционального пространства состояний $C([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ перейдем к сепарабельному гильбертову пространству $H = \mathbb{R}^n \times L_2([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением

$$(x, y)_H = y^\top(0)x(0) + \int_{-r}^0 y^\top(s)x(s) ds$$

и пару $(\varphi(0), \varphi(\cdot))$ будет обозначать одним символом φ .

Пусть заданы непустое конечное множество $S \subset (\sigma, T]$ *допустимых моментов наведения* и для каждого момента $t \in S$ непустое выпуклое замкнутое *целевое* множество $M(t) \subset \mathbb{R}^n$. Пусть для каждого $t \in [\sigma, T]$ задана матрица наблюдения $Q(t) \in \mathbb{R}^{q \times n}$, определяющая текущий сигнал наблюдения $y(t) = Q(t)x(t)$ о состоянии $x(t)$ системы.

Задача управляющей стороны — привести состояние $x(t)$ системы в какой-либо допустимый момент наведения $t \in S$ в заранее заданную ε -окрестность целевого множества $M(t)$. В процессе движения управление строится по принципу обратной связи по сигналу $y(t)$. Следуя стандартным методикам теории гарантирующего управления, позиционная стратегия подразумевает возможность коррекции управляющего воздействия $u(\cdot)$ в заранее заданные моменты времени $\sigma = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$. В каждый момент t_i , $i = \overline{1, k-1}$, значения управления на интервале $t \in [t_i, t_{i+1})$ определяются согласно прошедшим наблюдениям и истории управления $t \mapsto u(t)$ на $[\sigma, t_i]$.

Описанная выше формализация находит отражение в следующей формулировке задачи (Ps): для произвольного, наперед заданного $\varepsilon > 0$ выбрать такую позиционную стратегию управления, которая для произвольной начальной функции $\varphi \in X_0$ обеспечивала бы движению системы $x(\cdot)$, исходящему в момент σ из состояния φ , попадание в ε -окрестность целевого множества $M(t)$ в некоторый момент времени $t \in S$. Для случая, когда $S = \{T\}$, в [6; 7] дана точная постановка задачи (Ps), а в [8] — с использованием упрощенной терминологии. Эта постановка естественным образом была распространена на рассматриваемый в работе случай для обыкновенных дифференциальных уравнений в [9].

2. Задача пакетного наведения

Для удобства чтения приведем некоторые определения из работы [8]. Пусть $V(\cdot, \cdot)$ — матрица-функция, являющаяся решением системы без управления

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-r)$$

и удовлетворяющая начальным условиям $V(t, s) = 0$, $t < s$, $V(t, t) = I_n$, которые определяют ее однозначно. Здесь $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Каждому допустимому начальному состоянию $\varphi \in X_0$ будет соответствовать функция

$$g_\varphi(t) = Q(t)F(t, \sigma)\varphi, \quad t \in [\sigma, T],$$

которую назовем *однородным сигналом*. Здесь линейный непрерывный функционал $F(\cdot, \sigma) : H \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$F(t, \sigma)\varphi = V(t, \sigma)\varphi(\sigma) + \int_{\sigma-r}^{\sigma} V(t, s+r)A_1(s+r)\varphi(s) ds, \quad t \in [\sigma, T].$$

Множество всех допустимых начальных состояний φ , соответствующих однородному сигналу $g(\cdot)$ до момента времени $\tau \in [\sigma, T]$, обозначим $X_0(\tau|g(\cdot))$; таким образом,

$$X_0(\tau|g(\cdot)) = \{\varphi \in X_0 : g(\cdot)|_{[\sigma, \tau]} = g_\varphi(\cdot)|_{[\sigma, \tau]}\}, \quad \tau \in [\sigma, T].$$

Здесь и далее $g(\cdot)|_{[\sigma, \tau]}$ — сужение однородного сигнала $g(\cdot)$ на отрезок $[\sigma, \tau]$.

Переходя теперь непосредственно к управлению, приведем *условие неупреждаемости* [6]: для любых однородного сигнала $g(\cdot)$, момента $\tau \in (\sigma, T]$ и допустимых начальных состояний $\varphi_1, \varphi_2 \in X_0(\tau|g(\cdot))$ при всех $t \in [\sigma, \tau]$ выполняется равенство $u_{\varphi_1}(t) = u_{\varphi_2}(t)$.

Семейство $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$ программ называем *пакетом программ*, если оно удовлетворяет условию неупреждаемости. Пакет программ $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$ называем *наводящим*, если для любого $\varphi \in X_0$ найдется момент $t \in S$ такой, что $x(t|\varphi, u_\varphi(\cdot)) \in M(t)$. Если существует наводящий пакет программ, то говорим, что *разрешима задача пакетного наведения* (задача (Pk)). В [7, теорема 2.2] для случая $S = \{T\}$ установлено, что задача (Ps) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (Pk). Данное утверждение остается справедливым и для рассматриваемого здесь более общего случая (см. также [9]).

Всякое семейство $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0}$ элементов множества S будем называть *семейством допустимых моментов наведения*. Будем говорить, что пакет $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$ программ является *наводящим с семейством допустимых моментов наведения* s , если для любого $\varphi \in X_0$ выполняется $x(s_\varphi|\varphi, u_\varphi(\cdot)) \in M(s_\varphi)$. Если существует пакет программ, являющийся наводящим с семейством допустимых моментов наведения s , будем говорить, что *разрешима задача (Pk) с семейством допустимых моментов наведения* s . Нетрудно установить справедливость следующей леммы.

Лемма 1. 1) *Пакет программ является наводящим тогда и только тогда, когда он является наводящим с некоторым семейством допустимых моментов наведения.*

2) *Задача (Pk) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (Pk) с некоторым семейством допустимых моментов наведения.*

3. Постановка расширенной задачи программного наведения

Пусть G — множество всех однородных сигналов. Ввиду его конечности для каждого однородного сигнала $g(\cdot)$ существует номер $k(g(\cdot)) \geq 1$ такой, что $\tau_{k(g(\cdot))}(g(\cdot)) = T$, где $\tau_j(g(\cdot))$,

$j = \overline{1, k(g(\cdot))}$, — моменты расщепления [8] однородного сигнала $g(\cdot)$. Введем множество $\mathcal{T} = \bigcup_{g(\cdot) \in G} \{\tau_j(g(\cdot)) : j = \overline{1, k(g(\cdot))}\}$. Как следует из [8], множество $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_K\}$, где $\tau_1 < \dots < \tau_K$.

Для каждого $k = \overline{1, K}$ введем множество

$$\mathcal{X}(\tau_k) = \{X_0(\tau_k | g(\cdot)) : g(\cdot) \in G\},$$

каждый элемент X_k которого назовем *кластером начальных состояний* в момент τ_k . Тогда для каждого $k = \overline{1, K}$ кластеры начальных состояний в момент τ_k образуют разбиение множества X_0 :

$$X_0 = \bigcup_{X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)} X_k, \quad X'_k \cap X''_k = \emptyset, \quad X'_k, X''_k \in \mathcal{X}(\tau_k), \quad X'_k \neq X''_k. \quad (3.1)$$

Каждый кластер $X_{k-1} \in \mathcal{X}(\tau_{k-1})$ при $k = \overline{2, K}$ представляет собой объединение конечного числа кластеров из кластерной позиции $\mathcal{X}(\tau_k)$; обозначим его как $\mathcal{X}'_k(X_{k-1}) \subset \mathcal{X}(\tau_k)$; тогда

$$X_{k-1} = \bigcup_{X_k \in \mathcal{X}'_k(X_{k-1})} X_k. \quad (3.2)$$

Следуя описанному в [8] подходу, будем представлять пакеты программ как расширенные программные управления. Пусть \mathcal{P} — множество всех семейств $(u_\varphi)_{\varphi \in X_0}$ векторов из P . Всякую измеримую (по Лебегу) функцию $t \mapsto (u_\varphi(t))_{\varphi \in X_0} : [\sigma, T] \mapsto \mathcal{P}$ назовем *расширенной программой* и всякое семейство $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$ программ будем отождествлять с расширенной программой $t \mapsto (u_\varphi(t))_{\varphi \in X_0}$.

Для каждого $k = \overline{1, K}$ введем множество \mathcal{P}_k всех семейств $(u_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{P}$ таких, что для всякого кластера $X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)$ и любых начальных состояний $\varphi_1, \varphi_2 \in X_k$ выполняется равенство $u_{\varphi_1} = u_{\varphi_2}$. Расширенная программа $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$ будет называться *допустимой*, если для каждого $k = \overline{1, K}$ выполняется $(u_\varphi(t))_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ в случае $k > 1$ и при всех $t \in [\sigma, \tau_1]$ в случае $k = 1$.

Рассмотрим *расширенную систему*, состоящую из экземпляров системы (1.1), параметризованных допустимыми начальными состояниями $\varphi \in X_0$. Каждый экземпляр имеет соответствующее начальное состояние φ и подвержен управляющему воздействию по некоторой программе $u_\varphi(\cdot)$. Таким образом, расширенная система имеет вид

$$\dot{x}_\varphi(t) = A_0(t)x_\varphi(t) + A_1(t)x_\varphi(t-r) + B(t)u_\varphi(t) + f(t), \quad x_\varphi(\sigma) = \varphi, \quad \varphi \in X_0.$$

Фазовым пространством этой системы считаем *расширенное пространство* \mathcal{R}_n . Для произвольного $j \in \mathbb{N}$ под \mathcal{R}_j будем понимать конечномерное гильбертово пространство всех семейств векторов $(l_\varphi)_{\varphi \in X_0}$ из \mathbb{R}^j со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ вида

$$\langle l', l'' \rangle = \sum_{\varphi \in X_0} \langle l'_\varphi, l''_\varphi \rangle, \quad l' = (l'_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{R}_j, \quad l'' = (l''_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{R}_j,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в конечномерном евклидовом пространстве. Тогда значение расширенных программ трактуем как элементы пространства \mathcal{R}_m . Для произвольного непустого множества $\mathcal{E} \subset \mathcal{R}_j$ ($j \in \mathbb{N}$) вводим его нижнюю $\rho^-(\cdot | \mathcal{E}) : \mathcal{R}_j \mapsto \mathbb{R}$ и верхнюю $\rho^+(\cdot | \mathcal{E}) : \mathcal{R}_j \mapsto \mathbb{R}$ опорные функции:

$$\rho^-(l | \mathcal{E}) = \inf_{r \in \mathcal{E}} \langle l, r \rangle, \quad \rho^+(l | \mathcal{E}) = \sup_{r \in \mathcal{E}} \langle l, r \rangle, \quad l \in \mathcal{R}_j. \quad (3.3)$$

Далее $\rho^-(l | P) = \min_{u \in P} \langle l, u \rangle$, $l \in \mathbb{R}^m$, — нижняя опорная функция мгновенного ресурса управления P в \mathbb{R}^m .

Управление расширенной системой выбираем из класса всех допустимых расширенных программ. Под движением расширенной системы, соответствующим допустимой расширенной программе $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$, будем понимать функцию $t \mapsto (x(t|\varphi, u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0} : [\sigma, T] \mapsto \mathcal{R}_n$.

Расширенным целевым множеством для семейства допустимых моментов наведения $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0}$ будем называть множество $\mathcal{M}(s)$ всех семейств $(z_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $z_\varphi \in M(s_\varphi)$ для всех $\varphi \in X_0$.

Допустимую расширенную программу $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$ будем называть *наводящей для расширенной системы с семейством допустимых моментов наведения* $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0}$, если для движения $(x(\cdot|\varphi, u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$ расширенной системы, соответствующего $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$, выполняется условие $(x(s_\varphi|\varphi, u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{M}(s)$. Соответственно *расширенная задача программного наведения* (задача (Pm)) с семейством допустимых моментов наведения s разрешима, если существует допустимая расширенная программа, являющаяся наводящей для расширенной системы с семейством допустимых моментов наведения s . Доказательство следующей теоремы проводится аналогично [8, теорема 1].

Теорема 1. 1) *Допустимая расширенная программа является наводящим пакетом программ с семейством допустимых моментов наведения s тогда и только тогда, когда она является наводящей для расширенной системы с этим же семейством допустимых моментов наведения.*

2) *Задача (Pk) с семейством допустимых моментов наведения s разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (Pm) с этим же семейством допустимых моментов наведения.*

4. Критерий разрешимости задачи (Pm)

Для каждого семейства допустимых моментов наведения $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in S$ введем соответствующее ему *множество достижимости*

$$\mathcal{A}(s) = \{ (x(s_\varphi|\varphi, u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0} : (u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{U}_p \} \tag{4.1}$$

расширенной системы. Здесь \mathcal{U}_p — множество допустимых расширенных программ. Нетрудно установить справедливость следующей леммы, исходя из методики [8, лемма 5].

Лемма 2. *Для каждого семейства допустимых моментов наведения s множество $\mathcal{A}(s)$ представляет собой выпуклый компакт в \mathcal{R}_n .*

Пусть $R(t)$ для каждого $t \in S$ — подпространство пространства \mathbb{R}^n , ортогональное всем $l \in \mathbb{R}^n$ таким, что $\rho^+(l|M(t)) = +\infty$. Для каждого $t \in S$ зафиксируем выпуклый компакт $L(t) \subset R(t)$, являющийся образом единичной сферы, т.е. существуют $r_1(t) > r_2(t) > 0$ такие, что для каждого вектора $z \in R(t)$ единичной нормы при некотором $r \in [r_1(t), r_2(t)]$ выполняется $rz \in L(t)$. Для каждого семейства $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0}$ допустимых моментов наведения множество всех $(l_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{R}_n$ таких, что $l_\varphi \in L(s_\varphi)$ при всех $\varphi \in X_0$, обозначим через $\mathcal{L}(s)$.

Свойства множества достижимости расширенной системы и расширенного целевого множества (см. лемму 2 и [9, замечание 1]) приводят на основании теоремы об отделимости выпуклых множеств к следующему критерию разрешимости задачи (Pm) с заданным семейством допустимых моментов наведения.

Теорема 2. *Задача (Pm) с семейством допустимых моментов наведения s разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\max_{(l_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{L}(s)} \gamma((l_\varphi)_{\varphi \in X_0}, s) \leq 0, \tag{4.2}$$

где

$$\gamma((l_\varphi)_{\varphi \in X_0}, s) = \rho^-((l_\varphi)_{\varphi \in X_0}|\mathcal{A}(s)) - \rho^+((l_\varphi)_{\varphi \in X_0}|\mathcal{M}(s)). \tag{4.3}$$

Следствие. Задача (Pk) разрешима тогда и только тогда, когда неравенство (4.2) выполняется для некоторого семейства допустимых моментов наведения s .

Доказательство с очевидностью следует из леммы 1 и теорем 1 и 2. \square

Для всякого семейства допустимых моментов наведения $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0}$ введем множество

$$Y_k(s) = \{\varphi \in X_0 : s_\varphi \in (\tau_{k-1}, \tau_k]\}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (4.4)$$

и при любом $l = (l_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{L}(s)$ положим

$$l_\varphi(s, t) = \begin{cases} l_\varphi, & t \leq s_\varphi, \\ 0, & t > s_\varphi, \end{cases} \quad t \in [\sigma, T], \quad \varphi \in X_0. \quad (4.5)$$

Теорема 3. Пусть $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0}$ — семейство допустимых моментов наведения и $l = (l_\varphi)_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{L}(s)$. Тогда справедливы равенства

$$\rho^+(l|\mathcal{M}(s)) = \sum_{\varphi \in X_0} \rho^+(l_\varphi|M(s_\varphi)), \quad (4.6)$$

$$\rho^-(l|\mathcal{A}(s)) = r(l, \varphi) + \sum_{j=1}^{K-1} \Sigma^j \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} \rho^-(d_j^j(s, \xi) + \sum_{k=j+1}^K d_k^j|P) d\xi + \Sigma^K \int_{\tau_{K-1}}^{\tau_K} \rho^-(d_K^K(s, \xi)|P) d\xi, \quad (4.7)$$

где для произвольных $\varphi \in X_0$ и числовой функции $h(\cdot)$ приняты обозначения

$$\Sigma^j h = \sum_{X_1 \in \mathcal{X}(\tau_1)} \sum_{X_2 \in \mathcal{X}_2(X_1)} \dots \sum_{X_j \in \mathcal{X}_j(X_{j-1})} h,$$

$$r(l, \varphi) = \langle l, F(s, \sigma)\varphi \rangle + \left\langle l, \int_{\sigma}^s V(s, z) f(z) dz \right\rangle, \quad D(s, \xi) = V(s, \xi)B(\xi),$$

$$d_k^j(s, \xi) = \sum_{\varphi \in X_j \cap Y_k(s)} D^\top(s_\varphi, \xi) l_\varphi(s, \xi), \quad d_k^j = \sum_{\varphi \in X_j \cap Y_k(s)} D^\top(s_\varphi, \xi) l_\varphi, \quad k, j = \overline{1, K}.$$

Доказательство. Из определения $\mathcal{M}(s)$ и верхней опорной функции (3.3) подмножества пространства \mathcal{R}_n получаем (4.6). Пусть $(u_\varphi)_{\varphi \in X_0}$ — произвольная допустимая расширенная программа, тогда для произвольного $k = \overline{1, K}$ выполняется $(u_\varphi(t))_{\varphi \in X_0} \in \mathcal{P}_k$ при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$. Поскольку \mathcal{P}_k — расширенный ресурс, то для всякого $X_k \in \mathcal{X}(\tau_k)$ значения $u_\varphi(t) \in P$ для всех $\varphi \in X_k$ совпадают между собой при любом $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$. Таким образом,

$$u_\varphi(t) = u_{X_k}(t) \in P, \quad \forall \varphi \in X_k, \quad X_k \in \mathcal{X}(\tau_k), \quad t \in (\tau_{k-1}, \tau_k], \quad k = \overline{1, K}. \quad (4.8)$$

Учитывая (3.2), для произвольного $k = \overline{2, K}$ и $\forall \varphi \in X_k, X_k \in \mathcal{X}_k(X_{k-1}), X_{k-1} \in \mathcal{X}(\tau_{k-1})$ имеем

$$u_\varphi(t) = u_{X_{k-1}}(t) \in P, \quad t \in (\tau_{k-2}, \tau_{k-1}]. \quad (4.9)$$

Используя формулу Коши для $x(\cdot|\varphi, u_\varphi(\cdot))$, получаем

$$\langle l, x(s|\varphi, u_\varphi(\cdot)) \rangle = r(l, \varphi) + \left\langle l, \int_{\sigma}^s D(s, \xi) u_\varphi(\xi) d\xi \right\rangle. \quad (4.10)$$

Из определения множеств (4.4) следует, что

$$\left\langle l, \int_{\sigma}^s D(s, \xi) u_\varphi(\xi) d\xi \right\rangle = \sum_{k=1}^K \Omega_k,$$

где $\Omega_k = \sum_{\varphi \in Y_k(s)} \left(l_\varphi, \int_\sigma^{s_\varphi} D(s_\varphi, \xi) u_\varphi(\xi) d\xi \right) = \sum_{\varphi \in Y_k(s)} \int_\sigma^{s_\varphi} (D^\top(s_\varphi, \xi) l_\varphi, u_\varphi(\xi)) d\xi$. Учитывая свойство кластеров (3.1), определение (4.5), а также равенства (4.8) и (4.9), имеем

$$\Omega_1 = \Sigma^1 \int_\sigma^{\tau_1} (d_1^1(s, \xi), u_{X_1}(\xi)) d\xi, \quad \Omega_2 = \Sigma^1 \int_\sigma^{\tau_1} (d_2^1, u_{X_1}(\xi)) d\xi + \Sigma^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (d_2^2(s, \xi), u_{X_2}(\xi)) d\xi.$$

Продолжая аналогичным образом для $k = \overline{3, K}$, получаем

$$\Omega_k = \Sigma^1 \int_\sigma^{\tau_1} (d_k^1, u_{X_1}(\xi)) d\xi + \Sigma^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (d_k^2, u_{X_2}(\xi)) d\xi + \dots + \Sigma^k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (d_k^k(s, \xi), u_{X_k}(\xi)) d\xi.$$

Суммируя последние выражения по k , для формулы (4.10) находим

$$\langle l, x(s|\varphi, u_\varphi(\cdot)) \rangle = r(l, \varphi) + \sum_{k=1}^K \left(\Sigma^k \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (d_k^k(s, \xi), u_{X_k}(\xi)) d\xi + \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma^j \int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j} (d_k^j, u_{X_j}(\xi)) d\xi \right).$$

По определению нижней опорной функции (3.3) множества достижимости $\mathcal{A}(s)$ расширенной системы, соответствующего семейству s допустимых моментов наведения (см. (4.1)), получаем, что $\rho^-(l|\mathcal{A}(s))$ есть точная нижняя грань значений, записанных в левой части последнего равенства, по всем расширенным программам $(u_\varphi(\cdot))_{\varphi \in X_0}$. Из последнего равенства следует, что данная точная нижняя грань достигается взятием минимума по $u_{X_j}(t) \in P$ при всех $t \in (\tau_{j-1}, \tau_j]$ в подынтегральном выражении каждого интеграла, записанного в правой части. В результате получаем представление (4.7). \square

5. Пример

Рассмотрим линейную управляемую систему дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t-1) + u(t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — координаты фазового вектора $x(t) = (x_1(t) \ x_2(t))^\top$. Значения управления $u(t)$ ограничены отрезком $[-1, 1]$. Таким образом, имеем следующие параметры системы (1.1): $n = 2$, $r = 1$, $P = [-1, 1]$, и матрицы A_0 , A_1 и B имеют вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $[\sigma, T] = [0, 2]$ и множество допустимых начальных состояний состоит из двух различных элементов, $X_0 = \{x', x''\}$, где

$$x' = (\varphi' \ \psi')^\top, \quad x'' = (\varphi'' \ \psi'')^\top, \quad \varphi' = (\varphi'(0), \varphi'(\vartheta)), \quad \psi' = \psi'(0).$$

Предположим, что данные о положении системы на отрезке $[0, 1]$ при движении будут недоступны, а на полуинтервале $(1, 2]$ состояние системы будет полностью отслеживаться, т. е. мы имеем сигнал вида

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{cases} (0 \ 0)^\top, & t \in [0, 1], \\ (t-1)(x_1(t) \ x_2(t))^\top, & t \in (1, 2], \end{cases}$$

который соответствует следующей непрерывной матрице наблюдения:

$$Q(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1], \\ (t-1)I_2, & t \in (1, 2], \end{cases}$$

где $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ — единичная матрица. Пусть задано множество допустимых моментов наведения $S = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$. Цель управления состоит в том, чтобы по имеющимся значениям сигнала сформировать программу управления системой, которая обеспечивала бы попадание координаты x_1 в отрезок $[-m, m]$, где $m = 1$, к моменту $t = 2$, т. е. в один из моментов множества S . Тогда целевым множеством будет цилиндрическое множество с ограниченным основанием

$$M(t) = \{(x_1 \ x_2)^\top \in \mathbb{R}^2: |x_1| \leq m, x_2 \in \mathbb{R}\}, \quad t \in S.$$

Фундаментальная матрица $V(\cdot, \cdot)$ однородной системы, соответствующей системе (5.1), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial V(t, s)}{\partial t} = A_0 V(t, s) + A_1 V(t-1, s), \quad t \geq s,$$

с начальными условиями $V(t, s) = 0$, $s-1 \leq t < s$, $V(t, t) = I_2$.

Поскольку система (5.1) автономная, фундаментальная матрица зависит только от разности аргументов, т. е. справедливы равенства $V(t, s) = V(t-s, 0) = V(t-s)$. Применяя метод шагов [15] для ее нахождения, имеем

$$V(t-s) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & t-s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & 0 < t-s \leq 1, \\ \begin{pmatrix} f(t-s) & h(t-s) \\ -(t-s-1) & f(t-s) \end{pmatrix}, & 1 < t-s \leq 2, \end{cases}$$

где $f(t-s) = -\frac{1}{2}(t-s-1)^2 + 1$, $h(t-s) = -\frac{1}{6}(t-s-1)^3 + t-s$. Для системы (5.1) формула Коши записывается в виде

$$x(\varphi, u)(t) = V(t)\varphi(0) + \int_{-1}^0 V(t-s-1)A_1\varphi(s) ds + \int_0^t V(t-s)Bu(s) ds.$$

Однородные сигналы, соответствующие допустимым начальным состояниям $x' = (\varphi' \ \psi')^\top$ и $x'' = (\varphi'' \ \psi'')^\top$, имеют вид

$$g_{x'}(t) = Q(t) \left(V(t)x'_0 + \int_{-1}^0 V(t-s-1)A_1x'(s) ds \right)$$

$$= \begin{cases} (0 \ 0)^\top, & t \in [0, 1], \\ (t-1) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(t-1)^2\varphi'_0 + \left(-\frac{1}{6}(t-1)^3 + t \right)\psi'_0 + \int_0^0 h(t-s)\varphi'(s) ds \\ (-t+1)\varphi'_0 + \left(-\frac{1}{2}(t-1)^2 + 1 \right)\psi'_0 + \int_{-1}^0 f(t-s)\varphi'(s) ds \end{pmatrix}, & t \in (1, 2]. \end{cases}$$

Аналогичным образом находится $g_{x''}(t)$.

Поскольку начальные состояния различаются, $x' \neq x''$, то $\tau_1 = 1$ — первый момент расслоения каждого из этих однородных сигналов; при этом второй момент расслоения τ_2 — конечный момент $T = 2$, число K моментов расслоения однородных сигналов равно 2, кластерная позиция $\mathcal{X}(1)$ в момент $t = 1$ содержит единственное множество X_0 , а кластерная позиция $\mathcal{X}(2)$ в момент $t = 2$ содержит два множества, $\{x'\}$ и $\{x''\}$.

Формула (4.3) примет вид

$$\begin{aligned} \gamma((l_{\varphi'}, l_{\varphi''}), s) &= (l_{\varphi'}, F(s_{\varphi'}, 0)\varphi') + (l_{\varphi''}, F(s_{\varphi''}, 0)\varphi'') + \int_0^1 \rho^-(D(s_{\varphi'}, \xi)l_{\varphi'} + D(s_{\varphi''}, \xi)l_{\varphi''}|P) d\xi \\ &+ \int_1^2 \rho^-(D(s_{\varphi'}, \xi)l_{\varphi'}(s, \xi)|P) d\xi + \int_1^2 \rho^-(D(s_{\varphi''}, \xi)l_{\varphi''}(s, \xi)|P) d\xi - \rho^+(l_{\varphi'}|M(s_{\varphi'})) - \rho^+(l_{\varphi''}|M(s_{\varphi''})). \end{aligned}$$

Используя определение множества $\mathcal{L}(s) \subset \mathcal{R}_2$ и с учетом того, что множество $M(t)$, $t \in S$, — цилиндрическое с ограниченным основанием, можно принять $((l'_1 \ l''_1)^\top, (l'_2 \ l''_2)^\top) = ((l' \ 0)^\top, (l'' \ 0)^\top)$. Далее, нам понадобятся

$$\begin{aligned} D\left(\frac{1}{2}, \xi\right) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \xi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \xi \in \left(\frac{1}{2}, 2\right]. \end{cases} \\ D\left(\frac{3}{2}, \xi\right) &= \begin{cases} \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \xi\right)^3 + \frac{3}{2} - \xi & -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \xi\right)^2 + 1 \\ \frac{3}{2} - \xi & 1 \end{pmatrix}, & \xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \xi & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \xi \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \xi \in \left(\frac{3}{2}, 2\right]. \end{cases} \end{aligned}$$

Следствие позволяет выполнить проверку критерия (4.2) разрешимости задачи (Ps) для некоторого семейства $s = (s_\varphi)_{\varphi \in X_0}$. Множество S определяет четыре таких семейства: $s_1 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $s_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, $s_3 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ и $s_4 = \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}$.

Принимая во внимание выражения (4.6) и (4.7), для значений функции $\gamma(\cdot)$ при произвольных действительных l' и l'' из формулы (4.2) получаем для семейства s_2

$$\begin{aligned} \gamma((l' \ 0)^\top, (l'' \ 0)^\top) &= l'z' + l''z'' - \int_0^{1/2} \left| \left(\frac{1}{2} - \xi\right)l' + \left(-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \xi\right)^3 + \frac{3}{2} - \xi\right)l'' \right| d\xi \\ &+ \int_{1/2}^1 \left(\frac{3}{2} - \xi\right)|l''| d\xi + \int_1^{3/2} \left(\frac{3}{2} - \xi\right)|l''| d\xi - m|l'| - m|l''|, \end{aligned}$$

где $z' = 0.8$, $z'' = -1.8$. В результате находим

$$\gamma = \max_{l', l'' \in \mathcal{L}(s)} \gamma((l' \ 0)^\top, (l'' \ 0)^\top) = -0.176 \leq 0;$$

этот максимум достигается при $l' = 1$ и $l'' = -0.3$. Следовательно, критерий разрешимости (4.2) выполняется, т. е. задача (Pk) разрешима с семейством допустимых моментов наведения s_2 . В качестве наводящего можно выбрать следующий пакет программ:

$$u_{x'}(t) = -1, \quad t \in [0, 2], \quad u_{x''}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1], \\ 1, & t \in (1, 2]; \end{cases}$$

используя его для управления, получаем движения

$$x_1\left(\frac{1}{2}\middle|x', u_{x'}(\cdot)\right) = z' + \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - \xi\right) u_{x',x''}(\xi) d\xi = 0.925,$$

$$x_1\left(\frac{3}{2}\middle|x'', u_{x''}(\cdot)\right) = z'' + \int_0^{1/2} \left(-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \xi\right)^3 + \frac{3}{2} - \xi\right) u_{x',x''}(\xi) d\xi + \int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{3}{2} - \xi\right) u_{x',x''}(\xi) d\xi = -0.928,$$

приводящие на целевое множество $M(t)$ к моменту времени $T = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
5. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: МАКС Пресс, 1990.
6. Осипов Ю.С. Пакеты программ: подход к решению задач позиционного управления с неполной информацией // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, вып. 4(370). С. 25–76.
7. Кряжимский А.В., Осипов Ю.С. Идеализированные пакеты программ и задачи позиционного управления с неполной информацией // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 139–157.
8. Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В. Программный критерий разрешимости задачи позиционного наведения с неполной информацией. Линейные управляемые системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 132–147.
9. Кряжимский А.В., Стрелковский Н.В. Задача гарантированного позиционного наведения линейной управляемой системы к заданному моменту времени при неполной информации. Программный критерий разрешимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 168–177.
10. Максимов В.И. Задача нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации для линейной системы // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 12. С. 1676–1685.
11. Розенберг В.Л. Об одной задаче управления при дефиците информации для линейного стохастического дифференциального уравнения // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 292–302.
12. Григоренко Н.Л., Кондратьева Ю.А., Лукьянова Л.Н. Задача нахождения гарантирующего программного управления при неполной информации для линейной системы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 41–49.
13. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
14. Красовский Н.Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, вып. 1. С. 39–51.
15. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 424 с.

Сурков Платон Геннадьевич

канд. физ.-мат. наук,

доцент

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

e-mail: platon.surkov@gmail.com

Поступила 04.02.2016

УДК 517.972.87

**ТЕОРЕМЫ ОБ ОТДЕЛИМОСТИ α -МНОЖЕСТВ
В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ¹****В. Н. Ушаков, А. А. Успенский**

Работа посвящена изучению α -множеств в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Понятие α -множества введено как некоторое обобщение выпуклого замкнутого множества в \mathbb{R}^n . Оно возникло при изучении множеств достижимости и интегральных воронок нелинейных управляемых систем в евклидовых пространствах. Множества достижимости нелинейных динамических систем, как правило, невыпуклы; при этом в различных системах невыпуклость множеств достижимости имеет различную степень выраженности. Это обстоятельство побудило авторов навести некоторую классификацию множеств в \mathbb{R}^n по степени их невыпуклости. Такая классификация, идущая от теории управления, представлена здесь в виде понятия α -множества в \mathbb{R}^n .

Ключевые слова: α -множество, выпуклое множество в \mathbb{R}^n , выпуклая оболочка множества в \mathbb{R}^n , α -гиперплоскость, α -отделимость, конус Булигана, нормальный конус.

V. N. Ushakov, A. A. Uspenskii. Theorems on the separability of α -sets in Euclidean space.

We study α -sets in Euclidean space \mathbb{R}^n . The notion of α -set is introduced as a generalization of a convex closed set in \mathbb{R}^n . This notion appeared in the study of reachable sets and integral funnels of nonlinear control systems in Euclidean spaces. Reachable sets of nonlinear dynamic systems are usually nonconvex, and the degree of their nonconvexity is different in different systems. This circumstance prompted the introduction of a classification of sets in \mathbb{R}^n according to the degree of their nonconvexity. Such a classification stems from control theory and is presented here as the notion of α -set in \mathbb{R}^n .

Keywords: α -set, convex set in \mathbb{R}^n , convex hull in \mathbb{R}^n , α -hyperplane, α -separability, Bouligand cone, normal cone.

MSC: 54D65, 49J52, 90C56, 32T27

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-277-291

Введение

В настоящей работе изучаются свойства по существу невыпуклых множеств конечномерного евклидова пространства, названных α -множествами [1]. Неотрицательная константа α является супремальным значением функции, определенной на дополнении множества до всего пространства, имеет смысл угловой величины и характеризует степень вогнутости множества. Чем больше эта константа, тем ощутимее по свойствам множество отличается от своей выпуклой оболочки. Изучение свойств α -множеств представляет несомненный интерес для геометрии, а также служит развитию теории и методов негладкого и выпуклого анализа.

В работе осуществлена классификация α -множеств в соответствии с введенным определением регулярного множества. Основной результат заключается в перенесении базовых результатов выпуклого анализа [2; 3] на случай невыпуклых множеств. Доказаны теоремы об отделимости для некоторых классов α -множеств.

К числу сфер приложения результатов относятся теория оптимального управления и дифференциальные игры. Конструкции теории α -множеств находят применение при построении обобщенных решений уравнений гамильтонова типа [4; 5], сингулярных множеств и функции оптимального результата в плоской задаче о быстродействии [6], при построении эволюции волновых фронтов и эйконала при решении основного уравнения геометрической оптики [7; 8].

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00486_a) и Комплексной программы фундаментальных исследований УРО РАН (проект 15-16-1-13).

В работе приводятся примеры, иллюстрирующие введенные понятия.

1. Основные определения

Пусть A — замкнутое множество в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n и $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Под проекцией $p(z^*)$ точки z^* на A понимаем ближайшую к z^* точку в A .

Полагаем

$\Omega_A(z^*) = \{p(z^*)\}$ — множество всех проекций $p(z^*)$ точки z^* на A ;

$\text{co } \Omega_A(z^*)$ — выпуклая оболочка множества $\Omega_A(z^*)$;

$\text{con}(\text{co } \Omega_A(z^*) - z^*) = \{h = \lambda(z - z^*): \lambda \geq 0, z \in \text{co } \Omega_A(z^*)\}$ — конус в \mathbb{R}^n , натянутый на $\text{co } \Omega_A(z^*) - z^*$;

$H_A(z^*)$ — множество всевозможных пар (h_*, h^*) ненулевых векторов h_*, h^* из $\text{con}(\text{co } \Omega_A(z^*) - z^*)$;

$(h_*, \hat{h}^*) = \arccos(\langle h_*, h^* \rangle / (\|h_*\| \cdot \|h^*\|)) \in [0, \pi]$ — угол между h_* и h^* , $(h_*, h^*) \in H_A(z^*)$;

$\alpha_A(z^*) = \max_{(h_*, h^*) \in H_A(z^*)} (h_*, \hat{h}^*) \in [0, \pi]$;

$\langle h_*, h^* \rangle$ — скалярное произведение векторов h_* и h^* в \mathbb{R}^n , $\|h_*\| = \langle h_*, h_* \rangle^{1/2}$.

Полагаем также $\alpha = \alpha_A = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*) \in [0, \pi]$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Множество A назовем α -множеством в \mathbb{R}^n .

Отметим некоторые свойства функции $\alpha_A(z^*)$, $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ (см. [1]).

Свойство 1.1. Функция $\alpha_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$ не является, вообще говоря, непрерывной функцией.

Свойство 1.2 Функция $\alpha_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$ полунепрерывна сверху.

Спрашивается: достигается ли \sup в равенстве $\alpha = \alpha_A = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*)$?

В общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Есть примеры множеств A , для которых \sup не достигается на A , и в то же время для многих замкнутых множеств A в \mathbb{R}^n \sup достигается на A (см. [1]).

Число $\alpha = \alpha_A \in [0, \pi]$ характеризует степень вогнутости множества A . Однако аккуратнее было бы говорить, что $\alpha = \alpha_A \in [0, \pi]$ характеризует не степень вогнутости A , а степень изогнутости его границы ∂A . Так, два множества в \mathbb{R}^2 на рис. 1 имеют одну и ту же степень вогнутости $\alpha = \alpha_A = \pi$.

Если для некоторого замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет место $\alpha = \alpha_A = 0$, то $\alpha_A(z^*) = 0$ для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$, т. е. множество $\Omega_A(z^*)$ состоит из одной точки. Согласно теореме Моцкина (см., например, [9]), множество A в этом случае — выпуклое множество в \mathbb{R}^n . Также если A — выпуклое замкнутое множество в \mathbb{R}^n , то $\alpha_A(z^*) = 0$ для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ и, стало быть, $\alpha = \alpha_A = 0$. Значит, выпуклые замкнутые множества A в \mathbb{R}^n и 0-множества A (0-вогнутые множества A) суть эквивалентные понятия.

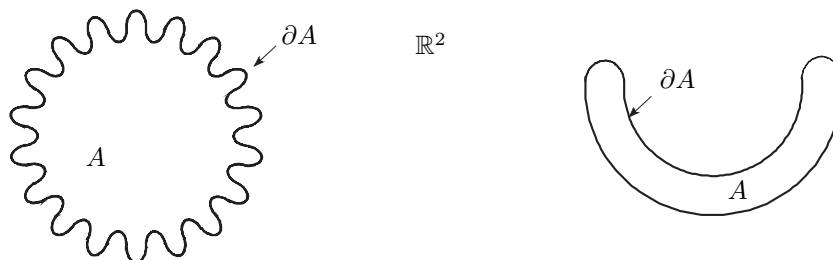


Рис. 1.

Допустим теперь, что для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполнено соотношение

$$z^* \notin \text{co } \Omega_A(z^*). \quad (1.1)$$

Тогда справедливо неравенство

$$\alpha_A(z^*) = \max_{(h_*, h^*) \in H_A(z^*)} (h_*, \hat{h}^*) < \pi. \quad (1.2)$$

С другой стороны, если для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполнено (1.2), то справедливо и (1.1). Таким образом, соотношения (1.1) и (1.2) эквивалентны.

О п р е д е л е н и е 1.2. Замкнутое множество A в \mathbb{R}^n назовем регулярным множеством в \mathbb{R}^n , если для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется (1.1).

Принимая во внимание эквивалентность (1.1) и (1.2), получаем, что если A — регулярное множество в \mathbb{R}^n , то для любой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$ выполняется $\alpha_A(z^*) < \pi$. При этом возможны варианты: 1) $\alpha = \alpha_A < \pi$; 2) $\alpha = \alpha_A = \pi$, причем $\alpha_A(z^*) < \pi$ для любых $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

О п р е д е л е н и е 1.3. Замкнутое множество A в \mathbb{R}^n назовем нерегулярным множеством в \mathbb{R}^n , если оно не является регулярным в \mathbb{R}^n , т.е. если $\alpha_A(z^*) = \pi$ для некоторой точки $z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Пример нерегулярного множества приведен в [1].

Приведем некоторые свойства регулярных множеств в \mathbb{R}^n . Обозначим $\rho(z) = \min_{a \in A} \|z - a\|$, $z \in \mathbb{R}^n$.

Утверждение 1 [1, теорема 1.1]. Пусть A — регулярное множество в \mathbb{R}^n . Тогда для любого замкнутого множества B в \mathbb{R}^n , $B \supset A$, $B \neq A$, для которого $\sup_{b \in B} \rho(b)$ достигается на B , все точки b множества B , максимально удаленные от A , удовлетворяют включению $b \in \partial B$.

Сформулируем еще одно утверждение (см. [1]), которое будет использовано нами при доказательстве некоторых утверждений из разд. 2.

Утверждение 2 [1, теорема 1.3]. Пусть A — замкнутое множество в \mathbb{R}^n и $\varepsilon > 0$. Тогда $\alpha_{A_\varepsilon} \leq \alpha_A$.

2. Теоремы об отделимости α -множеств

Справедливо следующее утверждение.

Пусть $\varphi(A)$ — такой гомеоморфный образ в \mathbb{R}^n компакта $A \subset \mathbb{R}^n$ с $\text{int } A \neq \emptyset$, что $\varphi(A) \subset \text{int } O_r(\mathbf{0})$, где $O_r(\mathbf{0})$ — замкнутый шар в \mathbb{R}^n радиуса r с центром $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ (см. рис. 2). Тогда отвечающее компакту A множество $A^* = \text{cl}(O_r(\mathbf{0}) \setminus \varphi(A)) \subset \mathbb{R}^n$ таково, что $\alpha_{A^*} = \pi$.

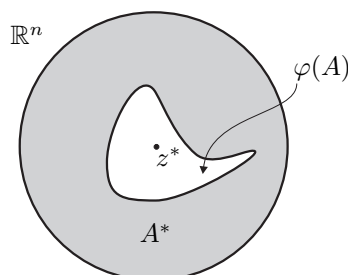


Рис. 2.

В самом деле, пусть A^* — множество в \mathbb{R}^n указанного вида и пусть z^* — наиболее удаленная от A^* точка в множестве $\varphi(A)$.

Введем функцию $\sigma(z) = \min_{a^* \in A^*} \|z - a^*\|^2$, $z \in \mathbb{R}^n$ и производную

$$\sigma'(z^*, s) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\sigma(z^* + \lambda s) - \sigma(z^*)}{\lambda}$$

функции $\sigma(z)$ в точке z^* по направлению $s \neq \mathbf{0}$.

Для любого $s \in \mathbb{R}^n$, $s \neq \mathbf{0}$ справедливо представление

$$\sigma'(z^*, s) = \min_{p(z^*) \in \Omega_{A^*}(z^*)} \varphi'(z^*, s) = 2 \min_{p(z^*) \in \Omega_{A^*}(z^*)} \langle z^* - p(z^*), s \rangle;$$

здесь $\varphi'(z^*, s)$ — производная функции $\varphi_{z^*}(z) = \|z - p(z^*)\|^2$ в точке $z = z^*$ по направлению s .

Поскольку z^* — наиболее удаленная от A^* точка в $\varphi(A)$, то $\sigma'(z^*, s) = 2 \min_{p(z^*) \in \Omega_{A^*}(z^*)} \langle z^* - p(z^*), s \rangle \leq 0$, $s \in \mathbb{R}^n$, $s \neq \mathbf{0}$. Из этого неравенства следует $z^* \in \text{co}\Omega_A(z^*)$ и, значит, $\alpha_{A^*}(z^*) = \pi$, что влечет равенство $\alpha_{A^*} = \pi$.

Также для любого гомеоморфного образа $\varphi(S^{(n-1)})$ в \mathbb{R}^n сферы $S^{(n-1)} = \partial O^{(n)}(\mathbf{0})$ в \mathbb{R}^n ($O^{(n)}(\mathbf{0})$ — шар в \mathbb{R}^n радиуса 1) имеет место $\alpha_{\varphi(S^{(n-1)})} = \pi$. В частности, для $\varphi(S^{(1)})$ в \mathbb{R}^2 справедливо $\alpha_{\varphi(S^{(1)})} = \pi$.

В связи с этим возникает вопрос: “Пусть $\varphi(S^{(n-1)})$ — гомеоморфный образ в пространстве \mathbb{R}^{n+1} сферы $S^{(n-1)}$. Выполняется ли равенство $\alpha_{\varphi(S^{(n-1)})} = \pi$?”

В этом разделе рассматриваются α -множества в пространстве \mathbb{R}^n , и в основном в \mathbb{R}^2 . Перенесены некоторые понятия и утверждения из выпуклого анализа в область α -множеств.

Рассмотрим некоторые определения.

О п р е д е л е н и е 2.1. Обозначим через \mathcal{A}_α (\mathcal{B}_α) совокупность всех замкнутых множеств A в \mathbb{R}^n с числом $\alpha_A = \alpha$ ($\alpha_A \leq \alpha$), где $\alpha \in [0, \pi]$.

Справедливы соотношения $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{B}_\alpha$ и $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta \in [0, \alpha]} \mathcal{A}_\beta$.

Пусть $\alpha \in [0, \pi)$.

О п р е д е л е н и е 2.2. α -гиперплоскостью Γ в \mathbb{R}^n назовем такой гомеоморфный образ гиперплоскости в \mathbb{R}^n , что

1) $\Gamma \in \mathcal{A}_\alpha$;

2) Γ разбивает \mathbb{R}^n на два замкнутых множества в \mathbb{R}^n , гомеоморфных замкнутому полупространству в \mathbb{R}^n .

Обозначим замкнутые множества в \mathbb{R}^n из определения 2.2 через Φ^+ и Φ^- . Имеем: Φ^+ и Φ^- суть элементы совокупности \mathcal{B}_α и хотя бы одно из них — элемент совокупности \mathcal{A}_α .

Φ^- (Φ^+) назовем α -полупространством в \mathbb{R}^n , если $\Phi^- \in \mathcal{A}_\alpha$ ($\Phi^+ \in \mathcal{A}_\alpha$). Тогда, если $\Phi^- \in \mathcal{B}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$ ($\Phi^+ \in \mathcal{B}_\alpha \setminus \mathcal{A}_\alpha$), то $\Phi^- \in \mathcal{A}_\beta$ ($\Phi^+ \in \mathcal{A}_\beta$) при некотором $\beta \in [0, \alpha)$.

В случае, если Γ , Φ^- , Φ^+ таковы, что Γ , $\partial\Phi^-$, $\partial\Phi^+$ содержат точку $z^* \in \mathbb{R}^n$, будем иногда обозначать так: $\Gamma(z^*)$, $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$.

Также в случаях, когда ясно, что речь идет об α -полупространствах Φ^- и Φ^+ в \mathbb{R}^n , будем иногда называть их полупространствами в \mathbb{R}^n .

О п р е д е л е н и е 2.3. α -гиперплоскость $\Gamma(z^*)$ в \mathbb{R}^n назовем опорной к $A \in \mathcal{A}_\alpha$ в точке $z^* \in \partial A$, если A содержится в одном из полупространств $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$, соответствующих α -гиперплоскости $\Gamma(z^*)$.

То из полупространств $\Phi^-(z^*)$, $\Phi^+(z^*)$, которое содержит множество A , назовем опорным к A в точке $z^* \in \partial A$.

О п р е д е л е н и е 2.4. Будем говорить, что множества A и B из \mathbb{R}^n α -отделимы (\mathcal{B}_α -отделимы), если существует такая α -гиперплоскость Γ (гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$) в \mathbb{R}^n , что $A \subset$

Φ^- , $B \subset \Phi^+$; здесь Φ^- , Φ^+ — полупространства в \mathbb{R}^n , соответствующие α -гиперплоскости Γ (гиперплоскости $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$).

О п р е д е л е н и е 2.5. Будем говорить, что множества A и B из \mathbb{R}^n сильно α -отделимы (сильно \mathcal{B}_α -отделимы), если существуют α -гиперплоскость Γ (гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$) в \mathbb{R}^n и $\rho \in (0, \infty)$ такие, что $A_\rho \subset \Phi^-$, $B_\rho \subset \Phi^+$; здесь Φ^- , Φ^+ — полупространства в \mathbb{R}^n , соответствующие α -гиперплоскости Γ (гиперплоскости $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$).

Ниже сформулируем и докажем несколько утверждений, относящихся к множествам A из \mathcal{A}_α или \mathcal{B}_α , аналогичных некоторым теоремам из выпуклого анализа [2; 3], таким как теорема о существовании опорной гиперплоскости к выпуклому множеству, теорема о представимости замкнутого выпуклого множества в виде пересечения содержащих его полупространств, теоремы об отделимости выпуклых множеств в \mathbb{R}^n . При формулировке утверждений, относящихся к множествам из \mathcal{A}_α и \mathcal{B}_α , нам придется наложить на эти множества некоторые дополнительные условия.

Итак, сначала рассмотрим в \mathbb{R}^2 замкнутые множества, стесненные свойством мажорируемости (m -свойством). Приведем примеры множеств в \mathbb{R}^2 , обладающих m -свойством, и покажем, что не все замкнутые множества в \mathbb{R}^2 обладают m -свойством. Далее приведем некоторые утверждения относительно α -множеств в \mathbb{R}^2 , обладающих m -свойством.

Пусть A — замкнутое множество в \mathbb{R}^2 и $z^* \in \partial A$.

Введем следующие множества в \mathbb{R}^2 :

$K(z^*; A) = \{h \in \mathbb{R}^2: h \neq 0, z = z^* + \lambda h \in A \text{ при некотором } \lambda > 0\}$ — конус допустимых направлений множества A в точке z^* ;

$K_A(z^*) = \{z = z^* + \lambda h: \lambda \geq 0, h \in K(z^*; A)\}$;

$Q_A(z^*) = \text{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus K_A(z^*))$, где символ $\text{cl} X$ означает замыкание множества X в \mathbb{R}^2 .

Для краткости конические множества $K_A(z^*)$ и $Q_A(z^*)$ будем называть *конусами* в \mathbb{R}^2 .

$Q_A(z^*)$ — замкнутое, не обязательно выпуклое множество в \mathbb{R}^2 . Может случиться для некоторых α -множеств A в \mathbb{R}^2 с числом $\alpha \in (0, \pi)$, что $Q_A(z^*) = \emptyset$ при некоторых $z^* \in \partial A$.

Допустим теперь, что $Q_A(z^*) \neq \emptyset$ для некоторых $A \subset \mathbb{R}^2$ и $z^* \in \partial A$. В этом случае конус $Q_A(z^*)$ можно представить как объединение выпуклых замкнутых конусов из некоторого набора K_ω , $\omega \in \mathbb{R}^2$ с вершиной z^* :

$$Q_A(z^*) = \bigcup_{\omega \in \Omega} K_\omega; \quad (2.1)$$

здесь Ω — некоторое множество.

Ясно, что представление (2.1) конуса $Q_A(z^*)$ может быть неоднозначно. Это будет в случаях, когда $\text{int } Q_A(z^*) \neq \emptyset$. Но может оказаться, что $\text{int } Q_A(z^*) = \emptyset$, и тогда $Q_A(z^*)$ не допускает представления (2.1), в котором среди K_ω , $\omega \in \Omega$ есть конус с $\text{int } K_\omega \neq \emptyset$.

Для замкнутого множества $A \subset \mathbb{R}^2$ и $z^* \in \partial A$ будем говорить, что $z^* \in \partial A$ есть *точка типа I*, если

а) $Q_A(z^*) \neq \emptyset$;

б) существует такое представление (2.1) конуса $Q_A(z^*)$, что среди конусов K_ω , $\omega \in \Omega$ есть конус K_{ω^*} с $\text{int } K_{\omega^*} \neq \emptyset$, не совпадающий с полуплоскостью в \mathbb{R}^2 ;

с) конус $Q_A(z^*)$ не допускает представления (2.1), в котором среди K_ω , $\omega \in \Omega$ есть конус, совпадающий с полуплоскостью в \mathbb{R}^2 .

Будем говорить, что $z^* \in \partial A$ есть *точка типа II*, если

а) $Q_A(z^*) \neq \emptyset$;

б) конус $Q_A(z^*)$ допускает представление (2.1), в котором среди K_ω , $\omega \in \Omega$ есть конус, совпадающий с полуплоскостью в \mathbb{R}^2 .

На рис. 3 изображены точки $z^* \in \partial A$ типов I и II.

В случае, когда z^* — точка типа I, рассмотрим соответствующий конус $K^* = K_{\omega^*}$ (см. п. б)), биссектрису конуса K^* и какую-либо точку y^* , $y^* \neq z^*$ на биссектрисе. Из y^* восстано-

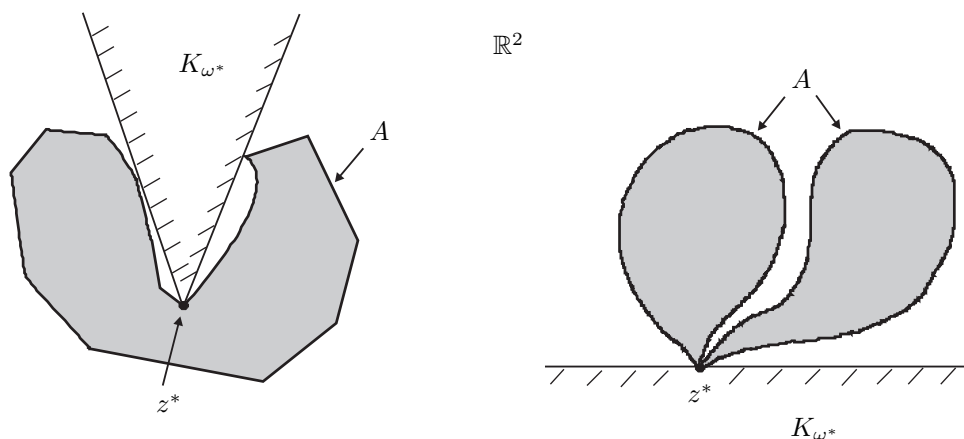


Рис. 3.

вим перпендикуляры к образующим (крайним лучам) конуса K^* . Через $\beta = \beta(y^*)$ обозначим угол между перпендикулярами ($0 < \beta < \pi$).

Угол $\beta = \beta(y^*)$ есть некоторая характеристика конуса K^* , принадлежащего конусу $Q_A(z^*)$. Следовательно, эта характеристика имеет отношение к самому A . Однако отсутствует ее непосредственная связь с понятием проекции точки на множество A . Угол $\beta = \beta(y^*)$ не есть, вообще говоря, угол между двумя векторами вида $p(y^*) - y^*$.

Свойство, которое вводим ниже, связывает характеристику $\beta = \beta(y^*)$ с угловой характеристикой, в основе которой лежит понятие проекции точки на множество A .

О п р е д е л е н и е 2.6. Будем говорить, что замкнутое множество A в \mathbb{R}^2 обладает m -свойством (свойством мажорируемости), если для любой точки $z^* \in \partial A$ существует такое представление (2.1), в котором z^* есть точка типа I или типа II и для любой точки типа I среди соответствующих конусов $K^* = K_{\omega^*}$ найдется такой и для него такая точка $z^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, что $\beta \leq \alpha_A(z^0)$.

Возникает естественный вопрос о существовании в \mathbb{R}^2 замкнутых множеств, обладающих точками $z^* \in \partial A$ типа I и m -свойством. Ответ на этот вопрос положителен. Приведем пример такого множества.

П р и м е р 1. Пусть замкнутое множество A в \mathbb{R}^2 ограничено дугами трех окружностей (см. рис. 4), причем концы $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$ внутренней дуги не совпадают.

Любая внутренняя точка z^* внутренней дуги, входящей в ∂A , является точкой типа I.

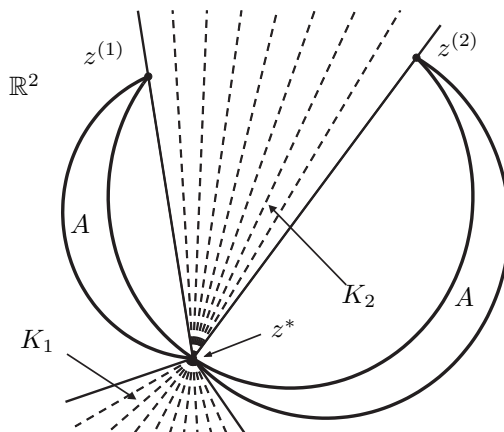


Рис. 4.

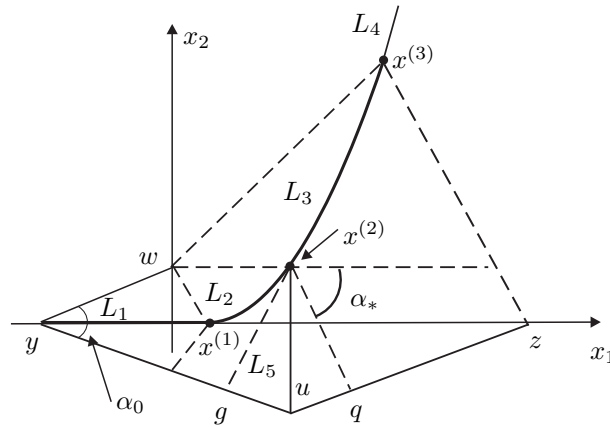


Рис. 5.

Так, например, точке z^* , принадлежащей всем трем дугам одновременно, соответствует конус $Q_A(z^*) = \text{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus K_A(z^*)) = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 — замкнутые выпуклые конусы с вершиной z^* . Конусы K_1 и K_2 имеют непустые внутренности и не совпадают с полуплоскостью в \mathbb{R}^2 . Видим, что конус $K^* = K_2$ имеет соответствующий угол $\beta = \beta(y^*) < \pi$. С другой стороны, $\alpha_A = \alpha_A(z^0) = \pi$ для точки $z^0 = \frac{z^{(1)} + z^{(2)}}{2}$.

Точки $z^{(1)}$ и $z^{(2)}$, а также внутренние точки двух внешних дуг, входящих в ∂A , являются точками типа II.

Видим, что множество A обладает m -свойством. □

Приведенный пример показывает, что совокупность замкнутых множеств A в \mathbb{R}^2 , обладающих m -свойством, непуста. Нетрудно убедиться в том, что таких множеств A в \mathbb{R}^2 много. В связи с этим спрашивается: может быть, все замкнутые множества A в \mathbb{R}^2 , у которых $z^* \in \partial A$ суть точки типа I или типа II, обладают m -свойством? Приведем пример, показывающий, что ответ на этот вопрос отрицателен.

Пример 2. Основу конструкции составляет трехзвенная ломаная X с узлами в точках $w = (0, b)$, $y = (-c, 0)$, $u = (d, -e)$, $z = (2d + c, 0)$, где параметры $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $e > 0$; их значения определим ниже. Построим характеристическое множество $L(X)$, состоящее из точек, имеющих не менее двух проекций (ближайших точек) на ломаной X . Линейная структура X определяет геометрию характеристического множества. $L(X)$ является объединением одномерных и нульмерных многообразий в виде дуг парабол, открытых отрезков (отрезков без концов), полупрямых, точек и содержит (см. рис. 5):

- конечную совокупность $\{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$ точек склейки одномерных многообразий;
- открытый отрезок L_1 биссектрисы угла, образованного звеньями wy и wu ломаной X ;
- дугу L_2 параболы, фокус которой совпадает с точкой w , а директриса — с осью Ox_1 ;
- дугу $L_3 = x^{(2)}x^{(3)}$ параболы, состоящую из точек, равноудаленных от точки w и звена uz ломаной X ;
- полупрямую L_4 с крайней точкой $x^{(3)}$, состоящую из точек, равноудаленных от концов w и z ломаной X ;
- открытый отрезок $L_5 = ux^{(2)}$ биссектрисы угла, образованного звеньями yu и uz ломаной X .

Изучим поведение функции $\alpha_X(\cdot)$ на характеристическом множестве $L(X)$ и оценим сверху ее множество значений.

Выделим особо точку бифуркации $x^{(2)}$ — единственную точку из $L(X)$, имеющую не две, а три различные проекции на ломаную X . Одной из проекций является w , другую обозначим как g , третью проекцию обозначим как q . Проекции w , g и q упорядочены против часовой стрелки

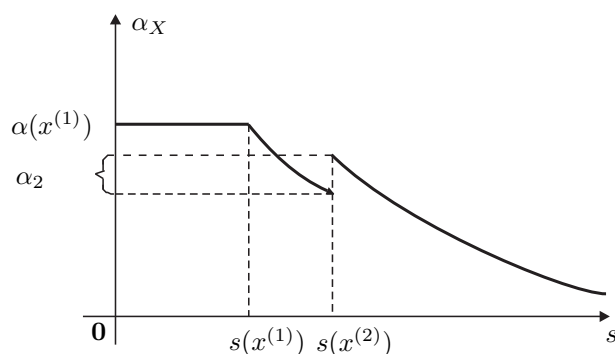


Рис. 6.

относительно точки $x^{(2)}$. Пусть углы $\alpha_1 = \widehat{wx^{(2)}g}$, $\alpha_2 = \widehat{gx^{(2)}q}$, тогда $\alpha_X(x^{(2)}) = \alpha_1 + \alpha_2$. Заметим, что за счет надлежащего выбора значений параметров b, c, d, e угол $\alpha_X(x^{(2)})$ можно сделать меньше любой наперед заданной положительной константы.

Функция $\alpha_X(\cdot)$, будучи рассмотренной на кривой $L(y) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 \cup \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}\}$, в точке $x^{(2)}$ терпит разрыв. В этой точке происходит скачок значений функции на величину $\alpha_2 > 0$ при движении вдоль $L(y)$ в направлении от $x^{(1)}$ до $x^{(2)}$. График сужения $\alpha_X(\cdot)$ на $L(y)$ при натуральной параметризации $s = s(x)$ этой кривой представлен на рис. 6. Аналогичным образом функция $\alpha_X(\cdot)$ ведет себя вдоль другой характеристической линии $L(u) = L_5 \cup \{x^{(2)}\}$ при движении вдоль $L(u)$ в направлении от u до $x^{(2)}$. Здесь также в точке $x^{(2)}$ происходит скачок значений функции, но на величину $\alpha_1 > 0$. За счет выбора параметров углы α_1 и α_2 , а вместе с этим и угол $\alpha_X(x^{(2)}) = \alpha_1 + \alpha_2$ можно сделать меньше любой малой положительной величины. Примем $b = 1/2$, $c = 1$. Потребуем, чтобы $\frac{e}{d+c} = 1/2$. Тогда $x^{(1)} = (1/4, 0)$. Найдем значение параметра d , при котором парабола с фокусом в точке w и директрисой, определяемой звеном yu ломаной X , проходит через точку $x^{(2)} = (d, 1/2)$. Подставив $b = 1/2$, $c = 1$ в уравнение параболы $2b(d+c)^2x_2 - (d+c)^2x_1^2 + e(2(d+c)x_1x_2 + 2c(d+c)x_2 + 2ecx_1 + 2bex_2 - ex_2^2) = (d+c)^2b^2 + e^2(b^2 - c^2)$, учитывая соотношение $\frac{e}{d+c} = 1/2$, получим квадратное уравнение $d^2 - d - 1 = 0$. Откуда $d = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Тогда $e = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$, точки $x^{(2)} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $x^{(3)} = \left(\frac{51 + 24\sqrt{5}}{8(3 + \sqrt{5})}, \frac{37 + 16\sqrt{5}}{4(3 + \sqrt{5})}\right) \approx (2.498, 3.474)$.

Докажем, что при таком выборе параметров, выполняется строгое неравенство

$$\alpha_X(x^{(2)}) < \alpha_X(x^{(1)}).$$

Обозначим через α_0 угол между звеньями wy и yu ломаной X . Имеем $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_0}{2}\right) = \frac{b}{c} = \frac{e}{d+c} = 1/2$. Отсюда $\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} 1/2$. Поскольку $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{2 \cdot 1/2}{1 - (1/2)^2} = 4/3$, то $\alpha_0 = \operatorname{arctg} 4/3$. Обозначим через α_* дополнение угла $\alpha(x^{(2)})$ до π , т. е. $\alpha_* = \pi - \alpha(x^{(2)})$. Из подобия прямоугольных треугольников (см. рис. 5) получаем, что $\operatorname{tg} \alpha_* = c/b = 2$. Тогда $\alpha_* = \operatorname{arctg} 2$. Отсюда $\alpha_X(x^{(1)}) = \pi - \alpha_0 = \pi - \operatorname{arctg} 4/3$, $\alpha_X(x^{(2)}) = \pi - \alpha_* = \pi - \operatorname{arctg} 2$. Требуемое неравенство $\alpha_X(x^{(1)}) > \alpha_X(x^{(2)})$ доказано.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функция $\alpha_X(\cdot)$ монотонно убывает вдоль кривой $L_1 \cup L_2$ при ее обходе в направлении от точки y до точки $x^{(2)}$:

$$\alpha_X(x) \leq \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L_1 \cup L_2.$$

Аналогично можно показать, что $\alpha_X(\cdot)$ монотонно убывает вдоль кривой $L_3 \cup L_4 \cup \{x^{(3)}\}$ при ее обходе в направлении от точки $x^{(2)}$ до точки $x^{(3)}$. Стало быть, для всех точек кривой $L(y)$

выполняется оценка

$$\alpha_X(x) \leq \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L(y).$$

Осталось заметить, что функция $\alpha_X(\cdot)$ на открытом отрезке L_5 постоянна, причем для всех точек $x \in L_5$ справедливо равенство $\alpha_X(x) = \alpha_0 = \arctg 4/3$. Поскольку $\alpha_0 < \alpha_X(x^{(2)})$, а $\alpha_X(x^{(2)}) < \alpha_X(x^{(1)})$, то для всех точек кривой $L_5 \cup x^{(2)}$ справедливо неравенство $\alpha_X(x) < \alpha_X(x^{(1)})$. В итоге получаем оценку

$$\alpha_X(x) < \alpha_X(x^{(1)}), \quad x \in L(X).$$

Опираясь на полученные результаты, построим невыпуклое компактное множество A , не обладающее m -свойством.

Для этого сконструированную ломаную X дополним до замкнутой линии выпуклой кривой, соединяющей точки w и z . В качестве такой кривой выберем, например, дугу \overline{X} эллипса, проходящего через точки w и z . Замкнутая кривая $X \cup \overline{X}$ является кусочно-гладкой и ограничивает компактно невыпуклое множество, которое обозначим через A (см. рис. 7). Нетрудно видеть, что характеристическое множество $L(A)$ множества A совпадает с $L(X)$.

Поскольку $\alpha_A(x) = 0$, когда $x \in \mathbb{R}^2 \setminus L(A)$ (в силу единственности проекции точки x на множество A), и $\alpha_A(x) \leq \alpha_A(x^{(1)})$, когда $x \in L(A)$ (обоснование приведено выше), то

$$\alpha_A = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(x) = \alpha_A(x^{(1)}) = \pi - \arctg 4/3.$$

Рассмотрим $Q_A(y)$ — замыкание дополнения конуса возможных направлений множества A в точке $y \in \partial A$. В данном случае y является точкой типа I, конус $Q_A(y) = wyz$, т. е. состоит из одной выпуклой компоненты K_1 , $K_1 = Q_A(y)$. На биссектрисе конуса K_1 выберем точку $y^* \neq y$, вычислим угол

$$\beta(y^*) = \pi - \arctg 1/2.$$

Очевидно, что

$$\alpha_A < \beta(y^*). \quad \square$$

Вернемся к изучению замкнутых множеств A в \mathbb{R}^2 , обладающих m -свойством. Дадим еще одно определение.

О п р е д е л е н и е 2.7. Будем говорить, что замкнутое множество A в \mathbb{R}^2 обладает усиленным m -свойством, если для любой ε -окрестности A_ε , $\varepsilon \in [0, \infty)$ выполняется m -свойство.

Здесь обозначено $A_0 = A$.

Приведем пример замкнутого множества в \mathbb{R}^2 , обладающего усиленным m -свойством.

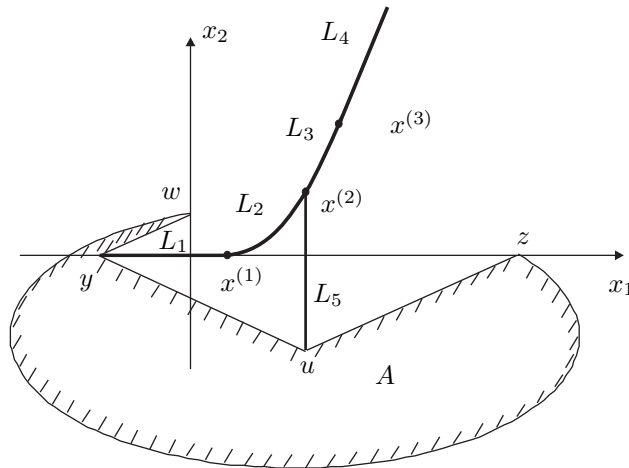


Рис. 7.

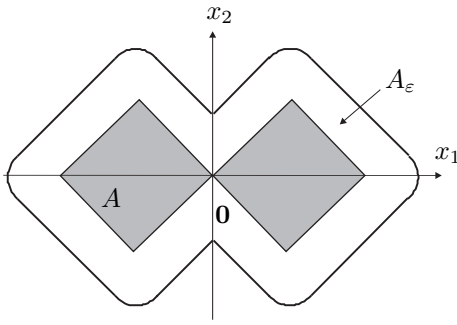


Рис. 8.

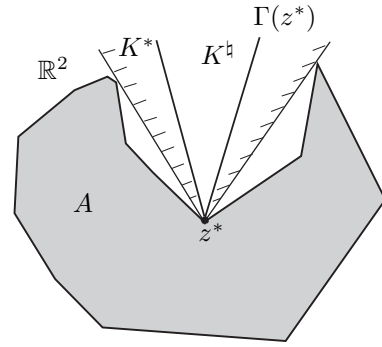


Рис. 9.

Пример 3 представлен на рис. 8.

Сформулируем и докажем некоторые утверждения относительно α -множеств в конечномерных евклидовых пространствах. Эти утверждения, подобные некоторым утверждениям выпуклого анализа, представляют собой достаточные условия, и в некоторых из них участвует m -свойство. В формулируемых ниже теоремах 1, 2 множество A содержится в \mathbb{R}^2 .

Теорема 1 (о существовании опорной α -гиперплоскости). Пусть $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$ обладает m -свойством и $z^* \in \partial A$. Тогда существует хотя бы одна α -гиперплоскость, опорная к A в точке z^* .

Доказательство. Итак, пусть $z^* \in \partial A$. Тогда по условиям теоремы существует такое представление (2.1), согласно которому z^* есть точка типа I или типа II.

Если z^* — точка типа I, то среди соответствующих конусов K_{ω^*} , $\omega^* \in \Omega$ в представлении (2.1) найдется конус $K^* = K_{\omega^*}$, а также точка $z^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ такие, что $\beta \leq \alpha_A(z^0)$. Так как A есть α -множество, то $\alpha_A(z^0) \leq \alpha$ и, значит, $\beta \leq \alpha$. Тогда угол при вершине z^* конуса K^* равен $\pi - \beta \geq \pi - \alpha$. Это неравенство означает, что в K^* можно вложить замкнутый выпуклый конус K^\dagger с вершиной z^* и углом $\pi - \alpha$ при вершине (см. рис. 9).

Граница ∂K^\dagger конуса K^\dagger есть α -гиперплоскость в \mathbb{R}^2 . Введем обозначения $\Gamma(z^*) = \partial K^\dagger$, $\Phi^+(z^*) = K^\dagger$ и $\Phi^-(z^*) = \text{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus K^\dagger)$. Множества $\Phi^+(z^*)$ и $\Phi^-(z^*)$ суть α -полупространства в \mathbb{R}^2 , соответствующие α -гиперплоскости $\Gamma(z^*)$. Учитывая $A \subset \Phi^-(z^*)$, $z^* \in \partial A$, получаем: $\Gamma(z^*)$ — опорная к A в точке z^* α -гиперплоскость в \mathbb{R}^2 . Теорема 1 доказана. \square

Теорема 2 (о сильной отделимости точки и α -множества). Пусть $A \in \mathcal{A}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$ обладает усиленным m -свойством и $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A$. Тогда $\{z^*\}$ и A сильно α -отделимы.

Доказательство. Так как A замкнуто в \mathbb{R}^2 и $z^* \in \mathbb{R}^2 \setminus A$, то $\rho(z^*) = \min_{z \in A} \|z - z^*\| = \varepsilon > 0$. В силу утверждения 2 выполняется $\alpha_\varepsilon = \alpha_{A_\varepsilon} \leq \alpha < \pi$ и, значит, $B = A_\varepsilon$ — регулярное множество в \mathbb{R}^2 . Тогда множества A и B удовлетворяют условиям теоремы 1 и, следовательно, $z^* \in \partial A_\varepsilon$. Так как A обладает усиленным m -свойством, то A_ε обладает m -свойством. Значит, по теореме 1 существует опорная в точке z^* к A_ε α_ε -гиперплоскость $\Gamma^\varepsilon(z^*)$. Множество A_ε содержится в одном из замкнутых полупространств $\widehat{\Phi}^-(z^*)$, $\widehat{\Phi}^+(z^*)$, соответствующих α_ε -гиперплоскости $\Gamma^\varepsilon(z^*)$. Пусть, для определенности, $A_\varepsilon \subset \widehat{\Phi}^+(z^*)$.

На основании доказательства теоремы 1 считаем, что $\widehat{\Phi}^-(z^*)$ — выпуклый конус в \mathbb{R}^2 с углом $\pi - \alpha_\varepsilon$ при вершине z^* . Так как $\alpha_\varepsilon \leq \alpha$, то $\pi - \alpha \leq \pi - \alpha_\varepsilon$ и, значит, в конус $\widehat{\Phi}^-(z^*)$ можно вложить некоторый выпуклый замкнутый конус $K(z^*)$ с углом $\pi - \alpha$ при вершине z^* . По построению конуса $K(z^*)$ его граница $\Gamma(z^*) = \partial K(z^*)$ есть α -гиперплоскость в \mathbb{R}^2 (см. рис. 10). Пространство \mathbb{R}^2 разбивается α -гиперплоскостью $\Gamma(z^*)$ на два замкнутых полупространства $\Phi^-(z^*) = K(z^*) \in \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_\alpha$ и $\Phi^+(z^*) \in \mathcal{A}_\alpha$, причем $\{z^*\} \subset \Phi^-(z^*)$, $A_\varepsilon \subset \Phi^+(z^*)$.

Рассмотрим теперь множество $\Phi^-(z^*)_\rho - \rho$ -окрестность множества $\Phi^-(z^*)$, где $\rho = \varepsilon/2 > 0$. Полагаем $\Gamma = \partial(\Phi^-(z^*)_\rho)$ (см. рис. 11).

Множество Γ есть α -гиперплоскость в \mathbb{R}^2 , которая разбивает \mathbb{R}^2 на два полупространства $\Phi^- = K(z^*)_\rho \in \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_\alpha$ и $\Phi^+ \in \mathcal{A}_\alpha$ такие, что $\{z^*\}_\rho \subset \Phi^-$, $A_\rho \subset \Phi^+$. Теорема 2 доказана. \square

Отметим, что тематика исследований, в рамках которой возникают вопросы относительно структуры пересечений множеств из \mathcal{A}_α (или из \mathcal{B}_α), является заслуживающей внимания. Так, вопросы относительно структуры пересечений множеств из \mathcal{A}_α (или из \mathcal{B}_α) возникают в ходе доказательства некоторых утверждений об отделимости α -множеств в \mathbb{R}^n .

Теперь перейдем к изучению вопроса об α -отделимости непересекающихся множеств A и B из \mathbb{R}^n ($A \in \mathcal{B}_\alpha$, $B \in \mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$).

Имеет место

Гипотеза. Пусть A и B из \mathbb{R}^n ($A \in \mathcal{B}_\alpha$, $B \in \mathcal{B}_\alpha$, $\alpha \in [0, \pi)$) таковы, что $\rho(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} \|a - b\| \geq \gamma > 0$. Тогда существует гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$, сильно разделяющая A и B .

В теореме 2 рассмотрен вопрос о сильной α -отделимости точки и α -множества в \mathbb{R}^2 . Ситуация непересекающихся одноточечного множества и α -множества в \mathbb{R}^2 является частной по отношению к ситуации двух непересекающихся множеств из совокупности \mathcal{B}_α , представленной в гипотезе. Теорему 2 можно рассматривать как подтверждение гипотезы в одном, весьма частном, случае.

Рассмотрим еще одну ситуацию, связанную с вопросом о сильной α -отделимости, действующую в пользу гипотезы.

Пусть заданы функции $f(x): M \mapsto \mathbb{R}^1$ и $g(x): M \mapsto \mathbb{R}^1$, липшицевы на M с константой $L \in (0, \infty)$, где M — замкнутое множество в \mathbb{R}^n .

Введем множества $A = \text{epi } f(\cdot) = \{(x, y): x \in M; y \geq f(x)\}$ и $B = \text{hypo } g(\cdot) = \{(x, y): x \in M; y \leq g(x)\}$, относительно которых предполагаем $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} (f(x) - g(x)) = \gamma > 0$.

Для нас представляет интерес вопрос о сильной α -отделимости множеств A и B из \mathbb{R}^{n+1} . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть скалярные функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на замкнутом множестве $M \subset \mathbb{R}^n$, липшицевы на M с константой $L \in (0, \infty)$ и $\inf_{x \in M} (f(x) - g(x)) = \gamma > 0$. Тогда в \mathbb{R}^{n+1} существует гиперплоскость $\Gamma^* \in \mathcal{B}_\alpha$, $\text{tg } \alpha/2 = L$, сильно \mathcal{B}_α -разделяющая множества $A = \text{epi } f(\cdot)$, и $B = \text{hypo } g(\cdot)$ в пространстве \mathbb{R}^{n+1} .

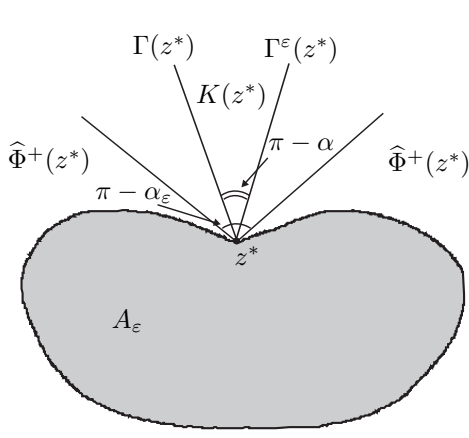


Рис. 10.

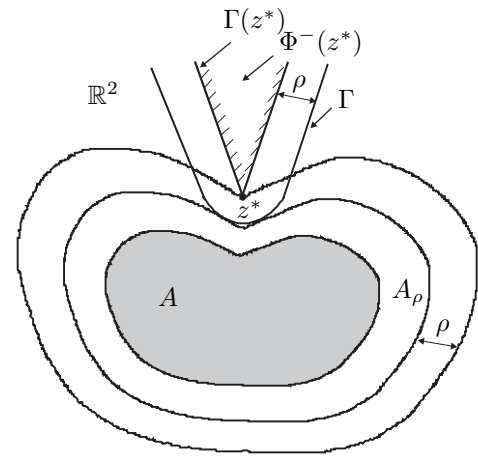


Рис. 11.

Доказательство. Сначала докажем утверждение для случая $M = \mathbb{R}^n$. В связи с этим выберем для определенности из двух функций $f(x)$ и $g(x)$ одну — функцию $f(x)$ и введем множество $\text{gr } f(\cdot) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Каждой точке $z^* = (x^*, y^*) \in \text{gr } f(\cdot)$ сопоставим конус $K(z^*) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, |y - f(x^*)| \leq L\|x - x^*\|\}$, состоящий из двух замкнутых выпуклых конусов $K^+(z^*) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq y - f(x^*) \leq L\|x - x^*\|\}$ и $K^-(z^*) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, -L\|x - x^*\| \leq y - f(x^*) \leq 0\}$.

Для определенности сосредоточим внимание на конусе $K^+(z^*)$ и выделим в нем какую-либо пару крайних лучей Λ_* и Λ^* , составляющую максимальный угол ϑ по сравнению с другими парами крайних лучей конуса $K^+(z^*)$. Угол ψ , который составляет каждый из лучей Λ_* и Λ^* с подпространством \mathbb{R}^n пространства \mathbb{R}^{n+1} , равен $(\pi - \vartheta)/2$.

Пусть Λ — центральный луч конуса $K^+(z^*)$, составляющий равные углы с крайними лучами конуса $K^+(z^*)$, а z ($z \neq z^*$) — некоторая точка на Λ и α — угол между перпендикулярами, восстановленными из z к Λ_* и Λ^* . Угол $\alpha = 2\psi = \pi - \vartheta$ не зависит от выбора точки z на луче Λ . Здесь $\psi = \arctg L$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Множества $\text{hypo } f(\cdot)$, $\text{epi } f(\cdot)$ и $\text{gr } f(\cdot)$ в \mathbb{R}^{n+1} суть элементы совокупности \mathcal{B}_α , $\text{tg } \alpha/2 = L$.

Доказательство. Для доказательства леммы выберем произвольную точку $z^0 \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \text{gr } f(\cdot)$. Пусть, например, $z^0 \in \text{epi } f(\cdot)$. Обозначим через z^* какую-либо проекцию точки z^0 на $\text{gr } f(\cdot)$, считая при этом для простоты рассуждений, что $z^* = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Точка z^* расположена в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ строго ниже точки z^0 , т.е. вектор $s = z^0 - z^*$ удовлетворяет неравенству $\langle s, e \rangle > 0$, где $e = (0, 0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Обозначим через $\Pi_s(z^*) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle s, z \rangle = 0\}$ — гиперплоскость в \mathbb{R}^{n+1} , опорную к шару $O_r(z^0) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \|z - z^0\| \leq r\}$ в точке $z^* = \mathbf{0}$; здесь $r = \|z^0\|$.

Введем также конус Булигана $T(\text{gr } f(\cdot); z^*) = \{h \in \mathbb{R}^{n+1} : \liminf_{\lambda \downarrow 0} \rho(h, \lambda^{-1}(\text{gr } f(\cdot) - z^*)) = 0\}$ в точке z^* (см, например, [10; 11]); здесь $\rho(h, H)$ — расстояние от $h \in \mathbb{R}^{n+1}$ до замкнутого множества $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Множества $O_r(z^0)$, $\Pi_s(z^*)$ и $T(\text{gr } f(\cdot); z^*)$ представлены на рис. 12.

Пусть $\Phi^{(1)}$ и $\Phi^{(2)}$ — некоторые множества в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, имеющие вид графиков скалярных функций, определенных на \mathbb{R}^n . Будем говорить, что $\Phi^{(1)}$ расположено под $\Phi^{(2)}$, если для любых $(x, y^{(1)}) \in \Phi^{(1)}$ и $(x, y^{(2)}) \in \Phi^{(2)}$, $x \in \mathbb{R}^n$ верно $y^{(1)} \leq y^{(2)}$.

Множества $\Phi^{(1)} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y = \inf\{y^{(1)} : (x, y^{(1)}) \in T(\text{gr } f; z)\}\}$ в \mathbb{R}^{n+1} имеют как раз вид графиков скалярных функций, определенных на \mathbb{R}^n , и, кроме того, $y^{(1)} \leq y^{(2)}$ для любых

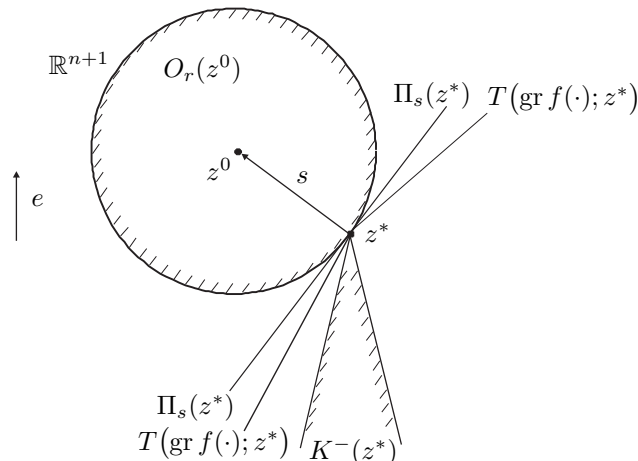


Рис. 12.

$(x, y^{(1)}) \in T(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*)$ и $(x, y^{(2)}) \in \Pi_s(z^*)$, $x \in \mathbb{R}^n$. В противном случае для некоторого направления $\Lambda_h = \{\lambda h : \lambda \geq 0\}$ конуса $T(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*)$ было бы $\langle s, h \rangle > 0$, что повлекло бы за собой соотношение $\operatorname{gr} f(\cdot) \cap \operatorname{int} O_r(z^0) \neq \emptyset$, противоречащее определению точки z^* .

Обозначим через $T^-(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*)$ и $\Pi_s^-(z^*)$ множества всех точек в \mathbb{R}^{n+1} , лежащих не выше множеств $\Phi^{(1)} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y = \inf\{y^{(1)} : (x, y^{(1)}) \in T(\operatorname{gr} f; z)\}\}$ и $\Phi^{(2)} = \Pi_s(z^*)$ соответственно:

$$T^-(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \leq y^{(1)}, \text{ где } (x, y^{(1)}) \in \Phi^{(1)}\},$$

$$\Pi_s^-(z^*) = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}^n, y \leq y^{(2)}, \text{ где } (x, y^{(2)}) \in \Phi^{(2)}\}.$$

Так как $T(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*)$ расположен под $\Pi_s(z^*)$, то справедливо

$$T^-(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*) \subset \Pi_s^-(z^*) = \{z \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle s, z \rangle \leq 0\}. \quad (2.2)$$

Далее, конус $K^-(z^*)$, согласно определению, расположен под $T(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*)$ и, значит,

$$K^-(z^*) \subset T^-(\operatorname{gr} f(\cdot); z^*). \quad (2.3)$$

Из включений (2.2), (2.3) следует

$$K^-(z^*) \subset \Pi_s^-(z^*). \quad (2.4)$$

Учитывая (2.4), получаем, что s есть вектор внешней нормали к $K^-(z^*)$ в точке $z^* = \mathbf{0}$, т. е. $s \in K^0(z^*) = \{\bar{s} \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle \bar{s}, \bar{k} \rangle \leq 0 \quad \forall \bar{k} \in K^-(z^*)\}$.

Конус $K^0(z^*)$ в \mathbb{R}^{n+1} , нормальный к конусу $K^-(z^*)$, имеет максимальный угол между крайними лучами (при переборе пар крайних лучей конуса), равный $\alpha = \pi - \vartheta$. Отсюда следует $z^* - z^0 = -s \in -K^0(z^*)$. Точка z^* в рассуждениях была выбрана произвольно среди ближайших точек к z^0 в $\operatorname{gr} f(\cdot)$. Тем самым показано, что все векторы $z^* - z^0$, (z^* — ближайшая точка к z^0 на $\operatorname{gr} f(\cdot)$) удовлетворяют включению $z^0 - z^* \in -K^0(z^*)$. Значит, угол (s', \hat{s}'') между любыми векторами s' и s'' вида $p(z^0) - z^0$ удовлетворяет неравенству $(s', \hat{s}'') \leq \alpha$; здесь обозначено $p(z^0)$ — проекция точки z^0 на $\operatorname{gr} f(\cdot)$.

В итоге показано, что для любой точки $z^0 \in \operatorname{epi} f(\cdot) \setminus \operatorname{gr} f(\cdot)$ выполняется $\alpha_{\operatorname{hypo} f(\cdot)}(z^0) \leq \alpha$ и, значит, $\operatorname{hypo} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$. Аналогично показывается $\alpha_{\operatorname{epi} f(\cdot)}(z^0) \leq \alpha$ для любой точки $z^0 \in \operatorname{hypo} f(\cdot) \setminus \operatorname{gr} f(\cdot)$ и, значит, $\operatorname{epi} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$.

Из $\operatorname{epi} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ и $\operatorname{hypo} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ следует $\operatorname{gr} f(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$. Лемма доказана. \square

Также имеют место $\operatorname{epi} g(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$, $\operatorname{hypo} g(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ и $\operatorname{gr} g(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$.

Возвратимся теперь к условию о сильной α -отделимости множеств $A = \operatorname{epi} f(\cdot)$ и $B = \operatorname{hypo} g(\cdot)$ в \mathbb{R}^{n+1} в рамках условий, наложенных на $f(x)$ и $g(x)$ в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$.

Введем функцию $h(x) = 1/2(f(x) + g(x))$, $x \in M = \mathbb{R}^n$.

Функция $h(x)$ липшицева на \mathbb{R}^n с той же самой константой L , что и функции $f(x)$, $g(x)$. Поэтому в соответствии с леммой 1 множество $\Gamma = \operatorname{gr} h(\cdot)$ в \mathbb{R}^{n+1} есть элемент совокупности \mathcal{B}_α с константой α , $\operatorname{tg} \alpha/2 = L$, той же самой, что и множества A и B . Кроме того, при $\rho \in (0, \gamma/2)$ множества $A^\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, y \leq f(x) - \rho\}$ и $B^\rho = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, y \geq g(x) + \rho\}$ удовлетворяют включениям

$$A^\rho \subset \Phi^+, \quad B^\rho \subset \Phi^-; \quad (2.5)$$

здесь $\Phi^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, y \geq h(x)\}$ и $\Phi^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, y \leq h(x)\}$ — замкнутые полупространства, на которые гиперплоскость $\Gamma \in \mathcal{B}_\alpha$ разбивает \mathbb{R}^{n+1} .

Принимая во внимание липшицовость функции $h(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, по $\rho \in (0, \infty)$ можем подобрать такое $\varepsilon \in (0, \infty)$, что $A_\varepsilon \subset A^\rho$ и $B_\varepsilon \subset B^\rho$.

Из (2.5) и последних включений следует

$$A_\varepsilon \subset \Phi^+, \quad B_\varepsilon \subset \Phi^- \quad (2.6)$$

при некотором $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Вместе с тем утверждение теоремы 3 доказано в случае, когда $M = \mathbb{R}^n$. \square

Воспользовавшись этим результатом, докажем теорему 3. Итак, пусть выполнены условия теоремы 3.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество из условий теоремы 3. Введем функции $f^*(x) = \inf_{y \in M} \{f(y) + L\|x - y\|\}$ и $g^*(x) = \inf_{y \in M} \{g(y) + L\|x - y\|\}$, определенные на \mathbb{R}^n .

Справедливо следующее утверждение (см, например [12, с. 626]).

Лемма 2. *Функции $f^*(x)$ и $g^*(x)$ липшицевы на \mathbb{R}^n с константой L , той же самой, что и функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на M .*

Таким образом, функции $f^*(x)$ и $g^*(x)$ представляют собой продолжения функций $f(x)$ и $g(x)$ с множества M на все пространство \mathbb{R}^n с сохранением константы Липшица.

Заметим также, что поскольку при любых $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in M$ выполняется

$$f(y) + L\|x - y\| \geq g(y) + L\|x - y\|, \quad f(y) - g(y) \geq \gamma > 0,$$

то $f^*(x) - g^*(x) \geq \gamma > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

В соответствии с рассмотренным частным случаем $M = \mathbb{R}^n$ получаем, что множества $A^* = \text{epi } f^*(\cdot)$ и $B^* = \text{hypo } g^*(\cdot)$ в \mathbb{R}^{n+1} суть элементы совокупности \mathcal{B}_α , $\text{tg } \alpha/2 = L$. Вместе с ними $\text{gr } f^*(\cdot)$ и $\text{gr } g^*(\cdot)$ — элементы совокупности \mathcal{B}_α .

Тогда функция $h^*(x) = 1/2 (f^*(x) + g^*(x))$, $x \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соотношению $\text{gr } h^*(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$, $\text{tg } \alpha/2 = L$, и при этом гиперплоскость $\Gamma^* = \text{gr } h^*(\cdot)$ сильно \mathcal{B}_α -разделяет множества A^* и B^* в пространстве \mathbb{R}^{n+1} .

По определению функций $f^*(x)$ и $g^*(x)$ имеем $A \subset A^*$, $B \subset B^*$, и поэтому гиперплоскость Γ^* сильно \mathcal{B}_α -разделяет множества A и B в пространстве \mathbb{R}^{n+1} .

Теорема 3 доказана. \square

З а м е ч а н и е. В ходе доказательства теоремы 3 было установлено, что в частном случае $M = \mathbb{R}^n$ множества $A = \text{epi } f(\cdot)$ и $B = \text{hypo } g(\cdot)$ суть элементы совокупности \mathcal{B}_α , $\text{tg } \alpha/2 = L$.

Возникает естественный вопрос: “Являются ли в общем случае множества A и B элементами совокупности \mathcal{B}_α ?”. Этот вопрос сводится к следующему: “Пусть $Z_M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : x \in M, y \in \mathbb{R}\}$ — замкнутый цилиндр в \mathbb{R}^{n+1} с основанием $M^* = \{(x, 0) : x \in M\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Являются ли множества $A = Z_M \cap A^*$ и $B = Z_M \cap B^*$ элементами совокупности \mathcal{B}_α , $\text{tg } \alpha/2 = L$?”.

Очевидно, что без дополнительных ограничений на M ответ на этот вопрос отрицателен. Например, если $M \subset \mathbb{R}^n$ есть элемент совокупности \mathcal{A}_{α^*} , где $\alpha < \alpha^* \leq \pi$, то множества $A = Z_M \cap A^*$ и $B = Z_M \cap B^*$ не будут элементами совокупности \mathcal{B}_α .

В связи с этим отметим, что даже в таком простом случае, когда A представлено в виде $Z_M \cap \text{gr } \varphi(\cdot)$, где $\text{gr } \varphi(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$, а M — выпуклое замкнутое множество в \mathbb{R}^n , мы не можем утверждать, что $A \in \mathcal{B}_\alpha$. Для некоторых функций $\varphi(\cdot)$, $\text{gr } \varphi(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ включение $A \in \mathcal{B}_\alpha$ не выполняется, в то время как для других функций $\varphi(\cdot)$, $\text{gr } \varphi(\cdot) \in \mathcal{B}_\alpha$ включение $A \in \mathcal{B}_\alpha$ имеет место.

Итак, даже если дополнить в условиях теоремы 3 замкнутое множество M условием выпуклости, то в теореме мы не можем утверждать, что множества $A = Z_M \cap A^*$ и $B = Z_M \cap B^*$ являются элементами совокупности \mathcal{B}_α .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Фомин А.Н. α -множества и их свойства / Ин-т математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНТИ 02.04.2004, № 543-В2004.
2. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.
3. Половинкин Е.С., Балашов М.Б. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2007. 360 с.

4. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
5. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Токманцев Т.Б.** Стабильные мосты в дифференциальных играх на конечном промежутке времени // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2004. Т. 10, № 2. С. 155–177.
6. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Построение функции оптимального результата в задаче быстрого действия на основе множества симметрии // Автоматика и телемеханика. 2009. № 7. С. 50–57.
7. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Изв. вузов. 2008. № 3. С. 27–37.
8. **Успенский А.А., Лебедев П.Д.** О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
9. **Motzkin T.** Sur quelques proprietes caracteristiques des ensembles convexes // Rend. Accad. Naz. Lincei. Red. VI. 1935. Vol. 21. P. 562–567.
10. **Bouligand G.** Sur les surfaces depourvues de points hyperlimites // Ann. Soc. Polon. Math. 1930. Vol. 9. P. 32–41.
11. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.
12. **Макаров Б.М., Подкорытов А.Н.** Лекции по вещественному анализу. Изд-во: БХВ-Петербург, 2011. 688 с.

Ушаков Владимир Николаевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: ushak@imm.uran.ru

Поступила 10.12.2015

Успенский Александр Александрович

канд. физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: uspen@imm.uran.ru

УДК 518.6

АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ЗАДАЧИ ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ ТРАНСПОРТА В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ¹

М. Ю. Хачай, Р. Д. Дубинин

Задача об оптимальной маршрутизации с ограничением на грузоподъемность транспортных средств (CVRP) является одной из классических задач комбинаторной оптимизации и обладает широким спектром приложений в исследовании операций. Поскольку задача CVRP NP-трудна и сохраняет трудно-решаемость, даже будучи сформулированной в конечномерном евклидовом пространстве, традиционно особое внимание уделяется вопросам ее аппроксимируемости. Большая часть известных результатов в области приближенных алгоритмов и полиномиальных приближенных схем для данной задачи получены для ее частной постановки на евклидовой плоскости. В данной работе показывается, что подход, предложенный М. Хаймовичем и А. Ринноом Каном в 1985 г. для разработки полиномиальных приближенных схем для планарной задачи с единственным складом, успешно может быть применен и в более общем случае, например, в пространствах произвольной фиксированной размерности и при произвольном числе складов.

Ключевые слова: оптимальная маршрутизация, CVRP, аппроксимируемость, EPTAS.

M. Yu. Khachai, R. D. Dubinin. Approximability of the optimal routing problem in finite-dimensional Euclidean spaces.

The capacitated vehicle routing problem (CVRP) is a classical combinatorial optimization problem with a wide range of applications in operations research. Since the CVRP is NP-hard even in a finite-dimensional Euclidean space, special attention is traditionally paid to the issues of its approximability. A major part of the known results concerning approximation algorithms and polynomial-time approximation schemes (PTAS) for this problem are obtained for its particular instance on the Euclidean plane. In the present paper we show that the approach to the development of a PTAS in the planar problem with a single depot proposed by Haimovich and Rinnooy Kan in 1985 can be effectively applied in a more general case, for example, in spaces of arbitrary fixed dimension and for an arbitrary number of depots.

Keywords: optimal routing, CVRP, approximability, EPTAS.

MSC: 90C27, 90C59, 90B06

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-292-303

Введение

В статье изучаются вопросы эффективной аппроксимируемости комбинаторной задачи об оптимальной маршрутизации транспортных средств (Vehicle Routing Problem, VRP) [15], описывающей одну из активно разрабатываемых моделей исследования операций. По-видимому, впервые задача об оптимальной маршрутизации транспорта была введена в работе Г. Данцига и Дж. Рамсера [5] при построении наиболее экономичного плана снабжения горючим сети бензо-заправочных станций.

В простейшей постановке задача VRP состоит в следующем: заданы n -элементное множество пунктов обслуживания (*клиентов*, *clients*), выделенный пункт, именуемый *складом*, *depot*, и транспортные издержки, возникающие при перевозках из одного пункта в другой. Требуется указать наиболее экономичный набор маршрутов, начинающихся и заканчивающихся на складе и посещающих в совокупности каждого из клиентов в точности один раз. Известен широкий круг модификаций этой базовой постановки (см., [12;15]), связанных, например, с увеличением

¹Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00109).

числа складов, учетом неоднородности спроса различных клиентов, а также дополнительными ограничениями на грузоподъемность, количество транспортных средств, время поставок и т. п.

В работе рассматривается модификация задачи, в которой объем спроса клиентов полагается одинаковым, а *грузоподъемность (capacity)* транспортных средств ограничена сверху значением параметра q . В литературе данная задача известна [8] как Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP).

Сложностной статус этой задачи определяется ее близким родством с известными трудно-решаемыми задачами комбинаторной оптимизации. Так, задача коммивояжера (TSP) является частным случаем CVRP при условии, что склад совпадает с одним из пунктов обслуживания и $q \geq n$. Как известно [13], задача TSP NP -трудна и остается таковой даже на евклидовой плоскости, поэтому аналогичным свойством обладает и задача VRP. Почти все известные ее модификации (за исключением, быть может, CVRP с грузоподъемностью $q \leq 2$) сохраняют свойство труднорешаемости (см., например, [12]), даже будучи сформулированными в конечных евклидовых пространствах.

По этой причине большая часть работ, посвященных CVRP, связана с разработкой приближенных алгоритмов и эвристик. Известно [2], что в метрической постановке CVRP APX-полна (т. е. наличие у нее полиномиальной приближенной схемы влечет равенство $P = NP$) при произвольном фиксированном $q \geq 3$. Позитивные результаты в области аппроксимируемости задачи CVRP в основном опираются на эвристику *итерированного разбиения маршрутов* (ITP), предложенную в работе М. Хаймовича и А. Ринной Кана [8], и известную полиномиальную приближенную схему (PTAS), разработанную С. Аророй [1] для задачи коммивояжера на плоскости. Так, в статье [8] обоснована первая полиномиальная приближенная схема для CVRP с одним складом. В работе [2] была предложена полиномиальная схема с лучшей оценкой трудоемкости для $q = O(\log n / \log \log n)$. Там же показано, что полиномиальная схема С. Ароры для TSP порождает PTAS для CVRP при $q = \Omega(n)$. В недавней работе [6] обоснована квазиполиномиальная приближенная схема для этой задачи. Предложенный авторами алгоритм для произвольного $\varepsilon > 0$ находит $(1+\varepsilon)$ -приближенное решение задачи CVRP с одним складом при произвольном q за время $n^{(\log n)^{O(1/\varepsilon)}}$. Авторами статьи [3] результаты [2; 8] распространены на случай произвольного фиксированного числа складов. В работе [14] разработаны полиномиальные приближенные схемы для CVRP с ограничениями на время поставки.

Приведенный выше краткий обзор, ни в коей мере не претендуя на полноту изложения, дает некоторое представление об интенсивности исследований, посвященных аппроксимации задачи CVRP на плоскости. Перечисленные результаты позволяют прийти к выводу о том, что задача CVRP в \mathbb{R}^2 и ее модификации, сохраняя труднорешаемость, как правило, эффективно аппроксимируемы, обладая полиномиальными приближенными схемами.

Однако, об аппроксимируемости задачи в евклидовых пространствах большей размерности, по нашим сведениям, известно существенно меньше. В работе [11] результаты, полученные в [8] для CVRP с одним складом, распространены на случай трехмерного евклидова пространства.

В данной статье мы приводим обобщение результатов [11] на случай, когда число складов m и размерность пространства $d \geq 2$ принимают произвольные фиксированные значения.

1. Постановки задач

Зададимся необходимыми обозначениями.

1. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество клиентов, $Y = \{y_1, \dots, y_m\}$ — множество складов. Через $G^0(X \cup Y, E, w)$ обозначим полный взвешенный орграф, совместно с порогом грузоподъемности $q \in \mathbb{N}$ задающий условие задачи CVRP. Весовая функция w определяет транспортные издержки, связанные с перевозками из одной вершины в другую. Полагаем ее неотрицательной и симметричной. *Стоимостью* произвольного маршрута R назовем сумму стои-

мостей входящих в него дуг и договоримся обозначать ее через $w(R)$. Наряду с графом G^0 договоримся рассматривать его подграф $G = G^0 \langle X \rangle$, индуцированный долей X .

2. Каждому клиенту x_i сопоставим число $r_i = \min\{w(y_j, x_i) : j = 1, \dots, m\}$, определяющее наименьшие транспортные издержки по прямым перевозкам в пункт обслуживания x_i . Разрешая неоднозначность произвольным образом, зададимся разбиением $X_1 \cup \dots \cup X_m = X$ множества клиентов на подмножества

$$X_j = \{x \in X : r_i = w(x, y_j)\}, \quad (1.1)$$

каждое из которых состоит из клиентов, ассоциированных со складом y_j из соображений минимизации транспортных издержек.

3. Каждый допустимый маршрут имеет вид $y_{j_s}, x_{i_1}, \dots, x_{i_t}, y_{j_f}$, где y_{j_s} и y_{j_f} — (необязательно различные) склады, x_{i_1}, \dots, x_{i_t} — попарно различные пункты обслуживания, посещаемые данным маршрутом, и $t \leq q$.

Если $m = 1$, задача CVRP называется Single Depot Capacitated Vehicle Routing Problem (SDCVRP). Все допустимые маршруты при этом условии являются простыми контурами.

Если $m > 1$, задачу называют Multiple Depot CVRP и различают две ее частные постановки. В первой (договоримся обозначать ее MDCVRP1) каждый маршрут волен начинаться и заканчиваться на произвольных складах $y_{j_s}, y_{j_f} \in Y$. Во второй (MDCVRP2), напротив, допустимыми являются лишь те маршруты, в которых начальный и конечный склады совпадают ($y_{j_s} = y_{j_f}$).

В любой из перечисленных выше постановок задача CVRP состоит в том, чтобы для заданного взвешенного орграфа $G^0(X \cup Y, E, w)$ и числа q указать набор допустимых маршрутов наименьшей суммарной стоимости VRP*, посещающих каждого клиента в точности один раз.

Ниже мы рассмотрим аппроксимируемость каждой из этих постановок. Как обычно, договоримся называть задачу CVRP *метрической*, если весовая функция w удовлетворяет *неравенству треугольника*, т.е. для произвольных $z_1, z_2, z_3 \in X \cup Y$ справедливо соотношение $w(z_1, z_2) \leq w(z_1, z_3) + w(z_3, z_2)$, и *евклидовой*, если $X \cup Y \subset \mathbb{R}^d$ и $w(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|_2$.

2. Задача SDCVRP

Воспользуемся традиционным подходом к построению приближенных алгоритмов для задачи CVRP, опирающимся на сведение ее к подходящей задаче коммивояжера.

А л г о р и т м 1. Эвристика ИТР [8].

Input: полный взвешенный оргграф $G^0(X \cup \{y\}, E, w)$ порядка n , натуральное число q и выделенный гамильтонов контур H графа G .

Output: допустимое решение $S_{\text{ИТР}}$ задачи SDCVRP.

- 1: **for all** $x \in H$ **do**
- 2: начиная с вершины x , разбить контур H на $l = \lceil n/q \rceil$ цепей, каждая из которых кроме, может быть, одной состоит из q вершин;
- 3: соединив концевые вершины цепей со складом y , построить набор $S(x)$, состоящий из l контуров;
- 4: **end for**
- 5: выдать набор $S_{\text{ИТР}} = \arg \min\{w(S(x)) : x \in H\}$.

Нам потребуется несколько вспомогательных утверждений, доказанных в работе [8] для случая евклидовой плоскости. Для полноты изложения мы также приводим их с доказательствами, тем более что в большинстве своем они справедливы при гораздо более общих условиях.

Лемма 2.1. Для $\bar{r} = 1/n \sum_{i=1}^n r_i$ справедливо соотношение

$$w(S_{\text{ITP}}) \leq 2 \lceil n/q \rceil \bar{r} + \left(1 - \frac{\lceil n/q \rceil}{n}\right) w(H) \leq 2 \lceil n/q \rceil \bar{r} + (1 - 1/q)w(H). \quad (2.1)$$

Доказательство. Легко убедиться, что для контура H число вхождений произвольной дуги (x_{i_1}, x_{i_2}) в решения $S(x_1), \dots, S(x_n)$, перебираемые на основном цикле алгоритма 1, составит $n - l$, при том, что l раз она будет заменена парой дуг (y, x_{i_1}) и (x_{i_2}, y) стоимости r_{i_1} и r_{i_2} соответственно. Следовательно, суммарная стоимость W этих решений определяется равенством

$$W = \sum_{j=1}^n w(S(x_j)) = 2l \sum_{i=1}^n r_i + (n - l)w(H).$$

Справедливость утверждения леммы следует из очевидной оценки $R_{\text{ITP}}(X) \leq W/n$ и соотношения $l = \lceil n/q \rceil \geq n/q$.

Заметим, что лемма 2.1 верна для наиболее общей постановки задачи SDCVRP. В метрическом случае может быть получена и нижняя оценка стоимости произвольного допустимого решения S задачи в терминах порождаемого им гамильтонова контура (графа G). В самом деле, пусть S состоит из контуров C_1, \dots, C_t . Исключив из каждого из них вершину y и произвольным образом соединив получившиеся цепи, построим гамильтонов контур H_S .

Лемма 2.2. Справедлива оценка

$$w(S) \geq \max \{2n\bar{r}/q, w(H_S)\}.$$

Доказательство. В самом деле, оценка $w(S) \geq w(H_S)$ непосредственно следует из неравенства треугольника. Пусть далее $X(C_1), \dots, X(C_t)$ — разбиение множества X , порождаемое контурами C_1, \dots, C_t . Воспользовавшись снова неравенством треугольника и проведя несложные преобразования

$$w(S) \geq \sum_{j=1}^t 2 \max_{x_i \in X(C_j)} r_i \geq 2 \sum_{j=1}^t \frac{\sum_{x_i \in X(C_j)} r_i}{|X(C_j)|} \geq 2 \sum_{j=1}^t \frac{\sum_{x_i \in X(C_j)} r_i}{q} = 2n\bar{r}/q,$$

завершаем доказательство леммы.

Следующая теорема позволяет сопоставить оптимальное значение $\text{VRP}^*(X, y)$ метрической задачи SDCVRP для графа G^0 и оптимум задачи коммивояжера $\text{TSP}^*(X)$ для графа G .

Теорема 2.1. Справедливы соотношения

$$\min \{2\bar{r}n/q, \text{TSP}^*(X)\} \leq \text{VRP}^*(X, \{y\}) \leq 2\lceil n/q \rceil \bar{r} + (1 - 1/q) \text{TSP}^*(X).$$

Доказательство. Верхняя оценка непосредственно следует из леммы 2.1. В самом деле, произвольному гамильтонову контуру H^* стоимости $w(H^*) = \text{TSP}^*$ в графе G алгоритм 1 сопоставляет допустимое решение S_{ITP} исходной задачи SDCVRP, вес $w(S_{\text{ITP}})$ которого одновременно удовлетворяет неравенству $\text{VRP}^* \leq w(S_{\text{ITP}})$ и соотношению (2.1) при подстановке $H = H^*$.

С другой стороны, пусть S^* — оптимальное решение задачи SDCVRP. По лемме 2.2

$$\text{VRP}^*(X, \{y\}) = w(S^*) \geq \max \{2\bar{r}n/q, w(H_{S^*})\} \geq \max \{2\bar{r}n/q, \text{TSP}^*(X)\}. \quad (2.2)$$

Теорема доказана.

Приведенные выше утверждения позволяют оценить точность приближенного алгоритма, получаемого для метрической задачи SDCVRP комбинацией произвольного приближенного

алгоритма для задачи коммивояжера и эвристики ИТР. В самом деле, допустим алгоритм 1 применяется к гамильтонову контуру H в графе G , стоимость которого удовлетворяет соотношению $\text{TSP}^* \leq w(H) \leq \rho \text{TSP}^*$ для некоторого $\rho \geq 1$. Комбинируя соотношения (2.1) и (2.2), для веса $w(S)$ результирующего решения имеем

$$\frac{w(S)}{\text{VRP}^*(X, \{y\})} \leq \frac{2 \lceil n/q \rceil \bar{r} + (1 - 1/q) \rho \text{TSP}^*(X)}{\max \{2\bar{r}n/q, \text{TSP}^*(X)\}} \leq (n+q)/n + (1 - 1/q)\rho \leq q/n + 1 + \rho. \quad (2.3)$$

При условии $q = o(n)$ правая часть соотношения (2.3) стремится к $1 + \rho$, т.е. произвольный ρ -приближенный алгоритм для метрической задачи коммивояжера порождает асимптотически $(1 + \rho)$ -приближенный алгоритм для метрической задачи SDCVRP.

Поскольку трудоемкость ИТР оценивается сверху $O(n^2)$, суммарная трудоемкость базирующегося на ней приближенного алгоритма определяется временной сложностью приближенного алгоритма для задачи TSP. Например, известный 3/2-приближенный алгоритм Н. Кристофидеса [4] с трудоемкостью $O(n^3)$ порождает асимптотически 5/2-приближенный алгоритм с такой же верхней оценкой временной сложности, а известная PTAS С. Ароры [1] для задачи TSP в произвольном евклидовом пространстве фиксированной размерности d порождает для произвольного $c > 0$ асимптотически $(2 + 1/c)$ -приближенный алгоритм с верхней оценкой трудоемкости $O(n(\log n)^{O(\sqrt{dc})^{d-1}})$.

В работе [8] предложена PTAS (Алгоритм 2) для задачи SDCVRP на плоскости. Ниже мы распространим этот результат на случай евклидового пространства произвольной фиксированной размерности $d > 1$.

А л г о р и т м 2. Комбинированная схема СИТР.

Input: полный взвешенный граф $G^0(X \cup \{y\}, E, w)$ порядка n , натуральное число q и верхняя оценка относительной погрешности $\varepsilon > 0$.

Output: допустимое решение $S_{\text{СИТР}}$ задачи SDCVRP.

- 1: упорядочить клиентов по убыванию расстояний до склада $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$;
- 2: задаться значением параметра $k = k(\varepsilon)$, определяющим разбиение множества X на подмножества $X(k) = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ *внешних* и $X \setminus X(k)$ *внутренних* клиентов (конкретный вид зависимости k от ε будет определен позже);
- 3: найти точное решение $S^*(X(k))$ задачи SDCVRP для подграфа $G^0(X(k) \cup \{y\})$;
- 4: применив алгоритм 1, построить приближенное решение $S_{\text{ИТР}}(X \setminus X(k))$ задачи для подграфа $G^0(X \setminus X(k) \cup \{y\})$;
- 5: положить $S_{\text{СИТР}} = S^*(X(k)) \cup S_{\text{ИТР}}(X \setminus X(k))$.

Лемма 2.3. Для произвольного $k \in \{1, \dots, n\}$ справедливо соотношение

$$\text{VRP}^*(X, \{y\}) \leq \text{VRP}^*(X(k), \{y\}) + \text{VRP}^*(X \setminus X(k), \{y\}) \leq \text{VRP}^*(X, \{y\}) + 4(k-1)r_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нижняя оценка очевидна, остановимся на обосновании верхней. Пусть S^* — произвольное оптимальное решение задачи SDCVRP для всего множества клиентов X , C — произвольный входящий в него контур, посещающий вершины, входящие в подмножество $X(k)$, и $B(y, r_k)$ — шар радиуса r_k с центром в точке y . Соединив вершины контура C (в порядке их обхода) отрезками геодезических линий, получим замкнутую кривую. Точками пересечения с границей $B(y, r_k)$ построим разбиение этой кривой на внутренние и внешние сегменты. Соединив концы каждого внешнего сегмента с точкой y и друг с другом геодезическими линиями, получим набор замкнутых кривых, порождающих семейство маршрутов в графе G , каждый из которых посещает либо вершины из $X(k)$, либо вершины из его дополнения. Легко видеть, что общая длина этих маршрутов превышает длину исходного не более, чем на $4r_k$. Применив аналогичное преобразование ко всем маршрутам решения S^* , построим

допустимые решения S_1 и S_2 для подграфов $G^0 \langle X(k) \cup \{y\} \rangle$ и $G^0 \langle X \setminus X(k) \cup \{y\} \rangle$ соответственно. Общее число таких внешних сегментов не превосходит $k - 1$, так как $|X(k)| = k - 1$. Следовательно,

$$\text{VRP}^*(X(k), \{y\}) + \text{VRP}^*(X \setminus X(k), \{y\}) \leq w(S_1) + w(S_2) \leq w(S^*) + 4(k - 1)r_k.$$

Лемма доказана.

Заметим, что лемма 2.3 верна в произвольном метрическом пространстве. Все последующие результаты данного раздела существенно опираются на геометрию конечномерного евклидова пространства. В частности, нам потребуется условие существования ε -сети на поверхности единичной евклидовой сферы S^{d-1} (см., например, [9, Lemma 3.1]) относительно традиционного углового расстояния $\text{dist}(x, y) = \arccos(x, y)$. Здесь и всюду ниже полагаем $d > 1$.

Как обычно, для произвольного $\varepsilon > 0$ подмножество $N \subset S^{d-1}$ называем ε -сетью (на сфере S^{s-1}), если для произвольной точки $x \in S^{d-1}$ найдется такой элемент $\xi = \xi(x) \in N$, что $\text{dist}(x, \xi) \leq \varepsilon$.

Лемма 2.4. *Для произвольного $h \in (0, h_0)$, $h_0 = \pi/(6\sqrt{d-1})$, на сфере S^{d-1} существует $h\sqrt{d-1}$ -сеть $N = N(d, h)$ мощности $|N| = Ch^{-(d-1)}$ для некоторой константы $C = C(d)$.*

Лемма 2.4 позволит нам получить верхнюю оценку длины оптимального маршрута коммивояжера $\text{TSP}^*(X)$ при условии, что множество вершин $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ является подмножеством шара $B(y, R) \subset \mathbb{R}^d$ радиуса R с центром в точке y . По-прежнему полагаем точки множества X упорядоченными по убыванию расстояния r_i до центра y , в нашем случае $r_i = \|x_i - y\|_2$.

Лемма 2.5. *Для произвольного $d > 1$ и конечного подмножества $X \subset B(y, R)$ справедлива оценка*

$$\text{TSP}^*(X) \leq \begin{cases} C_1 R^{1/d} \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^{(d-1)/d}, & \text{если } \sum_{i=1}^n r_i > RC(\pi/6)^{-d}(d-1)^{(d+1)/2}, \\ C_2 R & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $C_1 = 2dC^{1/d}(d-1)^{(d-1)/2d}$ и $C_2 = 2dC(\pi/6)^{-(d-1)}(d-1)^{(d-1)/2}$.

Доказательство. По лемме 2.4 для произвольного $h \in (0, h_0)$, $h_0 = \pi/(6\sqrt{d-1})$, на поверхности шара $B(y, R)$ существует конечная $h\sqrt{d-1}$ -сеть N мощности $Ch^{-(d-1)}$. Соединим каждую точку $\xi_j \in N$ радиальным отрезком с центром шара y , после чего опустим из каждой точки x_i перпендикуляр на ближайший к ней отрезок $[y, \xi_j]$. Маршрут коммивояжера построим стандартным методом удвоения ребер получившегося дерева. Обозначив через $\Phi(h)$ длину построенного маршрута, имеем по лемме 2.4

$$\text{TSP}^*(X) \leq \Phi(h) = 2h\sqrt{d-1} \sum_{i=1}^n r_i + 2RCh^{-(d-1)}. \tag{2.4}$$

Приведенные в условии леммы оценки получаем минимизацией правой части соотношения (2.4) при условии $0 < h < \pi/(6\sqrt{d-1})$.

В самом деле, точная нижняя грань функции Φ на данном интервале совпадает либо со значением в нуле ее производной $h_{\min} = \left(\frac{RC}{\sum_{i=1}^n r_i} \sqrt{d-1} \right)^{1/d}$, если $h_{\min} < h_0$, т.е. $\sum_{i=1}^n r_i > RC(d-1)^{(d+1)/2}(\pi/6)^{-d}$, либо со значением в самой точке h_0 .

В первом случае

$$\begin{aligned} \min_{0 < h < h_0} \Phi(h) &= \Phi(h_{\min}) = 2 \left(\frac{RC}{\sum_{i=1}^n r_i} \sqrt{d-1} \right)^{1/d} \sqrt{d-1} \sum_{i=1}^n r_i + 2RC \left(\frac{RC}{\sum_{i=1}^n r_i} \sqrt{d-1} \right)^{-(d-1)/d} \\ &= \underbrace{2dC^{1/d}(d-1)^{-(d-1)/(2d)}}_{C_1} R^{1/d} \left(\sum_{i=1}^n r_i \right)^{(d-1)/d}. \end{aligned}$$

Во втором случае, эквивалентном выполнению неравенства

$$\sum_{i=1}^n r_i \leq RC(d-1)^{(d+1)/2} (\pi/6)^{-d}, \quad (2.5)$$

имеем

$$\Phi(h_0) = 2\sqrt{d-1} \frac{\pi}{6\sqrt{d-1}} \sum_{i=1}^n r_i + 2RC \left(\frac{\pi}{6} \right)^{d-1} (\sqrt{d-1})^{(d-1)}.$$

Применяя оценку (2.5), получим

$$\begin{aligned} \Phi(h_0) &\leq \frac{\pi}{3} RC(d-1)^{(d+1)/2} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{-d} + 2RC \left(\frac{\pi}{6} \right)^{-(d-1)} (d-1)^{(d-1)/2} \\ &= RC \left(\frac{\pi}{6} \right)^{-d} \underbrace{\left(\frac{\pi}{3} (d-1) + 2 \frac{\pi}{6} \right) (d-1)^{(d-1)/2}}_{C_2} = 2Cd \left(\frac{\pi}{6} \right)^{-(d-1)} (d-1)^{(d-1)/2} R. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Пусть условие задачи SDCVRP задано в d -мерном евклидовом пространстве для некоторого $d > 1$. Оценим сверху относительную погрешность решения

$$e(k) = \frac{w(S_{\text{СИТР}}(X)) - \text{VRP}^*(X)}{\text{VRP}^*(X)} = \frac{\text{VRP}^*(X(k)) + w(S_{\text{ИТР}}(X \setminus X(k))) - \text{VRP}^*(X)}{\text{VRP}^*(X)},$$

получаемого алгоритмом 2, использующим для решения внутренней задачи коммивояжера ρ -приближенный алгоритм.

Лемма 2.6. Для произвольных $\rho \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ найдется номер $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $e(k) \leq \varepsilon$.

Доказательство. Воспользовавшись леммами 2.1–2.3 и введя обозначение $\bar{r}_k = \sum_{i=k}^n r_i / (n - k + 1)$, получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} e(k) &= \frac{\text{VRP}^*(X(k)) + \text{VRP}^*(X \setminus X(k)) - \text{VRP}^*(X) + w(S_{\text{ИТР}}(X \setminus X(k))) - \text{VRP}^*(X \setminus X(k))}{\text{VRP}^*(X)} \\ &\leq \frac{4(k-1)r_k + 2[(n-k+1)/q]\bar{r}_k + \rho \text{TSP}^*(X \setminus X(k)) - 2\bar{r}_k(n-k+1)/q}{2n\bar{r}/q} \\ &\leq q(2k-1) \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{q\rho}{2 \sum_{i=1}^n r_i} \text{TSP}^*(X \setminus X(k)). \end{aligned}$$

Оценив правую часть последнего неравенства по лемме 2.5, получим

$$\begin{aligned} e(k) &\leq q(2k-1) \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{q\rho}{2} \max \left\{ C_1 \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/d}, C_2 \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} \right\} \\ &\leq q(2k-1) \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{q\rho}{2} \max \{C_1, C_2\} \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/d} \end{aligned}$$

в силу очевидного соотношения $r_k \leq \sum_{i=1}^n r_i$.

Пусть далее $s_k = (r_k / \sum_{i=1}^n r_i)^{1/d}$. Предположим, что для произвольного $t \in \{1, \dots, k\}$ справедливо неравенство

$$q(2t - 1)s_t^d + \frac{q\rho}{2}C^*s_t > \varepsilon, \tag{2.6}$$

где $C^* = \max\{C_1, C_2\}$ и зависит только от размерности пространства d .

Возможны две альтернативы. В первом случае $s_t \geq \varepsilon / (q\rho C^*)$ при каждом t . Но тогда

$$1 \geq \sum_{t=1}^k s_t^d \geq k \left(\frac{\varepsilon}{q\rho C^*} \right)^d.$$

Следовательно,

$$k \leq \left(\frac{q\rho C^*}{\varepsilon} \right)^d. \tag{2.7}$$

Рассмотрим второй случай. Пусть t_0 — наименьший номер, для которого $s_{t_0} < \varepsilon / (q\rho C^*)$. По построению аналогичное неравенство справедливо и для произвольного $t_0 \leq t \leq k$. Следовательно, $s_t^d > \varepsilon / (2q(2t - 1))$ в силу соотношения (2.6). Объединяя оценки, получим

$$\begin{aligned} 1 \geq \sum_{t=1}^k s_t^d &\geq (t_0 - 1) \left(\frac{\varepsilon}{q\rho C^*} \right)^d + \frac{\varepsilon}{2q} \sum_{t=t_0}^k \frac{1}{2t - 1} \geq (t_0 - 1) \left(\frac{\varepsilon}{q\rho C^*} \right)^d + \frac{\varepsilon}{2q} \int_{t_0}^{k+1} \frac{dt}{2t - 1} \\ &\geq (t_0 - 1) \left(\frac{\varepsilon}{q\rho C^*} \right)^d + \frac{\varepsilon}{4q} (\ln(2k + 1) - \ln(2t_0 - 1)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Без ограничения общности полагаем ниже $\varepsilon \leq 4q\rho$, что в совокупности с очевидным (при $d > 1$) соотношением $C^* \geq 4$ влечет справедливость неравенства $(\varepsilon / q\rho C^*)^d \leq \varepsilon / 4q$, откуда

$$\left(\frac{\varepsilon}{q\rho C^*} \right)^{-d} \geq t_0 - 1 + \ln(2k + 1) - \ln(2t_0 - 1). \tag{2.9}$$

Учитывая исходное допущение $t_0 \in \{1, \dots, k\}$ и то, что правая часть соотношения (2.9) достигает безусловного минимума при $t_0 = 1/2$, имеем $k \leq (1/2) e^{(\frac{q\rho C^*}{\varepsilon})^d}$. Сравнивая полученную оценку с (2.7), приходим к выводу, что в отрезке

$$\left[1, \frac{1}{2} e^{(\frac{q\rho C^*}{\varepsilon})^d} + 1 \right] \tag{2.10}$$

гарантированно содержится искомый номер $k = k(\varepsilon)$.

Лемма доказана.

Резюмируем проведенные рассуждения.

Теорема 2.2. Пусть для решения внутренней задачи коммивояжера используется ρ -приближенный алгоритм с трудоемкостью $O(n^c)$. Тогда алгоритм 2 является эффективной полиномиальной приближенной схемой (ЕPTAS) для задачи SDCVRP при произвольных фиксированных $q, \rho \geq 1$ и $d \geq 2$.

Доказательство. В самом деле, зафиксировав произвольный $\varepsilon > 0$, найдем $k(\varepsilon)$. Точное решение $S^*(X(k(\varepsilon)))$ может быть найдено методом динамического программирования за время $O(K^q 2^K)$ (см., например, [3]), где K совпадает с правой границей отрезка (2.10). Поскольку время работы оставшейся части алгоритма 2 составляет $O(n^c) + O(n^2)$, то его суммарная трудоемкость при произвольном ε ограничена сверху полиномом от n , порядок и все коэффициенты которого, кроме свободного члена, не зависят от ε .

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Алгоритм 2 остается полиномиальной приближенной схемой для задачи SDCVRP и при более слабых ограничениях на ее параметры, например, при фиксированных d, ρ и $q = O((\log \log(n))^{1/d})$.

3. PTAS для задачи MDCVRP

Результаты предыдущего раздела, касающиеся обоснования полиномиальной приближенной схемы, могут быть распространены и на случай задачи CVRP с несколькими складами при помощи несложной технической модификации. Идея такого обобщения (для случая евклидовой плоскости) впервые была опубликована в работе [3] и состоит в разбиении множества клиентов согласно соотношению (1.1), последующей декомпозиции исходной задачи (вне зависимости, рассматривается ли она в постановке MDCVRP1 или MDCVRP2) и в применении эвристики ИТР к каждому из подмножеств $X_j \setminus X(k) \cup \{y_j\}$ в отдельности.

Опишем кратко соответствующие построения.

А л г о р и т м 3. Комбинированная схема СИТР (случай нескольких складов).

Input: полный взвешенный граф $G^0(X \cup Y, E, w)$ порядка n , натуральное число q и верхняя оценка относительной погрешности $\varepsilon > 0$.

Output: допустимое решение $S_{\text{СИТР}}$ задачи MDCVRP.

- 1: упорядочить клиентов по убыванию расстояний $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$ до множества Y ;
- 2: задать значение параметра $k = k(\varepsilon)$, определяющее разбиение множества X на подмножества $X(k) = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$ внешних и $X \setminus X(k)$ внутренних клиентов;
- 3: найти точное решение $S^*(X(k))$ задачи MDCVRP, задаваемой подграфом $G^0 \langle X(k) \cup Y \rangle$;
- 4: применив алгоритм 1, построить приближенное решение $S_{\text{ИТР}}(X_j \setminus X(k))$ для каждого подграфа $G^0 \langle X_j \setminus X(k) \cup Y \rangle$;
- 5: положить $S_{\text{СИТР}} = S^*(X(k)) \cup S_{\text{ИТР}}(X_1 \setminus X(k)) \cup \dots \cup S_{\text{ИТР}}(X_m \setminus X(k))$.

В самом деле, заметим, что большая часть утверждений предыдущего раздела может быть применена к MDCVRP практически без изменения. Например, нетрудно убедиться, что для задачи MDCVRP1 справедлив буквальный аналог леммы 2.3, получаемый заменой $\{y\}$ на Y .

Остановимся лишь на тех утверждениях, обоснование которых требует дополнительного пояснения. По аналогии с предыдущим разделом введем обозначение относительной погрешности

$$e(k) = \frac{w(S_{\text{СИТР}}(X)) - \text{VRP}^*(X)}{\text{VRP}^*(X)} = \frac{\text{VRP}^*(X(k)) + \sum_{j=1}^m w(S_{\text{ИТР}}(X_j \setminus X(k))) - \text{VRP}^*(X)}{\text{VRP}^*(X)}. \quad (3.1)$$

Лемма 3.1. В задаче MDCVRP1 для произвольных $m > 1$, $\rho \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ найдется номер $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $e(k) \leq \varepsilon$.

Доказательство. Пусть $X'_j = X_j \setminus X(k)$, $n_j = |X'_j|$ и $\bar{r}_{jk} = \sum_{x_i \in X'_j} r_i / n_j$. Повторяя рассуждение, проведенное при доказательстве леммы 2.6, имеем

$$e(k) \leq \frac{4(k-1)r_k + \sum_{j=1}^m (2\lceil n_j/q \rceil \bar{r}_{jk} + \rho \text{TSP}^*(X'_j) - 2\bar{r}_{jk}n_j/q)}{2n\bar{r}/q} \\ \leq q(2k-2+m) \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{q\rho}{2 \sum_{i=1}^n r_i} \sum_{j=1}^m \text{TSP}^*(X'_j) \leq q(2k-2+m) \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{mq\rho}{2} C^* \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/d}.$$

Предположив, что для произвольного $t \in \{1, \dots, k\}$

$$q(2t-2+m) \frac{r_t}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{mq\rho}{2} C^* \left(\frac{r_t}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/d} > \varepsilon \quad (3.2)$$

и одновременно

$$s_t^d = \frac{r_t}{\sum_{i=1}^n r_i} \geq \left(\frac{\varepsilon}{mq\rho C^*} \right)^d, \quad (3.3)$$

получим оценку $k \leq \left(\frac{mq\rho C^*}{\varepsilon} \right)^d$, родственную соотношению (2.7). Если же система (3.2) не влечет (3.3) и t_0 — первый номер, для которого справедливо противоположное неравенство, то по аналогии с (2.8) имеем

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{t=1}^k s_t^d \geq (t_0 - 1) \left(\frac{\varepsilon}{mq\rho C^*} \right)^d + \frac{\varepsilon}{2q} \sum_{t=t_0}^k \frac{1}{2t - 2 + m} \geq (t_0 - 1) \left(\frac{\varepsilon}{mq\rho C^*} \right)^d + \frac{\varepsilon}{2q} \int_{t_0}^{k+1} \frac{dt}{2t - 2 + m} \\ &\geq (t_0 - 1) \left(\frac{\varepsilon}{mq\rho C^*} \right)^d + \frac{\varepsilon}{4q} (\ln(2k + m) - \ln(2t_0 - 2 + m)) \\ &\geq \left(\frac{\varepsilon}{mq\rho C^*} \right)^d ((t_0 - 1) + (\ln(2k + m) - \ln(2t_0 - 2 + m))) \geq \left(\frac{\varepsilon}{mq\rho C^*} \right)^d \ln \left(\frac{2k + m}{m} \right), \end{aligned}$$

откуда $k \leq (m/2) e^{\left(\frac{mq\rho C^*}{\varepsilon} \right)^d}$, и, следовательно, отрезок

$$\left[1, \frac{m}{2} e^{\left(\frac{mq\rho C^*}{\varepsilon} \right)^d} + 1 \right] \quad (3.4)$$

заведомо содержит искомый номер $k(\varepsilon)$.

Лемма доказана.

Для обоснования того, что алгоритм 3 является EPTAS и для MDCVRP2, нам потребуется модификация леммы 2.3, доказанная в работе [3].

Лемма 3.2. В задаче MDCVRP2 для произвольного $k \in \{1, \dots, n\}$ справедливо соотношение

$$\text{VRP}^*(X, Y) \leq \text{VRP}^*(X(k), Y) + \text{VRP}^*(X \setminus X(k), Y) \leq \text{VRP}^*(X, Y) + 2(q - 1)(k - 1)r_k.$$

Доказательство. Для обоснования верхней оценки используется иной (по отношению к лемме 2.3) способ модификации маршрутов произвольного оптимального решения S^* исходной задачи. Каждый маршрут C , составляющий такое решение S^* и посещающий элементы $X(k)$, заменяется подходящим маршрутом, получаемым из C исключением всех внутренних клиентов. Организуем посещение каждого исключенного клиента в отдельности, добавив для каждого в результирующее решение кратчайший индивидуальный маршрут. Таким образом, стоимость описанного преобразования для маршрута C не превысит $2(q - 1)r_k$.

Справедливость леммы следует из условия $|X(k)| = k - 1$.

Лемма 3.3. В задаче MDCVRP2 для произвольных $m > 1$, $\rho \geq 1$ и $\varepsilon > 0$ найдется номер $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $e(k) \leq \varepsilon$.

Доказательство. Оценивая правую часть соотношения (3.1) в соответствии с утверждением леммы 3.2, получим оценку

$$e(k) \leq \frac{q((q - 1)k + m)}{2} \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{mq\rho}{2} C^* \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/d} \leq \frac{q^2(k + m)}{2} \frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} + \frac{mq\rho}{2} C^* \left(\frac{r_k}{\sum_{i=1}^n r_i} \right)^{1/d}.$$

Буквально повторяя ход рассуждений, проведенных ранее в доказательствах лемм 2.6 и 3.1, убеждаемся в том, что для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ в отрезке

$$\left[1, (m + 1) e^{\left(\frac{mq\rho C^*}{\varepsilon} \right)^d} \right] \quad (3.5)$$

заведомо найдется номер $k = k(\varepsilon)$, для которого $e(k) \leq \varepsilon$.

Лемма доказана.

Повторяя схему доказательства теоремы 2.2 и опираясь на леммы 3.1 и 3.2, нетрудно обосновать следующую завершающую теорему.

Теорема 3.1. *В условиях теоремы 2.2 и произвольных фиксированных $m, d > 1, \rho \geq 1$ и q алгоритм 3 является EPTAS для задач MDCVRP1 и MDCVRP2, трудоемкость которой для произвольного $\varepsilon > 0$ составляет $O(n^c + n^2 + mK^q 2^K)$, где $K = K(\varepsilon)$ совпадает с правой границей отрезков (3.4) и (3.5) соответственно.*

Заключение

В работе исследовано семейство приближенных алгоритмов для решения задач CVRP с одним или несколькими складами, порождаемое известной схемой комбинирования методов точного решения подзадач и эвристики итерированного разбиения маршрутов (ИТР) М. Хаймовича и А. Ринноя Кана.

Несмотря на давнюю известность этой схемы, большинство базирующихся на ней результатов не выходит за пределы евклидовой плоскости. Применение другого известного утверждения, описывающего геометрическую структуру конечных ε -сетей на сфере S^{d-1} (лемма 2.4), по-видимому, впервые позволило обобщить эти результаты на случай евклидовых пространств произвольной фиксированной размерности $d > 1$.

Фактически в работе показано, что алгоритмы 2 и 3 в сопряжении с произвольным полиномиальным приближенным алгоритмом фиксированной точности для задачи TSP порождают эффективные полиномиальные приближенные схемы (EPTAS) для задач SDCVRP и MDCVRP. Более того, найденные оценки трудоемкости сохраняют полиномиальность по n при использовании для внутренней задачи TSP алгоритмов с несколько худшими оценками точности ($O(\log \log n)^{1/d}$), но, возможно, существенно лучшей производительностью, что может оказаться полезным при работе с *большими данными*.

Для расширения диапазона допустимых значений q , при которых трудоемкость сохраняет свойство полиномиальности, можно попытаться использовать для аппроксимации задачи CVRP последние результаты в области цикловых покрытий графа (см., например, [7; 10]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45, no. 5. P. 753–782.
2. Covering points in the plane by k -tours: a polynomial approximation scheme for fixed k / Т. Asano, N. Katoh, H. Tamaki, T. Tokuyama. Tokyo: IBM Tokyo Research Laboratory Research, 1996. Report RT0162.
3. A PTAS for the multiple depot vehicle routing problem / S. Cardon, S. Dommers, C. Eksin, R. Sitters, A. Stougie, L. Stougie. Eindhoven: Eindhoven Univ. of Technology. Tech. Rep. No. 2008.03. P. 10.
4. **Christofides N.** Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity. N. Y.: Academic Press, 1975. P. 441.
5. **Dantzig G., Ramser J.** The truck dispatching problem // Management Science. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 80–91.
6. **Das A., Mathieu C.** A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing // Algorithmica. 2015. Vol. 73, no. 1. P. 115–142.
7. **Gimadi E.K., Rykov I.A.** On the asymptotic optimality of a solution of the euclidean problem of covering a graph by m nonadjacent cycles of maximum total weight // Dokl. Math. 2016. Vol. 93, no. 1. P. 117–120.
8. **Haimovich M., Rinnooy Kan A. H. G.** Bounds and heuristics for capacitated routing problems // Math. Oper. Res. 1985. Vol. 10, no. 4. P. 527–542.

9. **Hubbert S., Gia Q. T. L., Morton T.M.** Spherical radial basis functions. Theory and Applications. Cham: Springer, 2015. 150 p. (SpringerBriefs in Mathematics).
10. **Khachay M., Neznakhina K.** Approximability of the minimum-weight k -size cycle cover problem // J. Global Optim. 2015. DOI: 10.1007/s10898-015-0391-3.
11. **Khachay M., Zaytseva H.** Time approximation scheme for single-depot Euclidean capacitated vehicle routing problem // Combinatorial Optimization and Applications: 9th Internat. Conf. (COCOA 2015): Proceedings. Cham: Springer, 2015. P. 178–190. (Lecture Notes in Computer Science).
12. **Kumar S., Panneerselvam R.** A survey on the vehicle routing problem and its variants // Intel. Inform. Management. 2012. Vol. 4, no. 3. P. 66–74.
13. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is NP -complete // Theor. Comput. Sci. 1977. No 4. P. 237–244.
14. **Song L., Huang H., Du H.** Approximation schemes for Euclidean vehicle routing problems with time windows // J. Comb. Optim. 2015. DOI: 10.1007/s10878-015-9931-5.
15. **Toth P., Vigo D.** The vehicle routing problem / eds. P. Toth, D. Vigo. Philadelphia: Society for Indust. and Appl. Math., 2001. 363 p. (Discrete Math. and Appl.)

Хачай Михаил Юрьевич

Поступила 08.04.2016

д-р физ.-мат. наук, профессор РАН

зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

Омский государственный технический университет

e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Дубинин Роман Дмитриевич

студент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: romandubinin94@gmail.com

УДК 517.9

**МЕТОД ПРОГРАММНЫХ ИТЕРАЦИЙ
В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ НАВЕДЕНИЯ¹****А. Г. Ченцов**

Рассматривается вариант метода программных итераций для решения игровой задачи наведения на целевое множество при наличии фазовых ограничений. Исследуется процедура построения множества позиционного поглощения, соответствующего теореме об альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина, послужившей основой современной теории дифференциальных игр. Важные результаты об альтернативной разрешимости дифференциальных игр для систем с распределенными параметрами и последствием принадлежат Ю. С. Осипову. Эти результаты существенно дополняют основные идеи, связанные с альтернативой, для динамических задач бесконечномерной природы. Метод решения настоящей работы ориентирован на “конечномерный” случай дифференциальной игры сближения-уклонения.

Ключевые слова: дифференциальная игра, обобщенное программное управление, метод итераций.

A. G. Chentsov. The program iteration method in a game problem of guidance.

A variant of the program iteration method for solving a game problem of guidance to a target set under state constraints is considered. We study a procedure for the construction of a positional absorption set corresponding to N.N. Krasovskii and A.I. Subbotin's theorem of alternatives, which underlies the modern theory of differential games. Important results on the alternative solvability of differential games for systems with distributed parameters and aftereffect belong to Yu.S. Osipov. These results are an essential complement to the ideas related to the alternative for dynamic problems of infinite-dimensional nature. The solution method from the present paper is intended for the “finite-dimensional” case of a differential game of approach–evasion.

Keywords: differential game, generalized program control, iteration method.

MSC: 49J15, 49K15, 93C15, 49N70

DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-304-321

1. Введение

Используем далее следующие сокращения: v/z — вещественнозначная (функция), ДИ — дифференциальная игра, ИП — измеримое пространство, МПИ — метод программных итераций, МПП — множество позиционного поглощения, m/ϕ — мультифункция, НУ — начальное условие, ОПП — оператор программного поглощения, p/m — подмножество, p/p — подпространство, ТП — топологическое пространство, УП — упорядоченная пара, УПЗМ — упорядоченная пара замкнутых множеств.

Теория ДИ связана [1; 2] с исследованием задач динамики, возникающих в инженерных приложениях и связанных с управлением в условиях помех и возмущений различного характера. Настоящая статья посвящена одному из методов решения ДИ — МПИ. Вариант МПИ, рассматриваемый ниже, касается процедуры построения МПП, определяющего решение ДИ сближения-уклонения (см. [2]). Упомянутое решение связано с фундаментальным фактом — теоремой об альтернативе Н. Н. Красовского, А. И. Субботина [2; 3]. Данная теорема во многом определила современное состояние теории ДИ. Последующее развитие данной теории было связано с разработкой программных конструкций [4; 5], построением теории обобщенных решений уравнения Гамильтона — Якоби и, на этой основе, целого направления в негладком

¹Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН “Математические задачи современной теории управления” и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00505, 16-01-00649).

анализе (работы А. И. Субботина и его учеников). В связи с упомянутой важной теоремой отметим глубокий результат А. В. Кряжимского [6], касающийся распространения альтернативы Н. Н. Красовского, А. И. Субботина на ДИ, в которой правая часть управляемого дифференциального уравнения не удовлетворяет условию Лишшица по фазовой переменной.

Создание МПИ в значительной мере было подготовлено построением вспомогательных программных конструкций для решения так называемых регулярных ДИ. Данные конструкции восходят, в свою очередь, к методам, разработанным Н. Н. Красовским и изложенным в [7] в связи со схемой экстремального прицеливания. Использование МПИ не требует условий, обеспечивающих регулярность ДИ (см. в этой части [8–12]). Применение МПИ в целом ряде исследований удачно связывалось [9; 10] с формализацией ДИ в классе квазистратегий (см. [13; 14]); однако в [9; 10] использовались многозначные их варианты, действующие в пространствах мер. Данные конструкции отражены в [15, гл. IV–VI].

2. Обозначения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки), \emptyset — пустое множество, $\exists!$ заменяет фразу “существует и единственно”, \triangleq — равенство по определению. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Принимаем аксиому выбора. Для всякого объекта s через $\{s\}$ обозначаем синглетон, содержащий s . Через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех п/м множества H ; $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$ есть семейство всех непустых п/м H . Если \mathcal{X} — семейство (множеств) и Y — множество, то $\mathcal{X}|_Y \triangleq \{X \cap Y : X \in \mathcal{X}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ есть след \mathcal{X} на множество Y . Если A и B — множества, то, следуя [16, с. 77], через B^A обозначаем множество всех отображений, действующих из A в B (для $f \in B^A$ и $a \in A$ через $f(a)$, $f(a) \in B$, обозначается, как обычно, значение f в точке a). Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $(f|C) \in B^C$ есть def сужение f на C , для которого $(f|C)(x) \triangleq f(x)$ при $x \in C$.

Как обычно, \mathbb{R} — вещественная прямая, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \dots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ и $\mathbb{N}_o \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$; при $r \in \mathbb{N}_o$ и $s \in \mathbb{N}_o$ полагаем $\overline{r, s} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_o \mid (r \leq j) \& (j \leq s)\}$. Кроме того, $\overline{m, \infty} \triangleq \{j \in \mathbb{N}_o \mid m \leq j\} \forall m \in \mathbb{N}_o$. Если H — множество и $k \in \mathbb{N}$, то, как обычно, вместо $H^{\overline{1, k}}$ используем H^k , полагая далее, что элементы \mathbb{N} , т. е. натуральные числа, не являются множествами. Ясно, что $H^{\mathbb{N}}$ — множество всех последовательностей в множестве H . Используем стандартное соглашение: если \mathbb{H} — множество, $(H_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{H})^{\mathbb{N}}$ и $H \in \mathcal{P}(\mathbb{H})$, то

$$((H_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow H) \stackrel{\text{def}}{\iff} \left(\left(H = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} H_i \right) \& (H_{j+1} \subset H_j \ \forall j \in \mathbb{N}) \right).$$

Наконец, если (X, τ) есть ТП и $Y \in \mathcal{P}(X)$, то через $\text{cl}(Y, \tau)$ обозначаем замыкание Y в (X, τ) ; $(Y, \tau|_Y)$ есть ТП, называемое п/п (X, τ) (см. [17, гл. 2]).

Отметим некоторые часто используемые свойства ИП и их п/п. Если E — множество и $\mathcal{E} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, то через $\sigma_E^o(\mathcal{E})$ обозначаем σ -алгебру п/м E , порожденную семейством \mathcal{E} . Если X — множество, $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ и $Y \in \mathcal{P}(X)$, то $\sigma_Y^o(\mathcal{X}|_Y) = \sigma_X^o(\mathcal{X})|_Y$; если же $Y \in \sigma_X^o(\mathcal{X})$, то $\sigma_Y^o(\mathcal{X}|_Y) = \{\Sigma \in \sigma_X^o(\mathcal{X}) \mid \Sigma \subset Y\}$ (см. [18, § 2.3]). Данное свойство применимо в случае, когда (X, \mathcal{X}) есть ТП. Заметим в этой связи, что произвольный конечномерный компакт далее оснащаем (метризуемой) топологией покоординатной сходимости; борелевские множества понимаются традиционно [19, с. 65]. Меры, определяемые на σ -алгебре борелевских п/м ТП, называем борелевскими (ниже используются только счетно-аддитивные неотрицательные меры). Если (E, \mathcal{E}) есть стандартное ИП, то через $(\sigma - \text{add})_+[\mathcal{E}]$ обозначаем множество всех неотрицательных в/з счетно-аддитивных мер на σ -алгебре \mathcal{E} .

3. Содержательная постановка задачи о сближении

Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ в качестве размерности фазового пространства конфликтно-управляемой системы

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (3.1)$$

функционирующей на том или ином конечном промежутке времени $[t_*, \vartheta_o]$, где $t_* \in T \triangleq [t_o, \vartheta_o]$, $t_o \in \mathbb{R}$ и $\vartheta_o \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $t_o < \vartheta_o$. В (3.1) P и Q — непустые компакты в \mathbb{R}^p и \mathbb{R}^q соответственно, где $p \in \mathbb{N}$ и $q \in \mathbb{N}$ (здесь и ниже, если не оговорено противное, предполагается, что пространства \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$, оснащаются каждое топологией покоординатной сходимости), $f: T \times \mathbb{R}^n \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть функция, непрерывная по совокупности переменных. В дальнейшем будут указаны дополнительные условия на систему (3.1), обеспечивающие, в частности, существование, единственность и продолжимость решений, понимаемых в смысле Каратеодори и реализуемых при воздействии борелевских управляющих функций со значениями в P и Q соответственно. Кроме того, будут введены обобщенные управления-меры, определяемые на σ -алгебрах борелевских п/м соответствующих произведений конечномерных компактов, а также движения, порождаемые управлениями-мерами. Основным ориентиром в дальнейшем является построение альтернативного разбиения пространства позиций (из $T \times \mathbb{R}^n$) с использованием МПИ. При этом фиксируются целевое множество (обозначаемое через M и, возможно, снабжаемое индексами) и множество, определяющее фазовые ограничения (используется обозначение N , также дополняемое по мере надобности теми или иными индексами).

Если $t_* \in T$, то через $C_n([t_*, \vartheta_o])$ обозначаем множество всех непрерывных отображений из $[t_*, \vartheta_o]$ в \mathbb{R}^n ; в частности, используем обозначение $C_n(T)$. При $x(\cdot) = (x(t))_{t \in T} \in C_n(T)$ в виде $(t, u, v) \mapsto f(t, x(t), u, v): T \times P \times Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеем непрерывную n -вектор-функцию. В качестве $x(\cdot)$ могут использоваться непрерывные продолжения решений, определенных на промежутках вида $[t_*, \vartheta_o]$, где $t_* \in T$. Упомянутые решения могут соответствовать программным (в том числе и обобщенным) управлениям и процедурам управления по принципу обратной связи. В частности, могут использоваться чистые позиционные стратегии и контрстратегии [2]. Ограничимся сейчас обсуждением управления по принципу обратной связи при естественных условиях на правую часть (3.1) (т. е. на функцию f). Каждой контрстратегии

$$U: T \times \mathbb{R}^n \times Q \rightarrow P \quad (3.2)$$

со свойством борелевости всех сечений $U(t, x, \cdot)$, $t \in T$, $x \in \mathbb{R}^n$, и каждой позиции $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ сопоставляется пучок $\mathcal{X}(t_*, x_*, U)$ [15, с. 239] движений, порожденных U из позиции (t_*, x_*) и определенных в виде равномерных пределов пошаговых движений, формируемых в дискретных схемах с измельчением разбиений промежутка $[t_*, \vartheta_o]$. В частности, допускается использование чистых позиционных стратегий, отвечающих варианту (3.2) с условием независимости от $v \in Q$, т. е. варианту $U: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow P$. Если заданы замкнутые в $T \times \mathbb{R}^n$ с топологией покоординатной сходимости множества M и N (содержащиеся каждое в $T \times \mathbb{R}^n$), то *успешной* для игрока I, распоряжающегося выбором контрстратегии (3.2), называем всякую позицию $(t_*, x_*) \in N$, для которой существует такая контрстратегия $U = U_*$ вида (3.2), что $\forall x(\cdot) = (x(t))_{t \in [t_*, \vartheta_o]} \in \mathcal{X}(t_*, x_*, U)$

$$\exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: ((\vartheta, x(\vartheta)) \in M) \& ((t, x(t)) \in N \quad \forall t \in [t_*, \vartheta]). \quad (3.3)$$

Условие (3.3) соответствует гарантированной разрешимости задачи (M, N) -сближения в классе контрстратегий игрока I. Ограничиваясь сейчас условиями на f , подобными приводимым в [15, гл. IV, §2], отметим, что множество $W(M, N) \in \mathcal{P}(N)$ всех успешных для игрока I позиций (т. е. множество успешной разрешимости) определяет альтернативное разбиение N : для $(t, x) \in N \setminus W(M, N)$ всякий раз существует чистая позиционная стратегия игрока II, гарантирующая ему разрешимость задачи уклонения. Этот замечательный факт — теорема об

альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина — определяет решение дифференциальной игры общего вида (см. более подробно в [2]). В настоящей работе рассматривается вопрос о построении и свойствах множеств $W(M, N)$. Исследуются некоторые вопросы, связанные с зависимостью $(M, N) \mapsto W(M, N)$. Центральную роль в упомянутом исследовании играет МПИ. При этом оказывается удобным трактовать (при естественных условиях на M и N) $W(M, N)$ как множество успешной разрешимости ДИ в классе многозначных квазистратегий (см. в этой связи [15, теоремы 4.4.3, 4.4.4]). Упомянутые квазистратегии определяются в виде (многозначных) отображений, действующих в пространствах обобщенных программных управлений-мер (см. [15, с. 172]), что соответствует естественной процедуре расширения, применяемой в общем случае нелинейной управляемой системы.

В своих построениях мы ослабляем ряд традиционных предположений. Так, в отношении системы (3.1) будут постулироваться условия А. В. Кряжимского [6] и, таким образом, не будет предполагаться выполненным традиционное условие Липшица по фазовой переменной. Кроме того, относительно N будет, как правило, предполагаться (в общей части) только свойство замкнутости сечений N гиперплоскостями $t = \text{const}$. Соответственно предметом исследования будут, в частности, топологические свойства $W(M, N)$ в упомянутом более общем случае.

4. Обобщенные программные управления и движения

Напомним, что в общем случае пучок траекторий системы (3.1) с фиксированным НУ не обладает (вообще говоря) компактностью в топологии равномерной сходимости. В этой связи, следуя [15, гл. IV, §2], введем расширение пространства управлений, реализуемое в классе стратегических мер. При $t \in T$, где $T = [t_o, \vartheta_o]$, рассматриваем конечномерные компакты $[t, \vartheta_o]$, $Z_t \triangleq [t, \vartheta_o] \times Q$, $\Omega_t \triangleq [t, \vartheta_o] \times P \times Q$, используя обычные топологии покоординатной сходимости. Упомянутые компакты оснащаем соответственно σ -алгебрами \mathcal{T}_t , \mathcal{D}_t и \mathcal{C}_t борелевских множеств, получая ИП $([t, \vartheta_o], \mathcal{T}_t)$, (Z_t, \mathcal{D}_t) и $(\Omega_t, \mathcal{C}_t)$. С учетом (3.1) имеем, конечно, что при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ $\mathcal{T}_\theta = \{\Gamma \in \mathcal{T}_t \mid \Gamma \subset [\theta, \vartheta_o]\}$, $\mathcal{D}_\theta = \{D \in \mathcal{D}_t \mid D \subset Z_\theta\}$, $\mathcal{C}_\theta = \{C \in \mathcal{C}_t \mid C \subset \Omega_\theta\}$; при этом $\mathcal{T}_\theta = \mathcal{T}_t|_{[\theta, \vartheta_o]}$, $\mathcal{D}_\theta = \mathcal{D}_t|_{Z_\theta}$ и $\mathcal{C}_\theta = \mathcal{C}_t|_{\Omega_\theta}$. Полагаем $Z \triangleq Z_{t_o}$, $\Omega \triangleq \Omega_{t_o}$, $\mathcal{T} \triangleq \mathcal{T}_{t_o}$, $\mathcal{D} \triangleq \mathcal{D}_{t_o}$ и $\mathcal{C} \triangleq \mathcal{C}_{t_o}$. Пусть λ — след меры Лебега на \mathcal{T} . При $t \in T$ реализуются свойства (подробнее см. в [20, §3]) $(\Gamma \times P \times Q \in \mathcal{C}_t \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t) \ \& \ (D \times P \triangleq \{(t, u, v) \in \Omega_t \mid (t, v) \in D\} \in \mathcal{C}_t \ \forall D \in \mathcal{D}_t)$ (см. [21, добавление II]), характеризующие “цилиндры” в Ω_t . Полагаем при $t \in T$, что

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{C}_t] \mid \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda(\Gamma) \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}, \quad (4.1)$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{D}_t] \mid \nu(\Gamma \times Q) = \lambda(\Gamma) \ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}, \quad (4.2)$$

получая непустые множества (регулярных борелевских) мер. Кроме того,

$$\Pi_t(\nu) \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t \mid \eta(D \times P) = \nu(D) \ \forall D \in \mathcal{D}_t\} \ \forall \nu \in \mathcal{E}_t. \quad (4.3)$$

Множества, определяемые в (4.3), непусты и именуются программами игрока II. Пусть $\mathcal{H} \triangleq \mathcal{H}_{t_o}$, $\mathcal{E} \triangleq \mathcal{E}_{t_o}$ и $\Pi[\nu] \triangleq \Pi_{t_o}(\nu) \ \forall \nu \in \mathcal{E}$. Легко видеть (см. [20]), что при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$

$$\mathcal{H}_\theta = \{(\eta|_{\mathcal{C}_\theta}) : \eta \in \mathcal{H}_t\}, \quad \mathcal{E}_\theta = \{(\nu|_{\mathcal{D}_\theta}) : \nu \in \mathcal{E}_t\}. \quad (4.4)$$

Отметим свойства склеиваемости мер из множеств (4.1), (4.2). Если $t \in T$, $\theta \in [t, \vartheta_o]$, $\eta_1 \in \mathcal{H}_t$ и $\eta_2 \in \mathcal{H}_\theta$, то

$$\eta_1 \perp \eta_2 \triangleq \left(\eta_1(H \cap ([t, \theta] \times P \times Q)) + \eta_2(H \cap \Omega_\theta) \right)_{H \in \mathcal{C}_t} \in \mathcal{H}_t. \quad (4.5)$$

Аналогичным образом, при $t \in T$, $\theta \in [t, \vartheta_o]$, $\nu_1 \in \mathcal{E}_t$ и $\nu_2 \in \mathcal{E}_\theta$

$$\nu_1 \bowtie \nu_2 \triangleq \left(\nu_1(D \cap ([t, \theta] \times Q)) + \nu_2(D \cap Z_\theta) \right)_{D \in \mathcal{D}_t} \in \mathcal{E}_t. \quad (4.6)$$

Заметим, что при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ непременно $[t, \theta[\times P \times Q \in \mathcal{C}_t$ и

$$\mathcal{C}_t^{(\theta)} \triangleq \mathcal{C}_t|_{[t, \theta[\times P \times Q} = \{H \in \mathcal{C}_t \mid H \subset [t, \theta[\times P \times Q\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{C}_t); \quad (4.7)$$

при $\eta \in \mathcal{H}_t$ определена мера $[\eta; \theta] \triangleq (\eta|_{\mathcal{C}_t^{(\theta)}}) \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{C}_t^{(\theta)}]$ ($\mathcal{C}_t^{(\theta)}$ есть σ -алгебра п/м $[t, \theta[\times P \times Q$). Кроме того, при $t \in T$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ $[t, \theta[\times Q \in \mathcal{D}_t$ и $\mathcal{D}_t^{(\theta)} \triangleq \mathcal{D}_t|_{[t, \theta[\times Q} = \{D \in \mathcal{D}_t \mid D \subset [t, \theta[\times Q\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{D}_t)$; если $\nu \in \mathcal{E}_t$, то $[\nu; \theta] \triangleq (\nu|_{\mathcal{D}_t^{(\theta)}}) \in (\sigma - \text{add})_+[\mathcal{D}_t^{(\theta)}]$.

Заметим, что при $t \in T$ меры $\eta \in \mathcal{H}_t$ являются аналогами пар $(u(\cdot), v(\cdot))$ борелевских управляющих функций на $[t, \vartheta_o]$ со значениями в P и Q соответственно, а меры $\nu \in \mathcal{E}_t$ — аналогами борелевских функций $v(\cdot)$ на $[t, \vartheta_o]$ со значениями в Q . Условимся при $t \in T$ через $C([t, \vartheta_o])$, $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ обозначать соответственно множества всех непрерывных в/з функций на $[t, \vartheta_o]$, Ω_t и Z_t соответственно, получая при оснащении нормами равномерной сходимости банаховы пространства. Нам потребуются пространства $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Z_t)$ линейных непрерывных функционалов на $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ соответственно. По теореме Рисса меры из \mathcal{H}_t и \mathcal{E}_t отождествимы с элементами $C^*(\Omega_t)$ и $C^*(Z_t)$, что отражено в [15, гл. IV, §2]. В этой связи при $t \in T$ оснащаем \mathcal{H}_t и \mathcal{E}_t относительными $*$ -слабыми топологиями, которые метризуемы [22, с. 462], поскольку $C(\Omega_t)$ и $C(Z_t)$ — сепарабельные пространства (см. [19, теорема 1.5.1]). Поэтому в упомянутых $*$ -слабых топологиях замкнутость множеств тождественна секвенциальной замкнутости, а компактность — секвенциальной компактности. Эти обстоятельства используются ниже без дополнительных пояснений. Для обозначения $*$ -слабой сходимости последовательностей в \mathcal{H}_t и \mathcal{E}_t , где $t \in T$, всякий раз используем символ \rightharpoonup , при этом \mathcal{H}_t и \mathcal{E}_t — суть множества сильно ограниченные и $*$ -слабо замкнутые, а потому $*$ -слабо компактные. Аналогичными свойствами обладает каждая программа (4.3). Более подробные сведения см. в [15, гл. IV, §2].

С каждым отображением $x(\cdot) = (x(\xi))_{\xi \in [t, \vartheta_o]} \in C_n([t, \vartheta_o])$ связываем непрерывную вектор-функцию $(\xi, u, v) \mapsto f(\xi, x(\xi), u, v): \Omega_t \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которой при $\eta \in \mathcal{H}_t$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$ существует η -интеграл на $[t, \theta[\times P \times Q$, определяемый покомпонентно по схеме [23, гл. 3]. Варьируя $\theta \in [t, \vartheta_o]$, получаем вектор-функцию из множества $C_n([t, \vartheta_o])$. С учетом этого введем

$$\Phi(t_*, x_*, \eta) \triangleq \left\{ x(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \mid x(t) = x_* + \int_{[t_*, t[\times P \times Q} f(\xi, x(\xi), u, v) \eta(d(\xi, u, v)) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_o] \right\} \\ \forall t_* \in T \quad \forall x_* \in \mathbb{R}^n \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*}$$

(интегральная воронка). Действуя в духе [6], полагаем в дальнейшем, что

$$\forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \quad \exists! x^*(\cdot) \in C_n([t_*, \vartheta_o]): \Phi(t_*, x_*, \eta) = \{x^*(\cdot)\}. \quad (4.8)$$

Тем самым введено условие обобщенной единственности. В этой связи принимаем следующее обозначение: если $(t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, то

$$\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\varphi(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_o]} \in C_n([t_*, \vartheta_o]) \quad (4.9)$$

таково, что $\Phi(t_*, x_*, \eta) = \{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)\}$. Вектор-функцию (4.9) называем *программным движением системы*, отвечающим триплету (t_*, x_*, η) ((4.9) является, вообще говоря, скользящим режимом). Учитывая (4.4), полагаем также, что

$$\tilde{\varphi}(\cdot, t_*, x_*, \eta) = (\tilde{\varphi}(t, t_*, x_*, \eta))_{t \in [t_*, \vartheta_o]} \triangleq \varphi(\cdot, t_*, x_*, (\eta|_{\mathcal{C}_{t_*}})) \quad \forall \eta \in \mathcal{H} \quad \forall (t_*, x_*) \in T \times \mathbb{R}^n. \quad (4.10)$$

В (4.10) введены обобщенные траектории, порожденные управлениями-мерами, соответствующими “полному” промежутку времени T . Через $\|\cdot\|$ обозначаем ниже евклидову норму в \mathbb{R}^n . В дополнение к (4.8) полагаем далее, что $\forall a \in [0, \infty[\quad \exists b \in [0, \infty[\quad \forall x_* \in \mathbb{R}^n$

$$(\|x_*\| \leq a) \implies (\|\varphi(t, t_*, x_*, \eta)\| \leq b \quad \forall t_* \in T \quad \forall \eta \in \mathcal{H}_{t_*} \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_o]). \quad (4.11)$$

С учетом (4.8) и (4.11) проверяется следующее свойство: если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{H}_{t_*}$, $(x_*^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$, то истинна импликация

$$(((\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \eta) \& ((x_*^{(i)})_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow x_*)) \implies ((\varphi(\cdot, t_*, x_*^{(i)}, \eta_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)),$$

где \rightrightarrows означает равномерную сходимость. Отметим простые свойства динамического характера, проверяемые с учетом (4.8). Если $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta_1 \in \mathcal{H}_{t_*}$, $\eta_2 \in \mathcal{H}_{t_*}$ и $\theta \in [t_*, \vartheta_o]$, то

$$([\eta_1; \theta] = [\eta_2; \theta]) \implies (\varphi(t, t_*, x_*, \eta_1) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_2) \quad \forall t \in [t_*, \theta]) \quad (4.12)$$

(в (4.12) имеем свойство неупреждаемости). При $t_* \in T$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $\eta_1 \in \mathcal{H}_{t_*}$, $\theta \in [t_*, \vartheta_o]$ и $\eta_2 \in \mathcal{H}_\theta$

$$\begin{aligned} & (\varphi(t, t_*, x_*, \eta_1) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1 \perp \eta_2) \quad \forall t \in [t_*, \theta]) \& \\ & (\varphi(t, \theta, \varphi(\theta, t_*, x_*, \eta_1), \eta_2) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1 \perp \eta_2) \quad \forall t \in [\theta, \vartheta_o]). \end{aligned} \quad (4.13)$$

5. Оператор программного поглощения

Введем естественную топологию \mathbf{t} покоординатной сходимости в $T \times \mathbb{R}^n$ (при этом $\mathbf{t} \subset \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$), порождаемую, в частности, метрикой ρ , имеющей вид

$$((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \longmapsto \sup(\{|t_1 - t_2|; \|x_1 - x_2\|\}): (T \times \mathbb{R}^n) \times (T \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, \infty[. \quad (5.1)$$

Через \mathcal{F} обозначаем семейство всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в ТП $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$; последнее можно рассматривать как произведение T в обычной $|\cdot|$ -топологии и \mathbb{R}^n в топологии $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ покоординатной сходимости. Полагая $\tau_\partial \triangleq \mathcal{P}(T)$, введем также естественную топологию $\tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$ произведения дискрета (T, τ_∂) и $(\mathbb{R}^n, \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$. Семейство \mathfrak{F} всех п/м $T \times \mathbb{R}^n$, замкнутых в $(T \times \mathbb{R}^n, \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)})$, допускает простое описание в терминах сечений: при

$$H \langle t \rangle \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (t, x) \in H\} \quad \forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall t \in T \quad (5.2)$$

имеем следующее очевидное представление:

$$\mathfrak{F} = \{F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \mid F \langle t \rangle \in \mathbf{F} \quad \forall t \in T\}, \quad (5.3)$$

где \mathbf{F} — семейство всех п/м \mathbb{R}^n , замкнутых в смысле $\tau_{\mathbb{R}}^{(n)}$. Ясно, что (см. (5.1)–(5.3))

$$\mathbf{t} \subset \tau_\partial \otimes \tau_{\mathbb{R}}^{(n)}, \quad \mathcal{F} \subset \mathfrak{F}. \quad (5.4)$$

Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$, то $(M, N) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ называем далее УПЗМ. Кроме того, нам потребуются случаи $(M, N) \in \mathcal{F} \times \mathfrak{F}$. Если $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то ОПП $\mathbb{A}[M]: \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ (с целевым множеством M) определяем условиями

$$\begin{aligned} \mathbb{A}[M](S) & \triangleq \left\{ (t, x) \in S \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \exists \eta \in \Pi_t(\nu) \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]: \right. \\ & \left. ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in S \quad \forall \xi \in [t, \vartheta]) \right\} \quad \forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Легко видеть (см. (5.4)), что

$$\begin{aligned} \mathbb{A}[M](F) & = \left\{ (t, x) \in F \mid \forall \nu \in \mathcal{E}_t \exists \eta \in \Pi_t(\nu) \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]: \right. \\ & \left. ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in F \quad \forall \xi \in [t, \vartheta]) \right\} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Ясно также, что $M \cap S \subset \mathbb{A}[M](S) \quad \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$. Отметим также очевидное свойство изотонности каждого ОПП.

Предложение 5.1. Если $M \in \mathcal{F}$ и $F \in \mathfrak{F}$, то $\mathbb{A}[M](F) \in \mathfrak{F}$.

Доказательство. Пусть $M \in \mathcal{F}$, $F \in \mathfrak{F}$ и $t_* \in T$. Тогда $F\langle t_* \rangle \in \mathbf{F}$. Выберем последовательность $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{A}[M](F)\langle t_* \rangle$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$, для которых $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow x_*$. Поскольку, в частности, $x_j \in F\langle t_* \rangle$ при $j \in \mathbb{N}$, то $x_* \in F\langle t_* \rangle$ и $(t_*, x_*) \in F$ (см. (5.2)). Пусть $\nu_* \in \mathcal{E}_{t_*}$. Используя (5.5) и (счетную) аксиому выбора, получаем для некоторых последовательностей

$$(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \Pi_{t_*}(\nu_*), \quad (\vartheta_i)_{i \in \mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow [t_*, \vartheta_o] \quad (5.6)$$

следующие положения:

$$((\vartheta_j, \varphi(\vartheta_j, t_*, x_j, \eta_j)) \in M) \& ((t, \varphi(t, t_*, x_j, \eta_j)) \in F \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_j]) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Учитывая (секвенциальную) компактность $\Pi_{t_*}(\nu_*)$ и $[t_*, \vartheta_o]$, полагаем последовательности (5.6) сходящимися: для некоторых $\eta_* \in \Pi_{t_*}(\nu_*)$ и $\vartheta_* \in [t_*, \vartheta_o]$

$$((\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \eta_*) \& ((\vartheta_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \vartheta_*). \quad (5.8)$$

Тогда $(\varphi(\cdot, t_*, x_i, \eta_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_*)$, а потому (см. (5.7)), используя замкнутость M , имеем $(\vartheta_*, \varphi(\vartheta_*, t_*, x_*, \eta_*)) \in M$. Пусть $t^* \in [t_*, \vartheta_*[$. В силу (5.8) имеем для некоторого $k^* \in \mathbb{N}$, что $t^* \in [t_*, \vartheta_j[\quad \forall j \in \overline{k^*, \infty}$. Тогда из (5.7) следует, что $\varphi(t^*, t_*, x_j, \eta_j) \in F\langle t^* \rangle \quad \forall j \in \overline{k^*, \infty}$. Поскольку $F\langle t^* \rangle \in \mathbf{F}$ и $(\varphi(t^*, t_*, x_j, \eta_j))_{j \in \mathbb{N}} \rightarrow \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_*)$, получаем, что $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_*) \in F\langle t^* \rangle$, а тогда $(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_*)) \in F$.

Коль скоро выбор t^* был произвольным, установлено, что $(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_*)) \in F \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_*[$. Получили, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \exists \eta \in \Pi_{t_*}(\nu) \quad \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M) \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in F \quad \forall t \in [t_*, \vartheta])$. Согласно (5.5) имеем $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$ и, как следствие, $x_* \in \mathbb{A}[M](F)\langle t_* \rangle$. Итак, $\mathbb{A}[M](F)\langle t_* \rangle \in \mathbf{F}$. Так как выбор t_* был произвольным, имеем из (5.3), что $\mathbb{A}[M](F) \in \mathfrak{F}$.

Предложение доказано.

Заметим, что при всяком выборе $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ и $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ непременно $((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \Rightarrow (M \in \mathcal{F})$. Аналогично, при $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$ и $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ имеем $((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F) \Rightarrow (F \in \mathfrak{F})$.

Предложение 5.2. Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(F_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $F \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$(((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((F_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow F)) \implies ((\mathbb{A}[M_i](F_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](F)). \quad (5.9)$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (5.9). Из определений легко следует, что для проверки (5.9) достаточно установить вложение

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{A}[M_i](F_i) \subset \mathbb{A}[M](F). \quad (5.10)$$

Пусть (t_*, x_*) — элемент множества в левой части (5.10). Тогда, в частности, $(t_*, x_*) \in F$. Пусть $\nu_* \in \mathcal{E}_{t_*}$. Тогда можно указать последовательности (5.6), для которых

$$((\vartheta_j, \varphi(\vartheta_j, t_*, x_*, \eta_j)) \in M_j) \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_j)) \in F_j \quad \forall t \in [t_*, \vartheta_j]) \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (5.11)$$

Полагаем без потери общности, что каждая из последовательностей (5.6) сходится: $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \eta^*$, $(\vartheta_i)_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow \vartheta^*$, где $\eta^* \in \Pi_{t_*}(\nu_*)$ и $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_o]$. Тогда

$$(\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_i))_{i \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta^*). \quad (5.12)$$

По предположению M есть пересечение всех M_j , $j \in \mathbb{N}$. Фиксируем $l \in \mathbb{N}$. Тогда $M_j \subset M_l \quad \forall j \in \overline{l, \infty}$. Из (5.12), используя замкнутость M_l , извлекаем (подобно предложению 5.1) свойство $(\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^*)) \in M_l$. Поскольку выбор l был произвольным, $(\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^*)) \in M$.

Выберем произвольно $t^* \in [t_*, \vartheta^*[$ и подберем $m_1 \in \mathbb{N}$ так, что $t^* \in [t_*, \vartheta_j[\forall j \in \overline{m_1, \infty}$. Тогда в силу (5.11) $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_j) \in F_j \langle t^* \rangle \forall j \in \overline{m_1, \infty}$. Пусть $r \in \mathbb{N}$. Введем $m_2 \triangleq \sup(\{m_1; r\}) \in \mathbb{N}$. Тогда, как легко видеть, $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_j) \in F_r \langle t^* \rangle \forall j \in \overline{m_2, \infty}$. Поскольку $F_r \langle t^* \rangle \in \mathbf{F}$, имеем в силу (5.12), что $\varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^*) \in F_r \langle t^* \rangle$, а потому (см. (5.2)) $(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^*)) \in F_r$. Поскольку выбор r был произвольным, $(t^*, \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta^*)) \in F$. Тем самым установлено, что $(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta^*)) \in F \forall t \in [t_*, \vartheta^*[$. Стало быть, получили, что $\forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*} \exists \eta \in \Pi_{t_*}(\nu) \exists \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]: ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M) \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \in F \forall t \in [t_*, \vartheta])$. Согласно (5.5) получаем включение $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$, чем и завершается доказательство (5.10).

Предложение доказано.

Из (4.10) и (5.5) легко следует, что $\forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \forall S \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}[M](S) = & \left\{ (t, x) \in S \mid \forall \nu \in \mathcal{E} \exists \eta \in \Pi[\nu] \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]: \right. \\ & \left. ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \& ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in S \forall \xi \in [t, \vartheta]) \right\}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

6. Метод итераций

Условимся о следующем достаточно традиционном определении: если X — непустое множество и $\alpha \in X^X$, то последовательность $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}_o} : \mathbb{N}_o \rightarrow X^X$ (степеней оператора α) определяем условиями $(\alpha^o(x) \triangleq x \forall x \in X) \& (\alpha^{k+1} = \alpha \circ \alpha^k \forall k \in \mathbb{N}_o)$. Реализуем данное соглашение при $X = \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\alpha = \mathbb{A}[M]$, где $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ выступает в роли параметра. Итак, полагаем, что $W_k(M, N) \triangleq \mathbb{A}[M]^k(N) \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \forall k \in \mathbb{N}_o$. Данное определение означает, что при $M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$(W_o(M, N) = N) \& (W_{s+1}(M, N) = \mathbb{A}[M](W_s(M, N)) \forall s \in \mathbb{N}_o). \quad (6.1)$$

Кроме того, полагаем в дальнейшем, что

$$W(M, N) \triangleq \bigcap_{k \in \mathbb{N}_o} W_k(M, N) \quad \forall M \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \quad (6.2)$$

Согласно (5.5) $\forall M_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \forall S_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \forall M_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \forall S_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$((M_1 \subset M_2) \& (S_1 \subset S_2)) \implies (\mathbb{A}[M_1](S_1) \subset \mathbb{A}[M_2](S_2)). \quad (6.3)$$

В дальнейшем нам потребуется лишь тот случай, когда в (6.3) $M_1 \in \mathcal{F}$ и $M_2 \in \mathcal{F}$ (мы им и будем ограничиваться за редкими исключениями). Из (6.3) по индукции следует, что (см. (6.1)) $\forall M_1 \in \mathcal{F} \forall N_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \forall M_2 \in \mathcal{F} \forall N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$

$$((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)) \implies (W_k(M_1, N_1) \subset W_k(M_2, N_2) \forall k \in \mathbb{N}_o). \quad (6.4)$$

В свою очередь, из (6.2) и (6.4) получаем следующее свойство: $\forall M_1 \in \mathcal{F} \forall N_1 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \forall M_2 \in \mathcal{F} \forall N_2 \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) ((M_1 \subset M_2) \& (N_1 \subset N_2)) \implies (W(M_1, N_1) \subset W(M_2, N_2))$.

Далее из (6.1) и предложения 5.1 вытекает, что

$$W_s(M, N) \in \mathfrak{F} \quad \forall M \in \mathcal{F} \quad \forall N \in \mathfrak{F} \quad \forall s \in \mathbb{N}_o. \quad (6.5)$$

В итоге из (6.2) и (6.5) получаем свойство $W(M, N) \in \mathfrak{F} \forall M \in \mathcal{F} \forall N \in \mathfrak{F}$.

Предложение 6.1. Если $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, то $W(M, N) = \mathbb{A}[M](W(M, N))$.

Доказательство. Имеем сходимость $(W_k(M, N))_{k \in \mathbb{N}} \downarrow W(M, N)$, а тогда из предложения 5.2 следует, что $(\mathbb{A}[M](W_k(M, N)))_{k \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](W(M, N))$. Как следствие

$$\mathbb{A}[M](W(M, N)) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{A}[M](W_k(M, N)) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_{k+1}(M, N) = W(M, N).$$

Предложение доказано.

Предложение 6.2. Если $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $H \in \mathcal{P}(N)$, то $(H = \mathbb{A}[M](H)) \implies (H \subset W(M, N))$.

Доказательство следует из (6.1)–(6.3).

Предложение 6.3. Если $M \in \mathcal{F}$, $N \in \mathfrak{F}$ и $L \in \mathcal{P}(N)$, то $(W(M, N) \subset L) \implies (W(M, N) = W(M, L))$.

Доказательство сводится к комбинации (6.3) и предложения 6.1.

Предложение 6.4. Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$(((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N)) \implies ((W_k(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W_k(M, N) \quad \forall k \in \mathbb{N}_o). \quad (6.6)$$

Доказательство. Пусть истинна посылка доказываемой импликации (6.6). Тогда, в частности, $N \in \mathfrak{F}$ и (см. (6.1)) $(W_o(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W_o(M, N)$. Пусть вообще число $m \in \mathbb{N}_o$ таково, что $(W_m(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W_m(M, N)$. Тогда (см. (6.5), предложение 5.2) имеем сходимость

$$(\mathbb{A}[M_i](W_m(M_i, N_i)))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow \mathbb{A}[M](W_m(M, N)). \quad (6.7)$$

Из (6.1), (6.7) следует, что $(W_{m+1}(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W_{m+1}(M, N)$. Поскольку выбор m был произвольным, имеем требуемое свойство $(W_k(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W_k(M, N) \quad \forall k \in \mathbb{N}_o$.

Предложение доказано.

Теперь уже вполне очевидна следующая

Теорема 6.1. Если $(M_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, $(N_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{F}^{\mathbb{N}}$, $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то

$$(((M_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow M) \& ((N_i)_{i \in \mathbb{N}} \downarrow N)) \implies ((W(M_i, N_i))_{i \in \mathbb{N}} \downarrow W(M, N)).$$

Теорема 6.1 означает, что отображение

$$(M, N) \longmapsto W(M, N): \mathcal{F} \times \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{F} \quad (6.8)$$

секвенциально непрерывно сверху в любой точке своей области определения. Значения отображения (6.8) именуем МПП, что согласуется (см. [15, гл. IV]) с определениями [2; 3].

7. Инвариантность пространства относительно замкнутых множеств

В настоящем разделе фиксируем $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\}$. Тогда

$$\mathbf{t}|_N = \{N \cap G: G \in \mathbf{t}\} \quad (7.1)$$

есть топология N , индуцированная [17, гл. 2] из $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$: $(N, \mathbf{t}|_N)$ является п/п $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$, и

$$\mathcal{F}|_N = \{N \cap F: F \in \mathcal{F}\}$$

является семейством всех п/м N , замкнутых в топологии (7.1). Заметим, что $\rho_N \triangleq (\rho|_N \times N)$ есть метрика N , порождающая топологию (7.1), а тогда

$$\text{cl}(S, \mathbf{t}|_N) = \{(t, x) \in N \mid \exists ((t_i, x_i))_{i \in \mathbb{N}} \in S^{\mathbb{N}}: (\rho((t_i, x_i), (t, x)))_{i \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0\} \quad \forall S \in \mathcal{P}(N). \quad (7.2)$$

Предложение 7.1. Если $F \in \mathcal{F}|_N$, то $\mathbb{A}[M](F) \in \mathcal{F}|_N$.

Схема доказательства. Пусть $F \in \mathcal{F}|_N$. Достаточно установить вложение

$$\text{cl}(\mathbb{A}[M](F), \mathbf{t}|_N) \subset \mathbb{A}[M](F). \quad (7.3)$$

Фиксируем $(t_*, x_*) \in \text{cl}(\mathbb{A}[M](F), \mathbf{t}|_N)$. Тогда $(t_*, x_*) \in N$ (см. (7.2)) и для некоторой последовательности $((t_*^{(i)}, x_*^{(i)}))_{i \in \mathbb{N}}$ в $\mathbb{A}[M](F)$ имеем сходимость $(\rho((t_*^{(i)}, x_*^{(i)}), (t_*, x_*)))_{i \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$. В частности, $(t_*^{(j)}, x_*^{(j)}) \in F \ \forall j \in \mathbb{N}$. Тогда по выбору F имеем из (7.2) свойство $(t_*, x_*) \in F$ и

$$(\forall m \in \mathbb{N} \exists j \in \overline{m, \infty}: t_*^{(j)} \leq t_*) \vee (\forall m \in \mathbb{N} \exists j \in \overline{m, \infty}: t_* < t_*^{(j)}). \quad (7.4)$$

Обе возможности в (7.4) по соображениям объема статьи рассмотрим в краткой форме.

1) Пусть $\forall m \in \mathbb{N} \exists j \in \overline{m, \infty}: t_*^{(j)} \leq t_*$. С учетом этого можно указать последовательность индексов $(j_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ со свойствами $(t_*^{(j_k)} \leq t_*) \& (m < j_m) \ \forall m \in \mathbb{N}$. Разумеется, при этом

$$((t_*^{(j_k)})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow t_*) \& ((x_*^{(j_k)})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_*). \quad (7.5)$$

Далее используется (5.13). Пусть $\nu^o \in \mathcal{E}$, $\nu_o \in \mathcal{E}_{t_*}$ таково, что $\nu_o \stackrel{\Delta}{=} (\nu^o|_{\mathcal{D}_{t_*}})$. С учетом (счетной) аксиомы выбора имеем для некоторых последовательностей $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \Pi[\nu^o]^{\mathbb{N}}$ и $(\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \prod_{k \in \mathbb{N}} [t_*^{(j_k)}, \vartheta_o]$ свойство:

$$((\vartheta_m, \tilde{\varphi}(\vartheta_m, t_*^{(j_m)}, x_*^{(j_m)}, \eta_m)) \in M) \& ((t, \tilde{\varphi}(t, t_*^{(j_m)}, x_*^{(j_m)}, \eta_m)) \in F \ \forall t \in [t_*^{(j_m)}, \vartheta_m]) \ \forall m \in \mathbb{N}. \quad (7.6)$$

Пусть $\tilde{t}_*^{(k)} \stackrel{\Delta}{=} t_*^{(j_k)}$ и $\tilde{x}_*^{(k)} \stackrel{\Delta}{=} x_*^{(j_k)}$ при $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что $(\tilde{t}_*^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow t_*$ и $(\tilde{x}_*^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_*$ в силу (7.5). Из (7.6) следует, что

$$((\vartheta_m, \tilde{\varphi}(\vartheta_m, \tilde{t}_*^{(m)}, \tilde{x}_*^{(m)}, \eta_m)) \in M) \& ((t, \tilde{\varphi}(t, \tilde{t}_*^{(m)}, \tilde{x}_*^{(m)}, \eta_m)) \in F \ \forall t \in [\tilde{t}_*^{(m)}, \vartheta_m]). \quad (7.7)$$

С учетом компактности $\Pi[\nu^o]$ и T можно полагать без потери общности, что

$$((\eta_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \tilde{\eta}) \& ((\vartheta_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow \tilde{\vartheta}), \quad (7.8)$$

где $\tilde{\eta} \in \Pi[\nu^o]$ и $\tilde{\vartheta} \in T$. Ясно, что $(\eta_k|_{\mathcal{C}_{t_*}}) \in \Pi_{t_*}(\nu_o)$, а тогда (см. (7.8)) $(\tilde{\eta}|_{\mathcal{C}_{t_*}}) \in \Pi_{t_*}(\nu_o)$, причем $((\eta_k|_{\mathcal{C}_{t_*}}))_{k \in \mathbb{N}}$ *-слабо сходится к $(\tilde{\eta}|_{\mathcal{C}_{t_*}})$. Полагая при $k \in \mathbb{N}$, что $y_k \stackrel{\Delta}{=} \tilde{\varphi}(\cdot, \tilde{t}_*^{(k)}, \tilde{x}_*^{(k)}, \eta_k)$, имеем, что (см. (4.10)) $(y_k|_{[t_*, \vartheta_o]}) = \varphi(\cdot, t_*, y^{(k)}, (\eta_k|_{\mathcal{C}_{t_*}}))$, где $y^{(k)} \stackrel{\Delta}{=} y_k(t_*)$. Легко видеть (см. (7.8)), что $\tilde{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_o]$ и для некоторого $a \in]0, \infty[$ имеем $\|\tilde{x}_*^{(k)}\| \leq a \ \forall k \in \mathbb{N}$. С учетом этого нетрудно показать, используя (4.11), что $(y^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow x_*$, а потому

$$(\varphi(\cdot, t_*, y^{(k)}, (\eta_k|_{\mathcal{C}_{t_*}})))_{k \in \mathbb{N}} \rightrightarrows \varphi(\cdot, t_*, x_*, (\tilde{\eta}|_{\mathcal{C}_{t_*}})). \quad (7.9)$$

Учитывая (7.7)–(7.9), устанавливаем, что

$$((\tilde{\vartheta}, \tilde{\varphi}(\tilde{\vartheta}, t_*, x_*, \tilde{\eta})) \in M) \& ((t, \tilde{\varphi}(t, t_*, x_*, \tilde{\eta})) \in F \ \forall t \in [t_*, \tilde{\vartheta}]) \quad (7.10)$$

(отдельно рассматриваются случаи $\tilde{\vartheta} = t_*$ и $t_* < \tilde{\vartheta}$). Поскольку выбор ν^o был произвольным, установлено (см. (7.10)), что $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$ в рассматриваемом сейчас случае 1).

2) Случай, когда имеет место вторая возможность в (7.4), исследуется подобными рассуждениями с одной особенностью: программные движения, стартующие из позиций вида (t^*, x^*) , где $t^* > t_*$, продолжают константой x^* до вектор-функций из $C_n([t_*, \vartheta_o])$. Для полученных склеек прореженной должным образом последовательности обобщенных траекторий сопоставляется соответствующий равномерный предел, который в силу условия обобщенной единственности оказывается обобщенной траекторией (скользящим режимом). Опуская подробности, имеем и в случае 2) $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](F)$, чем завершается проверка (7.3).

Предложение доказано.

Предложение 7.2. *Справедливо следующее свойство относительной замкнутости:*
 $W_k(M, N) \in \mathcal{F}|_N \quad \forall k \in \mathbb{N}_o$.

Доказательство получается комбинацией (6.1) и предложения 7.1. Из (6.2) следует

Теорема 7.1. *Множество $W(M, N)$ замкнуто в топологии (7.1): $W(M, N) \in \mathcal{F}|_N$.*

Полагаем дополнительно (см. (5.4)) до конца настоящего раздела, что $N \in \mathcal{F}$, т.е. N замкнуто в топологии \mathbf{t} . Итак, пусть N есть непустое замкнутое в $(T \times \mathbb{R}^n, \mathbf{t})$ п/м $T \times \mathbb{R}^n$. Тогда $\mathcal{F}|_N \subset \mathcal{F}$, а потому из предложения 7.2 следует, что $W_k(M, N) \in \mathcal{F} \quad \forall k \in \mathbb{N}_o$. В свою очередь, из теоремы 7.1 имеем важное свойство замкнутости МПП:

$$W(M, N) \in \mathcal{F}. \quad (7.11)$$

Заметим, что свойство (7.11) для случая “липшицевой” по x системы (3.1) было установлено при доказательстве теоремы об альтернативе (см. [2; 3]).

8. Топологические свойства множеств позиционного поглощения, 1

Вернемся к отображению (6.8), свойства которого будем рассматривать в “точках” (M, N) , $M \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, $N \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$. Используя (5.1), полагаем $\rho(z; H) \triangleq \inf(\{\rho(z, h) : h \in H\}) \quad \forall H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall z \in T \times \mathbb{R}$ (введено расстояние от точки до множества). Тогда имеем, что $S_o(F, \varepsilon) \triangleq \{z \in T \times \mathbb{R}^n \mid \rho(z; F) \leq \varepsilon\} \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\} \quad \forall F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\} \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty[$. Легко видеть, что при $F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ в виде $(S_o(F, 1/k))_{k \in \mathbb{N}}$ реализуется последовательность в $\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ со свойством

$$(S_o(F, 1/k))_{k \in \mathbb{N}} \downarrow F. \quad (8.1)$$

Поэтому из теоремы 6.1 получаем (см. (8.1)), что $\forall M \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\} \quad \forall N \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$

$$(W(S_o(M, 1/k), S_o(N, 1/k)))_{k \in \mathbb{N}} \downarrow W(M, N). \quad (8.2)$$

Мы называем УПЗМ $(M, N) \in (\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\})$ *регулярно ограниченной*, если $W(M, N) \neq \emptyset$ и $\exists \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists \mathbf{d} \in]0, \infty[: \|x\| \leq \mathbf{d} \quad \forall (t, x) \in W(S_o(M, \varepsilon), S_o(N, \varepsilon))$. Заметим, что условие регулярной ограниченности зачастую допускает непосредственную проверку в терминах МПИ, т.е. в терминах (6.1). Условие $W(M, N) \neq \emptyset$ всегда имеет место при $M \cap N \neq \emptyset$ (см. разд. 5). С учетом теоремы 6.1 достаточно просто устанавливается (см. (5.4), (8.2)) следующая

Теорема 8.1. *Если $(M, N) \in (\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}) \times (\mathcal{F} \setminus \{\emptyset\})$ есть регулярно ограниченная УПЗМ, то $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists \delta \in]0, \infty[\quad \forall \tilde{M} \in \mathcal{F} \quad \forall \tilde{N} \in \mathcal{F}$*

$$((M \subset \tilde{M} \subset S_o(M, \delta)) \& (N \subset \tilde{N} \subset S_o(N, \delta))) \implies (W(M, N) \subset W(\tilde{M}, \tilde{N}) \subset S_o(W(M, N), \varepsilon)).$$

Итак, зависимость (6.8) обладает свойством, имеющим смысл непрерывности сверху в каждой точке области определения, являющейся регулярно ограниченной УПЗМ.

З а м е ч а н и е 8.1. Зависимость (6.8) не обладает, вообще говоря, непрерывностью в естественном смысле даже в “точках”, являющихся регулярно ограниченными УПЗМ. Рассмотрим скалярную систему

$$\dot{x} = (1 - t)u + v, \quad |u| \leq 2, \quad |v| \leq 1$$

при $t_o = 0$ и $\vartheta_o = 1$. Итак, $n = 1$, $T = [0, 1]$. Полагаем (в примере) $N = T \times \mathbb{R}$, $M_c = \{1\} \times [-c, c]$ при $c \in [0, \infty[$ (рассматриваем задачу с фиксированным моментом окончания). Напомним

конкретизации некоторых понятий [15, гл. V, § 1], связанных с задачей на минимакс-максимин функционала $x(\cdot) \mapsto |x(1)|$, где $x(\cdot) \in C(T)$. Здесь

$$\varepsilon^o(t, x) = \varepsilon(t, x) = |x| + t(1 - t) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}, \quad (8.3)$$

$$h(t) = t(1 - t) \quad \forall t \in T,$$

$$\mathbf{c}_o(t, x) = \sup(\{\varepsilon^o(t, x); \max_{t \leq \tau \leq 1} h(\tau)\}) \quad \forall (t, x) \in T \times \mathbb{R}$$

(\mathbf{c}_o определяет [15, теорема 5.1.1] цену игры на минимакс-максимин упомянутого терминального функционала в классе чистых позиционных стратегий [2]). Тогда при $c \geq 0$

$$W(M_c, N) = \{(t, x) \in T \times \mathbb{R} \mid \mathbf{c}_o(t, x) \leq c\} \quad (8.4)$$

(множество Лебега функции цены). Имеем при $\theta \in [0, 1/2]$, что

$$\max_{0 \leq t \leq 1} h(t) = \max_{\theta \leq t \leq 1} h(t) = 1/4.$$

Получаем при $t \in [0, 1/2]$ и $x \in \mathbb{R}$, что $\varepsilon^o(t, x) \leq |x| + 1/4$ и

$$\mathbf{c}_o(t, x) = \sup(\{\varepsilon^o(t, x); 1/4\}). \quad (8.5)$$

Если же $t \in [1/2, 1]$, то $h(t) \geq h(\tau) \quad \forall \tau \in [t, 1]$. Поэтому $\mathbf{c}_o(t, x) = \varepsilon^o(t, x) \quad \forall (t, x) \in [1/2, 1] \times \mathbb{R}$. Пусть $c \in [0, 1/4[$. Тогда в силу (8.4), (8.5)

$$([0, 1/2[\times \mathbb{R}) \cap W(M_c, N) = \emptyset. \quad (8.6)$$

Если же $c \in [1/4, \infty[$, то с учетом (8.3), (8.5) получаем, что

$$[0, 1/2] \times \{0\} \subset W(M_c, N) \quad (8.7)$$

(из (8.3) имеем, что $\varepsilon^o(t, 0) = h(t) \leq 1/4$, если $t \in [0, 1/2]$). Итак (см. (8.6), (8.7)), зависимость

$$c \mapsto W(M_c, N): [0, 1/4] \longrightarrow \mathcal{P}(T \times \mathbb{R})$$

имеет в точке $1/4$ скачок (при приближении к $1/4$ снизу). Заметим, что $\emptyset \neq M_c \subset W(M_c, N)$ при $c \geq 0$, а УПЗМ $(M_c, N) = (M_c, T \times \mathbb{R})$ регулярно ограничена. Зависимость (6.8) не обладает, следовательно, непрерывностью в точке $(M_c, T \times \mathbb{R})$ при $c = 1/4$, хотя согласно теореме 8.1 и является непрерывной сверху.

9. Топологические свойства множеств позиционного поглощения, 2

В настоящем разделе фиксируем множества $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$, что соответствует общей схеме исследования (см. теорему 6.1). Условимся о некоторых обозначениях. Так, при $H \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $x \in \mathbb{R}^n$ полагаем, что $(\|\cdot\| - \inf)[H](x) \triangleq \inf(\{\|x - h\| : h \in H\})$. С учетом этого введем при $L \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in [0, \infty[$ множество

$$B_n^o(L, \varepsilon) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\|\cdot\| - \inf)[L](x) \leq \varepsilon\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n). \quad (9.1)$$

Если $\Lambda \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$, то полагаем, что $\text{Supp}(\Lambda) \triangleq \{t \in T \mid \Lambda\langle t \rangle \neq \emptyset\}$ (см. (5.2)). При $t \in \text{Supp}(\Lambda)$ имеем $\Lambda\langle t \rangle \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, и согласно (9.1) определено $B_n^o(\Lambda\langle t \rangle, \varepsilon) \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^n)$, где $\varepsilon \in [0, \infty[$. Тогда $\forall H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty[$

$$\mathbb{S}(H, \varepsilon) \triangleq \{(t, x) \in \text{Supp}(H) \times \mathbb{R}^n \mid x \in B_n^o(H\langle t \rangle, \varepsilon)\} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n). \quad (9.2)$$

При этом $H \subset \mathbb{S}(H, \varepsilon)$, если $H \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon > 0$. Кроме того, отметим следующее свойство: если $\mathbb{H} \in \mathcal{P}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon \in [0, \infty[$, то

$$(\mathbb{S}(\mathbb{H}, \varepsilon)\langle t \rangle = B_n^o(\mathbb{H}\langle t \rangle, \varepsilon) \quad \forall t \in \text{Supp}(\mathbb{H})) \ \& \ (\mathbb{S}(\mathbb{H}, \varepsilon)\langle t \rangle = \emptyset \quad \forall t \in T \setminus \text{Supp}(\mathbb{H})).$$

С учетом (9.1) получаем теперь, что $\mathbb{S}(H, \varepsilon) \in \mathfrak{F} \quad \forall H \in \mathcal{P}'(T \times \mathbb{R}^n) \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty[$. В частности, $\mathbb{S}(F, \varepsilon) \in \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\} \quad \forall F \in \mathfrak{F} \setminus \{\emptyset\} \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty[$. Возвращаясь к МПП, отметим, что

$$\mathbb{S}(W(M, N), \varepsilon) \in \mathfrak{F} \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty[\quad (9.3)$$

(заметим с учетом (9.2), что $\mathbb{S}(\emptyset, \varepsilon) = \emptyset \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty[$).

Предложение 9.1. Пусть $M \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$, $N \in \mathfrak{F}$ и $t_* \in \text{Supp}(W(M, N))$. Пусть, кроме того,

$$\exists \kappa \in]0, \infty[\quad \exists \mathbf{d} \in]0, \infty[: \|x\| \leq \mathbf{d} \quad \forall x \in W(S_o(M, \kappa), \mathbb{S}(N, \kappa))\langle t_* \rangle. \quad (9.4)$$

Тогда $\forall \varepsilon \in]0, \infty[\quad \exists \delta \in]0, \infty[\quad \forall \widetilde{M} \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\} \quad \forall \widetilde{N} \in \mathfrak{F}$

$$\begin{aligned} ((M \subset \widetilde{M} \subset S_o(M, \delta)) \ \& \ (N \subset \widetilde{N} \subset \mathbb{S}(N, \delta))) \implies \\ (W(M, N)\langle t_* \rangle \subset W(\widetilde{M}, \widetilde{N})\langle t_* \rangle \subset B_n^o(W(M, N)\langle t_* \rangle, \varepsilon)). \end{aligned}$$

Доказательство извлекается из теоремы 6.1 с учетом (8.1), (9.3) и (9.4). Предложение 9.1 подобно в смысловом отношении теореме 8.1 и характеризует свойство непрерывности сверху сечений МПП во многих практически интересных случаях. Наиболее существенным представляется вариант, для которого $t_* = t_o$.

10. Многозначные квазистратегии и множества позиционного поглощения

В настоящем разделе будет показано, что МПП исчерпывает множество позиций, для которых задача наведения разрешима в классе идеализированных процедур управления — многозначных квазистратегий. Заметим, что реализуемые процедуры управления с поводырем [2], позволяющие “отслеживать” траектории, порождаемые упомянутыми квазистратегиями, рассматривались в [24]. Сами квазистратегии определяем, следуя [8], в виде м/ф на пространствах мер. Используем при этом конструкции разд. 4. Если $t_* \in T$, то

$$\begin{aligned} \widetilde{A}_{t_*} \triangleq \left\{ \alpha \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)) \mid \forall \nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall \nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*} \quad \forall \theta \in [t_*, \vartheta_o] \quad ([\nu_1; \theta] = [\nu_2; \theta]) \implies \right. \\ \left. (\{[\eta; \theta] : \eta \in \alpha(\nu_1)\} = \{[\eta; \theta] : \eta \in \alpha(\nu_2)\}) \right\}. \quad (10.1) \end{aligned}$$

Элементы (10.1) называем *квазистратегиями* на отрезке $[t_*, \vartheta_o]$. При этом

$$\widetilde{\Pi}_t(\alpha) \triangleq \bigcup_{\nu \in \mathcal{E}_t} \alpha(\nu) \in \mathcal{P}'(\mathcal{H}_t) \quad \forall t \in T \quad \forall \alpha \in \widetilde{A}_t. \quad (10.2)$$

Среди всех квазистратегий выделяем те, у которых множества вида (10.2) *-слабо замкнуты. В этой связи введем при $t \in T$ семейство \mathcal{F}_t^* всех (секвенциально) *-слабо замкнутых п/м \mathcal{H}_t . Тогда $\widetilde{A}_t^\Pi \triangleq \{\alpha \in \widetilde{A}_t \mid \widetilde{\Pi}_t(\alpha) \in \mathcal{F}_t^*\} \quad \forall t \in T$. Отметим, что как легко видеть, $\Pi_t(\cdot) = (\Pi_t(\nu))_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \widetilde{A}_t^\Pi \quad \forall t \in T$. Поэтому при $t_* \in T$ имеем, что $\emptyset \neq \widetilde{A}_{t_*}^\Pi \subset \widetilde{A}_{t_*}$; элементы $\widetilde{A}_{t_*}^\Pi$ называем *квазипрограммами* на отрезке $[t_*, \vartheta_o]$.

Предложение 10.1. Если $t \in T$, $\alpha \in \widetilde{A}_t$, $\nu \in \mathcal{E}_t$, $\eta \in \alpha(\nu)$ и $\theta \in [t, \vartheta_o]$, то

$$(\{\bar{\eta} \in \Pi_\theta(\bar{\nu}) \mid \eta \perp \bar{\eta} \in \alpha(\nu \bowtie \bar{\nu})\})_{\bar{\nu} \in \mathcal{E}_\theta} \in \widetilde{A}_\theta.$$

Доказательство фактически следует из (10.1) и определений разд. 4 (см. (4.5)–(4.7)).

Фиксируем в данном разделе $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathfrak{F}$. Полагаем далее, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \triangleq \left\{ \eta \in \mathcal{H}_t \mid \forall \vartheta \in [t, \vartheta_o] \ ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \implies \right. \\ \left. (\{\xi \in [t, \vartheta[\mid (\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \notin N\} \neq \emptyset) \right\} \quad \forall (t,x) \in N. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Предложение 10.2. Если $k \in \mathbb{N}_o$, $(t,x) \in N \setminus W_k(M,N)$ и $\alpha \in \tilde{A}_t$, то

$$\tilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \neq \emptyset. \quad (10.4)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение

$$\mathfrak{N} \triangleq \left\{ k \in \mathbb{N}_o \mid \tilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \neq \emptyset \quad \forall (t,x) \in N \setminus W_k(M,N) \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_t \right\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}_o). \quad (10.5)$$

Поскольку (см. (6.1)) $N = W_k(M,N)|_{k=0}$, имеем из (10.5), что $0 \in \mathfrak{N}$. Пусть вообще $m \in \mathfrak{N}$. Тогда $m \in \mathbb{N}_o$ и согласно (10.5)

$$\tilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t,x) \neq \emptyset \quad \forall (t,x) \in N \setminus W_m(M,N) \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_t. \quad (10.6)$$

Выберем произвольно $(t_*, x_*) \in N \setminus W_{m+1}(M,N)$. Опуская очевидный (см. (10.6)) случай $(t_*, x_*) \notin W_m(M,N)$, ограничимся рассмотрением ситуации, когда

$$(t_*, x_*) \in W_m(M,N) \setminus W_{m+1}(M,N). \quad (10.7)$$

С учетом (5.5) и (6.1) получаем, что для некоторой меры $\nu_* \in \mathcal{E}_{t_*}$ реализуется свойство: $\forall \eta \in \Pi_{t_*}(\nu_*) \quad \forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta)) \in M) \implies (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta)) \notin W_m(M,N)). \quad (10.8)$$

Покажем теперь, что

$$\tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_{t_*}. \quad (10.9)$$

Действительно, допустим противное. Пусть $\alpha_o \in \tilde{A}_{t_*}$ обладает свойством

$$\tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_o) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) = \emptyset. \quad (10.10)$$

Заметим в связи с (10.10), что $\alpha_o \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu))$ и, следовательно, α_o есть м/ф из \mathcal{E}_{t_*} в \mathcal{H}_{t_*} с непустыми значениями. В частности, $\alpha_o(\nu_*) \neq \emptyset$ и $\alpha_o(\nu_*) \subset \Pi_{t_*}(\nu_*)$. Выберем и зафиксируем $\eta_o \in \alpha_o(\nu_*)$. Согласно (10.8) $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_o)) \in M) \implies (\exists t \in [t_*, \vartheta[: (t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_o)) \notin W_m(M,N)). \quad (10.11)$$

С другой стороны, $\eta_o \in \tilde{\Pi}_{t_*}(\alpha_o)$, а потому в силу (10.10) $\eta_o \notin \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*)$. В этом случае для некоторого $\vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_o)) \in M) \& (\{\xi \in [t_*, \vartheta[\mid (\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \eta_o)) \notin N\} = \emptyset). \quad (10.12)$$

Во всяком случае, $\Theta \triangleq \{\vartheta \in [t_*, \vartheta_o] \mid (\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_o)) \in M\} \neq \emptyset$ и, в силу замкнутости M , имеем, что $\bar{\vartheta} \triangleq \inf(\Theta) \in \Theta$, а тогда $\bar{\vartheta} \in [t_*, \vartheta_o]$ и при этом (см. (10.12))

$$((\bar{\vartheta}, \varphi(\bar{\vartheta}, t_*, x_*, \eta_o)) \in M) \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_o)) \in N \quad \forall t \in [t_*, \bar{\vartheta}[). \quad (10.13)$$

С учетом (10.11) и (10.13) имеем для некоторого $t^* \in [t_*, \bar{\vartheta}]$ свойство

$$(t^*, x^*) \in N \setminus W_m(M, N), \quad (10.14)$$

где $x^* = \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_o)$. Согласно предложению 10.1

$$\alpha^o \triangleq (\{\eta \in \Pi_{t^*}(\nu) \mid \eta_o \perp \eta \in \alpha_o(\nu_* \bowtie \nu)\}_{\nu \in \mathcal{E}_{t^*}}) \in \tilde{A}_{t^*}. \quad (10.15)$$

Тогда имеем, в частности, что непременно $\alpha^o \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t^*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t^*}(\nu))$, а потому α^o есть м/ф из \mathcal{E}_{t^*} в \mathcal{H}_{t^*} . При этом согласно (10.15)

$$\alpha^o(\nu) = \{\eta \in \Pi_{t^*}(\nu) \mid \eta_o \perp \eta \in \alpha_o(\nu_* \bowtie \nu)\} \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t^*}. \quad (10.16)$$

Из (10.6), (10.14) и (10.15) получаем, что $\tilde{\Pi}_{t^*}(\alpha^o) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t^*, x^*) \neq \emptyset$. С учетом этого выберем $\eta^o \in \tilde{\Pi}_{t^*}(\alpha^o) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t^*, x^*)$. Тогда для некоторого $\nu^o \in \mathcal{E}_{t^*}$ имеем, что $\eta^o \in \alpha^o(\nu^o)$, а потому $\eta^o \in \Pi_{t^*}(\nu^o)$ и, в частности, $\eta^o \in \mathcal{H}_{t^*}$. При этом (см. (10.16))

$$\eta^{oo} \triangleq \eta_o \perp \eta^o \in \alpha_o(\nu_* \bowtie \nu^o). \quad (10.17)$$

Заметим, что согласно (4.12), (4.13)

$$\begin{aligned} (\varphi(t, t_*, x_*, \eta^{oo}) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_o) \quad \forall t \in [t_*, t^*]) \& \\ (\varphi(t, t_*, x_*, \eta^{oo}) = \varphi(t, t^*, x^*, \eta^o) \quad \forall t \in [t^*, \vartheta_o]). \end{aligned} \quad (10.18)$$

По выбору $\bar{\vartheta}$ имеем, что $\forall \vartheta \in [t_*, \vartheta_o]$ $((\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta_o)) \in M) \implies (\bar{\vartheta} \leq \vartheta)$. С другой стороны, по выбору η^o получаем, что $\forall \vartheta \in [t^*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta, \varphi(\vartheta, t^*, x^*, \eta^o)) \in M) \implies (\{t \in [t^*, \vartheta] \mid (t, \varphi(t, t^*, x^*, \eta^o)) \notin N\} \neq \emptyset). \quad (10.19)$$

Выберем произвольно $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_o]$, для которого $(\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^{oo})) \in M$. Тогда (см. (10.18)) по выбору t^* и определению $\bar{\vartheta}$ имеем, что $\vartheta^* \in [t^*, \vartheta_o]$. При этом в силу (10.18) $\varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^{oo}) = \varphi(\vartheta^*, t^*, x^*, \eta^o)$, а тогда для некоторого $t^\sharp \in [t^*, \vartheta^*]$ из (10.19) следует, что $(t^\sharp, \varphi(t^\sharp, t^*, x^*, \eta^o)) \notin N$. Но тогда $(t^\sharp, \varphi(t^\sharp, t_*, x_*, \eta^{oo})) \notin N$. Установлена импликация

$$((\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta^{oo})) \in M) \implies (\exists t \in [t_*, \vartheta^*]: (t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta^{oo})) \notin N).$$

Поскольку выбор ϑ^* был произвольным, получаем, что $\eta^{oo} \in \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*)$. Вместе с тем $\nu_* \bowtie \nu^o \in \mathcal{E}_{t^*}$, а потому (см. (10.17)) $\eta^{oo} \in \tilde{\Pi}_{t^*}(\alpha_o)$ и вопреки (10.10) $\tilde{\Pi}_{t^*}(\alpha_o) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) \neq \emptyset$. Противоречие показывает, что на самом деле имеет место (10.9) и при условии (10.7), чем завершается обоснование свойства $\tilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t, x) \neq \emptyset \quad \forall (t, x) \in N \setminus W_{m+1}(M, N) \quad \forall \alpha \in \tilde{A}_t$. В силу (10.5) имеем, что $m+1 \in \mathfrak{N}$. Получили, что $(0 \in \mathfrak{N}) \& (k+1 \in \mathfrak{N} \quad \forall k \in \mathfrak{N})$. В итоге $\mathfrak{N} = \mathbb{N}_o$; (10.4) справедливо для всех $k \in \mathbb{N}_o$, $(t, x) \in N \setminus W_k(M, N)$ и $\alpha \in \tilde{A}_t$.

Предложение доказано.

Следствие 10.1. Если $(t, x) \in N \setminus W(M, N)$ и $\alpha \in \tilde{A}_t$, то $\tilde{\Pi}_t(\alpha) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t, x) \neq \emptyset$.

При условии $(t, x) \in N$ полагаем далее, что

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{M,N}(t, x) \triangleq \left\{ \eta \in \mathcal{H}_t \mid \exists \theta \in [t, \vartheta_o]: ((\theta, \varphi(\theta, t, x, \eta)) \in M) \& \right. \\ \left. ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in N \quad \forall \xi \in [t, \theta]) \right\}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Легко видеть, что (см. (10.3), (10.20)) справедливо следующее свойство: $\forall (t_*, x_*) \in N$

$$(\mathcal{S}_{M,N}(t_*, x_*) \cap \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) = \emptyset) \& (\mathcal{S}_{M,N}(t_*, x_*) \cup \mathfrak{H}_{M,N}(t_*, x_*) = \mathcal{H}_{t_*}). \quad (10.21)$$

Если $(t, x) \in N$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$, то полагаем, что

$$\pi_{t,x}^{(W)} \langle \nu | M, N \rangle \triangleq \left\{ \eta \in \Pi_t(\nu) \mid \exists \vartheta \in [t, \vartheta_o]: ((\vartheta, \varphi(\vartheta, t, x, \eta)) \in M) \& \right. \\ \left. ((\xi, \varphi(\xi, t, x, \eta)) \in W(M, N) \quad \forall \xi \in [t, \vartheta]) \right\}. \quad (10.22)$$

Теперь посредством (10.22) определяем следующие м/ф:

$$\pi_{t,x}^{(W)} \langle \cdot | M, N \rangle \triangleq (\pi_{t,x}^{(W)} \langle \nu | M, N \rangle)_{\nu \in \mathcal{E}_t} \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_t} \mathcal{P}(\Pi_t(\nu)) \quad \forall (t, x) \in N. \quad (10.23)$$

Предложение 10.3. Если $(t_*, x_*) \in W(M, N)$, то $\pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \cdot | M, N \rangle \in \tilde{A}_{t_*}^{\Pi}$.

Доказательство. Пусть $(t_*, x_*) \in W(M, N)$. Тогда $(t_*, x_*) \in N$ и посредством (10.22), (10.23) определена м/ф $\pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \cdot | M, N \rangle$. С учетом предложения 6.1 имеем $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}[M](W(M, N))$. Поэтому (см. (5.5)) $\pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \nu | M, N \rangle \neq \emptyset \quad \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}$. Как следствие

$$\pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \cdot | M, N \rangle \in \prod_{\nu \in \mathcal{E}_{t_*}} \mathcal{P}'(\Pi_{t_*}(\nu)).$$

Выберем произвольно $\nu_1 \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\nu_2 \in \mathcal{E}_{t_*}$ и $t^* \in [t_*, \vartheta_o]$. Пусть при этом

$$[\nu_1; t^*] = [\nu_2; t^*]. \quad (10.24)$$

Покажем, что

$$\{[\eta; t^*]: \eta \in \pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \nu_1 | M, N \rangle\} \subset \{[\eta; t^*]: \eta \in \pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \nu_2 | M, N \rangle\}. \quad (10.25)$$

Обозначим для краткости множества в левой и правой частях (10.17) через \mathbf{H}_1 и \mathbf{H}_2 соответственно. Пусть $\gamma_1 \in \mathbf{H}_1$, а $\eta_1 \in \pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \nu_1 | M, N \rangle$ обладает свойством $\gamma_1 = [\eta_1; t^*]$. Тогда $\gamma_1(C) = \eta_1(C)$ при $C \in \mathcal{C}_{t_*}^{(t^*)}$. С другой стороны, из (10.22) имеем для некоторого $\vartheta^* \in [t_*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta_1)) \in M) \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1)) \in W(M, N) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta^*]). \quad (10.26)$$

Отдельно рассмотрим случаи $\vartheta^* \leq t^*$ и $t^* < \vartheta^*$.

1) Пусть $\vartheta^* \leq t^*$, т.е. $\vartheta^* \in [t_*, t^*]$. Для $\bar{\nu}_2 \triangleq (\nu_2 | \mathcal{D}_{t_*}) \in \mathcal{E}_{t_*}$ имеем, что $\Pi_{t^*}(\bar{\nu}_2) \neq \emptyset$. Выберем произвольно $\bar{\eta}_2 \in \Pi_{t^*}(\bar{\nu}_2)$. Тогда $\eta_1 \perp \bar{\eta}_2 \in \Pi_{t^*}(\nu_2)$ (учитываем (10.24)) и, как легко видеть,

$$\gamma_1 = [\eta_1 \perp \bar{\eta}_2; t^*]. \quad (10.27)$$

С учетом этого имеем из (4.12), что

$$\varphi(t, t_*, x_*, \eta_1) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1 \perp \bar{\eta}_2) \quad \forall t \in [t_*, t^*]. \quad (10.28)$$

В частности, из (10.26), (10.28) получаем следующие свойства:

$$((\vartheta^*, \varphi(\vartheta^*, t_*, x_*, \eta_1 \perp \bar{\eta}_2)) \in M) \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_1 \perp \bar{\eta}_2)) \in W(M, N) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta^*])$$

(учитываем, что $[t_*, \vartheta^*] \subset [t_*, t^*]$). Это означает, что $\eta_1 \perp \bar{\eta}_2 \in \pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \nu_2 | M, N \rangle$, откуда (см. (10.27)) легко следует, что $\gamma_1 \in \mathbf{H}_2$ в случае 1). Итак, $(\vartheta^* \leq t^*) \Rightarrow (\gamma_1 \in \mathbf{H}_2)$.

2) Пусть $t^* < \vartheta^*$. Полагая $x^* \triangleq \varphi(t^*, t_*, x_*, \eta_1)$, имеем в силу (10.26), что $(t^*, x^*) \in W(M, N)$. Поэтому (см. предложение 6.1) $(t^*, x^*) \in \mathbb{A}[M](W(M, N))$. Тогда, в частности, имеем для

$\bar{\nu}_2 = (\nu_2 | \mathcal{D}_{t^*})$ (см. случай 1), где введено данное обозначение), что при некотором выборе $\eta^\natural \in \Pi_{t^*}(\bar{\nu}_2)$ и $\vartheta^\natural \in [t^*, \vartheta_o]$

$$((\vartheta^\natural, \varphi(\vartheta^\natural, t^*, x^*, \eta^\natural)) \in M) \& ((\xi, \varphi(\xi, t^*, x^*, \eta^\natural)) \in W(M, N) \quad \forall \xi \in [t^*, \vartheta^\natural]). \quad (10.29)$$

При этом $\eta_2 \triangleq \eta_1 \perp \eta^\natural \in \mathcal{H}_{t^*}$. С учетом (10.24) имеем $\eta_2 \in \Pi_{t^*}(\nu_2)$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} (\varphi(t, t_*, x_*, \eta_1) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_2) \quad \forall t \in [t_*, t^*]) \& \\ (\varphi(t, t_*, x_*, \eta_2) = \varphi(t, t^*, x^*, \eta^\natural) \quad \forall t \in [t^*, \vartheta_o]). \end{aligned} \quad (10.30)$$

Из (10.26), (10.29) и (10.30) вытекает, что $((\vartheta^\natural, \varphi(\vartheta^\natural, t_*, x_*, \eta_2)) \in M) \& ((t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_2)) \in W(M, N) \quad \forall t \in [t_*, \vartheta^\natural])$. В итоге $\eta_2 \in \pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \nu_2 | M, N \rangle$, а потому $[\eta_2; t^*] \in \mathbf{H}_2$. Однако, $\gamma_1 = [\eta_2; t^*]$ и, стало быть, $\gamma_1 \in \mathbf{H}_2$ и в случае 2). Итак, $(t^* < \vartheta^*) \Rightarrow (\gamma_1 \in \mathbf{H}_2)$. Получили, что во всех возможных случаях $\gamma_1 \in \mathbf{H}_2$, чем и завершается проверка (10.25). Поскольку выбор ν_1 , ν_2 и t^* были произвольным, установлено (см. (10.1)), что $\pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \cdot | M, N \rangle \in \tilde{A}_{t_*}$; *-слабая замкнутость $\tilde{\Pi}_{t_*}(\pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \cdot | M, N \rangle)$ следует в силу замкнутости M и сечений $W(M, N)$ гиперплоскостями $t = \text{const}$.

Предложение доказано.

Следствие 10.2. Если $(t_*, x_*) \in W(M, N)$, то $\tilde{\Pi}_{t_*}(\pi_{t_*, x_*}^{(W)} \langle \cdot | M, N \rangle) \subset \mathcal{S}_{M, N}(t_*, x_*)$.

Доказательство непосредственно следует из (6.1), (6.2) и (10.20).

Теорема 10.1. Справедлива цепочка равенств $W(M, N) = \{(t, x) \in N \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t: \tilde{\Pi}_t(\alpha) \subset \mathcal{S}_{M, N}(t, x)\} = \{(t, x) \in N \mid \exists \alpha \in \tilde{A}_t^{\text{II}}: \tilde{\Pi}_t(\alpha) \subset \mathcal{S}_{M, N}(t, x)\}$.

Доказательство получается комбинацией предложений 10.2, 10.3, следствия 10.2 и (10.21).

Итак, установлено, что (в общем случае $M \in \mathcal{F}$ и $N \in \mathcal{F}$) $W(M, N)$ исчерпывает множество всех позиций из N , для которых задача наведения на M в пределах N разрешима а) в классе квазистратегий (игрока I) и б) в классе квазипрограмм. Конкретный вид разрешающей квази-программы указан в предложении 10.3 и в следствии 10.2. В связи с реализацией упомянутого идеального решения в классе процедур управления с поводырем (см. [2]) отметим работу [24].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 480 с.
2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
4. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения, I // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973. № 2. С. 3–18.
5. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения, II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973. № 3. С. 22–42.
6. Кряжимский А. В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
7. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.
8. Ченцов А. Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 6. С. 1272–1275.
9. Ченцов А. Г. К игровой задаче наведения // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 1. С. 73–76.
10. Ченцов А. Г. Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Мат. сб. 1976. Т. 99, № 3. С. 394–420.

11. **Чистяков С. В.** К решению игровых задач преследования // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 5. С. 825–832.
12. **Ухоботов В. И.** Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, № 2. С. 358–364.
13. **Nardzewski С. R.** A theory of pursuit and evasion // Adv. in game theory. Ann. Math. Studies, 1964. P. 113–127.
14. **Roxin E.** Axiomatic approach in differential games // J. Optim. Theory Appl. 1969. Vol. 3, № 3. P. 153–163.
15. **Субботин А. И., Ченцов А. Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
16. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
17. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
18. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 с.
19. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
20. **Ченцов А. Г.** Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНТИ 04.06.79, № 1933-79. 103 с.
21. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977. 351 с.
22. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 895 с.
23. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Екатеринбург: Изд-во УГТУ-УПИ, 2008. 389 с.
24. **Кряжимский А. В., Ченцов А. Г.** О структуре игрового управления в задачах сближения и уклонения / Ин-т математики и механики УНЦ АН СССР. Деп. в ВИНТИ, № 1729-80, 1979. 72 с.

Ченцов Александр Георгиевич

Поступила 7.12.2015

д-р физ.-мат. наук, профессор

чл.-корр. РАН, главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

СОДЕРЖАНИЕ

Юрий Сергеевич Осипов (<i>К восьмидесятилетию юбилею</i>)	5
А. Л. Агеев, Т. В. Антонова. Дискретизация нового метода локализации линий разрыва зашумленной функции двух переменных	8
С. М. Асеев. Существование оптимального управления в задачах на бесконечном интервале времени с неограниченным множеством ограничений на управления	18
И. Н. Белоусов, А. А. Махнев. Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивами пересечений $\{2r + 1, 2r - 2, 1; 1, 2, 2r + 1\}$	28
А. О. Беляков, А. А. Давыдов. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса	38
В. И. Бердышев. Траектория в \mathbb{R}^3 , скрытая от наблюдателей	47
М. С. Близорукова. Об одной задаче управления линейной системой с запаздыванием в управлении	55
М. С. Близорукова, В. И. Максимов. К задаче устойчивого отслеживания решения дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве	63
Ф. П. Васильев, А. С. Антипин, Л. А. Артемьева. Экстраградиентный метод поиска точки равновесия в многокритериальной задаче с динамикой	71
В. В. Васин, Г. Г. Скорик. Решение задачи деконволюции в общей постановке	79
В. П. Верещагин, Ю. Н. Субботин, Н. И. Черных. Один класс решений уравнения Эйлера в торе с соленоидальным полем скоростей. III	91
М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин. Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа ...	101
Н. Л. Григоренко, А. Е. Румянцев. Терминальное управление нелинейным процессом при наличии помех	113
М. И. Гусев. О существовании липшицевой обратной связи в задаче управления при фазовых ограничениях	122
Ю. Ф. Долгий. Уравнение Риккати для автономных линейных систем дифференциальных уравнений с неограниченным последствием	129
А. А. Дряженков, М. М. Потапов. Численное решение задачи позиционного граничного управления для волнового уравнения с неизвестными начальными данными	138
В. И. Зенков. Критерий отсутствия локальной сбалансированности некоторых простых групп лиева типа	147
И. Н. Кандоба, И. В. Козьмин. Об управлении нелинейной динамической системой в задаче быстрогодействия с фазовыми ограничениями	150

А. К. Керимбеков, Э. Ф. Абдылдаева. О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями	163
А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. II	177
П. Д. Лебедев, А. А. Успенский. Построение функции оптимального результата и рассеивающих линий в задачах быстрогодействия с невыпуклым целевым множеством	188
В. И. Максимов. Об одной задаче гарантированного наведения при неполной информации	199
М. С. Никольский. Исследование обобщенного контрольного примера Л.С. Понтрягина из теории дифференциальных игр	211
В. Г. Пименов, А. С. Хенди. Неявный численный метод решения дробного уравнения адвекции-диффузии с запаздыванием	218
Л. И. Родина. Об отталкивающих циклах и хаотических решениях разностных уравнений со случайными параметрами	227
В. Л. Розенберг. Восстановление внешних воздействий при дефиците информации в линейном стохастическом уравнении	236
Е. В. Стрелкова, В. Т. Шевалдин. О равномерных константах Лебега локальных тригонометрических сплайнов третьего порядка	245
Н. Н. Субботина, Е. А. Крупенников. Метод характеристик в задаче идентификации	255
П. Г. Сурков. Задача пакетного наведения к заданному моменту времени для линейной управляемой системы с запаздыванием	267
В. Н. Ушаков, А. А. Успенский. Теоремы об отделимости α -множеств в евклидовом пространстве	277
М. Ю. Хачай, Р. Д. Дубинин. Аппроксимируемость задачи об оптимальной маршрутизации транспорта в конечномерных евклидовых пространствах	292
А. Г. Ченцов. Метод программных итераций в игровой задаче наведения	304

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22

№ 2

2016

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Е. Е. Позниозкина

Тех-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Отв. за выпуск М. С. Близорукова, П. Г. Сурков

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 23.05.16. Формат 60 × 84¹/₈. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 37,7. Уч.-изд. л. 32,2 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
<http://journal.imm.uran.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226