

**РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

**ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

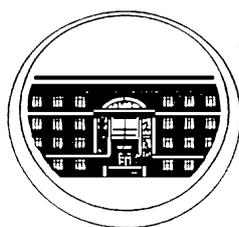
ТРУДЫ
ИНСТИТУТА
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
УрО РАН

ВЫХОДЯТ 4 РАЗА В ГОД

Том 22

№ 1

2016



ЕКАТЕРИНБУРГ

Труды Института математики и механики УрО РАН. Том 22, № 1. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2016. 322 с.

ISSN 0134-4889

Главный редактор акад. РАН В. И. Бердышев
Зам. гл. редактора д-р физ.-мат. наук В. В. Кабанов

Научные редакторы д-р физ.-мат. наук А. Л. Агеев,
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

Редакционная коллегия

д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Антонов, д-р физ.-мат. наук А. Г. Бабенко,
д-р физ.-мат. наук А. В. Васильев, д-р физ.-мат. наук Вэньбинь Го (Китай),
канд. физ.-мат. наук М. И. Гомоюнов, д-р физ.-мат. наук М. И. Гусев,
д-р физ.-мат. наук Х. Г. Гусейнов (Турция), д-р физ.-мат. наук А. Ф. Клейменов,
д-р физ.-мат. наук А. С. Кондратьев, д-р физ.-мат. наук А. И. Короткий,
канд. физ.-мат. наук П. Д. Лебедев, д-р физ.-мат. наук В. И. Максимов,
д-р физ.-мат. наук А. Д. Медных, д-р физ.-мат. наук В. С. Монахов (Беларусь),
д-р физ.-мат. наук И. Ф. Сивергина (США),
д-р физ.-мат. наук И. Д. Супруненко (Беларусь), д-р физ.-мат. наук М. Ю. Хачай,
канд. физ.-мат. наук Н. В. Маслова (*отв. секретарь*)

Редакционный совет

чл.-корр. РАН С. М. Асеев, чл.-корр. РАН В. В. Васин,
акад. РАН А. Б. Куржанский, д-р физ.-мат. наук Н. Ю. Лукоянов,
чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров, чл.-корр. РАН С. В. Матвеев,
чл.-корр. РАН А. А. Махнев, акад. РАН Ю. С. Осипов,
чл.-корр. РАН Н. Н. Субботина, чл.-корр. РАН Ю. Н. Субботин,
чл.-корр. РАН В. Н. Ушаков, чл.-корр. РАН А. Г. Ченцов,
чл.-корр. НАН Украины А. А. Чикрий (Украина)

Отв. редактор выпуска
д-р физ.-мат. наук А. Р. Данилин

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики
им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской
академии наук, 2016

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ НЕ СОДЕРЖАТ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. II ¹

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев

Продолжается исследование конечных групп, графы простых чисел которых не содержат треугольников. Основным результатом данной части работы является следующая теорема: если G — конечная неразрешимая группа, граф простых чисел которой не содержит треугольников, и $S(G)$ — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в G , то $|\pi(G)| \leq 8$ и $|\pi(S(G))| \leq 3$. Кроме того, получено детальное описание строения группы G , удовлетворяющей условиям теоремы, в случае, когда $\pi(S(G))$ содержит число, не делящее порядок группы $G/S(G)$. Построен также пример конечной разрешимой группы фиттинговой длины 5, граф простых чисел группы которой является 4-циклом, что завершает нахождение точной верхней оценки фиттинговой длины конечной разрешимой группы, граф простых чисел которой не содержит треугольников.

Ключевые слова: конечная группа, неразрешимая группа, разрешимая группа, фиттингова длина, граф простых чисел.

O. A. Alekseeva, A. S. Kondrat'ev. Finite groups whose prime graphs do not contain triangles. II

The study of finite groups whose prime graphs do not contain triangles is continued. The main result of the given part of the work is the following theorem: if G is a finite non-solvable group whose prime graph does not contain triangles and $S(G)$ is the greatest solvable normal subgroup in G then $|\pi(G)| \leq 8$ and $|\pi(S(G))| \leq 3$. Furthermore, a detailed description of the structure of a group G satisfying the conditions of the theorem in the case when $\pi(S(G))$ contains a number which does not divide the order of the group $G/S(G)$. It is also constructed an example of a finite solvable group with the Fitting length 5 whose prime graph is 4-cycle. This completes the determination of exact bound for the Fitting length of finite solvable groups whose prime graphs do not contain triangles.

Keywords: finite group, non-solvable group, solvable group, Fitting length, prime graph.

Введение

В первой части [1] работы мы исследовали разрешимые и почти простые группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. В данной части работы мы рассматриваем общий случай неразрешимых групп с таким свойством. Мы будем пользоваться обозначениями и терминологией из [1]. Используя результаты [1], мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Если G — конечная неразрешимая группа, граф простых чисел которой не содержит треугольников, и $S(G)$ — наибольшая разрешимая нормальная подгруппа в G , то $|\pi(G)| \leq 8$ и $|\pi(S(G))| \leq 3$.*

Кроме того, в леммах 2.2–2.6 получено детальное описание строения группы G , удовлетворяющей условиям теоремы, в случае, когда $\pi(S(G))$ содержит число, не делящее порядок группы $G/S(G)$ (если $|\pi(S(G))| = 3$, то это всегда так).

В [1] мы нашли верхние оценки фиттинговой длины $l_F(G)$ конечной разрешимой группы G , граф простых чисел которой не содержит треугольников. При этом мы показали, что полученные оценки для $l_F(G)$ точны, кроме, быть может, случая, когда граф простых чисел группы G является 4-циклом. В разд. 3 данной части работы мы строим пример конечной разрешимой группы фиттинговой длины 5, граф простых чисел которой является 4-циклом. Таким образом, полученная оценка фиттинговой длины и в этом случае точна.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

1. Обозначения, терминология и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [7; 9; 17; 18]. Рассмотрим некоторые результаты, которые используются в доказательстве теоремы.

Напомним, что *EPPO-группой* называется группа, порядки элементов которой являются степенями простых чисел.

Предложение 1 [19, теорема 1; 23, теорема 16; 20, теорема 8.2; 22, предложение 4.2; 11, теоремы 3.1 и 3.14]. Пусть G — конечная непримарная EPPO-группа. Тогда

- (а) если G разрешима, то $|\pi(G)| = 2$ и G — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа;
- (б) если G проста, то G изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$;
- (в) если G неразрешима и не проста, то либо $G \cong M_{10}$, либо группа $G/O_2(G)$ изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{4, 8\}$ или $Sz(q)$ для $q \in \{8, 32\}$, где $O_2(G)$ — неединичная элементарная абелева 2-группа, которая как $GF(q)(G/O_2(G))$ -модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(q)(G/O_2(G))$ -модулей.

Предложение 2 (лемма Мазурова [5, лемма 1]). Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G , G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C . Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то $s|C| \in \omega(G)$ для некоторого $s \in \pi(N)$.

Пусть G — конечная группа и V — kG -модуль для конечного поля k характеристики t . Действие группы G на V и пара (G, V) называются p' -полурегулярными для некоторого фиксированного простого числа p , если все нетривиальные p' -элементы из G действуют свободно на V (т. е. действуют без неподвижных точек на $V \setminus \{0\}$), причем это действие и пара (G, V) называются *сепарабельными*, если t не делит $|G|$, и *несепарабельными* — в противном случае (тогда $t = p$).

Пусть \mathcal{R} обозначает множество всех простых чисел r таких, что $r - 1 = 2^a \cdot 3^b$ для $a \geq 2$ и $b \geq 0$ и $(r + 1)/2$ — простое число. Известно, что $5, 13, 37, 73, 193, 1153 \in \mathcal{R}$, но неизвестно, бесконечно \mathcal{R} или нет.

Предложение 3 [13, теорема 4.1]. Пусть p — простое число и G — нетривиальная конечная группа такая, что $G' = G$ и $O_p(G) = 1$. Если (G, V) — несепарабельная p' -полурегулярная пара, то верно одно из следующих утверждений:

- (а) $G \cong SL_2(p^a)$ для $a \geq 1$ и $p^a > 3$;
- (б) $G \cong Sz(2^{2a+1})$ для $a \geq 1$ и $p = 2$;
- (в) $G \cong Sz(2^{2a+1}) \times SL_2(2^{2b+1})$ для $a, b \geq 1$, $(2a + 1, 2b + 1) = 1$ и $p = 2$;
- (г) $G \cong SL_2(r)$ для $r \in \mathcal{R}$ и $p = 2$.

Обратно, если (G, p) удовлетворяет какому-либо из условий (а)–(г), то существует точный неприводимый G -модуль V над полем характеристики p такой, что пара (G, V) p' -полурегулярна.

Предложение 4 [13, теорема 5.6]. Пусть G — нетривиальная конечная группа и $G' = G$. Если (G, V) — сепарабельная p' -полурегулярная пара, то верно одно из следующих утверждений:

- (а) $p = 2$ и существует семейство K_1, \dots, K_m нормальных 2-подгрупп группы G со следующими свойствами:
 - (а1) $\bigcap_{i=1}^m K_i = 1$;
 - (а2) каждая факторгруппа G/K_i либо изоморфна $SL_2(5)$, либо имеет вид $2_-^{1+4}.A_5$;
 - (а3) если $G/K_i \cong G/K_j \cong SL_2(5)$, то $K_i = K_j$;
- (б) $p = 3$ и $G \cong SL_2(r)$, где $r \in \mathcal{R} \cup \{7, 9, 17\}$;
- (в) $p \geq 5$ и $G \cong SL_2(5)$.

Обратно, если (G, p) удовлетворяет любому из условий (а)–(в), то существует точный неприводимый G -модуль V над полем характеристики, не делящей $|G|$, такой, что пара (G, V) p' -полурегулярна.

2. Доказательство теоремы

В дальнейшем пусть G — конечная неразрешимая группа, граф простых чисел которой не содержит треугольников, $S := S(G) \neq 1$ и $\overline{G} := G/S$. Тогда ввиду леммы 3.1 и теоремы 2 из [1] \overline{G} — почти простая группа из заключения этой теоремы. Обозначим через F цоколь группы \overline{G} .

Лемма 2.1. Пусть $r \in \pi(S)$ и R — силовская r -подгруппа в S . Тогда

(а) если R — циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов, то вершины r и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F) \setminus \{r\}$;

(б) если $r > 2$ и вершины r и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$, то силовская 2-подгруппа из G изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, R абелева, $S = Z^*(G)$ и группа $G/O(G)$ изоморфна одной из групп $2 \cdot A_7$, $SL_2(27).3$, $SL_2(27).6$, $SL_2(q)$ или $SL_2(q).2$, где либо $q \in \{5, 7, 9, 17, 25, 49, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$, либо q — простое число, $q \geq 11$ и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$.

Доказательство. Пусть $N = N_G(R)$. Тогда по лемме Фраттини $G = SN$. Поскольку $\overline{G} = SN/S \cong N/(S \cap N)$ — почти простая группа, $R \leq S \cap N = S(N)$. Поэтому можно считать, что $G = N$.

Если R — циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов, то $\text{Aut}(R)$ — разрешимая группа и, следовательно, $F \leq C_G(R)$, так что утверждение (а) верно.

Пусть выполняется условие утверждения (б) и T — силовская 2-подгруппа в G . Поскольку группа G неразрешима, ввиду теоремы Бернсайда [17, теорема 4.3] T нециклическая. Поскольку группа ST разрешима, в ней существует $\{2, r\}$ -холлова подгруппа U , причем можно считать, что $U = RT$. По условию граф $\Gamma(U)$ несвязен, поэтому ввиду предложения 1 U — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа и, следовательно, подгруппа $F(U)$ равна $O_2(U)$ или $O_r(U)$. В первом случае R — циклическая подгруппа и по п. (а) леммы r и 2 смежны в графе $\Gamma(G)$, что не так. Поэтому $F(U) = O_r(U)$ и, следовательно, U — группа Фробениуса с абелевым ядром R и дополнением T , изоморфным (обобщенной) группе кватернионов. Ввиду [17, замечание на с. 377] либо $G/O(G) \cong 2 \cdot A_7$, либо $G/O(G)$ является расширением группы $SL_2(q)$, где $q > 3$ нечетно, посредством циклической группы нечетного или удвоенного нечетного порядка n . В первом случае утверждение (б) справедливо. Пусть выполняется второй случай. Поскольку граф $\Gamma(G)$ не содержит треугольников, имеем $|\pi(q-1)| \leq 2 \geq |\pi(q+1)|$ и, в частности, $|\pi(q^2-1)| \leq 3$. Ввиду п. (б) предложения 1 и [4] из последнего неравенства вытекает, что либо $q \in \{5, 7, 9, 17, 25, 49, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$, либо q — простое число, $q \geq 11$ и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$.

Предположим, что n делится на нечетное простое число p . Тогда порядок группы $\text{Out}(F)$ (см. [9, Tabl. 5]) показывает, что $q = 3^m$, где $p = m$. Поэтому ввиду [18, теорема 2.5.12, предложения 4.9.1, 4.9.2] группа G/S содержит элемент x , индуцирующий на ее цоколе полевой автоморфизм порядка p и централизующий в этом цоколе подгруппу, изоморфную $L_2(3) \cong A_4$. Если $p > 3$, то граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, 3, p\}$. Отсюда $n = 3$ или 6 и $G/O(G) \cong SL_2(27).3$ или $SL_2(27).6$. Получаем, что утверждение (б) верно. \square

Лемма 2.2. Пусть S — r -группа для некоторого простого числа r , не делящего $|\overline{G}|$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

(а) \overline{G} изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, M_{10} , $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$;

(б) $\overline{G} \cong \text{Aut}(Sz(8))$, $C_G(S) = F$ и $C_S(x) = 1$ для элемента x порядка 3 из G .

Доказательство. Покажем сначала, что F является ЕРРО-группой. Пусть $V = S/\Phi(S)$ и $C = C_G(V)$. Тогда $S \leq C \trianglelefteq G$ и, следовательно, либо $C = S$, либо $F \leq \overline{C}$.

Если $F \leq \overline{C}$, то F , очевидно, является ЕРРО-группой. Пусть $C = S$. Тогда группа \overline{G} действует точно на V . Рассмотрим все возможности для F из заключения теоремы 2 из [1].

Пусть $F \cong L_2(q)$, где $q = p^m > 3$, p — простое число и $m \in \mathbb{N}$. Ввиду [10, Tabl. 8.2] в F есть циклические подгруппы A и B порядков $(q-1)/(q-1, 2)$ и $(q+1)/(q-1, 2)$ соответственно

такие, что любой элемент из F либо имеет порядок p , либо сопряжен в F с элементом из $A \cup B$. Из таблицы характеров группы $L_2(q)$ (см. [12, теорема 38.1]) легко видеть, что для любого $\chi \in Irr(F)$ скалярные произведения $(1_A, \chi|_A)$ и $(1_B, \chi|_B)$ положительны. Поэтому ввиду [7, (35.14)] $C_V(A) \neq 1 \neq C_V(B)$ и наше утверждение выполняется.

Пусть $F \cong Sz(q)$, где $q = 2^m > 4$ и $m \in \mathbb{N}$. Ввиду [10, Tabl. 8.16] в F есть циклические подгруппы A , B и D порядков $q - 1$, $q + \sqrt{2q} + 1$ и $q - \sqrt{2q} + 1$ соответственно такие, что любой элемент из F либо имеет порядок 2 или 4, либо сопряжен в F с элементом из $A \cup B \cup D$. Подгруппа A нормализует в F некоторую силовскую 2-подгруппу T , причем подгруппа TA изоморфна группе Фробениуса с ядром T и дополнением A , поэтому ввиду предложения 2 $C_V(A) \neq 1$. Из таблицы характеров группы $Sz(q)$ (см. [23]) легко видеть, что для любого $\chi \in Irr(F)$ скалярные произведения $(1_B, \chi|_B)$ и $(1_D, \chi|_D)$ положительны. Поэтому ввиду [7, (35.14)] $C_V(B) \neq 1 \neq C_V(D)$ и наше утверждение выполняется.

Пусть $F \cong {}^2G_2(q)$, где $q = 3^m > 3$ и $m \in \mathbb{N}$. Поскольку $2 \times L_2(q) < F$ (см. [10, Tabl. 8.4.3]), вершины 2 и 3 смежны в графе $\Gamma(F)$. Кроме того, силовские 2- и 3-подгруппы в F нециклические, поэтому вершина r смежна с вершинами 2 и 3 в графе $\Gamma(G)$. Таким образом, $\{2, 3, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Пусть $F \cong L_3^\varepsilon(q)$, где $q = p^m > 3$, p — простое число, $m \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ и $(\varepsilon, q) \neq (+, 2)$. Ясно, что вершины 2 и r смежны в графе $\Gamma(G)$. Если силовская 3-подгруппа в F нециклическая и F содержит элемент порядка 6, то $\{2, 3, s\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Поэтому силовская 3-подгруппа в F циклическая или F не содержит элементов порядка 6.

Пусть силовская 3-подгруппа в F циклическая. Тогда ввиду [1, теорема 2; 9; 10, Tabl. 8.3, 8.5] группа F изоморфна $L_3(8)$, $L_3(17)$, $U_3(4)$ или $U_3(7)$.

Если F изоморфна $L_3(8)$ или $U_3(7)$, то силовская 7-подгруппа в F нециклическая и F содержит элемент порядка 14, поэтому $\{2, 7, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Если F изоморфна $U_3(4)$, то силовская 5-подгруппа в F нециклическая и F содержит элемент порядка 10, поэтому $\{2, 5, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Если F изоморфна $L_3(17)$, то силовская 17-подгруппа в F нециклическая и F содержит элемент порядка 34, поэтому $\{2, 17, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Таким образом, силовская 3-подгруппа в F нециклическая, и F не содержит элементов порядка 6. Поэтому ввиду [6; 14; 16] имеем $p = 2$. Если $\varepsilon = +$, то ввиду [1, теорема 2] имеем $F \cong L_3(4)$, что не противоречит утверждению леммы. Если $\varepsilon = -$, то ввиду [1, теорема 2] и [10, Tabl. 8.5] имеем $(q + 1)_3 = 3$, $s := (q + 1)/3$ — простое нечетное число и $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_s < F$. Поэтому $\{3, r, s\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Если F изоморфна A_7 , A_8 , M_{11} , M_{22} , $U_4(2)$, $U_4(3)$, $U_5(2)$, $G_2(3)$ или ${}^2F_4(2)'$, то ввиду [9] группа F содержит элемент порядка 6 и силовская 3-подгруппа в F нециклическая, поэтому $\{2, 3, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие.

Итак, F является $EPPO$ -группой, и по п. (б) предложения 1 F изоморфна некоторой группе из утверждения (а) леммы. Предположим, что $F < \overline{G}$. Тогда по [9] либо $\overline{G} \cong M_{10}$, либо G имеет элемент x порядка $2p$, где $p \in \{3, 5\}$. В первом случае выполняется утверждение (а) леммы. Во втором случае либо $|x^2| \in \pi(F)$, либо $\overline{G} \cong \text{Aut}(Sz(8))$ и $|x^2| = 3 \notin \pi(F)$. Если $|x^2| \in \pi(F)$, то в графе $\Gamma(G)$ должен быть треугольник $\{2, p, r\}$, что не так. Поэтому $\overline{G} \cong \text{Aut}(Sz(8))$ и $|x^2| = 3 \notin \pi(F)$. Если $C_S(x) \neq 1$, то в графе $\Gamma(G)$ должен быть треугольник $\{2, 3, r\}$, что не так. Таким образом, $C_S(x) = 1$. Если $C = S$, то подгруппа Фробениуса вида $13 : 12$ из \overline{G} действует точно на V и, следовательно, по предложению 2 имеем $C_S(x) \neq 1$; противоречие. Поэтому $F \leq \overline{C}$, так что выполняется утверждение (б) леммы. \square

Лемма 2.3. Пусть $\pi(S) = \{p_1, p_2\}$, граф $\Gamma(S)$ несвязен и p_1 не делит $|\overline{G}|$. Тогда S — группа Фробениуса и верно одно из следующих утверждений:

(а) p_2 не делит $|\overline{G}|$ и группа \overline{G} изоморфна $L_2(q)$ при $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, M_{10} , $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$;

(б) $p_2 = 3$ и $G/O_3(G) = (Z \times E) \rtimes \langle x \rangle$, где Z — циклическая p_1 -группа, $E \cong Sz(8)$, $|x| = 3$, $E\langle x \rangle \cong \text{Aut}(Sz(8))$ и $C_Z(x) = 1$;

(в) $p_2 = 2$ и $G/O_2(G) = (Z \times E)$, где Z — циклическая p_1 -группа, группа E изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{4, 8\}$ или $Sz(q)$ для $q \in \{8, 32\}$ и $O_2(S)$ — неединичная элементарная абелева 2-группа, которая как $GF(q)E$ -модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(q)E$ -модулей;

(г) $p_2 = 2$ и $G/O_2(G) = (Z \times E) \rtimes \langle x \rangle$, где Z — циклическая p_1 -группа, $E \cong Sz(8)$, $|x| = 3$, $E\langle x \rangle \cong \text{Aut}(Sz(8))$, $C_Z(x) = 1$ и $O_2(S)$ — неединичная элементарная абелева 2-группа, которая как $GF(q)E$ -модуль изоморфна прямой сумме естественных $GF(q)E$ -модулей;

(д) $p_2 = 2$, $S = Z^*(G)$ — группа Фробениуса с абелевым ядром $O_{p_1}(G)$ и группа $G/O_{p_1}(G)$ изоморфна одной из групп $2 \cdot A_7$, $SL_2(27) \cdot 3$, $SL_2(27) \cdot 6$, $SL_2(q)$ или $SL_2(q) \cdot 2$, где либо $q \in \{5, 7, 9, 17, 25, 49, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$, либо q — простое число, $q \geq 11$ и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$;

(е) $p_2 = 2$, $G = O_{p_1}(G) \rtimes H$, где $O_{p_1}(G)$ — абелева группа, $F^*(H) = Z \circ E$, Z — циклическая 2-группа или (обобщенная) группа кватернионов, $E \cong SL_2(5)$, $|Z \cap E| = 2$, $O_{p_1}(G)E$ — группа Фробениуса, $|H : F^*(H)| \leq 2$, группа \overline{G} изоморфна A_5 или S_5 и силовская 2-подгруппа в G содержит более одной инволюции при $|H : F^*(H)| = 2$.

Доказательство. Пусть $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(S)$ для $i \in \{1, 2\}$. Ввиду п. (а) предложения 1 S — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа, поэтому $F(S) = O_{p_i}(G)$, $F_2(S)/F(S)$ и $S/F_2(S)$ — p_j -группа и p_i -группа соответственно, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Предположим, что $i = 2$. Тогда P_1 — циклическая группа. По п. (а) леммы 2.1 вершины p_1 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F)$. Отсюда F является $EPPO$ -группой.

Предположим, что S — 2-фробениусова группа. Тогда $S/F_2(S)$ — неединичная циклическая p_2 -группа и, следовательно, по п. (а) леммы 2.1 вершины p_2 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F) \setminus \{p_2\}$. Если $p_2 > 2$, то $\{2, p_1, p_2\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Если $p_2 = 2$, то $\{2, p_1, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{2\}$; противоречие.

Таким образом, S — группа Фробениуса с ядром P_2 и дополнением P_1 . Пусть $C = C_G(\Omega_1(Z(P_2)))$. Имеем $C_S(P_2) = P_2$. Предположим, что $C \not\leq S$. Тогда $F \leq \overline{C}$. Если $p_2 \in \pi(F)$, то граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{p_1, p_2, p\}$, где $p \in \pi(F) \setminus \{p_2\}$; противоречие. Поэтому $p_2 \notin \pi(F)$.

Пусть $p_2 \notin \pi(\overline{G})$. Тогда по теореме Шура — Цассенхауза $G = P_2 \rtimes (P_1 \rtimes H)$, где $H \cong \overline{G}$. По лемме 2.2, примененной к группам P_1H и P_2H , получаем, что либо выполняется утверждение (а) леммы, либо $\overline{G} \cong \text{Aut}(Sz(8))$ и $C_{P_1}(x) = C_{P_2}(x) = 1$ для элемента x порядка 3 из G . Но во втором случае ввиду теоремы Томпсона (см. [17, 10.2.1]) группа S нильпотентна, что противоречит несвязности графа $\Gamma(S)$. Поэтому выполняется утверждение (а) леммы. Если $p_2 \in \pi(\overline{G})$, то по п. (б) леммы 2.2 выполняется утверждение (б) леммы.

Таким образом, можно считать, что $C = P_2$. Если $p_2 \notin \pi(F)$, то, рассуждая, как в предыдущем абзаце, получим, что выполняются утверждения (а) или (б) леммы. Предположим, что $p_2 \in \pi(F)$. Если $p_2 > 2$, то $\{2, p_1, p_2\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому $p_2 = 2$. Пусть $\tilde{G} = G/P_2$. Тогда по теореме Шура — Цассенхауза $\tilde{G} = \tilde{P}_1 \rtimes H$, причем $H \cong \overline{G}$ и \tilde{P}_1 централизует подгруппу H' , изоморфную F . Пусть E — полный прообраз в G последнего члена ряда коммутантов группы \tilde{G} . Тогда $E \cong F$ и E является $EPPO$ -группой. Ввиду предложения 4 и леммы 2.2 выполняются утверждения (в) или (г) леммы.

Пусть теперь $i = 1$. Тогда P_2 — циклическая группа или (обобщенная) группа кватернионов и, следовательно, по п. (а) леммы 2.1 вершины p_2 и t смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $t \in \pi(F) \setminus \{p_2\}$. Случай $p_2 \notin \pi(F)$ рассматривается, как выше. Поэтому считаем, что $p_2 \in \pi(F)$. Если $P_1 < C_G(Z(\Omega_1(P_1)))$, то $F \leq C_G(\Omega_1(Z(P_1)))$ и, следовательно, $\{p_1, p_2, t\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $t \in \pi(F) \setminus \{p_2\}$, что не так. Поэтому $C_G(Z(\Omega_1(P_1))) = P_1$.

Если вершины 2 и p_1 не смежны в графе $\Gamma(G)$, то по п. (б) леммы 2.1 выполняется утверждение (д) леммы.

Пусть теперь вершины 2 и p_1 смежны в графе $\Gamma(G)$. По теореме Шура — Цассенхауза $G = P_1 \rtimes H$. Можно считать, что $P_2 = O_{p_2}(H)$. Обозначим через E последний член ряда коммутантов группы H .

Предположим, что $p_2 > 2$. Тогда вершины 2 и p_2 смежны, а вершины p_1 и p_2 не смежны в графе $\Gamma(G)$. Отсюда следует, что силовская p_2 -подгруппа в G циклическая. Если $Z(E) = 1$, то $P_2K = P_2 \times E$ и, следовательно, силовская p_2 -подгруппа в G нециклическая, что не так. Поэтому $Z(E) \neq 1$, откуда ввиду [1, теорема 2], [9], [10, Tabl. 8.3, 8.5] $Z(E)$ — неединичная 3-группа и силовская 3-подгруппа в E нециклическая. Но тогда $p_2 = 3$ и силовская 3-подгруппа в G нециклическая; противоречие.

Таким образом, $p_2 = 2$ и E действует точно, $2'$ -полурегулярно и сепарабельно на $\Omega_1(P_1)$, поэтому ввиду предложения 4 группа K изоморфна $SL_2(5)$. Поэтому $P_2E = P_2 \circ E = F^*(H)$ и $|P_2 \cap E| = 2$. Ясно, что $O_{p_1}(G)E$ — группа Фробениуса. Поскольку вершины 2 и p_1 смежны в графе $\Gamma(G)$, выполняется утверждение (е) леммы. \square

Лемма 2.4. Пусть $\pi(S) = \{p_1, p_2\}$, граф $\Gamma(S)$ связан и p_1 не делит $p_2|\overline{G}|$. Тогда $p_2 = 2$ и группа \overline{G} изоморфна $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Sz(8)$, $\text{Aut}(Sz(8))$ или $Sz(32)$.

Доказательство. Пусть $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(S)$ для $i \in \{1, 2\}$. Поскольку группа S разрешима, то $O^{p_1, p_2}(S) < O^{p_1}(S) < S$ или $O^{p_2, p_1}(S) < O^{p_2}(S) < S$. Рассматривая фактор-группу группы G по $O^{p_1, p_2}(S)$ или по $O^{p_2, p_1}(S)$ соответственно, можно считать, что $S = P_i \rtimes P_j$, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Рассматривая фактор-группу группы G по $\Phi(P_i)$, можно считать также, что P_i — элементарная абелева группа. Положим $\tilde{G} = G/P_i$.

Предположим, что $p_2 > 2$. Тогда $S = O(G)$. Поскольку вершины p_1 и p_2 смежны и $\{2, p_1, p_2\}$ не является треугольником в графе $\Gamma(G)$, вершина 2 не смежна с p_1 или p_2 . Но по п. (б) леммы 2.1 $O(G) < Z^*(G) = S$; противоречие. Таким образом, $p_2 = 2$.

Заметим, что силовские p -подгруппы группы \overline{G} для $p \in \pi(\overline{G}) \setminus \{2\}$ циклические, так как в противном случае граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, p_1, p\}$.

Предположим, что $i = 2$ и $V = \Omega_1(Z(P_1))$. Тогда ввиду леммы 2.2 и предыдущего абзаца группа \overline{G} изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 17\}$, $Sz(8)$, $\text{Aut}(Sz(8))$ или $Sz(32)$. По теореме Шура — Цассенхауза в группе G существует подгруппа H такая, что $G = P_1H$ и $P_1 \cap H = P_2$. Следовательно, группа $\tilde{H} = H/P_2$, изоморфная \overline{G} , действует на $\tilde{V} \cong \Omega_1(Z(\tilde{P}_1))$ и на P_2 .

Предположим, что группа \tilde{H} действует на \tilde{V} неточно. Тогда ее коммутант действует точно, $2'$ -полурегулярно и несепарабельно на P_2 . Поэтому H' является $EPPO$ -группой, так что ввиду п. (в) предложения 1 и леммы 2.2 утверждение леммы выполняется.

Пусть теперь, что \tilde{H} действует на \tilde{V} точно. Тогда по лемме 2.2 группа \tilde{H} проста. Предположим, что $\overline{G} \cong L_2(q)$ для $q \in \{7, 17\}$. Возьмем в \tilde{H} элемент x порядка 3. Из таблицы комплексных характеров и таблицы 2-модулярных характеров Брауэра группы \tilde{H} (см. [8; 9]) видно, что $C_{\tilde{V}}(x) \neq 1$ и $C_{P_2}(x) \neq 1$. Поэтому $\{2, 3, p_1\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Таким образом, утверждение леммы выполняется.

Итак, можно считать, что $i = 1$ и $P_1 = F(S)$. Тогда $C_S(P_1) = P_1$. Предположим, что $C_G(P_1) \not\leq S$. Поскольку $F \leq \overline{C_G(P_1)}$ и $[S, C_G(P_1)] \leq C_S(P_1) = P_1$, то граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, p_1, r\}$, где $r \in \pi(F) \setminus \{2\}$; противоречие. Поэтому $C_G(P_1) = P_1$.

По теореме Шура — Цассенхауза $G = P_1 \rtimes H$, где $H/O_2(H) \cong \overline{G}$. Пусть $V = \Omega_1(Z(O_2(H)))$ и $C = C_H(V)$. Тогда либо $F \leq \overline{C}$, либо $C = O_2(H)$.

Предположим, что $F \leq \overline{C}$. Пусть E — последний член ряда коммутантов группы C . Тогда $E' = E$, $E/O_2(E) \cong F$ и E действует точно, $2'$ -полурегулярно и сепарабельно на P_1 . Ввиду предложения 4 группа E изоморфна $SL_2(5)$, $SL_2(2^m)$ или $Sz(2^m)$. Поскольку 2 и r смежны для всех $r \in \pi(F) \setminus \{2\}$, то $|\pi(F)|$ равно 3 при $K \cong SL_2(2^m)$ и 4 при $Sz(2^m)$. Поэтому ввиду [3; 4] группа E изоморфна $SL_2(5)$, $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$, так что утверждение леммы выполняется.

Пусть $C = O_2(H)$. Тогда для любого элемента $x \in H$ нечетного простого порядка t имеем $V = [V, \langle x \rangle] \times C_V(x)$ и $[V, \langle x \rangle] \neq 1$. Поэтому $[V, \langle x \rangle]\langle x \rangle$ — группа Фробениуса и, следовательно, ввиду предложения 2 имеем $C_V(x) \neq 1$. Таким образом, вершина p_1 смежна с любой вершиной из $\pi(F)$ в графе $\Gamma(G)$. Отсюда следует, что H является $EPPO$ -группой, так что ввиду п. (в) предложения 1 утверждение леммы выполняется. \square

Лемма 2.5. Пусть $|\pi(S)| \geq 3$ и граф $\Gamma(S)$ несвязен. Тогда $\pi(S) = \{p_1, p_2, p_3\}$, где вершины p_1 и p_2 смежны, p_1 не делит $|\overline{G}|$, и верно одно из следующих утверждений:

(а) $p_2 > 2$, $p_3 = 2$, S — группа Фробениуса с абелевым ядром $O(G) = O_{p_1}(S) \times O_{p_2}(S)$ и дополнением порядка 2, и верно одно из следующих утверждений:

(а1) p_2 не делит $|\overline{G}|$ и $G/O(G) \cong SL_2(5)$ или $SL_2(5) \cdot 2$;

(а2) p_2 делит $|\overline{G}|$, $p_2 > 3$ и $G/O(G) \cong SL_2(q)$ или $SL_2(q) \cdot 2$, где p_2 делит q , $q \in \{25, 49, p_2\}$ и $|\pi(p_2 - 1)| \leq 2 \geq |\pi(p_2 + 1)|$;

(а3) $p_2 = 3$, $G/O(G) \cong 2 \cdot A_7$, $SL_2(q)$ или $SL_2(q) \cdot 2$, где либо $q \in \{9, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q - 1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q + 1)/4)| = 1$;

(а4) $p_2 = 3$, $G/O(G) \cong SL_2(r)$ или $SL_2(r) \cdot 2$, где r — простое число и либо $r \in \{5, 7, 17\}$, либо $r \geq 13$, $\pi(r - 1) = \{2, 3\}$ и $|\pi(r + 1)| = 2$;

(б) $p_2 = 2$, p_3 не делит $|\overline{G}|$, S — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа, $F(S) = O_{p_1}(S) \times O_2(S)$, $F_2(S)/F(S)$ и $S/F_2(S)$ — циклические p_3 -группа и p_1 -группа соответственно, группа \overline{G} изоморфна $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$, $G/F(S) \cong \overline{G} \times S/F(S)$ и $O_2(S)$ — неединичная элементарная абелева 2-группа.

Доказательство. Ввиду [1, теорема 1] граф $\Gamma(S)$ имеет вид $\begin{matrix} p_1 & & p_2 & & p_3 \\ \circ & \text{---} & \circ & & \circ \end{matrix}$ или $\begin{matrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \circ & \text{---} & \circ & \text{---} & \circ \end{matrix}$ и S — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Ясно, что $|\pi(F(S))|$ и $|\pi(F_2(S)/F(S))|$ не превосходят 2. Предположим, что $|\pi(F_2(S)/F(S))| = 2$. Без ограничения общности можно считать, что $\pi(F_2(S)/F(S)) = \{p_1, p_2\}$. Тогда в S есть изолированная $\{p_1, p_2\}$ -холлова подгруппа U такая, что $F(S)U$ есть группа Фробениуса, равная S или $F_2(S)$. В группе U есть элемент порядка $p_1 p_2$, и силовские подгруппы в U , а значит, и в S , циклические или (обобщенные) кватернионные. Ввиду п. (а) леммы 2.1 $\{p_1, p_2, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{p_1, p_2\}$; противоречие. Поэтому $|\pi(F_2(S)/F(S))| = 1$. Аналогично рассуждая, получаем, что $|\pi(S/F_2(S))| \leq 1$. Ввиду предложения 2 $\pi(S) \cup \pi(S/F_2(S))$ — клика в графе $\Gamma(S)$, поэтому $|\pi(S)| = 3$ и, следовательно, $\pi((F(S)) \cup \pi(S/F_2(S))) = \{p_1, p_2\}$ и $\pi(F_2(S)/F(S)) = \{p_3\}$. Пусть $P_i \in Syl_{p_i}(S)$ для $i = 1, 2, 3$. Поскольку $F(S)P_3 = F_2(S)$ есть группа Фробениуса, подгруппа P_3 циклическая или (обобщенная) кватернионная. Ввиду п. (а) леммы 2.1 вершины p_3 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F) \setminus \{p_3\}$.

Предположим, что произведение $p_1 p_2$ нечетно. Если обе вершины p_1 и p_2 смежны с 2 в графе $\Gamma(G)$, то $\{p_1, p_2, 2\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому можно считать, что вершина p_1 не смежна с 2 в графе $\Gamma(G)$. Ввиду п. (б) леммы 2.1 либо $G/O(G) \cong 2 \cdot A_7$, либо цоколь группы $G/O(G)$ изоморфен $SL_2(q)$, где $q > 3$ нечетно и $|\pi(q - 1)| \leq 2 \geq |\pi(q + 1)|$. Отсюда следует, что $S = Z^*(G)$ есть группа Фробениуса с абелевым ядром $F(S) = O(G) = P_1 \times P_2$ и p_1 не делит $|\overline{G}|$.

Пусть $G/O(G) \cong 2 \cdot A_7$. Если $p_2 \neq 3$, то, поскольку силовская 3-подгруппа в G нециклическая, $\{p_1, p_2, 3\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$; противоречие. Поэтому $p_2 = 3$ и выполняется утверждение (а3).

Пусть цоколь группы $G/O(G)$ изоморфен $SL_2(q)$, где $q > 3$ нечетно и $|\pi(q - 1)| \leq 2 \geq |\pi(q + 1)|$. Предположим, что $q > 5$. Таблица характеров группы $SL_2(q)$ (см. [12, теорема 38.1]) показывает, что некоторый элемент порядка 3 из G действует несвободно на P_1 а, если p_2 не делит $|F|$, то и на P_2 . Поэтому p_2 делит $|F|$.

Предположим, что $p_2 \neq 3$. Тогда все элементы порядка 3 из G действуют свободно на P_2 , так как в противном случае $\{p_1, p_2, 3\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Ввиду п. (б) леммы 2.1 либо $q \in \{7, 17, 25, 49\}$, либо $q \geq 11$ — простое число и $|\pi(q - 1)| = |\pi(q + 1)| = 2$. Если $q = 17$, то $p_2 = 17$ и, следовательно, выполняется утверждение (а2). Пусть $p_2 \neq 17$. Тогда существует $r \in \pi(q - 1) \setminus \{2\}$. Поэтому группа G содержит подгруппу Фробениуса вида $q : r$ и, следовательно, ввиду предложения 2 вершины p_1 и r смежны в графе $\Gamma(G)$. Число p_2 делит qr , так как в противном случае ввиду предложения 2 $\{p_1, p_2, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Если $p_2 = r$, то 3 делит $q + 1$ и ввиду [2, теорема 1] элементы порядка 3 из G действуют несвободно на P_2 ; противоречие. Поэтому p_2 делит q и выполняется утверждение (а2).

Пусть $p_2 = 3$. Если 3 делит q , то выполняется утверждение (а3).

Если $q \in \{5, 7, 17\}$, то выполняется утверждение (а4).

Пусть $q \geq 11$ — простое число и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$. Тогда существует $r \in \pi(q-1) \setminus \{2\}$. Группа G содержит подгруппу Фробениуса вида $q : r$ и, следовательно, ввиду предложения 2 вершины p_1 и r смежны в графе $\Gamma(G)$. Поэтому $r = 3$, так как в противном случае ввиду предложения 2 $\{p_1, p_2, r\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Таким образом, выполняется утверждение (а4).

Пусть произведение $p_1 p_2$ четно. Тогда $p_3 > 2$ и можно считать, что $p_1 > 2$ и $p_2 = 2$. Вершины p_1 и p_3 не смежны в графе $\Gamma(G)$, так как в противном случае $\{p_1, p_3, 2\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Поэтому число p_1 не делит $|F|$.

Пусть S — 2-фробениусова группа. Тогда множество $\pi(S/F_2(S))$ равно $\{2\}$ или $\{p_1\}$. В первом случае $S/F_2(S)$ — неединичная циклическая 2-группа, поэтому ввиду п. (а) леммы 2.1 $\{2, p_3, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{2, p_3\}$, что невозможно. Таким образом, выполняется второй случай. Тогда $O_2(S) \neq 1$ и $S/F_2(S)$ — нетривиальная циклическая p_1 -группа, так как группа $S/F_2(S)$ изоморфна дополнению группы Фробениуса $S/F(S)$. Ввиду п. (а) леммы 2.1 вершина p_1 смежна в графе $\Gamma(G)$ с любой вершиной из $\pi(F)$. Поэтому число p_3 не делит $|F|$. Кроме того, $p_3 > 3$, так как в противном случае группа $F_2(S)/F(S)$, будучи циклической 3-группой, не имеет нетривиальных автоморфизмов нечетного порядка. Поэтому ввиду п. (а) леммы 2.3 числа p_1 и p_3 не делят $|\bar{G}|$ и группа \bar{G} изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, M_{10} , $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$. Положим $\tilde{G} = G/F(S)$. Тогда $\tilde{G} \cong F \times S/F(S)$. Пусть L — полный прообраз в G компоненты группы \tilde{G} . Тогда $L/O_{p_1}(S)$ является EPPO-группой, и поэтому ввиду п. (в) предложения 1 выполняется утверждение (б).

Пусть теперь S — группа Фробениуса. Тогда $\pi(F(S)) = \{2, p_1\}$ и $S/F(S)$ — (неединичная) циклическая p_3 -группа. Применяя лемму 2.3 к группе $G/O_2(G)$, получим, что числа p_1 и p_3 не делят $|\bar{G}|$ и группа \bar{G} изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 9, 17\}$, M_{10} , $L_3(4)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$. Положим $\tilde{G} = G/O_{p_1}(G)$. Тогда $\tilde{G} \cong (S/F(S)) \rtimes \bar{G}$. Пусть L — полный прообраз в G изоморфной F подгруппы из \tilde{G} . Тогда L является EPPO-группой, и поэтому ввиду п. (в) предложения 1 выполняется утверждение (б). \square

Лемма 2.6. Пусть $\pi(S) \geq 3$ и граф $\Gamma(S)$ связан. Тогда $\pi(S) = \{p_1, p_2, p_3\}$, где вершины p_1 и p_3 не смежны, p_1 не делит $|F|$, и верно одно из следующих утверждений:

(а) p_1 не делит $|\bar{G}|$, $p_2 > 2$, $p_3 = 2$, силовская 2-подгруппа из G изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, $S = Z^*(G)$, $F(O(S)/O_{p_2}(S))$ — абелева p_1 -холлова подгруппа в $O(S)/O_{p_2}(S)$, инволюция из S инвертирует группу $F(O(S)/O_{p_2}(S))$ и централизует группу $O(S)/O_{p_1, p_1}'(O(S))$ и верно одно из следующих утверждений:

(а1) $p_2 > 3$ и $G/O(G) \cong SL_2(5)$ или $SL_2(5) \cdot 2$;

(а2) $p_2 = 3$, $G/O(G) \cong 2 \cdot A_7$, $SL_2(27) \cdot 2$, $SL_2(27) \cdot 6$, $SL_2(q)$ или $SL_2(q) \cdot 2$, где либо $q \in \{9, 81\}$, либо $q = 3^m$, t и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$;

(а3) $p_2 = 3$, $G/O(G) \cong SL_2(r)$ или $SL_2(r) \cdot 2$, где r — простое число и либо $r \in \{5, 7, 17\}$, либо $r \geq 13$, $\pi(r-1) = \{2, 3\}$ и $|\pi(r+1)| = 2$;

(б) $p_2 = 2$, силовская p_3 -подгруппа из G циклическая, группа S является p_3' -замкнутой и верно одно из следующих утверждений:

(б1) $p_1 p_3$ не делит $|\bar{G}|$ и группа \bar{G} изоморфна $L_2(4)$, $L_2(8)$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$;

(б2) $p_1 = 3$, p_3 не делит $|\bar{G}|$, $G/O_{p_3}(S) = (Z \times E) \rtimes \langle x \rangle$, где Z — циклическая p_3 -группа, $E \cong Sz(8)$, $|x| = 3$, $E \langle x \rangle \cong \text{Aut}(Sz(8))$, $C_Z(x) = 1$;

(б3) $p_3 = 3$, $G/O_{p_3}(S) = (Z \times E) \langle x \rangle$, где $Z = \langle x^3 \rangle$ — нетривиальная циклическая 3-группа, $E \cong Sz(8)$, $E \langle x \rangle / Z \cong \text{Aut}(Sz(8))$.

Доказательство. Ввиду [1, теорема 1] граф $\Gamma(S)$ является 3-цепью, 4-цепью, 4-циклом или 5-циклом.

Предположим, что граф $\Gamma(S)$ является 4-циклом с множеством вершин $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Без ограничения общности можно считать, что $O_{p_1}(G) \neq 1$. Рассуждая, как в доказательстве

леммы 2.5 из [1], получим, что силовские p_3 - и p_4 -подгруппы в S можно считать циклическими или (обобщенными) кватернионными. Поэтому ввиду п. (а) леммы 2.1 $\{p_3, p_4, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{p_3, p_4\}$, что невозможно.

Предположим, что граф $\Gamma(S)$ является 5-циклом с множеством вершин $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$. Можно считать, что $O_{p_1}(G) \neq 1$, а p_3 и p_4 — смежные вершины, которые не смежны с вершиной p_1 . Пусть $K = \{p_3, p_4\}$ -холлова подгруппа в S . Тогда $O_{p_1}(G)K$ — группа Фробениуса с ядром $O_{p_1}(G)$ и дополнением K и, следовательно, силовские p_3 - и p_4 -подгруппы в S циклические или (обобщенные) кватернионные. Как и в предыдущем абзаце, это приводит к противоречию.

Предположим, что граф $\Gamma(S)$ является 4-цепью вида $\begin{array}{cccc} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$.

Пусть $\psi = \{p_1, p_4\}$. Предположим, что $O_\psi(G) \neq 1$. Тогда можно считать, что $O_{p_1}(G) \neq 1$. Это, как и в предыдущем абзаце, приводит к противоречию. Итак, $O_\psi(G) = 1$. Рассуждая как при доказательстве [21, предложение 3], получим, что силовские p_1 - и p_4 -подгруппы в S циклические или (обобщенные) кватернионные. Поэтому ввиду п. (а) леммы 2.1 вершина p_i смежна с каждой вершиной из $\pi(\overline{G}) \setminus \{p_i\}$ для $i = 1, 2$. Если $p_1 p_4$ четно, то $\{p_1, p_4, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$ для $p \in \pi(F) \setminus \{p_1, p_4\}$, что невозможно. Поэтому $p_1 p_4$ нечетно. Можно считать, что p_2 нечетно. Тогда вершины p_2 и 2 не смежны в графе $\Gamma(G)$ и, следовательно, p_3 нечетно. Поэтому $S = O(G)$. Но ввиду п. (б) леммы 2.1 имеем $O(G) < Z^*(G)$; противоречие.

Итак, граф $\Gamma(S)$ является 3-цепью вида $\begin{array}{ccc} p_1 & p_2 & p_3 \\ \circ & \circ & \circ \end{array}$.

Можно считать, что $p_1 \neq 2$. Пусть $P_i \in Syl_{p_i}(S)$ для $i = 1, 2, 3$.

Предположим, что $p_2 \neq 2$. Пусть $T \in Syl_2(G)$. Можно считать, что $P_1 T$ и $P_2 T$ — холловы подгруппы в разрешимой группе ST . Поскольку p_1 и p_2 смежны в графе $\Gamma(S)$, то вершина 2 не смежна в графе $\Gamma(G)$ с p_i для некоторого $i \in \{1, 2\}$. По п. (б) леммы 2.1 подгруппа T изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, P_i абелева, $O(G) = P_1 P_2$, $|P_3| = 2$, $S = Z^*(G) = O(G) P_3$ и цоколь группы $G/O(G)$ изоморфен $2:A_7$ или $SL_2(q)$, где либо $q \in \{5, 7, 9, 17, 25, 49, 81\}$, либо $q = 3^m$, m и $(q-1)/2$ — простые нечетные числа и $|\pi((q+1)/4)| = 1$, либо q — простое число, $q \geq 11$ и $|\pi(q-1)| = |\pi(q+1)| = 2$. Поскольку $C_{P_i}(P_3) = C_{P_1}(P_3) = 1$ и $C_{P_2}(P_3) \neq 1$, имеем $i = 1$. Пусть $C = C_G(P_3)$. Тогда $G = O(G)C$, откуда $O(C) = C_{O(G)}(P_3) = C_{P_2}(P_3) \neq 1$ и $C/O(C)P_3 \cong \overline{G}$. Очевидно, $O_{p'_1}(S) = O_{\{2, p_2\}}(S)$. Если 2 делит $|O_{\{2, p_2\}}(S)|$, то $G = O_{\{2, p_2\}}(S)C$ и, следовательно, C содержит некоторую силовскую p_1 -подгруппу из G , что не так. Поэтому $O_{p'_1}(S) = O_{p_2}(S)$. Положим $\widetilde{G} = G/O_{p'_1}(S)$. Тогда ввиду [17, теорема 6.3.2] $F(\widetilde{G}) = \widetilde{P}_1$. Подгруппа \widetilde{P}_3 централизует подгруппу \widetilde{P}_2 , так как в противном случае ввиду предложения 3 подгруппа P_3 централизует неединичный элемент из P_1 , что не так. Если цоколь группы $G/O(G)$ изоморфен $SL_2(5)$, то выполняются утверждения (а1) или (а3). Поэтому можно предполагать, что это не так. Тогда из таблицы характеров группы $SL_2(q)$, нециклическости силовских 3-подгрупп в группах $2:A_7$ и $SL_2(3^m)$ при $m > 1$ и [22, предложение 4.2] получаем, что элементы порядка 3 из C действуют несвободно на группах \widetilde{P}_1 и $O(C)$. Поэтому $p_2 = 3$ и, следовательно, ввиду леммы 2.1 выполняются утверждения (а2) или (а3).

Пусть теперь $p_2 = 2$. В S существует $\{p_1, p_3\}$ -холлова подгруппа U . Можно считать, что $U = P_1 P_3$. Поскольку граф $\Gamma(U)$ несвязен, ввиду п. (а) предложения 1 подгруппа U есть группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Поскольку $1 \neq O_{p_1}(\widetilde{S}) \leq F(\widetilde{U})$, ввиду [17, теорема 10.3.1] подгруппа P_3 циклическая, $F(U) \leq P_1$ и фактор-группа $P_1/F(U)$ циклическая. Ввиду п. (а) леммы 2.1 вершины p_3 и p смежны в графе $\Gamma(G)$ для всех $p \in \pi(F) \setminus \{p_3\}$. Поэтому p_1 не делит $|F|$. Заметим еще, что силовские p -подгруппы группы G циклические для каждого $p \in \pi(F) \cup \{p_3\}$, так как в противном случае $\{2, p_1, p\}$ — треугольник в графе $\Gamma(G)$. Имеем $C_S(P_3) \leq O_{p'_3, p_3}(S) = O_{p'_3}(S)P_3$ и $S = O_{p'_3}(S)N_S(P_3)$. Отсюда, поскольку $\text{Aut}(P_3)$ — циклическая группа, $S/O_{p'_3}(S)P_3$ — циклическая $\{2, p_1\}$ -группа. Если порядок последней группы четен, то по п. (а) леммы 2.1, примененному к группе $S/O_{p'_3}(S)P_3$, вершина 2 смежна с любой вершиной из $\pi(F) \setminus \{2\}$ и, следовательно, граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, p_3, p\}$ для $p \in \pi(F) \setminus \{2, p_3\}$; противоречие. Поэтому $O^{2'}(S) \leq O_{p'_3}(S)$ и $S = UO^{2'}(S)$. Имеем

$O^{2',2}(S) < O^{2'}(S)$. Пусть K — полный прообраз в $O^{2'}(S)$ подгруппы $\Phi(O^{2'}(S))/O^{2',2}(S)$. Положим $\tilde{G} = G/KO_2(S)$. Тогда $O_2(\tilde{G})$ — неединичная элементарная абелева 2-группа. Пусть E — последний член ряда коммутантов группы \tilde{G} . Тогда $[E, P_3] \leq O_2(\tilde{G})$. Кроме того, $O_2(\tilde{G}) \leq E$, так как в противном случае граф $\Gamma(G)$ содержит треугольник $\{2, p_3, p\}$ для $p \in \pi(F) \setminus \{2, p_3\}$.

Предположим, что $S/O^{2'}(S)$ — непримарная группа. Тогда $S/O^{2'}(S)$ — $\{p_1, p_3\}$ -группа с несвязным графом простых чисел. Применяя лемму 2.3 к группе $G/O_{p'_3}(S)$, получим, что либо $p_1 = 3$ и $\overline{G} \cong \text{Aut}(Sz(8))$, либо $p_1 p_3$ не делит $|\overline{G}|$ и группа \overline{G} изоморфна $L_2(q)$ для $q \in \{5, 7, 8, 17\}$, $Sz(8)$ или $Sz(32)$. В первом случае p_3 не делит $|\overline{G}|$, иначе p_3 делит $|F|$ и, значит, силовские p_3 -подгруппы группы G нециклические, так что выполняется утверждение (62). Во втором случае группа E является *EPPO*-группой, так что ввиду п. (в) предложения 1 выполняется утверждение (61).

Предположим теперь, что $S/O^{2'}(S)$ — примарная группа. Тогда $S = O^{2'}(S) \rtimes P_3$. Если p_3 не делит $|\overline{G}|$, то, как и в предыдущем абзаце, показывается, что выполняются утверждения (61) или (62).

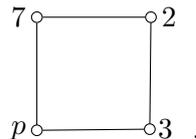
Пусть p_3 делит $|\overline{G}|$. Если p_3 не делит $|F|$, то ввиду лемм 2.4 и 2.5 выполняется утверждение (63). Пусть p_3 делит $|F|$. Если $|P_3| > 3$ или $E/O_2(E)$ — простая группа, то силовские p_3 -подгруппы группы G нециклические, что не так. Поэтому $|P_3| = 3$ и $E/O_2(E)$ — квази-простая группа с центром порядка 3. Но ввиду [1, теорема 2; 9; 10, Tabl. 8.3, 8.5] силовские 3-подгруппы группы $E/O_2(E)$ нециклические; противоречие. \square

Теорема теперь следует из лемм 2.2–2.6. \square

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что все случаи из заключений лемм 2.2–2.6 реализуются.

3. Пример конечной разрешимой группы фиттинговой длины 5, граф простых чисел которой является 4-циклом

Вычисления в компьютерной системе GAP (см. [15]) показывают, что существует единственная (с точностью до изоморфизма) группа G_1 , которая является нерасщепляемым расширением группы порядка 3 посредством группы $2 \cdot S_4^-$. Группа G_1 может быть построена как группа подстановок степени 34. Тогда $Z(G_1) = \langle z \rangle$, где z — единственная инволюция в G_1 , и $O_3(G_1) = \langle x \rangle \cong \mathbb{Z}_3$. Возьмем элемент y порядка 4 из $O_2(G_1) \cong Q_8$. Пусть $G_2 = \mathbb{Z}_7 \wr G_1$ — регулярное сплетение группы порядка 7 с группой G_1 . Тогда $G_2 = V \rtimes G_1$, где V — база этого сплетения, изоморфная элементарной абелевой 7-группе порядка 7^{144} . Положим $G_3 = C_V(z)$ и $G_4 = G_3 \rtimes G_1$. В группе G_3 рассмотрим нормальную в G_4 подгруппу $G_5 = [G_3, O_3(G_1)]$. Положим $G_6 = G_5 \rtimes G_1$. Поскольку $|C_V(z)| = |V|/2$, $|C_V(x)| = |V|/3$ и $|C_V(y)| = |V|/4$, имеем $G_5 \neq 1$ и $C_{G_5}(x) = 1$. Возьмем теперь произвольное простое число p , большее 7, и рассмотрим регулярное сплетение $G_7 = \mathbb{Z}_p \wr G_6$. Пусть E — база этого сплетения. В группе E рассмотрим нормальную в G_7 подгруппу $G_8 = [E, \langle z \rangle]$. Положим $G = G_8 \rtimes G_6$. Из построения видно, что $l_F(G) = 5$ и граф $\Gamma(G)$ есть 4-цикл



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеева О.А., Кондратьев А.С. Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 3–12.
2. Кондратьев А.С., Осинская А.А., Супруненко И.Д. О поведении элементов простого порядка из цикла Зингера в представлениях специальной линейной группы // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 179–186.

3. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 150–158.
4. **Кондратьев А.С., Храмцов И.В.** О конечных четырехпримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 142–159.
5. **Мазуров В.Д.** Характеризации конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.
6. **Подуфалов Н.Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6 // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 2. С. 200–203.
7. **Aschbacher M.** Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986. 274 p.
8. An atlas of Brauer characters / C. Jansen [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1995. 327 p.
9. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
10. **Bray J.N., Holt D.F., Roney-Dougal C.M.** The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 438 p. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 407).
11. **Brandl R.** Finite groups all of whose elements are of prime power order // Boll. Un. Mat. Ital. A (5). 1981. Vol. 18, no. 3. P. 491–493.
12. **Dornhoff L.** Group representation theory. Part A. N. Y.: Dekker, 1971. 254 p.
13. **Fleischmann P., Lempken W., Tiep P.H.** Finite p' -semiregular groups // J. Algebra. 1997. Vol. 188, no. 2. P. 547–579.
14. **Fletcher L.R., Stellmacher B., Stewart W.B.** Endliche Gruppen, die kein Element der Ordnung 6 enthalten // Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2). 1977. Vol. 28, no. 110. P. 143–154.
15. GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4.12: [e-resource]. 2008.
URL: <http://www.gap-system.org>.
16. **Gordon L.M.** Finite simple groups with no elements of order six // Bull. Austral. Math. Soc. 1977. Vol. 17, no. 2. P. 235–246.
17. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
18. **Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.** The classification of the finite simple groups. Number 3. Part I. Providence: Amer. Math. Soc., 1998. 420 p. (Math. Surveys Monogr; vol. 40, no. 3).
19. **Higman G.** Finite groups in which every element has prime power order // J. London Math. Soc. (2). 1957. Vol. 32. P. 335–342.
20. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups: lecture notes. Michigan: University Michigan, 1968. 77 p.
21. **Lucido M.C.** Groups in which the prime graph is a tree // Boll. Unione Mat. Ital. (8). 2002. Vol. 5-B, no. 1. P. 131–148.
22. **Stewart W.B.** Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. 1973. Vol. 426, no. 4. P. 653–680.
23. **Suzuki M.** On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. Vol. 75, no. 1. P. 105–145.

Алексеева Оксана Алексеевна
канд. физ.-мат. наук
зам. зав. кафедрой
Московский университет им. С. Ю. Витте
e-mail: Palazzoksana@gmail.com

Поступила 15.09.15

Кондратьев Анатолий Семенович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. сектором
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
профессор
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: A.S.Kondratiev@imm.uran.ru

УДК 517.977

ОЦЕНИВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВА

Б. И. Ананьев

Рассмотрена задача об оценивании случайного множества, представляющего собой область достижимости дифференциального уравнения (ДУ) Ито по начальным данным. Доказано марковское свойство области достижимости в пространстве замкнутых множеств. Для приближенных вычислений случайное начальное множество ДУ аппроксимируется конечным множеством на целочисленной многомерной сетке, а ДУ заменяется многошаговой цепью Маркова. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: стохастическое дифференциальное уравнение, цепь Маркова, случайное множество.

B. I. Anan'ev. Estimation of the evolution of a random set.

An estimation problem for a random set that is a reachability domain of the Ito differential equation with respect to its initial data is considered. The Markov property of the reachability set in the space of closed sets is proved. For the purposes of numerical solution, a random initial set of the differential equation is approximated by a finite set on an integer multidimensional grid, and the differential equation is replaced by a multistep Markov chain. Examples are considered.

Keywords: stochastic differential equation, Markov chain, random set.

Введение

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) задана фильтрация \mathcal{A}_t , $t \in [0, T]$, удовлетворяющая обычным условиям: $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}$ при $t \leq s$, $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_{t+}$, σ -алгебра \mathcal{A}_0 пополнена пренебрежимыми множествами. На указанном вероятностном пространстве с фильтрацией рассматривается стохастическое n -векторное дифференциальное уравнение (СДУ) Ито

$$dx_t = b(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dw_t, \quad t \in [0, T], \quad (0.1)$$

где w_t — стандартный винеровский m -мерный процесс, согласованный с \mathcal{A}_t . Предполагаем, что вектор-функция $b(t, x)$ и матричная функция $\sigma(t, x)$ в уравнении (0.1) являются борелевскими отображениями по обоим переменным, удовлетворяющими условиям Липшица и подлинейного роста:

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| &\leq c|x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \\ |b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 &\leq c^2(1 + |x|^2), \end{aligned} \quad (0.2)$$

где символом $|G|$ обозначается величина $\sqrt{\text{tr}GG'}$ для матриц G произвольной размерности, $c > 1$. При этих условиях для всякого случайного начального \mathcal{A}_0 -измеримого вектора ξ , $E|\xi|^2 < \infty$, существует единственный n -векторный процесс x_t с почти наверное (п.н.) непрерывными траекториями, согласованный с \mathcal{A}_t , удовлетворяющий уравнению (0.1) в интегральном смысле и такой, что $x_0 = \xi$ п.н. Данный процесс называется *сильным решением* (см. [1, теорема 6.2.2] или [2, теорема 5.2.1]) уравнения (0.1).

Предположим, что начальный случайный вектор ξ неизвестен и задано лишь включение

$$\xi(\omega) \in S(\omega) \text{ п.н.} \quad (0.3)$$

где S — случайное замкнутое множество (СЗМ). Напомним [3–5], что отображение $S : \Omega \rightarrow \mathcal{F}$, где \mathcal{F} — совокупность замкнутых подмножеств в \mathbb{R}^n , во включении (0.3) называется СЗМ, если множество $\{S \cap K \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}_0$ для всякого множества $K \in \mathcal{K}$. Здесь и далее \mathcal{K} — совокупность

компактных подмножеств в \mathbb{R}^n . В приведенном определении использована измеримость относительно начальной σ -алгебры \mathcal{A}_0 , в связи с чем СЗМ в (0.3) далее часто обозначается как S_0 .

В процессе эволюции системы (0.1) начальное СЗМ S_0 преобразуется в случайное множество S_t . Целью настоящей статьи является точное определение множества S_t как СЗМ и исследование некоторых способов его аппроксимации. В детерминированном случае ($\sigma = 0$) задача сводится к построению *области достижимости* по начальным данным для соответствующего уравнения. Последняя задача интенсивно исследуется многими авторами как при наличии неопределенного управления в системе, так и без него. Отметим книгу [6], где, в частности, рассматриваются вопросы внешней и внутренней аппроксимации областей достижимости детерминированных систем при наличии неопределенного управления. В стохастическом случае рассмотрение осложняется вопросами измеримости получаемых множеств. В случае неполной информации о фазовом состоянии и возмущениях в системе методы оценивания изложены в работах [7;8]. Нам потребуются некоторые неравенства для моментов решений уравнения (0.1). В книге [1, разд. 7.1] установлены неравенства

$$\mathbb{E}|x_t|^{2p} \leq (1 + \mathbb{E}|\xi|^{2p})e^{kt}, \quad \mathbb{E}|x_t - \xi|^{2p} \leq d(1 + \mathbb{E}|\xi|^{2p})t^p e^{kt}, \quad (0.4)$$

где $p \in \mathbb{N}$, $k = 2p(2p + 1)c^2$ и d — константы, зависящие только от числа p , величины c в (0.2) и длины T временного интервала. Здесь и далее \mathbb{N} — множество натуральных чисел, \mathbb{E} — математическое ожидание. Из неравенств (0.4) с использованием марковского свойства решений получается оценка

$$\mathbb{E}|x_t - x_s|^{2p} \leq c_1|t - s|^p \quad \forall t, s \in [0, T], \quad (0.5)$$

где константа c_1 зависит только от p , c , T и $\mathbb{E}|\xi|^{2p}$. Неравенства (0.4) и (0.5) используем ниже для установления п.н. непрерывности решений уравнения (0.1) по начальным данным. Среднеквадратичная непрерывность и непрерывность по вероятности относительно начальных данных для решений стохастических уравнений подробно исследованы в монографии [9]. Однако мы будем использовать более сильное условие п.н. непрерывности.

1. Постановка задачи

Установим вначале требуемое свойство непрерывности решений по начальным данным. Пусть x_t и \hat{x}_t — решения уравнения (0.1) с начальными данными ξ и η соответственно, причем $\mathbb{E}|\xi|^{2p} \leq \infty$, $\mathbb{E}|\eta|^{2p} \leq \infty$. Положим $g_t = x_t - \hat{x}_t$, $a(t, \omega) = b(t, x_t) - b(t, \hat{x}_t)$, $\gamma(t, \omega) = \sigma(t, x_t) - \sigma(t, \hat{x}_t)$. Тогда по формуле Ито (см. [1, разд. 5.3] или [2, теорема 4.2.1]) находим $|g_t|^{2p} = |\xi - \eta|^{2p} + \int_0^t 2p|g_s|^{2p-2}g'_s(a(s, \omega)ds + \gamma(s, \omega)dw_s) + \int_0^t p|g_s|^{2p-2}|\gamma(s, \omega)|^2ds + \int_0^t 2p(p-1)|g_s|^{2p-4}|g'_s\gamma(s, \omega)|^2ds$. Переходя к математическим ожиданиям, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|g_t|^{2p} &= \mathbb{E}|\xi - \eta|^{2p} + \int_0^t \mathbb{E} \left(2p|g_s|^{2p-2}g'_s a(s, \omega) + p|g_s|^{2p-2}|\gamma(s, \omega)|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2p(p-1)|g_s|^{2p-4}|g'_s\gamma(s, \omega)|^2 \right) ds \leq \mathbb{E}|\xi - \eta|^{2p} + (2p+1)pc^2 \int_0^t \mathbb{E}|g_s|^{2p} ds. \end{aligned}$$

Отсюда, используя неравенство Гронуолла, приходим к оценке

$$\mathbb{E}|x_t - \hat{x}_t|^{2p} \leq \mathbb{E}|\xi - \eta|^{2p} e^{(2p+1)pc^2 t}. \quad (1.1)$$

Следовательно, с учетом оценки (0.5) и неравенства Минковского справедливо неравенство

$$\mathbb{E}|x_t - \hat{x}_s|^{2p} \leq 2^{2p} \left(c_1|t - s|^p \vee \mathbb{E}|\xi - \eta|^{2p} e^{(2p+1)pc^2 T} \right) \leq c_2 \left(|t - s|^p \vee \mathbb{E}|\xi - \eta|^{2p} \right), \quad (1.2)$$

где $a \vee b = \max\{a, b\}$, константа $c_2 = 2^{2p}(c_1 \vee e^{(2p+1)pc^2T})$ зависит только от p, c, T и $E|\xi|^{2p} \vee E|\eta|^{2p}$.

Пусть $x_t(\omega; t_0, y)$ — решение уравнения (0.1) при $t \geq t_0$ с детерминированным начальным условием $x_{t_0}(\omega; t_0, y) = y$. Очевидно, что для этого решения выполняется оценка (1.2) для произвольного $p \in \mathbb{N}$, причем эта оценка равномерна по $t, s \in [t_0, T]$ и $\xi = y, \eta = z \in B_r = \{x : |x| \leq r\}, r \in \mathbb{N}$. Далее, не ограничивая общности, полагаем $t_0 = 0$. Поскольку $|y - z|^2 \leq 2r|y - z|$ при $y, z \in B_r$, то неравенство (1.2) перепишем в виде

$$E|x_t(\cdot; 0, y) - x_s(\cdot; 0, z)|^{2p} \leq c_3(p, r)|[t, y] - [s, z]|^p, \quad (1.3)$$

где $c_3(p, r) = 2rc_2$ и символ $[u, x]$ означает вектор-столбец из \mathbb{R}^{n+1} . Докажем лемму.

Лемма 1. *Существуют модификация $\hat{x}_t(\omega; 0, y)$ процесса $x_t(\omega; 0, y)$ (т.е. $P\{\hat{x}_t(\omega; 0, y) \neq x_t(\omega; 0, y)\} = 0 \forall t \in [0, T], \forall y \in \mathbb{R}^n$) и множество $N \in \mathcal{A}$, $P(N) = 0$, нулевой вероятности такие, что отображение $[t, y] \mapsto \hat{x}_t(\omega; 0, y)$ непрерывно при всяком фиксированном $\omega \in N^c = \Omega \setminus N$. На всяком ограниченном подмножестве из \mathbb{R}^{n+1} указанное отображение локально непрерывно по Гёльдеру с показателем $\lambda \in (0, 1/2 - (n+1)/(2p))$, если $p > n+1$.*

Доказательство. Воспользуемся результатом [10, теорема II.19], согласно которому при выполнении неравенства (1.3) существует непрерывная модификация $\hat{x}_t^r(\omega; 0, y)$ процесса $x_t(\omega; 0, y)$ на множестве $[0, T] \times B_r$. То есть найдется множество $N_r \in \mathcal{A}$, $P(N_r) = 0$, нулевой вероятности такое, что отображение $[t, y] \mapsto \hat{x}_t^r(\omega; 0, y)$ непрерывно при всяком фиксированном $\omega \in N_r^c$, если только $p > n+1$. Модификация \hat{x}_t^r дополнительно обладает свойством локальной непрерывности по Гёльдеру на множестве $[0, T] \times B_r$ с показателем $\lambda \in (0, 1/2 - (n+1)/(2p))$, а именно для всякого $\omega \in N_r^c$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|\hat{x}_t^r(\omega; 0, y) - \hat{x}_s^r(\omega; 0, z)| \leq \varepsilon|[t, y] - [s, z]|^\lambda, \text{ если } |[t, y] - [s, z]| \leq \delta.$$

Зафиксируем число p и определим отображение $\hat{x}_t(\omega; 0, y) = \hat{x}_t^r(\omega; 0, y)$ на непересекающихся множествах $[0, T] \times (B_r \setminus B_{r-1}^0)$, где B_r^0 — открытые шары радиуса r , $\omega \in N_r^c$ для всех $r \in \mathbb{N}$. Тем самым вне множества $N = \cup_{i \geq 1} N_i$ нулевой вероятности определено искомое непрерывное отображение, которое даже локально непрерывно по Гёльдеру с показателем λ на ограниченных подмножествах в \mathbb{R}^{n+1} . \square

З а м е ч а н и е 1. За счет выбора большого числа p показатель Гёльдера в лемме 1 может быть приближен к $1/2$. Однако он не может равняться $1/2$, поскольку известно, что траектории винеровского процесса непрерывны по Гёльдеру с любым показателем, строго меньшим $1/2$, [10, с. 96]. Достаточно рассмотреть скалярное уравнение $dx_t = dw_t$. Утверждение, близкое к лемме 1, сформулировано без доказательства в статье [11]. В дальнейшем под процессом $x_t(\omega; 0, y)$ будем понимать отображение $\hat{x}_t(\omega; 0, y)$, построенное в лемме 1. Аналогично устанавливается непрерывность отображения $x_t(\omega; s, y)$ по всем $0 \leq s \leq t \leq T$ и y при $p > n+2$.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что отображение $x_t(\cdot; 0, y)$ при фиксированных t, y измеримо относительно ω -алгебры $\mathcal{F}_t^w = \sigma\{w(s), s \in [0, t]\} \subset \mathcal{F}_t$, пополненной пренебрежимыми множествами. Напомним, что согласно теореме Леви m -векторный винеровский процесс однозначно определяется условиями: 1) процесс w_t согласован с потоком \mathcal{A}_t , имеет п.н. непрерывные траектории и $P\{w_0 = 0\} = 1$; 2) $E[w_t | \mathcal{F}_s] = w_s$ и $E[(w_t - w_s)(w_t - w_s)' | \mathcal{F}_s] = I(t - s)$, $t \geq s$, (см. [12, теорема 4.2]). Здесь I — единичная $n \times n$ -матрица. Известно также, что приращение $w_t - w_s$ является гауссовским вектором с параметрами $0, I(t - s)$ и не зависит от σ -алгебры \mathcal{F}_s при $t > s$.

Дадим основное определение.

О п р е д е л е н и е 1. *Случайной областью достижимости* уравнения (0.1) по начальным данным, лежащим в СЗМ S_0 , назовем множество $S_t(\omega; S_0) = cl\{x_t(\omega; 0, y) : y \in S_0(\omega)\}$.

Необходимо показать, что так определенное множество действительно есть СЗМ. Для этого применим теорему Химмельберга [13, теорема 3.5] (см. также [5, теорема 2.3]), согласно

которой для СЗМ $S(\omega)$, заданного на полном вероятностном пространстве, условия измеримости множеств полного прообраза $S^-(B) = \{\omega : S(\omega) \cap B \neq \emptyset\}$ эквивалентны для компактных, замкнутых, открытых и произвольных борелевских множеств B . Другие эквивалентные условия: функция расстояния $d(x, S(\omega)) = \inf\{|x - y| : y \in S(\omega)\}$ измерима для любого вектора x ; существует последовательность $\xi_k(\omega)$ измеримых селекторов для $S(\omega)$ таких, что $S(\omega) = \text{cl}\{\xi_k(\omega), k \in \mathbb{N}\}$ п.н. (условие Кастана); график $\text{graph}\{(\omega, x) \in \Omega \times \mathbb{R}^n : x \in S(\omega)\}$ лежит в произведении $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ σ -алгебр. По еще одной теореме Химмельберга [13, теорема 6.5] композиция $x_t(\omega; 0, S_0(\omega))$ будет слабо измеримым отображением, а поскольку функции расстояния до множества и его замыкания совпадают, то в силу эквивалентности условий измеримости заключаем, что $S_t(\omega; S_0)$ есть \mathcal{A}_t -измеримое СЗМ.

Поскольку винеровский процесс может быть задан независимо от случайного множества S_0 на польском пространстве \mathbf{W}_0^m непрерывных m -векторных функций $w(t)$ на $[0, T]$, $w(0) = 0$, с мерой Винера P^w , то, не ограничивая общности, можно считать, что вероятностное пространство (Ω, \mathcal{A}, P) таково, что $\Omega = \mathbf{W}_0^m \times \mathcal{F}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbf{W}_0^m) \otimes \sigma_{\mathcal{F}}$ — σ -алгебра, пополненная по мере $P^w \otimes P_0$. Здесь P_0 — вероятностное распределение начального множества на \mathcal{F} .

Наша цель — изучить основные свойства СЗМ S_t и его аппроксимации на целочисленной многомерной сетке.

2. Случайные замкнутые множества

В данном разделе излагаются необходимые сведения о случайных замкнутых множествах.

2.1. Общие свойства СЗМ

Пусть $T_S(K) = P(S^-(K))$, $K \in \mathcal{K}$, — функция множества, называемая *сопровождающим функционалом* СЗМ. Эта функция обладает следующими свойствами [3; 4]:

- (а) $T_S(\emptyset) = 0$ и $0 \leq T_S(K) \leq 1$ для всякого $K \in \mathcal{K}$;
- (б) функция T_S монотонно возрастает ($K_1 \subset K_2 \Rightarrow T_S(K_1) \leq T_S(K_2)$) и для $k \geq 2$, K_1, K_2, \dots, K_k в \mathcal{K} , $T_S\left(\bigcap_{i=1}^k K_i\right) \leq \sum_{\emptyset \neq I \subset 1:k} (-1)^{|I|+1} T_S\left(\bigcup_{i \in I} K_i\right)$;
- (в) если $K_k \downarrow K$ (т. е. $K_{k+1} \subset K_k$, $K = \bigcap_{k \geq 1} K_k$), то $T_S(K_k) \downarrow T_S(K)$.

Условие (б) называется *свойством ∞ -альтернированности*, поэтому функцию множества со свойствами (а)–(в) иногда называют *емкостью ∞ -порядка*. Символом $|I|$ обозначено число элементов в множестве I . Сопровождающий функционал играет роль аналога распределения для случайного вектора. Важно отметить, что согласно *теореме Шоке* [3; 4] верно и обратное, т. е. всякой емкости ∞ -порядка $T(K)$ сопоставляется единственная вероятностная мера P на измеримом пространстве $(\mathcal{F}, \sigma_{\mathcal{F}})$, где $\sigma_{\mathcal{F}}$ — σ -алгебра на \mathcal{F} , порожденная семействами $\mathcal{F}_K = \{F \in \mathcal{F} : F \cap K \neq \emptyset\}$. Эта мера обладает свойством $P(\mathcal{F}_K) = T(K)$ для всякого $K \in \mathcal{K}$. Подчеркивая, что сопровождающий функционал строится для СЗМ S_t , будем часто обозначать его как T_t . Приведем пример СЗМ и его сопровождающего функционала.

Пример 1. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ — любая полунепрерывная сверху (пн. св.) функция. На вероятностном пространстве $([0, 1], \mathcal{L}[0, 1], \lambda)$ с обычной мерой Лебега λ рассмотрим СЗМ $S(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq \xi(\omega)\}$, где $\xi(\omega) \equiv \omega$ — равномерно распределенная случайная величина. Поскольку $\{S(\omega) \cap K \neq \emptyset\} = \{\max_{x \in K} f(x) \geq \omega\}$ и $\lambda\{\max_{x \in K} f(x) \geq \omega\} = \max_{x \in K} f(x)$, то функция множества $T_S(K) = \max_{x \in K} f(x)$ — сопровождающий функционал СЗМ $S(\omega)$, удовлетворяющий свойствам (а)–(в).

Другими примерами СЗМ служат случайные шары $B_{\xi}(\zeta)$, где ξ — случайный вектор и $\zeta \geq 0$ — случайная величина, выпуклые оболочки конечного набора случайных векторов со $\{\xi_i, i \in 1 : k\}$. Функция множества T на \mathcal{K} называется *максимивной*, если $T(A \cup B) = T(A) \vee T(B)$. Такая функция обязательно удовлетворяет условию (б). Если она еще обладает

и свойством (в), то функция $f(x) = T(\{x\})$ является пн. св., и функция множества T может быть представлена как в примере 1. Рассмотрим распределение $\mu(K) = P\{\xi \in K\}$ измеримого селектора ξ для S на компактных множествах. Ввиду включения (0.3) имеем

$$\mu(K) \leq T(K) \quad \text{для всех } K \in \mathcal{K}. \quad (2.1)$$

Определим для емкости ∞ -порядка T ядро $\mathcal{C}(T)$, состоящее из всех вероятностных распределений μ на \mathbb{R}^n , удовлетворяющих условию (2.1). Справедлива *теорема Норберга* [4, с. 122]: если для пары $\{\mu, T\}$, состоящей из вероятностного распределения μ и емкости ∞ -порядка T , верно включение $\mu \in \mathcal{C}(T)$, то существуют вероятностное пространство (Ω, \mathcal{A}, P) , случайный вектор ξ и СЗМ S , заданные на этом пространстве и такие, что выполняется включение (0.3), а μ и T служат, соответственно, их распределениями. Сопровождающий функционал согласно [5, теорема 5.13] можно рассматривать как верхнюю вероятность для семейства $\mathcal{C}(T)$, т. е. $T(K) = \sup\{\mu(K) : \mu \in \mathcal{C}(T)\}$, $K \in \mathcal{K}$, причем верхняя грань здесь достигается для каждого фиксированного K . Что касается топологических свойств множества \mathcal{F} замкнутых подмножеств из \mathbb{R}^n , то оно снабжается обычно топологией Фелла \mathcal{T}_f [5], порождаемой подбазой, состоящей из семейств \mathcal{F}_G и $\mathcal{F}^K = \{F \in \mathcal{F} : F \cap K = \emptyset\}$, где G и K — произвольные, соответственно, открытые и компактные множества. В топологии \mathcal{T}_f множество \mathcal{F} становится компактным хаусдорфовым пространством со счетной базой и, следовательно, польским. Его σ -алгебра σ_f , рассмотренная выше, совпадает тогда с борелевской σ -алгеброй $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. Сходимость $S_k \rightarrow S$ в топологии Фелла эквивалентна сходимости функций расстояния $d(x, S_k) \rightarrow d(x, S) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Последовательность компактных СЗМ сходится в метрике Хаусдорфа тогда и только тогда, когда она сходится в топологии Фелла и равномерно ограничена. Будем называть СЗМ S *простым*, если существует не более чем счетное разбиение $\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$ такое, что $S(\omega) \equiv S_i$ при $\omega \in \Omega_i$. Здесь S_i — замкнутые множества для каждого $i \in \mathbb{N}$, знак \bigsqcup означает объединение непересекающихся множеств.

Если T_S — сопровождающий функционал для СЗМ S , заданного на пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) , то наряду с ядром $\mathcal{C}(T_S)$ рассматривают множество $\mathbb{S}(S)$ всех \mathcal{A} -измеримых селекторов для S . Обозначим через $\mathcal{M}(S) = \{\mu_\xi : \xi \in \mathbb{S}(S)\}$ множество вероятностных мер на \mathbb{R}^n , индуцированных всевозможными селекторами. Пусть $\mathcal{M}(S)(A) = \{\mu_\xi(A) : \xi \in \mathbb{S}(S)\}$ — числовое подмножество отрезка $[0, 1]$ для произвольного события $A \in \mathcal{A}$. Если ввести еще одно семейство вероятностных мер $\Delta(S) = \{\mu : \mu(A) \in \mathcal{M}(S)(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}\}$, то будут выполняться включения $\mathcal{M}(S) \subset \Delta(S) \subset \mathcal{C}(T_S)$, причем эти включения, вообще говоря, строгие [14]. Введенные множества в разной степени характеризуют степень неточности знания случайной величины ξ , удовлетворяющей включению (0.3). Отметим, что любая емкость ∞ -порядка допускает расширение $T(B) = \sup\{T(K) : K \in \mathcal{K}, K \subset B\}$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Если величина $T_S(B) = P(S^-(B))$ является верхней границей для $\mu_\xi(B)$, где ξ — селектор, то величина $1 - T_S(B^c) = P(S_-(B))$ будет нижней границей. Здесь $S_-(B) = \{\omega : \emptyset \neq S(\omega) \subset B\}$ — нижний прообраз мультифункции.

Рассмотрим ряд элементарных способов построения ограничивающего СЗМ для некоторых классов начальных распределений уравнения (0.1). Пусть семейство $\{\mu_i, i \in I\}$ начальных распределений абсолютно непрерывно относительно конечной борелевской меры μ_0 на \mathbb{R}^n и функция $f_0(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ пн. св., где f_i — плотности соответствующих мер. Тогда функция множества $T(K) = \max_{x \in K} f_0(x) \mu_0(\mathbb{R}^n)$ служит согласно примеру 1 сопровождающим функционалом некоторого СЗМ, ограничивающего по теореме Норберга любой начальный вектор с распределением из семейства. Более общо, пусть $\{\mu_i, i \in I\}$ — семейство вероятностных распределений, для которого функция множества $T(K) = \sup_{i \in I} \mu_i(K)$ является емкостью ∞ -порядка. Тогда опять же по теореме Норберга любой начальный вектор с распределением из семейства будет включаться в некоторое СЗМ с сопровождающим функционалом T . Можно утверждать даже следующее. Если семейство $\{\mu_i, i \in \mathbb{N}\}$ не более чем счетно, то, конструируя произведение соответствующих вероятностных пространств, можно получить общее вероятностное пространство, на котором включение (0.3) выполняется для всех начальных

векторов, соответствующих μ_i .

Пример 2. В качестве конкретного семейства распределений возьмем рассматриваемую в робастной статистике модель ε -загрязнения $\{\mu_\alpha : \mu_\alpha = (1 - \varepsilon)\mu_0 + \varepsilon\alpha\}$ с несчетным количеством элементов, где параметром служит любое вероятностное распределение α на \mathbb{R}^n . Очевидно, что функция множества $T(K) = \sup_\alpha \mu_\alpha(K) = (1 - \varepsilon)\mu_0(K) + \varepsilon$ для $K \neq \emptyset$ и равная нулю для $K = \emptyset$ удовлетворяет свойствам (а)–(в) и, следовательно, однозначно определяет некоторое СЗМ. Это множество в \mathbb{R}^n может быть представлено как $S(x, y) = \{x\}$, если $y = 0$, и $S(x, y) = \mathbb{R}^n$, если $y = 1$, на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) , где $\Omega = \mathbb{R}^n \times \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \otimes 2^{\{0, 1\}}$, $P = \mu_0 \otimes p_\varepsilon$, $p_\varepsilon(0) = 1 - \varepsilon$, $p_\varepsilon(1) = \varepsilon$. Действительно, по формуле полной вероятности будем иметь $P\{S \in \mathcal{F}_K\} = P[\{S \in \mathcal{F}_K\} | y = 0]p_\varepsilon(0) + P[\{S \in \mathcal{F}_K\} | y = 1]p_\varepsilon(1) = \mu_0(K)(1 - \varepsilon) + \varepsilon$ для $K \neq \emptyset$.

2.2. Аппроксимация СЗМ на целочисленной многомерной сетке

Под целочисленной многомерной сеткой будем понимать множество \mathbb{Z}_N^n точек x в \mathbb{R}^n , для которых каждая компонента имеет вид $x_i = k2^{-N}$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ при зафиксированном $N \in \mathbb{N}$. Здесь \mathbb{Z} — множество целых чисел. Рассмотрим топологическое пространство $(\mathbb{Z}_N^n, 2^{\mathbb{Z}_N^n})$ с дискретной топологией. Это локально-компактное хаусдорфово пространство со счетной базой (ЛКС-пространство), в котором топология совпадает с борелевской σ -алгеброй. Если число N фиксировано, будем опускать его из обозначения \mathbb{Z}_N^n . Пусть S — некоторое СЗМ, заданное на полном пространстве (Ω, \mathcal{A}, P) . Определим специальным образом индуцированную вероятность на множестве $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n) = 2^{\mathbb{Z}^n}$ всех подмножеств сетки \mathbb{Z}^n . Отметим, что непосредственное определение вероятности путем вычисления $P(S^-(B))$, где $B \subset \mathbb{Z}^n$, имеет мало смысла, поскольку такая вероятность весьма часто будет тождественно равна нулю. Достаточно рассмотреть СЗМ $S = \{\xi\}$, где ξ — гауссовский вектор. Далее каждой точке $v \in \mathbb{Z}^n$ поставим в соответствие многомерный куб $\hat{v} = \times_{i=1}^n [v_i, v_i + 2^{-N}]$, а каждому множеству $V \subset \mathbb{Z}^n$ поставим в соответствие объединение $\hat{V} = \cup_{v \in V} \hat{v}$ соответствующих кубов \hat{v} . Отметим, что внутренности кубов \hat{u} и \hat{v} не пересекаются, если $u \neq v$. Определим множества $S_N = \{v \in \mathbb{Z}^n : \hat{v} \cap S \neq \emptyset\}$ и $\hat{S}_N = \{\hat{v} : \hat{v} \cap S \neq \emptyset\}$. Поскольку $S_N = (S - B_N) \cap \mathbb{Z}^n$, где $B_N = \times_{i=1}^n [0, 2^{-N}]$, то множество S_N является СЗМ. Множество $\hat{S}_N = S_N + B_N$ также СЗМ. Справедлива

Лемма 2. На измеримом пространстве $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n), 2^{\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)})$ существует вероятность P_S такая, что $P_S(\mathcal{F}_V) = F_S(V) = P\{S_N \in \mathcal{F}_V\} = P(S^-(\hat{V}))$ для всех конечных подмножеств $V \subset \mathbb{Z}^n$. Здесь $\mathcal{F}_V = \{A \subset \mathbb{Z}^n : A \cap V \neq \emptyset\}$.

Доказательство. Поскольку множества $\{S_N \cap V \neq \emptyset\}$ и $\{S \cap \hat{V} \neq \emptyset\}$ совпадают, то функция $F_S(V)$, заданная на конечных (компактных) подмножествах из $(\mathbb{Z}^n, 2^{\mathbb{Z}^n})$, однозначно определена. Эта функция является емкостью ∞ -порядка, поскольку обладает

- (1) $F_S(\emptyset) = 0$, $0 \leq F_S(V) \leq 1$ для всякого конечного V ;
- (2) F_S монотонно возрастает ($V_1 \subset V_2 \Rightarrow F_S(V_1) \leq F_S(V_2)$) и для $k \geq 2$, конечных K_1, K_2, \dots, K_k имеем $F_S\left(\bigcap_{i=1}^k K_i\right) \leq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1, \dots, k\}} (-1)^{|I|+1} F_S\left(\bigcup_{i \in I} K_i\right)$.

Свойства (1), (2) совпадают со свойствами (а), (б) общих СЗМ, так как для функции $P(S^-(\hat{V}))$ выполняются условия ∞ -альтернированности. Условие (в) для емкостей F_S выполняется автоматически. Осталось воспользоваться теоремой Шоке [3; 4], справедливой для любых ЛКС-пространств. Согласно теореме на пространстве $(\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n), 2^{\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)})$ замкнутых подмножеств существует единственная вероятность P_S , порожденная сопровождающим функционалом $F_S(V) = P(S^-(\hat{V}))$ со свойствами (1), (2) на всех конечных подмножествах. Поскольку топология дискретна, множество $\mathcal{F}(\mathbb{Z}^n)$ всех замкнутых подмножеств совпадает с $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)$. Таким образом, для всякого семейства $\mathbf{B} \in 2^{\mathcal{P}(\mathbb{Z}^n)}$ существует вероятность $P_S(\mathbf{B})$. \square

Из общих свойств емкостей сразу следует, что соотношение $P_S(\mathcal{F}_V) = F_S(V) = P\{S_N \in \mathcal{F}_V\} = P(S^-(\hat{V}))$ продолжается на все подмножества $V \subset \mathbb{Z}^n$ с сохранением свойств (1), (2).

Чтобы подчеркнуть зависимость функций из (1), (2) от N , будем иногда обозначать их как F_S^N . Также и вероятность в лемме 2 обозначим как P_S^N .

Множества \hat{S}_N будем называть *аппроксимацией сверху* СЗМ S на сетке \mathbb{Z}^n . Действительно, имеем $S \subset \hat{S}_{N+1} \subset \hat{S}_N$ для всякого $N \in \mathbb{N}$. Кроме того, ясно, что $\hat{S}_N \downarrow S$ в топологии Фелла почти наверное. Метрика Хаусдорфа здесь неприменима, поскольку множества могут быть неограниченными. Однако для тех элементарных событий ω , где $S(\omega)$ ограничено, сходимость будет и по метрике Хаусдорфа. Соотношение между множествами S_N и \hat{S}_N выражается следующим образом. Пусть $\hat{\mathbb{Z}}_N^n = \{\hat{v} : v \in \mathbb{Z}_N^n\}$ — множество всех кубов на сетке и $\mathcal{P}(\hat{\mathbb{Z}}_N^n)$ — множество всех подмножеств из $\hat{\mathbb{Z}}_N^n$. Тогда биективное отображение $S \xrightarrow{g_N} \hat{S}$, где $g_N(S) = S + B_N$, является изоморфизмом вероятностных пространств $(\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N^n), 2^{\mathcal{P}(\mathbb{Z}_N^n)}, P_S^N)$ и $(\mathcal{P}(\hat{\mathbb{Z}}_N^n), 2^{\mathcal{P}(\hat{\mathbb{Z}}_N^n)}, P_S^N)$, причем $P_S^N g_N^{-1} = P_S^{-1}$. Если рассматривать множества S_N как вложения в \mathcal{F} , то ввиду п.н.-сходимости функций $d(x, S_N) \rightarrow d(x, S)$ при $N \rightarrow \infty$ для всех векторов $x \in \mathbb{R}^n$, заключаем, что S_N также сходится к S в топологии Фелла и по метрике Хаусдорфа, если S ограничено.

Аналогично рассматривается и *аппроксимация снизу* СЗМ S на сетке \mathbb{Z}^n . Определим множества $s_N = \{v : \hat{v} \subset S\}$ и $\check{S}_N = \{\hat{v} : \hat{v} \subset S\}$. Эти множества являются замкнутыми и измеримыми. Для тех элементарных событий ω , где $\text{int} S \neq \emptyset$, эти множества также п.н. сходятся в топологии Фелла к S , а также и по метрике Хаусдорфа, если S ограничено.

Рассмотрим частный случай, когда множество S равномерно ограничено. В этом случае можно считать, что для каждого фиксированного N построенные выше множества $s_N \subset S_N$ и $\check{S}_N \subset S \subset \hat{S}_N$ состоят из конечного числа элементов, не превышающего максимального значения M_N . Пусть $\hat{S}_N \subset \hat{V}_N$ п.н., где множество кубов \hat{V}_N содержит M_N элементов. Тогда вероятность P_S^N сосредоточена на множестве 2^{V_N} , где V_N — совокупность соответствующих вершин. Это означает, что $\sum_{U \subset V_N} P\{S_N = U\} = 1$. Рассмотрим полезную двойственную конструкцию и определим функцию $G_S(U) = P(S_-(\hat{U}))$ на множествах $U \subset V$ (вновь опускаем индексы N). Имеет место

Лемма 3. *Если СЗМ $S(\omega) \neq \emptyset$ п.н., то функция G_S обладает следующими свойствами:*

- (1) $G_S(\emptyset) = 0$, $0 \leq G_S(U) \leq 1$ для всякого $U \subset V$;
- (2) G_S монотонно возрастает ($U_1 \subset U_2 \Rightarrow G_S(U_1) \leq G_S(U_2)$) и для $k \geq 2$, K_1, K_2, \dots, K_k в V имеем $G_S\left(\bigcup_{i=1}^k K_i\right) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1:k\}} (-1)^{|I|+1} G_S\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right)$.

Доказательство. Свойство (1) очевидно. В силу эквивалентности различных определений измеримости СЗМ заключаем, что вероятность $P(S_-(B)) = 1 - P(S^-(B^c)) = 1 - T_S(B^c)$ определена для любого множества $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, причем свойство ∞ -альтернированности сопровождающего функционала T_S сохраняется для произвольных K_i , $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Неравенство в (2) следует из цепочки $G_S\left(\bigcup_{i=1}^k K_i\right) = P(S_-\left(\widehat{\bigcup_{i=1}^k K_i}\right)) = P(S_-\left(\bigcup_{i=1}^k \hat{K}_i\right)) = 1 - T_S\left(\bigcap_{i=1}^k \hat{K}_i^c\right) \geq 1 - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1:k\}} (-1)^{|I|+1} T_S\left(\bigcup_{i \in I} \hat{K}_i^c\right) = 1 - \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1:k\}} (-1)^{|I|+1} (1 - P(S_-\left(\bigcap_{i \in I} \hat{K}_i\right))) \geq \sum_{\emptyset \neq I \subset \{1:k\}} (-1)^{|I|+1} G_S\left(\bigcap_{i \in I} K_i\right)$, поскольку $\sum_{\emptyset \neq I \subset \{1:k\}} (-1)^{|I|+1} = 1$ для всякого $k \in \mathbb{N}$ и $\bigcap_{i \in I} \hat{K}_i \supset \widehat{\bigcap_{i \in I} K_i}$. Равенство следует из соотношения для биномиальных коэффициентов: $C_k^1 - C_k^2 + \dots + (-1)^{k+1} C_k^k = 1$. Свойство (2) называется ∞ -монотонностью. \square

Теперь установим, что функция G_S однозначно определяет распределение вероятностей $g_S(U) \geq 0$ на 2^V с необходимым свойством $\sum_{\emptyset \neq U \subset V} g_S(U) = 1$. Достаточно рассмотреть функцию

$$g_S(U) = \sum_{K \subset U} (-1)^{|U \setminus K|} G_S(K) \quad \forall U \in 2^V. \quad (2.2)$$

В [4, теорема 3.2] показано, что функция вида (2.2) является неотрицательной и обладает свойством

$$G_S(U) = \sum_{K \subset U} g_S(K) \quad \forall U \in 2^V. \quad (2.3)$$

Так как $G_S(V) = 1$, заключаем, что $\sum_{U \subset V} g_S(U) = 1$. Таким образом, функция множества (2.2) действительно задает распределение вероятностей на конечном множестве 2^V . Чтобы подчеркнуть зависимость функций (2.2), (2.3) от числа N , будем иногда писать g_S^N и G_S^N . Связь между функциями из леммы 2 и леммы 3 выражается неравенством

$$1 - F_S(U^c) \leq G_S(U), \text{ где } U^c = V \setminus U. \quad (2.4)$$

Действительно, справедливо включение $\{S_N \subset U\} = \{\hat{S}_N \subset \hat{U}\} \subset \{S \subset \hat{U}\}$. Тогда $P\{S_N \subset U\} = 1 - P\{S_N \cap U^c \neq \emptyset\} = 1 - F_S(U^c) \leq P\{S \subset \hat{U}\} = G_S(U)$.

Пример 3. Рассмотрим множество из примера 1, предположив, что оно равномерно ограничено. Здесь $F_S(U) = \max f(\hat{U})$ для всякого множества $U \subset V$ на сетке. Если функция f непрерывна, то неравенство (2.4) превращается в равенство. Возьмем конкретную функцию $f(x) = 1 - |x|_\infty$, где $|\cdot|_\infty = \max_{i \in 1:n} |x_i|$. Тогда СЗМ сосредоточено на единичном кубе $\{x : |x|_\infty \leq 1\}$. Задание сетки \mathbb{Z}_N^n приводит к делению единичного куба на $M_N = 2^n(N+1)^n$ подкубов. Пусть $n = 2$, $N = 1$, тогда вычисления по формулам (2.2)–(2.4) приводят к тому, что аппроксимационное множество S_1 с равной вероятностью $1/2$ сосредоточено в 2 “точках”: K^* и V , т. е. $g_S(K^*) = 1/2$, $g_S(V) = 1/2$. Здесь K^* — это 4 вершины квадратов \hat{v} , для которых $d_\infty(\hat{v}, 0) = 0$.

Пример 4. Вернемся к примеру 2, где СЗМ неограниченно. Здесь $F_S(U) = (1 - \varepsilon)\mu_0(\hat{U}) + \varepsilon$, если $\emptyset \neq U \subset \mathbb{Z}^n$, и $F_S(\emptyset) = 0$. Следовательно, $P\{S \subset \hat{U}\} = (1 - \varepsilon)\mu_0(\hat{U})$, если $\hat{U} \neq \mathbb{Z}^n$, и $P\{S \subset \mathbb{Z}^n\} = 1$. Обозначим левую часть этого равенства через $G_S(U)$, как в лемме 3. Неравенство (2) превратится в равенство, если все $K_i \neq \mathbb{Z}^n$. Для конечных множеств U равенства (2.2), (2.3) также справедливы. Однако $\sum_U g_S(U) < 1$, если сумма берется по всем конечным подмножествам $U \subset \mathbb{Z}^n$.

В связи с последними примерами введем

Определение 2. Будем говорить, что СЗМ S является *конечно-аппроксимируемым* на сетке, если для всякого $N \in \mathbb{N}$ имеем $F_S(K_k^c) \downarrow 0$ при $K_k \uparrow \mathbb{Z}_N^n$, где K_k — произвольная возрастающая последовательность конечных подмножеств.

Из определения 2 вытекает равенство $\sum_{K \in \mathcal{J}} g_S(K) = 1$ для конечно-аппроксимируемого СЗМ S , где $\mathcal{J} = \mathcal{J}_N$ — счетное множество всех конечных подмножеств из \mathbb{Z}_N^n . Последнее равенство получается с помощью соотношений (2.2) и (2.3), справедливых для всех конечных подмножеств U . Так как $g_S(K) = P\{S_N = K\}$, то конечная аппроксимируемость означает, что $P\{S_N = U\} = 0$ для всякого бесконечного подмножества $U \subset \mathbb{Z}_N^n$. Действительно, рассмотрим счетную сумму непересекающихся событий $\{S_N = K\}$ по всем $K \in \mathcal{J}$ и $\{S_N = U\}$. Ее вероятность равна 1, откуда и следует утверждение. Нетрудно проверить, что любое равномерно ограниченное СЗМ будет конечно-аппроксимируемым на сетке. Множество в примере 4 не является конечно-аппроксимируемым.

3. Преобразование СЗМ в силу стохастических дифференциальных уравнений

Предположим, что существует измеримая функция $\zeta(\omega) \geq 0$ такая, что

$$\|S_0(\omega)\| = \sup_{x \in S_0(\omega)} |x| \leq \zeta(\omega), \quad E\zeta^2 \leq \infty. \quad (3.1)$$

При условии (3.1) и условиях (0.2) на СДУ будет существовать единственное решение $x_t(\omega; \xi)$ уравнения (0.1) для всякого селектора $\xi \in \mathbb{S}(S_0)$. С другой стороны, согласно замечанию 1 после леммы 1 существует решение $x_t(\omega; s, y)$, непрерывное по всем $0 \leq s \leq t \leq T$ и детерминированным y при $\omega \in N^c$, где $P(N) = 0$. Тогда $x_t(\omega; \xi) = x_t(\omega; 0, \xi(\omega)) \in S_t(\omega; S_0)$ п.н. Множества S_t обладают полугрупповым свойством и образуют марковский процесс. Чтобы

установить эти факты, наложим некоторые дополнительные условия и предположим, не ограничивая общности, что $\Omega = \mathbf{W}_0^m$, т. е. элементарные события ω суть непрерывные функции, а P — мера Винера. Будем использовать оператор приращений Дынкина $\varphi_s \omega = \omega(t) - \omega(s)$ при $t \in [s, T]$ и $\varphi_s \omega = 0$ при $t \in [0, s]$. Этот оператор действует на любую случайную величину, заданную на Ω , по правилу $\varphi_s \xi(\omega) = \xi(\varphi_s \omega)$. Отметим, что величина $\varphi_s \xi(\omega) = \xi(\varphi_s \omega)$ не зависит от σ -алгебры $\mathcal{A}_t = \sigma\{\omega : \omega(t_1) \in B_1, \dots, \omega(t_k) \in B_k\}$, где $0 < t_1 < \dots < t_k \leq t$, $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$, $i \in 1 : k$.

Теорема 1. Пусть $P_0\{F \in \mathcal{K}\} = 1$ и $\int_{\mathcal{F}} \|F\|^2 P_0(dF) < \infty$, где P_0 — вероятностное распределение начального множества на измеримом пространстве (\mathcal{F}, σ_f) , т. е. начальное множество S_0 имеет п.н. компактные значения и выполняется условие (3.1). Тогда $S_t = x_t(\omega; 0, S_0) = x_t(\varphi_s \omega; s, S_s)$ п.н. для $0 \leq s \leq t \leq T$, где $x_t(\omega; s, y)$ — решение уравнения (0.1), определенное в замечании 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выше отмечено, что существует множество $N \subset \mathbf{W}_0^m$, $P(N) = 0$, такое, что функция $x_t(\omega; s, y)$ непрерывна по s, y при $\omega \in N^c$. В силу [15, теорема 1, §12.5] справедливо равенство $x_t(\omega; 0, y) = x_t(\varphi_s \omega; s, x_s(\omega; 0, y))$ п.н. Для $\omega \in N^c$ функции непрерывны и отображают компактные множества в компактные. Следовательно, $x_t(\omega; 0, K) = x_t(\varphi_s \omega; s, x_s(\omega; 0, K))$ для всех $K \in \mathcal{K}$ и $\omega \in N^c$. Отсюда получаем заключение теоремы, причем равенство выполняется п.н. по мере $P \otimes P_0$ относительно пополненной σ -алгебры $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbf{W}_0^m) \otimes \sigma_f$. \square

Для линейных уравнений заключение теоремы 1 выполняется без дополнительного условия о компактности значений начального множества. Действительно, рассмотрим уравнение

$$dx_t = (A(t)x_t + b(t))dt + \sum_{j=1}^m (C_j(t)x_t + \sigma_j(t))dw_t^j, \quad (3.2)$$

где $A(\cdot), C_1(\cdot), \dots, C_m(\cdot) \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{n \times n})$, $b(\cdot), \sigma_1(\cdot), \dots, \sigma_m(\cdot) \in L^2(0, T; \mathbb{R}^n)$; w_t^j — независимые при разных j стандартные винеровские процессы.

Теорема 2. Для уравнения (3.2) с коэффициентами, удовлетворяющими приведенным условиям, имеем $S_t = x_t(\omega; 0, S_0) = x_t(\varphi_s \omega; s, S_s)$ п.н. для $0 \leq s \leq t \leq T$ и для всякого начального СЗМ S_0 .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(t, s)$ — матричное решение уравнения

$$d\Phi(t, s) = A(t)\Phi(t, s)dt + \sum_{j=1}^m C_j(t)\Phi(t, s)dw_t^j, \quad t \geq s, \quad \Phi(s, s) = I.$$

Такое решение существует и единственно, причем обратная матрица $\Psi(t, s) = \Phi^{-1}(t, s)$ также существует и удовлетворяет уравнению

$$d\Psi(t, s) = \Psi(t, s) \left[-A(t) + \sum_{j=1}^m C_j^2(t) \right] dt - \sum_{j=1}^m \Psi(t, s) C_j(t) dw_t^j, \quad t \geq s, \quad \Psi(s, s) = I.$$

Очевидно, данные матрицы являются функциями от $\varphi_s \omega$ и, следовательно, не зависят от σ -алгебры \mathcal{A}_t . С помощью введенных матриц можем записать решение (см., например, [16, теорема 1.6.14])

$$x_t(\varphi_s \omega; s, y) = \Phi(t, s) \left[y + \int_s^t \Psi(\tau, s) \left(b(\tau) - \sum_{j=1}^m C_j(\tau) \sigma_j(\tau) \right) d\tau + \sum_{j=1}^m \int_s^t \Psi(\tau, s) \sigma_j(\tau) dw_\tau^j \right]. \quad (3.3)$$

В силу полугруппового свойства матриц $\Phi(t, 0) = \Phi(t, s)\Phi(s, 0)$ и формулы (3.3) получаем заключение теоремы. \square

Введем

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $S_t^{s,F}$ — семейство СЗМ при $0 \leq s \leq t \leq T$, согласованное с возрастающим потоком σ -алгебр $\varphi_s \mathcal{A}_t$. Это семейство называется *марковским*, если

1) функция $p(s, F, t, \mathcal{V}) = P\{S_t^{s,F} \in \mathcal{V}\}$ измерима по Борелю как функция $F \in \mathcal{F}$ для всякого $t \geq s$ и всякого $\mathcal{V} \in \sigma_f$;

2) $P\{S_s^{s,F} = F\} = 1$ для всякого $F \in \mathcal{F}$;

3) если $0 \leq s \leq t \leq T$, $F \in \mathcal{F}$ и $\mathcal{V} \in \sigma_f$, то $P[\{S_t^{0,F} \in \mathcal{V}\} | \mathcal{A}_s] = p(s, S_t^{s,S_s^{0,F}}, t, \mathcal{V})$ п.н.

Аналогично определяется марковское семейство компактных СЗМ $S_t^{s,K}$. При этом в определении 3 замкнутое множество F следует заменить на компактное K , семейство \mathcal{F} — на семейство \mathcal{K} , которое наделяется миопической топологией \mathcal{T}_k , порождаемой подбазой, состоящей из семейств \mathcal{K}_G и $\mathcal{K}^F = \{K \in \mathcal{K} : K \cap F = \emptyset\}$, где G и F — произвольные, соответственно, открытые и замкнутые множества. Наконец, борелевскую σ -алгебру σ_f следует заменить на борелевскую σ -алгебру $\sigma_k = \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Теорема 3. Семейство $S_t^{s,F} = s_t(\varphi_s \omega; s, F)$ является марковским, если рассматривается линейное уравнение (3.2). В общем случае уравнения (0.1) семейство $S_t^{s,K} = s_t(\varphi_s \omega; s, K)$ является марковским.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы (3.3) СЗМ $S_t^{s,F} = s_t(\varphi_s \omega; s, F)$ является невырожденным линейным преобразованием замкнутого множества F . Поэтому при фиксированном ω множество $S_t^{s,F}$ непрерывно по F в топологии Фелла \mathcal{T}_f . При фиксированном F это множество измеримо по ω относительно σ -алгебры $\varphi_s \mathcal{A}_t \subset \mathcal{A}_t$ по построению. Следовательно, множество $\{S_t^{s,F} \in \mathcal{V}\}$ измеримо в произведении σ -алгебр $\varphi_s \mathcal{A}_t \otimes \sigma_f$. Отсюда величина $p(s, F, t, \mathcal{V}) = P\{S_t^{s,F} \in \mathcal{V}\} = E 1_{\{S_t^{s,F} \in \mathcal{V}\}}$ измерима по F согласно теореме Фубини. Здесь 1_A — характеристическая функция множества $A \in \varphi_s \mathcal{A}_t \otimes \sigma_f$. В общем случае доказать совместную измеримость мультифункции $S_t^{s,K}$ относительно $\varphi_s \mathcal{A}_t \otimes \sigma_k$ затруднительно, поскольку при фиксированном ω функция $s_t(\varphi_s \omega; s, K)$ будет, вообще говоря, лишь п.н. снизу по K . Поэтому мы расширяем произведение σ -алгебр до $\varphi_s \mathcal{A}_t \otimes \sigma_k$ (в миопической топологии \mathcal{T}_k больше открытых множеств, чем в топологии Фелла \mathcal{T}_f). Тогда функция $s_t(\varphi_s \omega; s, K)$ будет уже непрерывной по K в метрике Хаусдорфа и в топологии \mathcal{T}_k при фиксированном $\omega \in N^c$. Рассуждения, аналогичные проведенным, показывают, что величина $p(s, K, t, \mathcal{V})$ будет измеримой по K относительно σ -алгебры σ_k , если $0 \leq s \leq t \leq T$ и $\mathcal{V} \in \sigma_k$. Итак, свойство 1) определения 3 установлено. Свойство 2) очевидно. Для доказательства свойства 3) заметим, что в выражениях $P[\{S_t^{0,F} \in \mathcal{V}\} | \mathcal{A}_s]$ и $P[\{S_t^{0,K} \in \mathcal{V}\} | \mathcal{A}_s]$ можем подставить множества $S_t^{s,S_s^{0,F}}$ и $S_t^{s,S_s^{0,K}}$ вместо $S_t^{0,F}$ и $S_t^{0,K}$ соответственно в силу теорем 1 и 2. Далее, запишем условные вероятности как математические ожидания $E[1_{\{S_t^{0,F} \in \mathcal{V}\}} | \mathcal{A}_s]$ и $E[1_{\{S_t^{0,K} \in \mathcal{V}\}} | \mathcal{A}_s]$ и также заменим соответствующие множества. Утверждение будет следовать из формулы

$$E[f(\varphi_s \omega, \eta(\omega)) | \mathcal{A}_s] = F(\eta),$$

где $f(\omega, x)$ — неотрицательная функция на $\mathbf{W}_0^n \times \mathbb{M}$, измеримая относительно $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{M})$. Здесь \mathbb{M} — любое ЛКС-пространство, $F(x) = E f(\cdot, x)$, и η — любая \mathcal{A}_s -измеримая величина со значениями в \mathbb{M} . Подобная формула приведена в [15, с. 247] для случая $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$. Однако она верна и для любых ЛКС-пространств. \square

Подводя итог рассуждениям, заключаем, что мультифункция S_t^{0,S_0} является марковским процессом в ЛКС-пространстве \mathcal{F} (или \mathcal{K}) с начальным распределением P_0 .

4. Аппроксимационное описание эволюции начальных СЗМ

Пусть задано начальное конечно-аппроксимируемое множество S_0 . Строим множества $S_{0,N}$ и $\hat{S}_{0,N}$ согласно подразд. 2.2. Найти вероятность $P\{clx_t(\omega; 0, \hat{S}_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\}$ для подсчета сопряжающего функционала при произвольном множестве $K \in \mathcal{K}$ довольно затруднительно. Используя включение $\{\omega : x_t(\omega; 0, S_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\} \subset \{\omega : clx_t(\omega; 0, \hat{S}_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\}$, получаем оценку снизу для такой вероятности:

$$P\{x_t(\omega; 0, S_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\} \leq P\{clx_t(\omega; 0, \hat{S}_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\}. \quad (4.1)$$

Для левой части формулы (4.1), используя предположение конечной аппроксимируемости, по формуле полной вероятности имеем

$$P\{x_t(\omega; 0, S_{0,N}) \in \mathcal{F}_K\} = \sum_{I \in \mathcal{J}_N} P\{S_{0,N} = I\} P[x_t(\omega; 0, I) \in \mathcal{F}_K \mid S_{0,N} = I], \quad (4.2)$$

где счетное множество \mathcal{J}_N состоит из конечных подмножеств сетки \mathbb{Z}_N^n . Условная вероятность в (4.2) совпадает с безусловной, поскольку начальное множество не зависит от винеровского процесса. Полагая $K = \hat{V}$, где V — конечные подмножества сетки, получаем приближенное распределение множества на сетке в момент t . Рассмотрим

Пример 5. Пусть $S_0 = \{\xi_1, \xi_2\}$ — множество из двух независимых величин с одинаковым распределением P_ξ , $n = 1$. Здесь $F_S(U) = 1 - (1 - P_\xi(\hat{U}))^2$ для $U \subset \mathbb{Z}_N$. Конечная аппроксимируемость выполняется. Функция $G_S(U) = P_\xi^2(\hat{U})$. Пусть уравнение имеет вид $dx_t = dw_t$. Тогда получаем $S_t = S_0 + w_t$. Если P_ξ — стандартное гауссовское распределение, то по правилу 3σ можно считать, что вне отрезка $[-3, 3]$ начальное множество равно нулю. Поскольку величина w_t также имеет гауссовское распределение, то вычисление распределений сводится к конечным суммам.

К настоящему времени разработаны эффективные методы конечно-разностной аппроксимации стохастических ДУ [17–19]. Пусть $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ — разбиение отрезка, где $t_p = pT/N$, $p \in 0 : N$. Простейшая схема Эйлера

$$y_{p+1} = y_p + b\Delta + \sigma\Delta w_p, \quad p \in 0 : N - 1,$$

где $\Delta = T/N$, $\Delta w_p = w_{t_{p+1}} - w_{t_p}$, и функции b, σ вычисляются в точках (t_p, y_p) , имеет порядок точности $O(\Delta^{1/2})$, что явно недостаточно. Рассмотрим численную схему, которая называется в литературе методом Г. Н. Мильштейна, в интерпретации Д. Ф. Кузнецова (см. [19, п. 7.3.2]):

$$y_{p+1} = y_p + b\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\zeta_0 + \frac{\Delta}{2} \sum_{i,j=1}^m \sum_{k=1}^n \sigma_{ki} \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_k} I^{ijq}, \quad p \in 0 : N - 1, \quad (4.3)$$

где σ_i — i -й столбец матрицы σ , $I^{ijq} = \zeta_0^i \zeta_0^j + \sum_{k=1}^q \frac{1}{\sqrt{4k^2 - 1}} (\zeta_{k-1}^i \zeta_k^j - \zeta_k^i \zeta_{k-1}^j) - 1_{i=j}$. Здесь ζ_k^i , $i \in 1 : m$, $k \in 0 : q$, — набор стандартных независимых гауссовских величин, величина $1_{i=j} = 1$, если $i = j$, в противном случае она равна нулю. На каждом шаге берется новый, независимый от предыдущего, набор. Число q следует выбирать так, чтобы $\frac{1}{2q+1} \leq 4c\Delta$, где c — заданная константа. В схеме (4.3) предполагается, что коэффициенты уравнения (0.1) непрерывны и удовлетворяют условиям (0.2), а элементы матрицы σ непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным. Пусть y_t обозначает функцию, построенную путем кусочно-линейной интерполяции по точкам (t_p, y_p) , $p \in 0 : N - 1$. Для схемы (4.3) справедлива оценка

$$E \max_{t \in [0, T]} |x_t - y_t|^2 \leq K\Delta^2, \quad (4.4)$$

где константа K не зависит от Δ . Ввиду оценки (4.4) говорят, что схема (4.3) имеет порядок $0(\Delta)$. Пусть $m = 1$, тогда имеем $y_{p+1} = y_p + b\Delta + \sigma\sqrt{\Delta}\zeta_0 + \frac{\Delta}{2} \sum_{k=1}^n \sigma_k \frac{\partial \sigma}{\partial x_k} (\zeta_0^2 - 1)$. Также упрощение записывается, когда матрица σ диагональна и коэффициент σ_{ii} зависит только от x_i .

И схему Эйлера и схему Мильштейна можно записать единообразно в виде

$$y_{p+1} = y_p + b_p\Delta + \Sigma_p g(\zeta_p), \quad p \in 0 : N - 1, \quad (4.5)$$

где $b_p \in \mathbb{R}^n$ и $\Sigma_p \in \mathbb{R}^{n \times L}$ — непрерывные функции от $y \in \mathbb{R}^n$, $g \in \mathbb{R}^L$ — непрерывная функция от $\zeta \in \mathbb{R}^q$. Здесь L , q — подходящие размерности, ζ_p — стандартный гауссовский вектор. При использовании схем типа (4.5) формулы (4.1), (4.2) естественным образом модифицируются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Arnold L.** Stochastic differential equations: Theory and applications. New York: John Wiley & Sons, 1974. 228 p.
2. **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Мир, 2003. 406 с.
3. **Матерон Ж.** Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978. 318 с.
4. **Nguyen Hung T.** An introduction to random sets. Boca Raton: Chapman & Hall, 2006. 257 p.
5. **Molchanov I.** Theory of random sets. London: Springer Verlag, 2005. 488 p.
6. **Kurzanski A.V., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes. Theory and computation. Cham: Birkhäuser, 2014. 445 p.
7. **Ананьев Б.И.** Оценивание состояний обратных стохастических дифференциальных уравнений со статистически неопределенными помехами // Тр. XII Всерос. совещ. по пробл. упр. ВСПУ-2014. Москва, 2014. С. 2604–2611.
8. **Ananyev B.I.** State estimation for linear stochastic differential equations with uncertain disturbances via BSDE approach // AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1487. P. 143–150.
9. **Гихман И.И., Скороход А.В.** Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 611 с.
10. **Булинский А.В., Ширяев А.Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003. 399 с.
11. **Schmelzer V.** Set-valued assessments of solutions to stochastic differential equations with random set parameters // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 400, no. 2. P. 425–438.
12. **Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.** Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1974. 696 с.
13. **Himmelberg C.** Measurable relations // Fund. Math. 1975. Vol. 87, no. 1. P. 53–72.
14. **Miranda E., Couso I., Gil P.** Approximations of upper and lower probabilities by measurable selections // Inform. Sci. 2010. Vol. 180, no. 10. P. 1407–1417.
15. **Вентцель А.Д.** Курс теории случайных процессов. М.: Наука, Физматлит, 1996. 399 с.
16. **Yong J, Zhou X.** Stochastic controls: Hamiltonian systems and HJB equations. New York: Springer-Verlag, 1999. 438 p.
17. **Milstein G.N.** Numerical integration of stochastic differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1995. 169 p. (Mathematics and Its Appl.; vol. 313).
18. **Kloeden P.E., Platen E.** Numerical solution of stochastic differential equations. Berlin: Springer-Verlag, 1995. 632 p. (Appl. of Math.).
19. **Кузнецов Д.Ф.** Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2001. 710 с.

Ананьев Борис Иванович

д-р физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина,

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: abi@imm.uran.ru

Поступила 25.09.15

УДК 517.977

**ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИИ
ОБОБЩЕННОЙ МАШИНОЙ ДУБИНСА¹****Ю. И. Бердышев**

Исследуется задача об оптимальном по быстродействию сближении нелинейной системы четвертого порядка, описывающей движение самолета в горизонтальной плоскости, с двумя неподвижными точками в заданной очередности.

Ключевые слова: управление, нелинейный объект, сближение.

Yu. I. Berdyshev. On a time-optimal control for the generalized Dubins car.

We study the problem of time-optimal approach of a fourth-order nonlinear system describing the motion of an airplane in a horizontal plane to two fixed points in a given order.

Keywords: control, nonlinear object, approach.

1. Введение

Рассматривается задача, в которой управляемый объект, описываемый нелинейной системой четвертого порядка, стремится за счет выбора своего управления осуществить за кратчайшее время сближение с двумя неподвижными точками, находящимися на плоскости “геометрических координат”. Очередность сближения с точками предполагается заданной. Используемая система является обобщением машины Дубинса [1] — простейшей моделью движения автомобиля, самолета в горизонтальной плоскости с переменной управляемой скоростью и управляемым углом разворота [2; 3]. Эта система отличается от машины Дубинса дополнительным (четвертым) дифференциальным уравнением, описывающим изменение величины скорости, и дополнительным управляющим параметром. В частном случае, когда скорость объекта не подвержена управлению и постоянна, а управлять можно только углом разворота, указанная модель описывается системой третьего порядка, которую использовал Р. Айзекс [4] в 1951 г. при постановке задачи “шофер-убийца”, а затем уже в 1957 г. ее исследовал Л. Е. Дубинс [1]. По-видимому, эту систему можно было бы также назвать машиной Маркова, так как еще в 1889 г. А. А. Марковым [5] была решена задача об построении кривой наименьшей длины и ограниченной кривизны, соединяющей две заданные точки.

Настоящая работа продолжает исследование, опубликованное в журнале “Прикладная математика и механика” в 1975 г. [2]. В этой статье на основании принципа максимума Л. С. Понтрягина [6] установлена структура оптимального управления и оптимальной траектории. Предложено правило построения программного управления, удовлетворяющего принципу максимума. Доказано, что предлагаемое правило определяет оптимальное управление для случая, когда целевая точка находится вне некоторой ограниченной области G . Следует отметить, что в кандидатской диссертации [7], а затем в книге [8] было доказано, что указанное правило определяет оптимальное управление и в случае, когда целевая точка находится в области G . Решить поставленную задачу удалось благодаря предварительно выявленным

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 14-08-00419, 15-01-07909).

свойствам исходной системы и системы вспомогательных переменных, фигурирующих в формулировке принципа максимума [6]. В частности, удалось полностью проинтегрировать эти системы на участках постоянства управляющих функций.

2. Постановка задач

Пусть движение точки в горизонтальной плоскости xy описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений [2]

$$\dot{x} = v \cos \theta, \quad \dot{y} = v \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{K_1}{v} u_1, \quad \dot{v} = K_2 u_2, \quad (2.1)$$

где θ — угол между осью x и направлением вектора скорости $\vec{v} \triangleq (\dot{x}, \dot{y})$; $K_1 > 0$, $K_2 \geq 0$ — заданные постоянные; v — величина скорости движения точки; u_1, u_2 — управляющие параметры, удовлетворяющие ограничениям

$$|u_1| \leq 1, \quad |u_2| \leq 1. \quad (2.2)$$

Значение $v = 0$ является особым для системы (2.1). Поэтому целесообразно (см. [8, с. 114]) в знаменателе правой части четвертого уравнения вместо величины v подставить функцию

$$f(v) = \begin{cases} (2 - \sqrt{2}) v_{5\pi}, & v \leq 0, \\ 2v_{5\pi} - \sqrt{2(v_{5\pi})^2 - v^2}, & 0 < v < v_{5\pi}, \\ v, & v \geq v_{5\pi}, \end{cases}$$

где $v_{5\pi}$ — величина скорости, которая получается в результате поворота вектора скорости движущейся точки на угол 5π при начальном значении v_0 , $v_0 > 0$, и управлении $u_1(t) = 1$, $u_2(t) = -1$, $t \geq 0$. Заметим, функция $f(v)$ ограничена снизу величиной $(2 - \sqrt{2})v_{5\pi}$ и непрерывна вместе со своей производной на всей числовой оси.

Система (2.1) описывает простейшую модель движения автомобиля, самолета в горизонтальной плоскости xy с переменной управляемой скоростью. Под траекторией системы (2.1) целесообразно понимать проекцию ее фазовой траектории на плоскость xy . Многообразие $x = 0$, $y = 0$ соответствует на этой плоскости начало координат $O = (0, 0)$.

Объект (2.1) функционирует на конечном, достаточно большом, промежутке времени $T = [0, t^0]$. Его начальное состояние задано, а именно

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0 \quad (v_0 > 0). \quad (2.3)$$

В качестве множества допустимых управлений преследователя выберем \mathbf{U} — множество всех измеримых по Борелю двумерных функций $U = (u_1, u_2)$, $u_i : T \rightarrow [-1, 1]$ ($i = 1, 2$). Каждое управление $U \in \mathbf{U}$ порождает движение, исходящее из начальной позиции (2.3), которое будем обозначать через $(x_U, y_U, \theta_U, v_U) = \{(x_U(t), y_U(t), \theta_U(t), v_U(t)), t \in T\}$. Под траекторией системы (2.1), порожденной управлением $U \in \mathbf{U}$, целесообразно понимать проекцию ее фазовой траектории $(x_U, y_U, \theta_U, v_U)$ на плоскость xy . Точку с координатами x_0, y_0 обозначим через M_0 .

Пусть x_1, y_1 — координаты заданной точки W_1 . Будем говорить, что управление $U \in \mathbf{U}$ обеспечивает сближение (встречу) системы (2.1) с точкой W_1 , если найдется такой момент времени t_1 , при котором будут выполнены соотношения $x_U(t_1) = x_1$, $y_U(t_1) = y_1$.

Основная задача состоит в определении моментов времени t_i , $i \in \overline{1, 2}$, и такого управления $U \in \mathbf{U}$, обеспечивающего последовательное сближение объекта (2.1) с двумя заданными неподвижными точками $W_i = (x_i, y_i)$, $i \in \overline{1, 2}$, в порядке возрастания их номеров в соответствующие моменты времени t_i , при котором общее время сближения t_2 является наименьшим.

Воспользуемся основными результатами исследования [2] следующей задачи.

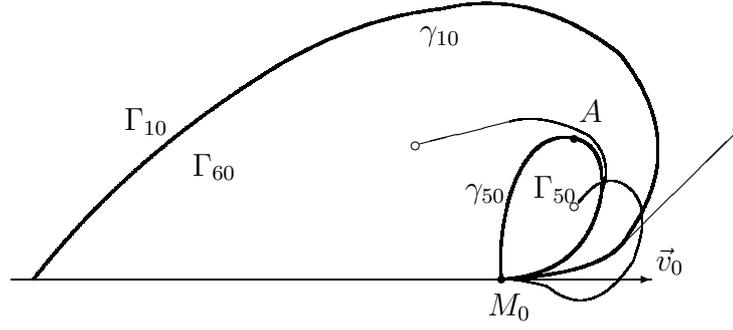


Рис. 1. Разбиение полуплоскости (3.1) на области $\Gamma_{10}, \Gamma_{60}, \Gamma_{50}$. Оптимальные траектории при различных местоположениях начала координат изображены тонкими линиями.

Вспомогательная задача состоит в построении оптимального по быстродействию управления $U^0 \in \mathbf{U}$, доставляющего изображающую точку (x, y, θ, v) системы (2.1) из начального положения (2.3) на многообразие $x = 0, y = 0$.

Использование функции $f(v)$ позволяет выполнить все условия теоремы (см. [9, с. 284]) существования оптимальных управлений в рассматриваемых задачах.

3. Решение вспомогательной задачи

Траекторию, порожденную управлением $u_1(t) = 1, u_2(t) = 1, t \in [0, \tau]$, при начальных условиях (2.3) назовем *траекторией разгона*. Траекторию, порожденную управлением $u_1(t) = 1, u_2(t) = -1, t \in [0, s]$, при тех же начальных условиях назовем *траекторией торможения*, а фазовую точку системы (2.1), соответствующую моменту s , обозначим через $(x^-(s), y^-(s), \theta^-(s), v^-(s))$. Известно [2], что указанные траектории являются логарифмическими спиралями.

Исходя из соображений симметрии, достаточно рассмотреть случай, когда начало координат $O = (0, 0)$ находится в полуплоскости

$$(x - x_0) \sin \theta_0 - (y - y_0) \cos \theta_0 \geq 0. \quad (3.1)$$

Эта полуплоскость разбивается на три части $\Gamma_{10}, \Gamma_{60}, \Gamma_{50}$, которые изображены в [8, рис. 37]. Там же приведены формулы вычисления границ γ_{10}, γ_{50} этих областей и определено правило построения оптимального управления. Для полноты изложения приведем здесь этот рисунок (рис. 1) и указанное правило. Полагаем, что γ_{1s} — кривая, построенная для позиции $(x^-(s), y^-(s), \theta^-(s), v^-(s))$ как для начальной аналогично кривой γ_{10} .

Правило. Выбираем управление

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [0, \vartheta], \quad \text{при } O \in \Gamma_{10}; \quad (3.2)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, s), \\ 1, & t \in [s, \vartheta], \end{cases} \quad \text{при } O \in \Gamma_{60}; \quad (3.3)$$

$$u_1(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, t_1), \\ 1, & t \in [t_1, \tau), \\ 0, & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, s), \\ 1, & t \in [s, \vartheta], \end{cases} \quad \text{при } O \in \Gamma_{50}, \quad (3.4)$$

где τ — первый момент, в который вектор скорости $\vec{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta)$ направлен в начало координат; s — первый момент, в который кривая γ_{1s} проходит через начало координат; t_1 — первый момент, в который граница области Γ_{5t_1} , построенная для позиции, в которую система попадает в момент $t = t_1$ в результате движения с управлением $u_1(t) = -1$, $u_2(t) = -1$, $t \in [0, t_1]$, как для начальной проходит через точку O (область Γ_{5t_1} строится аналогично области Γ_{50}); ϑ — момент сближения с точкой O .

На рис. 1 тонкими линиями изображены оптимальные траектории, соответствующие различным местоположениям начала координат, которые отмечены кружками. Первая цифра индекса у области Γ_{i0} ($i = 1, 5, 6$) указывает на ее порядковый номер, вторая цифра индекса указывает, что эта область строится в начальный момент времени $t_0 = 0$.

На траектории торможения отметим точку A , в которой вектор скорости ортогонален отрезку M_0A . Заметим, что дуга M_0A траектории торможения является частью границы γ_{50} , а кривая γ_{10} до некоторой точки совпадает с траекторией разгона, а затем охватывает ее.

4. Последовательное сближение с двумя неподвижными точками

При определении решения основной задачи воспользуемся результатами работ [8; 10]. Согласно теореме 7.1 из [8] оптимальное управление удовлетворяет обобщенному принципу максимума и условиям выравнивания гамильтониана. В целях применения этой теоремы дополним систему (2.1) пятым уравнением

$$\dot{z} = 1, \quad z(0) = 0.$$

Тогда векторы вспомогательных переменных $\psi_1 = (\psi_{11}, \dots, \psi_{15})'$, $\psi_2 = (\psi_{21}, \dots, \psi_{25})'$, используемые соответственно на отрезках $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$ (“штрих” сверху означает транспонирование), при условии $v(t) \geq v_{5\pi}$ будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} \psi_{21} = \Lambda_{21}, \quad \psi_{22} = \Lambda_{22}, \quad \psi_{23} = \Lambda_{21}(y - y_2) - \Lambda_{22}(x - x_2), \quad \psi_{25} = -1, \\ \dot{\psi}_{24} = -\Lambda_{21} \cos \theta - \Lambda_{22} \sin \theta + \frac{K_1}{v^2} \psi_{23} u_1; \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_{11} = \Lambda_{11}, \quad \psi_{12} = \Lambda_{12}, \quad \psi_{13} = \Lambda_{11}(y - y_1) - \Lambda_{12}(x - x_1), \quad \psi_{15} = 0, \\ \dot{\psi}_{14} = -\Lambda_{11} \cos \theta - \Lambda_{12} \sin \theta + \frac{K_1}{v^2} \psi_{13} u_1 \end{aligned} \quad (4.2)$$

($\Lambda_{i1}, \Lambda_{i2}$, $i = 1, 2$, — постоянные, подлежащие определению), а также краевым условиям

$$\psi_{13}(t_1) = \psi_{23}(t_2) = 0, \quad \psi_{14}(t_1) = \psi_{24}(t_2) = 0.$$

Полагаем

$$\bar{\psi}_{2i} = \psi_{2i}, \quad \bar{\psi}_{1i} = \psi_{1i} + \psi_{2i}, \quad i \in \overline{1, 5}; \quad (4.3)$$

$$H_2 = \bar{\psi}_{21} v \cos \theta + \bar{\psi}_{22} v \sin \theta + \bar{\psi}_{23} \frac{K_1}{v} u_1 + \bar{\psi}_{24} K_2 u_2 + \bar{\psi}_{25};$$

$$H_1 = \bar{\psi}_{11} v \cos \theta + \bar{\psi}_{12} v \sin \theta + \bar{\psi}_{13} \frac{K_1}{v} u_1 + \bar{\psi}_{14} K_2 u_2 + \bar{\psi}_{15}.$$

Нетрудно показать, что дифференциальное уравнение для $\bar{\psi}_{14}$ имеет вид

$$\dot{\bar{\psi}}_{14} = -(\Lambda_{11} + \Lambda_{21}) \cos \theta - (\Lambda_{12} + \Lambda_{22}) \sin \theta + \frac{K_1}{v^2} \bar{\psi}_{13} u_1. \quad (4.4)$$

Согласно обобщенному принципу максимума [8] справедливы соотношения

$$u_1(t) = \text{sign} \bar{\psi}_{k3}(t), \quad \bar{\psi}_{k3}(t) \neq 0, \quad u_2(t) = \text{sign} \bar{\psi}_{k4}(t), \quad \bar{\psi}_{k4}(t) \neq 0, \quad t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2. \quad (4.5)$$

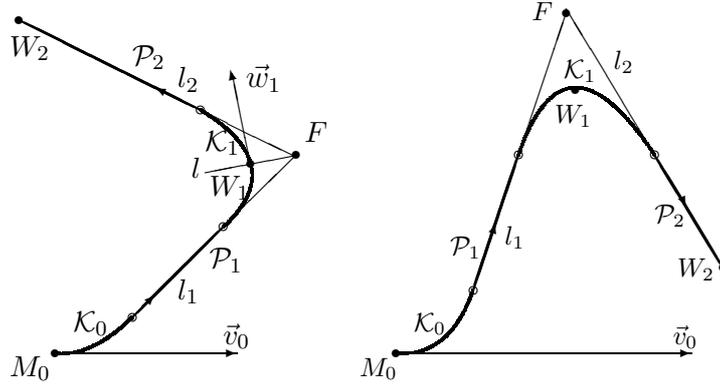


Рис. 2. Траектории обхода точек W_1, W_2 . Точки стыковки криволинейных и прямолинейных участков траекторий отмечены кружками.

Ввиду наличия только двух целевых точек условие выравнивания будет единственным и представимым в виде

$$\begin{aligned} & \bar{\psi}_{21}(t_1)v_U(t_1)\cos\theta_U(t_1) + \bar{\psi}_{22}(t_1)v_U(t_1)\sin\theta_U(t_1) + \bar{\psi}_{23}(t_1)\frac{K_1}{v_U(t_1)}u_1 + \bar{\psi}_{24}(t_1)K_2u_2 \\ & = \bar{\psi}_{11}(t_1)v_U(t_1)\cos\theta_U(t_1) + \bar{\psi}_{12}(t_1)v_U(t_1)\sin\theta_U(t_1) + \bar{\psi}_{13}(t_1)\frac{K_1}{v_U(t_1)}u_1 + \bar{\psi}_{14}(t_1)K_2u_2. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом соотношений (4.1)–(4.3), $\bar{\psi}_{14}(t_1) = \bar{\psi}_{24}(t_1)$ вытекает равенство

$$\Lambda_{11}\cos\theta_U(t_1) + \Lambda_{12}\sin\theta_U(t_1) = 0, \quad (4.6)$$

из которого следует, что для оптимальности траектории \mathcal{L} , порожденной управлением $U = (u_1, u_2)$, необходимо, чтобы вектор $(\Lambda_{11}, \Lambda_{12})$ был перпендикулярен вектору скорости объекта (2.1) в момент t_1 его встречи с точкой W_1 .

Полагая, что расстояния между точками M_0, W_1 , и W_1, W_2 достаточно велики, а именно только такой случай здесь исследуется, и используя первое соотношение в (4.5), вид функций $\psi_{23}(t), \psi_{13}(t)$ (4.1), можно показать, что любая траектория \mathcal{L} , претендующая на оптимальность, должна состоять из двух криволинейных участков $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ и двух прямолинейных участков $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, первый из которых соединяет \mathcal{K}_0 с \mathcal{K}_1 , а второй соединяет \mathcal{K}_1 с точкой W_2 (рис. 2). Доказательство этого факта, которое здесь опускается, проводится по аналогии с установлением структуры оптимальной траектории во вспомогательной задаче [7]. Кроме того, можно также доказать, что величина скорости при движении по траектории \mathcal{L} , всегда больше, чем $v_{5\pi}$. В этом случае функция $f(v)$ по определению равна v .

Пусть l_1 и l_2 — прямые, содержащие соответственно \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 ; F — точка пересечения l_1 с l_2 ; l — прямая, проходящая через точки W_1 и F . Поскольку вектор $(\Lambda_{11}, \Lambda_{12})$ является направляющим для прямой l , то из равенства (4.6) следует ортогональность этой прямой вектору $\bar{w}_1 = (\cos\theta_U(t_1), \sin\theta_U(t_1))$.

Построим траекторию \mathcal{L}_0 , состоящую из двух криволинейных участков $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ и двух прямолинейных участков $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$, по которой объект (2.1) только разгоняется, т. е. $u_2(t) = 1, t \in [0, t_2]$. При этом на криволинейных участках полагаем $u_1(t)$ равной $+1$ либо -1 , а на прямолинейных участках полагаем $u_1(t) = 0$. Возможны два случая взаимного расположения точек M_0, W_1, W_2 , в первом из которых поворот по $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$ происходит в одном направлении (против часовой стрелки), а во втором — в различных направлениях (например, вначале против часовой стрелки, а затем по часовой стрелке) (см. рис. 2). Здесь рассматривается случай разнонаправленного движения по дугам $\mathcal{K}_0, \mathcal{K}_1$. Моменты стыковки \mathcal{K}_0 с $\mathcal{P}_1, \mathcal{K}_1$ с \mathcal{P}_1 и с \mathcal{P}_2 обозначим соответственно через τ_0, τ_1 и τ_2 .

Определим условия, при которых за счет выбора параметра τ_0 можно добиться того, чтобы управление $U = (u_1, u_2)$, порождающее траекторию \mathcal{L}_0 , удовлетворяло принципу максимума (4.5) и условию выравнивания (4.6).

Двигаясь по кривой \mathcal{K}_0 с управлением ($u_1(t) = 1, u_2(t) = 1, t \geq 0$) отметим первый момент τ_* , в который вектор скорости объекта направлен в точку W_1 . Продолжим движение с управлением ($u_1(t) = 1, u_2(t) = 1, t \geq \tau_*$) до момента τ_0 (τ_0 — параметр, подлежащий определению, $\tau_0 > \tau_*$). После момента τ_0 до некоторого момента τ_1 осуществим движение по прямой l_1 , проходящей через точку $(x_U(\tau_0), y_U(\tau_0))$ в направлении вектора с компонентами $\cos \theta_U(\tau_0), \sin \theta_U(\tau_0)$. Очевидно, $\mathcal{P}_1 \subset l_1$. С момента $\tau_1, \tau_1 > \tau_0$, двигаемся с управлением

$$u_1(t) = -1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \geq \tau_1, \quad (4.7)$$

по кривой \mathcal{K}_1 . Момент τ_1 выберем так, чтобы кривая \mathcal{K}_1 проходила через точку W_1 . Двигаемся под действием управления (4.7) до момента τ_2 , в который вектор скорости объекта будет направлен в точку W_2 . Пусть $W = (x_U(\tau_2), y_U(\tau_2))$; l_2 — прямая, проходящая через W и W_2 .

Если прямая l ортогональна вектору $\bar{w}_1 = (\cos \theta_U(t_1), \sin \theta_U(t_1))$ (см. рис. 2), то траектория \mathcal{L}_0 удовлетворяет условию выравнивания (4.6). В противном случае момент τ_0 будем варьировать до тех пор, пока соотношение (4.6) не будет выполнено.

В силу построения прямых l_1, l_2 управление U , порождающее траекторию \mathcal{L}_0 , удовлетворяет первому соотношению в (4.5). Определим случаи, в которых второе равенство в (4.5) также имеет место. Для этого исследуем функции $\bar{\psi}_{14}(t), \bar{\psi}_{24}(t)$, действующие соответственно на отрезках $[0, t_1], [t_1, t_2]$ и удовлетворяющие уравнениям (4.4), (4.1). Предварительно заметим, что присутствующие в этих уравнениях величины $\Lambda_{21}, \Lambda_{22}, \Lambda_{11} + \Lambda_{21}, \Lambda_{12} + \Lambda_{22}$ являются коэффициентами прямых l_2, l_1 . Действительно, в силу соотношений (4.1)–(4.3) равенства $\bar{\psi}_{23} = 0, \bar{\psi}_{13} = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} \Lambda_{21}(y - y_2) - \Lambda_{22}(x - x_2) &= 0, \\ (\Lambda_{11} + \Lambda_{21})y - (\Lambda_{12} + \Lambda_{22})x + [\Lambda_{12}x_1 - \Lambda_{11}y_1 + \Lambda_{22}x_2 - \Lambda_{21}y_2] &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты прямой l_2 можно нормировать, т. е. положить

$$\Lambda_{21} = \cos \theta_U(\tau_2), \quad \Lambda_{22} = \sin \theta_U(\tau_2). \quad (4.8)$$

Пусть t_1 — момент встречи объекта (2.1), движущегося по траектории \mathcal{L}_0 , с точкой W_1 . Используя фазовое положение $(x_U(t_1), y_U(t_1), \theta_U(t_1), v_U(t_1))$ в качестве начального, построим области $\Gamma_{1t_1}, \Gamma_{6t_1}, \Gamma_{5t_1}$ и применим правило выбора управления (3.2)–(3.4).

Обозначим через $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ решение уравнения (4.1) при условиях (4.8), $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_2) = 0$. Согласно результатам работы [2] при $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$ функция $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ выпукла вверх (рис. 3а), имеет место неравенство

$$\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t) > 0, \quad t \in (t_1, t_2),$$

а управление U на отрезке времени $[t_1, t_2]$ удовлетворяет второму соотношению в (4.5) при $\bar{\psi}_{24}(t) \stackrel{\Delta}{=} \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ (символ $\stackrel{\Delta}{=}$ означает равенство по определению).

Пусть W'_1 — точка на прямой l_1 , в которую объект (2.1) попадет в момент t_1 , если на отрезке $[\tau_0, t_1]$ будет продолжать двигаться по прямой l_1 . На промежутке $[0, t_1]$ определим функцию $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t)$ как решение уравнения (4.4) при условии $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t_1) = 0$ и в предположении, что на отрезке $[0, \tau_0]$ движение объекта (2.1) происходит по участку \mathcal{K}_0 , а на промежутке $[\tau_0, t_1]$ — по прямой l_1 до точки W'_1 .

Если $W'_1 \in \Gamma_{10}$, то функция $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t)$ выпукла вверх и

$$\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t) > 0, \quad t \in (0, t_1). \quad (4.9)$$

Обозначим через $\bar{\psi}_{14}^*(t)$ функцию, которая на отрезке $[0, \tau_1]$ совпадает с $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t)$, а на промежутке $[\tau_1, t_1]$ является решением уравнения (4.4) при условиях, что движение на $[\tau_1, t_1]$

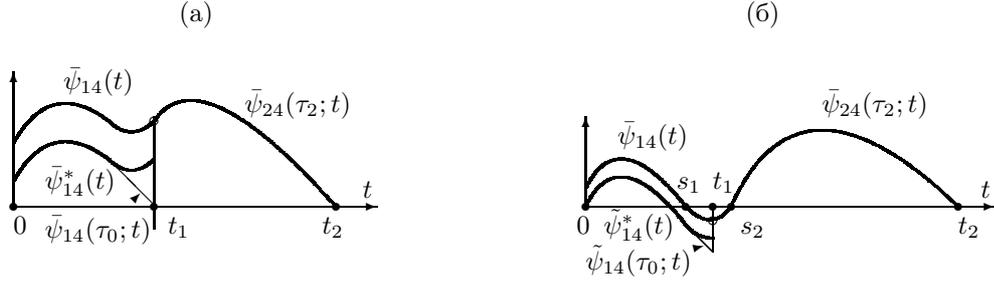


Рис. 3. Графики функций $\bar{\psi}_{14}(t)$, $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$: (а) — при $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$, (б) — при $W_2 \notin \Gamma_{1t_1}$. Кругом отмечены точки их стыковки.

происходит по дуге кривой \mathcal{K}_1 и $\bar{\psi}_{14}(\tau_1) = \bar{\psi}_{14}(\tau_0; \tau_1)$. Поскольку на интервале времени (τ_1, t_1) производная $\dot{\bar{\psi}}_{14}(\tau_0; t) = -1$, а производная $\dot{\bar{\psi}}_{14}^*(t) > -1$, то $\bar{\psi}_{14}^*(t_1) > 0$. При $W'_1 \in \Gamma_{10}$ имеем $\bar{\psi}_{14}^*(t) > 0$, $t \in (0, t_1)$ (рис. 3а).

Если

$$\bar{\psi}_{14}^*(t_1) \leq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1), \quad (4.10)$$

то функция $\bar{\psi}_{14}(t) \triangleq \bar{\psi}_{14}^*(t) + \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1) - \bar{\psi}_{14}^*(t_1)$ будет положительной на отрезке времени $[0, t_1]$. Можно показать, что при условиях $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$, $W'_1 \in \Gamma_{10}$, (4.10) траектория \mathcal{L}_0 будет единственной, удовлетворяющей соотношениям (4.5), (4.6), а поэтому будет оптимальной. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы управление U , порождающее траекторию \mathcal{L}_0 , было оптимальным, достаточно выполнения следующих трех условий: $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$, $W'_1 \in \Gamma_{10}$ (4.10).*

Графики функций $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$, $\bar{\psi}_{14}(\tau_0; t)$, $\bar{\psi}_{14}^*(t)$, $\bar{\psi}_{14}(t)$ при условиях этой теоремы изображены на рис. 3а.

Теорема 2. *Для того чтобы управление U , порождающее траекторию \mathcal{L}_0 , было оптимальным, необходимо выполнение соотношения $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$ и неравенства $\bar{\psi}_{14}^*(t_1) - \bar{\psi}_{14}^*(0) \leq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1)$.*

Доказательство. Если $W_2 \notin \Gamma_{1t_1}$, то ввиду ограничения на выбор целевых точек справедливо включение $W_2 \in \Gamma_{6t_1}$. Тогда найдутся такие моменты τ_2, s_2, t_2 , $t_1 < s_2 < \tau_2 < t_2$, при которых решение $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ уравнения (4.1) при условиях (4.8), $\tau = \tau_2$, $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_2) = 0$ будет удовлетворять соотношениям

$$\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t) < 0, \quad t \in [t_1, s_2]; \quad \bar{\psi}_{24}(\tau_2; s_2) = 0; \quad \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t) > 0, \quad t \in (s_2, t_2). \quad (4.11)$$

Поэтому при выбранной управляющей функции $u_2(t) \equiv 1$, $t \in [0, t_2]$ функция $\bar{\psi}_{24}(t) \triangleq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$ на полуинтервале $[t_1, s_2]$ не будет удовлетворять второму равенству в (4.5). Следовательно, управление $U = (u_1, u_2)$, у которого вторая компонента тождественно равна единице, не может быть оптимальным.

При нарушении неравенства $\bar{\psi}_{14}^*(t_1) - \bar{\psi}_{14}^*(0) \leq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1)$ найдется момент s_0 , $s_0 \in (0, t_1)$, при котором ранее построенная функция $\bar{\psi}_{14}(t) \triangleq \bar{\psi}_{14}^*(t) + \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1) - \bar{\psi}_{14}^*(t_1)$ будет отрицательной на полуинтервале $[0, s_0]$. Но это противоречит второму соотношению в (4.5). Таким образом, теорема доказана.

5. Построение управления при нарушении условий теоремы 1

Если имеют место включения $W_2 \in \Gamma_{1t_1}$, $W'_1 \in \Gamma_{10}$, а неравенство (4.10) не выполняется, то может существовать полуинтервал $[0, s_0] \subset [0, t_1]$, на котором функция $\bar{\psi}_{14}(t)$ будет строго

отрицательной. В этом случае траектория \mathcal{L}_0 не будет оптимальной, так как ее порождающее управление не удовлетворяет принципу максимума (4.5). Здесь на полуинтервале $[0, s_0)$ надо полагать $u_2(t) = -1$.

Перейдем к рассмотрению случая, когда $W_2 \notin \Gamma_{1t_1}$, $W'_1 \in \Gamma_{10}$. Как было отмечено при доказательстве теоремы 2, ввиду ограничения на выбор целевых точек условия $W_2 \notin \Gamma_{1t_1}$, $W_2 \in \Gamma_{6t_1}$ эквивалентны, а при выполнении последнего из них имеют место соотношения (4.11). Кроме того, известно [2], что при этом же условии управление (3.3), где $\tau = \tau_2, s = s_2, \vartheta = t_2$, будет не только удовлетворять необходимым условиям оптимальности, но и обеспечит перевод объекта (2.1) из положения $(x_U(t_1), y_U(t_1)), \theta_U(t_1), v_U(t_1))$ в точку W_2 за наименьшее время, равное $t_2 - t_1$. В указанном случае положение прямой l_2 изменится. Следовательно, условие выравнивания (4.6) нарушится и для его выполнения необходима корректировка момента τ_0 .

Заметим, что при условии (4.6) производные функций $\bar{\psi}_{24}(t), \bar{\psi}_{14}(t)$ в момент t_1 совпадают. При этом ввиду краевых условий справедливы соотношения $\bar{\psi}_{14}(t_1) = \bar{\psi}_{24}(t_1) \stackrel{\Delta}{=} \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1)$. Поэтому функция $\bar{\psi}_{14}(t)$ отрицательна на интервале $(t_1 - \varepsilon, t_1)$, где ε — достаточно малое положительное число.

Определим наибольший момент времени s_1 , $s_1 < t_1$, при котором $\bar{\psi}_{14}(s_1) = 0$; $\bar{\psi}_{14}(t) < 0$, $t \in (s_1, t_1)$. Пусть $\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; t)$ — решение уравнения (4.4) при условии $\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; 0) = 0$ и в предположении, что на отрезке $[0, \tau_0]$ движение объекта (2.1) происходит по участку \mathcal{K}_0 , а на отрезке $[\tau_0, t_1]$ — по прямой l_1 до точки W'_1 .

Очевидно,

$$\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; t) = \bar{\psi}_{14}(\tau_0; t) - \bar{\psi}_{14}(\tau_0; 0), \quad t \in (0, t_1).$$

Обозначим через $\tilde{\psi}_{14}^*(t)$ функцию, которая на отрезке времени $[0, \tau_1]$ совпадает с $\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; t)$, а на отрезке времени $[\tau_1, t_1]$ является решением уравнения (4.4) при краевом условии $\tilde{\psi}_{14}^*(\tau_1) = \tilde{\psi}_{14}(\tau_0; \tau_1)$. Функцию $\bar{\psi}_{14}(t)$ определим соотношением $\bar{\psi}_{14}(t) \stackrel{\Delta}{=} \tilde{\psi}_{14}^*(t) + \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1) - \tilde{\psi}_{14}^*(t_1)$, а момент s_1 — равенством $\bar{\psi}_{14}(s_1) = 0$. Графики функций $\bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$, $\tilde{\psi}_{14}(\tau_0; t)$, $\tilde{\psi}_{14}^*(t)$, $\bar{\psi}_{14}(t)$ в рассматриваемом случае изображены на правой части рис. 3б.

Если

$$\tilde{\psi}_{14}^*(t_1) \leq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t_1), \quad (5.1)$$

то функция $\bar{\psi}_{14}(t)$ будет положительной на интервалах $(0, s_1)$, (s_2, t_2) и отрицательной на промежутке (s_1, s_2) . В этом случае согласно условиям (4.5) время последовательного сближения с точками W_1, W_2 разобьем на следующие промежутки: $[0, \tau'_0)$, $[\tau'_0, \tau'_1)$, $[\tau'_1, s_1)$, $[s_1, s_2)$, $[s_2, \tau'_2)$, $[\tau'_2, t'_2]$ и определим управление $U = (u_1, u_2)$ соотношениями

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [0, \tau'_0); & u_1(t) &= 0, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [\tau'_0, \tau'_1); \\ u_1(t) &= -1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [\tau'_1, s_1); & u_1(t) &= -1, \quad u_2(t) = -1, \quad t \in [s_1, s_2); \\ u_1(t) &= -1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [s_2, \tau'_2); & u_1(t) &= 0, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [\tau'_2, t'_2]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Моменты $\tau'_0, \tau'_1, s_1, t'_1, s_2, \tau'_2, t'_2$, выберем удовлетворяющими следующим семи условиям:

$$W_1 \in \mathcal{L}_1, \quad W_2 \in \mathcal{L}_1, \quad \bar{\psi}_{14}(s_1) = 0, \quad \bar{\psi}_{14}(s_2) = 0, \quad \bar{\psi}_{14}(t'_1) = \bar{\psi}_{24}(t'_1), \quad \bar{\psi}_{24}(t'_2) = 0, \quad \text{усл. (4.6)}$$

(t'_1, t'_2 — моменты сближения с точками W_1, W_2). В результате получим систему из семи уравнений с семью неизвестными $\tau'_0, \tau'_1, s_1, t'_1, s_2, \tau'_2, t'_2$. Поскольку оптимальное управление существует, то эта система имеет решение, которое предлагается определять следующим образом.

При решении данной системы используем принцип Беллмана: *оптимальное управление U обладает тем свойством, что каково бы ни было это управление, переводящее систему (2.1) из начального состояния в положение $(x_1, y_1, \theta_U(t'_1), v_U(t'_1))$, последующее управление до момента t'_2 сближения со второй точкой $W_2 = (x_2, y_2)$ должно быть оптимальным.*

Пусть $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — параметры, подлежащие определению. Положим $\tau'_0 = \tau_0 - \delta_1$, $\tau'_1 = \tau_1 - \delta_2$, $s_1 = t_1 - \delta_3$, где τ_0, τ_1, t_1 — моменты, вычисленные при построении траектории \mathcal{L}_0 .

Управление $U = (u_1, u_2)$ (5.2) можно переписать в виде

$$u_1(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \tau'_0], \\ 0, & t \in [\tau'_0, \tau'_1], \\ -1, & t \in [\tau'_1, t'_1], \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, s_1], \\ -1, & t \in (s_1, t'_1]. \end{cases} \quad (5.3)$$

При фиксированных значениях δ_1, δ_2 определим величину δ_3 , при которой управление (5.3) обеспечивает сближение системы (2.1) с точкой W_1 в некоторый момент t'_1 . Принимая состояние $(x_1, y_1, \theta_U(t'_1), v_U(t'_1))$ системы (2.1) за начальное, воспользуемся правилом (3.2)–(3.4) построения оптимального управления на заключительном этапе движения — на отрезке $[t'_1, t'_2]$. В результате вычислим моменты s_2, τ'_2 , при которых справедливы соотношения $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; s_2) = 0$; $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t) > 0$, $t \in (s_2, t'_2)$, а также определим значение $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t'_1)$. Моменты τ'_0, τ'_2 однозначно определяют соответственно прямые l_1, l_2 , содержащие участки $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ и пересекающиеся в некоторой точке F .

Как и ранее, обозначим через l прямую, проходящую через точки W_1, F . Неизвестные величины δ_1, δ_2 выбираем так, чтобы, во-первых, прямая l была ортогональна вектору $(\cos \theta_U(t'_1), \sin \theta_U(t'_1))$, а во-вторых, функция $\bar{\psi}_{14}(t)$, удовлетворяющая уравнению (4.4) с краевым условием $\bar{\psi}_{14}(t) = \bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t'_1)$, была бы в момент s_1 равной нулю. В результате получим управление (5.3), удовлетворяющее необходимым условиям оптимальности. Таким образом, решение системы семи уравнений с семью неизвестными сводится к решению двух уравнений с двумя неизвестными δ_1, δ_2 . Отметим, что при вычислении искомых величин δ_1, δ_2 одним из методов динамического программирования потребуется многократно использовать правило (3.2)–(3.4) и вычислять соответствующие моменты s_2, τ'_2 и значения $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t'_1)$. Поскольку известно аналитическое решение уравнения (4.1) (см. [2]), то определение значения $\bar{\psi}_{24}(\tau'_2; t'_1)$ является несложным делом.

При нарушении условия (5.1) найдется такой момент $s_0 \in (0, \tau'_0)$, при котором

$$\bar{\psi}_{14}(s_0) = 0, \quad \bar{\psi}_{14}(t) < 0, \quad t \in (0, s_0).$$

Тогда промежуток $[0, \tau'_0)$, разбивается на две части: $[0, s_0)$, $[s_0, \tau'_0)$. В соответствии с (4.5) полагаем

$$u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = -1, \quad t \in [0, s_0); \quad u_1(t) = 1, \quad u_2(t) = 1, \quad t \in [s_0, \tau'_0).$$

Если систему из указанных семи уравнений дополнить уравнением $\bar{\psi}_{14}(s_0) = 0$, то получим систему с восемью неизвестными: $s_0, \tau'_0, \tau'_1, s_1, t'_1, s_2, \tau'_2, t'_2$.

З а м е ч а н и е. В результате исследования поведения функций $\bar{\psi}_{24}(t) \triangleq \bar{\psi}_{24}(\tau_2; t)$, $\bar{\psi}_{14}(t)$, являющихся решением уравнений (4.1), (4.4) и определяющих в каждый момент времени $t \in [0, t_2]$ значения $u_2(t)$ (4.5), приходим к выводу, что на оптимальной траектории торможение возможно только в окрестностях точек W_0, W_1 . Этот факт согласуется с физическими свойствами системы (2.1), (2.2). Действительно, для быстрого разворота, который может происходить только в окрестностях точек W_0, W_1 , необходимо максимально увеличивать угловую скорость за счет уменьшения линейной скорости, т. е. полагать $u_2(t) = -1$. Если при движении по траектории в цель происходит небольшой разворот вектора скорости либо цель находится достаточно далеко от начальной точки и потеря времени при развороте компенсируется более быстрым движением по траектории, то надо максимально разгоняться, т. е. полагать $u_2(t) = 1$. В противном случае при развороте надо тормозить.

Заключение

С использованием свойств рассматриваемой системы (2.1), (2.2), вспомогательных переменных [2] и необходимых условий оптимальности в нелинейных задачах последовательного

управления, сформулированных в теореме 7.1 в [8], исследована задача об оптимальном по быстродействию сближении этой системы с двумя неподвижными точками в заданной очередности. Предложен метод построения управления, удовлетворяющего принципу максимума и условиям выравнивания гамильтониана. Определены условия, при которых указанное управление является оптимальным и имеет вторую компоненту $u_2(t)$, тождественно равную единице.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // Amer. J. Math. 1957. Vol. 79. P. 497–516.
2. **Berdyshev Iu.I.** Time-optimal control synthesis for a fourth-order nonlinear system // J. Appl. Math. Mech. 1975. Vol. 39, no. 6. P. 948–956.
3. **Хамза М.Х., Колас И., Рунгальдер В.** Оптимальные по быстродействию траектории полета в задаче преследования // Управление космическими аппаратами и кораблями. М.: Наука, 1971. С. 410–418.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 497 с.
5. **Марков А.А.** Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах // Сообщение Харьков. мат. общества. 1889. Сер. 2. Т. 1, № 5, 6. С. 250–276.
6. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 384 с.
7. **Бердышев Ю.И.** Синтез оптимального по быстродействию управления движением материальной точки в среде с сопротивлением: дис. . . . канд. физ.-мат. наук / ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1978. 133 с.
8. **Бердышев Ю.И.** Нелинейные задачи последовательного управления и их приложение / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2015. 193 с.
9. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
10. **Бердышев, Ю.И.** Об одной задаче последовательного обхода нелинейным управляемым объектом совокупности гладких многообразий // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1–11.

Бердышев Юрий Иванович

Поступила 10.12.15

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: berd@imm.uran.ru

УДК 519.624.8

О МЕТОДЕ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ С ТРЕЩИНОЙ

Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм

Рассматривается двойственный метод решения модельной задачи с трещиной, основанный на модифицированном функционале Лагранжа. Сходимость метода исследуется в предположении H^1 -регулярности решения исходной задачи. Доказывается соотношение двойственности для исходной и двойственной задач.

Ключевые слова: задача с трещиной, метод двойственности, модифицированный функционал Лагранжа, функционал чувствительности.

E. M. Vikhtenko, R. V. Namm. On the dual method for a model problem with a crack.

The dual method based on a modified Lagrangian functional is applied to a model problem with a crack. The convergence of the method is investigated under the assumption that the solution of the primal problem is H^1 -regular. The duality relation is established for the primal and dual problems.

Keywords: model problem with a crack, dual method, modified Lagrangian functional, sensitivity functional.

Классические постановки задачи упругости с трещиной внутри области предполагают, как правило, что напряжение на берегах трещины равно нулю [1]. Но равенство нулю напряжения на берегах трещины не исключает возможности проникновения берегов трещины друг в друга, что является неестественным с точки зрения механики процесса. В последнее время в работах по теории трещин рассматриваются модели с нелинейными краевыми условиями на берегах трещины [2]. Указанные краевые условия записываются в виде неравенств и обеспечивают взаимное непроникновение берегов трещины. С точки зрения механики такие модели более предпочтительны в сравнении с их классическими аналогами. Эти модели допускают вариационную постановку в виде минимизации квадратичного функционала на замкнутом выпуклом подмножестве исходного гильбертова пространства.

Для анализа проблем механики сплошной среды большую популярность получили вариационные постановки исследуемых задач [3; 4]. В последнее время особенно актуальной становится разработка специальных методов для численного исследования вариационных неравенств. В указанных выше работах, а также в [5; 6] отражен опыт численного решения нелинейных вариационных задач механики, в том числе задач с трещинами.

В предлагаемой работе для решения модельной задачи с трещиной с условиями непроникновения берегов трещины друг в друга исследуется схема двойственности, построенная на основе модифицированного функционала Лагранжа. Теория модифицированных функций Лагранжа для конечномерных задач выпуклой оптимизации рассматривалась рядом авторов (см., например, [7; 8]). В работах [9; 10] эти исследования были распространены на бесконечномерные вариационные неравенства механики сплошной среды. В этих исследованиях, как правило, предполагалась достаточная регулярность решения исходной задачи, которая обеспечивает существование решения двойственной задачи. Однако для задачи теории упругости с трещиной регулярность решения в окрестности краев трещины может быть сколь угодно плохой и двойственная задача может быть неразрешимой. Несмотря на указанную проблему, удается построить и обосновать схему двойственности для решения поставленной задачи, а также доказать соотношение (равенство) двойственности для исходной и двойственной задач.

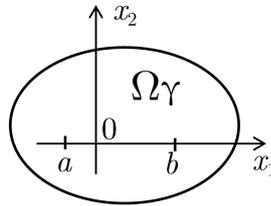
1. Постановка модельной задачи

Рассмотрим вариационную задачу для области с трещиной, соответствующую скалярному уравнению Пуассона в области с разрезом, на берегах которого заданы нелинейные краевые условия типа неравенств. Эта задача содержит основные особенности задачи о равновесии упругого тела с трещиной при краевых условиях, описывающих непроникание берегов.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ [11, с. 10] и $\gamma \subset \Omega$ — разрез (трещина) внутри Ω . Ниже считаем, что

$$\gamma = \{(x_1, x_2) \in \Omega : a < x_1 < b, x_2 = 0\},$$

предполагая, что концевые точки $(a, 0)$ и $(b, 0)$ — вершины трещины — не выходят на внешнюю границу Γ . Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$, $\bar{\gamma} = \{(x_1, x_2) \in \Omega : a \leq x_1 \leq b, x_2 = 0\}$. Выберем вектор единичной нормали n на γ . В этом случае можем говорить о положительном (верхнем) и отрицательном (нижнем) берегах трещины γ (см. рисунок).



Область с прямолинейным разрезом.

Введем множество допустимых перемещений

$$K = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) : [v] \geq 0 \text{ на } \gamma; v = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

где $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на γ (v^+ — значение функции v на верхнем берегу трещины, v^- — значение функции v на нижнем берегу, знаки \pm соответствуют положительному и отрицательному направлениям вектора нормали n к разрезу γ). Значения функции v на трещине γ понимаются в смысле значений следов функции v на γ (см., например, [2, с. 12]), $v^\pm \in H^{1/2}(\gamma)$. Норма в пространстве $H^{1/2}(\gamma)$ определяется как

$$\|v\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 = \|v\|_{L_2(\gamma)}^2 + \int_\gamma \int_\gamma \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy.$$

Через $H^1(\Omega_\gamma)$ обозначено пространство Соболева $W_2^1(\Omega_\gamma)$, т. е. множество функций v , суммируемых с квадратом по Лебегу на Ω_γ и имеющих обобщенные производные первого порядка, также суммируемые с квадратом по Лебегу на Ω_γ , $L_2(\gamma)$ — множество функций, суммируемых с квадратом по Лебегу на γ .

В дальнейшем нам понадобится пространство $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ [2, с. 53; 12, с. 84]:

$$H_{00}^{1/2}(\gamma) = \left\{ v \in H^{1/2}(\gamma) : \frac{v}{\sqrt{\rho}} \in L_2(\gamma) \right\}$$

с нормой

$$\|v\|_{H_{00}^{1/2}(\gamma)}^2 = \|v\|_{H^{1/2}(\gamma)}^2 + \left\| \frac{v}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L_2(\gamma)}^2,$$

где $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial\gamma)$.

Рассмотрим задачу минимизации

$$\begin{cases} J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla v|^2 d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f v d\Omega - \min, \\ v \in K. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $f \in L_2(\Omega_\gamma)$ — заданная функция, где $L_2(\Omega_\gamma)$ — пространство функций, суммируемых с квадратом по Лебегу на Ω_γ .

Задача (1.1) имеет единственное решение u , которое является также единственным решением вариационного неравенства

$$u \in K, \quad \int_{\Omega_\gamma} \nabla u \cdot \nabla (v - u) d\Omega \geq \int_{\Omega_\gamma} f (v - u) d\Omega \quad \forall v \in K.$$

Можно показать, что функция u является решением (в обобщенном смысле) следующей краевой задачи [2, с. 46]:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \\ u &= 0 \quad \text{на } \Gamma, \\ [u] &\geq 0, \quad \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \leq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} [u] = 0 \quad \text{на } \gamma. \end{aligned}$$

При выбранной конфигурации границы γ производная по нормали $\partial u / \partial n$ совпадает с производной $\partial u / \partial x_2$.

В [2] рассмотрены вопросы регулярности решения задачи (1.1), исследовано поведение решения и его производных в окрестностях вершин трещины.

2. Двойственный метод для решения модельной задачи

Для произвольного $m \in L_2(\gamma)$ построим множество

$$K_m = \{v \in H^1(\Omega_\gamma), v = 0 \text{ на } \Gamma, -[v] \leq m \text{ п.в. на } \gamma\}.$$

Нетрудно показать, что K_m — выпуклое замкнутое по норме $H^1(\Omega_\gamma)$ множество.

На пространстве $L_2(\gamma)$ определим функционал чувствительности

$$\chi(m) = \begin{cases} \inf_{v \in K_m} J(v), & \text{если } K_m \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что задача $\inf_{v \in K_m} J(v)$ при условии $K_m \neq \emptyset$ разрешима в силу коэрцитивности функционала $J(v)$ на $H^1(\Omega_\gamma)$. Легко видеть, что если функция m ограничена снизу, то множество K_m не является пустым. Но если функция $m \in L_2(\gamma) \setminus H^{1/2}(\gamma)$ и не ограничена снизу на γ , то множество K_m может быть пустым [2; 13].

Функционал $\chi(m)$ является собственным выпуклым функционалом на $L_2(\gamma)$, но его эффективная область $\text{dom} \chi = \{m \in L_2(\gamma) : \chi(m) < +\infty\}$ не совпадает с $L_2(\gamma)$. Заметим, что $\text{dom} \chi$ является выпуклым, но не замкнутым множеством в $L_2(\gamma)$, причем в нашем случае $\overline{\text{dom} \chi} = L_2(\gamma)$.

На пространстве $H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma) \times L_2(\gamma)$ определим функционал

$$\mathcal{K}(v, l, m) = \begin{cases} J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left((l + rm)^2 - l^2 \right) d\Gamma, & \text{если } -[v] \leq m \text{ п.в. на } \gamma, \\ +\infty & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и модифицированный функционал Лагранжа $M(v, l)$ на пространстве $H^1(\Omega_\gamma) \times L_2(\gamma)$:

$$M(v, l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \mathcal{K}(v, l, m) = J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left(((l - r[v])^+)^2 - l^2 \right) d\Gamma,$$

где $r > 0 - \text{const}$, $(l - r[v])^+ = \max\{l - r[v], 0\}$.

Введем модифицированный двойственный функционал

$$\underline{M}(l) = \inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} M(v, l) = \inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} \left(((l - r[v])^+)^2 - l^2 \right) d\Gamma \right\}.$$

Так как $\inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} \inf_{m \in L_2(\gamma)} \mathcal{K}(v, l, m) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \inf_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} \mathcal{K}(v, l, m)$, то для $\underline{M}(l)$ имеет место и другое представление [14; 16]:

$$\underline{M}(l) = \inf_{m \in L_2(\gamma)} \left\{ \chi(m) + \int_{\gamma} l m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 d\Gamma \right\}.$$

Легко видеть, что для любых $l \in L_2(\gamma)$ справедлива оценка

$$\underline{M}(l) \leq \chi(0) = \inf_{v \in K} J(v). \quad (2.1)$$

Для двойственного функционала $\underline{M}(l)$ рассмотрим двойственную задачу

$$\begin{cases} \underline{M}(l) - \sup, \\ l \in L_2(\gamma). \end{cases} \quad (2.2)$$

В работах [14–16] модифицированные функционалы Лагранжа и связанные с ними методы двойственности исследовались в предположении разрешимости задачи (2.2). Отметим, что разрешимость двойственной задачи имеет место в случае, если решение исходной задачи принадлежит пространству $H^2(\Omega_\gamma)$. Однако для задачи (1.1) с внутренней трещиной предположение о большей регулярности решения, чем $u \in H^1(\Omega_\gamma)$, является неестественным. Ниже исследуется двойственный метод решения задачи (1.1), в котором разрешимость задачи (2.2) заранее не предполагается.

Исследуем функционал чувствительности $\chi(m)$ и связанный с ним двойственный функционал $\underline{M}(l)$.

Лемма 1. Пусть $\bar{m} \in L_2(\gamma)$ не принадлежит $\text{dom}\chi$. Тогда для любой последовательности $\{m_i\} \subset \text{dom}\chi$ такой, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|m_i - \bar{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$, справедливо предельное равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) = +\infty$.

Доказательство. Для функции $\bar{m} \notin \text{dom}\chi$ рассмотрим произвольную последовательность $\{m_i\} \subset \text{dom}\chi$ такую, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|m_i - \bar{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$. Так как $K_{m_i} \neq \emptyset$ и функционал $J(v)$ коэрцитивен на $H^1(\Omega_\gamma)$, то существует единственный элемент $v_i = \arg \min_{v \in K_{m_i}} J(v)$ ($i=1, 2, \dots$) [4; 17]. Покажем, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i\|_{H^1(\Omega_\gamma)} = +\infty$. Допустим противное, т. е. пусть у последовательности $\{v_i\}$ существует ограниченная подпоследовательность $\{v_{ij}\}$, $\|v_{ij}\|_{H^1(\Omega_\gamma)} \leq C$ для всех ij , где $C > 0 - \text{const}$. Из теоремы о следах функций вытекает, что $\|[v_{ij}]\|_{H_0^{1/2}(\gamma)} \leq C_1$, где $C_1 > 0 - \text{const}$ [2, с. 12]. Тогда $\{[v_{ij}]\}$ является компактной последовательностью в $L_2(\gamma)$. Пусть $t \in H_0^{1/2}(\gamma)$ есть слабая предельная точка этой последовательности. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что t есть слабый предел $\{[v_{ij}]\}$. Тогда $\{[v_{ij}]\}$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$. Так как $-[v_{ij}] \leq m_i$, то $-t \leq \bar{m}$ на γ . Тем самым, $K_{\bar{m}} \neq \emptyset$ или $\bar{m} \in \text{dom}\chi$. Полученное противоречие показывает, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \|v_i\|_{H^1(\Omega_\gamma)} = +\infty$. Так как функционал $J(v)$ коэрцитивен, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} J(v_i) = +\infty$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\bar{m} \in L_2(\gamma)$ принадлежит $\text{dom}\chi$. Тогда для любой последовательности $\{m_i\} \subset \text{dom}\chi$, сходящейся к \bar{m} в $L_2(\gamma)$, справедливо неравенство $\liminf_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) \geq \chi(\bar{m})$.

Доказательство. Пусть теперь $\{m_i\} \in \text{dom}\chi$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} \|m_i - \bar{m}\|_{L_2(\gamma)} = 0$. Из последовательности $\{m_i\}$ выделим подпоследовательность $\{m_{i_k}\}$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m_{i_k}) = \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i).$$

Рассмотрим подпоследовательность $\{v_{i_k}\}$, где $v_{i_k} = \arg \min_{v \in K_{m_{i_k}}} J(v)$. Последовательность $\{v_{i_k}\}$ является ограниченной последовательностью в $H^1(\Omega_\gamma)$ (иначе $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m_{i_k}) = +\infty$ и требуемое неравенство доказано). Из теоремы о следах функций следует, что последовательность $\{[v_{i_k}]\}$ ограничена в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Поэтому $\{[v_{i_k}]\}$ слабо компактна в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Пусть $t \in H_{00}^{1/2}(\gamma)$ есть слабая предельная точка этой последовательности. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $\{[v_{i_k}]\}$ является слабо сходящейся последовательностью, т. е. t есть слабый предел $\{[v_{i_k}]\}$ в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$.

Так как пространство $H_{00}^{1/2}(\gamma)$ компактно вкладывается в $L_2(\gamma)$, а $L_2(\gamma)$ вкладывается в $H_{00}^{-1/2}(\gamma)$, то $\{[v_{i_k}]\}$ сходится к t по норме в $L_2(\gamma)$. Здесь $H_{00}^{-1/2}(\gamma)$ — пространство, сопряженное к $H_{00}^{1/2}(\gamma)$. Из сходимостей $m_{i_k} \rightarrow \bar{m}$ в $L_2(\gamma)$, $[v_{i_k}] \rightarrow t$ в $L_2(\gamma)$ и условия $-[v_{i_k}] \leq m_{i_k}$ получаем $-t \leq \bar{m}$.

Обозначим $\tilde{t} = \arg \min_{[v]=t \text{ на } \gamma} J(v)$. Имеем

$$\begin{aligned} & J(v_{i_k}) - J(\tilde{t}) \\ = & \int_{\Omega_\gamma} \nabla \tilde{t} \cdot \nabla (v_{i_k} - \tilde{t}) \, d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f(v_{i_k} - \tilde{t}) \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla (v_{i_k} - \tilde{t})|^2 \, d\Omega = \langle \mu, [v_{i_k} - \tilde{t}] \rangle + \frac{1}{2} \int_{\Omega_\gamma} |\nabla (v_{i_k} - \tilde{t})|^2 \, d\Omega, \end{aligned}$$

где

$$\langle \mu, [v] \rangle = \int_{\Omega_\gamma} \nabla \tilde{t} \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega_\gamma} f v \, d\Omega$$

и при этом $\mu \in H_{00}^{-1/2}(\gamma)$ [2; 13].

Так как $\{[v_{i_k}]\}$ слабо сходится к t в $H_{00}^{1/2}(\gamma)$, то в силу единственности слабого предела имеем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu, [v_{i_k} - \tilde{t}] \rangle = 0.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m_{i_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(v_{i_k}) \geq J(\tilde{t}) \geq \chi(\bar{m})$$

и, следовательно,

$$\underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \chi(m_i) \geq \chi(\bar{m}).$$

Лемма доказана.

Из лемм 1 и 2 следует, что функционал $\chi(m)$ является полунепрерывным снизу на $L_2(\gamma)$ функционалом. Легко показать, что $\chi(m)$ выпуклый. Отсюда вытекает слабая полунепрерывность снизу функционала чувствительности на $L_2(\gamma)$.

Для произвольного фиксированного $l \in L_2(\gamma)$ рассмотрим функционал

$$F_l(m) = \chi(m) + \int_{\gamma} l m \, d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 \, d\Gamma, \quad r > 0 \text{ — const.}$$

Из лемм 1 и 2 вытекает, что $F_l(m)$ — слабо полунепрерывный снизу функционал на $L_2(\gamma)$.

Так как $\chi(m)$ полунепрерывен снизу в $L_2(\gamma)$, то его надграфик $\text{epi}\chi$ есть выпуклое замкнутое множество в $L_2(\gamma) \times R$, $R = (-\infty, +\infty)$. По теореме отделимости Мазура [18, с. 164]

существуют такие $\alpha \in L_2(\gamma)$ и $\beta \in R$, что $\chi(m) + \int_{\gamma} \alpha m d\Gamma + \beta \geq 0 \quad \forall m \in \text{dom}\chi$. Следовательно, для функционала $F_l(m)$ справедлива оценка

$$F_l(m) \geq - \int_{\gamma} \alpha m d\Gamma + \int_{\gamma} l m d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2 d\Gamma - \beta \quad \forall m \in L_2(\gamma).$$

Поэтому $F_l(m) \rightarrow +\infty$ при $\|m\|_{L_2(\gamma)} \rightarrow \infty$, т. е. $F_l(m)$ коэрцитивен в $L_2(\gamma)$.

Из слабой полунепрерывности снизу и коэрцитивности $F_l(m)$ следует существование для любого $l \in L_2(\gamma)$ элемента $m(l) \in L_2(\gamma)$ такого, что $m(l) = \arg \min_{m \in L_2(\gamma)} F_l(m)$. Из сильной выпуклости $F_l(m)$ на $\text{dom}\chi$ [11, с. 20] вытекает, что для любого $l \in L_2(\gamma)$ элемент $m(l)$ единственный.

Сформулируем для двойственного функционала $\underline{M}(l)$ несколько утверждений, доказательства которых повторяют доказательства теорем 2–4 в [16].

Утверждение 1. *Двойственный функционал $\underline{M}(l)$ непрерывен в $L_2(\gamma)$.*

Утверждение 2. *Двойственный функционал $\underline{M}(l)$ дифференцируем по Гато в $L_2(\gamma)$, и его производная $\nabla \underline{M}(l)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $1/r$, т. е. выполняется*

$$\|\nabla \underline{M}(l') - \nabla \underline{M}(l'')\|_{L_2(\gamma)} \leq \frac{1}{r} \|l' - l''\|_{L_2(\gamma)} \quad \forall l', l'' \in L_2(\gamma).$$

В [16] показывается, что $\nabla \underline{M}(l) = m(l) = \max\{-[u], -l/r\} \quad \forall l \in L_2(\gamma)$.

Для решения двойственной задачи (2.2) рассмотрим градиентный метод [19]

$$l^{k+1} = l^k + \Theta_k m(l^k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

с любым начальным значением $l^0 \in L_2(\gamma)$, $\Theta_k \in [\beta, 2r - \beta]$, $\beta \in (0, r]$.

Теорема 1. *Для последовательности $\{l^k\}$, построенной по методу (2.3), имеет место предельное равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)} = 0$.*

Градиентный метод (2.3) порождает следующий алгоритм метода Удзавы решения задачи (1.1):

- 1) На начальном шаге $k = 0$ задается произвольная функция $l^0 \in L_2(\gamma)$.
- 2) Для $k = 0, 1, 2, \dots$ последовательно вычисляются

$$(i) \quad u^{k+1} = \arg \min_{v \in H^1(\Omega_\gamma)} \left\{ J(v) + \frac{1}{2r} \int_{\gamma} ((l^k - r[v])^+)^2 - (l^k)^2 d\Gamma \right\}; \quad (2.4)$$

$$(ii) \quad l^{k+1} = l^k + \Theta_k \max \left\{ -[u^{k+1}], -\frac{l^k}{r} \right\}, \quad \Theta_k \in [\beta, 2r - \beta], \quad \beta \in (0, r]. \quad (2.5)$$

Теорема 2. *Имеет место равенство двойственности*

$$\sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Доказательство. Из неравенства (2.1) вытекает, что

$$\underline{M}(l^k) \leq \chi(0) = \inf_{v \in K} J(v), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Так как $\chi(m)$ является полунепрерывным снизу функционалом на $L_2(\gamma)$, то из теоремы 1 следует, что $\varliminf_{k \rightarrow \infty} \chi(m(l^k)) \geq \chi(0)$. Неравенство (2.1) переписывается следующим образом:

$$\chi(m(l^k)) + \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) d\Gamma \leq \chi(0), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Отсюда получаем

$$\int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma \leq \chi(0) - \chi(m(l^k)) - \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) d\Gamma, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Поэтому справедлива оценка $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma \leq 0$. Покажем, что $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = 0$. Допустим противное, т. е. $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = \delta < 0$. Тогда можно подобрать такое δ_1 , $\delta < \delta_1 < 0$, и такой номер N , что $\int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma < \delta_1 \quad \forall k > N$. Имеем

$$\begin{aligned} \|l^{k+1}\|_{L_2(\gamma)}^2 &= \|l^k + \Theta_k m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}^2 = \|l^k\|_{L_2(\gamma)}^2 + 2\Theta_k \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma + \Theta_k^2 \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}^2 \\ &\leq \|l^k\|_{L_2(\gamma)}^2 + 2\Theta_k \delta_1 + \Theta_k^2 \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}^2. \end{aligned}$$

Так как по теореме 1 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|m(l^k)\|_{L_2(\gamma)}^2 = 0$, то для достаточно больших номеров k справедлива оценка $\|l^{k+1}\|_{L_2(\gamma)}^2 \leq \|l^k\|_{L_2(\gamma)}^2$. Тогда $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = 0$. Это противоречит предположению, т. е. $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = 0$.

Выделим из последовательности $\{l^k\}$ подпоследовательность $\{l^{k_j}\}$ такую, что

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^{k_j} m(l^{k_j}) d\Gamma.$$

Так как последовательность $\{\underline{M}(l^{k_j})\}$ является монотонно возрастающей [16; 19] и ограниченной снизу величиной $\chi(0)$, то

$$\begin{aligned} \chi(0) &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\chi(m(l^k)) + \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^k) d\Gamma \right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\chi(m(l^{k_j})) + \int_{\gamma} l^{k_j} m(l^{k_j}) d\Gamma + \frac{r}{2} \int_{\gamma} m^2(l^{k_j}) d\Gamma \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \chi(m(l^{k_j})) \geq \chi(0) = \inf_{v \in K} J(v). \end{aligned}$$

Таким образом, для метода (2.4), (2.5) установлена сходимость в смысле предельного равенства

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{M}(l^k) = J(u) = \inf_{v \in K} J(v).$$

Отсюда следует соотношение двойственности для исходной и двойственной задачи $\sup_{l \in L_2(\gamma)} \underline{M}(l) = \inf_{v \in K} J(v)$. Теорема доказана.

Отметим, что при условии разрешимости двойственной задачи (2.2) можно доказать, что последовательность $\{l^k\}$ ограничена в $L_2(\gamma)$ [14; 16]. Вместе с теоремой 1 это означает, что справедливо равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} l^k m(l^k) d\Gamma = 0$. Отсюда сразу вытекает сходимость метода (2.4), (2.5) по функционалу задачи (1.1), т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \chi(m(l^k)) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(u^{k+1}) = J(u)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
2. Хлуднев А.М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010. 252 с.
3. Кравчук А.С. Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997. 333 с.
4. Решение вариационных неравенств в механике / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. М.: Мир, 1986. 270 с.
5. Wang G., Wang L. Numerical modeling of a dual variational inequality of unilateral contact problems using the mixed finite element method // Int. J. Numer. Anal. Model. 2009. Vol. 6, no. 1. P. 161–176.
6. Matei A. An existence result for a mixed variational problem arising from Contact Mechanics // Nonlinear Anal. Real World Appl. 2014. No. 20. P. 74–81.
7. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. М.: Наука, 1989. 400 с.
8. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 399 с.
9. Ву Г., Намм Р.В., Сачков С.А. Итерационный метод поиска седловой точки для полукоэрцитивной задачи Синьорини, основанный на модифицированном функционале Лагранжа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 1. С. 26–36.
10. Вихтенко Э.М., Намм Р.В. Схема двойственности для решения полукоэрцитивной задачи Синьорини с трением // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 12. С. 2023–2036.
11. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
12. Kikuchi N., Oden J.T. Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element method. Philadelphia, 1988. 509 p. (SIAM Stud. Appl. Math., 8.)
13. Mclean W. Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge: University Press, 2000. 372 p.
14. Вихтенко Э.М., Максимова Н.Н., Намм Р.В. Функционалы чувствительности в вариационных неравенствах механики и их приложение к схемам двойственности // Сиб. журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 43–52.
15. Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В. Функционалы чувствительности в контактных задачах теории упругости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1218–1228.
16. Вихтенко Э.М., Ву Г., Намм Р.В. Методы решения полукоэрцитивных вариационных неравенств механики на основе модифицированных функционалов Лагранжа // Дальневосточ. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 6–17.
17. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
18. Куфнер А., Фучик С. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.
19. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1980. 384 с.

Вихтенко Элина Михайловна

канд. физ.-мат. наук, доцент

доцент

Тихоокеанский государственный университет

e-mail: vikht.el@gmail.com

Поступила 30.04.2015

Намм Роберт Викторович

д-р физ.-мат. наук, профессор

главный науч. сотрудник

Вычислительный центр ДВО РАН

e-mail: rnamm@yandex.ru

УДК 512.542

О ГИПОТЕЗЕ ТОМПСОНА ДЛЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ И СИММЕТРИЧЕСКИХ ГРУПП СТЕПЕНИ, БОЛЬШЕЙ 1361 ¹

И. Б. Горшков

Пусть G — конечная группа и $N(G)$ — множество размеров ее классов сопряженных элементов. Доказано, что если $N(G)$ равно $N(\text{Alt}_n)$ или $N(\text{Sym}_n)$, где $n > 1361$, то G имеет композиционный фактор, изоморфный знакопеременной группе Alt_m , где $m \leq n$ и полуинтервал (m, n) не содержит простых чисел.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, знакопеременная группа, симметрическая группа, класс сопряженных элементов, гипотеза Томпсона.

I. B. Gorshkov. On Thompson's conjecture for alternating and symmetric groups of degree greater than 1361.

Let G be a finite group G , and let $N(G)$ be the set of sizes of its conjugacy classes. It is shown that if $N(G)$ equals $N(\text{Alt}_n)$ or $N(\text{Sym}_n)$, where $n > 1361$, then G has a composition factor isomorphic to an alternating group Alt_m with $m \leq n$ and the half-interval (m, n) contains no primes.

Keywords: finite group, simple group, alternating group, symmetric group, conjugacy class, Thompson's conjecture.

Введение

Рассмотрим конечную группу G . Положим $N(G) = \{|g^G| \mid g \in G\}$. В 1987 г. Томпсон сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза Томпсона (см. [16], вопрос 12.38). Пусть L — конечная неабелева простая группа, G — конечная группа с тривиальным центром и $N(G) = N(L)$. Тогда $G \simeq L$.

Аналогичную гипотезу можно сформулировать для групп автоморфизмов конечных неабелевых простых групп.

Обозначим через $\pi(n)$ множество всех простых делителей натурального числа n . Для сокращения записи вместо $\pi(|G|)$ будем писать $\pi(G)$. Пусть $GK(G)$ — граф простых чисел группы G , множеством вершин которого является $\pi(G)$ и две вершины p и q которого соединены ребром тогда и только тогда, когда в G найдется элемент порядка pq . В [10] доказана справедливость гипотезы Томпсона для всех простых групп, граф простых чисел которых имеет более чем две компоненты связности. В настоящий момент справедливость гипотезы доказана для многих простых групп лиева типа (см., например, [6]). В [7] доказана справедливость гипотезы для знакопеременных групп Alt_n , где среди чисел $n, n-1, n-2$ найдется простое число. В [4; 17] доказана справедливость гипотезы для групп Alt_{10} и Alt_{16} соответственно. В недавней работе автора [13] доказано, что конечная группа с тем же множеством размеров классов сопряженных элементов, что и некоторая знакопеременная или симметрическая группа, не разрешима. В настоящей статье изучаются композиционные факторы группы с тем же множеством размеров классов сопряженных элементов, что и у некоторой знакопеременной или симметрической группы степени, большей 1361. Доказана следующая

Теорема. Пусть G — конечная группа такая, что $N(G) = N(V_n)$, где $V_n \in \{\text{Alt}_n, \text{Sym}_n\}$ и $n > 1361$. Тогда G имеет композиционный фактор, изоморфный знакопеременной группе Alt_m , где $m \leq n$ и полуинтервал $(m, \dots, n]$ не содержит простых чисел.

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

1. Предварительные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [8; 12]. Если p — простое число, то наибольшая степень числа p , делящая натуральное число n , будет обозначаться через n_p . Через $\gamma(x)$ обозначается число простых чисел, не превосходящих действительного числа x . Пусть π — некоторое множество простых чисел. Говорят, что конечная группа обладает свойством D_π , если в ней существует холлова π -подгруппа и все ее холловы π -подгруппы сопряжены. Для сокращения записи будем писать $G \in D_\pi$, если группа G обладает свойством D_π .

Лемма 1.1 [5, следствие 6.7]. *Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $G \in D_\pi$, если и только если каждый композиционный фактор группы G обладает свойством D_π .*

Лемма 1.2 [18]. *Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Если группа G обладает нильпотентной холловой π -подгруппой, то $G \in D_\pi$.*

Лемма 1.3 [2, лемма 14]. *Любое нечетное число из $\pi(\text{Out}(L))$, где L — конечная простая неабелева группа, лежит в $\pi(L)$ или не превосходит $t/2$, где $t = \max\{p \mid p \in \pi(L)\}$.*

Лемма 1.4 [17, лемма 5]. *Пусть K — нормальная подгруппа конечной группы G и $\bar{G} = G/K$. Пусть $x \in G$ и $\bar{x} = xK \in G/K$. Справедливы следующие утверждения:*

- (i) $|x^K|$ и $|\bar{x}^{\bar{G}}|$ делят $|x^G|$;
- (ii) если L и M — соседние члены композиционного ряда группы G , $L < M$, $S = L/M$, $x \in M$ и $\tilde{x} = xL$, то $|\tilde{x}^S|$ делит $|x^G|$;
- (iii) если $y \in G$, $xy = yx$ и $(|x|, |y|) = 1$, то $C_G(xy) = C_G(x) \cap C_G(y)$;
- (iv) если $(|x|, |K|) = 1$, то $C_{\bar{G}}(\bar{x}) = C_G(x)K/K$.

Лемма 1.5 [12, теорема 5.2.3]. *Пусть конечная группа A действует как группа автоморфизмов на конечной абелевой группе G и $(|G|, |A|) = 1$. Тогда $G = C_G(A) \times [G, A]$.*

Лемма 1.6. *Пусть S — конечная неабелева простая группа. Тогда для любого $p \in \pi(S)$ существует $a \in N(S)$ такое, что $|a|_p = |S|_p$.*

Доказательство. Если S — группа лиева типа или спорадическая группа, то утверждение леммы следует из [3].

Пусть $S \simeq \text{Alt}_n$, $n \geq 5$ и $p \in \pi(S)$. Несложно показать, что одно из чисел $n - p + 1, \dots, n$ при нечетном p и одно из чисел $n - 3, n - 2, n - 1, n$ при $p = 2$ разлагается в сумму нечетных попарно различных простых чисел, отличных от p . Следовательно, в S найдется элемент g такой, что $p \notin \pi(C_S(g))$. \square

Лемма 1.7. *Пусть G — конечная группа, $p \in \pi(G)$ и p^2 не делит n для любого $n \in N(G)$. Тогда силовская p -подгруппа группы G абелева.*

Доказательство аналогично доказательству [17, лемма 2]. \square

Лемма 1.8 [14, лемма 5]. *Пусть $3 < n \in \mathbb{N}$ и p — простое число. Тогда $|n!|_p \leq |n!|_2 < 2^n$.*

Лемма 1.9. *Пусть $\Omega = \{t \mid t \text{ — простое число, } n/2 < t \leq n\}$. Если $n > 1361$, то $|\Omega| > \log_2(n!/p!)$.*

Доказательство. Существует оценка $0,921 \cdot (x/\ln x) < \gamma(x) < 1,106 \cdot (x/\ln x)$ (см. [1, гл. 35, §1]). Имеем $|\Omega| = \gamma(n) - \gamma(n/2) \geq \frac{0,921 \cdot n}{\ln n} - \frac{1,106 \cdot n/2}{\ln(n/2)}$. В [9] доказано, что $n - p < n^{0,525}$. Из полученных оценок легко следует утверждение леммы при $n \geq 1000000$. При $1361 < n < 1000000$ утверждение леммы проверяется при помощи [11]. \square

Лемма 1.10. Пусть A равно произведению всех простых чисел t таких, что $n/2 < t < 3n/4$, где $n > 1000$. Тогда $\ln A > n/9$.

Доказательство. При $1000 < n < 10^{11}$ утверждение леммы проверяется при помощи [11]. Таким образом, можно считать, что $n \geq 10^{11}$. Пусть p_k — k -е простое число и $\vartheta(m) = \sum \ln p$, где p пробегает простые числа, не превосходящие m . Тогда $k(\ln k + \ln \ln k - 1 + (\ln \ln k - 2.050735)/\ln k) \leq \vartheta(p_k) \leq k(\ln k + \ln \ln k - 1 + (\ln \ln k - 2)/\ln k)$ (см. [15, леммы 6.2, 6.3]). Из этих неравенств и того, что $n/\ln n < \gamma(n) < 1,25506 \cdot n/\ln n$, следует утверждение леммы. \square

Лемма 1.11. Пусть $\Upsilon_n = \{t \mid t \text{ — простое число, } 3n/4 < t \leq n\}$. Тогда $|\Upsilon_n| > 0,1n/\ln n$.

Доказательство аналогично доказательству [2, лемма 3]. \square

2. Доказательство теоремы

Введем следующие обозначения: $V_n \in \{\text{Alt}_n, \text{Sym}_n\}$, где $n > 1361$, G — конечная группа такая, что $N(G) = N(V_n)$, $\Omega = \{t \mid t \text{ — простое число, } n/2 < t \leq n\}$, t_1 — наименьшее число из Ω , $p = t_{|\Omega|}$ — наибольшее число из Ω . Ввиду основного результата статьи [7] будем считать, что если $V_n = \text{Alt}_n$, то числа n и $n - 1$ не простые.

Лемма 2.1. Пусть $g \in G$ и $|g| = t \in \Omega$. Если $\rho = \pi(|g^G|) \cap \Omega \neq \emptyset$, то в G существует неабелев композиционный фактор S с элементом a таким, что $|a| = t$ и $\rho \subseteq \pi(|a^S|)$.

Доказательство. Заметим, что из леммы 1.7 следует, что силовская t -подгруппа группы G абелева и, следовательно, $|g^G|$ не делится на t . Пусть K — максимальная нормальная подгруппа в G такая, что образ \bar{g} элемента g в группе $\bar{G} = G/K$ нетривиален и $\rho \subseteq \pi(|\bar{g}^{\bar{G}}|)$. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в \bar{G} . Подгруппа R представима в виде $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_l$ — прямого произведения l изоморфных простых групп.

Предположим, что $|\bar{g}^R|$ делится на $r \in \rho$. Допустим, что найдется i такое, что $R_i^{\bar{g}} \neq R_i$. Поскольку R — прямое произведение изоморфных групп, то $r \in \pi(|R_i|)$. Следовательно, $|\bar{g}^R|$ делится на $r^{|\bar{g}|-1}$. Из леммы 1.4 следует, что $|g^G|$ делится на $r^{|\bar{g}|-1}$; противоречие с тем, что в $N(G)$ нет числа, делящегося на r^2 . Таким образом, если $|\bar{g}^R|$ делится на $r \in \rho$, то $R_i^{\bar{g}} = R_i$ для $1 \leq i \leq l$. По лемме 1.3 можно считать, что \bar{g} индуцирует на группе R ее внутренний автоморфизм. Таким образом, в R найдется элемент z такой, что для любого $h \in R$ выполнено равенство $h^z = h^{\bar{g}}$. Поскольку группы $R_i, 1 \leq i \leq l$, изоморфны, то при $l > 1$ в R найдется элемент y такой, что $|y^R|$ делится на r^2 , а следовательно, и в G найдется элемент h такой, что $|h^G|$ делится на r^2 ; противоречие. Таким образом, $l = 1$.

Поскольку k^2 не делит α для всех $k \in \Omega$ и $\alpha \in N(G)$, из леммы 1.6 следует, что k^2 не делит $|R|$ для всех $k \in \Omega$.

Допустим, что существует $r_2 \in \pi(|z^{\bar{G}}|) \cap (\rho \setminus \pi(|z^R|))$. Легко показать, что найдется элемент $x \in \bar{G} \setminus R$ порядка r_2 такой, что любой элемент из $x^{\bar{G}}$ не централизует z . Элемент x индуцирует на группе R ее внутренний автоморфизм. Следовательно, найдется элемент $x' \in R$ такой, что $b^{x'} = b^x$ для любого $b \in R$. Поскольку $r_2 \notin \pi(|z^R|)$, централизатор $C_R(z)$ содержит некоторую силовскую r_2 -подгруппу группы R , в частности найдется элемент $y \in R$ такой, что $(x')^y \in C_R(z)$. Но тогда $z = z^{(x'^{-1}x)^y} = z^{x^y}$; противоречие с тем, что любой элемент, сопряженный в \bar{G} с x , не централизует z . Таким образом, $\pi(|z^{\bar{G}}|) \cap \rho = \pi(|z^R|) \cap \rho$.

Допустим, что существует $r_2 \in \rho \setminus \pi(|z^R|)$. Пусть $\tilde{G} = \overline{G}/R$ и $\tilde{g} = \overline{g}R$. Докажем, что $r_2 \in \pi(|\tilde{g}^{\tilde{G}}|)$. Допустим противное. Пусть $H \in Syl_{r_2}(\tilde{G})$ и k — наименьшее натуральное число такое, что $\tilde{g}^k := \tilde{g}^k \in R$. Поскольку $|R|_{r_2} \leq r_2$ и $|z^{\tilde{G}}|_{r_2} = |z^R|_{r_2} = 1$, имеем $|\tilde{g}^{\tilde{G}}|_{r_2} = 1$. Как было замечено выше, $\pi(C_R(z)) \cap \rho = \pi(C_R(\tilde{g})) \cap \rho$. Таким образом, можно считать, что $H \cap R \leq C_{\overline{G}}(\tilde{g})$ и $H \leq C_{\overline{G}}(\tilde{g}')$. В H найдется элемент h , не централизующий \tilde{g} . Пусть $\tilde{h} \in \tilde{G}$. Ввиду предположения \tilde{h} централизует \tilde{g} . Таким образом, в \overline{G} найдутся прообразы h' и \hat{g} элементов \tilde{h} и \tilde{g} соответственно такие, что $\hat{g}h' = h'\hat{g}$. Поскольку $h' \in H$, элемент h' централизует любой прообраз порядка t элемента \tilde{g} , в частности централизует \tilde{g} . Поскольку элемент \tilde{g} централизует $H \cap R$, он централизует любой прообраз порядка r_2 элемента \tilde{h} , в частности централизует h ; противоречие. Итак, $r_2 \in \pi(|\tilde{g}^{\tilde{G}}|)$.

Покажем, что в \tilde{G} найдется элемент \tilde{h} порядка r_2 такой, что $t \in \pi(|\tilde{h}^{\tilde{G}}|)$. Пусть T — максимальная нормальная подгруппа в \tilde{G} такая, что $|\langle \tilde{g} \rangle^{\tilde{G}}|$ делится на r_2 , где $\hat{G} = \tilde{G}/T$ и $\hat{g} = \tilde{g}T$. Как и выше, показывается, что группа \hat{G} имеет простой цоколь \hat{R} и $|\hat{g}^{\hat{R}}|$ делится на r_2 . Следовательно, в \hat{R} найдется элемент \hat{h} такой, что $|\hat{h}| = r_2$ и $|\hat{h}^{\hat{R}}|$ делится на t . Значит, и в \tilde{G} найдется элемент \tilde{h} порядка r_2 такой, что $|\tilde{h}^{\tilde{G}}|$ делится на t .

Пусть $\bar{h} \in \overline{G}$ — некоторый прообраз порядка r_2 элемента \tilde{h} . По лемме 1.4 число $|\bar{h}^{\overline{G}}|$ делится на t . Ввиду леммы 1.3 можно считать, что $R \leq C_{\overline{G}}(\bar{h})$. Из леммы 1.6 следует, что в R найдется элемент \bar{u} такой, что $|\bar{u}| \neq r_2$ и $t \in \pi(|\bar{u}^R|)$. Из леммы 1.4 следует, что t^2 делит $|\bar{u}\bar{h}^{\overline{G}}|$; противоречие. Таким образом, $\rho \subseteq \pi(|z^R|)$. Следовательно, z — искомым элемент и $R = S$, т. е. $\pi(|\overline{g}^R|) \cap \rho = \emptyset$.

Предположим, что $\pi(|\overline{g}^R|) \cap \rho = \emptyset$. Покажем, что в этом случае $\overline{g} \in R$. Допустим противное. Из леммы 1.4(iv) и максимальной подгруппы K следует, что $t \in \pi(R)$. Используя леммы 1.6 и 1.4, легко показать, что силовская t -подгруппа группы R имеет порядок t , в частности R — простая группа. Пусть g' — элемент порядка t в $R \cap C_{\overline{G}}(\overline{g})$. Как и выше, показывается, что $|(g')^{\overline{G}}| \cap \rho = \emptyset$. Пусть $N = N_{\overline{G}}(\langle g' \rangle)$. Из аргумента Фраттини следует, что $N/N \cap R \simeq \overline{G}/R = \tilde{G}$. Поскольку силовская t -подгруппа группы G абелева и $|(g')^{\overline{G}}|$ не делится на числа из ρ , можно считать, что $\overline{G} = N$. Ввиду максимальной подгруппы K найдется число $r \in \pi(\tilde{G}) \cap \Omega$ такое, что $|\tilde{G}|_r = |C_{\tilde{G}}(\tilde{g})|_r$, где $\tilde{g} = \overline{g}K$. Пусть \tilde{h} — элемент порядка r в $C_{\tilde{G}}(\tilde{g})$ и \bar{h} — некоторый прообраз элемента \tilde{h} в \overline{G} . Элемент \bar{h} централизует любой из прообразов порядка t^j элемента \tilde{g} для любого j , в частности \bar{h} централизует элемент \overline{g} . Таким образом, $|\bar{g}^{\overline{G}}|$ не делится на r ; противоречие. Следовательно, $\overline{g} \in R$. Как и выше, показывается, что в этом случае $\rho = \emptyset$; противоречие. \square

Лемма 2.2. Пусть $t \in \Omega$, $g \in G$ и $|g| = t$. Если существует $r \in \pi(|g^G|) \cap \Omega$, то в G существует элемент h порядка r такой, что $t \in \pi(|h^G|)$.

Доказательство. По лемме 2.1 в G найдется композиционный фактор S такой, что $\overline{g} \in S$, $|\overline{g}| = t$ и $|\overline{g}^S|$ делится на r . Из лемм 1.6 и 1.4 следует, что силовские t - и r -подгруппы группы S — циклические группы простых порядков. Пусть $\bar{h} \in S$ и $|\bar{h}| = r$. Предположим, что $|\bar{h}^S|$ не делится на t . Тогда существует $x \in S$, $|x| = t$, такой, что $\langle x \rangle < C_S(\bar{h})$. Подгруппа $\langle x \rangle$ является силовской t -подгруппой группы S . Следовательно, найдется элемент $y \in S$ такой, что $(\langle x \rangle)^y = \langle \overline{g} \rangle$, а значит, $\bar{h}^y \in C_S(\overline{g})$; противоречие. Таким образом, $t \in \pi(|\bar{h}^S|)$. Следовательно, в G найдется элемент h порядка r такой, что $|h^G|$ делится на t . \square

Лемма 2.3. Пусть $t \in \Omega$, $\alpha \in N(G)$ и α не делится на t . Тогда α равно $|V_n|/t|C|$ или $|V_n|/|V_{t+i}||B|$, где $C = C_{V_{n-t}}(g)$ для некоторого элемента $g \in V_{n-t}$, $t+i \leq n$ и $B = C_{V_{n-t-i}}(h)$ для некоторого $h \in V_{n-t-i}$.

Доказательство. Пусть $g \in V_n$ и $|g^H| = \alpha$. Рассмотрим естественное подстановочное представление группы H на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Пусть g действует нетривиально на k

точках. Если $k \leq n-t$, то $C_H(g) \simeq V_{n-k} \times B$, где $B \simeq C_{V_k}(g)$. В противном случае $g = xy = yx$, где $|x| = t$ и $y \in V_{n-t}$. Следовательно, $C_H(g) \simeq \langle x \rangle \times C$, где $C = C_{V_{n-t}}(y)$. Таким образом, $|g^H| = |H|/|V_{n-k} \times B|$, т. е. $|g^H| = |H|/|\langle x \rangle \times C|$. \square

Пусть $\Phi_t = \{\alpha \in N(G) \mid \alpha = |V_n|/t|C|, \text{ где } C = C_{V_{n-t}}(g) \text{ для некоторого элемента } g \in V_{n-t}\}$, и $\Psi_t = \{\alpha \in N(L) \mid \alpha = |V_n|/|V_{t+i}|B|, \text{ где } i \geq 0, t+i < n-1, B = C_{V_{n-t-i}}(g) \text{ для } g \in V_{n-t-i}\}$.

Лемма 2.4. *Множество $\Psi_{t_i} \setminus \Psi_{t_{i+1}}$, где $t_i \in \Omega$ и $1 \leq i < |\Omega|$, не пусто.*

Доказательство. Если $V_n = \text{Alt}_n$, то по определению $n-p > 2$ и, следовательно, $n-t_{|\Omega|-1} > 2$. Пусть $h \in V_n$ — цикл длины $n-t_i$, если $n-t_i$ нечетно или $n-t_i = 2$ и длины $n-t_i-1$ в противном случае. Очевидно, что $|h^G| \in \Psi_{t_i} \setminus \Psi_{t_{i+1}}$. \square

Лемма 2.5. *Предположим, что существует элемент $g \in G$ такой, что $|g| = t_i \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_{t_i}$. Тогда для любого числа $t \in \Omega$, большего t_i , существует элемент $h \in G$ такой, что $|h| = t$ и $|h^G| \in \Phi_t$.*

Доказательство. Поскольку $\pi(g^G) \cap \Omega = \Omega \setminus \{t_i\}$, из леммы 2.1 следует, что в G найдется неабелев композиционный фактор S , в котором существует элемент \bar{g} порядка t_i со свойством $\pi(|\bar{g}^S|) \cap \Omega = \Omega \setminus \{t_i\}$. Из леммы 2.2 следует, что существует элемент $\bar{h} \in S$ такой, что $|\bar{h}| = t$ и $t_i \in |\bar{h}^S|$. Пусть $h \in G$ — некоторый прообраз порядка t элемента \bar{h} . Тогда по лемме 1.4 имеем $t_i \in |h^G|$. Поскольку любое число из Ψ_t не делится на числа из Ω , меньшие t , по лемме 2.3 имеем $|h^G| \in \Phi_t$. \square

Пусть σ — наименьшее натуральное число такое, что существует элемент $g \in G$, для которого $|g| = t_\sigma \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_{t_\sigma}$. Если не существует элемента $g \in G$ такого, что $|g| = t \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_t$, то будем считать, что $\sigma = |\Omega| + 1$ и $\Psi_\sigma = \emptyset$.

Дальнейшее доказательство разобьем на три предложения.

Предложение 1. *Существует элемент $g \in G$ такой, что $|g| \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_{|g|}$.*

Предложение 2. $\sigma < |\Omega|/2$.

Предложение 3. *Группа G содержит композиционный фактор, изоморфный Alt_m , где $m \leq n$ такое, что в полуинтервале $(m, \dots, n]$ нет простых чисел.*

Завершение доказательства предложения 1. Пусть Θ — конечное подмножество в \mathbb{N} . Обозначим через $\Gamma(\Theta)$ ориентированный граф, множеством вершин которого является Θ , и вершины $\alpha, \beta \in \Theta$ соединены ребром от α к β тогда и только тогда, когда α делит β и в Θ нет числа γ такого, что α делит γ и γ делит β . Пусть $h(\Theta)$ — длина максимального пути в графе $\Gamma(\Theta)$ с учетом направленности ребер. Для сокращения записи граф $\Gamma(N(G))$ будем обозначать через $\Gamma(G)$. Напомним, что $p = t_{|\Omega|}$ — максимальное простое число из Ω . Предположим, что не существует элемента $g \in G$ такого, что $|g| \in \Omega$ и $|g^G| \in \Phi_{|g|}$.

Лемма 2.6. *Пусть $|g| \in \Omega$. Тогда $|g^G| \in \Psi_p$.*

Доказательство. Предположим, что $|g^G| \in \Psi_{|g|} \setminus \Psi_p$. Тогда $|g^G|$ делится на p . Следовательно, $|g| \neq p$. По лемме 2.2 в G найдется элемент h порядка p такой, что $|g| \in \pi(|h^G|)$ и, следовательно, $|h^G| \notin \Psi_p$. Из леммы 2.3 следует, что $|h^G| \in \Phi_p$; противоречие. \square

Лемма 2.7. $G \in D_\Omega$.

Доказательство. Из леммы 1.1 следует, что достаточно проверить свойство D_Ω для каждого композиционного фактора группы G . Пусть S — неабелев композиционный фактор группы G такой, что $|\pi(S) \cap \Omega| \geq 2$, и r, t — два различных элемента из $\pi(S) \cap \Omega$. Из леммы 1.4 следует, что в $N(S)$ нет числа, делящегося на r^2 или t^2 . Из леммы 1.6 следует, что силовская a -подгруппа имеет порядок a для каждого $a \in \{r, t\}$. Из лемм 2.6 и 1.4 следует, что в S существует холлова $\{r, t\}$ -подгруппа H порядка rt . Ввиду определения чисел r и t группа H циклическая. Из леммы 1.2 следует, что S обладает свойством $D_{\{t, r\}}$. Пусть $l \in \pi(S) \cap \Omega \setminus \{t, r\}$, $g \in S$ и $|g| = l$. Так как $|g^S|$ не делится на t и r , для некоторого $x \in S$ имеем $H^x < C_S(g)$. Следовательно, в S существует циклическая холлова $\{t, r, l\}$ -подгруппа. Используя лемму 1.2, получаем, что S обладает свойством $D_{\{t, r, l\}}$. Проводя эту процедуру $|\pi(S) \cap \Omega|$ раз, получим, что S обладает свойством D_Ω . \square

Лемма 2.8. *Холлова Ω -подгруппа группы G абелева.*

Доказательство. Из леммы 1.7 следует, что силовские t -подгруппы группы G абелевы для любого $t \in \Omega$. Предположим, что холлова Ω -подгруппа группы G неабелева. Тогда в G найдется неабелева холлова $\{r, t\}$ -подгруппа H для некоторых $r, t \in \Omega$. Пусть $R < G$ — максимальная нормальная подгруппа такая, что образ \overline{H} группы H в группе $\overline{G} = G/R$ неабелев. В \overline{H} найдутся нормальная l -подгруппа T , где $l \in \{r, t\}$, и элемент $g \in \overline{G}$, где $|g| \in \{r, t\} \setminus \{l\}$, действующий на T нетривиально. По лемме 1.5 имеем $T = C_T(g) \times [T, g]$, где $\langle g, [T, g] \rangle$ — группа Фробениуса. Поскольку $l - 1$ не делится на $|g|$, получаем, что $|[T, g]| > l$ и T — нециклическая группа. Из определения групп R и T следует, что T лежит в некоторой минимальной нормальной подгруппе K группы G . Если K разрешима, то $K = T$ — элементарная абелева группа и, следовательно, подгруппа $K \cap C_K(g)$ является силовской l -подгруппой в $C_K(g)$. Из леммы 1.4 следует, что в G найдется прообраз h элемента g такой, что $|h^G|$ делится на $|[T, g]|$; противоречие. Поэтому $K = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m$, где S_i — неабелева простая группа для $1 \leq i \leq m$. Как в лемме 2.1, показывается, что $m = 1$. Как отмечалось в лемме 2.7, холловы $\{r, t\}$ -подгруппы любого композиционного фактора циклические. Получаем противоречие с тем, что K содержит нециклическую l -подгруппу T . \square

Лемма 2.9. *Пусть T — холлова Ω -подгруппа группы G и $\Upsilon = \{|g^G| \mid g \in T\}$. Тогда $|\Omega| \leq h(\Upsilon)$.*

Доказательство. Пусть $g_1 \in T$ и $|g_1| = t_1 \in \Omega$. Ввиду леммы 2.4 в G существует элемент $r_1 \in G$ такой, что $|r_1^G| \in \Psi_{t_1} \setminus \Psi_{t_2}$, где t_2 — наименьшее число из $\Omega \setminus \{t_1\}$. Поскольку $G \in D_\Omega$ (см. лемму 2.7), можно считать, что $r_1 \in C_G(g_1)$ и холлова Ω -подгруппа группы $C_G(r_1)$ лежит в T . Следовательно, в T найдется элемент g_2 такой, что $|g_2| = t_2$ и $C_G(g_1) \neq C_G(g_2)$. По лемме 2.8 группа T абелева. Таким образом, $|(g_1 g_2)^G| > |g_1^G|$. Заметим, что $|g_1^G|$ делит $|(g_1 g_2)^G|$. Повторяя эту процедуру $|\Omega|$ раз, получим множество $\Sigma = \{g_1, g_1 g_2, g_1 g_2 g_3, \dots, g_1 g_2 \dots g_{|\Omega|}\}$ такое, что $|g_1^G| \mid |(g_1 g_2)^G| \mid \dots \mid |g_1 g_2 \dots g_{|\Omega|}|$. В частности, $h(\Upsilon) \geq |\Omega|$. \square

Доказательство предложения 1. Пусть T — холлова Ω -подгруппа группы G . По лемме 2.8 группа T абелева. Из леммы 2.3 следует, что $|g^G| \in \Psi_p$ для любого элемента $g \in T$. Покажем, что $|\Omega| > h(\Psi_p)$. Пусть элементы $h_1, \dots, h_k \in \Psi_p$ такие, что $|h_1^G| \mid |h_2^G| \mid \dots \mid |h_k^G|$. Тогда $2h_1 \leq h_2, 2h_2 \leq h_3, \dots, 2h_{k-1} \leq h_k$. Любое число из Ψ_p делится на $n!/p!$. Следовательно, $h(\Psi_p) \leq \log_2(n!/p!)$. Из леммы 1.9 получаем, что $|\Omega| \geq \log_2(n!/p!) \geq h(\Psi_p) \geq h(\Upsilon)$, где $\Upsilon = \{|g^G|, g \in T\}$; противоречие с леммой 2.9. Предложение 1 доказано. \square

Доказательство предложения 2. Из предложения 1 следует, что $\sigma \leq |\Omega|$. Допустим, что $\sigma \geq |\Omega|/2$. Пусть $g \in G, |g| = |t_\sigma| \in \Omega, |g^G| \in \Phi_{|g|}$ и $\Theta = \{t \in \Omega \mid t < t_\sigma\}$. Из леммы 2.1 следует, что в G найдутся композиционный фактор S и элемент $\overline{g} \in S$ такие, что $|\overline{g}| = t_\sigma$ и $\pi(|\overline{g}^S|) \cap \Omega = \Omega \setminus \{t_\sigma\}$. Как и в лемме 2.7, показывается, что в S найдется циклическая холлова Θ -подгруппа T .

Лемма 2.10. Пусть $S \simeq \Lambda_m(q)$, где $\Lambda_m(q)$ — неабелева простая классическая группа лиева типа лиева ранга m над конечным полем порядка q характеристики r . Тогда $m < 11$, если $\Lambda_m(q) \not\simeq A_m(q)$, и $m < 19$, если $\Lambda_m(q) \simeq A_m(q)$.

Доказательство. Предположим, что $m \geq 11$, если $S \not\simeq A_m(q)$, и $m \geq 19$, если $S \simeq A_m(q)$. Поскольку T — циклическая группа, она лежит в некотором максимальном торе группы G . Из описания порядков максимальных торов (см. [3, лемма 1.2]) следует, что $|T| < q^{m+1} + 1$. Из описания порядков конечных простых групп (см. [8]) следует, что $|S|_r \geq q^{m^2-1} > (|T| - 1)^{m-1}$, если $S \not\simeq A_m(q)$, и $|S|_r \geq q^{m(m-1)/2} > (|T| - 1)^{(m-2)/2}$, если $S \simeq A_m(q)$. Из леммы 1.6 следует, что существует элемент $x \in S$ такой, что $|x^S|_r = |S|_r$. Имеем $|S|_r \leq |V_n|_r$. Из леммы 1.10 и ограничения на m следует, что $\ln |S|_r > n$. Но по лемме 1.8 имеем $\ln |V_n|_r < n \ln 2$; противоречие. \square

Лемма 2.11. $S \not\simeq A_1(q)$.

Доказательство. Предположим что $S \simeq A_1(q)$, где q — степень простого числа r . Допустим, что $r \in \Omega$. Возьмем в S элемент h порядка r . Поскольку $r^5 < \prod_{t \in \Omega} t$ и силовская r -подгруппа группы S имеет порядок r , получаем $\prod_{t \in \Omega} t > |S|$. Но $\Omega \subseteq \pi(S)$; противоречие. Следовательно, $r \notin \Omega$, $|g|$ делит $a \in \{q+1, q-1\}$ и $O = \prod_{t \in \Omega \setminus \{p\}} t$ делит $b \in \{q+1, q-1\} \setminus \{a\}$. Таким образом, для любого элемента \bar{x} порядка $t_{\sigma-1}$ из S имеем $\pi(|\bar{x}^S|) \cap \Omega = \{p\}$. Следовательно, $\sigma = |\Omega|$. Таким образом, найдется прообраз $x \in G$ элемента \bar{x} такой, что $|x| = |\bar{x}|$ и в $\pi(x) \cap \Omega = \pi(\bar{x}) \cap \Omega = \{p\}$. Следовательно, $|x^G| = c \in \Psi_{t_{|\Omega|-1}}$. В частности, $|\bar{x}^S|_r \leq |c|_r$. Имеем $|\bar{x}^S|_r = q \geq O - 1$. Как в лемме 1.10, показывается, что $\ln O > n/5$. Любое число $d \in \Psi_{t_{|\Omega|-1}}$ делит $n!/t_{|\Omega|-1}!$. Используя лемму 1.8, показываем, что $|n!/t_{|\Omega|-1}|_r \leq 2^{n/\ln(n)+\ln(n)}$. Следовательно, $|\bar{x}^S|_r > |c|_r$; противоречие. \square

Аналогично доказательству леммы 2.11 доказываются следующая лемма.

Лемма 2.12. Группа S не изоморфна конечной неабелевой простой группе ни классического лиева типа лиева ранга $m < 19$, ни исключительного лиева типа.

Лемма 2.13. Группа S не изоморфна ни одной из спорадических простых групп.

Доказательство. Предположим, что S изоморфна спорадической простой группе R . Тогда $|g| > r$ для любого $r \in \pi(R)$, что противоречит включению $|g| \in \pi(|S|)$. \square

Предложение 2 теперь следует из лемм 2.10–2.13 и того, что $S \not\simeq \text{Alt}_m$ для $m \geq p$. \square

Доказательство предложения 3. Ввиду предложения 2 имеем $\sigma < |\Omega|/2$. Пусть $g \in G$, $|g| = |t_\sigma| \in \Omega$, $|g^G| \in \Phi_{|g|}$ и $\Upsilon = \{t \in \Omega \mid t \geq t_\sigma\}$. Из леммы 2.1 следует, что в G найдутся композиционный фактор S и элемент $\bar{g} \in S$ такие, что $\pi(|\bar{g}^S|) \cap \Omega = \Omega \setminus \{|g|\}$.

Легко показать, что найдутся элементы $g_1, g_2, \dots, g_{|\Upsilon|} \in S$ такие, что $|g_i| \in \Upsilon$ и $\Upsilon \setminus \{|g_i|\} \subseteq \pi(|g_i^S|)$ для $1 \leq i \leq |\Upsilon|$. Поскольку силовские t -подгруппы группы S — циклические группы порядка t для любого $t \in \Omega$, множество Υ образует коклику в графе $GK(S)$.

Лемма 2.14. Группа S не изоморфна группе лиева типа.

Доказательство. Предположим, что $S \simeq \Lambda_m(q)$, где $\Lambda_m(q)$ — конечная неабелева простая группа лиева типа лиева ранга m над полем порядка q характеристики r . Как было замечено выше, $t(S) \geq |\Upsilon|$. Поскольку $|\Upsilon| > 20$, S — классическая группа лиева типа. Имеем $\lfloor (m-1)/2 \rfloor > |\Upsilon|$. Таким образом, $|S|_r \geq q^{m(m-1)/2} \geq q^{|\Upsilon|^2-1}$. Из оценки числа $|\Upsilon|$ (см. лемму 1.11) получаем, что $|S|_r > 2^n$; противоречие с леммой 1.8. \square

Из лемм 2.13 и 2.14 следует, что $S \cong \text{Alt}_m$, где $m \geq p$.

Предложение 3 и теорема доказаны. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бухштаб А.А.** Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 385 с.
2. **Вакула И.А.** О строении конечных групп, изоспектральных знакопеременной группе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 45–60.
3. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, №6. С. 682–725.
4. **Горшков И.Б.** О гипотезе Томпсона для простых групп со связным графом простых чисел // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, №2. С. 168–192.
5. **Ревин Д.О.** Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
6. **Ahanjideh N., Ahanjideh M.** On the validity of Thompson’s conjecture for finite simple groups // Comm. Algebra. 2013. Vol. 41, no. 11. P. 4116–4145.
7. **Alavi S.H., Daneshkhah A.** A new characterization of alternating and symmetric groups // J. Appl. Math. Comp. 2005. Vol. 17, no. 1. P. 245–258.
8. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et. al.]. Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.
9. **Baker R.C.** The difference between consecutive primes. II // Proc. London Math. Soc. 2001. Vol. 83, no. 3. P. 532–562.
10. **Chen G.** On Thompson’s conjecture // J. Algebra. 1996. Vol. 185, no. 1. P. 184–193.
11. GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4 [e-resource]. 2004.
URL: <http://www.gap-system.org>.
12. **Gorenstein D.** Finite groups. N. Y.: Harper and Row, 1968. 528 p.
13. **Gorshkov I.B.** Toward Thompson’s conjecture for alternating and symmetric groups [e-resource]. 2015. 6 p. URL: <http://arxiv.org/pdf/1502.02978.pdf>.
14. **Liu S., Yang Y.** On Thompson’s Conjecture for alternating groups A_{p+3} // Sci. World J. 2014. Article ID 752598. 1–10 p.
15. **Pierre D.** Estimates of some functions over primes without R.H. [e-resource]. 2010. 20 p.
URL: <http://arxiv.org/abs/1002.0442>.
16. The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory / eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro. 18th ed. Novosibirsk, 2014. 253 p. URL: <http://arxiv.org/pdf/1401.0300v6.pdf>.
17. **Vasil’ev A.V.** On Thompson’s conjecture // Сиб. электрон. мат. изв. 2009. Т. 6. С. 457–464.
18. **Wielandt H.** Zum Satz von Sylow // Math. Z. 1954. Vol. 60, iss. 1. P. 407–408.

Горшков Илья Борисович

Поступила 10.09.15

канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: Pygor8@gmail.com

УДК 517.977

ПОЛНОЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ¹

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального управления решениями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке при наличии малого параметра при второй производной. Управление скалярное и стеснено геометрическими ограничениями. Построены и обоснованы разложения решения рассматриваемой задачи с точностью до любой степени малого параметра.

Ключевые слова: оптимальное управление, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin. A complete asymptotic expansion of a solution to a singular perturbation optimal control problem on an interval with geometric constraints.

We consider an optimal control problem for solutions of a boundary value problem on an interval for a second-order ordinary differential equation with a small parameter at the second derivative. The control is scalar and satisfies geometric constraints. Expansions of a solution to this problem up to any power of the small parameter are constructed and validated.

Keywords: optimal control, asymptotic expansion, singular perturbation problems, small parameter.

Введение

Рассматривается задача оптимального управления [1; 2] решениями краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на отрезке при наличии малого параметра при второй производной. Управление скалярное и стеснено геометрическими ограничениями, а критерий качества — интегральный. На данную задачу можно смотреть и как на частный случай общих задач управления, описанных в [3].

Особенностью рассматриваемой задачи является то, что система оптимальности имеет различную структуру на различных, не известных заранее, подобластях области определения системы.

Построены и обоснованы разложения решения рассматриваемой задачи с точностью до любой степени малого параметра.

В настоящей работе, в отличие от [4], построено и обосновано полное асимптотическое разложение решения рассматриваемой задачи для переменных коэффициентов; в статье используются методы, развитые в [5; 6].

1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon := -\varepsilon^2 z_\varepsilon'' + b(x)z_\varepsilon' + a(x)z_\varepsilon = f + u_\varepsilon, \quad x \in [0, 1], \quad z \in H_0^1(0; 1), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.1)$$

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00322), комплексной программы ФНИ УрО РАН (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

$$u_\varepsilon \in \mathcal{U} := \{u(\cdot) \in L_2(0;1) : |u(x)| \leq 1 \text{ почти всюду}\}, \quad (1.2)$$

$$J := \int_0^1 ((z(x) - z_d(x))^2 + u^2(x)) dx \rightarrow \inf. \quad (1.3)$$

В дальнейшем будем считать, что функции $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $z_d(\cdot)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} a(\cdot), b(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) &\in C^\infty[0;1], \\ \forall x \in [0;1] \quad a(x) &\geq \alpha > 0, \quad b(x) \geq \alpha, \quad b'(x) \leq 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а решение уравнения (1.1) понимается в слабом смысле:

$$\forall \varphi \in H_0^1(0;1) \quad (\varepsilon^2 z'_\varepsilon, \varphi') + (bz'_\varepsilon, \varphi) + (az_\varepsilon, \varphi) = (f + u_\varepsilon, \varphi), \quad (1.5)$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в $L_2(0;1)$. В дальнейшем норму в пространстве $L_2(0;1)$ будем обозначать через $\|\cdot\|$.

Задача (1.1)–(1.3) состоит в том, чтобы привести управляемое состояние z_ε по возможности как можно ближе к некоторому заданному состоянию z_d , но с учетом затраченных на управление ресурсов.

В силу (1.4) для любого $Z \in H_0^1(0;1)$ выполняется

$$(\mathcal{L}_\varepsilon Z, Z) = \varepsilon^2 \|Z\|^2 + ((a - b'/2)Z, Z) \stackrel{(1.4)}{\geq} \varepsilon^2 \|Z'\| + \alpha \|Z\| \geq \varepsilon^2 \|Z\|_{H_0^1(0;1)}, \quad (1.6)$$

тем самым задача (1.1)–(1.3) разрешима единственным образом и существует $p_\varepsilon \in H_0^1(0;1)$ такое, что

$$\mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon := -\varepsilon^2 p_\varepsilon'' - b(x)p_\varepsilon' + (a(x) - b'(x))p_\varepsilon = -z_\varepsilon + z_d, \quad x \in [0,1], \quad z_\varepsilon \in H_0^1(0;1), \quad (1.7)$$

и

$$u_\varepsilon(x) = F(p_\varepsilon) \in H^1(0;1), \quad \text{где } F(p) = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ p, & |p| \leq 1, \\ -1, & p < -1. \end{cases} \quad (1.8)$$

Отметим, что равенство (1.7) также понимается в слабом смысле:

$$\forall \psi \in H_0^1(0;1) \quad (\varepsilon^2 p'_\varepsilon, \psi') - (bp'_\varepsilon, \psi) + ((a - b')p_\varepsilon, \psi) = (-z_\varepsilon + z_d, \psi). \quad (1.9)$$

Таким образом, система оптимальности для задачи (1.1)–(1.3) имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon - F(p_\varepsilon) = f, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* p_\varepsilon + z_\varepsilon = z_d, \quad z_\varepsilon, p_\varepsilon \in H_0^1(0;1). \quad (1.10)$$

Отметим, что в силу свойств дифференциальных операторов второго порядка из условий (1.4) следует: $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^2[0;1]$.

Целью данной работы является изучение поведения решения системы (1.10) при $\varepsilon \rightarrow +0$.

З а м е ч а н и е 1. По сравнению с [3, п. 2.1., формулы (2.25) и (2.26)] в данной работе в качестве сопряженной переменной $p_\varepsilon(\cdot)$ взята сопряженная переменная из [3] со знаком “минус”.

2. Априорные оценки и предельная задача

В силу определения функции F (см. (1.8)) для любых $p, p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ справедливы следующие соотношения:

$$F(-p) = -F(p), \quad |F(p)| \leq 1, \quad (F(p_1) - F(p_2))(p_1 - p_2) \geq 0, \quad |F(p_1) - F(p_2)| \leq |p_1 - p_2|.$$

Поэтому

$$\forall p, p_1, p_2 \in L_2(0; 1) \quad \|F(p)\|^2 \leq 1, \quad \|p_1 - p_2\|^2 \geq (F(p_1) - F(p_2), p_1 - p_2) \geq 0. \quad (2.1)$$

Как показано в [4, утверждение 1],

$$\varepsilon \|z'_\varepsilon\|, \|z_\varepsilon\|, \varepsilon \|p'_\varepsilon\|, \|p_\varepsilon\| = O(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Теорема 1. Пусть $f_{1,\varepsilon}, f_{2,\varepsilon} \in L_2(0; 1)$, а $Z_\varepsilon, P_\varepsilon \in C^1[0; 1]$ — слабое решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\varepsilon Z_\varepsilon - F(P_\varepsilon) &= f + f_{1,\varepsilon}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* P_\varepsilon + Z_\varepsilon = z_d + f_{2,\varepsilon}, \\ Z_\varepsilon(0) = Z_\varepsilon(1) &= P_\varepsilon(0) = P_\varepsilon(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Если $\|f_{i,\varepsilon}\|, Z_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(1), P_\varepsilon(0), P_\varepsilon(1) = O(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ и $\gamma > 0$, то

$$\varepsilon \|Z'_\varepsilon - z'_\varepsilon\|, \|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|, \varepsilon \|P'_\varepsilon - p'_\varepsilon\|, \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\| = O(\varepsilon^\gamma) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

В частности, $\|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{C[0;1]}, \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon^{\gamma-1})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Доказательство. Пусть сначала $Z_\varepsilon(0) = Z_\varepsilon(1) = P_\varepsilon(0) = P_\varepsilon(1) = 0$.

Обозначим $\bar{z}_\varepsilon := Z_\varepsilon - z_\varepsilon$ и $\bar{p}_\varepsilon := P_\varepsilon - p_\varepsilon$. Тогда $\bar{z}, \bar{p} \in H_0^1(0; 1)$, а в силу (1.10), (2.2) и определения слабого решения (см. (1.5), (1.9))

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in H_0^1(0; 1) \quad (\varepsilon^2 \bar{z}'_\varepsilon, \varphi') + (b \bar{z}'_\varepsilon, \varphi) + (a \bar{z}_\varepsilon, \varphi) + (F(p_\varepsilon) - F(P_\varepsilon), \varphi) &= (f_{1,\varepsilon}, \varphi), \\ \forall \psi \in H_0^1(0; 1) \quad (\varepsilon^2 \bar{p}'_\varepsilon, \psi') - (b \bar{p}'_\varepsilon, \psi) + ((a - b') \bar{p}_\varepsilon, \psi) + (\bar{z}_\varepsilon, \psi) &= (f_{1,\varepsilon}, \psi). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Положим сначала в (2.3) $\varphi := \bar{p}_\varepsilon$, $\psi := \bar{z}_\varepsilon$ и, вычитая из второго равенства первое, получим

$$\|\bar{z}_\varepsilon\|^2 + (P_\varepsilon - p_\varepsilon, F(P_\varepsilon) - F(p_\varepsilon)) \leq \|\bar{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{2,\varepsilon}\| + \|\bar{p}_\varepsilon\| \cdot \|f_{1,\varepsilon}\|. \quad (2.4)$$

Затем, положим в (2.3) $\varphi := \bar{z}_\varepsilon$, а $\psi := \bar{p}_\varepsilon$. В силу неравенств (1.6) и (2.1) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \|\bar{z}'_\varepsilon\|^2 + \alpha \|\bar{z}_\varepsilon\|^2 &\leq \|\bar{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{1,\varepsilon}\| + \|\bar{z}_\varepsilon\| \cdot \|\bar{p}_\varepsilon\|, \\ \varepsilon^2 \|\bar{p}'_\varepsilon\|^2 + \alpha \|\bar{p}_\varepsilon\|^2 &\leq \|\bar{z}_\varepsilon\| \cdot \|\bar{p}_\varepsilon\| + \|f_{2,\varepsilon}\| \cdot \|\bar{p}_\varepsilon\|. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При этом все слагаемые, стоящие в левой части неравенств (2.4), (2.5), неотрицательны. Поэтому

$$\|\bar{z}_\varepsilon\|^2 \leq \|\bar{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{2,\varepsilon}\| + \|\bar{p}_\varepsilon\| \cdot \|f_{1,\varepsilon}\|, \quad \|\bar{p}_\varepsilon\| \leq \alpha^{-1} \|\bar{z}_\varepsilon\| + \alpha^{-1} \|f_{2,\varepsilon}\|.$$

Тем самым $\|\bar{z}_\varepsilon\|^2 \leq \|\bar{z}_\varepsilon\| \cdot \|f_{2,\varepsilon}\| + \|f_{1,\varepsilon}\| \cdot (\alpha^{-1} \|\bar{z}_\varepsilon\| + \alpha^{-1} \|f_{2,\varepsilon}\|)$. Решая получившееся квадратичное неравенство с учетом условий теоремы, получим $\|\bar{z}_\varepsilon\| = O(\varepsilon^\gamma)$. Отсюда в силу соотношений (2.5) следует, что $\|\bar{p}_\varepsilon\| = O(\varepsilon^\gamma)$, $\|\bar{z}'_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{\gamma-1})$ и $\|\bar{p}'_\varepsilon\| = O(\varepsilon^{\gamma-1})$.

Теперь рассмотрим общую ситуацию.

Пусть $\tilde{Z}_\varepsilon(x) := Z_\varepsilon(x) - Z_\varepsilon(1)x - Z_\varepsilon(0)(1-x)$ и $\tilde{P}_\varepsilon(x) := P_\varepsilon(x) - P_\varepsilon(1)x - P_\varepsilon(0)(1-x)$. Тогда \tilde{Z}_ε и \tilde{P}_ε удовлетворяют нулевым граничным условиям, а

$$\mathcal{L}_\varepsilon \tilde{Z}_\varepsilon - F(\tilde{P}_\varepsilon) = f + \tilde{f}_{1,\varepsilon}, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* \tilde{P}_\varepsilon + \tilde{Z}_\varepsilon = z_d + \tilde{f}_{2,\varepsilon},$$

где $\tilde{f}_{1,\varepsilon} = f_{1,\varepsilon} + \mathcal{L}(\tilde{Z}_\varepsilon - Z_\varepsilon) + F(P_\varepsilon) - F(\tilde{P}_\varepsilon)$, $\tilde{f}_{2,\varepsilon} = f_{2,\varepsilon} + \mathcal{L}^*(\tilde{P}_\varepsilon - P_\varepsilon) + (\tilde{Z}_\varepsilon - Z_\varepsilon)$ и $\|f_{i,\varepsilon}\| = O(\varepsilon^\gamma)$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Последняя оценка $\|Z_\varepsilon - z_\varepsilon\|_{C[0;1]}, \|P_\varepsilon - p_\varepsilon\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon^{\gamma-1})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$ следует из соответствующей теоремы вложения [7]. \square

Как показано в [4, теоремы 2, 3], предельной задачей для (1.10) будет

$$\mathcal{L}_0 z_0 - F(p_0) = f, \quad \mathcal{L}_0^* p_0 + z_0 = z_d, \quad z_0(0) = 0, \quad p_0(1) = 0, \quad (2.6)$$

где $\mathcal{L}_0 z_0 := b(x)z_0' + a(x)z_0$, а $\mathcal{L}_0^* p_0 := -b(x)p_0' + (a(x) - b'(x))p_0$.

При выполнении на отрезке $[0; 1]$ условий

$$(a(x)' - b''(x))b(x) + (a(x) - b'(x))a(x) > (b'(x))^2 \quad (2.7)$$

применима теорема 31.6 из [8] и существует $p_0 \in C^2[0; 1]$, $z_0 \in C^1[0; 1]$ — единственное решение задачи (2.6). При этом

$$\|z_\varepsilon - z_0\|, \|p_\varepsilon - p_0\| = O(\sqrt{\varepsilon}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

З а м е ч а н и е 2. Если $b = \text{const}$, то условие (2.7) принимает вид: $a'b + a^2 > 0$. Если же и $a = \text{const}$, то условие (2.7) заведомо выполнено.

3. Внешнее разложение функций z_ε и p_ε

В дальнейшем будем считать, что функция p_0 удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{aligned} \exists \vartheta_0^1, \vartheta_0^2 \in (0; 1) : \vartheta_0^1 < \vartheta_0^2, \quad |p_0(x)| < 1 \text{ при } x \in [0; \vartheta_0^1] \cup (\vartheta_0^2; 1], \\ p_0(x) > 1 \text{ при } x \in (\vartheta_0^1; \vartheta_0^2), \quad p'(\vartheta_0^1) > 0, \quad p'(\vartheta_0^2) < 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для единообразия положим $\vartheta_0^0 = 0$, а $\vartheta_0^3 = 1$.

З а м е ч а н и е 3. Поскольку z_0 и p_0 на каждом из отрезков $[\vartheta_0^{i-1}; \vartheta_0^i]$ являются решениями систем линейных уравнений с гладкими коэффициентами, то и сами они бесконечно дифференцируемы на этих отрезках.

Асимптотическое представление решений z_ε и p_ε мы будем строить как решения систем линейных уравнений разной структуры на промежутках $(0; \vartheta_\varepsilon^1)$, $(\vartheta_\varepsilon^1; \vartheta_\varepsilon^2)$ и $(\vartheta_\varepsilon^2; 1)$, на которых функции \tilde{P}_ε^i , $i = 1, 2, 3$, являющиеся приближением функции p_ε , будут вести себя подобно ей: $|\tilde{P}_\varepsilon^1| < 1$, $|\tilde{P}_\varepsilon^2| < 1$, а $\tilde{P}_\varepsilon^3 > 1$. При этом асимптотические разложения данных решений должны быть согласованы в точках ϑ_ε^i (построение которых ведется параллельно с построением асимптотических разложений неизвестных функций) по непрерывности до производных первого порядка.

Разложения на каждом из промежутков $(\vartheta_\varepsilon^{i-1}; \vartheta_\varepsilon^i)$ будут состоять из регулярной (внешнее разложение) и сингулярной (экспоненциально убывающие функции пограничного слоя) частей.

Внешнее разложение z_ε и p_ε будем искать в виде

$$z_\varepsilon^i := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} z_n^i, \quad p_\varepsilon^i := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} p_n^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2)$$

где z_n^i и p_n^i при $n = 0$ — это сужение z_0 и p_0 на $[\vartheta_0^{i-1}; \vartheta_0^i]$, а при $n > 0$ эти функции удовлетворяют следующим системам:

$$\mathcal{L}_0 z_n^i - \beta_i p_n^i = (z_{n-1}^i)''', \quad \mathcal{L}_0^* p_n^i + z_n^i = (p_{n-1}^i)'''; \quad (3.3)$$

здесь $\beta_1 = \beta_3 = 1$, а $\beta_2 = 0$.

Теорема 2. Пусть $f, g \in C[\vartheta; \vartheta]$ ($i = 1, 2, 3$). Тогда для произвольного набора чисел $\{A_i\}$, $\{B_j\}$ ($i = 0, 1, 2, j = 1, 2, 3$) существует единственное решение системы

$$\mathcal{L}_0 \overset{i}{z} - \beta_i \overset{i}{p} = f, \quad \mathcal{L}_0^* \overset{i}{p} + \overset{i}{z} = g, \quad x \in (\overset{i-1}{\vartheta}; \overset{i}{\vartheta}), \quad i = 1, 2, 3,$$

удовлетворяющее условиям

$$\overset{1}{z}(0) = A_0, \quad \overset{i}{z}(\overset{i}{\vartheta}) = \overset{i+1}{z}(\overset{i}{\vartheta}) + A_i, \quad \overset{i}{p}(\overset{i}{\vartheta}) = \overset{i+1}{p}(\overset{i}{\vartheta}) + B_i, \quad \overset{3}{p}(1) = B_3, \quad i = 1, 2.$$

При этом если $f, g \in C^\infty[0; 1]$ ($i = 1, 2, 3$), то и $\overset{i}{z}, \overset{i}{p} \in C^\infty[0; 1]$ ($i = 1, 2, 3$).

Доказательство. В силу формулы Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений сформулированная задача удовлетворяет альтернативе Фредгольма: либо она разрешима единственным образом при всех правых частях и наборах чисел $\{A_i\}$, $\{B_j\}$, либо однородная задача имеет нетривиальное решение.

Рассмотрим однородную задачу, т.е. $f=g=0$ и $A_i = B_j = 0$. В силу формулы интегрирования по частям

$$0 = (\mathcal{L}_0^* \overset{i}{p} + \overset{i}{z}, \overset{i}{z}) = \|\overset{i}{z}\|^2 - b(x) \overset{i}{z}(x) \overset{i}{p}(x) \Big|_{\overset{i-1}{\vartheta}}^{\overset{i}{\vartheta}} + (\overset{i}{p}, \mathcal{L}_0 \overset{i}{z}) = \|\overset{i}{z}\|^2 - b(x) \overset{i}{z}(x) \overset{i}{p}(x) \Big|_{\overset{i-1}{\vartheta}}^{\overset{i}{\vartheta}} + \beta_i \|\overset{i}{p}\|^2.$$

Складывая эти равенства, получим $0 = \|\overset{1}{z}\|^2 + \|\overset{2}{z}\|^2 + \|\overset{3}{z}\|^2 + \|\overset{1}{p}\|^2 + \|\overset{3}{p}\|^2$. Тем самым $\overset{i}{z} = \overset{1}{p} = \overset{3}{p} = 0$. Но тогда $\mathcal{L}_0^* \overset{2}{p} = 0$ и $0 = \overset{2}{p}(\overset{1}{\vartheta}) = \overset{2}{p}(\overset{2}{\vartheta})$, поэтому $\overset{2}{p} = 0$. \square

4. Внутреннее разложение z_ε и p_ε

Внутреннее разложение в этой задаче возникает в малых окрестностях точек $\overset{i}{\vartheta}_0$:

$$\overset{i,j}{W}_\varepsilon(\overset{i,j}{\vartheta}) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{i,j}{W}_n(\overset{i,j}{\vartheta}), \quad \overset{i,j}{V}_\varepsilon(\overset{i,j}{\vartheta}) := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{i,j}{V}_n(\overset{i,j}{\vartheta}), \quad \overset{i,j}{\vartheta} := (-1)^j \frac{\overset{i}{\vartheta}_0 - x}{\varepsilon^2}. \quad (4.4)$$

Здесь индекс i — номер рассматриваемой точки, $j = 0$ соответствует левой части окрестности этой точки, а $j = 1$ — правой части окрестности этой точки.

Точки $\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon$ ($i = 1, 2$) смены структуры систем будем искать в виде асимптотических рядов

$$\overset{i}{\vartheta}_\varepsilon := \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{2n} \overset{i}{\vartheta}_n. \quad (4.5)$$

В силу линейности систем на каждом из рассматриваемых промежутков функции $\overset{i,j}{W}$ и $\overset{i,j}{V}$ в пограничных слоях удовлетворяют соответствующим однородным уравнениям. Тогда коэффициенты внутренних разложений должны удовлетворять следующим системам уравнений:

$$\overset{i,j}{M} \overset{i,j}{W}_n = \overset{i,j}{\mathcal{F}}(\{\overset{i,j}{W}_k\}_{n-1}, \overset{i,j}{V}_{n-1}), \quad \overset{i,j}{M}^* \overset{i,j}{V}_n = \overset{i,j}{\mathcal{G}}(\overset{i,j}{W}_{n-1}, \{\overset{i,j}{V}_k\}_{n-1}), \quad (4.6)$$

где

$$\overset{i,j}{M} = -\frac{d^2}{d \overset{i,j}{\vartheta}^2} - (-1)^j \overset{i}{b} \frac{d}{d \overset{i,j}{\vartheta}}, \quad \overset{i,j}{M}^* = -\frac{d^2}{d \overset{i,j}{\vartheta}^2} + (-1)^j \overset{i}{b} \frac{d}{d \overset{i,j}{\vartheta}},$$

$\overset{i}{b} = b(\overset{i}{\vartheta}_0)$, а $\overset{i,j}{\mathcal{F}}(\{\overset{i,j}{W}_k\}_{n-1}, \overset{i,j}{V}_{n-1})$, $\overset{i,j}{\mathcal{G}}(\overset{i,j}{W}_{n-1}, \{\overset{i,j}{V}_k\}_{n-1})$ — линейные комбинации функций $\overset{i,j}{W}_k$, $k \in \overline{0, n-1}$, их первых производных и $\overset{i,j}{V}_k$ ($\overset{i,j}{V}_k$, $k \in \overline{0, n-1}$, их первых производных и $\overset{i,j}{W}_k$, соответственно) и все коэффициенты в этих комбинациях — многочлены от $\overset{i,j}{\vartheta}$. Нас будут интересовать только решения, экспоненциально стремящиеся к 0 при $\overset{i,j}{\vartheta} \rightarrow +\infty$.

Хорошо известно следующее утверждение.

Утверждение. Если все $W_k, V_k, k \in \overline{0, n-1}$, имеют вид $e^{-b \cdot \vartheta} Q_{i,j,k}(\vartheta)$, где $Q_{i,j,k}$ — многочлены, то у системы (4.6) имеются решения такого же вида, при этом W_n и V_n определяются однозначно, а W_n и V_n — с точностью до слагаемого $Ce^{-b \cdot \vartheta}$. \square

Дополнительные условия на решения системы (4.6) проистекают из асимптотических равенств, выражающих удовлетворение граничных условий в точках $x = 0$ и $x = 1$ и согласование по непрерывности до первых производных включительно в точках $x = \vartheta_\varepsilon, i = 1, 2$.

5. Асимптотическое разложение z_ε и p_ε

Выпишем для рядов $Z_\varepsilon := z + W + \overline{W}$ и $P_\varepsilon := p + V + \overline{V}$ дополнительные условия согласования в виде асимптотических равенств

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(0) = 0 = P_\varepsilon(0), \quad Z_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) = Z_{\varepsilon}^{i+1}(\vartheta_\varepsilon), \quad Z'_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) = Z_{\varepsilon}^{i+1}(\vartheta_\varepsilon), \\ P_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) = 1 = P_{\varepsilon}^{i+1}(\vartheta_\varepsilon), \quad P'_\varepsilon(\vartheta_\varepsilon) = P_{\varepsilon}^{i+1}(\vartheta_\varepsilon), \quad Z_\varepsilon(1) = 0 = P_\varepsilon(1), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Раскладывая

$$\begin{aligned} z_n(\vartheta_\varepsilon) = z_n \left(\vartheta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \vartheta_n \right), \quad p_n(\vartheta_\varepsilon) = p_n \left(\vartheta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \vartheta_n \right), \\ W_n^{i,j}(k) \left((-1)^j \frac{\vartheta_0 - \vartheta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) = W_n^{i,j}(k) \left((-1)^{j+1} \vartheta_1 + (-1)^{j+1} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \vartheta_{n+1} \right), \\ V_n^{i,j}(k) \left((-1)^j \frac{\vartheta_0 - \vartheta_\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) = V_n^{i,j}(k) \left((-1)^{j+1} \vartheta_1 + (-1)^{j+1} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{2n} \vartheta_{n+1} \right), \quad k = 0, 1, \end{aligned}$$

в асимптотические ряды по степеням ε , стандартным образом получим системы для определения коэффициентов рассматриваемых рядов.

Для $n = 0$ в силу непрерывной дифференцируемости z_0 и p_0 на $[0; 1]$ имеем

$$P_{0=0}^{0,1} = -p_0(0)e^{-b \frac{x}{\varepsilon^2}}, \quad Z_{0=0}^{3,0} = -z_0(1)e^{-b \frac{x-1}{\varepsilon^2}}, \quad Z_{0=0}^{i,j} = P_{0=0}^{i,j} = 0 \quad \text{для остальных наборов } i, j.$$

Поэтому $(n = 1) \overline{W}_1 = \overline{V}_1 = 0, i = 1, 2$, и

$$\begin{aligned} z_1(0) = -\overline{W}_1(0), \quad p_1(0) + \overline{V}_1(0) = 0, \quad z_1(1) + \overline{W}_1(0) = 0, \quad p_1(1) = -\overline{V}_1(0), \\ z_1(\vartheta_0) + \overline{W}_1(-\vartheta_1) = z_1^{i+1}(\vartheta_0), \quad \overline{W}_1'(-\vartheta_0) = 0, \\ p_0'(\vartheta_0) \vartheta_1 + p_1(\vartheta_0) = 0, \quad p_0'(\vartheta_0) \vartheta_1 + p_1(\vartheta_0) + \overline{V}_1(\vartheta_1) = 0, \\ \overline{V}_1'(\vartheta_1) = 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что $\overline{W}_1 = \overline{V}_1 = 0, i = 1, 2, z_1(\vartheta_0) = z_1^{i+1}(\vartheta_0)$ и $p_1(\vartheta_0) = z_1^{i+1}(\vartheta_0)$.

В силу теоремы 2 из (3.3) однозначно находятся z_n и p_n , после чего также однозначно определяются ϑ_1 и функции \overline{W}_1 и \overline{V}_1 .

При $n > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \overset{1}{z}_n(0) &= -\overset{0,1}{W}_n(0), \quad \overset{1}{p}_n(0) + \overset{0,1}{V}_n(0) = 0, \quad \overset{3}{z}_n(1) + \overset{3,0}{W}_n(0) = 0, \quad \overset{3}{p}_n(1) = -\overset{3,0}{V}_n(0), \\ \overset{i}{z}_n(\vartheta_0) + \overset{i,0}{W}_n(-\vartheta_1) &= \overset{i+1}{z}_n(\vartheta_0) + A_{i,1,n}, \quad \overset{i,0}{W}_n'(-\vartheta_1) = A_{i,2,n}, \\ p_0'(\vartheta_0) \overset{i}{\vartheta}_n + \overset{i}{p}_n(\vartheta_0) &= B_{i,1,n}, \quad p_0'(\vartheta_0) \overset{i}{\vartheta}_n + \overset{i+1}{p}_n(\vartheta_0) + \overset{i,1}{V}_n(\vartheta_1) = B_{i,2,n}, \\ \overset{i,1}{V}_n'(0) &= B_{i,3,n}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где константы $A_{i,j,n}$, $B_{i,j,n}$ и функции $\overset{i,1}{W}_n$ и $\overset{i,0}{V}_n$ однозначно определяются коэффициентами разложений с номерами, меньшими n .

Из этой системы однозначно находятся $\overset{i,0}{W}_n$ и $\overset{i,1}{V}_n$ при $i = 1, 2$, после чего (5.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \overset{1}{z}_n(0) &= -\overset{1,0}{W}_n(0), \quad \overset{i}{z}_n(\vartheta_0) = \overset{i+1}{z}_n(\vartheta_0) + A_{i,1,n} - \overset{i,0}{W}_n(-\vartheta_1), \\ \overset{i}{p}_n(\vartheta_0) &= \overset{i+1}{p}_n(\vartheta_0) + B_{i,1,n} - B_{i,2,n}, \quad \overset{1}{p}_n(1) = -\overset{1,1}{V}_n(\vartheta_1), \\ p_0'(\vartheta_0) \overset{i}{\vartheta}_n &= B_{i,1,n} - \overset{i}{p}_n(\vartheta_0), \quad \overset{0,1}{V}_n(0) = -\overset{1}{p}_n(0), \quad \overset{3}{z}_n(1) + \overset{3,0}{W}_n(0) = 0. \end{aligned}$$

Из нее в силу теоремы 2 однозначно находятся $\overset{i}{z}_n$ и $\overset{i}{p}_n$, после чего также однозначно определяются $\overset{i}{\vartheta}_n$ и функции $\overset{3,0}{W}_n$ и $\overset{0,1}{V}_n$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3. Коэффициенты рядов (3.2), (4.4) и (4.5) однозначно определяются условиями (5.1).

В дальнейшем если на промежутках $[x_1; x_2]$, $[x_2; x_3]$, $[x_3; x_4]$ заданы функции g_1 , g_2 , g_3 , то соотношением $g = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle$ будем обозначать функцию g , сужение которой на i -й промежуток совпадает с g_i .

З а м е ч а н и е 4. Отметим, что функции $z_1 = \langle \overset{1}{z}_1, \overset{2}{z}_1, \overset{3}{z}_1 \rangle$ и $p_1 = \langle \overset{1}{p}_1, \overset{2}{p}_1, \overset{3}{p}_1 \rangle$ оказались непрерывными на $[0; 1]$.

Теперь с помощью построенных рядов сконструируем приближение исходной задачи с точностью $O(\varepsilon^n)$.

Пусть

$$\begin{aligned} \overset{i}{Z}_{\varepsilon,n} &:= \sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} \overset{i}{z}_k + \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^{2k} \overset{i-1,1}{W}_k + \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^{2k} \overset{i,0}{W}_k, \quad i = 1, 2, 3, \\ \overset{i}{P}_{\varepsilon,n} &:= \sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} \overset{i}{p}_k + \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^{2k} \overset{i-1,1}{V}_k + \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^{2k} \overset{i,0}{V}_k, \quad i = 1, 2, 3, \\ \overset{i}{\vartheta}_{\varepsilon,n} &:= \sum_{k=0}^n \varepsilon^{2k} \overset{i}{\vartheta}_k \quad (i = 1, 2), \quad \overset{0}{\vartheta}_{\varepsilon,n} := 0, \quad \overset{3}{\vartheta}_{\varepsilon,n} := 1. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Будем рассматривать функции $\overset{i}{Z}_{\varepsilon,n}$ и $\overset{i}{P}_{\varepsilon,n}$ как определенные на $[\vartheta_{\varepsilon,n}^{i-1}; \vartheta_{\varepsilon,n}^i]$. Тогда по построению $\overset{i}{Z}_{\varepsilon,n}, \overset{i}{P}_{\varepsilon,n} \in C^\infty[\vartheta_{\varepsilon,n}^{i-1}; \vartheta_{\varepsilon,n}^i]$ и

$$\mathcal{L}_\varepsilon \overset{i}{Z}_{\varepsilon,n} - \beta \overset{i}{P}_{\varepsilon,n} = f + (1 - \beta) + O(\varepsilon^{2n}), \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* \overset{i}{P}_{\varepsilon,n} + \overset{i}{Z}_{\varepsilon,n} = z_d + O(\varepsilon^{2n}), \quad x \in [\vartheta_{\varepsilon,n}^{i-1}; \vartheta_{\varepsilon,n}^i] \quad (5.3)$$

(даже в смысле $C^1[\vartheta_{\varepsilon,n}^{i-1}; \vartheta_{\varepsilon,n}^i]$).

Однако функции $\tilde{Z}_{\varepsilon,n} = \langle \overset{1}{Z}_{\varepsilon,n}, \overset{2}{Z}_{\varepsilon,n}, \overset{3}{Z}_{\varepsilon,n} \rangle$ и $\tilde{P}_{\varepsilon,n} = \langle \overset{1}{P}_{\varepsilon,n}, \overset{2}{P}_{\varepsilon,n}, \overset{3}{P}_{\varepsilon,n} \rangle$, вообще говоря, не будут непрерывно дифференцируемы в точках.

Рассмотрим соответствующие скачки этих функций и их производных при $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \varphi_{1,\varepsilon,n}^i &:= \overset{i}{Z}_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i) - \overset{i+1}{Z}_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i), & \varphi_{2,\varepsilon,n}^i &:= \overset{i}{Z}'_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i) - \overset{i+1}{Z}'_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i), \\ \psi_{0,\varepsilon,n}^i &:= 1 - \overset{i}{P}_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i), & \psi_{1,\varepsilon,n}^i &:= 1 - \overset{i+1}{P}_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i), \\ \psi_{2,\varepsilon,n}^i &:= \overset{i}{P}'_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i) - \overset{i+1}{P}'_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i). \end{aligned}$$

Отметим, что по построению

$$\overset{i}{\varphi}_{j,\varepsilon,n} = O(\varepsilon^{2n}), \quad \overset{i}{\psi}_{j,\varepsilon,n} = O(\varepsilon^{2n}) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0. \quad (5.4)$$

Далее, определим малые функции $\widehat{Z}_{\varepsilon,n}$ и $\widehat{P}_{\varepsilon,n}$ так, чтобы функции

$$Z_{\varepsilon,n} := \widetilde{Z}_{\varepsilon,n} + \widehat{Z}_{\varepsilon,n}, \quad P_{\varepsilon,n} := \widetilde{P}_{\varepsilon,n} + \widehat{P}_{\varepsilon,n} \quad (5.5)$$

были уже непрерывно дифференцируемы на $[0; 1]$ и $P_{\varepsilon,n}(\vartheta_{\varepsilon,n}^i) = 1$:

$$\begin{aligned} \widehat{Z}_{\varepsilon,n} &= \langle 0, (\overset{1}{\varphi}_{2,\varepsilon,n}(x - \overset{1}{\vartheta}_{\varepsilon,n}) + \overset{1}{\varphi}_{0,\varepsilon,n})\sigma_1 + (\overset{2}{\varphi}_{2,\varepsilon,n}(\overset{2}{\vartheta}_{\varepsilon,n} - x) + \overset{2}{\varphi}_{0,\varepsilon,n})\sigma_2, 0 \rangle, \\ \widehat{P}_{\varepsilon,n} &= \langle \overset{1}{\psi}_{0,\varepsilon,n}\sigma_1, (\overset{1}{\psi}_{2,\varepsilon,n}(x - \overset{1}{\vartheta}_{\varepsilon,n}) + \overset{1}{\psi}_{0,\varepsilon,n})\sigma_1 \\ &\quad + (\overset{1}{\psi}_{2,\varepsilon,n}(\overset{2}{\vartheta}_{\varepsilon,n} - x) + \overset{1}{\psi}_{1,\varepsilon,n})\sigma_2, \overset{2}{\psi}_{1,\varepsilon,n}\sigma_2 \rangle, \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь σ_i — срезающие функции (гладкие функции с носителями в малых, но не бесконечно малых окрестностях точек $\overset{i}{\vartheta}$, равные тождественно 1 в некоторых подокрестностях этих точек; поэтому и сами они, и их производные 1-го и 2-го порядков ограничены).

Тогда построенные функции $Z_{\varepsilon,n}$ и $P_{\varepsilon,n}$ дважды непрерывно дифференцируемы на каждом из рассматриваемых промежутков, непрерывно дифференцируемы на $[0; 1]$, имеют порядок $O(\varepsilon^{2n})$ на концах отрезка $[0; 1]$ и

$$F(P_{\varepsilon,n}) = \langle P_{\varepsilon,n}, 1, P_{\varepsilon,n} \rangle.$$

Непосредственная подстановка этих функций в систему (1.10) с учетом (5.3) дает

$$\mathcal{L}_\varepsilon Z_{\varepsilon,n} - F(P_{\varepsilon,n}) = f + O(\varepsilon^{2n}), \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* P_{\varepsilon,n} + Z_{\varepsilon,n} = z_d + O(\varepsilon^{2n}).$$

Поэтому применима теорема 2 и можно утверждать следующее.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (1.4), (3.1), z_ε и p_ε — решение системы (1.10), а $Z_{\varepsilon,n}$ и $P_{\varepsilon,n}$ — функции, построенные по формулам (5.2), (5.5), (5.6).

Тогда $\|z_\varepsilon - Z_{\varepsilon,n}\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon^{2n-1})$, $\|p_\varepsilon - P_{\varepsilon,n}\|_{C[0;1]} = O(\varepsilon^{2n-1})$ при $\varepsilon \rightarrow +0$. \square

З а м е ч а н и е 5. Поскольку в силу (5.4) $\widehat{Z}_{\varepsilon,n} = O(\varepsilon^{2n})$ и $\widehat{P}_{\varepsilon,n} = O(\varepsilon^{2n})$ в равномерной метрике пространства $M[0; 1]$ ограниченных на $[0; 1]$ функций, то

$$\|z_\varepsilon - \widetilde{Z}_{\varepsilon,n}\|_{M[0;1]} = O(\varepsilon^{2n-1}), \quad \|p_\varepsilon - \widetilde{P}_{\varepsilon,n}\|_{M[0;1]} = O(\varepsilon^{2n-1}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. М.: Мир, 1972. 441 с.

4. **Данилин А.Р., Коробицына Н.С.** Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с геометрическими ограничениями // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3 С. 104-112.
5. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. **Данилин А.Р.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с интегральным ограничением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 76-85.
7. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
8. **Куфнер А., Фучик С.** Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988. 304 с.

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отд.

Поступила 28.09.15

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: dar@imm.uran.ru

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О БЫСТРОДЕЙСТВИИ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ¹

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Исследована задача оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы. Основное отличие от ранее рассмотренных систем с быстрыми и медленными переменными заключается в том, что в данном случае собственные значения матрицы при быстрых переменных не удовлетворяют стандартному требованию отрицательности вещественной части. Получена и обоснована полная асимптотика в смысле Эрдейи по степенной асимптотической последовательности времени быстродействия и оптимального управления относительно малого параметра при производных в уравнениях системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенные задачи, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of the optimal time in a time-optimal control problem with a small parameter.

A time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system is considered. The main difference of this case from systems with fast and slow variables studied earlier is that the eigenvalues of the matrix at the fast variables do not satisfy the standard requirement of the negativity of the real part. We obtain and justify a complete power asymptotic expansion in the sense of Erdelyi of the optimal time and optimal control with respect to the small parameter at derivatives in the equations of the system.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problems, small parameter.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одну из задач теории оптимального управления [1; 2] — задачу о быстродействии для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. обзор [3]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями.

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x, y \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}^2, \\ \varepsilon \dot{y} = Jy - Ju, & \|u\| \leq 1, \quad \varepsilon \ll 1, \\ x(0) = x^0, \quad y(0) = y^0, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) = 0, \quad T_\varepsilon \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1.1)$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta > 0.$$

Цель настоящего исследования — получить асимптотические разложения времени быстродействия, оптимального управления и компонент вектора состояния.

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322) и Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.А03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

Ранее в работе [4] для системы общего вида получены основные соотношения в случае, когда управление ограничено многоугольником, в работах [5; 6] исследовано поведение областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что вещественные части собственных значений матрицы при быстрых переменных равны нулю, и тем самым нарушено стандартное условие (см.[6]) их отрицательности. В настоящей работе используются методы, основы подхода к которым заложены в [7], и общие соотношения, полученные в [8;9]. Отметим статью [10], в которой впервые была исследована асимптотика решения для другой системы, в которой матрица при быстрых переменных также не удовлетворяет условию асимптотической устойчивости.

В этой работе показано, что время быстрогодействия, как и остальные характеристики в данной задаче, даже в случае общего положения не раскладываются в степенной асимптотический ряд в смысле Пуанкаре.

Без ограничения общности можно считать $\beta = 1$, т. е.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

поскольку посредством замены параметра по формуле $\varepsilon/\beta = \bar{\varepsilon}$ можно получить систему с $\beta = 1$.

Заметим, что тогда в силу вида матрицы (1.2) справедливы равенства

$$J^2 = -I, \quad J^{-1} = -J, \quad J^* = -J. \quad (1.3)$$

Здесь и далее * — знак операции транспонирования матриц.

Обозначим

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & \varepsilon^{-1}J \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ -\varepsilon^{-1}J \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z^0 = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

В силу критерия Калмана (см, например, [11, теорема 5]) при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ пара $(\mathcal{A}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon)$ из (1.4) вполне управляема.

Непосредственным вычислением из (1.4) получаем, что

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & \int_0^t e^{Js/\varepsilon} ds \\ 0 & e^{Jt/\varepsilon} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Лемма 1. Матрица $e^{Jt/\varepsilon}$ обладает следующими свойствами:

1. Для любого $\varepsilon > 0$ матричные функции $e^{Jt/\varepsilon}$ и $e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}$ периодические с периодом $2\pi\varepsilon$.
2. Для любых $t, \varepsilon > 0$ и любого вектора ψ выполняются равенства

$$\|e^{Jt/\varepsilon}\| = 1, \quad \|e^{Jt/\varepsilon}\psi\| = \|\psi\|. \quad (1.6)$$

3. Если T ограничено, то

$$\int_0^T e^{Js/\varepsilon} ds = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.7)$$

4. Если T ограничено, $F(t, \varepsilon)$ — ограниченная при всех $t \in [0, T]$ и $\varepsilon > 0$ вместе со своей производной $\frac{d}{dt}F(t, \varepsilon)$ матричная функция, то

$$\int_0^T e^{Js/\varepsilon} F(s, \varepsilon) ds = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.8)$$

Доказательство. Справедливость свойств 1, 2 непосредственно следует из формул (1.3) и определения матричной экспоненты с помощью ряда

$$e^{Jt/\varepsilon} = I + \frac{t}{1!\varepsilon}J - \frac{t^2}{2!\varepsilon^2}I - \frac{t^3}{3!\varepsilon^3}J + \dots = \cos \frac{t}{\varepsilon}I + \sin \frac{t}{\varepsilon}J. \quad (1.9)$$

Свойство 3 выполняется в силу обратимости матрицы J и соотношений (1.3), (1.6):

$$\int_0^T e^{Js/\varepsilon} ds = \varepsilon \int_0^{T/\varepsilon} e^{Js} ds = \varepsilon J(I - e^{JT/\varepsilon}).$$

Свойство 4 устанавливается интегрированием по частям интеграла (1.8):

$$\int_0^T e^{Js/\varepsilon} F(s, \varepsilon) ds = \varepsilon \left(-J e^{Js/\varepsilon} F(s, \varepsilon) \Big|_0^T + J \int_0^T e^{Js/\varepsilon} \frac{d}{ds} F(s, \varepsilon) ds \right),$$

его справедливость следует из ограниченности величины в скобках. \square

Предельная задача (при $\varepsilon = 0$).

$$\begin{cases} \dot{x} = u, & x, u \in \mathbb{R}^2, \\ x(0) = x^0, & \|u\| \leq 1, \\ x(T_0) = 0, & T_0 \rightarrow \min, \end{cases} \quad (1.10)$$

Согласно принципу максимума [1; 11, с. 140] оптимальное управление $u_0(t)$ имеет вид $u_0(t) = l_0$, $\|l_0\| = 1$, где вектор l_0 удовлетворяет соотношению

$$0 = x^0 + T_0 l_0. \quad (1.11)$$

Естественным является предположение

$$x^0 \neq 0. \quad (1.12)$$

Тогда из (1.11) получаем

$$T_0 = \|x^0\|, \quad l_0 = -\frac{x^0}{\|x^0\|}. \quad (1.13)$$

Теорема 1. *Задача (1.1) разрешима при любом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1)$.*

Доказательство. Для произвольного $\theta > 0$, следуя [2, с. 247; 12, с. 105] выпишем функцию управляемости $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^1$ для системы (1.1) для произвольного вектора $\psi = (\psi_1^*, \psi_2^*)^*$ такого, что $\|\psi\| = 1$,

$$\varphi_\varepsilon(\psi) = \rho(e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \theta} \psi | \{z^0\}) + \int_0^\theta \rho(\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s} \psi | \mathcal{U}) ds = \langle e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \theta} \psi, z^0 \rangle + \int_0^\theta \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s} \psi\| ds. \quad (1.14)$$

Здесь $\rho(\psi | F)$ — опорная функция множества F ; \mathcal{U} — множество, ограничивающее управление — единичный шар в \mathbb{R}^2 . В силу вида матричной экспоненты (1.5) и свойства 2 из леммы 1 имеем

$$\begin{aligned} |\langle e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \theta} \psi, z^0 \rangle| &= |\langle \psi, e^{\mathcal{A}_\varepsilon \theta} z^0 \rangle| = |\langle \psi_1, x^0 \rangle + \varepsilon \langle \psi_1, J(I - e^{J\theta/\varepsilon}) y^0 \rangle + \langle \psi_2, e^{J\theta/\varepsilon} y^0 \rangle| \\ &\leq \|\psi_1\| \cdot \|x^0\| + 2\varepsilon \|\psi_1\| \cdot \|y^0\| + \|\psi_2\| \cdot \|y^0\| \leq (2 + 2\varepsilon) \|z^0\| < 4 \|z^0\|, \quad 0 < \varepsilon < 1. \end{aligned}$$

В силу свойства 1 из леммы 1 подынтегральная функция в (1.14) периодическая с периодом $2\pi\varepsilon$. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi\varepsilon} \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s} \psi\| ds = \int_0^{2\pi\varepsilon} \|(I - e^{-Js/\varepsilon})\psi_1 + \varepsilon^{-1} J e^{-Js/\varepsilon} \psi_2\| ds \\ &= \int_0^{2\pi} \|(I - e^{-J\tau})\varepsilon\psi_1 + J e^{-J\tau} \psi_2\| d\tau = \int_0^{2\pi} \|B^* e^{A^* \tau} q_\varepsilon\| d\tau = \|q_\varepsilon\| \int_0^{2\pi} \left\| B^* e^{A^* \tau} \frac{q_\varepsilon}{\|q_\varepsilon\|} \right\| d\tau, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & J \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -J \end{pmatrix}, \quad q_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon\psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \|q_\varepsilon\| = \sqrt{\varepsilon^2 \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2}.$$

Как показано в лемме 1 работы [8], в силу вполне управляемости пары (A, B) найдется $\alpha > 0$ такое, что для всех векторов $\chi \in \mathbb{R}^4$, $\|\chi\| = 1$, имеем $\int_0^{2\pi} \|B^* e^{A^* \tau} \chi\| d\tau \geq \alpha$. Тем самым для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^4$, $\|\psi\| = 1$, при $0 < \varepsilon < 1$ выполняется

$$\int_0^{2\pi\varepsilon} \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s} \psi\| ds \geq \alpha \|q_\varepsilon\| \geq \alpha \sqrt{\varepsilon^2 \|\psi_1\|^2 + \|\psi_2\|^2} \geq \alpha \varepsilon \|\psi\| = \alpha \varepsilon.$$

Возвращаясь к (1.14), отметим, что для $\theta \geq 2\pi\varepsilon n$, где $n \geq 4\|z^0\|/(\alpha\varepsilon)$, справедливы неравенства

$$\int_0^\theta \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s} \psi\| ds \geq n \int_0^{2\pi\varepsilon} \|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* s} \psi\| ds \geq n\alpha\varepsilon \geq 4\|z^0\| > |\langle e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \theta} \psi, z^0 \rangle|.$$

Тем самым при $\theta \geq 2\pi\varepsilon n \geq 8\pi\|z^0\|/\alpha$ для любого вектора $\psi \in \mathbb{R}^4$, $\|\psi\| = 1$, функция управляемости $\varphi_\varepsilon(\psi)$ неотрицательна, следовательно, задача разрешима и для оптимального времени справедлива оценка

$$T_\varepsilon \leq 8\pi\|z^0\|/\alpha. \quad (1.15)$$

2. Основная система уравнений и асимптотика ее решения

В силу принципа максимума Понтрягина [1; 11, с. 140], который в рассматриваемом случае является необходимым и достаточным условием оптимальности, существует вектор $r_\varepsilon = (r_\varepsilon^1, r_\varepsilon^2, r_\varepsilon^*)^*$, $r_\varepsilon^1, r_\varepsilon^2 \in \mathbb{R}^2$, такой, что оптимальное управление в задаче (1.1) имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\|} \quad (2.1)$$

при всех t таких, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon \neq 0$. Тогда в силу формулы Коши из (1.1) для r_ε получим равенство

$$0 = z^0 + \int_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{-\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\|} dt. \quad (2.2)$$

Тем самым вектор r_ε является вектором, порождающим оптимальное управление, тогда и только тогда, когда r_ε удовлетворяет соотношению (2.2). Таким образом, исходная задача сводится к исследованию уравнения (2.2).

Отметим, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} = (I - e^{Jt/\varepsilon}, \varepsilon^{-1} J e^{Jt/\varepsilon})$. Тогда с учетом (1.3) для $r_\varepsilon = (r_\varepsilon^1, r_\varepsilon^2)^*$ запишем

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{-\mathcal{A}_\varepsilon^* t} r_\varepsilon\| = \left\| \begin{matrix} 1 \\ r_\varepsilon^1 \end{matrix} + e^{Jt/\varepsilon} (\varepsilon^{-1} J \begin{matrix} 2 \\ r_\varepsilon^2 \end{matrix} - \begin{matrix} 1 \\ r_\varepsilon^1 \end{matrix}) \right\|.$$

Введем новые неизвестные векторы по формулам

$$l_\varepsilon = \begin{matrix} 1 \\ r_\varepsilon^1 \end{matrix}, \quad \rho_\varepsilon = \varepsilon^{-1} J \begin{matrix} 2 \\ r_\varepsilon^2 \end{matrix} - \begin{matrix} 1 \\ r_\varepsilon^1 \end{matrix} \quad (2.3)$$

и представим основную систему уравнений (2.2) в виде

$$\begin{cases} -x^0 = \int_0^{T_\varepsilon} \frac{(I - e^{-Jt/\varepsilon})l_\varepsilon + (e^{Jt/\varepsilon} - I)\rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|} dt, \\ \varepsilon y^0 = J \int_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{-Jt/\varepsilon}l_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|} dt. \end{cases} \quad (2.4)$$

Лемма 2. Для оптимального времени справедлива оценка снизу

$$T_\varepsilon \geq \bar{T} > 0 \quad \text{при всех } \varepsilon > 0. \quad (2.5)$$

Доказательство. Действительно, подынтегральная функция в первом уравнении системы (2.4) преобразуется к виду

$$\frac{l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon}\rho_\varepsilon\|} - \frac{e^{-Jt/\varepsilon}l_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{\|e^{-Jt/\varepsilon}l_\varepsilon + \rho_\varepsilon\|},$$

следовательно, ограничена. Если бы нашлась последовательность $\{T_\varepsilon\}$ (здесь и далее будем для сокращения записи вместо номеров членов последовательности писать ε), сходящаяся к нулю, то интеграл в правой части уравнения стремился бы к нулю вместе с $T_\varepsilon \rightarrow 0$. Но левая часть уравнения нулю не равна в силу предположения (1.12), значит, такой последовательности нет и справедлива оценка (2.5). \square

Естественным образом возникает вопрос о связи между нормированным вектором $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*)^*$, удовлетворяющим уравнениям (2.4), и вектором l_0 , порождающим оптимальное управление в вырожденной задаче (1.10).

Теорема 2. Если $L_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*)^*$ — нормированный вектор, порождающий оптимальное управление в задаче (1.1), т. е. удовлетворяет (2.4), и $\|L_\varepsilon\| = 1$, то

$$\begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ \rho_\varepsilon \\ T_\varepsilon \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ T_0 \end{pmatrix} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где T_0 — оптимальное время, а l_0 — вектор, порождающий оптимальное управление в предельной задаче (1.10).

Доказательство. Поскольку уравнения (2.4) положительно однородны относительно вектора L_ε , то будем считать, что норма этого вектора равна единице. Тогда с учетом оценки (1.15) множество векторов $\{(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^*\}$ ограничено и, следовательно, имеет предельные точки. Пусть $(\overset{0}{l}^*, \overset{0}{\rho}^*, \overset{0}{T})^*$ — одна из них, т. е. некоторая последовательность $(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^* \rightarrow (\overset{0}{l}^*, \overset{0}{\rho}^*, \overset{0}{T})^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Покажем, что случай $\|\overset{0}{\rho}\| \neq 0$ невозможен. От противного предположим, что $\overset{0}{\rho} \neq 0$, тогда, умножив скалярно второе уравнение системы (2.4) на ρ_ε , придем к соотношению

$$-\varepsilon \langle Jy^0, \rho_\varepsilon \rangle = \int_0^{T_\varepsilon} \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2 + \langle e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon, \rho_\varepsilon \rangle}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon} \rho_\varepsilon\|} dt, \quad (2.6)$$

левая часть которого стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Оценим интеграл в правой части равенства:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_\varepsilon} \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2 + \langle e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon, \rho_\varepsilon \rangle}{\|l_\varepsilon + e^{Jt/\varepsilon} \rho_\varepsilon\|} dt &\geq \int_0^{T_\varepsilon} \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2 + \langle e^{-Jt/\varepsilon} l_\varepsilon, \rho_\varepsilon \rangle}{\|l_\varepsilon\| + \|\rho_\varepsilon\|} dt \\ &= T_\varepsilon \frac{\|\rho_\varepsilon\|^2}{\|l_\varepsilon\| + \|\rho_\varepsilon\|} + \left\langle \int_0^{T_\varepsilon} e^{-Jt/\varepsilon} dt l_\varepsilon, \frac{\rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon\| + \|\rho_\varepsilon\|} \right\rangle. \end{aligned}$$

Тем самым в силу предположения, оценки (2.5) и свойства (1.7) правая часть равенства (2.6) при $\varepsilon \rightarrow 0$ к нулю не стремится. Найденное противоречие доказывает, что $\overset{0}{\rho} = 0$.

Тем самым для всех предельных точек выполняется $\|\overset{0}{l}\| = 1$. В силу свойства (1.7) из первого уравнения системы (2.4) вытекает, что $\overset{0}{T}$ и $\overset{0}{l}$ удовлетворяют предельному уравнению (1.11), поэтому $\overset{0}{T} = \|x^0\| = T_0$, $\overset{0}{l} = l_0$ и $(l_0^*, 0, T_0)^*$ — единственная предельная точка множества $\{(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^*\}$, что означает $(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^* \rightarrow (l_0^*, 0, T_0)^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Для нахождения и обоснования асимптотики решения системы уравнений (2.4) будут использованы подходы работ [13; 14].

Для сокращения записи формул введем обозначение $E_\varepsilon(\eta) := e^{J\eta/\varepsilon}$. Систему (2.4) можно преобразовать к более простому виду:

$$\begin{cases} -x^0 - \varepsilon Jy^0 = \int_0^{T_\varepsilon} \frac{l_\varepsilon + E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\|} dt, \\ -\varepsilon Jy^0 = \int_0^{T_\varepsilon} \frac{E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon + \rho_\varepsilon}{\|l_\varepsilon + E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\|} dt. \end{cases} \quad (2.7)$$

Для замыкания системы (2.7) добавим условие нормировки вектора L_ε :

$$\|l_\varepsilon\|^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2 = 1. \quad (2.8)$$

В силу (1.6), (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \|l_\varepsilon + E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon\|^{-1} &= (\|l_\varepsilon\|^2 + \|\rho_\varepsilon\|^2 + 2\langle l_\varepsilon, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon \rangle)^{-1/2} \\ &= 1 - \langle l_\varepsilon, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon \rangle + \frac{3}{2}\langle l_\varepsilon, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon \rangle^2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \langle l_\varepsilon, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon \rangle^k, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где a_k ($k = 3, 4, \dots$) — известные числа. Этот ряд абсолютно сходится при $\|l_\varepsilon\| \cdot \|\rho_\varepsilon\| < 1/2$.

3. Алгоритм построения асимптотики решения

В силу (2.9) ряды для правых частей уравнений системы (2.7) состоят из слагаемых следующих типов:

$$T_\varepsilon l_\varepsilon, \quad T_\varepsilon \rho_\varepsilon, \quad \int_0^{T_\varepsilon} E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon dt, \quad \int_0^{T_\varepsilon} E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon dt, \quad \int_0^{T_\varepsilon} \langle l_\varepsilon, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon \rangle^k l_\varepsilon dt,$$

$$\int_0^{T_\varepsilon} \langle E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon, \rho_\varepsilon \rangle^k E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon dt, \quad \int_0^{T_\varepsilon} \langle E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon, \rho_\varepsilon \rangle^k \rho_\varepsilon dt, \quad \int_0^{T_\varepsilon} \langle l_\varepsilon, E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon \rangle^k E_\varepsilon(t)\rho_\varepsilon dt$$

(с известными числовыми коэффициентами).

Будем искать новый малый неизвестный вектор $\omega = (\lambda^*, \rho^*, \vartheta)^* = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ (зависимость его компонент от ε для сокращения записи опустим),

$$l_\varepsilon = l_0 + \lambda, \quad \|l_0\| = 1, \quad \rho_\varepsilon = \rho, \quad T_\varepsilon = T_0 + \vartheta \quad (3.1)$$

в виде

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k, \quad \rho = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k, \quad \vartheta = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k, \quad \lambda_k, \rho_k, \vartheta_k = O(\varepsilon^k), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Процедура для нахождения $\omega_k = (\lambda_k^*, \rho_k^*, \vartheta_k)^*$ стандартна: представления (3.1), (3.2) подставляем в систему (2.7), (2.8). С учетом (2.9) раскладываем правые части уравнений в ряды и приравниваем слагаемые одного порядка малости, принимая во внимание предположение (3.2).

4. Получение первых асимптотических приближений решения

Отметим, что в силу (3.1), (3.2) $\vartheta_1/\varepsilon = O(1)$, $(\vartheta - \vartheta_1)/\varepsilon = O(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому

$$E_\varepsilon(T_\varepsilon) = e^{\left(\frac{T_0}{\varepsilon} + \frac{\vartheta_1}{\varepsilon} + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}\right)J} = e^{\frac{T_0}{\varepsilon}J} e^{\frac{\vartheta_1}{\varepsilon}J} (I + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}J + \dots) = E_{0\varepsilon}E_{1\varepsilon} + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}E_{0\varepsilon}E_{1\varepsilon}J + \dots,$$

$$E_\varepsilon^*(T_\varepsilon) = e^{\left(\frac{T_0}{\varepsilon} + \frac{\vartheta_1}{\varepsilon} + \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}\right)J^*} = e^{\frac{T_0}{\varepsilon}J^*} e^{\frac{\vartheta_1}{\varepsilon}J^*} (I - \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}J + \dots) = E_{0\varepsilon}^*E_{1\varepsilon}^* - \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\varepsilon}E_{0\varepsilon}^*E_{1\varepsilon}^*J + \dots,$$

где $E_{0\varepsilon} = e^{\frac{T_0}{\varepsilon}J}$, $E_{1\varepsilon} = e^{\frac{\vartheta_1}{\varepsilon}J}$. Обозначим $\tilde{E}_\varepsilon = E_{0\varepsilon}E_{1\varepsilon}$. Отметим, что в силу (1.9) и (3.2)

$$\int_0^{T_\varepsilon} \langle E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon, \rho_\varepsilon \rangle E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon dt = \int_0^{T_0} \langle E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon, \rho_\varepsilon \rangle E_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon dt + O(\varepsilon^2)$$

$$= \frac{T_0}{2} (\langle l_0, \rho_1 \rangle l_0 + \langle J l_0, \rho_1 \rangle J l_0) + O(\varepsilon^2). \quad (4.1)$$

Уравнение (2.8) с учетом (3.1) преобразуется к виду

$$2\langle l_0, \lambda \rangle + \|\lambda\|^2 + \|\rho\|^2 = 0. \quad (4.2)$$

Принимая во внимание равенства (1.13), (4.1), выпишем для (2.7), (2.8) систему первого приближения:

$$\begin{cases} -\varepsilon J y^0 &= \vartheta_1 l_0 + T_0 \lambda_1, \\ -\varepsilon J y^0 &= \varepsilon J (\tilde{E}_\varepsilon^* - I) l_0 + T_0 \rho_1 - \frac{T_0}{2} (\langle l_0, \rho_1 \rangle l_0 + \langle J l_0, \rho_1 \rangle J l_0), \\ 0 &= \langle l_0, \lambda_1 \rangle. \end{cases} \quad (4.3)$$

Из первого и третьего уравнений системы (4.3) находим

$$\vartheta_1 = -\varepsilon \langle J y^0, l_0 \rangle, \quad \lambda_1 = \frac{\varepsilon}{T_0} (\langle J y^0, l_0 \rangle l_0 - J y^0).$$

Второе уравнение системы (4.3) можно записать в виде

$$\mathcal{L} \rho_1 := 2\rho_1 - \langle l_0, \rho_1 \rangle l_0 - \langle J l_0, \rho_1 \rangle J l_0 = -\frac{2\varepsilon}{T_0} J (y^0 + (\tilde{E}_\varepsilon^* - I) l_0). \quad (4.4)$$

Покажем, что оператор \mathcal{L} обратим. Предположим противное, пусть $\mathcal{L}\rho = 0$ для некоторого вектора $\rho \neq 0$:

$$2\rho - \langle l_0, \rho \rangle l_0 - \langle Jl_0, \rho \rangle Jl_0 = 0. \quad (4.5)$$

Тогда

$$2\|\rho\|^2 = \langle l_0, \rho \rangle^2 + \langle Jl_0, \rho \rangle^2 \leq \|l_0\|^2 \|\rho\|^2 + \|Jl_0\|^2 \|\rho\|^2 \leq 2\|\rho\|^2,$$

поэтому $\|\rho\|^2 = \langle l_0, \rho \rangle^2$. Тем самым $\rho = \gamma l_0$ для некоторого $\gamma \neq 0$. Подставив это выражение для ρ в равенство (4.5), получим

$$2\gamma l_0 - \gamma l_0 - \gamma \langle Jl_0, l_0 \rangle Jl_0 = 0. \quad (4.6)$$

В силу свойств матрицы J (1.3) имеем $\langle Jl_0, l_0 \rangle = \langle l_0, J^* l_0 \rangle = -\langle l_0, Jl_0 \rangle = -\langle Jl_0, l_0 \rangle$, т. е. $\langle Jl_0, l_0 \rangle = 0$, и равенство (4.6) принимает вид $l_0 = 0$, что противоречит соотношению $\|l_0\| = 1$. Таким образом, оператор \mathcal{L} обратим, уравнение (4.4) разрешимо единственным образом и

$$\rho_1 = -\frac{2\varepsilon}{T_0} \mathcal{L}^{-1} J(y^0 + (\tilde{E}_\varepsilon^* - I)l_0).$$

Отметим, что отношение ρ_1/ε не константа по ε , в формуле для ρ_1 присутствует равномерно ограниченный по ε оператор $\tilde{E}_\varepsilon^* = e^{-\left(\frac{T_0}{\varepsilon} + \frac{\vartheta_1}{\varepsilon}\right)J}$.

Покажем, что аналогичную структуру имеют и следующие члены ϑ_k ($k = 2, \dots$) ряда для T_ε . Выпишем первое уравнение системы второго приближения для (2.7), (2.8)

$$0 = \vartheta_2 l_0 + T_0 \lambda_2 + \vartheta_1 \lambda_1 - \varepsilon \langle l_0, J(I - \tilde{E}_\varepsilon) \rho_1 \rangle l_0 + \left\{ \frac{3}{2} \int_0^{T_\varepsilon} (\langle l_0, E_\varepsilon(t) \rho_1 \rangle)^2 dt l_0 \right\}_2 + \varepsilon J(I - \tilde{E}_\varepsilon) \rho_1 - \left\{ \int_0^{T_\varepsilon} (\langle l_0, E_\varepsilon(t) \rho_1 \rangle E_\varepsilon(t) \rho_1 dt) \right\}_2.$$

Здесь $\{\}_2$ означает слагаемые порядка $O(\varepsilon^2)$ в указанном выражении. Таким образом, это уравнение имеет вид

$$0 = \vartheta_2 l_0 + T_0 \lambda_2 + F(l_0, \lambda_1, \rho_1, T_0, \vartheta_1, \varepsilon) = \vartheta_2 l_0 + T_0 \lambda_2 + O(\varepsilon^2). \quad (4.7)$$

С учетом последнего уравнения системы (4.3), условия $\|l_0\| = 1$ и полученного из (4.2) соотношения $\langle \lambda_2, l_0 \rangle = -\|\lambda_1\|^2 - \|\rho_1\|^2 = O(\varepsilon^2)$ после умножения скалярно на l_0 уравнение (4.7) преобразуется к виду

$$0 = \vartheta_2 + \hat{F}(l_0, \lambda_1, \rho_1, T_0, \vartheta_1, \varepsilon) = \vartheta_2 + O(\varepsilon^2).$$

Таким образом, $\vartheta_2 = O(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Но ϑ_2 не является постоянной, умноженной на ε^2 , аналогично ρ_1 , она содержит равномерно ограниченный по ε множитель \tilde{E}_ε . Тем самым, ряд для решения будет асимптотическим в смысле Эрдейи [15, Definition 2.4] по степенной асимптотической последовательности.

5. Получение и обоснование асимптотики оптимального времени T_ε и оптимального управления $u_\varepsilon(t)$

Стандартным образом, последовательно выписывая задачи для $\omega_k = (\lambda_k^*, \rho_k^*, \vartheta_k)^*$, $k = 2, \dots$ из (3.2), получим однозначно разрешимые уравнения

$$C\omega_k = G_k(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \varepsilon),$$

где

$$C\omega = \begin{pmatrix} T_0\lambda + \vartheta l_0 \\ \mathcal{L}\rho \\ \langle l_0, \lambda \rangle \end{pmatrix}, \quad \omega = (\lambda^*, \rho^*, \vartheta)^*, \quad G_k(\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \varepsilon) = O(\varepsilon^k),$$

откуда найдутся все $\omega_k = O(\varepsilon^k)$, $k = 2, \dots$. Пусть $\hat{\omega}_N = (l_0^*, 0, T_0)^* + \sum_{k=1}^N \omega_k$, а $\hat{\omega} = \omega - \hat{\omega}_N$, где в силу явного вида найденных ω_k справедливо соотношение $\hat{\omega} = o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, тогда система (2.7), (2.8) для $\hat{\omega}$ преобразуется к системе следующего вида

$$C\hat{\omega} = \mathcal{H}_N(\varepsilon, \hat{\omega}), \quad \mathcal{H}_N(\varepsilon, \hat{\omega}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon\|\hat{\omega}\|) + O(\|\hat{\omega}\|^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В силу обратимости оператора C и ограниченности C^{-1} приходим к уравнению

$$\hat{\omega} = \mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega}), \quad \mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon\|\hat{\omega}\|) + O(\|\hat{\omega}\|^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

и для любого $\varepsilon > 0$ отображение $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})$ непрерывно по $\hat{\omega}$.

Утверждение. Если при $\hat{\omega} = o(1)$, $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega}) = O(\varepsilon^{N+1}) + O(\varepsilon\|\hat{\omega}\|) + O(\|\hat{\omega}\|^2)$ и для любого $\varepsilon > 0$ отображение $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})$ непрерывно по $\hat{\omega}$, то существует $\hat{\omega} = O(\varepsilon^{N+1})$ — решение уравнения $\hat{\omega} = \mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})$.

Доказательство. Пусть $\|\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})\| \leq K(\varepsilon^{N+1} + \varepsilon\|\hat{\omega}\| + \|\hat{\omega}\|^2)$. Возьмем $M := B[0; 2K\varepsilon^{N+1}]$ — шар с центром в точке 0 радиуса $2K\varepsilon^{N+1}$. Тогда, если $\hat{\omega} \in M$, то $\|\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})\| \leq K\varepsilon^{N+1}(1 + 2K\varepsilon + 4K^2\varepsilon^{N+1})$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, таких, что справедливо неравенство $2K\varepsilon + 4K^2\varepsilon^{N+1} \leq 1$ выполняется $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega}) \in M$. Тогда по теореме Шаудера — Тихонова [16, с. 628] при всех таких $\varepsilon > 0$ существует $\hat{\omega} = O(\varepsilon^{N+1})$ неподвижная точка отображения $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \hat{\omega})$. \square

В силу утверждения существует такой вектор $(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^*$, что

$$(l_\varepsilon^*, \rho_\varepsilon^*, T_\varepsilon)^* = (l_0^*, 0, T_0)^* + \sum_{k=1}^N \omega_k + O(\varepsilon^{N+1}),$$

при этом вектор $r_\varepsilon = (r_{\varepsilon}^1, r_{\varepsilon}^2)^*$, для которого $r_{\varepsilon}^1 = l_\varepsilon$, $r_{\varepsilon}^2 = -\varepsilon J(\rho_\varepsilon + l_\varepsilon)$, удовлетворяет уравнению (2.2) и, тем самым, порождает оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$.

З а м е ч а н и е 1. Отметим, что теорема о существовании неявного отображения в данном случае неприменима, поскольку производная оператора $\mathcal{F}_N(\varepsilon, \tilde{\omega})$ по одной из компонент вектора $\tilde{\omega}$ не определена при $\varepsilon = 0$ и не может быть доопределена по непрерывности.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что в данной работе мы не исследуем единственность представления оптимального управления через вектор r_ε (2.1) [8], и в связи с этим частичные суммы построенных рядов (3.2) для l_ε и ρ_ε могут в итоге приближать разные векторы r_ε . Тем не менее, в силу единственности как оптимального управления (доказательство этого факта аналогично доказательству второй теоремы единственности [12, с. 178]), так и времени быстродействия, ряд (3.2) для T_ε есть асимптотическое разложение времени быстродействия, а асимптотическое разложение оптимального управления получается подстановкой найденных рядов для l_ε и ρ_ε с учетом замены (2.3) вместо r_ε в формулу (2.1). Это позволяет далее получить и асимптотику компонент вектора состояния системы.

Из приведенных выше рассуждений вытекает справедливость следующей основной теоремы.

Теорема 3. При выполнении предположения (1.12) время быстродействия T_ε , оптимальное управление и компоненты вектора состояния раскладываются в асимптотические в смысле Эрдейи ряды по степеням $\{\varepsilon^k\}$, слагаемые которых однозначно определяются рядами (3.2).

Формула (2.1) при подстановке в нее частичной суммы $\hat{\omega}_N$ без слагаемых порядка $O(\varepsilon^{N+1})$ дает так называемое субоптимальное управление $(N + 1)$ -го порядка [17; 18]. \square

З а м е ч а н и е 3. Отметим, что доказанная теорема справедлива и для задачи оптимального быстрогодействия вида (1.1), и в случае $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^n$, $n > 2$, если матрица J удовлетворяет соотношениям (1.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
3. **Васильева А.Б., Дмитриев М.Г.** Математический анализ. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 20. С. 3–77.
4. **Kokotovic P.V., Haddad A.H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast models // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113.
5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Гичев Т.Р., Дончев А.Л.** Сходимость решения линейной сингулярно возмущенной задачи быстрогодействия // Прикл. математика и механика. 1979. Т. 43, № 3. С. 466–474.
7. **Данилин А.Р., Ильин А.М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстрогодействия // Фундаментал. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
8. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О зависимости задачи быстрогодействия для линейной системы от двух малых параметров // Вестн. ЧелГУ. 2011. № 27. С. 46–60. (Математика, механика, информатика; вып 14.)
9. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в задаче о быстрогодействии с двумя малыми параметрами // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 92–99.
10. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
11. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
12. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высш. шк., 2001. 239 с.
13. **Парышева Ю.В.** Асимптотика решения линейной задачи оптимального управления в сингулярном случае // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 266–270.
14. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотическое представление решения сингулярно возмущенной линейной задачи быстрогодействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 67–79.
15. **Erdelyi A., Wymann M.** The asymptotic evaluation of certain integral // Arch. Rational Mech. Anal. 1963. Vol. 14. P. 217–260.
16. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
17. **Калинин А.И., Семенов К.В.** Асимптотический метод оптимизации линейных сингулярно возмущенных систем с многомерными управлениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 3. С. 432–443.
18. **Данилин А.Р., Коврижных О.О.** Асимптотика оптимального времени в сингулярно возмущенной линейной задаче быстрогодействия // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 63–75.

Данилин Алексей Руфимович

Поступила 25.09.2015

д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. отделом

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна

канд. физ.-мат. наук, с.н.с.

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

доцент УрФУ

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: koo@imm.uran.ru

УДК 512.517

**СТРОГАЯ ВЕЩЕСТВЕННОСТЬ И РАЦИОНАЛЬНОСТЬ ГРУПП
УНИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ ПОРЯДКА ≤ 8
НАД ПОЛЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2¹**

О. А. Дубина, С. Г. Колесников, Н. С. Манагарова

Доказывается, что произвольная матрица из группы унитарных матриц $UT_n(K)$, $n \leq 8$, над произвольным полем K сопряжена в ней с матрицей, граф коммутативности которой является лесом. Отсюда выводится строгая вещественность и рациональность группы $UT_n(K)$ при $n \leq 8$ над произвольным полем K характеристики 2.

Ключевые слова: строго вещественная группа, рациональная группа, группа унитарных матриц.

O. A. Dubina, S. G. Kolesnikov, N. S. Managarova. The strong reality and rationality of groups of unitriangular matrices of order ≤ 8 over fields of characteristic 2.

It is proved that an arbitrary matrix from the group of unitriangular matrices $UT_n(K)$, $n \leq 8$, over an arbitrary field K is conjugate in this group to a matrix whose commutativity graph is a forest. From this fact we derive the strong reality and rationality of the group $UT_n(K)$ for $n \leq 8$ over an arbitrary field K of characteristic 2.

Keywords: strong real group, rational group, group of unitriangular matrices.

Введение

В работе [1] А. А. Кирилловым была высказана гипотеза о вещественности всех неприводимых комплексных характеров группы $UT_n(2)$ — нижних (в оригинале верхних) унитарных матриц порядка $n \geq 2$ над полем из двух элементов. Напомним, что характер конечной группы называется *вещественным* (рациональным), если все его значения лежат в поле вещественных (рациональных) чисел. Группа, все комплексные неприводимые характеры которой вещественны, называется *вещественной*, а если все они рациональны — *рациональной* группой (иногда — *Q-группой*). Отметим, что вещественность значения произвольного характера на фиксированном элементе группы равносильна сопряженности данного элемента с ему обратным. Используя компьютерные вычисления и результаты из [2;3], Дж. Арреги и А. Вера-Лопес подтвердили гипотезу А. А. Кириллова для всех $n \leq 12$. Позже И. Айзекс и Д. Карагёзьян [4] указали пример унитарной матрицы порядка 13 над полем $GF(2)$ (с опечатками, исправленный вариант приведен в [5]), которая не сопряжена в $UT_{13}(2)$ со своей обратной матрицей и, таким образом, гипотеза о вещественности группы $UT_n(2)$ в общем случае была опровергнута.

Помимо приведенного результата в [4] был установлен признак сопряженности матрицы $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$, K — поле характеристики p , с любой своей степенью A^r такой, что $r \equiv 1 \pmod{p}$. Его суть состоит в следующем. Сопоставим матрице A ориентированный граф $\vec{\Gamma}(A)$, множество вершин которого совпадает с множеством отличных от нуля недиагональных элементов матрицы A , две вершины a_{ij} и a_{km} соединяются направленным ребром $a_{ij} \rightarrow a_{km}$, только если $j = k$. Оказывается [4, теорема на с. 708], что если на вершинах $\vec{\Gamma}(A)$ можно задать такую целочисленную функцию F (будем называть ее *L-функцией*), что $F(a_{ij}) + 1 = F(a_{km})$, когда ребро $a_{ij} \rightarrow a_{km}$ принадлежит графу $\vec{\Gamma}(A)$, то матрица A сопряжена с любой своей степенью A^r такой, что $r \equiv 1 \pmod{p}$. В частности, когда поле K имеет характеристику 2, получаем достаточное условие сопряженности матрицы A с любой своей нечетной степенью.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 16-01-00707).

Последнее замечание позволяет исследовать вопрос не только о вещественности характеров $UT_n(2^q)$, но и об их рациональности. Напомним, что рациональность значений всех комплексных неприводимых характеров произвольной конечной группы G на элементе $g \in G$ эквивалентна сопряженности g со всеми своими степенями g^m такими, что $\text{НОД}(|g|, m) = 1$ (см., например, [6, предложение 9]). Используя построенные Дж. Арреги и А. Вера-Лопес таблицы представителей классов сопряженных элементов групп $UT_n(2)$ для небольших n , И. Айзекс и Д. Карагёзьян при $n \leq 6$ выяснили, что в каждом классе лежит матрица A , граф $\vec{\Gamma}(A)$ которой обладает L -функцией, и, как следствие, установили рациональность группы $UT_n(2)$ для указанных n . В дальнейшем, говоря о рациональной группе, мы будем иметь в виду периодическую группу, в которой каждый элемент сопряжен с любой своей степенью, взаимно простой с его порядком. Данное определение не изменяет класс конечных рациональных групп, а с другой стороны, позволяет рассматривать вопрос о рациональности унитарной группы над произвольным полем характеристики 2.

Близкой к задачам описания вещественных и рациональных унитарных групп, в частности по методам исследования, является задача описания строго вещественных максимальных унитарных подгрупп групп Шевалле над полями характеристики 2, записанная Я. Н. Нужиным в Коуровскую тетрадь [7, вопрос 16.76]. Напомним, что группа G называется *строго вещественной*, если любой ее неединичный элемент является строго вещественным, т. е. сопряжен некоторой инволюцией из G со своим обратным элементом. В работах [8–10] ответ на поставленный вопрос был получен для групп Шевалле классического лиева типа и ранга $n \leq 4$ (для типа A_n при ограничении $n \leq 6$), ранга $n \geq 13$, а также для всех исключительных лиевых типов. Кроме того, в [9] было указано достаточное условие строгой вещественности элемента группы, в основе которого лежит следующий факт (см. [11, лемма 1]). Пусть G — произвольная группа, g_1, \dots, g_n — любые ее элементы и $g = g_1 \dots g_n$. Сопоставим g неориентированный граф $\Gamma(g)$ (следуя [9], будем называть его графом коммутативности g), вершинами которого являются элементы g_1, \dots, g_n , две вершины g_i и g_j соединяются ребром в том и только том случае, если коммутатор $[g_i, g_j] = g_i^{-1}g_j^{-1}g_i g_j$ отличен от единицы. Оказывается, когда $\Gamma(g)$ — лес (т. е. граф без циклов), то для любой перестановки π чисел $1, \dots, n$ элемент g сопряжен в G с произведением $g_{\pi(1)} \dots g_{\pi(n)}$. В [9, лемма 3] было замечено, что если элементы g_1, \dots, g_n являются инволюциями и $\Gamma(g)$ — лес, то множество вершин $\Gamma(g)$ разбивается на два непересекающихся подмножества I и J таким образом, что произведения всех элементов из I и всех элементов из J , взятые в любом порядке, являются инволюциями. Вспомнив, что произвольная матрица $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$ раскладывается в произведение трансвекций $(t_{ij}(a_{ij}) = E + a_{ij}e_{ij}, i \neq j)$

$$A = t_{21}(a_{21})t_{31}(a_{31})t_{32}(a_{32}) \dots t_{n,n-1}(a_{n,n-1}),$$

и, когда поле K имеет характеристику 2, каждая неединичная трансвекция является инволюцией, получаем достаточное условие строгой вещественности матрицы A .

Цель статьи — распространить результаты [4] о рациональности $UT_n(2)$ при $n \leq 6$ (в смысле данного выше определения) на произвольные поля характеристики 2 и $n \leq 8$; установить строгую вещественность группы $UT_8(K)$ над произвольным полем K характеристики 2.

Статья организована следующим образом. В первом разделе для произвольного поля K и любого $n \geq 2$ доказываются две теоремы о сопряженности фиксированной матрицы из группы $UT_n(K)$ с выделенными отличными от нуля поддиагональными элементами с матрицей, у которой почти все элементы, стоящие ниже (в столбце) и левее (в строке) выделенных элементов, равны нулю. С учетом полученных результатов во втором разделе устанавливается (теорема 3), что при $n \leq 8$ в каждом классе сопряженных элементов группы $UT_n(K)$ лежит матрица, граф коммутативности которой является лесом. Как отмечено выше, отсюда следует строгая вещественность групп $UT_n(K)$ при $n \leq 8$ над полями характеристики 2. Поскольку при любом выборе ориентации ребер произвольного леса полученный ориентированный граф

всегда обладает L -функцией (лемма 1 настоящей статьи), то из теоремы 3 также следует рациональность группы $UT_n(K)$ при $n \leq 8$ и $\text{char } K = 2$. Завершается статья разделами, в которых доказывается просто проверяемый критерий рациональности 2-группы и устанавливается (без компьютерных вычислений) несопряженность матрицы из [5] со своей обратной.

1. Теоремы сопряженности в унитреугольной группе

Пусть K — произвольное поле. С каждой матрицей $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$, $n \geq 2$, свяжем множество $M = M(A)$, которое по определению состоит из таких натуральных чисел k , что $a_{k,k-1} \neq 0$. Непустое подмножество $N \subseteq M$ назовем *связным*, если вместе с каждыми i, j , $i \leq j$, входящими в N , оно содержит и все натуральные числа отрезка $[i, j]$. Максимальные (относительно включения) связные подмножества M определяются однозначно, и M является их дизъюнктивным объединением.

Теорема 1. Пусть K — поле, $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$. Пусть также $M' \subseteq M = M(A)$ непусто и M'_1, \dots, M'_m — все максимальные связные подмножества M' , упорядоченные таким образом, что для любого $a \in M'_i$ и $b \in M'_j$ имеем $a < b$, когда $i < j$. Тогда матрица A сопряжена в $UT_n(K)$ с матрицей $B = \|b_{ij}\|$, элементы которой удовлетворяют условиям:

1) $b_{i,i-1} = a_{i,i-1}$ для всех $i, 2 \leq i \leq n$;

2) $b_{ij} = 0$, если а) $j + 1 \in M'$ и $i > j + 1$ либо б) $i \in M'$, $j < i - 1$ и j отлично от максимальных элементов множеств M'_1, \dots, M'_{m-1} .

Перед тем как перейти к доказательству теоремы, приведем пример, иллюстрирующий ее применение.

Пример 1. Пусть известно, что элементы $a_{32}, a_{54}, a_{87}, a_{98}$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & 1 & 0 \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & 1 \end{pmatrix}$$

отличны от нуля, а в качестве M' выбрано множество, состоящее из чисел 3, 5, 8, 9. Тогда M' является объединением максимальных связных подмножеств $M'_1 = \{3\}$, $M'_2 = \{5\}$, $M'_3 = \{8, 9\}$ и по теореме 1 матрица A сопряжена в $UT_9(K)$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{53} & a_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{61} & 0 & b_{63} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{71} & 0 & b_{73} & 0 & b_{75} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{83} & 0 & b_{85} & 0 & a_{87} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b_{93} & 0 & b_{95} & 0 & 0 & a_{98} & 1 \end{pmatrix}$$

при подходящих b_{ij} .

Доказательство теоремы 1. Начнем с замечания. Известно и легко проверяется, что 1) умножение произвольной матрицы A слева на трансвекцию $t_{ij}(\alpha)$, $i \neq j$, равносильно прибавлению к i -й строке матрицы A ее j -й строки, умноженной на α ; 2) умножение матрицы A справа на трансвекцию $t_{ij}(\alpha)$ равносильно прибавлению к j -му столбцу матрицы A ее i -го столбца, умноженного на α . Следовательно, при сопряжении матрицы A трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$ к i -й строке A прибавляется j -я строка, умноженная на $-\alpha$, а к j -му столбцу полученной матрицы прибавляется ее i -й столбец, умноженный на α . В частности, при сопряжении унитарной матрицы $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$ трансвекцией $t_{ij}(\alpha)$, $i > j$, элементы A , стоящие в i -й строке и j -м столбце, изменяются по формулам

$$a'_{ik} = a_{ik} - \alpha a_{jk}, \quad k = 1, \dots, j-1; \quad a'_{sj} = a_{sj} + \alpha a_{si}, \quad s = i+1, \dots, n,$$

а элементы, стоящие на других местах, не изменяются. Например, не изменяются элементы, стоящие под главной диагональю (на местах $(2, 1), (3, 2), \dots, (n, n-1)$). Поскольку произвольная матрица из группы $UT_n(K)$ раскладывается в произведение лежащих в ней трансвекций, последнее замечание означает, что любая матрица B , сопряженная в $UT_n(K)$ с матрицей A , удовлетворяет условию 1).

Отметим, что представленные ниже рассуждения очень похожи на рассуждения из метода Гаусса, однако они проводятся более осторожно в связи с тем, что приходится работать одновременно со строками и столбцами матрицы.

Перейдем к доказательству. По условию $a_{k,k-1} \neq 0$ для всякого $k \in M'$. Зафиксируем $k \in M' \setminus \{n\}$ (если множество $M' \setminus \{n\}$ пусто, то условию 2а) не удовлетворяет ни одна пара индексов и поэтому его можно считать выполненным), положим $\alpha_i^{(k)} = a_{i,k-1}/a_{k,k-1}$, $i = k+1, \dots, n$, и сделаем над матрицей $A' = A - E$ следующие преобразования: k -ю строку A' будем последовательно умножать на $-\alpha_{k+1}^{(k)}, \dots, -\alpha_n^{(k)}$ и прибавлять соответственно к $k+1, \dots, n$ -й строкам A' ; затем к k -му столбцу полученной матрицы прибавим столбцы с номерами $k+1, \dots, n$, умноженные соответственно на $\alpha_{k+1}^{(k)}, \dots, \alpha_n^{(k)}$. Указанные преобразования над матрицей A' равносильны умножению A' справа на матрицу $T_k = t_{k+1,k}(\alpha_{k+1}^{(k)}) \dots t_{n,k}(\alpha_n^{(k)})$, а слева — на T_k^{-1} , причем

$$T_k^{-1}AT_k = T_k^{-1}(E + A')T_k = E + T_k^{-1}A'T_k.$$

Заметим, что матрицы A' и $T_k^{-1}A'T_k$ могут отличаться только элементами, стоящими на пересечении строк с номерами $k+1, \dots, n$ и столбцов с номерами $1, \dots, k$. Причем если $a_{kj} = 0$ и $j < k-1$, то j -е столбцы матриц A' и $T_k^{-1}A'T_k$ совпадают.

Обозначим через k_1, \dots, k_s все элементы множества $M' \setminus \{n\}$, упорядоченные в порядке возрастания. Будем сопрягать матрицу A сначала матрицей T_{k_1} , затем матрицей T_{k_2} , элементы $\alpha_j^{(k_2)}$ которой вычисляются по матрице $A_1 = T_{k_1}^{-1}AT_{k_1}$, и так далее. После сопряжения матрицей T_{k_s} получим сопряженную с A матрицу, обозначим ее через $C = \|c_{ij}\|$, у которой все элементы, стоящие в столбцах ниже элементов $a_{k,k-1}$, где $k \in M'$, равны нулю. Таким образом, матрица, сопряженная с A и удовлетворяющая условиям 1) и 2а), существует.

Покажем, что условия 2б) также можно удовлетворить. Обозначим через R множество таких натуральных чисел j , что $j \in M'$ или $j+1 \in M'$, а через L обозначим совокупность максимальных элементов множеств M'_1, \dots, M'_{m-1} . Зафиксируем $k \in M' \setminus \{2\}$ (если $M' \setminus \{2\} = \emptyset$, то условию 2б) не удовлетворяет ни одна пара индексов и поэтому его можно считать выполненным), для каждого $j \in R_k = \{1, \dots, k-2\} \setminus L$ положим $\beta_j^{(k)} = -c_{kj}/c_{k,k-1}$ и определим матрицу S_k как произведение трансвекций $t_{k-1,j}(\beta_j)$ для всех таких j . Матрица $C'S_k$, где $C' = C - E$, получается из C' прибавлением $k-1$ -го столбца C' , умноженного на β_j , к j -му столбцу C' для всех $j \in R_k$. Следует заметить, что кроме $c_{k,k-1}$ все элементы $k-1$ -го столбца матрицы C' равны нулю, поэтому строки матриц C' и $C'S_k$, отличные от k -й, совпадают. Далее, матрица $S_k^{-1}C'S_k$ получается из матрицы $C'S_k$ прибавлением к ее k -й строке всех строк с

номера $j \in R_k$, умноженных $-\beta_j$. Здесь также следует отметить, что элементы k -й строки матрицы $S_k^{-1}C'S_k$, стоящие в столбцах с номерами $j \in R_k$, останутся равными нулю, поскольку элементы матрицы $C'S_k$, стоящие в i -й строке и j -м столбце, где $i, j \in R_k$, равны нулю. Из приведенных замечаний следует, что все элементы матрицы $S_k^{-1}C'S_k$, стоящие в k -й строке левее $a_{k,k-1}$ и в столбцах, номера которых не лежат в L , будут равны нулю.

Заставим k пробегать элементы множества $M' \setminus \{2\}$ в порядке убывания от максимального до минимального элементов и будем сопрягать сначала C , а затем каждую вновь полученную матрицу, матрицей S_k , элементы β_j которой вычисляются по предыдущей матрице. В результате получим сопряженную с A матрицу, элементы которой будут удовлетворять условиям 1) и 2) теоремы. Теорема доказана.

Действуя в обратном порядке, т. е. добиваясь равенства нулю сначала элементов строк, а затем столбцов, можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть K — поле, $A = \|a_{ij}\| \in UT_n(K)$. Предположим, что подмножество $M' \subseteq M = M(A)$ непусто, а M'_1, \dots, M'_m — все его максимальные связанные подмножества. Тогда матрица A сопряжена в $UT_n(K)$ с матрицей $B = \|b_{ij}\|$, удовлетворяющей условиям:

- 1) $b_{i,i-1} = a_{i,i-1}$ для всех $i, 2 \leq i \leq n$;
- 2) $b_{ij} = 0$, если а) $i \in M'$ и $j < i - 1$ либо б) $j + 1 \in M'$, $i > j + 1$ и $i + 1$ отлично от минимальных элементов множеств M'_2, \dots, M'_m .

Пример 2. Так, по теореме 2 матрица из примера 1 сопряжена в $UT_9(K)$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_{61} & 0 & b_{63} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_{71} & b_{72} & b_{73} & b_{74} & b_{75} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{98} & 1 \end{pmatrix}$$

при подходящих b_{ij} .

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 останутся верными, если первая, вторая и так далее s -я диагонали матрицы A (состоит из элементов, у которых разность между первым и вторым индексом равна s) состоят из нулей, а множество M определяется по $s + 1$ -й диагонали A .

2. Основная теорема и ее следствия

Как отмечалось во введении, строгая вещественность произвольной матрицы A из группы $UT_n(K)$, $\text{char } K = 2$, следует из сопряженности A с матрицей, граф коммутативности которой является лесом. Как показывают следующая лемма 1 и теорема из [4, с. 708], это условие является достаточным и для сопряженности A с любой своей нечетной степенью.

Лемма 1. При любом выборе ориентаций ребер произвольного леса Γ полученный ориентированный граф обладает L -функцией.

Доказательство. Лемму, очевидно, достаточно доказать для случая, когда граф Γ является деревом.

Зафиксируем какую-либо ориентацию ребер графа Γ и обозначим полученный ориентированный граф через $\vec{\Gamma}$. Будем строить изоморфный $\vec{\Gamma}$ граф и L -функцию на нем следующим

образом. На первом шаге выберем произвольным образом начальную вершину, обозначим ее v_1 и припишем ей число t_1 . Далее на каждом следующем шаге будем добавлять к полученному на предыдущем шаге графу по одной вершине и одному ребру таким образом, чтобы вновь образованный граф всегда оставался связным и был изоморфен подграфу из $\vec{\Gamma}$, порожденному выбранными вершинами. При этом добавленной на k -м шаге вершине v_k мы приписываем число $t_k = t_i + 1$, если она является концом добавленного на этом шаге ребра, а добавленная ранее (не обязательно на предыдущем шаге) вершина v_i — его началом, в противном случае полагаем $t_k = t_i - 1$. Очевидно, что по завершении построения изоморфного $\vec{\Gamma}$ графа мы построим и требуемую L -функцию. Лемма доказана.

Теорема 3. *Каждый класс сопряженных элементов группы $UT_n(K)$, $n \leq 8$, K — произвольное поле, содержит матрицу, граф коммутативности которой является лесом.*

Доказательство. Для всякого $n \geq 2$ имеет место изоморфизм $UT_n(K)/H \simeq UT_{n-1}(K)$, где $H = \langle t_{n,i}(x) \mid x \in K, 1 \leq i \leq n-1 \rangle$. Поэтому теорему достаточно доказать для $n = 8$.

Пусть $A = \|a_{ij}\|$ — произвольная неединичная матрица из $UT_8(K)$. Покажем, что матрица A сопряжена в $UT_8(K)$ с матрицей, граф коммутативности которой является лесом. Доказательство разобьем на несколько случаев, в зависимости от равенства или неравенства нулю элементов a_{43}, a_{54}, a_{65} матрицы A .

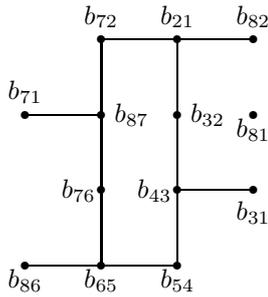


Рис. 1. Граф G_1 .

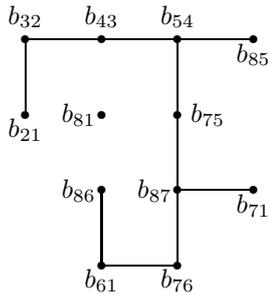


Рис. 2. Граф G_2 .

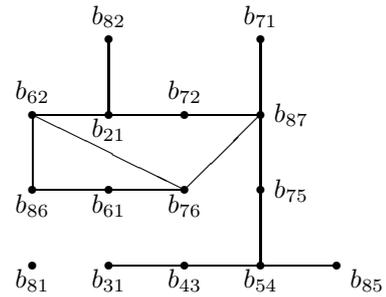


Рис. 3. Граф G_3 .

С л у ч а й 1. Пусть $a_{43} \neq 0, a_{54} \neq 0, a_{65} \neq 0$. По теореме 1 (с $M' = \{4, 5, 6\}$) матрица A сопряжена в $UT_8(K)$ с матрицей B , элементы b_{ij} которой равны нулю, если $4 \leq i \leq 6, 1 \leq j < i-1$ или $3 \leq j \leq 5, j < i \leq 8$. Граф $\Gamma(B)$ является подграфом изображенного на рис. 1 графа G_1 (обозначаем $\Gamma(B) \subseteq G_1$). Если $\Gamma(B)$ имеет цикл, то элементы $b_{21}, b_{32}, \dots, b_{87}$ отличны от нуля, а в этом случае по теореме 1 B сопряжена с матрицей $E + b_{21}e_{21} + b_{32}e_{32} + \dots + b_{87}e_{87}$, граф коммутативности которой является цепью.

С л у ч а й 2. Пусть $a_{43} \neq 0, a_{54} \neq 0, a_{65} = 0$. Если $a_{32} \neq 0$, то по теореме 1 ($M' = \{3, 4, 5\}$) матрица A сопряжена с матрицей B , граф $\Gamma(B)$ которой содержится в графе G_2 (рис. 2) и поэтому не имеет циклов. Когда $a_{32} = 0$, матрица A сопряжена по теореме 1 ($M' = \{4, 5\}$) с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_3$ (рис. 3). Если $\Gamma(B)$ содержит хотя бы один цикл, то $b_{76} \neq 0$ и, применив к B теорему 1 ($M' = \{4, 5, 7\}$), получим матрицу D с $\Gamma(D) \subseteq G'_3$, где граф G'_3 получается из G_3 после удаления вершин b_{86}, b_{72}, b_{71} и инцидентных им ребер (обозначаем $G'_3 = G_3 - \langle b_{86}, b_{72}, b_{71} \rangle$). Граф G'_3 циклов не имеет.

З а м е ч а н и е 2. Для произвольной матрицы A обозначим через tA матрицу, полученную из A симметрией ее элементов относительно побочной диагонали. Нетрудно видеть, что для любых матриц A, B имеет место равенство ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$ и если $A \in UT_n(K)$, то графы $\Gamma(A)$ и $\Gamma({}^tA)$ изоморфны. Отсюда, в частности, следует, что если матрица $A \in UT_n(K)$ сопряжена в $UT_n(K)$ с матрицей B , граф коммутативности которой является лесом, то это же справедливо и для матрицы tA . Таким образом, при возникновении симметричных относительно побочной диагонали случаев достаточно рассматривать только один из них.

С л у ч а й 3. Пусть $a_{43} \neq 0, a_{54} = 0, a_{65} \neq 0$. Предположим, что $a_{32} \neq 0$. По теореме 1 ($M' = \{3, 4, 6\}$) матрица A сопряжена с матрицей B , граф $\Gamma(B)$ которой содержится в G_4 (рис. 4), и если $b_{64} = 0$ или $b_{76} = 0$, то $\Gamma(B)$ — лес. Когда $b_{64} \neq 0$ и $b_{76} \neq 0$, положим

$$U = t_{76} \left(\frac{b_{74}}{b_{64}} \right) t_{87} \left(\frac{b_{86}}{b_{76}} + \frac{b_{74}b_{87}}{b_{64}b_{76}} \right) t_{65} \left(\frac{b_{74}b_{65}}{b_{64}b_{76}} \right) t_{51} \left(\frac{b_{74}b_{51}}{b_{64}b_{76}} \right)$$

и рассмотрим матрицу $B' = U^{-1}BU$. Имеем $\Gamma(B') \subseteq G'_4$, где G'_4 получается из G_4 в результате удаления вершин b_{86}, b_{74} и инцидентных им ребер и добавления вершины b_{85} и ребра (b_{51}, b_{85}) (пишем $G'_4 = (G_4 - \langle b_{86}, b_{74} \rangle) + \langle b_{85} \rangle$), поскольку b_{51} — единственная вершина из $G_4 - \langle b_{86}, b_{74} \rangle$, не коммутирующая с b_{85} . $\Gamma(B')$ не имеет циклов.

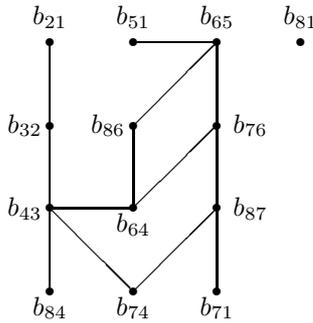


Рис. 4. Граф G_4 .

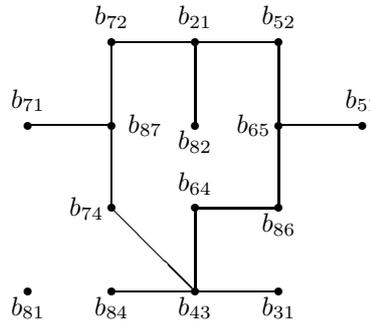


Рис. 5. Граф G_5 .

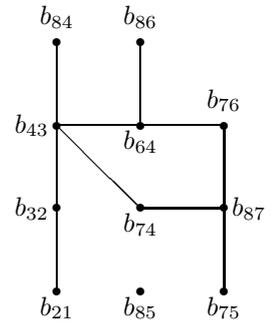


Рис. 6. Граф G_a .

Пусть $a_{32} = 0$. Когда $b_{76} \neq 0$, возвращаемся к рассмотренному выше симметричному случаю: $a_{54} = 0$ и $a_{32} \neq 0, a_{43} \neq 0, a_{65} \neq 0$. Иначе, матрица A по теореме 1 ($M' = \{4, 6\}$) сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_5$ (рис. 5). Если $\Gamma(B)$ содержит цикл, то $b_{52} \neq 0$ и, сопрягая B матрицей $U = t_{75}(b_{72}/b_{52})t_{86}(b_{87}b_{72}/b_{52}b_{65})$, получим $\Gamma(B^U) \subseteq G_5 - \langle b_{72} \rangle$, т. е. $\Gamma(B^U)$ — лес.

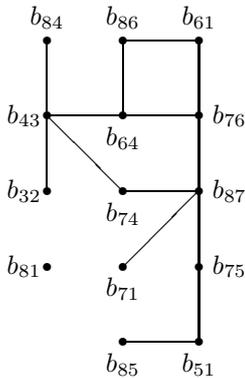


Рис. 7. Граф G_b .

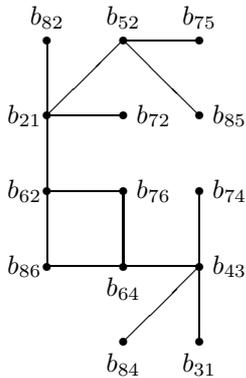


Рис. 8. Граф G_c^1 .

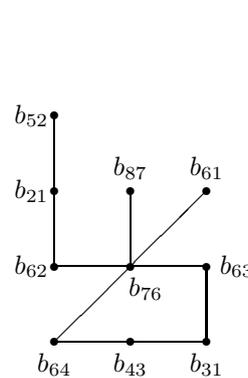


Рис. 9. Граф G_c^2 .

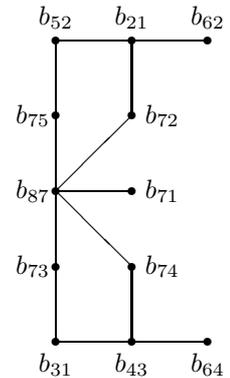


Рис. 10. Граф G_c^3 .

С л у ч а й 4. Пусть $a_{43} \neq 0, a_{54} = a_{65} = 0$. Чтобы не анализировать граф с большим количеством ребер, рассмотрим четыре подслучая: а) $a_{21} \neq 0, a_{32} \neq 0$; б) $a_{21} = 0, a_{32} \neq 0$; в) $a_{21} \neq 0, a_{32} = 0$; д) $a_{21} = a_{32} = 0$.

а), б) По теореме 1 матрица A сопряжена: в случае а) ($M' = \{2, 3, 4\}$) — с матрицей B_a , в случае б) ($M' = \{3, 4\}$) — с матрицей B_b , где $\Gamma(B_a) \subseteq G_a$ и $\Gamma(B_b) \subseteq G_b$ (см. рис. 6 и 7 соответственно). Если $\Gamma(B_a)$ содержит цикл, то $b_{64} \neq 0$ и $\Gamma(B_a^U)$, где $U = t_{76}(b_{74}/b_{64})$, содержится в графе без циклов $G_a - \langle b_{74} \rangle$. Так же $b_{64} \neq 0$, когда $\Gamma(B_b)$ содержит цикл, и $\Gamma(B_b^V)$, где $V = U \cdot t_{41}(-b_{61}/b_{64})$, содержится в графе без циклов $G_b - \langle b_{74}, b_{61} \rangle$.

в) Если $a_{87} = 0$, то по теореме 2 ($M' = \{2, 4\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_c^1$ (рис. 8). Граф $\Gamma(B)$ является лесом или $b_{76} \neq 0$. При $b_{76} \neq 0$ имеем включение $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{87}(b_{86}/b_{76})$, в граф без циклов $G_c^1 - \langle b_{86} \rangle$.

Пусть далее $a_{87} \neq 0$. Если $a_{76} \neq 0$, то по теореме 2 ($M' = \{2, 4, 7, 8\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_c^2$ (рис. 9). Когда $b_{64} \neq 0$, граф $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{43}(-b_{63}/b_{64})$, содержится в графе без циклов $(G_c^2 - \langle b_{63} \rangle) + \langle b_{41} \rangle$, иначе, лесом является граф $\Gamma(B)$. Если, напротив, $a_{76} = 0$, то по теореме 2 ($M' = \{2, 4, 8\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_c^3$ (рис. 10). Положив $U = t_{74}(b_{73}/b_{43})$, будем иметь $\Gamma(B^U) \subseteq \bar{G}_c^3 = (G_c^3 - \langle b_{73} \rangle) + \langle b_{84} \rangle$. Если $\Gamma(B^U)$ имеет цикл, то $b_{52} \neq 0$ и, положив $V = t_{75}(b_{72}/b_{52})$, получим включение $\Gamma(B^{UV})$ в граф без циклов $(\bar{G}_c^3 - \langle b_{72} \rangle) + \langle b_{85} \rangle$.

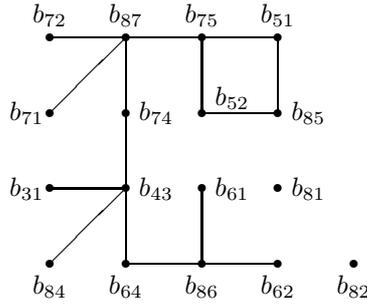


Рис. 11. Граф G_d^1 .

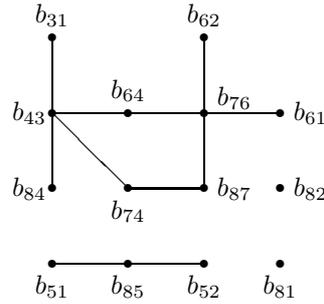


Рис. 12. Граф G_d^2 .

d) Пусть $a_{76} = 0$. По теореме 1 ($M' = \{4\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_d^1$ (рис. 11). Если $\Gamma(B)$ содержит цикл, то $b_{75} \neq 0$ и, положив $U = t_{87}(b_{85}/b_{75})$, получим включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $G_d^1 - \langle b_{85} \rangle$. Предположим, что $a_{76} \neq 0$. Тогда по теореме 1 ($M' = \{4, 7\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_d^2$ (рис. 12). Если $\Gamma(B)$ не является лесом, то $b_{74} \neq 0$. Полагая в этом случае $U = t_{76}(b_{74}/b_{64})t_{87}(b_{87}b_{64}/b_{64}b_{76})$, получим включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $(G_d^2 - \langle b_{74} \rangle) + \langle b_{72}, b_{71} \rangle$.

С л у ч а й 5. Пусть $a_{54} \neq 0, a_{43} = a_{65} = 0$. Как и выше, рассмотрим четыре подслучая: а) $a_{21} \neq 0, a_{32} \neq 0$; б) $a_{21} \neq 0, a_{32} = 0$; в) $a_{21} = 0, a_{32} \neq 0$; г) $a_{21} = a_{32} = 0$.

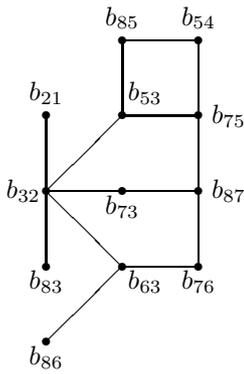


Рис. 13. Граф G_a .

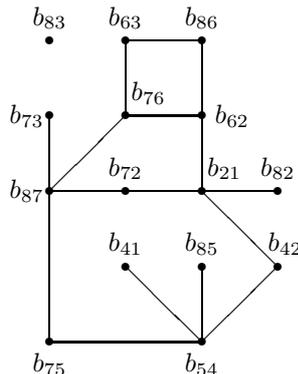


Рис. 14. Граф G_b .

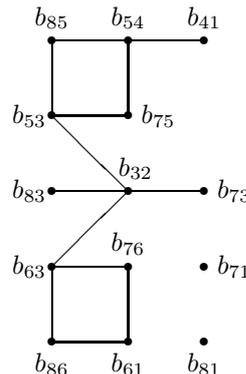


Рис. 15. Граф G_c .

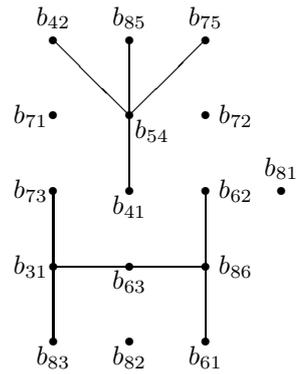


Рис. 16. Граф G_d .

а) По теореме 1 ($M' = \{1, 5\}$) матрица A сопряжена с матрицей B , и $\Gamma(B) \subseteq G_a$ (рис. 13). Если $b_{53} = 0$ и $\Gamma(B)$ имеет цикл, то этот цикл единственный и $b_{63} \neq 0$. Граф $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{76}(b_{73}/b_{63})$, содержится в графе $G_a - \langle b_{53}, b_{73} \rangle$, который является лесом. Пусть $b_{53} \neq 0$. Сопрягая B матрицей $U = t_{65}(b_{63}/b_{53})t_{75}(b_{73}/b_{53})$, получим матрицу D , граф $\Gamma(D)$ которой содержится в $G'_a = (G_a - \langle b_{63}, b_{73} \rangle) + \langle b_{64}, b_{74} \rangle$. Если $\Gamma(D)$ обладает циклом, то он единственный и $d_{75} \neq 0$. Граф $\Gamma(D^V)$, где $V = t_{87}(d_{85}/d_{75})$, циклов не содержит.

б) По теореме 2 ($M' = \{2, 5\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_b$ (рис. 14). Если $b_{87} = 0$, то граф $\Gamma(B)$ может содержать один простой цикл, проходящий через b_{86} и b_{76} . В этом случае граф $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{87}(b_{86}/b_{76})$, содержится в графе без циклов $G_b -$

$\langle b_{87}, b_{86} \rangle$. Когда $b_{87} \neq 0$, можем дополнительно считать, что $b_{76} = 0$, иначе ${}^t B$ удовлетворяет а). Остается заметить, что $\Gamma(B)$ — лес, если $b_{75} = 0$, в противном случае $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{52}(-b_{72}/b_{75})t_{87}(b_{85}/b_{75})$, содержится в графе без циклов $(G_b - \langle b_{76}, b_{72}, b_{85} \rangle) + \langle b_{51}, b_{82} \rangle$.

с) С самого начала можем предполагать, что $a_{87} = 0$, так как иначе матрица ${}^t A$ удовлетворяет условию а) или б). С учетом этого предположения матрица A сопряжена по теореме 1 ($M' = \{3, 5\}$) с матрицей B , граф $\Gamma(B)$ которой содержится в графе G_c (рис. 15). Сопрягая матрицу B матрицами: $U = t_{87}(b_{85}/b_{75})$, если $b_{75} \neq 0$, $b_{63} = 0$, далее, $V = t_{31}(-b_{61}/b_{63})$, когда $b_{75} = 0$, $b_{63} \neq 0$, наконец, произведением UV , если $b_{75} \neq 0$ и $b_{63} \neq 0$, — будем иметь $\Gamma(B^U) \subseteq G_c - \langle b_{85}, b_{63} \rangle$, $\Gamma(B^V) \subseteq (G_c - \langle b_{61}, b_{75} \rangle) + \langle b_{51} \rangle$, $\Gamma(B^{UV}) \subseteq (G_c - \langle b_{85}, b_{61} \rangle) + \langle b_{51} \rangle$. Сейчас остается заметить, что графы из правых частей включений циклов не содержат.

д) Когда $a_{76} \neq 0$ или $a_{87} \neq 0$, матрица ${}^t A$ удовлетворяет одному из рассмотренных выше условий а)–с), поэтому будем предполагать, что $a_{76} = a_{87} = 0$. В этом случае матрица A по теореме 1 ($M = \{5\}$) сопряжена с матрицей, граф коммутативности которой содержится в графе без циклов G_d (рис. 16).

С л у ч а й 6. Пусть $a_{43} = a_{54} = a_{65} = 0$. Также рассмотрим четыре подслучая: а) $a_{21} \neq 0$, $a_{32} \neq 0$; б) $a_{21} \neq 0$, $a_{32} = 0$; в) $a_{21} = 0$, $a_{32} \neq 0$; г) $a_{21} = a_{32} = 0$.

а) По теореме 1 ($M' = \{2, 3\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_a$ (рис. 17). Если $b_{53} \neq 0$, то, положив $U = t_{65}(b_{63}/b_{53})t_{75}(b_{73}/b_{53})$, получим включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $G_a - \langle b_{63}, b_{73} \rangle$. Пусть $b_{53} = 0$. Тогда $b_{63} \neq 0$ и $b_{76} \neq 0$, если $\Gamma(B)$ содержит цикл. Сопрягая в этом случае B матрицей $U = t_{76}(b_{73}/b_{63})t_{87}(b_{86}/b_{76} + b_{87}b_{73}/b_{63}b_{76})$, будем иметь $\Gamma(B^U) \subseteq G_a - \langle b_{53}, b_{73}, b_{86} \rangle$ — лес.

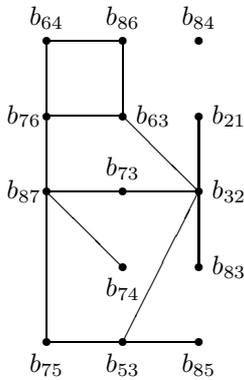


Рис. 17. Граф G_a .

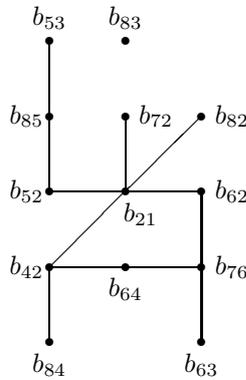


Рис. 18. Граф G_b^1 .

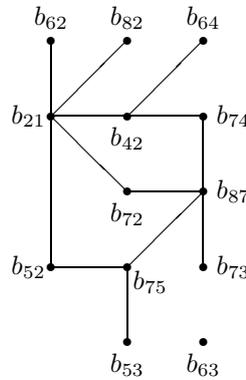


Рис. 19. Граф G_b^2 .

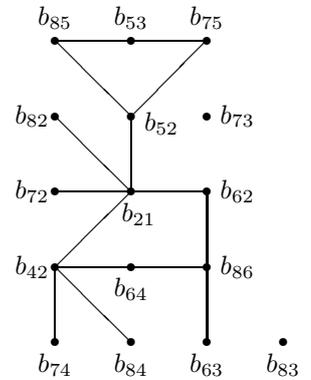


Рис. 20. Граф G_b^3 .

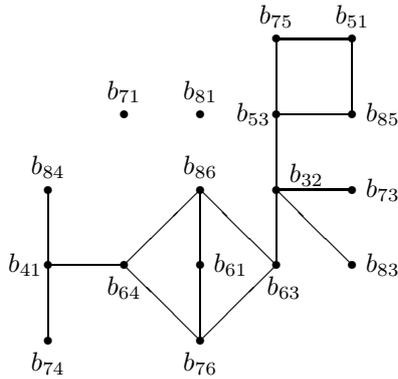
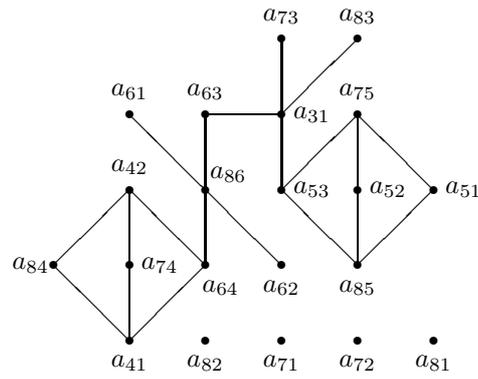
б) Можем считать, что $a_{76} = 0$ или $a_{87} = 0$. Применяя к матрице A теорему 1, получим матрицу B , граф $\Gamma(B)$ которой содержится в графе G_b^1 (рис. 18), если $a_{76} \neq 0$ и $a_{87} = 0$, в графе G_b^2 (рис. 19), если $a_{76} = 0$ и $a_{87} \neq 0$, наконец, в графе G_b^3 (рис. 20), когда $a_{76} = a_{87} = 0$.

Пусть $\Gamma(B) \subseteq G_b^1$. Тогда $\Gamma(B)$ является лесом или $b_{42} \neq 0$. Однако, если $b_{42} \neq 0$, лесом является граф $\Gamma(B^U)$, где $U = t_{64}(b_{62}/b_{42})$, поскольку он содержится в графе без циклов $(G_b^1 - \langle b_{62} \rangle) + \langle b_{74} \rangle$.

Предположим, что $\Gamma(B) \subseteq G_b^2$. Граф $\Gamma(B)$ является лесом, когда $b_{42} = b_{75} = 0$. Если $b_{42} \neq 0$, то, положив $U = t_{54}(b_{52}/b_{42})t_{74}(b_{72}/b_{42})$, получим включение $\Gamma(B^U) \subseteq (G_b^2 - \langle b_{52}, b_{72} \rangle) + \langle b_{84} \rangle$ — лес. Когда $b_{42} = 0$ и $b_{75} \neq 0$, включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $(G_b^2 - \langle b_{42}, b_{72}, b_{74} \rangle) + \langle b_{41}, b_{51} \rangle$ получим при $U = t_{54}(-b_{74}/b_{75})t_{52}(-b_{72}/b_{75})$.

Пусть, наконец, $\Gamma(B) \subseteq G_b^3$. Граф $\Gamma(B)$ является лесом, когда $b_{42} = b_{75} = 0$. Если $b_{42} \neq 0$, то, положив $U = t_{54}(b_{52}/b_{42})t_{64}(b_{62}/b_{42})$ получим включение $\Gamma(B^U) \subseteq (G - \langle b_{52}, b_{62} \rangle)$ — лес. Когда $b_{42} = 0$ и $b_{75} \neq 0$, включение $\Gamma(B^U)$ в граф без циклов $(G - \langle b_{42}, b_{85} \rangle)$ получим при $U = t_{87}(b_{85}/b_{75})$.

с) Можем считать, что $a_{87} = 0$. Тогда по теореме 1 ($M' = \{3\}$) матрица A сопряжена с матрицей B и $\Gamma(B) \subseteq G_c$ (рис. 21). Граф $\Gamma(B)$ является лесом, если $b_{53} = b_{76} = 0$. В противном случае, положив $U = t_{31}(-b_{51}/b_{53})$ и $V = t_{87}(b_{86}/b_{76})$, будем иметь: $\Gamma(B^U) \subseteq G_c - \langle b_{76}, b_{51} \rangle$ — лес, если $b_{76} = 0$ и $b_{53} \neq 0$, далее, $\Gamma(B^V) \subseteq G_c - \langle b_{53}, b_{86} \rangle$ — лес, когда $b_{76} \neq 0$ и $b_{53} = 0$, наконец, $\Gamma(B^{UV}) \subseteq G_c - \langle b_{86}, b_{51} \rangle$ — лес, если $b_{76} \neq 0$ и $b_{53} \neq 0$.

Рис. 21. Граф G_c .Рис. 22. Граф G_d .

д) Можем считать, что $a_{76} = a_{87} = 0$. Тогда $\Gamma(A) \subseteq G_d$ (рис. 22). Граф $\Gamma(A)$ является лесом, когда $a_{42} = a_{75} = 0$. Иначе, положив $U = t_{87}(a_{85}/a_{75})$ и $V = t_{21}(-a_{41}/a_{42})$, будем иметь: $\Gamma(A^U) \subseteq G_d - \langle a_{42}, a_{85} \rangle$ — лес, если $a_{42} = 0$ и $a_{75} \neq 0$, далее, $\Gamma(A^V) \subseteq G_d - \langle a_{41}, a_{75} \rangle$ — лес, когда $a_{42} \neq 0$ и $a_{75} = 0$, наконец, $\Gamma(A^{UV}) \subseteq G_d - \langle a_{41}, a_{85} \rangle$ — лес, если $a_{42} \neq 0$ и $a_{75} \neq 0$. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть K — поле характеристики 2. Группа $UT_n(K)$ является строго вещественной и рациональной, если $n \leq 8$.

Доказательство. Рациональность и строгая вещественность группы $UT_8(K)$ следуют из теоремы 3 и леммы 1. Далее, при переходе к факторгруппе оба свойства сохраняются, поэтому утверждение о рациональности и строгой вещественности группы $UT_n(K)$ для размерностей $n \leq 7$ вытекает из указанного выше изоморфизма $UT_n(K)/H \simeq UT_{n-1}(K)$. Теорема доказана.

3. Критерий рациональности 2-группы

Во введении группа G была названа рациональной, если она периодическая и всякий ее элемент g сопряжен с любой своей степенью g^m такой, что $\text{nod}(|g|, m) = 1$. Как показывает следующая теорема, это условие может быть существенно ослаблено, если G является 2-группой.

Теорема 5. 2-группа G является рациональной тогда и только тогда, когда для любого элемента $x \in G$ найдутся такие элементы $y, z \in G$, что $x^y = x^3$ и $x^z = x^{-1}$.

Доказательство. Нам потребуется следующий теоретико-числовой результат.

Лемма 2. Пусть натуральное число m представлено в виде $m = 2^s l$, $s \geq 1$ и l — нечетное число. Тогда $3^m - 1 = 2^{s+2} t$, где t — нечетное число. При $s = 0$ разность $3^m - 1$ делится на 2, но не делится на 4.

Доказательство. Имеем

$$3^m - 1 = (3 - 1)(3^{m-1} + 3^{m-2} + \dots + 3^0).$$

При нечетном m вторая скобка является суммой нечетного числа нечетных слагаемых, поэтому число $3^m - 1$ кратно двум, но не кратно четырем.

Далее, остатки от деления чисел 3 и 9 на 8 равны соответственно 3 и 1. Так как при перемножении чисел их остатки перемножаются, то число 3^m при делении на 8 при нечетном m дает остаток 3, а при четном m — остаток 1. Значит, число $3^m + 1$ кратно 2, но не кратно 4 при четном m , и кратно 4, но не кратно 8 при m нечетном. Для завершения доказательства леммы остается воспользоваться разложением

$$(3^{2^s l} - 1) = (3^{2^{s-1} l} - 1)(3^{2^{s-1} l} + 1) = \dots = (3^l - 1)(3^l + 1)(3^{2l} + 1) \dots (3^{2^{s-1} l} + 1).$$

Лемма доказана.

Вернемся к доказательству теоремы. Необходимость сформулированных условий очевидна. Докажем их достаточность. Пусть $x \in G$, $|x| = 2^n$, и существуют элементы $y, z \in G$ такие, что $x^y = x^3$ и $x^z = x^{-1}$. Достаточно показать, что x сопряжен с любой своей нечетной степенью. Это очевидно, когда $n \leq 2$, поэтому далее считаем, что $n \geq 3$. Положим

$$M = \{x^{y^i} = x^{3^i} \mid 0 \leq i < 2^{n-2}\}, \quad N = \{x^{y^i z} = x^{-3^i} \mid 0 \leq i < 2^{n-2}\}.$$

Ввиду леммы 2 все элементы множества M различны. Множество N состоит из элементов, обратных к элементам из M , поэтому в нем тоже нет одинаковых элементов. Предположив, что M и N имеют общий элемент, например $x^{3^k} = x^{-3^k}$, получим, что число

$$3^k + 3^m = 3^{\min\{k,m\}}(1 + 3^{\max\{k,m\} - \min\{k,m\}})$$

должно делиться на 2^n . Однако из доказательства леммы 2 следует, что числа вида $1 + 3^t$ делятся на 2 или 4, но никогда не делятся на 8, противоречие. Значит, $M \cap N = \emptyset$. Так как

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N| = 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2^{n-1} = \varphi(2^n),$$

где φ — функция Эйлера, то x сопряжен с любой своей нечетной степенью. Теорема доказана.

4. Пример Айзекса — Карагёзьяна

В работе [4] отмечается, что доказательство несопряженности представленных ниже матриц A и A^{-1}

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

из группы верхних унитарных матриц $UT_{13}(2)$ проводилось с использованием специально написанных двумя различными коллективами в системе Магма программ для решения систем линейных уравнений над полем $GF(2)$. Представленное ниже доказательство несопряженности матриц A и A^{-1} не использует машинных вычислений и достаточно кратко. В нем

мы определенным образом нумеруем элементы предполагаемой сопрягающей матрицы и решаем полученную систему линейных уравнений, разбивая ее естественным образом на блоки. Пусть

$$I = E + x_1 e_{12} + x_2 e_{23} + \dots + x_{12} e_{12,13} + y_1 e_{13} + \dots + y_{11} e_{11,13} + z_1 e_{14} + \dots + z_{10} e_{10,13} \\ + u_1 e_{15} + \dots + u_9 e_{9,13} + v_1 e_{16} + \dots + v_8 e_{8,13} + a_1 e_{17} + \dots + a_7 e_{7,13} + \dots,$$

и предположим, что матрица I инвертирует A , т. е. имеет место равенство $AI = IA^{-1}$. Сравним элементы матриц AI и IA^{-1} , стоящие на второй диагонали (разность между вторым и первым индексом элемента равна 2), получим систему уравнений только на x_1, \dots, x_{12} :

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_3 = x_5 + x_6 = x_6 + x_7 = x_7 + x_8 = x_{10} + x_{11} = x_{11} + x_{12} = 1, \quad x_4 = x_9 = 0,$$

общее решение которой следующее: $(x_1, 1 + x_1, x_1, 0, x_5, 1 + x_5, x_5, 1 + x_5, 0, x_{10}, 1 + x_{10}, x_{10})$. Подставив полученные выражения для x_i в матрицу I и сравнив элементы матриц AI и IA^{-1} , стоящие на третьей диагонали, получим систему на $x_1, x_5, x_{10}, y_1, \dots, y_{11}$ вида $y_3 = y_4 = 0$,

$$y_1 + y_2 + x_1 = y_5 + y_6 + x_5 = x_5 + y_8 = x_5 + y_8 + y_9 + x_{10} = 1, \quad y_6 + y_7 + x_5 = y_9 + x_{10} = y_{10} + y_{11} = 0$$

с общим решением $(x_1, x_5, x_{10}, y_1, 1 + x_1 + y_1, 0, 0, y_5, 1 + x_5 + y_5, 1 + y_5, 1 + x_5, x_{10}, y_{10}, y_{10})$. Проводя аналогичные рассуждения с элементами четвертой, пятой и шестой диагоналей, будем получать следующие системы (сверху) и их решения (снизу):

$$\left\{ \begin{array}{l} z_2 = 0, \\ x_1 + z_2 + z_3 = 0, \\ z_3 + z_4 + x_5 = 0, \\ z_4 = 0, \\ z_5 + z_6 + y_5 + x_5 = 1, \\ y_5 + z_7 = 1, \\ y_5 + z_7 + z_8 = 1, \\ x_5 + z_8 + z_9 + y_{10} = 0, \\ z_9 + y_{10} + x_{10} = 1; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + y_1 + u_1 + u_2 = 1, \\ x_1 + u_2 + u_3 = 0, \\ y_5 + u_3 + u_4 = 0, \\ u_4 = 0, \\ x_1 + y_5 + z_5 + u_6 = 1, \\ x_1 + y_5 + z_5 + u_6 + u_7 = 1, \\ x_1 + y_5 + u_7 + u_8 = 0, \\ x_1 + z_{10} + u_8 + u_9 = 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x_1 + y_5 + v_1 + v_2 = 0, \\ y_5 + v_2 + v_3 = 0, \\ x_1 + z_5 + v_4 + v_5 = 1, \\ u_5 + v_5 + v_6 = 0, \\ x_1 + z_5 + v_6 + v_7 = 0, \\ x_1 + y_5 + v_7 + v_8 = 0; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_5 = x_1, \\ z_3 = x_1, \\ z_6 = 1 + x_1 + y_5 + z_5, \\ z_7 = 1 + y_5, \\ z_8 = z_4 = z_2 = 0, \\ z_9 = x_1 + y_{10}, \\ x_{10} = 1 + x_1; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} u_1 = 1 + y_1 + y_5, \\ u_2 = x_1 + y_5, \\ u_3 = y_5, \\ u_6 = 1 + x_1 + y_5 + z_5, \\ u_7 = u_4 = 0, \\ u_8 = x_1 + y_5, \\ u_9 = y_5 + z_{10}; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} v_2 = x_1 + y_5 + v_1, \\ v_3 = x_1 + v_1, \\ v_4 = 1 + z_5 + v_1, \\ v_6 = u_5 + v_5, \\ v_7 = x_1 + z_5 + u_5 + v_5, \\ v_8 = y_5 + z_5 + u_5 + v_5. \end{array} \right.$$

Подставив сейчас все найденные выражения для x_i, y_j, z_k, u_l, v_m в матрицу I и сравнив элементы произведений IA и IA^{-1} , стоящие на позициях $(3, 10)$ и $(4, 11)$, получим два уравнения

$$x_1 + v_1 + a_4 + z_5 = 0, \quad x_1 + v_1 + a_4 + z_5 = 1,$$

которые вместе, очевидно, образуют несовместную систему. Значит, матрицы A и A^{-1} не сопряжены.

В заключение сформулируем вопрос, связанный с вопросом Хигмана о представимости числа классов сопряженных элементов группы $UT_n(q)$ многочленом от q при фиксированном n .

В о п р о с. Пусть граф коммутативности матрицы A из группы $UT_n(K)$, $n \geq 2$, K — произвольное поле, является лесом, причем число вершин леса минимально среди всех сопряженных с A матриц. Предположим, что матрица B получена из матрицы A заменой одного или нескольких отличных от нуля недиагональных элементов A на другие (из K), тоже отличные от нуля. Верно ли, что матрицы A и B не сопряжены в $UT_n(K)$?

Авторы статьи выражают благодарность профессору Я. Н. Нужину за интересные обсуждения рассматриваемых вопросов и полезные ссылки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Kirillov A.** Variation on the triangular theme // Lie groups and Lie algebras: E. B. Dynkin's Seminar. Providence: Amer. Math. Soc., 1995. P. 43–73. (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; vol. 169.)
2. **Arregi J.M., Vera-Lopez A.** Conjugacy classes in Sylow p -subgroups of $GL(n, q)$ // J. Algebra. 1992. Vol. 152, no. 1. P. 1–19.
3. **Arregi J.M., Vera-Lopez A.** Some algorithms for the calculation conjugacy classes in the Sylow p -subgroups of $GL(n, q)$ // J. Algebra. 1995. Vol. 177, no. 3. P. 899–925.
4. **Isaacs I.M., Karagueuzian D.** Conjugacy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. 1998. Vol. 202, no. 2. P. 704–711.
5. **Isaacs I.M., Karagueuzian D.** Erratum: “Conjugacy in groups of upper triangular matrices” // J. Algebra. 1998. Vol. 208, no. 2. P. 722.
6. **Kletzing D.** Structure and representations of Q -groups. Berlin: Springer-Verlag, 1984. 290 p. (Lecture Notes in Math.; vol. 1084.)
7. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / Ин-т математики СО РАН. Изд. 18-е, доп. Новосибирск, 2014. 253 с. URL: <http://math.nsc.ru/alglog/alglogf.html>.
8. **Газданова М.А.** О строгой вещественности группы унитарных матриц размерности 6×6 над полем характеристики 2 // Algebra and Model Theory: coll. of papers. Novosibirsk: NSTU Publ., 2005. Vol. 5. P. 44–53.
9. **Газданова М.А., Нужин Я.Н.** О строгой вещественности унитарных подгрупп групп лиева типа над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 5. С. 1031–1051.
10. **Газданова М.А.** О строгой вещественности группы унитарных матриц размерности 7×7 над полем характеристики 2 // Вестн. КрасГУ. Сер. физ.-мат. наук. 2006. № 7. С. 43–53.
11. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972. 331 с.

Дубина Оксана Андреевна
аспирант

Институт математики и фундаментальной информатики СФУ
e-mail: eshk@mail.ru

Поступила 31.12.2014

Колесников Сергей Геннадьевич
д-р физ.-мат. наук, доцент
зав. кафедрой

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева
e-mail: sklsnk@mail.ru

Манагарова Наталья Сергеевна
аспирант

Институт математики и фундаментальной информатики СФУ
e-mail: nsmanagarova@mail.ru

УДК 517.977

**АСИМПТОТИКА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ,
СИНГУЛЯРНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА¹****А. А. Ершов, М.И. Русанова**

Построена асимптотика некоторого класса многомерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра. Рассмотрен случай, когда знаменатель подынтегральной функции стремится к нулю на трех пересекающихся поверхностях.

Ключевые слова: многомерный интеграл, малый параметр, асимптотическое разложение, метод вычитания особенностей.

A. A. Ershov, M. I. Rusanova. Asymptotics of multidimensional integrals with singular dependence on a small parameter.

An asymptotic expansion is constructed for a class of multidimensional integrals that depend singularly on a small parameter. The case where the denominator of the integrand vanishes on three intersecting surfaces is considered.

Keywords: multidimensional integral, small parameter, asymptotic expansion, singularity subtraction method.

Введение

Хорошо известна задача нахождения асимптотики интеграла, зависящего от параметра. В качестве примера подобных интегралов можно привести хорошо изученные интегралы вида $\int_0^1 f(x)e^{\lambda S(x)} dx$, где λ — большой положительный параметр [1]. Асимптотика различных интегралов описана в ряде работ (см., например, [2; 3]). Здесь рассматриваются недостаточно изученные до сих пор интегралы вида $\int \Psi(x, \varepsilon) dx$ от функции, которая регулярно зависит от малого параметра ε всюду, кроме некоторого множества (одной или нескольких точек, многообразий и т. п.). Однако при $\varepsilon = 0$ интеграл расходится и его асимптотика имеет довольно сложный характер.

В работе А. М. Ильина, А. А. Ершова [4] исследовано асимптотическое разложение сингулярных интегралов вида

$$\iint_{\omega} \frac{dx dy}{\varepsilon^2 + U(x, y)}, \quad (0.1)$$

где неотрицательная функция $U(x, y)$ обращается в нуль на n пересекающихся кривых, а ω — некоторая окрестность критической точки $(0, 0)$, в которой эти кривые пересекаются. В монографии [5, гл. 7, § 30] была рассмотрена асимптотика двумерных сингулярных интегралов вида $\int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y) dx dy}{\varepsilon^2 + xy}$. Случаи, когда $U(x, y)$ равна нулю в точке или на одной кривой, более просты для рассмотрения.

В трехмерном случае функция $U(x, y, z)$ может обращаться в нуль на гораздо более сложных пересечениях кривых и поверхностей. В настоящей статье мы построим асимптотическое разложение интегралов вида

$$\iiint_{\omega} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)},$$

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 15-11-10018).

где неотрицательная функция $U(x, y, z)$ обращается в нуль на трех пересекающихся поверхностях, причем в точке пересечения нормали к этим поверхностям неколлинеарны.

Интегралы данного вида, сингулярно зависящие от малого параметра, иногда встречаются в различных областях математики. Например, асимптотика одномерного интеграла, сингулярно зависящего от малого параметра, находилась в [6]. В многомерном случае такие интегралы возникают при выражении через потенциал решений краевых задач для уравнения Лапласа вне тонких областей.

1. Построение асимптотики

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\delta_1-\delta_2-\delta_3}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_{-\delta_3}^{\delta_3} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)}, \tag{1.1}$$

где окрестность $[-\delta_1, \delta_1] \times [-\delta_2, \delta_2] \times [-\delta_3, \delta_3]$ достаточно мала, $U(x, y, z) = (z - h_1(x, y))^2 \times (y - h_2(x, z))^2 (x - h_3(y, z))^2 G^2(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ — гладкая функция, не обращающаяся в ноль, а уравнения $z = h_1(x, y)$, $y = h_2(x, z)$ и $x = h_3(y, z)$ задают достаточно гладкие поверхности, пересекающиеся на трех кривых с общей точкой в начале координат (т. е. $h_1(0, 0) = h_2(0, 0) = h_3(0, 0) = 0$), причем нормали к этим поверхностям в нуле не являются компланарными.

Заметим, что если применить предложенный в [4] метод разбиения области интегрирования на сектора и некоторые выпрямляющие замены, то нашу задачу можно существенно упростить, что мы покажем в следующей теореме.

Теорема 1. *Интеграл (1.1) представим в виде суммы интегралов вида*

$$I(\varepsilon) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2}, \tag{1.2}$$

где $f(x, y, z) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1])$ — некоторая положительная функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем δ_1, δ_2 и δ_3 малыми настолько, чтобы при $-\delta_3 < x < \delta_3$, $-\delta_2 < y < \delta_2$, $-\delta_1 < z < \delta_1$ выполнялись неравенства

$$-\delta_1 < h_1(x, y) < \delta_1, \quad -\delta_2 < h_2(x, z) < \delta_2, \quad -\delta_3 < h_3(y, z) < \delta_3.$$

Тогда

$$\int_{-\delta_1-\delta_2-\delta_3}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_{-\delta_3}^{\delta_3} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)} = S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \int_{-\delta_1-\delta_2}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_{-\delta_3}^{h_3(y,z)} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)}, \quad S_2 = \int_{-\delta_1-\delta_2}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_{h_3(y,z)}^{\delta_3} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)}.$$

Рассмотрим интеграл S_2 (интеграл S_1 исследуется аналогично):

$$S_2 = \left[\begin{array}{l} \xi = h_3(y, z) + (\delta_3 - h_3(y, z))s, \\ d\xi = (\delta_3 - h_3(y, z))ds \end{array} \right] = \int_{-\delta_1-\delta_2}^{\delta_1} \int_{-\delta_2}^{\delta_2} \int_0^1 \frac{f_1(y, z) ds dy dz}{\varepsilon^2 + U_1(s, y, z)},$$

где

$$f_1(y, z) = \delta_3 - h_3(y, z),$$

$$\begin{aligned}
U_1(s, y, z) &= U((\delta_3 - h_3(y, z))s + h_3(y, z), y, z) = s^2(z - \tilde{h}_1(s, y, z))^2(y - \tilde{h}_2(s, y, z))^2 G_1^2(s, y, z), \\
\tilde{h}_1(s, y, z) &= h_1((\delta_3 - h_3(y, z))s + h_3(y, z), y), \\
\tilde{h}_2(s, y, z) &= h_2((\delta_3 - h_3(y, z))s + h_3(y, z), z), \\
G_1(s, y, z) &= (\delta_3 - h_3(y, z))G((\delta_3 - h_3(y, z))s + h_3(y, z), y, z).
\end{aligned}$$

Обозначим через функцию $y = H_2(s, z)$ решение уравнения $y = \tilde{h}_2(s, y, z)$ относительно y и переставим пределы интегрирования. Тогда интеграл S_2 можно представить в виде суммы $S_2 = S_{2,1} + S_{2,2}$, где

$$S_{2,1} = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_0^1 \int_{-\delta_2}^{H_2(s,z)} \frac{f_1(y, z) dy ds dz}{\varepsilon^2 + U_1(s, y, z)}, \quad S_{2,2} = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_0^1 \int_{H_2(s,z)}^{\delta_2} \frac{f_1(y, z) dy ds dz}{\varepsilon^2 + U_1(s, y, z)}.$$

Интегралы $S_{2,1}$ и $S_{2,2}$ могут исследоваться практически одинаково, поэтому достаточно рассмотреть один из них. Преобразуем интеграл $S_{2,2}$ следующим образом:

$$S_{2,2} = \left[\begin{array}{l} y = H_2(s, z) + \eta, \\ dy = d\eta \end{array} \right] = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_0^1 \int_0^{\delta_2 - H_2(s,z)} \frac{f_1(H_2(s, z) + \eta, z) d\eta ds dz}{\varepsilon^2 + s^2 \eta^2 (z - \tilde{h}_1(s, H_2(s, z) + \eta, z))^2 \tilde{G}_1^2(s, \eta, z)},$$

где

$$\tilde{G}_1(s, \eta, z) = G_1(s, H_2(s, z) + \eta, z) \frac{H_2(s, z) + \eta - h_2(s, H_2(s, z) + \eta, z)}{\eta}.$$

После замены $\left[\begin{array}{l} \eta = (\delta_2 - H_2(s, z))t, \\ d\eta = (\delta_2 - H_2(s, z))dt \end{array} \right]$ интеграл $S_{2,2}$ принимает вид

$$S_{2,2} = \int_{-\delta_1}^{\delta_1} \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_2(s, t, z) dt ds dz}{\varepsilon^2 + U_2(s, t, z)},$$

где

$$\begin{aligned}
f_2(s, t, z) &= f_1(t\delta_2 + (1-t)H_2(s, z)), \\
U_2(s, t, z) &= s^2 \eta^2 (z - \tilde{h}_1(s, t\delta_2 + (1-t)H_2(s, z), z))^2 \tilde{G}_1^2(s, (\delta_2 - H_2(s, z))t, z).
\end{aligned}$$

В свою очередь, интеграл $S_{2,2}$ может быть разбит на сумму двух интегралов $S_{2,2,1} + S_{2,2,2}$, где

$$S_{2,2,1} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{-\delta_1}^{H_1(s,t)} \frac{f_2(s, t, z) dz dt ds}{\varepsilon^2 + U_2(s, t, z)}, \quad S_{2,2,2} = \int_0^1 \int_0^1 \int_{H_1(s,t)}^{\delta_1} \frac{f_2(s, t, z) dz dt ds}{\varepsilon^2 + U_2(s, t, z)}.$$

Здесь функция $z = H_1(s, t)$ — решение уравнения $z = \tilde{h}_1(s, t\delta_2 + (1-t)H_2(s, z), z)$.

Каждый из интегралов $S_{2,2,1}$ и $S_{2,2,2}$ аналогичными заменами может быть приведен к интегралу вида

$$S = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_3(s, t, \tau) d\tau dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 \tau^2 G_3^2(s, t, \tau)}.$$

Теперь нужно избавиться от функции $G_3(s, t, \tau)$ в знаменателе. Для этого сделаем ряд замен, аналогичных заменам, проведенным в двумерном случае [4]:

$$S = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_3(s, t, \tau) d\tau dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 \tau^2 G_3^2(s, t, \tau)} = \left[\begin{array}{l} \zeta = \tau G_3(s, t, \tau) = F(s, t, \tau), \\ \tau = F^{-1}(s, t, \zeta) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{G_3(s,t,1)} \frac{f_3(s,t,F^{-1}(s,t,\zeta))d\zeta dt ds}{F'_\tau(s,t,F^{-1}(s,t,\zeta))(\varepsilon^2 + s^2 t^2 \zeta^2)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{G_3(s,t,1)} \frac{f_4(s,t,\zeta)d\zeta dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 \zeta^2} \\
 &= \left[\begin{array}{l} \zeta = G_3(s,t,1)z, \\ d\zeta = G_3(s,t,1)dz \end{array} \right] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_5(s,t,z)dz dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 z^2 G_3^2(s,t,1)},
 \end{aligned}$$

где $F^{-1}(s,t,\zeta)$ обозначает функцию, обратную к функции $F(s,t,\tau)$ относительно третьей переменной.

Аналогично можно получить, что

$$\begin{aligned}
 &\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_5(s,t,z)dz dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 t^2 z^2 G_3^2(s,t,1)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_6(s,y,z)dz dt ds}{\varepsilon^2 + s^2 y^2 z^2 G_3^2(s,1,1)} \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_7(x,y,z)dz dt ds}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2 G_3^2(1,1,1)} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f_8(x,y,z)dz dt ds}{\tilde{\varepsilon}^2 + x^2 y^2 z^2},
 \end{aligned}$$

где $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{G_3(1,1,1)}$. □

Таким образом, достаточно рассмотреть интеграл (1.2). Его асимптотику можно найти методом вычитания особенностей. Для этого представим функцию $f(x,y,z)$ в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned}
 &f(x,y,z) = f(0,0,0) + x f'_x(0,0,0) + y f'_y(0,0,0) + z f'_z(0,0,0) \\
 &+ xy f''_{xy}(0,0,0) + yz f''_{yz}(0,0,0) + xz f''_{xz}(0,0,0) + xyz f'''_{xyz}(0,0,0) \\
 &\quad + x^2 \varphi_1(x,0,0) + y^2 \varphi_2(0,y,0) + z^2 \varphi_3(0,0,z) \\
 &\quad + x^2 y \varphi'_{1y}(x,0,0) + x^2 z \varphi'_{1z}(x,0,0) + \dots \\
 &\quad + x^2 y z \varphi'_{1yz}(x,0,0) + y^2 x z \varphi'_{2xz}(0,y,0) + z^2 x y \varphi'_{3xy}(0,0,z) \\
 &\quad + x^2 y^2 \psi_3(x,y,0) + x^2 z^2 \psi_2(x,0,z) + y^2 z^2 \psi_1(0,y,z) \\
 &+ x^2 y^2 z \psi'_{3z}(x,y,0) + x^2 z^2 y \psi'_{2y}(x,0,z) + y^2 z^2 x \psi'_{1x}(0,y,z) + x^2 y^2 z^2 \varphi(x,y,z), \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(x,y,z) &= \frac{f(x,y,z) - f(0,y,z) - x f_x(0,y,z)}{x^2}, \\
 \varphi_2(x,y,z) &= \frac{f(x,y,z) - f(x,0,z) - y f_y(x,y,z)}{y^2}, \\
 \varphi_3(x,y,z) &= \frac{f(x,y,z) - f(x,y,0) - z f_z(x,y,z)}{z^2}, \\
 \psi_1(x,y,z) &= \frac{1}{y^2 z^2} \left(f(x,y,z) - f(x,y,0) - f(x,0,z) + f(x,0,0) \right. \\
 &\quad \left. + y f'_y(x,0,0) + z f'_z(x,0,0) - y f'_y(x,0,z) - z f'_z(x,y,0) + yz f''_{yz}(x,0,0) \right), \\
 \psi_2(x,y,z) &= \frac{1}{x^2 z^2} (f(x,y,z) - \dots), \quad \psi_3(x,y,z) = \frac{1}{x^2 y^2} (f(x,y,z) - \dots), \\
 \varphi(x,y,z) &= \frac{1}{x^2 y^2 z^2} (f(x,y,z) - \dots),
 \end{aligned}$$

причем все эти функции являются бесконечно дифференцируемыми и ограниченными во всей области интегрирования.

Каждое слагаемое данной суммы соответствует одному из девяти различных видов интегралов, асимптотика каждого из которых по-прежнему не является столь очевидной, как в двумерном случае. Поэтому рассмотрим каждый вид интегралов по отдельности в приведенных ниже леммах.

Лемма 1. *Имеют место следующие асимптотические разложения:*

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\pi^3}{16} \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.4)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.5)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{xy dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.6)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{xyz dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{1}{6} \ln^3 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{24} \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.7)$$

Доказательство. Одним из методов нахождения асимптотики многомерных интегралов вида $\int_{\omega} \frac{d\bar{x}}{\varepsilon + U(\bar{x})}$ могут являться замена $t = U(\bar{x})$ и дальнейшая перестановка пределов интегрирования. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} &= \left[\begin{array}{l} t = xyz, \\ dt = yz dx \end{array} \right] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{yz} \frac{dt dy dz}{(\varepsilon^2 + t^2) yz} = \int_0^1 \int_0^z \int_{t/z}^1 \frac{dy dt dz}{(\varepsilon^2 + t^2) yz} \\ &= \int_0^1 \int_t^1 \int_{t/z}^1 \frac{dy dz dt}{(\varepsilon^2 + t^2) yz} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{\varepsilon^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы свели задачу к одномерной. Для нахождения асимптотики одномерного интеграла можно с помощью замены избавиться от малого параметра в подынтегральной функции, а затем применить метод вычитания особенностей. В нашем случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\ln^2 t}{\varepsilon^2 + t^2} &= [t = \varepsilon \xi] = \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^{1/\varepsilon} \frac{\ln^2(\varepsilon \xi)}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{1}{2\varepsilon} \left(\int_0^{\infty} \frac{\ln^2(\varepsilon \xi)}{1 + \xi^2} d\xi - \int_{1/\varepsilon}^{\infty} \frac{\ln^2(\varepsilon \xi)}{1 + \xi^2} d\xi \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \frac{1}{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\pi^3}{16} \frac{1}{\varepsilon} + O(1). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали равенство (1.4). Совершенно аналогично вычисляются разложения (1.5)–(1.7). \square

Получить асимптотику интегралов, неприводимых к виду $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2}$, несколько сложнее. Рассмотрим их в следующей лемме.

Лемма 2. Пусть функции $f(x) \in C^\infty[0, 1]$, $g(x, y) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1])$, $h(x, y, z) \in C^\infty([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1])$. Тогда справедливы разложения

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 f(x) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) \cdot \frac{x}{\varepsilon} \ln \frac{x}{\varepsilon} dx + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y f(x) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 x f(x) dx \cdot \frac{1}{\varepsilon} - \int_0^1 f(x) dx \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.9)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y^2 g(x, y) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^1 xy g(x, y) dx dy \cdot \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.10)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y z f(x) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \frac{1}{2} \int_0^1 f(x) \ln^2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.11)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y^2 z g(x, y) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) dx dy \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.12)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y^2 z^2 h(x, y, z) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Доказательство. Для нахождения асимптотики данных интегралов удобно применить метод введения дополнительного параметра [5, гл. 7, § 30]. Действительно,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 f(x) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = I_1(\mu) + I_2(\mu),$$

где

$$I_1(\mu) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\mu \frac{x^2 f(x) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = [x = \mu \xi] = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mu^3 \xi^2 f(\mu \xi) d\xi dy dz}{\varepsilon^2 + \mu^2 \xi^2 y^2 z^2}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\mu \xi^2 (f(0) + O(\mu))}{\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2 + \xi^2 y^2 z^2} = (f(0) + O(\mu)) \left(\frac{\pi \mu^2}{4 \varepsilon} \ln \frac{\mu}{\varepsilon} - \frac{\pi \mu^2}{8 \varepsilon} + O(\mu) \right) \text{ при } \mu \rightarrow 0 \text{ и } \frac{\varepsilon}{\mu} \rightarrow 0,$$

$$I_2(\mu) = \int_0^1 \int_0^1 \int_\mu^1 \frac{f(x) dx dy dz}{\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)^2 + y^2 z^2} = \int_\mu^1 f(x) \int_0^1 \frac{x}{\varepsilon z} \operatorname{arctg} \frac{xz}{\varepsilon} dz dx = \left[\begin{array}{l} z = \frac{\varepsilon}{x} \xi, \\ dz = \frac{\varepsilon}{x} d\xi \end{array} \right]$$

$$= \int_\mu^1 \frac{x}{\varepsilon} f(x) \int_0^{x/\varepsilon} \frac{\operatorname{arctg} \xi}{\xi} d\xi dx = \int_\mu^1 \frac{\pi}{2} f(x) \frac{x}{\varepsilon} \ln \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx + O(1)$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 f(x) \frac{x}{\varepsilon} \ln \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx - f(0) \left(\frac{\pi \mu^2}{4 \varepsilon} \ln \frac{\mu}{\varepsilon} + \frac{\pi \mu^2}{8 \varepsilon} \right) + O\left(\frac{\mu^3}{\varepsilon} \ln \frac{\mu}{\varepsilon} \right) + O(1) \text{ при } \mu \rightarrow 0 \text{ и } \frac{\varepsilon}{\mu} \rightarrow 0.$$

Выбирая $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, получим оценку (1.8). Разложения (1.9) и (1.11) могут быть получены аналогично.

Для доказательства (1.10) и (1.12) можно применить двумерный метод введения дополнительного параметра. В качестве примера рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y^2 z g(x, y) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \ln \frac{xy}{\varepsilon} dx dy + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} \right) dx dy.$$

Пусть $\sqrt{\varepsilon} \ll \mu \ll 1$. Тогда

$$\int_0^1 \int_0^1 g(x, y) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} \right) dx dy = J_1(\mu) + J_2(\mu) + J_3(\mu) + J_4(\mu),$$

где

$$J_1(\mu) = \int_{\mu}^1 \int_{\mu}^1 g(x, y) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} \right) dx dy = \int_{\mu}^1 \int_{\mu}^1 g(x, y) \left(\frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} - \frac{\varepsilon^4}{2x^4 y^4} + \dots \right) dx dy,$$

$$J_2(\mu) = \int_0^{\mu} \int_{\mu}^1 g(x, y) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} \right) dx dy = \int_0^{\mu} \int_{\mu}^1 (g(x, 0) + y g'_y(x, 0) + \dots) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} \right) dx dy$$

$$= \int_{\mu}^1 g(x, 0) \left[\mu \ln \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{x\mu} \right)^2 \right) + 2\varepsilon \operatorname{arctg} \left(\frac{\mu x}{\varepsilon} \right) \right] dx$$

$$+ \int_{\mu}^1 g'_y(x, 0) \left[\frac{\varepsilon^2}{x^2} \left(\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{x\mu}{\varepsilon} \right) \right) + \frac{\varepsilon^4}{4x^4 \mu^2} - \frac{\varepsilon^6}{12\mu^4 x^6} + \dots \right] dx + \dots,$$

$$J_3(\mu) = \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} g(x, y) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} \right) dx dy,$$

$$J_4(\mu) = \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} g(x, y) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} \right) dx dy = \int_0^{\mu} \int_0^{\mu} (g(0, 0) + x g'_x(0, 0) + y g'_y + \dots) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{x^2 y^2} \right) dx dy.$$

Для доказательства оценки (1.13) заметим, что

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 y^2 z^2 h(x, y, z) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 h(x, y, z) dx dy dz - \varepsilon^2 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{h(x, y, z) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2}. \quad \square$$

Из разбиения (1.3) и разложений (1.4)–(1.13) следует искомое асимптотическое разложение.

Теорема 2. Пусть $f(x, y, z) \in C^2([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1])$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\varepsilon^2 + x^2 y^2 z^2} &= f(0, 0, 0) \left(\frac{\pi}{4} \frac{1}{\varepsilon} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\pi^3}{16} \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &+ (f'_x(0, 0, 0) + f'_y(0, 0, 0) + f'_z(0, 0, 0)) \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} \right) \\ &+ \frac{\pi}{2} \int_0^1 (\varphi_1(x, 0, 0) + \varphi_2(0, x, 0) + \varphi_3(0, 0, x)) \frac{x}{\varepsilon} \ln \frac{x}{\varepsilon} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (f''_{xy}(0, 0, 0) + f''_{yz}(0, 0, 0) + f''_{xz}(0, 0, 0)) \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \\
 & + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \left(\frac{x}{\varepsilon} - \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) (\varphi'_{1y}(x, 0, 0) + \varphi'_{1z}(x, 0, 0) + \varphi'_{2x}(0, x, 0) + \varphi'_{2z}(0, x, 0) + \varphi'_{3x}(0, 0, x) + \varphi'_{3y}(0, 0, x)) dx \\
 & + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \int_0^1 xy (\psi_3(x, y, 0) + \psi_2(x, 0, y) + \psi_1(0, x, y)) dx dy \cdot \frac{1}{\varepsilon} \\
 & + f'''_{xyz}(0, 0, 0) \left(\frac{1}{6} \ln^3 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\pi^2}{24} \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^1 (\varphi''_{1yz}(x, 0, 0) + \varphi''_{2xz}(0, x, 0) + \varphi''_{3xy}(0, 0, x)) \ln^2 \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) dx \\
 & + \int_0^1 \int_0^1 (\psi'_{3z}(x, y, 0) + \psi'_{3y}(x, 0, y) + \psi'_{3x}(0, x, y)) dx dy \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

где посредством φ'_{1x} , φ'_{1y} , φ'_{1z} обозначены частные производные функции $\varphi_1(\cdot, \cdot, \cdot)$ по первому, второму и третьему аргументу соответственно независимо от их значений.

З а м е ч а н и е. Рассмотренная в настоящей статье схема может применяться без каких-либо существенных отличий для исследования асимптотики интегралов более высокой размерности вида (0.1), у которых функция $U(x_1, \dots, x_n)$ обращается в ноль на n пересекающихся гиперблоскостях. В частности,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{dx_1 \dots dx_n}{\varepsilon^2 + x_1^2 \dots x_n^2} = \left[\begin{array}{l} t = x_1 \dots x_n, \\ dt = x_2 \dots x_n dx_1 \end{array} \right] = \int_0^1 \dots \int_0^1 \int_0^{x_2 \dots x_n} \frac{dt dx_2 \dots dx_n}{x_2 \dots x_n (\varepsilon^2 + t^2)} \\
 & = \int_0^1 \int_t^1 \int_{t/x_n}^1 \dots \int_{t/(x_3 \dots x_n)}^1 \frac{d(\ln x_2) \dots d(\ln x_{n-1}) d(\ln x_n) dt}{\varepsilon^2 + t^2} \\
 & = \int_0^1 \int_t^1 \int_{t/x_n}^1 \dots \int_{t/(x_4 \dots x_n)}^1 \frac{\ln x_3 + \ln(x_4 \dots x_n) - \ln t}{\varepsilon^2 + t^2} d(\ln x_3) \dots d(\ln x_{n-1}) d(\ln x_n) dt \\
 & = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 \frac{(-\ln t)^{n-1}}{\varepsilon^2 + t^2} dt = [t = \varepsilon \tau] = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n-1} \ln^k \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \cdot \frac{C_{n-1}^k}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{\ln^{n-1-k}(1/\tau)}{1 + \tau^2} d\tau + O(\ln^{n-1} \varepsilon).
 \end{aligned}$$

2. Заключение

Как замечено А. М. Ильиным и А. А. Ершовым в работе [4], уже в трехмерном случае возникают значительные трудности, когда знаменатель подынтегральной функции стремится к нулю на пересекающихся многообразиях различной размерности. Здесь мы рассмотрели построение асимптотического разложения такого вида сингулярных интегралов. Остается открытым вопрос, например, об асимптотике интеграла $\iiint_{\omega} \frac{dx dy dz}{\varepsilon^2 + U(x, y, z)}$, когда неотрицательная

функция $U(x, y, z)$ обращается в ноль на трех пересекающихся кривых. Однако, интерес представляют и случаи, когда предельный знаменатель имеет критические точки более сложного вида, классификация которых имеется, например, в [7; 8].

Авторы признательны А.М. Ильину за постановку целого направления исследований, а также благодарны С.М. Воронину за полезные обсуждения работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Федорюк М.В.** Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
2. **Риекстыньш Э.Я.** Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1974. Т. 1. 392 с.; Т. 2. 464 с.
3. **Риекстыньш Э.Я.** Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1981. Т. 3. 373 с.
4. **Ильин А.М., Ершов А.А.** Асимптотика двумерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 3. С. 116–126.
5. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 222 с.
6. **Медведева Н.Б.** Об аналитической неразрешимости проблемы устойчивости на плоскости // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, вып. 5(413). С. 147–176.
7. **Арнольд В.И.** Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.
8. **Бреккер Т., Ландер Л.** Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Платон, 1997. 208 с.

Ершов Александр Анатольевич

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: ale10919@yandex.ru

Поступила 22.05.2015

Русанова Мария Игоревна

студент

Челябинский государственный университет

e-mail: rusanova_mary94@mail.ru

УДК 517.95

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛА НА ПЛОСКОСТИ¹

С. В. Захаров

Для уравнения теплопроводности на плоскости строится асимптотическое приближение решения задачи Коши на больших временах в случае, когда начальная функция на бесконечности имеет степенную асимптотику. Исследование асимптотического поведения решения рассматриваемой задачи помимо прямого приложения к процессам теплопроводности и диффузии представляет самостоятельный интерес для асимптотического анализа.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, асимптотика.

S. V. Zakharov. Asymptotic calculation of the heat distribution on a plane.

For the heat equation on a plane an asymptotic approximation of the solution of the Cauchy problem for large times is constructed in the case when the initial function at infinity has a power-like asymptotics. Investigation of the asymptotic behavior of the solution of the problem under consideration in addition to direct application to processes of heat conduction and diffusion has an independent interest for asymptotic analysis.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, asymptotics.

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности на плоскости с локально интегрируемой по Лебегу начальной функцией $\Lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ медленного роста:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = \Lambda(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.2)$$

Единственное (в классе гладких функций медленного роста) решение этой задачи можно записать в виде свертки функции Λ с функцией Грина [1]:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(s_1, s_2) \exp \left\{ -\frac{(s_1 - x_1)^2 + (s_2 - x_2)^2}{4t} \right\} ds_1 ds_2. \quad (1.3)$$

Исследование асимптотического поведения интеграла (1.3) помимо прямого приложения к физическим процессам теплопроводности и диффузии представляет самостоятельный интерес для асимптотического анализа, поскольку необходимость в решении подобных задач возникает при применении метода согласования [2].

Несмотря на внешнюю простоту интеграла (1.3) построение его равномерно пригодной асимптотики при независимом стремлении переменных к бесконечности не укладывается в рамки обычных методов [3]. Для решения уравнения теплопроводности на прямой \mathbb{R}^1 с начальной функцией, имеющей степенное поведение на бесконечности, равномерная асимптотика была найдена в работе [4] методом вспомогательного параметра, развитого А. Р. Данилиным при изучении задач теории оптимального управления [5; 6].

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 14-01-00322).

С помощью того же метода ниже будет построено асимптотическое разложение решения $u(x_1, x_2, t)$ задачи (1.1), (1.2) при $|x_1| + |x_2| + t \rightarrow \infty$ в предположении, что

$$\Lambda(x_1, x_2) = 0, \quad x_1 < 0, \quad (1.4)$$

$$\Lambda(x_1, x_2) = x_1^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_n(x_2)}{x_1^n}, \quad x_1 \rightarrow +\infty, \quad (1.5)$$

где p — неотрицательное целое число, Λ_n — непрерывные функции. Кроме того, считаем, что

$$\begin{aligned} \text{supp } \Lambda &\subset \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, |x_2| < |x_1|^\nu, \nu > 0\}, \\ \text{supp } \Lambda_n &\subset [-R_n, R_n], \quad R_n > 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Таким образом, в условии (1.5) асимптотика понимается в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\{x_1^{-n}\}_{n=0}^{\infty}$. Точный смысл возникающих далее асимптотик будет определяться отдельно.

2. Вычисление асимптотики

Учитывая условие (1.4), представим функцию (1.3) в виде

$$u(x_1, x_2, t) = U_0(x_1, x_2, t) + U_1(x_1, x_2, t), \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} U_0(x_1, x_2, t) &= \int_0^\sigma ds_1 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_2 \dots, \quad U_1(x_1, x_2, t) = \int_\sigma^{+\infty} ds_1 \int_{-\infty}^{+\infty} ds_2 \dots, \\ \sigma &= (x_1^2 + x_2^2 + t)^{\beta/2}, \quad 0 < \beta < 1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

а многоточие обозначает подынтегральное выражение из формулы (1.3) вместе с множителем $(4\pi t)^{-1}$. В интеграле $U_1(x_1, x_2, t)$ сделаем замену $s_1 = 2z\sqrt{t}$. Полагая

$$\mu = \frac{\sigma}{2\sqrt{t}}, \quad \eta_1 = \frac{x_1}{2\sqrt{t}} \quad (2.9)$$

и пользуясь условием (1.5), получаем

$$\begin{aligned} U_1(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t}} \int_\mu^{+\infty} e^{-(\eta_1 - z_1)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(2z\sqrt{t}, s_2) \exp\left\{-\frac{(s_2 - x_2)^2}{4t}\right\} ds_2 dz \\ &= \frac{t^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{N-1} 2^{p-n} t^{-n/2} \int_\mu^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta_1)^2} dz \\ &\quad \times \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_n(s_2) \exp\left\{-\frac{(s_2 - x_2)^2}{4t}\right\} ds_2 + O(\sigma^{-\rho_1 N}), \quad \rho_1 > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В дальнейшем будем пользоваться тем, что при $\sigma \rightarrow \infty$ на множестве

$$T_\alpha = \{(x_1, x_2, t) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, t \geq (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha/2}\}, \quad 1 + \beta < \alpha < 2,$$

справедливы оценки (легко проверить)

$$\sigma = O(t^{\beta/\alpha}), \quad \mu = O(t^{\beta/\alpha - 1/2}), \quad \mu = O(\sigma^{-\gamma}), \quad (2.11)$$

где

$$\gamma = \frac{\alpha}{2\beta} - 1 > 0. \quad (2.12)$$

При $0 \leq n \leq p$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz &= \int_0^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz - \int_0^{\mu} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz \\ &= \int_{-\eta}^{+\infty} (\eta + s)^{p-n} e^{-s^2} ds - \int_0^{\mu} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz \\ &= \sum_{m=0}^{p-n} \frac{(p-n)! \eta^{p-n-m}}{m!(p-n-m)!} \int_{-\eta}^{+\infty} s^m e^{-s^2} ds + \sum_{r=1}^{\infty} \mu^r e^{-\eta^2} P_{l_r}(\eta), \end{aligned}$$

где $\int_{-\eta}^{+\infty} s^m e^{-s^2} ds = e^{-\eta^2} P_{m-1}(\eta) + \nu_m \operatorname{erfc}(-\eta)$, $P_l(\eta)$ — полиномы степени l , ν_m — некоторые константы, $\operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-s^2} ds$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz &= \Pi_{p-n}(\eta) \operatorname{erfc}(-\eta) + \exp(-\eta^2) \Pi_{p-n-1}^*(\eta) \\ &\quad + \exp(-\eta^2) \sum_{r=1}^{N-1} P_{l_r}(\eta) \mu^r + O(\sigma^{-\rho_2 N}), \quad \rho_2 > 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $\Pi_{p-n}(\eta)$ и $\Pi_{p-n-1}^*(\eta)$ — полиномы степени $p-n$ и $p-n-1$ соответственно.

При $n > p$ имеем

$$\int_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz = \int_1^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz + \int_{\mu}^1 \Psi_{n-p}(z, \eta) dz + e^{-\eta^2} \sum_{r=0}^{n-p-1} P_r(\eta) \int_{\mu}^1 z^{r+p-n} dz,$$

где $P_r(\eta)$ — полиномы степени r ,

$$\Psi_{n-p}(z, \eta) = z^{p-n} \left[e^{-(z-\eta)^2} - e^{-\eta^2} \sum_{r=0}^{n-p-1} H_r(\eta) \frac{z^r}{r!} \right], \quad (2.14)$$

сумма по r в квадратных скобках — это частичная сумма ряда Тейлора для функции $\exp(2z\eta - z^2)$ по переменной z , а $H_r(\eta)$ — полиномы Эрмита степени r . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz &= \int_1^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz + e^{-\eta^2} P_{n-p-1}(\eta) \ln \mu \\ &\quad + \sum_{r=0}^{n-p-2} \mu^{r+p-n+1} e^{-\eta^2} P_r(\eta) + \int_0^1 \Psi_{n-p}(z, \eta) dz - \int_0^{\mu} \Psi_{n-p}(z, \eta) dz. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Из формулы (2.14) вытекает, что $\Psi_n(z, \eta)$ не имеет особенностей при $z \rightarrow 0$ и

$$\int_0^{\mu} \Psi_{n-p}(z, \eta) dz = \sum_{r=1}^{N-1} \mu^r e^{-\eta^2} P_{r-1+n-p}(\eta) + O(\sigma^{-\gamma N}),$$

где число $\gamma > 0$ определено формулой (2.12). Таким образом, соотношение (2.15) приобретает вид

$$\int_{\mu}^{+\infty} z^{p-n} e^{-(z-\eta)^2} dz = J_{p-n}(\eta) + \exp(-\eta^2) \sum_{r_s^2 + q_s^2 \neq 0} b_s \eta^{m_s} \mu^{r_s} \ln^{q_s} \mu + O(\sigma^{-\rho_2 N}), \quad (2.16)$$

где J_{p-n} — гладкие функции медленного роста, b_s — некоторые константы. Согласно работе [4] из условия (1.6) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda_n(s_2) \exp\left\{-\frac{(s_2 - x_2)^2}{4t}\right\} ds_2 \\ &= \exp(-\eta_2^2) \sum_{m=1}^N t^{-m/2} Q_{n,m-1}(\eta_2) + O((x_2^2 + t)^{-\rho_3 N}), \quad \rho_3 > 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $Q_{n,m-1}(\eta_2)$ — полиномы степени $m-1$ по $\eta_2 = x_2/(2\sqrt{t})$, коэффициенты которых зависят от n . Финитность (ограниченность носителя) функций Λ_n приводит к тому, что асимптотика (2.17) не содержит $\ln t$. Это может быть показано напрямую разложением подынтегральной экспоненты в ряд Тейлора по переменной s_2 .

Подставляя выражения (2.13), (2.16) и (2.17) в формулу (2.10), получаем

$$U_1(x_1, x_2, t) = t^{p/2} \sum_{n=1}^N t^{-n/2} \tilde{S}_n(\eta_1, \eta_2) + V_1(\mu, \eta_1, \eta_2, t) + O(\sigma^{-\rho_4 N}), \quad \rho_4 > 0, \quad (2.18)$$

$$V_1(\mu, \eta_1, \eta_2, t) = \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \sum_{r_s^2 + q_s^2 \neq 0} a'_s \eta_1^{m_s} \eta_2^{n_s} t^{l_s} \mu^{r_s} \ln^{q_s} \mu, \quad (2.19)$$

где a'_s — константы. Коэффициенты $\tilde{S}_n(\eta_1, \eta_2)$ — это гладкие функции; в частности,

$$\tilde{S}_1(\eta_1, \eta_2) = \exp\{-\eta_1^2 + \eta_2^2\} [\Pi_p^{(1)}(\eta_1) \exp(\eta_1^2) \operatorname{erfc}(-\eta_1) + \Pi_{p-1}^{(2)}(\eta_1)],$$

где $\Pi_p^{(1)}(\eta_1)$ и $\Pi_{p-1}^{(2)}(\eta_1)$ — полиномы степени p и $p-1$ соответственно.

Видно, что благодаря множителю $\exp\{-\eta_1^2 + \eta_2^2\}$ оценка остатка в формуле (2.18) остается в силе и для значений переменных из множества

$$X_\alpha = \{(x_1, x_2, t) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, 0 < t < (x_1^2 + x_2^2)^{\alpha/2}\},$$

на котором справедливы оценки

$$\mu^2 = o(\eta_1^2 + \eta_2^2), \quad \eta_1^2 + \eta_2^2 \geq \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^{1-\alpha/2} \geq \frac{1}{8}\sigma^{(2-\alpha)/\beta}. \quad (2.20)$$

Поскольку $x_1^2 + x_2^2 \leq \sigma^{2/\beta}$ и $2t \geq \sigma^{\alpha/\beta}$ на множестве T_α , заключаем, что при $0 \leq s \leq \sigma$ справедливы оценки

$$\frac{x_1 s}{t} = O(\sigma^{-\delta}), \quad \frac{x_2 s}{t} = O(\sigma^{-\delta}), \quad \frac{s^2}{t} = O(\sigma^{-2\delta}), \quad (2.21)$$

где

$$\delta = \frac{\alpha - 1}{\beta} - 1 > 0.$$

С помощью оценок (2.21) представим интеграл $U_0(x_1, x_2, t)$ в следующем виде:

$$U_0(x_1, x_2, t) = \frac{\exp\{-\eta_1^2 + \eta_2^2\}}{4\pi t}$$

$$\times \int_0^\sigma \int_{-\infty}^\infty \Lambda(s_1, s_2) \sum_{m=0}^N \frac{1}{m!} \left(\frac{\eta_1 s_1 + \eta_2 s_2}{\sqrt{t}} - \frac{s_1^2 + s_2^2}{4t} \right)^m ds_2 ds_1 + O(\sigma^{-\rho_5 N}), \quad \rho_5 > 0.$$

Благодаря множителю $\exp\{-(\eta_1^2 + \eta_2^2)\}$ оценка остатка верна и на множестве X_α . Раскрывая степень и меняя порядок суммирования, получаем

$$U_0(x_1, x_2, t) = \exp\{-(\eta_1^2 + \eta_2^2)\} \sum_{n=2}^N t^{-n/2} \sum_{\substack{0 \leq m_1 + m_2 \leq n-2 \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq n-2}} a_{m_1, m_2, l_1, l_2} \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} \\ \times \int_0^\sigma \int_{-\infty}^\infty s_1^{l_1} s_2^{l_2} \Lambda(s_1, s_2) ds_2 ds_1 + O(\sigma^{-\rho_5 N}),$$

где a_{m_1, m_2, l_1, l_2} — некоторые константы. Преобразуем возникающий здесь интеграл следующим образом:

$$\int_0^\sigma \int_{-\infty}^\infty s_1^{l_1} s_2^{l_2} \Lambda(s_1, s_2) ds_2 ds_1 = \int_0^1 \int_{-\infty}^\infty s_1^{l_1} s_2^{l_2} \Lambda(s_1, s_2) ds_2 ds_1 \\ + \int_1^\sigma \int_{-\infty}^\infty s_1^{l_1} s_2^{l_2} \left[\Lambda(s_1, s_2) - s_1^p \Lambda_0(s_2) - \dots - s_1^{-l_1-1} \Lambda_{p+l_1+1}(s_2) \right] ds_2 ds_1 \\ + \int_1^\sigma \int_{-\infty}^\infty \left[s_1^{l_1+p} s_2^{l_2} \Lambda_0(s_2) + \dots + s_1^{-1} s_2^{l_2} \Lambda_{p+l_1+1}(s_2) \right] ds_2 ds_1 \\ = A_{l_1, l_2} + \ln \sigma \int_{-\infty}^\infty s_2^{l_2} \Lambda_{p+l_1+1}(s_2) ds_2 + \sum_{k=1}^{N-1} (c_k \sigma^k + c_{-k} \sigma^{-k}) + O(\sigma^{-N}) \\ = A_{l_1, l_2} + B_{l_1, l_2} \ln t + 2B_{l_1, l_2} \ln(2\mu) + \sum_{k=1}^{N-1} (c'_k \mu^k t^{k/2} + c'_{-k} \mu^{-k} t^{-k/2}) + O(\sigma^{-N}),$$

где A_{l_1, l_2} , B_{l_1, l_2} , c'_k и c'_{-k} — константы. Тогда

$$U_0(x_1, x_2, t) = \exp\{-(\eta_1^2 + \eta_2^2)\} \sum_{n=2}^N t^{-n/2} [\Pi_{n-2}(\eta_1, \eta_2) + \Pi_{n-2}^*(\eta_1, \eta_2) \ln t] \\ + V_0(\mu, \eta_1, \eta_2, t) + O(\sigma^{-\rho_6 N}), \quad \rho_6 > 0, \quad (2.22)$$

где $\Pi_{n-2}(\eta_1, \eta_2)$ и $\Pi_{n-2}^*(\eta_1, \eta_2)$ — полиномы степени $n-2$, а выражение

$$V_0(\mu, \eta_1, \eta_2, t) = \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \sum_{r_s^2 + q_s^2 \neq 0} a_s'' \eta_1^{m_s} \eta_2^{n_s} t^{l_s} \mu^{r_s} \ln^{q_s} \mu, \quad (2.23)$$

где a_s'' — некоторые константы, получается аналогично выражению (2.19). Из оценок (2.20) вытекает, что при $(x_1, x_2, t) \in X_\alpha$ для любых вещественных $r, l, m, n \in \mathbb{R}$ найдутся $C > 0$ и $q > 0$ такие, что

$$|\eta_1^m \eta_2^n t^l \mu^r| \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \leq C \sigma^q \exp\left(-\frac{\sigma^{(2-\alpha)/\beta}}{8}\right).$$

Следовательно, выражения $V_i(\mu, \eta_1, \eta_2, t)$ в формулах (2.18) и (2.22) экспоненциально малы на множестве X_α .

Введем обозначение

$$\varepsilon = (x_1^2 + x_2^2 + t)^{-1/4}.$$

Тогда из формул (2.19) и (2.23) получаем

$$V_0(\mu, \eta_1, \eta_2, t) + V_1(\mu, \eta_1, \eta_2, t) = \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \sum_{r_s^2 + q_s^2 \neq 0} a_s''' \eta_1^{m_s} \eta_2^{n_s} t^{l_s} (\ln t)^{k_s} \varepsilon^{2\beta r_s} (\ln \varepsilon^{2\beta})^{q_s},$$

где a_s''' — некоторые константы, $\varepsilon \rightarrow 0$, а β — это произвольный параметр: $0 < \beta_1 < \beta < \beta_2 < 1$. Поэтому при $\sigma \rightarrow \infty$ для $(x_1, x_2, t) \in T_\alpha$, из леммы А. Р. Данилина [6, с. 2169] (см. также [5, лемма 4.4] или [7, гл. 7, § 30]) вытекает, что

$$V_0(\mu, \eta_1, \eta_2, t) + V_1(\mu, \eta_1, \eta_2, t) = O(\sigma^{-\rho N}), \quad (x_1, x_2, t) \in T_\alpha,$$

где $\rho = \min\{\rho_4, \rho_6\}$. Подставляя (2.18) и (2.22) в (2.7), с учетом сделанных замечаний и обозначений (2.8), (2.9) приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. При $|x_1| + |x_2| + t \rightarrow \infty$ асимптотика решения уравнения (1.1) с условиями (1.2), (1.4)–(1.6) имеет вид

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{-n/2} \left[t^{p/2} S_n(\eta_1, \eta_2) + t^{-1/2} \ln t \Pi_n(\eta_1, \eta_2) \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \right]$$

в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\{(x_1^2 + x_2^2 + t)^{-\rho' n}\}_{n=1}^{\infty}$ с некоторым $\rho' > 0$, где $S_n(\eta_1, \eta_2)$ — это C^∞ -гладкие функции медленного роста, $\Pi_n(\eta_1, \eta_2)$ — полиномы степени n по автомодельным переменным

$$\eta_1 = \frac{x_1}{2\sqrt{t}}, \quad \eta_2 = \frac{x_2}{2\sqrt{t}}.$$

Формула для главного асимптотического приближения решения имеет следующий вид:

$$u(x_1, x_2, t) \approx t^{(p-1)/2} \left[\Pi_p^{(1)}(\eta_1) \int_{-\infty}^{\eta_1} \exp(-s^2 - \eta_2^2) ds + \Pi_{p-1}^{(2)}(\eta_1) \exp(-\eta_1^2 - \eta_2^2) \right],$$

где $\Pi_p^{(1)}(\eta_1)$ и $\Pi_{p-1}^{(2)}(\eta_1)$ — полиномы степеней p и $p-1$ соответственно. При подстановке этой формулы в (1.1) получаются следующие уравнения:

$$\frac{d^2 \Pi_p^{(1)}}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\Pi_p^{(1)}}{d\eta} - 2p\Pi_p^{(1)} = 0,$$

$$\frac{d^2 \Pi_{p-1}^{(2)}}{d\eta^2} - 2\eta \frac{d\Pi_{p-1}^{(2)}}{d\eta} - 2(p+1)\Pi_{p-1}^{(2)} = -2 \frac{d\Pi_p^{(1)}}{d\eta}.$$

Отсюда вытекает, что $\Pi_p^{(1)}(\eta_1)$ — это полиномы Эрмита мнимого аргумента с точностью до числового множителя.

В заключение отметим, что для многомерной задачи справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть $u(x_1, \dots, x_m, t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \quad t > 0,$$

$$u(x_1, \dots, x_m, 0) = \Lambda(x_1, \dots, x_m), \quad (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

с локально интегрируемой начальной функцией Λ медленного роста. При выполнении условий

$$\Lambda(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad x_1 < 0,$$

$$\Lambda(x_1, \dots, x_m) = x_1^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Lambda_n(x_2, \dots, x_m)}{x_1^n}, \quad x_1 \rightarrow +\infty,$$

где

$$\text{supp } \Lambda \subset \{(x_1, \dots, x_m) : x_1 > 0, |x_2| + \dots + |x_m| < |x_1|^\nu, \nu > 0\},$$

$$\text{supp } \Lambda_n \subset [-R_n, R_n]^{m-1}, \quad R_n > 0,$$

справедлива асимптотическая формула

$$u(x_1, \dots, x_m, t) = t^{-m/2} \sum_{n=0}^{\infty} t^{-n/2} \left[t^{(p+1)/2} S_n(\eta_1, \dots, \eta_m) + \ln t \Pi_n(\eta_1, \dots, \eta_m) \exp(-\eta_1^2 - \dots - \eta_m^2) \right],$$

$$|x_1| + \dots + |x_m| + t \rightarrow \infty,$$

в смысле Эрдейи по асимптотической последовательности $\{(x_1^2 + \dots + x_m^2 + t)^{-\rho_m n}\}_{n=1}^{\infty}$, где $\rho_m > 0$, $S_n(\eta_1, \dots, \eta_m)$ — гладкие функции медленного роста, $\Pi_n(\eta_1, \dots, \eta_m)$ — полиномы степени n по автомодельным переменным

$$\eta_1 = \frac{x_1}{2\sqrt{t}}, \quad \dots, \quad \eta_m = \frac{x_m}{2\sqrt{t}}.$$

Доказательство проводится совершенно аналогично двумерному случаю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
2. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
3. Федорюк М.В. Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
4. Захаров С.В. О распределении тепла в бесконечном стержне // Мат. зам. 2006. Т. 80, вып. 3. С. 379–385.
5. Данилин А.Р. Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 11. С. 27–60.
6. Данилин А.Р. Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 12. С. 2166–2177.
7. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.

Захаров Сергей Викторович

Поступила 20.04.2015

канд. физ.-мат. наук

страший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: svz@imm.uran.ru

УДК 510.67, 519.1

РАЗРЕШИМОСТЬ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ И АКСИОМАТИЗИРУЕМОСТЬ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ

А. В. Ильев

В данной работе методами теории моделей изучаются наследственные классы графов, определенные в терминах запрещенных непорожденных подграфов. Рассмотрены вопросы универсальной аксиоматизируемости и рекурсивной аксиоматизируемости наследственных классов графов. Показано, что наследственный класс графов универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов. Доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов.

Ключевые слова: наследственный класс графов, универсальная теория, универсальная аксиоматизируемость, разрешимость.

A. V. Il'ev. Decidability of universal theories and axiomatizability of hereditary classes of graphs.

Hereditary classes of graphs defined by forbidden non-induced subgraphs are studied by model theory methods. Problems of universal axiomatizability and recursive axiomatizability of hereditary classes of graphs are considered. It is shown that a hereditary class of graphs is universally axiomatizable if and only if it can be defined in terms of finite forbidden subgraphs. It is proved that the universal theory of graphs and the universal theory of any recursive axiomatizable hereditary class of graphs are decidable.

Keywords: hereditary class of graphs, universal theory, universal axiomatizability, decidability

Введение

В настоящее время алгебраические методы широко используются в теории графов, в ней сформировалось целое направление исследований, которое получило название алгебраической теории графов. Наряду с алгебраическими в теории графов с успехом применяются также логические методы, прежде всего методы теории моделей. По аналогии с алгебраической теорией графов можно говорить о формировании особого раздела теории графов — логической теории графов [3].

Напомним, что обыкновенный граф можно рассматривать как алгебраическую систему, сигнатура которой состоит из предиката равенства и бинарного предиката смежности вершин, удовлетворяющего аксиомам иррефлексивности и симметричности. Поэтому теория графов представляет собой теорию первого порядка, полученную из узкого исчисления предикатов с равенством путем добавления в его сигнатуру иррефлексивного симметричного бинарного отношения. Хорошо известно, что теория графов неразрешима, неразрешима также и теория конечных графов [6; 10]. В связи с этим возникает проблема выделения разрешимых теорий различных классов графов. Естественно возникают также вопросы о разрешимости универсальной теории графов, а также универсальных теорий различных классов графов.

Универсальные теории занимают особое место в теории моделей. С помощью хорошо известной процедуры скулемизации изучение любой теории можно свести к изучению универсальной теории в расширенном языке [4; 5]. Кроме того, некоторые общие проблемы разрешимости можно интерпретировать как проблемы разрешимости универсальных теорий [10]. Исследование универсальных теорий имеет также прикладное значение. Повышенный интерес к универсальным теориям (и к универсальной логике вообще) вызывает их применение в логическом программировании и теории баз данных [1]. Отметим также, что многие комбинаторные задачи, в частности задачи экстремальной комбинаторики, сформулированные на

языке теории моделей, приводят к изучению моделей универсальных теорий первого порядка [14].

Традиционный интерес вызывают вопросы аксиоматизируемости и универсальной аксиоматизируемости различных классов графов и гиперграфов [11–13; 16]. Так, в [12] обсуждаются вопросы аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных порожденных подграфов. Однако существуют наследственные классы графов, которые определяются в терминах запрещенных непорожденных подграфов. Примерами таких классов являются класс планарных графов, класс двудольных графов, класс графов максимальной степени, не превосходящей фиксированного $p \in \mathbb{N}$ (где $p \geq 2$), и др. Поэтому естественно возникает задача поиска условий универсальной аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных непорожденных подграфов.

В данной работе методами теории моделей изучаются наследственные классы графов, определенные в терминах запрещенных непорожденных подграфов. В разд. 1 приведены основные понятия и факты теории моделей и теории графов. В разд. 2 рассмотрены вопросы универсальной аксиоматизируемости и рекурсивной аксиоматизируемости наследственных классов графов. Показано, что наследственный класс графов универсально аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах конечных запрещенных подграфов. Раздел 3 содержит основной результат данной работы: доказана разрешимость универсальной теории графов и универсальной теории произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов.

1. Предварительные сведения

В данном разделе напомним некоторые основные определения и утверждения теории моделей и теории графов.

Сигнатурой называется последовательность

$$\Sigma = \langle P_1^{(n_1)}, \dots, P_s^{(n_s)}, \dots; f_1^{(m_1)}, \dots, f_t^{(m_t)}, \dots; c_1, \dots, c_k, \dots \rangle,$$

где $P_s^{(n_s)}$ — символ (n_s) -местного предиката, $s = 1, 2, \dots$; $f_t^{(m_t)}$ — символ (m_t) -местной функции, $t = 1, 2, \dots$; c_k — символы выделенных элементов (констант), $k = 1, 2, \dots$.

Алгебраической системой сигнатуры Σ , или Σ -*системой*, называется последовательность вида $\mathcal{M} = \langle M, \Sigma \rangle$, где M — непустое множество, называемое *основным множеством* или *носителем* системы \mathcal{M} ; c_k — выделенные элементы в M ; $P_s^{(n_s)}$ — (n_s) -местный предикат, определенный на множестве M ; $f_t^{(m_t)}$ — (m_t) -местная функция, определенная на M . Алгебраическая система \mathcal{M} называется *моделью* или *реляционной системой*, если в ней отсутствуют функции.

Формулой сигнатуры Σ называется формула узкого исчисления предикатов с равенством, внелогические константы которой содержатся в Σ . Формулу без свободных переменных называют *предложением*. Истинность предложения φ в алгебраической системе \mathcal{M} обозначается через $\mathcal{M} \models \varphi$.

Две Σ -системы \mathcal{M} и \mathcal{N} называются *элементарно эквивалентными* (обозначается $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$), если для любого предложения φ сигнатуры Σ

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi.$$

Σ -система $\mathcal{M} = \langle M, \Sigma \rangle$ называется *подсистемой* Σ -системы $\mathcal{N} = \langle N, \Sigma \rangle$ (обозначается $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$), если

- 1) $M \subseteq N$;
- 2) функции и предикаты в \mathcal{M} являются ограничениями на M соответствующих функций и предикатов в \mathcal{N} ;
- 3) множество M замкнуто относительно функций.

Под *классом алгебраических систем* в дальнейшем будем понимать *абстрактный класс*, т. е. такое семейство Σ -систем, которое вместе с любой алгебраической системой содержит все изоморфные ей Σ -системы. Пусть L_Σ — множество всех предложений сигнатуры Σ , \mathbf{K} — некоторый класс Σ -систем. *Теорией класса \mathbf{K}* называется множество $T(\mathbf{K})$ всех предложений из L_Σ , истинных во всех системах из \mathbf{K} . Если существует алгоритм, который позволяет ответить на вопрос, принадлежит или нет произвольное предложение из L_Σ теории $T(\mathbf{K})$, то эта теория называется *разрешимой*.

Предложения φ и ψ сигнатуры Σ будем называть *эквивалентными* на классе \mathbf{K} алгебраических систем сигнатуры Σ , если для любой системы \mathcal{M} класса \mathbf{K}

$$\mathcal{M} \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi.$$

Формула φ называется *универсальной формулой* или \forall -формулой, если $\varphi = \forall x_1 \dots \forall x_n \psi$, где ψ — бескванторная формула. Множество всех \forall -предложений теории $T(\mathbf{K})$ называется *универсальной теорией* или \forall -теорией класса \mathbf{K} .

Класс \mathbf{K} алгебраических систем называется *аксиоматизируемым*, если существует такое множество предложений Z сигнатуры Σ , что для любой системы \mathcal{M}

$$\mathcal{M} \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi \text{ для всех } \varphi \in Z.$$

Множество предложений Z называется *множеством аксиом* для \mathbf{K} . Если для класса \mathbf{K} существует конечное множество аксиом, то класс \mathbf{K} называется *конечно аксиоматизируемым*. Если для класса \mathbf{K} существует множество аксиом, состоящее только из \forall -предложений, то класс \mathbf{K} называется *универсально аксиоматизируемым* или \forall -аксиоматизируемым. Если для класса \mathbf{K} существует *рекурсивное множество аксиом* Z , т. е. Z — система аксиом класса \mathbf{K} , и существует алгоритм, который по любому предложению сигнатуры Σ позволяет узнать, принадлежит оно множеству Z или нет, то класс \mathbf{K} называется *рекурсивно аксиоматизируемым*.

Многие утверждения из теории графов могут быть сформулированы на языке теории моделей. Далее напомним некоторые хорошо известные определения и теоремы и приведем логические формулировки для ряда из них.

Граф — это пара $G = (V, E)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V , называемых *ребрами*. Если $(u, v) \in E$, то вершины u и v называются *смежными*. В данной работе рассматриваются только те графы, в которых множество V не более чем счетно. Граф *конечен*, если множество его вершин конечно, и *счетно бесконечен*, если множество его вершин счетно бесконечно.

Теперь дадим определение графа как алгебраической системы.

Граф — это алгебраическая система $G = \langle V, \Sigma \rangle$, носитель которой V — непустое не более чем счетное множество, а сигнатура $\Sigma = \langle E, = \rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причем предикат смежности $E(x, y)$ является *иррефлексивным* и *симметричным*, т. е. удовлетворяет условиям:

- 1) $\forall x \neg E(x, x)$ (иррефлексивность);
- 2) $\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$ (симметричность).

Последовательность попарно различных ребер $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)$ называется *цепью*. Замкнутая цепь называется *циклом*.

Граф, в котором любые две вершины смежны, называется *полным графом*. Полный граф с n вершинами обозначается через K_n .

Граф $H = \langle V_H, \Sigma \rangle$ является *подграфом* графа $G = \langle V_G, \Sigma \rangle$, если $V_H \subseteq V_G$ и любая пара смежных вершин графа H смежна в графе G . Нетрудно видеть, что не всякий подграф H является подсистемой Σ -системы G . Подграфы, являющиеся подсистемами, называются *порожденными подграфами*.

Любому графу можно поставить в соответствие условие существования подграфа, изоморфного этому графу. Оно имеет вид

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \psi, \tag{1.1}$$

где ψ — конъюнкт, который содержит условия попарного различия всех переменных и не содержит множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей. Например, для графа $K_{3,3}$ предложение (1.1) выглядит следующим образом:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \exists x_6 \left[\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \bigwedge_{\substack{i=1,3,5 \\ j=2,4,6}} E(x_i, x_j) \right],$$

переменные x_1, x_3, x_5 соответствуют вершинам одной доли, x_2, x_4, x_6 — вершинам другой доли.

Граф называется *планарным*, если его можно так уложить на плоскости, что его ребра не будут пересекаться вне вершин.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 (доли) так, что каждое ребро графа соединяет вершины из разных долей. Если в двудольном графе каждая вершина из V_1 смежна с каждой вершиной из V_2 , то такой граф называется *полным двудольным графом* и обозначается $K_{m,n}$, где m и n — число вершин в V_1 и V_2 соответственно.

Довольно часто оказывается, что бесконечные графы обладают теми же свойствами, что и все их конечные подграфы. Типичной иллюстрацией этого является следующее утверждение.

Утверждение 1 [9, с. 53, теорема 8D]. *Пусть G — счетно бесконечный граф, каждый конечный подграф которого планарен, тогда и G планарен.*

Утверждение 1 важно тем, что оно позволяет сформулировать критерий планарности графа для счетного случая, а не только для конечного.

Два графа называются *гомеоморфными*, если они могут быть получены из одного и того же графа с помощью операции подразделения ребер, т. е. заменой некоторых ребер цепями длины $k \geq 2$.

Теорема 1 (Куратовский). *Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.*

По аналогии с утверждением 1 может быть доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть G — счетно бесконечный граф, каждый конечный подграф которого двудольен, тогда и G двудольен.*

В силу утверждения 2 можно сформулировать критерий двудольности графа для счетного случая. Выглядит он точно так же, как и для конечного случая.

Теорема 2 (Кёниг). *Граф двудольен, если и только если он не содержит циклов нечетной длины.*

Классы планарных и двудольных графов являются примерами наследственных классов графов. Дадим определение наследственного класса графов.

Пусть \mathbf{H} — некоторый класс графов. Обозначим через $Forb(\mathbf{H})$ класс, состоящий из всех графов, не содержащих подграфов из \mathbf{H} . Этот класс может быть определен заданием графов $H \in \mathbf{H}$ в качестве *запрещенных подграфов*. *Наследственный класс* графов — это класс, замкнутый относительно взятия подграфов. Такой класс графов иногда называют *монотонным* [7].

З а м е ч а н и е 1. Под наследственностью класса иногда понимается его замкнутость только относительно подсистем (в случае графов — замкнутость относительно порожденных подграфов). Введенное выше понятие наследственности класса графов отличается тем, что охватывает подграфы, не являющиеся подсистемами.

В дальнейшем нам потребуется следующий критерий наследственности. Аналогичное утверждение для классов графов, определенных в терминах запрещенных миноров, можно найти в книге [2, предложение 12.4.1].

Теорема 3. *Класс графов \mathbf{K} является наследственным тогда и только тогда, когда он может быть определен в терминах запрещенных подграфов.*

Доказательство. Необходимость. Пусть \mathbf{K} — наследственный класс графов, \mathbf{H} — дополнение к классу \mathbf{K} в классе всех графов. Тогда $\mathbf{K} = \text{Forb}(\mathbf{H})$.

Достаточность очевидна.

Теорема доказана.

2. Аксиоматизируемость наследственных классов графов

Утверждения 1 и 2 допускают следующее обобщение, которое легко доказывается от противного.

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{K} = \text{Forb}(\mathbf{H})$, причем все графы класса \mathbf{H} конечны, G — счетно бесконечный граф, каждый конечный подграф которого принадлежит классу \mathbf{K} . Тогда G также принадлежит классу \mathbf{K} .*

Замечание 2. Любой наследственный класс графов $\mathbf{K} = \text{Forb}(\mathbf{H})$, определяемый в терминах конечных запрещенных подграфов, является аксиоматизируемым.

Данное замечание следует из теорем 3 и 4. Аксиоматика такого класса графов содержит аксиомы теории графов и некоторое множество аксиом $\{\theta\}$, каждая из которых соответствует какому-либо из запрещенных подграфов (и всем изоморфным ему графам класса \mathbf{H}). То есть $\neg\theta$ является экзистенциальным предложением вида (1.1), его единственный конъюнкт ψ содержит условия попарного различия всех переменных и не содержит множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий критерий.

Утверждение 3 [5, теорема 5]. *Пусть \mathbf{K} — аксиоматизируемый класс алгебраических систем сигнатуры Σ . Класс \mathbf{K} \forall -аксиоматизируем тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подсистем.*

В силу этого критерия можно сделать следующий вывод.

Замечание 3. Любой аксиоматизируемый наследственный класс графов является \forall -аксиоматизируемым.

Приведем следующий критерий универсальной аксиоматизируемости класса алгебраических систем сигнатуры Σ , различные модификации которого хорошо известны [8; 15].

Утверждение 4 [12, lemma 1]. *Класс \mathbf{K} является \forall -аксиоматизируемым классом Σ -систем тогда и только тогда, когда для него существует класс \mathbf{H} запрещенных конечных подсистем.*

Переформулируя данное утверждение для графов, получим следующую теорему.

Теорема 5. *Класс \mathbf{K} графов является \forall -аксиоматизируемым классом тогда и только тогда, когда для него существует класс \mathbf{H} запрещенных конечных порожденных подграфов.*

Теорема 5, по существу, является критерием универсальной аксиоматизируемости наследственных классов графов, определенных в терминах запрещенных порожденных подграфов. Однако существуют наследственные классы графов, для которых вышеуказанный критерий непосредственно неприменим, поскольку они определяются в терминах запрещенных непорожденных подграфов. Примерами таких классов, в частности, являются:

- класс планарных графов — запрещенными подграфами являются все графы, гомеоморфные K_5 или $K_{3,3}$;

- класс двудольных графов — запрещенными подграфами являются все циклы нечетной длины;
- класс графов максимальной степени, не превосходящей фиксированного $p \in \mathbb{N}$ (где $p \geq 2$) — запрещенными подграфами являются все графы, изоморфные звездам $K_{1,p+1}$.

Поэтому было бы естественно получить критерий универсальной аксиоматизируемости для наследственных классов графов, определенных в терминах непорожденных запрещенных подграфов. Сформулируем и докажем соответствующую теорему.

Теорема 6. *Наследственный класс графов \mathbf{K} является \forall -аксиоматизируемым тогда и только тогда, когда $\mathbf{K} = \text{Forb}(\mathbf{H})$, где \mathbf{H} — класс, состоящий из конечных запрещенных подграфов.*

Доказательство. Необходимость. Поскольку \mathbf{K} является \forall -аксиоматизируемым, то любая его аксиома может считаться \forall -предложением. Тогда множество его запрещенных подграфов, которое существует по теореме 3, можно задать следующим образом.

Для каждой аксиомы φ ее отрицание $\neg\varphi$ имеет вид $\exists x_1 \dots \exists x_n \psi$, где ψ — бескванторная формула. Очевидно, что можно определить конечное множество \mathbf{H}_φ всех графов с числом вершин от 1 до n , на которых предложение $\neg\varphi$ истинно. Тогда, объединив множества \mathbf{H}_φ для всех аксиом, получим семейство \mathbf{H} конечных запрещенных подграфов для данного класса.

Достаточность. Аксиоматизируемость произвольного наследственного класса графов, определяемого в терминах конечных запрещенных подграфов, была установлена в замечании 2. Из замечания 3 следует его \forall -аксиоматизируемость.

Теорема доказана.

В качестве примеров \forall -аксиоматизируемых наследственных классов графов рассмотрим классы планарных и двудольных графов. С помощью теоремы Куратовского (см. теорему 1) можно аксиоматизировать класс планарных графов на логическом языке первого порядка. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения:

$$P_0(x, y) = E(x, y),$$

$$P_1(x, y, z_1) = E(x, z_1) \wedge E(z_1, y),$$

$$P_2(x, y, z_1, z_2) = E(x, z_1) \wedge E(z_1, z_2) \wedge E(z_2, y),$$

и т. д.

С помощью этих обозначений сформулируем предложения $\varphi_{k_1 \dots k_{10}}$, означающие существование подграфа, гомеоморфного K_5 (переменные x_1, \dots, x_5 соответствуют вершинам графа K_5):

$$\begin{aligned} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \exists z_{1,1} \dots \exists z_{1,k_1} \dots \exists z_{10,1} \dots \exists z_{10,k_{10}} \left[\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \bigwedge_{\substack{p=1, \dots, 10 \\ q=1, \dots, k_p}} (x_i \neq z_{p,q}) \right. \\ & \left. \wedge \bigwedge_{p \neq s \vee q \neq t} (z_{p,q} \neq z_{s,t}) \wedge P_{k_1}(x_1, x_2, z_{1,1}, \dots, z_{1,k_1}) \wedge \dots \wedge P_{k_{10}}(x_4, x_5, z_{10,1}, \dots, z_{10,k_{10}}) \right], \end{aligned}$$

где $k_1, \dots, k_{10} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Аналогично записываются предложения $\psi_{k_1 \dots k_9}$, означающие существование подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$ (переменные x_1, x_3, x_5 соответствуют вершинам одной доли, x_2, x_4, x_6 — вершинам другой доли графа $K_{3,3}$):

$$\begin{aligned} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 \exists x_6 \exists z_{1,1} \dots \exists z_{1,k_1} \dots \exists z_{9,1} \dots \exists z_{9,k_9} \left[\bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \right. \\ & \left. \wedge \bigwedge_{\substack{p=1, \dots, 9 \\ q=1, \dots, k_p}} (x_i \neq z_{p,q}) \wedge \bigwedge_{p \neq s \vee q \neq t} (z_{p,q} \neq z_{s,t}) \right] \end{aligned}$$

$$\wedge P_{k_1}(x_1, x_2, z_{1,1}, \dots, z_{1,k_1}) \wedge P_{k_2}(x_1, x_4, z_{2,1}, \dots, z_{2,k_2}) \wedge \dots \wedge P_{k_9}(x_5, x_6, z_{9,1}, \dots, z_{9,k_9}) \Big],$$

где $k_1, \dots, k_9 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Таким образом, аксиоматика класса планарных графов содержит аксиомы теории графов и счетное множество аксиом $\neg\varphi_{k_1\dots k_{10}}$ и $\neg\psi_{k_1\dots k_9}$.

Определим на языке теории моделей и класс двудольных графов. С помощью теоремы Кёнига (см. теорему 2) аксиоматизируем класс двудольных графов. Запишем предложение ξ_i , означающее существование подграфа — цикла нечетной длины $2i + 1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_{2i+1} \left[\bigwedge_{j \neq k} (x_j \neq x_k) \wedge \bigwedge_{j=1, \dots, 2i} E(x_j, x_{j+1}) \wedge E(x_{2i+1}, x_1) \right].$$

Тогда аксиоматика класса двудольных графов содержит аксиомы теории графов и счетное множество аксиом $\neg\xi_i$.

Утверждение 5. *Классы планарных и двудольных графов рекурсивно аксиоматизируемы.*

Доказательство. Приведем общую схему алгоритма, подтверждающего рекурсивную аксиоматизируемость данных классов графов. Рассмотрим аксиомы $\{\theta\}$, соответствующие запрещенным подграфам этих классов (в случае планарных графов это аксиомы $\neg\varphi_{kl\dots t}$ и $\neg\psi_{kl\dots s}$, в случае двудольных графов — аксиомы $\neg\xi_i$).

На вход алгоритму подается произвольное предложение φ сигнатуры Σ . Чтобы данное предложение принадлежало множеству $\{\theta\}$, оно должно соответствовать какому-либо запрещенному подграфу. Его отрицание в этом случае имеет вид $\exists x_1 \dots \exists x_n \psi$, где ψ — конъюнкт, содержащий условия попарного различия всех переменных и не содержащий множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей. На первом шаге алгоритм проверяет, выполнены ли эти условия для предложения φ . Если выполнены, то переходим на следующий шаг, иначе $\varphi \notin \{\theta\}$.

Аксиомы $\{\theta\}$ классов планарных и двудольных графов могут быть упорядочены таким образом, что все аксиомы, содержащие m переменных, будут идти раньше, чем аксиомы, содержащие $m + 1$ переменных, причем это упорядочение может быть осуществлено для сколь угодно большого числа переменных. На втором шаге алгоритма для предложения φ нужно просмотреть все аксиомы, содержащие n переменных и проверить, не совпадает ли одна из них с φ . Данная проверка позволит сделать окончательный вывод о принадлежности φ множеству аксиом $\{\theta\}$.

Утверждение доказано.

3. Разрешимость универсальных теорий наследственных классов графов

Универсальные теории занимают особое место в теории моделей. С помощью метода скелемизации любая теория может быть расширена до универсально аксиоматизируемой теории путем расширения сигнатуры [4]. Однако данная процедура является сугубо теоретической, поскольку ее применение часто приводит к заметному усложнению теории. Тем не менее ряд задач, сформулированных на языке теории моделей, приводит к изучению моделей универсальных теорий.

При рассмотрении любой теории важное значение имеет вопрос о ее разрешимости. Положительный ответ на него для теории какого-либо класса \mathbf{K} алгебраических систем позволяет сделать вывод о принципиальной возможности получения исчерпывающего перечня свойств, присущих всем системам класса \mathbf{K} . Поскольку разрешимые теории в чистом виде встречаются довольно редко, вопрос о разрешимости универсальных теорий является более чем актуальным.

Неразрешимость теории графов была установлена И. А. Лавровым (см. [10, теорема 3.3.3; 6]). Естественно возникают вопросы о разрешимости универсальной теории графов, а также универсальных теорий различных классов графов.

Теорема 7. 1) *Универсальная теория графов разрешима.*

2) *Универсальная теория произвольного рекурсивно аксиоматизируемого наследственного класса графов разрешима.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что первое утверждение теоремы является частным случаем второго утверждения — в классе всех графов множество конечных запрещенных подграфов пусто. Поэтому будем доказывать только второе утверждение. Для этого рассмотрим следующий алгоритм проверки предложения на принадлежность \forall -теории.

Пусть T — универсальная теория произвольного наследственного класса графов \mathbf{K} , определенного в терминах конечных запрещенных подграфов. На вход алгоритму подается произвольное универсальное предложение φ . Его отрицание $\neg\varphi$ преобразуется в эквивалентное на классе всех графов предложение, находящееся в предваренной дизъюнктивной форме (ДФ). Алгоритм пытается построить граф класса \mathbf{K} , на котором предложение $\neg\varphi$ будет истинно. Если удастся, то предложение φ не принадлежит универсальной теории T , и алгоритм выдает ответ НЕТ. Если же это невозможно, то φ принадлежит этой теории, и алгоритм выдает ответ ДА.

А л г о р и т м.

Шаг 1. Для универсального предложения φ формулируется предложение $\neg\varphi$. Это будет экзистенциальное предложение, т. е. $\neg\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n \psi$, где ψ — бескванторная формула. Затем $\neg\varphi$ преобразуется в эквивалентное предложение $\neg\varphi_1$, находящееся в предваренной ДФ: $\neg\varphi_1 = \exists x_1 \dots \exists x_n (\psi_1 \vee \dots \vee \psi_m)$, где ψ_i — конъюнкты, $i = 1, \dots, m$.

Шаг 2. Алгоритм последовательно просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_1$. Если конъюнкт ψ_i содержит множитель $E(x, y)$, то в этот конъюнкт добавляется множитель $x \neq y$ в случае его отсутствия. В итоге получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_2$.

Шаг 3. Алгоритм просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_2$. Если в каком-то конъюнкте ψ_i содержатся переменные x и y , но нет ни множителя $x = y$, ни множителя $x \neq y$, то алгоритм заменяет конъюнкт ψ_i на дизъюнкцию $[\psi_i \wedge (x = y)] \vee [\psi_i \wedge (x \neq y)]$. Эта процедура продолжается, пока возможно. Таким образом получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_3$.

Шаг 4. В каждом конъюнкте ψ_i предложения $\neg\varphi_3$, содержащем множитель $x = y$, алгоритм заменяет все вхождения переменной y на x в остальных множителях конъюнкта ψ_i и удаляет исходное равенство. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не исключатся все равенства. В итоге получается эквивалентное предложение $\neg\varphi_4$ в предваренной ДФ, в котором каждый конъюнкт содержит условие попарного различия всех входящих в него переменных.

Шаг 5. Предложение $\neg\varphi$ в ДФ будет истинно для графа из \mathbf{K} , если на этом графе истинным будет хотя бы один из конъюнктов ψ_i предложения $\neg\varphi_4$. Алгоритмом последовательно просматриваются все конъюнкты ψ_i и удаляются те из них, которые ложны на любом графе. Признаки этих конъюнктов:

- 1) конъюнкт содержит множитель $x \neq x$;
- 2) конъюнкт содержит множитель $E(x, x)$;
- 3) конъюнкт одновременно содержит множители $E(x, y)$ и $\neg E(x, y)$;
- 4) конъюнкт одновременно содержит множители $E(x, y)$ и $\neg E(y, x)$.

Если все конъюнкты предложения $\neg\varphi_4$ удалены на этом шаге, то предложение φ истинно для всех графов и, следовательно, принадлежит универсальной теории T . В этом случае алгоритм заканчивает работу и выдает ответ ДА. Если же какие-то конъюнкты ψ_i предложения $\neg\varphi_4$ исключить не удалось, то они составят новое экзистенциальное предложение $\neg\varphi_5$, эквивалентное предложению $\neg\varphi_4$ на классе всех графов. В этом случае алгоритм переходит на шаг 6.

Шаг 6. Алгоритм последовательно просматривает все конъюнкты предложения $\neg\varphi_5$. Для текущего конъюнкта ψ_i строится граф с минимальным числом ребер, на котором этот конъюнкт будет истинен. Затем идет проверка этого графа на принадлежность классу \mathbf{K} :

- Если построенный граф принадлежит классу \mathbf{K} , то алгоритм завершает свою работу и выдает ответ НЕТ.
- Если построенный граф не принадлежит классу \mathbf{K} , то осуществляется переход к следующему конъюнкту.
- Если все конъюнкты просмотрены и ни для одного из них не удалось построить модели из класса \mathbf{K} , то алгоритм заканчивает свою работу и выдает ответ ДА.

Для любого конъюнкта ψ_i предложения $\neg\varphi_5$ можно построить n -вершинный граф G , на котором этот конъюнкт будет истинен. Его симметричную матрицу смежности обозначим через A . Вершины графа G находятся во взаимно однозначном соответствии с переменными конъюнкта, на главной диагонали матрицы A стоят нули. Если матрица смежности не заполняется до конца по условию конъюнкта, то алгоритм дозаполняет ее нулями, исключая таким образом дополнительную возможность появления в рассматриваемом графе запрещенных подграфов класса \mathbf{K} .

Чтобы убедиться в принадлежности n -вершинного графа G классу \mathbf{K} , нужно рассмотреть все аксиомы θ , которые соответствуют запрещенным подграфам, имеющим не более n вершин. Для этого перебираются все предложения, содержащие не более n переменных, отрицания которых имеют вид $\exists x_1 \dots \exists x_m \psi$, где ψ — конъюнкт, содержащий условия попарного различия всех переменных и не содержащий множителей вида $\neg E(x_i, x_j)$ и повторяющихся множителей. При рекурсивной аксиоматизируемости класса \mathbf{K} среди этих предложений можно определить аксиомы.

Для выяснения того, не содержит ли граф G запрещенных подграфов, нужно проверить, все ли предложения $\neg\theta$ ложны на данном графе. С этой целью для каждой аксиомы θ , содержащей m переменных ($m \leq n$), рассматриваются всевозможные соответствия между переменными x_1, x_2, \dots, x_m аксиомы θ и вершинами $1, 2, \dots, n$ графа (см. таблицу из примера 2 для $m = 3, n = 4$). Для каждого соответствия проверяется ложность $\neg\theta$ на матрице смежности графа.

По окончании работы алгоритма для предложения $\neg\varphi$ будет построена модель — граф класса \mathbf{K} либо будет доказана невозможность построения такой модели. Таким образом, будет получен ответ на вопрос о принадлежности универсального предложения φ теории T .

Теорема 7 доказана.

Следствие. *Универсальные теории планарных и двудольных графов разрешимы.*

Данное следствие справедливо в силу утверждения 5.

Следующие простые примеры помогут наглядно продемонстрировать работу алгоритма из теоремы 7.

Пример 1. T — универсальная теория графов. Предложение φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 [(x_1 = x_2) \vee (x_1 \neq x_3) \vee E(x_1, x_2) \vee \neg E(x_2, x_3)].$$

На шаге 1 формулируется его отрицание $\neg\varphi$, которое совпадает с $\neg\varphi_1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 = x_3) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

После выполнения шага 2 получаем предложение $\neg\varphi_2$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 = x_3) \wedge (x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge E(x_2, x_3) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

Предложение $\neg\varphi_3$, построенное на шаге 3, совпадает с $\neg\varphi_2$.

На шаге 4 получаем предложение $\neg\varphi_4$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_1) \wedge E(x_2, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_2)].$$

На шаге 5 единственный конъюнкт $\neg\varphi_4$ будет удален, что позволит сделать вывод о принадлежности предложения φ универсальной теории графов.

Пример 2. T — универсальная теория двудольных графов. Предложение φ имеет вид

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 \forall x_4 [(x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3) \vee (x_2 = x_4) \vee (x_3 = x_4) \\ \vee E(x_1, x_4) \vee \neg E(x_1, x_2) \vee \neg E(x_2, x_3) \vee \neg E(x_3, x_4)].$$

На шаге 1 формулируется его отрицание $\neg\varphi$, которое совпадает с $\neg\varphi_1$:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 [(x_1 \neq x_2) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4) \wedge (x_3 \neq x_4) \\ \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4)].$$

Оно состоит из единственного конъюнкта, что несколько упростит остальные шаги алгоритма.

Предложение $\neg\varphi_2$, построенное на шаге 2, совпадает с $\neg\varphi_1$.

На шаге 3 алгоритм вначале заменит единственный конъюнкт ψ предложения $\neg\varphi_2$ дизъюнкцией $(\psi \wedge (x_1 = x_3)) \vee (\psi \wedge (x_1 \neq x_3))$, а затем эту дизъюнкцию заменит на следующую:

$$(\psi \wedge (x_1 = x_3) \wedge (x_1 = x_4)) \vee (\psi \wedge (x_1 = x_3) \wedge (x_1 \neq x_4)) \\ \vee (\psi \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 = x_4)) \vee (\psi \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_1 \neq x_4)).$$

После удаления равенств на шаге 4 будет получено предложение $\neg\varphi_4$, состоящее из четырех конъюнктов:

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \left[(x_1 \neq x_2) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge E(x_1, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1) \right. \\ \wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j = 1, 2, 4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_1) \wedge E(x_1, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4) \\ \wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j = 1, 2, 3}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1) \\ \left. \wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j = 1, 2, 3, 4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4) \right].$$

Соответствия между переменными аксиомы θ и вершинами графа

№	x_1	x_2	x_3
1	1	2	3
2	1	2	4
3	1	3	2
4	1	3	4
5	1	4	2
6	1	4	3
...
23	4	3	1
24	4	3	2

На шаге 5 алгоритмом будут удалены первые два конъюнкта предложения $\neg\varphi_4$ как тождественно ложные на графах. В итоге предложение $\neg\varphi_5$ примет вид

$$\begin{aligned} & \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \left[\bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j=1,2,3}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_1) \wedge \neg E(x_1, x_1) \right. \\ & \left. \wedge \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j=1,2,3,4}} (x_i \neq x_j) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge \neg E(x_1, x_4) \right]. \end{aligned}$$

На шаге 6 при просмотре первого конъюкта будет построен граф K_3 , его матрица смежности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что этот граф не двудольный, так как является одним из запрещенных подграфов в классе двудольных графов. Для него нарушено условие аксиомы $\neg\xi_1$ — единственной аксиомы класса двудольных графов, выполнимость которой нужно проверить, поскольку число ее переменных не превосходит числа переменных конъюкта.

При просмотре второго конъюкта будет построена цепь длины 3 с ребрами (1, 2), (2, 3) и (3, 4), ее матрица смежности имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\neg\xi_1$ — единственная аксиома класса двудольных графов, выполнимость которой необходимо проверить. Формулируем для этой аксиомы ее отрицание ξ_1 :

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 [(x_1 \neq x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_3) \wedge E(x_1, x_2) \wedge E(x_1, x_3) \wedge E(x_2, x_3)].$$

Рассмотрим всевозможные соответствия между переменными аксиомы $\neg\xi_1$ и вершинами графа (см. таблицу). Чтобы рассматриваемый граф принадлежал классу двудольных графов, предложение ξ_1 должно быть ложно на нем для всех соответствий, т. е. этот граф не должен содержать цикла длины 3. Очевидно, что так оно и есть. Рассматриваемый граф не содержит циклов нечетной длины. Поэтому данный граф принадлежит классу двудольных графов.

Таким образом, существует двудольный граф, на котором истинно предложение $\neg\varphi$, т. е. исходное предложение φ не принадлежит универсальной теории двудольных графов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Горбунов В.А. Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Науч. кн., 1999. 368 с.
2. Дистель Р. Теория графов. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002. 336 с.
3. Зыков А.А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 384 с.
4. Ершов Ю.Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980. 416 с.
5. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М.: Наука, 1987. 336 с.
6. Лавров И.А. Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых элементарных теорий // Алгебра и логика. 1963. Т. 2, № 1. С. 5–18.
7. Малышев Д.С. Критические классы графов для задачи о реберном списковом ранжировании // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 5. С. 59–76.
8. Мальцев А.И. Универсально аксиоматизируемые подклассы локально конечных классов моделей // Сиб. мат. журн. 1967. № 5. С. 1005–1014.

9. **Уилсон Р.** Введение в теорию графов. М.: Мир, 1977. 208 с.
10. Элементарные теории / Ю.Л. Ершов, И.А. Лавров, А.Д. Тайманов, М.А. Тайцлин // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 4. С. 37–108.
11. **Bozapalidis A., Kalampakas A.** An axiomatization of graphs // Acta inform. 2004. Vol. 41, no. 1. P. 19–61.
12. **Caicedo X.** Finitely axiomatizable quasivarieties of graphs // Algebra Universalis. 1995. Vol. 34, no. 2. P. 314–321.
13. Formalization of planar graphs / M. Yamamoto, S. Nishizaki, M. Hagiya, Y. Toda // 8th Int. Workshop on Higher Order Logic, Theorem Proving and Its Applications. Berlin: Springer, 1995. P. 369–384. (Lecture Notes in Comput. Sci.; vol. 971.)
14. **Razborov A.A.** Flag algebras // J. Symbolic Logic. 2007. Vol. 72, no. 4. P. 1239–1282.
15. **Tarski A.** Contributions to the theory of models I (II) // Indagationes Math. 1954. Vol. 16. P. 572–581; 582–583. (Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.)
16. **Taylor W.** Atomic compactness and graph theory // Fund. Math. 1969. Vol. 65. P. 139–145.

Ильев Артем Викторович
аспирант

Поступила 27.11.2014

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: artyom_iljev@mail.ru

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ¹**А. Л. Казаков, Св. С. Орлов**

Статья посвящена нахождению инвариантных решений нелинейного уравнения теплопроводности (фильтрации) без источников и стоков при степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры в случае одной пространственной переменной. Процедура построения сводится к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью при старшей производной, для которых доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций (в виде сходящегося степенного ряда). В одном из частных случаев получена оценка области сходимости данного ряда.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, нелинейное уравнение теплопроводности (фильтрации), инвариантное решение, задача Коши.

A. L. Kazakov, S. S. Orlov. On some exact solutions of the nonlinear heat equation.

The paper is devoted to finding invariant solutions of the nonlinear heat (filter) equation without sources or sinks in the case of one spatial variable and a power dependence of the thermal conduction coefficient on the temperature. The construction procedure is reduced to Cauchy problems for ordinary differential equations with a singularity at the highest derivative. An existence and uniqueness theorem is proved for solutions of such problems in the class of analytic functions (in the form of a converging series). An estimate is obtained for the convergence domain of this series in one particular case.

Keywords: partial differential equations, nonlinear heat (filter) equation, invariant solution, Cauchy problem.

Введение

С нелинейными уравнениями с частными производными [1] приходится встречаться в различных областях физики, механики, химии, биологии и так далее – приложения весьма многочисленны. При этом лишь в исключительных случаях удается получить общее решение таких уравнений. Поэтому обычно исследователи ограничиваются поиском и анализом частных решений, которые принято называть точными. Последние играют немаловажную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей явлений и процессов в различных областях естествознания.

На данный момент разработано множество методов нахождения точных решений нелинейных уравнений с частными производными. Одним из них является классический метод группового анализа (поиска симметрий), который позволяет получать инвариантные относительно некоторых преобразований решения исследуемого уравнения. Истоки группового анализа дифференциальных уравнений следует искать в фундаментальных трудах норвежского математика Софуса Ли. Дальнейшее развитие теоретико-групповых методов анализа дифференциальных уравнений связано с работами многих известных математиков, среди которых особо выделяются фундаментальные работы Л. В. Овсянникова [2] и его учеников (см., например, [3]).

Объектом исследования в настоящей статье является нелинейное уравнение теплопроводности (фильтрации) [4] в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры [5]. К настоящему времени существует довольно значительное количество работ, посвященных нахождению его точных решений и исследованию симметричных свойств [6; 7].

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 16-01-00608 А, 16-31-00291 мол_а).

Групповой анализ является, пожалуй, наиболее популярным, но далеко не единственным методом нахождения точных решений нелинейных эволюционных уравнений. Полный обзор исследований подобной направленности вряд ли может быть дан в журнальной статье, укажем в качестве примера “геометрический метод”, который развивается в отделе прикладных задач Института математики и механики УрО РАН [8], и предложенный О. В. Капцовым [9, гл. 3] метод линейных определяющих уравнений, который в случаях, когда уравнение допускает бедную группу преобразований, зачастую оказываются более действенным. Например, с использованием указанных подходов для нелинейного уравнения теплопроводности с источником найдены новые точные решения.

Настоящая статья посвящена нахождению автомодельных решений нелинейного уравнения теплопроводности (фильтрации) без источников и стоков. Рассмотрен случай одной пространственной переменной, которая имеет смысл расстояния до некоторой точки, прямой или плоскости. Построение сводится к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностью при старшей производной. Доказана теорема, обеспечивающая существование и единственность нетривиальных решений таких задач в классе аналитических функций. Получена оценка радиуса сходимости ряда в одном из частных случаев.

1. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение, описывающее распространение тепла в случае степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры, а также фильтрацию идеального политропного газа в пористой среде. В литературе данное уравнение встречается под названием “the porous medium equation” [5]. В случае одной пространственной переменной это уравнение имеет вид

$$u_t = uu_{xx} + \frac{1}{\sigma}u_x^2 + \frac{\nu}{x}uu_x, \quad \nu \in \{0, 1, 2\}, \quad \sigma \in \mathbb{R}_{>0}, \quad (1.1)$$

где $u \stackrel{\text{def}}{=} u(t, x)$, t — переменная времени, x — пространственная переменная. Здесь и далее индекс u функции означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Важной и интересной с точки зрения приложений разновидностью решений нелинейного уравнения теплопроводности являются тепловые волны, распространяющиеся по холодному (нулевому) фону с конечной скоростью. С геометрической точки зрения это две гиперповерхности: возмущенное решение $u = \varphi(t, x) > 0$ и холодный фон $u \equiv 0$, непрерывно состыкованные вдоль некоторой достаточно гладкой линии $x = a(t)$, называемой фронтом.

Первое упоминание о решениях типа тепловых волн, имеющих конечную скорость распространения, в нелинейном случае встречается в работе Я. Б. Зельдовича, А. С. Компанейца [10]. Отметим, что сам вид решений типа тепловой волны делает целесообразным рассмотрение начально-краевых задач, предполагающих обращение в нуль искомой функции в начальный момент времени. Автомодельные решения указанного типа, описывающие локализацию режимов с обострением, были получены в научной школе А. А. Самарского [11].

Построение тепловых волн в классе кусочно-аналитических функций в те же годы было выполнено А. Ф. Сидоровым [4], результаты которого были развиты представителями его научной школы [12]. В частности, для начально-краевых задач специального вида был доказан ряд теорем существования и единственности решений (как одномерных, так и многомерных), имеющих вид аналитических тепловых волн, распространяющихся по холодному фону с конечной скоростью [12; 13]. Также с использованием метода согласованных [14] и характеристических рядов [15] были построены новые решения нелинейных параболических уравнений и систем. Помимо аналитического выполнялось и численное исследование указанных задач с помощью разностных схем [16] и на основе гранично-элементного подхода [17; 18].

В настоящей статье для уравнения (1.1) в случаях плоской, цилиндрической и сферической симметрии ($\nu = 0$, $\nu = 1$ и $\nu = 2$ соответственно) производится построение некоторых точных

решений, в том числе имеющих вид тепловой волны.

Следует отметить, что в качестве параметров ν и σ , вообще говоря, могут быть взяты любые вещественные числа, однако рассмотренный нами случай представляется наиболее содержательным с точки зрения приложений.

2. Инвариантные решения

Классический метод исследования симметрий (метод группового анализа) дифференциальных уравнений позволяет найти преобразования, относительно которых рассматриваемое уравнение является инвариантным, а также новые переменные, при переходе к которым уравнение существенно упрощается. Применим его для исследования уравнения (1.1).

Справедливы следующие результаты.

Утверждение 1. Уравнение (1.1) в случае плоской симметрии ($\nu = 0$) допускает четыре различных инфинитезимальных оператора:

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_t, \quad X_3 = x\partial_x + 2t\partial_t, \quad X_4 = x\partial_x + 2u\partial_u. \quad (2.1)$$

Доказательство. При $\nu = 0$ уравнение (1.1) является частным случаем нелинейного уравнения теплопроводности $u_t = [k(u)u_x]_x$ (см. введение) которое, как известно [2], в случае $k(u) = u$ допускает операторы (2.1). \square

Утверждение 2. Уравнение (1.1) в случаях цилиндрической и сферической симметрии ($\nu \in \{1, 2\}$) допускает три различных инфинитезимальных оператора:

$$X_2 = \partial_t, \quad X_3 = x\partial_x + 2t\partial_t, \quad X_4 = x\partial_x + 2u\partial_u.$$

Доказательство. Справедливость утверждения также без труда устанавливается с помощью стандартных методов группового анализа [2]. При этом единственное отличие от плоскосимметричного случая состоит в том, что сдвиг по пространственной координате уже не является инвариантным преобразованием. \square

Построим инвариантные решения уравнения (1.1), генерируемые операторами (2.1). Для этого требуется рассмотреть линейные уравнения с частными производными первого порядка

$$X_n I = 0, \quad I \stackrel{\text{def}}{=} I(t, u, x), \quad n = \overline{1, 4}.$$

1°. $X_1 I = 0$. В этом случае решение имеет вид $u = C \in \mathbb{R}$.

2°. $X_2 I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = w(x)$. Подставляя его в (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ww_{xx} + \frac{1}{\sigma}w_x^2 + \frac{\nu}{x}ww_x = 0. \quad (2.2)$$

Очевидно, что одним из решений уравнения (2.2) является произвольная постоянная. Пусть $w \neq 0$, $w_x \neq 0$. Разделив (2.2) на ww_x , приходим к уравнению в полных дифференциалах, решение которого представим как $w(x) = (C_1 + C_2 x^{1-\nu})^{\sigma/(\sigma+1)}$ при $\nu \in \{0, 2\}$ или $w(x) = (C_1 + C_2 \ln x)^{\sigma/(\sigma+1)}$ при $\nu = 1$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Таким образом, уравнение (1.1) имеет решение

$$u(t, x) = \begin{cases} (C_1 + C_2 x^{1-\nu})^{\sigma/(\sigma+1)} & \text{при } \nu \in \{0, 2\}, \\ (C_1 + C_2 \ln x)^{\sigma/(\sigma+1)} & \text{при } \nu = 1. \end{cases}$$

3°. $X_3 I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = w(z)$, $z = xt^{-1/2}$. Подставляя его в (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$ww_{zz} + \frac{1}{\sigma}w_z^2 + \left(\frac{\nu}{z}w + \frac{z}{2}\right)w_z = 0. \quad (2.3)$$

Замена $w(z) = e^s f(s)$, $s = 2 \ln z$, а затем понижение порядка приводят уравнение (2.3) к виду уравнения Абеля второго рода [19].

4°. $X_4 I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = x^2 w(t)$. Подставляя его в (1.1), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w_t = \left(2 + \frac{4}{\sigma} + 2\nu\right) w^2,$$

решением которого является функция $w(t) = \sigma/[C - 2(\nu\sigma + \sigma + 2)t]$, где C — произвольная постоянная. Таким образом, уравнение (1.1) имеет решение

$$u(t, x) = \frac{\sigma x^2}{C - 2(\nu\sigma + \sigma + 2)t}.$$

З а м е ч а н и е 1. Множество инвариантных решений уравнения (1.1) не исчерпывается решениями, генерируемыми только операторами (2.1). Для того чтобы найти все типы неэквивалентных инвариантных решений, нужно построить их оптимальную систему. Оптимальная система одномерных подалгебр алгебры L_4 с базисом (2.1) включает в себя

$$X_1, X_4, X_{1,2} = X_1 + X_2, X_{2,4} = X_2 + cX_4, X_{3,4} = X_3 + cX_4, X_{1,3,4} = X_1 + X_3 - X_4,$$

где $c \in \mathbb{R}$. Можно указать оптимальную систему инвариантных решений уравнения (1.1). Инвариантные относительно преобразований, порожденных X_1 и X_4 , решения построены выше.

5°. $X_{1,2} I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = w(z)$, $z = x - t$.

6°. $X_{2,4} I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = e^{2ct} w(z)$, $z = x e^{-ct}$.

7°. $X_{3,4} I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = t^c w(z)$, $z = x t^{-(c+1)/t}$.

8°. $X_{1,3,4} I = 0$. Инвариантное решение имеет вид $u = t^{-1} w(z)$, $z = x - \ln t^{1/2}$.

Таким образом, в настоящем разделе найдены симметрии для нелинейного уравнения теплопроводности (1.1) при $\nu \in \{0, 1, 2\}$ (утверждения 1, 2) и построена оптимальная система инвариантных решений. Некоторые из представленных решений для случая $\nu = 0$ можно найти в [20, гл. 7]. При $\nu \neq 0$ соответствующие результаты нам ранее не были известны.

3. Решения типа тепловой волны

Для уравнения (1.1) поставим задачу с заданным тепловым фронтом, т. е. потребуем выполнения граничного условия

$$u(t, x) \Big|_{x=a(t)} = 0, \tag{3.1}$$

где $a(t)$ — некоторая известная функция. Целью данного раздела является нахождение допустимых граничных условий вида (3.1) и удовлетворяющих им точных решений уравнения (1.1) (решений типа тепловой волны, распространяющейся по нулевому фону).

Утверждение 3. Если для эволюционного уравнения $u_t = F(x, u, \partial u/\partial x, \partial^2 u/\partial x^2)$ функция $u(t, x) = g(t, x)w(z)$ при $z = x/a(t)$ является решением, то при $z = \ln[x/a(t)]$ эта функция также является решением.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из того, что функциональные коэффициенты при $w(z)$ и ее производных для данных подстановок будут одинаковыми, в чем нетрудно убедиться. □

Опираясь на утверждение 3 и виды инвариантных решений, построенных в разд. 2, сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение 4. Пусть $\nu \in \{0, 1, 2\}$, тогда краевая задача (1.1), (3.1)

1) при $a(t) = C_1 e^{C_2 t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, допускает точное решение типа тепловой волны вида

$$u(t, x) = C_2 x^2 w(z), \quad z = \ln \frac{x}{C_1 e^{C_2 t}},$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + [(\nu\sigma + 3\sigma + 4)w + \sigma] w_z + (2\nu\sigma + 2\sigma + 4)w^2 = 0, \quad (3.2)$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma; \quad (3.3)$$

2) при $a(t) = (C_1 t + C_2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, допускает точное решение типа тепловой волны вида

$$u(t, x) = \frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} x^2 w(z), \quad z = \ln \frac{x}{(C_1 t + C_2)^\alpha},$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + [(\nu\sigma + 3\sigma + 4)w + \sigma] w_z + \left[(2\nu\sigma + 2\sigma + 4)w + \frac{\sigma}{\alpha} \right] w = 0, \quad (3.4)$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть

$$u(t, x) = g(t, x)w(z), \quad z = \ln \frac{x}{a(t)}. \quad (3.6)$$

Учитывая (3.6), найдем производные функции $u(t, x)$, фигурирующие в (1.1):

$$u_t = g_t w - \frac{a_t}{a} g w_z, \quad u_x = g_x w + \frac{g w_z}{x}, \quad u_{xx} = g_{xx} w + \left(\frac{2g_x}{x} - \frac{g}{x^2} \right) w_z + \frac{g w_{zz}}{x^2}. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.6) и (3.7) в уравнение (1.1), предварительно умноженное на σ , приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \sigma \frac{g^2}{x^2} w w_{zz} + \frac{g^2}{x^2} w_z^2 + \left[\left((\nu\sigma - \sigma) \frac{g^2}{x^2} + (2\sigma + 2) \frac{g g_x}{x} \right) w + \sigma \frac{a_t}{a} g \right] w_z \\ + \left[\left(\nu\sigma \frac{g g_x}{x} + \sigma g g_{xx} + g_x^2 \right) w - \sigma g_t \right] w = 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы последнее выражение представляло собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $w(z)$, потребуем пропорциональности функциональных коэффициентов

$$\frac{g^2}{x^2}, \quad \frac{a_t}{a} g, \quad \frac{g g_x}{x}, \quad g_x^2, \quad g g_{xx}, \quad g_t. \quad (3.8)$$

Пусть

$$\frac{g^2}{x^2} = B \frac{a_t}{a} g, \quad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

тогда $g(t, x) = 0$ (тривиальное решение не представляет интереса) или $g(t, x) = x^2 a_t / a$ (для определенности будем полагать $B = 1$). С учетом последнего получаем

$$\frac{g g_x}{x} = g g_{xx} = 2 \left(\frac{a_t}{a} \right)^2 x^2, \quad g_x^2 = 4 \left(\frac{a_t}{a} \right)^2 x^2, \quad g_t = \left(\frac{a_{tt}}{a} - \frac{a_t^2}{a^2} \right) x^2.$$

Очевидно, что коэффициенты (3.8) являются попарно пропорциональными, если

$$\frac{a_{tt}}{a} = C \frac{a_t^2}{a^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t) = (C_1 t + C_2)^{1/(1-C)} & \text{при } C \neq 1, \\ a(t) = C_1 e^{C_2 t} & \text{при } C = 1. \end{cases}$$

Итак, для задачи (1.1), (3.1) найдено точное решение типа тепловой волны

$$u(t, x) = \frac{a_t}{a} x^2 w(z), \quad z = \ln \frac{x}{a(t)}, \quad (3.9)$$

где $a(t) = (C_1 t + C_2)^\alpha$ или $a(t) = C_1 e^{C_2 t}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, а функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} \sigma w w_{zz} + w_z^2 + [(\nu\sigma + 3\sigma + 4)w + \sigma] w_z + \left[(2\nu\sigma + 2\sigma + 4)w - \sigma \left(\frac{a a_{tt}}{a_t^2} - 1 \right) \right] w &= 0, \\ w(0) = 0, \quad w_z(0) &= -\sigma. \end{aligned}$$

В случае $a(t) = C_1 e^{C_2 t}$ решение (3.9) принимает вид

$$u(t, x) = C_2 x^2 w(z), \quad z = \ln \frac{x}{C_1 e^{C_2 t}},$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши (3.2), (3.3).

Если $a(t) = (C_1 t + C_2)^\alpha$, то решение (3.9) вычисляется следующим образом:

$$u(t, x) = \frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} x^2 w(z), \quad z = \ln \frac{x}{(C_1 t + C_2)^\alpha},$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши (3.4), (3.5).

Утверждение доказано. □

Отметим, что в случае плоской симметрии также имеет место

Утверждение 5. Пусть $\nu = 0$, тогда краевая задача (1.1), (3.1)

1) при $a(t) = C_1 t + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, допускает линейное решение типа тепловой волны

$$u(t, x) = \sigma C_1 (C_1 t - x + C_2);$$

2) при $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, допускает точное решение типа тепловой волны вида

$$u(t, x) = -\frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} w(z), \quad z = x + \ln(C_1 t + C_2)^\alpha,$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z - \frac{\sigma}{\alpha} w = 0, \quad (3.10)$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma. \quad (3.11)$$

Доказательство. Пусть

$$u(t, x) = g(t, x) w(z), \quad z = x - a(t). \quad (3.12)$$

Определим виды функций $g(t, x)$ и $a(t)$. Подставляя (3.12) в уравнение (1.1), предварительно умноженное на σ , и учитывая, что $\nu = 0$, получаем соотношение

$$\sigma g^2 w w_{zz} + g^2 w_z^2 + [(2\sigma + 2)g g_x w + \sigma a_t g] w_z + [(\sigma g g_{xx} + g_x^2) w - \sigma g_t] w = 0.$$

Для того чтобы последнее выражение представляло собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $w(z)$, потребуем пропорциональности функциональных коэффициентов g^2 , $a_t g$, $g g_x$, g_x^2 , $g g_{xx}$, g_t . Пусть

$$g^2 = B a_t g, \quad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

тогда $g(t, x) = 0$ (тривиальное решение не представляет интереса) или $g(t, x) = a_t$ (для определенности будем полагать $B = 1$). На этом этапе возможны два случая: $a_t = \text{const}$, т. е. $a(t) = C_1 t + C_2$ или $a_t \neq \text{const}$. Во втором случае, получаем $g g_x = g_x^2 = g g_{xx} = 0$, $g_t = a_{tt}$. Потребуем пропорциональности для g^2 и g_t , т. е. $a_t^2 = \alpha a_{tt}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Решая это уравнение, получаем $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Итак, для задачи (1.1), (3.1) в случае $\nu = 0$ найдено точное решение типа тепловой волны

$$u(t, x) = a_t w(z), \quad z = x - a(t), \quad (3.13)$$

где $a(t) = C_1 t + C_2$ или $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, а функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши

$$a_t^2 (\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z) - \sigma a_{tt} w = 0, \quad (3.14)$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma. \quad (3.15)$$

В случае $a(t) = C_1 t + C_2$ задача Коши (3.14), (3.15) принимает вид

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z = 0,$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma,$$

и, очевидно, имеет решение $w(z) = -\sigma z$. Следовательно, одним из решений краевой задачи (1.1), (3.1) при $\nu = 0$ согласно (3.13) является $u(t, x) = \sigma C_1 (C_1 t - x + C_2)$.

Если $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$, то решение (3.13) принимает вид

$$u(t, x) = -\frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} w(z), \quad z = x + \ln(C_1 t + C_2)^\alpha,$$

где функция $w(z)$ определяется как решение задачи Коши (3.10), (3.11).

Утверждение доказано. \square

З а м е ч а н и е 2. Вопрос о конечной разрешимости обыкновенных дифференциальных уравнений (2.3), (3.2), (3.4) и (3.10) (в общем виде) в рамках данной статьи остается открытым и является предметом дальнейших исследований авторов. В настоящее время установлено, что ряд преобразований приводит указанные уравнения к виду уравнений Абеля второго рода [19, с. 93], которые, как известно, не всегда интегрируемы в явном виде.

4. Теорема существования и единственности

Задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым в предыдущем разделе было сведено построение точных решений уравнения (1.1), имеют особенность, поскольку при $z = 0$ обращается в нуль множитель перед старшей производной. Поэтому вопрос о существовании их решений требует дополнительного исследования, которому и посвящен данный раздел. Рассмотрим задачу общего вида

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z + C_1 w w_z + C_2 w^2 + C_3 w = 0, \quad (4.1)$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma, \quad (4.2)$$

где $C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 3}$. Справедлива следующая

Теорема. *Задача (4.1), (4.2) имеет единственное ненулевое аналитическое решение в некоторой окрестности точки $z = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы излагается кратко, поскольку выполняется с использованием стандартной процедуры метода мажорант (см., например, [12]).

Решение задачи Коши (4.1), (4.2) будем строить в виде степенного ряда

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w_n}{n!} z^n, \quad w_n \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d^n}{dz^n} w(z) \right|_{z=0}. \quad (4.3)$$

В этом случае $w_0 = 0$, $w_1 = -\sigma$, а остальные коэффициенты ряда (4.3) однозначно определяются согласно рекуррентному соотношению

$$w_{n+1} = -\frac{1}{\sigma(\sigma n + 1)(n + 1)} \left[\sigma \sum_{k=0}^{n-2} (k + 1)(k + 2)w_{k+2}w_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} (k + 1)(n - k + 1)w_{k+1}w_{n-k+1} + C_1 \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1)w_{k+1}w_{n-k} + C_2 \sum_{k=1}^{n-1} w_k w_{n-k} + C_3 w_n \right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Далее осуществляется переход к новой неизвестной функции $v(z)$ по формуле

$$w(z) = -\sigma z + z^2 v(z). \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.1), приходим к уравнению для функции $v \stackrel{\text{def}}{=} v(z)$

$$Av + Bzv_z + Cz^2v_{zz} = D + zg_1(z, v) + z^2g_2(z, v, v_z) + z^3g_3(z, v, v_z, v_{zz}), \quad (4.5)$$

где $A, B, C \in \mathbb{R}_+$, $D \in \mathbb{R}$, а функции $g_{1,2,3}$ являются аналитическими функциями своих аргументов (конкретный вид этих констант и функций для доказательства несущественен).

Мажорантная задача для уравнения (4.5) имеет вид

$$V_{zz} = E[(G_1)_z + (G_1)_V V_z + G_2 + zG_3], \quad V(0) = V_0, \quad V_z(0) = V_1, \quad (4.6)$$

где

$$E = \max_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \left[\frac{(n-1)n+1}{A+nB+(n-1)nC} \right], \quad G_1 \stackrel{\text{def}}{=} G_1(z, V), \quad G_2 \stackrel{\text{def}}{=} G_2(z, V, V_z), \quad G_3 \stackrel{\text{def}}{=} G_3(z, V, V_z, V_{zz}),$$

$$V_0 > v_0, \quad V_1 > v_1, \quad G_i > g_i, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Докажем, что у задачи (4.6) имеется аналитическое, мажорирующее нуль решение. Положим $z = 0$ и подставим в правую часть уравнения (4.6) V_0, V_1 , тогда $V_2 = V_{zz}(0)$ однозначно определяется из соотношения $V_2 = E[G_{1z}(0, V_0) + G_{1V}(0, V_0)V_1 + G_2(0, V_0, V_1)]$, причем $V_2 > 0$.

Дифференцируя (4.6) по z , а затем выражая V_{zzz} , в конечном счете, приходим к дифференциальному уравнению третьего порядка с аналитической правой частью:

$$V_{zzz} = \frac{E}{1 - Ez(G_3)_{V_{zz}}} [(G_1)_{zV} + 2(G_1)_{zVV}V_z + (G_1)_{zzVV}V_z + (G_1)_{VV}V_{zz} + (G_2)_z + (G_2)_V V_z + (G_2)_{V_z} V_{zz} + (G_3) + z(G_3)_z + z(G_3)_V V_z + z(G_3)_{V_z} V_{zz}]. \quad (4.7)$$

Величины V_0, V_1, V_2 представляют собой начальные условия для уравнения (4.7) и являются строго положительными, значит, по теореме Коши о существовании аналитического решения в некоторой окрестности точки $z = 0$ у задачи (4.6) существует единственное решение — аналитическая, мажорирующая нуль функция $V(z)$. Следовательно, функции $v(z)$ и $w(z)$ также являются аналитическими.

Теорема доказана. □

Поскольку уравнения (3.2), (3.4), (3.10) являются частными случаями уравнения (4.1), то в силу теоремы каждая из задач Коши (3.2), (3.3); (3.4), (3.5); (3.10), (3.11) имеет единственное аналитическое в окрестности $z = 0$ решение.

5. Оценка области существования решения

Доказанная выше теорема обеспечивает локальную разрешимость задач Коши в классе аналитических функций, однако не позволяет оценить область сходимости рядов. В данном разделе этот сложный и содержательный вопрос исследуется для одного частного случая. Рассмотрим задачу Коши

$$\sigma w w_{zz} + w_z^2 + \sigma w_z - \frac{\sigma}{\alpha} w = 0, \quad (5.1)$$

$$w(0) = 0, \quad w_z(0) = -\sigma, \quad (5.2)$$

к которой, как показано ранее, сводится построение решения уравнения (1.1) в случае, когда $\nu = 0$, а уравнение теплового фронта имеет вид $a(t) = -\ln(C_1 t + C_2)^\alpha$.

Построим решение задачи (5.1), (5.2) в виде степенного ряда

$$w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^n, \quad A_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_n}{n!}, \quad w_n \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d^n}{dz^n} w(z) \right|_{z=0}. \quad (5.3)$$

В этом случае $A_0 = 0$, $A_1 = -\sigma$, а остальные коэффициенты ряда (5.3) определяются согласно рекуррентному соотношению

$$A_{n+1} = \frac{1}{\sigma(\sigma n + 1)(n + 1)} \left[\sum_{k=0}^{n-2} ((k + 1)\sigma + n - k)(k + 2)A_{k+2}A_{n-k} - \frac{\sigma}{\alpha} A_n \right], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Для получения оценки радиуса сходимости ряда (5.3) воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Для коэффициентов A_{n+1} степенного ряда (5.3), определяемых из рекуррентного соотношения (5.4), при $n \geq 2$, $\sigma \geq 1$ имеет место оценка

$$|A_{n+1}| < \frac{M^n}{(n + 1)^2}, \quad M = \frac{1}{|\alpha|\sigma}. \quad (5.5)$$

Доказательство. Следует отметить, что для $A_2 = \sigma/[2\alpha(\sigma + 1)]$ при $\alpha > 0$, $\sigma > 1$ оценка (5.5) не выполняется. Это в значительной мере осложняет доказательство леммы.

Доказательство проводится индукцией по $n \geq 2$.

Рассмотрим в качестве базы индукции значения $2 \leq n \leq 5$. Используя формулу (5.4), получаем

$$|A_3| = \frac{\sigma}{6\alpha^2(\sigma + 1)^2(2\sigma + 1)} < \frac{M^2}{(2 + 1)^2}, \quad |A_4| = \frac{\sigma(3\sigma + 5)}{24|\alpha|^3(\sigma + 1)^3(2\sigma + 1)(3\sigma + 1)} < \frac{M^3}{(3 + 1)^2},$$

$$|A_5| = \frac{\sigma(36\sigma^3 + 132\sigma^2 + 143\sigma + 41)}{120\alpha^4(\sigma + 1)^4(2\sigma + 1)^2(3\sigma + 1)(4\sigma + 1)} < \frac{M^4}{(4 + 1)^2},$$

$$|A_6| = \frac{\sigma(360\sigma^4 + 1824\sigma^3 + 3203\sigma^2 + 2232\sigma + 469)}{720|\alpha|^5(\sigma + 1)^5(2\sigma + 1)^2(3\sigma + 1)(4\sigma + 1)(5\sigma + 1)} < \frac{M^5}{(5 + 1)^2}.$$

Можно убедиться, что каждое из представленных неравенств верно для любого $\sigma \geq 1$. База индукции установлена.

Предположим теперь, что формула (5.5) верна для любого $n = m - 1$. Тогда для $n = m \geq 6$ имеем

$$A_{m+1} = \frac{1}{\sigma(\sigma m + 1)(m + 1)} \left[\sum_{k=0}^{m-2} ((k + 1)\sigma + m - k)(k + 2)A_{k+2}A_{m-k} - \frac{\sigma}{\alpha} A_m \right].$$

Введем обозначение

$$B_m = \sum_{k=0}^{m-2} ((k+1)\sigma + m - k)(k+2)A_{k+2}A_{m-k} - \frac{\sigma}{\alpha}A_m$$

и перегруппируем слагаемые следующим образом:

$$B_m = \sum_{k=1}^{m-3} ((k+1)\sigma + m - k)(k+2)A_{k+2}A_{m-k} + 2(m+\sigma)A_2A_m + m(\sigma m - \sigma + 2)A_2A_m - \frac{\sigma}{\alpha}A_m.$$

Подставляя в последнее выражение явный вид коэффициента A_2 и учитывая предположение индукции, получаем

$$|B_m| < M^m \left[\sigma \sum_{k=1}^{m-3} \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{m+2} \sum_{k=1}^{m-3} \frac{1}{k+1} + \frac{\sigma^2(\sigma m - \sigma + 4)}{2(\sigma+1)m} \right].$$

Теперь воспользуемся двумя известными неравенствами:

$$\sum_{k=1}^{m-3} \frac{1}{k+1} \leq \ln \left(\frac{2m-1}{5} \right), \quad \sum_{k=1}^{m-3} \frac{1}{(k+1)^2} < \beta_1 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4}.$$

Последовательность $\frac{2}{m+2} \ln \left(\frac{2m-1}{5} \right)$ ограничена сверху величиной $\beta_2 = 2 \ln(17/5)/11$. Таким образом,

$$\begin{aligned} |A_{m+1}| &< \frac{M^m}{(m+1)^2} \left[\beta_1 \frac{m+1}{\sigma m+1} + \beta_2 \frac{m+1}{\sigma(\sigma m+1)} + \frac{\sigma(\sigma m - \sigma + 4)(m+1)}{2(\sigma+1)m(\sigma m+1)} \right] \\ &< \frac{M^m}{(m+1)^2} \left[\beta_1 + \frac{\beta_2}{\sigma} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\sigma+1)} - \frac{(\sigma-3)(\sigma-1)}{2(\sigma+1)m(\sigma m+1)} \right]. \end{aligned}$$

При $\sigma \geq 1$ имеем, что

$$-\frac{(\sigma-3)(\sigma-1)}{2(\sigma+1)m(\sigma m+1)} \leq \beta_3 = \frac{11}{50} - \frac{\sqrt{266}}{75},$$

в итоге получаем

$$\begin{aligned} |A_{m+1}| &< \frac{M^m}{(m+1)^2} \left[\beta_1 + \frac{\beta_2}{\sigma} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\sigma+1)} - \frac{(\sigma-3)(\sigma-1)}{2(\sigma+1)m(\sigma m+1)} \right] \\ &< \frac{M^m}{(m+1)^2} \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) < \frac{M^m}{(m+1)^2}. \end{aligned}$$

Справедливость предположения индукции установлена. Лемма доказана. \square

Утверждение 6. Степенной ряд (5.3) является сходящимся при $|z| \leq |\alpha|\sigma$, $\sigma \geq 1$.

Доказательство. Поскольку верно неравенство (5.5), то справедлива оценка

$$\sum_{n=3}^{+\infty} |A_n|z^n < S(z) = \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{M^{n-1}}{n^2} z^n.$$

Используя лемму и теорему Адамара о степенном ряде, получаем следующую оценку для радиуса сходимости R ряда (5.3):

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|A_n|}} \geq \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{M^{n-1}}{n^2}}} = \frac{1}{M} = |\alpha|\sigma,$$

т. е. доказано, что ряд (5.3) сходится при $|z| < |\alpha|\sigma$. Покажем, что при $|z| = 1/M = |\alpha|\sigma$ ряд также является сходящимся. Действительно,

$$S(|\alpha|\sigma) = |\alpha|\sigma \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = |\alpha|\sigma \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{5}{4} \right).$$

Таким образом, ряд (5.3) сходится при $|z| \leq |\alpha|\sigma$. Утверждение доказано. \square

Утверждение 6 позволяет уточнить область существования аналитического решения задачи Коши (5.1), (5.2). Полученный результат означает, что решение данной задачи существует и единственно на отрезке $z \in [-|\alpha|\sigma, |\alpha|\sigma]$. Выясним, к каким выводам приводит этот факт для исходной задачи.

Напомним, что в рассматриваемом случае

$$u(t, x) = -\frac{\alpha C_1}{C_1 t + C_2} w(z), \quad z = x + \ln(C_1 t + C_2)^\alpha, \quad t \geq 0.$$

Будем предполагать, что тепловая волна начинает движение из начала координат. Для этого функция $a(t) = -\alpha \ln(C_1 t + C_2)$, задающая фронт тепловой волны, должна удовлетворять условию $a(0) = 0$. Таким образом, $C_2 = 1$, следовательно, $a(t) = -\alpha \ln(C_1 t + 1)$. Поскольку $t \geq 0$, то $a(t)$ будет обладать свойством аналитичности при $0 \leq t \leq 1/C_1$, $C_1 > 0$.

Следует отметить, что в зависимости от знака величины α тепловая волна может иметь два направления движения. Пусть $\alpha < 0$, тогда $u(t, x) \geq 0$, если и только если $z \leq 0$. Поскольку нас интересует аналитическое решение, то предполагаем $\alpha \sigma \leq z \leq 0$. В этом случае можем заключить, что тепловая волна распространяется вправо (первый координатный октант), а область существования аналитического решения имеет вид $0 \leq t \leq 1/C_1$, $0 \leq x \leq -\alpha \ln 2$. При $\alpha > 0$ тепловая волна движется влево (четвертый координатный октант). Этот случай симметричен предыдущему относительно оси t .

З а м е ч а н и е 3. Ограничение $\sigma \geq 1$, разумеется, нарушает общность рассмотрения, однако является вполне обоснованным с точки зрения физики, поскольку для задач фильтрации σ является показателем адиабаты газа, которая, как известно [1], должна быть больше единицы.

Заключение

Подведем итог представленной работы. Нами получены новые точные решения нелинейного уравнения теплопроводности вида (1.1), которые ранее в литературе не встречались. Посредством анализа структуры найденных инвариантных решений выделены классы допустимых граничных условий вида (3.1) уравнения (1.1) как в случае плоской, так и в случаях цилиндрической и сферической симметрии. С учетом этих условий построены краевые задачи (1.1), (3.1) (задачи с заданным тепловым фронтом) и их точные решения типа тепловой волны (утверждения 4, 5 и теорема). В одном из рассмотренных случаев получена оценка области существования решения (утверждение 6).

Задачи такого типа ввиду их важности и содержательности прикладного характера часто исследуются методами вычислительной математики — строятся численные решения. Однако, доказать сходимость применяемых численных методов удается далеко не всегда. Поэтому для установления корректности расчетов точные решения оказываются очень полезными.

Следует отметить, что из соответствующих видов инвариантных решений уравнений эволюционного типа, как показано в работе, можно “извлекать” допустимые граничные условия вида (3.1). Тем самым появляется возможность построения новых краевых задач и их точных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.
2. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
3. Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics / V.K.Andreev, O.V.Kaptsov, V.V.Pukhnachev, A.A.Rodionov. New York : Springer, 2010. 396 p.
4. **Сидоров А.Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
5. **Vazquez J.L.** The porous medium equation: Mathematical theory. Oxford: Clarendon Press, 2007. 648 p.
6. **Дородницын В.А.** Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1982. Т. 22, № 6. С. 1393–1400.
7. **Лагно В.И., Спичак С.В., Стогний В.И.** Симметричный анализ уравнений эволюционного типа. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. 392 с.
8. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 265–280.
9. **Капцов О.В.** Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: Физматлит, 2009. 184 с.
10. **Зельдович Я.Б., Компанец А.С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
11. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М.: Наука, 1987. 480 с.
12. **Баутин С.П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003. 87 с.
13. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** О существовании и единственности краевой задачи для параболического уравнения нестационарной фильтрации // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 97–105.
14. **Ваганова Н.А.** Построение новых классов решений нелинейного уравнения фильтрации с помощью специальных согласованных рядов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 2. С. 10–20.
15. **Казаков А.Л.** Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 114–122.
16. **Казаков А.Л., Лемперт А.А.** Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 57–68.
17. **Kazakov A.L., Spevak L.F.** Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Appl. Math. Model. 2013. Vol. 37, iss. 10–11. P. 6918–6928.
18. **Казаков А.Л., Кузнецов П.А., Спевак Л.Ф.** Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 119–129.
19. **Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
20. **Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.** Методы решений нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

Поступила 15.09.2015

Исправленный вариант 12.01.2016

Казаков Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. лаб.

Ин-т динамики систем и теории управления им. В.М.Матросова СО РАН
e-mail: kazakov@icc.ru

Орлов Святослав Сергеевич
программист

Ин-т динамики систем и теории управления им. В.М.Матросова СО РАН
e-mail: orlov_svyatoslav@list.ru

УДК 517.928

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ
С ДЕШЕВЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ РАЗНОЙ ЦЕНЫ****М. А. Калашникова, Г. А. Курина**

Рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления, в критерии качества которой при квадратичных формах относительно управления стоит малый параметр в разных степенях. Исходная задача приводится к сингулярно возмущенной задаче оптимального управления с трехтемповыми переменными состояниями в критическом случае. Предложенный алгоритм нахождения членов первых двух порядков асимптотического разложения решения основан на непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие преобразованной задачи и определении однозначно разрешимых задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики. Приведен иллюстративный пример.

Ключевые слова: линейно-квадратичные задачи, сингулярные возмущения, дешевые управления, асимптотические разложения.

M. A. Kalashnikova, G. A. Kurina. Asymptotic solution of linear-quadratic problems with cheap controls of different costs.

We consider a linear-quadratic optimal control problem with performance index containing different powers of a small parameter at quadratic forms with respect to the control. The problem is transformed to a singularly perturbed optimal control problem with three-tempo state variables in the critical case. An algorithm is proposed for finding terms of the first two orders in the asymptotic expansion of the solution. The algorithm is based on the direct substitution of the postulated asymptotic expansion into the statement of the transformed problem and setting uniquely solvable optimal control problems for the terms of the expansion. An illustrative example is given.

Keywords: linear-quadratic problems, singular perturbations, cheap controls, asymptotic expansions.

Посвящается Аделаиде Борисовне Васильевой

Введение

Среди большого числа работ, посвященных сингулярно возмущенным задачам управления (см., например, обзор [1]), выделяются публикации, имеющие дело с дешевыми управлениями в линейно-квадратичных задачах, когда перед управлениями в критерии качества стоит малый параметр. Особенность этих задач состоит в том, что при отсутствии ограничений на управление и нулевом значении малого параметра получаются задачи с особым управлением, при этом из принципа максимума [2] нельзя выразить управление.

Укажем некоторые из известных нам работ, имеющих дело с задачами такого типа. В [3; 4] при помощи замены переменных исходная задача сводится к задаче оптимального управления с сингулярно возмущенным уравнением состояния в критическом случае, когда из вырожденного уравнения состояния нельзя выразить быстрые переменные состояния через медленные переменные и управление. Затем строится асимптотическое разложение решения преобразованной задачи. Отметим, что сингулярно возмущенные уравнения в критическом случае исследовались в [5]. Для асимптотического решения преобразованных задач в [6–8] используется прямая схема [9], заключающаяся в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения погранслоного типа в условие задачи и определении серии задач для нахождения членов асимптотики. В [4; 7] рассматривались матричные возмущения, в [8] — задачи с разрывными коэффициентами, а в [10] — задачи с дешевыми управлениями и запаздываниями в управлении и состоянии.

В отличие от указанных работ в настоящей статье рассматривается линейно-квадратичная задача с дешевыми управлениями различных порядков малости. Минимизируемый функционал можно при этом рассматривать как линейную комбинацию критериев качества с учетом степени важности критериев в многокритериальной задаче. Путем перехода к новым переменным управления и состояния исходная задача сводится к сингулярно возмущенной задаче оптимального управления с трехтемповыми переменными состояниями в критическом случае. При использовании идей методов пограничных функций [11; 12] и прямой схемы [9] находится асимптотическое разложение решения преобразованной задачи, содержащее пограничные функции четырех типов. Поскольку для приложений часто достаточно знать только первые члены асимптотического решения, то построение асимптотики ограничивается нахождением членов асимптотического приближения первых двух порядков. Приводится иллюстративный пример.

Далее $\varepsilon \geq 0$ — малый параметр, $T > 0$ задано, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в соответствующих пространствах, штрих — транспонирование, I_k — единичная матрица порядка k , коэффициент при ε^n в разложении функции $h = h(\varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε будем обозначать h_n или $[h]_n$.

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача

$$J(v^{(1)}, v^{(2)}) = 1/2 \int_0^T \left(\langle z, W(t, \varepsilon)z \rangle + \sum_{k=1}^2 \varepsilon^{2k} \langle v^{(k)}, R(t, \varepsilon)v^{(k)} \rangle \right) dt \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t, \varepsilon)z + C(t, \varepsilon)v, \quad t \in [0, T], \quad z(0, \varepsilon) = z^0, \quad (1.2)$$

где $v^{(k)}(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^{n_k}$, $z(t, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n$, $v(t, \varepsilon) = (v^{(1)}(t, \varepsilon)', v^{(2)}(t, \varepsilon)')'$, матрицы $W(t, \varepsilon)$, $R^{(k)}(t, \varepsilon)$, $A(t, \varepsilon)$, $C(t, \varepsilon)$ предполагаются достаточно гладкими по своим аргументам, причем $W(t, \varepsilon)$, $R^{(k)}(t, \varepsilon)$ симметричны, $W(t, 0)$, $R^{(k)}(t, 0)$ положительно определены, $k = 1, 2$, $n = n_1 + n_2$, а матрица $C(t, 0)$ обратима при всех $t \in [0, T]$.

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (1.1), (1.2) однозначно разрешима, а при $\varepsilon = 0$ управление не выражается однозначно из принципа максимума Л.С. Понтрягина [2] через переменную состояния и сопряженную переменную, т. е. оно является особым.

Наша цель — построить первые члены асимптотического решения задачи (1.1), (1.2).

2. Преобразование задачи

При помощи замены переменных преобразуем исходную задачу (1.1), (1.2) так, чтобы в полученной задаче управление не являлось особым при $\varepsilon = 0$. Для этого введем новые переменные

$$u^{(k)}(t, \varepsilon) = \varepsilon^k v^{(k)}(t, \varepsilon), \quad y^{(k)}(t, \varepsilon) = \int_0^t v^{(k)}(s, \varepsilon) ds, \quad y(t, \varepsilon) = (y^{(1)}(t, \varepsilon)', y^{(2)}(t, \varepsilon)')', \quad (2.1)$$

$$x(t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon) - C(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon), \quad w(t, \varepsilon) = (x(t, \varepsilon)', y(t, \varepsilon)')', \quad u(t, \varepsilon) = (u^{(1)}(t, \varepsilon)', u^{(2)}(t, \varepsilon)')'.$$

Тогда задача (1.1), (1.2) примет вид

$$P_\varepsilon : \quad J_\varepsilon(u) = 1/2 \int_0^T \left(\langle w, \mathbb{W}(t, \varepsilon)w \rangle + \langle u, \mathbb{R}(t, \varepsilon)u \rangle \right) dt \rightarrow \min, \quad (2.2)$$

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x + B(t, \varepsilon)y, \quad (2.3)$$

$$\varepsilon^k \frac{d^{(k)}y}{dt} = {}^{(k)}u, \quad k = 1, 2, \quad (2.4)$$

$$x(0, \varepsilon) = z^0, \quad y(0, \varepsilon) = 0, \quad (2.5)$$

где $\mathbb{W}(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} W(t, \varepsilon) & W(t, \varepsilon)C(t, \varepsilon) \\ C(t, \varepsilon)'W(t, \varepsilon) & C(t, \varepsilon)'W(t, \varepsilon)C(t, \varepsilon) \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}(t, \varepsilon) = \text{diag}(R^{(1)}(t, \varepsilon), R^{(2)}(t, \varepsilon))$, $B(t, \varepsilon) = A(t, \varepsilon)C(t, \varepsilon) - dC(t, \varepsilon)/dt$.

Далее, используя прямую схему, предложим алгоритм построения асимптотического приближения первого порядка решения задачи (2.2)–(2.5), на основе которого можно получить первые члены асимптотического решения исходной задачи (1.1), (1.2).

3. Формализм построения асимптотики

3.1. Декомпозиция критерия качества и уравнения состояния

Следуя алгоритму метода прямой схемы, решение задачи (2.2)–(2.5) будем искать в виде

$$v(t, \varepsilon) = \bar{v}(t, \varepsilon) + \sum_{i=0}^1 (\Pi_i v(\tau_i, \varepsilon) + Q_i v(\sigma_i, \varepsilon)), \quad (3.1)$$

где $v(t, \varepsilon) = (w(t, \varepsilon)', u(t, \varepsilon)')'$, $t \in [0, T]$, $\tau_i = t/\varepsilon^{i+1}$, $\sigma_i = (t - T)/\varepsilon^{i+1}$, $i = 0, 1$, $\bar{v}(t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \bar{v}_j(t)$, $\Pi_i v(\tau_i, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \Pi_{ij} v(\tau_i)$, $Q_i v(\sigma_i, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j Q_{ij} v(\sigma_i)$, $\bar{v}_j(t)$ — регулярные функции, $\Pi_{ij} v(\tau_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = 0$, $Q_{ij} v(\sigma_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = T$, т.е. справедливы неравенства

$$\|\Pi_{ij} v(\tau_i)\| \leq c e^{-\varkappa \tau_i}, \quad \tau_i \geq 0, \quad \|Q_{ij} v(\sigma_i)\| \leq c e^{\varkappa \sigma_i}, \quad \sigma_i \leq 0, \quad (3.2)$$

где постоянные $c > 0$, $\varkappa > 0$ не зависят от аргументов рассматриваемых функций.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{\bar{v}}_n(t, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \bar{v}_j(t), & \tilde{\Pi}_{in} v(\tau_i, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^n \varepsilon^j \Pi_{ij} v(\tau_i), & \tilde{Q}_{in} v(\sigma_i, \varepsilon) &= \sum_{j=0}^n \varepsilon^j Q_{ij} v(\sigma_i), & i &= 0, 1, \\ F(v, t, \varepsilon) &= 1/2(\langle w, \mathbb{W}(t, \varepsilon)w \rangle + \langle u, \mathbb{R}(t, \varepsilon)u \rangle), & f(w, t, \varepsilon) &= A(t, \varepsilon)x + B(t, \varepsilon)y. \end{aligned}$$

Для достаточно гладкой функции $G(v, t, \varepsilon)$ будем использовать следующее асимптотическое представление:

$$G(v, t, \varepsilon) = \bar{G}(t, \varepsilon) + \sum_{i=0}^1 (\Pi_i G(\tau_i, \varepsilon) + Q_i G(\sigma_i, \varepsilon)). \quad (3.3)$$

Здесь

$$\bar{G}(t, \varepsilon) = G(\bar{v}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \bar{G}_j(t),$$

$$\Pi_0 G(\tau_0, \varepsilon) = G(\bar{v}(\varepsilon \tau_0, \varepsilon) + \Pi_0 v(\tau_0, \varepsilon), \varepsilon \tau_0, \varepsilon) - G(\bar{v}(\varepsilon \tau_0, \varepsilon), \varepsilon \tau_0, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \Pi_{0j} G(\tau_0),$$

$$\Pi_1 G(\tau_1, \varepsilon) = G(\bar{v}(\varepsilon^2 \tau_1, \varepsilon) + \Pi_0 v(\varepsilon \tau_1, \varepsilon) + \Pi_1 v(\tau_1, \varepsilon), \varepsilon^2 \tau_1, \varepsilon)$$

$$- G(\bar{v}(\varepsilon^2\tau_1, \varepsilon) + \Pi_0 v(\varepsilon\tau_1, \varepsilon), \varepsilon^2\tau_1, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j \Pi_{1j} G(\tau_1),$$

$$Q_0 G(\sigma_0, \varepsilon) = G(\bar{v}(T + \varepsilon\sigma_0, \varepsilon) + Q_0 v(\sigma_0, \varepsilon), T + \varepsilon\sigma_0, \varepsilon) - G(\bar{v}(T + \varepsilon\sigma_0, \varepsilon), T + \varepsilon\sigma_0, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j Q_{0j} G(\sigma_0),$$

$$Q_1 G(\sigma_1, \varepsilon) = G(\bar{v}(T + \varepsilon^2\sigma_1, \varepsilon) + Q_0 v(\varepsilon\sigma_1, \varepsilon) + Q_1 v(\sigma_1, \varepsilon), T + \varepsilon^2\sigma_1, \varepsilon) - G(\bar{v}(T + \varepsilon^2\sigma_1, \varepsilon) + Q_0 v(\varepsilon\sigma_1, \varepsilon), T + \varepsilon^2\sigma_1, \varepsilon) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j Q_{1j} G(\sigma_1).$$

Подставим разложение (3.1) в (2.2) и представим подынтегральное выражение в виде асимптотической суммы (3.3) слагаемых по степеням малого параметра, зависящих от t , τ_i , σ_i , $i = 0, 1$. В интегралах от выражений, зависящих от τ_i и σ_i , $i = 0, 1$, перейдем к интегрированию соответственно по бесконечным промежуткам $[0, +\infty)$ и $(-\infty, 0]$. В итоге критерий качества (2.2) представим в виде

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j \geq 0} \varepsilon^j J_j. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.1) в уравнения состояния (2.3), (2.4), а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , отдельно зависящие от t , τ_i , σ_i , $i = 0, 1$, получаем уравнения

$$\frac{d\bar{x}_j(t)}{dt} = A_0(t)\bar{x}_j(t) + B_0(t)\bar{y}_j(t) + [\widehat{f}_{j-1}(t, \varepsilon)]_j, \quad (3.5)$$

$$\frac{d\Pi_{ij}x(\tau_i)}{d\tau_i} = A_0(0)\Pi_{i(j-i-1)}x(\tau_i) + B_0(0)\Pi_{i(j-i-1)}y(\tau_i) + [\widehat{\Pi}_{i(j-i-2)}f(\tau_i, \varepsilon)]_{j-i-1}, \quad (3.6)$$

$$\frac{dQ_{ij}x(\sigma_i)}{d\sigma_i} = A_0(T)Q_{i(j-i-1)}x(\sigma_i) + B_0(T)Q_{i(j-i-1)}y(\sigma_i) + [\widehat{Q}_{i(j-i-2)}f(\sigma_i, \varepsilon)]_{j-i-1}, \quad (3.7)$$

$$\frac{d^{(k)}\bar{y}_{j-k}(t)}{dt} = \bar{u}_j^{(k)}(t), \quad (3.8)$$

$$0 = \Pi_{00}^{(2)}u^{(2)}(\tau_0), \quad (3.9)$$

$$\frac{d\Pi_{ij}^{(k)}y(\tau_i)}{d\tau_i} = \Pi_{i(j+k-i-1)}^{(k)}u^{(k)}(\tau_i), \quad (3.10)$$

$$0 = Q_{00}^{(2)}u^{(2)}(\sigma_0), \quad (3.11)$$

$$\frac{dQ_{ij}^{(k)}y(\sigma_i)}{d\sigma_i} = Q_{i(j+k-i-1)}^{(k)}u^{(k)}(\sigma_i). \quad (3.12)$$

Здесь $i = 0, 1$; $k = 1, 2$, функции с отрицательными индексами считаются нулевыми, символы $\widehat{f}_j(t, \varepsilon)$, $\widehat{\Pi}_{ij}f(\tau_i, \varepsilon)$, $\widehat{Q}_{ij}f(\sigma_i, \varepsilon)$ означают значения функции f при $w = \widetilde{w}_j$, $w = \widetilde{\Pi}_{ij}w$ и $t = \varepsilon^{i+1}\tau_i$, $w = \widetilde{Q}_{ij}w$ и $t = T + \varepsilon^{i+1}\sigma_i$ соответственно. Аналогичное обозначение $\widehat{F}_j(t, \varepsilon)$ будет использоваться далее для функции $F(v, t, \varepsilon)$.

Из (3.6), (3.7), (3.10), (3.12), учитывая (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \Pi_{00}x(\tau_0) = 0, \quad \Pi_{10}x(\tau_1) = \Pi_{11}x(\tau_1) = 0, \quad Q_{00}x(\sigma_0) = 0, \quad Q_{10}x(\sigma_1) = Q_{11}x(\sigma_1) = 0, \\ \Pi_{10}^{(1)}y(\tau_1) = 0, \quad Q_{10}^{(1)}y(\sigma_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В силу (3.13) из (2.5) вытекают равенства для начальных условий членов разложения (3.1):

$$\bar{x}_0(0) = z^0, \quad (3.14)$$

$$\bar{x}_1(0) + \Pi_{01}x(0) = 0, \quad (3.15)$$

$$\bar{x}_j(0) + \Pi_{0j}x(0) + \Pi_{1j}x(0) = 0, \quad j \geq 2, \quad (3.16)$$

$$\bar{y}_0^{(1)}(0) + \Pi_{00}^{(1)}y(0) = 0, \quad (3.17)$$

$$\bar{y}_j^{(1)}(0) + \Pi_{0j}^{(1)}y(0) + \Pi_{1j}^{(1)}y(0) = 0, \quad j \geq 1, \quad (3.18)$$

$$\bar{y}_j^{(2)}(0) + \Pi_{0j}^{(2)}y(0) + \Pi_{1j}^{(2)}y(0) = 0, \quad j \geq 0. \quad (3.19)$$

3.2. Определение асимптотического разложения нулевого порядка

Положим $\varepsilon = 0$ в (2.2)–(2.5). Тогда легко заметить, что вид критерия качества совпадает с коэффициентом J_0 в разложении (3.4), уравнения состояния переходят в (3.5), (3.8) при $j = 0$, $k = 1, 2$, а (2.5) соответствует (3.14). Таким образом, регулярные функции нулевого порядка асимптотического решения задачи (2.2)–(2.5) являются решением следующей вырожденной задачи:

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 : \quad \bar{J}_0 &= 1/2 \int_0^T (\langle \bar{w}_0, \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_0 \rangle + \langle \bar{u}_0, \mathbb{R}_0(t)\bar{u}_0 \rangle) dt \rightarrow \min, \\ \frac{d\bar{x}_0}{dt} &= A_0(t)\bar{x}_0 + B_0(t)\bar{y}_0, \quad \bar{x}_0(0) = z^0, \\ 0 &= \bar{u}_0^{(k)}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Очевидно, что последняя задача является линейно-квадратичной, причем в качестве управления выступает $\bar{y}_0(t)$. Значит, переменные состояния в этой задаче имеют меньшую размерность, чем в исходной возмущенной. Квадратичная форма относительно $\bar{y}_0(t)$ в критерии качества положительно определена, поэтому задача \bar{P}_0 однозначно разрешима. Ее решение можно найти из двухточечной краевой задачи, вытекающей из принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Заметим, что система (3.20) не разрешена относительно производной. Это так называемая дескрипторная система или дифференциально-алгебраическое уравнение. Представляя матрицу $B(t, \varepsilon)$ в блочной форме и вводя обозначения

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{diag}(I_n, 0, 0), \quad B(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} B^{(1)}(t, \varepsilon) & B^{(2)}(t, \varepsilon) \\ B^{(1)}(t, \varepsilon) & B^{(2)}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_0(t) = (\bar{u}_0^{(1)}(t)', \bar{u}_0^{(2)}(t)')', \\ \mathbb{A}(t, \varepsilon) &= \begin{pmatrix} A(t, \varepsilon) & B^{(1)}(t, \varepsilon) & B^{(2)}(t, \varepsilon) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_{n_1} & 0 \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

запишем (3.20) следующим образом:

$$E_1 \frac{d\bar{w}_0}{dt} = \mathbb{A}_0(t)\bar{w}_0 + \mathbb{B}\bar{u}_0, \quad E_1 \bar{w}_0(0) = ((z^0)', 0, 0)',$$

а условие оптимальности управления — в виде (см., например, [13])

$$\mathbb{B}'\bar{\psi}_0 - \mathbb{R}_0(t)\bar{u}_0 = 0, \quad (3.21)$$

где сопряженная переменная $\bar{\psi}_0(t) = (\bar{p}_0(t)', \bar{q}_0(t)')'$, $\bar{q}_0(t) = (\bar{q}_0^{(1)}(t)', \bar{q}_0^{(2)}(t)')'$ удовлетворяет системе

$$E_1 \frac{d\bar{\psi}_0}{dt} = \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_0 - \mathbb{A}_0(t)'\bar{\psi}_0, \quad (3.22)$$

$$E_1 \bar{\psi}_0(T) = 0. \quad (3.23)$$

Из системы (3.20)–(3.23) получаем решение задачи \bar{P}_0 . В силу (3.8) при $j = 0$, $k = 1, 2$ из (3.21) следует $\bar{q}_0(t) = 0$.

Перейдем к рассмотрению коэффициента J_1 в разложении (3.4). Учитывая обозначения (3.3), представим его в виде

$$\int_0^T \bar{F}_1(t) dt + \int_0^{+\infty} \Pi_{00} F(\tau_0) d\tau_0 + \int_{-\infty}^0 Q_{00} F(\sigma_0) d\sigma_0.$$

Преобразуем отдельно каждое слагаемое в последнем выражении.

Используя (3.21)–(3.23), формулу интегрирования по частям, а также (3.5) при $j = 1$ и (3.8) при $j = 0, 1$, $k = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \bar{F}_1(t) dt &= \int_0^T \left(\langle \bar{w}_1, \mathbb{W}_0(t) \bar{w}_0 \rangle + [\widehat{F}_0(t, \varepsilon)]_1 \right) dt = \int_0^T \left(\langle \bar{w}_1, E_1 \frac{d\bar{\psi}_0}{dt} + \mathbb{A}_0(t)' \bar{\psi}_0 \rangle + [\widehat{F}_0(t, \varepsilon)]_1 \right) dt \\ &= \langle \bar{w}_1, E_1 \bar{\psi}_0 \rangle \Big|_0^T + \int_0^T \left(\langle -E_1 \frac{d\bar{w}_1}{dt} + \mathbb{A}_0(t) \bar{w}_1, \bar{\psi}_0 \rangle + [\widehat{F}_0(t, \varepsilon)]_1 \right) dt \\ &= -\langle \bar{x}_1(0), \bar{p}_0(0) \rangle + \int_0^T \left([\widehat{F}_0(t, \varepsilon)]_1 - \langle \bar{p}_0, [\widehat{f}_0(t, \varepsilon)]_1 \rangle \right) dt. \end{aligned}$$

Во втором и третьем слагаемых из J_1 преобразуем интегралы от суммы выражений, линейно зависящих соответственно от $\Pi_{00} w(\tau_0)$, $\Pi_{00} u(\tau_0) = (\Pi_{00}^{(1)} u(\tau_0))'$, $\Pi_{00}^{(2)} u(\tau_0)'$ и $Q_{00} w(\sigma_0)$, $Q_{00} u(\sigma_0) = (Q_{00}^{(1)} u(\sigma_0))'$, $Q_{00}^{(2)} u(\sigma_0)'$.

Сначала запишем вытекающее из (3.6) при $i = 0$, $j = 1$ и (3.10) при $i = j = 0$, $k = 1, 2$ уравнение

$$E_1 \frac{d\Pi_{01} w}{d\tau_0} + E_2 \frac{d\Pi_{00} w}{d\tau_0} = \mathbb{A}_0(0) \Pi_{00} w + \mathbb{B} \Pi_{00} u, \quad E_2 = \text{diag}(0, I_{n_1}, 0).$$

Используя (3.21), (3.22), (3.13), (3.8) при $j = 0$, $k = 1, 2$, (3.2) и последнее уравнение, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\langle \Pi_{00} w, \mathbb{W}_0(0) \bar{w}_0(0) \rangle + \langle \Pi_{00} u, \mathbb{R}_0(0) \bar{u}_0(0) \rangle \right) d\tau_0 &= \int_0^{+\infty} \left(\langle \Pi_{00} w, E_1 \frac{d\bar{\psi}_0}{dt}(0) \rangle \right. \\ &\left. + \langle \mathbb{A}_0(0) \Pi_{00} w, \bar{\psi}_0(0) \rangle \right) d\tau_0 = \int_0^{+\infty} \left\langle \bar{\psi}_0(0), E_1 \frac{d\Pi_{01} w}{d\tau_0} \right\rangle d\tau_0 = -\langle \bar{p}_0(0), \Pi_{01} x(0) \rangle. \end{aligned}$$

Аналогичным образом имеем $\int_{-\infty}^0 \left(\langle Q_{00} w, \mathbb{W}_0(T) \bar{w}_0(T) \rangle + \langle Q_{00} u, \mathbb{R}_0(T) \bar{u}_0(T) \rangle \right) d\sigma_0 = 0$.

С учетом результатов проведенных преобразований для слагаемых в J_1 и равенства (3.15) сумма не известных после решения задачи \bar{P}_0 слагаемых может быть записана в виде $\Pi_{00} J + Q_{00} J$, где

$$\begin{aligned} \Pi_{00} J &= 1/2 \int_0^{+\infty} \left(\langle \Pi_{00} w, \mathbb{W}_0(0) \Pi_{00} w \rangle + \langle \Pi_{00} u, \mathbb{R}_0(0) \Pi_{00} u \rangle \right) d\tau_0, \\ Q_{00} J &= 1/2 \int_{-\infty}^0 \left(\langle Q_{00} w, \mathbb{W}_0(T) Q_{00} w \rangle + \langle Q_{00} u, \mathbb{R}_0(T) Q_{00} u \rangle \right) d\sigma_0. \end{aligned}$$

Поскольку последние два выражения зависят от пограничных функций одного типа, для которых имеются отдельные уравнения: (3.6), (3.7) при $i = j = 0$, (3.9), (3.11), (3.10), (3.12) при $i = j = 0$, $k = 1$ и равенство (3.17), то функции $\Pi_{00}v(\tau_0)$ и $Q_{00}v(\sigma_0)$ можно определить соответственно в результате решения нижеследующих задач $\Pi_{00}P$ и $Q_{00}P$:

$$\begin{aligned} \Pi_{00}P : \quad & \Pi_{00}J \rightarrow \min, \\ \frac{d\Pi_{00}x}{d\tau_0} = 0, \quad & \frac{d\Pi_{00}^{(1)}y}{d\tau_0} = \Pi_{00}^{(1)}u, \quad 0 = \Pi_{00}^{(2)}u, \quad \tau_0 \geq 0, \\ \Pi_{00}x(+\infty) = 0, \quad & \Pi_{00}^{(1)}y(0) = -\bar{y}_0(0), \\ Q_{00}P : \quad & Q_{00}J \rightarrow \min, \\ \frac{dQ_{00}x}{d\sigma_0} = 0, \quad & \frac{dQ_{00}^{(1)}y}{d\sigma_0} = Q_{00}^{(1)}u, \quad 0 = Q_{00}^{(2)}u, \quad \sigma_0 \leq 0, \\ Q_{00}x(-\infty) = 0, \quad & Q_{00}^{(1)}y(-\infty) = 0. \end{aligned}$$

Роль управлений в задачах $\Pi_{00}P$ и $Q_{00}P$ фактически выполняют функции $\Pi_{00}^{(1)}u(\tau_0)$, $\Pi_{00}^{(2)}y(\tau_0)$ и $Q_{00}^{(1)}u(\sigma_0)$, $Q_{00}^{(2)}y(\sigma_0)$, а переменными состояниями в силу (3.13) являются соответственно функции $\Pi_{00}^{(1)}y(\tau_0)$ и $Q_{00}^{(1)}y(\sigma_0)$. Значит, переменные состояния в этих задачах имеют меньшую размерность, чем в исходной возмущенной. В силу условий задачи квадратичные формы относительно управления в критериях качества положительно определены и, очевидно, для уравнений состояния выполнено условие управляемости. Поэтому существует оптимальное стабилизирующее управление для задач $\Pi_{00}P$ и $Q_{00}P$ (см., например, [14, с. 280]). Так как $\Pi_{00}x(\tau_0)$ и $Q_{00}x(\sigma_0)$ являются известными функциями, то условия оптимальности управления для этих задач можно записать соответственно в виде

$$\mathbb{B}'\Pi_{00}\psi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u = 0, \quad (3.24)$$

где $\Pi_{00}\psi(\tau_0) = (\Pi_{00}p(\tau_0)', \Pi_{00}q(\tau_0)')'$, $\Pi_{00}q(\tau_0) = (\Pi_{00}^{(1)}q(\tau_0)', \Pi_{00}^{(2)}q(\tau_0)')'$ — решение задачи

$$\begin{aligned} (E_1 + E_2) \frac{d\Pi_{00}\psi}{d\tau_0} &= \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w, \quad \tau_0 \geq 0, \\ (E_1 + E_2)\Pi_{00}\psi(+\infty) &= 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

и

$$\mathbb{B}'Q_{00}\psi - \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u = 0, \quad (3.26)$$

где $Q_{00}\psi(\sigma_0) = (Q_{00}p(\sigma_0)', Q_{00}q(\sigma_0)')'$, $Q_{00}q(\sigma_0) = (Q_{00}^{(1)}q(\sigma_0)', Q_{00}^{(2)}q(\sigma_0)')'$ — решение задачи

$$(E_1 + E_2) \frac{dQ_{00}\psi}{d\sigma_0} = \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w, \quad \sigma_0 \leq 0, \quad (3.27)$$

$$E_1Q_{00}\psi(-\infty) = 0, \quad E_2Q_{00}\psi(0) = 0. \quad (3.28)$$

В силу (3.9), (3.11) из (3.24), (3.26) следуют равенства $\Pi_{00}^{(2)}q(\tau_0) = 0$, $Q_{00}^{(2)}q(\sigma_0) = 0$.

Предположим, что найдены решения задач \bar{P}_0 и $\Pi_{00}P$, $Q_{00}P$. Рассмотрим коэффициент J_2 из разложения (3.4), имеющий в силу (3.3) вид

$$\int_0^T \bar{F}_2(t) dt + \int_0^{+\infty} \Pi_{01}F(\tau_0) d\tau_0 + \int_{-\infty}^0 Q_{01}F(\sigma_0) d\sigma_0 + \int_0^{+\infty} \Pi_{10}F(\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^0 Q_{10}F(\sigma_1) d\sigma_1.$$

В первом слагаемом из J_2 преобразуем $\int_0^T \langle \bar{w}_2, \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_0 \rangle dt$, используя условия оптимальности управления для задачи \bar{P}_0 , а именно равенства (3.22), (3.23), а также формулу интегрирования по частям и (3.5), (3.16) при $j = 2$. Отбрасывая известные слагаемые, приходим к выражению $\langle \Pi_{02}x(0) + \Pi_{12}x(0), \bar{p}_0(0) \rangle - \int_0^T \langle \bar{w}_1, \mathbb{A}_1(t)\bar{\psi}_0 \rangle dt$.

Заметим, что после решения задач $\Pi_{00}P$ и $Q_{00}P$ пограничные функции $\Pi_{01}x(\tau_0)$ и $Q_{01}x(\sigma_0)$ однозначно определяются из (3.6) и (3.7) при $i = 0, j = 1$.

Во втором слагаемом из J_2 преобразуем $\int_0^{+\infty} (\langle \Pi_{01}w, \mathbb{W}_0(0)(\bar{w}_0(0) + \Pi_{00}w) \rangle + \langle \bar{w}_1(0), \mathbb{W}_0(0)\Pi_{00}w \rangle + \langle \Pi_{01}u, \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u \rangle + \langle \bar{u}_1(0), \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u \rangle) d\tau_0$. Для этого используем (3.8) при $j = 0, k = 1, 2$, условия оптимальности управления для задач \bar{P}_0 и $\Pi_{00}P$, а именно соотношения (3.21), (3.22) и (3.24), (3.25), (3.9), а также (3.10) при $i = 0, j = k = 1$, (3.8) при $j = k = 1$, (3.15) и (3.18) при $j = 1$. После отбрасывания известных слагаемых получаем выражение $\langle \Pi_{11}^{(1)}\bar{y}(0), \Pi_{00}^{(1)}\bar{q}(0) \rangle - \langle \Pi_{02}x(0), \bar{p}_0(0) \rangle$.

Аналогичным образом в третьем слагаемом из J_2 преобразуем $\int_{-\infty}^0 (\langle Q_{01}w, \mathbb{W}_0(T)(\bar{w}_0(T) + Q_{00}w) \rangle + \langle \bar{w}_1(T), \mathbb{W}_0(T)Q_{00}w \rangle + \langle Q_{01}u, \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u \rangle + \langle \bar{u}_1(T), \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u \rangle) d\sigma_0$. Отбрасывая известные слагаемые, в итоге получаем $\langle \bar{x}_1(T), Q_{00}p(0) \rangle$.

В четвертом слагаемом из J_2 преобразуем $\int_0^{+\infty} (\langle \Pi_{10}w, \mathbb{W}_0(0)(\bar{w}_0(0) + \Pi_{00}w(0)) \rangle + \langle \Pi_{10}u, \mathbb{R}_0(0)\Pi_{00}u(0) \rangle) d\tau_1$. Используя (3.22), (3.25), (3.6) при $i = 1, j = 2$, (3.24), (3.9), (3.13) и (3.10) при $i = j = k = 1$, после отбрасывания известных слагаемых имеем $-\langle \Pi_{12}x(0), \bar{p}_0(0) \rangle - \langle \Pi_{11}^{(1)}\bar{y}(0), \Pi_{00}^{(1)}\bar{q}(0) \rangle$.

Произведя подобные преобразования в последнем слагаемом из J_2 , получаем, что

$$\int_{-\infty}^0 (\langle Q_{10}w, \mathbb{W}_0(T)(\bar{w}_0(T) + Q_{00}w(0)) \rangle + \langle Q_{10}u, \mathbb{R}_0(T)Q_{00}u(0) \rangle) d\sigma_1$$

является известной величиной после решения задач \bar{P}_0 и $\Pi_{00}P, Q_{00}P$.

Учитывая проделанные преобразования слагаемых из J_2 , а также (3.8) при $j = 0, k = 1, 2$, запишем получившееся из J_2 выражение после отбрасывания известных слагаемых в виде $\bar{J}_1 + \Pi_{10}J + Q_{10}J$, где

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \langle \bar{w}_1(T), E_1 Q_{00}\psi(0) \rangle + \int_0^T (\langle \bar{w}_1, 1/2\mathbb{W}_0(t)\bar{w}_1 + \mathbb{W}_1(t)\bar{w}_0 - \mathbb{A}_1(t)\bar{\psi}_0 \rangle + 1/2\langle \bar{u}_1, \mathbb{R}_0(t)\bar{u}_1 \rangle) dt, \\ \Pi_{10}J &= 1/2 \int_0^{+\infty} (\langle \Pi_{10}w, \mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w \rangle + \langle \Pi_{10}u, \mathbb{R}_0(0)\Pi_{10}u \rangle) d\tau_1, \\ Q_{10}J &= 1/2 \int_{-\infty}^0 (\langle Q_{10}w, \mathbb{W}_0(T)Q_{10}w \rangle + \langle Q_{10}u, \mathbb{R}_0(T)Q_{10}u \rangle) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Поскольку каждое выражение из последних трех зависит от функций одного типа, то $\bar{v}_1(t), \Pi_{10}v(\tau_1), Q_{10}v(\sigma_1)$ можно определить как решение следующих трех задач:

$$\bar{P}_1 : \quad \bar{J}_1 \rightarrow \min,$$

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = A_0(t)\bar{x}_1 + B_0(t)\bar{y}_1 + [\hat{f}_0(t, \varepsilon)]_1, \quad \frac{d\bar{y}_0^{(1)}}{dt} = \bar{u}_1^{(1)}, \quad 0 = \bar{u}_1^{(2)},$$

$$\bar{x}_1(0) = -\Pi_{01}x(0),$$

$$\begin{aligned} & \Pi_{10}P : \quad \Pi_{10}J \rightarrow \min, \\ & \frac{d\Pi_{10}x}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{d\Pi_{10}y^{(1)}}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{d\Pi_{10}y^{(2)}}{d\tau_1} = \Pi_{10}u^{(2)}, \quad \tau_1 \geq 0, \\ & \Pi_{10}x(+\infty) = 0, \quad \Pi_{10}y^{(1)}(+\infty) = 0, \quad \Pi_{10}y^{(2)}(0) = -(\bar{y}_0^{(2)}(0) + \Pi_{00}y^{(2)}(0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Q_{10}P : \quad Q_{10}J \rightarrow \min, \\ & \frac{dQ_{10}x}{d\sigma_1} = 0, \quad \frac{dQ_{10}y^{(1)}}{d\sigma_1} = 0, \quad \frac{dQ_{10}y^{(2)}}{d\sigma_1} = Q_{10}u^{(2)}, \quad \sigma_1 \leq 0, \\ & Q_{10}w(-\infty) = 0. \end{aligned}$$

В линейно-квадратичной задаче \bar{P}_1 в качестве управления фактически выступает функция $\bar{y}_1(t)$. Эта задача однозначно разрешима. Условие оптимальности управления для нее запишем в виде

$$\mathbb{B}'\bar{\psi}_1 - \mathbb{R}_0(t)\bar{u}_1 = 0, \quad (3.29)$$

где $\bar{\psi}_1(t) = (\bar{p}_1(t)', \bar{q}_1(t)')'$, $\bar{q}_1(t) = (\bar{q}_1^{(1)}(t)', \bar{q}_1^{(2)}(t)')'$ — решение задачи

$$E_1 \frac{d\bar{\psi}_1}{dt} = \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_1 + \mathbb{W}_1(t)\bar{w}_0 - \mathbb{A}_1(t)'\bar{\psi}_0 - \mathbb{A}_0(t)'\bar{\psi}_1, \quad (3.30)$$

$$E_1\bar{\psi}_1(T) = -E_1Q_{00}\psi(0). \quad (3.31)$$

Из (3.8) при $j = 1$, $k = 2$ из (3.29) следует $\bar{q}_1^{(2)}(t) = 0$.

Условия оптимальности управления для однозначно разрешимых линейно-квадратичных задач $\Pi_{10}P$ и $Q_{10}P$ запишем соответственно в виде

$$\mathbb{B}'E_3\Pi_{10}\psi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{10}u = 0, \quad (3.32)$$

где $\Pi_{10}\psi(\tau_1) = (\Pi_{10}p(\tau_1)', \Pi_{10}q(\tau_1)')'$, $\Pi_{10}q(\tau_1) = (\Pi_{10}q^{(1)}(\tau_1)', \Pi_{10}q^{(2)}(\tau_1)')'$ — решение задачи

$$\frac{d\Pi_{10}\psi}{d\tau_1} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{10}w, \quad \tau_1 \geq 0, \quad (3.33)$$

$$\Pi_{10}\psi(+\infty) = 0,$$

и

$$\mathbb{B}'E_3Q_{10}\psi - \mathbb{R}_0(T)Q_{10}u = 0, \quad (3.34)$$

где $Q_{10}\psi(\sigma_1) = (Q_{10}p(\sigma_1)', Q_{10}q(\sigma_1)')'$, $Q_{10}q(\sigma_1) = (Q_{10}q^{(1)}(\sigma_1)', Q_{10}q^{(2)}(\sigma_1)')'$ — решение задачи

$$\frac{dQ_{10}\psi}{d\sigma_1} = \mathbb{W}_0(T)Q_{10}w, \quad \sigma_1 \leq 0, \quad (3.35)$$

$$(E_1 + E_2)Q_{10}\psi(-\infty) = 0, \quad E_3Q_{10}\psi(0) = 0. \quad (3.36)$$

Из (3.32), (3.34) непосредственно следует

$$\Pi_{10}u^{(1)}(\tau_1) = 0, \quad Q_{10}u^{(1)}(\sigma_1) = 0. \quad (3.37)$$

Таким образом, решая задачи \bar{P}_0 , $\Pi_{i0}P$, $Q_{i0}P$, $i = 0, 1$, получаем приближение нулевого порядка асимптотического разложения решения задачи (2.2)–(2.5).

Отметим, что после решения задач $\Pi_{10}P$ и $Q_{10}P$ пограничные функции $\Pi_{11}y^{(1)}(\tau_1)$ и $Q_{11}y^{(1)}(\sigma_1)$ однозначно определяются соответственно из уравнений (3.10) и (3.12) при $i = j = k = 1$, а $\Pi_{12}x(\tau_1)$ и $Q_{12}x(\sigma_1)$ — из (3.6) и (3.7) при $i = 1$, $j = 2$.

3.3. Определение асимптотического разложения первого порядка

Регулярные члены приближения первого порядка можно найти, решив задачу \bar{P}_1 при помощи условия оптимальности управления (3.29). Для нахождения пограничных функций первого порядка $\Pi_{i1}v(\tau_i)$, $Q_{i1}v(\sigma_i)$, $i = 0, 1$, рассмотрим коэффициенты J_3 , J_4 из разложения (3.4), считая известными решения задач \bar{P}_j , $\Pi_{i0}P$, $Q_{i0}P$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$.

В силу (3.3) представим коэффициент J_3 в виде

$$\int_0^T \bar{F}_3(t) dt + \int_0^{+\infty} \Pi_{02}F(\tau_0) d\tau_0 + \int_{-\infty}^0 Q_{02}F(\sigma_0) d\sigma_0 + \int_0^{+\infty} \Pi_{11}F(\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^0 Q_{11}F(\sigma_1) d\sigma_1$$

и аналогично J_1 преобразуем каждое слагаемое в последней сумме, используя условия оптимальности управления задач \bar{P}_0 (3.22)–(3.23), \bar{P}_1 (3.29)–(3.31), $\Pi_{00}P$ (3.24)–(3.25), $Q_{00}P$ (3.26)–(3.28), $\Pi_{10}P$ (3.32)–(3.33), $Q_{10}P$ (3.34)–(3.36), а также соотношения (3.5) при $j = 2, 3$, (3.6) и (3.7) при $i = 0, 1$, $j = 2, 3$, (3.8) при $j = 0$, $k = 1, 2$; $j = 1$, $k = 2$; $j = 2$, $k = 1$, (3.10) и (3.12) при $i = 0$, $j = 1, 2$, $k = 1$; $i = j = 0, 1$, $k = 2$; $i = k = 1$, $j = 2$, (3.9), (3.11), (3.13), (3.16) при $j = 2, 3$, (3.18) при $j = 1, 2$ и (3.37). Отбрасывая известные слагаемые, из преобразованного выражения для J_3 получаем сумму $\Pi_{01}J + Q_{01}J$, слагаемые которой принимаем за критерии качества в следующих задачах оптимального управления:

$$\Pi_{01}P: \quad \Pi_{01}J = \int_0^{+\infty} \left(\left\langle \Pi_{01}w, 1/2\mathbb{W}_0(0)\Pi_{01}w + \left(\tau_0 \frac{d\mathbb{W}_0}{dt}(0) + \mathbb{W}_1(0) \right) \Pi_{00}w - \mathbb{A}_0(0)' \Pi_{00}\psi \right\rangle \right.$$

$$\left. + \left\langle \Pi_{01}u, 1/2\mathbb{R}_0(0)\Pi_{01}u + \left(\tau_0 \frac{d\mathbb{R}_0}{dt}(0) + \mathbb{R}_1(0) \right) \Pi_{00}u \right\rangle \right) d\tau_0 \rightarrow \min,$$

$$\frac{d\Pi_{01}x}{d\tau_0} = A_0(0)\Pi_{00}x + B_0(0)\Pi_{00}y, \quad \frac{d\Pi_{01}y^{(1)}}{d\tau_0} = \Pi_{01}y^{(1)}, \quad 0 = \Pi_{01}y^{(2)} - \frac{d\Pi_{00}y^{(2)}}{d\tau_0}, \quad \tau_0 \geq 0,$$

$$\Pi_{01}x(+\infty) = 0, \quad \Pi_{01}y^{(1)}(0) = -(\bar{y}_1^{(1)}(0) + \Pi_{11}y^{(1)}(0)),$$

$$Q_{01}P: \quad Q_{01}J = \langle Q_{01}w(0), E_2(\bar{\psi}_1(T) + Q_{10}\psi(0)) \rangle + \int_{-\infty}^0 \left(\left\langle Q_{01}w, 1/2\mathbb{W}_0(T)Q_{01}w \right.$$

$$\left. + \left(\sigma_0 \frac{d\mathbb{W}_0}{dt}(T) + \mathbb{W}_1(T) \right) Q_{00}w - \mathbb{A}_0(T)' Q_{00}\psi \right\rangle$$

$$\left. + \left\langle Q_{01}u, 1/2\mathbb{R}_0(T)Q_{01}u + \left(\sigma_0 \frac{d\mathbb{R}_0}{dt}(T) + \mathbb{R}_1(T) \right) Q_{00}u \right\rangle \right) d\sigma_0 \rightarrow \min,$$

$$\frac{dQ_{01}x}{d\sigma_0} = A_0(T)Q_{00}x + B_0(T)Q_{00}y, \quad \frac{dQ_{01}y^{(1)}}{d\sigma_0} = Q_{01}y^{(1)}, \quad 0 = Q_{01}y^{(2)} - \frac{dQ_{00}y^{(2)}}{d\sigma_0}, \quad \sigma_0 \leq 0,$$

$$Q_{01}x(-\infty) = 0, \quad Q_{01}y^{(1)}(-\infty) = 0.$$

Роль управлений в задачах $\Pi_{01}P$ и $Q_{01}P$ фактически выполняют соответственно функции $\Pi_{01}y^{(1)}(\tau_0)$, $\Pi_{01}y^{(2)}(\tau_0)$ и $Q_{01}y^{(1)}(\sigma_0)$, $Q_{01}y^{(2)}(\sigma_0)$, а переменными состояниями являются функции $\Pi_{01}y^{(1)}(\tau_0)$ и $Q_{01}y^{(1)}(\sigma_0)$. Условия оптимальности управления для однозначно разрешимых задач $\Pi_{01}P$ и $Q_{01}P$ запишем в виде

$$\mathbb{B}'\Pi_{01}\psi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{01}u - \left(\tau_0 \frac{d\mathbb{R}_0}{dt}(0) + \mathbb{R}_1(0) \right) \Pi_{00}u = 0, \quad (3.38)$$

где $\Pi_{01}\psi(\tau_0) = (\Pi_{01}p(\tau_0)', \Pi_{01}q(\tau_0)')'$, $\Pi_{01}q(\tau_0) = (\Pi_{01}^{(1)}q(\tau_0)', \Pi_{01}^{(2)}q(\tau_0)')'$ — решение задачи

$$(E_1 + E_2)\frac{d\Pi_{01}\psi}{d\tau_0} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{01}w + \left(\tau_0\frac{d\mathbb{W}_0}{dt}(0) + \mathbb{W}_1(0)\right)\Pi_{00}w - \mathbb{A}_0(0)'\Pi_{00}\psi, \quad \tau_0 \geq 0, \quad (3.39)$$

$$(E_1 + E_2)\Pi_{01}\psi(+\infty) = 0 \quad (3.40)$$

и

$$\mathbb{B}'Q_{01}\psi - \mathbb{R}_0(T)Q_{01}u - \left(\sigma_0\frac{d\mathbb{R}_0}{dt}(T) + \mathbb{R}_1(T)\right)Q_{00}u = 0, \quad (3.41)$$

где $Q_{01}\psi(\sigma_0) = (Q_{01}p(\sigma_0)', Q_{01}q(\sigma_0)')'$, $Q_{01}q(\sigma_0) = (Q_{01}^{(1)}q(\sigma_0)', Q_{01}^{(2)}q(\sigma_0)')'$ — решение задачи

$$(E_1 + E_2)\frac{dQ_{01}\psi}{d\sigma_0} = \mathbb{W}_0(T)Q_{01}w + \left(\sigma_0\frac{d\mathbb{W}_0}{dt}(T) + \mathbb{W}_1(T)\right)Q_{00}w - \mathbb{A}_0(T)'\mathbb{Q}_{00}\psi, \quad \sigma_0 \leq 0, \quad (3.42)$$

$$E_1Q_{01}\psi(-\infty) = 0, \quad E_2Q_{01}\psi(0) = -E_2(\bar{\psi}_1(T) + Q_{10}\psi(0)). \quad (3.43)$$

Далее будем учитывать, что после решения задач $\Pi_{01}P$ и $Q_{01}P$ пограничные функции $\Pi_{02}x(\tau_0)$ и $Q_{02}x(\sigma_0)$ однозначно определяются из (3.6) и (3.7) при $i = 0, j = 2$.

Представим коэффициент J_4 из (3.4) в виде

$$\int_0^T \bar{F}_4(t) dt + \int_0^{+\infty} \Pi_{03}F(\tau_0) d\tau_0 + \int_{-\infty}^0 Q_{03}F(\sigma_0) d\sigma_0 + \int_0^{+\infty} \Pi_{12}F(\tau_1) d\tau_1 + \int_{-\infty}^0 Q_{12}F(\sigma_1) d\sigma_1.$$

Считаем, что уже найдены решения задач \bar{P}_j , $\Pi_{0j}P$, $Q_{0j}P$, $j = 0, 1$ и $\Pi_{10}P$, $Q_{10}P$. Используя условия оптимальности управления для последних восьми задач, а именно соотношения (3.22)–(3.23), (3.29)–(3.31), (3.24)–(3.25), (3.38)–(3.40), (3.26)–(3.28), (3.41)–(3.43) и (3.32)–(3.33), (3.34)–(3.36), а также уравнения (3.5) при $j = 2, 3, 4$, (3.6) и (3.7) при $i = 0, 1, j = 3, 4$, (3.8) при $j = 0, 2, k = 1, 2$; $j = 3, k = 1$; $j = 1, k = 2$, (3.10) и (3.12) при $i = 0, 1, j = 2, 3, k = 1$; $i = 0, j = 1, k = 2$; $i = 1, j = 1, 2, k = 2$, (3.16) при $j = 2, 3, 4$, (3.18) при $j = 2, 3$, (3.19) при $j = 1, 2$, (3.9), (3.11), (3.13), (3.37), преобразуем каждое из слагаемых в J_4 аналогично J_2 . После отбрасывания известных слагаемых из J_4 получаем сумму $\bar{J}_2 + \Pi_{11}J + Q_{11}J$, где

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 &= \langle \bar{w}_2(T), E_1(Q_{01}\psi(0) + Q_{10}\psi(0)) \rangle + \int_0^T \left(\langle \bar{w}_2, 1/2\mathbb{W}_0(t)\bar{w}_2 + \mathbb{W}_1(t)\bar{w}_1 + \mathbb{W}_2(t)\bar{w}_0 \right. \\ &\quad \left. - \mathbb{A}_1(t)'\bar{\psi}_1 - \mathbb{A}_2(t)'\bar{\psi}_0 \rangle + \langle \bar{u}_2, 1/2\mathbb{R}_0(t)\bar{u}_2 + \mathbb{R}_1(t)\bar{u}_1 \rangle - \left\langle \bar{w}_2, E_2\frac{d\bar{\psi}_1}{dt} \right\rangle \right) dt, \\ \Pi_{11}J &= \int_0^{+\infty} \left(\langle \Pi_{11}w, 1/2\mathbb{W}_0(0)\Pi_{11}w + \mathbb{W}_1(0)\Pi_{10}w \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle \Pi_{11}u, 1/2\mathbb{R}_0(0)\Pi_{11}u + \mathbb{R}_1(0)\Pi_{10}u - \mathbb{B}'E_2\Pi_{10}\psi \rangle \right) d\tau_1, \\ Q_{11}J &= \langle Q_{11}w(0), E_3Q_{01}\psi(0) \rangle + \int_{-\infty}^0 \left(\langle Q_{11}w, 1/2\mathbb{W}_0(T)Q_{11}w + \mathbb{W}_1(T)Q_{10}w \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle Q_{11}u, 1/2\mathbb{R}_0(T)Q_{11}u + \mathbb{R}_1(T)Q_{10}u - \mathbb{B}'E_2Q_{10}\psi \rangle \right) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Поскольку каждое выражение из последних трех зависит от функций одного типа, то $\Pi_{11}v(\tau_1)$ и $Q_{11}v(\sigma_1)$ можно определить как решение следующих двух задач:

$$\begin{aligned} \Pi_{11}P: \quad & \Pi_{11}J \rightarrow \min, \\ \frac{d\Pi_{11}x}{d\tau_1} = 0, \quad & \frac{d\Pi_{11}y^{(1)}}{d\tau_1} = \Pi_{10}u^{(1)}, \quad \frac{d\Pi_{11}y^{(2)}}{d\tau_1} = \Pi_{11}u^{(2)}, \quad \tau_1 \geq 0, \\ \Pi_{11}x(+\infty) = 0, \quad & \Pi_{11}y^{(1)}(+\infty) = 0, \quad \Pi_{11}y^{(2)}(0) = -(\bar{y}_1^{(2)}(0) + \Pi_{01}y^{(2)}(0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{11}P: \quad & Q_{11}J \rightarrow \min, \\ \frac{dQ_{11}x}{d\sigma_1} = 0, \quad & \frac{dQ_{11}y^{(1)}}{d\sigma_1} = Q_{10}u^{(1)}, \quad \frac{dQ_{11}y^{(2)}}{d\sigma_1} = Q_{11}u^{(2)}, \quad \sigma_1 \leq 0, \\ Q_{11}w(-\infty) = 0. \end{aligned}$$

Условия оптимальности управления однозначно разрешимых линейно-квадратичных задач $\Pi_{11}P$ и $Q_{11}P$ запишем соответственно в виде

$$\mathbb{B}'E_3\Pi_{11}\psi + \mathbb{B}'E_2\Pi_{10}\psi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{11}u - \mathbb{R}_1(0)\Pi_{10}u = 0, \quad (3.44)$$

где $\Pi_{11}\psi(\tau_1) = (\Pi_{11}p(\tau_1)', \Pi_{11}q(\tau_1)')'$, $\Pi_{11}q(\tau_1) = (\Pi_{11}\bar{q}^{(1)}(\tau_1)', \Pi_{11}\bar{q}^{(2)}(\tau_1)')'$ — решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_{11}\psi}{d\tau_1} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{11}w + \mathbb{W}_1(0)\Pi_{10}w, \quad & \tau_1 \geq 0, \\ \Pi_{11}\psi(+\infty) = 0, \end{aligned} \quad (3.45)$$

и

$$\mathbb{B}'E_3Q_{11}\psi + \mathbb{B}'E_2Q_{10}\psi - \mathbb{R}_0(T)Q_{11}u - \mathbb{R}_1(T)Q_{10}u = 0, \quad (3.46)$$

где $Q_{11}\psi(\sigma_1) = (Q_{11}p(\sigma_1)', Q_{11}q(\sigma_1)')'$, $Q_{11}q(\sigma_1) = (Q_{11}\bar{q}^{(1)}(\sigma_1)', Q_{11}\bar{q}^{(2)}(\sigma_1)')'$ — решение задачи

$$\frac{dQ_{11}\psi}{d\sigma_1} = \mathbb{W}_0(T)Q_{11}w + \mathbb{W}_1(T)Q_{10}w, \quad \sigma_1 \leq 0, \quad (3.47)$$

$$(E_1 + E_2)Q_{11}\psi(-\infty) = 0, \quad E_3Q_{11}\psi(0) = -E_3Q_{01}\psi(0). \quad (3.48)$$

Итак, решая задачи \bar{P}_j , $\Pi_{ij}P$, $Q_{ij}P$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$, получаем асимптотическое приближение первого порядка решения задачи (2.2)–(2.5), откуда с учетом замены переменных (2.1) можно найти первые члены асимптотического разложения решения исходной задачи (1.1), (1.2).

Таким образом, доказана

Теорема 1. Коэффициент J_0 из разложения (3.4) является критерием качества для задачи \bar{P}_0 , из преобразованных выражений коэффициентов J_1 и J_3 получается сумма критериев качества для задач $\Pi_{00}P$, $Q_{00}P$ и $\Pi_{01}P$, $Q_{01}P$, а из преобразованных выражений коэффициентов J_2 , J_4 получается соответственно сумма критериев качества для задач \bar{P}_1 , $\Pi_{1j}P$, $Q_{1j}P$, $j = 0, 1$.

4. Сравнение построенной асимптотики с асимптотикой решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условий оптимальности управления для возмущенной задачи

При достаточно малых $\varepsilon > 0$ задача (2.2)–(2.5) однозначно разрешима и оптимальное управление удовлетворяет условию

$$\mathbb{B}'\xi - \mathbb{R}(t, \varepsilon)u = 0, \quad (4.1)$$

где сопряженная переменная $\xi(t, \varepsilon) = (\zeta(t, \varepsilon)', \eta(t, \varepsilon)')$, $\eta(t, \varepsilon) = (\overset{(1)}{\eta}(t, \varepsilon)', \overset{(2)}{\eta}(t, \varepsilon)')$ является решением задачи

$$\mathbb{E}(\varepsilon) \frac{d\xi}{dt} = \mathbb{W}(t, \varepsilon)w - \mathbb{A}(t, \varepsilon)'\xi, \quad \mathbb{E}(\varepsilon) = \text{diag}(I_n, \varepsilon I_{n_1}, \varepsilon^2 I_{n_2}), \quad (4.2)$$

$$\xi(T, \varepsilon) = 0. \quad (4.3)$$

Представим сопряженную переменную, как и решение задачи (2.2)–(2.5), в форме (3.1), т. е.

$$\xi(t, \varepsilon) = \bar{\xi}(t, \varepsilon) + \sum_{i=0}^1 (\Pi_i \xi(\tau_i, \varepsilon) + Q_i \xi(\sigma_i, \varepsilon)), \quad (4.4)$$

где каждое слагаемое допускает асимптотическое разложение по целым неотрицательным степеням ε , причем пограничные функции имеют оценки типа (3.2). Подставим (3.1), (4.4) в (2.2)–(2.5) и (4.1)–(4.3). Представим правые части равенств в виде асимптотической суммы (3.3). Путем приравнивания в равенствах, выведенных из (2.3)–(2.5), коэффициентов при одинаковых степенях ε (отдельно зависящих от t , τ_i , σ_i , $i = 0, 1$), получены уравнения (3.5)–(3.12); с учетом поведения пограничных функций на бесконечности — равенства (3.13)–(3.19); откуда найдены уравнения и начальные условия для переменных состояния в построенных задачах \bar{P}_j , $\Pi_{ij}P$, $Q_{ij}P$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$.

Положим $g(u, \xi, t, \varepsilon) = \mathbb{B}'\xi - \mathbb{R}(t, \varepsilon)u$, $h(w, \xi, t, \varepsilon) = \mathbb{W}(t, \varepsilon)w - \mathbb{A}(t, \varepsilon)'\xi$. Для этих функций будем использовать обозначения $\widehat{g}_j(t, \varepsilon)$, $\widehat{\Pi}_{ij}g(\tau_i, \varepsilon)$, $\widehat{Q}_{ij}g(\sigma_i, \varepsilon)$, $\widehat{h}_j(t, \varepsilon)$, $\widehat{\Pi}_{ij}h(\tau_i, \varepsilon)$, $\widehat{Q}_{ij}h(\sigma_i, \varepsilon)$, $i = 0, 1$, аналогичные соответствующим обозначениям для f . Например, $\widehat{g}_j(t, \varepsilon)$ означает значение функции g при $u = \widetilde{u}_j$, $\xi = \widetilde{\xi}_j$.

Осуществляя приравнивание коэффициентов в равенствах, полученных из (4.1)–(4.2) после подстановки разложений для v , ξ (аналогичное проделанному для (2.3)–(2.5)), при $j \geq 0$, $i = 0, 1$ имеем соотношения

$$\mathbb{B}'\bar{\xi}_j - \mathbb{R}_0(t)\bar{u}_j + [\widehat{g}_{j-1}(t, \varepsilon)]_j = 0, \quad (4.5)$$

$$E_1 \frac{d\bar{\xi}_j}{dt} + E_2 \frac{d\bar{\xi}_{j-1}}{dt} + E_3 \frac{d\bar{\xi}_{j-2}}{dt} = \mathbb{W}_0(t)\bar{w}_j - \mathbb{A}_0(t)'\bar{\xi}_j + [\widehat{h}_{j-1}(t, \varepsilon)]_j, \quad (4.6)$$

$$\mathbb{B}'\Pi_{ij}\xi - \mathbb{R}_0(0)\Pi_{ij}u + [\widehat{\Pi}_{i(j-1)}g(\tau_i, \varepsilon)]_j = 0, \quad (4.7)$$

$$E_1 \frac{d\Pi_{ij}\xi}{d\tau_i} + E_2 \frac{d\Pi_{i(j-1)}\xi}{d\tau_i} + E_3 \frac{d\Pi_{i(j-2)}\xi}{d\tau_i} = \mathbb{W}_0(0)\Pi_{i(j-i-1)}w - \mathbb{A}_0(0)'\Pi_{i(j-i-1)}\xi + [\widehat{\Pi}_{i(j-i-2)}h(\tau_i, \varepsilon)]_{j-i-1}, \quad (4.8)$$

$$\mathbb{B}'Q_{ij}\xi - \mathbb{R}_0(T)Q_{ij}u + [\widehat{Q}_{i(j-1)}g(\sigma_i, \varepsilon)]_j = 0, \quad (4.9)$$

$$E_1 \frac{dQ_{ij}\xi}{d\sigma_i} + E_2 \frac{dQ_{i(j-1)}\xi}{d\sigma_i} + E_3 \frac{dQ_{i(j-2)}\xi}{d\sigma_i} = \mathbb{W}_0(T)Q_{i(j-i-1)}w - \mathbb{A}_0(T)'Q_{i(j-i-1)}\xi + [\widehat{Q}_{i(j-i-2)}h(\sigma_i, \varepsilon)]_{j-i-1}. \quad (4.10)$$

Напомним, что функции с отрицательными индексами считаем равными нулю. Поэтому из (4.8), (4.10) при $i = 0, 1$, $j = 0$ и при $i = j = 1$ следуют равенства

$$\frac{d\Pi_{i0}\zeta}{d\tau_i} = 0, \quad \frac{dQ_{i0}\zeta}{d\sigma_i} = 0, \quad i = 0, 1, \quad \frac{d\Pi_{11}\zeta}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{dQ_{11}\zeta}{d\sigma_1} = 0, \quad \frac{d\Pi_{10}\overset{(1)}{\eta}}{d\tau_1} = 0, \quad \frac{dQ_{10}\overset{(1)}{\eta}}{d\sigma_1} = 0.$$

Отсюда в силу стремления пограничных функций на бесконечности к нулю, получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{i0}\zeta(\tau_i) = 0, \quad Q_{i0}\zeta(\sigma_i) = 0, \quad i = 0, 1, \quad \Pi_{11}\zeta(\tau_1) = 0, \quad Q_{11}\zeta(\sigma_1) = 0, \\ \Pi_{10}\overset{(1)}{\eta}(\tau_1) = 0, \quad Q_{10}\overset{(1)}{\eta}(\sigma_1) = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Учитывая (3.8) при $j = 0, k = 1, 2$ и (3.9), (3.11), из (4.5) при $j = 0$ и (4.7), (4.9) при $i = 0, j = 0$ находим соответственно

$$\bar{\eta}_0(t) = 0, \quad \Pi_{00}^{(2)} \bar{\eta}(\tau_0) = 0, \quad Q_{00}^{(2)} \bar{\eta}(\sigma_0) = 0. \quad (4.12)$$

Принимая во внимание первое равенство из (4.12), а также (3.8) при $j = 0, k = 1, 2$ и $j = 1, k = 2$, из (4.5) с $j = 1$ имеем

$$\bar{\eta}_1^{(2)}(t) = 0. \quad (4.13)$$

Подставляя разложения (4.4) в (4.3) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , с учетом поведения пограничных функций на бесконечности получаем $\bar{\xi}_j(T) + Q_{0j}\xi(0) + Q_{1j}\xi(0) = 0$. Отсюда при $j = 0, 1$ в силу (4.11)–(4.13) имеем

$$\bar{\zeta}_0(T) = 0, \quad Q_{00}^{(1)} \bar{\eta}(0) = 0, \quad Q_{10}^{(2)} \bar{\eta}(0) = 0, \quad (4.14)$$

$$\bar{\zeta}_1(T) + Q_{01}\zeta(0) = 0, \quad \bar{\eta}_1^{(1)}(T) + Q_{01}^{(1)} \bar{\eta}(0) + Q_{11}^{(1)} \bar{\eta}(0) = 0, \quad Q_{01}^{(2)} \bar{\eta}(0) + Q_{11}^{(2)} \bar{\eta}(0) = 0. \quad (4.15)$$

Поскольку (4.5), (4.6) при $j = 0$ и первое соотношение в (4.14) совпадают с условиями оптимальности управления (3.21)–(3.23) для задачи \bar{P}_0 , то $\bar{\psi}_0 = \bar{\xi}_0$. Сравнивая (4.7) при $j = 0$ и (4.8) при $j = 1$ с условиями оптимальности управления (3.24)–(3.25) для задачи $\Pi_{00}P$, с учетом (4.11), (4.12), равенства $\Pi_{00}^{(2)} \bar{q}(\tau_0) = 0$, вида матриц $\mathbb{A}(t, \varepsilon)$, \mathbb{B} и свойства пограничных функций на бесконечности получаем $E_1 \Pi_{01}\xi + (E_2 + E_3) \Pi_{00}\xi = \Pi_{00}\psi$. Так как (4.9) при $i = j = 0$, (4.10) при $i = 0, j = 1$ и второе равенство из (4.14) в силу (4.11), (4.12), равенства $Q_{00}^{(2)} \bar{q}(\sigma_0) = 0$, свойства пограничных функций и вида матриц $\mathbb{A}(t, \varepsilon)$, \mathbb{B} совпадают с условиями оптимальности управления (3.26)–(3.28) для задачи $Q_{00}P$, то $E_1 Q_{01}\xi + (E_2 + E_3) Q_{00}\xi = Q_{00}\psi$. Аналогичным образом (4.7) при $i = 1, j = 0$, (4.8) при $i = 1, j = 2$ ввиду (4.11) и свойства пограничных функций на бесконечности соответствуют условиям оптимальности управления (3.32)–(3.33) для задачи $\Pi_{10}P$, поэтому $E_1 \Pi_{12}\xi + E_2 \Pi_{11}\xi + E_3 \Pi_{10}\xi = \Pi_{10}\psi$. Так как (4.9) при $i = 1, j = 0$, (4.10) при $i = 1, j = 2$, третье равенство из (4.14) с учетом (4.11) и свойства пограничных функций совпадают с условиями оптимальности управления (3.34)–(3.36) для задачи $Q_{10}P$, то $E_1 Q_{12}\xi + E_2 Q_{11}\xi + E_3 Q_{10}\xi = Q_{10}\psi$.

Учитывая полученные выше равенства, а также (4.11)–(4.13), вид матриц $\mathbb{A}(t, \varepsilon)$, \mathbb{B} и свойства пограничных функций, в результате сравнения (4.5), (4.6) при $j = 1$, (4.7) при $i = 0, j = 1$; $i = j = 1$, (4.8) при $i = 0, j = 2$; $i = 1, j = 3$, (4.9) при $i = 0, j = 1$; $i = j = 1$, (4.10) при $i = 0, j = 2$; $i = 1, j = 3$ и (4.15) с условиями оптимальности управления (3.29)–(3.31), (3.38)–(3.40), (3.44)–(3.45), (3.41)–(3.43), (3.46)–(3.48) для задач $\bar{P}_1, \Pi_{01}P, \Pi_{11}P, Q_{01}P, Q_{11}P$ соответственно имеем $\bar{\psi}_1 = \bar{\xi}_1, E_1 \Pi_{02}\xi + (E_2 + E_3) \Pi_{01}\xi = \Pi_{01}\psi, E_1 \Pi_{13}\xi + E_2 \Pi_{12}\xi + E_3 \Pi_{11}\xi = \Pi_{11}\psi, E_1 Q_{02}\xi + (E_2 + E_3) Q_{01}\xi = Q_{01}\psi, E_1 Q_{13}\xi + E_2 Q_{12}\xi + E_3 Q_{11}\xi = Q_{11}\psi$.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Краевые задачи, полученные из условий оптимальности управления для задач $\bar{P}_j, \Pi_{ij}P, Q_{ij}P, j = 0, 1, i = 0, 1$, совпадают соответственно с задачами для $(\bar{v}_j, \bar{\xi}_j), (\Pi_{0j}v, E_1 \Pi_{0(j+1)}\xi + (E_2 + E_3) \Pi_{0j}\xi), (Q_{0j}v, E_1 Q_{0(j+1)}\xi + (E_2 + E_3) Q_{0j}\xi), (\Pi_{1j}v, E_1 \Pi_{1(j+2)}\xi + E_2 \Pi_{1(j+1)}\xi + E_3 \Pi_{1j}\xi), (Q_{1j}v, E_1 Q_{1(j+2)}\xi + E_2 Q_{1(j+1)}\xi + E_3 Q_{1j}\xi)$ из асимптотики (3.1), (4.4) решения задачи (2.3)–(2.5), (4.1)–(4.3), вытекающей из условия оптимальности управления для задачи P_ε .*

5. Пример

Рассмотрим задачу

$$J(v^{(1)}, v^{(2)}) = 1/2 \int_0^1 ((z^{(1)})^2 + (z^{(2)})^2 + \varepsilon^2 (v^{(1)})^2 + \varepsilon^4 (v^{(2)})^2) dt \rightarrow \min,$$

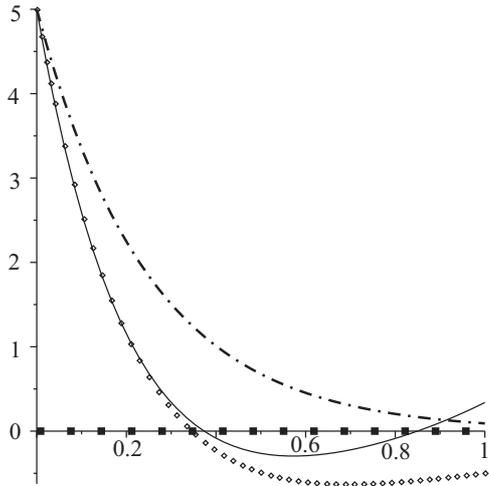


Рис. 1

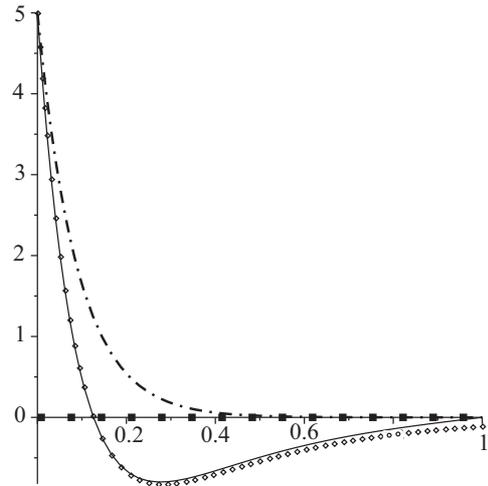


Рис. 2

$$\frac{dz^{(1)}}{dt} = z^{(2)} + v^{(1)}, \quad \frac{dz^{(2)}}{dt} = z^{(1)} + v^{(2)}, \quad z^{(1)}(0) = 10, \quad z^{(2)}(0) = 5.$$

Используя замены переменных (2.1), из последней задачи получаем следующую:

$$J_\epsilon(u) = 1/2 \int_0^1 ((x^{(1)} + y^{(1)})^2 + (x^{(2)} + y^{(2)})^2 + (u^{(1)})^2 + (u^{(2)})^2) dt \rightarrow \min,$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = x^{(2)} + y^{(2)}, \quad \frac{dx^{(2)}}{dt} = x^{(1)} + y^{(1)}, \quad \epsilon^k \frac{dy^{(k)}}{dt} = u^{(k)},$$

$$x^{(1)}(0) = 10, \quad x^{(2)}(0) = 5, \quad y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Руководствуясь вышеизложенным алгоритмом, сформулируем задачи оптимального управления \bar{P}_j , $\Pi_{ij}P$, $Q_{ij}P$, $j = 0, 1$, $i = 0, 1$, из решения которых с учетом замены (2.1) получим первые члены асимптотического разложения решения $v^{(k)}(t, \epsilon)$, $z^{(k)}(t, \epsilon)$, $k = 1, 2$, рассматриваемой задачи: $\bar{v}_{-1}^{(1)} = 0$, $\bar{v}_{-2}^{(2)} = 0$, $\bar{z}_0^{(1)} = 0$, $\bar{z}_0^{(2)} = 0$, $\bar{v}_0^{(1)} = -10e^{-t/\epsilon}$, $\bar{v}_{-1}^{(2)} = -5e^{-t/\epsilon^2}/\epsilon^2 - 10e^{-t/\epsilon^2}/\epsilon$, $\tilde{z}_1^{(1)} = 10e^{-t/\epsilon}$, $\tilde{z}_1^{(2)} = 5e^{-t/\epsilon^2} - 10\epsilon(e^{-t/\epsilon} - e^{-t/\epsilon^2})$.

Результаты вычислений при $\epsilon = 0.5$ и $\epsilon = 0.3$ для функции $z^{(2)}(t, \epsilon)$ и ее приближений представлены на рис. 1, 2 соответственно, где сплошной тонкой линией обозначены точные решения $z_*^{(2)}(t, \epsilon)$, черными прямоугольничками — функции $\bar{z}_0^{(2)}(t)$, штрихпунктирной линией — функции $\tilde{z}_0^{(2)}(t, \epsilon)$, ромбиками — функции $\tilde{z}_1^{(2)}(t, \epsilon)$.

Значения функционала при оптимальном управлении $v_*^{(k)}(t, \epsilon)$, $k = 1, 2$, и его первых приближениях представлены в следующей таблице:

ϵ	$J(\bar{v}_{-1}^{(1)}, \bar{v}_{-2}^{(2)})$	$J(\bar{v}_{-1}^{(1)}, \bar{v}_{-2}^{(2)})$	$J(\tilde{v}_0^{(1)}, \tilde{v}_{-1}^{(2)})$	$J(v_*^{(1)}, v_*^{(2)})$
0.5	182.396	47.625	34.049	33.761
0.3	182.396	23.817	17.216	17.188

Из таблицы видно, что значение минимизируемого функционала уменьшается при использовании асимптотического приближения оптимального управления высшего порядка, т. е. построенная последовательность управлений является минимизирующей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
2. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1983. 393 с.
3. **O'Malley R.E. Jr., Jameson A.** Singular perturbations and singular arcs. Part 2 // IEEE Trans. Automat. Control. 1977. Vol. AC-22, no. 3. P. 328–337.
4. **Курина Г.А.** Об одной вырожденной задаче оптимального управления и сингулярных возмущениях // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 3. С. 517–520.
5. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978. 106 с.
6. **Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г., Овезов Х.А.** Построение субоптимальных управлений в линейно-квадратичных задачах, близким к вырожденным // Информатика и системный анализ: сб. ст. Ашхабад, 1990. С. 4–19.
7. **Дмитриев М.Г., Курина Г.А., Овезов Х.А.** Использование прямой схемы для решения линейно-квадратичной задачи оптимального управления с сингулярным возмущением // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1996. № 4. С. 62–68.
8. **Kurina G.A., Nguyen T.H.** Asymptotic solution of a linear-quadratic problem with discontinuous coefficients and cheap control // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 232. P. 347–364.
9. **Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г.** Решение классических задач оптимального управления с погранслоем // Автоматика и телемеханика. 1989. № 7. С. 71–81.
10. **Glizer V.Y.** Cheap quadratic control of linear systems with state and control delays // Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. B: Appl. Algorithms. 2012. Vol. 19, no. 1–2. P. 277–301.
11. **Васильева А.Б.** Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1963. Т. 3, № 4. С. 611–642.
12. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
13. **Kurina G.A., März R.** On linear-quadratic optimal control problem for time-varying descriptor systems // SIAM J. Control Optim. 2004. Vol. 42, no. 6. P. 2062–2077.
14. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высш. шк., 2003. 615 с.

Калашникова Маргарита Александровна
аспирант
Воронежский государственный университет
e-mail: margarita.kalashnikova@mail.ru

Поступила 01.11.15

Курина Галина Алексеевна
д-р физ.-мат. наук, профессор
Воронежский государственный университет
e-mail: kurina@math.vsu.ru

УДК 517.972

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ДВУСТОРОННИМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ В ПЕРЕМЕННЫХ ОБЛАСТЯХ¹

А. А. Ковалевский

Установлены достаточные условия сходимости минимизантов и минимальных значений интегральных и более общих функционалов на множествах функций, определяемых двусторонними препятствиями в переменных областях. Заданные препятствия являются элементами соответствующего пространства Соболева, причем для разности верхнего и нижнего препятствий допустимо вырождение на множестве меры нуль. Показано, что ослабление условия положительности этой разности на множестве полной меры может привести к определенному нарушению установленного результата о сходимости.

Ключевые слова: интегральный функционал, минимизант, минимальное значение, двусторонние препятствия, Γ -сходимость, сильная связанность.

A. A. Kovalevsky. On the convergence of solutions of variational problems with bilateral obstacles in variable domains.

We establish sufficient conditions for the convergence of minimizers and minimum values of integral and more general functionals on sets of functions defined by bilateral obstacles in variable domains. The given obstacles are elements of the corresponding Sobolev space, and the degeneration on a set of measure zero is admitted for the difference of the upper and lower obstacles. We show that a weakening of the condition of positivity of this difference on a set of full measure may lead to a certain violation of the established convergence result.

Keywords: integral functional, minimizer, minimum value, bilateral obstacles, Γ -convergence, strong connectedness.

Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n и $p > 1$. Пусть $\{\Omega_s\}$ — последовательность областей в \mathbb{R}^n , содержащихся в Ω .

В статье рассмотрим последовательность функционалов $J_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ структуры $J_s = F_s + G_s$, где $\{F_s\}$ — последовательность интегральных функционалов, интегранты которых удовлетворяют определенным условиям выпуклости, роста и коэрцитивности, а $\{G_s\}$ — некоторая последовательность слабо непрерывных функционалов. Наряду с этим рассмотрим последовательность множеств $V_s(\varphi, \psi) \subset W^{1,p}(\Omega_s)$, элементы которых ограничены снизу функцией $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и сверху функцией $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ почти всюду в соответствующей области Ω_s , причем $\varphi \leq \psi$ почти всюду в Ω . Исследуем вопрос о сходимости минимизантов и минимальных значений функционалов J_s на множествах $V_s(\varphi, \psi)$.

Аналогичный вопрос изучался автором в работе [1], где рассматривались только интегральные функционалы, причем при более сильных предположениях относительно их структурных составляющих. Из результатов статьи [1], в частности, следует, что доказательство сходимости минимизантов и минимальных значений рассматриваемых функционалов на множествах $V_s(\varphi, \psi)$, по существу, может быть сведено к установлению Γ -сходимости этих функ-

¹Работа выполнена в рамках комплексной программы ФНИ УРО РАН “Современные проблемы алгебры, анализа и теории динамических систем с приложениями к управлению сложными объектами” (проект “Разработка новых аналитических, численных и асимптотических методов исследования задач математической физики и приложения к обработке сигналов”), а также при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УРФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт № 02.A03.21.0006).

ционалов к некоторому функционалу $J : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ и определенной (сильной) связанности пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$. При этом в [1] предполагалось, что $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и выполняется условие

$$\psi - \varphi \geq \alpha \text{ п. в. в } \Omega, \quad (0.1)$$

где $\alpha > 0$ (по данному поводу см. также [2, теорема 2.9]).

В настоящей работе для доказательства сходимости минимизантов и минимальных значений функционалов J_s на множествах $V_s(\varphi, \psi)$ требуются сильная связанность последовательности пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, Γ -сходимость последовательности $\{F_s\}$ и некоторая сходимость последовательности $\{G_s\}$. Предполагаем также, что $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$, но, в отличие от [1], вместо выполнения условия (0.1) с некоторым $\alpha > 0$ требуем, чтобы выполнялось более слабое условие

$$\psi - \varphi > 0 \text{ п. в. в } \Omega. \quad (0.2)$$

В связи с этим отметим, что сходимость решений нелинейных эллиптических вариационных неравенств с множествами ограничений, определяемыми двусторонними препятствиями $\varphi_s, \psi_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такими, что $\psi_s - \varphi_s \geq \alpha$ п. в. в Ω_s , где $\alpha > 0$, изучалась в [3]. При этом предполагалось, что области Ω_s имеют специальную (перфорированную) структуру, а последовательность операторов $A_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow (W^{1,p}(\Omega_s))^*$, порождающих левую часть указанных вариационных неравенств, является G -сходящейся.

Заметим также, что в работе [4] показано, что G -сходимость последовательности линейных непрерывных операторов $\mathcal{A}_s : \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$ дивергентного вида к оператору $\mathcal{A} : \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) \rightarrow W^{-1,2}(\Omega)$ такого же вида влечет слабую сходимость решений вариационных неравенств с операторами \mathcal{A}_s и множеством ограничений $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega) : \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ п. в. в } \Omega\}$ к решению соответствующего вариационного неравенства с оператором \mathcal{A} и тем же множеством ограничений. При этом относительно функций ψ_1 и ψ_2 в [4] предполагается, что $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$ и для любой подобласти $\omega \subset\subset \Omega$ существуют число $\delta^\omega > 0$ и функции $\psi_1^\omega, \psi_2^\omega \in \overset{\circ}{W}^{1,2}(\Omega)$ такие, что $\psi_1 \leq \psi_1^\omega \leq \psi_2^\omega \leq \psi_2$ в Ω и $\psi_2^\omega - \psi_1^\omega \geq \delta^\omega$ в ω . Как видно, требование (0.2) относительно разности верхнего и нижнего препятствий в настоящей работе слабее соответствующего требования в [4].

С использованием техники теории Γ -сходимости функционалов асимптотическое поведение (при $s \rightarrow \infty$) решений вариационных задач для квадратичного интегрального функционала с двусторонними ограничениями типа $\varphi_s \leq v \leq \psi_s$, где $\varphi_s, \psi_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, исследовано в [5]. При этом получение результатов о сходимости решений предполагает существование последовательности функций, ограниченной в соответствующем соболевском пространстве и удовлетворяющей двусторонним ограничениям указанного типа. К тому же ввиду общего характера препятствий, рассматриваемых в [5], соответствующая предельная вариационная задача тоже имеет достаточно общий вид.

Отметим, что понятие сильной связанности соболевских пространств восходит к работе [6], где было введено условие сильной связанности n -мерных областей, являющееся, по существу, прообразом названного понятия.

Структура настоящей работы следующая. В разд. 1 сформулированы необходимые определения и предположения. В разд. 2 изложена основная теорема статьи. Наконец, в разд. 3 дан ряд комментариев и примеров относительно сделанных предположений и выполнения условий основной теоремы. В частности, показана существенность условия (0.2) для справедливости этой теоремы.

1. Определения и предположения

Легко видеть, что если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $s \in \mathbb{N}$, то $v|_{\Omega_s} \in W^{1,p}(\Omega_s)$.

О п р е д е л е н и е 1. Если $s \in \mathbb{N}$, то q_s — отображение из $W^{1,p}(\Omega)$ в $W^{1,p}(\Omega_s)$ такое, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем $q_s v = v|_{\Omega_s}$.

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что последовательность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ сильно связана с пространством $W^{1,p}(\Omega)$, если существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ такая, что:

- (а) последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена;
- (б) для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем $q_s(l_s v) = v$ п. в. в Ω_s .

О п р е д е л е н и е 3. Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $I_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть $I : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Будем говорить, что последовательность $\{I_s\}$ Γ -сходится к функционалу I , если выполняются следующие условия:

- (а) для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ существует последовательность $w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$ и $I_s(w_s) \rightarrow I(v)$;
- (б) для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такой, что $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$, имеем $\liminf_{s \rightarrow \infty} I_s(v_s) \geq I(v)$.

Перейдем к рассмотрению функционалов, для которых будет исследована сходимость минимизантов и минимальных значений на множествах функций с двусторонними препятствиями.

Пусть $c_1, c_2 > 0$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\mu_s \geq 0$ в Ω_s . Предположим, что последовательность норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ ограничена.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $f_s : \Omega_s \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, удовлетворяющая следующим условиям: для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ функция $f_s(\cdot, \xi)$ измерима на Ω_s ; для почти всех $x \in \Omega_s$ функция $f_s(x, \cdot)$ выпукла на \mathbb{R}^n ; для почти всех $x \in \Omega_s$ и любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$c_1|\xi|^p - \mu_s(x) \leq f_s(x, \xi) \leq c_2|\xi|^p + \mu_s(x). \quad (1.1)$$

В силу предположений относительно функций f_s и μ_s для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ функция $f_s(x, \nabla v)$ суммируема на Ω_s .

О п р е д е л е н и е 4. Если $s \in \mathbb{N}$, то $F_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем

$$F_s(v) = \int_{\Omega_s} f_s(x, \nabla v) dx.$$

В силу условий относительно функций f_s для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал F_s является выпуклым и локально ограниченным. Поэтому для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал F_s слабо полунепрерывен снизу.

Далее, пусть $c_3, c_4 > 0$ и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ $G_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow \mathbb{R}$ — слабо непрерывный функционал. Предположим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ справедливо неравенство

$$G_s(v) \geq c_3 \|v\|_{L^p(\Omega_s)}^p - c_4. \quad (1.2)$$

Ввиду слабой полунепрерывности снизу функционалов F_s и слабой непрерывности функционалов G_s для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал $F_s + G_s$ слабо полунепрерывен снизу. Кроме того, в силу (1.1), (1.2) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ существуют положительные числа c_5 и c_6 такие, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ имеем

$$(F_s + G_s)(v) \geq c_5 \|v\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}^p - c_6. \quad (1.3)$$

2. Основной результат

Пусть $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi \leq \psi$ п. в. в Ω . Положим

$$V(\varphi, \psi) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п. в. в } \Omega\},$$

и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$

$$V_s(\varphi, \psi) = \{v \in W^{1,p}(\Omega_s) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п. в. в } \Omega_s\}.$$

Легко видеть, что множество $V(\varphi, \psi)$ непусто, замкнуто и выпукло. Аналогично, для любого $s \in \mathbb{N}$ множество $V_s(\varphi, \psi)$ непусто, замкнуто и выпукло.

В силу указанных свойств функционалов $F_s + G_s$ и множеств $V_s(\varphi, \psi)$ и известных результатов о существовании точек минимума функционалов (см., например, [7, гл. 3]) для любого $s \in \mathbb{N}$ существует функция в $V_s(\varphi, \psi)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi, \psi)$.

Теорема. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

- (*₁) вложение $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$ компактно;
- (*₂) последовательность пространств $W^{1,p}(\Omega_s)$ сильно связана с пространством $W^{1,p}(\Omega)$;
- (*₃) для любой последовательности измеримых множеств $H_s \subset \Omega_s$ такой, что $\text{meas } H_s \rightarrow 0$, имеем

$$\int_{H_s} \mu_s dx \rightarrow 0;$$

- (*₄) последовательность $\{F_s\}$ Γ -сходится к некоторому функционалу $F : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$;
- (*₅) существует функционал $G : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ со свойством $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$ имеем $G_s(v_s) \rightarrow G(v)$;

- (*₆) $\psi - \varphi > 0$ п. в. в Ω .

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в $V_s(\varphi, \psi)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi, \psi)$.

Тогда существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V(\varphi, \psi)$ такие, что справедливы следующие утверждения:

- 1) функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве $V(\varphi, \psi)$;
- 2) $\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \rightarrow 0$;
- 3) $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow (F + G)(u)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего покажем, что последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена. Действительно, в силу (1.1) и ограниченности последовательности норм $\|u_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ последовательность чисел $F_s(q_s \varphi)$ ограничена. Кроме того, ввиду условия (*₅) последовательность чисел $G_s(q_s \varphi)$ ограничена. Таким образом, последовательность чисел $(F_s + G_s)(q_s \varphi)$ ограничена. Следовательно, существует $M > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad (F_s + G_s)(q_s \varphi) \leq M. \tag{2.1}$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$. В силу (1.3) имеем

$$c_5 \|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}^p \leq (F_s + G_s)(u_s) + c_6, \tag{2.2}$$

а так как функция u_s минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi, \psi)$ и $q_s \varphi \in V_s(\varphi, \psi)$, то

$$(F_s + G_s)(u_s) \leq (F_s + G_s)(q_s \varphi). \tag{2.3}$$

Из (2.1)–(2.3) выводим неравенство

$$\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)} \leq \left(\frac{M + c_6}{c_5} \right)^{1/p}.$$

Значит, последовательность норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ ограничена.

Далее, ввиду условия (*₂) существует последовательность линейных непрерывных операторов $l_s : W^{1,p}(\Omega_s) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$ такая, что последовательность норм $\|l_s\|$ ограничена и справедлива импликация

$$s \in \mathbb{N}, v \in W^{1,p}(\Omega_s) \implies q_s(l_s v) = v \text{ п. в. в } \Omega_s. \quad (2.4)$$

Из ограниченности последовательностей норм $\|u_s\|_{W^{1,p}(\Omega_s)}$ и $\|l_s\|$ вытекает, что последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$.

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\tilde{u}_s = \min\{\max\{l_s u_s, \varphi\}, \psi\}.$$

Имеем $\{\tilde{u}_s\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ и

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \varphi \leq \tilde{u}_s \leq \psi \text{ п. в. в } \Omega. \quad (2.5)$$

Кроме того, в силу (2.4) и включений $u_s \in V_s(\varphi, \psi)$, $s \in \mathbb{N}$, имеем

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad q_s \tilde{u}_s = u_s \text{ п. в. в } \Omega_s. \quad (2.6)$$

Поскольку последовательность $\{l_s u_s\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$, последовательность $\{\tilde{u}_s\}$ также ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Поэтому ввиду рефлексивности пространства $W^{1,p}(\Omega)$ и условия (*₁) существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in W^{1,p}(\Omega)$ такие, что

$$\tilde{u}_{s_j} \rightarrow u \text{ сильно в } L^p(\Omega), \quad (2.7)$$

$$\tilde{u}_{s_j} \rightarrow u \text{ п. в. в } \Omega. \quad (2.8)$$

Из (2.5) и (2.8) вытекает, что $\varphi \leq u \leq \psi$ п. в. в Ω . Значит, $u \in V(\varphi, \psi)$. Заметим также, что в силу (2.6) для любого $s \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|u_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)} \leq \|\tilde{u}_s - u\|_{L^p(\Omega)}$. Отсюда и из (2.7) выводим, что

$$\|u_{s_j} - q_{s_j} u\|_{L^p(\Omega_{s_j})} \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Определим последовательность $\{\bar{u}_s\}$ следующим образом:

$$\bar{u}_s = \begin{cases} u_s, & \text{если } s = s_j \text{ при некотором } j \in \mathbb{N}, \\ q_s u, & \text{если } s \neq s_j \text{ для любого } j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\bar{u}_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, ввиду (2.9) имеем $\|\bar{u}_s - q_s u\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$. Отсюда и из условий (*₄) и (*₅) вытекает, что

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} F_s(\bar{u}_s) \geq F(u), \quad G_s(\bar{u}_s) \rightarrow G(u).$$

Следовательно,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} (F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \geq (F + G)(u). \quad (2.10)$$

Далее, пусть $v \in V(\varphi, \psi)$. В силу условия (*₄) существует последовательность $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что

$$\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0, \quad (2.11)$$

$$F_s(v_s) \rightarrow F(v). \quad (2.12)$$

Используя эти соотношения, построим последовательность $w_s \in V_s(\varphi, \psi)$ такую, что $\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$ и верхний предел последовательности чисел $F_s(w_s)$ не превосходит $F(v)$. Это наиболее существенная часть доказательства теоремы.

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$\sigma_s = \min\{1, (\|v_s - q_s v\|_{L^1(\Omega_s)} + 1/s)^{1/2}\}.$$

Ясно, что $\{\sigma_s\} \subset (0, 1]$. Кроме того, ввиду (2.11) имеем

$$\sigma_s \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$y_s = \sigma_s q_s (\psi - \varphi), \quad \alpha_s = \frac{1 - \sigma_s}{1 + \sigma_s}.$$

Поскольку $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi \leq \psi$ п. в. в Ω , для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $y_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ и $y_s \geq 0$ п. в. в Ω_s . Кроме того, $\{\alpha_s\} \subset [0, 1)$, причем в силу (2.13) имеем

$$\alpha_s \rightarrow 1. \quad (2.14)$$

Теперь для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$z_s = \min\{\max\{v_s, q_s v - y_s\}, q_s v + y_s\},$$

$$E_s = \{|v_s - q_s v| \geq y_s\}, \quad E'_s = \{v_s \leq q_s v - y_s\}, \quad E''_s = \{v_s \geq q_s v + y_s\}.$$

Легко видеть, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функция z_s принадлежит пространству $W^{1,p}(\Omega_s)$ и

$$q_s v - y_s \leq z_s \leq q_s v + y_s \quad \text{п. в. в } \Omega_s.$$

Из данной оценки для функций z_s , определения функций y_s и (2.13) следует, что

$$\|z_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0. \quad (2.15)$$

Из той же оценки и включения $v \in V(\varphi, \psi)$ выводим, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$q_s \varphi - y_s \leq z_s \leq q_s \psi + y_s \quad \text{п. в. в } \Omega_s. \quad (2.16)$$

Ввиду определения множеств E_s , E'_s и E''_s , определения функций y_s и условия (*₆) для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$E_s = E'_s \cup E''_s, \quad \text{meas}(E'_s \cap E''_s) = 0. \quad (2.17)$$

Покажем, что

$$\text{meas } E_s \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

Действительно, в силу (2.11) существует $\bar{s} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$, имеем

$$\|v_s - q_s v\|_{L^1(\Omega_s)} + 1/s \leq 1. \quad (2.19)$$

Пусть $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$. Из определения числа σ_s и из (2.19) вытекает, что

$$\|v_s - q_s v\|_{L^1(\Omega_s)} \leq \sigma_s^2. \quad (2.20)$$

Кроме того, учитывая определение множества E_s и функции y_s , находим, что если $x \in E_s$, то $\sigma_s(\psi - \varphi)(x) < |v_s - q_s v|(x)$. Поэтому

$$\sigma_s \int_{E_s} (\psi - \varphi) dx \leq \int_{\Omega_s} |v_s - q_s v| dx. \quad (2.21)$$

Поскольку $\sigma_s > 0$, из (2.20) и (2.21) выводим, что

$$\int_{E_s} (\psi - \varphi) dx \leq \sigma_s.$$

Ввиду того что это неравенство верно для любого $s \in \mathbb{N}$, $s \geq \bar{s}$, и $\sigma_s \rightarrow 0$, получаем

$$\int_{E_s} (\psi - \varphi) dx \rightarrow 0.$$

Отсюда и из условия (*₆) следует, что соотношение (2.18) справедливо.

Используя определения функций y_s и z_s , определения множеств E_s , E'_s и E''_s , равенства (2.17) и условие (*₆), устанавливаем, что для любого $s \in \mathbb{N}$

$$\nabla z_s = \nabla v_s \cdot 1_{\Omega_s \setminus E_s} + \nabla(q_s v - y_s) \cdot 1_{E'_s} + \nabla(q_s v + y_s) \cdot 1_{E''_s} \quad \text{п. в. в } \Omega_s. \quad (2.22)$$

Далее, для любого $s \in \mathbb{N}$ положим

$$w_s = \alpha_s z_s + (1 - \alpha_s) q_s \varphi + y_s.$$

Ясно, что для любого $s \in \mathbb{N}$ функция w_s принадлежит пространству $W^{1,p}(\Omega_s)$. В силу (2.16) и того, что $\varphi \leq \psi$ п. в. в Ω , для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\varphi \leq w_s \leq \psi$ п. в. в Ω_s . Таким образом,

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad w_s \in V_s(\varphi, \psi). \quad (2.23)$$

Кроме того, ввиду определения функций w_s и y_s для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \leq \alpha_s \|z_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} + (1 - \alpha_s) \|v - \varphi\|_{L^p(\Omega)} + \sigma_s \|\psi - \varphi\|_{L^p(\Omega)}.$$

Отсюда и из (2.13)–(2.15) вытекает, что

$$\|w_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0. \quad (2.24)$$

Покажем, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} F_s(w_s) \leq F(v). \quad (2.25)$$

Прежде всего заметим, что в силу (1.1) и ограниченности последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ существует $M_1 > 0$ такое, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad |F_s(q_s \varphi)| + |F_s(q_s \psi)| \leq M_1. \quad (2.26)$$

Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$ и положим

$$\tilde{w}_s = \frac{1 - \sigma_s}{2} q_s \varphi + \frac{1 + \sigma_s}{2} q_s \psi. \quad (2.27)$$

Ввиду определения функций y_s , w_s и \tilde{w}_s и числа α_s имеем

$$w_s = \alpha_s z_s + (1 - \alpha_s) \tilde{w}_s. \quad (2.28)$$

Поскольку функционал F_s выпуклый, используя равенства (2.27) и (2.28), получаем

$$F_s(\tilde{w}_s) \leq \frac{1 - \sigma_s}{2} F_s(q_s \varphi) + \frac{1 + \sigma_s}{2} F_s(q_s \psi),$$

$$F_s(w_s) \leq \alpha_s F_s(z_s) + (1 - \alpha_s) F_s(\tilde{w}_s).$$

Из этих неравенств и (2.26) следует, что

$$F_s(w_s) \leq \alpha_s F_s(z_s) + (1 - \alpha_s) M_1. \quad (2.29)$$

Оценим число $F_s(z_s)$. В силу (2.17) имеем

$$F_s(z_s) = \int_{\Omega_s \setminus E_s} f_s(x, \nabla z_s) dx + \int_{E'_s} f_s(x, \nabla z_s) dx + \int_{E''_s} f_s(x, \nabla z_s) dx. \quad (2.30)$$

Используя (1.1), (2.17) и (2.22), для интегралов в правой части равенства (2.30) получаем такие оценки:

$$\int_{\Omega_s \setminus E_s} f_s(x, \nabla z_s) dx \leq F_s(v_s) + \int_{E_s} \mu_s dx, \quad (2.31)$$

$$\int_{E'_s} f_s(x, \nabla z_s) dx \leq c_2 \int_{E'_s} |\nabla(q_s v - y_s)|^p dx + \int_{E'_s} \mu_s dx, \quad (2.32)$$

$$\int_{E''_s} f_s(x, \nabla z_s) dx \leq c_2 \int_{E''_s} |\nabla(q_s v + y_s)|^p dx + \int_{E''_s} \mu_s dx. \quad (2.33)$$

Кроме того, ввиду определения функции y_s , включения $\sigma_s \in (0, 1]$ и равенств (2.17) имеем

$$\int_{E'_s} |\nabla(q_s v - y_s)|^p dx + \int_{E''_s} |\nabla(q_s v + y_s)|^p dx \leq \int_{E_s} (|\nabla v| + |\nabla(\psi - \varphi)|)^p dx. \quad (2.34)$$

Ясно также, что

$$\int_{E'_s} \mu_s dx + \int_{E''_s} \mu_s dx = \int_{E_s} \mu_s dx. \quad (2.35)$$

Из (2.30)–(2.35) выводим, что

$$F_s(z_s) \leq F_s(v_s) + c_2 \int_{E_s} (|\nabla v| + |\nabla(\psi - \varphi)|)^p dx + 2 \int_{E_s} \mu_s dx. \quad (2.36)$$

В свою очередь, учитывая, что $\alpha_s \in [0, 1)$, из (2.29) и (2.36) получаем неравенство

$$F_s(w_s) \leq \alpha_s F_s(v_s) + c_2 \int_{E_s} (|\nabla v| + |\nabla(\psi - \varphi)|)^p dx + 2 \int_{E_s} \mu_s dx + (1 - \alpha_s) M_1.$$

Поскольку это неравенство установлено для любого $s \in \mathbb{N}$, используя (2.12), (2.14), (2.18) и условие $(*_3)$, заключаем, что неравенство (2.25) справедливо.

Далее, в силу (2.24) и условия $(*_5)$ имеем $G_s(w_s) \rightarrow G(v)$. Отсюда и из (2.25) вытекает, что

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} (F_s + G_s)(w_s) \leq (F + G)(v). \quad (2.37)$$

Так как для любого $s \in \mathbb{N}$ функция u_s минимизирует функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi, \psi)$, то, учитывая (2.23), для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $(F_s + G_s)(u_s) \leq (F_s + G_s)(w_s)$. Отсюда и из (2.37) следует неравенство

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \leq (F + G)(v). \quad (2.38)$$

Из этого неравенства и неравенства (2.10) выводим, что $(F + G)(u) \leq (F + G)(v)$. Поэтому ввиду произвольности функции $v \in V(\varphi, \psi)$ заключаем, что функция u минимизирует функционал $F + G$ на множестве $V(\varphi, \psi)$. Кроме того, в силу той же произвольности функции $v \in V(\varphi, \psi)$ и включения $u \in V(\varphi, \psi)$ из (2.38) получаем

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \leq (F + G)(u).$$

Из этого неравенства и неравенства (2.10) вытекает, что $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow (F + G)(u)$.

Таким образом, установлено, что существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V(\varphi, \psi)$ такие, что справедливы утверждения 1)–3) заключения теоремы. Тем самым доказательство теоремы завершено.

3. Комментарии и примеры

Дадим ряд комментариев и примеров относительно реализации предположений, сделанных в разд. 1, и выполнения условий теоремы.

Как известно (см., например, [8, гл. 6]), условие $(*_1)$ теоремы выполняется, если область Ω липшицева. В частности, липшицевыми являются выпуклые ограниченные области.

Условие $(*_2)$ теоремы выполняется, в частности, если области Ω_s имеют определенную перфорированную структуру. По этому поводу см., например, [3].

Относительно выполнения условий $(*_3)$ и $(*_4)$ теоремы заметим следующее. В том случае, когда все функции μ_s принимают одно и то же постоянное значение, теоремы об условиях Γ -сходимости последовательности интегральных функционалов F_s с интегрантами f_s , удовлетворяющими условию (1.1), следуют из результатов работ [9; 10], где изучалась Γ -сходимость интегральных функционалов, определенных на пространствах $W^{m,p}(\Omega_s)$ с произвольным $m \in \mathbb{N}$. В частности, последовательность $\{F_s\}$ Γ -сходится к некоторому интегральному функционалу, если области Ω_s имеют периодическую перфорированную структуру и все интегранты f_s совпадают с одним и тем же интегрантом, имеющим определенную регулярность (см. [9]). При этом вместе с выполнением сказанного относительно функций μ_s последовательность норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$ ограничена и выполняется условие $(*_3)$ теоремы. В более общем случае, когда при том что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$ и $\mu_s \geq 0$ в Ω_s , выполняется условие

$$\text{для любого открытого куба } Q \text{ в } \mathbb{R}^n \text{ имеем } \limsup_{s \rightarrow \infty} \int_{Q \cap \Omega_s} \mu_s dx \leq \int_{Q \cap \Omega} \mu dx, \quad (3.1)$$

где $\mu \in L^1(\Omega)$ и $\mu \geq 0$ в Ω , аналогично изложенному в [11] устанавливается, что из последовательности $\{F_s\}$ можно извлечь подпоследовательность, Γ -сходящуюся к некоторому интегральному функционалу $F : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$. Легко видеть, что выполнение условия (3.1) обеспечивает ограниченность последовательности норм $\|\mu_s\|_{L^1(\Omega_s)}$. Заметим также, что есть примеры последовательностей неотрицательных функций $\mu_s \in L^1(\Omega_s)$, для которых выполняются условие (3.1) и условие $(*_3)$ теоремы и не существует функции $\mu_* : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\mu_s \leq \mu_*$ п. в. в Ω_s . Подобные примеры можно указать, используя функции, построенные в статье [12].

Далее, рассмотрим пример выполнения условия $(*_5)$ теоремы.

П р и м е р 1. Пусть $a \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$. Пусть $\beta_1 \in (0, 1)$, $\beta_2 > 0$, и пусть $\Phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция такая, что для любого $\eta \in [0, +\infty)$ имеем

$$|\Phi(\eta)| \leq \beta_1 |\eta|^p + \beta_2. \quad (3.2)$$

Предположим, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$

$$G_s(v) = \int_{\Omega_s} \{|v|^p + av\} dx + \Phi(\|v\|_{L^p(\Omega_s)}).$$

Полагая

$$c_3 = \frac{p-1}{p}(1-\beta_1), \quad c_4 = \frac{p-1}{p}(1-\beta_1)^{-1/(p-1)} \|a\|_{L^{p/(p-1)}(\Omega)}^{p/(p-1)} + \beta_2$$

и используя (3.2), убеждаемся в том, что для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ справедливо неравенство (1.2). Заметим также, что если выполняются условия $(*_1)$ и $(*_2)$ теоремы, то для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал G_s слабо непрерывен на $W^{1,p}(\Omega_s)$. Действительно, пусть указанные условия выполняются и пусть $\{l_s\}$ — последовательность операторов со свойствами, описанными в определении 2. Зафиксируем $s \in \mathbb{N}$. Пусть $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$, $\{v_j\} \subset W^{1,p}(\Omega_s)$ и $v_j \rightarrow v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega_s)$. Ясно, что $l_s v_j \rightarrow l_s v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$. Отсюда и из условия $(*_1)$ теоремы вытекает, что $l_s v_j \rightarrow l_s v$ сильно в $L^p(\Omega)$. Поэтому, учитывая свойство (b) из определения 2, заключаем, что $v_j \rightarrow v$ сильно в $L^p(\Omega_s)$. Тогда ввиду включения $a \in L^{p/(p-1)}(\Omega)$ и непрерывности функции Φ имеем $G_s(v_j) \rightarrow G_s(v)$. Значит, функционал G_s слабо непрерывен на $W^{1,p}(\Omega_s)$.

Предположим, что выполняется следующее условие:

$(*)$ существует неотрицательная ограниченная измеримая функция $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для любого открытого куба $Q \subset \Omega$ имеем $\text{meas}(Q \cap \Omega_s) \rightarrow \int_Q b \, dx$.

Пусть $G : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал такой, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$G(v) = \int_{\Omega} b\{|v|^p + av\} dx + \Phi(\|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}).$$

Покажем, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и любой последовательности $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ со свойством $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$ имеем $G_s(v_s) \rightarrow G(v)$. Это будет означать, что условие $(*_5)$ теоремы выполняется. Прежде всего заметим, что в силу условия $(*)$ имеем

$$\forall w \in L^1(\Omega) \quad \int_{\Omega_s} w \, dx \rightarrow \int_{\Omega} bw \, dx. \tag{3.3}$$

Итак, пусть $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и пусть имеем последовательность $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ со свойством $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$. Ясно, что

$$\|v_s\|_{L^p(\Omega_s)} - \|q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0, \quad \int_{\Omega_s} av_s \, dx - \int_{\Omega_s} aq_s v \, dx \rightarrow 0. \tag{3.4}$$

Кроме того, ввиду (3.3) имеем

$$\|q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow \|b^{1/p}v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \int_{\Omega_s} aq_s v \, dx \rightarrow \int_{\Omega} bav \, dx. \tag{3.5}$$

Теперь, учитывая непрерывность функции Φ , из (3.4) и (3.5) выводим, что $G_s(v_s) \rightarrow G(v)$.

Остается заметить, что условие $(*)$ вместе с условиями $(*_1)$ и $(*_2)$ теоремы выполняется, если, например, область Ω липшицева, а области Ω_s имеют периодическую перфорированную структуру.

Приведем пример выполнения условия $(*_6)$ теоремы.

Пример 2. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, и пусть для любого $x \in \Omega$ имеем $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = |x|^2(1 - |x|^2)$. В силу этих предположений имеем $\varphi, \psi \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi \leq \psi$ в Ω . Кроме того, для любого $x \in \Omega \setminus \{0\}$ имеем $(\psi - \varphi)(x) > 0$. Значит, условие $(*_6)$ теоремы выполняется. Заметим, что в рассматриваемом здесь случае имеем $V(\varphi, \psi) = \{v \in \overset{\circ}{W}^{1,p}(\Omega) : \varphi \leq v \leq \psi \text{ п. в. в } \Omega\}$. Следовательно, при $p = 2$ множество $V(\varphi, \psi)$ имеет такой же вид, как и множество, определяемое двусторонними препятствиями, в [4]. Заметим также, что если

ω — область в \mathbb{R}^n такая, что $\bar{\omega} \subset \Omega$ и начало координат содержится в ω , то не существует числа $\delta^\omega > 0$ такого, что $\psi - \varphi \geq \delta^\omega$ п. в. в ω . Поэтому упомянутое во введении условие на препятствия из работы [4] для функций φ и ψ не выполняется.

Перейдем к заключительному примеру. В связи с ним отметим очевидный факт, что условие $(*_6)$ теоремы равносильно требованию $\text{meas}\{\varphi = \psi\} = 0$. В предлагаемом примере опишем ситуацию, в которой, во-первых, выполняются условия $(*_1)$ – $(*_5)$ теоремы, во-вторых, мера множества $\{\varphi = \psi\}$ положительна и не превосходит наперед заданного положительного числа и, в-третьих, для соответствующей последовательности $\{u_s\}$ заключение теоремы в целом неверно. Тем самым будет обоснована существенность условия $(*_6)$ теоремы для справедливости ее заключения.

Пример 3. Пусть $\varepsilon > 0$, и пусть Q — открытый куб в \mathbb{R}^n такой, что $\bar{Q} \subset \Omega$ и $\text{meas } Q \leq \varepsilon/2$. В силу изложенного в [13, пример 4.16] существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и последовательность функций $\{\tau_s\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ такие, что

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad \tau_s = 0 \text{ в } \Omega \setminus Q, \quad (3.6)$$

$$\forall s \in \mathbb{N} \quad |\nabla \tau_s| \leq \lambda_1 \text{ в } \Omega, \quad (3.7)$$

$$\|\tau_s\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

$$\int_Q |\nabla \tau_s|^p dx \rightarrow \lambda_2. \quad (3.9)$$

Будем считать, что область Ω липшицева и для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\Omega_s = \Omega$. Тогда условия $(*_1)$ и $(*_2)$ теоремы выполняются.

Пусть $c_1 = 2^{1-p}$, $c_2 = 2^{p-1}$, и пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ и любого $x \in \Omega_s$ имеем

$$\mu_s(x) = 2^{p-1} |\nabla \tau_s(x)|^p.$$

Кроме того, предположим, что для любого $s \in \mathbb{N}$ и любой пары $(x, \xi) \in \Omega_s \times \mathbb{R}^n$ имеем

$$f_s(x, \xi) = |\xi + \nabla \tau_s(x)|^p. \quad (3.10)$$

В силу сделанных предположений функции μ_s и f_s удовлетворяют соответствующим условиям из разд. 1, причем в силу (3.7) выполняется условие $(*_3)$ теоремы.

Далее, пусть $F, G : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ — функционалы такие, что для любой функции $v \in W^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$F(v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx, \quad G(v) = \int_{\Omega} |v|^p dx.$$

Ввиду (3.10) и определения 4 для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ получаем

$$F_s(v) = F(v + \tau_s). \quad (3.11)$$

Покажем, что последовательность $\{F_s\}$ Γ -сходится к функционалу F . Действительно, зафиксируем произвольную функцию $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $w_s = v - \tau_s$. С учетом (3.8) и (3.11) имеем: $\forall s \in \mathbb{N} \quad w_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$; $\|w_s - v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$; $F_s(w_s) \rightarrow F(v)$. Теперь пусть имеется последовательность $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ такая, что $\|v_s - w_s\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$. Значит,

$$\|v_s - v\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

Пусть β — предельная точка последовательности $\{F_s(v_s)\}$, причем $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда в силу (3.11), (3.12) и (3.7) существует возрастающая последовательность $\{\bar{s}_j\} \subset \mathbb{N}$ такая, что

$$F(v_{\bar{s}_j} + \tau_{\bar{s}_j}) \rightarrow \beta \quad (3.13)$$

и последовательность $\{v_{\bar{s}_j}\}$ ограничена в $W^{1,p}(\Omega)$. Ввиду последнего свойства и (3.12) имеем $v_{\bar{s}_j} \rightarrow v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$. Поэтому, учитывая (3.7) и (3.8), имеем $v_{\bar{s}_j} + \tau_{\bar{s}_j} \rightarrow v$ слабо в $W^{1,p}(\Omega)$. Тогда вследствие слабой полунепрерывности снизу функционала F и (3.13) получаем неравенство $\beta \geq F(v)$. Поэтому $\liminf_{s \rightarrow \infty} F_s(v_s) \geq F(v)$. Теперь ввиду определения 3 заключаем, что последовательность $\{F_s\}$ Γ -сходится к функционалу F . Таким образом, условие $(*_4)$ теоремы выполняется.

Пусть для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $G_s = G$. Тогда ввиду предположения, что область Ω липшицева, для любого $s \in \mathbb{N}$ функционал G_s слабо непрерывен на $W^{1,p}(\Omega_s)$. Кроме того, в силу предположения о равенстве всех функционалов G_s функционалу G при $c_3 = 1$ и $c_4 = 1$ для любых $s \in \mathbb{N}$ и $v \in W^{1,p}(\Omega_s)$ справедливо неравенство (1.2). Ясно также, что если $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и имеем последовательность $v_s \in W^{1,p}(\Omega_s)$ со свойством $\|v_s - q_s v\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$, то $G_s(v_s) \rightarrow G(v)$. Значит, условие $(*_5)$ теоремы выполняется.

Далее, пусть для любого $x \in \Omega$ имеем $\varphi(x) = 0$. Пусть Q_1 — открытый куб в \mathbb{R}^n такой, что $\bar{Q} \subset Q_1$, $\bar{Q}_1 \subset \Omega$ и $\text{meas } Q_1 \leq \varepsilon$. Пусть $\psi \in C^1(\Omega)$, причем $0 \leq \psi \leq 1$ в Ω , $\psi = 0$ в Q и $\psi = 1$ в $\Omega \setminus Q_1$. В силу этих предположений $\varphi, \psi \in W^{1,p}(\Omega)$ и $Q \subset \{\varphi = \psi\} \subset Q_1$. Данное включение влечет неравенство $0 < \text{meas}\{\varphi = \psi\} \leq \varepsilon$.

Таким образом, условия $(*_1)$ – $(*_5)$ теоремы выполняются, а условие $(*_6)$ этой теоремы не выполняется.

Ясно, что $\varphi \in V(\varphi, \psi)$ и функция φ минимизирует функционал F на множестве $V(\varphi, \psi)$.

Для любого $s \in \mathbb{N}$ положим $u_s = \varphi$.

Пусть $s \in \mathbb{N}$. Имеем $u_s \in V_s(\varphi, \psi)$. Зафиксируем произвольную функцию $v \in V_s(\varphi, \psi)$. Имеем $v \in W^{1,p}(\Omega)$ и $\varphi \leq v \leq \psi$ п. в. в Ω . Тогда, ввиду того что $\varphi = 0$ в Ω и $\psi = 0$ в Q , имеем $v = 0$ п. в. в Q . Поэтому $\nabla v = 0$ п. в. в Q . Учитывая, что $G_s(u_s) = G(\varphi) = 0$ и используя (3.11) и (3.6), получаем

$$(F_s + G_s)(u_s) = F(\varphi + \tau_s) = F(\tau_s) = \int_Q |\nabla \tau_s|^p dx. \quad (3.14)$$

Кроме того, поскольку $\nabla v = 0$ п. в. в Q , используя равенство (3.11) и неравенство $G_s(v) \geq 0$, получаем

$$\int_Q |\nabla \tau_s|^p dx = \int_Q |\nabla(v + \tau_s)|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla(v + \tau_s)|^p dx = F(v + \tau_s) = F_s(v) \leq (F_s + G_s)(v).$$

Отсюда и из (3.14) следует, что $(F_s + G_s)(u_s) \leq (F_s + G_s)(v)$.

Таким образом, для любого $s \in \mathbb{N}$ u_s — функция в $V_s(\varphi, \psi)$, минимизирующая функционал $F_s + G_s$ на множестве $V_s(\varphi, \psi)$. При этом, очевидно, $\|u_s - q_s \varphi\|_{L^p(\Omega_s)} \rightarrow 0$. Вместе с тем в силу (3.9) и (3.14) имеем

$$(F_s + G_s)(u_s) \rightarrow \lambda_2. \quad (3.15)$$

Поэтому, ввиду того что $\lambda_2 > 0$, последовательность $\{(F_s + G_s)(u_s)\}$ не сходится к $(F + G)(\varphi)$.

Предельное соотношение (3.15) позволяет сделать вывод, что заключение теоремы для последовательности $\{u_s\}$ не является справедливым. Действительно, предположим, что заключение теоремы для последовательности $\{u_s\}$ справедливо. Значит, существуют возрастающая последовательность $\{s_j\} \subset \mathbb{N}$ и функция $u \in V(\varphi, \psi)$ такие, что справедливы утверждения 1)–3) этого заключения. Из утверждений 2) и 3) следует, что $u = \varphi$ п. в. в Ω и $(F_{s_j} + G_{s_j})(u_{s_j}) \rightarrow 0$. Но последнее соотношение противоречит (3.15). Полученное противоречие доказывает, что заключение теоремы для последовательности $\{u_s\}$ не является справедливым.

Отметим, что рассмотренный пример представляет собой некоторый аналог примера 4.16 из статьи [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ковалевский А.А.** О некоторых вопросах, связанных с проблемой усреднения вариационных задач для функционалов с переменной областью определения // Современный анализ и его приложения. Киев: Наукова думка, 1989. С. 62–70.
2. **Kovalevsky A.A.** Obstacle problems in variable domains // Complex Var. Elliptic Equ. 2011. Vol. 56, no. 12. P. 1071–1083.
3. **Ковалевский А.А.** G -сходимость и усреднение нелинейных эллиптических операторов дивергентного вида с переменной областью определения // Изв. РАН. Сер. математическая. 1994. Т. 58, № 3. С. 3–35.
4. **Murat F.** Sur l'homogenisation d'inéquations elliptiques du 2ème ordre, relatives au convexe $K(\psi_1, \psi_2) = \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \psi_1 \leq v \leq \psi_2 \text{ p. p. dans } \Omega\}$. 1976. Publ. Laboratoire d'Analyse Numérique, no. 76013. Univ. Paris VI. 23 p.
5. **Dal Maso G.** Asymptotic behaviour of minimum problems with bilateral obstacles // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1981. Vol. 129, no. 1. P. 327–366.
6. **Хруслов Е.Я.** Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области // Мат. сб. 1978. Т. 106, № 4. С. 604–621.
7. **Вайнберг М.М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
8. **Adams R.A.** Sobolev spaces. New York: Acad. Press, 1975. 286 p.
9. **Ковалевский А.А.** Условия Γ -сходимости и усреднение интегральных функционалов с различными областями определения // Докл. АН УССР. 1991. № 4. С. 5–8.
10. **Ковалевский А.А.** О необходимых и достаточных условиях Γ -сходимости интегральных функционалов с различными областями определения // Нелинейные граничные задачи. 1992. Вып. 4. С. 29–39.
11. **Рудакова О.А.** О Γ -сходимости интегральных функционалов, определенных на различных весовых пространствах Соболева // Укр. мат. журн. 2009. Т. 61, № 1. С. 99–115.
12. **Kovalevsky A.A.** On L^1 -functions with a very singular behaviour // Nonlinear Anal. 2013. Vol. 85. P. 66–77.
13. **Kovalevsky A.A., Rudakova O.A.** Variational problems with pointwise constraints and degeneration in variable domains // Differ. Equ. Appl. 2009. Vol. 1, no. 4. P. 517–559.

Ковалевский Александр Альбертович

Поступила 25.10.2015

д-р физ.-мат. наук, профессор

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Институт математики и компьютерных наук

Уральского федерального университета им. Б. Н. Ельцина

e-mail: alexkvl71@mail.ru

УДК 512.542

КРИТЕРИЙ ПРОНОРМАЛЬНОСТИ ДОБАВЛЕНИЙ К АБЕЛЕВЫМ НОРМАЛЬНЫМ ПОДГРУППАМ¹

А. С. Кондратьев, Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Подгруппа H группы G называется пронормальной, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$. В данной работе доказано, что если группа G обладает нормальной абелевой подгруппой V и подгруппой H такими, что $G = HV$, то H пронормальна в G если и только если $U = N_U(H)[H, U]$ для любой H -инвариантной подгруппы U группы V . Основываясь на этом замечании, мы доказываем, что при $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ простая симплектическая группа $\mathrm{PSp}_{6n}(q)$ содержит непронормальную подгруппу нечетного индекса. Тем самым опровергнута гипотеза о пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных простых группах, высказанная в 2012 г. в работе Е. П. Вдовина и Д. О. Ревина и подтвержденная авторами в работе 2015 г. для большого массива конечных простых групп.

Ключевые слова: пронормальная подгруппа, дополнение к подгруппе, добавление к подгруппе, конечная простая группа, подгруппа нечетного индекса.

A. S. Kondrat'ev, N. V. Maslova, D. O. Revin. A pronormality criterion for supplements to abelian normal subgroups.

A subgroup H of a group G is called pronormal if, for any element $g \in G$, the subgroups H and H^g are conjugate in the subgroup $\langle H, H^g \rangle$. We prove that, if a group G has a normal abelian subgroup V and a subgroup H such that $G = HV$, then H is pronormal in G if and only if $U = N_U(H)[H, U]$ for any H -invariant subgroup U of the group V . Using this fact, we prove that the simple symplectic group $\mathrm{PSp}_{6n}(q)$ with $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ contains a nonpronormal subgroup of odd index. Hence, we disprove the conjecture on the pronormality of subgroups of odd indices in finite simple groups, which was formulated in 2012 by E.P. Vdovin and D.O. Revin and verified by the authors in 2015 for many families of simple finite groups.

Keywords: pronormal subgroup, complement of a subgroup, supplement of a subgroup, finite simple group, subgroup of odd index.

1. Введение

В соответствии с определением Ф. Холла подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$. В работе [1] было доказано, что холловы подгруппы в конечных простых группах пронормальны, и на основе анализа доказательства была высказана следующая

Гипотеза [1, гипотеза 1]. *В конечных простых группах подгруппы нечетного индекса пронормальны.*

Недавно эта гипотеза была подтверждена авторами для всех конечных простых групп, за исключением $A_n(q)$, ${}^2A_n(q)$, $C_n(q)$, $E_6(q)$ и ${}^2E_6(q)$, где q во всех случаях нечетно [2, теорема]. Цель данной статьи — построить серию примеров, опровергающих гипотезу. Для построения такой серии мы установим ряд фактов, представляющих, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Известная теорема Шура — Цассенхауза [3, теоремы 3.8 и 3.12] утверждает, что если порядок и индекс нормальной подгруппы V в конечной группе G взаимно просты, то

- (1) G содержит *дополнение* к V , т. е. такую подгруппу H , что $G = HV$ и $H \cap V = 1$, и
- (2) любые два дополнения к V в G сопряжены.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00065). Второй автор является победителем конкурса молодых математиков 2013 г. Фонда Д. Зимина "Династия".

Как следствие, любое дополнение к V пронормально в G .

Другим следствием теоремы Шура — Цассенхауза является следующее утверждение, часто используемое при изучении конечных групп.

Предложение 1 [3, гл. 4, лемма 4.28]. *Если V — нормальная подгруппа и H — подгруппа конечной группы G такие, что $(|H|, |V|) = 1$, то для любой H -инвариантной подгруппы U группы V справедливо равенство*

$$U = C_U(H)[H, U]. \quad (1.1)$$

Несложно показать (см. разд. 3), что справедливо следующее, более общее, утверждение, в котором не требуется даже конечность группы G .

Предложение 2. *Если V — нормальная и H — пронормальная подгруппы группы G , то для любой H -инвариантной подгруппы U группы V справедливо равенство*

$$U = N_U(H)[H, U]. \quad (1.2)$$

Понятно, что в случае, когда подгруппы H и V в предложении 2 не пересекаются, выполнено равенство $N_U(H) = C_U(H)$ для любой H -инвариантной подгруппы U группы V . Поэтому предложение 1 является частным случаем предложения 2. Мы покажем, что в ситуации, когда $G = HV$ (в таких случаях подгруппу H принято называть *добавлением* к подгруппе V в G) и группа V абелева, справедливо обратное утверждение к предложению 2.

Теорема 1. *Пусть H и V — подгруппы группы G такие, что V — абелева нормальная подгруппа в G и $G = HV$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

- (1) *подгруппа H пронормальна в G ;*
- (2) *$U = N_U(H)[H, U]$ для любой H -инвариантной подгруппы U группы V .*

Для построения контрпримеров к гипотезе нам понадобится вытекающее из теоремы 1

Следствие. *Пусть $G = A \wr S_n = HV$ — естественное подстановочное сплетение конечной абелевой группы A и симметрической группы $H = S_n$, где через V обозначена база сплетения. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) *подгруппа H пронормальна в G ;*
- (2) $(|A|, n) = 1$.

Наконец, с помощью следствия мы докажем следующее утверждение, опровергающее гипотезу.

Теорема 2. *Простая конечная группа $\text{PSp}_{6n}(q)$ для любого $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$ содержит непрономальную подгруппу нечетного индекса.*

Таким образом, интересной представляется следующая открытая

Проблема. Классифицировать конечные неабелевы простые группы, в которых все подгруппы нечетного индекса пронормальны.

2. Предварительные результаты

Тот факт, что подгруппа H группы G пронормальна, мы будем обозначать как $H \text{ рпн } G$. Нам понадобятся следующие три легко доказываемые леммы.

Лемма 1. *Пусть H — пронормальная подгруппа группы G . Тогда $H \text{ рпн } M$ для любой подгруппы M такой, что $H \leq M \leq G$.*

Лемма 2. Пусть H — подгруппа и N — нормальная подгруппа группы G . Обозначим чертой естественный эпиморфизм $G \rightarrow G/N$. Справедливы следующие утверждения:

- (1) если $H \text{ prn } G$, то $\overline{H} \text{ prn } \overline{G}$;
- (2) если $N \leq H$ и $\overline{H} \text{ prn } \overline{G}$, то $H \text{ prn } G$.

В частности, подгруппа нечетного индекса пронормальна в G тогда и только тогда, когда ее образ пронормален в $G/O_2(G)$.

Лемма 3. Пусть H — транзитивная группа подстановок степени n и A — группа. Определим действие группы H на группе $V = A^n$ по правилу

$$(x_1, \dots, x_n)^\pi = (x_{1\pi^{-1}}, \dots, x_{n\pi^{-1}}) \text{ для любых } (x_1, \dots, x_n) \in V \text{ и } \pi \in H.$$

Тогда

$$C_V(H) = \{(x_1, \dots, x_n) \in V \mid x_1 = \dots = x_n\} \cong A.$$

Лемма 4. Пусть H и V — подгруппы группы G такие, что $H \leq N_G(V)$. Справедливы следующие утверждения:

- (1) $[H, V] \leq HV$;
- (2) $H^g \leq H[H, V]$ для любого $g \in V$.

Доказательство. Утверждение (1) хорошо известно [3, лемма 4.1]. В частности, из (1) вытекает, что $H[H, V]$ — подгруппа в G . Если $g \in V$, то для любого $h \in H$ имеем $h^g = h[h, g] \in H[H, V]$, откуда получаем (2). \square

Лемма 5. Пусть H — подгруппа и v — элемент группы G такие, что подгруппа $V = \langle v^H \rangle$ абелева. Тогда

$$\langle H, H^v \rangle \cap V = (H \cap V)[H, V].$$

Доказательство. Заметим, что $H \leq N_G(V)$. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $G = HV$ и $V \leq G$. Положим $X = \langle H, H^v \rangle$ и $U = X \cap V$. Требуется показать, что $U = (H \cap V)[H, V]$. Ясно, что $H \cap V \leq X \cap V = U$. По лемме 4 имеем также $X \leq H[H, V]$, откуда

$$U = X \cap V \leq (H[H, V]) \cap V = (H \cap V)[H, V].$$

Таким образом, если мы установим включение $[H, V] \leq U$, требуемое равенство будет доказано. Достаточно показать, что для любых заданных $x \in H$ и $w \in V$ выполнено включение $[x, w] \in X$, поскольку $[x, w] \in V$ ввиду нормальности подгруппы V . Так как $V = \langle v^H \rangle$, найдутся элементы $h_1, \dots, h_m \in H$ такие, что

$$w = (v^{\varepsilon_1})^{h_1} \dots (v^{\varepsilon_m})^{h_m}, \tag{2.3}$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{1, -1\}$. Пусть для данного элемента $w \in V$ его представление (2.3) выбрано так, что число $m = m(w)$ является наименьшим. Включение $[x, w] \in X$ будем доказывать индукцией по m .

Допустим, что $m = 1$, т. е. $w = v^h$ или $w = (v^{-1})^h$ для некоторого $h \in H$. В первом случае имеем

$$[x, w] = x^{-1}w^{-1}xw = x^{-1}h^{-1}v^{-1}h x h^{-1}v h = (hx)^{-1}(hxh^{-1})^v h \in \langle H, H^v \rangle = X.$$

Во втором случае с учетом нормальности и абелевости подгруппы V имеем

$$[x, w] = (w^{-1})^x w = w(w^{-1})^x = h^{-1}v^{-1}h x^{-1}h^{-1}v h x = h^{-1}(hx^{-1}h^{-1})^v h x \in \langle H, H^v \rangle = X.$$

Допустим теперь, что $m > 1$. Положим для краткости $v_i = (v^{\varepsilon_i})^{h_i}$ для всех $i = 1, \dots, m$. Тогда

$$[x, w] = x^{-1}x^{v_1 \dots v_m} = (x^{-1}x^{v_m})(x^{-1}x^{v_1 \dots v_{m-1}})^{v_m} = u_1 u_2^{v_m},$$

где $u_1 = x^{-1}x^{v_m} = [x, v_m] \in X$ ввиду доказанного, и

$$u_2 = x^{-1}x^{v_1 \dots v_{m-1}} = [x, v_1 \dots v_{m-1}] \in X \cap V = U$$

по предположению индукции. Теперь, поскольку группа V по условию абелева, $U \trianglelefteq V$ и $u_2^{v_m} \in U \leq X$. Тем самым

$$[x, w] = u_1 u_2^{v_m} \in X. \quad \square$$

Лемма 6. Пусть H и V — подгруппы группы G такие, что $V \trianglelefteq G$ и $H \operatorname{prn} G$. Тогда

$$V = [H, V]N_V(H).$$

Доказательство. Очевидно, что $V \supseteq [H, V]N_V(H)$.

Докажем обратное включение. Пусть $v \in V$. Поскольку $H \operatorname{prn} G$, существует $g \in \langle H, H^v \rangle$ такой, что

$$H^v = H^g.$$

Ввиду леммы 4 имеем $\langle H, H^v \rangle \leq H[H, V]$, откуда $g = hx$, где $h \in H$ и $x \in [H, V]$. Поэтому

$$H^v = H^g = H^{hx} = H^x,$$

следовательно, $x^{-1}v \in N_G(H) \cap V = N_V(H)$. Поэтому

$$V \subseteq [H, V]N_V(H). \quad \square$$

Лемма 7. Пусть k — конечное поле простой характеристики p и $V = k^{np}$ — естественный подстановочный модуль для группы $H = S_{np}$ (т. е. определено действие группы H на V по правилу

$$(x_{1\pi}, \dots, x_{(np)\pi})^\pi = (x_1, \dots, x_{np})$$

для любых $(x_1, \dots, x_{np}) \in V$ и $\pi \in H$). Пусть $G = VH$ — естественное полупрямое произведение группы V на H . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $G \cong K \wr S_{np}$, где K — аддитивная группа поля k ;
- (2) подгруппа H не является пронормальной в G .

Доказательство. Утверждение (1) очевидно.

Докажем (2). Предположим, что $H \operatorname{prn} G$. Тогда по лемме 6 выполнено равенство

$$V = [H, V]N_V(H). \quad (2.4)$$

Пусть

$$U = \{(x_1, \dots, x_{np}) \in V \mid x_1 + \dots + x_{np} = 0\}.$$

Тогда $U < V$ и для любых $v = (x_1, \dots, x_{np}) \in V$ и $\pi \in H$ имеем $[\pi, v] = v^\pi - v \in U$, и поэтому $[H, V] \leq U$.

Далее, если $u \in N_V(H)$, то для любого $\pi \in H$ коммутатор $[\pi, u]$ лежит одновременно и в H (так как u нормализует H), и в V (так как H нормализует V). Поскольку пересечение H и V тривиально, $[\pi, u] = 0$ и $u \in C_V(H)$. Таким образом, $N_V(H) = C_V(H)$. По лемме 3

$$C_V(H) = \{(x_1, \dots, x_{np}) \in V \mid x_1 = \dots = x_{np}\}.$$

Поскольку k — поле характеристики p , для любого $u = (x_1, \dots, x_{np}) \in C_V(H)$ имеем

$$x_1 + \dots + x_{np} = 0 \quad \text{и} \quad u \in U.$$

Теперь с учетом (2.4) получаем

$$V = [H, V]N_V(H) = [H, V]C_V(H) \leq U < V.$$

Противоречие. □

Лемма 8. Пусть H — группа подстановок степени n и A — конечная группа. Определим действие группы H на группе $V = A^n$ по правилу

$$(x_1, \dots, x_n)^\pi = (x_{1\pi^{-1}}, \dots, x_{n\pi^{-1}}) \text{ для любых } (x_1, \dots, x_n) \in V \text{ и } \pi \in H.$$

Предположим, что H содержит транзитивную подгруппу K такую, что $(|A|, |K|) = 1$. Тогда для любой H -инвариантной подгруппы U группы V выполнено равенство

$$U = C_U(H)[H, U].$$

Доказательство. Прежде всего, в силу предложения 1 имеем $U = C_U(K)[K, U] \leq C_U(K)[H, U]$. Таким образом, достаточно показать, что $C_U(H) = C_U(K)$. Это так, поскольку из леммы 3 следует, что $C_V(H) = C_V(K)$ и

$$C_U(H) = U \cap C_V(H) = U \cap C_V(K) = C_U(K). \quad \square$$

3. Доказательство основных результатов

Доказательство предложения 2. Рассмотрим группу $G_1 = UH$. Ввиду лемм 4 и 6 имеем $U = N_U(H)[H, U]$. □

Доказательство теоремы 1. Импликация (1) \Rightarrow (2) вытекает из предложения 2.

Докажем (2) \Rightarrow (1). Ввиду равенства $G = HV$ достаточно для произвольно выбранного $v \in V$ доказать, что существует элемент $u \in \langle H, H^v \rangle$ такой, что $H^u = H^v$. Ввиду условия (2) мы, не уменьшая общности, можем считать, что $G = \langle H, v \rangle$ и $V = \langle v^H \rangle$. Применяя лемму 5, заключаем, что

$$\langle H, H^v \rangle \cap V = (H \cap V)[H, V].$$

По условию (2) имеем $v = wu$, где $w \in N_V(H)$, а $u \in [H, V]$. Теперь

$$H^v = H^{wu} = H^u,$$

причем

$$u \in [H, V] \leq (H \cap V)[H, V] = \langle H, H^v \rangle.$$

Тем самым доказано, что $H \text{ ргн } G$. □

Доказательство следствия. Допустим, что утверждение (1) следствия верно, а (2) — неверно. Пусть p — общий простой делитель чисел $|A|$ и n . Группа V содержит нормальную в G подгруппу U такую, что $G/U \cong \mathbb{Z}_p \wr S_n$, и образ подгруппы H в G/U не пронормален по лемме 7. Но тогда и H не пронормальна в G по лемме 2. Импликация (1) \Rightarrow (2) доказана.

Докажем обратную импликацию. Поскольку подгруппа V группы G абелева, по теореме 1 достаточно показать, что

$$U = C_U(H)[H, U]$$

для любой H -инвариантной подгруппы U группы V . Это так ввиду леммы 8 и того, что $H = S_n$ содержит транзитивную подгруппу $\langle (1, \dots, n) \rangle$ порядка n , взаимно простого с $|A|$. □

Доказательство теоремы 2. Пусть q — степень простого числа такая, что $q \equiv \pm 3 \pmod{8}$. Хорошо известно (и это вытекает, например, из [4, следствие теорем 1–3]), что силовская 2-подгруппа группы $\text{Sp}_2(q) = \text{SL}_2(q)$ изоморфна группе кватернионов Q_8 и ее нормализатор в $\text{SL}_2(q)$ изоморфен $\text{SL}_2(3)$. Пусть n — натуральное число. Имеет место следующая цепочка вложений (см., например, [5]):

$$H = Q_8 \wr S_{3n} \hookrightarrow X = \text{SL}_2(3) \wr S_{3n} \hookrightarrow Y = \text{Sp}_2(q) \wr S_{3n} \hookrightarrow G = \text{Sp}_{6n}(q).$$

Мы покажем, что если $\bar{} : G \rightarrow G/Z(G)$ — естественный эпиморфизм, то

- (1) индекс $|\overline{G} : \overline{H}|$ нечетен;
 (2) подгруппа \overline{H} не пронормальна в $\overline{G} = \text{PSp}_{6n}(q)$.

Поскольку Q_8 — силовская 2-подгруппа в $\text{Sp}_2(q)$, индекс $|Y : H| = |\text{Sp}_2(q) : Q_8|^{3n}$ нечетен. Поэтому индекс $|\overline{Y} : \overline{H}|$ также нечетен. Индекс $|\overline{G} : \overline{Y}|$ нечетен в силу [6, теорема 1(8)]. Отсюда получаем утверждение (1), поскольку $|\overline{G} : \overline{H}| = |\overline{G} : \overline{Y}| |\overline{Y} : \overline{H}|$.

Заметим, что $Z(G)$ — 2-группа и $Z(G) = O_2(G)$, так как $|Z(G)| = (2, q - 1) = 2$ и группа \overline{G} проста. Поскольку ясно, что $Z(G) \leq H$, подгруппы Y и H имеют нечетные индексы в G и в соответствии с леммой 2 для доказательства утверждения (2) достаточно показать, что подгруппа H не является пронормальной в G .

Допустим, что это не так и $H \text{ ргн } G$. Тогда по лемме 1 имеем $H \text{ ргн } X$. Рассмотрим естественный эпиморфизм $*$: $X \rightarrow X/O_2(X) \cong K \wr S_{3n}$, где K — циклическая группа порядка 3. Тогда $H^* \cong S_{3n}$ и действие группы H^* на базе сплетения $K \wr S_{3n}$ эквивалентно естественному действию группы S_{3n} на подстановочном модуле над полем из трех элементов. По теореме 1 подгруппа H^* не является пронормальной в X^* , вопреки лемме 2 и тому, что $H \text{ ргн } X$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вдовин Е.П., Ревин Д.О.** Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
2. **Кондратьев А.С., Маслова Н.В., Ревин Д.О.** О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1375–1383.
3. **Isaacs M. I.** Finite group theory. Providence: Amer. Math. Soc., 2008. 365 p.
4. **Кондратьев А.С.** Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
5. **Kleidman P., Liebeck M.**, The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. 303 p.
6. **Маслова Н.В.** Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.

Кондратьев Анатолий Семенович

Поступила 31.12.2015

д-р физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Маслова Наталья Владимировна

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

доцент

Новосибирский государственный университет

e-mail: revin@math.nsc.ru

УДК 512.54 +519.17

СИММЕТРИЧЕСКИЕ 2-РАСШИРЕНИЯ 2-МЕРНОЙ РЕШЕТКИ. I

Е. А. Коновальчик¹, К. В. Костоусов

Исследование симметрических q -расширений d -мерной кубической решетки Λ^d представляет интерес для теории групп и теории графов. Для небольших $d \geq 1$ и $q > 1$ (особенно для $q = 2$) исследование симметрических q -расширений решетки Λ^d актуально также в связи с молекулярной кристаллографией и некоторыми физическими теориями. Ранее в работе В. И. Трофимова доказана конечность числа симметрических 2-расширений решетки Λ^d для произвольного целого положительного числа d . Данная работа посвящена описанию всех, с точностью до эквивалентности, симметрических 2-расширений решетки Λ^2 . В настоящей первой части работы перечислены все, с точностью до эквивалентности, реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 , у которых лишь единичный автоморфизм оставляет на месте все блоки (мы доказываем, что имеется 87 таких реализаций). В готовящейся к выходу второй части работы будут перечислены остальные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 .

Ключевые слова: симметрическое расширение графа, d -мерная решетка.

E. A. Konoval'chik, K. V. Kostousov. Symmetrical 2-extensions of a 2-dimensional grid. I.

The investigation of symmetrical q -extensions of a d -dimensional cubic grid Λ^d is of interest both for group theory and for graph theory. For small $d \geq 1$ and $q > 1$ (especially for $q = 2$), the study of symmetrical q -extensions of Λ^d is also of interest in connection with molecular crystallography and some physical theories. V.I. Trofimov proved that there are only finitely many symmetrical q -extensions of Λ^d for any positive integer d . The aim of the present paper is to find all, up to equivalence, symmetrical 2-extensions of Λ^2 . In this paper, which is the first part of our study, we find all, up to equivalence, realizations of symmetrical 2-extensions of Λ^2 for which only trivial automorphism fixes all blocks (we show that there are 87 such realizations). In the second part of the study, we will list the remaining realizations of symmetrical 2-extensions of Λ^2 .

Keywords: symmetrical extension of a graph, d -dimensional grid.

1. Введение

Под d -мерной решеткой Λ^d для целого положительного числа d далее понимается d -мерная кубическая решетка, т.е. граф, вершинами которого являются все упорядоченные наборы (a_1, \dots, a_d) из d целых чисел, и две вершины (a'_1, \dots, a'_d) и (a''_1, \dots, a''_d) смежны тогда и только тогда, когда $|a'_1 - a''_1| + \dots + |a'_d - a''_d| = 1$. Следуя [1], для конечного графа Δ связный граф Γ назовем *симметрическим расширением решетки Λ^d посредством Δ* , если существуют такая вершинно-транзитивная группа G автоморфизмов графа Γ и такая система импримитивности σ группы G на $V(\Gamma)$, что подграфы графа Γ , порожденные блоками из σ , изоморфны Δ и имеется изоморфизм φ графа Γ/σ (т.е. фактор-графа Γ по разбиению σ множества его вершин) на решетку Λ^d . Для целого положительного числа q граф Γ называется *симметрическим q -расширением решетки Λ^d* , если Γ является симметрическим расширением решетки Λ^d посредством некоторого графа Δ , такого что $|V(\Delta)| = q$. Четверка $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ с указанными компонентами называется *реализацией симметрического q -расширения Γ решетки Λ^d* , а Γ будем называть графом этой реализации. Наряду с чисто математическим интересом, исследование симметрических q -расширений решетки Λ^d для небольших $d \geq 1$ и $q > 1$ актуально для молекулярной кристаллографии и некоторых физических теорий (см. [2]). При этом для кристаллографии из всех симметрических q -расширений решеток Λ^d наиболее интересны симметрические 2-расширения. Они естественным образом возникают при рассмотрении “молекулярных” кристаллов, “молекулы” которых состоят из двух “атомов” или, более общо, имеют выделенную ось.

¹Работа выполнена при поддержке молодежного гранта ИММ УрО РАН за 2013 г.

Естественно рассматривать реализации симметрических q -расширений решетки Λ^d с точностью до определяемой следующим образом эквивалентности (см. [2]). Назовем две такие реализации, $R_1 = (\Gamma_1, G_1, \sigma_1, \varphi_1)$ и $R_2 = (\Gamma_2, G_2, \sigma_2, \varphi_2)$, *эквивалентными* и будем писать $R_1 \sim R_2$, если найдется изоморфизм графа Γ_1 на граф Γ_2 , переводящий σ_1 в σ_2 . Реализацию $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического q -расширения решетки Λ^2 назовем *максимальной*, если $G = \text{Aut}_\sigma(\Gamma)$ — группа всех автоморфизмов графа Γ , сохраняющих разбиение σ . Ясно, что каждая реализация симметрического q -расширения решетки Λ^d имеет эквивалентную ей максимальную реализацию. В [3, теорема 2] В. И. Трофимовым доказана конечность числа реализаций симметрических 2-расширений d -мерной решетки, с точностью до эквивалентности, для произвольного целого положительного числа d , а также предложен алгоритм для построения всех, с точностью до эквивалентности, таких реализаций.

Данная работа посвящена описанию всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 . В настоящей первой части работы перечислены все, с точностью до эквивалентности, реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 такие, что лишь единичный автоморфизм их графа оставляет на месте все блоки. В готовящейся к выходу второй части работы будут перечислены остальные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 . По предложению 4 из [3] такое разбиение всех реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 на два класса совпадает с определенным следующим образом разбиением на классы I и II соответственно.

Для произвольной реализации $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 и произвольной пары смежных вершин B_1, B_2 графа Γ/σ множество ребер графа Γ , один конец которых лежит в B_1 , а другой — в B_2 , будем называть *связью*. Возможны следующие типы связей: *тип 1* — полная связь (4 ребра); *тип 2* — два ребра, не имеющие общих концов; *тип 3* — одно ребро; *тип 3̄* — три ребра; *тип 4* — два ребра, имеющие общий конец. Реализациями *класса I* назовем реализации, которые обязательно содержат связи типов, отличных от 1 и 2. Реализациями *класса II* назовем реализации, связи в которых исчерпываются связями типов 1 и 2.

Реализацию симметрического расширения решетки Λ^2 посредством графа K_2 (полного графа на двух вершинах) будем называть *насыщенной* реализацией симметрического 2-расширения решетки Λ^2 . Соответственно, реализацию симметрического расширения решетки Λ^2 посредством графа, дополнительного к K_2 , будем называть *ненасыщенной* реализацией симметрического 2-расширения решетки Λ^2 .

Нами показано, что с точностью до эквивалентности существует 87 реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I, из которых 49 — насыщенные и 38 — ненасыщенные (см. теорему и следствие 1). Среди графов насыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I имеется 46 попарно неизоморфных (в первоначальном варианте этой работы ошибочно утверждалось наличие 48 таких графов, что было озвучено со ссылкой на этот вариант в [4]); среди графов ненасыщенных реализаций класса I имеется 36 попарно неизоморфных; а среди всех графов реализаций класса I имеется 78 попарно неизоморфных (см. следствие 2 и следствие 3). Очевидно, что реализация симметрического 2-расширения решетки Λ^2 класса I не может быть эквивалентна реализации класса II. Однако, как будет показано во второй части работы, существует единственная, с точностью до изоморфизма, реализация класса I (реализация $R_{\beta_1(\bar{3},2),H_3}$, см. далее), граф которой изоморфен графу реализации класса II.

Представляет интерес вопрос о кристаллографических реализациях симметрических q -расширений решетки Λ^d в d -мерное евклидово аффинное пространство (см. [5]). В связи с этим в разд. 6 для каждой, с точностью до эквивалентности, реализации симметрического 2-расширения решетки Λ^2 класса I найдена эквивалентная ей кристаллографическая реализация.

В разд. 3 приводится описание реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I (теорема и следствие 1). Оно получено в настоящей статье посредством комбина-

торных отображений в разд. 4 и, независимо, с помощью алгоритма из [3], реализованного в пакете GAP [6], в разд. 5. В разд. 2 содержатся предварительные результаты.

2. Предварительные результаты

Каждая вершинно-транзитивная группа автоморфизмов решетки Λ^2 порождается стабилизатором в этой группе вершины $(0, 0)$ и четырьмя элементами, переводящими вершину $(0, 0)$ в соседние с ней вершины. На основе этого с помощью GAP нами были перечислены все классы сопряженных вершинно-транзитивных подгрупп группы $\text{Aut}(\Lambda^2)$ всех автоморфизмов решетки Λ^2 . Оказалось, что существует 35 таких классов, представителями которых являются группы H_1, \dots, H_{35} , заданные в табл. 1 своими системами порождающих. В табл. 1 используются следующие автоморфизмы Λ^2 :

$$\begin{array}{lll} r_{\frac{\pi}{2}} : (x, y) \mapsto (y, -x), & r_{\pi} : (x, y) \mapsto (-x, -y), & r_{-\frac{\pi}{2}} : (x, y) \mapsto (-y, x), \\ m_{/} : (x, y) \mapsto (y, x), & m_{\setminus} : (x, y) \mapsto (-y, -x), & m_{|} : (x, y) \mapsto (-x, y), \\ m_{-} : (x, y) \mapsto (x, -y), & t_x : (x, y) \mapsto (x + 1, y), & t_y : (x, y) \mapsto (x, y + 1) \end{array}$$

где $x, y \in \mathbb{Z}$.

З а м е ч а н и е. При естественном вложении решетки Λ^2 в евклидову аффинную плоскость каждый автоморфизм $g \in \text{Aut}(\Lambda^2)$ индуцируется единственной изометрией \tilde{g} этой плоскости. Изометрии, которыми индуцируются приведенные выше автоморфизмы Λ^2 , имеют следующий геометрический смысл: \tilde{r}_{θ} — поворот на угол θ против часовой стрелки вокруг начала координат для $\theta \in \{\pi/2, \pi, -\pi/2\}$, $\tilde{m}_{/}$, \tilde{m}_{\setminus} — отражения относительно прямых $y = x$ и $y = -x$ соответственно, $\tilde{m}_{|}$, \tilde{m}_{-} — отражения относительно координатных осей y и x соответственно, \tilde{t}_x , \tilde{t}_y — сдвиги на 1 вдоль осей x и y соответственно.

Систему представителей $\{H_1, \dots, H_{35}\}$ классов сопряженных вершинно-транзитивных подгрупп группы $\text{Aut}(\Lambda^2)$ обозначим через \mathbf{H} .

Если имеется реализация $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$, то произвольный элемент g группы G индуцирует подстановку на σ , которая обозначается через g^{σ} , и, соответственно, группа G индуцирует на σ группу подстановок, которая обозначается через G^{σ} .

Отметим, что $H_1 = \text{Aut}(\Lambda^2)$. Среди групп из \mathbf{H} группы $H_2, H_3, H_4, H_{18}, H_{19}, H_{27}$ являются подгруппами индекса 2 группы H_1 ; группы $H_5, H_6, H_7, H_{10}, H_{11}, H_{13}, H_{20}, H_{21}, H_{23}, H_{28}, H_{29}, H_{31}, H_{32}$ — подгруппами индекса 4 группы H_1 ; группы $H_8, H_9, H_{12}, H_{14}, H_{15}, H_{16}, H_{17}, H_{22}, H_{24}, H_{25}, H_{26}, H_{30}, H_{33}, H_{34}, H_{35}$ — подгруппами индекса 8 группы H_1 . Группы из \mathbf{H} , являющиеся подгруппами индекса 8 группы H_1 , — это в точности все группы из \mathbf{H} , имеющие тривиальный стабилизатор вершины. В табл. 2 указаны все включения $H_i < H_j$ (символом “+” на соответствующем месте) между содержащимися в \mathbf{H} подгруппами индекса 4 и 2 группы H_1 . Система представителей \mathbf{H} классов сопряженных вершинно-транзитивных подгрупп группы $\text{Aut}(\Lambda^2) = H_1$ выбрана таким образом, что для любых $i \in \{5, 6, 7, 10, 11, 13, 20, 21, 23, 28, 29, 31, 32\}$, $j \in \{2, 3, 4, 18, 19, 27\}$, если некоторая группа из класса, содержащего H_i , является подгруппой некоторой подгруппы из класса, содержащего H_j , то $H_i < H_j$.

В данной статье описаны с точностью до эквивалентности реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I. Для каждой такой реализации $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ группа $\varphi G^{\sigma} \varphi^{-1}$ сопряжена в $\text{Aut}(\Lambda^2)$ с некоторой группой H_i , имеющей нетривиальный стабилизатор вершины (т. е. с группой H_i , где $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 18, 19, 20, 21, 23, 27, 28, 29, 31, 32\}$). Список этих групп обозначим через \mathbf{H}_1 .

Для произвольных целых чисел i и j обозначим через $K_{i,j}$ подграф решетки Λ^2 , порожденный множеством вершин $\{(i, j), (i + 1, j), (i + 1, j + 1), (i, j + 1)\}$. Пусть $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ — произвольная реализация симметрического 2-расширения решетки Λ^2 . Для произвольных целых чисел i и j обозначим через $K_{R,i,j}$ подграф графа Γ , порожденный множеством вершин из

Т а б л и ц а 1

Представители классов сопряженных
вершинно-транзитивных подгрупп группы $\text{Aut}(\Lambda^2)$

$H_1 = \langle r_{\frac{\pi}{2}}, m/, t_x, t_y \rangle$	$H_{19} = \langle m/, m\setminus, m t_x, t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_2 = \langle r_{\frac{\pi}{2}}, t_x, t_y \rangle$	$H_{20} = \langle r_{\pi}, t_x m , t_y m , t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_3 = \langle m , m-, t_x, t_y \rangle$	$H_{21} = \langle m , t_x, t_y \rangle$
$H_4 = \langle m/, m\setminus, t_x, t_y \rangle$	$H_{22} = \langle t_x m , t_y m , t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_5 = \langle r_{\pi}, t_x, t_y \rangle$	$H_{23} = \langle m/, t_x m , t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_6 = \langle m-, t_x r_{\pi}, t_y r_{\pi}, t_x^2, t_y^2 \rangle$	$H_{24} = \langle t_x^{-1} m , t_y r_{-\frac{\pi}{2}}, t_x^4, t_y^4 \rangle$
$H_7 = \langle m/, t_y r_{\pi}, t_x^2, t_y^2 \rangle$	$H_{25} = \langle t_x m , t_y m-, t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_8 = \langle t_x r_{\pi}, t_y r_{\pi}, t_x^2, t_y^2 \rangle$	$H_{26} = \langle t_x m , t_x^2, t_y \rangle$
$H_9 = \langle t_x r_{\pi}, t_y r_{\pi}, t_x^{-1} m\setminus, t_x^4, t_y^4 \rangle$	$H_{27} = \langle m , m-, t_x m/, t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_{10} = \langle r_{\pi}, t_y m , t_x, t_y^2 \rangle$	$H_{28} = \langle r_{\pi}, t_x m/, t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_{11} = \langle m , t_x r_{\pi}, t_x^2, t_y \rangle$	$H_{29} = \langle m\setminus, t_x, t_y \rangle$
$H_{12} = \langle t_x r_{\pi}, t_y m , t_x^2, t_y^2 \rangle$	$H_{30} = \langle t_x m\setminus, t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_{13} = \langle m-, t_x r_{\pi}, t_x^2, t_y \rangle$	$H_{31} = \langle m/, t_x m-, t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_{14} = \langle t_x r_{\pi}, t_y m-, t_x^2, t_y^2 \rangle$	$H_{32} = \langle r_{\pi}, t_x r_{\frac{\pi}{2}}, t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_{15} = \langle t_x r_{\pi}, t_x^{-1} m , t_y m-, t_x^4, t_y^2 \rangle$	$H_{33} = \langle t_y r_{-\frac{\pi}{2}}, t_x^2, t_y^2 \rangle$
$H_{16} = \langle t_x r_{\pi}, t_x^2, t_y \rangle$	$H_{34} = \langle t_x m-, t_x^2, t_y \rangle$
$H_{17} = \langle t_x r_{\pi}, t_x^{-1} m , t_x^4, t_y \rangle$	$H_{35} = \langle t_x, t_y \rangle$
$H_{18} = \langle r_{\frac{\pi}{2}}, m t_x, t_x^2, t_y^2 \rangle$	

Т а б л и ц а 2

Включения $H_i < H_j$ между подгруппами индекса 4 и 2 группы H_1

$i \backslash j$	2	3	4	18	19	27	$i \backslash j$	2	3	4	18	19	27
5	+	+	+				21		+				
6		+					23					+	
7			+				28			+	+		+
10		+					29			+			
11		+					31					+	
13		+					32	+				+	+
20		+		+	+								

$\varphi^{-1}(i, j) \cup \varphi^{-1}(i+1, j) \cup \varphi^{-1}(i+1, j+1) \cup \varphi^{-1}(i, j+1)$. Графы $K_{i,j}$ (где i, j — произвольные целые числа) будем называть *клетками решетки* Λ^2 , а графы $K_{R,i,j}$ — *клетками реализации* R . Автоморфизм h решетки Λ^2 , оставляющий на месте вершины $(i, j+1)$, $(i+1, j)$ и меняющий местами вершины (i, j) , $(i+1, j+1)$, будем называть *отражением относительно главной диагонали клетки* $K_{i,j}$ решетки Λ^2 . Для реализации R автоморфизм $g \in \text{Aut}_{\sigma}(\Gamma)$, такой что $\varphi g^{\sigma} \varphi^{-1} = h$, будем называть *отражением относительно главной диагонали клетки* $K_{R,i,j}$. Подобным образом определяются *отражения относительно побочных диагоналей клеток*.

Для нахождения реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I нам понадобятся разбиения на орбиты на множестве всех клеток и на множестве всех ребер решетки Λ^2 для групп $H \in \mathbf{H}_I$. Все такие разбиения на множестве клеток приведены в табл. 3 и обозначены через α_i , где $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Разные орбиты показаны различными оттенками серого цвета. Под изображением каждого разбиения на орбиты приведен список групп из \mathbf{H}_I , орбиты которых на множестве клеток решетки Λ^2 дают это разбиение. Будем говорить, что реализация

$R = (\Gamma, G, \varphi, \sigma)$ соответствует разбиению α_i , если группа $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ имеет разбиение α_i на множестве клеток решетки Λ^2 .

Дугой решетки Λ^2 называется упорядоченная пара ее смежных вершин. Дуги, различающиеся лишь порядком вершин, назовем *противоположными*. Разбиения на орбиты на множестве всех дуг решетки Λ^2 , отвечающие группам из \mathbf{H}_I , приведены в табл. 4, и обозначены через β с индексами. Дуга изображена стрелкой, когда противоположная дуга лежит в другой орбите, и отрезком — в противном случае. Для каждого из этих разбиений орбиты на (неориентированных) ребрах пронумерованы: ребра *первой орбиты* изображены жирной черной линией, *второй* (если есть) — жирной серой линией, *третьей* (если есть) — тонкой линией. Под изображением каждого разбиения приведен список групп из \mathbf{H}_I , имеющих такое разбиение на орбиты на множестве дуг решетки Λ^2 .

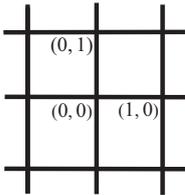
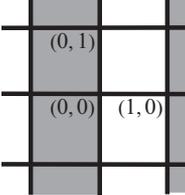
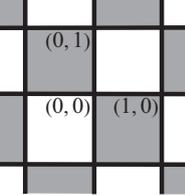
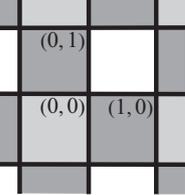
Рассмотрим максимальные насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 типа I, изображенные в следующей табл. 5 (21 реализация, полное изображение каждой из которых получается путем периодического продолжения приведенного 2×2 -фрагмента; на фрагментах изображений пары близких вершин образуют блоки из σ , центральный блок соответствует вершине $(0, 0)$ решетки Λ^2 , блок справа от него соответствует вершине $(1, 0)$, блок сверху — вершине $(0, 1)$). Под изображением каждой из реализаций приведено ее обозначение. Если $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ — любая из этих реализаций, и $R_{\beta(\tau_1, \dots, \tau_s); H}$ — ее обозначение, где β — разбиение из $\{\beta_0, \dots, \beta_5, \beta_{0.1}, \beta_{0.2}, \beta_{0.3}\}$ (см. табл. 4) на орбиты группы $H \in \mathbf{H}_I$ на множестве дуг Λ^2 , $\tau_i \in \{1, 2, 3, \bar{3}, 4\}$, $i = 1, \dots, s$, то

- (i) $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = H$, где $G = \text{Aut}_\sigma(\Gamma)$;
- (ii) ребрам из i -ой орбиты из β в R соответствуют связи типа τ_i для $i = 1, \dots, s$.

Следуя [1], будем говорить, что реализация $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 удовлетворяет условию $[p_x, p_y]$ -периодичности, где p_x, p_y — положительные целые числа, если найдутся $g_1, g_2 \in \text{Aut}_\sigma(\Gamma)$ такие, что $[g_1, g_2] = 1$ и $\varphi g_1^\sigma \varphi^{-1} = t_x^{p_x}$, $\varphi g_2^\sigma \varphi^{-1} = t_y^{p_y}$. Для каждой из ячеек табл. 5 среди всех пар $[p_x, p_y]$, таких что изображенная в этой ячейке реализация R удовлетворяет условию $[p_x, p_y]$ -периодичности, приводится минимальная в следующем смысле пара: если R удовлетворяет условию $[p'_x, p'_y]$ -периодичности для некоторых $p'_x \leq p_x$ и $p'_y \leq p_y$, то $p'_x = p_x$ и $p'_y = p_y$. (Минимальность приведенных пар легко устанавливается непосредственно. Заметим, что приведенные пары для реализаций $R_{\beta_0(3), H_4}$, $R_{\beta_1(3,1), H_3}$, $R_{\beta_1(3,2), H_3}$, $R_{\beta_1(\bar{3},3), H_5}$, $R_{\beta_1(3,3), H_{10}}$, $R_{\beta_4(1,2,3), H_{13}}$, $R_{\beta_4(2,2,3), H_{13}}$ не совпадают с парами периодов приведенных их изображений вдоль осей x и y .) Также в каждой из ячеек табл. 5 приводятся все, с точностью до сопряжения в $\text{Aut}(\Lambda^2)$, подгруппы $\text{Aut}(\Lambda^2)$, которые, как нетрудно показать, соответствуют вершинно-транзитивным подгруппам группы автоморфизмов изображенного расширения, сохраняющих блоки (все приведенные группы лежат в \mathbf{H}_I).

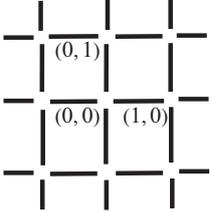
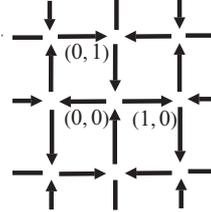
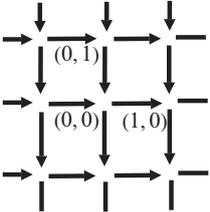
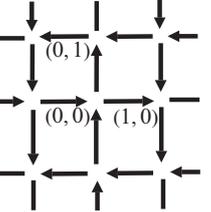
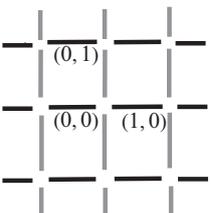
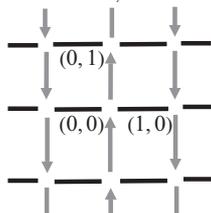
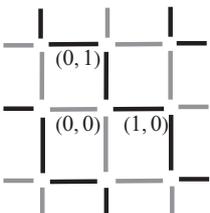
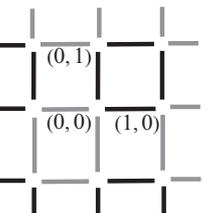
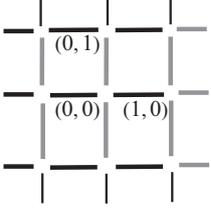
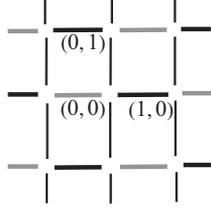
Т а б л и ц а 3

Орбиты групп из \mathbf{H}_I на клетках решетки Λ^2

α_1	α_2	α_3	α_4
			
H_1, H_2, H_3, H_4 $H_{11}, H_{18}, H_{21},$ H_{27}, H_{28}, H_{29}	H_{13}	$H_{19}, H_{20},$ H_{31}, H_{32}	H_{23}

Т а б л и ц а 4

Орбиты групп из H_1 на дугах решетки Λ^2

β_0  $H_1, H_2, H_4, H_{18}, H_{19}$	$\beta_{0,1}$  H_{27}, H_{28}, H_{32}	$\beta_{0,2}$  H_{29}	$\beta_{0,3}$  H_{31}
β_1  H_3, H_5, H_{10}, H_{20}	$\beta_{1,1}$  H_{11}, H_{21}	β_2  H_7	β_3  H_{23}
β_4  H_{13}	β_5  H_6		

В каждой из ячеек табл. 5 после обозначения $R_{\beta(\tau_1, \dots, \tau_s); H}$ изображенной в ней реализации мы приводим обозначения реализаций, получающихся из нее с помощью преобразований следующих двух видов. Пусть $R_{\beta(\tau_1, \dots, \tau_s); H} = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$.

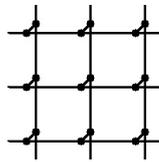
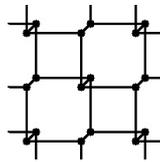
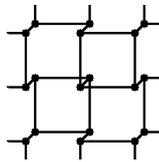
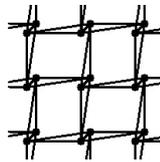
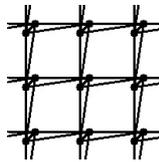
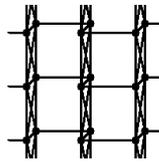
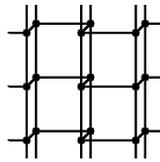
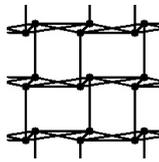
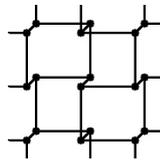
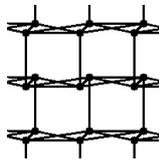
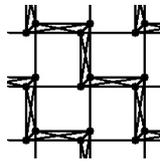
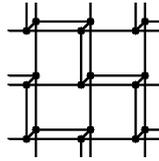
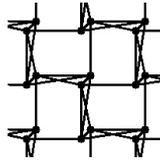
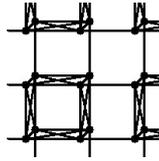
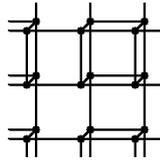
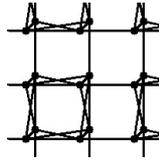
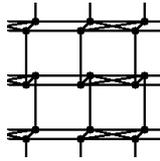
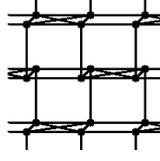
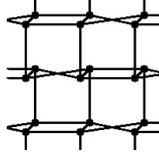
Преобразование первого вида. Если $\tau_1 \in \{2, 3, \bar{3}\}$, то заменим в графе Γ каждую связь, соответствующую первой орбите разбиения β , ее дополнением до полной связи и получающийся граф обозначим через Γ_1 . Если группа всех автоморфизмов графа Γ_1 , сохраняющих блоки σ , совпадает с G , то мы получили максимальную насыщенную реализацию $(\Gamma_1, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 , которую будем обозначать $R_{\beta(\tau_1, \dots, \tau_s); H}$. При этом в случае, когда $\tau_1 = \bar{3}$, вместо $\bar{3}$ будем писать просто 3.

Преобразование второго вида. Если $\tau_1 = 3$, то изменим в графе Γ каждую связь, соответствующую первой орбите разбиения β , заменяя единственное ее ребро на ребро, не имеющее с ним общих концов, и получающийся граф обозначим через Γ_2 . Если группа всех автоморфизмов графа Γ_2 , сохраняющих блоки σ , совпадает с G , то мы получили максимальную реализацию $(\Gamma_2, G, \sigma, \varphi)$, которую будем обозначать как $R_{\beta(\tau'_1, \dots, \tau_s); H}$.

Аналогичные преобразования двух видов мы будем производить не только с первой, но и с произвольной i -й орбитой группы H на дугах решетки Λ^2 из разбиения β . Вместе с тем, мы будем применять указанные преобразования не только к реализациям, изображенным в табл. 5, но и к реализациям, получающимся из них при помощи этих преобразований. Мы назовем преобразования указанных двух видов *преобразованиями частичного дополнения*. В каждой из ячеек табл. 5 помимо изображенной реализации приведены обозначения всех, с точностью до эквивалентности, реализаций, получающихся из нее при помощи последовательности пре-

Т а б л и ц а 5

49 максимальных насыщенных реализаций симметрических
2-расширений решетки Λ^2 класса I

 $\frac{R_{\beta_0(3),H_1}}{R_{\beta_0(\bar{3}),H_1}}$ $[1,1]$ $H_1, H_2, H_4,$ $H_7, H_{18}, H_{19},$ H_{23}, H_{29}, H_{31}	 $\frac{R_{\beta_0(3),H_4}}{R_{\beta_0(\bar{3}),H_4}}$ $[1,1]$ $H_4, H_5,$ H_7, H_{28}, H_{29}	 $\frac{R_{\beta_0(3),H_{19}}}{R_{\beta_0(\bar{3}),H_{19}}}$ $[2,2]$ $H_{19}, H_{20}, H_{23},$ H_{31}, H_{32}	 $\frac{R_{\beta_{0,1}(4),H_{27}}}{R_{\beta_{0,1}(4),H_{27}}}$ $[2,2]$ H_{27}, H_{28}, H_{32}	 $\frac{R_{\beta_{0,2}(4),H_{29}}}{R_{\beta_{0,2}(4),H_{29}}}$ $[1,1]$ H_{29}	 $\frac{R_{\beta_{0,3}(4),H_{31}}}{R_{\beta_{0,3}(4),H_{31}}}$ $[2,2]$ H_{31}
 $\frac{R_{\beta_1(3,1),H_3}}{R_{\beta_1(\bar{3},1),H_3}}$ $[1,1]$ $H_3, H_5, H_6,$ $H_{10}, H_{11},$ H_{13}, H_{20}	 $\frac{R_{\beta_1(3,2),H_3}}{R_{\beta_1(\bar{3},2),H_3}}$ $[1,1]$ $H_3, H_5, H_6,$ $H_{10}, H_{11},$ H_{13}, H_{20}	 $\frac{R_{\beta_1(\bar{3},3),H_5}}{R_{\beta_1(\bar{3},3),H_5}}$ $[1,1]$ H_5	 $\frac{R_{\beta_1(3,3),H_{10}}}{R_{\beta_1(\bar{3},3),H_{10}}}$ $[1,2]$ H_{10}	 $\frac{R_{\beta_1(\bar{3},3),H_{20}}}{R_{\beta_1(\bar{3},3),H_{20}}}$ $[2,2]$ H_{20}	 $\frac{R_{\beta_2(1,3),H_7}}{R_{\beta_2(1,\bar{3}),H_7}}$ $[2,2]$ H_7
 $\frac{R_{\beta_2(2,3),H_7}}{R_{\beta_2(\bar{2},3),H_7}}$ $R_{\beta_2(2,\bar{3}),H_7}$ $R_{\beta_2(\bar{2},\bar{3}),H_7}$ $[2,2]$ H_7	 $\frac{R_{\beta_2(3,\bar{3}),H_7}}{R_{\beta_2(3',\bar{3}),H_7}}$ $[2,2]$ H_7	 $\frac{R_{\beta_3(3,1),H_{23}}}{R_{\beta_3(\bar{3},1),H_{23}}}$ $[2,2]$ H_{23}	 $\frac{R_{\beta_3(2,3),H_{23}}}{R_{\beta_3(\bar{2},3),H_{23}}}$ $R_{\beta_3(2,\bar{3}),H_{23}}$ $R_{\beta_3(\bar{2},\bar{3}),H_{23}}$ $[2,2]$ H_{23}	 $\frac{R_{\beta_3(3,\bar{3}),H_{23}}}{R_{\beta_3(3',\bar{3}),H_{23}}}$ $[2,2]$ H_{23}	 $\frac{R_{\beta_4(1,2,3),H_{13}}}{R_{\beta_4(1,2,\bar{3}),H_{13}}}$ $R_{\beta_4(1,\bar{2},3),H_{13}}$ $R_{\beta_4(1,\bar{2},\bar{3}),H_{13}}$ $[2,1]$ H_{13}
 $\frac{R_{\beta_4(2,2,3),H_{13}}}{R_{\beta_4(2,2,\bar{3}),H_{13}}}$ $[2,1]; H_{13}$	 $\frac{R_{\beta_5(1,2,3),H_6}}{R_{\beta_5(1,2,\bar{3}),H_6}}$ $R_{\beta_5(1,\bar{2},3),H_6}$ $R_{\beta_5(1,\bar{2},\bar{3}),H_6}$ $[2,2]; H_6$	 $\frac{R_{\beta_5(2,2,3),H_6}}{R_{\beta_5(2,2,\bar{3}),H_6}}$ $[2,2]; H_6$			

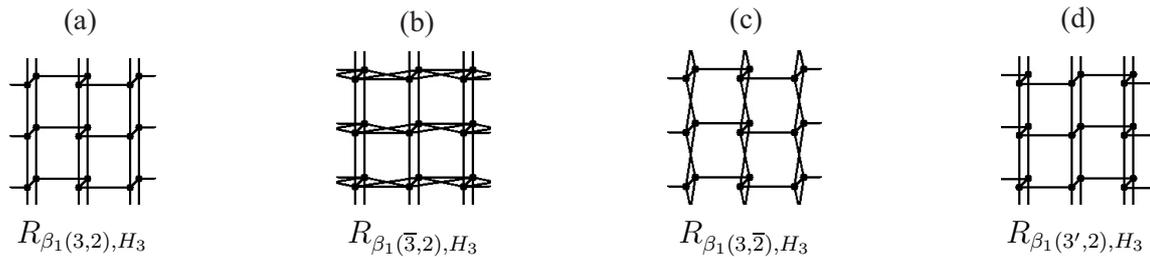


Рис. 1. Примеры применения преобразований частичного дополнения

образований частичного дополнения. То, что любая другая получающаяся из нее реализация эквивалентна одной из указанных, несложно проверить непосредственно. Никакие две реализации, приведенные в различных ячейках и рассмотренные с точностью до эквивалентности, не могут быть получены одна из другой при помощи преобразований частичного дополнения.

Пусть $(\Gamma, G, \sigma, \varphi) = R_{\beta(\tau_1, \dots, \tau_s); H}$ — любая из 49 реализаций, приведенных в табл. 5. Тогда граф Γ будем обозначать через $\Gamma_{\beta(\tau_1, \dots, \tau_s); H}$.

Для иллюстрации применения преобразований частичного дополнения рассмотрим реализацию $R_{\beta_1(3,2), H_3} = (\Gamma_{\beta_1(3,2), H_3}, G, \sigma, \varphi)$, изображенную в ячейке на пересечении второй строки и второго столбца табл. 5. Имеем $G = \text{Aut}_\sigma(\Gamma_{\beta_1(3,2), H_3})$. Легко видеть, что $\varphi G^\sigma \varphi^{-1} = H_3$, причем эта группа имеет на множестве ребер решетки Λ^2 разбиение на орбиты β_1 . Ребра из первой орбиты соответствуют связям типа 3, а ребра из второй орбиты — связям типа 2. Применяя преобразование первого вида к первой орбите, мы получим реализацию $R_{\beta_1(\bar{3},2), H_3}$ (рис. 1a, 1b). Применяя преобразование первого вида ко второй орбите, мы получим реализацию $R_{\beta_1(3,\bar{2}), H_3}$, приведенную на рис. 1c. Реализацию $R_{\beta_1(\bar{3},\bar{2}), H_3}$ получаем путем композиции указанных преобразований (ее изображения мы не приводим). Применяя преобразование второго вида к первой орбите, мы получим реализацию $R_{\beta_1(3',2), H_3}$, приведенную на рис. 1d. Отметим, что в данном примере она эквивалентна исходной реализации.

Будем говорить, что произвольная реализация R симметрического 2-расширения решетки Λ^2 соответствует комбинации $\beta(\tau_1, \dots, \tau_s)$, если для нее выполняется приведенное выше условие (ii). Далее, будем говорить, что две такие комбинации $\beta(\tau_1, \dots, \tau_s)$ и $\tilde{\beta}(\tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_s)$ эквивалентны, если для каждой реализации R , соответствующей какой-либо из этих комбинаций, найдется эквивалентная R реализация, соответствующая другой из этих комбинаций.

Заметим, что перечисление всех, с точностью до эквивалентности, реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 сводится к перечислению всех, с точностью до эквивалентности, насыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 . Действительно, очевидно, что каждая ненасыщенная реализация симметрического 2-расширения решетки Λ^2 получается из однозначно определенной насыщенной реализации путем удаления ребра в каждом блоке. Для максимальной насыщенной реализации $R_{\beta(\tau_1, \dots, \tau_s); H}$ соответствующую ей таким образом ненасыщенную реализацию будем обозначать через $\bar{R}_{\beta(\tau_1, \dots, \tau_s); H}$.

3. Основные результаты

Теорема. В табл. 5 приведены все, с точностью до эквивалентности, насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I (все приведенные в табл. 5 реализации попарно неэквивалентны).

Следствие 1. С точностью до эквивалентности существует 49 насыщенных и 38 ненасыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При удалении ребер внутри блоков у 49 реализаций, приведенных в табл. 5, графы одиннадцати из них, как легко видеть, становятся несвязными ($\Gamma_{\beta_0(3), H_1}$,

$\Gamma_{\beta_0(3),H_4}$, $\Gamma_{\beta_0(3),H_{19}}$, $\Gamma_{\beta_1(3,2),H_3}$, $\Gamma_{\beta_1(3,\bar{2}),H_3}$, $\Gamma_{\beta_1(3,3),H_{10}}$, $\Gamma_{\beta_2(2,3),H_7}$, $\Gamma_{\beta_2(\bar{2},3),H_7}$, $\Gamma_{\beta_3(2,3),H_{23}}$, $\Gamma_{\beta_3(\bar{2},3),H_{23}}$, $\Gamma_{\beta_4(2,2,3),H_{13}}$, а остальные 38 реализаций дают все, с точностью до эквивалентности, ненасыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I.

Следствие 2. Среди графов реализаций, приведенных в табл. 5, изоморфными являются в точности следующие: $\Gamma_{\beta_0(3),H_4}$ и $\Gamma_{\beta_1(3,3),H_{10}}$; $\Gamma_{\beta_1(\bar{3},3),H_5}$ и $\Gamma_{\beta_1(\bar{3},3),H_{10}}$; $\Gamma_{\beta_1(3,\bar{3}),H_{10}}$ и $\Gamma_{\beta_2(3,\bar{3}),H_7}$. Поэтому с точностью до изоморфизма существует лишь 46 графов насыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I.

Следствие 3. Среди графов 87 реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I из следствия 1 лишь 78 попарно неизоморфны. Помимо перечисленных в следствии 2, изоморфными являются в точности следующие из них: $\Gamma_{\beta_1(3,2),H_3}$, $\bar{\Gamma}_{\beta_{0,1}(4),H_{27}}$, $\bar{\Gamma}_{\beta_1(\bar{3},3),H_5}$ и $\bar{\Gamma}_{\beta_1(\bar{3},3),H_{10}}$; $\Gamma_{\beta_3(\bar{2},3),H_{23}}$ и $\bar{\Gamma}_{\beta_1(3,\bar{3}),H_{10}}$; $\Gamma_{\beta_1(3,\bar{2}),H_3}$ и $\bar{\Gamma}_{\beta_2(3,\bar{3}),H_7}$; $\Gamma_{\beta_5(2,2,3),H_6}$ и $\bar{\Gamma}_{\beta_4(1,2,3),H_{13}}$. Поэтому с точностью до изоморфизма существует лишь 78 графов реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I.

Д о к а з а т е л ь с т в о следствий 2 и 3. Справедливость следствий устанавливается следующим образом. Упомянутые в них изоморфизмы расширений легко усматриваются непосредственно. При помощи GAP для каждого из графов 87 реализаций из следствия 1 был построен подграф, порожденный множеством вершин, удаленных от некоторой произвольно выделенной вершины на расстояние ≤ 4 . Среди полученных 87 конечных графов изоморфными оказались только те, которые соответствуют изоморфным графам, указанным в следствиях 2 и 3.

4. Комбинаторное доказательство теоремы

Доказательство теоремы основывается на леммах 1-22, некоторые из которых очевидны; их доказательства опущены. Для краткости в этих леммах насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I будем называть просто реализациями.

Лемма 1. Если реализация содержит связи только типа 3, то каждая ее клетка содержит цикл либо длины 4, либо длины 6, либо длины 8.

Лемма 2. Если реализация содержит связи только типа 3 и некоторая ее клетка содержит цикл длины 4, то эта реализация эквивалентна $R_{\beta_0(3);H_{19}}$.

Лемма 3. Если реализация R содержит связи только типа 3 и все ее клетки содержат цикл длины 8, то эта реализация эквивалентна $R_{\beta_0(3);H_1}$.

Лемма 4. Пусть реализация R содержит связи только типа 3 и некоторая ее клетка содержит цикл длины 6. Тогда

(1) если при обходе этого цикла ребра, начало и конец которых лежат в одном блоке, лежат в несмежных блоках, то $R \sim R_{\beta_0(3);H_4}$;

(2) если при обходе этого цикла ребра, начало и конец которых лежат в одном блоке, лежат в смежных блоках, то $R \sim R_{\beta_0(3);H_{10}}$.

Ребра решетки Λ^2 вида $\{(i, j), (i + 1, j)\}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, будем называть *горизонтальными*, а ребра вида $\{(i, j), (i, j + 1)\}$, $i, j \in \mathbb{Z}$, — *вертикальными*. В соответствии с этим и связи реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 будем называть горизонтальными или вертикальными.

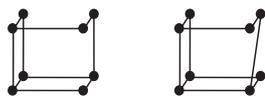


Рис. 2

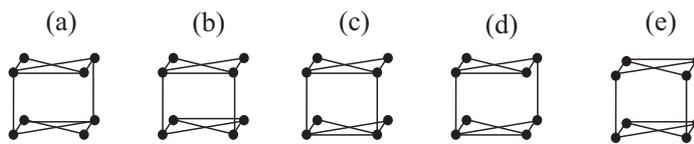


Рис. 3

Лемма 5. Если реализация имеет все горизонтальные связи типа 3, а все вертикальные связи — типа 1, то она эквивалентна $R_{\beta_1(3,1);H_3}$.

Два подграфа симметрических 2-расширений решетки Λ^2 , которые вместе с каждой вершиной включают и весь блок, содержащий эту вершину, будем называть эквивалентными, если между ними существует изоморфизм, отображающий блоки в блоки.

Лемма 6. Если в некоторой клетке реализации горизонтальные связи имеют тип 3, а вертикальные связи лежат в одной орбите и имеют тип 2, то эта клетка, с точностью до эквивалентности, имеет один из двух видов, изображенных на рис. 2.

Будем говорить, что некоторая клетка K однозначно достраивается до реализации R , удовлетворяющей некоторым условиям (Y) , если K — конечный граф, множество вершин которого разбито на 4 двухэлементных блока: $V_{0,0}, V_{0,1}, V_{1,0}, V_{1,1}$, такой, что R — единственная, с точностью до эквивалентности, реализация, которая содержит клетку, эквивалентную K .

Подобным образом определяется, что значит, что некоторая пара клеток, имеющих общую вертикальную связь, однозначно достраивается до реализации R , удовлетворяющей некоторым условиям (Y) .

Лемма 7. Если реализация R соответствует $\beta_1(3,2)$ или $\beta_{1,1}(3,2)$, то либо $R \sim R_{\beta_1(3,2);H_3}$, либо $R \sim R_{\beta_1(3,\bar{2});H_3}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем некоторую клетку данной реализации. По лемме 6 она имеет один из двух приведенных на рис. 2 видов. Легко усмотреть, что при условиях леммы первый вид однозначно достраивается до $R_{\beta_1(3,2);H_3}$, а второй вид — до $R_{\beta_1(3,\bar{2});H_3}$.

Лемма 8. Пусть реализация R имеет все горизонтальные связи типа $\bar{3}$, а все вертикальные связи типа 3. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (1) R соответствует $\beta_1(\bar{3}, 3)$, и R соответствует либо α_1 , либо α_3 .
- (2) Если R соответствует α_1 , то R эквивалентна либо $R_{\beta_1(\bar{3},3);H_5}$, либо $R_{\beta_1(\bar{3},3);H_{10}}$, либо $R_{\beta_1(3,\bar{3});H_{10}}$.
- (3) Если R соответствует α_3 , то $R \sim R_{\beta_1(\bar{3},3);H_{20}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ и B — блок σ . Тогда если g — элемент группы G , меняющий местами вершины B , то $\varphi g \sigma \varphi^{-1}$ — поворот решетки Λ^2 на угол π вокруг вершины $\varphi(B)$. Отсюда легко следует, что R соответствует $\beta_1(\bar{3}, 3)$ и R соответствует α_1 либо α_3 .

Поскольку R соответствует $\beta_1(\bar{3}, 3)$, легко усмотреть, что произвольная клетка реализации R , с точностью до эквивалентности, имеет один из следующих видов, указанных на рис. 3. Отметим, что в клетках вида (a), (b) для каждого вертикального ребра количество горизонтальных ребер, инцидентных верхнему его концу, отличается от количества горизонтальных ребер, инцидентных нижнему его концу. А в клетках вида (c)–(e) эти количества совпадают.

Всевозможные (неупорядоченные) сочетания типов двух клеток решетки R , имеющих общую вертикальную связь, разместим в табл. 6 так, что левой клетке соответствует строка, а правой — столбец. Здесь для данного сочетания типов пометка “нерег.” означает несовместимость с требованием регулярности графа Γ , пометка “ $\neg\beta_1$ ” означает несовместимость с тем,

Т а б л и ц а 6

	a_1	a_2	b_1	b_2	b_3
a_1	$R_{\beta_1(\overline{3},3);H_5}$	$\neg\beta_1$	нерег.	нерег.	нерег.
a_2		$R_{\beta_1(\overline{3},3);H_{10}}$	нерег.	нерег.	нерег.
b_1			нерег.	$\neg\beta_1$	$R_{\beta_1(\overline{3},3);H_{20}}$
b_2				$R_{\beta_1(3,\overline{3});H_{10}}$	$\neg\beta_1$
b_3					нерег.

что R соответствует $\beta_1(\overline{3}, 3)$, а пометка с именем реализации означает, что при условиях леммы 8 данное сочетание однозначно достраивается до указанной реализации. Справедливость утверждений табл. 6 устанавливается легко. \square

Лемма 9. Если реализация R соответствует $\beta_2(1, 3)$, то $R \sim R_{\beta_2(1,3);H_7}$.

Лемма 10. Если реализация $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ соответствует $\beta_2(2, 3)$ и $\varphi(\text{Aut}_\sigma(\Gamma))^\sigma \varphi^{-1} = H_7$, то либо $R \sim R_{\beta_2(2,3);H_7}$, либо $R \sim R_{\beta_2(\overline{2},3);H_7}$.

Доказательство. Произвольная клетка K расширения R , левая и нижняя связи которой имеют тип 2, с точностью до эквивалентности, имеет один из двух видов, указанных на рис. 4. Однако второй вид невозможен, поскольку в этом случае отражение относительно побочной диагонали клетки K поточечно оставляет на месте левый нижний блок и, следовательно, в группе G нет элемента, меняющего местами вершины в этом блоке. Итак, для K реализуется первый вид.

Поскольку все клетки расширения R эквивалентны (так как орбиты группы H_7 на клетках решетки Λ^2 составляют α_1), то две клетки расширения R , имеющие общую вертикальную связь типа 2, с точностью до эквивалентности, имеют один из видов (а), (б), указанных на рис. 5. Пара клеток (а) однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_2(2,3);H_7}$, а пара клеток (б) эквивалентна паре клеток (с) на рис. 5 и однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_2(\overline{2},3);H_7}$. \square

Лемма 11. Если реализация $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ соответствует $\beta_2(3, \overline{3})$ и $\varphi(\text{Aut}_\sigma(\Gamma))^\sigma \varphi^{-1} = H_7$, то либо $R \sim R_{\beta_2(3,\overline{3});H_7}$, либо $R \sim R_{\beta_2(3',\overline{3});H_7}$.

Доказательство. Найдем вид такой клетки K расширения R , левая и нижняя связи которой имеют тип $\overline{3}$. Поскольку группа $\text{Aut}_\sigma(\Gamma)$ содержит отражение относительно побочной диагонали клетки K , то, с точностью до эквивалентности, возможны два вида клетки K , указанные на рис. 6. Учитывая, что все клетки расширения эквивалентны (так как орбиты группы H_7 на клетках решетки Λ^2 составляют α_1), клетка первого вида однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_2(3,\overline{3});H_7}$, а клетка второго вида однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_2(3',\overline{3});H_7}$. \square

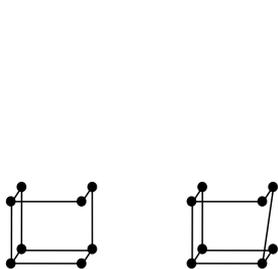


Рис. 4

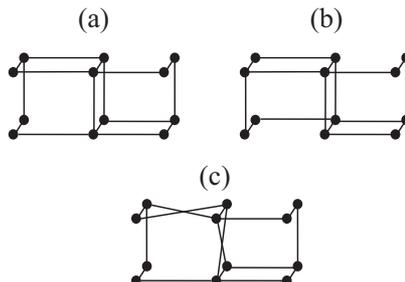


Рис. 5

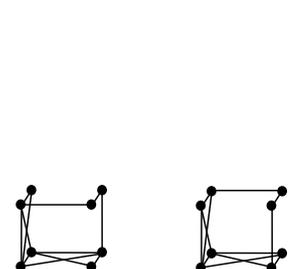


Рис. 6

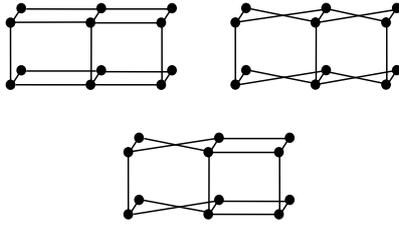


Рис. 7

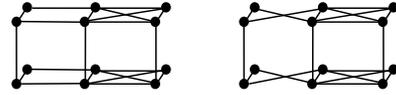


Рис. 8

Для произвольной реализации $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 и произвольного $g \in \text{Aut}(\Lambda^2)$ можно построить эквивалентную ей реализацию $g(R) := (\Gamma, G, \sigma, g\varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 . Будем говорить, что $g(R)$ — это реализация R , преобразованная с помощью g .

Лемма 12. *Если реализация R соответствует $\beta_4(2, 2, 3)$, а R соответствует α_2 , то $R \sim R_{\beta_4(2,2,3);H_{13}}$.*

Доказательство. Из леммы 6 следует, что две произвольные клетки расширения R с общей вертикальной связью имеют, с точностью до эквивалентности, один из трех видов, указанных на рис. 7. Учитывая, что R соответствует разбиению α_2 , первый вид однозначно достраивается до реализации $m \setminus (R_{\beta_1(3,2);H_3})$, второй вид — до реализации $m \setminus (R_{\beta_1(3,\bar{2});H_3})$, а третий вид — до реализации $R_{\beta_4(2,2,3);H_{13}}$. Но первые две реализации соответствуют α_1 , что противоречит условию леммы. \square

Лемма 13. *Если реализация R соответствует $\beta_4(1, 2, 3)$ и α_2 , то либо $R \sim R_{\beta_4(1,2,3);H_{13}}$, либо $R \sim R_{\beta_4(1,\bar{2},3);H_{13}}$.*

Доказательство. Из леммы 6 следует, что две произвольные клетки расширения R с общей вертикальной связью имеют, с точностью до эквивалентности, один из двух видов, указанных на рис. 8. С учетом того, что R соответствует реализации α_2 , легко усмотреть, что первый вид однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_4(1,2,3);H_{13}}$, а второй — до реализации $R_{\beta_4(1,\bar{2},3);H_{13}}$. \square

Лемма 14. *Не существует реализации, соответствующей $\beta_4(3, 3, 2)$ или $\beta_5(3, 3, 2)$.*

Доказательство. Предположим, что существует реализация $R = (\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ с указанными свойствами. Из транзитивности действия группы G на произвольном блоке реализации R следует, что все горизонтальные связи реализации R попадут в одну орбиту группы G . Это противоречит условию леммы. \square

Лемма 15. *Если реализация R соответствует $\beta_5(2, 2, 3)$ и α_1 , то $R \sim R_{\beta_5(2,2,3);H_6}$.*

Доказательство. Легко усмотреть, что произвольная клетка расширения, с точностью до эквивалентности, имеет один из трех видов, указанных на рис. 9. Учитывая, что R соответствует разбиению α_1 , легко усмотреть, что первый вид однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_1(3,2);H_3}$, отраженной относительно главной диагонали, второй — до реализации $R_{\beta_1(3,\bar{2});H_3}$, отраженной относительно главной диагонали, а третий — до реализации $R_{\beta_5(2,2,3);H_6}$. Но первые две реализации не удовлетворяют условиям леммы. \square

Лемма 16. *Если реализация R соответствует $\beta_5(1, 2, 3)$ и α_1 , то либо $R \sim R_{\beta_5(1,2,3);H_6}$, либо $R \sim R_{\beta_5(1,\bar{2},3);H_6}$.*



Рис. 9



Рис. 10



Рис. 11

Доказательство. Легко усмотреть, что произвольная клетка реализации R , с точностью до эквивалентности, имеет один из двух видов, указанных на рис. 10. Учитывая, что расширение R соответствует α_1 , легко усмотреть, что первый вид однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_5(1,2,3);H_6}$, а второй — до реализации $R_{\beta_5(1,\bar{2},3);H_6}$. \square

Лемма 17. Если реализация R соответствует $\beta_{0.1}(4)$, то $R \sim R_{\beta_{0.1}(4);H_{27}}$.

Лемма 18. Если реализация R соответствует $\beta_{0.2}(4)$, то $R \sim R_{\beta_{0.2}(4);H_{29}}$.

Лемма 19. Если реализация R соответствует $\beta_{0.3}(4)$, то $R \sim R_{\beta_{0.3}(4);H_{31}}$.

Лемма 20. Если реализация R соответствует $\beta_3(3,1)$, то $R \sim R_{\beta_3(3,1);H_{23}}$.

Лемма 21. Если реализация R соответствует $\beta_3(2,3)$, то либо $R \sim R_{\beta_3(2,3);H_{23}}$, либо $R \sim R_{\beta_3(\bar{2},3);H_{23}}$.

Доказательство. H_{23} — единственная группа, имеющая на ребрах решетки Λ^2 разбиение на орбиты β_3 . Следовательно, реализация R соответствует α_4 . Зафиксируем произвольную клетку расширения R . По лемме 6 она имеет один из двух возможных видов, изображенных на рис. 2. Легко видеть, что при условиях леммы первый из них однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_3(2,3);H_{23}}$, а второй — до реализации $R_{\beta_3(\bar{2},3);H_{23}}$. \square

Лемма 22. Если реализация R соответствует $\beta_3(3,\bar{3})$, то либо $R \sim R_{\beta_3(3,\bar{3});H_{23}}$, либо $R \sim R_{\beta_3(3',\bar{3});H_{23}}$.

Доказательство. H_{23} — единственная группа, имеющая на ребрах решетки Λ^2 разбиение на орбиты β_3 . Следовательно, R соответствует α_4 .

Произвольная клетка реализации R , горизонтальные связи которой имеют тип $\bar{3}$, а вертикальные — тип 3 , с точностью до эквивалентности, имеет один из следующих двух видов, показанных на рис. 11. Учитывая, что R соответствует α_4 , легко усмотреть, что при условиях леммы клетка первого вида однозначно достраивается до реализации $R_{\beta_3(3,\bar{3});H_{23}}$, а клетка второго вида — до реализации $R_{\beta_3(3',\bar{3});H_{23}}$. \square

Доказательство теоремы осуществляется путем перебора всех возможных комбинаций $\beta(\tau_1, \dots, \tau_s)$ (см. разд. 2), в которых среди τ_1, \dots, τ_s существует $\tau_i \notin \{1, 2, \bar{2}\}$. В первом столбце табл. 7 перечисляются такие комбинации, за тем исключением что при наличии нескольких эквивалентных комбинаций (см. разд. 2) в таблицу помещалась только одна из них. Во втором столбце приводятся обозначения соответствующих реализаций (или символ “-”, если они не существуют). В третьем столбце приводятся аргументы, обосновывающие соответствие между первым и вторым столбцами. При этом “част. доп.” означает, что все реализации, соответствующие комбинации из данной строки, являются частично дополнительными к реализациям, соответствующим комбинации из предыдущей строки (т.е. получаются из них с помощью последовательности преобразований частичного дополнения); а “нерег.” означает, что данная комбинация приводит к отсутствию регулярности у соответствующих ей расширений. В некоторых строках первого столбца таблицы в комбинациях вместо конкретных типов связей стоят переменные $\tau, \tilde{\tau}$. Это означает что утверждения этих строк выполняются для любых значений $\tau, \tilde{\tau} \in \{1, 2, 3, \bar{3}\}$.

Т а б л и ц а 7

Комбинация	Реализации	Обоснование
$\beta_0(3)$	$R_{\beta_0(3),H_1}, R_{\beta_0(3),H_4}, R_{\beta_0(3),H_{19}}$	леммы 1, 2, 3, 4
$\beta_0(\overline{3})$	$R_{\beta_0(\overline{3}),H_1}, R_{\beta_0(\overline{3}),H_4}, R_{\beta_0(\overline{3}),H_{19}}$	част. доп.
$\beta_{0,1}(3)$	-	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_{0,1}(\overline{3})$	-	част. доп.
$\beta_{0,1}(4)$	$R_{\beta_{0,1}(4),H_{27}}$	лемма 17
$\beta_{0,2}(3)$	-	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_{0,2}(\overline{3})$	-	част. доп.
$\beta_{0,2}(4)$	$R_{\beta_{0,2}(4),H_{29}}$	лемма 18
$\beta_{0,3}(3)$	-	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_{0,3}(\overline{3})$	-	част. доп.
$\beta_{0,3}(4)$	$R_{\beta_{0,3}(4),H_{31}}$	лемма 19
$\beta_1(1, 3)$	$R_{\beta_1(3,1);H_3}$	лемма 5
$\beta_1(1, \overline{3})$	$R_{\beta_1(\overline{3},1);H_3}$	част. доп.
$\beta_1(2, 3)$	$R_{\beta_1(3,2);H_3}, R_{\beta_1(3,\overline{2});H_3}$	лемма 7
$\beta_1(2, \overline{3})$	$R_{\beta_1(\overline{3},2);H_3}, R_{\beta_1(\overline{3},\overline{2});H_3}$	част. доп.
$\beta_1(3, 3)$	$R_{\beta_1(3,3);H_{10}}$	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_1(\overline{3}, 3)$	$R_{\beta_1(\overline{3},3);H_5}, R_{\beta_1(\overline{3},3);H_{10}},$ $R_{\beta_1(3,\overline{3});H_{10}}, R_{\beta_1(\overline{3},3);H_{20}}$	лемма 8
$\beta_1(\overline{3}, \overline{3})$	$R_{\beta_1(\overline{3},\overline{3});H_{10}}$	част. доп. к $\beta_1(3, 3)$
$\beta_{1,1}(1, 3)$	-	лемма 5
$\beta_{1,1}(1, \overline{3})$	-	част. доп.
$\beta_{1,1}(1, 4)$	-	нерег.
$\beta_{1,1}(2, 3)$	-	лемма 7
$\beta_{1,1}(2, \overline{3})$	-	част. доп.
$\beta_{1,1}(2, 4)$	-	нерег.
$\beta_{1,1}(3, 3)$	-	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_{1,1}(3, 4)$	-	нерег.
$\beta_{1,1}(\overline{3}, 3)$	-	лемма 8
$\beta_{1,1}(\overline{3}, \overline{3})$	-	част. доп. к $\beta_{1,1}(3, 3)$
$\beta_{1,1}(\overline{3}, 4)$	-	нерег.
$\beta_2(1, 3)$	$R_{\beta_2(1,3);H_7}$	лемма 9
$\beta_2(1, \overline{3})$	$R_{\beta_2(1,\overline{3});H_7}$	част. доп.
$\beta_2(2, 3)$	$R_{\beta_2(2,3);H_7}, R_{\beta_2(\overline{2},3);H_7}$	лемма 10
$\beta_2(2, \overline{3})$	$R_{\beta_2(2,\overline{3});H_7}, R_{\beta_2(\overline{2},\overline{3});H_7}$	част. доп.
$\beta_2(3, 3)$	-	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_2(3, \overline{3})$	$R_{\beta_2(3,\overline{3});H_7}, R_{\beta_2(3',\overline{3});H_7}$	лемма 11
$\beta_2(\overline{3}, \overline{3})$	-	част. доп.
$\beta_3(3, 1)$	$R_{\beta_3(3,1);H_{23}}$	лемма 20
$\beta_3(\overline{3}, 1)$	$R_{\beta_3(\overline{3},1);H_{23}}$	част. доп.
$\beta_3(2, 3)$	$R_{\beta_3(2,3);H_{23}}, R_{\beta_3(\overline{2},3);H_{23}}$	лемма 21
$\beta_3(2, \overline{3})$	$R_{\beta_3(2,\overline{3});H_{23}}, R_{\beta_3(\overline{2},\overline{3});H_{23}}$	част. доп.
$\beta_3(3, 3)$	-	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_3(3, \overline{3})$	$R_{\beta_3(3,\overline{3});H_{23}}, R_{\beta_3(3',\overline{3});H_{23}}$	лемма 22
$\beta_3(\overline{3}, \overline{3})$	-	част. доп.
$\beta_4(1, 1, 3)$	-	лемма 5
$\beta_4(1, 1, \overline{3})$	-	част. доп.

Т а б л и ц а 7 (окончание)

Комбинация	Реализации	Обоснование
$\beta_4(1, 2, 3)$	$R_{\beta_4(1,2,3);H_{13}}, R_{\beta_4(1,\bar{2},3);H_{13}}$	лемма 13
$\beta_4(1, 2, \bar{3})$	$R_{\beta_4(1,2,\bar{3});H_{13}}, R_{\beta_4(1,\bar{2},\bar{3});H_{13}}$	част. доп.
$\beta_4(1, 3, \tau)$	-	нерег.
$\beta_4(1, \bar{3}, \tau)$	-	част. доп.
$\beta_4(2, 2, 3)$	$R_{\beta_4(2,2,3);H_{13}}$	лемма 12
$\beta_4(2, 2, \bar{3})$	$R_{\beta_4(2,2,\bar{3});H_{13}}$	част. доп.
$\beta_4(2, 3, \tau)$	-	нерег.
$\beta_4(2, \bar{3}, \tau)$	-	част. доп.
$\beta_4(3, 3, 1)$	-	лемма 5
$\beta_4(3, 3, 2)$	-	лемма 14
$\beta_4(3, 3, 3)$	-	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_4(3, 3, \bar{3})$	-	лемма 8(1)
$\beta_4(3, \bar{3}, \tau)$	-	нерег.
$\beta_4(\bar{3}, \tau, \tilde{\tau})$	-	част. доп. к $\beta_4(3, \tau, \tilde{\tau})$
$\beta_5(1, 1, 3)$	-	лемма 5
$\beta_5(1, 1, \bar{3})$	-	част. доп.
$\beta_5(1, 2, 3)$	$R_{\beta_5(1,2,3);H_6}, R_{\beta_5(1,\bar{2},3);H_6}$	лемма 16
$\beta_5(1, 2, \bar{3})$	$R_{\beta_5(1,2,\bar{3});H_6}, R_{\beta_5(1,\bar{2},\bar{3});H_6}$	част. доп.
$\beta_5(1, 3, \tau)$	-	нерег.
$\beta_5(1, \bar{3}, \tau)$	-	част. доп.
$\beta_5(2, 2, 3)$	$R_{\beta_5(2,2,3);H_6}$	лемма 15
$\beta_5(2, 2, \bar{3})$	$R_{\beta_5(2,2,\bar{3});H_6}$	част. доп.
$\beta_5(2, 3, \tau)$	-	нерег.
$\beta_5(2, \bar{3}, \tau)$	-	част. доп.
$\beta_5(3, 3, 1)$	-	лемма 5
$\beta_5(3, 3, 2)$	-	лемма 14
$\beta_5(3, 3, 3)$	-	леммы 1, 2, 4, 3
$\beta_5(3, 3, \bar{3})$	-	лемма 8(1)
$\beta_5(3, \bar{3}, \tau)$	-	нерег.
$\beta_5(\bar{3}, \tau, \tilde{\tau})$	-	част. доп. к $\beta_5(3, \tau, \tilde{\tau})$

Таким образом, мы доказали, что любая реализация симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I эквивалентна некоторой реализации из второго столбца табл. 7. А последние реализации есть в точности реализации из табл. 5. \square

5. Доказательство теоремы, использующее компьютерную реализацию алгоритмов

В этом разделе будет дано другое доказательство теоремы, которое основано на компьютерной реализации подхода, предложенного в [3], и условно называемого координатизацией симметрических расширений графов. Благодаря ему удастся получить новое короткое описание реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I, которое используется нами для получения в разд. 6 эквивалентных им кристаллографических реализаций. Кроме того, этот подход представляется более перспективным для описания реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^d в случае $d > 2$.

Пусть H — группа и L — ее подгруппа. Пусть, кроме того, \mathcal{P} — некоторое множество двухэлементных подмножеств множества H/L всех левых смежных классов H по L вида $\{L, gL\}$, $g \in H$. Тогда через $\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}$ обозначается граф с множеством вершин H/L и множеством ребер

$\{g(P) : P \in \mathcal{P}, g \in H\}$. При этом $\lambda_{H/L}(H)$, где $\lambda_{H/L}$ — действие группы H на H/L левыми сдвигами, является вершинно-транзитивной группой автоморфизмов графа $\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}$.

Пусть теперь H — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов решетки Λ^2 , $K = H_{(0,0)}$ — стабилизатор вершины $(0,0)$ в H и L — подгруппа индекса 2 в K . Тогда

$$\sigma_{H,K,L} := \{\lambda_{H/L}(g)(K/L) : g \in H\}$$

есть система импримитивности группы $\lambda_{H/L}(H)$ на H/L . Через $\tilde{\varphi}_{H,K,L}$ обозначим взаимно-однозначное отображение $\sigma_{H,K,L}$ на $V(\Lambda^2)$ такое, что $\tilde{\varphi}_{H,K,L}(\lambda_{H/L}(g)(K/L)) = g(0,0)$ для всех $g \in H$. Четверка $(\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}, \lambda_{H/L}(H), \sigma_{H,K,L}, \tilde{\varphi}_{H,K,L})$ является реализацией симметрического 2-расширения решетки Λ^2 , которую мы будем для краткости обозначать через $R_{H,L,\mathcal{P}}$.

Следующее предложение является конкретизацией [3, предложение 8], необходимой для наших целей.

Предложение. Пусть $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ — такая реализация насыщенного симметрического 2-расширения решетки Λ^2 , что ядро индуцированного действия $G \mapsto G^\sigma$ единично. Обозначим через H вершинно-транзитивную подгруппу $\varphi G^\sigma \varphi^{-1}$ группы $\text{Aut}(\Gamma)$. Пусть, далее, $K = H_{(0,0)}$ и h_1, h_2, h_3, h_4 — такой набор элементов группы H , что вершины $h_j(0,0)$, $j \in \{1, \dots, 4\}$, составляют множество $\{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$. Тогда для некоторой подгруппы L индекса 2 группы K и произвольного $g \in K \setminus L$ найдутся такие подмножества P_j , $j \in \{1, \dots, 4\}$, множества $\{1, g\}$, что для $\mathcal{P} := \{\{L, gL\}\} \cup \{\{L, h_j gL\} : j \in \{1, \dots, 4\}, g \in P_j\}$ выполняется $(\Gamma, G, \sigma, \varphi) \sim R_{H,L,\mathcal{P}}$.

На основе этого предложения был реализован следующий алгоритм, который генерирует все, с точностью до эквивалентности, насыщенные реализации симметрических 2-расширений решетки Λ^2 .

Алгоритм 1. Генерация всех насыщенных реализаций симметрических 2-расширений решетки Λ^2 .

В ы х о д: Список реализаций $R_{H_i, L_i, \mathcal{P}_i}$, $i = 1, \dots, n$.

О п и с а н и е. Перебираем всевозможные группы H из \mathbf{H}_1 . Для каждой из них полагаем $K = H_{(0,0)}$ и выбираем элементы $h_1, \dots, h_4 \in H$ такие, что $\{h_1(0,0), \dots, h_4(0,0)\} = \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$. Перебираем всевозможные подгруппы L группы K индекса 2. Для каждой из них выбираем $g \in K$, такой что $K = L \cup gL$. Перебираем всевозможные подмножества N множества $\{h_1L, \dots, h_4L, h_1gL, \dots, h_4gL\}$ такие, что N инвариантно относительно левых сдвигов на элементы из L и если $hL \in N$, то и $h^{-1}L \in N$. Для каждого такого множества N полагаем $\mathcal{P} = \{\{L, gL\} \cup \{\{L, L_1\} : L_1 \in N\}\}$ и строим граф $\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}$. Если между блоком $\{L, gL\}$ и блоками $\{h_jL, h_jgL\}$, $j = 1, \dots, 4$, имеются связи типа, отличного от 1 и 4, то реализация $(\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}, \lambda_{H/L}(H), \sigma_{H,K,L}, \tilde{\varphi}_{H,K,L})$ относится к типу I и мы записываем ее в выходной список.

Пусть $R_{H_i, L_i, \mathcal{P}_i}$, $i = 1, 2$, — две из сгенерированных при помощи алгоритма 1 реализации. Опишем алгоритм, позволяющий определить, являются ли они эквивалентными. Положим $K_i = (H_i)_{(0,0)}$ для $i = 1, 2$. Множества смежных классов H_1/K_1 и H_2/K_2 естественным образом отождествляются с решеткой Λ^2 . Если расширения эквивалентны, то между ними существует изоморфизм ψ , сохраняющий блоки и, следовательно, индуцирующий некоторый автоморфизм $g \in \text{Aut}(\Lambda^2)$. Из вершинной симметричности расширения $\Gamma_{H_2, L_2, \mathcal{P}_2}$ следует, что ψ можно домножить на некоторый автоморфизм расширения $\Gamma_{H_2, L_2, \mathcal{P}_2}$, сохраняющий блоки, так что получающийся изоморфизм между $\Gamma_{H_1, L_1, \mathcal{P}_1}$ и $\Gamma_{H_2, L_2, \mathcal{P}_2}$, сопоставляя множества H_1/K_1 и H_2/K_2 , даст уже некоторый элемент $\hat{g} \in \text{Aut}(\Lambda^2)_{(0,0)}$. Элемент \hat{g} принимает одно из восьми возможных значений. Нижеописанный алгоритм 2 позволяет определить эквивалентность реализаций в предположении $\hat{g} = 1$. В общем случае для проверки реализаций $R_{H_i, L_i, \mathcal{P}_i}$, $i = 1, 2$ на эквивалентность нужно перебрать всевозможные $\hat{g} \in \text{Aut}(\Lambda^2)_{(0,0)}$ и для каждого \hat{g} сопоставить при помощи алгоритма 2 реализацию $R_{H_1, L_1, \mathcal{P}_1}$ и реализацию $\hat{g}^{-1}(R_{H_2, L_2, \mathcal{P}_2})$.

Алгоритм 2. Проверка двух реализаций на эквивалентность в предположении $\hat{g} = 1$.

В х о д: Реализации $R_{H_i, L_i, \mathcal{P}_i} = (\Gamma_{H_i, L_i, \mathcal{P}_i}, G_i, \sigma_i, \varphi_i)$, $i = 1, 2$.

В ы х о д: Заключение об их эквивалентности или неэквивалентности.

О п и с а н и е. Пусть (n_1, n_2) — лексикографически минимальная пара положительных целых чисел, такая что обе реализации удовлетворяют условию $[n_1, n_2]$ -периодичности.

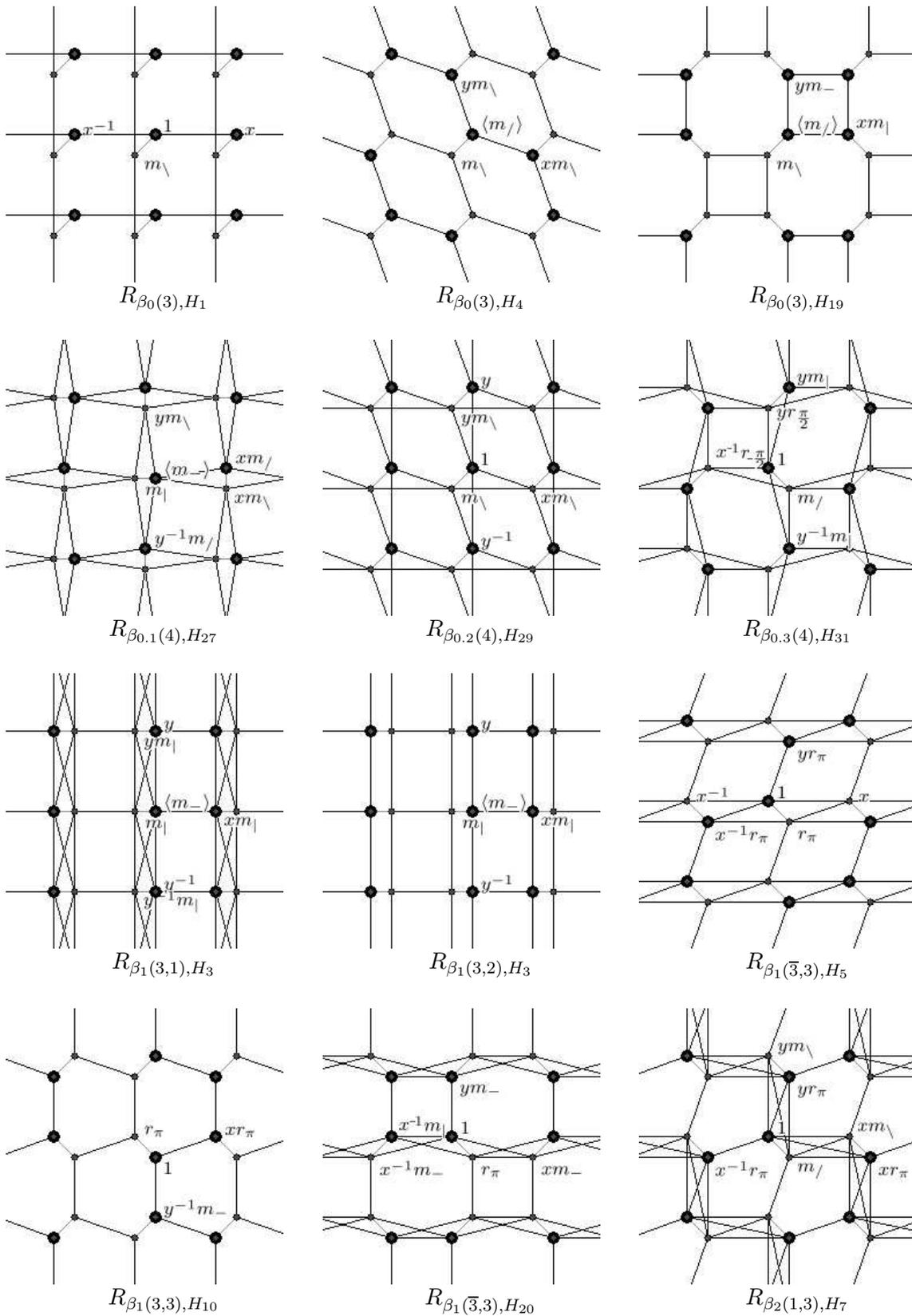
Пусть F_i , $i = 1, 2$, — подграф в $\Gamma_{H_i, L_i, \mathcal{P}_i}$, порожденный множеством вершин $\varphi_i^{-1}(0, 0) \cup \varphi_i^{-1}(1, 0) \cup \dots \cup \varphi_i^{-1}(n_1 - 1, 0) \cup \varphi_i^{-1}(0, 1) \cup \varphi_i^{-1}(1, 1) \cup \dots \cup \varphi_i^{-1}(n_1 - 1, 1) \cup \dots \cup \varphi_i^{-1}(0, n_2 - 1) \cup \varphi_i^{-1}(1, n_2 - 1) \cup \dots \cup \varphi_i^{-1}(n_1 - 1, n_2 - 1)$ решетки Λ^2 . Сопоставляя блоки $\varphi_1^{-1}(k, l)$ и $\varphi_2^{-1}(k, l)$ для всех $k \in \{0, \dots, n_1\}$, $l \in \{0, \dots, n_2\}$, можно построить $2^{n_1 n_2}$ соответствий вершин подграфов F_1 и F_2 . Если среди них найдется соответствие, задающее изоморфизм подграфов F_1 и F_2 с дополнительным согласованием на границе, благодаря которому это соответствие по периодичности продолжается до изоморфизма графов $\Gamma_{H_i, L_i, \mathcal{P}_i}$, $i = 1, 2$, то данные реализации эквивалентны, а если не найдется, то неэквивалентны. Перебор $2^{n_1 n_2}$ соответствий вершин подграфов убыстряется за счет использования перебора с возвратом.

Список реализаций, сгенерированный при помощи алгоритма 1 и прореженный с помощью алгоритма 2, содержит 49 реализаций. При прореживании из любых двух эквивалентных реализаций, у которых группы H_i сравнимы по включению, выбиралась реализация с большей группой. Благодаря этому реализации в получившемся списке являются максимальными. Ниже приводится легко получаемое сопоставление реализаций из табл. 5 с реализациями из этого списка. Для краткости обозначим $x = t_x, \bar{x} = t_x^{-1}$, $y = t_y, \bar{y} = t_y^{-1}$, $r = r_{\frac{\pi}{2}}, \bar{r} = r_{-\frac{\pi}{2}}$. Кроме того, вместо обозначения $R_{H, L, \mathcal{P}}$ будем использовать обозначение $R_{H, L, X}$, где $X \subset \bar{H}$, $\mathcal{P} = \{ \{L, hL\} : h \in X \}$.

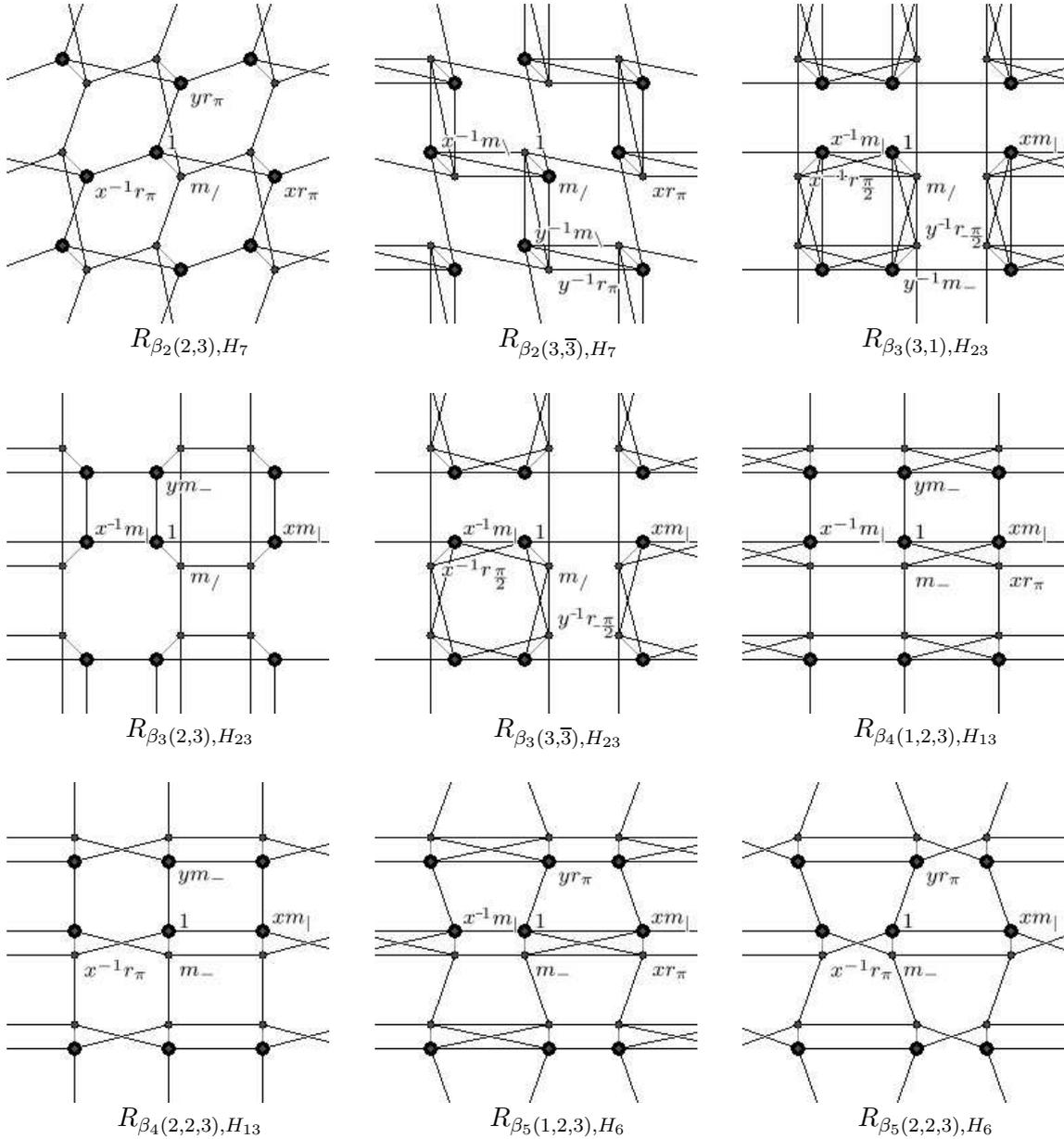
$$\begin{aligned}
R_{\beta_0(3), H_1} &\sim R_{H_1, \langle r \rangle, \{m \setminus, x, \bar{x}\}}, & R_{\beta_0(\bar{3}), H_1} &\sim R_{H_1, \langle r \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, y, ym \setminus, \bar{y}, \bar{y}m \setminus\}}, \\
R_{\beta_0(3), H_4} &\sim R_{H_4, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, ym \setminus\}}, & R_{\beta_0(\bar{3}), H_4} &\sim R_{H_4, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, x, \bar{x}m \setminus, \bar{x}y, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\}}, \\
R_{\beta_0(3), H_{19}} &\sim R_{H_{19}, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, ym \setminus\}}, & R_{\beta_0(\bar{3}), H_{19}} &\sim R_{H_{19}, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, x\bar{r}, \bar{x}m \setminus, \bar{x}\bar{r}, y\bar{r}, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\bar{r}\}}, \\
R_{\beta_{0.1}(4), H_{27}} &\sim R_{H_{27}, \langle m_- \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, ym \setminus, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_{0.2}(4), H_{29}} &\sim R_{H_{29}, 1, \{m \setminus, xm \setminus, y, ym \setminus, \bar{y}\}}, \\
R_{\beta_{0.3}(4), H_{31}} &\sim R_{H_{31}, 1, \{m \setminus, x\bar{r}, y\bar{r}, ym \setminus, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_1(3, 1), H_3} &\sim R_{H_3, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, y, ym \setminus, \bar{y}, \bar{y}m \setminus\}}, \\
R_{\beta_1(\bar{3}, 1), H_3} &\sim R_{H_3, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, x, \bar{x}m \setminus, \bar{x}y, ym \setminus, \bar{y}, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_1(3, 2), H_3} &\sim R_{H_3, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, y, \bar{y}\}}, \\
R_{\beta_1(\bar{3}, 2), H_3} &\sim R_{H_3, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, x, \bar{x}m \setminus, \bar{x}y, \bar{y}\}}, & R_{\beta_1(3, \bar{2}), H_3} &\sim R_{H_3, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, ym \setminus, \bar{y}m \setminus\}}, \\
R_{\beta_1(\bar{3}, \bar{2}), H_3} &\sim R_{H_3, \langle r\pi \rangle, \{m \setminus, x, \bar{x}m \setminus, \bar{x}ym \setminus, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_1(\bar{3}, 3), H_5} &\sim R_{H_5, 1, \{r\pi, x, \bar{x}r\pi, \bar{x}, y\bar{r}\pi\}}, \\
R_{\beta_1(3, 3), H_{10}} &\sim R_{H_{10}, 1, \{r\pi, x\bar{r}\pi, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_1(\bar{3}, 3), H_{10}} &\sim R_{H_{10}, 1, \{r\pi, x, \bar{x}r\pi, \bar{x}, \bar{y}m \setminus\}}, \\
R_{\beta_1(3, \bar{3}), H_{10}} &\sim R_{H_{10}, 1, \{r\pi, x\bar{r}\pi, ym \setminus, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_1(\bar{3}, \bar{3}), H_{10}} &\sim R_{H_{10}, 1, \{r\pi, x, \bar{x}r\pi, \bar{x}, ym \setminus, \bar{y}m \setminus\}}, \\
R_{\beta_1(\bar{3}, 3), H_{20}} &\sim R_{H_{20}, 1, \{r\pi, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, \bar{x}m \setminus, ym \setminus\}}, & R_{\beta_2(1, 3), H_7} &\sim R_{H_7, 1, \{m \setminus, x\bar{r}\pi, xm \setminus, \bar{x}r\pi, y\bar{r}\pi, ym \setminus\}}, \\
R_{\beta_2(1, \bar{3}), H_7} &\sim R_{H_7, 1, \{m \setminus, x\bar{r}\pi, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, y\bar{r}\pi, ym \setminus, \bar{y}r\pi, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_2(2, 3), H_7} &\sim R_{H_7, 1, \{m \setminus, x\bar{r}\pi, \bar{x}r\pi, y\bar{r}\pi\}}, \\
R_{\beta_2(\bar{2}, 3), H_7} &\sim R_{H_7, 1, \{m \setminus, xm \setminus, \bar{x}r\pi, ym \setminus\}}, & R_{\beta_2(2, \bar{3}), H_7} &\sim R_{H_7, 1, \{m \setminus, x\bar{r}\pi, \bar{x}m \setminus, y\bar{r}\pi, \bar{y}r\pi, \bar{y}m \setminus\}}, \\
R_{\beta_2(\bar{2}, \bar{3}), H_7} &\sim R_{H_7, 1, \{m \setminus, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, ym \setminus, \bar{y}r\pi, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_2(3, \bar{3}), H_7} &\sim R_{H_7, 1, \{m \setminus, x\bar{r}\pi, \bar{x}m \setminus, \bar{y}r\pi, \bar{y}m \setminus\}}, \\
R_{\beta_2(3', \bar{3}), H_7} &\sim R_{H_7, 1, \{m \setminus, \bar{x}m \setminus, y\bar{r}\pi, \bar{y}r\pi, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_3(3, 1), H_{23}} &\sim R_{H_{23}, 1, \{m \setminus, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, \bar{x}r, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\bar{r}\}}, \\
R_{\beta_3(\bar{3}, 1), H_{23}} &\sim R_{H_{23}, 1, \{m \setminus, x\bar{r}, \bar{x}m \setminus, \bar{x}r, ym \setminus, y\bar{r}, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\bar{r}\}}, & R_{\beta_3(2, 3), H_{23}} &\sim R_{H_{23}, 1, \{m \setminus, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, ym \setminus\}}, \\
R_{\beta_3(\bar{2}, 3), H_{23}} &\sim R_{H_{23}, 1, \{m \setminus, x\bar{r}, \bar{x}m \setminus, y\bar{r}\}}, & R_{\beta_3(2, \bar{3}), H_{23}} &\sim R_{H_{23}, 1, \{m \setminus, xm \setminus, \bar{x}r, ym \setminus, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\bar{r}\}}, \\
R_{\beta_3(\bar{2}, \bar{3}), H_{23}} &\sim R_{H_{23}, 1, \{m \setminus, x\bar{r}, \bar{x}r, y\bar{r}, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\bar{r}\}}, & R_{\beta_3(3, \bar{3}), H_{23}} &\sim R_{H_{23}, 1, \{m \setminus, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, \bar{x}r, y\bar{r}\}}, \\
R_{\beta_3(3', \bar{3}), H_{23}} &\sim R_{H_{23}, 1, \{m \setminus, \bar{x}m \setminus, \bar{x}r, ym \setminus, \bar{y}\bar{r}\}}, & R_{\beta_4(1, 2, 3), H_{13}} &\sim R_{H_{13}, 1, \{m_- , xm \setminus, x\bar{r}\pi, \bar{x}m \setminus, ym \setminus\}}, \\
R_{\beta_4(1, 2, \bar{3}), H_{13}} &\sim R_{H_{13}, 1, \{m_- , xm \setminus, x\bar{r}\pi, \bar{x}m \setminus, y, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\}}, & R_{\beta_4(1, \bar{2}, 3), H_{13}} &\sim R_{H_{13}, 1, \{m_- , xm \setminus, x\bar{r}\pi, \bar{x}r\pi, ym \setminus\}}, \\
R_{\beta_4(1, \bar{2}, \bar{3}), H_{13}} &\sim R_{H_{13}, 1, \{m_- , xm \setminus, x\bar{r}\pi, \bar{x}r\pi, y, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\}}, & R_{\beta_4(2, 2, 3), H_{13}} &\sim R_{H_{13}, 1, \{m_- , xm \setminus, \bar{x}r\pi, ym \setminus\}}, \\
R_{\beta_4(2, 2, \bar{3}), H_{13}} &\sim R_{H_{13}, 1, \{m_- , xm \setminus, \bar{x}r\pi, y, \bar{y}m \setminus, \bar{y}\}}, & R_{\beta_5(1, 2, 3), H_6} &\sim R_{H_6, 1, \{m_- , x\bar{r}\pi, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, y\bar{r}\pi\}}, \\
R_{\beta_5(1, 2, \bar{3}), H_6} &\sim R_{H_6, 1, \{m_- , x\bar{r}\pi, xm \setminus, \bar{x}m \setminus, ym \setminus, \bar{y}r\pi, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_5(1, \bar{2}, 3), H_6} &\sim R_{H_6, 1, \{m_- , x\bar{r}\pi, xm \setminus, \bar{x}r\pi, y\bar{r}\pi\}}, \\
R_{\beta_5(1, \bar{2}, \bar{3}), H_6} &\sim R_{H_6, 1, \{m_- , x\bar{r}\pi, xm \setminus, \bar{x}r\pi, ym \setminus, \bar{y}r\pi, \bar{y}m \setminus\}}, & R_{\beta_5(2, 2, 3), H_6} &\sim R_{H_6, 1, \{m_- , xm \setminus, \bar{x}r\pi, y\bar{r}\pi\}}, \\
R_{\beta_5(2, 2, \bar{3}), H_6} &\sim R_{H_6, 1, \{m_- , xm \setminus, \bar{x}r\pi, ym \setminus, \bar{y}r\pi, \bar{y}m \setminus\}}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость теоремы. \square

Кристаллографические реализации симметрических
2-расширений решетки Λ^2 класса I



Т а б л и ц а 8 (окончание)



6. Кристаллографические реализации

При естественном вложении решетки Λ^2 в евклидову аффинную плоскость каждая группа автоморфизмов $H \leq \text{Aut}(\Lambda^2)$ индуцируется единственной кристаллографической группой этой плоскости, которую мы будем обозначать через \tilde{H} . Изображения реализаций, приведенные в табл. 5, не являются инвариантными относительно соответствующих кристаллографических групп \tilde{H}_i . Цель данного раздела — построить для них другие изображения, которые уже будут инвариантны относительно соответствующих кристаллографических групп \tilde{H}_i .

Реализация $(\Gamma, G, \sigma, \varphi)$ симметрического 2-расширения решетки Λ^2 называется *кристаллографической* (см. [5]), если:

- (1) $V(\Gamma)$ — орбита некоторой кристаллографической группы евклидовой аффинной плоскости, индуцирующей на $V(\Gamma)$ группу G ;

(2) отображение φ сопоставляет каждому блоку его барицентр на евклидовой аффинной плоскости;

(3) для любой точки p из $V(\Gamma)$ расстояние от нее до барицентра содержащего ее блока системы σ меньше, чем расстояние от нее до любой вершины из $V(\Gamma)$, не лежащей в этом блоке.

Для реализации, заданной в виде $(\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}, \lambda_{H/L}(H), \sigma_{H,K,L}, \tilde{\varphi}_{H,K,L})$, естественный способ построения эквивалентной ей кристаллографической реализации заключается в следующем. На расстоянии $\varepsilon \in (0, 1/2)$ от точки $(0,0)$ на плоскости выбираем точку p , неподвижную относительно L и не являющуюся неподвижной относительно $K = H_{(0,0)}$. Кристаллографическая реализация получается из $(\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}, \lambda_{H/L}(H), \sigma_{H,K,L}, \tilde{\varphi}_{H,K,L})$ путем замены каждой вершины gL графа $\Gamma_{H,L,\mathcal{P}}$ вершиной $\tilde{g}(p)$.

Заметим, что этот способ не всегда осуществим из-за невозможности, вообще говоря, выбрать точку p с требуемыми свойствами (примером такой реализации служит $R_{H_1, \langle r_{\frac{\pi}{2}} \rangle, \{m \setminus, x, \bar{x}\}}$). Однако всегда удастся подобрать эквивалентную реализацию, для которой выбрать точку p уже можно (в данном примере можно взять реализацию $R_{H_{29}, 1, \{m \setminus, x, \bar{x}\}}$, см. первый фрагмент табл. 8).

В табл. 8 приведены кристаллографические реализации, эквивалентные реализациям, изображенным в табл. 5. При этом изоморфизм, посредством которого осуществляется эквивалентность, переводит вершины, изображенные левыми нижними точками в каждом блоке в табл. 5, в вершины, изображенные жирными точками в табл. 8. Кристаллографические реализации из табл. 8 получены описанным выше способом при $\varepsilon = 1/4$ из реализаций, приведенных в конце разд. 5, за исключением следующих пяти реализаций, которые были заменены эквивалентными им реализациями:

$$R_{H_1, \langle r \rangle, \{m \setminus, x, \bar{x}\}} \sim R_{H_{29}, 1, \{m \setminus, x, \bar{x}\}},$$

$$R_{H_4, \langle r_{\pi} \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, ym \setminus\}} \sim R_{H_4, \langle m / \rangle, \{m \setminus, xm \setminus, ym \setminus\}},$$

$$R_{H_{19}, \langle r_{\pi} \rangle, \{m \setminus, xm |, ym -\}} \sim R_{H_{19}, \langle m / \rangle, \{m \setminus, xm |, ym -\}},$$

$$R_{H_3, \langle r_{\pi} \rangle, \{m |, xm |, y, ym |, \bar{y}, \bar{y}m | \}} \sim R_{H_3, \langle m - \rangle, \{m |, xm |, y, ym |, \bar{y}, \bar{y}m | \}},$$

$$R_{H_3, \langle r_{\pi} \rangle, \{m |, xm |, y, \bar{y}\}} \sim R_{H_3, \langle m - \rangle, \{m |, xm |, y, \bar{y}\}}.$$

Отметим, что в табл. 8 приведены только 21 насыщенная кристаллографическая реализация симметрических 2-расширений решетки Λ^2 класса I, эквивалентные 21 реализации изображенной в табл. 5. Кристаллографические реализации, эквивалентные остальным 28 реализациям из табл. 5, получаются из кристаллографических реализаций, приведенных в табл. 8, с помощью преобразований частичного дополнения, естественным образом соответствующих преобразованиям частичного дополнения, указанным в табл. 5.

Авторы благодарны В. И. Трофимову за полезное обсуждение результатов настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Трофимов В.И.** Symmetrical extensions of graphs and some other topics in graph theory related with group theory // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 316–320.
2. **Неганова Е.А., Трофимов В.И.** Симметрические расширения графов // Изв. РАН. Сер. матемическая. 2014. Т. 78, № 4. С. 175–206.
3. **Трофимов В.И.** Конечность числа симметрических 2-расширений d -мерной решетки и сходных с ней графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 290–303.

4. Симметрические расширения графов и некоторые их приложения: доклад (14.09.2015) [e-resource] / В. И. Трофимов. URL: <http://www.imm.uran.ru/C13/Видео/default.aspx>.
5. **Трофимов В.И.** Несколько замечаний о симметрических расширениях графов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 284–293.
6. GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4.12: [e-resource]. 2008. URL: <http://www.gap-system.org>.

Коновальчик Елена Александровна

Поступила 1.10.2015

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

старший преподаватель

Магнитогорский государственный технический университет им. Г. И. Носова

e-mail: nega-le@yandex.ru

Костоусов Кирилл Викторович

канд. физ.-мат. наук

науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

kkoustousov@gmail.com

УДК 517.956.226

О ДВОЙНОМ ПОГРАНСЛОЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ¹**С. А. Кордюкова, Л. А. Калякин**

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при производных в случае, когда предельное алгебраическое уравнение имеет кратный корень. С использованием метода согласования построено асимптотическое разложение решения краевой задачи. Для описания асимптотики решения вблизи границы используются две погранслойные переменные с разными масштабами.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, малый параметр, асимптотика, погранслой, метод согласования.

S. A. Kordyukova, L. A. Kalyakin. On a double boundary layer in a nonlinear boundary value problem.

A nonlinear second order differential equation with a small parameter at derivatives is considered in the case when the limiting algebraic equation has a multiple root. The matching method is applied to construct an asymptotic expansion for the solution of the boundary value problem. Two boundary layer variables with different scale are used to describe the asymptotic solution near the boundary.

Keywords: nonlinear equation, small parameter, asymptotics, boundary layer, matching method.

1. Введение. Постановка задачи

Исследование математических моделей, которые описывают явление погранслоя в разных по происхождению задачах, составляет одно из важных и интересных направлений теории возмущений. Асимптотические разложения по малому параметру позволяют в таких задачах дать эффективные приближенные формулы и выявить структуру решения. Характерной чертой этого направления является использование многих масштабов. Для описания асимптотики в разных подобластях используются независимые переменные, которые по-разному масштабированы малым параметром. В частности, асимптотика решения вблизи границы описывается с использованием так называемых погранслойных (растянутых) переменных [1–3]. В краевых задачах для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений обычно возникает одна погранслойная переменная. Для нелинейных уравнений ситуация оказывается сложнее. Описание асимптотики вблизи границы иногда требует использования нескольких, по-разному растянутых, переменных. В этом смысле мы используем термин “двойной погранслой”. В постановке задачи Коши такие ситуации не редкость и исследовались давно. Простейший пример приведен в [2, с. 64], более сложные анализировались в [4; 5]. Однако краевые задачи имеют свою специфику, и результаты, известные для начальных задач, сюда не переносятся.

В данной работе исходным объектом является нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при производных

$$\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \mu [K(x, \mu)u + F(u, \varepsilon u_x, x, \mu)], \quad 0 < x < L, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1.1)$$

(при $\mu = \varepsilon^{1/2}$ либо $\mu = \varepsilon$) с краевыми условиями

$$u(0) = \alpha(\mu), \quad u(L) = \beta(\mu). \quad (1.2)$$

Функции $K(x, \mu)$, $F(u, z, x, \mu)$, а также $\alpha(\mu)$ и $\beta(\mu)$ предполагаются гладкими по всем переменным при $u^2 + z^2 \leq M < \infty$, $x \in [0, L]$, $\mu \in [0, \mu_0]$, $(M, \mu_0 = \text{const} > 0)$. Под гладкостью всюду

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00078).

понимается бесконечная дифференцируемость. Основные ограничения на исходные данные состоят в следующем:

$$K(x, 0) > 0; \quad \forall N > 0: F(0, 0, x, \mu), F_u(0, 0, x, \mu) = \mathcal{O}(\mu^N), \quad \mu \rightarrow 0; \quad \forall x \in [0, L]. \quad (1.3)$$

Целью работы является исследование асимптотики решения $u(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ вблизи границы. Имея в виду известные результаты по обоснованию [6; 7], мы ограничимся построением формального (асимптотического) решения. Под асимптотическим решением понимается ряд по степеням малого параметра, достаточно длинный отрезок которого дает при подстановке в уравнения невязку заданного порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^N)$.

В этом направлении обычно рассматриваются уравнения более общего вида

$$\varepsilon^2 u_{xx} = \mathcal{F}(u, \varepsilon u_x, x, \varepsilon), \quad 0 < x < L, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.4)$$

либо системы уравнений [3; 8; 9]. Задачи погранслоного типа выделяются тем, что решение имеет гладкий предел при $\varepsilon \rightarrow 0$, равномерно на любом компакте вне границ². В случае уравнения (1.4) такой предел совпадают с корнем предельного (алгебраического) уравнения $\mathcal{F}(u, 0, x, 0) = 0$. В автономном случае это будет положение равновесия (неподвижная точка). Корней может быть много, и не каждый корень соответствует решению погранслоного типа. Более того, может случиться, что ни один корень не подходит. Например, для модельного уравнения $\varepsilon^2 u_{xx} = u$ решения с нулевым пределом $u(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ существуют, а для уравнения $\varepsilon^2 u_{xx} = -u$ таких (погранслоных) решений не бывает. Появление погранслоя связано с наличием неустойчивых (седловых) точек равновесия в динамике системы вблизи границы. Для уравнений типа (1.4) имеются исчерпывающие результаты о погранслоных решениях, которые соответствуют простому корню [3]. Основные идеи можно усмотреть на примере уравнения, близкого к модельному: $\varepsilon^2 u_{xx} = u + \varepsilon f(u, \varepsilon)$. Ситуация здесь мало отличается от линейных задач; в частности, наличие погранслоного решения не зависит от структуры возмущения $f(u, \varepsilon)$.

Специфика рассматриваемой нами задачи (1.1), (1.2) обусловлена кратностью корня предельного уравнения $u = 0$. Подобные задачи рассматривались в ряде работ [7–9], где были обнаружены отличия от случая простого корня. Прежде всего, наличие погранслоя теперь зависит от структуры возмущения. Так, для примера $\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) справедлива тривиальная оценка $u_{xx}(x) \geq 1/\varepsilon$, которая показывает, что вторая производная любого решения в любой внутренней точке x не имеет предела при $\varepsilon \rightarrow +0$. Следовательно, погранслоных решений для этого уравнения не существует. Иная ситуация складывается в примере $\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon \ll 1$). Здесь предельное уравнение (при $\varepsilon = 0$) имеет тот же кратный корень $u = 0$. При учете возмущения ε обнаруживается расщепление этого корня $u_{\pm} = \pm\sqrt{\varepsilon}$. Корень u_+ соответствует седловой неподвижной точке возмущенного уравнения, и именно он представляет асимптотику решения вне погранслоя $u(x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^n) \quad \forall n$.

Второе принципиальное отличие задач с кратным корнем обнаруживается в структуре асимптотики решения в погранслое. Наиболее продвинутые результаты получены в работе [7], где было выявлено наличие нескольких масштабов внутри погранслоя. Предлагаемый там подход представляет собой обобщение метода погранслоных функций. Асимптотические формулы предъясняются в терминах решений модельного уравнения $\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \sqrt{\varepsilon}u$. Получаемые в этом подходе функции помимо одной выделенной погранслоной переменной содержат явную зависимость от малого параметра ε . Из-за этой зависимости возникает еще один погранслоный масштаб. Однако, асимптотика решения всей задачи (и даже модельного уравнения) не была вскрыта так, как это принято в теории возмущений. Более детальный анализ этого простейшего уравнения показывает, что задача оказывается с бисингулярным возмущением и для ее исследования более подходит метод согласования [2].

²Задачи с внутренними переходными слоями здесь не обсуждаются.

К уравнению (1.1) редуцируется более общая задача с кратным корнем предельного уравнения. Редукция описана в разд. 7, и она приводит к специфической структуре функций K, F . Для уравнения в общей форме (1.1) такая специфика закладывается в виде условий (1.3). Ограничения (1.3) не обременительны и означают, что в уравнении (1.1) линейная при $u \rightarrow 0$ часть возмущения выделена и имеет знакоопределенный коэффициент $K \neq 0$. Положительность K не принципиальна ввиду возможной замены искомой функции u на $u - \mu K$, после которой коэффициент при u меняет знак. Произвольность числа N означает, что тождественный нуль $u(x) \equiv 0$ является асимптотическим решением уравнения (1.1) с любой степенью точности. Этого можно добиться, выделяя в исходном уравнении внешнее (вне погранслоев) асимптотическое решение в виде ряда; детали этой конструкции приведены в разд. 7.

Поскольку исходные функции гладкие, то они разлагаются в асимптотические ряды

$$K(x, \mu) = K_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n K_n(x), \quad \mu \rightarrow 0, \quad F(u, z, x, \mu) = F_0(u, z, x) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n F_n(u, z, x), \quad \mu \rightarrow 0. \quad (1.5)$$

Условия (1.3) эквивалентны следующим:

$$K_0(x) > 0, \quad F_n(0, 0, x) = 0, \quad \partial_u F_n(0, 0, x) = 0 \quad \forall x \in [0, L], \quad \forall n. \quad (1.6)$$

При таких ограничениях задачу надо решать только в погранслоях. Задачи у разных частей границы оказываются схожими и ввиду быстрого убывания погранслойных функций не связаны между собой. Поэтому детально рассматривается ситуация только вблизи $x = 0$. Без ограничения общности можно считать, что коэффициент $K(x, \mu)$ обладает свойством $K(0, 0) = 1$, что влечет $K_0(0) = 1$. Этого всегда можно добиться подходящей нормировкой переменных, заменив u на $u \cdot K(0, 0)$ и x на $x \cdot \sqrt{K(0, 0)}$.

2. Анализ модельного уравнения

Чтобы прояснить структуру асимптотики в погранслое, полезно проанализировать пример, в котором можно выписать точное решение. Рассматривается задача, соответствующая (1.1), (1.2) с $\mu = \varepsilon^{1/2}$ и $F \equiv 0$:

$$\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \sqrt{\varepsilon} u, \quad 0 < x < L; \quad u|_{x=0} = \alpha, \quad u|_{x=L} = \beta, \quad \alpha, \beta = \text{const} > 0.$$

Легко видеть, что масштабным преобразованием $\zeta = \varepsilon^{-3/4} x$, $u(x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} v(\zeta, \varepsilon)$ можно убрать малый параметр из дифференциального уравнения, переведя его в краевое условие.

На этом пути приходим к задаче в погранслое

$$v_{\zeta\zeta} = v^2 + v, \quad 0 < \zeta < \infty; \quad v|_{\zeta=0} = \alpha/\sqrt{\varepsilon}, \quad v|_{\zeta \rightarrow \infty} = 0. \quad (2.1)$$

Характерной чертой погранслойной задачи является требование стремления к нулю по растянутой переменной на бесконечности. Решение такого типа существует. Более того, ввиду автономности уравнения решение содержит произвольный сдвиг ζ_0 по независимой переменной, и его можно записывать в разной форме:

$$v(\zeta) = 6 \frac{\exp(\zeta + \zeta_0)}{[\exp(\zeta + \zeta_0) - 1]^2} = 6 \frac{B}{(B - e^{-\zeta})^2} e^{-\zeta} = 6 [e^{\zeta/2} \sqrt{B} - e^{-\zeta/2} / \sqrt{B}]^{-2} \quad \forall B = \text{const} > 0. \quad (2.2)$$

Для выделения решения, гладкого на полуоси $\zeta > 0$, константа обязана удовлетворять требованию $B > 1$. Из краевого условия $v(0) = \alpha/\sqrt{\varepsilon}$ такая константа определяется однозначно:

$$B(\varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/4} \sqrt{\frac{9}{\alpha^2} \sqrt{\varepsilon} + \frac{6}{\alpha} + \frac{3}{\alpha} \sqrt{\varepsilon}}.$$

Запишем ее в виде $B(\varepsilon) = 1 + b(\varepsilon)$, выделив часть, малую при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$b(\varepsilon) = \varepsilon^{1/4} \sqrt{\frac{9}{\alpha^2} \sqrt{\varepsilon} + \frac{6}{\alpha}} + \frac{3}{\alpha} \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon^{1/4} b_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/4}), \quad b_0 = \sqrt{\frac{6}{\alpha}}.$$

Таким образом, точное решение задачи в погранслое (2.1) определяется формулой

$$v(\zeta, \varepsilon) = 6 \frac{1 + b(\varepsilon)}{[1 - e^{-\zeta} + b(\varepsilon)]^2} e^{-\zeta}. \quad (2.3)$$

Поскольку фигурирующая здесь функция $b(\varepsilon)$ будет гладкой относительно $\varepsilon^{1/4}$, то решение можно разложить в ряд по степеням, кратным $1/4$:

$$\sqrt{\varepsilon} v(\zeta, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/4} v_n(\zeta), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\zeta = x/\varepsilon^{3/4}). \quad (2.4)$$

Коэффициенты будут бесконечно дифференцируемыми при $\zeta > 0$ и быстро убывающими на бесконечности $v_n(\zeta) = \mathcal{O}(e^{-\zeta})$, $\zeta \rightarrow \infty$. Однако из-за того, что $b(0) = 0$, все коэффициенты имеют особенности при $\zeta \rightarrow 0$, порядок которых нарастает с номером: $v_n(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-2-n})$, и этот порядок особенности точный. В частности, $v_0(\zeta) = 6 \frac{e^{-\zeta}}{[1 - e^{-\zeta}]^2} = 6\zeta^{-2}[1 + \mathcal{O}(\zeta^2)]$, $\zeta \rightarrow 0$.

По этой причине полученный ряд является асимптотическим при $\varepsilon \rightarrow 0$ в области, отделенной от нуля $\zeta \gg \varepsilon^{1/4}$, что соответствует $x \gg \varepsilon$.

При малых ζ асимптотическое разложение строится в другой форме с использованием другой растянутой переменной $\xi = \zeta/\varepsilon^{1/4} = x/\varepsilon$. Для этого решение (2.3) переписывается в виде функции, зависящей от ξ :

$$w(\xi, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} v(\varepsilon^{1/4} \xi, \varepsilon) = 6\sqrt{\varepsilon} \frac{1 + b(\varepsilon)}{[1 - e^{-\varepsilon^{1/4} \xi} + b(\varepsilon)]^2} e^{-\varepsilon^{1/4} \xi}. \quad (2.5)$$

Обратим внимание, что выражение в знаменателе мало при $\varepsilon \rightarrow 0$ и имеет асимптотику $1 - e^{-\varepsilon^{1/4} \xi} + b(\varepsilon) = \varepsilon^{1/4}(\xi + b_0) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}(\xi + b_0)^2)$. Поэтому из соотношения (2.5) получается разложение

$$\sqrt{\varepsilon} v(\zeta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/4} w_n(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad (\xi = x/\varepsilon). \quad (2.6)$$

Главный член асимптотики определяется формулой

$$w_0(\xi) = 6 \frac{1}{(\xi + b_0)^2}, \quad b_0 = \sqrt{6/\alpha}.$$

В этой конструкции используется разложение экспоненты $\exp(-\varepsilon^{1/4} \xi)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому каждый коэффициент $w_n(\xi)$ содержит слагаемое в виде полинома $P_n(\xi)$ степени n с множителем $(\xi + b_0)^{-2}$. Можно проверить, что порядок роста $(n - 2)$ указан точно. Следовательно, коэффициенты растут на бесконечности $w_n(\xi) = \mathcal{O}(\xi^{n-2})$, $\xi \rightarrow \infty$. По этой причине построенный ряд будет асимптотическим на промежутке, не слишком большом $0 \leq \xi \ll \varepsilon^{-1/4}$, что соответствует $x \ll \varepsilon^{3/4}$. Нетрудно проверить, что функция $w(\xi, \varepsilon)$ является четной относительно $\varepsilon^{1/4}$. Поэтому в разложении (2.6) присутствуют лишь степени, кратные $1/2$: $w_n(\xi) \equiv 0$, $n = 4m \pm 1$, $m = 0, 1, \dots$

Таким образом, функция $\sqrt{\varepsilon} v(\zeta, \varepsilon)$, представляющая точное решение задачи в погранслое (2.1) вблизи $x = 0$, имеет асимптотические разложения, различные в разных подобластях. Эти разложения (2.4) и (2.6) асимптотически совпадают в области перекрытия: $\varepsilon \ll x \ll \varepsilon^{3/4}$. Аналогично строится асимптотика вблизи другого края $x = L$. Наличие особенностей в коэффициентах асимптотики связывается с термином *бисингулярное возмущение* [2].

Относительно более общих задач никаких формул для точного решения нет. Поэтому асимптотические ряды строятся формально из уравнений, и затем приводится обоснование асимптотики с доказательством существования решения. При этом на этапе формальных конструкций возможны разные подходы. Для рассматриваемого здесь класса задач была предложена идея использовать в конструкциях решение $v(\zeta, \varepsilon)$ модельной задачи (2.1), не вдаваясь в детали асимптотики этой функции по малому параметру [7]. В результате получается разложение в виде ряда

$$u(x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/4} v_n(\zeta, \varepsilon).$$

Для коэффициентов $v_n(\zeta, \varepsilon)$ структура асимптотик при $\varepsilon \rightarrow 0$ оставалась не вскрытой. Такую асимптотику можно находить из явных формул, как это показано выше, и на этом пути обнаружить разложения в форме рядов (2.4) и (2.6) с коэффициентами, которые не содержат явной зависимости от ε . Но такие выкладки не проделывались даже для первых поправок.

Другой подход состоит в том, чтобы сразу конструировать разложения вида (2.4) и (2.6), исходя из уравнений. Дополнительное требование асимптотического согласования рядов позволяет однозначно определить коэффициенты. Этот способ излагается в следующих разделах. Преимущество его — в простоте задач для коэффициентов асимптотики, которые получаются банальным приравнением выражений при одинаковых степенях ε . Здесь не нужны искусственные построения, приводимые в [7].

3. Первый (внутренний) погранслои

Вводится растянутая переменная $\xi = x/\varepsilon$, делается замена функции $u(x, \varepsilon) = w(\xi, \varepsilon)$, и задача переписывается в новых переменных на бесконечном промежутке. Уравнения выпишем в случае $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ (в этой конструкции содержится и случай $\mu = \varepsilon$):

$$w_{\xi\xi} = w^2 + \sqrt{\varepsilon} [K(\varepsilon\xi, \sqrt{\varepsilon})w + F(w, w_\xi, \varepsilon\xi, \sqrt{\varepsilon})], \quad 0 < \xi < \infty, \quad (3.1)$$

$$w|_{\xi=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \alpha_n, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad \alpha_0 > 0. \quad (3.2)$$

Исходные данные в этих уравнениях имеют разложение

$$K = 1 + \sqrt{\varepsilon} p_1 + \varepsilon p_2(\xi) + \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon^{n/2} p_n(\xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$F = \Phi_0(w, w_\xi) + \sqrt{\varepsilon} \Phi_1(w, w_\xi) + \varepsilon \Phi_2(w, w_\xi, \xi) + \sum_{n=3}^{\infty} \varepsilon^{n/2} \Phi_n(w, w_\xi, \xi), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Здесь $p_n(\xi), \Phi_n(w, w_\xi, \xi)$ — полиномы по ξ степени не выше $[n/2]$. Они получаются из (1.5) путем разложения функций по Тейлору при $x \rightarrow 0$. Например, $p_1 = K_1(0)$, $p_2(\xi) = K_2(0) + K'_0(0)\xi$, $\Phi_0 = F_0(w, w_\xi, 0)$, $\Phi_1 = F_1(w, w_\xi, 0)$, $\Phi_2 = F_2(w, w_\xi, 0) + \partial_x F_0(w, w_\xi, 0)\xi$.

Асимптотическое решение в первых членах строится по степеням, кратным $1/2$, а в старших поправках могут появиться степени, кратные $1/4$, и логарифмы:

$$W(\xi, \varepsilon) = W_0(\xi) + \varepsilon^{1/2} W_1(\xi) + \varepsilon W_2(\xi) + \varepsilon^{3/2} W_3(\xi) + \varepsilon^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0 \leq m \leq n} \varepsilon^{n/4} \ln^m \varepsilon W_{n,m}(\xi). \quad (3.3)$$

Коэффициенты определяются из рекуррентной системы задач, которая получается из (3.1), (3.2). Нелинейности встречаются только на первом шаге

$$\frac{d^2 W_0}{d\xi^2} = W_0^2, \quad \xi > 0, \quad W_0(0) = \alpha_0;$$

$$\frac{d^2 W_n}{d\xi^2} - 2W_0 W_n = G_n(\xi), \quad W_n(0) = \alpha_n \quad W_{2q,0} \equiv W_n, \quad n = q + 3 \geq 4;$$

$$\frac{d^2 W_{n,m}}{d\xi^2} - 2W_0 W_{n,m} = G_{n,m}(\xi), \quad W_{n,m}(0) = 0, \quad n \neq 2q \cup m \neq 0.$$

Логарифмы и степени, кратные $1/4$, возникают только из-за согласования со следующим масштабом. На соответствующие коэффициенты в младших порядках появляются однородные дифференциальные уравнения и неоднородные условия на бесконечности. Это приводит к ненулевым решениям. Правые части определяются через предыдущие приближения. Например, с учетом $K(0, 0) = 1$ получаем

$$G_1 = W_0(\xi) + \Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0), \quad G_{1,1} = 0,$$

$$G_2 = W_1^2(\xi) + W_1(\xi) + P_1 W_0(\xi) + \Phi_1(W_0, \partial_\xi W_0) + [W_1 \partial_W + \partial_\xi W_1 \partial_{W_\xi}] \Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0),$$

$$G_3 = 2W_1(\xi)W_2(\xi) + W_2(\xi) + p_1 W_1(\xi) + p_2(\xi)W_0(\xi) + \Phi_2(W_0, \partial_\xi W_0, \xi)$$

$$+ [W_2 \partial_W + \partial_\xi W_2 \partial_{W_\xi}] \Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0) + [W_1 \partial_W + \partial_\xi W_1 \partial_{W_\xi}] \Phi_1(W_0, \partial_\xi W_0)$$

$$+ \frac{1}{2} [W_1 \partial_W + \partial_\xi W_1 \partial_{W_\xi}]^2 \Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0).$$

3.1. Решение рекуррентной системы

Для нелинейного уравнения $w'' = w^2$ двухпараметрическое (общее) решение $w = w(\xi + c, E)$ выписывается через интеграл

$$\int_{w_0}^w \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta^3/3 - E}} = \xi + c \quad \forall E, \quad c = \text{const}, \quad w_0 = \text{const} \geq (3E/2)^{1/3}.$$

Поскольку при $E \neq 0$ интеграл ограничен равномерно по $w > w_0$, то отсюда следует, что любое решение стремится к бесконечности $w = w(\xi + c, E) \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow \hat{\xi}$ в конечной точке $\hat{\xi} = \xi(E, c) = \int_{w_0}^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{2\eta^3/3 - E}} - c$. Такие функции не будут гладкими на полуоси $\xi > 0$ и поэтому не подходят для описания погранслоя. Остается однопараметрическое семейство решений $w = 6/(\xi + c)^2$ с аргументом $\xi + c > 0$, соответствующее $E = 0$. При подходящем выборе константы c оно дает решение краевой задачи на исходном шаге:

$$W_0(\xi) = \frac{6}{(\xi + c)^2}, \quad c = \sqrt{6/\alpha_0}.$$

На последующих шагах решаются задачи для линеаризованного уравнения. Соответствующее однородное уравнение $\frac{d^2 w}{d\xi^2} - 2W_0 w = 0$ имеет пару решений: $W^-(\xi) = (\xi + c)^{-3}$, $W^+(\xi) = (\xi + c)^4$. Частное решение неоднородного уравнения на n -м шаге выписывается через интеграл, который удобно записать в виде

$$\tilde{W}_n(\xi) = \frac{1}{7} \int_0^\xi [W^+(\xi)W^-(\eta) - W^-(\xi)W^+(\eta)] G_n(\eta) d\eta.$$

Общее решение содержит пару констант интегрирования:

$$W_n(\xi) = A_n^- W^-(\xi) + A_n^+ W^+(\xi) + \tilde{W}_n(\xi), \quad A_n^\pm = \text{const}. \quad (3.4)$$

Для их нахождения используется краевое условие, которое приводит к соотношению $A_n^- c^{-3} + A_n^+ c^4 = \alpha_n$, а также условия согласования, которые обсуждаются ниже. На первых шагах константы A_n^+ при растущей функции $W^+(\xi)$ оказываются нулями. В старших приближениях эти константы будут ненулевыми, что наблюдается в простейшем примере. Кроме того, требование согласования со следующим погранслоем приводит к выявлению в асимптотике логарифмов и степеней, кратных $1/4$. Формулы для коэффициентов $W_{n,m}(\xi)$ выписываются аналогично. Появление логарифмов бывает связано неавтономности исходного уравнения. В приведенном выше автономном примере их нет.

Асимптотическую структуру коэффициентов удобно отслеживать, используя подходящие классы функций.

О п р е д е л е н и е 1. Обозначим через $\mathcal{M}_{p,q}$ множество бесконечно дифференцируемых функций $W(\xi)$ на полуоси $\xi \geq 0$, которые на бесконечности имеют степенную асимптотику (с логарифмами):

$$W(\xi) = \sum_{n=-p}^{\infty} \sum_{0 \leq m \leq q} w_{n,m} \xi^{-n} \ln^m \xi, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad w_{n,m} = \text{const.}$$

Этот класс состоит из функций, которые на бесконечности имеют ограниченную степень роста p и разлагаются в асимптотический ряд по отрицательным степеням. При интегрировании таких функций может повышаться как степень роста p , так и степень логарифма.

Лемма 1. Пусть правая часть принадлежит классу $\mathcal{M}_{p,q}$. Тогда любое решение линеаризованного уравнения $W(\xi) \in \mathcal{M}_{r,q+1}$, $r = \max\{4, p+2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из формулы для решения (3.4) с учетом интегрируемости степенной асимптотики. Четверка ($r \geq 4$) возникает из-за решения W^+ однородного уравнения.

3.2. Первые приближения

Выписанные выше формулы дают явные представления для коэффициентов асимптотического решения. Эти коэффициенты на каждом шаге содержат две неопределенные константы A^\pm , для которых краевое условие при $\xi = 0$ дает одно соотношение. Второе соотношение получается из условий на бесконечности при $\xi \rightarrow \infty$. В общем случае оно извлекается из соотношений согласования со вторым погранслоем. На первых шагах такое требование сводится к ограничению на рост в бесконечности.

При согласовании используется асимптотика коэффициентов при $\xi \rightarrow \infty$. Общую структуру асимптотики удобно отслеживать в терминах классов функций $\mathcal{M}_{p,q}$. Показатель p указывает на степень роста функции на бесконечности. Показатель q указывает на наличие степеней логарифмов. Следует отметить, что результаты по распределению степеней логарифмов в асимптотическом разложении коэффициентов $W_{n,m}(\xi)$ являются довольно грубыми. Их уточнение возможно, но в общем случае приводит к громоздким формулам, не имеющим принципиального значения. Между тем главный результат состоит в ограниченности степеней логарифма на каждом шаге, так что получаемые асимптотики носят степенной характер.

Исходными объектами являются формулы для нулевого приближения $W_0 = 6(\xi + c)^{-2}$ и для производной $W_0' = -12(\xi + c)^{-3}$. Ввиду их убывания по ξ любая гладкая функция двух переменных $\Phi(W_0, W_0')$, рассматриваемая как сложная функция от ξ , раскладывается в асимптотический ряд по обратным степеням ξ^{-j} . Причем если $\Phi(0, 0) = 0$, то разложение начинается с отрицательной степени $j \geq 1$. В таком подходе вычисление асимптотики функций $W_n(\xi)$ сводится к перемножению степеней ξ^i и вычислению интегралов от них. При этом могут появиться логарифмы $\ln \xi$, а на последующих шагах их степени. Ниже приведены результаты вычислений для первых трех поправок.

На исходном шаге $n = 0$ решение определяется однозначно $W_0(\xi) \in \mathcal{M}_{-2,0}$. На первом шаге $n = 1$ правая часть принадлежит тому же классу $G_1(\xi) \in \mathcal{M}_{-2,0}$. При этом надо учесть, что функция возмущения $\Phi_0(W_0, \partial_\xi W_0) = \mathcal{O}((W_0)^2 + |\partial_\xi W_0|)$ разлагается в асимптотический ряд Тейлора при $W_0, \partial_\xi W_0 \rightarrow 0$ и поэтому сложная функция имеет разложение на бесконечности

$$\Phi_0(W_0(\xi), \partial_\xi W_0(\xi)) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n \xi^{-n}, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad a_n = \text{const.}$$

Коэффициенты a_n вычисляются через коэффициенты Тейлора для Φ_0 и коэффициенты асимптотики $W_0(\xi)$ на бесконечности.

Выделим в интеграле $\tilde{W}_1(\xi)$, который определяет первую поправку, главный растущий член асимптотики в виде $\tilde{A}_1 W^+(\xi)$, где множитель определяется через сходящийся интеграл:

$$\tilde{A}_1 = \frac{1}{7} \int_0^{\infty} W^-(\eta) G_1(\eta) d\eta.$$

В таком случае оставшийся интеграл в $\tilde{W}_1(\xi)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_{0,1}$. Если теперь выбрать константу A_1^+ из условия $A_1^+ + \tilde{A}_1 = 0$, то с учетом краевого условия $A_1^+ c^{-4} + A_1^- c^3 = \alpha_1$ первая поправка $W_1(\xi) = A_1^- W^-(\xi) + A_1^+ W^+(\xi) + \tilde{W}_1(\xi)$ определяется однозначно в классе $\mathcal{M}_{0,1}$. Нетрудно выделить главный член асимптотики: $W_1(\xi) = -1/2 + \mathcal{O}(\xi^{-1})$, $\xi \rightarrow \infty$. В асимптотике этой функции может появиться слагаемое с логарифмом вида $-(a_5/7)(\xi + c)^{-3} \ln(\xi + c)$, если $a_5 \neq 0$. Таким образом, $W_1(\xi) \in \mathcal{M}_{0,1}$.

На последующих шагах наблюдается повышение степени роста $W_n(\xi) \in \mathcal{M}_{2n, n+1}$. При этом первые поправки ($n < 4$) в таких классах определяются однозначно, а последующие ($n \geq 4$) содержат произвол ввиду неопределенности в множителе A_n^+ при растущей функции $W^+(\xi)$.

В описанной процедуре не видно необходимости использования $\ln \varepsilon$ в асимптотическом решении. Такие члены возникают в процессе согласования. Формально их источником являются логарифмы в асимптотике на бесконечности $\ln \xi$, которые в новых переменных, например, $\zeta = \varepsilon^{1/4} \xi$ порождают $\ln \varepsilon$. Конечно, логарифмы возникают не всегда. Их нет в приведенном выше модельном примере, когда $K = \text{const}$, $F \equiv 0$. Однако уже в простейшем неавтономном уравнении с $K = 1 + x$, $F \equiv 0$ логарифмы обнаруживаются в старших поправках $W_n(\xi)$, $n > 5$.

4. Второй (промежуточный) погранслой

Асимптотическое решение в первом погранслое позволяет удовлетворить краевым условиям, но оно не согласуется с асимптотическим решением (нулем) во внешней области. В частности, отсутствует экспоненциальное убывание главного члена асимптотики $W_0(\xi) = 6(\xi + c)^{-2}$, а поправки растут при $\xi \rightarrow \infty$. Поэтому в промежуточной области строится асимптотика решения с использованием другой растянутой переменной. Масштабные преобразования здесь приводят к уравнению $v'' = v^2 + v$, которое имеет экспоненциально убывающие решения.

Выбор масштабов зависит от коэффициента μ при выделенной линейной части возмущения. Если $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, то вводится растянутая переменная $\zeta = x/\varepsilon^{3/4} = \varepsilon^{1/4} \xi$ и делается замена функции $u(x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} v(\zeta, \varepsilon)$. Задача переписывается в новых переменных на бесконечном промежутке:

$$v_\zeta \zeta = v^2 + K(\varepsilon^{3/4} \zeta, \sqrt{\varepsilon}) v + \varepsilon^{-1/2} F(\sqrt{\varepsilon} v, \varepsilon^{3/4} v_\zeta, \varepsilon^{3/4} \zeta, \sqrt{\varepsilon}), \quad 0 < \zeta < \infty. \quad (4.1)$$

Если $\mu = \varepsilon$, то надо вводить переменную $\zeta = x/\sqrt{\varepsilon} = \xi \varepsilon^{1/2}$ и делать замену функции $u(x, \varepsilon) = \varepsilon v(\zeta, \varepsilon)$. Уравнение приобретает похожий вид. Принципиальных отличий не возникает, поэтому мы сконцентрируем внимание на уравнении (4.1), т. е. на случае $\mu = \sqrt{\varepsilon}$.

Асимптотика исходных функций в (4.1) определяется разложениями Тейлора и имеет вид

$$K = 1 + \varepsilon^{1/2}\kappa_2 + \varepsilon^{3/4}\kappa_3\zeta + \sum_{n=4}^{\infty} \varepsilon^{n/4}P_n(\zeta), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\varepsilon^{-1/2}F = \varepsilon^{1/4}\phi_1v\zeta + \varepsilon^{1/2}\phi_2v^2 + \varepsilon^{3/4}\phi_3v v\zeta + \sum_{n=4}^{\infty} \varepsilon^{n/4}Q_n(v, v\zeta, \zeta), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В отличие от внутреннего слоя коэффициенты этих рядов являются полиномами от всех трех переменных $v, v\zeta, \zeta$. Коэффициенты полиномов вычисляются через производные исходных функций $K(x, \mu)$, $F(u, z, x, \mu)$. В частности, с учетом (1.6) получаем $\kappa_2 = K_\mu(0, 0)$, $\kappa_3 = K_x(0, 0)$, $\phi_1 = F_z(0, 0, 0, 0)$, $\phi_2 = \frac{1}{2}F_{uu}(0, 0, 0, 0)$, $\phi_3 = F_{u,z}(0, 0, 0, 0)$.

Асимптотическое решение строится в виде ряда по степеням, кратным $1/4$, с возможными добавками логарифмов:

$$V(\zeta, \varepsilon) = V_0(\zeta) + \varepsilon^{1/4}V_1(\zeta) + \varepsilon^{1/2}V_2(\zeta) + \varepsilon^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{0 \leq m \leq n} \varepsilon^{n/4} \ln^m \varepsilon V_{n,m}(\zeta). \quad (4.2)$$

Коэффициенты определяются из рекуррентной системы задач. Нелинейности встречаются только на исходном шаге:

$$\frac{d^2V_0}{d\zeta^2} = V_0^2 + V_0, \quad \frac{d^2V_n}{d\zeta^2} - 2V_0V_n - V_n = H_n(\zeta), \quad n < 4,$$

$$\frac{d^2V_{n,m}}{d\zeta^2} - 2V_0V_{n,m} - V_{n,m} = H_{n,m}(\zeta), \quad n \geq 1, \quad m \geq 0.$$

Правые части определяются через предыдущие приближения. Например,

$$H_1 = \phi_1V_0'(\zeta), \quad H_2 = V_1^2 + \kappa_2V_0 + \phi_1V_1'(\zeta) + \phi_2V_0^2(\zeta),$$

$$H_3 = 2V_1V_2 + \kappa_2V_1 + \kappa_3\zeta V_0 + \phi_1V_2'(\zeta) + \phi_2V_0V_1(\zeta) + \phi_3V_0V_0'(\zeta), \quad H_{1,1} = 0.$$

4.1. Решение рекуррентной системы уравнений

Для нелинейного уравнения $v\zeta = v^2 + v$ можно выписать общее решение, однако убывающим при $\zeta \rightarrow \infty$ будет только однопараметрическое решение (2.2) с произвольной константой B . В качестве главного члена асимптотики берется решение с $B = 1$:

$$V_0(\zeta) = 6 \frac{e^{-\zeta}}{(1 - e^{-\zeta})^2}.$$

Константа $B = 1$ выбрана здесь из согласования с асимптотикой в первом погранслое.

Для линеаризованного однородного уравнения $v\zeta - 2V_0(\zeta)v - v = 0$, $\zeta > 0$, легко выписывается пара решений. Одно из них соответствует производной от V_0 и будет экспоненциально убывать, другое выписывается через интеграл и будет экспоненциально расти:

$$V^-(\zeta) = \frac{1 + e^{-\zeta}}{(1 - e^{-\zeta})^3} e^{-\zeta} = e^{-\zeta}[1 + \mathcal{O}(e^{-\zeta})], \quad V^+(\zeta) = V^-(\zeta) \int_0^\zeta \frac{d\eta}{(V^-(\eta))^2} = \mathcal{O}(e^\zeta), \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Вроскиан на этой паре решений $W(V^-, V^+) = 1$. Заметим, что при $\zeta \rightarrow 0$ первая функция имеет особенность, а вторая будет гладкой:

$$V^-(\zeta) = \zeta^{-3}[1 + \mathcal{O}(\zeta)], \quad V^+(\zeta) = \frac{1}{7}\zeta^4[1 + \mathcal{O}(\zeta)], \quad \zeta \rightarrow 0.$$

Частное решение линеаризованного неоднородного уравнения $V_{\zeta\zeta} - 2V_0(\zeta)V - V = H_n(\zeta)$, $\zeta > 0$, выписывается через интегралы, которые сходятся ввиду экспоненциального стремления к нулю функции $V^-(\eta)$ на бесконечности:

$$\tilde{V}_n(\zeta) = -V^-(\zeta) \int_1^\zeta V^+(\eta)H_n(\eta) d\eta - V^+(\zeta) \int_\zeta^\infty V^-(\eta)H_n(\eta) d\eta.$$

Общее решение в классе убывающих функций определяется с точностью до константы и используется для решения рекуррентной системы:

$$V_n(\zeta) = B_n V^-(\zeta) + \tilde{V}_n(\zeta) \quad \forall B_n = \text{const.} \quad (4.3)$$

О п р е д е л е н е 2. Обозначим через $\mathcal{N}_{p,q}$ множество бесконечно дифференцируемых функций $V(\zeta)$ на полуоси $\zeta > 0$, которые на бесконечности имеют экспоненциальную оценку

$$\forall V(\zeta) \exists \nu, M \geq 0: |V(\zeta)| \leq M\zeta^\nu e^{-\zeta} \quad \forall \zeta > 1,$$

а в нуле — степенную асимптотику с особенностью конечного порядка

$$V(\zeta) = \sum_{n=-p}^{\infty} \sum_{0 \leq m \leq q} v_{n,m} \zeta^n \ln^m \zeta, \quad \zeta \rightarrow 0, \quad v_{n,m} = \text{const.}$$

При интегрировании таких функций порядок особенности будет уменьшаться, а степень логарифма может увеличиваться.

Лемма 2. Пусть правая часть принадлежит классу $\mathcal{N}_{p,q}$. Тогда любое убывающее решение линеаризованного уравнения $V(\zeta) \in \mathcal{N}_{r,q+1}$, $r = \max\{3, p - 2\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из формулы (4.3) с учетом интегрируемости степенной асимптотики и экспоненциального стремления к нулю функции $V^-(\eta)$ на бесконечности.

4.2. Первые приближения

Представленные выше формулы определяют коэффициенты $V_n(\zeta)$ асимптотического решения с точностью до констант B_n — множителей при решении однородного уравнения $V^-(\zeta)$. Эти константы будут определяться из требования согласования с внутренним погранслоем. При этом потребуются асимптотика функций $V_n(\zeta)$ в нуле при $\zeta \rightarrow 0$. Эту асимптотику можно отслеживать посредством введенных классов $\mathcal{N}_{p,q}$. Показатель p здесь — порядок особенности при $\zeta \rightarrow 0$, значение q соответствует степени логарифмов.

На исходном шаге $V_0 \in \mathcal{N}_{2,0}$. На следующем шаге правая часть H_1 получается дифференцированием и поэтому $H_1 \in \mathcal{N}_{3,0}$. Интеграл, который определяет первую поправку, будет более гладкой функцией из класса $\tilde{V}_1 \in \mathcal{N}_{1,1}$. Здесь в асимптотике обнаруживается логарифм в виде: $V^+(\zeta) \ln(\zeta)$. Общее решение задачи содержит решение однородного уравнения $V^- \in \mathcal{N}_{3,0}$, поэтому первая поправка $V_1 \in \mathcal{N}_{3,1}$. Из лемм 1, 2 вытекает, что на каждом шаге порядок особенности в нуле повышается на единицу и увеличивается степень логарифмов $V_n \in \mathcal{N}_{n+2,n}$.

5. Согласование

Вычисление коэффициентов асимптотического решения в каждом погранслое выглядит просто и алгоритмизуемо. Цель данного раздела — указать способ нахождения констант интегрирования A_n^\pm, B_n .

В процедуре согласования асимптотики можно выделить два этапа. На первом выписывается асимптотика двух построенных асимптотических решений $W(\xi, \varepsilon)$ при $\xi \rightarrow \infty$ и $\sqrt{\varepsilon}V(\zeta, \varepsilon)$ при $\zeta \rightarrow 0$. В результате получаются ряды по степеням и логарифмам параметра ε , которые переписываются в одной переменной, например в ζ . При этом используется связь переменных $\zeta = \varepsilon^{1/4}\xi$. На втором этапе эти ряды сравниваются между собой, и из требования их совпадения находятся неопределенные константы. Впрочем, полные разложения можно не выписывать, достаточно сравнивать слагаемые, содержащие неопределенности. Такие слагаемые с ξ^{-3} и ξ^4 содержатся в асимптотике $W(\xi, \varepsilon)$, а с ζ^{-3} — в асимптотике $V(\zeta, \varepsilon)$. На этапе сравнения удобно использовать таблицы [2, с. 48], но на первых шагах можно обойтись без них. Как это обычно бывает, оставшиеся слагаемые (которые не содержат произволов) совпадают автоматически (см. [2, с. 46]).

Главный член асимптотики во внутреннем слое определяется однозначно и имеет асимптотику на бесконечности, которая переписывается в переменной ζ :

$$W_0(\xi) = \frac{6}{\xi^2(1+c/\xi)^2} = \sqrt{\varepsilon} \frac{6}{\zeta^2} + \varepsilon^{3/4} w_3^0 \zeta^{-3} + \varepsilon w_4^0 \zeta^{-4} + \varepsilon^{5/4} w_5^0 \zeta^{-5} + \mathcal{O}(\varepsilon^{6/4} \zeta^{-6}), \quad w_3^0 = -12c.$$

Главный член асимптотики в промежуточном слое содержит неопределенную константу B , и для него выписывается асимптотика в нуле:

$$\sqrt{\varepsilon}V_0(\zeta) = \sqrt{\varepsilon} \frac{6B}{(B - e^{-\zeta})^2} e^{-\zeta} = \sqrt{\varepsilon} \frac{6B}{(B - 1 + \zeta + \mathcal{O}(\zeta^2))^2} [1 + \mathcal{O}(\zeta)], \quad \zeta \rightarrow 0.$$

Из требования совпадения этих разложений (в главном) определяется константа $B = 1$. После этого в промежуточном слое главный член полностью определен и для него можно выписать асимптотику в нуле:

$$\sqrt{\varepsilon}V_0(\zeta) = \sqrt{\varepsilon} \sum_{n=-2}^{\infty} v_n^0 \zeta^n, \quad \zeta \rightarrow 0, \quad v_n^0 = \text{const.}$$

В частности, здесь присутствует слагаемое $\varepsilon^{1/2} v_4^0 \zeta^4$ с коэффициентом $v_4^0 = -1/1008 \neq 0$. Заметим, что в следующих поправках $\varepsilon^{1/2+p/4} V_p(\zeta)$ подобные слагаемые входят с более высокими степенями параметра: $\varepsilon^{1/2+p/4} \zeta^4$, $p > 1$.

Первая поправка во внутреннем слое $\sqrt{\varepsilon}W_1(\xi)$ содержит растущее слагаемое

$$(A_1^+ + \tilde{A}_1) \sqrt{\varepsilon} W^+(\xi) = \mathcal{O}(\xi^4)$$

с неопределенной константой A_1^+ . Поскольку подобного члена $\sqrt{\varepsilon} \xi^4 = \varepsilon^{-1/2} \zeta^4$ нет в промежуточном слое, то должно выполняться соотношение $A_1^+ + \tilde{A}_1 = 0$, из которого находится неопределенная константа A_1^+ . После этого первая поправка во внутреннем слое определяется однозначно и для нее выписывается разложение на бесконечности $\sqrt{\varepsilon}W_1(\xi) = \sqrt{\varepsilon} [w_0^1 + w_1^1 \xi^{-1} + w_2^1 \xi^{-2} + \xi^{-3} [w_3^1 + w_{3,1}^1 \ln \xi] + \mathcal{O}(\xi^{-4})]$ с вполне определенными коэффициентами w_j^1 и $w_{3,1}^1$.

Аналогично в следующей поправке $\varepsilon W_2(\xi)$ для растущего слагаемого вида $\varepsilon \xi^4 = \zeta^4$ нет похожего в промежуточном слое. Поэтому $A_2^+ + \tilde{A}_2 = 0$ и вторая поправка определяется однозначно. Асимптотика для нее содержит растущие члены:

$$\varepsilon W_2(\xi) = \varepsilon [w_{-2}^2 \xi^2 + w_{-1}^2 \xi + w_0^2 + w_1^2 \xi^{-1} + w_2^2 \xi^{-2} + \xi^{-3} [w_3^2 + w_{3,1}^2 \ln \xi + w_{3,2}^2 \ln^2 \xi] + \mathcal{O}(\xi^{-4})].$$

Следующие поправки содержат похожие слагаемые с более высокими степенями ε . В них обнаруживается влияние промежуточного разложения. Первый раз это случается для W_3 при определении константы $A_3^+ = -\tilde{A}_3 + v_4^0$. Как видим, главный член промежуточного разложения определяет третью поправку внутреннего разложения.

С другой стороны, внутреннее разложение определяет промежуточное с похожим сдвигом по номерам приближений. Принципиальную роль при этом играют слагаемые с множителем ξ^{-3} . В промежуточном слое они определяют множители $B_3, B_{3,m}$ при $V^-(\zeta) \approx \zeta^{-3}$. Для

этого во внутреннем разложении после перехода к ζ выделим члены при ζ^{-3} . Из первых членов $W_0(\xi) + \sqrt{\varepsilon}W_1(\xi) + \varepsilon W_2(\xi) + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2} \ln \varepsilon)$, таким образом, выделяется выражение

$$\zeta^{-3} \left(\varepsilon^{3/4} w_3^0 + \varepsilon^{5/4} w_3^1 - \varepsilon^{5/4} w_{3,1}^1 \frac{1}{4} \ln \varepsilon + \varepsilon^{7/4} w_3^2 - \varepsilon^{7/4} w_{3,1}^2 \frac{1}{4} \ln \varepsilon - \varepsilon^{7/4} w_{3,2}^1 \frac{1}{16} \ln^2 \varepsilon \right). \quad (5.1)$$

Последующие поправки дают слагаемые с более высокими степенями ε .

Полученное выражение надо сравнить с похожим членом в промежуточном разложении. Проанализируем там структуру первых приближений. В уравнении для первой поправки правая часть $H_1(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{-3})$, $\zeta \rightarrow 0$. Поэтому сингулярная часть в асимптотике первой поправки выделяется в форме

$$V_1(\zeta) = (B_1 + \tilde{B}_1)V^-(\zeta) + \mathcal{O}(1), \quad \tilde{B}_1 = \int_0^1 V^+(\eta)H_1(\eta) d\eta.$$

Имея в виду асимптотику для $V^-(\zeta)$, это соотношение можно переписать в виде

$$V_1(\zeta) = (B_1 + \tilde{B}_1)\zeta^{-3} + \mathcal{O}(\zeta^{-2}), \quad \zeta \rightarrow 0.$$

На каждом последующем шаге n добавляется решение однородного уравнения $B_n V^-(\zeta)$ с неопределенной константой B_n . Поэтому в асимптотике каждой поправки содержится слагаемое с такой константой в форме $(B_n + \tilde{B}_n)\zeta^{-3}$ при том, что \tilde{B}_n вычисляется через предыдущие приближения и известно настолько, насколько известны B_m , $m < n$. Помимо того, в (5.1) содержатся логарифмы $\ln \varepsilon$. Поэтому логарифмы приходится вводить в промежуточном разложении. Структура слагаемого с ζ^{-3} в разложении $\sqrt{\varepsilon}V(\zeta, \varepsilon)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \zeta^{-3} \varepsilon^{1/2} \left(\varepsilon^{1/4} (B_1 + \tilde{B}_1) + \varepsilon^{2/4} (B_2 + \tilde{B}_2) + \varepsilon^{3/4} (B_3 + \tilde{B}_3) + \varepsilon^{3/4} B_{3,1} \ln \varepsilon + \varepsilon^{4/4} (B_4 + \tilde{B}_4) \right. \\ & \left. + \varepsilon^{5/4} (B_5 + \tilde{B}_5) + \varepsilon^{5/4} [B_{5,1} + \tilde{B}_{5,1}] \ln \varepsilon + \varepsilon^{5/4} B_{5,2} \ln^2 \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Из сравнения с (5.1) получаются соотношения $B_1 + \tilde{B}_1 = w_3^0$, $B_2 + \tilde{B}_2 = 0, \dots, B_3 + \tilde{B}_3 = w_3^1, \dots, B_{3,1} = w_{3,1}^1$, $B_4 + \tilde{B}_4 = 0, \dots$, из которых однозначно находятся константы промежуточного разложения на первых шагах $n \leq 5$.

Для построения более старших членов асимптотики надо определить константу A_p^+ в очередном члене внутреннего разложения $p > 3$, используя построенное внешнее приближение. После этого можно выписать продолжение формулы (5.1) на старшие степени ε и использовать ее для определения констант $B_{n,m}$ на очередном шаге.

Нетрудно понять, что появление логарифмов $\ln \varepsilon$ в промежуточном слое инициирует в дальнейшем их появление во внутреннем с членов порядка $\varepsilon^{9/4} \ln \varepsilon$. Однако $\ln \varepsilon$ и степени $\varepsilon^{n/4}$, кратные $1/4$, появляются во внутреннем слое вследствие согласования на более ранних этапах. Этот эффект аналогичен рассмотренному выше. Как видно из формулы для частного решения, в асимптотике первой поправки $V_1(\zeta)$ содержатся слагаемые вида $\zeta^4 [v_0 + v_1 \ln \zeta]$, $v_0, v_1 = \text{const} \neq 0$. В асимптотическом решении $\varepsilon^{1/2} V(\zeta, \varepsilon)$ эти слагаемые дают $\varepsilon^{1/2} \varepsilon^{1/4} \zeta^4 [v_0 + v_1 \ln \zeta] = \varepsilon^{7/4} \xi^4 [v_0 + v_1 \frac{1}{4} \ln \varepsilon + v_1 \ln \xi]$. Сравнение с разложением во внутреннем слое приводит к включению слагаемого

$$\varepsilon^{7/4} \left[v_0 + v_1 \frac{1}{4} \ln \varepsilon \right] W^+(\xi).$$

На последующих шагах рекуррентные формулы для $W_{n,m}(\xi)$ и для $V_{n,m}(\zeta)$ приводят к дополнительному появлению логарифмов, а также их степеней. В силу структуры рекуррентных формул повышение степеней логарифмов на каждом шаге ограничено единицей.

После того как слагаемые с произвольными константами согласованы и эти константы определены, асимптотические решения совпадают в области перекрытия [2]. На этом конструирование асимптотического решения заканчивается.

6. Результат

Итогом выполненных построений является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функции $K(x, \mu)$ и $F(u, z, x, \mu)$ — гладкие и удовлетворяют условиям (1.3); $\alpha(\mu), \beta(\mu) > 0$ при $0 < \mu < \mu_0$. Тогда для краевой задачи (1.1), (1.2) с $\mu = \varepsilon^{1/2}$ (либо с $\mu = \varepsilon$) асимптотическое решение при $\varepsilon \rightarrow 0$ строится в виде погранслойных разложений

$$u(x, \varepsilon) = \left\{ \begin{array}{l} W(\xi, \varepsilon), \quad 0 \leq x \ll \varepsilon \mu^{-1/2} \\ V(\zeta, \varepsilon), \quad x \gg \varepsilon \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \tilde{W}(\xi, \varepsilon), \quad 0 \leq L - x \ll \varepsilon \mu^{-1/2} \\ \tilde{U}(\zeta, \varepsilon), \quad L - x \gg \varepsilon \end{array} \right\}.$$

Коэффициенты погранслойных рядов W, V из (3.3), (4.2) (и похожих рядов \tilde{W}, \tilde{V}) зависят от соответствующих растянутых переменных $\xi = x/\varepsilon$, $\zeta = x/\varepsilon \mu^{-1/2}$ (соответственно $\tilde{\xi} = (L-x)/\varepsilon$, $\tilde{\zeta} = (L-x)/\varepsilon \mu^{-1/2}$) и определяются однозначно из стандартных дифференциальных уравнений с крайвыми условиями и с условиями согласования.

Обоснование асимптотики приведено в [7]. Отметим, что обоснование асимптотики для рассмотренного класса задач возможно не всегда, контрпримеры приведены в [10]. В частности, для примера с постоянными коэффициентами, приведенного в разд. 2, возможно построение формальной асимптотики, которая не соответствует никакому точному решению. Понятно, что такая конструкция отличается от представленной в разд. 2, где асимптотическое разложение извлекается из явной формулы для точного решения.

7. Происхождение исходной задачи

Хотя исходное уравнение (1.1) с множителем $\mu = \varepsilon^{1/2}$ либо $\mu = \varepsilon$ выглядит специфическим, к нему сводится более общая задача. В этом разделе показана возможность редукции к (1.1) и появления разных множителей μ в связи с задачей о двойном погранслое.

7.1. Редукция к уравнению (1.1)

Чтобы сконцентрировать внимание на методике, мы ограничимся в качестве исходного уравнением, которое обычно изучается в этом круге задач:

$$\varepsilon^2 \tilde{v}_{yy} = h(y)[\tilde{v} - \varphi(y)]^2 + \varepsilon \tilde{g}(\tilde{v}, \varepsilon \tilde{v}_y, y, \varepsilon), \quad 0 < y < l, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (7.1)$$

Здесь выделено слагаемое, ответственное за кратный корень предельного уравнения. Существенным ограничением является требование глобальности кратного корня, что содержится в дополнительном условии $h(y) \neq 0 \quad \forall y \in [0, l]$. Ввиду возможной замены $\tilde{v} \Rightarrow -\tilde{v}$ можно считать, что $h(y) > 0$.

Переход к (1.1) выполняется в два этапа. На первом делается замена переменных

$$\tilde{v}(y) - \varphi(y) = v(x), \quad x = \int_0^y \sqrt{h(\zeta)} d\zeta \Leftrightarrow y = y(x).$$

В итоге получается уравнение типа (1.1)

$$\varepsilon^2 v_{xx} = v^2 - \varepsilon g(v, \varepsilon v_x, x, \varepsilon), \quad 0 < x < L = \int_0^l \sqrt{h(\zeta)} d\zeta \quad (7.2)$$

с гладкой функцией возмущения

$$g(v, \varepsilon v_x, x, \varepsilon) = \frac{1}{h(y)} \tilde{g}(v + \varphi(y), \varepsilon v_x \sqrt{h(y)} + \varepsilon \varphi'(y), y, \varepsilon) - \varepsilon v_x \frac{h'(y)}{2\sqrt{h(y)}} - \varepsilon \varphi''(y) \Big|_{y=y(x)}.$$

На втором этапе уточняются условия, при которых задача будет погранслошной. В отличие от случая простого корня структура уравнения (7.2) не гарантирует существования погранслошного решения при произвольном возмущении εg ; это показано на примере $\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + \varepsilon$. Существование таких решений возможно лишь при дополнительных ограничениях на возмущение $g(v, z, x, \varepsilon)$.

Из уравнения (7.2) видно, что погранслошное решение, если существует, обязано стремиться к нулю: $v(x, \varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в любой фиксированной точке $x \in (0, L)$. Скорость этого стремления по порядку малого параметра оценивается величиной $\mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon})$. Можно догадаться, что влияние возмущения определяется главным членом асимптотики функции $g(v, 0, x, \varepsilon)$ при $v, \varepsilon \rightarrow 0$. Формулируемые ниже условия в автономном случае соответствуют требованию существования седловой неподвижной точки у линеаризованного (при $v \rightarrow 0$) уравнения.

Линеаризованная часть функции g определяется выражением $g(0, 0, x, \varepsilon) + v g_v(0, 0, x, \varepsilon) + \varepsilon v_x g_z(0, 0, x, \varepsilon)$. Рассмотрим соответствующее алгебраическое уравнение (без учета производной εv_x)

$$v^2 - v \varepsilon g_v(0, 0, x, \varepsilon) - \varepsilon g(0, 0, x, \varepsilon) = 0.$$

Его корни даются формулами

$$v_{\pm}(x, \varepsilon) = \frac{1}{2} \left[\varepsilon g_v(0, 0, x, \varepsilon) \pm \sqrt{\varepsilon^2 (g_v(0, 0, x, \varepsilon))^2 + 4\varepsilon g(0, 0, x, \varepsilon)} \right].$$

Корни должны быть действительные при всех малых ε и $x \in [0, L]$. Более того, требуется, чтобы корни были различные, т. е. накладывается условие

$$\varepsilon (g_v(0, 0, x, \varepsilon))^2 + 4g(0, 0, x, \varepsilon) > 0, \quad x \in [0, L]. \quad (7.3)$$

Наличие двух корней позволяет сделать замену функций $v - v_+(x, \varepsilon) = u$, и с учетом тождества $v^2 - v \varepsilon g_v(0, 0, x, \varepsilon) - \varepsilon g(0, 0, x, \varepsilon) \equiv (v - v_+)(v - v_-)$ свести уравнение к форме, похожей на (1.1):

$$\varepsilon^2 u_{xx} = u^2 + [k(x, \varepsilon)u + \varepsilon f(u, \varepsilon u_x, x, \varepsilon)], \quad 0 < x < L. \quad (7.4)$$

Коэффициент k определяется формулой

$$k(x, \varepsilon) = v_+ - v_- = \sqrt{\varepsilon^2 (g_v(0, 0, x, \varepsilon))^2 + 4\varepsilon g(0, 0, x, \varepsilon)}. \quad (7.5)$$

Для оставшейся части возмущения получается выражение

$$f(u, \varepsilon u_x, x, \varepsilon) = [g(v, \varepsilon v_x, x, \varepsilon) - v g_v(0, 0, x, \varepsilon) - g(0, 0, x, \varepsilon)] \Big|_{v=v_+(x, \varepsilon)+u}.$$

Если исходное возмущение гладкое при $\varepsilon \rightarrow 0$ и разлагается в асимптотический ряд Тейлора, в частности

$$g(0, 0, x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n g_n(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad g_0(x) = g(0, 0, x, 0),$$

то функции k, f могут иметь разложение либо по целым, либо по полуцелым степеням параметра ε . Структура асимптотики зависит от возмущения в главном члене $g_0(x)$. В ситуации общего положения $g_0(x) = g(0, 0, x, 0) \neq 0$. Тогда имеет место

Лемма 3. Пусть в уравнении (7.1) $h(y) > 0$ и возмущение \tilde{g} на корне $\varphi(y)$ предельного уравнения не обращается в нуль: $\tilde{g}(\varphi(y), 0, y, 0) > 0$. Тогда (7.1) редуцируется к уравнению (1.1) с $\mu = \varepsilon^{1/2}$, $K = \varepsilon^{-1/2}k$, $F = \sqrt{\varepsilon}f$ и со свойством

$$K(x, 0) > 0, \quad F(0, 0, x, 0) \equiv F_u(0, 0, x, 0) \equiv F_{\mu}(0, 0, x, 0) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, L]. \quad (7.6)$$

Доказательство. При условиях леммы $g_0(x) = g(0, 0, x, 0) = \tilde{g}(\varphi(y), 0, y, 0) \neq 0$. В подкоренном выражении (7.5) главным членом асимптотики при $\varepsilon \rightarrow 0$ будет $4\varepsilon g(0, 0, x, 0)$. Тогда при малых ε условие (7.3) редуцируется к требованию на главный член асимптотики: $g(0, 0, x, 0) > 0$, $x \in [0, L]$. Формулу (7.5) можно переписать в виде

$$k(x, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon (g_u(0, 0, x, \varepsilon))^2 + 4g_0 + 4[f(0, 0, x, \varepsilon) - g(0, 0, x, 0)]} \equiv \sqrt{\varepsilon} K(x, \varepsilon).$$

Для определенной таким образом функции $K(x, \varepsilon)$ получается разложение, указанное в (1.5):

$$K(x, \varepsilon) = K_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n K_n(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad K_0(x) = 2\sqrt{g_0} = 2\sqrt{g(0, 0, x, 0)}.$$

Таким образом, в случае $g(0, 0, x, 0) > 0$ функции $k(x, \varepsilon)$ разлагаются по полуцелым степеням, а разложение для функции $u_+(x, \varepsilon) = 1/2 [\varepsilon g_u(0, 0, x, \varepsilon) + k(x, \varepsilon)]$ содержит как целые, так и полуцелые степени. Тогда для f получается разложение вида

$$f(u, z, x, \varepsilon) = f_0(u, x) + \sqrt{\varepsilon} f_1(u, x) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^{n/2} f_n(u, z, x), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.7)$$

Очевидно, эта функция является гладкой по параметру $\sqrt{\varepsilon} = \mu$ при $\mu \rightarrow 0$. Поэтому уравнение (7.4) переписывается в форме (1.1) с функцией $F(u, z, x, \mu) = \mu f(u, z, x, \mu^2)$.

Нетрудно выявить структуру первых коэффициентов разложения для F . Она извлекается из формулы (7.7) с учетом $F(u, z, x, \mu) = \mu f_0(u, x) + \mathcal{O}(\mu^2)$. Главный член этого разложения имеет асимптотику $f_0(u, x) = \mathcal{O}(u^2)$, $u \rightarrow 0$; отсюда следует выполнение свойств (7.6). Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть в уравнении (7.1) $h(y) > 0$ и возмущение \tilde{g} на корне $\varphi(y)$ предельного уравнения обращается в нуль: $\tilde{g}(\varphi(y), 0, y, 0) = 0$. Если $(\tilde{g}_u(\varphi(y), 0, y, 0))^2 + 4\tilde{g}(\varphi(y), 0, y, 0) > 0$, то (7.1) редуцируется к уравнению (1.1) с $\mu = \varepsilon$, $K = \varepsilon^{-1}k$, $F = f$ и со свойством (7.6).

Доказательство. В этом случае $f_0 = f(0, 0, x, 0) = 0$. Подкоренное выражение в (7.5) имеет порядок не ниже $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. При этом если отличен от нуля следующий член в разложении: $f_1 = f_\varepsilon(0, 0, x, 0) \neq 0$ либо $f_u(0, 0, x, 0) \neq 0$, то условие (7.3) для малых ε редуцируется так: $(f_u(0, 0, x, 0))^2 + 4f_\varepsilon(0, 0, x, 0) > 0$. Это требование эквивалентно условию леммы.

Формулу (7.5) можно переписать в виде

$$k(x, \varepsilon) = \varepsilon \sqrt{(f_u(0, 0, x, \varepsilon))^2 + 4f_1(x) + 4\varepsilon^{-1}[f(0, 0, x, \varepsilon) - \varepsilon f_1(x)]}.$$

Поскольку в разложении для f отсутствует главный член: $f_0 = 0$, то $\varepsilon^{-1}[f(0, 0, x, \varepsilon) - \varepsilon f_1(x)] = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Теперь разложение для функции k получается по целым степеням:

$$k(x, \varepsilon) = \varepsilon \left[k_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n k_n(x) \right], \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad k_0(x) = \sqrt{(f_u(0, 0, x, 0))^2 + 4f_1(x)}.$$

Соответственно выписывается разложение для $F = f$ в виде

$$F(u, \varepsilon u_x, x, \varepsilon) = F_0(u, x) + \varepsilon F_2(u, u_x, x) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n F_{2n}(u, u_x, x).$$

Структура первых коэффициентов извлекается из разложения для f : $F_0(u, x) = F(u, 0, x, 0) = \mathcal{O}(u^2)$, $u \rightarrow 0$, $F_1(u, u_x, x) = \mathcal{O}(u) + \mathcal{O}(u_x)$, $u, u_x \rightarrow 0$. Следовательно, свойство (7.6) выполнено. Лемма доказана.

7.2. Внешнее разложение

Итак, при наличии кратного корня уравнение (7.1) можно преобразовать к виду (1.1) со свойством (7.6). Покажем, что возможно преобразование к уравнению с более жесткими ограничениями на возмущение в форме (1.3).

Теорема 2. Пусть для уравнения (7.1) выполнены условия либо леммы 3, либо леммы 4. Тогда краевая задача для уравнения (7.1) сводится к задаче (1.1), (1.2) с условиями (1.3).

Доказательство состоит в выделении из решения так называемого внешнего разложения (асимптотики вне погранслоев). По сути дела, это будет продолжение той конструкции, которая выполнялась выше и привела к уравнению со свойством (7.6).

Структура внешнего разложения определяется функциями K, F . Для них имеет место разложение в асимптотические ряды Тейлора (1.5) с той разницей, что с учетом (7.6) свойство (1.6) для коэффициентов F_n выполняется лишь в первых членах асимптотики

$$F_0(0, 0, x) = 0, \quad \partial_u F_0(0, 0, x) = 0, \quad F_1(0, 0, x) = 0.$$

В зависимости от того, $\mu = \varepsilon^{1/2}$ или $\mu = \varepsilon$, внешнее разложение строится по дробным либо целым степеням параметра ε . В любом случае его можно искать в виде асимптотического ряда

$$U(x, \varepsilon) = \varepsilon U_2(x) + \varepsilon^{3/2} U_3(x) + \sum_{n=4}^{\infty} \varepsilon^{n/2} U_n(x), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Коэффициенты вычисляются по рекуррентным формулам. В частности, в случае $\mu = \varepsilon^{1/2}$

$$U_2 = -\frac{F_2(0, 0, x)}{K_0(x)}, \quad U_3 = -\frac{1}{K_0(x)} [U_2^2(x) + K_1(x)U_2 + \partial_u F_1(0, 0, x)U_2 + F_3(0, 0, x)].$$

В случае $\mu = \varepsilon$ дробные степени отсутствуют и рекуррентные формулы немного меняются.

Поскольку $U(x, \varepsilon)$ — асимптотическое решение уравнения, то после замены $u = U(x, \varepsilon) + \tilde{u}$ тождественный нуль $\tilde{u} \equiv 0$ является асимптотическим решением редуцированного уравнения для \tilde{u} с любой степенью точности, например $\mathcal{O}(\varepsilon^{2N+1})$. В таком случае в уравнении для \tilde{u} функция возмущения $\tilde{F}(\tilde{u}, \varepsilon \tilde{u}_x, x, \mu) = \mathcal{O}(\mu^N)$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$, т. е. обладает свойствами (1.3). Теорема доказана.

Построенное внешнее разложение $U(x, \varepsilon)$ асимптотически удовлетворяет дифференциальному уравнению, но не краевым условиям. Вблизи границы асимптотика решения дополняется рядами с коэффициентами, зависящими от растянутых переменных. При этом вне погранслоя эта часть решения должна быстро стремиться к нулю. Как раз такие погранслои асимптотики построены в основной части данной работы.

З а м е ч а н и е. В качестве исходной задачи с кратным корнем предельного уравнения можно рассмотреть общее уравнение (1.4) вместо (7.1). При построении асимптотики отлечения возникают лишь во внутреннем слое с характерной переменной $\xi = x/\varepsilon$. Здесь на исходном шаге для $w_0(\xi)$ надо решать автономное уравнение $w_{\xi\xi} = \mathcal{F}(w, w_{\xi}, 0, 0)$, которое может оказаться неинтегрируемым из-за наличия первой производной. Впрочем, и в интегрируемом случае решения редко выписываются в элементарных функциях. Это обстоятельство не является преградой для конструирования асимптотики по малому параметру методом согласования. Для реализации этого метода нужны лишь асимптотики на бесконечности при $\xi \rightarrow \infty$, а не явные формулы для $w_0(\xi)$. Поэтому описанный выше подход годится для широкого класса уравнений (1.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, вып. 5 (77). С. 3–122.
2. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
3. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Вышш. шк., 1990. 208 с.
4. **Ильин А.М., Леонычев Ю.А., Хачай О.Ю.** Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с малым параметром и с особой начальной точкой // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 1. С. 81–102.
5. **Ильин А.М., Хачай О.Ю.** Структура пограничных слоев в сингулярных задачах // Докл. АН. 2012. Т. 445, № 3. С. 256–258.
6. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.** Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 799–851.
7. **Бутузов В.Ф.** Об особенностях пограничного слоя в сингулярно возмущенных задачах с кратным корнем вырожденного уравнения // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 1. С. 68–80.
8. **Васильева А.Б., Пилюгин В.С.** Сингулярно возмущенные краевые задачи с пограничным слоем степенного типа // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 43, № 3. С. 314–324.
9. **Васильева А.Б.** Двухточечная краевая задача для сингулярно возмущенного уравнения при наличии кратных корней вырожденного уравнения // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 6. С. 1067–1079.
10. **Калякин Л.А.** Фиктивные асимптотические решения // Уфим. мат. журн. 2014 Т. 6, № 2. С. 45–66.

Кордюкова Светлана Алексеевна
канд. физ.-мат. наук
доцент

Поступила 16.11.2015

Уфимский государственный университет экономики и сервиса
e-mail: sveta.kor05@mail.ru

Калякин Леонид Анатольевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
гл. научн. сотрудник
Институт математики с ВЦ РАН
e-mail: klenru@mail.ru

УДК 517.956

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ПЕРЕГИБА ГРАНИЦЫ¹

Е. Ф. Леликова

В работе исследуется асимптотическое поведение решения первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка в случае, когда малый параметр входит множителем только при одной из старших производных, а предельное уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением. Хотя порядок предельного уравнения тот же самый, что и у исходного уравнения, рассматриваемая задача является бисингулярной. В работе асимптотическое поведение решения этой задачи исследуется методом согласования асимптотических разложений.

E. F. Lelikova. On the asymptotics of a solution to an equation with a small parameter in a neighborhood of a point of inflexion.

We study the asymptotic behavior of the first boundary value problem for a second-order elliptic equation in the case where the small parameter is a factor at only one of the highest derivatives and the limit equation is an ordinary differential equation. Although the limit equation has the same order as the original equation, the problem under consideration is bisingular. We investigate the asymptotic behavior of this problem using the method of matched asymptotic expansions.

Введение

Исследуется поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ решения первой краевой задачи:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u &= \varepsilon u_{xx} + u_{yy} + b(x, y)u_y + a(x, y)u = f(x, y), \quad (x, y) \in D \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, y) &= h(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \quad (0.1)$$

в ограниченной области D с границей Γ , которая имеет точку перегиба. Предполагается, что параметр $\varepsilon > 0$, коэффициенты и правая часть уравнения (0.1) — достаточно гладкие функции. Предполагается также, что существует ограниченное решение задачи (0.1), которое обозначается через $u_\varepsilon(x, y)$, и для этого решения справедлива оценка

$$|u_\varepsilon(x, y)| \leq M \left(\max_{(x, y) \in D} |f(x, y)| + \max_{(x, y) \in \Gamma} |h(x, y)| \right), \quad (0.2)$$

где постоянная M не зависит от ε . (Это условие выполнено, например, при $a(x, y) \leq \alpha < 0$.)

Сингулярные краевые задачи с малым параметром при старших производных изучались очень давно. При этом обычно порядок предельного уравнения был меньше порядка допредельного уравнения. Такие задачи подробно изучены в статьях [1; 2] и в монографиях [3–5].

Здесь рассматривается менее изученный случай, в котором малый параметр входит множителем только при одной из старших производных, так что порядок предельного уравнения тот же самый, как и исходного уравнения. Тем не менее исследуемая задача является сингулярно возмущенной. Коэффициенты стандартного внешнего разложения имеют особенности в точках некоторых “особых” подмножеств области D , и порядки этих особенностей растут вместе с

¹Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект 14-01-00322) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.А03.21.0006 от 27.08.2013).

номером приближения. Задачи такого рода весьма сложны; в [5] они называются бисингулярными. Асимптотика решения имеет различный вид в разных подобластях рассматриваемой области. Одним из таких "особых" подмножеств является лежащий в области D отрезок прямой параллельной оси y , проходящей через точку перегиба границы Γ .

Методом согласования асимптотических разложений [4; 5] строится асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности описанного выше "особого" подмножества. Другие случаи, при которых порядок уравнения сохраняется, но асимптотика имеет бисингулярный характер, исследованы в [6; 7] (две независимые переменные), [8; 9] (три независимые переменные). Краткое изложение результатов данной статьи приведено в работе [10].

Метод согласования состоит из двух частей, не ависимых, вообще говоря, друг от друга. В первой части строятся формальные асимптотические решения (ФАР) исходной задачи в различных подобластях рассматриваемой области изменения независимых переменных, т. е. строятся согласованные между собой асимптотические ряды по некоторым последовательностям функций параметра ε , частичные суммы которых с достаточно высокой степенью точности (по ε) удовлетворяют исходному уравнению и граничному условию в этих подобластях. Далее из частичных сумм этих ФАР строится составное разложение, являющееся ФАР исходной задачи уже всюду в рассматриваемой области изменения переменных. Во второй части метода согласования проводится обоснование построенного разложения, т. е. доказательство того, что построенное ФАР является асимптотическим представлением решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для задач, аналогичных рассматриваемой, в которых для обратного оператора исходной задачи справедлива соответствующая оценка (например, оценка (0.2)), обоснование построенного ФАР не вызывает трудностей и достаточно подробно описано в работе [5]. Поэтому основным содержанием данной работы является построение ФАР в окрестностях рассматриваемого особого множества.

Будем считать, что точка перегиба границы совпадает с началом координат, а граница Γ области D в некоторой фиксированной окрестности начала координат

$$D_\delta = \{(x, y) \in D, \quad -\delta \leq x \leq \delta, \quad \delta > 0\}$$

совпадает с кривой $x = y^3$ и гладкой кривой $y = \gamma(x)$, лежащей в верхней полуплоскости. Кроме того, будем считать, что при $-\delta \leq x \leq \delta$ кривые $x = y^3$ и $y = \gamma(x)$ не пересекаются, т. е. $\gamma(x) > x^{1/3}$. Таким образом, $D_\delta = \{(x, y) \in D, \quad -\delta \leq x \leq \delta, \quad x^{1/3} < y < \gamma(x)\}$. Не ограничивая общности, будем предполагать, что граничная функция $h(x, y) \equiv 0$.

В данной работе строится асимптотическое разложение решения задачи (0.1) только в области D_δ . Для того чтобы построить асимптотическое разложение решения всюду в области D , надо воспользоваться проведенными ранее исследованиями поведения этого решения в окрестностях других возможных "особых" подмножеств (см. [6; 11] — внешнее касание границы, [7] — угловые точки на границе).

1. Внешнее разложение и его особенности

Внешнее разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ будем строить в виде

$$U(x, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k(x, y). \quad (1.1)$$

Подставляя ряд (1.1) в уравнение (0.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему рекуррентных соотношений

$$L_0 u_0 = f(x, y), \quad L_0 u_k = -\frac{\partial^2 u_{k-1}}{\partial x^2}, \quad k \geq 1, \quad (1.2)$$

где $L_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(x, y)$.

Кроме того, асимптотический ряд (1.1) должен обращаться в нуль ($h(x, y) = 0$) на той части границы области D_δ , которая совпадает с границей Γ исходной области D , т. е.

$$u_k(x, \gamma(x)) = 0, \quad u_k(x, x^{1/3}) = 0. \tag{1.3}$$

Соотношения (1.2) — это обыкновенные дифференциальные уравнения по переменной y , т. е. для того чтобы получить решения этих уравнений, надо проинтегрировать их вдоль отрезков прямых, параллельных оси y и лежащих в области D_δ , задав соответствующим образом граничные условия в точках пересечения этих прямых с границей Γ области D . Предполагается, что для решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1.2) справедливы оценки, аналогичные оценке (0.2).

Очевидно, что в силу условий (1.3) функции $u_k(x, y)$ зависят от границ $y = \gamma(x)$, $y = x^{1/3}$. Поскольку правые части рекуррентных соотношений (1.2) являются производными по переменной x от “предыдущих” функций $u_{k-1}(x, y)$, функции $u_k(x, y)$ имеют особенности на прямой, проходящей через точку перегиба, т. е. на оси y .

Теорема 1. *При $x \rightarrow 0$, $x^{1/3} \leq y \leq \gamma(x)$ функции $u_k(x, y)$ разлагаются в асимптотические ряды*

$$u_0(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/3} u_{0j}(y), \quad u_k(x, y) = x^{(1-6k)/3} \sum_{j=0}^{\infty} x^{j/3} u_{kj}(y), \quad k \geq 1. \tag{1.4}$$

Ряды (1.4) допускают почленное дифференцирование любого порядка.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $u_0(x, y)$. Эта функция является решением обыкновенного дифференциального уравнения (1.2) по переменной y : $L_0 u_0 = f(x, y)$. Будем искать ее асимптотическое представление при $x \rightarrow 0$ в виде ряда (1.4). Подставляя этот ряд в первое из уравнений (1.2), разлагая коэффициенты $b(x, y)$, $a(x, y)$ и правую часть $f(x, y)$ в ряды Тейлора в окрестности прямой $x = 0$ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему рекуррентных соотношений для определения функций $u_{0j}(y)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_0^{(0)} u_{00} = f(0, y), \quad L_0^{(0)} u_{01} = 0, \quad L_0^{(0)} u_{02} = 0, \\ L_0^{(0)} u_{0,3j+k} = - \sum_{i=1}^j \frac{1}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0, y) \frac{du_{0,3(j-i)+k}}{dy} - \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0, y) u_{0,3(j-i)+k} \right], \quad k = 1, 2, \quad j \geq 1. \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Здесь обозначено $L_0^{(0)} = \frac{d^2}{dy^2} + b(0, y) \frac{d}{dy} + a(0, y)$.

Функция $u_0(x, y)$ по построению удовлетворяет краевым условиям (1.3), т. е. обращается в нуль при $y = x^{1/3}$ и $y = \gamma(x)$. Потребуем, чтобы асимптотический ряд (1.4) при $x \rightarrow 0$ также удовлетворял этим условиям.

Рассмотрим сначала границу $y = x^{1/3}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} u_{0i}(x^{1/3}) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{d^l u_{0i}}{dy^l}(0) \frac{x^{l/3}}{l!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} x^{m/3} \left[\sum_{j=0}^m \frac{d^{m-j} u_{0j}}{dy^{m-j}}(0) \frac{1}{(m-j)!} \right] \equiv \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} B_i^{(0)}. \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при $x^{i/3}$, получаем $B_i^{(0)} = 0$ или, что то же самое,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{00}(0) = 0, \quad u_{01}(0) = - \frac{du_{00}}{dy}(0), \dots, \\ u_{0i}(0) = - \left[\frac{du_{0,i-1}}{dy}(0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 u_{0,i-2}}{dy^2}(0) + \dots + \frac{1}{i!} \frac{d^i u_{0,0}}{dy^i}(0) \right], \quad i \geq 2. \end{array} \right. \tag{1.6}$$

Поступим аналогичным образом и на второй границе $y = \gamma(x)$, т.е. потребуем, чтобы ряд (1.4) при $x \rightarrow 0$ обращался в нуль на этой границе:

$$0 = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} u_{0i}(\gamma(x)) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} u_{0i}(\gamma(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j x^j) = \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j x^j \right)^l \equiv \sum_{i=0}^{\infty} x^{i/3} A_i^{(0)}.$$

Здесь γ_j — коэффициенты Тейлора в разложении функции $\gamma(x)$ в окрестности начала координат. Приравнявая нулю коэффициенты при $x^{i/3}$ в получившемся соотношении, имеем $A_i^{(0)} = 0$ или, что то же самое,

$$\begin{cases} u_{00}(\gamma(0)) = 0, & u_{01}(\gamma(0)) = 0, & u_{02}(\gamma(0)) = 0, & u_{03}(\gamma(0)) = -\frac{du_{00}}{dy}(\gamma(0)), \\ u_{0q}(\gamma(0)) = \sum_{i=1}^{[i/3]} \alpha_i^{(q)} \frac{d^i u_{0,q-3i}}{dy^i}(\gamma(0)). \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь $\alpha_i^{(q)}$ — некоторые константы, рекуррентно зависящие от значений производных функции $\gamma(x)$ в точке $\gamma(0)$.

Итак, определим коэффициенты $u_{0j}(y)$ ряда (1.4) как решения уравнений (1.5) в области $0 < y < \gamma(0)$, удовлетворяющие краевым условиям (1.6), (1.7) при $y = 0$, $y = \gamma(0)$. Согласно предположению исходной задачи такие функции существуют и бесконечно дифференцируемы. Рассмотрим частичную сумму ряда (1.4): $S_N(x, y) = \sum_{j=0}^{3N} x^{j/3} u_{0j}(y)$, где N — достаточно большое натуральное число. По построению для разности $\sigma_N = u_0(x, y) - S_N(x, y)$ справедливы соотношения $L_0 \sigma_N = O(x^{N+1/3})$, $x^{1/3} < y < \gamma(x)$, $\sigma_N(x, \gamma(x)) = O(x^{N+1/3})$, $\sigma_N(x, x^{1/3}) = O(x^{N+1/3})$. В силу оценки, аналогичной оценке (0.2), в области $x^{1/3} \leq y \leq \gamma(x)$ справедливо соотношение $u_0(x, y) - S_N(x, y) = O(x^{N+1/3})$, т.е. ряд (1.4), коэффициенты которого определены как решения задач (1.5)–(1.7), является асимптотическим разложением функции $u_0(x, y)$ при $x \rightarrow 0$. Можно доказать, что аналогичные оценки справедливы и для производных функции $\sigma_N(x, y)$. Для функции $u_0(x, y)$ утверждение теоремы доказано.

Для следующих функций $u_k(x, y)$, $k \geq 1$, справедливость асимптотического разложения (1.4) доказывается аналогично. При этом нетрудно проследить, что все следующие функции $u_k(x, y)$, $k \geq 1$, имеют особенности при $x \rightarrow 0$. Действительно, уже функция $u_1(x, y)$ имеет особенность порядка $x^{-5/3}$ при $x \rightarrow 0$, поскольку она является решением уравнения $L_0 u_1 = -(u_0)_{xx}$, и согласно только что доказанному асимптотическое разложение при $x \rightarrow 0$ правой части этого уравнения начинается с члена, имеющего порядок $x^{-5/3}$. \square

2. Внутреннее разложение в окрестности прямой $x = 0$

В окрестности оси $x = 0$ перейдем от переменной x к новой, внутренней, переменной $\zeta = x\varepsilon^{-1/2}$ и будем строить внутреннее асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$V(\zeta, y, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/6} v_k(\zeta, y). \quad (2.1)$$

Стандартным образом, т.е. переходя в исходном уравнении (0.1) к переменной ζ , разлагая коэффициенты $b(x, y)$, $a(x, y)$ и правую часть $f(x, y)$ в ряды Тейлора в окрестности прямой $x = 0$, заменяя в получившихся разложениях x на $\sqrt{\varepsilon}\zeta$ и приравнявая коэффициенты при

одинаковых степенях ε , приходим к системе рекуррентных соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} L_1 v_0 = f(0, y), \quad L_1 v_1 = 0, \quad L_1 v_2 = 0, \\ L_1 v_{3j} = \frac{\zeta^j}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(0, y) - \sum_{i=1}^j \frac{\zeta^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0, y) \frac{\partial v_{3j-3i}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0, y) v_{3j-3i} \right], \quad j \geq 1, \\ L_1 v_{3j+m} = - \sum_{i=1}^j \frac{\zeta^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial x^i}(0, y) \frac{\partial v_{3j+m-3i}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial x^i}(0, y) v_{3j+m-3i} \right], \quad m = 1, 2, \quad j \geq 1, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

где обозначено $L_1 = \Delta_{\zeta, y} + b(0, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(0, y)$.

В переменных ζ, y уравнение нижней границы $y = x^{1/3}$ принимает вид $y = \varepsilon^{1/6} \zeta^{1/3}$, а уравнение верхней границы $y = \gamma(x) - y = \gamma(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \varepsilon^{i/2} \zeta^i$, и, таким образом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ окрестность прямой $x = 0$ в переменных ζ, y переходит в бесконечную полосу

$$\Omega_0 = \{\zeta, y : 0 < y < \gamma(0)\}.$$

Потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на кривой $y = \varepsilon^{1/6} \zeta^{1/3}$, имеем

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/6} v_k(\zeta, \varepsilon^{1/6} \zeta^{1/3}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/6} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \varepsilon^{i/6} \frac{\partial^i v_k}{\partial y^i}(\zeta, 0) \varepsilon^{i/6} \zeta^{i/3} \right].$$

Приравнявая нулю коэффициенты при степенях ε , получаем граничные условия на оси ζ :

$$v_0(\zeta, 0) = 0, \quad v_1(\zeta, 0) = - \frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, 0) \zeta^{1/3}, \quad v_k(\zeta, 0) = - \sum_{l=1}^k \frac{1}{l!} \frac{\partial^l v_{k-l}}{\partial y^l}(\zeta, 0) \zeta^{1/3}. \quad (2.3)$$

Далее, потребовав, чтобы асимптотический ряд (2.1) формально удовлетворял граничному условию исходной задачи на границе $y = \gamma(x)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/6} v_k(\zeta, \gamma(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/6} v_k \left(\zeta, \gamma(0) + \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i \varepsilon^{i/2} \zeta^i \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k/6} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m v_k}{\partial y^m}(\zeta, \gamma(0)) \left[\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{i/2} \zeta^{i/2} \gamma_i \right]^m \right), \end{aligned}$$

получим граничные условия для коэффициентов $v_k(\zeta, y)$ на прямой $y = \gamma(0)$:

$$v_k(\zeta, \gamma(0)) = S_k(\zeta), \quad (2.4)$$

где граничная функция $S_k(\zeta)$ — полином от ζ степени $[k/3]$.

Итак, необходимо построить функции $v_k(\zeta, y)$ — решения эллиптических уравнений (2.2) в полосе Ω_0 , удовлетворяющие на границах этой полосы условиям (2.3), (2.4).

Очевидно, что функция $v_0(\zeta, y)$ бесконечно дифференцируема. Граничная же функция для решения $v_1(\zeta, y)$ согласно соотношению (2.3) имеет вид $v_1(\zeta, 0) = \phi(\zeta) \zeta^{1/3}$ и не является гладкой, ее производные становятся неограниченными в окрестности начала координат. Решение $v_2(\zeta, y)$ становится неограниченным в начале координат. Все следующие функции $v_k(\zeta, y)$ также имеют особенности в начале координат, причем нетрудно проследить, что с увеличением номера k порядок особенностей функций $v_k(\zeta, y)$ растет. Следовательно, асимптотическое разложение (2.1) становится непригодным в окрестности начала координат и там необходимо строить другое асимптотическое разложение. Кроме того, так же, как в аналогичных задачах (см. например, [5]), в классе неограниченных функций решения задач (2.2), (2.3), (2.4) определяются неединственным образом, и поэтому асимптотическое разложение (2.1) может быть построено только после исследования асимптотического поведения решения $u_\varepsilon(x, y)$ в окрестности начала координат.

3. Внутреннее асимптотическое разложение в окрестности начала координат

В окрестности начала координат перейдем от переменных x, y к новым внутренним переменным $\xi = x\varepsilon^{-3/4}$, $\eta = y\varepsilon^{-1/4}$ и будем строить еще одно внутреннее асимптотическое разложение решения $u_\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$W(\xi, \eta, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} \sum_{j=0}^{k-1} (\ln \varepsilon)^j w_{kj}(\xi, \eta). \quad (3.1)$$

Заменяя коэффициенты $b(x, y)$, $a(x, y)$ и правую часть $f(x, y)$ рядами Тейлора в окрестности начала координат и переходя в этих представлениях от переменных x, y к внутренним переменным ξ, η , придем к представлениям

$$b(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} B_k(\xi, \eta), \quad a(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} A_k(\xi, \eta), \quad f(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k/4} F_k(\xi, \eta),$$

где $B_k(\xi, \eta)$, $A_k(\xi, \eta)$, $F_k(\xi, \eta)$ — полиномы вида $\sum_{j=0}^{[k/3]} \beta_j^{(k)} \eta^{k-3j} \xi^j$.

Стандартным образом, т. е. переходя в исходном уравнении (0.1) к внутренним переменным ξ, η , заменяя коэффициенты $b(x, y)$, $a(x, y)$ и правую часть $f(x, y)$ выписанными выше разложениями в окрестности начала координат и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим, что коэффициенты внутреннего разложения (3.1) должны удовлетворять в области Ω_1 системе рекуррентных соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_{1,0} = 0, \quad \Delta w_{2,0} = F_0 - B_0 \frac{\partial w_{1,0}}{\partial \eta}, \\ \Delta w_{k,0} = F_{k-2} - \sum_{j=0}^{k-2} B_j \frac{\partial w_{k-1-j,0}}{\partial \eta} - \sum_{j=0}^{k-3} A_j w_{k-2-j,0}, \quad k \geq 3, \\ \Delta w_{2m+1,m} = 0, \quad \Delta w_{2m+2,m} = -B_0 \frac{\partial w_{2m+1,m}}{\partial \eta}, \quad m > 0, \\ \Delta w_{2m+s,m} = -\sum_{j=0}^{s-2} B_j \frac{\partial w_{2m+s-1-j,m}}{\partial \eta} - \sum_{j=0}^{s-3} A_j w_{2m+s-2-j,m}, \quad m > 0, \quad s \geq 3. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Кривая $y = x^{1/3}$ в новых переменных примет вид $\eta = \xi^{1/3}$, а область D_δ в окрестности начала координат перейдет в неограниченную область $\Omega_1 = \{\xi, \eta : \xi \in \mathbb{R}^1, \eta > \xi^{1/3}\}$.

Поскольку в предположениях задачи граничная функция $h(x, y) \equiv 0$, для функций $w_{k,j}$ при всех k, j на границе области Ω_1 должны быть выполнены соотношения

$$w_{k,j}(\xi, \xi^{1/3}) = 0. \quad (3.3)$$

Соотношениями (3.2), (3.3) функции $w_k(\xi, \eta)$ — решения задач в неограниченной области Ω_1 , вообще говоря, не определяются однозначно. Необходимо задать еще некоторые дополнительные условия для этих функций при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$, которые должны быть получены из условий согласования асимптотических разложений (1.1) и (3.1). Построение функций $w_k(\xi, \eta)$ и $v_k(\zeta, y)$ проводится одновременно. Эта ситуация типична для сингулярно возмущенных задач (см. [4; 5]).

4. Вспомогательные построения

Пусть r, θ — полярные координаты на плоскости ζ, y . Для целых k будем рассматривать функции

$$U_{k,0}^{(1)}(\zeta, y) = r^{k/3} \sin \frac{k\theta}{3}, \quad U_{k,0}^{(2)}(\zeta, y) = r^{k/3} \cos \frac{k\theta}{3}. \quad (4.1)$$

При $k = 3n$, $n \geq 0$, функции $U_{k,0}^{(j)}$ — это гармонические полиномы. Будем в дальнейшем использовать для них обозначения $P_n^{(j)}(\zeta, y)$, т. е.

$$P_n^{(1)}(\zeta, y) = U_{3n,0}^{(1)}(\zeta, y), \quad P_n^{(2)}(\zeta, y) = U_{3n,0}^{(2)}(\zeta, y), \quad n \geq 0.$$

Функции $U_k^{(j)}(\zeta, y)$ — сопряженные гармонические функции в плоскости (ζ, y) с разрезом вдоль положительной полуоси ζ :

$$\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial y} = -\frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial \zeta}. \quad (4.2)$$

Из явных формул (4.1) легко получаются соотношения $\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial y} = \frac{k}{3}U_{k-3,0}^{(2)}$, $-\frac{\partial U_{k,0}^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial U_{k,0}^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{k}{3}U_{k-3,0}^{(1)}$, а также соотношения

$$\begin{aligned} \zeta U_{k,0}^{(1)} &= \frac{1}{2}U_{k+3,0}^{(1)} + \frac{1}{2}r^2U_{k-3,0}^{(1)}, & \zeta U_{k,0}^{(2)} &= \frac{1}{2}U_{k+3,0}^{(2)} + \frac{1}{2}r^2U_{k-3,0}^{(2)}, \\ yU_{k,0}^{(1)} &= \frac{1}{2}U_{k+3,0}^{(2)} + \frac{1}{2}r^2U_{k-3,0}^{(2)}, & yU_{k,0}^{(2)} &= \frac{1}{2}U_{k+3,0}^{(1)} - \frac{1}{2}r^2U_{k-3,0}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

которые в общем виде могут записаны следующим образом:

$$\zeta^m y^p U_k^{(j)} = \sum_{s=0}^{m+p} \alpha_s^{(m,p)} U_{k+3m+3p-6s,0}^{(l_j)} r^{2s}, \quad (4.4)$$

где $l_j = j$ при четном p , $l_j \neq j$ при нечетном p . При этом в случае, когда $U_k^{(j)}$ — гармонический полином, т. е. когда $k = 3n$, $n \geq 0$, те из коэффициентов $\alpha_s^{(m,p)}$ в соотношении (4.4), для которых $k + 3m + 3p - 6s < 0$, следует считать равными нулю.

Будем говорить, что функция $v(\zeta, y)$ вида $v(\zeta, y) = r^\alpha \Phi(\theta)$ имеет порядок α . Множество линейных комбинаций функций вида $v(\zeta, y) = \zeta^m y^p U_{k,0}^{(j)}$, где m, p — целые неотрицательные, будем обозначать через $\mathcal{W}^{(0)}$. Подмножество множества $\mathcal{W}^{(0)}$, все элементы которого имеют фиксированный порядок $s/3$, будем обозначать через $\mathcal{W}_s^{(0)}$. Поскольку $\zeta = U_{3,0}^{(2)}(\zeta, y)$, $y = U_{3,0}^{(1)}(\zeta, y)$, то в силу соотношений (4.4) любой многочлен $Q(\zeta, y) \in \mathcal{W}^{(0)}$, а любой однородный многочлен $Q_n(\zeta, y)$ степени n является элементом множества $\mathcal{W}_{3n}^{(0)}$.

Из соотношения (4.4) следует, что функция $v(\zeta, y)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}_q^{(0)}$, имеет вид $v(\zeta, y) = \sum_{m,k,j} \beta_{m,k,j} r^{2m} U_{k,0}^{(j)}$, где $m \geq 0$, $1 \leq j \leq 2$, $k + 6m = q$.

Далее, из соотношений (4.3), (4.4) следует, что если функция $v(\zeta, y) \in \mathcal{W}_q^{(0)}$, то $\frac{\partial v}{\partial \zeta} \in \mathcal{W}_{q-3}^{(0)}$, $\frac{\partial v}{\partial y} \in \mathcal{W}_{q-3}^{(0)}$, $\zeta^m y^p v(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{q+3m+3p}^{(0)}$.

При $n \geq 1$ определим гармонические функции $U_{k,n}^{(j)}$ следующим образом:

$$U_{k,n}^{(j)} = \frac{\partial^n}{\partial k^n} U_{k,0}^{(j)}. \quad (4.5)$$

Воспользовавшись соотношениями (4.5), нетрудно получить рекуррентные соотношения для функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ вида $U_{k,n}^{(1)} = (1/3)^k [\ln r U_{k,n-1}^{(1)} + \theta U_{k,n-1}^{(2)}]$, $U_{k,n}^{(2)} = (1/3)^k [\ln r U_{k,n-1}^{(2)} - \theta U_{k,n-1}^{(1)}]$.

Для этих функций справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (4.2):

$$-\frac{\partial U_{k,n}^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial U_{k,n}^{(1)}}{\partial \zeta} = \frac{k}{3} U_{k-3,n}^{(1)} + n U_{k-3,n-1}^{(1)}, \quad \frac{\partial U_{k,n}^{(2)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial U_{k,n}^{(1)}}{\partial y} = \frac{k}{2} U_{k-3,n}^{(2)} + n U_{k-3,n-1}^{(2)},$$

и соотношения, аналогичные соотношениям (4.3):

$$\begin{aligned} \zeta U_{k,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} U_{k+3,n}^{(1)} + \frac{1}{2} r^2 U_{k-3,n}^{(1)}, & \zeta U_{k,n}^{(2)} &= \frac{1}{2} U_{k+3,n}^{(2)} + \frac{1}{2} r^2 U_{k-3,n}^{(2)}, \\ y U_{k,n}^{(1)} &= \frac{1}{2} U_{k+3,n}^{(2)} + \frac{1}{2} r^2 U_{k-3,n}^{(2)}, & y U_{k,n}^{(2)} &= \frac{1}{2} U_{k+3,n}^{(1)} - \frac{1}{2} r^2 U_{k-3,n}^{(1)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выпишем явные формулы для нескольких “первых” функций $U_{k,n}^{(j)}$ при $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} U_{0,0}^{(1)} &\equiv 0, & U_{0,0}^{(2)} &\equiv 1, & U_{0,1}^{(1)} &= \theta, & U_{0,1}^{(2)} &= \ln r, & U_{0,2}^{(1)} &= 2\theta \ln r, & U_{0,2}^{(2)} &= \ln^2 r - \theta^2 \ln r, \\ U_{0,3}^{(1)} &= 3\theta \ln^2 r - \theta^3, & U_{0,3}^{(2)} &= \ln^3 r - 3\theta^2 \ln r. \end{aligned}$$

При $k \neq 0$ имеем

$$\begin{aligned} U_{k,0}^{(1)} &= r^{k/3} \sin \frac{k\theta}{3}, & U_{k,0}^{(2)} &= r^{k/3} \cos \frac{k\theta}{3}, \\ U_{k,1}^{(1)} &= \frac{1}{3} r^{k/3} \left[\ln r \sin \frac{k\theta}{3} + \theta \cos \frac{k\theta}{3} \right], & U_{k,1}^{(2)} &= \frac{1}{3} r^{k/3} \left[\ln r \cos \frac{k\theta}{3} - \theta \sin \frac{k\theta}{3} \right]. \end{aligned}$$

Нетрудно выписать и общий вид решений $U_{k,n}^{(j)}$ для всех k, n . При $k \neq 0$

$$U_{k,n}^{(1)} = r^{k/3} \left(\sin \frac{k\theta}{3} \sum_{s=0}^{[n/2]} \gamma_s^{(k,n)} (\ln r)^{n-2s} \theta^{2s} + \theta \cos \frac{k\theta}{3} \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \omega_s^{(k,n)} (\ln r)^{n-1-2s} \theta^{2s} \right), \quad (4.7)$$

$$U_{k,n}^{(2)} = r^{k/3} \left(\cos \frac{k\theta}{3} \sum_{s=0}^{[n/2]} \gamma_s^{(k,n)} (\ln r)^{n-2s} \theta^{2s} + \theta \sin \frac{k\theta}{3} \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \omega_s^{(k,n)} (\ln r)^{n-1-2s} \theta^{2s} \right), \quad (4.8)$$

где $\gamma_0^{(k,n)} = 1$, $\omega_0^{(k,n)} = n$. При $k = 0$

$$U_{0,n}^{(1)} = \theta \sum_{s=0}^{[(n-1)/2]} \gamma_s^{(0,n)} (\ln r)^{n-1-2s} \theta^{2s}, \quad U_{0,n}^{(2)} = \sum_{s=0}^{[n/2]} \gamma_s^{(0,n)} (\ln r)^{n-2s} \theta^{2s}. \quad (4.9)$$

Для функции $u(\zeta, y)$ вида

$$U(\zeta, y) = r^{k/3} \sum_{i=0}^m (\ln r)^{m-i} \Phi_i(\theta) \quad (4.10)$$

число $k/3$ будем называть порядком этой функции, а число m — ее индексом.

Очевидно, что представления (4.7)–(4.9) могут быть записаны в виде, аналогичном (4.10):

$$U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y) = r^{k/3} \sum_{i=0}^n (\ln r)^{n-i} \Phi_{ij}^{(k,n)}(\theta), \quad k \neq 0; \quad (4.11)$$

$$U_{0,n}^{(1)}(\zeta, y) = \sum_{i=0}^n (\ln r)^{n-1-i} \Phi_{i1}^{(0,n)}(\theta), \quad U_{0,n}^{(2)}(\zeta, y) = \sum_{i=0}^n (\ln r)^{n-i} \Phi_{i2}^{(0,n)}(\theta), \quad (4.12)$$

т. е. при $k \neq 0$ функции $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ имеют порядок $k/3$ и индекс n ; при $k = 0$ функции $U_{0,n}^{(j)}$ имеют нулевой порядок, индекс функции $U_{0,n}^{(2)}$ равен n , но индекс функции $U_{0,n}^{(1)}$ равен $n - 1$.

Множество линейных комбинаций функций вида $w(\zeta, y) = \ln^s r \zeta^m y^p U_{k,n}^{(j)}$, где m, p, s — целые неотрицательные, n целое положительное, будем обозначать через \mathcal{W} . Подмножество множества \mathcal{W} , все элементы которого имеют фиксированный порядок k , будем обозначать через \mathcal{W}_k . Для фиксированного $m \geq 1$ подмножество множества \mathcal{W}_k , индекс которых не превосходит m ($q + n \leq m$), будем обозначать через $\mathcal{W}_k^{(m)}$.

Из соотношения (4.4) следует, что функция $w(\zeta, y)$, принадлежащая множеству $\mathcal{W}_s^{(q)}$, имеет вид

$$w(\zeta, y) = \sum_{m,k,j,l} P_l^{m,k,j} (\ln r) r^{2m} U_{k,n}^{(j)},$$

где $m \geq 0, 1 \leq j \leq 2, k + 6m = s, P_l(t)$ — полином от t степени не выше, чем q .

Далее, из соотношений (4.4), (4.6) следует, что если функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_q^{(n)}$, то

$$\frac{\partial r^2 w}{\partial \zeta} \in \mathcal{W}_{q+3}^{(n)}, \quad \frac{\partial r^2 w}{\partial y} \in \mathcal{W}_{q+3}^{(n)}, \quad \zeta^m y^p \ln^i r w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{q+3m+3p}^{(n+i)}.$$

В дальнейшем нам понадобится вид функций $U_{k,n}^{(j)}(\zeta, y)$ на оси y , который легко получается из соотношений (4.7)–(4.9). Рассмотрим сначала функции $U_{k,n}^{(1)}(\zeta, y)$. Прежде всего, отметим, что функции $U_{k,n}^{(1)}$ при всех (допустимых в их определении) значениях k, n обращаются в нуль на правой полуоси $U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) = 0, \zeta > 0, (\theta = 0)$. Для $n = 0$ это следует из определения функций $U_{k,0}^{(1)}(\zeta, y)$ (см. (4.1)), а для $n \geq 1$ — из соотношения (4.7).

При $\zeta < 0$ ($\theta = \pi$) соотношение (4.7) принимает вид

$$U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) = |\zeta|^{k/3} \left(\sin \frac{k\pi}{3} P_n^{(k,n;1)}(\ln |\zeta|) + \cos \frac{k\pi}{3} Q_{n-1}^{(k,n;1)}(\ln |\zeta|) \right), \tag{4.13}$$

где $P_n^{(k,n;1)}(t)$ — полином степени n вида

$$P_n^{(k,n;1)}(t) = \sum_{q=0}^{[n/2]} \beta_q^{(k,n;1)} t^{n-2q}, \quad \beta_0^{(k,n;1)} = 1, \tag{4.14}$$

$Q_{n-1}^{(k,n;1)}(t)$ — полином степени $n - 1$ вида

$$Q_{n-1}^{(k,n;1)}(t) = \sum_{q=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \gamma_q^{(k,n;1)} t^{n-2q}, \quad \gamma_0^{(k,n;1)} = n. \tag{4.15}$$

Заметим, что при $k = 3s$ первое слагаемое в соотношении (4.13) обращается в нуль, поскольку $\sin s\pi = 0$, и в дальнейшем будем записывать соотношение (4.13) в виде

$$\begin{aligned} U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) &= R_n^{(k,n;1)}(\ln |\zeta|) \zeta^{k/3}, \quad k \neq 3s, \quad \zeta < 0; \\ U_{k,n}^{(1)}(\zeta, 0) &= \tilde{R}_{n-1}^{(k,n;1)}(\ln |\zeta|) \zeta^{k/3}, \quad k = 3s, \quad \zeta < 0, \end{aligned} \tag{4.16}$$

понимая под $R_n^{(k,n;1)}(t), \tilde{R}_{n-1}^{(k,n;1)}(t)$ полиномы степеней $n, n - 1$ соответственно с отличными от нуля старшими коэффициентами и структурой, определяемой соотношениями (4.14), (4.15).

Перейдем к функциям $U_{k,n}^{(2)}(\zeta, y)$. Из соотношения (4.8) получаем, что при всех k

$$\begin{aligned} U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) &= \zeta^{k/3} \ln^n \zeta, \quad \zeta > 0; \\ U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) &= \zeta^{k/3} \left(\cos \frac{k\pi}{3} P_n^{(k,n;2)}(\ln |\zeta|) + \sin \frac{k\pi}{3} Q_{n-1}^{(k,n;2)}(\ln |\zeta|) \right), \quad \zeta < 0, \end{aligned} \tag{4.17}$$

или, что то же самое, $U_{k,n}^{(2)}(\zeta, 0) = \zeta^{k/3} S_n^{(k,n;2)}(\ln|\zeta|)$, $\zeta < 0$, где $S_n^{(k,n;2)}(t)$ — полином степени n .

Лемма 1. *Для любого целого k и любого целого неотрицательного n существует гармоническая функция $u(\zeta, y)$, удовлетворяющая условиям*

$$u(\zeta, 0) = 0, \quad \zeta > 0; \quad u(\zeta, 0) = \zeta^{k/3} \ln^n |\zeta|, \quad \zeta < 0.$$

Доказательство. Рассмотрим различные случаи.

Пусть сначала $k \neq 3s$, $n \neq 0$. Положим $u_0(\zeta, y) = \gamma_0 U_{k,n}^{(1)}(\zeta, y)$. Эта функция удовлетворяет первому из условий (4.17), и согласно первому из соотношений (4.16) при $\zeta < 0$ имеет место равенство $u_0(\zeta, 0) = \gamma_0 \zeta^{k/3} (\alpha_0 \ln^n |\zeta| + \alpha_1 \ln^{n-1} |\zeta| + \dots + \alpha_n)$. Выберем $\gamma_0 \alpha_0 = 1$. На границе $y = 0$, $\zeta < 0$ останется невязка $\delta_{n-1} = \zeta^{k/3} (\gamma_0 \alpha_1 \ln^{n-1} |\zeta| + \gamma_0 \alpha_2 \ln^{n-2} |\zeta| + \dots + \gamma_0 \alpha_n)$, которую мы последовательно уберем построением функций $u_m(\zeta, y) = \gamma_m U_{k,n-m}^{(1)}(\zeta, y)$. Для $k \neq 3s$ решение задачи построено, и оно имеет вид $u(\zeta, y) = \sum_{m=0}^n \gamma_m U_{k,n-m}^{(1)}(\zeta, y)$.

Пусть теперь $k = 3s$. В соответствии со вторым из соотношений (4.16) положим $u_0(\zeta, y) = \gamma_0 U_{3s,n+1}^{(1)}(\zeta, y)$ и проведем построение тем же способом, что и в предыдущем случае. Получим $u(\zeta, y) = \sum_{m=0}^n \gamma_m U_{3s,n+1-m}^{(1)}(\zeta, y)$.

Таким образом, для всех k и $n \geq 0$ построенное решение можно записать в виде $u(\zeta, y) = \sum_{m=0}^n \gamma_m U_{k,q-m}^{(1)}(\zeta, y)$, где $q = n$ при $k \neq 3s$, $q = n + 1$ при $k = 3s$. \square

Лемма 2. *Для любого целого k и любого целого неотрицательного n существует гармоническая функция $u(\zeta, y)$, удовлетворяющая условиям*

$$u(\zeta, 0) = \zeta^{k/3} \ln^n \zeta, \quad \zeta > 0; \quad u(\zeta, 0) = 0, \quad \zeta < 0.$$

Доказательство. Положим $u_0(\zeta, y) = U_{k,n}^{(2)}(\zeta, y)$. Согласно (4.17) функция $u_0(\zeta, y)$ удовлетворяет требуемому граничному условию на полуоси $\zeta > 0$. Но в соответствии с соотношением (4.17) функция $u_0(\zeta, y)$ “образует” новую граничную функцию на полуоси $\zeta < 0$: $u_0(\zeta, 0) = \zeta^{r/3} S_n^{k,n,2}(\ln|\zeta|)$, $\zeta < 0$, где $S_n^{k,n,2}$ — полином степени n от $\ln|\zeta|$. В лемме 1 для каждого члена этого полинома построена соответствующая гармоническая функция. Суммируя все эти гармонические функции, приходим к соотношению $u(\zeta, y) = U_{k,n}^{(2)}(\zeta, y) + \sum_{m=0}^n \tilde{\gamma}_m U_{k,m-l}^{(1)}(\zeta, y)$, где $m = n$ при $k \neq 3s$, $m = n + 1$ при $k = 3s$. \square

Лемма 3. *Пусть m, k целые, $m \geq 0$, $k \neq -3(m + 1)$. Существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(0)}$, которая является решением уравнения*

$$\Delta z = r^{2m} U_{k,0}^{(j)}. \quad (4.18)$$

Доказательство. Для любого α и любой гармонической функции $v(\zeta, y)$ справедливо соотношение $\Delta(r^\alpha v) = \alpha^2 r^{\alpha-2} v + 2\alpha r^{\alpha-1} v \frac{\partial v}{\partial r}$. Положим в этом соотношении $v(\zeta, y) = U_{k,0}^{(j)}$. По определению (см. (4.1)) $\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{k}{3} r^{-1} U_{k,0}^{(j)}$. Если выбрать теперь $\alpha = 2m + 2$, то

$$\Delta(r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)}) = r^{2m} 4(m+1) \left(m+1 + \frac{k}{3}\right) U_{k,0}^{(j)}. \quad (4.19)$$

Очевидно, что при $m+1 + k/3 \neq 0$ или, что то же самое, при $k \neq -(3m+1)$ функция

$$z(\zeta, y) = \frac{1}{4(m+1)(m+1+k/3)} r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)} \quad (4.20)$$

является решением неоднородного уравнения (4.18). \square

Лемма 4. Пусть m, k, q целые, $m \geq 0, q > 0$ и выполнено соотношение $k \neq -(3m + 1)$. Существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(q)}$, которая является решением уравнения

$$\Delta z = r^{2m} \ln^q r U_{k,0}^{(j)} \tag{4.21}$$

и имеет вид

$$z = r^{2m+2} P_q(\ln r) U_{k,0}^{(j)}, \tag{4.22}$$

где $P_q(t)$ — полином степени q :

$$P_q(t) = \sum_{i=0}^q \gamma_i(p, q, m) t^{q-i}, \quad \gamma_0(p, q, m) = \frac{1}{4(m+1)(m+1+k/3)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства этой леммы используем соотношение, аналогичное соотношению (4.19), для гармонической функции $v(\zeta, y)$:

$$\Delta(\ln^n r r^\alpha v) = n(n-1) \ln^{n-2} r r^{\alpha-2} v + \ln^n r \left(\alpha^2 r^{\alpha-2} + 2\alpha r^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + 2n \ln^{n-1} r (\alpha r^{\alpha-1} v + r v).$$

Полагая в этом соотношении $v(\zeta, y) = U_{k,0}^{(j)}$, получаем $\Delta(\ln^n r r^\alpha U_{k,0}^{(j)}) = r^{\alpha-2} U_{k,0}^{(j)} [\ln^n r (\alpha^2 + 2\alpha k/3) + 2n(\alpha + k/3) \ln^{n-1} r + n(n-1) \ln^{n-2} r]$. Наконец, полагая $\alpha = 2m + 2$, приходим к соотношению

$$\Delta(\ln^n r r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)}) = r^{2m} U_{k,0}^{(j)} \left[\ln^n r \Gamma(m, k) + \ln^{n-1} r 2n \left(2m + 2 + \frac{k}{3} \right) + \ln^{n-2} r n(n-1) \right], \tag{4.23}$$

где $\Gamma(m, k) = 4(m+1)(m+1+k/3)$.

Вернемся к уравнению (4.21). Будем строить его решение в виде суммы $z = \sum_{s=0}^q z_s(\zeta, y)$, где $z_s(\zeta, y) = A_s r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)} \ln^{q-s} r, 0 \leq s \leq q$. Согласно соотношению (4.23)

$$\begin{aligned} \Delta(z) = & r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)} \left(A_0 \left[\Gamma(m, k) \ln^q r + 2q \left(2m + 2 + \frac{k}{3} \right) \ln^{q-1} r + \ln^{q-2} r q(q-1) \right] \right. \\ & + A_1 \left[\Gamma(m, k) \ln^{q-1} r + 2(q-1) \left(2m + 2 + \frac{k}{3} \right) \ln^{q-2} r + \ln^{q-3} r (q-1)(q-2) \right] \\ & + A_2 \left[\Gamma(m, k) \ln^{q-2} r + 2(q-2) \left(2m + 2 + \frac{k}{3} \right) \ln^{q-3} r + \ln^{q-4} r (q-2)(q-3) \right] \\ & \left. + \dots + A_{q-1} \left[\Gamma(m, k) \ln r + 2 \left(2m + 2 + \frac{k}{3} \right) \right] + A_q \Gamma(m, k) \right). \end{aligned}$$

По предположению задачи $\Gamma(m, k) \neq 0$ ($k \neq -(3m + 1)$), поэтому константы A_s могут быть последовательно определены так, чтобы построенная функция являлась решением неоднородного уравнения (4.21). Достаточно положить $A_0 \Gamma(m, k) = 1, A_1 \Gamma(m, k) + 2q(2m + 2 + k/3) A_0 = 0, A_2 \Gamma(m, k) + 2(q-1)(2m + 2 + k/3) A_1 + A_0 q(q-1) = 0, A_s \Gamma(m, k) + 2(q-s+1)(2m + 2 + k/3) A_{s-1} + A_{s-2}(q-s+2)(q-s+1) = 0$. Решение уравнения (4.21) построено. \square

Лемма 5. Пусть m, k, q целые, $m \geq 0, q > 0$ и выполнено соотношение $k = -(3m + 1)$ ($\Gamma(m, k) = 0$). Существует функция $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(q+1)}$, которая является решением уравнения (4.21) и имеет вид

$$z = r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)} \ln r S_q(\ln r) \tag{4.24}$$

где $S_q(t)$ — полином степени q : $S_q(t) = \sum_{i=0}^q \tilde{\gamma}_i(p, q, m) t^{q-i}, \tilde{\gamma}_0(p, q, m) = -3/(2qk)$.

Доказательство. Вернемся к соотношению (4.23), справедливому для любых $n \geq 0$, $m \geq 0$ и любых целых k . Согласно предположению леммы $\Gamma(m, k) = 0$, потому что $k = -(3m + 1)$. Тогда коэффициент во втором слагаемом соотношения (4.23) принимает вид $2n(2m + 2 + k/3) = 2n(m + 1)$ и не обращается в нуль. Соотношение (4.23) следует переписать в виде $\Delta(\ln^n r r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)}) = r^{2m} U_{k,0}^{(j)} [\ln^{n-1} r 2n(m + 1) + \ln^{n-2} r n(n - 1)]$.

Используя это соотношение, так же, как и в предыдущей лемме 4, построим решение уравнения (4.21) в виде суммы $z = r^{2m+2} U_{k,0}^{(j)} (A_0 \ln^{q+1} r + A_1 \ln^q r + A_2 \ln^{q-1} r + \dots + A_q \ln r)$. Легко видеть, что $A_0 = -3/(2qk)$ и $z \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(q+1)}$. \square

Лемма 6. Пусть m, k, n целые, $m \geq 0$, $n > 0$, $k \neq -(3m + 1)$, $(\Gamma(m, k) \neq 0)$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(n)}$, которая является решением неоднородного уравнения

$$\Delta w = r^{2m} U_{k,n}^{(j)}. \quad (4.25)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $z(\zeta, y)$, построенную в лемме 3. Легко видеть, что функция

$$w(\zeta, y) = \frac{\partial^n z}{\partial k^n} \quad (4.26)$$

является решением уравнения (4.25). Используя явный вид (4.20) функции $z(\zeta, y)$, функцию $w(\zeta, y)$ можно выписать явно:

$$w(\zeta, y) = \frac{r^{2m+2}}{4(m+1)} \frac{\partial^n [(m+1+k/3)^{-1} U_{k,0}^{(j)}]}{\partial k^n}.$$

Например, при $n = 1$ формула (4.26) принимает вид

$$w(\zeta, y) = \frac{r^{2m+2}}{4(m+1)} [(m+1+k/3)^{-1} U_{k,1}^{(j)} - 3^{-1} (m+1+k/3)^{-2} U_{k,0}^{(j)}].$$

В общем случае из соотношения (4.26) следует, что построенное решение $w(\zeta, y)$ может быть записано в виде

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2} \sum_{s=0}^n \omega_s(m, k) U_{k,n-s}^{(j)}(\zeta, y).$$

Очевидно, что $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(n)}$. \square

Лемма 7. Пусть m, k, q, n целые, $m \geq 0$, $n > 0$, $q > 0$ и выполнено соотношение $k \neq -(3m + 1)$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(q+n)}$, которая является решением неоднородного уравнения

$$\Delta w = r^{2m} \ln^q r U_{k,n}^{(j)} \quad (4.27)$$

и имеет вид

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2} \sum_{s=0}^n P_q^s(\ln r) U_{k,n-s}^{(j)}(\zeta, y),$$

где $P_q^s(t)$ — полиномы от t степени q .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 6. Нужно взять решение $z(\zeta, y)$ уравнения (4.21), построенное в лемме 4 (см. (4.22)), и продифференцировать

его n раз по индексу k : $w(\zeta, y) = \frac{\partial^n z}{\partial k^n} = r^{2m+2} \frac{\partial^n [P_q(\ln r) U_{k,0}^{(j)}]}{\partial k^n}$. \square

Лемма 8. Пусть m, k, q, n целые, $m \geq 0, n > 0, q \geq 0$ и выполнено соотношение $k = -(3m + 1)$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(q+n+1)}$, которая является решением неоднородного уравнения (4.27) и имеет вид

$$w(\zeta, y) = r^{2m+2} \ln r \sum_{s=0}^n \tilde{P}_q^s(\ln r) U_{k, n-s}^{(j)}(\zeta, y),$$

где $\tilde{P}_q^s(t)$ — полиномы от t степени q .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству лемм 6, 7. Нужно взять решение $z(\zeta, y)$ уравнения (4.21), построенное в лемме 5 (см. (4.24)), и продифференцировать его n раз по индексу k : $w(\zeta, y) = \frac{\partial^n z}{\partial k^n} = r^{2m+2} \ln r \frac{\partial^n [S_q(\ln r) U_{k,0}^{(j)}]}{\partial k^n}$. \square

Теорема 2. Пусть m, k, q, n целые, $m \geq 0, n \geq 0, q \geq 0, j = 1, 2$. Существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6m+6}^{(l(k,m))}$, которая является решением краевой задачи

$$\Delta w = r^{2m} \ln^q r U_{k,n}^{(j)}, \quad y > 0; \quad w(0, y) = 0. \quad (4.28)$$

Здесь $l(k, m) = q + n$ при $k \neq -(3m + 1)$, $l(k, m) = q + n + 1$ при $k = -(3m + 1)$.

Доказательство этой теоремы при различных комбинациях показателей m, k, q, n вытекает из лемм 1–8. \square

Следствие. Для любой функции $u(\zeta, y) \in \mathcal{W}_k^{(q)}$ существует функция $w(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{k+6}^{(l)}$, $l \leq q + 1$, которая является решением краевой задачи $\Delta w = u, y > 0; w(0, y) = 0$.

Доказательство этого утверждения очевидно. \square

5. Построение ФАР для внутренних разложений

Как уже было отмечено во введении, целью настоящей работы является построение формальных асимптотических решений (ФАР) внутренних краевых задач (3.2), (3.3) при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$. Для этого в предыдущем разделе были введены некоторые специальные функции и изучены их различные свойства. Существование ФАР позволит построить “настоящие” решения задач (3.2), (3.3) и одновременно с этим построить и решения задач (2.2), (2.3) таким образом, что асимптотические разложения (2.1) и (3.1) будут согласованы в соответствующих областях. Для задач, аналогичных рассматриваемой, такая процедура разработана в монографии [5] и в частности для другой задачи с малым параметром при одной из старших производных очень подробно описана в работе [12].

Процедура построения ФАР в настоящей работе несколько отличается от аналогичных процедур в рассматриваемых ранее задачах (см., например, ([7; 9; 12])). Сначала с помощью доказанных в предыдущем параграфе лемм строятся ФАР при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$ задач (2.2), (2.3), что оказывается относительно просто и наглядно, а затем проводится стандартная процедура: берется ряд (2.1), функции $v_k(\zeta, y)$ заменяются на их ФАР при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$, получившееся представление переписывается в переменных ξ, η и в результате получаются некоторые ряды, которые являются ФАР задач (3.2), (3.3) при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$.

Перейдем к реализации этого плана. Прежде всего отметим, что $\zeta = \xi \varepsilon^{1/4}, y = \eta \varepsilon^{1/4}, r = \rho \varepsilon^{1/4}$. Полярный угол θ в переменных ξ, η не меняется. Для того, чтобы различать какой из пар внутренних переменных (ζ, y или ξ, η) мы будем пользоваться, будем эти переменные использовать и в обозначении классов функций, введенных и исследованных в предыдущем параграфе, т. е. использовать обозначения $\mathcal{W}_k^{(q)}(\zeta, y)$ или $\mathcal{W}_k^{(q)}(\xi, \eta)$.

Отметим далее, что для любой функции $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_k^{(n)}$ справедливо соотношение

$$z(\zeta, y) = \varepsilon^{k/(12)} \sum_{l=0}^n [\ln^l \varepsilon z_{n-l}^{(k)}(\xi, \eta)], \quad (5.1)$$

где $z_{n-l}^{(k)}(\xi, \eta) \in \mathcal{W}_k^{(n-l)}(\xi, \eta)$.

В справедливости представления (5.1) нетрудно убедиться, если учесть, что для функции $z(\zeta, y) \in \mathcal{W}_k^{(n)}$ имеет место представление

$$z(\zeta, y) = r^{r/3} \sum_{l=0}^n \ln^{n-l} r \Phi_l(\theta).$$

Теорема 3. *Существуют асимптотические ряды*

$$X_{kj} = \sum_{l=0}^{\infty} \omega_l^{(k)}, \quad \omega_l^{(k)} \in \mathcal{W}_{3k-2l}^{(l-1)}(\xi, \eta), \quad (5.2)$$

которые при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$ являются ФАР задач (3.2), (3.3).

Доказательство. Рассмотрим функцию $v_0(\zeta, y)$. Она является решением первой из задач (2.2): $L_1 v_0 = \left[\Delta_{\zeta, y} + b(0, y) \frac{\partial}{\partial y} + a(0, y) \right] v_0 = f(0, y)$, $v_0(\zeta, 0) = 0$. Функция $v_0(\zeta, y)$ — гладкая и при $r \rightarrow 0$ разлагается в ряд Тейлора $v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(\zeta, y)$, где $P_k(\zeta, y)$ — однородный полином степени k , $P_k(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{3k}^{(0)}$.

Перейдем к функции $v_1(\zeta, y)$. Она должна являться решением задачи

$$L_1 v_1 = 0, \quad v_1(\zeta, 0) = -\frac{\partial v_0}{\partial y}(\zeta, 0) \zeta^{1/3} = \phi(\zeta). \quad (5.3)$$

Очевидно, что для граничной функции $\phi(\zeta)$ при $\zeta \rightarrow 0$ справедливо представление $\phi(\zeta) = \sum_{s=1}^{\infty} \alpha_s \zeta^{s+1/3}$. Будем строить ФАР задачи для функции $v_1(\zeta, y)$ в виде $v_1(\zeta, y) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^{(1)}(\zeta, y)$. Для определения функций $w_l^{(1)}(\zeta, y)$ разложим в операторе L_1 коэффициенты $b(0, y)$, $a(0, y)$ в ряды Тейлора и приравняем нулю слагаемые, имеющие один порядок. Можно проверить, что соотношения для определения функций $w_l^{(1)}(\zeta, y)$ примут вид

$$\begin{cases} \Delta_{\zeta, y} w_0^{(1)} = 0, & w_0^{(1)}(\zeta, 0) = \alpha_0 \zeta^{1/3}, & \Delta_{\zeta, y} w_1^{(1)} = -b(0, 0) \frac{\partial w_0^{(1)}}{\partial y}, & w_1^{(1)}(\zeta, 0) = \alpha_1 \zeta^{4/3}, \\ \Delta_{\zeta, y} w_j^{(1)} = -\sum_{i=1}^j \frac{y^i}{i!} \left[\frac{\partial^i b}{\partial y^i}(0, 0) \frac{\partial w_{j-1-i}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial^i a}{\partial y^i}(0, 0) w_{j-2-i}^{(1)} \right], & w_j^{(1)}(\zeta, 0) = \alpha_j \zeta^{(3j+1)/3}. \end{cases}$$

Положим $w_0^{(1)}(\zeta, y) = A_0 U_1^{(1)}(\zeta, y) + B_0 U_1^{(2)}(\zeta, y)$, где константы A_0 и B_0 определим так, чтобы было выполнено граничное условие при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Таким образом, функция $w_0^{(1)}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_1^{(0)}(\zeta, y)$. Функцию $w_1^{(1)}(\zeta, y)$ построим в соответствии с леммой 8. Функция $w_1^{(1)}(\zeta, y)$ имеет порядок $4/3$ и в соответствии с леммой 8 (см. следствие) индекс ее не превосходит единицы, поэтому можно считать, что $w_1^{(1)}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_4^{(1)}(\zeta, y)$. Продолжая этот процесс дальше, построим функции $w_l^{(1)}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{1+3l}^{(l)}(\zeta, y)$. Аналогичным образом может быть построено ФАР при $r \rightarrow 0$ для любого s и можно проверить, что

$$w_s(\zeta, y) = \sum_{l=0}^{\infty} w_l^{(s)}(\zeta, y), \quad w_l^{(s)}(\zeta, y) \in \mathcal{W}_{3-2s+3l}^{(l)}(\zeta, y). \quad (5.4)$$

Отметим, что согласно соотношению (5.1)

$$w_l^{(s)}(\zeta, y) = \varepsilon^{-\frac{s}{6} + \frac{1}{4} + \frac{l}{4}} \sum_{l=0}^s \ln^l \varepsilon z_l^{(3-2s+3l)}(\xi, \eta), \quad z_l^{(3-2s+3l)} \in \mathcal{W}_{3-2s+3l}^{(s-l)}(\xi, \eta). \quad (5.5)$$

В соответствии с методом согласования [5] для того, чтобы получить ФАР при $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$ задач (3.2), (3.3), рассмотрим ряд $V(\zeta, y)$ (см. (2.1), заменим в нем функции $v_j(\zeta, y)$ их ФАР (5.4) при $\zeta^2 + y^2 \rightarrow 0$ и перейдем в получившемся соотношении от переменных ζ, y к переменным ξ, η . Воспользовавшись равенствами (5.1) и (5.5), получим

$$V(\zeta, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon^{(l+1)/4} \sum_{j=0}^l \ln^{l-j} \varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} z_j^{(3l-2s)}(\xi, \eta),$$

и тем самым $X_{lj} = \sum_{s=0}^{\infty} z_j^{(3l-2s)}(\xi, \eta)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
2. Треногин В.А. Развитие и приложение асимптотического метода Люстерника – Вишика // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. № 4(154). С. 123–156.
3. Найфэ А. Метод возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
4. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 310 с.
5. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
6. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром // Докл. РАН. 2009. Т. 428, № 4. С. 447–450.
7. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с угловыми точками // Матем. сб. 2010. Т. 201, № 10. С. 93–108.
8. Ильин А.М., Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения одного уравнения с малым параметром // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22, № 6. С. 109–126.
9. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в области с конической точкой на границе // Докл. РАН. 2012. Т. 442, № 2. С. 166–172.
10. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы // Докл. РАН. 2012. Т. 447, № 2. С. 136–139.
11. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2003. Т. 9, № 1. С. 107–119.
12. Леликова Е.Ф. Об асимптотике решения эллиптического уравнения второго порядка с малым параметром при одной из старших производных. // Тр. Моск. мат. об-ва. 2009. Т. 71. С. 187–232.

Леликова Елена Федоровна

Поступила 28.08.15

д-р физ.-мат. наук

ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

профессор

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: lef@imm.uran.ru

УДК 519.17+512.54

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ ¹

А. А. Махнев, М. С. Нирова, Д. В. Падучих

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ является AT_4 -графом. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$. В работе найдены автоморфизмы указанных графов. В частности, оба указанных графа не являются реберно симметричными.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, собственное значение графа, автоморфизм графа.

A. A. Makhnev, M. S. Nirova, D. V. Paduchikh. On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$.

A distance-regular graph Γ with intersection array $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ is an AT_4 -graph. The antipodal quotient $\bar{\Gamma}$ has parameters $(800, 204, 28, 60)$. Automorphisms of the specified graphs are found. In particular, neither of the two graphs is edge-symmetric.

Keywords: strongly regular graph, eigenvalue of a graph, automorphism of a graph.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

Граф Γ диаметра d называется *антиподальным*, если бинарное отношение на множестве вершин: совпадать или находиться на расстоянии d — является отношением эквивалентности. Классы этого отношения называются антиподальными классами. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ в качестве вершин имеет антиподальные классы, и классы \bar{u}, \bar{w} смежны, если \bar{u} содержит вершину, смежную с вершиной из \bar{w} . Если каждый антиподальный класс содержит ровно r вершин, то r называется *индексом антиподальности* и Γ называется антиподальным r -накрытием графа $\bar{\Gamma}$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1 = 1$ (см. [1]).

¹Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект 15-11-10025 (теорема 2), и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.A03.21.0006 (теорема 1 и следствие 1).

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается подграф, индуцированный множеством всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечения графа Γ .

Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ является $AT_4(4, 6, 5)$ -графом (см. [2]). В работе исследуются автоморфизмы дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$. Антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$ и неглавные собственные значения $4, -36$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(595, 144, 18, 40)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$. В [3] найдены автоморфизмы графов с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(595, 144, 18, 40)$.

Предложение 1. Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф, либо $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 34$, либо $p = 3$ и $\alpha_1(g) = 30l - 6$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 20t + 4$;
- (2) Ω является n -кликой, либо $n = 1$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 70r + 28$, либо $n = 4$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 50s$, $s \leq 2$;
- (3) Ω является l -кошкой, $p = 2$, $\alpha_1(g) = 20t - 6l + 4$ и $l = 8, 10, \dots, 34$;
- (4) Ω содержит геодезический 2-путь и либо
 - (i) $p = 3$, Ω — октаэдр и $\alpha_1(g) = 30t + 18$, либо
 - (ii) $p = 2$, степени вершин в Ω равны $2, 4, \dots, 26$ и $|\Omega| = 4, 6, \dots, 34$.

В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(800, 204, 28, 60)$ и дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$.

Теорема 1. Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(800, 204, 28, 60)$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Ω — пустой граф, либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200l$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 40m$;
- (2) Ω является n -кликой, либо $n = 1$, $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 204$, либо $n = 5$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200s + 20$, либо $n = 2$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 280t + 168$;
- (3) Ω является l -кошкой, либо $p = 3$, $l = 3t + 2$, $t \leq 39$, $\alpha_1(g) = 120t + 12m + 48$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80t + 4l$ и $l = 8, 10, \dots, 120$;
- (4) Ω является объединением t изолированных 5-клик, $2 \leq t \leq 5$, $\alpha_1(g) = 200s + 20m$;
- (5) Ω содержит геодезический 2-путь и либо
 - (i) $p = 3$, Ω является объединением $3t + 1$ полных многодольных графов $K_{4 \times 2}$ и $\alpha_1(g) = 96t + 120t + 72$, либо
 - (ii) $p = 2$, $|\Omega| = 2l \leq 240$, $\lambda_\Omega = 0, 2, \dots, 26$, степени вершин в Ω равны $0, 2, \dots, 34$ и $\alpha_1(g) = 80t + 8l$.

Следствие 1. Если сильно регулярный граф Γ с параметрами $(800, 204, 28, 60)$ является вершинно симметричным, то $|\text{Aut}(\Gamma)|$ не делится на 17. В частности, граф Γ не является реберно симметричным.

Теорема 2. Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, $p = 5$ и $\alpha_4(g) = v$;
- (2) Ω — пустой граф, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000m$, $\alpha_1(g) = 200n + 800 - 200m$, $\alpha_3(g) = -200n + 3200 - 800m$ или $p = 2$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 400m$, $\alpha_1(g) = 80n + 800 - 80m$, $\alpha_3(g) = 3200 - 80n - 320m$;
- (3) Ω — антиподальный класс, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 340 + 680e$, $\alpha_2(g) = 2975$, $\alpha_3(g) = 680(1 - e)$;
- (4) Ω — объединение двух антиподальных классов, содержащее ребро, $p = 7$, $\alpha_2(g) = 350l$, $\alpha_1(g) = 280m + 910 - 70l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$, $l = 1, 5, 9$;
- (5) $|\Omega| = 25$, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000l - 125$, $\alpha_1(g) = 200n + 700$, $\alpha_3(g) = 3400 - 1000l - 200n$;
- (6) Ω — коклика, либо $p = 3$, $|\Omega| = 5(3m + 2) - \alpha_4(g)$, $m \leq 39$, $\alpha_4(g) = 60m + 120n - 120e - 720 + 6l$, $\alpha_1(g) = 6l$, $\alpha_2(g) = 600n - 75m + 150$ и $\alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n - 6l$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $\alpha_4(g) = (20l - 400 + 40(n - e) - 2m)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ и $\alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n - 4m$;
- (7) $|\Omega| = 25m - \alpha_4(g)$, $p = 5$, $m \leq 5$, $\alpha_4(g) = 25t$, $\alpha_1(g) = -100m + 800 + 200(e - n) + 25t$, $\alpha_2(g) = 1000n - 125m$ и $\alpha_3(g) = 3200 - 800n - 200e + 200m - 25t$;
- (8) $|\Omega| = 40(3m + 1) - \alpha_4(g)$, $p = 3$, $m \leq 5$, $\alpha_4(g) = 24t$, $\alpha_1(g) = -480m + 600 + 120(e - n) + 144t$, $\alpha_2(g) = 600(n - m)$ и $\alpha_3(g) = 3360 - 480n + 960m - 120e - 144t$;
- (9) $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $p = 2$, $l \leq 120$, $\alpha_4(g) = (20l + 2m - 400 + 40n - 200e)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ и $\alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l - 4m$.

Ввиду теоремы 2 и следствия 1 дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ не является реберно симметричным.

Доказательства теорем опираются на метод Г. Хигмена.

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство \mathbf{C}^v является ортогональной прямой суммой собственных G -инвариантных подпространств W_0, \dots, W_d матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. [4, § 3.7]) для $g \in G$ получим $\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g)$, где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

1. Автоморфизмы графа с параметрами $(800, 204, 28, 60)$

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 (см., например, [5, § 2]). Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями r, s , $s < 0$. Если D — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то $s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r$, причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - D$ смежна точно с $w(k-d)/(v-w)$ вершинами из D .

До конца раздела будем предполагать, что Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(800, 204, 28, 60)$ и спектром $204^1, 4^{714}, -36^{85}$. Пусть $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то

$$d - 4 \leq \frac{w(204 - d)}{800 - w} \leq d + 36.$$

Поэтому число вершин в коклике не больше 120, а в клике не больше 6.

Лемма 1.2. Пусть χ_2 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 85. Тогда $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\chi_2(g) - 85$ делится на p .

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 714 & 14 & -6 \\ 85 & -15 & 5 \end{pmatrix},$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 85 равно $\chi_2(g) = (17\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/160$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_2(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/40 + 5$.

Последнее утверждение леммы следует из [6, лемма 1].

Лемма доказана.

Лемма 1.3. Выполняются следующие утверждения:

- (1) если Ω — пустой граф, то либо $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200l$, либо $p = 2$ и $\alpha_1(g) = 80m$;
- (2) если Ω является n -кликой, то либо $n = 1$, $p = 17$ и $\alpha_1(g) = 204$, либо $n = 5$, $p = 5$ и $\alpha_1(g) = 200s + 20$, либо $n = 2$, $p = 7$ и $\alpha_1(g) = 280t + 168$;
- (3) если Ω является l -кокликкой, то либо $p = 3$, $l = 3t + 2$, $t \leq 39$, $\alpha_1(g) = 120t + 12m + 48$, либо $p = 2$, $\alpha_1(g) = 80t + 4l$ и $l = 8, 10, \dots, 120$;
- (4) если Ω содержит смежные вершины и не содержит геодезических 2-путей, то Ω является объединением m изолированных 5-клик, $m \leq 5$, $\alpha_1(g) = 200s + 20m$;
- (5) $[a]$ не содержится в Ω для любой вершины $a \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть Ω — пустой граф. Так как $800 = 32 \cdot 25$, то $p = 2, 5$.

Пусть $p = 5$. По лемме 1.2 число $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/40$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 200l$. Пусть $p = 2$. Тогда число $\chi_2(g) = -\alpha_1(g)/40 + 5$ нечетно и $\alpha_1(g) = 80m$.

Пусть Ω является n -кликкой. Если $n = 1$, то p делит 204 и 595, поэтому $p = 17$, $\chi_2(g) = (4 - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\alpha_1(g) = 204$. Если Ω содержит смежные вершины u, w , то p делит $|[u] - w^\perp| = 175, 420$ и $30 - n$, поэтому $p = 5$ и $n = 5$ или $p = 7$ и $n = 2$. В случае $p = 5$ число $\chi_2(g) = (20 - \alpha_1(g))/40 + 5$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 200s + 20$. В случае $p = 7$ имеем $\chi_2(g) = (8 - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\alpha_1(g) = 280t + 168$.

Пусть Ω является l -кокликкой, $l \geq 2$. Тогда p делит 60, 144 и $452 - l$, поэтому либо $p = 3$, $l = 3t + 2$, $t \leq 39$, $\chi_2(g) = (12m + 8 - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\alpha_1(g) = 120t + 12m + 48$, либо $p = 2$, число $\chi_2(g) = (4l - \alpha_1(g))/40 + 5$ нечетно и $\alpha_1(g) = 80t + 4l$. Так как вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с четным числом вершин из Ω , то $l = 8, 10, \dots, 120$ (иначе некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с единственной вершиной из Ω).

Пусть Ω содержит смежные вершины и не содержит геодезических 2-путей. Тогда p делит 60 и 175, поэтому $p = 5$, Ω является объединением m изолированных 5-клик. Ввиду леммы 1.1 имеем $m \leq 5$. Далее, $\chi_2(g) = (20m - \alpha_1(g))/40 + 5$ делится на 5 и $\alpha_1(g) = 200s + 20m$.

Пусть $[a] \subset \Omega$. Тогда любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна с 60 вершинами из Ω , поэтому $a^\perp = \Omega$, $\alpha_0(g) = 205$ и $\alpha_1(g) = 0$. Теперь $\chi_2(g) = 820/40 + 5$, противоречие. Лемма доказана.

Ввиду леммы 1.3 можно считать, что Ω содержит геодезический 2-путь и ввиду предложения 1 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$.

Лемма 1.4. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c . Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) $p = 3$, Ω является объединением $3t + 1$ полных многодольных графов $K_{4 \times 2}$, $t \leq 5$ и $\alpha_1(g) = 96t + 120t + 72$;
- (2) $p = 2$, $|\Omega| \leq 240$, $\lambda_\Omega = 0, 2, \dots, 26$, и степени вершин в Ω равны $0, 2, \dots, 34$.

Доказательство. Пусть Ω содержит геодезический 2-путь b, a, c . Если $p = 17$, то по предложению 1 граф Ω является одновершинным, противоречие с предположением.

Если $p = 5, 7$, то по предложению 1 граф Ω является объединением изолированных клик, противоречие с предположением.

Если $p = 3$, то согласно предложению 1 граф Ω является объединением $3m + 1$ изолированных подграфов $K_{4 \times 2}$. Ввиду леммы 1.1 имеем $m \leq 5$. Далее, $\chi_2(g) = (32(3m + 1) - \alpha_1(g))/40 + 5$ и $\alpha_1(g) = 96m + 120t + 72$.

Если $p = 2$, то $|\Omega| = 2l \leq 240$, $\lambda_\Omega = 0, 2, \dots, 26$, и степени вершин в Ω равны $0, 2, \dots, 34$. Далее, число $\chi_2(g) = (8l - \alpha_1(g))/40 + 5$ нечетно и $\alpha_1(g) = 80t + 8l$.

Лемма и теорема 1 доказаны.

2. Сильно регулярный граф с параметрами (800,204,28,60) не является реберно симметричным

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (800,204,28,60), группа $G = \text{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ , $|G|$ делится на 17, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда $|G : G_a| = 800$ и по теореме 1 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 17\}$.

Лемма 2.1. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ порядка $p < 17$, то либо Ω является l -кликкой, $p = 3$, $l = 35, 86$ или $p = 2$, $l = 18, 52, 86$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 52, 86, 120, 154, 188, 222$ и $|\Omega(a)| = 34$;*

(2) $S(G) = O_2(G)$;

(3) *цоколь \bar{T} группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $Sp_8(2)$.*

Доказательство. Пусть f — элемент из G порядка 17, g — элемент из $C_G(f)$ порядка $p < 17$. Тогда $\text{Fix}(f) = \{a\}$ — одновершинный граф. Из действия f на Ω следует, что $|\Omega| - 1$ делится на 17. Ввиду теоремы 1 либо Ω является l -кликкой, $p = 3$, $l = 35, 86$ или $p = 2$, $l = 18, 52, 86$, либо Ω содержит геодезический 2-путь, $p = 2$, $|\Omega| = 52, 86, 120, 154, 188, 222$ и $|\Omega(a)| = 34$.

Так как $v = 800$, то $S(G)$ является $\{2, 5\}$ -группой. Пусть P — силовская 5-подгруппа из $S(G)$. Тогда $|P : P_a|$ делит 25. По лемме 8 из [3] имеем $S(G_a) = O_2(G_a)$, поэтому $|P_a| = 1$. Из действия элемента порядка 17 группы G на P следует, что $|P| = 1$.

Ввиду [7, табл. 1] цокль \bar{T} группы $\bar{G} = G/O_2(G)$ изоморфна $L_2(16)$, $L_2(17)$, $Sp_4(4)$, $\Omega_8^-(2)$, $L_4(4)$, $Sp_8(2)$.

Лемма доказана.

Так как \bar{T} не содержит собственных подгрупп индекса, делящегося на 25 и делящего 800, то имеем противоречие, доказывающее следствие 1.

3. Автоморфизмы графа с массивом пересечений {204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204}

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ и спектром $204^1, 34^{480}, 4^{714}, -6^{2720}, -36^{85}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Лемма 3.1. *Пусть χ_1 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 480, и χ_4 — характер, полученный при проектировании $\psi(G)$ на подпространство размерности 85. Тогда $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/200$ и $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/200 - 15$. Далее, $\chi_1(g) - 210$, и $\chi_4(g) - 85$ делятся на p .*

Доказательство. Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 480 & 80 & 0 & -20 & -120 \\ 714 & 14 & -6 & 14 & 714 \\ 2720 & -80 & 0 & 20 & -680 \\ 85 & -15 & 5 & -15 & 85 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (24\alpha_0(g) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/200$.

Аналогично $\chi_4(g) = (17\alpha_0(g) - 3\alpha_1(g) + \alpha_2(g) - 3\alpha_3(g) + 17\alpha_4(g))/800$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = v - \alpha_0(g) - \alpha_2(g) - \alpha_4(g)$, получим $\chi_4(g) = (5\alpha_0(g) + \alpha_2(g) + 5\alpha_4(g))/200 - 15$.

Последнее утверждение леммы следует из [6, лемма 1].

Лемма доказана.

Лемма 3.2. Если g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$, то $p = 5$ и $\alpha_4(g) = v$. Более того, порядок подгруппы из G , индуцирующей тривиальные автоморфизмы $\bar{\Gamma}$, делит 5.

Доказательство. По условию $\alpha_i(g)$ не равно 0, быть может, только для $i = 0, 4$. Если $u = u^g$, то $[u]$ состоит из неподвижных относительно g вершин. Поэтому g оставляет неподвижной каждую вершину из Γ , противоречие. Значит, $\alpha_4(g) = v$. Так как $r = 5$, то порядок подгруппы из G , индуцирующей тривиальные автоморфизмы $\bar{\Gamma}$, делит 5.

Лемма доказана.

Лемма 3.3. Если g индуцирует нетривиальный автоморфизм графа $\bar{\Gamma}$, то выполняется одно из утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000m$, $\alpha_1(g) = 200n + 800 - 200m$, $\alpha_3(g) = -200n + 3200 - 800m$ или $p = 2$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 400m$, $\alpha_1(g) = 80n + 800 - 80m$, $\alpha_3(g) = 3200 - 80n - 320m$;

(2) Ω — антиподальный класс, $p = 17$, $\alpha_1(g) = 340 + 680e$, $\alpha_2(g) = 2975$, $\alpha_3(g) = 680(1 - e)$;

(3) Ω — объединение двух антиподальных классов, содержащее ребро, $p = 7$, $\alpha_2(g) = 350l$, $\alpha_1(g) = 280m + 910 - 70l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$, $l = 1, 5, 9$;

(4) $|\Omega| = 25$, $p = 5$, $\alpha_4(g) = 0$, $\alpha_2(g) = 1000l - 125$, $\alpha_1(g) = 200n + 700$, $\alpha_3(g) = 3400 - 1000l - 200n$;

(5) Ω — клика, либо $p = 3$, $|\Omega| = 5(3m + 2) - \alpha_4(g)$, $m \leq 39$, $\alpha_4(g) = 60m + 120n - 120e - 720 + 6l$, $\alpha_1(g) = 6l$, $\alpha_2(g) = 600n - 75m + 150$ и $\alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n - 6l$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $\alpha_4(g) = (20l - 400 + 40(n - e) - 2m)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ и $\alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n - 4m$;

(6) $|\Omega| = 25m - \alpha_4(g)$, $p = 5$, $m \leq 5$, $\alpha_4(g) = 25t$, $\alpha_1(g) = -100m + 800 + 200(e - n) + 25t$, $\alpha_2(g) = 1000n - 125m$ и $\alpha_3(g) = 3200 - 800n - 200e + 200m - 25t$;

(7) $|\Omega| = 40(3m + 1) - \alpha_4(g)$, $p = 3$, $m \leq 5$, $\alpha_4(g) = 24t$, $\alpha_1(g) = -480m + 600 + 120(e - n) + 144t$, $\alpha_2(g) = 600(n - m)$ и $\alpha_3(g) = 3360 - 480n + 960m - 120e - 144t$;

(8) $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$, $p = 2$, $l \leq 120$, $\alpha_4(g) = (20l + 2m - 400 + 40n - 200e)/3$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_2(g) = 400n - 50l$ и $\alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l - 4m$.

Доказательство. Заметим, что $\bar{\Omega}$ — один из графов в заключении теоремы 1.

Если $\bar{\Omega}$ — пустой граф, то и Ω — пустой граф. В случае $p = 5$ имеем $\alpha_4(g) = 0$, по лемме 3.1 число $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/200 - 15$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 1000m$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 - 1000m$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 800 + 200m)/40$ делится на 5, поэтому $\alpha_1(g) = 200n + 800 - 200m$, $\alpha_3(g) = -200n + 3200 - 800m$.

В случае $p = 2$ имеем $\alpha_4(g) = 0$, число $\chi_4(g) = \alpha_2(g)/200 - 15$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 400m$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 - 400m$, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 800 + 80m)/40$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 80n + 800 - 80m$, $\alpha_3(g) = 3200 - 80n - 320m$.

Пусть $\bar{\Omega}$ является n -кликкой. Если $p = 17$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_1(g) = (120 + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/200$, $\chi_4(g) = (25 + \alpha_2(g))/200 - 15$, поэтому $\alpha_2(g) = 25 \cdot 17l$ и $17l + 1$ делится на 8. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/5 = 595$, поэтому $l = 7$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 85 \cdot 12 = 1020$ и $4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) = 200m - 120$ делится на 17. Отсюда $m = 17e + 4$, $\alpha_1(g) = 680e + 340$, $\alpha_3(g) = 680 - 680e$.

Если $p = 7$, то $\alpha_4(g) = 0$, $\chi_1(g) = (240 + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/200$, $\chi_4(g) = (50 + \alpha_2(g))/200 - 15$, поэтому $\alpha_2(g) = 50 \cdot 7l$ и $7l + 1$ делится на 4. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/5 = 630 - 280t = 70l$ и $l = 9 - 4t = 1, 5, 9$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 70(57 - 5l)$, $\chi_1(g) = (48 + \alpha_1(g) - 14(57 - 5l))/40$ и $\alpha_1(g) = 280m + 112 + 14(57 - 5l)$. Отсюда $\alpha_1(g) = 280m + 910 - 70l$, $\alpha_3(g) = 3080 - 280l - 280n$.

Если $p = 5$, то $|\Omega| = 25 - \alpha_4(g)$. Заметим, что либо $\alpha_4(g) = 0$, либо $|\Omega| = 0$. Теперь число $\chi_4(g) = (125 + \alpha_2(g))/200 - 15$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 1000l - 125$. С другой стороны, ввиду теоремы 1 имеем $\alpha_2(g)/5 = 775 - 200s = 200l - 25$ и $s + l = 4$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4100 - 1000l$, число $\chi_1(g) = (24 \cdot 25 + 5\alpha_1(g) - 4100 + 1000l)/200$ делится на 5, поэтому $-700 + \alpha_1(g) = 200n$, $\alpha_1(g) = 200n + 700$, $\alpha_3(g) = 3400 - 1000l - 200n$.

Если $\bar{\Omega}$ — коклика, то и Ω — коклика. Пусть $p = 3$, $|\Omega| = 5(3m + 2) - \alpha_4(g)$. Тогда число $\chi_4(g) = (25(3m + 2) + \alpha_2(g))/200 - 15$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_2(g) = 600n - 75m + 150$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n$, число $\chi_1(g) = (24(5(3m + 2) - \alpha_4(g)) + 4\alpha_1(g) - \alpha_3(g) - 6\alpha_4(g))/200$ делится на 3, поэтому $60m - 6\alpha_4(g) + \alpha_1(g) - 720 + 120n = 120e$, $\alpha_1(g) = 6l$, $\alpha_4(g) = 60m + 120n - 120e - 720 + 6l$ и $\alpha_3(g) = 3840 + 60m - 600n - 6l$.

Пусть $p = 2$, $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$. Тогда число $\chi_4(g) = (50l + \alpha_2(g))/200 - 15$ нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 400n - 50l$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n$, число $\chi_1(g) = (240l - 30\alpha_4(g) + 5\alpha_1(g) - (4000 + 40l - 400n))/200$ четно, поэтому $40l - 6\alpha_4(g) + \alpha_1(g) - 800 + 80n = 80e$, $\alpha_1(g) = 4m$, $\alpha_4(g) = (20l - 400 + 40(n - e) - 2m)/3$ и $\alpha_3(g) = 4000 + 40l - 400n - 4m$.

Пусть Ω является объединением m изолированных 5-клик, $p = 5$, $2 \leq m \leq 5$, Тогда $|\Omega| = 25m - \alpha_4(g)$, причем $\alpha_4(g) = 25t$. Далее, число $\chi_4(g) = (125m + \alpha_2(g))/200 - 15$ делится на 5, поэтому $\alpha_2(g) = 1000n - 125m$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 - 1000n + 100m$, число $\chi_1(g) = (120m + \alpha_1(g) - (800 - 200n + 20m) - 25t)/40$ делится на 5. Отсюда $\alpha_1(g) = -100m + 800 + 200(e - n) + 25t$ и $\alpha_3(g) = 3200 - 800n - 200e + 200m - 25t$.

Пусть $p = 3$, $\bar{\Omega}$ — объединение $3m + 1$ изолированных $K_{4 \times 2}$ -подграфов. Тогда $|\Omega| = 40(3m + 1) - \alpha_4(g)$, причем $\alpha_4(g) = 24t$. Далее, число $\chi_4(g) = (200(3m + 1) + \alpha_2(g))/200 - 15$ сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $\alpha_2(g) = 600(n - m)$. Теперь $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 3960 - 600n + 480m$, число $\chi_1(g) = (192(3m + 1) + \alpha_1(g) - (792 - 120n + 96m) - 144t)/40$ делится на 3. Отсюда $\alpha_1(g) = -480m + 600 + 120(e - n) + 144t$ и $\alpha_3(g) = 3360 - 480n + 960m - 120e - 144t$.

Пусть $p = 2$, $|\Omega| = 10l - \alpha_4(g)$ и $l \leq 120$. Тогда число $\chi_4(g) = (50l + \alpha_2(g))/200 - 15$, нечетно, поэтому $\alpha_2(g) = 400n - 50l$. Далее, $\alpha_1(g) + \alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l$, число $\chi_1(g) = (240l + 5\alpha_1(g) - (4000 - 400n + 40l) - 30\alpha_4(g))/200$ четно. Отсюда $40l + \alpha_1(g) - 800 + 80n - 6\alpha_4(g) = 400e$, $\alpha_1(g) = 4m$ и $\alpha_4(g) = (20l + 2m - 400 + 40n - 200e)/3$. Наконец, $\alpha_3(g) = 4000 - 400n + 40l - 4m$. Лемма доказана.

Из лемм 3.2, 3.3 следует теорема 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их расширениях // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, №3. С. 207–214.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** Об автоморфизмах сильно регулярных графов с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(595, 144, 18, 40)$ // Дискретная математика, алгебра и их приложения : тез. докл. Междунар. науч. конф. (Минск, 14–18 сентября 2015 г.). Минск, 2015. С. 119–120.
4. **Cameron P.J.** Permutation groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. 220 p. (London Math. Soc. Student Texts № 45.)

5. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // *Eur. J. Comb.* 1993. Vol. 14. P. 397–407.
6. **Гаврилюк А.Л., Махнев А.А.** Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // *Докл. АН.* 2010. Т. 432, № 5. С. 512–515.
7. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // *Sib. Elektron. Mat. Izv.* 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом

Поступила 27.08.2015

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Нирова Марина Сефовна
д-р физ.-мат. наук
доцент

Кабардино-Балкарский госуниверситет,
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

УДК 519.17

НЕБОЛЬШИЕ AT_4 -ГРАФЫ И ОТВЕЧАЮЩИЕ ИМ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНЫЕ ПОДГРАФЫ¹

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Пусть \mathcal{M} — класс сильно регулярных графов, для которых μ является неглавным собственным значением. Заметим, что окрестность любой вершины AT_4 -графа лежит в \mathcal{M} . Ранее было получено описание параметров графов из \mathcal{M} . В работе найдены массивы пересечений небольших AT_4 -графов и параметры отвечающих им сильно регулярных графов.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, AT_4 -граф, локально \mathcal{M} -графы.

A. A. Makhnev, D. V. Paduchikh. Small AT_4 -graphs and strongly regular subgraphs corresponding to them.

Let \mathcal{M} be the class of strongly regular graphs for which μ is a nonprincipal eigenvalue. Note that the neighborhood of any vertex of an AT_4 -graph lies in \mathcal{M} . Parameters of graphs from \mathcal{M} were described earlier. We find intersection arrays of small AT_4 -graphs and of strongly regular graphs corresponding to them.

Keywords: strongly regular graph, AT_4 -graph, locally \mathcal{M} -graphs.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , т. е., подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ , число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом).

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он содержит v вершин, регулярен степени k и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых \mathcal{L} называется α -частичной геометрией порядка (s, t) , если каждая прямая содержит $s + 1$ точку, каждая точка лежит на $t + 1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой и для любого антифлага $(a, L) \in (P, \mathcal{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение: $pG_\alpha(s, t)$ или pG_α). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается как $GQ(s, t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s, t)$ сильно регулярен с $v = (s + 1)(1 + st/\alpha)$, $k = s(t + 1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t + 1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s, t)$.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 14-11-00061 (теоремы 2 и 3) и соглашения между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, № 02.А03.21.0006 (теорема 1).

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$, если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \dots, d$. Далее, через $p_{ij}^l(x, y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y , находящихся на расстоянии l в графе Γ . В дистанционно регулярном графе числа $p_{ij}^l(x, y)$ не зависят от выбора вершин x, y , обозначаются p_{ij}^l и называются числами пересечения графа Γ (см. [1]).

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ — собственные значения Γ . По [2] выполняется фундаментальная граница

$$\left(\theta_1 + \frac{k}{a_1 + 1}\right) \left(\theta_d + \frac{k}{a_1 + 1}\right) \geq -\frac{ka_1 b_1}{(a_1 + 1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1 + \theta_d}, \quad b^- = -1 - \frac{b_1}{1 + \theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется *плотным*. Окрестность любой вершины в плотном графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^- . Фундаментальная граница может быть записана в виде $k(a_1 + b^+ b^-) \leq (a_1 - b^+)(a_1 - b^-)$. Хорошо известно (см., например, [2, теорема 3.2]), что плотный граф диаметра 3 является графом Тэйлора. В этом случае окрестность любой вершины является сильно регулярным графом с $k' = 2\mu'$.

Пусть Γ — антиподальный граф диаметра 4. Тогда согласно по [1, предложение 4.2.2] Γ имеет массив пересечений $\{k, k - a_1 - 1, (r - 1)c_2, 1; 1, c_2, k - a_1 - 1, k\}$. По [2, теорема 5.2] Γ является плотным тогда и только тогда, когда $q_{11}^4 = 0$. Если Γ — плотный граф с окрестностью вершины, имеющей неглавные собственные значения $p = b^+, -q = b^-$, то все параметры Γ выражаются через p, q, r . В этом случае назовем Γ антиподальным плотным графом диаметра 4 с параметрами p, q, r (AT4(p, q, r)-графом). В AT4(p, q, r)-графе окрестности вершин сильно регулярны с неглавным собственным значением $\mu = p$. Скажем, что в графе Γ параметр γ существует, если $|[u] \cap [w] \cap [z]| = \gamma$ для любых вершин u, w, z с условиями $d(u, w) = 1, d(u, z) = d(w, z) = 2$. В AT4(p, q, r)-графе параметр γ существует и $\gamma = c_2(a_1 - p)/a_2$.

Через \mathcal{M} обозначим класс сильно регулярных графов с параметрами (v, k, λ, μ) , для которых μ является неглавным собственным значением. В [3] представлено описание параметров графов из \mathcal{M} и получены некоторые ограничения на параметры AT4(p, q, r)-графов.

Предложение 1 (см. [3, пп. (1), (2) предложения, п. (3) леммы 2.1, п. (1) теоремы 2]).

Если $\Delta \in \mathcal{M}$, то выполняются следующие утверждения:

(1) Δ имеет параметры $(t^2\mu + t\mu + t^2, (t + 1)\mu, 2\mu - t, \mu)$ и собственные значения $\mu, -t$;

(2) $2\mu \geq t$, причем $2\mu = t$ тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$;

(3) $\mu + t$ делит $(\mu - 1, t + 1)(\mu + 1, t - 1)(\mu, t)^2$;

(4) если $\mu = t\alpha$, то Δ — псевдогеометрический граф для $rG_\alpha(t\alpha + \alpha, t - 1)$.

Предложение 2 (см. [3, п. (3) теоремы 2]). Пусть Γ является AT4(p, q, r)-графом, u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. Если $q = p + 2$, то выполняются следующие утверждения:

(1) число $2p(p + 1)(p + 2)/r$ четно, $r < p + 2$, r делит $2(p + 1)$ и Γ — граф с массивом пересечений $\{(p + 1)(p + 2)^2, (p + 3)(p + 1)^2, (r - 1)2(p + 1)(p + 2)/r, 1; 1, 2(p + 1)(p + 2)/r, (p + 3)(p + 1)^2, (p + 1)(p + 2)^2\}$;

(2) антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ является графом с параметрами $((p + 1)^2(p + 4)^2/2, (p + 2)(p^2 + 4p + 2), p(p + 3), 2(p + 1)(p + 2))$ и собственными значениями $p, -(p^2 + 4p + 4)$;

(3) вторая окрестность вершины в графе $\bar{\Gamma}$ — сильно регулярный граф с параметрами $((p + 1)(p + 3)(p^2 + 4p + 2), p(p + 2)^2, p^2 + p - 2, 2p(p + 1))$ и собственными значениями $p, -(p^2 +$

$2p+2$), имеющий дистанционно регулярное r -накрытие с массивом пересечений $\{p(p+2)^2, (p+1)^3, 2(r-1)p(p+1)/r, 1; 1, 2p(p+1)/r, (p+1)^3, p(p+2)^2\}$.

В данной работе найдены массивы пересечений небольших $AT4(p, q, r)$ -графов и параметры отвечающих им сильно регулярных графов.

Теорема 1. Пусть Δ является сильно регулярным графом с параметрами $(m^2\mu + t\mu + m^2, (m+1)\mu, 2\mu - t, \mu)$ и собственными значениями $\mu, -t$. Если $m^2\mu + t\mu + m^2 \leq 1000$, то выполняется одно из утверждений:

- (1) $t = 1$ и Δ является $(2\mu + 1)$ -кликкой;
- (2) $t = 2$, Δ — граф Петерсена с параметрами $(10, 3, 0, 1)$, псевдогеометрический граф для $GQ(3, 1)$ (граф Шрикханде или (4×4) -решетка с параметрами $(16, 6, 2, 2)$) или псевдогеометрический граф для $pG_2(6, 1)$ (граф с параметрами $(28, 12, 6, 4)$);
- (3) $t = 3$, Δ — граф с параметрами $(69, 20, 7, 5)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(4\alpha, 2)$, $\alpha = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 23$;
- (4) $t = 4$ и Δ — граф с параметрами $(56, 10, 0, 2)$, $(116, 25, 6, 5)$, $(236, 55, 18, 11)$, $(536, 130, 48, 26)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(5\alpha, 3)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 9$;
- (5) $t = 5$, Δ — граф с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, $(235, 42, 9, 7)$, $(595, 114, 33, 19)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(6\alpha, 4)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$;
- (6) $t = 6$, Δ — граф с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, $(372, 56, 10, 8)$, $(414, 63, 12, 9)$, $(666, 105, 24, 15)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(7\alpha, 5)$, $\alpha = 1, 2$;
- (7) $t = 7$ и Δ — граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$, $(553, 72, 11, 9)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(8\alpha, 6)$, $\alpha = 1, 2$;
- (8) $t = 8$, Δ — граф с параметрами $(352, 36, 0, 4)$, $(496, 54, 4, 6)$, $(784, 90, 12, 10)$, $(1000, 117, 18, 13)$ или псевдогеометрический граф для $GQ(9, 7)$;
- (9) $t = 9$, Δ — граф с параметрами $(621, 60, 3, 6)$, $(711, 70, 5, 7)$ или псевдогеометрический граф для $GQ(10, 8)$;
- (10) $t = 10$, Δ — граф с параметрами $(650, 55, 0, 5)$, $(980, 88, 6, 8)$.

Теорема 2. Пусть Γ является $AT4(p, q, r)$ -графом степени, не большей 1000, $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа Γ , u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. Тогда либо Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha((q+1)\alpha, q-1)$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) Γ — граф Джонсона $J(8, 4)$ с $(p, q, r) = (2, 2, 2)$, половинный 8-куб с $(p, q, r) = (4, 2, 2)$, $3O_6^-(3)$ -граф с $(p, q, r) = (3, 3, 3)$, первый граф Мейкснера с $(p, q, r) = (8, 4, 2)$, второй граф Мейкснера с $(p, q, r) = (8, 4, 4)$, $3O_7(3)$ -граф с $(p, q, r) = (9, 3, 3)$ или второй граф Сойчера с $(p, q, r) = (20, 4, 3)$;
- (2) Γ — граф с $(p, q, r) = (3\alpha, 3, 2)$, $\alpha = 3, 7$, массивом пересечений $\{117, 80, 18, 1; 1, 18, 80, 117\}$ и $\gamma = 6$ или $\{261, 176, 36, 1; 1, 36, 176, 261\}$ и $\gamma = 12$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(378, 117, 36, 36)$ или $(900, 261, 84, 72)$;
- (3) Γ — граф с $(p, q, r) = (4, 4, 2)$, массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$ и $\gamma = 4$ или с $(p, q, r) = (8, 4, 3)$, массивом пересечений $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$ и $\gamma = 4$, или с $(p, q, r) = (16, 4, 2)$, массивом пересечений $\{336, 255, 40, 1; 1, 40, 255, 336\}$ и $\gamma = 10$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(322, 96, 20, 32)$, $(672, 176, 40, 48)$ или $(2479, 336, 100, 96)$;
- (4) Γ — граф с $(p, q, r) = (10, 5, 3)$, массивом пересечений $\{325, 264, 50, 1; 1, 25, 264, 325\}$ и $\gamma = 5$ или с $(p, q, r) = (15, 5, 2)$, массивом пересечений $\{475, 384, 50, 1; 1, 50, 384, 475\}$ и $\gamma = 10$, или с $(p, q, r) = (25, 5, 3)$, массивом пересечений $\{775, 624, 100, 1; 1, 50, 624, 775\}$ и $\gamma = 10$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(1470, 325, 60, 75)$, $(2300, 475, 90, 100)$ или $(4000, 775, 150, 150)$;
- (5) Γ — граф с $(p, q, r) = (6, 6, r)$, $r = 2, 3$, массивом пересечений $\{288, 245, (r-1)72/r, 1; 1, 72/r, 245, 288\}$ и $\gamma = 6$ или с $(p, q, r) = (12, 6, r)$, $r = 2, 3$, массивом пересечений $\{540, 455, (r-1)108/r, 1; 1, 108/r, 455, 540\}$ и $\gamma = 9$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(1269, 288, 42, 72)$ или $(2816, 540, 84, 108)$;

(6) Γ — граф с $(p, q, r) = (8, 8, r)$, $r = 2, 4$, массивом пересечений $\{640, 567, (r-1)128/r, 1; 1, 128/r, 567, 640\}$ и $\gamma = 8$ или граф с $(p, q, r) = (9, 9, 3)$, массивом пересечений $\{891, 800, 108, 1; 1, 54, 800, 891\}$ и $\gamma = 6$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(3476, 640, 72, 128)$ или $(5292, 891, 90, 162)$,

либо Δ не является псевдогеометрическим графом и выполняется одно из следующих утверждений:

(7) Δ — граф Петерсена или граф Гевиртца, Γ — граф Конвея — Смита с $(p, q, r) = (1, 2, 3)$ или первый граф Сойчера с $(p, q, r) = (2, 4, 3)$;

(8) Δ — граф с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, Γ — граф с $(p, q, r) = (3, 5, 4)$, массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$ и $\gamma = 2$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(392, 115, 18, 40)$;

(9) Δ — граф с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, Γ — граф с $(p, q, r) = (4, 6, 5)$, массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ и $\gamma = 2$ или Δ — граф с параметрами $(414, 63, 12, 9)$, Γ — граф с $(p, q) = (9, 6)$, $r = 3, 5$, массивом пересечений $\{414, 350, (r-1)90/r, 1; 1, 90/r, 350, 414\}$ и $\gamma = 5$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$ или $(2025, 414, 63, 90)$;

(10) Δ — граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$, Γ — граф с $(p, q) = (5, 7)$, $r = 3, 6$, массивом пересечений $\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\}$ и $\gamma = 4$ или Δ — граф с параметрами $(496, 54, 4, 6)$, Γ — граф с $(p, q, r) = (6, 8, 7)$, массивом пересечений $\{496, 441, 96, 1; 1, 16, 441, 496\}$ и $\gamma = 2$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(1458, 329, 40, 84)$ или $(2450, 496, 54, 112)$;

(11) Δ — граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$, Γ — граф с $(p, q) = (7, 9)$, $r = 4, 8$, массивом пересечений $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$ и $\gamma = 4$ или Δ — граф с параметрами $(980, 88, 6, 8)$, Γ — граф с $(p, q) = (8, 10)$, $r = 3, 6, 9$, массивом пересечений $\{980, 891, (r-1)180/r, 1; 1, 180/r, 891, 980\}$ и $\gamma = 6$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(3872, 711, 70, 144)$ или $(5832, 980, 88, 180)$.

Имеется гипотетическая серия $AT_4(q, q, r)$ -графов, которые являются локально псевдо $GQ(q+1, q-1)$ -графами. В случаях $q = 2, 3$ имеем граф Джонсона $J(8, 4)$ с $(p, q, r) = (2, 2, 2)$ и $3O_6^-(3)$ -граф с $(p, q, r) = (3, 3, 3)$, которые являются локально $GQ(q+1, q-1)$ -графами. По [4] $AT_4(q, q, q)$ -графы не существуют для $q > 3$. В [5] доказано, что $AT_4(4, 4, 2)$ -граф не является локально $GQ(5, 3)$ -графом.

Теорема 3. Пусть Γ является $AT_4(p, p+2, r)$ -графом степени, не большей 1000. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Γ — первый граф Сойчера с $(p, p+2, r) = (2, 4, 3)$ и массивом пересечений $\{56, 45, 24, 1; 1, 12, 45, 56\}$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(162, 56, 10, 24)$ и неглавные собственные значения $2, -16$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(56, 10, 0, 2)$ и $(105, 32, 4, 12)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$;

(2) Γ — граф с $(p, q, r) = (3, 5, 4)$ и массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(392, 115, 18, 40)$ и неглавные собственные значения $3, -25$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(115, 18, 1, 3)$ и $(276, 75, 10, 24)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{75, 64, 18, 1; 1, 6, 64, 75\}$;

(3) Γ — граф с $(p, q, r) = (4, 6, 5)$ и массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(800, 204, 28, 60)$ и неглавные собственные значения $4, -36$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(204, 28, 2, 4)$ и $(595, 144, 18, 40)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{144, 125, 32, 1; 1, 8, 125, 144\}$;

(4) Γ — граф с $(p, q) = (5, 7)$, $r = 3, 6$ и массивом пересечений $\{329, 288, (r-1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\}$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(1458, 329, 40, 84)$ и неглавные собственные значения $5, -49$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(329, 40, 3, 5)$ и $(1128, 245, 28, 60)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{245, 216, (r-1)60/r, 1; 1, 60/r, 216, 245\}$;

(5) Γ — граф с $(p, q, r) = (6, 8, 7)$ и массивом пересечений $\{496, 441, 96, 1; 1, 16, 441, 496\}$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(2450, 496, 54, 112)$ и неглавные собственные значения $6, -64$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(496, 54, 4, 6)$ и $(1953, 384, 40, 84)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{384, 343, 72, 1; 1, 12, 343, 384\}$;

(6) Γ — граф с $(p, q) = (7, 9)$, $r = 4, 8$ и массивом пересечений $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(3872, 711, 70, 144)$ и неглавные собственные значения $7, -81$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(711, 70, 5, 7)$ и $(3160, 567, 54, 112)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{567, 512, (r-1)112/r, 1; 1, 112/r, 512, 567\}$;

(7) Γ — граф с $(p, q) = (8, 10)$, $r = 3, 6, 9$ и массивом пересечений $\{980, 891, (r-1)180/r, 1; 1, 180/r, 891, 980\}$, $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(5832, 980, 88, 180)$ и неглавные собственные значения $8, -100$, первая и вторая окрестности вершины в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(980, 88, 6, 8)$ и $(4851, 800, 70, 144)$, вторая окрестность вершины в Γ является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{800, 729, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 729, 800\}$.

В [6] доказана единственность дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$.

Имеется гипотеза о вложении гипервалов в $GQ(9, 7)$, справедливость которой влечет несуществование AT_4 -графа, в котором окрестности вершин — точечные графы для $GQ(9, 7)$.

Предположение 1. *Обобщенный четырехугольник $GQ(9, 7)$ не содержит четверку изолированных регулярных подграфов без треугольников степени 8 на 32 вершинах.*

В разд. 1 найдены параметры графов из \mathcal{M} , имеющих не более 1000 вершин. В разд. 2 исследованы AT_4 -графы, в которых окрестности вершин — графы из \mathcal{M} с параметрами из разд. 1.

1. Параметры небольших графов из \mathcal{M}

Сначала приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1.1 (см., например, [7, § 2]). *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и неглавными собственными значениями r, s , $s < 0$. Если D — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - D$ смежна точно с $w(k-d)/(v-w)$ вершинами из D .

Лемма 1.2 [2, теорема 5.4, следствие 5.6]. *Пусть Γ является $AT_4(p, q, r)$ -графом. Тогда Γ — граф с массивом пересечений $\{q(pq+p+q), (q^2-1)(p+1), (r-1)q(p+q)/r, 1; 1, q(p+q)/r, (q^2-1)(p+1), q(pq+p+q)\}$, $a_1 = a_3 = p(q+1)$, $a_2 = pq^2$, $a_4 = 0$, антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $\bar{k} = k$, $\bar{\lambda} = a_1$, $\bar{\mu} = q(p+q)$ и собственные значения $p, -q^2$, а параметры окрестности вершины в Γ равны $k' = p(q+1)$, $\lambda' = 2p - q$, $\mu' = p$.*

Лемма 1.3 [2, теорема 6.1; 4, теорема 4.3, следствие 4.1]. *Пусть Γ является $AT_4(p, q, r)$ -графом, отличным от графа Конвея — Смита. Тогда выполняются следующие утверждения:*

- (1) $pq(p+q)/r$ четно, $r(p+1) < q(p+q)$ и r делит $p+q$;
- (2) μ -подграфы из Γ являются полными многодольными тогда и только тогда, когда $(p, q, r) = (\alpha q, q, q)$ для любого натурального α ;
- (3) если $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, то μ -подграфы из Γ являются полными многодольными $K_{t \times n}$ -графами с $n = q\alpha - p$, $t = q\alpha/(q\alpha - p)$.

Напомним, что класс графов \mathcal{M} состоит из сильно регулярных графов с параметрами $(t^2\mu + t\mu + t^2, (t+1)\mu, 2\mu - t, \mu)$. В леммах 1.4–1.6 предполагается, что Δ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) , $v \leq 1000$ и собственными значениями $(k, \mu, -t)$, где $k - \mu = t\mu$ и $\lambda - \mu = \mu - t$. Так как $t^2\mu + t\mu + t^2 \leq 1000$ и $\mu \geq t/2$, то $t^2(t+3) \leq 2000$ и $t \leq 11$.

Лемма 1.4. *Если $t \leq 4$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) $t = 1$ и Δ является $(2\mu + 1)$ -кликкой;
- (2) $t = 2$, Δ — граф Петерсена с параметрами $(10, 3, 0, 1)$, граф Шрикханде или (4×4) -решетка с параметрами $(16, 6, 2, 2)$ или граф с параметрами $(28, 12, 6, 4)$;
- (3) $t = 3$, Δ — граф с параметрами $(69, 20, 7, 5)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(4\alpha, 2)$, $\alpha = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 23$;
- (4) $t = 4$ и Δ — граф с параметрами $(56, 10, 0, 2)$, $(116, 25, 6, 5)$, $(236, 55, 18, 11)$, $(536, 130, 48, 26)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(5\alpha, 3)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 9$.

Доказательство. Пусть $t = 1$. Тогда Δ является $(2\mu + 1)$ -кликкой.

Пусть $t = 2$. Тогда Δ имеет параметры $(6\mu + 4, 3\mu, 2\mu - 2, \mu)$, $\mu + 2$ делит 6μ . Поэтому $\mu = 1, 2, 4, 10$ и Δ — граф Петерсена с параметрами $(10, 3, 0, 1)$, граф Шрикханде или (4×4) -решетка с параметрами $(16, 6, 2, 2)$, граф с параметрами $(28, 12, 6, 4)$ или граф с параметрами $(64, 30, 18, 10)$. Но последний граф не существует по теореме Зейделя о сильно регулярных графах с собственным значением -2 .

Пусть $t = 3$. Тогда Δ имеет параметры $(12\mu + 9, 4\mu, 2\mu - 3, \mu)$, $\mu + 3$ делит 24μ . Поэтому $\mu = 3, 5, 6, 9, 15, 21, 33, 69$ и Δ — граф с параметрами $(69, 20, 7, 5)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(4\alpha, 2)$, $\alpha = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 23$.

Пусть $t = 4$. Тогда Δ имеет параметры $(20\mu + 16, 5\mu, 2\mu - 4, \mu)$, $\mu + 4$ делит 60μ . Поэтому $\mu = 2, 4, 6, 8, 11, 12, 16, 20, 26, 36$ и Δ — граф с параметрами $(56, 10, 0, 2)$, $(136, 30, 8, 6)$, $(236, 55, 18, 11)$, $(536, 130, 48, 26)$ или Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(5\alpha, 3)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 9$.

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если $5 \leq t \leq 7$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) $t = 5$, Δ — граф с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, $(235, 42, 9, 7)$, $(595, 114, 33, 19)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(6\alpha, 4)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$;
- (2) $t = 6$, Δ — граф с параметрами $(162, 21, 0, 3)$, $(204, 28, 2, 4)$, $(372, 56, 10, 8)$, $(414, 63, 12, 9)$, $(666, 105, 24, 15)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(7\alpha, 5)$, $\alpha = 1, 2$;
- (3) $t = 7$, Δ — граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$, $(553, 72, 11, 9)$ или псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(8\alpha, 6)$, $\alpha = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $t = 5$. Тогда Δ имеет параметры $(30\mu + 25, 6\mu, 2\mu - 5, \mu)$, $\mu + 5$ делит 120μ . Поэтому либо $\mu = 3, 7, 19$ и Δ — граф с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, $(235, 42, 9, 7)$, $(595, 114, 33, 19)$, либо Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(6\alpha, 4)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ (так как $v \leq 1000$, то $\alpha < 7$).

Пусть $t = 6$. Тогда Δ имеет параметры $(42\mu + 36, 7\mu, 2\mu - 6, \mu)$, $\mu + 6$ делит 210μ . Поэтому либо $\mu = 3, 4, 8, 9, 15$ и Δ — граф с параметрами $(162, 21, 0, 3)$, $(204, 28, 2, 4)$, $(372, 56, 10, 8)$, $(414, 63, 12, 9)$, $(666, 105, 24, 15)$, либо Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(7\alpha, 5)$, $\alpha = 1, 2, 3$. Но для $\alpha = 3$ число $\mu + 6 = 24$ не делит 210μ .

Пусть $t = 7$. Тогда Δ имеет параметры $(56\mu + 49, 8\mu, 2\mu - 7, \mu)$, $\mu + 7$ делит $7 \cdot 48\mu$. Поэтому либо $\mu = 5, 9, 17$ и Δ — граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$, $(553, 72, 11, 9)$, $(1001, 136, 27, 17)$, либо Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(8\alpha, 6)$, $\alpha = 1, 2$.

Лемма доказана.

Лемма 1.6. *Если $8 \leq t \leq 11$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

- (1) $t = 8$, Δ — граф с параметрами $(352, 36, 0, 4)$, $(496, 54, 4, 6)$, $(784, 90, 12, 10)$, $(1000, 117, 18, 13)$ или псевдогеометрический граф для $GQ(9, 7)$;

(2) $t = 9$, Δ — граф с параметрами $(621, 60, 3, 6)$, $(711, 70, 5, 7)$ или псевдогеометрический граф для $GQ(10, 8)$;

(3) $t = 10$, Δ — граф с параметрами $(650, 55, 0, 5)$, $(980, 88, 6, 8)$.

Доказательство. Пусть $t = 8$. Тогда Δ имеет параметры $(72\mu + 64, 9\mu, 2\mu - 8, \mu)$, $\mu + 8$ делит $8 \cdot 63\mu$. Поэтому $\mu = 4, 6, 10, 13$ и Δ — граф с параметрами $(352, 36, 0, 4)$, $(496, 54, 4, 6)$, $(784, 90, 12, 10)$, $(1000, 117, 18, 13)$ или Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(9, 7)$.

Пусть $t = 9$. Тогда Δ имеет параметры $(90\mu + 81, 10\mu, 2\mu - 9, \mu)$, $\mu + 9$ делит $9 \cdot 80\mu$. Поэтому $\mu = 6, 7$ и Δ — граф с параметрами $(621, 60, 3, 6)$, $(711, 70, 5, 7)$ или Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(10, 8)$.

Пусть $t = 10$. Тогда Δ имеет параметры $(110\mu + 100, 11\mu, 2\mu - 10, \mu)$, $\mu + 10$ делит $10 \cdot 99\mu$. Поэтому $\mu = 5, 8$ и Δ — граф с параметрами $(650, 55, 0, 5)$, $(980, 88, 6, 8)$ или Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(11, 9)$. В последнем случае $v = 1200$, противоречие.

Пусть $t = 11$. Тогда Δ имеет параметры $(132\mu + 121, 12\mu, 2\mu - 11, \mu)$, $\mu + 11$ делит $11 \cdot 120\mu$. Поэтому $\mu \geq 9$ и $v > 1000$ или Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(12, 10)$. В последнем случае $v = 13 \cdot 121$, противоречие.

Лемма и теорема 1 доказаны.

2. Параметры небольших $AT4(p, q, r)$ -графов

В этом разделе предполагается, что Γ является $AT4(p, q, r)$ -графом степени, не большей 1000. Пусть u — вершина графа Γ и $\Delta = [u]$. Тогда Γ — граф с массивом пересечений $\{q(pq + p + q), (q^2 - 1)(p + 1), (r - 1)q(p + q)/r, 1; 1, q(p + q)/r, (q^2 - 1)(p + 1), q(pq + p + q)\}$, параметры антиподального частного $\bar{\Gamma}$ равны $\bar{k} = q(pq + p + q) = k$, $\bar{\lambda} = a_1 = p(q + 1)$, $\bar{\mu} = q(p + q)$. По [2, теорема 6.1] $p + q$ делит $q^2(q^2 - 1)$ и $p + q^2$ делит $q^2(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$.

Лемма 2.1. Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q + 1), q - 1)$, то верно одно из утверждений:

(1) Γ — граф Джонсона $J(8, 4)$ с $(p, q, r) = (2, 2, 2)$, половинный 8-куб с $(p, q, r) = (4, 2, 2)$, $3O_6^-(3)$ -граф с $(p, q, r) = (3, 3, 3)$, первый граф Мейкснера с $(p, q, r) = (8, 4, 2)$, второй граф Мейкснера с $(p, q, r) = (8, 4, 4)$, $3O_7(3)$ -граф с $(p, q, r) = (9, 3, 3)$ или второй граф Сойчера с $(p, q, r) = (20, 4, 3)$;

(2) Γ — граф с $(p, q, r) = (3\alpha, 3, 2)$, $\alpha = 3, 7$, и массивом пересечений $\{117, 80, 18, 1; 1, 18, 80, 117\}$ или $\{261, 176, 36, 1; 1, 36, 176, 261\}$;

(3) Γ — граф с $(p, q, r) = (4, 4, 2)$ и массивом пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$, или с $(p, q, r) = (8, 4, 3)$ и массивом пересечений $\{176, 135, 32, 1; 1, 16, 135, 176\}$, или с $(p, q, r) = (16, 4, 2)$ и массивом пересечений $\{336, 255, 40, 1; 1, 40, 255, 336\}$;

(4) Γ — граф с $(p, q, r) = (10, 5, 3)$ и массивом пересечений $\{325, 264, 50, 1; 1, 25, 264, 325\}$, или с $(p, q, r) = (15, 5, 2)$ и массивом пересечений $\{475, 384, 50, 1; 1, 50, 384, 475\}$, или с $(p, q, r) = (25, 5, 3)$ и массивом пересечений $\{775, 624, 100, 1; 1, 50, 624, 775\}$;

(5) Γ — граф с $(p, q, r) = (6, 6, r)$, $r = 2, 3$, и массивом пересечений $\{288, 245, (r - 1)72/r, 1; 1, 72/r, 245, 288\}$ или с $(p, q, r) = (12, 6, r)$, $r = 2, 3$ и массивом пересечений $\{540, 455, (r - 1)108/r, 1; 1, 108/r, 455, 540\}$;

(6) Γ — граф с $(p, q, r) = (8, 8, r)$, $r = 2, 4$, и массивом пересечений $\{640, 567, (r - 1)128/r, 1; 1, 128/r, 567, 640\}$ или граф с $(p, q, r) = (9, 9, r)$, $r = 2, 3, 6$ и массивом пересечений $\{891, 800, (r - 1)162/r, 1; 1, 162/r, 800, 891\}$.

Доказательство. Пусть $p = \alpha q$. Тогда Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q + 1), q - 1)$, $\alpha + 1$ делит $(q - 1)(q + 1)(q + 2)$ и $q(q^2 - 1)$, а $\alpha + q$ делит $q(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$.

По лемме 1.3 число $q^3\alpha(\alpha + 1)/r$ четно, $r(\alpha q + 1) \leq q^2(\alpha + 1)$ и r делит $q(\alpha + 1)$.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(3, 1)$, то $p = q = r = 2$ и Γ — граф Джонсона $J(8, 4)$, а если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_2(6, 1)$, то $p = 4, q = 2, r = 2$ и Γ — половинный 8-куб.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(4\alpha, 2)$, $\alpha = 1, 2, 3, 5, 7, 11, 23$, то $p = 3\alpha$, $q = 3$. В случаях $\alpha = 1, 2$ число r нечетно, поэтому $r = 3$, а в случаях $\alpha \geq 3$ имеем $r = 2, 3$. По [4] Γ — $3O_6^-(3)$ -граф с $(p, q, r) = (3, 3, 3)$, $3O_7(3)$ -граф с $(p, q, r) = (9, 3, 3)$ или граф с $(p, q, r) = (3\alpha, 3, 2)$, $\alpha = 3, 7, 11, 23$. Но в случаях $\alpha = 11, 23$ число $p + q^2 = 3(3 + \alpha)$ не делит $q^2(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(5\alpha, 3)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, 9$, то $p = 4\alpha$, $q = 4$. Ввиду [4] имеем $r \neq 4$ или Γ — второй граф Мейкснера. В случае $\alpha = 1$ имеем $r = 2$ и Γ имеет массив пересечений $\{96, 75, 16, 1; 1, 16, 75, 96\}$. В случае $\alpha = 2$ имеем $r = 2, 3$ и либо Γ — первый граф Мейкснера с (p, q, r) , равным $(8, 4, 2)$, либо $r = 3$. В случаях $\alpha = 3, 4$ имеем $r = 2$. Но в случае $\alpha = 3$ число $p + q^2 = 4(4 + \alpha)$ не делит $q^2(q^2 - 1)(q^2 + q - 1)(q + 2)$. В случае $\alpha = 5$ имеем $r = 3$ и Γ — второй граф Сойчера с $(p, q, r) = (20, 4, 3)$. В случае $\alpha = 9$ имеем $r = 2$, Γ имеет массив пересечений $\{736, 555, 80, 1; 1, 80, 555, 736\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(6\alpha, 4)$, $\alpha = 1, 2, 3, 4, 5$, то $p = 5\alpha$, $q = 5$. В случае $\alpha = 1$ имеем $r = 5$, а в случае $\alpha = 2$ имеем $r = 3, 5$. В случае $\alpha = 3$ имеем $r = 2, 5$, в случае $\alpha = 4$ имеем $r = 5$, а в случае $\alpha = 5$ имеем $r = 3, 5$. Ввиду [4] тройка (p, q, r) равна $(10, 5, 3)$, $(15, 5, 2)$ или $(25, 5, 3)$.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(7\alpha, 5)$, $\alpha = 1, 2$, то $p = 6\alpha$, $q = 6$. В случае $\alpha = 1$ имеем $r = 2, 3$, а в случае $\alpha = 2$ имеем $r = 2, 3, 6, 9$. В случае $r \geq 6$ имеем $(\alpha + 1)q(2q + 1) < 3r(\alpha q + 2)$, по лемме 1.3 μ -подграфы из Γ являются полными многодольными графами, поэтому $r = 6$, противоречие с [4].

Если Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(8\alpha, 6)$, $\alpha = 1, 2$, то $p = 7\alpha$, $q = 7$. В случае $\alpha = 1$ имеем $r = 7$, а в случае $\alpha = 2$ имеем $r = 3, 7$. По [4] тройка (p, q, r) равна $(14, 7, 3)$. Но в этом случае некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Если Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(9, 7)$, то ввиду [4] тройка (p, q, r) равна $(8, 8, 2)$ или $(8, 8, 4)$. Если Δ — псевдогеометрический граф для $GQ(10, 8)$, то $p = q = 9$ и ввиду [4] имеем $r = 2, 3, 6$.

Лемма доказана.

Если Δ — граф Петерсена или граф Гевиртца, то Γ — граф Конвея — Смита с $(p, q, r) = (1, 2, 3)$ или первый граф Сойчера с $(p, q, r) = (5, 3, 4)$. В дальнейшем будем предполагать, что Δ не является графом Петерсена или графом Гевиртца.

Лемма 2.2. *Если $q \leq 5$, то Δ — граф с параметрами $(115, 18, 1, 3)$, Γ — граф с $(p, q, r) = (3, 5, 4)$ и массивом пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Δ — граф с параметрами $(69, 20, 7, 5)$. Тогда $(p, q) = (5, 3)$. По лемме 1.3 число $pq(p + q)/r$ четно, $r(p + 1) < q(p + q)$ и r делит $p + q$, поэтому $r = 2$, Γ имеет массив пересечений $\{69, 48, 12, 1; 1, 12, 48, 69\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(116, 25, 6, 5)$. Тогда $(p, q) = (5, 4)$. По лемме 1.3 число $180/r$ четно, $6r < 36$ и r делит 9, поэтому $r = 3$, Γ имеет массив пересечений $\{116, 90, 24, 1; 1, 12, 90, 116\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(236, 55, 18, 11)$. Тогда $(p, q) = (11, 4)$. По лемме 1.3 число $4/r$ четно, $12r < 60$ и r делит 15, поэтому $r = 3$, Γ имеет массив пересечений $\{236, 180, 40, 1; 1, 20, 180, 236\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(536, 130, 48, 26)$. Тогда $(p, q) = (26, 4)$. По лемме 1.3 число $16/r$ четно, $26r < 120$ и r делит 30, поэтому $r = 2, 3$, Γ имеет массив пересечений $\{536, 405, (r - 1)120/r, 1; 1, 120/r, 405, 536\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(115, 18, 1, 3)$. Тогда $(p, q) = (3, 5)$. По лемме 1.3 число $8/r$ четно, $4r < 40$ и r делит 8, поэтому $r = 2, 4$. По [3] граф с $(p, q, r) = (3, 5, 2)$ не существует. Поэтому $r = 4$ и Γ имеет массив пересечений $\{115, 96, 30, 1; 1, 10, 96, 115\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(235, 42, 9, 7)$. Тогда $(p, q) = (7, 5)$. По лемме 1.3 число $4/r$ четно, $8r < 60$ и r делит 12, поэтому $r = 2, 3, 6$, Γ имеет массив пересечений $\{235, 192, (r - 1)60/r, 1; 1, 60/r, 192, 235\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(595, 114, 33, 19)$. Тогда $(p, q) = (19, 5)$. По лемме 1.3 число $8/r$ четно, $20r < 120$ и r делит 24, поэтому $r = 2, 3, 4$, Γ имеет массив пересечений $\{595, 480, (r - 1)120/r, 1; 1, 120/r, 480, 595\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если $q = 6$, то Δ — граф с параметрами $(204, 28, 2, 4)$, Γ — граф с $(p, q, r) = (4, 6, 5)$ и массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$ или Δ — граф с параметрами $(414, 63, 12, 9)$, Γ — граф с $(p, q) = (9, 6)$, $r = 3, 5$ и массивом пересечений $\{414, 350, (r - 1)90/r, 1; 1, 90/r, 350, 414\}$.*

Доказательство. Пусть Δ — граф с параметрами $(162, 21, 0, 3)$. Тогда $(p, q) = (3, 6)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $4r < 54$ и r делит 9, поэтому $r = 3, 9$. В случае $r = 9$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ -подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. Значит, $r = 3$, Γ имеет массив пересечений $\{162, 140, 36, 1; 1, 18, 140, 162\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(204, 28, 2, 4)$. Тогда $(p, q) = (4, 6)$. По лемме 1.3 число $16/r$ четно, $5r < 60$ и r делит 10, поэтому $r = 2, 5$. По [3] граф с $(p, q, r) = (4, 6, 2)$ не существует. Поэтому $r = 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(372, 56, 10, 8)$. Тогда $(p, q) = (8, 6)$. По лемме 1.3 число $32/r$ четно, $9r < 84$ и r делит 14, поэтому $r = 2, 7$, Γ имеет массив пересечений $\{372, 315, (r - 1)84/r, 1; 1, 84/r, 315, 372\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(414, 63, 12, 9)$. Тогда $(p, q) = (9, 6)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $10r < 90$ и r делит 15, поэтому $r = 3, 5$, Γ имеет массив пересечений $\{414, 350, (r - 1)90/r, 1; 1, 90/r, 350, 414\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(666, 105, 24, 15)$. Тогда $(p, q) = (15, 6)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $16r < 126$ и r делит 21, поэтому $r = 3, 7$, Γ имеет массив пересечений $\{666, 560, (r - 1)126/r, 1; 1, 126/r, 560, 666\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если $6 < q < 9$, то Δ — граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$, Γ — граф с $(p, q) = (5, 7)$, $r = 3, 6$ и массивом пересечений $\{329, 288, (r - 1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\}$ или Δ — граф с параметрами $(496, 54, 4, 6)$, Γ — граф с $(p, q, r) = (6, 8, 7)$ и массивом пересечений $\{496, 441, 96, 1; 1, 16, 441, 496\}$.*

Доказательство. Пусть Δ — граф с параметрами $(329, 40, 3, 5)$. Тогда $(p, q) = (5, 7)$. По лемме 1.3 число $4/r$ четно, $6r < 84$ и r делит 12, поэтому $r = 2, 3, 6$. По [3] граф с $(p, q, r) = (5, 7, 2)$ не существует. Поэтому $r = 3, 6$ и Γ имеет массив пересечений $\{329, 288, (r - 1)84/r, 1; 1, 84/r, 288, 329\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(553, 72, 11, 9)$. Тогда $(p, q) = (9, 7)$. По лемме 1.3 число $16/r$ четно, $10r < 112$ и r делит 16, поэтому $r = 2, 4, 8$, Γ имеет массив пересечений $\{553, 480, (r - 1)112/r, 1; 1, 112/r, 480, 553\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(352, 36, 0, 4)$. Тогда $(p, q) = (4, 8)$. По лемме 1.3 число $64/r$ четно, $5r < 96$ и r делит 12, поэтому $r = 2, 3, 4, 6, 12$. В случае $r = 12$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ -подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. Поэтому $r = 2, 3, 4, 6$, Γ имеет массив пересечений $\{352, 315, (r -$

$1)96/r, 1; 1, 96/r, 315, 352\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(496, 54, 4, 6)$. Тогда $(p, q) = (6, 8)$. По лемме 1.3 число $32/r$ четно, $7r < 112$ и r делит 14, поэтому $r = 2, 7, 14$. В случае $r = 14$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ -подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. По [3] граф с $(p, q, r) = (6, 8, 2)$ не существует. Поэтому $r = 7$ и Γ имеет массив пересечений $\{496, 441, 96, 1; 1, 16, 441, 496\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(784, 90, 12, 10)$. Тогда $(p, q) = (10, 8)$. По лемме 1.3 число $32/r$ четно, $11r < 8 \cdot 18$ и r делит 18, поэтому $r = 2, 3, 6, 9$. В случае $r = 9$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ -подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. Поэтому $r = 2, 3, 6$, Γ имеет массив пересечений $\{784, 693, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 693, 784\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(1000, 117, 18, 13)$. Тогда $(p, q) = (13, 8)$. По лемме 1.3 число $8/r$ четно, $14r < 8 \cdot 21$ и r делит 21, поэтому $r = 3, 7$, Γ имеет массив пересечений $\{1000, 882, (r-1)168/r, 1; 1, 168/r, 882, 1000\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Если $q > 8$, то Δ — граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$, Γ — граф с $(p, q) = (7, 9)$, $r = 4, 8$ и массивом пересечений $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$ или Δ — граф с параметрами $(980, 88, 6, 8)$, Γ — граф с $(p, q) = (8, 10)$, $r = 3, 6, 9$ и массивом пересечений $\{980, 891, (r-1)180/r, 1; 1, 180/r, 891, 980\}$.*

Доказательство. Пусть Δ — граф с параметрами $(621, 60, 3, 6)$. Тогда $(p, q) = (6, 9)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $7r < 9 \cdot 15$ и r делит 15, поэтому $r = 3, 5, 15$. В случае $r = 15$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ -подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. Поэтому $r = 3, 5$ и Γ имеет массив пересечений $\{621, 560, (r-1)135/r, 1; 1, 135/r, 560, 621\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(711, 70, 5, 7)$. Тогда $(p, q) = (7, 9)$. По лемме 1.3 число $16/r$ четно, $8r < 9 \cdot 16$ и r делит 16, поэтому $r = 2, 4, 8$. По [3] граф с $(p, q, r) = (7, 9, 2)$ не существует. Поэтому $r = 4, 8$ и Γ имеет массив пересечений $\{711, 640, (r-1)144/r, 1; 1, 144/r, 640, 711\}$.

Пусть Δ — граф с параметрами $(650, 55, 0, 5)$. Тогда $(p, q) = (5, 10)$. По лемме 1.3 число $2/r$ четно, $6r < 10 \cdot 15$ и r делит 15, поэтому $r = 3, 5, 15$, Γ имеет массив пересечений $\{650, 594, (r-1)150/r, 1; 1, 150/r, 594, 650\}$ и некоторое собственное значение графа Γ имеет нецелую кратность, противоречие.

Пусть Δ — граф с параметрами $(980, 88, 6, 8)$. Тогда $(p, q) = (8, 10)$. По лемме 1.3 число $32/r$ четно, $9r < 10 \cdot 18$ и r делит 18, поэтому $r = 2, 3, 6, 9, 18$. В случае $r = 18$ имеем $(p+q)(2q+1) < 3r(p+2)$, по лемме 1.3 μ -подграфы из Γ являются полными многодольными графами, противоречие. По [3] граф с $(p, q, r) = (8, 10, 2)$ не существует. Поэтому $r = 3, 6, 9$, Γ имеет массив пересечений $\{980, 891, (r-1)180/r, 1; 1, 180/r, 891, 980\}$.

Лемма доказана.

Лемма 2.6. *Пусть Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q+1), q-1)$. Если $(p, q) = (9, 9)$, то $r = 3$.*

Доказательство. Пусть Δ — псевдогеометрический граф для $pG_\alpha(\alpha(q+1), q-1)$.

Если Γ — граф с $(p, q, r) = (9, 9, r)$, $r = 2, 3, 6$ и массивом пересечений $\{891, 800, (r-1)162/r, 1; 1, 162/r, 800, 891\}$, то Δ имеет параметры $(891, 90, 9, 9)$ и собственные значения $(9, -9)$. В этом случае $[w]$ содержит r изолированных регулярных μ -подграфов $[u_i] \cap [w]$ степени 9 на $162/r$ вершинах, поэтому $r = 3$.

Из лемм 2.1–2.7 следует теорема 2. Из теоремы 2 и предложения 2 следует теорема 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin etc: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Juriscic A., Koolen J.** Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // *Discrete Math.* 2002. Vol. 244. P. 181–202.
3. **Махнев А.А., Падучих Д.В.** О сильно регулярных графах с собственным значением μ и их расширениях // *Тр. Института математики и механики УрО РАН.* 2013. Т. 19, №3. С. 207–214.
4. **Juriscic A., Koolen J.** Classification of the family $AT_4(qs, q, q)$ of antipodal tight graphs // *J. Comb. Theory Ser. A.* 2011. Vol. 118, no. 3. P. 842–852.
5. **Махнев А.А., Падучих Д.В., Хамгокова М.М.** Дистанционно регулярные локально псевдо $GQ(5, 3)$ -графы // *Докл. АН.* 2014. Т. 458, №5. С. 518–522.
6. **Soicher L.H.** Uniqueness of a distance-regular graph with intersection array $\{32, 27, 8, 1; 1, 4, 27, 32\}$ and related topics // *arXiv:1512.05976 [math.CO]*. 18 Dec 2015. P. 1–11.
URL: <http://arxiv.org/pdf/1512.05976v1.pdf>.
7. **Brouwer A.E., Haemers W.H.** The Gewirtz graph: an exercise in the theory of graph spectra // *Europ. J. Comb.* 1993. Vol. 14. P. 397–407.

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
зав. отделом

Поступила 14.05.2015

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Падучих Дмитрий Викторович
д-р физ.-мат. наук
ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
e-mail: dpaduchikh@gmail.com

УДК 519.172.4

О $K_{1,3}$ -СВОБОДНЫХ ТОЧНЫХ ГРАФАХ ДЕЗА

А. В. Митянина

Графом Деца с параметрами (v, k, b, a) называется регулярный граф на v вершинах степени k такой, что для любых двух его вершин число их общих соседей равно или b , или a . В настоящей работе дано описание точных графов Деца, которые не содержат в качестве порожденных подграфов граф $K_{1,3}$ и являются объединением замкнутых окрестностей двух несмежных вершин. Последнее условие другими словами означает, что в графе найдутся две несмежные вершины, для которых нет третьей вершины, несмежной с ними обеими.

Ключевые слова: $K_{1,3}$ -свободные графы, графы Деца.

A. V. Mityanina. On $K_{1,3}$ -free strictly Deza graphs.

A Deza graph with parameters (v, k, b, a) is a k -regular graph with v vertices where any two vertices have either a or b common neighbors. We describe strict Deza graphs that do not contain $K_{1,3}$ among their induced subgraphs and are unions of closed neighborhoods of two nonadjacent vertices. The latter condition means that there are two nonadjacent vertices such that any other vertex is adjacent to at least one of them.

Keywords: $K_{1,3}$ -free graphs, strictly Deza graphs.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [1].

Все рассматриваемые графы являются неориентированными, без петель и кратных ребер. Смежность между вершинами графа u и w будем обозначать через $u \sim w$. Порожденным подграфом графа G называется подграф, вершины которого смежны тогда и только тогда, когда они смежны в графе G . Обозначим через $[w]$ множество всех соседей вершины w (а также подграф, порожденный на этом множестве вершин) и назовем $[w]$ окрестностью вершины w , а число $|[w]|$ — степенью вершины w . Обозначим через w^\perp подграф на множестве вершин $[w] \cup \{w\}$ и назовем w^\perp замкнутой окрестностью вершины w . Вполне несвязный граф на n вершинах будем называть n -кликкой.

В дальнейшем граф и множество его вершин часто будем обозначать одинаково, если это не приводит к противоречию.

Граф G называется *регулярным*, если степени всех его вершин одинаковы. Граф называется *сильно регулярным*, если он регулярный и для любых различных его вершин u и w для некоторых констант λ, μ имеем $|[u] \cap [w]| = \lambda$, если $u \sim w$, и $|[u] \cap [w]| = \mu$ в противном случае. Граф G называется (v, k, b, a) -графом Деца ($0 \leq a \leq b \leq k < v$), если он содержит точно v вершин, является регулярным графом степени k и существуют такие константы b и a ($b > a$), что любые различные вершины $u, w \in G$ имеют либо b , либо a общих соседей. Легко заметить, что класс графов Деца включает в себя класс сильно регулярных графов. Если граф Деца не является сильно регулярным и имеет диаметр 2, его называют *точным графом Деца*.

Систематическое изучение точных графов Деца предпринято в статье пяти авторов [2]. В частности, в этой работе дается полный перечень точных графов Деца с количеством вершин, не превышающим 13. Изучение $K_{1,3}$ -свободных графов Деца начато автором в статье [3] и продолжено в [4].

В дальнейшем нам понадобится следующее

Утверждение (Erickson et al. [2]). Пусть G является (v, k, b, a) -графом Деца. Определим для вершины u следующие параметры:

$$\alpha = |\{w \in G : |[u] \cap [w]| = a\}|, \quad \beta = |\{w \in G : |[u] \cap [w]| = b\}|.$$

Тогда α и β не зависят от выбора вершины u и находятся по формулам

$$\alpha = \begin{cases} \frac{b(v-1) - k(k-1)}{b-a}, & \text{если } a \neq b; \\ \frac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b, \end{cases} \quad \beta = \begin{cases} \frac{a(v-1) - k(k-1)}{a-b}, & \text{если } a \neq b; \\ \frac{k(k-1)}{a}, & \text{если } a = b. \end{cases}$$

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть граф G является точным графом Деза с параметрами (v, k, b, a) , где $v > k \geq b > a \geq 0$, и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) G является $K_{1,3}$ -свободным;
- 2) G содержит 3-кликку;
- 3) G является объединением замкнутых окрестностей некоторых двух несмежных вершин.

Тогда он имеет параметры $(9, 4, 2, 1)$ или $(12, 6, 3, 2)$.

Перед доказательством теоремы введем некоторые обозначения и сформулируем и докажем две леммы. Пусть граф G удовлетворяет условию теоремы, т. е. является точным графом Деза с параметрами (v, k, b, a) , $v > k \geq b > a \geq 0$, $K_{1,3}$ -свободный и содержит следующие наборы вершин: несмежные вершины u и w графа G такие, что $G = u^\perp \cup w^\perp$; попарно несмежные вершины x, y, z . Докажем две леммы для такого графа.

Лемма 1. Если граф удовлетворяет условию теоремы, то для него верны следующие утверждения:

1. Параметр $k \in \{2b, 2b+1, 2b+2\}$.
2. $|u^\perp \cap w^\perp| = a$.
3. $|x^\perp \cap y^\perp| = |x^\perp \cap z^\perp| = |y^\perp \cap z^\perp| = b$.

Доказательство. Поскольку граф G имеет параметры (v, k, b, a) и является объединением замкнутых окрестностей двух несмежных вершин u и w , то $v = 2k + 2 - |u^\perp \cap w^\perp|$, где $|u^\perp \cap w^\perp| \in \{a, b\}$. С другой стороны, граф G имеет диаметр 2 и содержит попарно несмежные вершины x, y, z , значит, $|x^\perp \cap y^\perp| \neq 0$, $|x^\perp \cap z^\perp| \neq 0$ и $|y^\perp \cap z^\perp| \neq 0$. Заметим, что $|x^\perp \cap y^\perp \cap z^\perp| = 0$, поскольку по условию теоремы граф G является $K_{1,3}$ -свободным. Обозначим через G_{xyz} множество вершин подграфа $G \setminus (x^\perp \cup y^\perp \cup z^\perp)$. Тогда

$$v = 3 + 3k - |x^\perp \cap y^\perp| - |x^\perp \cap z^\perp| - |y^\perp \cap z^\perp| + |G_{xyz}|.$$

Согласно указанным выше соотношениям для v получаем равенство

$$2k + 2 - |u^\perp \cap w^\perp| = 3 + 3k - |x^\perp \cap y^\perp| - |x^\perp \cap z^\perp| - |y^\perp \cap z^\perp| + |G_{xyz}|,$$

откуда

$$k = |x^\perp \cap y^\perp| + |x^\perp \cap z^\perp| + |y^\perp \cap z^\perp| - 1 - |G_{xyz}| - |u^\perp \cap w^\perp|.$$

Рассмотрим вершину x графа G , для которой выполняется соотношение $k \geq |x^\perp \cap y^\perp| + |x^\perp \cap z^\perp|$. Учитывая данное неравенство, имеем

$$|x^\perp \cap y^\perp| + |x^\perp \cap z^\perp| + |y^\perp \cap z^\perp| - 1 - |G_{xyz}| - |u^\perp \cap w^\perp| \geq |x^\perp \cap y^\perp| + |x^\perp \cap z^\perp|,$$

$$|y^\perp \cap z^\perp| \geq |u^\perp \cap w^\perp| + 1 + |G_{xyz}|.$$

Если вершины u и w графа G имеют ровно b общих соседей, тогда для $|y^\perp \cap z^\perp|$ получаем противоречие с параметрами графа G , следовательно $|u^\perp \cap w^\perp| = a$. Аналогично приведенным выше рассуждениям для вершин x, y, z графа G выводим соотношения

$$|x^\perp \cap y^\perp| \geq a + 1 + |G_{xyz}|, \quad |x^\perp \cap z^\perp| \geq a + 1 + |G_{xyz}|, \quad |y^\perp \cap z^\perp| \geq a + 1 + |G_{xyz}|.$$

Легко понять, что $|x^\perp \cap y^\perp| = |x^\perp \cap z^\perp| = |y^\perp \cap z^\perp| = b$ и, соответственно, $k = 3b - a - 1 - |G_{xyz}|$ и $k \geq 2b$.

Ввиду того, что граф G является $K_{1,3}$ -свободным, окрестность любой вершины графа G не может содержать более двух попарно несмежных вершин, с каждой из которых исходная вершина имеет не более b общих соседей. Но тогда получаем ограничение на параметр k графа G : $k \leq 2b + 2$. Следовательно, $k \in \{2b, 2b + 1, 2b + 2\}$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Попарно несмежные вершины x, y, z графа G не лежат в 4-кликке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим обратное. Пусть для вершин x, y, z найдется такая вершина s графа G , которая будет попарно несмежна с каждой из них.

По условию теоремы граф G является $K_{1,3}$ -свободным, а значит, окрестности вершин u и w графа G не могут содержать 3-кликку. Согласно этому, каждая из окрестностей содержит ровно две вершины из четверки x, y, z, s , при этом ни одна из четырех вершин не может лежать в $u^\perp \cap w^\perp$. Без ограничения общности будем считать, что вершины $x, y \in u^\perp \setminus w^\perp$ и $z, s \in w^\perp \setminus u^\perp$.

Заметим, что все общие соседи для вершин x и y также будут лежать в подграфе $u^\perp \setminus w^\perp$. В противном случае в графе G получаем подграф $K_{1,3}$ на вершинах x, y, w и вершине из непустого множества $x^\perp \cap y^\perp \cap w^\perp$, что противоречит условию теоремы. Согласно лемме 1 $|x^\perp \cap y^\perp| = b$, тогда множество вершин $[u] \setminus w^\perp$ содержит ровно $b - 1$ общего соседа для x и y . Аналогичны рассуждения для вершин z и s .

Вычислим количество общих соседей для несмежных вершин x и w . Предположим, что $|x^\perp \cap w^\perp| = a$. Тогда остальные $k - a$ соседей вершины x должны лежать в подграфе $u^\perp \setminus w^\perp$. Учитывая, что $x \sim u$ и $x, y \in u^\perp \setminus w^\perp$, получаем неравенство $|[u] \setminus w^\perp| \geq (k - a - 1) + 1 + 1$. Но это противоречит п. 3) леммы 1, согласно которому $|u^\perp \cap w^\perp| = a$, а значит, $|[u] \setminus w^\perp| = |[w] \setminus u^\perp| = k - a$. Следовательно, предположение неверно, $|x^\perp \cap w^\perp| = b$ и в подграфе $[u] \setminus w^\perp$ находится ровно $k - b - 1$ соседей вершины x . Аналогичны рассуждения для вершин y и u .

Согласно условию теоремы, в подграфе $[u] \setminus w^\perp$ могут быть ровно две вершины из множества $\{x, y, u, w\}$, например, без ограничения общности, x и y . При этом все остальные вершины в подграфе должны быть смежны не менее, чем с одной из них. В соответствии с этим можно вычислить количество вершин в подграфе $[u] \setminus w^\perp$:

$$|[u] \setminus w^\perp| = |[x] \setminus w^\perp| + |[y] \setminus w^\perp| - |[x] \cap [y]| + |\{x, y\}| = (k - b - 1) + (k - b - 1) - (b - 1) + 2 = 2k - 3b + 1.$$

С другой стороны $|[u] \setminus w^\perp| = k - a$. С учетом приведенных равенств получаем, что $k = 3b - a - 1$.

В ходе доказательства леммы 1 было установлено, что $k = 3b - a - 1 - |G_{xyz}|$. В соответствии с этим, $|G_{xyz}| = 0$, а значит, исходное предположение неверно, в графе G не содержится 4-клик и параметр

$$v = 3 + 3k - |x^\perp \cap y^\perp| - |x^\perp \cap z^\perp| - |y^\perp \cap z^\perp| + |G_{xyz}| = 3 + 3k - 3b.$$

Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы будем проводить с учетом соотношений на параметры графа, полученных в леммах 1 и 2.

1. Предположим, что $k = 2b$, отсюда $b = a + 1, v = 3b + 3$. В соответствии с приведенным выше утверждением из [2] для графа G вычислим параметр α :

$$\alpha = \frac{b(3b + 2) - 2b(2b - 1)}{b - (b - 1)} = 4b - b^2 = b(4 - b).$$

Получаем следующее соотношение для параметра b : $0 \leq b \leq 4$. Но при $b = 0$ или $b = 4$ параметр $\alpha = 0$, а значит, граф G является сильно регулярным графом, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $b \in \{1, 2, 3\}$. Для данных значений параметра b получаем

следующие наборы параметров графа G : $(6, 2, 1, 0)$, $(9, 4, 2, 1)$, $(12, 6, 3, 2)$ соответственно. Но согласно перечню точных графов Деза, приведенному в [2], не существует графа с параметрами $(6, 2, 1, 0)$.

2. Предположим, что $k = 2b + 1$, отсюда $b = a + 2$, $v = 3b + 6$. Аналогично п. 1 для графа G вычислим параметр α :

$$\alpha = \frac{b(3b + 5) - 2b(2b + 1)}{b - (b - 2)} = \frac{3b - b^2}{2} = \frac{b(3 - b)}{2}.$$

Аналогично при $b = 0$ или $b = 3$ получаем противоречие с условием теоремы. Следовательно, $b \in \{1, 2\}$. Ввиду того, что параметр $a = b - 2$, $a \geq 0$, получаем $b = 2$ и параметры $(12, 5, 2, 0)$ для графа G . Согласно статье [2] не существует точного графа Деза с параметрами $(12, 5, 2, 0)$.

3. Предположим, что $k = 2b + 2$, отсюда $b = a + 3$, $v = 3b + 9$. Аналогично п. 1 для графа G вычислим параметр α :

$$\alpha = \frac{b(3b + 8) - (2b + 2)(2b + 1)}{b - (b - 3)} = \frac{-b^2 + 2b - 2}{3}.$$

Для всех значений параметра $b \geq 0$ будем получать отрицательное значение для параметра α , что является недопустимым. Следовательно, не существует графа Деза, удовлетворяющего условию теоремы, с таким соотношением параметров.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
2. Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs / M. Erickson [et al.] // J. Comb. Designs. 1999. Vol. 7. P. 359–405.
3. Кабанов В.В., Митянина А.В. Реберные точные графы Деза // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 1. С. 65–177.
4. Митянина А.В. О $K_{1,3}$ -свободных графах Деза диаметра больше двух // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, №. 2. С. 238–241.

Митянина Анастасия Владимировна
преподаватель
Челябинский гос. университет
e-mail: nastya.mityanina@gmail.com

Поступила 05.12.2014

УДК 519.178

СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРОВЕРКИ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ К ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ РАВЕНСТВА ПОЛИНОМОВ ОТ n ПЕРЕМЕННЫХ

А. В. Пролубников

Доказывается, что два графа изоморфны, если существует такая нумерация вершин одного из них, при которой равны модифицированные характеристические полиномы графов. Представлен алгоритм решения задачи проверки изоморфизма графов. При выполнении этого алгоритма определяется нумерация вершин одного из графов, при которой равны коэффициенты полиномов.

Ключевые слова: изоморфизм графов, полный инвариант.

A. V. Prolyubnikov. Reduction of the graph isomorphism problem to checking the equality of polynomials of n variables.

It is proved that two graphs are isomorphic if there exists an enumeration for vertices of one of the graphs such that modified characteristic polynomials of the graphs are equal. An algorithm for solving the graph isomorphism problem is presented. The algorithm finds an enumeration for vertices of one of the graphs that provides the equality of coefficients of the polynomials if such an enumeration exists.

Keywords: graph isomorphism, complete invariant.

Введение

В задаче проверки изоморфизма графов (далее “задача ИГ”) даны два невзвешенных неориентированных графа без петель (два обыкновенных графа) G и H . $V(G)$, $V(H)$ — множества вершин этих графов, $V(G) = V(H) = \{1, \dots, n\}$ ($|V(G)| = |V(H)| = n$). $E(G)$, $E(H)$ — множества ребер G и H . Необходимо проверить, существует ли биекция $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ такая, что

$$(i, j) \in E(G) \Leftrightarrow (\varphi(i), \varphi(j)) \in E(H).$$

Если биекция φ существует, то графы G и H *изоморфны* (обозначается “ $G \simeq H$ ”), иначе — не изоморфны. Для решения задачи необходимо либо представить такую биекцию, называемую *изоморфизмом*, либо доказать ее отсутствие.

Задача может быть поставлена в матричной формулировке. Пусть $(A)_{ij}$ обозначает ij -й элемент матрицы A . *Матрицей смежности* графа G называется матрица $A(G)$ размерности $n \times n$, элементы которой определяются следующим образом:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (i, j) \in E(G), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть $A(G)$ и $A(H)$ — матрицы смежности графов G и H . Тогда

$$G \simeq H \Leftrightarrow \exists \varphi \in S_n : A(H) = P_\varphi A(G) P_\varphi^\top,$$

где

$$(P_\varphi)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = \varphi(j), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Исходя из этой постановки, два графа изоморфны тогда и только тогда, когда матрица смежности одного из них может быть получена из матрицы смежности другого в результате некоторой перестановки ее рядов.

Задача ИГ принадлежит классу NP , поскольку любое биективное отображение множества вершин одного графа на множество вершин второго может быть проверено на предмет того, является ли оно изоморфизмом или нет, за квадратичное относительно n время. NP -полнота этой задачи не доказана, в то же время полиномиальных относительно n алгоритмов решения задачи для общего случая не разработано.

Алгоритмы решения задачи ИГ в ходе своей работы проверяют инвариантные относительно изоморфизма, т. е. равные для изоморфных графов, характеристики — *инварианты* графов. Примерами инвариантов графа являются такие его характеристики, как связность, род графа, степенная последовательность, характеристический полином матрицы смежности графа и ее спектр. Инвариант является *полным* инвариантом графа, если из равенства его значений для двух графов следует их изоморфизм.

Примером подхода к проверке инвариантных характеристик является известный алгоритм Вейсфейлера — Лемана, модификации которого позволяют решать задачу ИГ за полиномиальное время для широкого класса графов. В [1] показано, как могут быть построены пары неизоморфных графов на n вершинах с тем, чтобы их нельзя было различить с помощью k -мерного алгоритма Вейсфейлера — Лемана при $k = \Omega(n)$, что равносильно неполиномиальности такого алгоритма.

Одним из подходов к построению полных инвариантов графа является использование некоторой процедуры канонизации графа, дающей его канонический код — некоторую битовую строку, являющуюся его полным инвариантом. Таким полным инвариантом графа G с матрицей смежности A является, например, канонический код $c_0(G)$:

$$c_0(G) = \max_{\pi \in S_n} \{(A)_{\pi(1)} || (A)_{\pi(2)} || \dots || (A)_{\pi(n)}\},$$

где “||” обозначает операцию конкатенации битовых строк, $(A)_i$ — i -ю строку матрицы A .

Не являющийся результатом канонизации полный инвариант представлен в [2] — это полный инвариант для гиперграфов, который в случае обыкновенных графов представляет собой систему из $n^2 + 1$ полиномов над полем характеристики q , где q — простое число или нуль. Также в [2] рассмотрено сведение задачи проверки изоморфизма графов к задаче разложения полинома на неприводимые множители.

В нашей работе задача ИГ для двух графов сводится к задаче проверки равенства полиномов от n переменных при некоторой перестановке номеров переменных. Полином, который ставится в соответствие графу, представляет собой модифицированный характеристический полином графа, линейный по каждой из переменных. Этот полином не является инвариантом графа в смысле неизменности его значения при различных нумерациях вершин, однако он является полным инвариантом графа в том смысле, что для пары неизоморфных графов никакая нумерация их вершин не даст одинаковых полиномов.

1. Модифицированный характеристический полином графа

Рассмотрим характеристический полином графа и некоторые его модификации, которые использовались для характеристики графов, исходя из их структурных свойств. Характеристический полином графа G — это полином

$$\chi_G(x) = \det(A(G) - xE),$$

где x — переменная, E — единичная матрица.

Пусть $D(G) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ — диагональная матрица со степенями d_i вершин $i \in V(G)$ на диагонали. В [3] рассматриваются такие модификации характеристического полинома графа, как характеристические полиномы лапласиана $L(G)$ графа, определяемого как $L(G) = D(G) - A(G)$, беззнакового лапласиана $Q(G)$, определяемого как $Q(G) = D(G) + A(G)$, и некоторые

другие модификации, обобщением которых является полином вида

$$\xi_G(x, y) = \det(xE - (A(G) - yD(G))).$$

Еще одной модификацией характеристического полинома, получаемой с помощью модификации матрицы смежности графа, является полином Зейделя [4]:

$$\zeta_G(x) = \det(xE - (F - E - 2A(G))),$$

где $(F)_{ij} = 1$ для всех $i, j = \overline{1, n}$. В [5] рассматривается обобщение характеристического полинома графа как полинома от трех переменных x, y, λ вида $\psi_G(x, y) = \det(A(x, y) - \lambda E)$, где $A(x, y)$ — матрица смежности графа G , в которой элементы, равные 1, заменяются на переменную x , а элементы, равные 0, заменяются на переменную y .

Таких модификаций характеристического полинома графа, которые являлись бы полным инвариантом графа, не представлено. Заметим, что во всех упомянутых случаях модификаций характеристического полинома рассматриваемые полиномы — это полиномы с переменными, которые никак не связаны с вершинами графа. Мы модифицируем характеристический полином графа $\chi_G(x)$ для графа на n вершинах, переходя от полинома от одной переменной к полиному от n переменных так, что вершине $i \in V(G)$ соответствует переменная x_i . Пусть далее x_1, \dots, x_n — независимые переменные, $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ — диагональная матрица с элементами x_i на диагонали.

О п р е д е л е н и е. Обозначим через $\eta_G(x_1, \dots, x_n)$ полином следующего вида:

$$\eta_G(x_1, \dots, x_n) = \det(A(G) + X). \quad (1.1)$$

Представим полиномы вида (1.1) для графов на $n = 1, 2, 3$ вершинах:

- 1) $n = 1$: x_1 ;
- 2) $n = 2$: $x_1x_2, x_1x_2 - 1$;
- 3) $n = 3$: $x_1x_2x_3, x_1x_2x_3 - x_1, x_1x_2x_3 - x_1 - x_3, x_1x_2x_3 - x_1 - x_2 - x_3 + 2$.

Нетрудно проверить, что ни при какой нумерации вершин для пары неизоморфных графов при $n = 1, 2, 3$ мы не получим равенства их полиномов.

Далее, пусть c — некоторое подмножество элементов из $V(G)$. Через x_c обозначим произведение вида $\prod x_i$, где $i \in c$. Коэффициент $A(G)_c$ перед этим произведением в полиноме $\eta_G(x_1, \dots, x_n)$ — это определитель подматрицы $A(G)$, получаемой из $A(G)$ удалением рядов с номерами, принадлежащими подмножеству c . Для подмножества c и $\varphi \in S_n$ через $\varphi(c)$ обозначим множество образов элементов из c . $x_\varphi = (x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)})$ — это точка, полученная из точки $x = (x_1, \dots, x_n)$ перестановкой ее координат в соответствии с φ .

Может быть доказана следующая теорема.

Теорема. $G \simeq H$ и $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ — изоморфизм тогда и только тогда, когда

$$\eta_G(x_1, \dots, x_n) = \eta_H(x_{\varphi(1)}, \dots, x_{\varphi(n)}). \quad (1.2)$$

Равенство (1.2) имеет место в том случае, если равны коэффициенты полиномов η_G и η_H при произведениях переменных, соответствующих друг другу по φ : требуется, чтобы коэффициент $A(G)_c$ перед произведением $\prod x_i$, где $i \in c$, был равен коэффициенту $A(H)_{\varphi(c)}$ перед произведением $\prod x_{\varphi(i)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Необходимость выполнения (1.2) для изоморфных графов G и H и их изоморфизма φ имеет место, поскольку если $G \simeq H$, то

$$A(H) = P_\varphi A(G) P_\varphi^\top, \quad (1.3)$$

а значит, коэффициенты полиномов η_G и η_H при соответствующих по φ произведениях переменных равны.

Покажем достаточность (1.2) для изоморфизма графов G и H и для того, чтобы отображение φ задавало этот изоморфизм. Обозначим $A(G)$ через $A = (a_{ij})$, а $A(H)$ через $B = (b_{ij})$.

Если верно (1.2), то из равенства полиномов следует равенство коэффициентов перед соответствующими произведениями переменных. В том числе и для любого c такого, что $c = V(G) \setminus \{i, j\}$ для пары вершин i и j , равны коэффициенты перед произведениями x_c и $x_{\varphi(c)}$, т.е. $A_c = B_{\varphi(c)}$, что эквивалентно равенству $\det \begin{pmatrix} 0 & a_{ij} \\ a_{ij} & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & b_{\varphi(i)\varphi(j)} \\ b_{\varphi(i)\varphi(j)} & 0 \end{pmatrix}$, или $a_{ij} = b_{\varphi(i)\varphi(j)}$, а значит, $(i, j) \in E(G)$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(i), \varphi(j)) \in V(H)$, т.е. $G \simeq H$ и φ — изоморфизм. \square

З а м е ч а н и е. Для того чтобы графы G и H были изоморфны, достаточно равенства коэффициентов перед произведениями x_c и $x_{\varphi(c)}$ для некоторой биекции $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$, где c — подмножества из $n-2$ вершин из $V(G)$. В случае если это равенство имеет место, равенство остальных соответствующих друг другу коэффициентов обеспечивается тем, что они являются определителями подматриц, получаемых удалением соответствующих по φ рядов из $A(G)$ и $A(H)$, и равны в силу (1.3).

2. Проверка равенства коэффициентов модифицированных характеристических полиномов

В ходе работы представленного ниже алгоритма решения задачи ИГ производится попытка построения отображения, задающего изоморфизм графов. Для построения этого отображения производится проверка равенства коэффициентов полиномов вида (1.1) этих графов. Если построение такого отображения возможно, то графы изоморфны, иначе — не изоморфны.

Пусть $I = \{i_1, \dots, i_m\}$ — некоторый набор без повторений из m элементов множества $\{1, \dots, n\}$. Обозначим через C_I^k множество всех подмножеств из k элементов множества I , $C_I = \bigcup_{k=1}^{|I|} C_I^k$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — стандартный базис \mathbb{R}^n . Для подмножеств $c \in C_I$ определим вектор e_c как $e_c = \sum_{i \in c} e_i$. Точку ε_c для подмножества c определим как $\varepsilon \cdot e_c$, где ε — переменная, с помощью варьирования которой в ходе представленных ниже алгоритмов будем проверять равенство коэффициентов модифицированных характеристических полиномов графов. Для подмножества из одного элемента $i \in \{1, \dots, n\}$ определим $\varepsilon_i = \varepsilon \cdot e_i$.

Представленный ниже алгоритм проверки изоморфизма графов, вызывающий рекурсивную процедуру ПРОВЕРКА, позволяет сравнить коэффициенты полиномов вида (1.1) для двух графов. Запись " $a \leftarrow b$ " означает, что переменной a присваивается значение b . I — подмножество вершин G , для которых установлено соответствие φ , J — подмножество вершин H , являющихся образами элементов из I относительно φ .

ПРОВЕРКА(i)

- 1 **if** $i = n$
- 2 $flag \leftarrow true$;
- 3 выход из процедуры
- 4 **else**
- 5 **for** $j \leftarrow 1$ **to** n
- 6 **if** ($j \notin J$ и $\forall c \in C_I : \eta_G(\varepsilon_c + \varepsilon_i) = \eta_H(\varepsilon_{\varphi(c)} + \varepsilon_j)$)
- 7 $\varphi(i) \leftarrow j$;
- 8 $I \leftarrow I \cup \{i\}$;
- 9 $J \leftarrow J \cup \{j\}$;
- 10 ПРОВЕРКА($i + 1$);
- 11 $I \leftarrow I \setminus \{i\}$;
- 12 $J \leftarrow J \setminus \{\varphi(i)\}$;
- 13 значение $\varphi(i)$ не определено;
- 14 $flag \leftarrow false$.

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ИЗОМОРФИЗМА (G, H)

- 1 $I \leftarrow \emptyset; J \leftarrow \emptyset$; значение $\varphi(i)$ не определено для $i = \overline{1, n}$;
- 2 ПРОВЕРКА(1);
- 3 **if** *flag*
- 4 выдать сообщение, что G и H изоморфны, φ — изоморфизм;
- 5 **else**
- 6 выдать сообщение, что G и H неизоморфны.

Проверка равенства коэффициентов, которая производится на 6-м шаге процедуры, состоит в поиске такого $j \in V(H) \setminus J$, что для него выполнялось бы равенство

$$\eta_G(\varepsilon_c + \varepsilon_i) = \eta_H(\varepsilon_{\varphi(c)} + \varepsilon_j). \quad (2.1)$$

Проверка производится для всех $c \in C_I$. Если ни для одного $j \in V(H) \setminus J$ равенство (2.1) не выполняется, то происходит возврат из рекурсивно вызываемой процедуры со значением *flag*, равным *false*. Выход из этой процедуры со значением *flag*, равным *true*, происходит только в случае установления изоморфизма φ графов G и H .

Сравнение коэффициентов полиномов η_G и η_H для графов G и H и подмножеств $c \in C_I$ производится последовательно: от подмножеств меньшей мощности к подмножествам большей мощности. На старте алгоритма $I = \emptyset, C_I = \emptyset, J = \emptyset$. Для $i = 1$ проверка равенства (2.1) — это проверка равенства

$$\eta_G(\varepsilon_1) = \eta_H(\varepsilon_j) \quad (2.2)$$

для $j \in V(H)$. Равенство (2.2) эквивалентно равенству

$$\det A + A_{\{1\}}\varepsilon = \det B + B_{\{j\}}\varepsilon. \quad (2.3)$$

Если мы имеем (2.3) при $\varepsilon = 0$ и некотором $\varepsilon > 0$, то $\det A = \det B, A_{\{1\}} = B_{\{j\}}$, что приводит к установлению соответствия для $\varphi(1)$: $\varphi(1) \leftarrow j$. Если в дальнейшем произойдет выход из процедуры ПРОВЕРКА со значением *flag*, равным *false*, то значение $\varphi(1)$, возможно, снова будет не определено.

Для $i = 2$, когда мы имеем $I = \{1\}, C_I = C_I^1 = \{\{1\}\}, J = \{\varphi(1)\}$, необходимо найти $j \in V(H) \setminus J$ такое, что

$$\eta_G(\varepsilon_2) = \eta_H(\varepsilon_j) \quad (2.4)$$

и

$$\eta_G(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \eta_H(\varepsilon_{\varphi(1)} + \varepsilon_j). \quad (2.5)$$

Проверка равенства (2.4) — это проверка равенства

$$\det A + A_{\{2\}}\varepsilon = \det B + B_{\{j\}}\varepsilon, \quad (2.6)$$

проверка равенства (2.5) — это проверка равенства

$$\det A + A_{\{1\}}\varepsilon + A_{\{2\}}\varepsilon + A_{\{1,2\}}\varepsilon^2 = \det B + B_{\{\varphi(1)\}}\varepsilon + B_{\{j\}}\varepsilon + B_{\{\varphi(1),j\}}\varepsilon^2. \quad (2.7)$$

Если (2.3) имеет место при $\varepsilon = 0$ и некотором $\varepsilon > 0$, то выполнение (2.6) для некоторого $\varepsilon > 0$ дает равенство $A_{\{2\}} = B_{\{j\}}$, что при выполнении (2.7) дает равенство $A_{\{1,2\}} = B_{\{\varphi(1),j\}}$. Если это так, то алгоритмом будет установлено соответствие $\varphi(2) \leftarrow j$, которое в дальнейшем, если произойдет выход из процедуры ПРОВЕРКА со значением *flag*, равным *false*, может снова оказаться не определенным.

На момент проверки равенства коэффициентов $A_{c \cup \{i\}}$ и $B_{\varphi(c) \cup \{j\}}$ ($\varphi(c) \subset \varphi(I) = J$) для $c \in C_I$ имеем равенства $A_c = B_{\varphi(c)}$ для всех таких c , поскольку в противном случае ранее

произошел бы выход из рекурсивно вызываемой процедуры ПРОВЕРКА со значением *flag* равным *false*. Таким образом,

$$\eta_G(\varepsilon_c + \varepsilon_i) = \sum_{c' \in P(c)} \varepsilon^{|c'|} A_{c'} + \varepsilon^k A_{c \cup \{i\}}, \quad (2.8)$$

$$\eta_H(\varepsilon_{\varphi(c)} + \varepsilon_j) = \sum_{\varphi(c') \in Q(c)} \varepsilon^{|c'|} B_{\varphi(c')} + \varepsilon^k B_{\varphi(c) \cup \{j\}}, \quad (2.9)$$

где $P(c) = \{c' \in C_{I \cup \{i\}} \mid c' \subset c\}$, $Q(c) = \{\varphi(c') \in C_{\varphi(I) \cup \{j\}} \mid c' \subset c\}$, $k = |c| + 1 > |c'|$ для любого $c' \in P(c)$. Так как для любого $c' \in P(c)$ на момент проверки равенства (2.1) имеем $A_{c'} = B_{\varphi(c')}$, где $\varphi(c') \in Q(c)$, то, если (2.1) имеет место для любого $c \in C_I$, из него по (2.8) и (2.9) следует, что для тех же $c \in C_I$ выполняется равенство $A_{c \cup \{i\}} = B_{\varphi(c) \cup \{j\}}$. Полагая $\varphi(i) \leftarrow j$ и $I \leftarrow I \cup \{i\}$, $J \leftarrow J \cup \{j\}$, мы снова будем получать $A_c = B_{\varphi(c)}$ для любого подмножества $c \in C_I$.

В итоге, если выход из рекурсивно вызываемой процедуры ПРОВЕРКА происходит со значением *flag*, равным *true*, то это означает следующее: в ходе работы алгоритма найдена биекция φ такая, что равны все 2^n соответствующих коэффициентов η_G и η_H для всех $c \in C_I$, где $I = \{1, \dots, n\}$, а значит, по доказанной теореме φ — изоморфизм графов G и H .

Выводы

В работе представлено сведение задачи проверки изоморфизма графов для двух графов на n вершинах к задаче проверки равенства ставящихся им в соответствие полиномов от n переменных при некоторой перенумерации вершин одного из графов. Полином, ставящийся в соответствие графу, — это модифицированный характеристический полином графа, линейный по каждой из переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Cai J.-Y., Fürer M., Immerman N.** An optimal lower bound on the number of variables for graph identification // *Combinatorica*. 1992. Vol. 12, no. 4. P. 389–410.
2. **Григорьев Д.Ю.** Два сведения изоморфизма графов к задачам о полиномах // *Записки науч. семинара ЛОМИ*. Т. 88. Л.: Наука, 1979. С. 56–61.
3. **Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.** Спектры графов. Теория и применение. Киев: Наук. Думка, 1984. С. 24–28.
4. **Seidel J.J.** Strongly regular graphs with $(-1, 1, 0)$ adjacency matrix having eigenvalue 3 // *Lin. Alg. Appl.* 1968. Vol. 1, no. 2. P. 281–298.
5. **Lipton R.J., Vishnoi N.K., Zalcstein Z.** A generalization of the characteristic polynomial of a graph [e-resource] // *CC Technical Report, GIT-CC-03-51*. 2003. URL: <https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/6511/GIT-CC-03-51.pdf> (дата обращения: 07.09.2015).

Пролубников Александр Вячеславович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Омский государственный университет
e-mail: a.v.prolubnikov@mail.ru

Поступила 26.12.2014

УДК 512.572

КОРАЗМЕРНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ПУАССОНА С ЛИЕВО НИЛЬПОТЕНТНЫМИ КОММУТАНТАМИ

С. М. Рацев, О. И. Череватенко

В работе исследуются многообразия алгебр Пуассона, определяемые тождествами $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$, $\{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0$, $s \geq 1$. Для каждого такого многообразия найдена алгебра-носитель, построен базис n -й собственной полилинейной части, получены точные формулы для экспоненциальных производящих функций для последовательности коразмерностей и последовательности собственных коразмерностей, получены точные формулы коразмерностей и собственных коразмерностей.

Ключевые слова: алгебра Пуассона, многообразие алгебр, рост многообразия.

S. M. Ratseev, O. I. Cherevatenko. Codimensions of varieties of Poisson algebras with Lie nilpotent comutants.

We study varieties of Poisson algebras defined by the identities $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$ and $\{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0$, $s \geq 1$. For each of the varieties we find a carrier algebra and build a basis of the n th proper polylinear space. We derive exact formulas for exponential generating functions for sequences of codimensions and proper codimensions as well as exact formulas for codimensions and proper codimensions.

Keywords: Poisson algebra, variety of algebras, growth of a variety.

Векторное пространство A над полем K с двумя K -билинейными операциями умножения “ \cdot ” и “ $\{, \}$ ” называется *алгеброй Пуассона*, если относительно операции “ \cdot ” пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции “ $\{, \}$ ” — алгеброй Ли и данные операции связаны правилом Лейбница $\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + \{a, c\} \cdot b$, $a, b, c \in A$. Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, современной теоретической физики и т. д.

Договоримся опускать скобки “ $\{, \}$ ” при их левонормированной расстановке: $\{\{a, b\}, c\} = \{a, b, c\}$.

Пусть $F(X)$ — свободная алгебра Пуассона над счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, P_n — пространство в $F(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных x_1, \dots, x_n , Γ_n — подпространство в P_n , являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\} \cdot \dots \cdot \{x_{j_1}, \dots, x_{j_t}\}, \quad s \geq 2, \dots, t \geq 2.$$

Пусть \mathbf{V} — некоторое многообразие алгебр Пуассона, $Id(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия \mathbf{V} . Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n / (P_n \cap Id(\mathbf{V})), \quad \Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n / (\Gamma_n \cap Id(\mathbf{V})), \\ c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}), \quad \gamma_n(\mathbf{V}) = \dim \Gamma_n(\mathbf{V}).$$

Величины $c_n(\mathbf{V})$ и $\gamma_n(\mathbf{V})$ называются n -й *коразмерностью* и n -й *собственной коразмерностью* многообразия \mathbf{V} соответственно.

В следующем предложении приводится конструкция алгебр Пуассона на основе ассоциативных алгебр. Доказательство данного несложного предложения оставляем читателю.

Предложение 1. Пусть R — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения “ \wedge ” над произвольным полем K . Рассмотрим векторное пространство $A = R \oplus K$, в котором определим операции “ \cdot ” и “ $\{, \}$ ” следующим образом:

$$(a, \alpha) \cdot (b, \beta) = (\beta a + \alpha b, \alpha \beta),$$

$$\{(a, \alpha), (b, \beta)\} = (a \wedge b - b \wedge a, 0),$$

где $a, b \in R$, $\alpha, \beta \in K$. Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\cdot\}, K)$ будет являться алгеброй Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$.

Определим многообразие алгебр Пуассона \mathbf{V}_s следующими полилинейными тождествами:

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \dots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\} = 0.$$

В работе [1] показано, что многообразие \mathbf{V}_1 имеет почти полиномиальный рост.

Пусть $UT_s = UT_s(K)$ — алгебра верхнетреугольных матриц порядка s над полем K , $U_s = UT_s \oplus K$ — алгебра Пуассона, построенная с помощью предложения 1. Нетрудно видеть, что $U_s \in \mathbf{V}_{s-1}$, $s \geq 2$. Далее будет показано, что в случае основного поля нулевой характеристики алгебра U_s порождает многообразие \mathbf{V}_{s-1} , $s \geq 2$.

Для произвольного многообразия \mathbf{V} определим экспоненциальные производящие функции

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad \mathcal{C}^p(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\gamma_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Данные функции оказываются полезными для вычисления асимптотики роста многообразий. Применение функций сложности для многообразий алгебр Ли оказалось плодотворным и привело к классификации типов роста [2; 3]. Из предложения 4 работы [4] следует такое утверждение.

Предложение 2. Пусть для многообразия алгебр Пуассона \mathbf{V} над произвольным $\mathcal{C}^p(\mathbf{V}, z)$ является целой функцией комплексного аргумента. Тогда $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$ также является целой функцией, причем выполнено равенство $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \exp(z) \cdot (\mathcal{C}^p(\mathbf{V}, z) + 1)$.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем обозначать $f(n) \approx g(n)$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

Теорема 1. (i) В случае произвольного поля K следующие полилинейные элементы от переменных x_1, \dots, x_n образуют базис пространства $\Gamma_n(U_s)$, $s \geq 2$:

$$\{\{x_{11}, \dots, x_{1a_1}\}, \dots, \{x_{r1}, \dots, x_{ra_r}\}\}, \quad (1)$$

$$1 \leq r \leq s-1, \quad a_i \geq 2, \quad i = 1, \dots, r, \quad x_{12} < x_{j2}, \quad j = 2, \dots, r, \quad (2)$$

$\{x_{ij}\} = \{x_1, \dots, x_n\}$ как множества и переменные в каждой скобке $\{x_{j1}, \dots, x_{ja_j}\}$ упорядочены так: $j1 > j2 < \dots < ja_j$.

(ii) Если характеристика поля равна нулю, то тождества

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \dots, \{x_{2s-1}, x_{2s}\}\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры U_s (иными словами, алгебра U_s является носителем многообразия \mathbf{V}_{s-1}).

Доказательство. Понятно, что $\Gamma_n(U_s)$ является линейной оболочкой элементов вида (1) с условиями (2).

Каждому элементу ω вида (1) сопоставим такой упорядоченный набор чисел (длины скобок): $I(\omega) = (a_1, \dots, a_r)$. На множестве элементов данного вида определим строгую упорядоченность. Пусть ω_1, ω_2 — элементы вида (1). Определим $\omega_1 \prec \omega_2$, если набор $I(\omega_1)$ лексикографически слева направо меньше набора $I(\omega_2)$.

Предположим, что для некоторого n данные элементы линейно зависимы в $\Gamma_n(U_s)$. В полуженной нетривиальной линейной комбинации элементов вида (1) зафиксируем такое слагаемое,

которое имеет ненулевой коэффициент, минимальное значение r и является минимальным элементом относительно порядка \prec среди всех элементов с ненулевыми коэффициентами и минимальными значениями r . Пусть это слагаемое имеет вид

$$\alpha\{\{x_{11}, \dots, x_{1a_1}\}, \dots, \{x_{r1}, \dots, x_{ra_r}\}\}, \quad 0 \neq \alpha \in K.$$

Во всей линейной комбинации сделаем такую подстановку:

$$\begin{aligned} x_{11} &\rightarrow (e_{12}, 0), & x_{12} &\rightarrow (e_{22}, 0), & x_{13} &\rightarrow (e_{22}, 0), & \dots, & x_{1a_1} &\rightarrow (e_{22}, 0), \\ x_{21} &\rightarrow (e_{23}, 0), & x_{22} &\rightarrow (e_{33}, 0), & x_{23} &\rightarrow (e_{33}, 0), & \dots, & x_{2a_2} &\rightarrow (e_{33}, 0), \\ & & & & & & \dots & & \end{aligned}$$

$$x_{r1} \rightarrow (e_{r,r+1}, 0), \quad x_{r2} \rightarrow (e_{r+1,r+1}, 0), \quad x_{r3} \rightarrow (e_{r+1,r+1}, 0), \quad \dots, \quad x_{ra_r} \rightarrow (e_{r+1,r+1}, 0),$$

где e_{ij} — матричные единички. Тогда все слагаемые, кроме рассматриваемого, будут равны нулю, а данное слагаемое будет равно $\alpha(e_{1,r+1}, 0)$. Понятно, что равенство $\alpha(e_{1,r+1}, 0) = (0, 0)$ выполнено лишь в случае $\alpha = 0$. Противоречие.

Осталось заметить, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств $\text{Id}(\mathbf{V})$ произвольного многообразия алгебр Пуассона \mathbf{V} порождается последовательностью $\Gamma_n \cap \text{Id}(\mathbf{V})$, $n \geq 1$ (см. предложение 6 работы [4]). \square

Теорема 2. Для многообразия \mathbf{V}_s над произвольным полем верны следующие утверждения:

1) \mathbf{V}_s имеет экспоненциальную производящую функцию

$$C^P(\mathbf{V}_s, z) = \sum_{r=1}^s \frac{1}{r} \left(1 + (z - 1) \exp(z)\right)^r;$$

2) для любого $n \geq 2$ коразмерности и собственные коразмерности вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \gamma_n(\mathbf{V}_s) &= \sum_{r=1}^s \frac{1}{r} \sum_{k=0}^r k^n \sum_{i=0}^k C_r^k C_k^i (-1)^{k-i} k^{-i} \frac{n!}{(n-i)!} \approx n^s s^{n-s-1}, \\ c_n(\mathbf{V}_s) &= 1 + \sum_{r=1}^s \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r+1} k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_r^{k-1} C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} k^{-i} \frac{n!}{(n-i)!} \approx s^{-1} n^s (s+1)^{n-s}, \end{aligned}$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k .

Доказательство. Формулы для $C^P(\mathbf{V}_s, z)$ и $\gamma_n(\mathbf{V}_s)$ следуют из леммы 3.4 работы [2] и теоремы 2 работы [5].

Покажем справедливость формулы для коразмерностей $c_n(\mathbf{V}_s)$. Из предложения 2 следует, что

$$C(\mathbf{V}_s, z) = \exp(z) + \exp(z) \left(\sum_{r=1}^s \frac{1}{r} \left(1 + (z - 1) \exp(z)\right)^r \right).$$

Запишем данную функцию в виде

$$C(\mathbf{V}_s, z) = \exp(z) + \sum_{r=1}^s \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r+1} C_r^{k-1} (z - 1)^{k-1} \exp(kz). \tag{3}$$

При этом

$$(z - 1)^{k-1} \exp(kz) = \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i z^i (-1)^{k-1-i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{k^m}{m!} z^m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} z^{m+i} \frac{k^m}{m!} = /m + i = n/ \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{n=i}^{\infty} C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} \frac{k^{n-i}}{(n-i)!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} \frac{1}{k^i} \frac{n!}{(n-i)!} \right) \frac{k^n}{n!} z^n.
\end{aligned}$$

В последнем равенстве использовался тот факт, что $\frac{n!}{(n-i)!} = 0$ при $n-i < 0$. Подставим последнюю двойную сумму в (3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \left(1 + \sum_{r=1}^s \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r+1} k^n \sum_{i=0}^{k-1} C_r^{k-1} C_{k-1}^i (-1)^{k-1-i} \frac{1}{k^i} \frac{n!}{(n-i)!} \right).$$

То, что находится внутри скобок, и есть $c_n(\mathbf{V}_s)$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Рацеев С.М.** Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2012. Т. 67, № 5. С. 8–13.
2. **Петроградский В.М.** О типах сверхэкспоненциального роста тождеств в PI-алгебрах Ли // Фунд. прикл. математика. 1995. Т. 1, № 4. С. 989–1007.
3. **Петроградский В.М.** Рост полилиньпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции // Мат. сб. 1997. Т. 188, № 6. С. 119–138.
4. **Рацеев С.М.** Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 700–711.
5. **Рацеев С.М.** Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли на языке тождеств // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 4. С. 567–577.

Рацеев Сергей Михайлович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Ульяновский государственный университет
e-mail: RatseevSM@mail.ru

Поступила 17.01.2015

Череватенко Ольга Ивановна
канд. физ.-мат. наук, и.о. зав. кафедрой
Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова
e-mail: chai@pisem.net

УДК 517.977

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА¹

Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов

Для системы уравнений Навье — Стокса в безразмерном виде, описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости, рассматривается начальная и краевая задача. Используется метод характеристик и геометрический метод, развиваемый авторами. Отмечаются некоторые особенности постановки этих задач. Изучается влияние числа Рейнольдса на течение вблизи поверхности тела, обтекаемого потоком вязкой жидкости.

Ключевые слова: уравнения Навье — Стокса, начальная и краевая задача, число Рейнольдса, турбулентность.

L. I. Rubina, O. N. Ul'yanov. On some properties of the Navier–Stokes equations.

We discuss the initial and boundary value problems for the system of dimensionless Navier–Stokes equations describing the dynamics of a viscous incompressible fluid using the method of characteristics and the geometric method developed by the authors. Some properties of the formulation of these problems are considered. We study the effect of the Reynolds number on the flow of a viscous fluid near the surface of a body.

Keywords: Navier–Stokes equations, initial value problem, boundary value problem, Reynolds number, turbulence.

Введение

В статье для вязкой несжимаемой жидкости рассматривается система уравнений Навье — Стокса в безразмерном виде [1]

$$\begin{aligned}
 S \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + E \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 0, \\
 S \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + E \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0, \\
 S \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + E \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) &= \frac{1}{F}, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0,
 \end{aligned} \tag{0.1}$$

где S — число Струхалия, E — число Эйлера, R — число Рейнольдса, F — число Фруда, $\{u, v, w\}$ — компоненты вектора скорости, p — давление.

Различным аспектам изучения системы уравнений Навье — Стокса и ее приложений посвящена обширная литература. Отметим лишь часть направлений исследований: это изучение симметрий, законов сохранения и групповых свойств этих уравнений и связанных с ними уравнений (см., например, обзор [2] и библиографию к нему), поиск и применение точных и приближенных решений [3], аналитическое, приближенное и численное решение или исследование различных задач, математическая модель которых основана на применении системы

¹Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ, контракт 02.А03.21.0006)).

уравнений Навье — Стокса (см. например, [4]), асимптотическое поведение решений [5;6]. Особое место в этом ряду занимают исследования, посвященные проблемам разрешимости задач (в частности и в первую очередь задачи Коши [7], краевых и начально-краевых задач), поставленных для системы уравнений Навье — Стокса [8], связанных с этой проблематикой вопросов BLOW-UP решений [9]. Много внимания в контексте исследования системы уравнений Навье — Стокса уделяется проблемам возникновения, развития и описания явления турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости. Интерес к проблеме возникновения турбулентного движения и к причинам нарушения ламинарного течения уходит далеко в прошлое и сохраняется до настоящего времени [10;11]. Известны два основных подхода к теоретическому исследованию данной проблемы [12]. В одном подходе на ламинарное течение накладываются возмущения и изучается, как эти возмущения влияют на течение [13;14]. В другом подходе делаются попытки свести описание возникающего течения к динамическим системам и рассматриваются их особенности (бифуркация, странные аттракторы) [10].

В статье для системы уравнений Навье — Стокса (0.1) рассматриваются начальная и краевая задачи. Изучается влияние числа Рейнольдса на течение вблизи поверхности тела, обтекаемого потоком вязкой жидкости. При исследованиях используются метод характеристик и геометрический метод, развиваемый авторами. Рассмотрение ограничивается случаем непрерывно дифференцируемых функций.

В работе выделены такие особенности модели, которые в “критических” случаях могут приводить к разрушению ламинарного течения и возникновению таких явлений, как рассеяние или турбулентность (утверждение 2). Показано, как этого можно избежать (утверждение 1).

1. Некоторые особенности постановки задачи с начальными данными

Изучению начально-краевой задачи для системы (0.1) отводится значительное место в литературе. В одних работах [8] задача решается в классе обобщенных решений. В других — кроме слабых решений рассматриваются и сильные решения, при этом в трехмерном случае удается построить решение либо локальное, либо полное (при всех $t > 0$) только для достаточно малых начальных скоростей [15]. В [16] отмечено, что в системе уравнений Навье — Стокса скорости и давление удовлетворяют уравнению неразрывности $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ и соотношению

$$\Delta p = g, \quad g = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2. \quad (1.1)$$

Ясно, что оба эти соотношения должны выполняться тождественно в любой момент времени, в том числе и при $t = 0$. Ясно и то, что если считать начальные скорости нулевыми [8], а давление — комплексной функцией, то обе выписанные выше зависимости обращаются в тождество. Мы будем рассматривать начальную задачу в классе достаточно гладких функций в области действительных переменных.

Перейдем в системе (0.1) к новым независимым переменным $\xi = z - \psi(x, y, t)$, $x = \eta$, $y = \zeta$, $t = \tau$ и рассмотрим решение системы вблизи поверхности $\xi = 0$. След этой поверхности на начальном многообразии имеет вид $\xi = z - \psi(x, y, 0) = 0$. Выпишем, предполагая, что $p(x, y, z, 0)$, $u(x, y, z, 0)$, $v(x, y, z, 0)$, $w(x, y, z, 0)$ — произвольные достаточно гладкие функции, в новых переменных уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\psi_\eta + \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \xi}\psi_\zeta + \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0,$$

его дифференциальные следствия и соотношение (1.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_{\eta\eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_{\eta\zeta} &= G_1(\psi_\eta, \psi_\zeta, u_{\eta\eta}, u_{\eta\xi}, u_{\xi\xi}, v_{\eta\zeta}, v_{\zeta\xi}, v_{\eta\xi}, v_{\xi\xi}, w_{\eta\xi}, w_{\xi\xi}), \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_{\eta\zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_{\zeta\zeta} &= G_2(\psi_\eta, \psi_\zeta, u_{\eta\zeta}, u_{\eta\xi}, u_{\xi\xi}, v_{\zeta\zeta}, v_{\zeta\xi}, v_{\xi\xi}, w_{\zeta\xi}, w_{\xi\xi}), \\ \frac{\partial p}{\partial \xi} (\psi_{\eta\eta} + \psi_{\zeta\zeta}) &= F(\psi_\eta, \psi_\zeta, u_\eta, u_\zeta, u_\xi, v_\eta, v_\zeta, v_\xi, w_\eta, w_\zeta, w_\xi, p_{\eta\eta}, p_{\zeta\zeta}, p_{\xi\xi}, p_{\eta\xi}, p_{\zeta\xi}). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Определим $\psi_{\eta\eta}$, $\psi_{\eta\zeta}$, $\psi_{\zeta\zeta}$ из алгебраической системы уравнений (1.2):

$$\begin{aligned} \psi_{\eta\eta} &= \frac{1}{F_1} \left[G_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} - G_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + F \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right], \quad \psi_{\eta\zeta} = \frac{1}{F_1} \left[G_1 \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + G_2 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} - F \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right], \\ \psi_{\zeta\zeta} &= \frac{1}{F_1} \left[G_2 \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} - G_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial p}{\partial \xi} + F \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 \right], \quad F_1 = \frac{\partial p}{\partial \xi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Система (1.2) как система в частных производных будет совместной, если смешанные производные равны ($\psi_{\eta\eta\zeta} = \psi_{\eta\zeta\eta}$, $\psi_{\eta\zeta\zeta} = \psi_{\zeta\zeta\eta}$). Отсюда, подставив в полученные соотношения $\psi_{\eta\eta\zeta} = \psi_{\eta\zeta\eta}$ и $\psi_{\eta\zeta\zeta} = \psi_{\zeta\zeta\eta}$ выражения выписанных выше вторых производных, приходим к уравнению первого порядка относительно функции $\psi(\eta, \zeta)$:

$$A(\psi_\eta, \psi_\zeta, p_\xi, p_\eta, p_\zeta, p_{\xi\eta}, p_{\xi\zeta}, p_{\eta\zeta}, u_\eta, u_\zeta, u_{\xi\eta}, u_{\xi\zeta}, u_{\eta\zeta}, v_\eta, v_\zeta, v_{\xi\eta}, v_{\xi\zeta}, v_{\eta\zeta}, \dots) = 0.$$

Таким образом, на начальном многообразии след $\xi = z - \psi(x, y, 0) = 0$ будет гладкой поверхностью, если уравнение неразрывности и уравнение $A = 0$ первого порядка будут задавать ψ_η и ψ_ζ — производные одной и той же функции, что приводит к зависимости между начальными данными (эта зависимость заложена в уравнении неразрывности и соотношении (1.1)). Если зависимость (согласование начальных условий) не выполняется, то течение около следа будет иметь некоторые особенности. Фактически при произвольных начальных условиях получаются два уравнения в частных производных первого порядка и, как следствие, две пересекающиеся характеристики. Одна задается уравнением неразрывности, другая — уравнением $A = 0$, что приводит к тому, что возмущения, которые распространялись бы по одномерному многообразию в случае, если начальные условия согласованы, распространяются в двумерной области между двумя характеристиками. Известно, что одномерное движение и двумерное движение могут значительно отличаться (см. например, [17]). Это создает проблемы при построении сильного решения начально-краевой задачи для произвольных начальных данных в целом.

2. Некоторые особенности постановки краевой задачи

Рассмотрим для системы (0.1) постановку задачи с краевыми условиями, когда на неподвижном обтекаемом теле заданы условия прилипания.

Из последнего уравнения системы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial v}{\partial y} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Учитывая эти соотношения, перепишем систему (0.1) в виде

$$\begin{aligned} S \frac{\partial u}{\partial t} - u \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + E \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{R} \left(- \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ S \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} - v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w \frac{\partial v}{\partial z} + E \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ S \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} - w \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + E \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \right) &= \frac{1}{F}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В системе (2.1) перейдем к новым переменным $\psi(x, y) - z = \xi$, $x = \eta$, $y = \zeta$, $t = \tau$. Получим

$$\begin{aligned}
& S \frac{\partial u}{\partial \tau} - u \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_y - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_y \right) - w \frac{\partial u}{\partial \xi} + E \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \psi_x \right) \\
& - \frac{1}{R} \left(- \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \psi_y - \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_x - \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \psi_x \psi_y - \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \psi_x \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_y + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \psi_y^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_{yy} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right) = 0, \\
& S \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_x \right) - v \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_x - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - w \frac{\partial v}{\partial \xi} + E \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \psi_y \right) \\
& - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \psi_x + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \psi_x^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_{xx} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \psi_y \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_x - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \psi_x \psi_y - \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \psi_y + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) = 0, \\
& S \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_x \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_y \right) - w \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_x + \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_y \right) - E \frac{\partial p}{\partial \xi} \\
& - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} \psi_x + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \psi_x^2 + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_{xx} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_y + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \psi_y^2 + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_{yy} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \psi_x + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \psi_y \right) = \frac{1}{F}.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Систему уравнений (2.2) запишем в виде $AU = B$, где

$$A = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} \psi_y^2 + 1 & -\psi_x \psi_y & \psi_x \\ -\psi_x \psi_y & \psi_x^2 + 1 & \psi_y \\ \psi_x & \psi_y & \psi_x^2 + \psi_y^2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} S \frac{\partial u}{\partial \tau} - u \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_y - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_y \right) - w \frac{\partial u}{\partial \xi} + E \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \psi_x \right) - \frac{M}{R} \\ S \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_x \right) - v \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_x - \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) - w \frac{\partial v}{\partial \xi} + E \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \psi_y \right) - \frac{N}{R} \\ S \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_x \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_y \right) - wQ - E \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{H}{R} - \frac{1}{F} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$M = - \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \psi_y - \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_x - \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_y + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_{yy},$$

$$N = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \psi_x + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_{xx} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \psi_y - \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_x - \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi},$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_x + \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_y,$$

$$H = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} \psi_x + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_{xx} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_y + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_{yy} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi}.$$

Из последнего уравнения системы (0.1) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_x + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_y - \frac{\partial w}{\partial \xi} = 0. \quad (2.3)$$

Выпишем также дифференциальные следствия выражения (2.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \psi_x + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \psi_y - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_{xx} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_{xy} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} \psi_x + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \zeta} \psi_y - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_{xy} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_{yy} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \tau} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \tau} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \tau} \psi_x + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \tau} \psi_y - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \tau} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \psi_x + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \psi_y - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= 0. \end{aligned}$$

Пусть на поверхности $\xi = 0$ заданы краевые условия $u(t, \psi(x, y), x, y) = 0$, $v(t, \psi(x, y), x, y) = 0$, $w(t, \psi(x, y), x, y) = 0$, $\partial u / \partial \xi = u_1(\eta, \zeta)$, $\partial v / \partial \xi = v_1(\eta, \zeta)$. Тогда из уравнения (2.3) имеем $w_1(\eta, \zeta) = \partial w / \partial \xi = u_1 \psi_x + v_1 \psi_y$. Зададим также на этой поверхности $p(t, \psi(x, y), x, y) = p_0(\eta, \zeta)$, $\partial p / \partial \xi = p_1(\eta, \zeta)$.

Замечаем, что определитель матрицы A равен нулю. Умножаем правую и левую часть системы $AU = B$ на левый нуль-вектор матрицы (см. [18]):

$$L = \{\psi_x^2(\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1), \psi_x \psi_y(\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1) - \psi_x(\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1)\},$$

и получаем условия существования решения системы (2.2) на поверхности $\xi = 0$, предполагая, что $\psi_x \neq 0$, $\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1 \neq 0$, и учитывая соотношение (2.3) и его дифференциальные следствия, а также заданные краевые условия

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \right) (\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1) + 2(\psi_x \psi_{xx} + \psi_y \psi_{xy}) u_1 + 2(\psi_x \psi_{xy} + \psi_y \psi_{yy}) v_1 \right] \\ + E \left[\frac{\partial p_0}{\partial \eta} \psi_x + \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \psi_y + p_1 (\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1) \right] + \frac{1}{F} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Итак, при заданных первых производных (краевых условиях) имеем два соотношения (2.3) и (2.4), которые должны выполняться на обтекаемой поверхности, чтобы система (2.2) имела решение.

Преобразуем соотношение (2.4) к более удобному виду. Для этого перепишем дифференциальные следствия уравнения (2.3) и соотношение (2.4) следующим образом:

$$\begin{aligned} u_1 \psi_{\eta \eta} + v_1 \psi_{\eta \zeta} &= - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \psi_{\eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \psi_{\zeta} - \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right), \\ u_1 \psi_{\eta \zeta} + v_1 \psi_{\zeta \zeta} &= - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \psi_{\eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \psi_{\zeta} - \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \right), \\ (\psi_{\eta} \psi_{\eta \eta} + \psi_{\zeta} \psi_{\eta \zeta}) u_1 + (\psi_{\eta} \psi_{\eta \zeta} + \psi_{\zeta} \psi_{\zeta \zeta}) v_1 &= -0.5ER \left[\frac{\partial p_0}{\partial \eta} \psi_{\eta} + \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \psi_{\zeta} + p_1 n \right] \\ - 0.5 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \right) n - 0.5 \frac{R}{F}, \quad \text{где } n &= \psi_{\eta}^2 + \psi_{\zeta}^2 + 1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Умножим первое уравнение системы (2.5) на ψ_{η} , а второе уравнение — на ψ_{ζ} и сложим их. Вычитая из полученной суммы третье уравнение системы (2.5), сведем (2.4) к соотношению

$$0.5n \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + 0.5n \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \psi_{\eta} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \psi_{\zeta} \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} - \psi_{\eta} \psi_{\zeta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right)$$

$$+ 0.5ER \left[\frac{\partial p_0}{\partial \eta} \psi_\eta + \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \psi_\zeta + p_1 n \right] + 0.5 \frac{R}{F} = 0. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.3) при заданных краевых условиях принимает вид

$$w_1 = u_1 \psi_\eta + v_1 \psi_\zeta. \quad (2.7)$$

Тогда при заданных выводящих производных $u_1 = \partial u / \partial \xi$, $v_1 = \partial v / \partial \xi$, $w_1 = \partial w / \partial \xi$ поверхность $\xi = 0$ должна удовлетворять системе (2.6), (2.7) двух уравнений в частных производных первого порядка, если на теле известны давление p_0 и его выводящая производная $p_1 = \partial p / \partial \xi$.

Условие существования достаточно гладкого решения системы (2.2) вблизи обтекаемой поверхности свелось к получению условия совместности системы (2.6), (2.7).

Утверждение 1. Система дифференциальных уравнений первого порядка (2.6), (2.7) совместна тогда и только тогда, когда тождественно выполняется равенство

$$\{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\} / (2a) \Big|_\eta = \{w_1 / u_1 - v_1 [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}] / (2au_1)\} \Big|_\zeta, \quad (2.8)$$

где нижние индексы η и ζ обозначают, по каким переменным вычисляются производные от соответствующих выражений,

$$\begin{aligned} a &= 0.5 \frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \frac{v_1}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{v_1}{u_1} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} + 0.5 \frac{v_1^2 - u_1^2}{u_1^2} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + 0.5 ER p_1 \frac{u_1^2 + v_1^2}{u_1^2}, \\ b &= \frac{v_1 w_1}{u_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} - \frac{w_1}{u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} - \frac{w_1}{v_1} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} - \frac{w_1 v_1}{u_1^2} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} - \frac{v_1}{u_1} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \\ &\quad - 0.5 ER \frac{v_1}{u_1} \frac{\partial p_0}{\partial \eta} + 0.5 ER \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} - ER p_1 \frac{v_1 w_1}{u_1^2}, \\ c &= 0.5 \frac{u_1^2 - w_1^2}{u_1^2} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + 0.5 \frac{u_1^2 + w_1^2}{u_1^2} \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} + \frac{w_1}{u_1} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} + 0.5 ER \frac{w_1}{u_1} \frac{\partial p_0}{\partial \eta} + 0.5 ER p_1 \frac{u_1^2 + w_1^2}{u_1^2} + 0.5 \frac{R}{F}. \end{aligned}$$

Доказательство. Якобиева система, полученная из системы дифференциальных уравнений первого порядка (2.6), (2.7), будет вполне интегрируемой тогда и только тогда, когда тождественно выполняется равенство смешанных производных.

Подставив в уравнение (2.6) ψ_η из соотношения (2.7), имеем

$$\begin{aligned} &0.5 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \left(\frac{u_1^2 - v_1^2}{u_1^2} \psi_\zeta^2 + 2\psi_\zeta \frac{v_1 w_1}{u_1^2} + \frac{u_1^2 - w_1^2}{u_1^2} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \left(\frac{w_1}{u_1} \psi_\zeta - \frac{v_1}{u_1} \psi_\zeta^2 \right) \\ &- \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \left(\frac{w_1}{u_1} \psi_\zeta - \frac{v_1}{u_1} \psi_\zeta^2 \right) + 0.5 \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \left(\frac{v_1^2 - u_1^2}{u_1^2} \psi_\zeta^2 - 2\psi_\zeta \frac{v_1 w_1}{u_1^2} + \frac{u_1^2 + w_1^2}{u_1^2} \right) \\ &+ \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \left(\frac{w_1}{u_1} - \frac{v_1}{u_1} \psi_\zeta \right) + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \psi_\zeta + 0.5 ER \frac{\partial p_0}{\partial \eta} \left(\frac{w_1}{u_1} - \psi_\zeta \frac{v_1}{u_1} \right) + 0.5 ER \psi_\zeta \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \\ &+ 0.5 ER p_1 \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{u_1^2} \psi_\zeta^2 - 2\psi_\zeta \frac{v_1 w_1}{u_1^2} + \frac{u_1^2 + w_1^2}{u_1^2} \right) + 0.5 \frac{R}{F} = 0. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Выразив из (2.9) ψ_ζ , а затем ψ_η из соотношения (2.7), получим якобиеву систему

$$\psi_\zeta = c_1 / (2a), \quad \psi_\eta = w_1 / u_1 - v_1 c_1 / (2au_1), \quad \text{где } c_1 = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Требование равенства смешанных производных приведет к связывающему скорость и давление соотношению (2.8), которое должно тождественно выполняться на обтекаемом теле

Утверждение доказано. \square

Если соотношение (2.8) не обращается в тождество, то смешанные производные равны только на некоторой линии $\varphi(\eta, \zeta) = 0$.

Обратимся к соотношению (2.7). В этом соотношении

$$u_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{u(\eta, \zeta, \xi) - u(\eta, \zeta, 0)}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{u(\eta, \zeta, \xi)}{\xi}, \quad v_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{v(\eta, \zeta, \xi) - v(\eta, \zeta, 0)}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{v(\eta, \zeta, \xi)}{\xi},$$

$$w_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{w(\eta, \zeta, \xi) - w(\eta, \zeta, 0)}{\xi} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{w(\eta, \zeta, \xi)}{\xi},$$

следовательно, $u(\eta, \zeta, \xi)\psi_\eta + v(\eta, \zeta, \xi)\psi_\zeta - w(\eta, \zeta, \xi) = o(\xi)$.

Таким образом в силу соотношения (2.7) поток вблизи поверхности обтекаемого тела “повторяет” форму его поверхности.

Как показано ранее, для существования достаточно гладкого решения системы (2.2) выполнения одного условия (2.7) недостаточно. Для построения решения в классе гладких функций необходимо выполнение условий (2.6)–(2.8). Если условие (2.8) не выполняется, то соотношение (2.7) и соотношение (2.6) задают два конуса нормалей и две разные поверхности, пересекающиеся по линии $\varphi(\eta, \zeta) = 0$ — поверхность обтекаемого тела и поверхность, описываемая уравнением (2.6). Так как на поверхности обтекаемого тела имеем условия прилипания, эту поверхность можно считать характеристической поверхностью слабого разрыва. Ситуация с двумя разными поверхностями, имеющими общую часть, аналогична ситуации в геометрической оптике, когда направление падающего луча света совпадает с оптической осью кристалла. Математически такая ситуация описывается двумя характеристическими поверхностями, имеющими одну общую нормаль. В случае геометрической оптики это приводит к рассеянию света, называемому конической рефракцией [19]. Как следует из наблюдений [14], нередко при обтекании гладких поверхностей (рассматриваемая нами задача) возникают зоны перемешивания и рассеяния. Причиной таких явлений является то, что возмущение от тела на линии пересечения поверхностей $\varphi(\eta, \zeta) = 0$ рассеивается подобно рассеиванию луча при конической рефракции. Между поверхностями (2.6), (2.7) может возникать достаточно сложная картина течения (сильные и слабые разрывы, обострение, турбулентное перемешивание).

Следствие. Если на поверхности обтекаемого тела $u_1 = v_1 = w_1 = 0$, то условие совместности (2.4) принимает вид

$$E \left[\frac{\partial p_0}{\partial \eta} \psi_x + \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \psi_y + p_1(\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1) \right] + \frac{1}{F} = 0.$$

3. Зависимость выводящих производных от числа Рейнольдса

Если в системе (0.1) перейти к новым переменным, не учитывая уравнение неразрывности, то получим систему $GU = T_0$, где

$$G = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} \psi_x^2 + \psi_y^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_x^2 + \psi_y^2 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_x^2 + \psi_y^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Для вектора T_0 имеем

$$T_0 = \begin{pmatrix} S \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_x \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \psi_y \right) - w \frac{\partial u}{\partial \xi} + E \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \psi_x \right) - \frac{M_1}{R} \\ S \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_x \right) + v \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \psi_y \right) - w \frac{\partial v}{\partial \xi} + E \left(\frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial p}{\partial \xi} \psi_y \right) - \frac{N_1}{R} \\ S \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_x \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \psi_y \right) - w \frac{\partial w}{\partial \xi} - E \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{H_1}{R} - \frac{1}{F} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } M_1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \psi_x + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_y, \quad N_1 = \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \psi_x + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_y,$$

$$H_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta \partial \xi} \psi_x + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \xi} \psi_y.$$

Отсюда получаем, что на поверхности $\xi = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} &= \frac{R}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1} \left[E \left(\frac{\partial p_0}{\partial \eta} + p_1 \psi_x \right) - \frac{M_2}{R} \right], \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} &= \frac{R}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1} \left[E \left(\frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + p_1 \psi_y \right) - \frac{N_2}{R} \right], \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} &= - \frac{R}{\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1} \left(E p_1 + \frac{H_2}{R} + \frac{1}{F} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{где } M_2 = 2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \psi_x + \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} \psi_y \right), \quad N_2 = 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial \eta} \psi_x + \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} \psi_y \right), \quad H_2 = 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial \eta} \psi_x + \frac{\partial w_1}{\partial \zeta} \psi_y \right),$$

$w_1 = u_1 \psi_x + v_1 \psi_y$. Подставляя значения (3.1) в дифференциальные следствия (2.3), снова получаем соотношение (2.4). Следовательно, выражения (3.1) задают вторые производные течения около обтекаемого тела, если заданные на теле краевые условия удовлетворяют зависимости (2.4).

Как следует из (3.1), при $R \rightarrow \infty$ вторые производные от компонент скорости также стремятся к бесконечности.

Отметим, что из соотношения (3.1) также следует, что если число Рейнольдса

$$R < \min \left\{ M_2 / \left[E \left(\frac{\partial p_0}{\partial \eta} + p_1 \psi_x \right) \right], \quad N_2 / \left[E \left(\frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + p_1 \psi_y \right) \right], \quad -H_2 / \left(E p_1 + \frac{1}{F} \right) \right\},$$

то величину вторых производных определяют члены, не зависящие от величины числа Рейнольдса. Аналогично, если на теле выполняются зависимости

$$\frac{\partial p_0}{\partial \eta} + p_1 \psi_x = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} + p_1 \psi_y = 0, \quad E p_1 + \frac{1}{F} = 0,$$

то число Рейнольдса не оказывает влияния на вторые производные.

Утверждение 2. Вблизи обтекаемой плоскости $l = at + x + by + cz$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} K = \infty, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} T = \infty,$$

где K — кривизна линий тока, T — кручение линий тока, R — число Рейнольдса.

Доказательство. Рассмотрим влияние числа Рейнольдса на течение вблизи обтекаемого тела на точном решении системы уравнений Навье — Стокса [20]. Предположим, что ее решение $u = u(\psi(x, y, z, t))$, $v = v(\psi(x, y, z, t))$, $w = w(\psi(x, y, z, t))$, $p = p(\psi(x, y, z, t))$, тогда $\psi(x, y, z, t) = \text{const}$ — поверхность уровня для u, v, w, p . При таком предположении система (0.1) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} S u' \psi_t + u u' \psi_x + v u' \psi_y + w u' \psi_z - \frac{1}{R} (u'' m + u' \Delta) &= 0, \\ S v' \psi_t + u v' \psi_x + v v' \psi_y + w v' \psi_z - \frac{1}{R} (v'' m + v' \Delta) &= 0, \\ S w' \psi_t + u w' \psi_x + v w' \psi_y + w w' \psi_z - \frac{1}{R} (w'' m + w' \Delta) &= \frac{1}{F}, \\ u' \psi_x + v' \psi_y + w' \psi_z = 0, \quad m = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2, \quad \Delta = \psi_{xx} + \psi_{yy} + \psi_{zz}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В системе (3.2) штрих (l) обозначает дифференцирование по ψ , нижние индексы — дифференцирование функции ψ по соответствующим переменным.

Пусть $\psi_x \neq 0$. Положим, что $\psi_t/\psi_x = f_1(\psi)$, $\psi_y/\psi_x = f_2(\psi)$, $\psi_z/\psi_x = f_3(\psi)$, $(\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2)/\psi_x = f_4(\psi)$, где $f_i(\psi)$ — некоторые произвольные функции ($i = 1, 2, 3, 4$). Тогда $\psi_x = f_4/(1 + f_2^2 + f_3^2) = g(\psi)$. Из равенства смешанных производных получим, что $\psi_t = ag(\psi)$, $\psi_y = bg(\psi)$, $\psi_z = cg(\psi)$, $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$ и, как следствие, $\psi = \psi(l)$, $l = x + at + by + cz$. Тогда имеем, что $u = u(l)$, $v = v(l)$, $w = w(l)$, $p = p(l)$ и система уравнений (0.1) сводится к следующей системе ОДУ:

$$\begin{aligned} (Sa + u + bv + cw)u_l + Epl - \frac{1}{R}qu_{ll} &= 0, & (Sa + u + bv + cw)v_l + Ebp_l - \frac{1}{R}qv_{ll} &= 0, \\ (Sa + u + bv + cw)w_l + Ecp_l - \frac{1}{R}qw_{ll} &= \frac{1}{F}, & u_l + bv_l + cw_l &= 0, \quad \text{где } q = 1 + b^2 + c^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Дифференциальные следствия последнего уравнения системы (3.3) приводят к соотношениям $u_{ll} + bv_{ll} + cw_{ll} = 0$, $u + bv + cw = A$, $A = \text{const}$. Если второе уравнение системы (3.3) умножить на b , а третье уравнение системы — на c и сложить с первым уравнением системы, то получим $p_l = c/(FEq)$. Тогда первые три уравнения системы (3.3) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{q}{R}u_{ll} - (Sa + A)u_l - \frac{c}{Fq} &= 0, & \frac{q}{R}v_{ll} - (Sa + A)v_l - \frac{cb}{Fq} &= 0, \\ \frac{q}{R}w_{ll} - (Sa + A)w_l + \frac{1 + b^2}{Fq} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Выпишем общее решение линейной системы с постоянными коэффициентами (3.4).

Если $A \neq (-Sa)$, то

$$\begin{aligned} u &= \frac{U_0}{\alpha} \exp(\alpha l) - \frac{\beta}{\alpha} l + U_1, & \alpha &= \frac{R(Sa + A)}{q}, & \beta &= -\frac{cR}{Fq^2}, \\ U_0 &= \text{const}, & U_1 &= \text{const}; \\ v &= \frac{V_0}{\alpha} \exp(\alpha l) - \frac{b\beta}{\alpha} l + V_1, & V_0 &= \text{const}, & V_1 &= \text{const}; \\ w &= -\frac{U_0 + bV_0}{c\alpha} \exp(\alpha l) + \frac{\beta(1 + b^2)}{c\alpha} l + \frac{A - U_1 - bV_1}{c}; \\ p &= \frac{c}{FEq} l + p_0, & p_0 &= \text{const}, & l &= at + x + by + cz. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На примере (3.5) будем изучать свойства течения вблизи поверхности $\xi = 0$, полагая, что $\xi = l$ — подвижная обтекаемая плоскость. На плоскости $l = 0$ зададим условия прилипания $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 0$. Тогда на поверхности $l = 0$ имеем $A = 0$, $U_1 = -U_0/\alpha$, $V_1 = -V_0/\alpha$, следовательно,

$$u_1 = U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)}, \quad v_1 = V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)}, \quad w_1 = -\frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)}, \quad p_1 = \frac{c}{qEF}.$$

Заметим, что первые производные по ξ не зависят от числа Рейнольдса и, как и в общем случае (см. следствие), вблизи обтекаемой поверхности течение повторяет форму поверхности в каждый момент времени: $u_1 + bv_1 + cw_1 = 0$, следовательно, $u(l) + bv(l) + cw(l) = o(l)$.

Выпишем также вторые производные на поверхности $\xi = l = 0$. Получим

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = \alpha U_0, \quad \frac{d^2v}{d\xi^2} = \alpha V_0, \quad \frac{d^2w}{d\xi^2} = -\frac{(U_0 + bV_0)\alpha}{c}, \quad \frac{d^2p}{d\xi^2} = 0.$$

Здесь просматривается зависимость от числа Рейнольдса (см. α в (3.5)). Аналогично для третьих производных имеем

$$\frac{d^3 u}{d\xi^3} = \alpha^2 U_0, \quad \frac{d^3 v}{d\xi^3} = \alpha^2 V_0, \quad \frac{d^3 w}{d\xi^3} = -\frac{(U_0 + bV_0)\alpha^2}{c}, \quad \frac{d^3 p}{d\xi^3} = 0.$$

Подставляя полученные значения производных в формулы кривизны K и кручения T для линии $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, $w = w(\xi)$, будем иметь

$$K = \frac{R(Sa + A)}{qT_1} \sqrt{T_1 T_2 - \frac{qT_3}{R(Sa + A)}}, \quad T = \left(\frac{R(Sa + A)}{q} \right)^3 \frac{T_4}{T_1^3 K^2}, \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)} \right)^2 + \left(V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)} \right)^2 + \left(-\frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)} \right)^2, \\ T_2 &= U_0^2 + V_0^2 + \left[\frac{U_0 + bV_0}{c} \right]^2, \\ T_3 &= U_0 \left(U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)} \right) + V_0 \left(V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)} \right) + \frac{U_0 + bV_0}{c} \left(-\frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)} \right), \\ T_4 &= V_0 \left(U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)} \right) \left(\frac{U_0 + bV_0}{c} \right) + U_0 V_0 \left(-\frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)} \right) \\ &\quad + U_0 \left(\frac{U_0 + bV_0}{c} \right) \left(V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)} \right) - U_0 V_0 \left(-\frac{U_0 + bV_0}{c} + \frac{1 + b^2}{qF(Sa + A)} \right) \\ &\quad - V_0 \left(\frac{U_0 + bV_0}{c} \right) \left(U_0 - \frac{c}{qF(Sa + A)} \right) - U_0 \left(\frac{U_0 + bV_0}{c} \right) \left(V_0 - \frac{bc}{qF(Sa + A)} \right). \end{aligned}$$

Из зависимостей (3.6) имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} K = \infty, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} T = \infty.$$

Утверждение доказано. □

4. Заключение

Как показано выше, при постановке и начальной, и краевой задачи приходится иметь дело с переопределенной системой дифференциальных уравнений в частных производных (см. уравнение неразрывности и уравнение (1.1) в новых независимых переменных или систему (2.6), (2.7)). Требование совместности таких систем приводит при заданном давлении к определенным требованиям на скорость движения среды (см. (2.8)). Если эти требования не выполняются, то каждое уравнение системы в области решения имеет свой конус нормалей и, как показывает расширенная система уравнений характеристик [21; 22], свои производные высшего порядка, через которые выражается кривизна и кручение линии тока (см. (3.6)).

Хорошо известно в оптике, что если направление падающего луча совпадает с направлением оптической оси кристалла, то вместо точки на экране наблюдается светлое пятно. Этот эффект рассеяния луча (коническая рефракция) объясняется наличием двух разных уравнений в частных производных первого порядка. Их конусы нормалей имеют одну общую нормаль, но не совпадают. Аналогичная причина ведет к явлению рассеяния при нестационарном течении идеальной плазмы, когда вектор магнитной напряженности параллелен нормали характеристической поверхности и скорость звука равна скорости Альфена [19].

Сравним этот факт с тем, что получается при решении системы (2.6), (2.7), если не выполняются условия (2.8). Отмечаем сходство с математическим описанием конической рефракции. Здесь роль оптической оси кристалла играет линия $\varphi(\eta, \zeta) = 0$. Напрашивается аналогия в поведении потока, обтекающего тело (рассеяние, турбулентное перемешивание), с эффектом рассеяния в оптике.

В случае начальной задачи, описывающей движение вязкой жидкости в начальный момент времени, поток или движение может не соответствовать окружающему атмосферному давлению, и зависимость (1.1) не выполняется. Появляются зоны дополнительных возмущений, которые при своем распространении приводят к перемешиванию, рассеянию и т. п.

Таким образом, можно считать, что первопричина, порождающая разрушение ламинарного течения, кроется в отсутствии согласования между окружающим давлением и скоростью движения жидкости. Отсюда и дополнительные возмущения [13], и рассеяние [14], и бифуркация [10]. Как показано в работе на примере краевой задачи, могут существовать определенные условия для устранения “конфликта” (см. например, (2.8)).

Переход к турбулентному движению в сплошных средах происходит с ростом числа Рейнольдса. Известно также, что кривизна линий тока оказывает существенное влияние на турбулентность, в том числе на ее интенсификацию, и является важным аспектом, который требует тщательного рассмотрения при изучении турбулентности и развитии ее моделей [23; 24]. В этом контексте интересно, что для рассмотренной математической модели (0.1) из соотношений (3.1), (3.6) следует, что при $A \neq (-Sa)$ и увеличении числа Рейнольдса кривизна и кручение линий тока увеличиваются. В противном случае ($A = -Sa$) увеличение числа Рейнольдса не оказывает заметного влияния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
2. **Пухначев В.В.** Симметрии в уравнениях Навье — Стокса // Успехи механики. 2006. № 6. С. 3–76.
3. **Brandolese L.** Fine properties of self-similar solutions of the Navier–Stokes equation // Arch. Ration. Mech. Anal. 2009. Vol. 192, no. 3. P. 375–401.
4. **Galdi G.P.** On the motion of a rigid body in a viscous liquid: a mathematical analysis with applications // Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Amsterdam, 2002. Vol. I. P. 653–791.
5. **Schonbek M.E.** Asymptotic behavior of solutions to free-dimensional Navier–Stokes equations // Indiana Univ. Math. J. 1992. Vol. 41, no. 3. P. 809–823.
6. **Miyakawa T.** On space-time decay properties of nonstationary incompressible Navier–Stokes flows in \mathbf{R}^n // Funkcialaj Ekvacioj. 2000. Vol. 43, no. 3. P. 541–557.
7. **Fefferman C.** Existence and smoothness of the Navier–Stokes equation // The millennium prize problems / Clay Math. Inst. Cambridge, 2006. P. 57–67.
8. **Ладыженская О.А.** Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
9. **Galaktionov V.A.** On a spectrum of blow-up patterns for a higher-order semilinear parabolic equations // R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 2001. Vol. 457, no. 2011. P. 1623–1643.
10. **Marsden J., McCracken J.** The Hopf bifurcation and its applications. New York: Springer-Verlag, 1976. 408 p. (Appl. Math. Sci.; vol. 19.)
11. **Кочетков Ю.Н.** Турбулентность на шероховатой стенке и новые фундаментальные уравнения пограничного слоя // Двигатель. 2015. № 3 (99). С. 38–41.
12. **Слезкин Н.А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М: ГИТТЛ, 1955. 519 с.
13. **Chorin A.J.** Lectures on turbulence theory. Boston: Publish or Perish, 1976. 159 p. (Math. Lecture Ser. no. 5.)
14. **Колмогоров А.Н.** Рассеяние энергии при локальной изотропной турбулентности // Докл. АН. Vol. 32, no. 1. С. 19–21.
15. **Giga Y.** Weak and strong solutions of the Navier–Stokes initial value problem // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1983. Vol. 19, no. 3. С. 887–910.
16. **Galdi G.P.** An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. Vol. I: Linear Steady Problems; Vol. II: Nonlinear Steady Problems. New York: Springer Verlag, 1994. 450 p.; 323 p. (Springer Tracts in Nat. Ph.; vol. 38; vol. 39.)

17. **Ермолин Е.В., Рубина Л.И., Сидоров А.Ф.** К задаче о двух поршнях // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32, вып. 5. С. 946–954.
18. **Курант Р.** Уравнения с частными производными. М. : Мир, 1964. 830 с.
19. **Рубина Л.И.** О распространении слабых разрывов для квазилинейных систем // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 3. С. 435–443.
20. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Об одном методе решения систем нелинейных уравнений в частных производных // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 238–246.
21. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** О решении уравнения потенциала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 1. С. 130–145.
22. **Рубина Л.И., Ульянов О.Н.** Решение нелинейных уравнений в частных производных геометрическим методом // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 209–225.
23. **Bradshaw P.** Effects of streamwise curvature on turbulent flow // AGARDograph No. 169. London, 1973. 134 p.
24. **Pathak M., Dewan A., Dass A.K.** // Effect of streamline curvature on flow field of a turbulent plane jet in cross-flow // Mechanics Research Communications. 2007. Vol. 34. P. 241–248.

Рубина Людмила Ильинична

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: rli@imm.uran.ru

Ульянов Олег Николаевич

канд. физ.-мат. наук

старший науч. сотрудник

ученый секретарь института

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

доцент

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: secretary@imm.uran.ru

УДК 512.54, 519.17

О ГРАФАХ С ВЕРШИНАМИ ДВУХ ЦВЕТОВ И ГРУППАХ С 3-ТРАНСПОЗИЦИЯМИ¹

А. И. Созутов, И. О. Александрова

Рассматриваются помеченные неориентированные графы без петель и кратных ребер с вершинами, окрашенными в два цвета. Раскраска графа Γ_n называется нечетносвязной, если после удаления вершин первого цвета (и инцидентных им ребер) граф распадается на нечетное число связных компонент. Для определенных серий вложенных друг в друга графов Γ_n найдена общая формула числа t_n нечетносвязных раскрасок, зависящая от двух параметров. В случаях, когда два графа серии могут быть интерпретированы как графы Кокстера подходящих групп с 3-транспозициями, получены конкретные формулы для чисел t_n .

Ключевые слова. Помеченный граф, раскраска графа, производящая функция, граф Кокстера, группа с 3-транспозициями.

A. I. Sozutov, I. O. Aleksandrova. On graphs with vertices of two colors and groups with 3-transpositions.

We consider labeled undirected graphs without loops or multiple edges with vertices of two colors. A coloring of a graph Γ_n is called odd-connected if the removal of vertices of the first color produces an odd number of connected components. A general formula for the number t_n of odd-connected colorings is found for certain families of embedded graphs Γ_n . The formula depends on two parameters. In the cases where two graphs in a family can be interpreted as Coxeter graphs for certain groups with 3-transpositions, specific formulas for the numbers t_n are found.

Keywords: labeled graph, graph coloring, generating function, Coxeter graph, group with 3-transpositions.

1. Введение

Рассматриваются помеченные неориентированные графы Γ_n с множеством вершин $V(\Gamma_n) = \{1, \dots, n\}$ без петель и кратных ребер [1]. Под подграфом Δ графа понимается подграф, индуцированный графом Γ_n на множестве вершин $V(\Delta)$. Считая все вершины графа Γ_n белыми, будем окрашивать некоторые (в том числе и все) вершины в черный цвет. Черная связная компонента графа Γ_n — это максимальный по включению, связный, полностью окрашенный в черный цвет подграф. Раскраска графа Γ_n называется нечетносвязной, если после удаления белых вершин он распадается на нечетное число связных компонент, и четносвязной в противном случае. Граф Γ_n допускает 2^n различных раскрасок; нас интересует число $t_n = t(\Gamma_n)$ нечетносвязных раскрасок. Множество $\{\Gamma_n\}$ ($n \geq m$) вложенных друг в друга графов называем *A-серией*, если их подграфы с вершинами $m - 1, m, \dots, n$ являются цепями (графами Кокстера A_{n-m+2} [2]):

$$\Gamma_{m-1} \subset \Gamma_m \subset \dots \subset \Gamma_n \subset \dots, \quad \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \dots \quad (1.1)$$

$m-1 \quad m \quad n$

A-серии (1.1) соответствует последовательность $\{t_n\}$ чисел $t_n = t(\Gamma_n)$:

$$t_{m-1}, t_m, \dots, t_n, \dots \quad (1.2)$$

О числах t_n последовательности (1.2) получен следующий результат.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-04897 А).

Теорема 1. Для чисел последовательности (1.2) при любом $n \geq m$ справедливо равенство

$$t_n = 2^{n-1} + 2^{(n-m)/2} \left[(t_{m+1} - t_m - 2^{m-1}) \sin \frac{\pi(n-m)}{4} + (t_m - 2^{m-1}) \cos \frac{\pi(n-m)}{4} \right]. \quad (1.3)$$

Последовательность (1.2) однозначно определяется числом m и любой четверкой чисел n, k, t_n, t_{n+k} , где $k \not\equiv 0 \pmod{4}$.

Теорема 1 имеет непосредственное отношение к группам с симплектическими 3-транспозициями, которые тесно связаны со многими математическими структурами [3; 4]. С учетом исследований [5] в работе [6] были найдены некоторые системы порождающих 3-транспозиций групп $Sp_{2n}(2)$, $O_{2n}^+(2)$, $O_{2n}^-(2)$ и их графы, аналогичные системам порождающих отражений и графам Кокстера групп Вейля $W(E_n)$, $n = 6, 7, 8$ (см. [2]). Напомним, что множество $D = a^G$ инволюций группы G называется *классом 3-транспозиций*, если $|ab| \leq 3$ для любых $a, b \in D$, $G = \langle D \rangle$ и инволюции из D сопряжены в G [7]. Минимальной системе порождающих $X \subseteq D$ группы G ставится в соответствие граф Γ , вершинами которого являются элементы из X , и две вершины a, b смежны в том и только том случае, когда инволюции a и b неперестановочны. В статье [6] было установлено, какие группы с симплектическими 3-транспозициями соответствуют графам из трех определенных в ней серий графов-деревьев I_n, J_n, E_n ($n \geq 7$). Теорема 1 позволяет рассмотреть более общий случай. Как известно, число 3-транспозиций в группах $O_{2l}^\pm(2)$ и $Sp_{2l}(2)$ равно $t_{2l} = 2^{2l-1} \mp 2^{l-1}$ и $t_{2l+1} - 1 = 2^{2l} - 1$. Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Если $t_r = 2^{r-1}$ и $t_s = 2^{s-1} \pm 2^{(s-2)/2}$ для некоторых нечетного r и четного s , то для чисел последовательности (1.2) верна точно одна из следующих групп формул:

- (1) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$;
 $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^{k+1} 2^{2k+1}$;
- (2) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k}$;
 $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^k 2^{2k+1}$;
- (3) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1} 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1} 2^{2k}$;
 $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$;
- (4) $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1}$; $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^k 2^{2k}$; $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k}$;
 $t_{4k+3} = 2^{4k+2}$.

Числа t_n из групп (1)–(4) вычисляются по соответствующим формулам (i)–(iv):

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad t_{n+1} &= 2^n - 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}; & \text{(ii)} \quad t_{n+1} &= 2^n + 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}; \\ \text{(iii)} \quad t_{n+1} &= 2^n - 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}; & \text{(iv)} \quad t_{n+1} &= 2^n + 2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}. \end{aligned}$$

Часть результатов статьи была анонсирована в [8]; в теореме 2 здесь исправлена допущенная в [8] неточность (в теореме из [8] была пропущена группа формул (iv)).

З а м е ч а н и е 1. Начальный граф Γ_m в A -серии (1.1) может быть произвольным. Если, например, Γ_m — полный граф, то согласно теореме 1

$$t_n = 2^{n-1} + 2^{(n-m-2)/2} \cos \frac{\pi(n-m)}{4} - 2^{(n-m+1)/2} \cos \frac{\pi(n-m+1)}{4}.$$

А если Γ_m — пустой граф, то $t_n = 2^{n-1}$.

Как известно, каждый граф представляется в виде дизъюнктного объединения своих связанных компонент [1, теорема 4.6]. Для несвязных графов очевидно справедливо следующее свойство.

З а м е ч а н и е 2. Если граф Γ несвязен и является дизъюнктным объединением подграфов Δ и Σ , содержащих m и k вершин, то $t(\Gamma) = t(\Delta)(2^k - t(\Sigma)) + t(\Sigma)(2^m - t(\Delta))$. Если при этом $t(\Delta) = 2^{m-1}$, то во всех случаях $t(\Gamma) = 2^{m+k-1}$.

2. Доказательство теоремы 1

Множество всех нечетносвязных окрасок графа Γ_n серии (1.1) при $n \geq m + 2$ естественно разбивается на три подмножества. Это окраски с белой вершиной n , число таких окрасок равно t_{n-1} ; окраски с белой вершиной $n - 1$ и черной вершиной n , число этих окрасок равно $2^{n-2} - t_{n-2}$; окраски с черными вершинами $n-1$ и n , число которых, очевидно, равно $t_{n-1} - t_{n-2}$:



Отсюда заключаем, что для членов последовательности $\{t_n\}$ выполняется рекуррентное соотношение

$$t_n = 2t_{n-1} + 2^{n-2} - 2t_{n-2}. \tag{2.1}$$

Предполагая, что известны начальные условия t_m и t_{m+1} , докажем формулу (1.3). Производящая функция $P(x)$ [9] для последовательности (1.1) имеет вид

$$P(x) = \sum_{n \geq m} t_n x^n.$$

Найдем функцию $P(x)$. Для этого умножим обе части равенства (2.1) на x^n и просуммируем полученные равенства по n , $n \geq m + 2$:

$$\sum_{n \geq m+2} t_n x^n = 2 \sum_{n \geq m+2} t_{n-1} x^n + \sum_{n \geq m+2} 2^{n-2} x^n - 2 \sum_{n \geq m+2} t_{n-2} x^n.$$

Тогда

$$P(x) - t_m x^m - t_{m+1} x^{m+1} = 2x (P(x) - t_m x^m) + \frac{2^m x^{m+2}}{1 - 2x} - 2x^2 P(x).$$

Следовательно, производящая функция $P(x)$ для последовательности t_n имеет вид

$$P(x) = \frac{t_m x^m + (t_{m+1} - 4t_m) x^{m+1} + (4t_m - 2t_{m+1} + 2^m) x^{m+2}}{(1 - 2x + 2x^2)(1 - 2x)}.$$

Согласно общему принципу (см. [9, § 1.3])

$$t_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{P(x) dx}{x^{n+1}}.$$

Раскладывая дробь $\frac{1}{(1 - 2x + 2x^2)(1 - 2x)}$ на сумму простейших дробей, получаем

$$t_n = \frac{(t_{m+1} - 2t_m)}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1 - 2x + 2x^2) x^{n-m}} + \frac{(t_m - 2^{m-1})}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1 - 2x + 2x^2) x^{n-m+1}} + \frac{2^{m-1}}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1 - 2x) x^{n-m+1}}, \quad 0 < \rho \ll 1.$$

Для вычисления первого интеграла в (2.2) представим функцию $\frac{1}{1 - 2x + 2x^2}$ в виде

$$\frac{1}{1 - 2x + 2x^2} = \frac{1}{2i(x - x_1)} - \frac{1}{2i(x - x_2)},$$

где $x_1 = \frac{1+i}{2}$, $x_2 = \frac{1-i}{2}$ — корни многочлена $1 - 2x + 2x^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1-2x+2x^2)x^{n-m}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{2i(x-x_1)x^{n-m}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{2i(x-x_2)x^{n-m}} \\ &= -\frac{1}{2ix_1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{\left(1-\frac{x}{x_1}\right)x^{n-m}} + \frac{1}{2ix_2} \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{\left(1-\frac{x}{x_2}\right)x^{n-m}} \\ &= -\frac{1}{2ix_1} \frac{1}{x_1^{n-m-1}} + \frac{1}{2ix_2} \frac{1}{x_2^{n-m-1}} = -\frac{1}{2ix_1^{n-m}} + \frac{1}{2ix_2^{n-m}}, \end{aligned}$$

и поскольку

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{(i\pi)/4}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(i\pi)/4},$$

то для первого интеграла из (2.2) получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(i\pi)/4}\right)^{n-m}} + \frac{1}{2i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(i\pi)/4}\right)^{n-m}} &= -\frac{1}{2i}(\sqrt{2})^{n-m}e^{-(i\pi)/4} + \frac{1}{2i}(\sqrt{2})^{n-m}e^{i\pi(n-m)/4} \\ &= (\sqrt{2})^{n-m} \frac{e^{i\pi(n-m)/4} - e^{-i\pi(n-m)/4}}{2i} = 2^{(n-m)/2} \sin \frac{\pi(n-m)}{4}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом вычисляется второй интеграл в (2.2):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1-2x+2x^2)x^{n-m+1}} &= 2^{(n-m+1)/2} \sin \frac{\pi(n-m+1)}{4} \\ &= 2^{(n-m)/2} \sin \frac{\pi(n-m)}{4} + 2^{(n-m)/2} \cos \frac{\pi(n-m)}{4}. \end{aligned}$$

И третий интеграл в (2.2):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|x|=\rho} \frac{dx}{(1-2x)x^{n-m+1}} = 2^{n-m}.$$

Подставляя полученные значения интегралов в (2.2), имеем формулу (1.3). Первое утверждение теоремы 1 доказано.

Допустим теперь, что нам известны числа m , n , k и значения t_n , t_{n+k} . Согласно формуле (1.3) относительно неизвестных чисел t_m , t_{m+1} имеем систему линейных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} &\sin \frac{\pi(n-m)}{4} t_{m+1} + 2^{1/2} \cos \frac{\pi(n-m+1)}{4} t_m \\ &= 2^{(m-n)/2} t_n - 2^{(n+m-2)/2} + 2^{(2m-1)/2} \sin \frac{\pi(n-m+1)}{4}, \\ &\sin \frac{\pi(n+k-m)}{4} t_{m+1} + 2^{1/2} \cos \frac{\pi(n+k-m+1)}{4} t_m \\ &= 2^{(m-n-k/2)} t_{n+k} - 2^{(n+k+m-2)/2} + 2^{(2m-1)/2} \sin \frac{\pi(n+k-m+1)}{4} \end{aligned} \right.$$

с определителем системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin \frac{\pi(n-m)}{4} & 2^{1/2} \cos \frac{\pi(n-m+1)}{4} \\ \sin \frac{\pi(n-m+k)}{4} & 2^{1/2} \cos \frac{\pi(n-m+k+1)}{4} \end{vmatrix} = -\sin \frac{\pi k}{4}.$$

Если $k \not\equiv 0 \pmod{4}$, то определитель Δ не равен 0 и система имеет единственное решение. Отсюда заключаем, что при $k \not\equiv 0 \pmod{4}$ значения t_m и t_{m+1} однозначно определяются числами m, n, k, t_n и t_{n+k} и второе утверждение теоремы 1 также верно. Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

По условиям теоремы 2 (см. разд. 1) известны числа $t_r = 2^{r-1}$, $t_s = 2^{s-1} \pm 2^{(s-2)/2}$ последовательности (1.2). Тогда число r также известно, а поскольку из двух соседних степеней числа 2, между которыми расположено число t_s , только одна нечетна, то известно и число s . Согласно замечанию 1 можно считать, что последовательность (1.2) начинается с числа t_m , где $m = \min(r, s)$. По второму утверждению теоремы 1 числами m, r, s, t_r, t_s последовательность (1.2) определяется однозначно. Группа чисел (X) ($X \in \{1, 2, 3, 4\}$), в которой содержатся оба числа t_r и t_s , определяется просто. При $r \equiv 1 \pmod{4}$ число t_r содержится среди чисел t_{4k+1} групп (1), (2), а при $r \equiv 3 \pmod{4}$ — среди чисел t_{4k+3} групп (3), (4) (см. формулировку теоремы, разд. 1). Из двух выбранных по числу t_r групп число t_s содержится только в одной, что и позволяет определить группу (X) .

Покажем вначале, что числа групп (1)–(4) могут быть вычислены по формулам (i)–(iv) разд. 1. Функции натурального аргумента $\sin \frac{\pi n}{4}$ и $\cos \frac{\pi n}{4}$ периодические, периода 8. Начиная с $n = 4k - 1$, функция $\sin \frac{\pi n}{4}$ последовательно принимает значения

$$(-1)^{k-1}2^{-1/2}, 0, (-1)^k2^{-1/2}, (-1)^k, (-1)^k2^{-1/2}, 0, (-1)^{k+1}2^{-1/2}, (-1)^{k+1},$$

при этом первые 4 значения функции $2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4}$ равны

$$(-1)^{k-1}2^{2k-1}, 0, (-1)^k2^{2k}, (-1)^k2^{2k+1}.$$

Отсюда следует, что числа групп (1), (2) удовлетворяют формулам (i), (ii).

Аналогично, начиная с $n = 4k - 1$, функция $\cos \frac{\pi n}{4}$ принимает значения

$$(-1)^k2^{-1/2}, (-1)^k, (-1)^k2^{-1/2}, 0, (-1)^{k+1}2^{-1/2}, (-1)^{k+1}, (-1)^{k+1}2^{-1/2}, (-1)^{k+1},$$

и первые 4 значения функции $2^{n/2} \cos \frac{\pi n}{4}$ равны

$$(-1)^k2^{2k-1}, (-1)^k2^{2k}, (-1)^k2^{2k}, 0.$$

Это означает, что числа групп (3), (4) могут быть вычислены по формулам (iii), (iv).

Докажем, наконец, что для чисел t_n , удовлетворяющих формулам (i)–(iv) разд. 1, выполняется рекуррентное соотношение (2.1): $t_{n+1} - 2t_n - 2^{n-1} + 2t_{n-1} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} 2^n \pm 2^{n/2} \sin \frac{\pi n}{4} - 2 \left(2^{n-1} \pm 2^{n-1/2} \sin \frac{\pi(n-1)}{4} \right) - 2^{n-1} + 2 \left(2^{n-2} \pm 2^{n-2/2} \sin \frac{\pi(n-2)}{4} \right) \\ = \pm 2^{n/2} \left(\sin \frac{\pi n}{4} + \sin \frac{\pi(n-2)}{4} - 2^{1/2} \sin \frac{\pi(n-1)}{4} \right) \\ = \pm 2^{n/2} \left(2^{1/2} \sin \left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{4} \right) - 2^{1/2} \sin \frac{\pi(n-1)}{4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (2.1) для (i), (ii) верно.

Аналогично для чисел, удовлетворяющих формулам (iii), (iv), имеем

$$\begin{aligned} t_{n+1} - 2t_n - 2^{n-1} + 2t_{n-1} = \pm 2^{n/2} \left(\cos \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi(n-2)}{4} - 2^{1/2} \cos \frac{\pi(n-1)}{4} \right) \\ = \pm 2^{n/2} \left(\cos \frac{\pi n}{4} + \sin \frac{\pi n}{4} - 2^{1/2} \cos \frac{\pi(n-1)}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

и соотношение (2.1) справедливо. Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. 384 с.
2. **Бурбаки Н.** Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI.: Группы, порожденные отражениями системы корней. М.: Мир, 1972. 334 с.
3. **Hall J.I., Holroyd F.C., Wilson R.J.** Symplectic geometry and mapping class groups // Geometrical combinatorics (Milton Keynes, 1984). Pitman; London, 1984. P. 21–33. (Research Notes in Mathematics; vol. 114.)
4. **Hall J.I.** Graphs, geometry, 3-transpositions, and symplectic F_2 -transvection groups // Proc. London Math. Soc. (Ser. 3). 1989. Vol. 58, no. 1. P. 89–111.
5. **Созутов А.И.** О группах типа Σ_4 , порожденных 3-транспозициями // Сиб. мат. журн. 1992. Vol. 33, № 1. С. 140–149.
6. **Созутов А.И., Кузнецов А.А., Сеницин В.М.** О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. мат. электр. изв. Т. 10. С. 285–301.
7. **Aschbacher M.** 3-transposition groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 260 p.
8. **Александрова И.О.** О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Алгебра, логика: теория и приложения: Тез. докл. междунар. конф., посвящ. памяти В. П. Шункова / Сиб. федер. ун-т. Красноярск, 2013. С. 14–15.
9. **Егорычев Г.П.** Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, 1979. 286 с.

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

Поступила 27.08.2015

Александрова Инна Олеговна
ст. преподаватель
Сибирский федеральный университет
e-mail: aio40@mail.ru

УДК 517.948

**ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ,
ВЫЗВАННОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ПЕРВОГО РОДА****В. П. Танана, А. И. Сидикова**

Исследован регуляризирующий алгоритм приближенного решения интегральных уравнений первого рода, включающий конечномерную аппроксимацию исходной задачи. Получена оценка погрешности этого алгоритма, использующего дискретизацию интегрального уравнения первого рода по двум переменным. Для получения этой оценки использована эквивалентность обобщенного метода невязки и обобщенного принципа невязки.

Ключевые слова: регуляризация, оценка погрешности, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. I. Sidikova. On estimating the error of an approximate solution caused by the discretization of an integral equation of the first kind.

A regularizing algorithm for the approximate solution of integral equations of the first kind is investigated. The algorithm involves a finite-dimensional approximation of the problem; more exactly, the integral equation is discretized in two variables. An error estimate of the algorithm is obtained with the use of the equivalence of the generalized discrepancy method and the generalized discrepancy principle.

Keywords: regularization, error estimate, ill-posed problem.

Введение

При решении некорректно поставленных задач важную роль играет их конечномерная аппроксимация, позволяющая свести исходную задачу к конечномерной. Поэтому исследованию сходимости конечномерных аппроксимаций регуляризованных решений посвящено большое число статей [1–4] и др. Однако, при использовании методов регуляризации важную роль играет увязка параметра регуляризации с погрешностью, вносимой конечномерной аппроксимацией, а также оценка погрешности метода, включающего эту аппроксимацию.

Рассмотрению этих вопросов посвящена статья [5], в которой при решении интегральных уравнений первого рода использована конечномерная аппроксимация лишь по одной переменной.

В настоящей статье сделаны усиление основных результатов работы [5] за счет конечномерной аппроксимации интегрального уравнения по обоим переменным. Для учета погрешности конечномерной аппроксимации в окончательной оценке в работе использован обобщенный метод невязки, предложенный в [6].

1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s, t)u(s)ds = f(t), \quad c \leq t \leq d, \quad (1.1)$$

где $P(s, t)$ и $P'_t(s, t) \in C([a, b] \times [c, d])$, $u(s) \in L_2[a, b]$, $f(t) \in L_2[c, d]$ и ядро оператора $P(s, t)$ замкнуто. Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $u_0(s)$ уравнения (1.1),

которое принадлежит множеству M , где

$$M = \{u(s) : u(s), u'(s) \in L_2[a, b], u(a) = u(b) = 0\}, \quad (1.2)$$

а $u'(s)$ — производная $u(s)$ по s . Из замкнутости ядра $P(s, t)$ будет следовать единственность решения $u_0(s)$ уравнения (1.1).

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам не известно, а вместо него даны $f_\delta(t) \in L_2[c, d]$ и $\delta > 0$ такие, что $\|f_\delta(t) - f_0(t)\| \leq \delta$. Требуется по $f_\delta(t)$, δ и M определить приближенное решение $u_\delta(s)$ уравнения (1.1) и оценить его отклонение от точного решения $u_0(s)$ в метрике пространства $L_2[a, b]$.

Введем оператор B , отображающий пространство $L_2[a, b]$ в $L_2[a, b]$, формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int_a^s v(\xi) d\xi, \quad v(s), Bv(s) \in L_2[a, b] \quad (1.3)$$

и оператор C — формулой

$$Cv(s) = ABv(s), \quad v(s) \in L_2[a, b], \quad Cv(s) \in L_2[c, d]. \quad (1.4)$$

Из (1.3) и (1.4) следует, что $Cv(s) = \int_a^b K(s, t)v(s)ds$, где $K(s, t) = - \int_a^s P(\xi, t)d\xi$.

Для численного решения уравнения (1.1) оператор C заменим конечномерным $C_{n,m}$ и введем величину $h_{n,m}$, удовлетворяющую соотношению

$$\|C_{n,m} - C\| \leq h_{n,m}.$$

Для определения величины $h_{n,m}$ введем функцию

$$N(t) = \max_{a \leq s \leq b} |P(s, t)|, \quad t \in [c, d], \quad (1.5)$$

и число

$$N_1 = \max \{|K'_t(s, t)| : a \leq s \leq b; c \leq t \leq d\}. \quad (1.6)$$

Так как $P(s, t)$ и $P'_t(s, t) \in C([a, b] \times [c, d])$, то из (1.5) и (1.6) следует существование числа N_1 , определяемого (1.6), кроме того, очевидно, что $N(t) \in C[c, d]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $s_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, а также отрезок $[c, d]$ — на m равных частей точками $t_j = c + \frac{j(d-c)}{m}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$.

Теперь введем функции

$$\overline{K}_i(t) = K(s_i, t), \quad (1.7)$$

$$K_n(s, t) = \overline{K}_i(t), \quad s_i \leq s < s_{i+1}, \quad t \in [c, d], \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (1.8)$$

$$K_{n,m}(s, t) = \overline{K}_i(t_j), \quad s_i \leq s < s_{i+1}, \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.9)$$

Используя формулы (1.7)–(1.9), определим операторы C_n и $C_{n,m}$ формулами

$$C_n v(s) = \int_a^b K_n(s, t)v(s)ds, \quad t \in [c, d],$$

$$C_{n,m}v(s) = \int_a^b K_{n,m}(s,t)v(s)ds, \quad t \in [c, d], \quad (1.10)$$

и предположим, что эти операторы отображают пространство $L_2[a, b]$ в $L_2[c, d]$.

Перейдем к оценке величины $\|C_{n,m} - C\|$.

Для этого используем неравенство $\|C_{n,m} - C\| \leq \|C_{n,m} - C_n\| + \|C_n - C\|$. Так как

$$|K_{n,m}(s,t) - K_n(s,t)| \leq |\bar{K}_i(t) - \bar{K}_i(t_j)| \quad (1.11)$$

при $s_i \leq s < s_{i+1}$ и $t_j \leq t < t_{j+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, а из (1.6) вытекает, что

$$|\bar{K}_i(t) - \bar{K}_i(t_j)| \leq N_1 \frac{d-c}{m},$$

то из (1.11) получим

$$|\bar{K}_{n,m}(s,t) - \bar{K}_n(s,t)| \leq N_1 \frac{d-c}{m}. \quad (1.12)$$

Ввиду того что $\|C_{n,m} - C_n\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|C_{n,m}v - C_nv\|$, можно утверждать:

$$\|C_{n,m} - C_n\|^2 \leq \sup_{\|v\| \leq 1} \int_c^d \left[\int_a^b |K_{n,m}(s,t) - K_n(s,t)| \cdot |v(s)| ds \right]^2 dt. \quad (1.13)$$

Из (1.12) и (1.13) выводим

$$\|C_{n,m} - C_n\|^2 \leq N_1^2 \left(\frac{d-c}{m} \right)^2 \int_c^d \left[\int_a^b |v(s)| ds \right]^2 dt. \quad (1.14)$$

Так как $\int_a^b |v(s)| ds \leq \sqrt{b-a} \|v(s)\|_{L_2}$, то из (1.14) следует, что

$$\|C_{n,m} - C_n\| \leq \sqrt{(b-a)(d-c)} N_1 \frac{d-c}{m}. \quad (1.15)$$

Теперь перейдем к оценке слагаемого $\|C_n - C\|$.

Так как $Cv(s) - C_nv(s) = \int_a^b (K(s,t) - K_n(s,t))v(s)ds$ и

$$\|C_n - C\|^2 \leq \sup \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b |K(s,t) - K_n(s,t)| \cdot |v(s)| ds \right]^2 dt : \|v(s)\| \leq 1 \right\},$$

то, учитывая (1.5), (1.7), (1.8) и

$$\int_a^b |K(s,t) - K_n(s,t)| \cdot |v(s)| ds \leq \int_a^b |K(s,t) - K(s_i,t)| \cdot |v(s)| ds \leq \frac{b-a}{n} N(t) \int_a^b |v(s)| ds,$$

получим, что

$$\|Cv(s) - C_nv(s)\|^2 \leq \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \int_c^d N^2(t) \left[\int_a^b |v(s)| ds \right]^2 dt. \quad (1.16)$$

Из того, что $\|v(s)\| \leq 1$ и $\int_a^b |v(s)| ds \leq \sqrt{b-a} \|v(s)\|$, учитывая (1.16), имеем

$$\|C_n - C\| \leq \sqrt{b-a} \|N(t)\|_{L_2} \frac{b-a}{n}. \quad (1.17)$$

Таким образом, из (1.15) и (1.17) следует, что

$$h_{n,m} = \sqrt{(b-a)(d-c)} N_1 \frac{d-c}{m} + \sqrt{b-a} \|N(t)\|_{L_2} \frac{b-a}{n}. \quad (1.18)$$

2. Обобщенный метод невязки

Введем конечномерное подпространство X_n пространства $L_2[a, b]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[s_i, s_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, а также подпространство Y_m пространства $L_2[c, d]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Через P_n обозначим оператор метрического проектирования пространства $L_2[a, b]$ на X_n , а через Q_m оператор метрического проектирования пространства $L_2[c, d]$ на Y_m .

Для приближенного решения уравнения (1.1) воспользуемся обобщенным методом невязки, предложенным в работе [6] и исследованным в [7]. Этот метод заключается в сведении уравнения (1.1) к вариационной задаче на условный экстремум

$$\inf \{ \|v(s)\|^2 : v(s) \in X_n, \|C_{n,m}v(s) - f_\delta^m(t)\| \leq \|v(s)\| h_{n,m} + \delta \}, \quad (2.1)$$

где $f_\delta^m(t) = Q_m[f_\delta(t)]$.

В работе [7] доказано, что при условии

$$\|f_\delta^m(t)\| > \|u'_0(s)\| h_{n,m} + \delta \quad (2.2)$$

вариационная задача (2.1) имеет единственное решение $v_{\delta, h_{n,m}}(s)$, которое удовлетворяет равенству $\|C_{n,m}v_{\delta, h_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\| = \|v_{\delta, h_{n,m}}(s)\| h_{n,m} + \delta$.

Из работы [7] следует, что вариационная задача (2.1) сводится к вариационной задаче на безусловный экстремум

$$\inf \{ \|C_{n,m}v(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha \|v(s)\|^2 : v(s) \in X_n \}, \quad \alpha > 0, \quad (2.3)$$

являющейся конечномерным вариантом метода регуляризации А.Н. Тихонова [8].

Задача (2.3) имеет единственное решение $v_\delta^\alpha(s)$. Это решение должно удовлетворять обобщенному принципу невязки [9]:

$$\|C_{n,m}v_\delta^\alpha(s) - f_\delta^m(t)\| = \|v_\delta^\alpha(s)\| h_{n,m} + \delta. \quad (2.4)$$

Известно (см. [7]), что при выполнении условия (2.2) уравнение (2.4) относительно α имеет единственное решение $\alpha(n, m)$.

Из теоремы, доказанной в [7], следует, что при условии (2.2) справедливо $v_{\delta, h_{n,m}}(s) = v_\delta^{\alpha(n, m)}(s)$, а приближенное решение $u_{\delta, h_{n,m}}(s)$ определяется формулой

$$u_{\delta, h_{n,m}}(s) = Bv_{\delta, h_{n,m}}(s). \quad (2.5)$$

Из (1.7), (1.9) и (1.10) следует, что

$$C_{n,m}v(s) = \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t_j) v_i, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \quad (2.6)$$

где

$$v_i = \sqrt{\frac{n}{b-a}} \int_{s_i}^{s_{i+1}} v(s) ds. \quad (2.7)$$

Из вида оператора Q_m вытекает, что $f_\delta^m(t) = \{f_j: t_j \leq t < t_{j+1}, j = 0, 1, \dots, m-1\}$, где $f_j = \sqrt{\frac{m}{d-c}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t) dt$.

Решая вариационную задачу (2.3), придем к уравнению

$$C_{n,m}^* C_{n,m} v(s) + \alpha v(s) = C_{n,m}^* f_\delta^m(t), \quad (2.8)$$

где $C_{n,m}^*$ – оператор, сопряженный оператору $C_{n,m}$.

Так как уравнение (2.8) эквивалентно задаче (2.3), то его решением будет элемент $v_\delta^\alpha(s)$. Значение параметра регуляризации α в этом решении определим из уравнения (2.4).

Теперь, чтобы свести уравнение (2.8) к системе линейных алгебраических уравнений, введем ортонормированные базисы $\{\varphi_i(s)\}$ – в пространстве X_n и $\{\psi_j(t)\}$ – в пространстве Y_m формулами

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{b-a}}, & s_i \leq s < s_{i+1}, \\ 0, & s \notin [s_i, s_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases} \quad (2.9)$$

и

$$\psi_j(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{d-c}}, & t_j \leq t < t_{j+1}, \\ 0, & t \notin [t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \end{cases} \quad (2.10)$$

Используя эти базисы, определим операторы J_1 и J_2 , отображающие пространство \mathbb{R}^n на X_n и \mathbb{R}^m на Y_m соответственно:

$$J_1[(x_i)] = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \varphi_i(s), \quad (x_i) \in \mathbb{R}^n, \quad J_1[(x_i)] \in X_n, \quad (2.11)$$

$$J_2[(y_j)] = \sum_{j=0}^{m-1} y_j \psi_j(t), \quad (y_j) \in \mathbb{R}^m, \quad J_2[(y_j)] \in Y_m, \quad (2.12)$$

Так как базисы $\{\varphi_i(s)\}$ и $\{\psi_j(t)\}$ ортонормированы в X_n и Y_m соответственно, то операторы J_1 и J_2 , определяемые формулами (2.11) и (2.12), изометричны.

Теперь наряду с задачей (2.3) рассмотрим задачу

$$\inf \left\{ \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t_j) v_i - f_j \right]^2 + \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} v_i^2 : (v_i) \in \mathbb{R}^n \right\}, \quad (2.13)$$

где $f_j = \sqrt{\frac{m}{d-c}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f_\delta(t) dt$.

Из [8] следует, что для любого $\alpha > 0$ существует единственное решение $(\bar{v}_i^\alpha) \in \mathbb{R}^n$ задачи (2.13). Кроме того, задача (2.13) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} b_{ik} v_i + \alpha v_k = g_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.14)$$

где $b_{ik} = \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \bar{K}_i(t_j) \bar{K}_k(t_j)$ и $g_k = \frac{d-c}{m} \sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{j=0}^{m-1} \bar{K}_k(t_j) f_j$.

Теорема. Пусть операторы J_1, J_2 определены формулами (2.11) и (2.12) и $v_\delta^\alpha(s)$ и (\bar{v}_i^α) — решения задач (2.3) и (2.13) соответственно.

Тогда эти решения связаны соотношением $v_\delta^\alpha(s) = J_1[(\bar{v}_i^\alpha)]$.

Доказательство. Пусть $v_\delta^\alpha(s)$ — решение задачи (2.3). Тогда

$$\|C_{n,m}v_\delta^\alpha(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha \|v_\delta^\alpha(s)\|^2 = \inf\{\|C_{n,m}v(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha \|v(s)\|^2 : v(s) \in X_n\}, \quad (2.15)$$

где $f_\delta^m(t) = Q_m[f_\delta(t)]$.

Если $(\hat{v}_i^\alpha) = J_1^{-1}[v_\delta^\alpha(s)]$, то

$$\frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t_j) \hat{v}_i^\alpha - f_j \right]^2 = \|J_2^{-1}C_{n,m}J_1 J_1^{-1}v_\delta^\alpha(s) - J_2^{-1}f_\delta^m(t)\|^2. \quad (2.16)$$

Из (2.16) и изометричности операторов J_1 и J_2 следует, что

$$\begin{aligned} & \|C_{n,m}v_\delta^\alpha(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha \|v_\delta^\alpha(s)\|^2 \\ &= \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t_j) \hat{v}_i^\alpha - f_j \right]^2 + \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{v}_i^\alpha)^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Теперь покажем, что (\hat{v}_i^α) является решением задачи (2.13). Для этого предположим противное, т. е. найдется вектор $(\bar{v}_i) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$\begin{aligned} & \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t_j) \bar{v}_i - f_j \right]^2 + \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{v}_i^2 \\ & < \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t_j) \hat{v}_i^\alpha - f_j \right]^2 + \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{v}_i^\alpha)^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда, положив $\bar{v}(s) = J_1[(\bar{v}_i)]$ и используя (2.17), получим

$$\|C_{n,m}\bar{v}(s) - f_\delta^m(t)\|^2 + \alpha \|\bar{v}(s)\|^2 = \frac{d-c}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[\sqrt{\frac{b-a}{n}} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t_j) \bar{v}_i - f_j \right]^2 + \alpha \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{v}_i^2,$$

что, наряду с (2.18), противоречит (2.15).

Таким образом, $(\bar{v}_i^\alpha) = J_1^{-1}[v_\delta^\alpha(s)]$ является решением задачи (2.13).

Тем самым теорема доказана.

Так как из теоремы будет следовать, что вариационная задача (2.3) может быть сведена к системе линейных алгебраических уравнений (2.14), то, решив последнюю, получим $(\bar{v}_i^\alpha) \in \mathbb{R}^n$. Используя это решение и оператор выполнения J_1 , получим решение задачи (2.3):

$$v_\delta^\alpha(s) = J_1[(\bar{v}_i^\alpha)].$$

Для определения параметра регуляризации α в решении $v_\delta^\alpha(s)$ используем уравнение (2.4).

Таким образом, при выполнении условия (2.2) получим решение вариационной задачи (2.1):

$$v_{\delta,h_{n,m}}(s) = v_\delta^{\alpha(n,m)}(s).$$

Используя (2.2) и (2.5), получим приближенное решение $u_{\delta,h_{n,m}}(s)$ уравнения (1.1).

3. Оценка погрешности приближенного решения $u_{\delta, h_{n,m}}(s)$ уравнения (1.1)

Так как множество значений $R(C_{n,m})$ оператора $C_{n,m}$ содержится в Y_m , а элемент $v_0(s) = B^{-1}u_0(s)$ на основании (2.6) удовлетворяет соотношениям

$$C_{n,m}v_0(s) = C_{n,m}v_0^n(s), \quad (3.1)$$

где $v_0^n(s) = P_n v_0(s)$ и

$$C_{n,m}v_0(s) \in Y_m, \quad (3.2)$$

то из (3.1) и (3.2) имеем

$$\|C_{n,m}v_0(s) - f_\delta\| \geq \|Q_m[C_{n,m}v_0(s)] - Q_m[f_\delta(t)]\| = \|C_{n,m}v_0(s) - f_\delta^m(t)\|,$$

а

$$\|C_{n,m}v_0(s) - f_\delta\| = \|C_{n,m}v_0^n(s) - f_\delta\| \text{ и } \|C_{n,m}v_0^n(s) - f_\delta\| \leq \|C_{n,m}v_0^n(s) - Cv_0(s)\| + \|Cv_0(s) - f_\delta(t)\|.$$

Из (3.1) получаем

$$\|C_{n,m}v_0^n(s) - Cv_0(s)\| = \|C_{n,m}v_0(s) - Cv_0(s)\| \leq \|C_{n,m} - C\| \cdot \|v_0(s)\|. \quad (3.3)$$

Из (1.18) и (3.3) следует, что

$$\|C_{n,m}v_0(s) - f_\delta^m(t)\| \leq \|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \quad (3.4)$$

Соотношения (2.1) и (3.4) влекут

$$\|v_{\delta, h_{n,m}}(s)\| \leq \|v_0(s)\|, \quad (3.5)$$

а

$$\|C_{n,m}v_{\delta, h_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\| \leq \|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \quad (3.6)$$

Таким образом, из (3.6) следует, что

$$\|Cv_{\delta, h_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\| \leq 2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \quad (3.7)$$

Ввиду того что $Au_{\delta, h_{n,m}}(s) = Cv_{\delta, h_{n,m}}(s)$, из (3.7) имеем

$$\|Au_{\delta, h_{n,m}}(s) - f_\delta^m(t)\| \leq 2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \quad (3.8)$$

Из (2.1) получаем

$$\|v_0^n(s)\| = \|P_n v_0(s)\| \leq \|v_0(s)\| \quad (3.9)$$

и

$$\|Cv_0^n(s) - f_\delta^m(t)\| \leq 2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta. \quad (3.10)$$

Из (3.10) вытекает

$$\|Au_0(s) - f_\delta^m(t)\| \leq 2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta, \quad (3.11)$$

а из (3.5), (3.8), (3.9) и (3.11) следует, что

$$\|u_{\delta, h_{n,m}}(s) - v_0^n(s)\| \leq \omega_1(4\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta, \|v_0(s)\|), \quad (3.12)$$

где $\omega_1(\tau, r) = \sup_{u, u'} \{ \|u - u'\| : u, u' \in M_r, \|Au - Au'\| \leq \tau \}$ и

$$M_r = \left\{ u(s) : u(s), u'(s) \in L_2[a, b], \int_a^b [u'(s)]^2 ds \leq r^2, u(a) = u(b) = 0 \right\}.$$

На основании работы [3], из (3.12) следует, что

$$\|u_{\delta, h_{n,m}}(s) - u_0^n(s)\| \leq \omega(4\|v_0(s)\|h_{n,m} + 2\delta, 2\|v_0(s)\|), \quad (3.13)$$

где $\omega(\tau, r) = \sup_u \{ \|u\| : u \in M_r, \|Au\| \leq \tau \}$.

Окончательно, из (3.13) следует оценка

$$\|u_{\delta, h_{n,m}}(s) - u_0^n(s)\| \leq 2\omega(2\|v_0(s)\|h_{n,m} + \delta, \|v_0(s)\|).$$

Заключение

В работе предложен регуляризирующий алгоритм для решения интегральных уравнений первого рода. Этот алгоритм включает в себя конечномерную аппроксимацию интегрального уравнения по обоим переменным. В качестве метода регуляризации при этом использован обобщенный метод невязки [6], который позволил учесть погрешность аппроксимации и получить оценку погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1974. Т. 14, № 1. С. 15–24.
2. Танана В.П. Проекционные методы и конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 6. С. 1301–1307.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
4. Васин В.В. Дискретная сходимость и конечномерная аппроксимация регуляризирующих алгоритмов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 1. С. 11–21.
5. Танана В.П., Сидикова А.И. Об оценке погрешности регуляризирующего алгоритма, основанного на обобщенном принципе невязки, при решении интегральных уравнений // Журн. вычисл. методы и программирование. 2015. Т. 16, № 1. С. 1–9.
6. Танана В.П. Об одном проекционно-итеративном алгоритме для операторных уравнений первого рода с возмущенным оператором // Докл. АН СССР. 1975. Т. 224, № 15. С. 1025–1029.
7. Танана В.П. О проекционно-итеративном алгоритме решения некорректно поставленных задач с приближенно заданным оператором // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1977. Т. 17, № 1. С. 15–23.
8. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
9. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Обобщенный принцип невязки // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1973. Т. 13, № 2. С. 294–302.

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой

Южно-Уральский государственный университет
e-mail: tvpa@susu.ac.ru

Сидикова Анна Ивановна
канд. физ.-мат. наук
доцент

Южно-Уральский государственный университет
e-mail: 7413604@mail.ru

Поступила 26.02.2015

УДК 517.928

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Д. А. Турсунов

Обобщенным методом пограничных функции, построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного, линейного, неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота в действительной оси. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пуассона.

Ключевые слова: асимптотическое разложение, точка поворота, сингулярное (бисингулярное) возмущение, обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, уравнение Эйри, модифицированные функции Бесселя, задача Дирихле, обобщенная пограничная функция, малый параметр.

D. A. Tursunov. Asymptotic expansion for a solution of an ordinary second-order differential equation with three turning points.

Using the generalized method of boundary functions, we construct a uniform asymptotic expansion of the solution of the Dirichlet problem for a singularly perturbed linear inhomogeneous ordinary second-order differential equation with three turning points on the real axis. The constructed asymptotic series is a Puiseux series.

Keywords: asymptotic expansion, turning point, singular (bisingular) perturbation, ordinary second-order differential equation, Airy equation, modified Bessel functions, Dirichlet problem, generalized boundary function, small parameter.

1. Введение

Интерес к задачам с точками поворота для уравнений второго порядка был стимулирован задачами механики сплошной среды, гидродинамики, квантовой физики и др. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с точками поворота, исследованы в работах В. Вазова (W. Wasow) [1], М. Ивано (M. Iwano), Сибуйя (Y. Sibuya), Р. Е. Лангера (R. E. Langer), Черри (T. M. Cherry), Эрдейи (Erdelyi), Свенсона (C. A. Swanson), Олвера (F.W.J. Olver) [2; 3], Казаринова (N. D. Kazarinoff) и Маккельви (R. W. McKelvey), А. М. Ильина [4; 5], К. Алымкулова [6–9], В. Н. Бобочко и др.

В работах [4; 5] методом согласования исследована задача

$$\varepsilon y''(x) - xq(x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad q(x) > 0;$$

в работе [10] методом сращивания исследована задача

$$\varepsilon y''(x) - x^2 y(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0;$$

а в работе [11] методом обобщенных пограничных функций исследована задача

$$\varepsilon y''(x) - x(1-x)y(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad y(0) = \alpha, \quad y(1) = \beta.$$

В этих работах построены равномерные асимптотические разложения решений задач с любой степенью точности по малому параметру.

В данной статье покажем преимущества метода обобщенных пограничных функций при построении равномерного асимптотического разложения решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений второго порядка с точками поворота по малому параметру.

2. Постановка задачи

Исследуем асимптотическое поведение решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного, линейного, неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) - x^2(1-x^2)a(x)y_\varepsilon(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1), \quad (1)$$

$$y_\varepsilon(-1) = 0, \quad y_\varepsilon(1) = 0, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр, $f(x), a(x) \in C^\infty[-1, 1]$, $a(x) > 0$, $x \in [-1, 1]$.

Не нарушая общности, рассматриваем однородные краевые условия, так как неоднородные краевые условия $y_\varepsilon(-1) = A_1$, $y_\varepsilon(1) = A_2$ с помощью замены $y_\varepsilon(x) = z_\varepsilon(x) + A_1 + (x+1)(A_2 - A_1)/2$ приводятся к однородным $z_\varepsilon(-1) = 0$, $z_\varepsilon(1) = 0$.

При $\varepsilon > 0$ решение задачи (1), (2) существует и единственно. Нас интересует асимптотическое поведение этого решения, когда $\varepsilon \rightarrow 0$. Если либо $f(0) \neq 0$, либо $f(1) \neq 0$, либо $f(-1) \neq 0$, то решение предельного уравнения ($\varepsilon = 0$) $-x^2(1-x^2)a(x)y_0 = f(x)$ на отрезке $x \in [-1, 1]$ не является гладкой функцией $y_0(x) = -\frac{f(x)}{x^2(1-x^2)a(x)}$. Функция $y_0(x)$ в общем случае в точках $x = 0, x = 1, x = -1$ имеет разрывы второго рода. Кроме того, в этих точках собственные значения задачи совпадают, т. е. точки $x = 0, x = 1, x = -1$ являются классическими точками поворота, по определению В. Вазова [1] или М. В. Федорюка [12].

Для начала рассмотрим внешнее решение задачи (1), (2), которое будем искать в виде

$$U(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots + \varepsilon^n u_n(x) + \dots \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим рекуррентную систему

$$-x^2(1-x^2)a(x)u_0(x) = f(x), \quad x^2(1-x^2)a(x)u_k(x) = u_{k-1}''(x), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из этих равенств нетрудно определить функции $u_k(x), k = 0, 1, \dots$:

$$u_0(x) = -f(x)/x^2(1-x^2)a(x), \quad u_k(x) = u_{k-1}''(x)/x^2(1-x^2)a(x), \quad k \in \mathbb{N},$$

или $u_k(x) = P_k(x)/x^{2+4k}(1-x^2)^{1+3k}$, где $P_k(x) \in C^\infty[-1, 1]$, $k = 0, 1, \dots$.

Заметим, что справедливы асимптотические разложения

$$u_k(x) = (1+x)^{-1-3k} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{k,j} (1+x)^j \quad \text{при } x \rightarrow -1,$$

$$u_k(x) = (1-x)^{-1-3k} \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{c}_{k,j} (1-x)^j \quad \text{при } x \rightarrow 1,$$

$$u_k(x) = x^{-2-4k} \sum_{j=0}^{+\infty} \bar{c}_{k,j} x^j \quad \text{при } x \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $c_{k,j}, \tilde{c}_{k,j}, \bar{c}_{k,j}$ — некоторые постоянные.

Функции $u_k(x), k = 0, 1, \dots$, имеют нарастающие особенности в окрестностях точек $x = -1, x = 0$ и $x = 1$. Кроме того, при $|x| \leq \sqrt[4]{\varepsilon}$, или $0 \leq 1+x \leq \sqrt[3]{\varepsilon}$, или $0 \leq 1-x \leq \sqrt[3]{\varepsilon}$ ряд (3) теряет асимптотический характер. Поэтому задачу (1), (2), по терминологии А. М. Ильина, можно называть бисингулярно возмущенной [4; 5].

3. Основной результат

Теорема 1. Если $f(-1) \neq 0$, $f(0) \neq 0$ и $f(1) \neq 0$, то для решения задачи (1), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \sum_{k=-1}^2 \sqrt[3]{\varepsilon^k} \left(q_k \left(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) + w_k \left(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) \right) + \sum_{k=-2}^3 \sqrt[4]{\varepsilon^k} \psi_k \left(\frac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \right) + O(\sqrt[3]{\varepsilon}). \quad (4)$$

где $v_0(x)$, $v_1(x)$ – регулярные функции;

$q_k \left(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right)$, $w_k \left(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right)$ – обобщенные пограничные функции в окрестностях точек $x = -1$ и $x = 1$ соответственно;

$\psi_k \left(\frac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \right)$ – функции в окрестности точки $x = 0$ (конкретизируются ниже).

Доказательство. Асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) будем строить обобщенным методом пограничных функций [6–11]. Доказательство теоремы состоит из двух частей: построения формального асимптотического разложения решения (ФАРР) и обоснования ФАРР.

Формальное асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) ищем в виде

$$y_\varepsilon(x) = v_0(x) + \varepsilon v_1(x) + \sum_{k=-1}^2 \lambda^k (q_k(\eta) + w_k(\xi)) + \sum_{k=-2}^3 \mu^k \psi_k(\tau) + R_\varepsilon(x), \quad (5)$$

где $\eta = (1+x)/\lambda$, $\xi = (1-x)/\lambda$, $\tau = x/\mu$, $\lambda = \sqrt[3]{\varepsilon}$, $\mu = \sqrt[4]{\varepsilon}$, $R_\varepsilon(x)$ – остаточный член.

Подставляя выражение (5) в уравнение (1), имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon(v_0''(x) + \varepsilon v_1''(x)) - x^2(1-x^2)a(x)(v_0(x) + \varepsilon v_1(x)) + R_\varepsilon''(x) - x^2(1-x^2)a(x)R_\varepsilon(x) \\ & + \sum_{k=-1}^2 \lambda^{k+1} q_k''(\eta) - \eta(\eta\lambda - 1)^2(2 - \eta\lambda)a(\eta\lambda - 1) \sum_{k=-1}^2 \lambda^{k+1} q_k(\eta) + \sum_{k=-1}^2 \lambda^{k+1} w_k''(\xi) \\ & - \xi(1+\xi\lambda)^2(2 - \xi\lambda)a(1+\xi\lambda) \sum_{k=-1}^2 \lambda^{k+1} w_k(\xi) + \sum_{k=-2}^3 \mu^{k+2} \psi_k''(\tau) - \tau^2(1 - (\mu\tau)^2)a(\mu\tau) \sum_{k=-2}^3 \mu^{k+2} \psi_k(\tau) \\ & = f(x) - h_0(x) - \varepsilon h_1(x) + h_0(x) + \varepsilon h_1(x). \end{aligned}$$

Согласно идее метода мы ввели новые, пока неизвестные, функции $h_0(x)$ и $h_1(x)$, которые конкретизируем ниже.

Отсюда получаем

$$v_0(x) = -\frac{f(x) - h_0(x)}{x^2(1-x^2)a(x)}, \quad v_1(x) = \frac{v_0''(x) + h_1(x)}{x^2(1-x^2)a(x)}.$$

Функции $h_0(x)$ и $h_1(x)$ выберем так, чтобы выполнялись следующие условия:

- a) $v_0(x)$, $v_1(x) \in C^\infty[-1, 1]$; b) $\psi_k(\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \pm\infty$, $k = -2, -1, 0, 1, 2, 3$;
 c) $q_k(\eta) \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow +\infty$; d) $w_k(\xi) \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow +\infty$, $k = -1, 0, 1, 2$.

Пусть

$$h_i(x) = h_i^q(x) + h_i^w(x) + h_i^\psi(x), \quad i = 0, 1,$$

где

$$h_i^\psi(x) = \left(\frac{p_{i,0}}{a_0}(1-x^2) + \left(\frac{p_{i,1}}{a_0} - \frac{p_{i,0}a_1}{a_0^2} \right) x(1-x^2) \right) a(x), \quad p_{i,0} = p_i(0), \quad p_{i,1} = p_i'(0),$$

$$p_0(x) = f(x), \quad p_1(x) = -v_0''(x), \quad a_0 = a(0), \quad a_1 = a'(0);$$

$$h_i^w(x) = \frac{x^2(1+x)p_i(1)}{2a(1)}a(x), \quad h_i^q(x) = \frac{x^2(1-x)p_i(-1)}{2a(-1)}a(x), \quad i = 0, 1.$$

Тогда $h_i(0) = p_i(0)$, $h_i'(0) = p_i'(0)$, $h_i(1) = p_i(1)$, $h_i(-1) = p_i(-1)$, $i = 0, 1$, следовательно, $v_0(x)$, $v_1(x) \in C^\infty[-1, 1]$. Ниже докажем, что выполняются и остальные вышеперечисленные условия — б), с) и д). Таким образом, мы определили неизвестные функции $h_0(x)$ и $h_1(x)$, а также регулярные внешние решения $v_0(x)$ и $v_1(x)$.

Теперь приступим к построению функции $w_k(\xi)$, $\psi_k(\tau)$. Функции $q_k(\eta)$, $w_k(\xi)$, совершенно равноправны, поэтому достаточно исследовать одну из них, вторая исследуется аналогично первой.

Пусть

$$a(\tau\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\tau\mu)^k, \quad a(1+\xi\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\xi\lambda)^k,$$

где $a_k = a^{(k)}(0)/k!$, $b_k = a^{(k)}(1)/k!$.

Тогда получим

$$L\psi_{-2} \equiv \psi_{-2}''(\tau) - a_0\tau^2\psi_{-2}(\tau) = p_{0,0}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{-2}(\tau) = 0; \quad (6)$$

$$L\psi_{-1} = \tau^3 a_1 \psi_{-2}(\tau) + p_{0,1}\tau, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{-1}(\tau) = 0; \quad (7)$$

$$L\psi_0 = (\tau a_1 \psi_{-1}(\tau) + \tau^2 a_2 \psi_{-2}(\tau) - \tau^2 a_0 \psi_{-2}(\tau))\tau^2 + \left(\frac{a_2 p_{0,0}}{a_0} - p_{0,0} - \frac{a_1^2 p_{0,0}}{a_0^2} + \frac{a_1 p_{0,1}}{a_0} \right) \tau^2,$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_0(\tau) = 0; \quad (8)$$

$$L\psi_1 = (a_1 \psi_0(\tau) + \tau a_2 \psi_{-1}(\tau) + \tau^2 a_3 \psi_{-2}(\tau) - \tau a_0 \psi_{-1}(\tau) - \tau^2 a_1 \psi_{-2}(\tau))\tau^3$$

$$+ \left(\frac{a_3 p_{0,0}}{a_0} - p_{0,1} - \frac{a_1 a_2 p_{0,0}}{a_0^2} + \frac{a_2 p_{0,1}}{a_0} \right) \tau^3, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_1(\tau) = 0; \quad (9)$$

$$L\psi_2 = \sum_{i=1}^4 a_i \tau^{i+2} \psi_{2-i}(\tau) - \sum_{i=0}^2 a_i \tau^{i+4} \psi_{-i}(\tau) + \left(\frac{a_4 p_{0,0}}{a_0} - \frac{a_1 p_{0,1}}{a_0} + \frac{a_1^2 p_{0,0}}{a_0^2} - \frac{a_2 p_{0,0}}{a_0} + \frac{a_3 p_{0,1}}{a_0} \right. \\ \left. - \frac{a_3 a_1 p_{0,0}}{a_0^2} \right) \tau^4 + p_{1,0}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_2(\tau) = 0; \quad (10)$$

$$L\psi_3 = \sum_{i=1}^5 a_i \tau^{i+2} \psi_{3-i}(\tau) - \sum_{i=0}^3 a_i \tau^{i+4} \psi_{1-i}(\tau) + \left(\frac{a_5 p_{0,0}}{a_0} - \frac{a_2 p_{0,1}}{a_0} + \frac{a_1 a_2 p_{0,0}}{a_0^2} - \frac{a_3 p_{0,0}}{a_0} + \frac{a_4 p_{0,1}}{a_0} \right. \\ \left. - \frac{a_4 a_1 p_{0,0}}{a_0^2} \right) \tau^5 + p_{1,1}\tau, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_3(\tau) = 0; \quad (11)$$

$$lw_{-1} \equiv w_{-1}''(\xi) - 2b_0 \xi w_{-1}(\xi) = p_0(1); \quad w_{-1}(0) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_{-1}(\xi) = 0; \quad (12)$$

$$lw_0 = (2b_1 - 5b_0)\xi^2 w_{-1}(\xi) - \left(\frac{5}{2} - \frac{b_1}{b_0} \right) p_0(1)\xi, \quad w_0(0) = -v_0(1), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_0(\xi) = 0; \quad (13)$$

$$lw_1 = (2b_2 - 5b_1 + 4b_0)\xi^3 w_{-1}(\xi) + (2b_1 - 5b_0)\xi^2 w_0(\xi) - \left(\frac{5b_1}{2b_0} - \frac{b_2}{b_0} - 2 \right) p_0(1)\xi^2,$$

$$w_1(0) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_1(\xi) = 0; \quad (14)$$

$$lw_2 = (2b_3 - 5b_2 + 4b_1 - b_0)\xi^4 w_{-1}(\xi) + (2b_2 - 5b_1 + 4b_0)\xi^3 w_0(\xi) + (2b_1 - 5b_0)\xi^2 w_1(\xi)$$

$$- \left(\frac{5b_2}{2b_0} - \frac{b_3}{b_0} - \frac{2b_1}{b_0} + \frac{1}{2} \right) p_0(1)\xi^3 + p_1(1), \quad w_2(0) = -\lambda v_1(0), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_2(\xi) = 0. \quad (15)$$

Докажем, что задачи (6)–(11) имеют единственные решения.

Лемма 1. Задача

$$z''(x) - a_0 x^2 z(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \tilde{f}(x) \in C^\infty(-\infty, +\infty), \quad (16)$$

имеет единственное решение.

Доказательство. С помощью замены $x = \sqrt[4]{4/a_0}t$ получим уравнение

$$z''(t) - 4t^2 z(t) = 0,$$

которое имеет фундаментальную систему решений $\{U_4(t), U_4(-t)\}$, где $U_4(t) = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} K_{1/4}(t^2)$, $t > 0$, $K_{1/4}(t^2)$ — функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя) [12]. Приведем основные свойства функции $U_4(t)$, $U_4(-t)$:

а) вронскиан этих функций $W(U_4(t), U_4(-t)) = 4 \operatorname{cosec}(\pi/4) = 4\sqrt{2}$;

б) при $t = 0$: $U_4(0) = \pi^{-1/2} 2^{-1/4} \Gamma(1/4)$;

в) при $t \rightarrow +\infty$ функция $U_4(t)$ экспоненциально убывает: $U_4(t) \sim t^{-1/2} e^{-t^2}$;

д) при $t \rightarrow -\infty$ функция $U_4(t) = \sqrt{\frac{2|t|}{\pi}} (\sqrt{2}\pi I_{1/4}(t^2) + K_{1/4}(t^2))$, $t < 0$, экспоненциально растет: $U_4(t) = (2/t)^{1/2} e^{t^2} (1 + O(t^{-2}))$, где $I_{1/4}(t^2)$, $K_{1/4}(t^2)$ — модифицированные функции Бесселя.

Следовательно, решение задачи (16) можно записать в виде

$$z(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} U_4\left(\sqrt[4]{\frac{a_0}{4}}x\right) \int_{-\infty}^x U_4\left(-\sqrt[4]{\frac{a_0}{4}}s\right) \tilde{f}(s) ds + \frac{1}{4\sqrt{2}} U_4\left(-\sqrt[4]{\frac{a_0}{4}}x\right) \int_x^{+\infty} U_4\left(\sqrt[4]{\frac{a_0}{4}}s\right) \tilde{f}(s) ds.$$

Лемма 1 доказана.

Следствие 1. Если $\tilde{f}(x) = O(x^{-N_1})$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то $z(x) = O(x^{-N_1-2})$, $N_1 = \text{const}$.

С помощью леммы 1 можем записать решения задач (6)–(11). А из следствия 1 при $\tau \rightarrow \pm\infty$ вытекает справедливость следующих оценок:

$$\psi_{-2}(\tau) = \psi_2(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \quad \psi_{-1}(\tau) = \psi_3(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \psi_0(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^4}\right), \quad \psi_1(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^3}\right).$$

Действительно, при $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \psi_{-2}(\tau) &= -\frac{p_{0,0}}{a_0 \tau^2} - \frac{6p_{0,0}}{a_0^2 \tau^6} - O\left(\frac{1}{\tau^{10}}\right); \\ \psi_{-1}(\tau) &= \left(\frac{a_1 p_{0,0}}{a_0^2} - \frac{p_{0,1}}{a_0}\right) \frac{1}{\tau} + \left(\frac{2a_1 p_{0,0}}{a_0^3} - \frac{2p_{0,1}}{a_0^2}\right) \frac{1}{\tau^5} + O\left(\frac{1}{\tau^9}\right); \\ \psi_0(\tau) &= \left(\frac{2a_1 p_{0,1}}{a_0^3} - \frac{2a_1^2 p_{0,0}}{a_0^4} + \frac{6a_2 p_{0,0}}{a_0^3} - \frac{6p_{0,0}}{a_0^2}\right) \frac{1}{\tau^4} + O\left(\frac{1}{\tau^8}\right); \\ \psi_1(\tau) &= O\left(\frac{1}{\tau^3}\right), \quad \psi_2(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \quad \psi_3(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Теперь докажем существование и единственность решения задач (12)–(15). Для этого докажем вспомогательную лемму.

Лемма 2. Задача

$$lz(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in (0, +\infty), \quad z(0) = z^0, \quad \tilde{f}(x) \in C^\infty[0, +\infty) \quad (17)$$

имеет единственное решение.

Доказательство. Уравнение $lz(x) = 0$ с помощью замены $t = \sqrt[3]{b_0}x$ приводится к уравнению Эйри $z''(t) - tz(t) = 0$, которое имеет два независимых решения $Ai(t)$, $Bi(t)$. Следовательно, и уравнение $lz(x) = 0$ имеет два независимых решения $Ai(\sqrt[3]{b_0}x)$, $Bi(\sqrt[3]{b_0}x)$. С помощью этих функций запишем решение задачи (17):

$$z(x) = \frac{z^0}{Ai(0)} Ai(\sqrt[3]{b_0}x) + \frac{\pi}{\sqrt[3]{b_0}} Bi(\sqrt[3]{b_0}x) \int_x^{+\infty} Ai(\sqrt[3]{b_0}s) \tilde{f}(s) ds + \frac{\pi}{\sqrt[3]{b_0}} Ai(\sqrt[3]{b_0}x) \left(\int_0^x Bi(\sqrt[3]{b_0}s) \tilde{f}(s) ds - \sqrt{3} \int_0^{+\infty} Ai(\sqrt[3]{c_0}s) \tilde{f}(s) ds \right).$$

Лемма 2 доказана.

Следствие 2. Если $\tilde{f}(x) = O(x^{-N_1})$ при $x \rightarrow +\infty$, то учитывая асимптотическое поведение функции Эйри при $x \rightarrow +\infty$, получаем $z(x) = O(x^{-N_1-1})$, $N_1 - \text{const}$.

С помощью леммы 2 доказывается существование единственных решений задач (12)–(15), удовлетворяющих соответствующим условиям. Решение каждого уравнения (12)–(15) имеет на бесконечности асимптотику

$$w_{-1}(\xi) = w_2(\xi) = O(\xi^{-1}), \quad w_0(\xi) = O(\tau^{-3}), \quad w_1(\xi) = O(\xi^{-2}), \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

Действительно, при $\xi \rightarrow +\infty$ имеем

$$w_{-1}(\xi) = -\frac{p_0(1)}{2b_0\xi} + O\left(\frac{1}{\xi^4}\right), \quad w_0(\xi) = \frac{p_0(1)}{2b_0\xi^3} \left(\frac{b_1}{b_0} - \frac{5}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\xi^6}\right), \\ w_1(\xi) = -\frac{p_0(1)}{2b_0\xi^2} \left(\frac{b_1^2}{b_0^2} - \frac{5b_1}{2b_0} - \frac{b_2}{b_0} + \frac{17}{4}\right) + O\left(\frac{1}{\xi^5}\right), \quad w_2(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Перейдем теперь к исследованию функции $R_\varepsilon(x)$. Для остаточного члена получаем задачу

$$\varepsilon R_\varepsilon''(x) - x^2(1-x^2)a(x)R_\varepsilon(x) = O(\sqrt[3]{\varepsilon^4}), \quad x \in (-1, 1), \\ R_\varepsilon(-1) = R_\varepsilon(1) = 0.$$

Затем, применяя принцип максимума, выводим

$$R_\varepsilon(x) = O(\sqrt[3]{\varepsilon}), \quad x \in [-1, 1], \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отсюда следует справедливость разложения (4).

З а м е ч а н и е. Построив функции $h_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющие аналогичным выше указанным условиям а)–д), можно повысить точность асимптотического разложения по малому параметру до любой степени.

Теорема доказана.

П р и м е р. Построим асимптотическое разложение решения до любой степени точности по малому параметру следующей задачи:

$$\varepsilon y_\varepsilon''(x) - x^2(1-x^2)y_\varepsilon(x) = 1, \quad x \in (-1, 1), \quad (18)$$

с краевыми условиями (2). Докажем справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Для решения задачи (18), (2) справедливо асимптотическое разложение

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=-1}^{+\infty} \sqrt[3]{\varepsilon^k} \left(q_k \left(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) + w_k \left(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) \right) + \sum_{k=-2}^{+\infty} \sqrt[4]{\varepsilon^k} \psi_k \left(\frac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \right). \quad (19)$$

Доказательство. Асимптотическое разложение решения задачи (18), (2) ищем в виде

$$y_\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k(x) + \sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^k (q_k(\eta) + w_k(\xi)) + \sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^k \psi_k(\tau), \quad (20)$$

где $\eta = (1+x)/\lambda$, $\xi = (1-x)/\lambda$, $\tau = x/\mu$, $\lambda = \sqrt[3]{\varepsilon}$, $\mu = \sqrt[4]{\varepsilon}$.

Подставляя выражение (20) в уравнение (18) имеем

$$\varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k''(x) - x^2(1-x^2) \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k v_k(x) = 1 - h_0(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon^k h_k(x), \quad (21)$$

$$\sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^{k+2} \psi_k''(\tau) - \tau^2(1-(\mu\tau)^2) \sum_{k=-2}^{+\infty} \mu^{k+2} \psi_k(\tau) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^{4k} h_k^\psi(\mu\tau), \quad (22)$$

$$\sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^{k+1} w_k''(\xi) - \xi(1+\xi\lambda)^2(2-\xi\lambda) \sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^{k+1} w_k(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{3k} h_k^w(1+\xi\lambda), \quad (23)$$

$$\sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^{k+1} q_k''(\eta) - \eta(\eta\lambda-1)^2(2-\eta\lambda) \sum_{k=-1}^{+\infty} \lambda^{k+1} q_k(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{3k} h_k^q(\eta\lambda-1).$$

Из равенства (21) получаем

$$v_0(x) = -\frac{1-h_0(x)}{x^2(1-x^2)}, \quad v_k(x) = \frac{v_{k-1}''(x) + h_k(x)}{x^2(1-x^2)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для данного примера $h_0(x) = h_0^q(x) + h_0^w(x) + h_0^\psi(x)$, где $h_0^\psi(x) = 1 - x^2$, $h_0^w(x) = \frac{x^2(1+x)}{2}$, $h_0^q(x) = \frac{x^2(1-x)}{2}$, поэтому $v_0(x) \equiv 0$.

Пусть $h_k(x) = h_k^q(x) + h_k^w(x) + h_k^\psi(x)$, где $h_k^\psi(x) = A_{k,0} + A_{k,2}x^2$, $h_k^q(x) = B_{k,0} + B_{k,1}(1+x) + B_{k,2}(1+x)^2 + B_{k,3}(1+x)^3$, $h_k^w(x) = B_{k,0} + B_{k,1}(1-x) + B_{k,2}(1-x)^2 + B_{k,3}(1-x)^3$.

Пока неизвестные коэффициенты $A_{k,0}$, $A_{k,2}$ и $B_{k,j}$, $j = 0, 1, 2, 3$, должны удовлетворять равенствам

$$A_{k,0} + 2B_{k,0} + 2B_{k,1} + 2B_{k,2} + 2B_{k,3} = 0, \quad A_{k,2} + 2B_{k,2} + 6B_{k,3} = 0, \quad (24)$$

потому что при выполнении этих равенств $v_k(x) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Целью введения этих коэффициентов является получение

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_k(\tau) = 0, \quad k = -2, -1, 0, 1, \dots;$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_k(\xi) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} q_k(\eta) = 0, \quad k = -1, 0, 1, \dots$$

Из соотношения (22) выводим

$$\psi_{-2}''(\tau) - \tau^2 \psi_{-2}(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{-2}(\tau) = 0; \quad (25)$$

$$\psi_{-1}''(\tau) - \tau^2 \psi_{-1}(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{-1}(\tau) = 0; \quad (26)$$

$$\psi_0''(\tau) - \tau^2 \psi_0(\tau) = -\tau^2 \psi_{-2}'', \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_0(\tau) = 0; \quad (27)$$

$$\psi_{4k-3}''(\tau) - \tau^2 \psi_{4k-3}(\tau) = -\tau^4 \psi_{4k-5}'', \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{4k-3}(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (28)$$

$$\psi''_{4k-2}(\tau) - \tau^2 \psi_{4k-2}(\tau) = -\tau^4 \psi_{4k-4} + A_{k,0}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{4k-2}(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (29)$$

$$\psi''_{4k-1}(\tau) - \tau^2 \psi_{4k-1}(\tau) = -\tau^4 \psi_{4k-3}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{4k-1}(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (30)$$

$$\psi''_{4k}(\tau) - \tau^2 \psi_{4k}(\tau) = -\tau^4 \psi_{4k-2} + A_{k,2} \tau^2, \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_{4k}(\tau) = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \quad (31)$$

Из леммы 1 следует существование и единственность решения задач (25)–(31). При $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$\psi_{-2}(\tau) = -\frac{1}{\tau^2} - \frac{6}{\tau^6} + O\left(\frac{1}{\tau^{10}}\right), \quad \psi_{-1}(\tau) = 0, \quad \psi_0(\tau) = -\frac{6}{\tau^4} - O\left(\frac{1}{\tau^8}\right), \quad \psi_{4k-3}(\tau) = 0,$$

$$\psi_2(\tau) = -\frac{A_{1,0} + 6}{\tau^2} - O\left(\frac{1}{\tau^6}\right), \quad \psi_{4k-1}(\tau) = 0, \quad \psi_4(\tau) = -(A_{1,2} + A_{1,0} + 6) + O\left(\frac{1}{\tau^4}\right).$$

Нетрудно заметить, что если $A_{1,2} + A_{1,0} + 6 = 0$, то $\psi_4(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^4}\right)$. Отсюда получаем

$$A_{1,2} = -A_{1,0} - 6. \quad (32)$$

Ниже докажем, что всегда существуют такие числа $A_{k,0}$, $A_{k,2}$, с помощью которых можно получить соотношения

$$\psi_{4k-2}(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^2}\right), \quad \psi_{4k}(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^4}\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Функции $q_k(\eta)$ и $w_k(\xi)$ строятся одинаково, и они отличаются только аргументом, поэтому исследуем только $w_k(\xi)$. Из равенства (23) имеем

$$lw_{-1} := w''_{-1}(\xi) - 2\xi w_{-1}(\xi) = 1; \quad (33)$$

$$lw_0 = -5\xi w''_{-1}(\xi)/2; \quad (34)$$

$$lw_1 = -5\xi^2 w_0(\xi) + 2\xi^2 w''_{-1}(\xi); \quad (35)$$

$$lw_2 = -5\xi^2 w_1(\xi) + 4\xi^3 w_0(\xi) - \xi^3 w''_{-1}(\xi)/2 + B_{1,0}; \quad (36)$$

$$lw_{3k} = -5\xi^2 w_{3k-1}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k-2}(\xi) - \xi^4 w_{3k-3}(\xi) + B_{k,1}\xi; \quad (37)$$

$$lw_{3k+1} = -5\xi^2 w_{3k}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k-1}(\xi) - \xi^4 w_{3k-2}(\xi) + B_{k,2}\xi^2; \quad (38)$$

$$lw_{3k+2} = -5\xi^2 w_{3k+1}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k}(\xi) - \xi^4 w_{3k-1}(\xi) + B_{k,3}\xi^3 + B_{k+1,0}. \quad (39)$$

Решения всех уравнений (33)–(39) должны удовлетворять условиям

$$w_j(0) = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_j(\xi) = 0, \quad j = -1, 0, 1, \dots \quad (40)$$

По доказанной выше лемме 2 все задачи (33)–(40) имеют единственные решения. Остается доказать, что $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_j(\xi) = 0$, $j = -1, 0, 1, \dots$

При $\xi \rightarrow +\infty$ имеем

$$w_{-1}(\xi) = -\frac{1}{2\xi} - \frac{1}{2\xi^4} + O\left(\frac{1}{\xi^7}\right), \quad w_0(\xi) = -\frac{5}{4\xi^3} + O\left(\frac{1}{\xi^6}\right),$$

$$w_1(\xi) = -\frac{17}{8\xi^2} + O\left(\frac{1}{\xi^5}\right), \quad w_2(\xi) = -\frac{1}{2\xi} \left(\frac{49}{8} + B_{1,0}\right) + O\left(\frac{1}{\xi^4}\right),$$

$$w_3(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^3}\right), \quad \text{если } \frac{5}{2} \left(\frac{49}{8} + B_{1,0}\right) - \frac{29}{4} + B_{1,1} = 0;$$

$$w_4(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad \text{если } -2 \left(\frac{49}{8} + B_{1,0}\right) + \frac{17}{8} + B_{1,2} = 0;$$

$$w_5(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi}\right), \text{ если } \frac{1}{2}\left(\frac{49}{8} + B_{1,0}\right) + B_{1,3} = 0.$$

Поэтому неизвестные коэффициенты $B_{1,0}, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{1,3}$ подберем так, чтобы

$$w_3(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^3}\right), \quad w_4(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \quad w_5(\xi) = O\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

и выполнялись равенства (24).

Учитывая равенство (32), мы получаем следующие значения постоянных:

$$A_{1,0} = 2, \quad A_{1,2} = -8, \quad B_{1,0} = \frac{49}{8}, \quad B_{1,1} = -\frac{187}{8}, \quad B_{1,2} = \frac{179}{8}, \quad B_{1,3} = -\frac{49}{8}.$$

Лемма 3. *Существуют такие постоянные числа $A_{k,0}, A_{k,2}, B_{k,0}, B_{k,1}, B_{k,2}, B_{k,3}$, удовлетворяющие равенствам (24), с помощью которых можно получить соотношения*

$$\lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_k(\tau) = 0, \quad k = -2, -1, 0, 1, \dots;$$

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_k(\xi) = 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} q_k(\eta) = 0, \quad k = -1, 0, 1, \dots$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя метод математической индукции, докажем существование таких чисел и справедливость равенств для любого $k = 0, 1, \dots$:

$$\psi_{4k-2}(\tau) = O(\tau^{-2}), \quad \psi_{4k}(\tau) = O(\tau^{-4}), \quad \tau \rightarrow \infty;$$

$$w_{3k-1}(\xi) = O(\xi^{-1}), \quad w_{3k}(\xi) = O(\xi^{-3}), \quad w_{3k+1}(\xi) = O(\xi^{-2}), \quad \xi \rightarrow +\infty.$$

Выше доказаны существование чисел $A_{1,0}, A_{1,2}, B_{1,0}, B_{1,1}, B_{1,2}, B_{1,3}$ и справедливость этих равенств, т. е. при $k = 1$ лемма верна.

Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$

$$w_{3k-1}(\xi) = \frac{\alpha_{3k-1,1}}{\xi} + \frac{\alpha_{3k-1,4}}{\xi^4} + O\left(\frac{1}{\xi^7}\right), \quad w_{3k}(\xi) = \frac{\alpha_{3k,3}}{\xi^3} + O\left(\frac{1}{\xi^6}\right),$$

$$w_{3k+1}(\xi) = \frac{\alpha_{3k+1,2}}{\xi^2} + O\left(\frac{1}{\xi^5}\right), \quad \psi_{4k}(\tau) = \frac{\beta_{4k,4}}{\tau^4} + O\left(\frac{1}{\tau^8}\right),$$

где $\alpha_{i,j}, \beta_{4k,4} - \text{const.}$

Тогда

$$lw_{3k+2}(\xi) = -5\xi^2 w_{3k+1}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k}(\xi) - \xi^4 w_{3k-1}(\xi) + B_{k,3}\xi^3 + B_{k+1,0},$$

$$lw_{3k+3}(\xi) = -5\xi^2 w_{3k+2}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k+1}(\xi) - \xi^4 w_{3k}(\xi) + B_{k+1,1}\xi,$$

$$lw_{3k+4}(\xi) = -5\xi^2 w_{3k+3}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k+2}(\xi) - \xi^4 w_{3k+1}(\xi) + B_{k+1,2}\xi^2,$$

$$lw_{3k+5}(\xi) = -5\xi^2 w_{3k+4}(\xi) + 4\xi^3 w_{3k+3}(\xi) - \xi^4 w_{3k+2}(\xi) + B_{k+1,3}\xi^3 + B_{k+2,0},$$

$$\psi''_{4k+2}(\tau) - \tau^2 \psi_{4k+2}(\tau) = -\tau^4 \psi_{4k} + A_{k+1,0},$$

$$\psi''_{4k+4}(\tau) - \tau^2 \psi_{4k+4}(\tau) = -\tau^4 \psi_{4k+2} + A_{k+1,2}\tau^2$$

и при

$$A_{k+1,0} = -4\alpha_{3k+1,2} + 6\alpha_{3k,3} - 2\alpha_{3k-1,4}, \quad A_{k+1,2} = -A_{k+1,0} + \beta_{4k,4},$$

$$B_{k,3} = \alpha_{3k-1,1}, \quad B_{k+1,0} = -\beta_{4k,4} - \alpha_{3k+1,2} + 2\alpha_{3k,3} - \alpha_{3k-1,4},$$

$$B_{k+1,1} = \frac{17}{2}\alpha_{3k+1,2} - 9\alpha_{3k,3} + \frac{5}{2}\alpha_{3k-1,4} - \frac{5}{2}B_{k+1,0},$$

$$B_{k+2,1} = -9\alpha_{3k+1,2} + 8\alpha_{3k,3} - 2\alpha_{3k-1,4} + 2B_{k+1,0},$$

$$B_{k+3,1} = \frac{5}{2}\alpha_{3k+1,2} - 2\alpha_{3k,3} + \frac{1}{2}\alpha_{3k-1,4} - \frac{1}{2}B_{k+1,0}$$

получаем

$$\begin{aligned} \psi_{4k+2}(\tau) &= O(\tau^{-2}), \quad \psi_{4k+4}(\tau) = O(\tau^{-4}), \quad \tau \rightarrow \infty; \\ w_{3k+2}(\xi) &= O(\xi^{-1}), \quad w_{3k+3}(\xi) = O(\xi^{-3}), \quad w_{3k+4}(\xi) = O(\xi^{-2}), \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} \psi_k(\tau) &= 0, \quad k = -2, -1, 0, 1, \dots; \\ \lim_{\xi \rightarrow +\infty} w_k(\xi) &= 0, \quad \lim_{\eta \rightarrow +\infty} q_k(\eta) = 0, \quad k = -1, 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Перейдем теперь к обоснованию асимптотического разложения (20). Пусть

$$y_{\varepsilon,n}(x) = \sum_{k=-1}^{3n} \sqrt[3]{\varepsilon^k} \left(q_k \left(\frac{1+x}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) + w_k \left(\frac{1-x}{\sqrt[3]{\varepsilon}} \right) \right) + \sum_{k=-2}^{4n} \sqrt[4]{\varepsilon^k} \psi_k \left(\frac{x}{\sqrt[4]{\varepsilon}} \right).$$

Исследуем остаточную функцию $R_\varepsilon(x) = y_\varepsilon(x) - y_{\varepsilon,n}(x)$.

Для остаточного члена получим задачу

$$\varepsilon R_\varepsilon''(x) - x^2(1-x^2)R_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{n+2/3}), \quad x \in (-1, 1),$$

$$R_\varepsilon(-1) = R_\varepsilon(1) = 0.$$

Отсюда следует, что $R_\varepsilon(x) = O(\varepsilon^{n-1/3})$, $x \in [-1, 1]$.

Следовательно, для решения задачи (18), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо асимптотическое разложение (19). Теорема 2 доказана.

З а к л ю ч е н и е. Обобщенным методом пограничных функций построено равномерное асимптотическое разложение решения задачи Дирихле для сингулярно возмущенного, линейного, неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота в действительной оси. Построенный асимптотический ряд представляет собой ряд Пуайзэ (V. A. Puiseux).

Исследованную задачу можно обобщить, т.е. аналогично можно исследовать асимптотическое поведение решения задачи с $(n+1)$ точкой поворота:

$$\varepsilon y''(x) - x^k(1-x)^{k_1}(1-nx)^{2k_2} \dots (n-1-nx)^{2k_n} a(x)y(x) = f(x, \varepsilon), \quad x \in (0, 1),$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0,$$

где $f(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k f_k(x)$, $0 < a(x)$, $f_k(x) \in C^\infty[0, 1]$, $k, k_1, \dots, k_n, 1 < n$ — конечные натуральные числа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 465 с.
2. **Olver F.M.** Connection formulas for second-order differential equations with multiple turning points // SIAM. J. Math. Anal. 1977. Vol. 8, no. 1. P. 127–154.
3. **Olver F.M.** Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities // SIAM. J. Math. Anal. 1977. Vol. 8, no. 4. P. 673–700.
4. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука; Физматлит, 1989. 336 с.
5. **Ильин А.М., Данилин А.Р.** Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 248 с.
6. **Alymkulov K.** Method of boundary layer function to solve the boundary value problem for a singularly perturbed differential equation of the order two with a turning point // Universal J. Appl. Math. 2014. Vol. 2, no. 3. P. 119–124.

7. **Алымкулов К., Халматов А.А.** Метод погранфункций для решения модельного уравнения Лайтхилла с регулярной особой точкой // Мат. заметки. 2012. Т. 92, вып. 6. С. 819–824.
8. **Алымкулов К., Асылбеков Т.Д., Долбеева С.Ф.** Обобщение метода погранфункций для решения краевой задачи для бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка // Мат. заметки. 2013. Т. 94, вып. 4. С. 484–487.
9. **Алымкулов К., Зулпукаров А.З.** Равномерная асимптотика решения краевой задачи сингулярно возмущенного уравнения второго порядка со слабой особенностью // Докл. АН. 2004. Т. 398, № 5. С. 583–586.
10. **Турсунов Д.А.** Равномерное приближение решения краевой задачи бисингулярно возмущенного уравнения второго порядка // Вестн. ОшГУ. 2008. №. 5. С. 240–243.
11. **Турсунов Д.А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения второго порядка с двумя точками поворота // Вестн. Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2013. 1(21). С. 34–40.
12. **Федорюк М.В.** Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.

Турсунов Дилмурат Абдиллажанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
профессор кафедры высшей математики
Институт МИиИТ УрГПУ
e-mail: d_osh@rambler.ru

Поступила 7.04.2015

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ТИПА ЭЙКОНАЛА В УСЛОВИЯХ РАЗРЫВА КРИВИЗНЫ ГРАНИЦЫ КРАЕВОГО МНОЖЕСТВА¹**А. А. Успенский, П. Д. Лебедев**

Исследуется проблема возникновения сингулярностей у обобщенных решений краевой задачи Дирихле для уравнений в частных производных первого порядка типа эйконала. Предметом изучения являются псевдовершины краевого множества. Отыскание псевдовершин является элементом процедуры построения ветвей сингулярного множества. Получены необходимые условия существования псевдовершин при ослабленных предположениях на гладкость границы невыпуклого краевого множества. Изучена ситуация, когда граница имеет гладкость первого порядка, при этом производные второго порядка координатных функций терпят разрывы. Необходимые условия выписаны в терминах стационарности координатных функций, а также с помощью односторонних кривизн.

Ключевые слова: уравнение в частных производных первого порядка, минимаксное решение, волновой фронт, диффеоморфизм, эйконал, кривизна, функция оптимального результата, сингулярное множество, симметрия.

A. A. Uspenskii, P. D. Lebedev. The construction of singular curves for generalized solutions of eikonal-type equations with a curvature break in the boundary of the boundary set.

The problem of singularities appearing in generalized solutions of the boundary value Dirichlet problem for eikonal-type first-order partial differential equations is considered. The object of study is the pseudovertices of the boundary set. Finding the pseudovertices is an element of the procedure for constructing branches of the singular set. Necessary conditions of pseudovertex existence are obtained under weakened assumptions on the smoothness of the boundary of a nonconvex boundary set. The situation of the first-order smoothness of the boundary and breaks of the second-order derivatives is studied. The necessary conditions are written in terms of the stationarity of coordinate functions and with the use of one-sided curvatures.

Keywords: first-order PDE, minimax solution, wavefront, diffeomorphism, eikonal, curvature, optimal result function, singular set, symmetry.

Введение

Краевые задачи для уравнений в частных производных первого порядка встречаются в различных отраслях знания, в частности в механике, геометрической оптике, акустике, сейсмологии, теории оптимального управления, дифференциальных играх, экономике. Гладкость краевых условий в задаче Коши или в задаче Дирихле в общем случае не влечет гладкость решения уравнения такого типа на всей области рассмотрения в пространстве переменных. Возникает необходимость и потребность в построении нелокальной теории обобщенных решений уравнений в частных производных первого порядка. Известны различные подходы к определению обобщенных решений уравнений. Среди них выделим концепцию С. Н. Кружкова [1], базирующийся на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр [2] минимаксный подход А. И. Субботина [3], концепцию вязкостного решения П. Лионса [4], а также подход к определению решения на основе конструкций идемпотентного анализа [5].

В настоящей работе изучается проблема возникновения негладкости у функции оптимального результата в плоской задаче о быстродействии для случая круговой индикатрисы. Особенности геометрии вектограммы скоростей предоставляют возможность для углубленного анализа свойств решения задачи даже при условии невыпуклости целевого множества, имеющего при этом низкий порядок гладкости границы. В рассматриваемом случае граница цели

¹Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 15-11-10018).

дифференцируема. При этом предполагается наличие граничных точек, в которых координатные функции терпят разрыв по производной второго порядка, т. е. изучается случай, когда классическая кривизна кривой, ограничивающей краевое множество, вообще говоря, не существует. У решения задачи возникают сингулярные множества, на которых функция, будучи непрерывной, тем не менее терпит разрыв градиента. При формировании решения требуется выявлять и строить такие множества.

Основной результат исследования состоит в получении необходимых условий для псевдовершин целевого множества в случае ослабленных с точки зрения гладкости условий, налагаемых на его границу. Псевдовершины являются особыми точками границы краевого множества и необходимы при конструировании ветвей сингулярного множества функции оптимального результата. Результаты исследования иллюстрируются на примере.

1. Объект исследования

Рассматривается краевая задача Дирихле

$$\min_{\nu: \|\nu\| \leq 1} \left(\nu_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 1 = 0, \tag{1.1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Краевое условие (1.2) определено на границе $\Gamma = \partial M$ замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$. Предполагается, что Γ не имеет точек самопересечения. Свойства границы Γ будут оговорены ниже при обосновании утверждений.

Минимаксное решение задачи (1.1), (1.2) есть функция $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ (см. [6]), где $\rho(\mathbf{x}, M) = \min_{\mathbf{m} \in M} \|\mathbf{m} - \mathbf{x}\|$ — евклидово расстояние от точки \mathbf{x} до множества M . Оно является функцией оптимального результата в соответствующей задаче о быстродействии с динамикой

$$\begin{cases} \dot{x} = \nu_1, \\ \dot{y} = \nu_2, \end{cases}$$

где управление $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ стеснено ограничением $\|\nu\| \leq 1$.

В работе [1] введено главное (фундаментальное) решение $u_k = u_k(x, y)$ краевой задачи Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа эйконала. В частном случае для изотропной среды фундаментальное решение краевой задачи

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 1, \tag{1.3}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{1.4}$$

имеет вид $u_k(x, y) = -\rho((x, y), M)$. Здесь краевое условие то же, что и в задаче (1.1), (1.2). Карта линий уровня фундаментального решения задачи (1.3), (1.4), т. е. совокупность волновых фронтов, и карта линий уровня минимаксного решения задачи (1.1), (1.2) совпадают. С этой точки зрения нахождение решения задачи (1.1), (1.2) равносильно построению решения задачи (1.3), (1.4). Характер эволюции волновых фронтов определяется геометрией краевого множества и дифференциальными свойствами его границы. Невыпуклость краевого множества влечет наличие у решения задачи сингулярности, которая в данном случае относится к множествам симметрии [7]. В достаточно общем случае сингулярное множество является объединением нуль- и одномерных многообразий. Построение сингулярного множества в аналитическом виде или же формирование его аппроксимации с помощью числительных алгоритмов облегчает построение решения краевой задачи в целом. При этом одна из ключевых ролей отводится псевдовершинам — точкам на границе краевого множества, которые определяют

одномерные сингулярные ветви [8] множества симметрии. Существует аналитическая взаимосвязь между псевдовершинами краевого множества и крайними точками сингулярных кривых [9; 10]. Ниже обоснуем необходимые условия существования псевдовершин для случая гладкой параметризованной границы краевого множества в условиях, допускающих невыпуклость множества и разрыв кривизны. Полученный результат следует рассматривать как усиление и обобщение результата [11].

2. Определения, основные понятия

Пусть $\gamma: T \rightarrow \mathbb{R}^2$ — отображение числового интервала $T = (\hat{t}, \check{t})$ на плоскость. Вектор-функция $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ является гладкой в том смысле, что ее производные $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$ существуют и непрерывны. Образ $\Gamma = \gamma(t)$ этого отображения представляет собою плоскую кривую. Полагаем, что Γ является регулярной, т. е. вектор скорости $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$ не обращается в нуль-вектор. Будем считать, что кривая Γ не имеет точек самопересечения, т. е. не существует двух моментов $t_*, t_{**}, t_* \neq t_{**}$, что $\gamma(t_*) = \gamma(t_{**})$. Включим также в рассмотрение кривые, заданные на конечных интервалах $T = (\hat{t}, \check{t})$, $-\infty < \hat{t} < \check{t} < +\infty$, допускающие доопределение в конечных точках $t = \hat{t}$ и $t = \check{t}$. Кривые вида $\Gamma = \gamma(t)$, когда $T = [\hat{t}, \check{t}]$, $\gamma(\hat{t}) = \gamma(\check{t})$, будем называть контурами.

Напомним необходимые для изложения результатов определения (подробно см. [11]).

Рассмотрим уравнение вида $G(t_1, t_2) = 0$, $G(t_1, t_2)$ — функция двух переменных $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. Решения этого уравнения будем искать на прямоугольных открытых областях $\Pi_-(t_0) = \{(t_1, t_2): t_1 \in (t_0 - \delta_1, t_0), t_2 \in (t_0, t_0 + \delta_2)\}$. Здесь фиксированы точка t_0 , параметры малости $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Под решениями уравнения понимаются локальные диффеоморфизмы [7]. Диффеоморфизм — скалярная непрерывно дифференцируемая строго монотонная без нулей производной функция. Локальный диффеоморфизм определен в малом — в окрестности или же в полукрестности точки рассмотрения.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что локальный диффеоморфизм $t_2 = t_2(t_1)$, определенный уравнением $G(t_1, t_2) = 0$, непрерывен слева в точке $t_1 = t_0$ и отображает левую полукрестность точки $t_1 = t_0$ в ее правую полукрестность, если выполняются условия

$$(A1) \quad t_2((t_0 - \delta_1, t_0)) = (t_0, t_0 + \delta_2), \quad \delta_1 > 0, \quad \delta_2 > 0,$$

$$(A2) \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} t_2(t_1) = t_0.$$

Выберем произвольно и зафиксируем два момента: $t_1 \in T$ и $t_2 \in T$, $t_1 < t_2$. Проведем через точки $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ касательные прямые.

О п р е д е л е н и е 2. Псевдовершиной кривой Γ будем называть точку

$$(x_0, y_0) \triangleq \lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} (\bar{x}_*, \bar{y}_*),$$

где $(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (\bar{x}_*(t_1), \bar{y}_*(t_1)) = (x_*(t_1, t_2(t_1)), y_*(t_1, t_2(t_1)))$ — однопараметрическое подмножество решений $(x_*, y_*) = (x_*(t_1, t_2), y_*(t_1, t_2))$ системы уравнений

$$\begin{cases} (x - \gamma_1(t_1))\gamma'_2(t_1) = (y - \gamma_2(t_1))\gamma'_1(t_1), \\ (x - \gamma_1(t_2))\gamma'_2(t_2) = (y - \gamma_2(t_2))\gamma'_1(t_2), \end{cases} \quad (2.1)$$

определяемое непрерывным слева в точке $t_1 = t_0$ локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$ левой полукрестности точки $t_1 = t_0$ на ее правую полукрестность, который задается уравнением

$$G(t_1, t_2) = 0. \quad (2.2)$$

Здесь

- 1) (x_*, y_*) — точка пересечения касательных к кривой Γ в точках $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$,

2) $G(t_1, t_2) = \rho^2(\gamma(t_1), (x_*, y_*)) - \rho^2(\gamma(t_2), (x_*, y_*))$ — разность квадратов расстояний между указанными точками $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$ кривой Γ и точкой (x_*, y_*) пересечения касательных, проведенных через $\gamma(t_1)$ и $\gamma(t_2)$.

Корректность введенного определения псевдовершины показана в [6; 8].

Ветвь $L(x_0, y_0)$ сингулярного множества L строится с помощью сопряженной к (2.1) системы уравнений [11].

3. Лемма о предельных значениях производной локального диффеоморфизма

Обоснуем вспомогательное утверждение, которое будем использовать при доказательстве основного результата исследования. Пусть $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$, $b(t) = (b_1(t), b_2(t))$ — дифференцируемые вектор-функции скалярного аргумента $t \in T = (\hat{t}, \hat{t})$. Обозначим $\det(a(t_1), b(t_2))$ — определитель матрицы $\begin{pmatrix} a_1(t_1) & a_2(t_1) \\ b_1(t_2) & b_2(t_2) \end{pmatrix}$, построенный на векторах $a(t_1)$ и $b(t_2)$, $t_1 \in T$, $t_2 \in T$. Если $a(t) = (a_1(t), a_2(t))$ вектор-функция скалярного аргумента, то

$$a'_{i,-} = \lim_{t \rightarrow t_0-0} \frac{a_i(t) - a_i(t_0)}{t - t_0}, \quad a'_{i,+} = \lim_{t \rightarrow t_0+0} \frac{a_i(t) - a_i(t_0)}{t - t_0},$$

— односторонние производные в точке $t = t_0$ слева и справа соответственно ее координатных функций, $i = 1, 2$, а $a'_-(t_0) = (a'_{1,-}(t_0), a'_{2,-}(t_0))$ и $a'_+(t_0) = (a'_{1,+}(t_0), a'_{2,+}(t_0))$ — соответствующие односторонние касательные векторы. Аналогичные символы будем использовать для обозначения односторонних производных второго порядка.

Далее уточним дифференциальные свойства регулярной кривой Γ , ограничивающей краевое множество. Будем полагать, что производная второго порядка $\gamma''(t) = (\gamma''_1(t), \gamma''_2(t))$ существует при всех значениях аргумента $t \in T$, кроме конечного числа точек. А именно имеется конечная совокупность $T = \{t_*\}$, состоящая из точек t_* , в которых существуют конечные односторонние производные второго порядка $\gamma''_-(t_*)$ и $\gamma''_+(t_*)$, при этом $\gamma''_-(t_*) \neq \gamma''_+(t_*)$. Будем также полагать, что выполняется следующее условие.

Условие А. Определители $\det(\gamma'(t), \gamma''_-(t))$ и $\det(\gamma'(t), \gamma''_+(t))$ имеют один и тот же знак (в нестрогом смысле) для всех $t_* \in T$.

Напомним, что кривизна кривой Γ в точке $\gamma(t)$ определяется формулой $\kappa(\gamma(t)) = \det(\gamma'(t), \gamma''(t)) / \|\gamma'(t)\|^3$ [12]. Условие А означает, что односторонние кривизны $\kappa_-(\gamma(t)) = \det(\gamma'(t), \gamma''_-(t)) / \|\gamma'(t)\|^3$ и $\kappa_+(\gamma(t)) = \det(\gamma'(t), \gamma''_+(t)) / \|\gamma'(t)\|^3$ не меняют знак в точке разрыва производной второго порядка. Стало быть, дуга регулярной кривой, содержащая $\gamma(t_*)$, $t_* \in T$, в качестве внутренней точки, является локально выпуклой.

Удобства ради множества кривых Γ с означенными дифференциальными свойствами и условием А, налагаемым на точки разрыва кривизны, обозначим $\{\Gamma\}_T$.

В дальнейшем потребуется обобщение ранее полученного результата [8].

Лемма. Если $\gamma(t_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$ — псевдовершина плоской кривой $\Gamma \in \{\Gamma\}_T$, $t_2 = t_2(t_1)$ — локальный диффеоморфизм, определяемый уравнением (2.2), причем $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = c$, то предельное значение c равно 0 либо $-\infty$.

Доказательство. По условию Γ является регулярной кривой. Пусть для определенности $\gamma'_1(t_0) \neq 0$. Тогда в силу классических теорем математического анализа в некоторой окрестности $O(t_0) = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$, точки $t = t_0$ дуга кривой является графиком скалярной функции $y = f(x)$ такой, что $x_0 = \gamma_1(t_0)$, $f(x_0) = \gamma_2(t_0)$. В этом случае на кривую переносятся результаты, справедливые для графиков скалярных функций [8]. Воспользуемся ранее доказанной теоремой о спектральных свойствах производной локального диффеоморфизма для случая графика $\Gamma = \text{gr } f$ функции $y = f(x)$, $x \in X$, $X \subseteq \mathbb{R}$ [9]. Под спектром здесь

понимается множество возможных значений односторонних производных локальных диффеоморфизмов, определяющих псевдовершины. Спектр совпадает с отрицательной полупрямой $(-\infty, 0]$. Согласно этой теореме выполняется равенство (см. [9, с. 179]) $c = \frac{cf_+''(x_0)}{f_-''(x_0)}$ для случая, когда псевдовершина $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ принадлежит гладкому графику $\Gamma = \text{gr } f$ при условии, что односторонние производные второго порядка $f_-''(x_0)$ и $f_+''(x_0)$ существуют, конечны, но при этом $f_-''(x_0) \neq f_+''(x_0)$. Оно получено из условий трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения $G(x_1, x_2) = 0$ с помощью (громоздких) аппроксимативных преобразований и представляет собой равенство пределов. Из него следует тривиальный факт, что $c = 0$, если $f_-''(x_0) \neq 0$. Из него же вытекает, что предел принимает несобственное значение $c = -\infty$, если $f_-''(x_0) = 0$ и отношение $f_+''(x)/f_-''(x)$ неотрицательно в точках x из окрестности x_0 . В рассматриваемом случае в силу условия А в окрестности точки $x = x_0$ функция $y = f(x)$ выпукла либо же вогнута. В каждой из этих ситуаций отношение односторонних производных второго порядка $f_-''(x)$ и $f_+''(x)$, вычисленных в точках из окрестности $x = x_0$, как раз неотрицательно. \square

З а м е ч а н и е. Лемма выражает одно из многочисленных проявлений симметрии, присущей изучаемой математической модели. Здесь если для исходного локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ выполняется предельное равенство $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$, то для обратного локального диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2)$ в соответствии с классическими результатами анализа

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = \left(\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) \right)^{-1} = -\infty.$$

И наоборот, если $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = -\infty$, то

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = \left(\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) \right)^{-1} = 0.$$

С точки зрения геометрии эти пределы выражают ортогональную склейку графиков исходного диффеоморфизма и ему обратного диффеоморфизма (подробнее см. [9]). Рассматриваемый случай разрыва кривой по производной второго порядка является в некотором смысле пограничным для гладких кривых. Пограничность этого случая выражается в том, что предельное значение производной локального диффеоморфизма принимает одно из двух крайних (пограничных) значений спектра — либо 0, либо $-\infty$.

4. Теорема о необходимых условиях второго порядка

В этом разделе обоснуем необходимые условия для псевдовершин в классе кривых, имеющих разрывы координатных функций по производным второго порядка. При доказательстве будем использовать локальные разложения скалярных функций вблизи точки $t = t_0$ по формуле Тейлора, технику струй. Пусть k — натуральное число. Следуя [13], под k -струей достаточно число раз дифференцируемой функции $f(t)$, $t \in T$, будем понимать многочлен Тейлора k -го порядка

$$J_{t,t_0}^k f(\delta) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \delta^i, \quad \delta = t - t_0.$$

Пусть $f(t)$ и $g(t)$ — дифференцируемые функции. Сумма k -струй этих функций находится как сумма соответствующих многочленов Тейлора. Произведение k -струй определяется по следующему правилу. Если

$$J_{t,t_0}^k f(\delta_1) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(t_0)}{i!} \delta_1^i, \quad \delta_1 = t - t_0, \quad J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2) = \sum_{i=0}^k \frac{g^{(i)}(t_0)}{i!} \delta_2^i, \quad \delta_2 = \tau - t_0,$$

— k -струи функций $f(t)$ и $g(t)$ соответственно, то их произведением $J_{t,t_0}^k f(\delta_1) \otimes J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2)$ называется многочлен, получаемый почленным умножением многочленов $J_{t,t_0}^k f(\delta_1)$ и $J_{\tau,t_0}^k g(\delta_2)$, в котором отброшены все члены степени выше k . Учитывая трехточечность рассматриваемой модели, будем различать струи, получаемые дифференцированием “назад”, т.е. когда $t_0 < t = t_2$, и струи, получаемые дифференцированием “вперед”, т.е. когда $t_0 > t = t_1$. Примем обозначения $\Delta_1 = t_0 - t_1 > 0$, $\Delta_2 = t_2 - t_0 > 0$, $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2$.

Теорема (О необходимых условиях второго порядка). *Если $\gamma(t_0) = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$ — псевдовершина плоской регулярной кривой $\Gamma \in \{\Gamma\}_T$ в краевой задаче (1.1), (1.2), $t_0 \in T$, то в указанной точке выполняется одно из условий:*

$$\gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) = 0, \quad (4.1)$$

$$\kappa_-(\gamma(t_0)) = 2 \frac{(\gamma'_1(t_0))^2}{\|\gamma'(t_0)\|^3} \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \left(\frac{\gamma_2(t_2(t_1)) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)} \right)' = 2 \frac{(\gamma'_2(t_0))^2}{\|\gamma'(t_0)\|^3} \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \left(\frac{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)}{\gamma_2(t_2(t_1)) - \gamma_2(t_1)} \right)',$$

если

$$\gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0, \quad (4.2)$$

$$\gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_1(t_0) = 0, \quad (4.3)$$

$$\kappa_+(\gamma(t_0)) = 2 \frac{(\gamma'_1(t_0))^2}{\|\gamma'(t_0)\|^3} \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1(t_2))}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1(t_2))} \right)' = 2 \frac{(\gamma'_2(t_0))^2}{\|\gamma'(t_0)\|^3} \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \left(\frac{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1(t_2))}{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1(t_2))} \right)',$$

если

$$\gamma'_1(t_0) \neq 0, \quad \gamma'_2(t_0) \neq 0, \quad \lim_{t_2 \rightarrow t_0+0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0. \quad (4.4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению псевдовершины

$$(x_0, y_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} (\bar{x}_*, \bar{y}_*),$$

где $(\bar{x}_*, \bar{y}_*) = (\bar{x}_*(t_1), \bar{y}_*(t_1))$ — однопараметрическое подмножество решений системы (2.1), определяемое локальным диффеоморфизмом $t_2 = t_2(t_1)$, являющимся решением уравнения (2.2). Кривая регулярная. Пусть для определенности $\gamma'_1(t_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $t = t_0$ приращение $\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1) \neq 0$ и производные $\gamma'_1(t_2) \neq 0$, $\gamma'_1(t_1) \neq 0$. В этом случае уравнение (2.2) допускает эквивалентное представление

$$2(\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))(\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)) + \left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))^2 - 2 \frac{\gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2)} (\gamma_1(t_1) - \gamma_1(t_2))(\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)) - \left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) (\gamma_2(t_1) - \gamma_2(t_2))^2 = 0. \quad (4.5)$$

Возможны два случая.

С л у ч а й 1) $\left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) = 0$. **С л у ч а й 2)** $\left(\frac{\gamma'_2(t_1)}{\gamma'_1(t_1)} + \frac{\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_1(t_2)} \right) \neq 0$.

Пусть реализовался случай 1). Повторяя рассуждения, приведенные в работе [11], нетрудно показать выполнение условий (4.1).

Пусть теперь реализовался случай 2). После алгебраических преобразований уравнение (4.5) принимает вид

$$\left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} \right)^2 + 2 \frac{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) - \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \cdot \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - 1 = 0.$$

Примем обозначения:

$$\lambda = \lambda(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}, \quad \mu = \mu(t_1, t_2) \triangleq \frac{\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) - \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)}.$$

Уравнение, выписанное относительно λ , является квадратичным:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda - 1 = 0,$$

близко к уравнению гармонической пропорции [14] и имеет два действительных решения разного знака:

$$\lambda_- = -\mu - \sqrt{\mu^2 + 1} < 0, \quad \lambda_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} > 0.$$

Стало быть, $\lambda^2 + 2\mu\lambda - 1 = (\lambda - \lambda_-)(\lambda - \lambda_+)$.

Далее докажем, что точка $t_1 = t_0$ является корнем второго сомножителя в разложении, т.е. указанная точка есть решение уравнения

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} + \mu(t_1, t_2) - \sqrt{(\mu(t_1, t_2))^2 + 1} = 0, \quad (4.6)$$

когда переменные связаны в силу диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$. Для этого преобразуем левую часть уравнения (4.6). Поскольку

$$\mu^2 + 1 = \frac{(s(t_1))^2 (s(t_2))^2}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)},$$

где $s(t) = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + (\gamma_2'(t))^2}$ — длина касательного вектора $\gamma'(t)$, то

$$\lambda_+ = -\mu + \sqrt{\mu^2 + 1} = \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)}.$$

Уравнение (4.6) принимает вид

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)} = 0. \quad (4.7)$$

Изучим свойства этого уравнения и его значимой части в окрестности точки $(t_1, t_2) = (t_0, t_0)$ с помощью разложений координатных функций по формуле Тейлора. В этих разложениях приращения Δ_1 и Δ_2 выбираются сначала независимыми. Далее они связываются в силу диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$, $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0$.

Согласно приведенной в разд. 3 лемме может реализоваться одна из двух ситуаций относительно предельного значения производной локального диффеоморфизма:

$$\text{ситуация 1) } \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0, \quad \text{ситуация 2) } \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = -\infty.$$

Далее рассмотрим подробно ситуацию 1), когда $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$. Здесь

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{\Delta_2}{\Delta} = \lim_{t \rightarrow t_0-0} \frac{(t_2(t_1) - t_0)'}{(t_2(t_1) - t_1)'} = 0, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{\Delta_1}{\Delta} = \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{(t_1 - t_0)'}{(t_2(t_1) - t_1)'} = 1.$$

Стало быть,

$$\Delta_2 = o(\Delta), \quad \Delta \downarrow 0 \text{ и } \Delta \sim \Delta_1, \quad \Delta_1 \downarrow 0, \quad \Delta_2 = o(\Delta_1), \quad \Delta_1 \downarrow 0. \quad (4.8)$$

Тогда соответствующие члены разложений вида $\text{const } \Delta_2^k$ имеют порядок малости $o(\Delta_1^k)$ и ими в разложении k -го порядка допустимо пренебречь.

Следуя намеченному плану, воспользуемся формулами для струй, дифференцируя функции в точке $t = t_0$. При этом дифференцирование осуществляем “назад” по отношению к точке $t = t_1$ и “вперед” по отношению к точке $t = t_2$. Начнем с вычисления 1-струй

$$J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 = \gamma_2 + \Delta_2 \gamma_2', \quad J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2 = \gamma_2 - \Delta_1 \gamma_2' \quad \text{и} \quad J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2 = (\Delta_2 + \Delta_1) \gamma_2' = \Delta \gamma_2',$$

$$J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 = \gamma_1 + \Delta_2 \gamma_1', \quad J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1 = \gamma_1 - \Delta_1 \gamma_1' \quad \text{и} \quad J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1 = (\Delta_2 + \Delta_1) \gamma_1' = \Delta \gamma_1'.$$

Аппроксимация отношения $\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)}$ приращений координатных функций принимает вид

$$\frac{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1} = \frac{\Delta \gamma_2'}{\Delta \gamma_1'} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}.$$

Заметим, что эта аппроксимация не зависит от приращений аргументов. Но тогда и аппроксимация этого отношения при наложении на точки из окрестности $t = t_0$ дифференциальной связи $t_2 = t_2(t_1)$, т. е. в более частном случае, принимает тот же самый вид

$$\left. \frac{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1} \right|_{t_2=t_2(t_1)} = \frac{\Delta \gamma_2'}{\Delta \gamma_1'} = \frac{\Delta_1 \gamma_2'}{\Delta_1 \gamma_1'} = \frac{\gamma_2'}{\gamma_1'}.$$

Последнее равенство показывает, что $t_1 = t_0$ является корнем и числителя, и знаменателя дроби $\left. \frac{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1} \right|_{t_2=t_2(t_1)}$.

Аппроксимируем с помощью 1-струй вычитаемую дробь в уравнении (4.7). Поскольку

$$J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' = (\gamma_2' - \Delta_1 \gamma_{2,-}'') \otimes (\gamma_1' + \Delta_2 \gamma_{1,+}'') = \gamma_2' \gamma_1' - \Delta_1 \gamma_{2,-}'' \gamma_1' + \Delta_2 \gamma_{1,+}'' \gamma_2',$$

$$J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' = (\gamma_2' + \Delta_2 \gamma_{2,+}'') \otimes (\gamma_1' - \Delta_1 \gamma_{1,-}'') = \gamma_2' \gamma_1' + \Delta_2 \gamma_{2,+}'' \gamma_1' - \Delta_1 \gamma_{1,-}'' \gamma_2',$$

то

$$J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' + J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' = 2\gamma_2' \gamma_1' - \Delta_1 (\gamma_{2,-}'' \gamma_1' + \gamma_{1,-}'' \gamma_2') + \Delta_2 (\gamma_{1,+}'' \gamma_2' + \gamma_{2,+}'' \gamma_1').$$

Поэтому линейная аппроксимация $J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' + J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \Big|_{t_2=t_2(t_1)}$ суммы $\gamma_2'(t_1) \gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2) \gamma_1'(t_1)$, вычисляемая в силу дифференциальной связи $t_2 = t_2(t_1)$, т. е. когда $\Delta_2 = o(\Delta_1)$, $\Delta_1 \downarrow 0$, “теряет” (см. (4.8)) линейные по приращениям Δ_2 члены и принимает следующий вид:

$$J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' + J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = 2\gamma_2' \gamma_1' - \Delta_1 (\gamma_{2,-}'' \gamma_1' + \gamma_{1,-}'' \gamma_2').$$

Действуя аналогично, находим линейные аппроксимации функций $\gamma_2'(t_1) \gamma_2'(t_2) - \gamma_1'(t_1) \gamma_1'(t_2)$ и $s(t_1) s(t_2)$:

$$\begin{aligned} & J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' \\ &= (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 + \Delta_2 \gamma_{2,+}'' \gamma_2' - \Delta_1 \gamma_{2,-}'' \gamma_2' + \Delta_1 \gamma_{1,-}'' \gamma_1' - \Delta_2 \gamma_{1,+}'' \gamma_1', \\ & (J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1') \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = (\gamma_2')^2 - (\gamma_1')^2 + \Delta_1 (\gamma_{1,-}'' \gamma_1' - \gamma_{2,-}'' \gamma_2'), \\ & J_{t_1,t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2,t_0}^1 s_2 = (s - \Delta_1 s_-') \otimes (s + \Delta_2 s_+') = s^2 + \Delta_2 s s_+' - \Delta_1 s s_-' , \\ & (J_{t_1,t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2,t_0}^1 s_2) \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = s^2 - \Delta_1 s s_-' . \end{aligned}$$

Подставляя в левую часть уравнения (4.7) 1-струи, найденные с учетом диффеоморфизма, получим

$$\frac{(J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' - J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1') \Big|_{t_2=t_2(t_1)} + (J_{t_1,t_0}^1 s_1 \otimes J_{t_2,t_0}^1 s_2) \Big|_{t_2=t_2(t_1)}}{J_{t_1,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_2,t_0}^1 \gamma_1' + J_{t_2,t_0}^1 \gamma_2' \otimes J_{t_1,t_0}^1 \gamma_1' \Big|_{t_2=t_2(t_1)}}$$

$$+ \frac{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_2 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_2}{J_{t_2, t_0}^1 \gamma_1 - J_{t_1, t_0}^1 \gamma_1} \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = \frac{\gamma'_2}{\gamma'_1} - \frac{(\gamma'_2)^2 - (\gamma'_1)^2 + \Delta_1 (\gamma''_{1,-} \gamma'_1 - \gamma''_{2,-} \gamma'_2) + s^2 - \Delta_1 s s'_-}{2\gamma'_2 \gamma'_1 - \Delta_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)}.$$

Упростим числитель второй дроби:

$$\begin{aligned} & (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_1)^2 + \Delta_1 (\gamma''_{1,-} \gamma'_1 - \gamma''_{2,-} \gamma'_2) + s^2 - \Delta_1 s s'_- \\ &= (\gamma'_2)^2 - (\gamma'_1)^2 + \Delta_1 (\gamma''_{1,-} \gamma'_1 - \gamma''_{2,-} \gamma'_2) + (\gamma'_1)^2 + (\gamma'_2)^2 - \Delta_1 s \frac{\langle \gamma', \gamma''_- \rangle}{s} = 2(\gamma'_2)^2 - 2\Delta_1 \gamma''_{2,-} \gamma'_2. \end{aligned}$$

Тогда разность аппроксимирующих дробей

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma'_2}{\gamma'_1} - \frac{(\gamma'_2)^2 - (\gamma'_1)^2 + \Delta_1 (\gamma''_{1,-} \gamma'_1 - \gamma''_{2,-} \gamma'_2) + s^2 - \Delta_1 s s'_-}{2\gamma'_2 \gamma'_1 - \Delta_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)} \\ &= \frac{2(\gamma'_2)^2 \gamma'_1 - \Delta_1 \gamma'_2 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2) - 2(\gamma'_2)^2 \gamma'_1 + 2\Delta_1 \gamma''_{2,-} \gamma'_2 \gamma'_1}{2\gamma'_2 (\gamma'_1)^2 - \Delta_1 \gamma'_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)} \\ &= \frac{\Delta_1 \gamma'_2 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 - \gamma''_{1,-} \gamma'_2)}{2\gamma'_2 (\gamma'_1)^2 - \Delta_1 \gamma'_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)} = \frac{\Delta_1 \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma''_-)}{2\gamma'_2 (\gamma'_1)^2 - \Delta_1 \gamma'_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)}. \end{aligned}$$

Если псевдовершина стационарна по второй координате, т.е. $\gamma'_2(t_0) = 0$, то вновь реализовалось условие (4.1). Рассмотрим более общий подслучай, когда $\gamma'_2(t_0) \neq 0$. Тогда знаменатель последней дроби отличен от нуля и, стало быть,

$$\frac{\Delta_1 \gamma'_2 \det(\gamma', \gamma''_-)}{2\gamma'_2 (\gamma'_1)^2 - \Delta_1 \gamma'_1 (\gamma''_{2,-} \gamma'_1 + \gamma''_{1,-} \gamma'_2)} = \text{const} \cdot \Delta_1.$$

Полученное равенство означает, что в окрестности точки $t_1 = t_0$ по лемме Адамара [7] существует по крайней мере непрерывная в точке $t_1 = t_0$ функция $g(t_1)$ такая, что левая часть уравнения (4.7), вычисленная вдоль диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$, раскладывается на множители

$$\left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} - \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right) \Big|_{t_2=t_2(t_1)} = (t_0 - t_1)g(t_1).$$

Полученное разложение завершает доказательство того, что $t_1 = t_0$ является корнем уравнения (4.7) для нестационарного случая, когда $\gamma'_1(t_0) \neq 0$, $\gamma'_2(t_0) \neq 0$.

Докажем выполнимость необходимых условий (4.2). Из (4.7) следует

$$\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} = \frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)}.$$

По-прежнему полагая, что переменные t_1 и t_2 стеснены дифференциальной связью

$$t_2 = t_2(t_1), \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0, \quad \lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0, \quad (4.9)$$

продифференцируем обе части равенства по t_1 :

$$\left(\frac{\gamma_2(t_2) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2) - \gamma_1(t_1)} \right)' = \left(\frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)'. \quad (4.10)$$

Сосредоточимся на вычислении производной, стоящей справа от знака равенства:

$$\left(\frac{-\gamma'_1(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_1)\gamma'_2(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma'_2(t_1)\gamma'_1(t_2) + \gamma'_2(t_2)\gamma'_1(t_1)} \right)'$$

$$= \frac{(-\gamma_1''(t_1)\gamma_1'(t_2) - \gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2)t_2' + \gamma_2''(t_1)\gamma_2'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2''(t_2)t_2' + s_-'(t_1)s(t_2) + s(t_1)s_+'(t_2)t_2')}{(\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1))^2} \\ \times (\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)) - \frac{(-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2))}{(\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1))^2} \\ \times (\gamma_2''(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_1''(t_2)t_2' + \gamma_2''(t_2)t_2'\gamma_1'(t_1) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1''(t_1)).$$

Здесь $t_2' = t_2'(t_1)$. Найдем односторонний левый предел, памятуя, что $t_2' \rightarrow 0$ при $t_1 \rightarrow t_0 - 0$, применяя также формулу $s' = \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{s}$ и опуская для краткости обозначение t_0 аргумента у пределов производных:

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{-\gamma_1'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_1)\gamma_2'(t_2) + s(t_1)s(t_2)}{\gamma_2'(t_1)\gamma_1'(t_2) + \gamma_2'(t_2)\gamma_1'(t_1)} \right)' = \frac{(-\gamma_{1,-}'\gamma_1' + \gamma_{2,-}''\gamma_2' + s_-'s)(2\gamma_2'\gamma_1')}{(2\gamma_2'\gamma_1')^2} \\ - \frac{(-(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 + s^2)(\gamma_{2,-}''\gamma_1' + \gamma_2'\gamma_{1,-}'')}{(2\gamma_2'\gamma_1')^2} = \frac{2\gamma_{2,-}''\gamma_2'}{2\gamma_2'\gamma_1'} - \frac{(\gamma_{2,-}''\gamma_1' + \gamma_2'\gamma_{1,-}'')}{2(\gamma_1')^2} = \frac{\det(\gamma', \gamma''_-)}{2(\gamma_1')^2}.$$

Стало быть, с учетом (4.10) получаем предельное равенство

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \left(\frac{\gamma_2(t_2(t_1)) - \gamma_2(t_1)}{\gamma_1(t_2(t_1)) - \gamma_1(t_1)} \right)' = \frac{\det(\gamma'(t_0), \gamma''_-(t_0))}{2(\gamma_1'(t_0))^2}.$$

Подчеркнем, что слева стоит односторонний левый частичный предел, обусловленный выбором локального диффеоморфизма $t_2 = t_2(t_1)$ со свойствами (4.9). Левое равенство условий (4.2) доказано.

Допустим теперь, что реализовалась ситуация 2) $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = -\infty$. Тогда (см. замечание к лемме) $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0$. Это предельное соотношение фиксирует наличие гладкой локальной перепараметризации правой дуги кривой Γ , стянутой в точку $\gamma(t_0)$, имеющей при этом бесконечно малую производную. Выше подробно рассмотрена ситуация 1), когда $\lim_{t_1 \rightarrow t_0 - 0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$, что означает то же качество применительно к левой дуге кривой Γ , стянутой в ту же точку $\gamma(t_0)$. Стало быть, выводы по обеим ситуациям идентичны. Поэтому, рассмотрев уравнение (4.7) вдоль локального диффеоморфизма $t_1 = t_1(t_2)$, когда $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} t_1(t_2) = t_0$, $\frac{dt_1}{dt_2}(t_2) < 0$, $\lim_{t_2 \rightarrow t_0 + 0} \frac{dt_1}{dt_2}(t_2) = 0$, и повторив выкладки, аналогичные тем, что осуществлены в ситуации 1), вследствие симметрии значимой части (4.7) получим правое равенство условий (4.4).

Для завершения доказательства теоремы осталось предположить, что реализовалось неравенство $\gamma_2'(t_0) \neq 0$. В этом случае уравнение (2.2) допускает эквивалентное представление, получаемое из (4.5) циклической перестановкой индексов 1 и 2 координатных функций. Учитывая симметрию математической модели, повторив далее рассуждения и преобразования, мы последовательно удостоверимся в истинности условия (4.3) и правых равенств условий (4.2) и (4.4). \square

5. Примеры

Для задачи (1.1), (1.2) рассматривается краевое множество M , ограниченное контуром Γ , координатными функциями которого являются

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} (1.5 - 0.75 \sin(2\bar{t})) \cos t, & \bar{t} \leq \pi/4, \\ (1 - 0.25 \sin^2(\bar{t})) \cos t, & \bar{t} > \pi/4, \end{cases} \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} (1.5 - 0.75 \sin(2\bar{t})) \sin t, & \bar{t} \leq \pi/4, \\ (1 - 0.25 \sin^2(\bar{t})) \sin t, & \bar{t} > \pi/4. \end{cases}$$

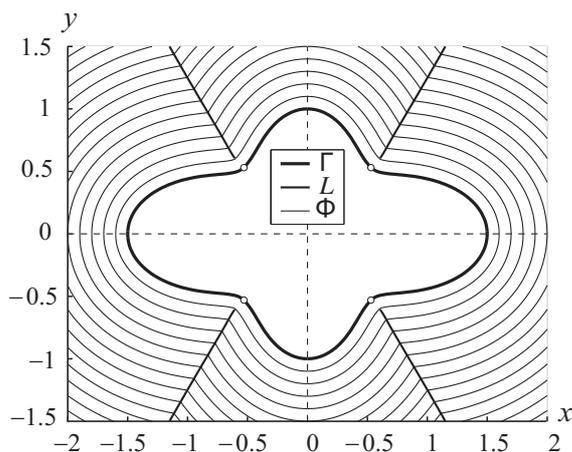


Рис. 1. Псевдовершины краевого множества. Сингулярные кривые. Распространение волновых фронтов.

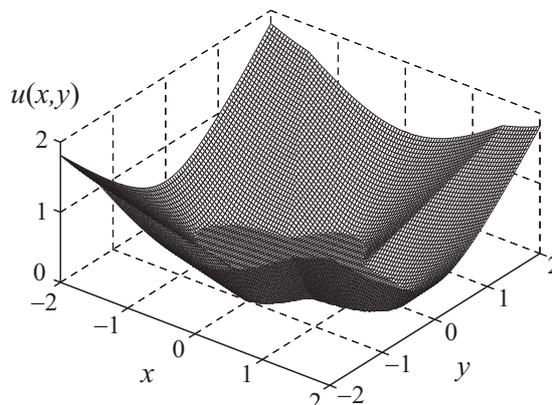


Рис. 2. График функции $u(x, y) = \rho((x, y), M)$.

Параметр t берется из отрезка $[0, 2\pi]$. Здесь вспомогательная переменная

$$\bar{t} = \begin{cases} t, & \text{если } t \leq \pi/2, \\ \pi - t, & \text{если } \pi/2 < t \leq \pi, \\ t - \pi, & \text{если } \pi < t \leq 3\pi/2, \\ 2\pi - t, & \text{если } 3\pi/2 < t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Краевое множество имеет четыре псевдовершины, помеченные на рис. 1 маркерами, определяемые параметром t , равным 0.5π , 1.5π , 2.5π и 3.5π . Точки не являются стационарными, при этом во всех них производные второго порядка терпят разрыв. Здесь для двух псевдовершин существует локальный диффеоморфизм вида $t_2 = t_2(t_1)$, для которого выполняются соотношения $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0$, $\frac{dt_2}{dt_1}(t_1) < 0$ для $t_1 < t_0$, $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = 0$. Для двух других существует локальный диффеоморфизм вида $t_2 = t_2(t_1)$, для которого выполняются соотношения $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} t_2(t_1) = t_0$, $\frac{dt_2}{dt_1}(t_1) < 0$ для $t_1 < t_0$, $\lim_{t_1 \rightarrow t_0-0} \frac{dt_2}{dt_1}(t_1) = -\infty$. Построение диффеоморфизмов осуществлено численными методами, ибо отыскание их явного аналитического выражения наталкивается на непреодолимые трудности. В справедливости необходимых условий убеждаемся также с помощью вычислительных процедур, нацеленных на определение односторонних пределов, фигурирующих в (4.2) и (4.4). Для полноты иллюстрации результатов исследования на рис. 1 представлены также волновые фронты Φ , являющиеся линиями уровня функции $u(x, y) = \rho((x, y), M)$, с шагом $h_\rho = 0.1$. В точках сингулярного множества $L(M)$ они теряют гладкость. График сужения функции $u(x, y) = \rho((x, y), M)$ на множество $[-2, 2] \times [-2, 2]$ представлен на рис. 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кружков С.Н.** Обобщенные решения уравнений Гамильтона — Якоби типа эйконала, I // Мат. сб. 1975. Т. 98, вып. 3. С. 450–493.
2. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
3. **Subbotin A.I.** Generalized solutions of first-order partial differential equations: The dynamical optimization. Boston: Birkhäuser, 1995. 312 p.
4. **Crandall M.G., Lions P.L.** Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277. No. 1. P. 1–42.

5. Колокольников В.Н., Маслов В.П. Задача Коши для однородного уравнения Беллмана // Докл. АН СССР. 1987. Vol. 296 (4). С. 796–800.
6. Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д. Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 2. С. 182–191.
7. Брус Дж., Джиблин П. Кривые и особенности. М.: Мир, 1988. 262 с.
8. Успенский А.А., Лебедев П.Д. Условия трансверсальности ветвей решения нелинейного уравнения в задаче быстрогодействия с круговой индикатрисой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 82–100.
9. Успенский А.А., Лебедев П.Д. О множестве предельных значений локальных диффеоморфизмов при эволюции волновых фронтов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 171–186.
10. Успенский А.А. Формулы исчисления негладких особенностей функции оптимального результата в задаче быстрогодействия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 276–290.
11. Успенский А.А. Необходимые условия существования псевдовершин краевого множества в задаче Дирихле для уравнения эйконала // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 250–263.
12. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия. М.: ГИТТЛ, 1940. 300 с.
13. Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977. 208 с.
14. Ohm M. Lehrbuch der gesamten höhern Mathematik. Bd 2. Leipzig: Verlag Friedrich Volckmar, 1835.

Успенский Александр Александрович

Поступила 5.11.2015

канд. физ.-мат. наук

зав. сектором

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: uspen@imm.uran.ru

Лебедев Павел Дмитриевич

канд. физ.-мат. наук

научн. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

e-mail: pleb@yandex.ru

УДК 517.9

КОМПАКТИФИКАТОРЫ В КОНСТРУКЦИЯХ РАСШИРЕНИЙ ЗАДАЧ О ДОСТИЖИМОСТИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА¹

А. Г. Ченцов

Рассматривается задача о достижимости в топологическом пространстве при ограничениях асимптотического характера. Исследуются свойства весьма общей процедуры, определяющей расширение исходной задачи. Указано, в частности, правило преобразования произвольной схемы расширения (компактификатора) в аналогичную схему со свойством гомеоморфности непрерывного продолжения исходного целевого оператора задачи о достижимости. Показано, как данное правило может быть применено в случае, когда расширение реализуется в пространстве ультрафильтров широко понимаемого измеримого пространства. Данный вариант конкретизируется затем для случая целевого оператора, определенного на невырожденном отрезке вещественной прямой.

Ключевые слова: множество притяжения, топологическое пространство, ультрафильтр, фактор-пространство.

A. G. Chentsov. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature.

A reachability problem with constraints of asymptotic nature is considered in a topological space. The properties of a rather general procedure that defines an extension of the problem are studied. In particular, we specify a rule that transforms an arbitrary extension scheme (a compactifier) to a similar scheme with the property that the continuous extension of the objective operator of the reachability problem is homeomorphic. We show how to use this rule in the case when the extension is realized in the ultrafilter space of a broadly understood measurable space. This version is then made more specific for the case of an objective operator defined on a nondegenerate interval of the real line.

Keywords: attraction set, topological space, ultrafilter, factor space.

1. Введение

В статье используются следующие сокращения: БФ — база фильтра, ИП — измеримое пространство, МП — множество притяжения, ОАХ — ограничения асимптотического характера, ОД — область достижимости, ОЭ — обобщенный элемент, п/м — подмножество, ТП — топологическое пространство, у/ф — ультрафильтр, ЭП — элемент притяжения.

Статья посвящена изучению общих вопросов, связанных с реализуемостью желаемых состояний “в пределе” в смысле значений заданного целевого оператора задачи. Потребность в упомянутой предельной реализации может быть обусловлена интересами соблюдения ограничений. Последние могут иметь асимптотический характер и относиться, строго говоря, не к выбору отдельно взятого решения (управления), а к выбору некоторой зависимости со значениями в пространстве решений (например, могут налагаться условия на последовательность обычных решений). Целевой оператор реализует на ее основе соответствующую зависимость в пространстве состояний, а потому при должном топологическом оснащении можно говорить о реализации обобщенных (вообще говоря) пределов в упомянутом пространстве. Совокупность упомянутых обобщенных пределов можно рассматривать как МП в задаче о достижимости (с ОАХ). В частности, такая интерпретация уместна в теории управления, где важную роль играет понятие ОД в заданный момент времени. Однако задача о построении ОД не обладает,

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00505, 16-01-00649).

вообще говоря, устойчивостью при ослаблении стандартных ограничений (краевые и промежуточные условия, фазовые ограничения). Представляя последовательное ослабление данных ограничений в виде схемы с ОАХ, мы естественным образом приходим к МП, “заменяющему” ОД (имеются постановки, в которых ОАХ и, как следствие, МП возникают изначально), что представляет не только теоретический, но и определенный практический интерес при решении соответствующей задачи управления. Подобно тому, как в задачах оптимизации для реализации оптимума в условиях исчезающе малого ослабления ограничений применяются ОЭ (обобщенные управления в [1, гл. III, IV; 2]), в задачах о достижимости также полезны процедуры естественного расширения в подходящем классе ОЭ. Посредством упомянутых процедур можно (проще в логическом отношении) определять нужные варианты МП. Этот подход составляет содержание настоящей статьи: в интересах построения МП конструируются расширения, связываемые с погружением обычных решений в пространство ОЭ.

В топологическом отношении речь идет об использовании компактификаций, а потому применяемую для построения МП конструкцию именуем далее компактификатором. В статье изучаются общие вопросы, связанные с построением и преобразованием компактификаторов, а также дается некоторая детализация для случая, когда используются у/ф широко понимаемых ИП. В заключительной части рассматривается одна конкретная схема построения МП для одномерного варианта задачи о достижимости с ОАХ.

Отметим, что конструкции с элементами расширений широко использовались в работах Н. Н. Красовского и А. И. Субботина, а также в работах их учеников. Оригинальный подход, предложенный Н. Н. Красовским и связанный с применением аппарата обобщенных функций (см. [3]), послужил основой многих исследований в области импульсного управления. Управления-меры использовались при построении вспомогательных программных конструкций для решения дифференциальных игр (см. [4]). Фундаментальное понятие стабильности множеств, сыгравшее важную роль в установлении основополагающей теоремы об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина (см. [4; 5]), включает использование обобщенных реакций на обычные управления одного из игроков. В этой связи отметим глубокий результат А. В. Кряжмского [6], связанный с распространением альтернативы Н. Н. Красовского, А. И. Субботина на случай управляемой системы, не удовлетворяющей условию Липшица по фазовой переменной. В данной конструкции А. В. Кряжмского применение ОЭ (управлений-мер) также оказалось существенным.

2. Обозначения и определения общего характера

Используем стандартную теоретико-множественную символику (кванторы, связки и т.п.); через \emptyset обозначаем пустое множество, \triangleq — равенство по определению. Символ def заменяет фразу “по определению”, а $\exists!$ заменяет фразу “существует и единственно”. Принимаем аксиому выбора. Называем *семейством* множество, все элементы которого сами являются множествами.

Для произвольного объекта x через $\{x\}$ обозначаем синглетон, содержащий x . Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых п/м множества X . Полагаем, что $\text{Fin}(X)$ есть def семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м множества X (в качестве X может, конечно, использоваться то или иное семейство). С произвольным непустым семейством \mathfrak{X} связываем семейство

$$\{\cap\}_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{X}) \triangleq \left\{ \bigcap_{X \in \mathcal{K}} X : \mathcal{K} \in \text{Fin}(\mathfrak{X}) \right\} \quad (2.1)$$

всех конечных пересечений множеств из \mathfrak{X} ; $\mathfrak{X} \subset \{\cap\}_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{X})$. Если \mathbb{M} — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \triangleq \{\mathbb{M} \setminus M : M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})) \quad (2.2)$$

есть семейство п/м \mathbb{M} , двойственное по отношению к \mathcal{M} . Обозначение (2.2) будет использоваться обычно в случае, когда \mathcal{M} — топология \mathbb{M} . Если A и B — множества, то B^A есть def множество всех отображений из A в B . При $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$ в виде $f^1(C) \triangleq \{f(x) : x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ имеем образ множества C при действии f ($f^1(C) \neq \emptyset$ при $C \neq \emptyset$). Наконец, для произвольных непустых множеств A и B , функции $f \in B^A$ и семейства $\mathcal{A} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(A))$ определяем

$$f^1[\mathcal{A}] \triangleq \{f^1(A) : A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B)). \quad (2.3)$$

Интерпретируем (2.3) как образ семейства \mathcal{A} .

Специальные семейства. Фиксируем до конца настоящего раздела непустое множество I . Среди семейств из $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ выделяем π -системы [7, с. 14] с “нулем” и “единицей”, получая в виде

$$\pi[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \mid (\emptyset \in \mathcal{I}) \& (I \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \ \forall A \in \mathcal{I} \ \forall B \in \mathcal{I})\}$$

семейство всех таких π -систем. Частными случаями упомянутых π -систем являются алгебры п/м I и топологии на I :

$$(\text{alg})[I] \triangleq \{\mathcal{A} \in \pi[I] \mid I \setminus A \in \mathcal{A} \ \forall A \in \mathcal{A}\}, \quad (\text{top})[I] \triangleq \left\{ \tau \in \pi[I] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau) \right\}.$$

Если $\mathcal{I} \in \pi[I]$, то пару (I, \mathcal{I}) называем ИП, используя, конечно, расширительное толкование. Пусть

$$\tilde{\pi}^o[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \forall L \in \mathcal{I} \ \forall x \in I \setminus L \ \exists \Lambda \in \mathcal{I} : (x \in \Lambda) \& (\Lambda \cap L = \emptyset)\}.$$

Заметим, что $(\text{alg})[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$. Введем, наконец, π -системы с синглетами, полагая

$$\pi'_o[I] \triangleq \{\mathcal{I} \in \pi[I] \mid \{x\} \in \mathcal{I} \ \forall x \in I\}. \quad (2.4)$$

Понятно, что $\pi'_o[I] \subset \tilde{\pi}^o[I]$, при этом, конечно, $\mathcal{P}(I) \in \pi'_o[I]$.

Ультрафильтры π -систем (определения и основные свойства). В пределах настоящего пункта фиксируем π -систему $\mathcal{J} \in \pi[I]$, получая в виде (I, \mathcal{J}) ИП в расширительном толковании. В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \triangleq \{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J} \setminus \{\emptyset\}) \mid (A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \& (\forall F \in \mathcal{F} \ \forall J \in \mathcal{J} (F \subset J) \Rightarrow (J \in \mathcal{F}))\}$$

имеем непустое (так как $\{I\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J})$) множество фильтров ИП (I, \mathcal{J}) . При этом, конечно,

$$((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[x] \triangleq \{J \in \mathcal{J} \mid x \in J\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \quad \forall x \in I$$

(введены тривиальные фильтры ИП (I, \mathcal{J})). Наконец, в виде

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J}) &\triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{J}) \mid \forall J \in \mathcal{J} (J \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}) \Rightarrow (J \in \mathcal{U})\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{J})) \end{aligned} \quad (2.5)$$

имеем (непустое) множество у/ф ИП (I, \mathcal{J}) . Среди этих у/ф выделяем свободные:

$$\mathbb{F}^*_{o,f}(\mathcal{J}) \triangleq \left\{ \mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J}) \mid \bigcap_{L \in \mathcal{U}} L = \emptyset \right\} = \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J}) \setminus \mathbb{F}^*_{o,t}(\mathcal{J}),$$

где $\mathbb{F}^*_{o,t}(\mathcal{J}) \triangleq \{((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[x] : x \in I\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{F}^*(\mathcal{J}))$. При этом

$$(\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^o[I]) \iff (((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[x] \in \mathbb{F}^*_o(\mathcal{J}) \ \forall x \in I). \quad (2.6)$$

Элементы топологии, 1. В пределах настоящего пункта фиксируем $\tau \in (\text{top})[I]$ (тогда, в частности, $\tau \in \pi[I]$). Если $x \in I$, то $N_\tau^o(x) \triangleq \{G \in \tau \mid x \in G\} \in \mathbb{F}^*(\tau)$. При этом $\text{cl}(A, \tau) \triangleq \{x \in I \mid A \cap G \neq \emptyset \ \forall G \in N_\tau^o(x)\} \in \mathbf{C}_I[\tau] \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$ (введено замыкание п/м I в ТП (I, τ)). Напомним, что $\mathbf{C}_I[\tau]$ — семейство всех замкнутых в ТП (I, τ) п/м I .

Ультрафильтры π -систем (естественная топология). Рассмотрим естественное топологическое оснащение множества (2.5). Для этого отметим сначала, что (при $\mathcal{J} \in \pi[I]$)

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid L \in \mathcal{U}\} = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid L \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\} \quad \forall L \in \mathcal{J}. \quad (2.7)$$

Тогда семейство $(\text{UF})[I; \mathcal{J}] \triangleq \{\Phi_{\mathcal{J}}(J) : J \in \mathcal{J}\}$ есть база топологии

$$\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I] \triangleq \{G \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})) \mid \forall \mathcal{U} \in G \ \exists U \in \mathcal{U} : \Phi_{\mathcal{J}}(U) \subset G\} \in (\text{top})[\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})], \quad (2.8)$$

превращающей $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})$ в хаусдорфово ТП

$$(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]). \quad (2.9)$$

При этом $\Phi_{\mathcal{J}}(J) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]]$ при $J \in \mathcal{J}$ (доказательство извлекается из (2.7)), а потому все множества из $(\text{UF})[I; \mathcal{J}]$ открыто-замкнуты; в итоге ТП (2.9) нульмерно (см. [8, 6.2]).

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\mathcal{J} \in (\text{alg})[I]$, то (2.9) — компакт (компактное хаусдорфово ТП), а, точнее, пространство Стоуна, для которого $(\text{UF})[I; \mathcal{J}] = \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]]$.

В свою очередь,

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}|\mathcal{J}) \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid \mathcal{J} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{L \in \mathcal{J}} \Phi_{\mathcal{J}}(L) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]] \quad \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}). \quad (2.10)$$

Мы дополним (2.7), (2.10) аналогами, касающимися использования п/м I , уже не обязательно содержащихся в \mathcal{J} . Итак, с учетом (2.7) и (2.8) имеем, что

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{J}|A] \triangleq \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid A \cap U \neq \emptyset \ \forall U \in \mathcal{U}\} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]] \quad \forall A \in \mathcal{P}(I) \quad (2.11)$$

(ясно, что $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{J}|J] = \Phi_{\mathcal{J}}(J)$ при $J \in \mathcal{J}$). Как следствие получаем, что

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o^*(\mathcal{J}|\mathcal{J}) &\triangleq \bigcap_{A \in \mathcal{J}} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{J}|A] = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) \mid A \cap U \neq \emptyset \ \forall A \in \mathcal{J} \ \forall U \in \mathcal{U}\} \\ &\in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})}[\mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]] \quad \forall \mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)) \end{aligned} \quad (2.12)$$

(при $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J})$ имеем $\mathbf{F}_o^*(\mathcal{J}|\mathcal{I}) = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}|\mathcal{I})$ (см. (2.7), (2.10), (2.12))).

Свойства плотности. Полагаем в пределах настоящего пункта, что $\mathcal{J} \in \tilde{\pi}^o[I]$, получая в виде (I, \mathcal{J}) отделимое ИП [9, с. 40]. Тогда согласно (2.6) имеем отображение

$$((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[\cdot] \triangleq (((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[x])_{x \in I} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})^I, \quad (2.13)$$

реализующее погружение I в ТП (2.9). Мы можем теперь рассматривать образы п/м I при действии оператора (2.13), получая п/м $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J})$. Точнее, при $S \in \mathcal{P}(I)$ в соответствии с определением разд. 2 $((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[\cdot]^1(S) = \{((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[s] : s \in S\}$. При этом (см. [10, предложение 1])

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{J}|A] &= \text{cl}(((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[\cdot]^1(A), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]) \\ &= \text{cl}(\{((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[x] : x \in A\}, \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]) \quad \forall A \in \mathcal{P}(I). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Как следствие получаем (см. (2.14)), в частности, что

$$\Phi_{\mathcal{J}}(L) = \text{cl}(((I, \mathcal{J}) - \text{ult})[\cdot]^1(L), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]) \quad \forall L \in \mathcal{J}. \quad (2.15)$$

В свою очередь, из (2.15) имеем (см. [10, (3.6)]) цепочку равенств

$$\mathbb{F}_o^*(\mathcal{J}) = \Phi_{\mathcal{J}}(I) = \text{cl}(\mathbb{F}_{o,t}^*(\mathcal{J}), \mathbf{T}_{\mathcal{J}}^*[I]). \quad (2.16)$$

Грубо говоря, (2.16) означает, что само множество I всюду плотно в ТП (2.9).

Ультрафильтры семейства всех п/м I . В настоящем пункте рассматриваем случай $\mathcal{J} = \mathcal{P}(I)$, полагая в этой связи $\mathfrak{F}[I] \triangleq \mathbb{F}^*(\mathcal{P}(I))$, $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \triangleq \mathbb{F}_o^*(\mathcal{P}(I))$ и

$$(I - \text{ult})[x] \triangleq ((I, \mathcal{P}(I)) - \text{ult})[x] \quad \forall x \in I$$

(разумеется, $(I - \text{ult})[x] \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ при $x \in I$). Тогда $\Phi_o(L|I) \triangleq \Phi_{\mathcal{P}(I)}(L) = \{U \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid L \in U\}$ $\forall L \in \mathcal{P}(I)$. Получаем, что

$$\tau_o^*[I] \triangleq \mathbf{T}_{\mathcal{P}(I)}^*[I] = \{G \in \mathcal{P}(\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]) \mid \forall U \in G \exists U \in \mathcal{U}: \Phi_o(U|I) \subset G\} \in (\text{top})[I].$$

Данная топология превращает $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I]$ в экстремально несвязный [8, с. 540] компакт. Пусть

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}^o[I|\mathfrak{J}] \triangleq \{U \in \mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \mid \mathfrak{J} \subset U\} = \bigcap_{J \in \mathfrak{J}} \Phi_o(J|I) \quad \forall \mathfrak{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I)). \quad (2.17)$$

В (2.17) введены множества “стоун-чеховских” у/ф, содержащих всякий раз семейство, используемое в качестве ОАХ.

Базы фильтров. Через $\beta[I]$ и $\beta_o[I]$ обозначаем соответственно множества всех семейств $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$ и $\mathcal{B} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(I))$, для каждого из которых $\forall B_1 \in \mathcal{B} \forall B_2 \in \mathcal{B} \exists B_3 \in \mathcal{B}: B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Элементы $\beta[I]$ — направленные семейства п/м I , а элементы $\beta_o[I]$ — суть БФ I ; $\mathfrak{F}_{\mathbf{u}}[I] \subset \mathfrak{F}[I] \subset \beta_o[I] \subset \beta[I]$. Легко видеть, что (см. (2.1)) $\{\cap\}_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{J}) \in \beta[I] \quad \forall \mathfrak{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(I))$. Кроме того, $(I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}] \triangleq \{J \in \mathcal{P}(I) \mid \exists B \in \mathcal{B}: B \subset J\} \in \mathfrak{F}[I] \quad \forall \mathcal{B} \in \beta_o[I]$.

Элементы топологии, 2. В данном пункте фиксируем топологию $\tau \in (\text{top})[I]$, получая ТП (I, τ) . Поскольку $\mathbb{F}^*(\tau) \subset \beta_o[I]$, то при $x \in I$ определен фильтр $N_{\tau}(x) \triangleq (I - \mathbf{fi})[N_{\tau}^o(x)] \in \mathfrak{F}[I]$ всех окрестностей [11, гл. I] точки x . Если $H \in \mathcal{P}(I)$, то $\text{cl}(H, \tau) = \{x \in I \mid S \cap H \neq \emptyset \quad \forall S \in N_{\tau}(x)\}$, а $(\tau - \text{Int})[H] \triangleq \{x \in I \mid H \in N_{\tau}(x)\}$ и $(\tau - \text{Fr})[H] \triangleq \text{cl}(H, \tau) \setminus (\tau - \text{Int})[H]$ определяют внутренность и границу H соответственно. При этом $(\tau - \text{dens})[I] = \{H \in \mathcal{P}(I) \mid I = \text{cl}(H, \tau)\}$ есть семейство всех п/м I , всюду плотных в (I, τ) . Наконец, в виде $(\tau - \text{isol})[I] \triangleq \{x \in I \mid \{x\} \in \tau\}$ имеем множество всех точек I , изолированных в смысле ТП (I, τ) . Если $\mathcal{B} \in \beta_o[I]$ и $x \in I$, то [11, гл. I]

$$(\mathcal{B} \xrightarrow{\tau} x) \xleftrightarrow{\text{def}} (N_{\tau}(x) \subset (I - \mathbf{fi})[\mathcal{B}]).$$

В виде $(\text{can} - \text{clos})[\tau] \triangleq \{F \in \mathcal{P}(I) \mid F = \text{cl}((\tau - \text{Int})[F], \tau)\} = \{\text{cl}(G, \tau) : G \in \tau\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_I[\tau])$ имеем семейство всех канонически замкнутых в (I, τ) п/м I .

Отметим известное свойство: если $J \in \mathcal{P}'(I)$, то $\tau|_J \triangleq \{J \cap G : G \in \tau\} \in (\text{top})[J]$ и в виде $(J, \tau|_J)$ имеем подпространство ТП (I, τ) .

Элементы топологии, 3. Фиксируем в данном пункте непустые множества X и Y , а также топологии $\tau_1 \in (\text{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\text{top})[Y]$. Тогда $C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \triangleq \{g \in Y^X \mid g^{-1}(G) \in \tau_1 \quad \forall G \in \tau_2\} \in \mathcal{P}'(Y^X)$ есть множество всех отображений из Y^X , непрерывных в смысле ТП (X, τ_1) и (Y, τ_2) . Если $g \in C(X, \tau_1, Y, \tau_2)$, а множество $K \in \mathcal{P}(X)$ компактно [8, 3.1] в (X, τ_1) , то множество $g^1(K)$ компактно в (Y, τ_2) .

3. Множества притяжения

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E , играющее роль пространства обычных решений (управлений). В настоящем разделе фиксируем ТП (Y, τ) (итак, $\tau \in (\text{top})[Y]$), $Y \neq \emptyset$, и отображение $\mathbf{n} \in Y^E$, играющее роль целевого. Тогда $\mathbf{n}^1[\mathcal{B}] \in \beta_o[Y] \ \forall \mathcal{B} \in \beta_o[X]$. С учетом этого полагаем, что

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; \mathbf{n}; \mathfrak{C}] \triangleq \{y \in Y \mid \exists \mathcal{U} \in \mathfrak{F}_u^o[E; \mathfrak{C}]: \mathbf{n}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tau} y\} \quad \forall \mathfrak{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (3.1)$$

Множества типа (3.1) именуем далее МП. Эквивалентные представления МП см. в [12, § 3]. Сейчас отметим только, что

$$(\mathbf{as})[E; Y; \tau; \mathbf{n}; \mathcal{B}] = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} \text{cl}(\mathbf{n}^1(B), \tau) \quad \forall \mathcal{B} \in \beta[E]. \quad (3.2)$$

С использованием (2.1) и (3.2) получаем, конечно, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{as})[E; Y; \tau; \mathbf{n}; \mathfrak{C}] &= (\mathbf{as})[E; Y; \tau; \mathbf{n}; \{\bigcap\}_f(\mathfrak{C})] \\ &= \bigcap_{\Sigma \in \{\bigcap\}_f(\mathfrak{C})} \text{cl}(\mathbf{n}^1(\Sigma), \tau) \in \mathbf{C}_Y[\tau] \quad \forall \mathfrak{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Заметим, что для представления МП (3.1)–(3.3) могут использоваться [12] направленности и сходимость по Морю – Смиуту. Условия, достаточные для секвенциальной реализации МП, см., например, в [9]. Если $\Xi \in \mathcal{P}(E)$, то $\{\Xi\} \in \beta[E]$ и согласно (3.2) $(\mathbf{as})[E; Y; \tau; \mathbf{n}; \{\Xi\}] = \text{cl}(\mathbf{n}^1(\Xi), \tau)$, что соответствует стандартной реализации (достижимость при стандартных ограничениях). Если $\mathfrak{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то в терминах множества

$$\text{cl}\left(\mathbf{n}^1\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{C}} \Sigma\right), \tau\right) = \text{cl}\left(\mathbf{n}^1\left(\bigcap_{\Sigma \in \{\bigcap\}_f(\mathfrak{C})} \Sigma\right), \tau\right) \in \mathcal{P}((\mathbf{as})[E; Y; \tau; \mathbf{n}; \mathfrak{C}])$$

определяем нарост МП, отвечающий ОАХ, связанным с \mathfrak{C} :

$$(\text{rem})[E; Y; \tau; \mathbf{n}; \mathfrak{C}] \triangleq (\mathbf{as})[E; Y; \tau; \mathbf{n}; \mathfrak{C}] \setminus \text{cl}\left(\mathbf{n}^1\left(\bigcap_{\Sigma \in \mathfrak{C}} \Sigma\right), \tau\right). \quad (3.4)$$

Множество (3.4) локально замкнуто [8, 2.7] в (Y, τ) , поскольку оно является разностью двух замкнутых множеств (см. (3.3)).

4. Компактификаторы и преобразования множеств притяжения

Всюду в дальнейшем фиксируем (наряду с множеством E , $E \neq \emptyset$) ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, $\mathbf{H} \neq \emptyset$, и отображение $\mathbf{r} \in \mathbf{H}^E$. Мы рассматриваем точки $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ как состояния, в реализации которых на значениях \mathbf{r} заинтересован исследователь; само отображение \mathbf{r} именуем при этом целевым (имея в виду определения предыдущего раздела, можно полагать, что $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ играет роль (Y, τ) , а \mathbf{r} — роль оператора \mathbf{n}). Если при этом (\mathbf{K}, \tilde{t}) , $\mathbf{K} \neq \emptyset$, есть ТП, $m \in \mathbf{K}^E$, $g \in C(\mathbf{K}, \tilde{t}, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$ и $\mathbf{r} = g \circ m$ (\circ — символ композиции отображений), то [13, предложение 3.3.1]

$$g^1((\mathbf{as})[E; \mathbf{K}; \tilde{t}; m; \mathfrak{C}]) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathfrak{C}] \quad \forall \mathfrak{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)). \quad (4.1)$$

В (4.1) $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathfrak{C}]$ есть основное, а $(\mathbf{as})[E; \mathbf{K}; \tilde{t}; m; \mathfrak{C}]$ — вспомогательное МП.

Всюду в дальнейшем полагаем, что $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ — хаусдорфово ТП. Набор $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$, для которого (\mathbf{K}, \tilde{t}) — компактное [8, с. 196] ТП, $\mathbf{K} \neq \emptyset$, $m \in \mathbf{K}^E$, $g \in C(\mathbf{K}, \tilde{t}, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$ и $\mathbf{r} = g \circ m$, называем *компактификатором*. Если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор и $\Sigma \in \mathcal{P}(E)$, то, как легко видеть,

$$\text{cl}(\mathbf{r}^1(\Sigma), \tilde{\tau}) = g^1(\text{cl}(m^1(\Sigma), \tilde{t})). \quad (4.2)$$

Из (4.2) следует, в частности, что при всяком выборе компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$

$$\text{cl}(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}) = g^1(\text{cl}(m^1(E), \tilde{t})). \quad (4.3)$$

Отметим, что для всяких компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ и семейства $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = g^1((\mathbf{as})[E; \mathbf{K}; \tilde{t}; m; \mathcal{E}]) \quad (4.4)$$

(в связи с (4.4) см., в частности, [9; 12]). Компактификатор $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ называем *плотным*, если $\text{cl}(m^1(E), \tilde{t}) = \mathbf{K}$. В этом случае (см. (4.3))

$$g^1(\mathbf{K}) = \text{cl}(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}) \quad (4.5)$$

(итак, если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — плотный компактификатор, то справедливо равенство (4.5)).

Предложение 4.1. *Если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор, то набор*

$$(\text{cl}(m^1(E), \tilde{t}), \tilde{t}|_{\text{cl}(m^1(E), \tilde{t})}, m, \tilde{g}),$$

где $\tilde{g} \in \mathbf{H}^{\text{cl}(m^1(E), \tilde{t})}$ определяется правилом $\tilde{g} \stackrel{\Delta}{=} (g(x))_{x \in \text{cl}(m^1(E), \tilde{t})}$, является плотным компактификатором.

Доказательство. Пусть $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — произвольный компактификатор, $P \stackrel{\Delta}{=} \text{cl}(m^1(E), \tilde{t})$ и $\theta \stackrel{\Delta}{=} \tilde{t}|_P$. Тогда $m \in P^E$, (P, θ) — подпространство (\mathbf{K}, \tilde{t}) . При этом P замкнуто в (\mathbf{K}, \tilde{t}) и, стало быть, компактно в данном ТП. В итоге (P, θ) — компактное ТП, $P \neq \emptyset$, так как $m^1(E) \neq \emptyset$. Далее $\tilde{g} \in \mathbf{H}^P$ и при $G \in \tilde{\tau}$

$$\tilde{g}^{-1}(G) = \{y \in P \mid \tilde{g}(y) \in G\} = \{y \in P \mid g(y) \in G\} = g^{-1}(G) \cap P \in \theta.$$

Имеем $\tilde{g} \in C(P, \theta, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$. Наконец, $(\tilde{g} \circ m)(x) = \tilde{g}(m(x)) = g(m(x)) = (g \circ m)(x) = \mathbf{r}(x)$ при $x \in E$. Итак, $\mathbf{r} = \tilde{g} \circ m$. Следовательно, $(P, \theta, m, \tilde{g})$ — компактификатор, для которого $\text{cl}(m^1(E), \theta) = \text{cl}(m^1(E), \tilde{t}) \cap P = P \cap P = P$.

Предложение доказано.

Итак, всякий компактификатор может быть несложным преобразованием превращен в плотный, а тогда справедливо свойство, подобное (4.5).

Отметим, что (см. (3.3)) $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{C}] \subset \text{cl}(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}) \quad \forall \mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$. С учетом этого без потери общности будем полагать до конца настоящего раздела выполненным равенство

$$\mathbf{H} = \text{cl}(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}). \quad (4.6)$$

Тогда для всякого компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ имеем (см. (4.3), (4.6)), что $g^1(\mathbf{K}) = \mathbf{H}$. Действительно, из (4.3) и (4.6) следует в рассматриваемом случае, что $\mathbf{H} = \text{cl}(\mathbf{r}^1(E), \tilde{\tau}) \subset g^1(\mathbf{K}) \subset \mathbf{H}$, т. е. $g^1(\mathbf{K}) = \mathbf{H}$. Отметим очевидное

Предложение 4.2. *Если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор, для которого g — инъективное отображение, то g является гомеоморфизмом (\mathbf{K}, \tilde{t}) на $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$.*

Доказательство. Пусть $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ есть компактификатор с инъективным отображением g . Тогда (см. (4.6)) g есть непрерывная биекция компактного ТП (\mathbf{K}, \tilde{t}) на хаусдорфово ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$. Поэтому [8, 3.1.13] g является гомеоморфизмом.

Предложение доказано.

Условимся о соглашении: компактификатор $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$, для которого отображение g инъективно, называем *инъективным*. Покажем, что каждый компактификатор может быть преобразован в инъективный. Если при этом исходный компактификатор является плотным, то

и преобразованный будет таким же. Упомянутое преобразование связываем с естественной факторизацией.

Итак, пусть $(\mathbb{K}, \hat{t}, \mu, \nu)$ есть произвольный компактификатор. Стало быть, (\mathbb{K}, \hat{t}) , $\mathbb{K} \neq \emptyset$, есть компактное ТП, $\mu \in \mathbb{K}^E$, $\nu \in C(\mathbb{K}, \hat{t}, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$ и при этом $\mathbf{r} = \nu \circ \mu$. Напомним, что $\nu^1(\mathbb{K}) = \mathbf{H}$, т. е. ν — сюръекция \mathbb{K} на \mathbf{H} . Введем в рассмотрение $\mathcal{D} \triangleq \{\nu^{-1}(\{h\}) : h \in \mathbf{H}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}'(\mathbb{K}))$. Легко видеть, что семейство \mathcal{D} — разбиение \mathbb{K} . В частности, $\forall D_1 \in \mathcal{D} \forall D_2 \in \mathcal{D}$

$$(D_1 \cap D_2 = \emptyset) \vee (D_1 = D_2).$$

Естественное и связанное с \mathcal{D} отношение эквивалентности \equiv на \mathbb{K} определяем условием: $\forall y_1 \in \mathbb{K}, \forall y_2 \in \mathbb{K}$

$$(y_1 \equiv y_2) \stackrel{\text{def}}{\iff} (\nu(y_1) = \nu(y_2)).$$

Тогда \mathcal{D} соответствует фактор-пространству \mathbb{K}/\equiv ; при этом классы эквивалентности — элементы \mathbb{K}/\equiv — имеют следующий вид:

$$[y]_\nu \triangleq \{\tilde{y} \in \mathbb{K} \mid y \equiv \tilde{y}\} = \nu^{-1}(\{\nu(y)\}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{K}) \quad \forall y \in \mathbb{K}. \quad (4.7)$$

Соответственно этому представлению имеем равенство $\mathcal{D} = \{\nu^{-1}(\{\nu(y)\}) : y \in \mathbb{K}\}$. Отметим, что (см. (4.7)) $\forall D \in \mathcal{D} \exists! h \in \mathbf{H} : \nu(y) = h \quad \forall y \in D$. С учетом этого полагаем, что $\sigma \in \mathbf{H}^{\mathcal{D}}$ есть def такое отображение, что $\sigma(D) = \nu(y) \quad \forall D \in \mathcal{D} \quad \forall y \in D$. Разумеется, σ — биекция \mathcal{D} на \mathbf{H} (учитываем свойство сюръективности ν).

Отметим, что $\mathbf{p} \triangleq ([y]_\nu)_{y \in \mathbb{K}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{K}}$ — сюръекция (каноническая проекция \mathbb{K} на фактор-пространство), для которой $\mathbf{p}(\tilde{y}) = \nu^{-1}(\{\nu(\tilde{y})\})$ при $\tilde{y} \in \mathbb{K}$. В виде $\nu = \sigma \circ \mathbf{p}$ имеем (легко проверяемое) каноническое разложение ν . Следуя [8, 2.4], оснащаем \mathcal{D} фактор-топологией

$$\mathcal{T} \triangleq \{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathcal{D}) \mid \mathbf{p}^{-1}(\mathbb{G}) \in \hat{t}\} \in (\text{top})[\mathcal{D}], \quad (4.8)$$

для которой имеет место свойство непрерывности \mathbf{p} , т. е. $\mathbf{p} \in C(\mathbb{K}, \hat{t}, \mathcal{D}, \mathcal{T})$, а тогда $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ — компактное ТП (см. [8, 3.1.10]). С другой стороны, из непрерывности (и канонического разложения) ν вытекает [8, 2.4.2], что $\sigma \in C(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathbf{H}, \tilde{\tau})$.

Заметим, что $\mathbf{p} \circ \mu \in \mathcal{D}^E$ и $\sigma \circ (\mathbf{p} \circ \mu) = \sigma \circ \mathbf{p} \circ \mu = (\sigma \circ \mathbf{p}) \circ \mu = \nu \circ \mu = \mathbf{r}$. Тем самым завершена проверка следующего свойства: $(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathbf{p} \circ \mu, \sigma)$ есть инъективный компактификатор.

Пусть теперь $(\mathbb{K}, \hat{t}, \mu, \nu)$ — плотный компактификатор. Тогда $\text{cl}(\mu^1(E), \hat{t}) = \mathbb{K}$. Учтем тот факт, что отображение \mathbf{p} непрерывно. Тогда [8, 1.4.1]

$$\mathbf{p}^1(\mathbb{K}) = \mathbf{p}^1(\text{cl}(\mu^1(E), \hat{t})) \subset \text{cl}(\mathbf{p}^1(\mu^1(E)), \mathcal{T}) = \text{cl}((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}). \quad (4.9)$$

В силу сюръективности \mathbf{p} имеем из (4.9) вложение

$$\mathcal{D} \subset \text{cl}((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}) \quad (4.10)$$

(учитываем, что $\mathcal{D} = \mathbf{p}^1(\mathbb{K})$). Однако $(\mathbf{p} \circ \mu)^1(E) = \mathbf{p}^1(\mu^1(E)) \subset \mathbf{p}^1(\mathbb{K}) = \mathcal{D}$, а тогда (см. (4.8))

$$\text{cl}((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}) \subset \mathcal{D}.$$

В итоге (см. (4.10)) $\mathcal{D} = \text{cl}((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T})$ и, стало быть, $(\mathcal{D}, \mathcal{T}, \mathbf{p} \circ \mu, \sigma)$ — плотный компактификатор. Следовательно,

$$(\text{cl}(\mu^1(E), \hat{t}) = \mathbb{K}) \implies (\text{cl}((\mathbf{p} \circ \mu)^1(E), \mathcal{T}) = \mathcal{D}).$$

Итак (см. предложение 4.1), располагая произвольным компактификатором, мы всегда можем построить инъективный плотный компактификатор.

Возвращаясь к $(\mathbb{K}, \hat{t}, \mu, \nu)$, отметим, что ТП $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ является компактом. Достаточно показать для этого, что $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ — хаусдорфово ТП, что на самом деле следует из предложения 4.2. Но все же поясним соответствующую конструкцию, фиксируя $D_1 \in \mathcal{D}$ и $D_2 \in \mathcal{D} \setminus \{D_1\}$. Тогда в силу биективности σ как отображения \mathcal{D} на \mathbf{H} имеем, что $\sigma(D_1) \neq \sigma(D_2)$, а потому в силу отделимости $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ для некоторых $G_1 \in N_{\tilde{\tau}}^o(\sigma(D_1))$ и $G_2 \in N_{\tilde{\tau}}^o(\sigma(D_2))$ имеем свойство $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. При этом по непрерывности σ имеем

$$(\sigma^{-1}(G_1) \in N_{\tilde{\tau}}^o(D_1)) \ \& \ (\sigma^{-1}(G_2) \in N_{\tilde{\tau}}^o(D_2)),$$

причем $\sigma^{-1}(G_1) \cap \sigma^{-1}(G_2) = \sigma^{-1}(G_1 \cap G_2) = \sigma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Коль скоро выбор D_1 и D_2 был произвольным, отделимость ТП $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$ установлена. Вообще для всякого инъективного компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ в виде (\mathbf{K}, \tilde{t}) имеем компакт (см. предложение 4.2).

Всюду в дальнейшем фиксируем семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, определяющее ОАХ. Отметим два простых свойства, связанных с предложением 4.2. Итак, пусть (при условии (4.6)) $(\mathfrak{K}, \vartheta, p, q)$ — инъективный компактификатор (свойство плотности выполненным не предполагается). Тогда в рассматриваемом случае

$$(\text{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = q^1((\text{rem})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]) \quad (4.11)$$

(для произвольного компактификатора $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ равенство, подобное (4.11), может отсутствовать, однако всегда

$$(\text{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \subset g^1((\text{rem})[E; \mathbf{K}; \tilde{t}; m; \mathcal{E}]);$$

следовательно, при $(\text{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \neq \emptyset$ непременно $(\text{rem})[E; \mathbf{K}; \tilde{t}; m; \mathcal{E}] \neq \emptyset$). Кроме того,

$$q^1((\vartheta - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]]) = (\tilde{\tau} - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]]. \quad (4.12)$$

Свойства (4.11), (4.12) связаны с гомеоморфностью q (см. предложение 4.2). Ограничимся обсуждением (4.12). Поскольку q — биекция \mathfrak{K} на \mathbf{H} , то

$$(q^1(q^{-1}(H)) = H \ \forall H \in \mathcal{P}(\mathbf{H})) \ \& \ (q^{-1}(q^1(K)) = K \ \forall K \in \mathcal{P}(\mathfrak{K})). \quad (4.13)$$

При этом $\mathbf{r} = q \circ p$ и справедливо (см. (4.4)) равенство

$$(\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = q^1((\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]). \quad (4.14)$$

Поскольку, в частности, q — открытое отображение, то $q^1((\vartheta - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]]) \in \tilde{\tau}$ и $q^1((\vartheta - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]]) \subset (\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]$ в силу (4.14). В итоге

$$q^1((\vartheta - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]]) \subset (\tilde{\tau} - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]]. \quad (4.15)$$

С другой стороны, имеем в силу непрерывности q , что $q^{-1}((\tilde{\tau} - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]]) \in \vartheta$. Причем, как легко видеть, с учетом (4.13)

$$\begin{aligned} q^{-1}((\tilde{\tau} - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]]) &\subset q^{-1}((\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]) \\ &= q^{-1}(q^1((\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}])) = (\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}], \end{aligned}$$

откуда по определению внутренности получаем, что $q^{-1}((\tilde{\tau} - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]]) \subset (\vartheta - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]]$ и, как следствие (см. (4.13)),

$$(\tilde{\tau} - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}]] \subset q^1((\vartheta - \text{Int})[(\text{as})[E; \mathfrak{K}; \vartheta; p; \mathcal{E}]]) \quad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) получаем (4.12).

Предложение 4.3. Если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, q)$ — компактификатор, то $\tilde{\tau} = \{G \in \mathcal{P}(\mathbf{H}) \mid q^{-1}(G) \in \tilde{t}\}$.

Доказательство. Напомним, что q — сюръекция \mathbf{K} на \mathbf{H} . При этом (\mathbf{K}, \tilde{t}) — компактное, а $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ — хаусдорфово ТП. Тогда в силу непрерывности q имеем также, что q — замкнутое отображение (\mathbf{K}, \tilde{t}) на $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, а потому согласно [14, гл. 3, теорема 8] справедливо требуемое равенство, означающее, что $\tilde{\tau}$ есть фактор-топология \mathbf{H} .

Предложение доказано.

В связи с понятием фактор-топологии отметим исследования П. С. Александрова [15, с. 116]. Заметим ряд совсем простых свойств:

(1) Если (X, τ_1) , $X \neq \emptyset$, и (Y, τ_2) , $Y \neq \emptyset$, — два ТП, а f — непрерывная и замкнутая [8, 1.4] сюръекция X на Y , то $f^1[\mathbf{C}_X[\tau_1]] = \mathbf{C}_Y[\tau_2]$.

(2) Если (X, τ_1) и (Y, τ_2) соответствуют (1), а f — непрерывная и открытая [8, 1.4] сюръекция X на Y , то $f^1[\tau_1] = \tau_2$.

Предложение 4.4. Если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор, то $g^1[\mathbf{C}_{\mathbf{K}}[\tilde{t}]] = \mathbf{C}_{\mathbf{H}}[\tilde{\tau}]$.

Доказательство легко следует из свойства (1).

Для каждого ТП (X, \mathbf{t}) через $(\mathbf{t} - \text{comp})[X]$ обозначаем семейство всех п/м X , компактных в смысле (X, \mathbf{t}) . Весьма очевидно

Следствие 4.1. Если $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор, то

$$g^1[(\tilde{t} - \text{comp})[\mathbf{K}]] = (\tilde{\tau} - \text{comp})[\mathbf{H}].$$

Два последних положения дополним простым следствием известного положения [15, с. 346]: пусть $(\mathbf{K}, \tilde{t}, m, g)$ — компактификатор, у которого g есть неприводимое [8, с. 211] отображение \mathbf{K} на \mathbf{H} , т. е. g — сюръекция \mathbf{K} на \mathbf{H} и $g^1(F) \neq \mathbf{H} \forall F \in \mathbf{C}_{\mathbf{K}}[\tilde{t}] \setminus \{\mathbf{K}\}$. Тогда $g^1[(\text{can} - \text{clos})[\tilde{t}]] = (\text{can} - \text{clos})[\tilde{\tau}]$ и, более того, отображение $F \mapsto g^1(F): (\text{can} - \text{clos})[\tilde{t}] \rightarrow (\text{can} - \text{clos})[\tilde{\tau}]$ является биекцией $(\text{can} - \text{clos})[\tilde{t}]$ на $(\text{can} - \text{clos})[\tilde{\tau}]$.

5. Ультрафильтры как обобщенные элементы в задачах о достижимости

В настоящем разделе приводятся основные сведения, касающиеся построения и использования МП в пространстве у/ф широко понимаемых ИП. В этой связи отметим сначала некоторые общие положения, связанные с (2.14)–(2.16), фиксируя (в настоящем разделе) отделимую π -систему $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$. Тогда (2.13) определяет правило погружения E в нульмерное хаусдорфово ТП (2.9), где следует только полагать $I = E$ и $\mathcal{J} = \mathcal{L}$. При этом

$$\begin{aligned} (\text{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] &= \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} | \Sigma] = \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \\ &= \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \forall \Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}) \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}\} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]] \end{aligned} \quad (5.1)$$

определяет множество \mathcal{E} -допустимых у/ф ИП (E, \mathcal{L}) . Отметим очевидное следствие: если $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$, то $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$, определено (см. (2.10)) множество $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} | \mathcal{E})$ и при этом

$$(\text{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] = \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L} | \mathcal{E}). \quad (5.2)$$

Итак, в виде (5.1), (5.2) имеем варианты МП в ТП типа (2.9). В свете общих построений разд. 4 данные МП имеют смысл вспомогательных. Возвращаясь к проблеме достижимости в $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, введем (см. [9]) при $\tilde{\mathcal{L}} \in \pi[E]$

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \tilde{\mathcal{L}}; \mathbf{H}; \tilde{\tau}] &\triangleq \{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tilde{\mathcal{L}}) \exists h \in \mathbf{H}: f^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tilde{\tau}} h\} \\ &= \{f \in \mathbf{H}^E \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tilde{\mathcal{L}}) \exists! h \in \mathbf{H}: f^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tilde{\tau}} h\} \in \mathcal{P}'(\mathbf{H}^E) \end{aligned} \quad (5.3)$$

(учитываем, что $\mathbb{F}_o^*(\tilde{\mathcal{L}}) \subset \beta_o[E]$). С учетом (5.3) получаем, что при $\tilde{\mathcal{L}} \in \pi[E]$ и $f \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \tilde{\mathcal{L}}; \mathbf{H}; \tilde{\tau}]$ определено отображение

$$\varphi_{\text{lim}}[f | \tilde{\mathcal{L}}]: \mathbf{F}_o^*(\tilde{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathbf{H} \quad (5.4)$$

по следующему правилу: если $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\tilde{\mathcal{L}})$, то

$$f^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tilde{\tau}} \varphi_{\text{lim}}[f | \tilde{\mathcal{L}}](\mathcal{U}). \quad (5.5)$$

Важно, что уже в столь общем случае при $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{L}}$ определяемое посредством (2.10) множество $\mathbb{F}_o^*(\tilde{\mathcal{L}} | \mathcal{E})$ реализует свойство

$$\varphi_{\text{lim}}[f | \tilde{\mathcal{L}}]^1(\mathbb{F}_o^*(\tilde{\mathcal{L}} | \mathcal{E})) \subset (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; f; \mathcal{E}] \quad (5.6)$$

(конструкция на основе (5.4), (5.5) позволяет (см. (5.6)) оценивать основное МП снизу). Разумеется, мы можем использовать (5.4)–(5.6) при $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathbf{r} \in \mathbb{F}_{\text{lim}}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tilde{\tau}] \quad (5.7)$$

(в [9; 16] указаны конкретные классы отображений, для которых (5.7) выполнено). Условимся также о соглашении $\varphi \triangleq \varphi_{\text{lim}}[\mathbf{r} | \mathcal{L}]$, получая отображение $\varphi: \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \rightarrow \mathbf{H}$ со свойством

$$\mathbf{r}^1[\mathcal{U}] \xrightarrow{\tilde{\tau}} \varphi(\mathcal{U}) \quad \forall \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}). \quad (5.8)$$

Из (5.6) извлекается при $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$ соответствующий вариант оценки снизу для основного МП. В случае $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ следует использовать положения [10, § 5] (см. также (5.1)). Ниже рассматривается этот общий случай.

В настоящем исследовании ограничимся обсуждением той естественной ситуации, когда основное МП можно представить в виде непрерывного образа вспомогательного. В этой связи полагаем далее, что ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ регулярно [8, 1.5], т. е. $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ является T_1 -пространством, в котором замкнутые окрестности каждой точки образуют локальную базу (в терминологии [14, гл. 4] $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ является T_3 -пространством). Тогда

$$\varphi \in C(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tilde{\tau}). \quad (5.9)$$

Кроме того, полагаем в дальнейшем, что

$$(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \quad (5.10)$$

есть компактное ТП (это всегда так в случае, когда \mathcal{L} — полуалгебра п/м E ; в частности, данное условие выполнено при $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$, что соответствует ситуации, когда (5.10) — пространство Стоуна). Разумеется, в рассматриваемом случае ТП (5.10) — непустой нульмерный компакт. С учетом (5.9) и того очевидного свойства, что $\mathbf{r} = \varphi \circ ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]$, получаем важное положение: набор $(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot], \varphi)$ является (см. (2.16)) плотным компактификатором. Поэтому (см. (5.1))

$$\begin{aligned} (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] &= \varphi^1((\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E})) \\ &= \varphi^1\left(\bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})} \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} | \Sigma]\right) = \varphi^1(\mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}))). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Тогда имеем (см. разд. 4) следующее оценочное свойство:

$$(\text{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \subset \varphi^1((\text{rem})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E})), \quad (5.12)$$

при этом согласно (3.4) и (5.1) справедливо равенство

$$\begin{aligned} &(\text{rem})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] \\ &= \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \setminus \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(E_o), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \setminus \mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} | E_o], \end{aligned} \quad (5.13)$$

где (здесь и ниже)

$$E_o \triangleq \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Sigma. \quad (5.14)$$

В связи с (5.13) и (5.14) напомним, что согласно (2.14) множество

$$\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} | E_o] = \text{cl}(((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]^1(E_o), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \text{cl}(\{((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[x] : x \in E_o\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$$

характеризует точные решения при погружении в компакт (5.10). Заметим, что, как легко видеть, согласно (2.11), (2.12), (2.4) $\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} | E_o] \subset \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}))$, причем в силу (5.12), (5.13) истинна импликация

$$((\text{rem})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] \neq \emptyset) \implies (\mathbf{F}_o^*[\mathcal{L} | E_o] \neq \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}))).$$

Отметим, что, вообще говоря, возможен случай, когда $E_o = \emptyset$ и вместе с тем $\mathbb{F}_{o, \mathbf{t}}^*(\mathcal{L}) \cap \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) \neq \emptyset$ (т. е. и при отсутствии точных решений вспомогательное МП (в пространстве y/ϕ) может содержать тривиальные y/ϕ).

Пример. Пусть $E = [0, 1[$, \mathcal{L} есть семейство всех множеств $[a, b]$, $0 \leq a \leq b \leq 1$. Иными словами, (E, \mathcal{L}) — пространство-стрелка. Пусть, кроме того, \mathcal{E} — семейство всех множеств $]0, \varepsilon]$, $\varepsilon \in]0, 1/2]$. Тогда $\mathcal{E} = \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})$ и пересечение всех множеств из \mathcal{E} пусто. Поэтому (см. (5.14)) $E_o = \emptyset$. Напомним, что в нашем случае

$$\mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E})) = \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \mid]0, \varepsilon] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \ \forall \varepsilon \in]0, 1/2] \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{U}\}.$$

Семейство \mathcal{L} является полуалгеброй п/м E ; в частности, $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^o[E]$. Рассмотрим тривиальный y/ϕ $\mathfrak{U} \triangleq ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[0]$, $\mathfrak{U} = \{L \in \mathcal{L} \mid 0 \in L\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{U} = \{]0, \varepsilon[: \varepsilon \in]0, 1]\}$. Как следствие, $]0, \varepsilon] \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \ \forall \varepsilon \in]0, 1/2] \ \forall \mathcal{U} \in \mathfrak{U}$. Получили включение $\mathfrak{U} \in \mathbf{F}_o^*(\mathcal{L} | \{\cap\}_{\mathbf{f}}(\mathcal{E}))$. Иными словами, в настоящем примере при $E_o = \emptyset$ имеем свойство

$$\mathbb{F}_{o, \mathbf{t}}^*(\mathcal{L}) \cap (\text{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] \neq \emptyset.$$

Подчеркнем, что в данном примере все множества семейства \mathcal{E} неизмеримы в смысле (E, \mathcal{L}) , т. е. $\Sigma \notin \mathcal{L} \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}$.

Отметим, однако, что, как показано в [17], в случаях, когда

$$(\mathcal{E} \subset \mathcal{L}) \vee (\mathcal{L} \in \pi'_o[E]), \quad (5.15)$$

истинна следующая импликация:

$$(E_o = \emptyset) \implies ((\text{as})[E; \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; ((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[\cdot]; \mathcal{E}] \subset \mathbb{F}_{o, \mathbf{f}}^*(\mathcal{L})). \quad (5.16)$$

Вышеупомянутый пример показывает, что условия (5.15) существенны для истинности импликации (5.16).

Обсудим теперь конкретизацию процедуры факторизации разд. 4.

Напомним, что предполагается выполненным (4.6), а тогда $\varphi^1(\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})) = \mathbf{H}$. Итак, φ есть сюръекция $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ на \mathbf{H} со свойством непрерывности (см. (5.9)). В виде

$$\mathfrak{D}[\mathcal{L}] \triangleq \{\varphi^{-1}(\{h\}) : h \in \mathbf{H}\} = \{\varphi^{-1}(\{\varphi(\mathcal{U})\}) : \mathcal{U} \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})\} \quad (5.17)$$

имеем разбиение $\mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$, все ячейки которого — непустые множества. Отношение эквивалентности, соответствующее (5.17), имеет следующий вид (сохраняем обозначение разд. 4): $\forall \mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \ \forall \mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L}) \ (\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2) \iff (\varphi(\mathcal{U}_1) = \varphi(\mathcal{U}_2))$.

З а м е ч а н и е 5.1. Легко видеть, что при $\mathcal{U}_1 \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$ и $\mathcal{U}_2 \in \mathbb{F}_o^*(\mathcal{L})$

$$(\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2) \iff (\exists h \in \mathbf{H} : (\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_1] \xrightarrow{\tilde{\tau}} h) \& (\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_2] \xrightarrow{\tilde{\tau}} h)).$$

В самом деле, если $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2$, то (см. разд. 4) $\mathbf{h} \triangleq \varphi(\mathcal{U}_1) = \varphi(\mathcal{U}_2) \in \mathbf{H}$ обладает согласно (5.8) тем свойством, что $(\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_1] \xrightarrow{\tilde{\tau}} \mathbf{h}) \& (\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_2] \xrightarrow{\tilde{\tau}} \mathbf{h})$. Итак, имеем импликацию

$$(\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2) \implies (\exists h \in \mathbf{H}: (\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_1] \xrightarrow{\tilde{\tau}} h) \& (\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_2] \xrightarrow{\tilde{\tau}} h)). \quad (5.18)$$

Пусть, напротив, $\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_1] \xrightarrow{\tilde{\tau}} h_*$ и $\mathbf{r}^1[\mathcal{U}_2] \xrightarrow{\tilde{\tau}} h_*$, где $h_* \in \mathbf{H}$. При этом согласно (5.3), (5.7) и (5.8) $h_* = \varphi(\mathcal{U}_1) = \varphi(\mathcal{U}_2)$, а потому $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_2$. Итак, импликация, противоположная (5.18), установлена.

Отметим, что при $\mathcal{L} \in \pi'_0[E]$ имеет место равенство $(\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \text{isol})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] = \mathbb{F}_{0,t}^*(\mathcal{L})$. В более общем случае $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ имеем (см. [18, §6]), что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ и $E_0 \in \mathcal{L}$ справедливо равенство $\Phi_{\mathcal{L}}(E_0) = (\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \text{Int})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})]$ и, кроме того, $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E}) = \Phi_{\mathcal{L}}(E_0)) \iff ((\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] - \text{Fr})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}|\mathcal{E})] = \emptyset)$.

6. Один пример построения множества притяжения

В настоящем разделе дано одно естественное обобщение построений [19, предложение 2]. В этой связи совсем кратко напомним нужные конструкции [20], полагая в дальнейшем, что $E \triangleq [a, b]$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ и при этом $a < b$ (здесь \mathbb{R} — вещественная прямая). Пусть $\mathcal{I} \triangleq \{\Lambda \in \mathcal{P}(E) \mid \exists c \in E \exists d \in E: [c, d] \subset \Lambda \& (\Lambda \subset [c, d])\}$ (полуалгебра промежутков \mathbb{R} , содержащихся в E). Всюду в дальнейшем $\mathcal{L} \in (\text{alg})[E]$ есть def алгебра п/м E , порожденная полуалгеброй \mathcal{I} . Структура $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в этом случае известна [20]: определяем (свободные) у/ф

$$\mathcal{U}_t^{(-)} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists c \in [a, t]: [c, t] \subset L \in \mathbb{F}_{0,f}^*(\mathcal{L}) \quad \forall t \in]a, b], \quad (6.1)$$

$$\mathcal{U}_t^{(+)} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists c \in]t, b]:]t, c] \subset L \in \mathbb{F}_{0,f}^*(\mathcal{L}) \quad \forall t \in [a, b]. \quad (6.2)$$

Тогда $\mathbb{J}_- \triangleq \{\mathcal{U}_t^{(-)}: t \in]a, b]\}$ и $\mathbb{J}_+ \triangleq \{\mathcal{U}_t^{(+)}: t \in [a, b]\}$ реализуют равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \mathbb{J}_- \cup \mathbb{J}_+ \cup \mathbb{F}_{0,t}^*(\mathcal{L})$. При этом, конечно, $\mathbb{F}_{0,f}^*(\mathcal{L}) = \mathbb{J}_- \cup \mathbb{J}_+$.

Фиксируем произвольное семейство $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ (напомним, что в [19] предполагалось, что $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$) и введем множества

$$\begin{aligned} (T_-[\mathcal{E}] \triangleq \{t \in]a, b] \mid [c, t] \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \{\cap\}_f(\mathcal{E}) \quad \forall c \in [a, t]\}) \\ \& (T_+[\mathcal{E}] \triangleq \{t \in [a, b[\mid]t, c] \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \{\cap\}_f(\mathcal{E}) \quad \forall c \in]t, b]\}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

В терминах (6.3) определяем следующие два множества:

$$(\mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \triangleq \{\mathcal{U}_t^{(-)}: t \in T_-[\mathcal{E}]\} \in \mathcal{P}(\mathbb{J}_-)) \& (\mathfrak{U}_+[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \triangleq \{\mathcal{U}_t^{(+)}: t \in T_+[\mathcal{E}]\} \in \mathcal{P}(\mathbb{J}_+)). \quad (6.4)$$

Предложение 6.1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) = \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_+[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \cup \{((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[x]: x \in E_0\}.$$

Доказательство. Из (2.12) и (5.14) следует, что

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) &= \mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \\ &= (\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_-) \cup (\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_+) \cup (\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{F}_{0,t}^*(\mathcal{L})). \end{aligned} \quad (6.5)$$

При этом $\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{F}_{0,t}^*(\mathcal{L}) = \{((E, \mathcal{L}) - \text{ult})[x]: x \in E_0\}$ (учитываем очевидное свойство $\mathcal{L} \in \pi'_0(\mathcal{L})$).

Пусть $\mathcal{V} \in \mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_-$. Тогда для некоторого $t_* \in]a, b]$ имеем $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{t_*}^{(-)}$ и при этом $U \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in \{\cap\}_f(\mathcal{E}) \quad \forall U \in \mathcal{V}$. Тогда, в частности, имеем из (6.1), что $[c, t_*] \cap \Sigma \neq \emptyset \quad \forall \Sigma \in$

$\{\cap\}_f(\mathcal{E}) \forall c \in [a, t_*[$ (действительно, $[\tilde{c}, t_*[\in \mathcal{V}$ при $\tilde{c} \in [a, t_*[$). В силу (6.3) $t_* \in T_-[\mathcal{E}]$, а потому (см. (6.4)) $\mathcal{V} = \mathcal{U}_{t_*}^{(-)} \in \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}]$, чем и завершается проверка вложения

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_- \subset \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}]. \quad (6.6)$$

Пусть, напротив, $\mathcal{W} \in \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}]$. Тогда для некоторого $t^* \in T_-[\mathcal{E}]$ имеем равенство $\mathcal{W} = \mathcal{U}_{t^*}^{(-)}$, а, стало быть,

$$\mathcal{W} = \{L \in \mathcal{L} \mid \exists c \in [a, t^*[: [c, t^*[\subset L\}. \quad (6.7)$$

Заметим, что $\mathcal{W} \in \mathbb{J}_-$. Пусть $W \in \mathcal{W}$. Тогда $W \in \mathcal{L}$ и согласно (6.7) для некоторого $c^* \in [a, t^*[$ имеем вложение $[c^*, t^*[\subset W$, где согласно (6.3) $[c^*, t^*[\cap \Sigma \neq \emptyset \forall \Sigma \in \{\cap\}_f(\mathcal{E})$. В итоге $\Sigma \cap W \neq \emptyset \forall \Sigma \in \{\cap\}_f(\mathcal{E})$. Поскольку выбор W был произвольным, установлено (см. (2.12)), что $\mathcal{W} \in \mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_-$. Итак, вложение, противоположное (6.6), а стало быть, и равенство

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_- = \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \quad (6.8)$$

установлены. Аналогичным образом проверяется равенство

$$\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) \cap \mathbb{J}_+ = \mathfrak{U}_+[\mathcal{L}|\mathcal{E}]. \quad (6.9)$$

С учетом (6.5), (6.8) и (6.9) получаем требуемое равенство $\mathbf{F}_0^*(\mathcal{L}|\{\cap\}_f(\mathcal{E})) = \mathfrak{U}_-[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \cup \mathfrak{U}_+[\mathcal{L}|\mathcal{E}] \cup \{(E, \mathcal{L}) - \text{ult}\}[x]: x \in E_0\}$.

Предложение доказано.

Как и прежде, рассмотрим ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$, $\mathbf{H} \neq \emptyset$, в качестве пространства результатов или оценок. Сначала предположим только, как и в разд. 4, что ТП $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ хаусдорфово (T_2 -пространство). Следуя построениям разд. 5, зафиксируем отображение \mathbf{r} (5.7). Итак, \mathbf{r} есть отображение невырожденного отрезка вещественной прямой в хаусдорфово ТП. Тогда определено отображение φ разд. 5, действующее из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в \mathbf{H} по правилу (5.8). Следовательно, значения $\varphi(\mathcal{U})$ отображения φ определены при $\mathcal{U} \in \mathbb{J}_-$, $\mathcal{U} \in \mathbb{J}_+$ и $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_{0,t}^*(\mathcal{L})$. Более того, этими тремя вариантами исчерпывается описание φ . Напомним соответствующие конкретизации $\varphi(\mathcal{U})$, следуя [19, замечание 2].

Если $t \in]a, b[$, то $\varphi(\mathcal{U}_t^{(-)}) \in \mathbf{H}$ есть предел значений \mathbf{r} слева в точке t , а, точнее,

$$\begin{aligned} & (\forall S \in N_{\tilde{\tau}}(\varphi(\mathcal{U}_t^{(-)})) \exists \delta \in]0, \infty[: \mathbf{r}(\xi) \in S \forall \xi \in]t - \delta, t[\cap E) \\ & \& (\forall \mathbf{h} \in \mathbf{H} (\forall S \in N_{\tilde{\tau}}(\mathbf{h}) \exists \delta \in]0, \infty[: \mathbf{r}(\xi) \in S \forall \xi \in]t - \delta, t[\cap E) \implies (\mathbf{h} = \varphi(\mathcal{U}_t^{(-)}))). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Аналогичным образом при $t \in [a, b[$ имеем, что $\varphi(\mathcal{U}_t^{(+)}) \in \mathbf{H}$ есть предел значений \mathbf{r} справа в точке t , т. е.

$$\begin{aligned} & (\forall S \in N_{\tilde{\tau}}(\varphi(\mathcal{U}_t^{(+)})) \exists \delta \in]0, \infty[: \mathbf{r}(\xi) \in S \forall \xi \in]t, t + \delta[\cap E) \\ & \& (\forall \mathbf{h} \in \mathbf{H} (\forall S \in N_{\tilde{\tau}}(\mathbf{h}) \exists \delta \in]0, \infty[: \mathbf{r}(\xi) \in S \forall \xi \in]t, t + \delta[\cap E) \implies (\mathbf{h} = \varphi(\mathcal{U}_t^{(+)}))). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Итак, \mathbf{r} обладает односторонними пределами в точках из $]a, b[$, пределом справа в точке a и пределом слева в точке b . Эти пределы как раз и указаны в (6.10), (6.11).

Потребуем теперь от $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ несколько большего: пусть до конца раздела $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ есть регулярное ТП, т. е. T_1 - и T_3 -пространство одновременно. Тогда имеем (5.9) и, как следствие, (5.11). Последнее означает (см. предложение 6.1), что справедлива следующая теорема.

Теорема 6.1. *Если $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ – регулярное ТП, то основное МП имеет вид*

$$(\text{as})[E; \mathbf{H}; \tilde{\tau}; \mathbf{r}; \mathcal{E}] = \{\varphi(\mathcal{U}_t^{(-)}): t \in T_-[\mathcal{E}]\} \cup \{\varphi(\mathcal{U}_t^{(+)}): t \in T_+[\mathcal{E}]\} \cup \mathbf{r}^1(E_0). \quad (6.12)$$

Доказательство получается комбинацией (6.4) и предложения 6.1 с учетом (5.1), (5.11) и простейших свойств операции взятия образа (образ объединения множеств равен объединению образов).

Смысл (6.12) состоит в указании конкретного способа построения основного МП из односторонних $\tilde{\tau}$ -пределов значений \mathbf{r} и самих значений \mathbf{r} : требуется построить множество Φ_- всех пределов слева отображения \mathbf{r} в точках из $T_-[\mathcal{E}]$, множество Φ_+ всех пределов справа того же отображения \mathbf{r} в точках из $T_+[\mathcal{E}]$ и образ множества E_0 при действии \mathbf{r} . Тогда $\Phi_- \cup \Phi_+ \cup \mathbf{r}^1(E_0)$ и будет искомым МП (6.12). Таким образом, теорема 6.1 доставляет упомянутое МП в терминах исходных данных, а именно в терминах отображения \mathbf{r} и семейства \mathcal{E} .

З а м е ч а н и е 6.1. Если семейство \mathcal{E} направлено, т. е. $\forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E} \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} : \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, то $T_-[\mathcal{E}] = \{t \in]a, b[\mid [c, t[\cap \Sigma \neq \emptyset \forall \Sigma \in \mathcal{E} \forall c \in [a, t[\text{ и } T_+[\mathcal{E}] = \{t \in [a, b[\mid]t, c] \cap \Sigma \neq \emptyset \forall \Sigma \in \mathcal{E} \forall c \in]t, b[\}$. Это свойство вытекает из [21, (3.3.16)]. Построение множеств $T_-[\mathcal{E}]$ и $T_+[\mathcal{E}]$ упрощается, что приводит к более простому представлению основного МП в (6.12).

З а м е ч а н и е 6.2. С учетом положений [19, с. 150] заметим, что условие (5.7) охватывает (см. [9; 16]) обширный класс отображений. В частности, в качестве \mathbf{r} может использоваться ярусное покомпонентно отображение из E в тихоновскую степень ТП, метризуемого полной метрикой. Так, например, в качестве $(\mathbf{H}, \tilde{\tau})$ можно рассматривать тихоновскую степень вещественной прямой \mathbb{R} в обычной $|\cdot|$ -топологии и использовать в качестве \mathbf{r} отображение, имеющее своими компонентами функции из $B(E, \mathcal{L})$ (см. [13; 16]), где $B(E, \mathcal{L})$ есть вариант пространства $B(S, \Sigma)$ в [22, гл. IV].

З а м е ч а н и е 6.3. Представления, подобные (6.10) и (6.11), использовались в [23; 24] в сочетании с процедурами, связанными с применением конечно-аддитивных мер при построении расширений [13; 21] задач управления линейными системами с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях. Исследовался режим “узких” импульсов, при котором требуется израсходовать запас топлива за промежуток времени, имеющий исчезающе малую длительность. Допускались также ограничения моментного характера (имеются в виду естественные аналогии с [24], где рассматриваемая задача имела вероятностную интерпретацию), соблюдаемые приближенно. В основе построений [23; 24] находятся конструкции в духе (6.1) и (6.2), восходящие к [20]. Подчеркнем тот факт, что в [23; 24] получены весьма конкретные представления МП. Следовательно (см. также теорему 6.1 и замечание 6.1), наряду с абстрактными представлениями, расширения в классе у/ф или с применением у/ф могут в ряде случаев приводить и к достаточно обзримым результатам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. Гамкрелидзе Р. В. Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977. 254 с.
3. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
4. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикл. математика и механика. 1970. Т. 34, № 6. С. 1005–1022.
6. Кряжимский А. В. К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 239, № 4. С. 779–782.
7. Булинский А. В., Ширяев А. Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
8. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
9. Ченцов А. Г. Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.
10. Ченцов А. Г. Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 1. С. 87–101. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
11. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.

12. **Ченцов А. Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
13. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
14. **Келли Дж. Л.** Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.
15. **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
16. **Ченцов А. Г.** Ярусные отображения и преобразования на основе ультрафильтров // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 298–314.
17. **Ченцов А. Г.** Абстрактная задача о достижимости: “чисто асимптотическая” версия // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2. С. 289–305.
18. **Ченцов А. Г.** К вопросу о соблюдении ограничений в классе обобщенных элементов // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 3. С. 90–109. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
19. **Ченцов А. Г.** К вопросу о структуре множеств притяжения в топологическом пространстве // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 1(39). С. 147–150.
20. **Ченцов А. Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
21. **Chentsov A. G.** Asymptotic attainability. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. 322 p.
22. **Данфорд Н., Шварц Дж. Т.** Линейные операторы. Общая теория. Изд-во иностр. лит., 1962. 895 с.
23. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** К вопросу о построении множества достижимости при ограничениях асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 3. С. 309–323.
24. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** Об одной задаче, связанной с асимптотической достижимостью в среднем // Докл. РАН. 2014. Т. 459, № 6. С. 672–676.

Поступила 12.10.15

Исправленный вариант 12.01.16

Ченцов Александр Георгиевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

чл.-корр. РАН

главный науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина

e-mail: chentsov@imm.uran.ru

УДК 512.54

ON $S\Phi$ -EMBEDDED SUBGROUPS OF FINITE GROUPS¹

L. Zhang, W. Guo, L. Huo

A subgroup H of G is called $S\Phi$ -embedded in G if there exists a normal subgroup T of G such that HT is S -quasinormal in G and $(H \cap T)H_G/H_G \leq \Phi(H/H_G)$, where H_G is the maximal normal subgroup of G contained in H and $\Phi(H/H_G)$ is the Frattini subgroup of H/H_G . In this paper, we investigate the influence of $S\Phi$ -embedded subgroups on the structure of finite groups. In particular, some new characterizations of p -supersolvability of finite groups are obtained by assuming some subgroups are $S\Phi$ -embedded.

Keywords: sylow p -subgroup; $S\Phi$ -embedded subgroup; p -supersolvable group; p -nilpotent group.

Л. Чжан, В. Го, Л. Хо. О $S\Phi$ -вложенных подгруппах конечных групп.

Подгруппа H группы G называется $S\Phi$ -вложенной в G , если в G существует нормальная подгруппа T такая, что HT является S -квазинормальной в G и $(H \cap T)H_G/H_G \leq \Phi(H/H_G)$, где H_G — максимальная нормальная подгруппа группы G , содержащаяся в H , и $\Phi(H/H_G)$ — подгруппа Фраттини группы H/H_G . Изучается влияние $S\Phi$ -вложенных подгрупп на структуру конечных групп. В частности, получены новые характеристики p -сверхразрешимости конечных групп в предположении, что некоторые подгруппы являются $S\Phi$ -вложенными.

Ключевые слова: силовская p -подгруппа, $S\Phi$ -вложенная подгруппа, p -сверхразрешимая группа, p -нильпотентная группа.

1. Introduction

Throughout this paper, all groups are finite and G denotes a finite group. All unexplained notation and terminology are standard, as in [8; 9] and [12].

It is well-known that embedded subgroups play an important role in the study of finite groups. Recall that a subgroup H of G is said to be quasinormal [5–7] (resp. S -quasinormal [19]) in G if H permutes with all subgroups (resp. Sylow subgroups) of G . A subgroup H of G is said to be n -embedded [10] in G if for some normal subgroup T of G and some S -quasinormal subgroup S of G contained in H , HT is normal in G and $H \cap T \leq S$. Let \mathfrak{F} be a non-empty formation (see [8] or [9]). A subgroup H of G is said to be \mathfrak{F}_s -quasinormal [11] in G if for some normal subgroup T of G , HT is S -quasinormal in G and $(H \cap T)H_G/H_G \leq Z_{\mathfrak{F}}(G/H_G)$. A p -subgroup H of G is called sn -embedded [16] in G if for some normal subgroup T of G and some S -quasinormally embedded subgroup S of G contained in H , HT is S -quasinormal in G and $H \cap T \leq S$. Note that a subgroup H of G is said to be τ -quasinormal [15] in G if H permutes with all Sylow q -subgroups Q of G such that $(q, |H|) = 1$ and $(|H|, |Q^G|) \neq 1$. A subgroup H of G is said to be *weakly τ -embedded* [4] in G if for some normal subgroup T of G and some τ -quasinormal subgroup S of G contained in H , HT is S -quasinormal in G and $H \cap T \leq S$. By using the above embedding subgroups, a series of interesting results were obtained (see [4; 10; 11; 16]).

Now we introduce the following new embedded subgroup.

D e f i n i t i o n. A subgroup H of G is said to be $S\Phi$ -embedded in G if there exists a normal subgroup T of G such that HT is S -quasinormal in G and $(H \cap T)H_G/H_G \leq \Phi(H/H_G)$, where H_G is the maximal normal subgroup of G contained in H and $\Phi(H/H_G)$ is the Frattini subgroup of H/H_G .

¹Research was supported by the NNSF of China (11371335) and Wu Wen-Tsuu Key Laboratory of Mathematics of Chinese Academy of Science.

In this paper, we will use the $S\Phi$ -embedded subgroup to study the structure of finite groups. Some new characterizations of p -supersolvability of finite groups are obtained.

2. Preliminaries

Lemma 2.1. *Let N be a normal subgroup of G and $H \leq G$.*

(1) *Assume that P is a non-trivial p -subgroup of G for some prime divisor p of $|G|$. Then $\Phi(P)N/N \leq \Phi(PN/N)$.*

(2) *Let H be a subgroup of G satisfying $(|H|, |N|) = 1$. Then $\Phi(H)N/N = \Phi(HN/N)$.*

(3) *If H is subnormal in G and H is a π -subgroup of G , then $H \leq O_\pi(G)$.*

P r o o f. (1) and (2) are clear. (3) is well known (see [9, 1.10.17]).

Lemma 2.2. *Let G be a group and $H \leq K \leq G$.*

(1) *H is $S\Phi$ -embedded in G if and only if G has a normal subgroup T such that HT is S -quasinormal in G , $H_G \leq T$ and $(H \cap T)/H_G \leq \Phi(H/H_G)$.*

(2) *Suppose that H is $S\Phi$ -embedded in G , then H is $S\Phi$ -embedded in K .*

(3) *Let H be a normal subgroup of G . Then K/H is $S\Phi$ -embedded in G/H if and only if K is $S\Phi$ -embedded in G .*

(4) *Suppose that H is normal in G , then for every $S\Phi$ -embedded subgroup E of G satisfying $(|H|, |E|) = 1$, EH/H is $S\Phi$ -embedded in G/H .*

P r o o f. (1) Assume that H is $S\Phi$ -embedded in G and let T_0 be a normal subgroup of G such that HT_0 is S -quasinormal in G and $(H \cap T_0)H_G/H_G \leq \Phi(H/H_G)$. Let $T = T_0H_G$. Then $HT = HT_0$ is S -quasinormal in G and $(H \cap T)/H_G = (H \cap T_0)H_G/H_G \leq \Phi(H/H_G)$. The converse is clear.

(2) Suppose that T is a normal subgroup of G such that HT is S -quasinormal in G , $H_G \leq T$ and $(H \cap T)/H_G \leq \Phi(H/H_G)$. Let $T_1 = T \cap K$. Then $HT_1 = HT \cap K$ is S -quasinormal in K (see [1, 1.2.14(4)]). Since $H_G \leq H_K$, $(H \cap T_1)H_K/H_K = (H \cap T)H_K/H_K \leq \Phi(H/H_K)$ by [8, A, (9.2)(e)].

(3) Firstly, assume that K/H is $S\Phi$ -embedded in G/H . By (1), G/H has a normal subgroup T/H such that $(K/H)(T/H)$ is S -quasinormal in G/H , $(K/H)_{G/H} = K_G/H \leq T/H$ and $(K/H \cap T/H)/(K/H)_{G/H} \leq \Phi((K/H)/(K/H)_{G/H})$. Then KT is S -quasinormal in G by [1, 1.2.14(1)]. Since $\Phi((K/H)/(K/H)_{G/H}) \cong \Phi(K/K_G)$, $(K \cap T)/K_G \leq \Phi(K/K_G)$. Hence K is $S\Phi$ -embedded in G . Analogously, one can show that if K is $S\Phi$ -embedded in G , then K/H is $S\Phi$ -embedded in G/H .

(4) Assume that H is normal in G and E is $S\Phi$ -embedded in G satisfying $(|H|, |E|) = 1$. By (1), G has a normal subgroup T such that ET is S -quasinormal in G , $E_G \leq T$ and $(E \cap T)/E_G \leq \Phi(E/E_G)$. By (3), we only need to show that HE is $S\Phi$ -embedded in G . Clearly HET is S -quasinormal in G by [1, 1.2.2]. Since $(|H|, |E|) = 1$, $(|HE \cap T : H \cap T|, |HE \cap T : E \cap T|) = 1$. Hence $HE \cap T = (H \cap T)(E \cap T)$ by [8, A, (1.6)(b)], and $(HE \cap T)(HE)_G/(HE)_G \leq \Phi(HE/(HE)_G)$ by [8, A, (9.2)] and Lemma 2.1(2). Thus HE is $S\Phi$ -embedded in G .

Lemma 2.3. *Assume that $G = N_1 \times N_2 \cdots \times N_t$, where $t \geq 1$ is an integer and N_1, N_2, \dots, N_t are non-abelian simple groups. Let P be a Sylow p -subgroup of G , where p is a prime divisor of $|G|$ with $p \mid |N_i|$ for $i = 1, 2, \dots, t$. Then any non-identity subgroup of $P \cap N_i$ can not be $S\Phi$ -embedded in G , for $i = 1, 2, \dots, t$.*

P r o o f. Assume that there exists an integer $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ such that $P \cap N_i$ has a non-trivial subgroup H which is $S\Phi$ -embedded in G . Then H is $S\Phi$ -embedded in N_i by Lemma 2.2(2). Obviously $H_{N_i} = 1$. Let T be a normal subgroup of N_i such that HT is S -quasinormal in N_i and $H \cap T \leq \Phi(H)$. If $T = 1$, then $H = HT$ is S -quasinormal in N_i . Hence $H \leq O_p(N_i) = 1$

by [1, 1.2.14(3)] and Lemma 2.1(3). This contradiction shows that $T = N_i$. It follows that $H = H \cap N_i \leq \Phi(H)$, a contradiction.

Lemma 2.4 [2, Theorem 7]. *Let G be a group whose Sylow p -subgroups are of order p^2 and $O_{p'}(G) = 1$. If G has the unique minimal normal subgroup N and N is isomorphic to a cyclic group of order p , then G is p -supersolvable.*

For a formation \mathcal{F} of groups, $G^{\mathcal{F}}$ denotes the \mathcal{F} -residual of G , that is, $G^{\mathcal{F}} = \bigcap \{N \mid G/N \in \mathcal{F}\}$.

Lemma 2.5 [3, Theorem 1]. *Let \mathcal{F} be a saturated formation and G be a group such that $G \notin \mathcal{F}$ but all its proper subgroups belong to \mathcal{F} . Then $G^{\mathcal{F}}\Phi(G)/\Phi(G)$ is the unique minimal normal subgroup of $G/\Phi(G)$.*

The following facts about the generalized Fitting subgroup are useful in our proofs (see [13, Chapter X] and [10, Lemma 2.14, 2.15 and 2.16]).

Lemma 2.6. *Let G be a group. Then:*

- (1) $F^*(F^*(G)) = F^*(G) \geq F(G)$; if $F^*(G)$ is solvable, then $F^*(G) = F(G)$.
- (2) $C_G(F^*(G)) \leq F(G)$.
- (3) If N is a normal solvable subgroup of G , then $F^*(G/\Phi(N)) = F^*(G)/\Phi(N)$.
- (4) If N is normal in G , then $F^*(N) = F^*(G) \cap N$.
- (5) If P is a normal p -subgroup of G contained in $Z(G)$, then $F^*(G/P) = F^*(G)/P$.

3. Main results

Theorem 3.1. *Let P be a Sylow p -subgroup of G for a fixed prime divisor p of $|G|$. Suppose that all maximal subgroups of P are $S\Phi$ -embedded in G . Then G is p -supersolvable or $|P| = p$.*

P r o o f. Suppose that the assertion is false and let G be a counterexample of minimal order. Then $|P| \geq p^2$. We proceed the proof via the following steps:

- (1) G is not a non-abelian simple group (It follows directly from Lemma 2.3).
- (2) $O_{p'}(G) = 1$.

Suppose that $O_{p'}(G) > 1$. Then $G/O_{p'}(G)$ satisfies the hypothesis for G by Lemma 2.2(4). The choice of G implies that $G/O_{p'}(G)$ is p -supersolvable. It follows that G is p -supersolvable, a contradiction.

- (3) G is not p -solvable. Consequently $O_p(G) < P$.

Assume that G is p -solvable. Then there exists a minimal normal subgroup N of G contained in $O_p(G)$ by (2). We claim that G/N is p -supersolvable. It is obvious if $|P/N| \leq p$. We may, therefore, assume that $|P/N| \geq p^2$. Then G/N satisfies the hypothesis by Lemma 2.2(3). Hence G/N is p -supersolvable. This implies that G has a unique minimal normal subgroup, N say, and $\Phi(G) = 1$. Then $G = N \rtimes M$ for some maximal subgroup M of G and $O_p(G) \cap M = 1$. Thus $O_p(G) = N(O_p(G) \cap M) = N$ and $P = O_p(G) \rtimes M_p$, where $M_p = P \cap M$. Let P_1 be a maximal subgroup of P containing M_p . Clearly $(P_1)_G = 1$. By the hypothesis, G has a normal subgroup T such that P_1T is S -quasinormal in G and $P_1 \cap T \leq \Phi(P_1)$. If $T = 1$, then $P_1 = P_1T$ is S -quasinormal in G . It follows from [1, 1.2.16] that P_1 is normal in G , a contradiction. Hence $O_p(G) \leq T$, so $P_1 = M_p(P_1 \cap O_p(G)) = M_p\Phi(P_1) = M_p$. Consequently $|O_p(G)| = p$. Therefore G is p -supersolvable, a contradiction.

- (4) If $O_p(G) > 1$, then $|P/O_p(G)| = p$ and $O_p(G)$ is a minimal normal subgroup of G .

Assume that $|P/O_p(G)| \geq p^2$. Then $G/O_p(G)$ is p -supersolvable by Lemma 2.2(3) and the choice of G . It follows that G is p -solvable, a contradiction. Hence $|P/O_p(G)| = p$. Now assume that N is a non-trivial normal subgroup of G such that $N < O_p(G)$. Then $|P/N| \geq p^2$, and G/N is p -supersolvable similar as above, which also implies G is p -solvable, which contradicts (3).

(5) *If N is a minimal normal subgroup of G , then G/N is p -supersolvable or $|G/N|_p = p$.*

By (2), $p \mid |N|$. If N is abelian, then $N = O_p(G)$ and $|G/N|_p = p$ by (4). Now assume that N is non-abelian. Without loss of generality, we may assume $|PN/N| \geq p^2$.

Let M/N be an arbitrary maximal subgroup of PN/N . Then $M = NP_1$, where $P_1 = P \cap M$ is a maximal subgroup of P . We now show that M/N is $S\Phi$ -embedded in G/N . By Lemma 2.2(3) we only need to show that M is $S\Phi$ -embedded in G . By the hypothesis, G has a normal subgroup T such that P_1T is S -quasinormal in G , $(P_1)_G \leq T$ and $(P_1 \cap T)/(P_1)_G \leq \Phi(P_1/(P_1)_G)$. Obviously, MT is S -quasinormal in G by [1, 1.2.2]. If $N \leq T$, then $(M \cap T)M_G/M_G = (P_1 \cap T)M_G/M_G \leq \Phi(M/M_G)$ by Lemma 2.1(1) and [8, A, (9.2)]. Thus M is $S\Phi$ -embedded in G . Hence we may assume that $N \cap T = 1$. If $P_1T \cap N = 1$, then $P_1T \cap N = (P_1 \cap N)(T \cap N) = 1$. Thus $P_1N \cap TN = (P_1 \cap T)N$ by [8, A, (1.2)]. Similar as above, M is $S\Phi$ -embedded in G by taking the normal subgroup TN . Now assume that $P_1T \cap N \neq 1$. Since $|P_1T \cap N| = |P_1T \cap N : P_1T \cap N \cap T| = |P_1 \cap NT : P_1 \cap T|$ is power of p , $P_1T \cap N \leq O_p(G)$ by [1, 1.2.14(3)] and Lemma 2.1(3). It follows that $P_1 \cap N$ is subnormal in G . Hence $P_1 \cap N = N$ since $P_1 \cap N = P \cap N$ is a Sylow p -subgroup of N . Consequently $N \leq P_1$, a contradiction. The above shows that G/N satisfies the hypothesis. Therefore (5) holds by the choice of G .

(6) *If N is a minimal normal subgroup of G , then $1 < P \cap N < P$.*

In view of (2), we see that $1 < P \cap N$. If $P \leq N$, then N is p -supersolvable since N satisfies the hypothesis by Lemma 2.2(2). But since G/N is a p' -group, G is p -solvable, which contradicts (3). Hence $P \cap N < P$.

(7) *G has a unique minimal normal subgroup, N say.*

By (1), G has a minimal normal subgroup. Now suppose that N_1 and N_2 are two different minimal normal subgroups of G . Then G/N_i is p -supersolvable or $|G/N_i|_p = p$ for $i = 1, 2$ by (5).

First assume that both G/N_1 and G/N_2 are p -supersolvable, then $G \cong G/(N_1 \cap N_2)$ is p -supersolvable, a contradiction. Secondly assume that G/N_1 is p -supersolvable and $|G/N_2|_p = p$. By (6), $p \mid |N_2|$. The G -isomorphism $N_2 \cong N_2N_1/N_1$ implies that $|N_2| = p$, so $|P| = p^2$. Therefore $N_1 \cap P$ is a maximal subgroup of P by (6) again, and N_1 is a non-abelian simple group since $N_1 \cap P$ is a Sylow p -subgroup of N_1 . Hence $N_1 \cap P$ is $S\Phi$ -embedded in N_1 by Lemma 2.2(2), which contradicts Lemma 2.3. Lastly suppose that $|G/N_1|_p = |G/N_2|_p = p$. Then $|P \cap N_1| = |P \cap N_2| = p$ and $|P| = p^2$. Consequently N_1 is a non-abelian simple group and $P \cap N_i$ is $S\Phi$ -embedded in N_i for $i = 1, 2$ by Lemma 2.2(2), which contradicts Lemma 2.3 again. Hence we have (7).

(8) $O_p(G) = 1$.

Assume that $O_p(G) \neq 1$. Then by (4) and (7), $O_p(G)$ is a maximal subgroup of P and $O_p(G) = N$. If $O_p(G)$ is the unique maximal subgroup of P , then $O_p(G) = \Phi(P)$ and P is cyclic. Consequently $|O_p(G)| = p$ and $|P| = p^2$. Hence by Lemma 2.4, G is p -supersolvable, a contradiction. Thus P has a non-trivial maximal subgroup P_1 which is different from $O_p(G)$. Clearly $P = P_1O_p(G)$ and $(P_1)_G = 1$ by (7). Let T be a normal subgroup of G such that P_1T is S -quasinormal in G and $P_1 \cap T \leq \Phi(P_1)$. If $T = 1$, then P_1 is S -quasinormal in G , which implies $P_1 \trianglelefteq G$ by [1, 1.2.16], a contradiction. Also $T = G$ induces that $P_1 = P_1 \cap T \leq \Phi(P_1)$, a contradiction. Therefore $O_p(G) \leq T < G$, and so $P \leq P_1T$. If $P_1T < G$, then by [1, 1.2.14(3)], G has a proper normal subgroup L such that $P_1T \leq L$. Then L is p -supersolvable by the choice of G and Lemma 2.2(2). But then G is p -solvable since G/L is a p' -group, which contradicts (3). Thus $G = P_1T$. Clearly $O_p(G) \leq P \cap T$. If $P \cap T = P$, then $G = T$, a contradiction. Hence $O_p(G) = P \cap T$ is the Sylow p -subgroup of T . By the Schur-Zassenhaus Theorem, $T = O_p(G) \rtimes T_{p'}$, where $T_{p'}$ is a Hall p' -subgroup of T . Clearly $O_p(G) \not\leq \Phi(G)$, so $\Phi(G) = 1$. Let M be a maximal subgroup of G such that $G = O_p(G) \rtimes M$. Then $P = O_p(G) \rtimes M_p$, where $M_p = P \cap M > 1$. Let P_2 be a maximal subgroup of P containing M_p . Then $(P_2)_G = 1$ and G has a normal subgroup K such that P_2K is S -quasinormal in G and $P_2 \cap K \leq \Phi(P_2)$. Similar as the above, we can obtain that $O_p(G) \leq K < G$. Thus $P_2 = (P_2 \cap O_p(G))M_p = \Phi(P_2)M_p = M_p$. This implies that $|O_p(G)| = p$, which contradicts Lemma 2.4. Hence we have (8).

(9) *Final contradiction.*

Let P_1 be a maximal subgroup of P containing $N_p = P \cap N$. Then $(P_1)_G = 1$ by (8). Hence by the hypothesis, G has a normal subgroup T such that P_1T is S -quasinormal in G and $P_1 \cap T \leq \Phi(P_1)$. If $T = 1$, then P_1 is normal in G by [1, 1.2.16], a contradiction. Hence $T \neq 1$ and so $N \leq T$. Consequently $P \cap N \leq P_1 \cap T \leq \Phi(P_1) \leq \Phi(P)$. This implies that N is p -nilpotent (see [12, IV, 4.7]), which contradicts (2) and (8). The final contradiction completes the proof.

Corollary 3.1.1. *Let p be a prime divisor of $|G|$ and H be a p -nilpotent normal subgroup of G such that G/H is p -supersolvable. If H has a Sylow p -subgroup P such that every maximal subgroup of P is $S\Phi$ -embedded in G , then G is p -supersolvable.*

P r o o f. Suppose that the corollary is false and let (G, H) be a counterexample such that $|G| + |H|$ is minimal. Then clearly $p^2 \mid |H|$.

Firstly we claim that $H = P$. Since $O_{p'}(H)$ is normal in G , $(G/O_{p'}(H), H/O_{p'}(H))$ satisfies the hypothesis by Lemma 2.2(4). The choice of (G, H) implies that $G/O_{p'}(H)$ is p -supersolvable if $O_{p'}(H) > 1$. It follows that G is p -supersolvable, a contradiction. Thus $H = P$.

Now we prove that H is a minimal normal subgroup of G . Let N be a minimal normal subgroup of G contained in H . We first show that G/N is p -supersolvable. If $|H/N| \leq p$, this is clear. Hence we may assume that $|H : N| \geq p^2$. Then G/N is also p -supersolvable by considering $(G/N, H/N)$ and using Lemma 2.2(3). This implies that G has a unique minimal normal subgroup N contained in H and $N \not\leq \Phi(G)$. Let M be a maximal subgroup of G such that $G = N \rtimes M$. Since $H \cap M$ is normal in G (see [8, A, (8.4)]), $H \cap M = 1$. Thus $H = N(H \cap M) = N$.

Let H_1 be a non-trivial maximal subgroup of H such that $H_1 \trianglelefteq G_p$ for some Sylow p -subgroup G_p of G . By the hypothesis, G has a normal subgroup T such that H_1T is S -quasinormal in G and $H_1 \cap T \leq \Phi(H_1)$. If $H \cap T = 1$, then $H_1 = H_1(H \cap T) = H \cap H_1T$ is S -quasinormal in G (see [1, 1.2.19]). Hence H_1 is normal in G by [1, 1.2.16], a contradiction. Thus $H \cap T \neq 1$, and so $H \leq T$. This implies that $H_1 = H_1 \cap T \leq \Phi(H_1)$ and therefore $H_1 = 1$. Then $|H| = p$ and so G is p -supersolvable. The contradiction completes the proof.

Corollary 3.1.2. *Let P be a Sylow p -subgroup of G , where p is a prime divisor of $|G|$ with $(|G|, p - 1) = 1$. If every maximal subgroup of P is $S\Phi$ -embedded in G , then G is p -nilpotent.*

P r o o f. It follows directly from Theorem 3.1 and [18, (10.1.8)].

Corollary 3.1.3. *Let E be a normal subgroup of G such that G/E is p -nilpotent, where p is a prime divisor of $|G|$ with $(|G|, p - 1) = 1$. If E has a Sylow p -subgroup P such that every maximal subgroup of P is $S\Phi$ -embedded in G , then G is p -nilpotent.*

P r o o f. First assume that $E = P$ and let K/P be the normal Hall p' -subgroup of G/P . Then $K = P \rtimes K_{p'}$ by the Schur-Zassenhaus Theorem, where $K_{p'}$ is a Hall p' -subgroup of K . Clearly $K_{p'}$ is also a Hall p' -subgroup of G . By Lemma 2.2(2) and Corollary 3.1.2, K is p -nilpotent, and so $K = P \times K_{p'}$. It follows that $K_{p'}$ is normal in G , and consequently G is p -nilpotent. Now assume that $E > P$. Then E is p -nilpotent by Lemma 2.2(2) and Corollary 3.1.2. Let $E_{p'}$ be the normal Hall p' -subgroup of E . By Lemma 2.2(4) and induction, $G/E_{p'}$ is p -nilpotent. This also implies that G is p -nilpotent.

Corollary 3.1.4. *Suppose that all maximal subgroups of every non-cyclic Sylow subgroup of G are $S\Phi$ -embedded in G . Then G is a Sylow tower group of supersolvable type.*

P r o o f. Let p be the smallest prime divisor of $|G|$ and P be a Sylow p -subgroup of G . If P is cyclic, then G is p -nilpotent by [18, 10.1.9]. Otherwise, G is still p -nilpotent by Corollary 3.1.2. Let U be the normal Hall p' -subgroup of G . By Lemma 2.2(2), U satisfies the hypothesis. Therefore, by induction, G is a Sylow tower group of supersolvable type.

Theorem 3.2. *Assume that all maximal subgroups of every non-cyclic Sylow subgroup of $F^*(G)$ are $S\Phi$ -embedded in G . Then G is supersolvable.*

P r o o f. Suppose that the theorem is false and let G be a counterexample of minimal order. We proceed via the following steps:

(1) *Every proper normal subgroup of G containing $F^*(G)$ is supersolvable.*

Let M be a proper normal subgroup of G containing $F^*(G)$. Then $F^*(M) = F^*(G)$ by Lemma 2.6(4). Hence M satisfies the hypothesis by Lemma 2.2(2). The choice of G implies that M is supersolvable.

(2) *G is not solvable.*

Assume that G is solvable, then $F^*(G) = F(G)$ by Lemma 2.6(1).

If $\Phi(G) = 1$, then $F(G) = N_1 \times N_2 \cdots \times N_t$ by [8, A, (10.6)], where $t \geq 1$ is an integer and N_1, N_2, \dots, N_t are minimal normal subgroups of G . Without loss of generality, assume that $P = N_1 \times N_2 \cdots \times N_s$ ($1 \leq s \leq t$) is the Sylow p -subgroup of $F(G)$ for some prime $p \mid |F(G)|$. We claim that $|N_i| = p$ for $i = 1, 2, \dots, s$. Otherwise, $|N_i| > p$ for some $i \in \{1, 2, \dots, s\}$. Without loss of generality, assume that $|N_1| > p$. Let N_1^* be a maximal subgroup of N_1 such that $N_1^* \trianglelefteq G_p$ for some Sylow p -subgroup G_p of G . Let $P_1 = N_1^* N_2 \cdots N_s$. Then P_1 is a maximal subgroup of P and P_1 is normal in G_p with $(P_1)_G = N_2 \cdots N_s$. Put $D = (P_1)_G$. Since P_1 is $S\Phi$ -embedded in G , G has a normal subgroup T such that $P_1 T$ is S -quasinormal in G , $D \leq T$ and $(P_1 \cap T)/D \leq \Phi(P_1/D)$. Since $\Phi(N_1^*) \leq \Phi(N_1) \leq \Phi(G) = 1$ and the G -isomorphism $P_1/D \cong N_1^*$, we have that $P_1 \cap T = D$. If $N_1 \leq T$, then $P \leq T$ and $P_1 = P_1 \cap T = D$, which implies $N_1^* = 1$, a contradiction. Hence $N_1 \cap T = 1$. Consequently $P \cap T = D$ and $P_1 = P_1(P \cap T) = P \cap P_1 T$ is S -quasinormal in G (see [1, 1.2.19]), which implies that P_1 is normal in G by [1, 1.2.16], a contradiction. Therefore $F(G) = N_1 \times N_2 \cdots \times N_t$, where N_i ($i = 1, 2, \dots, t$) are all of prime order. But then $G/C_G(N_i)$ ($i = 1, 2, \dots, t$) is abelian, so $G/(\bigcap_{i=1}^t C_G(N_i)) = G/C_G(F(G))$ is abelian. Also $C_G(F(G)) = F(G)$ by Lemma 2.6(2). This implies that G is supersolvable since every chief factor of G below $F(G)$ is cyclic.

Now assume $\Phi(G) > 1$. Let $P = O_p(\Phi(G)) > 1$. Since $F^*(G/P) = F(G/P) = F(G)/P$ (see [8, A, (9.3)(c)]), G/P satisfies the assumptions by Lemma 2.2 (3), (4). The choice of G implies that G/P is supersolvable. Thus G is supersolvable, a contradiction.

(3) *$F^*(G) = F(G)$ and $G = F(G)O^p(G)$.*

By Lemma 2.2(2) and Corollary 3.1.4, $F^*(G)$ is a Sylow tower group of supersolvable type. Particularly, $F^*(G)$ is solvable. Hence $F^*(G) = F(G)$ by Lemma 2.6(1). Suppose that $F(G)O^p(G) < G$. Then $F(G)O^p(G)$ is supersolvable by (1). Thus G is solvable since $G/F(G)O^p(G)$ is a p -group, which contradicts (2). Hence (3) holds.

(4) *$\Phi(F(G)) = 1$ and $C_G(F(G)) = F(G)$.*

Assume that $F(G)$ has a Sylow p -subgroup P such that $\Phi(P) > 1$. By Lemma 2.6(3), $F^*(G/\Phi(P)) = F^*(G)/\Phi(P)$. So $G/\Phi(P)$ satisfies the hypothesis. The choice of G implies that $G/\Phi(P)$ is supersolvable. Consequently G is supersolvable. This contradiction shows that $F(G)$ is elementary abelian and so $\Phi(F(G)) = 1$. Then together with (3) and Lemma 2.6(2), we have $C_G(F(G)) = F(G)$.

(5) *There exists no normal subgroup of G contained in $F(G)$ with prime order.*

Assume that G has a normal subgroup N contained in $F(G)$ with $|N| = p$. Let $C = C_G(N)$. By (4), $F(G) \leq C$. If $C < G$, then C is supersolvable by (1). But since G/C is abelian, it follows that G is solvable, which contradicts (2). We may, therefore, assume $C = G$, that is, $N \leq Z(G)$. By Lemma 2.6(5), $F^*(G/N) = F^*(G)/N$. Hence G/N is supersolvable by Lemma 2.2 and the choice of G . It follows that G is supersolvable, a contradiction.

(6) *$\pi(\Phi(G)) = \pi(F(G))$.*

Suppose that (6) is false. Then $F(G)$ has a Sylow subgroup P such that $P \cap \Phi(G) = 1$. Similar as the proof in (2), we see that there exists at least one minimal normal subgroup of G contained

in P with prime order, which contradicts (5).

(7) $F(G)$ is a p -group and there exists exactly one minimal normal subgroup of G contained in $F(G)$, L say.

Suppose that $|F(G)|$ contains two different primes p and q . Let P and Q be the Sylow p -subgroup and the Sylow q -subgroup of $F(G)$. By (6), G has a minimal normal subgroup L contained in $P \cap \Phi(G)$. By [13, p.128], $F^*(G/L) = F(G/L)E(G/L)$ and $[F(G/L), E(G/L)] = 1$, where $E(G/L)$ is the layer of G/L . Denote $E(G/L) = E/L$. Since $F(G/L) = F(G)/L$ by [8, A, (9.3)(c)], $[Q, E] \leq Q \cap L = 1$. It follows from (4) that $F(G)E \leq C_G(Q)$. If $C_G(Q) < G$, then $C_G(Q)$ is supersolvable by (1). Hence $F^*(G/L) = F(G)/L$ by Lemma 2.6(1). The choice of G and Lemma 2.2 imply that G/L is supersolvable. Consequently G is supersolvable, a contradiction. Therefore $C_G(Q) = G$, which contradicts (5). Thus $F(G)$ is a p -group.

Now assume that X is another minimal normal subgroup of G contained in $F(G)$ different from L . Using the same symbol as above, then $[X, E] \leq X \cap L = 1$, and so $F(G)E \leq C_G(X)$. If $C_G(X) < G$, then $C_G(X)$ is supersolvable by (1). Similar as above, we see that G is supersolvable, a contradiction. Therefore $C_G(X) = G$, which contradicts (5). Thus L is the unique minimal normal subgroup of G contained in $F(G)$.

(8) *Final contradiction.*

By (4), there exists a maximal subgroup P_1 of $P = F(G)$ which does not contain L and $\Phi(P_1) = 1$. Then $(P_1)_G = 1$ by (7). Let T be a normal subgroup of G such that P_1T is S -quasinormal in G and $P_1 \cap T = 1$. Since $|P \cap T| = |P \cap T : P_1 \cap T| \leq |P : P_1| = p$, $P \cap T = 1$ by (5). Hence $P_1 = P_1(P \cap T) = P \cap P_1T$ is S -quasinormal in G by [1, 1.2.19]. Thus P_1 is normal in G by (3) and [1, 1.2.16]. The final contradiction completes the proof.

Corollary 3.2.1 [17, Theorem 3.1]. *Let G be a solvable group. If all maximal subgroups of the Sylow subgroups of $F(G)$ are normal in G , then G is supersolvable.*

Note that a subgroup H of G is called c -normal [20] in G if there exists a normal subgroup N of G such that $HN = G$ and $H \cap N \leq H_G$. Clearly a c -normal subgroup H is $S\Phi$ -embedded in G . But the following example shows that the converse is false.

Example 3.1. *Let $G = S_4$ and $H = \langle (1234) \rangle$. Clearly $H_G = 1$ and $\Phi(H) = \{1, (13)(24)\}$. It is easy to check that H is $S\Phi$ -embedded in G by taking the Klein 4-group K_4 . However H is not c -normal in G since G has no normal subgroup of order 6.*

Corollary 3.2.2 [14, Theorem 1]. *Assume that G is solvable and every maximal subgroup of Sylow subgroups of $F(G)$ is c -normal in G . Then G is supersolvable.*

Theorem 3.3. *Let E be a normal subgroup of G such that G/E is p -supersolvable, where p is a prime divisor of $|G|$. If every cyclic subgroup of E with order p or 4 (if $p = 2$) is $S\Phi$ -embedded in G , then G is p -supersolvable.*

P r o o f. Suppose that the theorem is false and let (G, E) be a counterexample such that $|G| + |E|$ is minimal. Note that \mathcal{U}^p denotes the class of p -supersolvable groups. Then:

(1) $p \mid |E|$ and $E = G^{\mathcal{U}^p}$ (It follows directly from the choice of (G, E)).

(2) G is a minimal non- p -supersolvable group and $O_{p'}(G) = 1$.

It follows from Lemma 2.2 (2), (4) and the choice of (G, E) .

(3) $G/\Phi(G)$ is a non-abelian simple group.

By (2) and Lemma 2.5, $G^{\mathcal{U}^p}\Phi(G)/\Phi(G)$ is the unique minimal normal subgroup of $G/\Phi(G)$. Let $N = G^{\mathcal{U}^p}\Phi(G)$. Then G/N is p -supersolvable. Hence $p \mid |N/\Phi(G)|$.

Assume that $N/\Phi(G)$ is abelian. Then N is solvable. It follows from (2) and [9, (3.4.2)] that $G^{\mathcal{U}^p}$ is a p -group and $G^{\mathcal{U}^p}/\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ is a non-cyclic G -chief factor with exponent p or 4 (if $G^{\mathcal{U}^p}/\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$

is a non-abelian 2-group). Take $x \in G^{\mathcal{U}^p} \setminus \Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ such that $\langle x \rangle \Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ is normal in some Sylow p -subgroup of G . Denote $H = \langle x \rangle$. Then H is of order p or 4. If H is normal in G , then $G^{\mathcal{U}^p} / \Phi(G^{\mathcal{U}^p}) = H\Phi(G^{\mathcal{U}^p}) / \Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ is cyclic of order p , a contradiction. Thus $H_G = 1$ or $H_G = \langle x^2 \rangle = \Phi(H)$ if $|H| = 4$. By the hypothesis, G has a normal subgroup T such that HT is S -quasinormal in G , $H_G \leq T$ and $(H \cap T) / H_G \leq \Phi(H / H_G)$. Obviously $H \cap T \leq \Phi(H)$ whether $H_G = 1$ or $H_G = \langle x^2 \rangle$. Since $G^{\mathcal{U}^p} / \Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ is a chief factor of G , $(T \cap G^{\mathcal{U}^p}) \Phi(G^{\mathcal{U}^p}) = G^{\mathcal{U}^p}$ or $\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$. In the case when $(T \cap G^{\mathcal{U}^p}) \Phi(G^{\mathcal{U}^p}) = G^{\mathcal{U}^p}$, we have that $H = H \cap T \leq \Phi(H)$, a contradiction. Hence $T \cap G^{\mathcal{U}^p} \leq \Phi(G^{\mathcal{U}^p})$, so $H\Phi(G^{\mathcal{U}^p}) = (HT \cap G^{\mathcal{U}^p}) \Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ is S -quasinormal in G by [1, 1.2.19]. But then $H\Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ is normal in G (see [1, 1.2.16]). Consequently $H\Phi(G^{\mathcal{U}^p}) = G^{\mathcal{U}^p}$ and so $G^{\mathcal{U}^p} / \Phi(G^{\mathcal{U}^p})$ is cyclic. This contradiction shows that $N / \Phi(G)$ is non-abelian. It follows from (2) that $G / \Phi(G) = N / \Phi(G)$ is a non-abelian simple group.

(4) $F(G) = \Phi(G) = O_p(G) = Z(G)$.

By (2) and (3), $F(G) = \Phi(G) = O_p(G) \geq Z(G)$. If $C = C_G(O_p(G)) < G$, then $C \leq \Phi(G)$ by (3). Let M be an arbitrary maximal subgroup of G . Then $O_p(G) = \Phi(G) \leq M = Z_{\mathcal{U}^p}(M)$ by (2), and so $O_p(G) \leq Z_{\mathcal{U}}(M)$. Hence $M / C_M(O_p(G)) = M / (M \cap C) = M / C$ is supersolvable by [12, VI, 9.8]. This shows that G / C is a minimal non-supersolvable group. Then G / C is solvable (see [18, (10.3.4)]) and so G is solvable, which contradicts (3). Therefore $C = G$.

(5) *Final contradiction.*

Note that if every element of order p or 4 belongs to $\Phi(G) = Z(G)$, then G is p -nilpotent by [12, IV, 5.5], and so G is p -supersolvable. Hence there exists an element x in G of order p or 4, which does not belong to $\Phi(G)$. Let $H = \langle x \rangle$. If H is normal in G , then $H\Phi(G) = G$ by (3), and so $G = \langle x \rangle$ is cyclic, which is impossible. Then $H_G = 1$ or $H_G = \langle x^2 \rangle = \Phi(H)$ (when $|H| = 4$). Let T be a normal subgroup of G such that HT is S -quasinormal in G , $H_G \leq T$ and $(H \cap T) / H_G \leq \Phi(H / H_G)$. Similar as above, we have that $H \cap T \leq \Phi(H)$. By (3), $T = G$ or $T \leq \Phi(G)$. If $T = G$, then $H = H \cap T \leq \Phi(H)$, a contradiction. Hence $T \leq \Phi(G)$. It follows from [1, 1.2.7(2) and 1.2.14(3)] that $HT\Phi(G) / \Phi(G) = H\Phi(G) / \Phi(G)$ is subnormal in $G / \Phi(G)$. Then $H\Phi(G) = G$ by (3) and the choice of x . Thus $G = \langle x \rangle$ is cyclic. This contradiction completes the proof.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.** Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010. 334 p.
2. **Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M., Skiba A. N.** On second maximal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2011. Vol. 215, no. 4. P. 705–714.
3. **Ballester-Bolinches A., Pedraza-Aguilera M. C.** On minimal subgroups of finite groups // Acta Math. Hungar. 1996. Vol. 73, no. 4. P. 335–342.
4. **Chen X., Guo W.** On weakly S -embedded and weakly τ -embedded subgroups // Sib. Math. J. 2013. Vol. 54, no. 5. P. 931–945.
5. **Cossey J., Stonehewer S.** Abelian quasinormal subgroups of finite p -groups // J. Algebra. 2011. Vol. 326, no. 1. P. 113–121.
6. **Cossey J., Stonehewer S.** On the rarity of quasinormal subgroups // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 2011. Vol. 125. P. 81–105.
7. **Deskins W. E.** On quasinormal subgroups of finite groups // Math. Z. 1963. Vol. 82. P. 125–132.
8. **Doerk K., Hawkes T.** Finite soluble groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1992. 891 p.
9. **Guo W.** The theory of classes of groups. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Science Press-Kluwer Acad. Publ., 2000. 258 p.
10. **Guo W., Skiba A. N.** Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups // J. Algebra. 2009. Vol. 321, no. 10. P. 2843–2860.
11. **Huang J.** On \mathcal{F}_s -quasinormal subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2010. Vol. 38, no. 11. P. 4063–4076.
12. **Huppert B.** Endliche Gruppen I. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1967. 793 p.
13. **Huppert B., Blackburn N.** Finite groups III. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1982. 454 p.

14. **Li D., Guo X.** The influence of c -normality of subgroups on the structure of finite groups II // *Comm. Algebra*. 1998. Vol. 26, no. 6. P. 1913–1922.
15. **Lukyanenko V. O., Skiba A. N.** On τ -quasinormal and weakly τ -quasinormal subgroups of finite groups // *Math. Sci. Res. J.* 2008. Vol. 12, no. 7. P. 243–257.
16. **Malinowska I. A.** Finite groups with sn -embedded or s -embedded subgroups // *Acta Math. Hungar.* 2012. Vol. 136, no.1–2. P. 76–89.
17. **Ramadan M.** Influence of normality on maximal subgroups of Sylow subgroups of a finite group // *Acta Math. Hungar.* 1992. Vol. 59, no. 1–2. P. 107–110.
18. **Robinson D. J. S.** A course in the theory of groups. Berlin; New York: Springer-Verlag, 1982. 499 p.
19. **Schmid P.** Subgroup permutable with all Sylow subgroups // *J. Algebra*. 1998. Vol. 207, no. 1. P. 285–293.
20. **Wang Y.** c -Normality of groups and its properties // *J. Algebra*. 1996. Vol. 180, no. 3. P. 954–965.

Li Zhang

Received December 10, 2015

Department of Mathematics, University of Science and Technology of China

Hefei, 230026, P.R. China

e-mail: zhang12@mail.ustc.edu.cn

Wenbin Guo

Department of Mathematics, University of Science and Technology of China

Hefei, 230026, P.R. China

e-mail: wbguo@ustc.edu.cn

Lijun Huo

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology

Chongqing, 400054, P.R. China

e-mail: huolj@cqut.edu.cn

СОДЕРЖАНИЕ

О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев. Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. II	3
Б. И. Ананьев. Оценивание эволюции случайного множества	14
Ю. И. Бердышев. Об оптимальном по быстродействию управлении обобщенной машиной Дубинса	26
Э. М. Вихтенко, Р. В. Намм. О методе двойственности для решения модельной задачи с трещиной	36
И. Б. Горшков. О гипотезе Томпсона для знакопеременных и симметрических групп степени, большей 1361	44
А. Р. Данилин. Полное асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления на отрезке с геометрическими ограничениями	52
А. Р. Данилин, О. О. Коврижных. Асимптотика решения одной задачи о быстродействии с малым параметром	61
О. А. Дубина, С. Г. Колесников, Н. С. Манагарова. Строгая вещественность и рациональность групп унитарных матриц порядка ≤ 8 над полями характеристики 2	71
А. А. Ершов, М. И. Русанова. Асимптотика многомерных интегралов, сингулярно зависящих от малого параметра	84
С. В. Захаров. Асимптотическое вычисление распределения тепла на плоскости	93
А. В. Ильев. Разрешимость универсальных теорий и аксиоматизируемость наследственных классов графов	100
А. Л. Казаков, Св. С. Орлов. О некоторых точных решениях нелинейного уравнения теплопроводности	112
М. А. Калашникова, Г. А. Курина. Асимптотическое решение линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены	124
А. А. Ковалевский. О сходимости решений вариационных задач с двусторонними препятствиями в переменных областях	140
А. С. Кондратьев, Н. В. Маслова, Д. О. Ревин. Критерий пронормальности дополнений к абелевым нормальным подгруппам	153
Е. А. Коновальчик, К. В. Костоусов. Симметрические 2-расширения 2-мерной решетки. I	159
С. А. Кордюкова, Л. А. Калякин. О двойном погранслое в нелинейной краевой задаче	180

Е. Ф. Леликова. Об асимптотике решения эллиптического уравнения с малым параметром в окрестности точки перегиба границы.....	197
А. А. Махнев, М. С. Нирова, Д. В. Падучих. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{204, 175, 48, 1; 1, 12, 175, 204\}$	212
А. А. Махнев, Д. В. Падучих. Небольшие AT_4 -графы и отвечающие им сильно регулярные подграфы.....	220
А. В. Митянина. О $K_{1,3}$ -свободных точных графах Деза.....	231
А. В. Пролубников. Сведение задачи проверки изоморфизма графов к задаче проверки равенства полиномов от n переменных.....	235
С. М. Рацеев, О. И. Череватенко. Коразмерности многообразий алгебр Пуассона с лиево нильпотентными коммутантами.....	241
Л. И. Рубина, О. Н. Ульянов. О некоторых особенностях системы уравнений Навье — Стокса.....	245
А. И. Созутов, И. О. Александрова. О графах с вершинами двух цветов и группах с 3-транспозициями.....	257
В. П. Танана, А. И. Сидикова. Об оценке погрешности приближенного решения, вызванной дискретизацией интегрального уравнения первого рода.....	263
Д. А. Турсунов. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота.....	271
А. А. Успенский, П. Д. Лебедев. Построение сингулярных кривых для обобщенных решений уравнений типа эйконала в условиях разрыва кривизны границы краевого множества.....	282
А. Г. Ченцов. Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера.....	294
L. Zhang, W. Guo, L. Huo. On $S\Phi$ -embedded subgroups of finite groups.....	310

ПРАВИЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РУКОПИСЕЙ

В журнале “Труды Института математики и механики УрО РАН” публикуются *оригинальные работы* теоретического характера по современным разделам математики и механики.

“Труды Института математики и механики УрО РАН” являются изданием широкого профиля, поэтому редколлегия рекомендует авторам в начале статьи изложить постановку задачи и дать определения основных понятий, используемых в работе. Новые результаты должны быть ясно сформулированы, математические утверждения должны быть обоснованы. В доказательствах нельзя использовать результаты из неопубликованных или принятых в печать статей. В “Труды Института математики и механики” не принимаются методические статьи. По заказу редакции могут публиковаться статьи обзорного характера. Объем статьи, как правило, не должен превышать 16 страниц (в формате стилевого файла “Трудов Института математики и механики”).

Для решения вопроса о целесообразности публикации в “Трудах Института математики и механики” редакционная коллегия организует рецензирование представленных статей. В настоящее время существует также дорецензионная проверка статей, во время которой статьи проверяются на оригинальность и просматривается структура статей на соответствие правилам журнала.

По решению редколлегии статья может быть включена в переводной номер “Трудов Института математики и механики”, который выходит на английском языке в издательстве Pleiades Publishing, Ltd; МАИК “НАУКА/INTERPERIODICA” под названием “Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics (Trudy Instituta Matematiki I Mekhaniki)” как приложение к “Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. Supplement.”

Автор представляет в редакцию (на адрес trudy@imm.uran.ru) электронный вариант статьи (формат ps или pdf).

К статье должны быть приложены:

- Сопроводительное письмо от имени организации следующего содержания: Организация не возражает против опубликования статьи в открытой печати автора (ФИО, должность, звание). На письме должна стоять печать организации.
- Лист с индексами статьи по Универсальной десятичной классификации (УДК), английское название статьи, аннотация и ключевые слова на русском и английском языках.
- Лист со сведениями об авторе (на русском и английском языке) — ФИО, место работы, почтовый адрес, а также e-mail и телефон.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Авторы заключают с Учреждением Российской академии наук Институтом математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН авторский договор, текст которого размещен на сайте ИММ УрО РАН.

Присланные в журнал рукописи статей не возвращаются.

Правила оформления рукописей:

- Текст статьи должен быть набран в LATEX2 ϵ в соответствии со стилевым файлом и рекомендациями журнала, размещенными на веб-сайте ИММ УрО РАН.
- Представляемая в “Труды Института математики и механики УрО РАН” статья должна начинаться с индекса УДК, названия работы, фамилий и инициалов авторов, аннотации на русском языке, ключевых слов на русском и английском языках. Аннотация должна быть содержательной, не менее 300 знаков, лучше 500–600 знаков. В аннотации не допускаются ссылки на список цитированной литературы и нумерация формул.
- Список цитированной литературы оформляется по ГОСТу 7.05-2008, очередность названий — по алфавиту либо в соответствии с порядком ссылок в тексте работы.
- Статьи, содержащие рисунки, принимаются к публикации только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 22

№ 1

2016

Учредитель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
Уральского отделения Российской академии наук

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере массовых коммуникаций, связи и охраны культурного наследия.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-30115 от 31 октября 2007 г.

СМИ перерегистрировано в связи с уточнением названия;
в свидетельство о регистрации СМИ внесены изменения
в связи с переименованием учредителя.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-35946 от 31 марта 2009 г.

ISSN 0134-4889

Редактор Н. М. Юркова

TeX-редакторы Г. Ф. Корнилова, Н. Н. Моргунова

Оригинал-макет подготовлен в РИО ИММ УрО РАН

Подписано в печать 24.02.16. Формат $60 \times 84^{1/8}$. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 37,4. Уч.-изд. л. 32,1 Тираж 200 экз.

Адрес редакции: 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
Институт математики и механики УрО РАН
Редакция журнала “Труды Института математики и механики УрО РАН”
тел. (343) 375-34-58
e-mail: trudy@imm.uran.ru
<http://journal.imm.uran.ru>

Отпечатано с готовых диапозитивов в типографии
ООО “Издательство Учебно-методический центр УПИ”
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 17, офис 226